



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Comportamiento de un fluido calentado de  
manera no uniforme

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:

VIRIDIANA PONCE JUÁREZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. GERARDO RUÍZ CHAVARRÍA



Ciudad Universitaria, CD. MX. 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Con amor a mi hijo Miguel Angel González Ponce*



# *Agradecimientos*

Agradezco de manera especial a mi director de tesis, Dr. Gerardo Ruiz Chavarría, por el apoyo para éste último paso para terminar mi carrera, además de la paciencia y el tiempo que invirtió para explicarme cada uno de los temas que se me dificultaba entender.

A mis sinodales, la Dra. Susana Orozco Segovia, el Dr. Abraham Medina Ovando, al M. en C. Sergio Hernández Zapata y a la profesora Margarita Sánchez y Sánchez por la revisión, comentarios y sugerencias que enriquecieron esta tesis.

A mi madre Juana Gloria Ponce Juárez por todo su esfuerzo para irse a trabajar y darme una educación, por su tiempo que invirtió para ayudarme a cuidar a mi hijo para poder terminar la universidad. A mis abuelitos Gloria Juárez Romero y José Guadalupe Ponce Torres por sus enseñanzas y valores que me inculcaron durante mi vida.

Y sobre todo a mi hijo Miguel Angel González Ponce por su paciencia y su compañía en esta etapa de mi vida.

A mis amigos de la carrera, en especial a Luis Alejandro Urizar Valle y José Antonio Trejo por el apoyo y motivación para seguir adelante, por esas charlas por la noche en el Taller de Fluidos mientras terminábamos nuestros pendientes de escuela.

No puedo dejar de agradecer a mis tíos y primos que me ayudaron en algún momento de la carrera...

Agradezco el apoyo a la DGAPA-UNAM por el apoyo para la realización de esta tesis bajo los proyectos PAPIIT IN- 114218 "Vorticidad y ondas (internas y de superficie) en dinámica de fluidos" e IN-113621 "Transporte de partículas, convección y vorticidad".



# Indice

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Resumen</b>	<b>9</b>
<b>1. Marco Teórico</b>	<b>11</b>
1.1. Radiación Solar . . . . .	12
1.1.1. Emisión de radiación solar . . . . .	12
1.1.2. Dirección de la radiación del haz . . . . .	14
1.2. Radiación solar en México . . . . .	17
1.3. Principios de la transferencia de calor . . . . .	18
1.3.1. Conducción . . . . .	18
1.3.2. Convección . . . . .	19
1.3.3. Radiación . . . . .	20
1.4. Calentadores solares y sus diferencias . . . . .	20
1.4.1. Propiedades de los materiales . . . . .	20
1.4.2. Eficiencia de un calentador solar . . . . .	21
1.4.3. Diferencias entre calentadores solares . . . . .	23
1.4.4. Diagrama de trazado de rayos . . . . .	24
1.4.5. Aplicaciones y costos de un calentador solar. . . . .	25
1.5. Fundamentos de la dinámica de fluidos . . . . .	26
1.5.1. Ecuación de continuidad . . . . .	26
1.5.2. Ecuación de Navier-Stokes . . . . .	27
1.6. Flujo en tuberías . . . . .	29
1.6.1. Flujo laminar y turbulento . . . . .	30
1.6.2. Números adimensionales . . . . .	31
1.6.3. Caída de presión en el interior de un tubo . . . . .	34
1.6.4. Perfil de velocidad a la entrada de un tubo . . . . .	35
<b>2. Simulación numérica</b>	<b>37</b>
2.1. Adimensionalización de la ecuación de Navier- Stokes . . . . .	37
2.2. Adimensionalización de la Ecuación de Calor . . . . .	40
2.3. Condiciones de Frontera y valores iniciales . . . . .	41
2.4. Método Espectral de Fourier . . . . .	42
2.5. Discretización de las derivadas . . . . .	42
2.6. Método de Proyección . . . . .	43
2.7. Mallado . . . . .	44



2.8. Potencia angular . . . . .	44
2.9. Trayectoria de las partículas y cambio de temperatura. . . . .	47
<b>3. Resultados y discusión para una distribución senoidal</b>	<b>49</b>
3.1. Campo de velocidades y perfil de temperatura . . . . .	49
3.2. Trayectorias de las partículas . . . . .	60
3.3. Cambio de Temperatura a lo largo de la trayectoria. . . . .	63
3.4. Caída de Presión . . . . .	68
<b>4. Resultados y discusión para un concentrador parabólico</b>	<b>73</b>
4.1. Campo de velocidades y perfil de temperatura . . . . .	73
4.2. Trayectorias de las partículas . . . . .	83
4.3. Cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria. . . . .	87
4.4. Caída de Presión . . . . .	91
<b>5. Resultados y discusión para un concentrador anidólico</b>	<b>95</b>
5.1. Campo de velocidades y perfil de temperatura . . . . .	95
5.2. Trayectorias de las partículas . . . . .	99
5.3. Cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria. . . . .	101
5.4. Caída de presión . . . . .	104
<b>6. Pérdidas de calor</b>	<b>107</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>113</b>

# Resumen

En esta tesis se presenta el comportamiento de un fluido calentado de manera no uniforme por una distribución de potencia senoidal y por dos tipos de concentradores, uno en forma de parábola y otro anidólico. Para la primera parte se desprecian las pérdidas de calor por radiación y convección y se hace una comparación sobre diferentes resultados como: el campo de velocidades, la deformación del perfil parabólico de velocidades en el eje  $z$ , el comportamiento y cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria de las partículas, el cambio de temperatura del flujo en la parte inferior y superior del tubo y la caída de presión.

Para cada caso se usaron diferentes números de Reynolds y Grashof para hacer una comparación de cómo influyen estos números adimensionales en el comportamiento y cambio de temperatura del fluido.

También se obtuvieron resultados de cómo influyen las pérdidas de calor por conducción y radiación en el calentamiento de un fluido. Como las pérdidas son muy pequeñas se tuvo que aumentar el factor de pérdidas de calor para que el cambio de temperatura del fluido fuera más notable.

Finalmente, se obtuvo que el fluido se calienta de mejor manera ignorando las pérdidas de calor por radiación y conducción sin embargo, en la vida diaria es muy importante tener en cuenta los factores que influyen en el calentamiento de un fluido.



# Capítulo 1

## Marco Teórico

Para entrar en contexto con los objetivos de esta tesis consideremos que el Sol es una esfera de materia gaseosa intensamente caliente con un diámetro de  $1,39 \times 10^9$  m y está a  $1,495 \times 10^{11}$  m de la Tierra (figura 1.1).

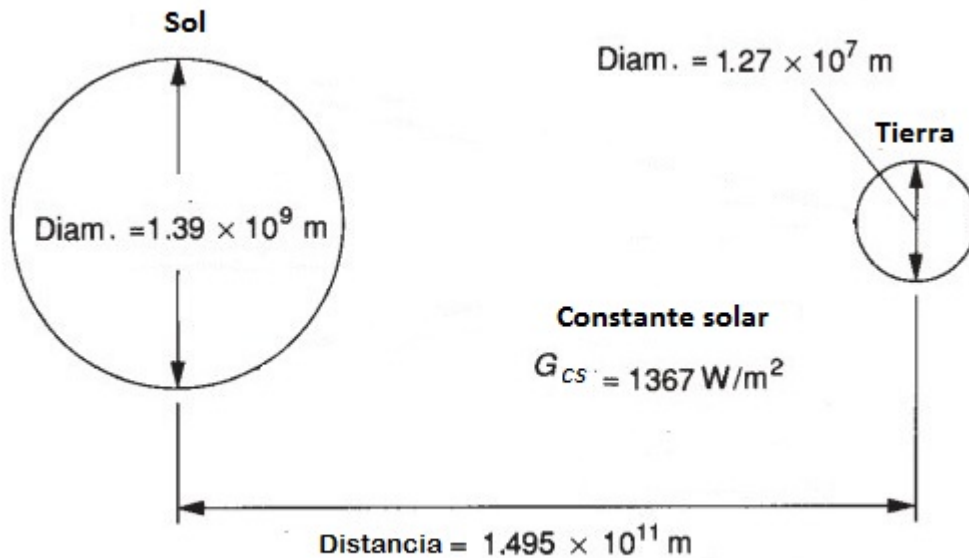


Figura 1.1: Relación entre la Tierra y el Sol [10]

Visto desde la Tierra, el Sol gira sobre su eje aproximadamente una vez cada 4 semanas. Sin embargo, no gira como un cuerpo sólido; el ecuador tarda unos 27 días y las regiones polares tardan unos 30 días en cada rotación. El Sol tiene una temperatura efectiva de cuerpo negro de  $5785 \text{ K}$  ( $5511,85^\circ \text{C}$ ). La temperatura en las regiones interiores se estima que va desde  $8 \times 10^6$  a  $40 \times 10^6 \text{ K}$ . [20]

## 1.1. Radiación Solar

Se le conoce como radiación al proceso físico por el cual se transmite energía en forma de ondas electromagnéticas y que no requieren de un medio de propagación. [16]

Debe considerarse que existen variaciones en la radiación fuera de la Tierra debido a actividades de manchas solares. [26]

La radiación que llega a una superficie determinada depende de la distancia, ya que no es la misma radiación que llega a Plutón que a nuestro planeta Tierra. En la parte alta de la atmósfera de la Tierra llega aproximadamente una radiación de  $1367 \frac{W}{m^2}$  donde este valor se le conoce como "constante solar"[10], una parte de ésta radiación es emitida al espacio en forma de radiación infrarroja, y otra parte es reflejada por las nubes y por el suelo.

Entonces, podemos decir que la radiación que llega a la superficie de la Tierra depende de diferentes factores: la emisión de radiación solar, la distancia entre el Sol y la Tierra, al ángulo de altitud solar.

### 1.1.1. Emisión de radiación solar

La energía total que emite el Sol es la suma de todas las energías  $E_\lambda(\lambda)$  a diferentes longitudes de onda:

$$\sum_{\Delta\lambda} E_\lambda(\lambda)\Delta\lambda$$

donde  $E_\lambda$  es la potencia emisiva espectral dado por la ley de Planck, para un cuerpo negro a cualquier longitud de onda y temperatura tenemos:

$$E_\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]} \quad (1.1)$$

en donde  $C_1 = 2\pi hc^2$  y  $C_2 = \frac{hc}{k}$  con  $h$  la constante de Planck,  $c$  la velocidad de la luz y  $k$  la constante de Boltzmann. Tomando  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  la potencia emisiva total superficial es:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]}$$

realizando un cambio de variable  $x = \frac{C_2}{\lambda T}$  la ecuación anterior queda como:

$$E = \frac{-C_1 T^4}{C_2^4} \int_{x(0)}^{x(\infty)} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (1.2)$$

al evaluar numéricamente la integral y sustituir los valores de las constantes  $C_1 = 3,7470 \times 10^{-16} Wm^2$ ,  $C_2 = 1,4397 \times 10^{-2} mK$  llegamos a que  $E = 5,669 \times 10^{-8} T^4$ . En donde podemos asignar a  $\sigma = 5,669 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$  (la constante de Stefan-Boltzman). Como un cuerpo negro, el Sol emite radiación electromagnética de acuerdo a la ley de Stefan-Boltzman, con el valor de su temperatura 5785K se tiene que la potencia emitida por el Sol por metro cuadrado es la energía total emitida por un cuerpo negro, la cual presenta un valor de  $6,35 \times 10^7 W/m^2$ .

A partir del valor de la energía y el radio del Sol  $R_s$  ( $6,95 \times 10^8 m$ ), obtenemos el área  $A = 4\pi R_s^2 = 6,1 \times 10^{18} m^2$ , donde la luminosidad del Sol es de  $3,873 \times 10^{26} W$ .

Para conocer la longitud de onda a la que se da el máximo de intensidad de radiación de acuerdo a la ec. 1.1 hay que imponer la siguiente condición:

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = 0$$

entonces

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)} \right] = 0$$

de donde:

$$C_1 - \frac{\lambda^5 \left[ \frac{C_2}{T} \left( \frac{-1}{\lambda^2} \right) e^{C_2/\lambda T} \right] + (e^{C_2/\lambda T} - 1) 5\lambda^4}{\lambda^{10} [e^{C_2/\lambda T} - 1]^2} = 0$$

Por lo tanto,

$$-\left[ \lambda^5 \frac{C_2}{T} \left( \frac{-1}{\lambda^2} \right) e^{C_2/\lambda T} + (e^{C_2/\lambda T} - 1) 5\lambda^4 \right] = 0$$

simplificando la ecuación anterior se obtiene que:

$$\frac{C_2}{T} e^{C_2/\lambda T} - 5e^{C_2/\lambda T} + 5 = 0$$

si tomamos  $x = \frac{C_2}{\lambda T}$ , la ecuación anterior queda como:

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} - 5 = 0 \quad (1.3)$$

Al resolver la ec. 1.3 por el método de Newton, se obtiene que  $x = 4,9651$ . En la figura 1.2 podemos observar la irradiancia medida en la parte superior de la atmósfera terrestre. De acuerdo a la ley de desplazamiento de Wien, la longitud de onda de la emisión de radiación máxima ( $\lambda_{max}$ ) es inversamente proporcional a la temperatura absoluta del cuerpo radiante:

$$\lambda_{max} = \frac{0,002897[mK]}{T[K]} \quad (1.4)$$

tomando a  $T = 5785[K]$  tenemos:

$$\lambda_{max} = \frac{0,002897[mK]}{5785[K]} = 5 \times 10^7[m] = 500[nm] \quad (1.5)$$

Por lo tanto la emisión de la radiación solar máxima se da para una longitud de onda de 500nm.[4]

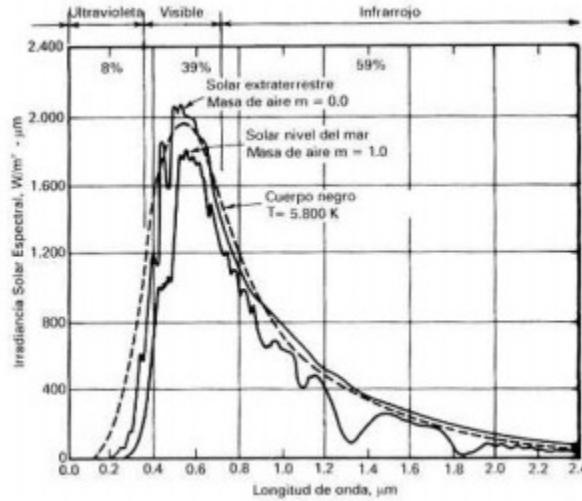


Figura 1.2: Irradiancia espectral del Sol y de un cuerpo negro. La línea punteada corresponde a un cuerpo negro a una temperatura de 5800K y la curva con variaciones menos pronunciada corresponde a la irradiancia en la superficie terrestre.[16]

### 1.1.2. Dirección de la radiación del haz

Las relaciones geométricas entre un plano de cualquier orientación particular en relación con la Tierra en cualquier momento (si ese plano es fijo o en movimiento con respecto a la Tierra) y la radiación solar del haz entrante es decir, la posición del Sol en relación con ese plano, puede describirse en términos de varios ángulos.[1]

Estos ángulos se indican en la figura 1.3 (se toman varias convenciones de signos para los ángulos).

$\beta$  *Pendiente*, el ángulo entre el plano de la superficie en cuestión y la horizontal;  $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ , si  $\beta > 90^\circ$  significa que la superficie tiene un componente que mira hacia abajo.

$\gamma$  *Ángulo azimutal de superficie*, la desviación de la proyección en un plano horizontal del normal a la superficie desde el meridiano local, con cero hacia el sur, este negativo y oeste positivo;  $-180^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ .

$\omega$  *Ángulo horario*, el desplazamiento angular del Sol al este u oeste del meridiano local debido a la rotación de la Tierra sobre su eje a  $15^\circ$  por hora (en la mañana su valor es negativo y en la tarde positivo).

$\theta$  *Ángulo de incidencia*, el ángulo entre la radiación del haz sobre una superficie y la normal a esa superficie.

Se definen ángulos adicionales que describen la posición del Sol en el cielo:

$\theta_z$  *Ángulo cenital*, el ángulo entre la vertical y la línea al Sol es decir, el ángulo de

incidencia de la radiación del haz sobre una superficie horizontal.

$\alpha_s$  *Ángulo de altitud solar*, el ángulo entre la horizontal y la línea al Sol es decir, el complemento del ángulo cenital.

$\gamma_s$  *Ángulo azimutal solar*, el desplazamiento angular desde el sur de la proyección del haz de radiación en el plano horizontal, que se muestra en la figura 1.3. Desplazamientos al este del sur son negativos y al oeste del sur son positivas.

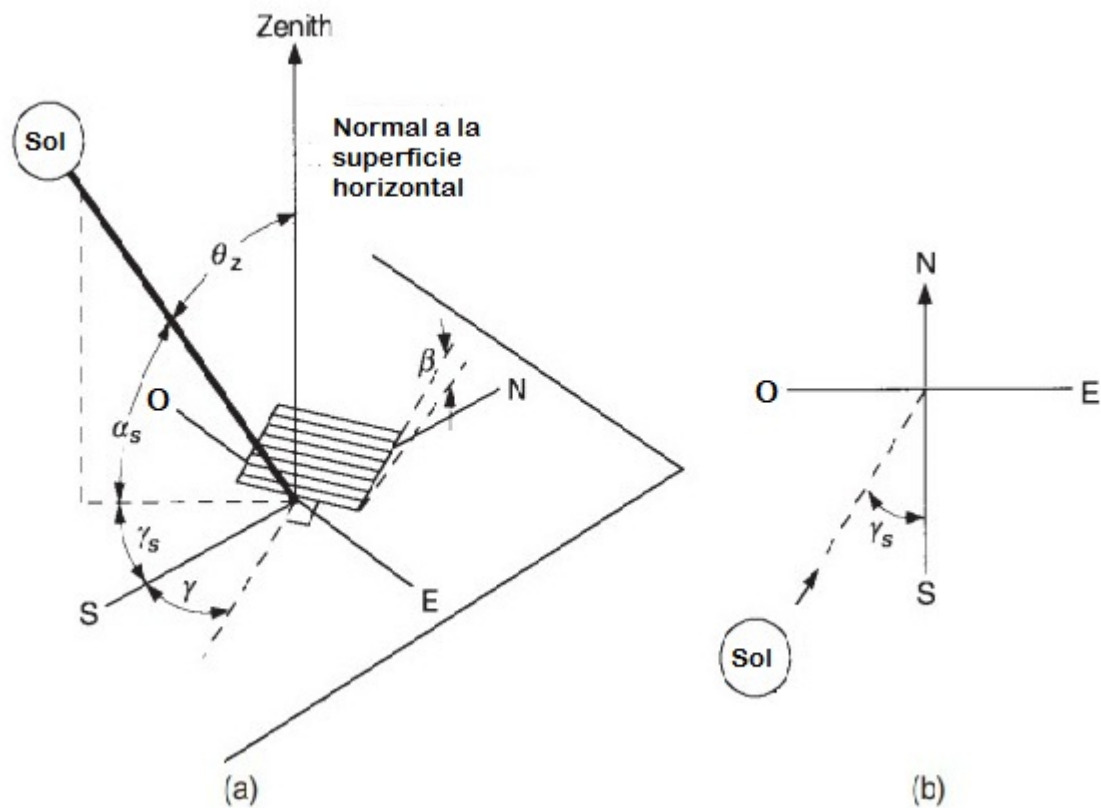


Figura 1.3: (a) Ángulo cenital, pendiente, ángulo azimutal de superficie, ángulo azimutal solar y ángulo de altitud solar respecto a una superficie. (b) Plano visto desde el ángulo azimutal solar. [8]



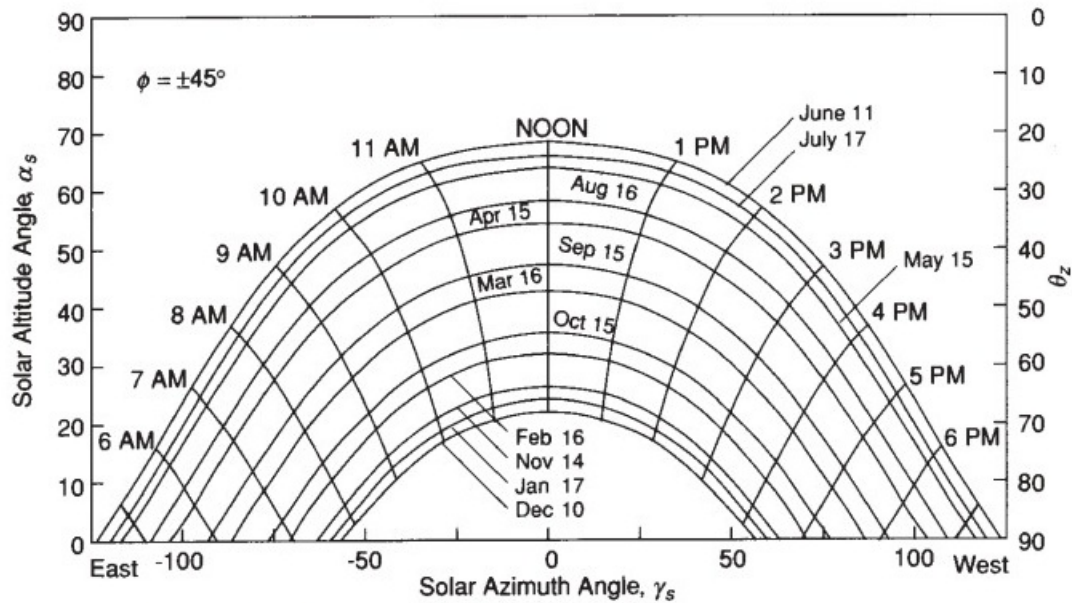


Figura 1.4: Gráfico de posición solar para una latitud de  $\pm 45^\circ$  respecto al ángulo de altitud solar y el ángulo azimutal solar. Las fechas mostradas son para el hemisferio norte. [15]

Recordemos que el movimiento de la Tierra alrededor del Sol describe una órbita elíptica debido a la excentricidad orbital la cual tiene un valor de 0.0167. Esta excentricidad se debe al Sol y en menor medida a la atracción gravitacional de otros planetas. Entonces, al tener una trayectoria elíptica entre el sistema Sol-Tierra se tienen variaciones de radiación sobre la superficie terrestre.

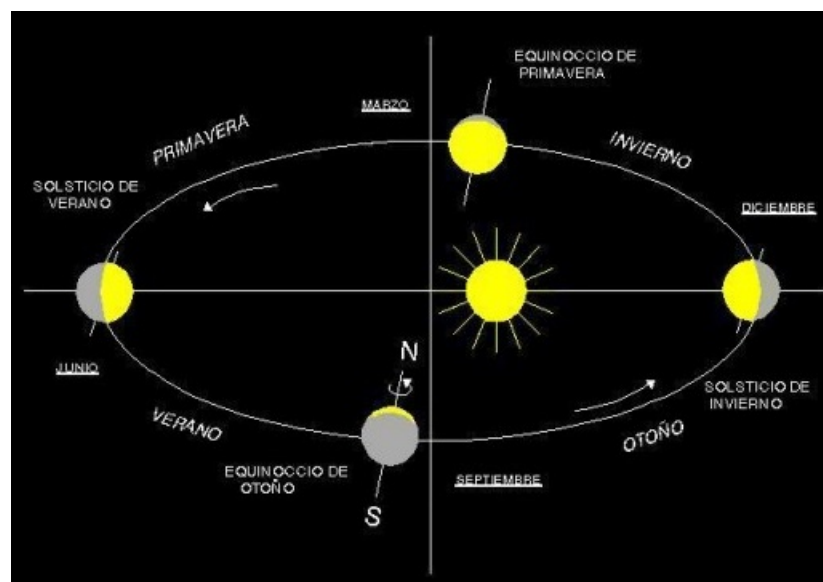


Figura 1.5: Trayectoria elíptica de la Tierra respecto al Sol. [13]

## 1.2. Radiación solar en México

La energía de la radiación solar que llega a una superficie determinada en un instante dado se le conoce como *Irradiancia* y se mide en unidades de watts por metro cuadrado [ $W/m^2$ ]. La irradiancia es un valor distinto a cada instante es decir, se espera que en un día despejado la irradiancia sea diferente a cada hora del día en otras palabras, que la irradiancia que se tiene a las 10:00 AM es diferente a la de la 1:00 PM.

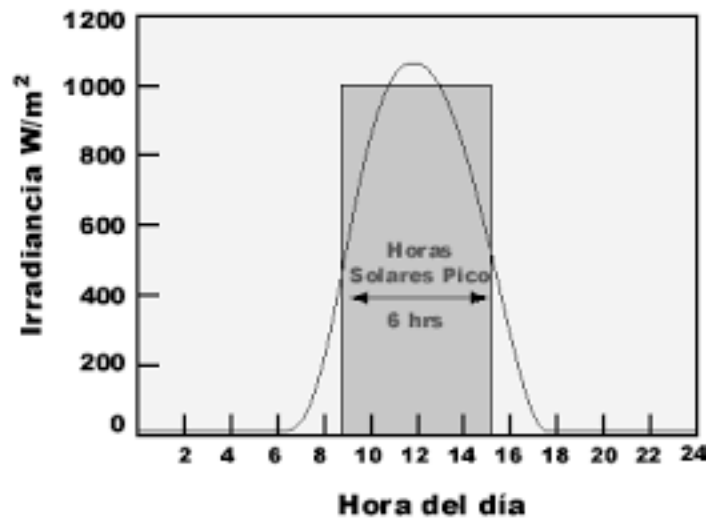


Figura 1.6: Irradiancia a diferentes horas del día.[17]

A la cantidad de irradiación recibida en un calentador solar durante un tiempo de una hora, se le llama horas solares-pico.

Las horas solares-pico de un lugar determinado, se obtienen al dividir el valor de la irradiación diaria (irradiación recibida durante todo el día) en [ $Wh/m^2$ ], entre 1000 [ $W/m^2$ ] (irradiación que llega a la Tierra aproximadamente). El resultado será el número de horas solares-pico en que el calentador estuvo recibiendo la irradiancia. Por ejemplo, si la irradiación diaria de un lugar específico fue de 4650 [ $Wh/m^2$ ], al dividir entre la irradiancia pico (1000  $W/m^2$ ), obtenemos un resultado de 4.65 horas-pico para ese lugar en ese día en particular es decir, el equivalente a una irradiancia solar de 1000 [ $W/m^2$ ] recibida de manera continua durante 4.65 horas (4 horas y 39 minutos).

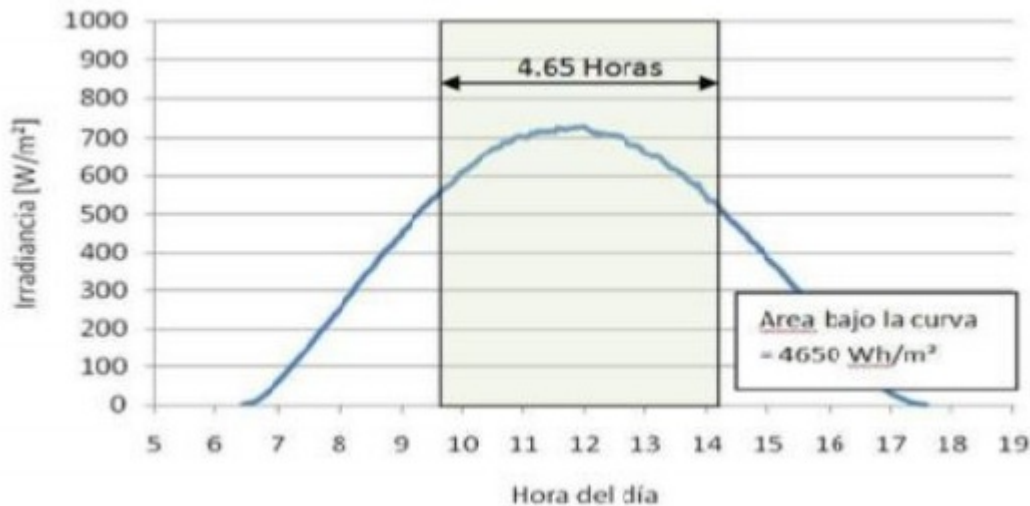


Figura 1.7: Horas solares-pico para un área bajo la curva de  $4650 Wh/m^2$  [17]

La irradiancia en la Ciudad de México es aproximadamente de  $800 W/m^2$ , esta irradiación depende de la hora y de las condiciones del día, si tomamos como ejemplo un área de  $100m^2$  en un día tenemos una energía de  $1,980 \times 10^9 J$  con 550kW-h cada día.[21]  
Un mexicano consume aproximadamente 54 kW-h cada día. [14]

### 1.3. Principios de la transferencia de calor

#### 1.3.1. Conducción

La conducción es el mecanismo por el cual el calor se transmite de un medio sólido, líquido o gas a otro que este en contacto físico. Utilizando la ley de Fourier de la conducción tenemos:

$$q_x = -\frac{kAdT}{dx} \quad (1.6)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica del material,  $A$  es el área por la cual se transmite y  $dT/dx$  es el gradiente de temperatura en una sola dirección y el signo menos debido a que es en sentido contrario al gradiente.

Si la transferencia de calor ocurre en mas direcciones tenemos:

$$\bar{q} = -k\nabla T \quad (1.7)$$

donde  $\bar{q}$  es la transferencia de calor por unidad de área.

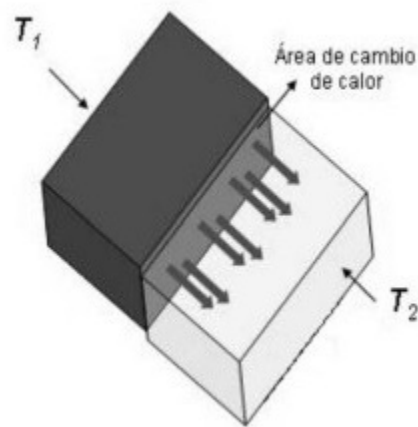


Figura 1.8: Transferencia de calor por conducción.[5]

### 1.3.2. Convección

Éste fenómeno ocurre únicamente en gases y líquidos y si estos son obligados a moverse por una fuerza externa se le llama convección forzada. Si el movimiento de las partículas se da por una diferencia de densidades se le llama convección natural.

La rapidez de la transferencia de calor por convección es de la siguiente manera:

$$q = h_c A \Delta T \quad (1.8)$$

Particularmente nos va a interesar el caso en que la transferencia de calor por convección en un fluido en movimiento esta en contacto con una superficie sólida que se encuentran a distinta temperatura entonces la diferencia de temperatura de la superficie y el líquido es  $\Delta T = T_s - T_f$ , con  $h_c$  el coeficiente de transferencia de calor por convección y  $A$  es el área de la superficie.

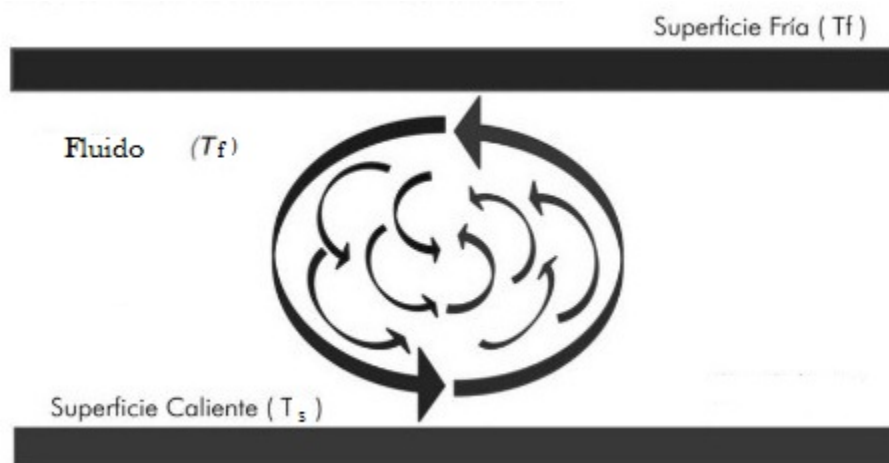


Figura 1.9: Transferencia de calor por convección. [5]

### 1.3.3. Radiación

La radiación es la emisión, propagación y transferencia de energía en forma de ondas electromagnéticas. Cuando éstas llegan a un objeto son absorbidas y su energía es transformada en calor. Cabe señalar, que cuando un objeto tiene una diferencia de temperatura, éste emite radiación, ocasionando pérdidas de calor.

El flujo de energía emitida por este mecanismo se da de la siguiente manera:

$$E = \epsilon\sigma T^4 \quad (1.9)$$

donde  $E$  es la energía emitida por unidad de tiempo y superficie,  $\epsilon$  es la emisividad del objeto,  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzman y  $T$  es la temperatura absoluta del objeto. Éste mecanismo es el único que no requiere de un medio de propagación, pues las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío.

## 1.4. Calentadores solares y sus diferencias

Un calentador solar es un dispositivo que capta la radiación solar y la convierte en energía útil. Existen diferentes tipos de calentadores solares, éstos dependen de los materiales con los cuales están contruidos y de la forma en la que captan la radiación, pero todos funcionan bajo el mismo principio que consiste en reflejar los rayos del Sol y dirigirlos hacia el absorbedor (tubo) y por medio de los fenómenos de transferencia de calor (conducción, radiación y convección) el fluido que circula por el absorbedor tiende a aumentar su temperatura después de cierto tiempo.

### 1.4.1. Propiedades de los materiales

Recordemos que la irradiación que llega a una superficie se refleja, transmite y absorbe (transmitancia  $\tau$ , reflectancia  $\rho$  y absorbancia  $\alpha$ ).

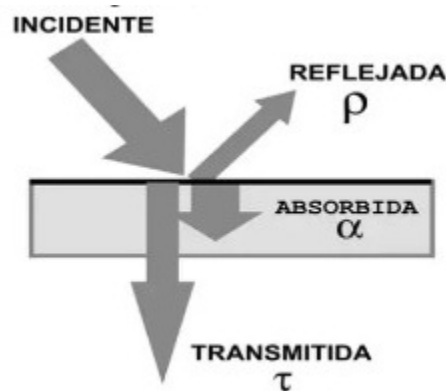


Figura 1.10: Irradiación incidente transmitida, reflejada y absorbida para una superficie. [5]

En otras palabras, por la Ley de Conservación de la Energía tenemos:

$$\text{Energía recibida} = \{\text{Energía transmitida}\} + \{\text{Energía reflejada}\} + \{\text{Energía absorbida}\}$$

La absorbanza se puede escribir como:

$$\alpha = \frac{G_{abs}}{G_{total}} \quad (1.10)$$

La reflectancia con:

$$\rho = \frac{G_{ref}}{G_{total}} \quad (1.11)$$

y de igual manera la transmitancia está dada como:

$$\tau = \frac{G_{tra}}{G_{total}} \quad (1.12)$$

donde  $G$  es la irradiancia.

De acuerdo a la figura 1.10 podemos decir que el balance de energía es de la siguiente manera,

$$\alpha + \tau + \rho = 1 \quad (1.13)$$

### 1.4.2. Eficiencia de un calentador solar

Para saber el rendimiento de un calentador se tiene que medir la temperatura de inicio y de salida del flujo que pasa a través del tubo, si tenemos:

$$Q = mC_p(T_o - T_i) \quad (1.14)$$

la eficiencia queda como:

$$\eta_E = \frac{\text{energía útil disponible}}{\text{energía solar recibida}} = \frac{Q}{GA} \quad (1.15)$$

donde  $G$  es la irradiación solar acumulada en un día y  $A$  es el área del absorbedor (ver figura 1.11).[18]

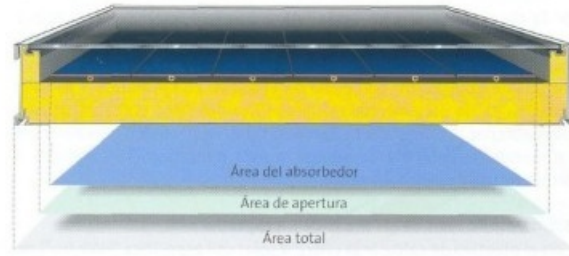


Figura 1.11: Áreas características de un calentador. [3]

Si tomamos a la energía útil disponible en el calentador como:

$$Q = Q_{abs} - Q_{perdido} \quad (1.16)$$

con

$$Q_{abs} = \tau_c \alpha_p G A \quad (1.17)$$

donde  $\tau_c$  es la transmitancia de la cobertura y  $\alpha_p$  es la absorbancia del calentador.

Tomando al calentador como un único sistema también existen pérdidas de calor a través de él, donde el calor perdido es la suma de pérdidas de calor de la parte superior, base y lateral es decir,

$$Q_{perdido} = Q_{lateral} + Q_{base} + Q_{superficie} \quad (1.18)$$

éstas pérdidas pueden darse por medio del fenómeno de conducción y radiación.

Re-escribiendo las pérdidas de calor (ec. 1.18) de la siguiente forma:

$$Q_{perdido} = U_L A (T_p - T_{amb}) \quad (1.19)$$

donde  $U_L$  es el coeficiente total de pérdidas de calor del calentador solar y  $T_p$  es su temperatura.

Ahora sustituyendo las ecuaciones 1.17 y 1.19 en la ec. 1.16 tenemos:

$$Q = A[\tau_c \alpha_p G - U_L (T_p - T_{amb})] \quad (1.20)$$

sustituyendo la ec. 1.20 en 1.15 obtenemos:

$$\eta = \tau_c \alpha_p - U_L \frac{T_p - T_{amb}}{G} \quad (1.21)$$

Como no se puede medir con exactitud la temperatura  $T_p$  se utiliza la temperatura del fluido de entrada ( $T_e$ ) y se usa un factor de Remoción de calor  $F_R$  (relación entre el calor absorbido del calentador y el calor de la superficie del absorbedor si estuviese a la temperatura del fluido de entrada), si la temperatura del tubo y el fluido fueran iguales, este factor tiene el valor de 1.

Entonces la ecuación de la eficiencia del calentador solar es:

$$\eta = F_R \tau_c \alpha_p - F_R U_L \frac{T_e - T_{amb}}{G} \quad (1.22)$$

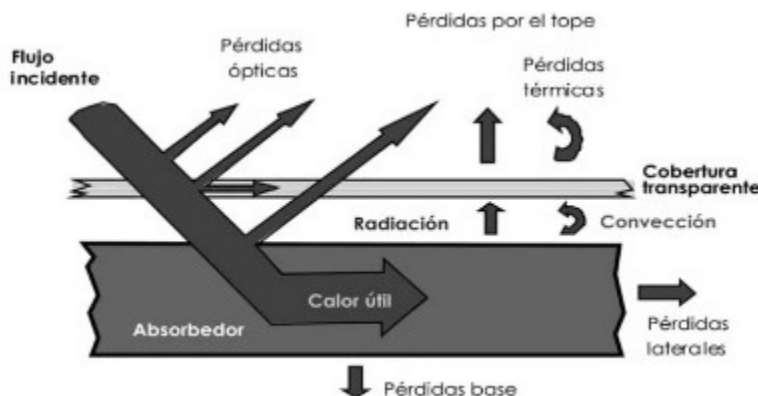


Figura 1.12: Pérdidas de energía para un calentador solar. [5]

### 1.4.3. Diferencias entre calentadores solares

Aunque todos los calentadores tienen el mismo funcionamiento tienen sus diferencias por ejemplo, la forma del concentrador solar. Hay concentradores lineales o cilíndricos, donde cada uno concentra de forma diferente los rayos del Sol hacia el absorbedor.

En la figura 1.13 se muestran diferentes tipos de concentradores. En el inciso (a) se muestra un concentrador con un absorbedor tubular, en el (b) se tiene un absorbedor tubular con concentrador anidónico; en el inciso (c) se tiene un receptor con un concentrador plano, la (d) presenta un concentrador de sección parabólica, (e) es un concentrador de tipo Fresnel, el cual consiste en una serie de concentradores planos adyacentes colocados en dirección perpendicular a los rayos del Sol logrando concentrar la radiación en el absorbedor; finalmente en la configuración (f) los concentradores de tipo Fresnel se encuentran montados y dirigidos en diferente dirección de tal manera que los rayos del Sol lleguen a un mismo punto.

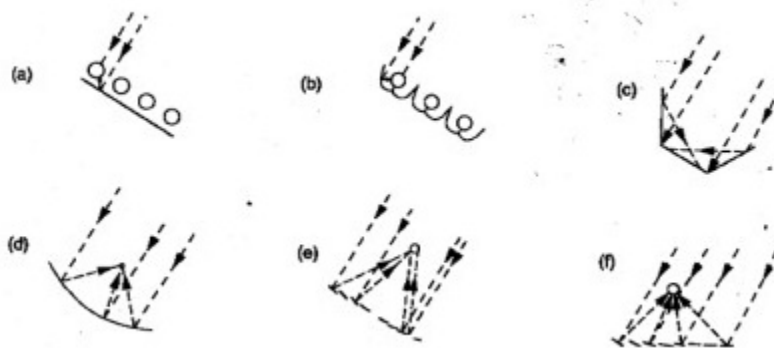


Figura 1.13: Tipos de concentradores que se pueden usar en un calentador solar.[4]



En esta tesis nos vamos a centrar en un concentrador parabólico y uno anidólico y como tercer caso vamos a usar una distribución senoidal de potencia para la parte inferior del tubo para calentar un fluido.

#### 1.4.4. Diagrama de trazado de rayos

Los diagramas de trazado de rayos son útiles para comprender como es la concentración de los rayos del Sol en el absorbedor. En esta sección sólo se mencionan los trazados de rayos para los concentradores que se usan en esta tesis (parabólico y anidólico).

##### Concentrador parabólico

En la figura 1.14 se muestra el diagramas de trazado de rayos para un concentrador parabólico.

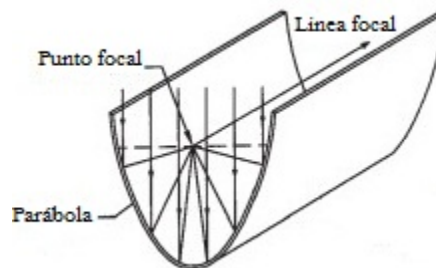


Figura 1.14: Trazado de rayos para un concentrador parabólico. [8]

Unas de las desventajas es que al tener diferentes curvaturas de la parábola el punto focal cambia (figura 1.15) y también al no tener un seguimiento de la trayectoria del Sol, la concentración de los rayos de incidencia ya no se concentran en un punto, comparado cuando se tienen los rayos paralelos al eje de simetría del concentrador (ver figura 1.16 ).

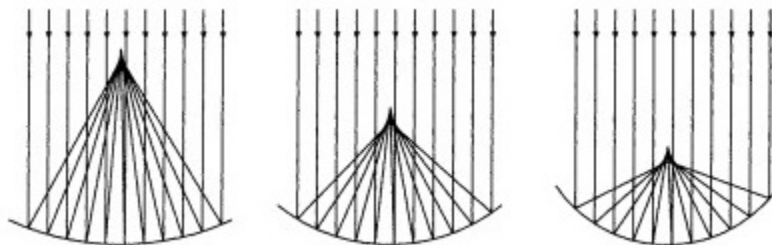


Figura 1.15: Cambio del punto focal para diferentes aberturas de un reflector parabólico. [8]

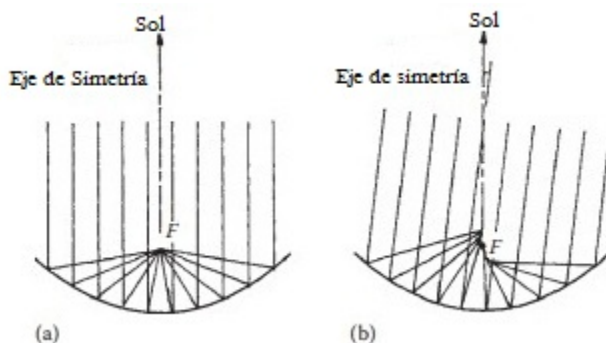


Figura 1.16: Concentración para un concentrador parabólico con: [a] Rayos paralelos al eje de simetría. [b] Existencia de un ángulo entre el eje de simetría y los rayos incidentes del Sol donde ya no se concentran en un mismo punto. [8]

### Concentrador anidólico

En este tipo de concentradores existe una pérdida óptica mínima ya que en la figura 1.17 se puede notar que los rayos del Sol son reflejados más de una vez en su camino hacia el absorbedor. La concentración de los rayos del Sol hacia el absorbedor también dependen del ángulo con que inciden.

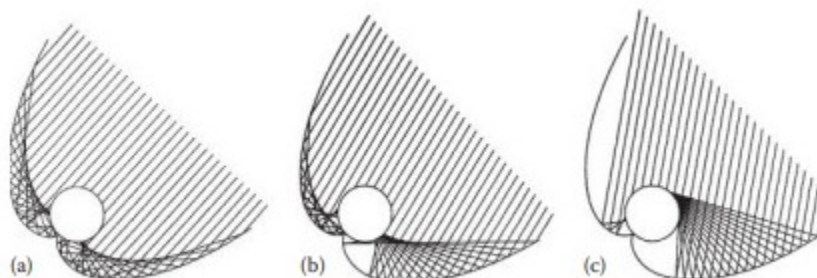


Figura 1.17: Trazado de rayos para un concentrador anidólico para diferentes ángulos de incidencia: [a] normal, [b] intermedio y [c] aceptable. [8]

#### 1.4.5. Aplicaciones y costos de un calentador solar.

Uno de los procesos importantes para la creación de un calentador solar es obtener la mayor parte de la irradiación solar y transformarla en energía útil para la población a bajo costo donde su precio varía en función de la capacidad y calidad de cada calentador.

En cuanto a la capacidad es sencillo realizar un análisis comparativo, pero cuando se trata de calidad, es más complicado, por lo que hay variables que se deben tomar en cuenta para el uso de materiales en cada diseño.[22]

En México, el INFONAVIT ha creado un programa denominado Hipoteca verde [27] aplicando un crédito con un monto adicional para que el derechohabiente pueda comprar una vivienda ecológica y así obtener una mayor calidad de vida, generando ahorros en su gasto

familiar mensual derivados de las ecotecnologías que disminuyen consumos de energía eléctrica, agua y gas; contribuyendo al uso eficiente y racional de los recursos naturales y al cuidado del medio ambiente.

Finalmente, se debe tener en cuenta que uno de los problemas que puede intervenir en la eficiencia de un calentador solar a largo plazo es la suciedad, ya que las partículas de polvo provocan una variación en la forma en la que llegan los rayos del Sol al absorbedor, por lo que se le debe dar mantenimiento cada cierto tiempo.

## 1.5. Fundamentos de la dinámica de fluidos

Recordemos que Isaac Newton fue el primero en aplicar las leyes de la mecánica al movimiento de los fluidos. Después con el paso del tiempo Leonhard Euler en 1755 escribió por primera vez las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido ideal (ausencia de disipación la cual es debida a la interacción entre moléculas). Finalmente, Claude Navier en 1822 y Gabriel Stokes en 1845 introdujeron el término viscoso obteniendo así las "ecuaciones de Navier-Stokes".[23]

### 1.5.1. Ecuación de continuidad

La dinámica de fluidos estudia el movimiento de los líquidos y gases. Por lo general, un fluido es considerado un medio continuo.

Consideremos un  $V_0$  en el espacio, donde la masa  $m$  contenida en este volumen en un tiempo fijo es  $\int \rho dV$  donde  $\rho$  es la densidad del fluido. La masa del fluido que pasa a través de una superficie es:

$$\oint \rho \bar{v} \cdot d\bar{f} \quad (1.23)$$

donde la integral se hace sobre una superficie cerrada.

Considerando la disminución de masa del fluido por unidad de tiempo

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \quad (1.24)$$

igualando las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \bar{v} \cdot d\bar{f} \quad (1.25)$$

La integral de superficie se puede transformar en una integral de volumen usando el teorema de Gauss,

$$\oint \rho \bar{v} \cdot d\bar{f} = \int \nabla \cdot (\rho \bar{v}) dV \quad (1.26)$$

igualando las ecuaciones 1.25 y 1.26 tenemos:

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (1.27)$$

como la ecuación anterior se anula para cualquier volumen de integración, entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.28)$$

donde la ecuación 1.28 se le conoce como la "ecuación de continuidad".[11]

### 1.5.2. Ecuación de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre de Claude-Louis Navier (1785-1836) y George Gabriel Stokes (1819-1903). Estas ecuaciones se deducen de la combinación de balance de momento y de la ecuación de continuidad, mismas que deben satisfacer los fluidos al moverse. Por lo tanto, tenemos que considerar la 2<sup>da</sup> ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1.29)$$

que también la podemos expresar como la derivada total del momento lineal:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.30)$$

siendo el momento una propiedad extensiva, lo relacionamos con la propiedad intensiva  $\rho \vec{v}$  mediante una integral de volumen:

$$\vec{P} = \int \vec{v} dm = \int_V \rho \vec{v} dV \quad (1.31)$$

como se cumple para todo el vector momento, entonces también se cumple componente a componente es decir,

$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = \int_V \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_x \vec{v}) \right] dV \quad (1.32)$$

desarrollando lo que está en el integrando de la expresión anterior y tomando que

$$\rho v_x \vec{v} = v_x (\rho \vec{v}) \quad (1.33)$$

donde

$$\nabla \cdot (\rho v_x \vec{v}) = v_x \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \nabla v_x \cdot \rho \vec{v} \quad (1.34)$$

tenemos:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_x \vec{v}) = v_x \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) + \rho \left( \frac{\partial(v_x)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_x \right) \quad (1.35)$$

Notemos que el primer término del lado derecho de la ecuación corresponde a la ecuación de continuidad por lo tanto, ese término se anula. De esta forma se obtiene lo siguiente:

$$F_x = \int_V \rho \left( \frac{\partial(v_x)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_x \right) dV \quad (1.36)$$

de manera análoga se puede realizar el mismo procedimiento para las otras componentes de la fuerza,

$$F_y = \int_V \rho \left( \frac{\partial(v_y)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_y \right) dV \quad (1.37)$$

$$F_z = \int_V \rho \left( \frac{\partial(v_z)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_z \right) dV \quad (1.38)$$

de forma vectorial se tiene que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) dV \quad (1.39)$$

donde  $\vec{F}$  son las fuerzas inducidas en el fluido, las cuales pueden ser por diferencias de presión, gravedad, entre otras.

Por ejemplo, en caso de la fuerza de gravedad  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  tendríamos:

$$\vec{F}_g = \int_V \rho \vec{g} dV \quad (1.40)$$

igualando con la ec. 1.39 se obtiene:

$$\rho \vec{g} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad (1.41)$$

Ahora para agregar la fuerza inducida por la presión a la ecuación anterior tomemos un cubo pequeño, para saber como es la fuerza neta que ejerce la presión sobre él consideramos que la presión es la misma en todas las direcciones. Puede haber una fuerza neta por unidad de volumen solo si la presión varía de un punto a otro entonces, supongamos que la presión varía en dirección  $xy$  donde tomamos las direcciones de las coordenadas paralelas a las aristas del cubo (figura 1.18).

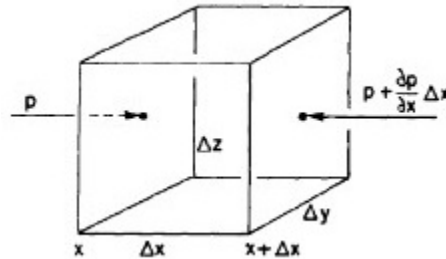


Figura 1.18: La fuerza de presión sobre un cubo es  $-\nabla P$  por unidad de volumen. [6]

La presión en la cara que se encuentra en el eje  $x$  está dada por la fuerza  $P\Delta y\Delta z$ , la presión en la cara que se encuentra en  $x+\Delta x$  está dada por la fuerza  $-(P+(\partial P/\partial x)\Delta x)\Delta y\Delta z$  entonces la fuerza resultante es  $-(\partial P/\partial x)\Delta x\Delta y\Delta z$ . Si tomamos los pares restantes de caras del cubo, vemos que la fuerza de presión por unidad de volumen es  $-\nabla P$ . Entonces sumando este término a la ecuación 1.41 obtenemos la 'Ecuación de Euler' :

$$-\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad (1.42)$$

al considerar las fuerzas viscosas en un fluido newtoniano tenemos que la viscosidad es una medida cuantitativa de la fricción entre diferentes partes de un fluido en movimiento. Más específicamente, determina la velocidad de deformación del fluido que se genera por un esfuerzo cortante aplicado. Los fluidos pueden tener una amplia gama de viscosidades.

Si tomamos las fuerzas viscosas que actúan en un fluido en la dirección  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  tenemos:

$$\vec{F}_{\mu x} = \mu \nabla^2 v_x \Delta V \hat{i} \quad (1.43)$$

$$\vec{F}_{\mu y} = \mu \nabla^2 v_y \Delta V \hat{j} \quad (1.44)$$

$$\vec{F}_{\mu z} = \mu \nabla^2 v_z \Delta V \hat{k} \quad (1.45)$$

realizando una suma vectorial tenemos:

$$\vec{F}_{\mu x} + \vec{F}_{\mu y} + \vec{F}_{\mu z} = \mu \nabla^2 \vec{v} \Delta V \quad (1.46)$$

entonces, la fuerza viscosa que actúa en todo el fluido es:

$$\vec{F}_{\mu} = \int_V \mu \nabla^2 \vec{v} dV \quad (1.47)$$

por último, agregando éste término en la ec. de Euler tenemos:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.48)$$

finalmente, la ec. 1.48 se le conoce como "ecuación de Navier Stokes". [9]

## 1.6. Flujo en tuberías

En la práctica es común encontrar el flujo de fluidos en tuberías circulares y no circulares por ejemplo, el agua caliente y fría que usamos en nuestros hogares se bombea a través de tuberías o incluso el agua de una ciudad se distribuye mediante extensas tuberías. Las tuberías no-circulares, por lo general se usan en aplicaciones como los sistemas de calefacción y enfriamiento de edificios, donde la diferencia de presión es relativamente pequeña.

El flujo se clasifica como externo e interno, donde depende si el fluido fluye sobre una superficie o dentro de una tubería. Los flujos internos y externos tienen características diferentes. En esta tesis se estudiará el comportamiento de un flujo interno.

### 1.6.1. Flujo laminar y turbulento

En la vida diaria podemos encontrarnos con flujos laminares y turbulentos por ejemplo, al expulsar el humo de un cigarro o incluso el humo de una vela.

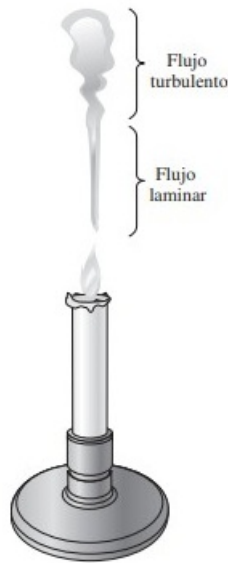


Figura 1.19: Régimenes de flujo láminar y turbulento del humo de una vela. [7]

En los años 80's del siglo XIX Osborne Reynolds observó que al inyectar colorante en un fluido se formaban líneas rectas a bajas velocidades cuando el flujo era laminar, y tenían fluctuaciones en el régimen transicional y zigzagueaban rápida y aleatoriamente cuando el flujo se volvía turbulento.

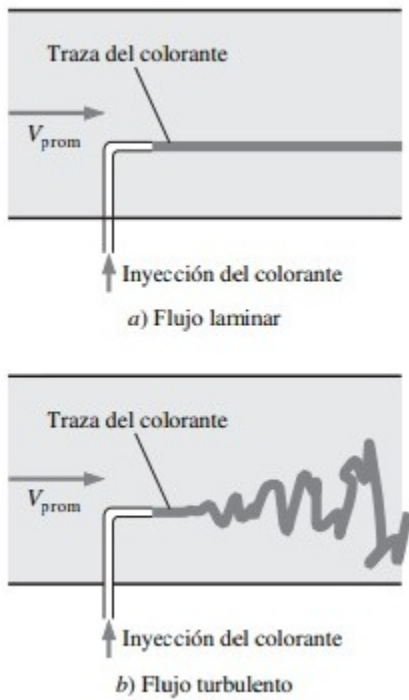


Figura 1.20: (a) Inyección de colorante donde se observa un flujo laminar. (b) Inyección de colorante donde se observa un flujo turbulento.[7]

Entonces, se puede decir que si el flujo de una tubería tiene líneas de corriente aproximadamente paralelas a bajas velocidades se le considera "flujo laminar", pero se vuelve caótico conforme la velocidad aumenta sobre un valor crítico, en este caso tenemos un "flujo turbulento", y se caracteriza por fluctuaciones de velocidad y movimiento desordenado.

## 1.6.2. Números adimensionales

### Número de Reynolds

La transición de flujo laminar a turbulento depende de la geometría, la rugosidad de la superficie, la velocidad del flujo, la temperatura de la superficie y el tipo de fluido, entre otros factores. El régimen de flujo depende principalmente de la razón de fuerzas inerciales y fuerzas viscosas en el fluido.

Para hacer una estimación del número de Reynolds usando la ec. de Navier- Stokes (ec. 1.48) con  $L$  la longitud y  $T$  el tiempo, para las fuerzas inerciales tenemos:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \rho \frac{v}{T} \quad (1.49)$$

donde

$$v = \frac{L}{T} \quad (1.50)$$



de la ec. 1.50 despejando al tiempo tenemos:

$$T = \frac{L}{v} \quad (1.51)$$

sustituyendo la ec. 1.51 en la ec. 1.49 tenemos:

$$\rho\left(\frac{v}{L/v}\right) = \rho \frac{v^2}{L} \quad (1.52)$$

Ahora sea,

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \sim \rho \frac{v}{L}v = \rho \frac{v^2}{L} \quad (1.53)$$

para las fuerzas viscosas donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica, tenemos:

$$\mu \nabla^2 \vec{v} \sim \mu \frac{v}{L^2} \quad (1.54)$$

como el número de Reynolds se puede expresar de la siguiente manera:

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}}$$

entonces tenemos:

$$Re = \frac{\rho(v^2/L)}{\mu(v/L^2)} \quad (1.55)$$

finalmente, tomando a  $\nu = \mu/\rho$  como la viscosidad cinemática el número de Reynolds para un fluido se define como:

$$Re = \frac{vL}{\nu} \quad (1.56)$$

En nuestro caso como el fluido fluye a través de un tubo tenemos que  $L = D$  donde  $D$  es el diámetro y  $v = v_{prom}$  entonces la ec. 1.56 queda de la siguiente manera:

$$Re = \frac{v_{prom}D}{\nu} \quad (1.57)$$

A números grandes de Reynolds, las fuerzas inerciales son grandes en relación con las fuerzas viscosas y por lo tanto las fuerzas viscosas no pueden evitar las fluctuaciones del fluido ocasionando un flujo turbulento. Sin embargo, a números de Reynolds pequeños, las fuerzas viscosas son lo suficientemente grandes por lo que tenemos un flujo laminar.

El número de Reynolds para el cual el fluido deja de ser laminar se llama número de Reynolds crítico,  $Re_{cr}$ . El valor del número de Reynolds crítico cambia para geometrías y condiciones de flujo distintas. Para flujo interno en una tubería circular, el valor generalmente aceptado del número de Reynolds crítico es  $Re_{cr} = 2300$ . [24]

Los valores precisos de números de Reynolds para un flujo laminar, transicional y turbulento son:

$$Re \leq 2300 \quad \text{Flujo laminar}$$

$$2300 \leq Re \leq 4000 \quad \text{Flujo transicional}$$

$$Re \geq 4000 \quad \text{Flujo turbulento}$$

En esta tesis vamos a usar  $Re = 1000$  y  $Re = 2000$ .

### Número de Grashof

El número de Grashof es un número adimensional, llamado así por Franz Grashof. Este número se define como la relación entre la fuerza de flotación y la fuerza viscosa que actúa sobre un fluido en la capa límite de velocidad. Su papel en la convección natural es muy similar al del número de Reynolds.

$$Gr = \frac{\text{Fuerzas de flotación}}{\text{Fuerzas viscosas}}$$

La convección natural ocurre cuando el movimiento y la mezcla del fluido son causados por variaciones de densidad resultantes de las diferencias de temperatura. Por lo general, la densidad disminuye debido a un aumento de la temperatura y hace que el líquido suba. Este movimiento es causado por la fuerza de flotación. La fuerza principal que resiste el movimiento es la fuerza viscosa. El número de Grashof es una forma de cuantificar las fuerzas opuestas.

El número de Grashof se define como:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (1.58)$$

donde  $g$  es la aceleración debido a la gravedad,  $L$  es la longitud,  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica.[12]

En esta tesis se usó  $Gr = 50000$ ,  $Gr = 100000$  y  $Gr = 2000000$ .

### Número de Prandtl

Es un número adimensional proporcional al cociente entre la velocidad de difusión de la cantidad de momento (viscosidad  $\nu$ ) y la difusividad térmica ( $\alpha$ ).

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.59)$$

donde  $\alpha = k/(\rho C_p)$  con  $k$  la conductividad térmica y  $C_p$  el calor específico a presión constante, entonces la ec. 1.59 es:

$$Pr = \frac{(\eta/\rho)}{k/(\rho C_p)} = \frac{\eta C_p}{k} \quad (1.60)$$

### Número de Peclet

Es un número adimensional que relaciona la velocidad de advección de un flujo y la velocidad de difusión y se define como:

$$Pe = \frac{vL}{\alpha} \quad (1.61)$$

donde  $\alpha$  sigue siendo la difusividad térmica, en términos del número de Reynolds y Prandtl tenemos:

$$Pe = RePr \quad (1.62)$$

### 1.6.3. Caída de presión en el interior de un tubo

Un aspecto importante es la caída de presión  $\Delta P$  del fluido, este mecanismo se da por efectos viscosos.

Considere un cilindro de longitud  $L$  con radio  $R$  en el cual fluye un fluido con viscosidad  $\eta$  y sea  $P_1$  y  $P_2$  las presiones aplicadas en cada extremo del cilindro.

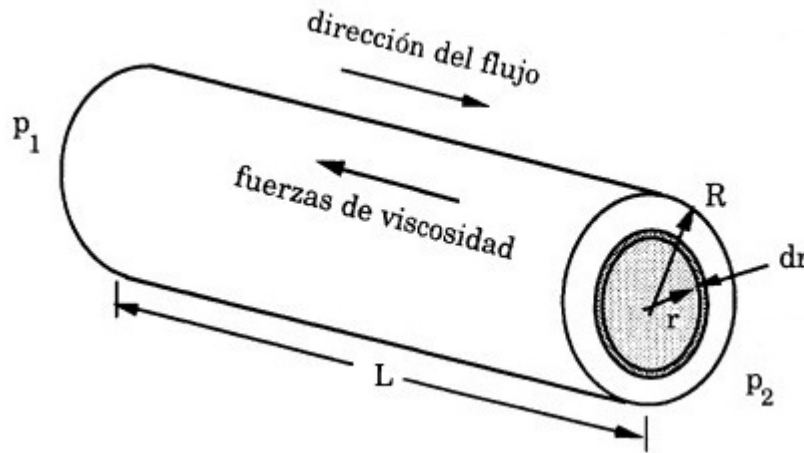


Figura 1.21: Tubo cilíndrico por el cual fluye un fluido con viscosidad  $\eta$ . [25]

Si tomamos las fuerzas que actúan en cada extremo del tubo y la fuerza de viscosidad donde el diferencial de velocidad disminuye conforme  $r$  aumenta, considerando que  $P_1 > P_2$  y la  $\sum \bar{F} = 0$  tenemos:

$$\sum \bar{F} = P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 - \eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} = 0 \quad (1.63)$$

si re-escribimos la ec. anterior como:

$$\Delta P \pi r^2 = \eta 2\pi r L \frac{-dv}{dr} \quad (1.64)$$

re-acomodando términos tenemos:

$$\Delta P \int_r^R r dr = -2\eta L \int_{v_r=v}^{v_R=0} dv \quad (1.65)$$

realizando la integral anterior tenemos que la velocidad del fluido respecto al radio es:

$$v = \frac{\Delta P}{4\eta L} [R^2 - r^2] \quad (1.66)$$

finalmente, de la ec. 1.66 podemos decir que el fluido tiene un perfil parabólico.[19]

#### 1.6.4. Perfil de velocidad a la entrada de un tubo

La velocidad del fluido en una tubería cambia de cero en la superficie, debido a la condición de no-deslizamiento, hasta un máximo en el centro de la tubería llamándola así  $v_{max}$ . Es conveniente trabajar con una velocidad promedio  $v_{prom}$ , que permanece constante en un flujo incompresible cuando el área de la sección transversal de la tubería es constante.

Entonces la capa que está en contacto con la pared de la tubería provoca que las partículas del fluido en las capas adyacentes frenen gradualmente como resultado de la fricción. Para compensar esta reducción de velocidad, la velocidad del fluido en la sección media de la tubería tiene que aumentar para mantener constante la razón de flujo de masa por lo que se crea un gradiente de velocidad.

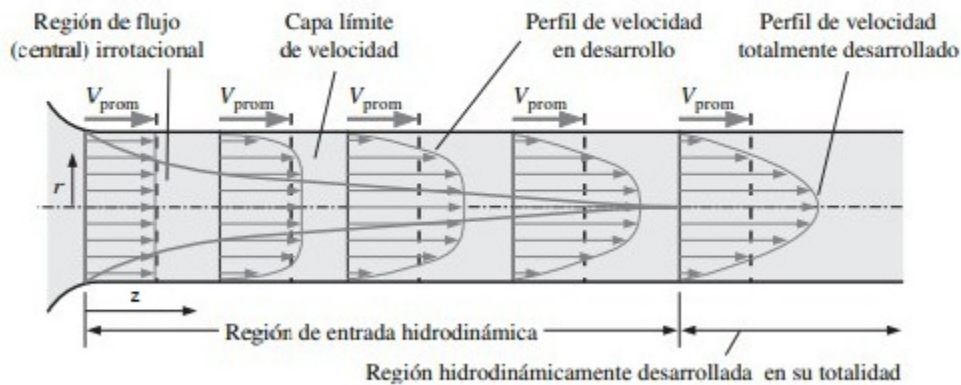


Figura 1.22: Desarrollo de la capa límite de velocidad en una tubería con flujo laminar. [25]

En la figura 1.22 podemos ver que la región desde la entrada de la tubería hasta el punto en el que la capa límite emerge en la línea central se llama región de entrada hidrodinámica, y la longitud de esta región se llama longitud de entrada hidrodinámica  $L_h$ . El flujo en la región de entrada se llama flujo en desarrollo hidrodinámico porque ésta es la región donde se crea el perfil de velocidad. La zona más allá de la región de entrada en la que el perfil de velocidad está totalmente desarrollado y permanece invariable se llama región hidrodinámica totalmente desarrollada, teniendo así un perfil de velocidad parabólico.[2]

Si tomamos  $\Delta P/L = dP/dz$  la ec. 1.66 queda de la siguiente forma:

$$v_z(r) = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dP}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (1.67)$$

La velocidad axial  $v_z$  es positiva para cualquier  $r$ , y por lo tanto el gradiente de presión axial  $dP/dz$  debe ser negativo debido a que la presión disminuye. Ahora, para la velocidad promedio tenemos:

$$v_{prom} = -\frac{R^2}{8\eta} \frac{dP}{dz} \quad (1.68)$$

utilizando las ecuaciones 1.67 y 1.68 tenemos:

$$v_z(r) = 2v_{prom} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (1.69)$$

cuando  $r = 0$  tendríamos la velocidad máxima,

$$v_z(r) = 2v_{prom} \quad (1.70)$$

# Capítulo 2

## Simulación numérica

Se resolvió la ecuación de Navier-Stokes y de continuidad en coordenadas cilíndricas, se utilizó un esquema de diferencias finitas para las coordenadas espaciales  $r$  y  $z$  y el método espectral de Fourier para la coordenada  $\theta$ , además se usó un esquema de Adams-Bashforth para la evolución temporal.

### 2.1. Adimensionalización de la ecuación de Navier- Stokes

Tenemos la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \right) = -\nabla P + \rho \bar{g} + \mu \nabla^2 \bar{V} \quad (2.1)$$

En la parte izquierda tenemos el cambio de la velocidad respecto al tiempo y el término convectivo y del lado derecho tenemos el gradiente de presión más las fuerzas externas que actúan en el fluido, en este caso la fuerza de gravedad ( $\bar{g}$ ) y por último el término de viscosidad.

A la ec. 2.1 se le aplicó la aproximación de Boussinesq, la cual nos dice que la  $\rho$  es constante excepto en el término de fuerzas externas ( $\rho \bar{g}$ ). En este término la densidad no es constante debido al cambio de temperatura del fluido. De la ecuación de estado tenemos que  $\rho = \rho(P, T)$  entonces escribiendo a la  $\rho$  como:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.2)$$

donde  $\beta = -\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$  (coeficiente de expansión térmica),  $T$  la temperatura,  $\rho_0$  y  $T_0$  son densidad y temperatura de referencia, entonces sustituyendo en la ec. anterior tenemos:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Delta T \quad (2.3)$$

Sustituyendo la ec. 2.3 en la ec. 2.1 tenemos:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \left( \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Delta T \right) \bar{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.4)$$

Como la densidad es constante en los términos de presión y viscosidad la ec. 2.1 sin el término de fuerzas externas en notación de índice es:

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.5)$$

Usando una longitud representativa  $L$ , tiempo representativo  $t_0 = L/V$ , una velocidad representativa  $V$  y una presión representativa  $P_0 = \rho_0 V^2$ , las variables adimensionales son:

$$x_j^* = \frac{x_j}{L} \quad (2.6)$$

$$t^* = \frac{t}{t_0} = \frac{tV}{L} \quad (2.7)$$

$$V_i^* = \frac{V_i}{V} \quad (2.8)$$

$$P^* = \frac{P}{P_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{P}{V^2} \quad (2.9)$$

Calculando las derivadas parciales correspondientes usando la regla de la cadena tenemos,

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} V_i = \frac{\partial}{\partial t^*} \frac{\partial t}{\partial t^*} \frac{V}{L} V_i^* \quad (2.10)$$

Da como resultado lo siguiente:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{V^2}{L} \frac{\partial V_i^*}{\partial t^*} \quad (2.11)$$

Realizando el mismo procedimiento para las derivadas restantes nos queda:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{V}{L} \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\rho_0 V^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (2.14)$$

Sustituyendo cada derivada parcial en la ec. 2.5 y sumando nuevamente el término de la aceleración de la gravedad tenemos,

$$\rho_0 \left[ \frac{V^2}{L} \frac{\partial V_i^*}{\partial t^*} + V_j^* V \frac{\partial V_i^*}{L \partial x_j^*} \right] = -\frac{\rho_0 V^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \mu \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + \left( \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Delta T \right) \bar{g}$$

Multiplicando ambos lados por  $\frac{L}{V^2}$  tenemos:

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial V_i^*}{\partial t^*} + V_j^* \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} \right] = -\rho_0 \frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{\mu}{VL} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + \frac{L}{V^2} \left( \rho_0 + \frac{d\rho}{dT} \Delta T \right) \bar{g}$$

Multiplicando  $\frac{1}{\rho_0}$  ambos lados de la ecuación anterior:

$$\frac{\partial V_i^*}{\partial t^*} + V_j^* \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{\mu}{\rho_0 VL} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + \frac{L}{V^2} \left( 1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT} \Delta T \right) \bar{g}$$

Tomando a  $\bar{g}$  como un gradiente de potencial gravitatorio tenemos

$$\frac{\partial V_i^*}{\partial t^*} + V_j^* \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{VL} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + \frac{L}{\rho_0 V^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Delta T \bar{g} \quad (2.15)$$

Donde  $\bar{g} = g\hat{k}$  y  $\Delta T = T - T_0$

Como trabajamos con una diferencia de temperatura y no sobre una  $T$  en general, se hizo el siguiente cambio de variable.

$$\Theta = T - T_0$$

Por lo consiguiente tenemos:

$$\Theta = \Delta T$$

Tomando una temperatura representativa  $T_A$  respecto a la diferencia de temperaturas  $\Delta T$  entonces sea:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{T_A} = \frac{\Theta}{T_A}$$

Despejando a  $\Delta T$  de la ec. anterior:

$$\Delta T = T_A \Phi \quad (2.16)$$

Sustituyendo la ec. 2.16 en la ec. 2.15 y tomando a  $\bar{g} = g\hat{k}$  tenemos:

$$\frac{\partial V_i^*}{\partial t^*} + V_j^* \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{VL} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + \frac{L}{\rho_0 V^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} T_A \Phi g \hat{k}$$

Si tomamos el siguiente término como:

$$\frac{L}{\rho_0 V^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Delta T g = \frac{Gr}{Re^2}$$

Y escribiendo el término de viscosidad en función del número de  $Re$ , podemos escribir la ecuación de Navier- Stokes adimensional de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{V}^*}{\partial t^*} + (\bar{V}^* \cdot \nabla^*) \bar{V}^* = -\nabla^* P^* + \frac{Gr}{Re^2} \Phi \hat{k} + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \bar{V}^* \quad (2.17)$$



## 2.2. Adimensionalización de la Ecuación de Calor

Tenemos la ecuación general de Calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (2.18)$$

Recordando el cambio de variable sobre la temperatura  $\Theta = \Delta T$  re-escribimos la ecuación de calor de la forma

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \Theta = \alpha \nabla^2 \Theta \quad (2.19)$$

Escrita en términos de índices nos queda:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.20)$$

Tomando las variables adimensionales de las ecs. 2.6, 2.7, 2.8 y agregando la variable adimensional para la temperatura como:

$$\Theta^* = \frac{\Theta}{\tau}$$

y calculando las derivadas correspondientes a la ec. (2.20), usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} \Theta = \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{\partial t}{\partial t^*} \frac{V}{L} \right] \Theta^* \tau = \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} \frac{V \tau}{L} \quad (2.21)$$

Realizando el mismo procedimiento para las derivadas parciales restantes

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \frac{\tau}{L} \frac{\partial \Theta^*}{\partial x_j^*} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (2.23)$$

Sustituyendo las derivadas en la ec. (2.20)

$$\frac{V \tau}{L} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} + V_j^* \frac{\tau}{L} \frac{\partial \Theta^*}{\partial x_j^*} = \alpha \frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (2.24)$$

Multiplicando  $\frac{L}{V \tau}$  ambos lados de la ec. anterior

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} + V_j^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x_j^*} = \frac{\alpha}{LV} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}$$

sustituyendo la ec. 1.61 en la ecuación anterior tenemos la ecuación adimensional de calor:

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} + \bar{V}^* \cdot \nabla^* \Theta^* = \frac{1}{Pe} \nabla^{*2} \Theta^* \quad (2.25)$$

## 2.3. Condiciones de Frontera y valores iniciales

En esta tesis vamos a estudiar el calentamiento de un fluido que pasa a través de un tubo. Se usarón medidas adimensionales, en este caso se usó una longitud de  $L = 30$ ,  $D = 1$  con  $R = 0,5$

Las condiciones de frontera que se usaron en la pared del tubo debido a la condición de no-deslizamiento fueron:

$$V_r(R, \theta, z) = 0$$

$$V_\theta(R, \theta, z) = 0$$

$$V_z(R, \theta, z) = 0$$

Para la tapa izquierda (entrada del tubo) :

$$V_r(r, \theta, 0) = 0$$

$$V_\theta(r, \theta, 0) = 0$$

$$V_z(r, \theta, 0) = 2V_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Para la tapa derecha (salida del tubo) tenemos:

$$\frac{d^2V_r}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2V_\theta}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2V_z}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0$$

donde la coordenada  $z$  se toma como el vector normal a la superficie.

Los valores iniciales que se usaron :

$$V_{r_0} = 0$$

$$V_{\theta_0} = 0$$

$$V_{z_0} = 2V_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\Delta T = 0$$

donde se toma  $\Delta T$  respecto a la temperatura ambiente.

## 2.4. Método Espectral de Fourier

Ya teniendo nuestras ecuaciones adimensionalizadas y las condiciones de frontera, se tiene que resolver numéricamente la ecuación de Navier- Stokes, continuidad y de calor para obtener la velocidad, la presión y la temperatura del fluido.

Ahora, dado que la función angular es una función periódica ( $2\pi$ ) podemos escribir a la velocidad, presión y la temperatura (representada por  $f$ ) como una serie de Fourier compleja.

$$f(r, z, \theta, t) \approx \sum_{k=0}^{k_{max}} \hat{f}_k(r, z, t) e^{ik\theta} \quad (2.26)$$

Así que la primera y segunda derivada respecto a  $\theta$  son:

$$\frac{\partial f(r, z, \theta, t)}{\partial \theta} \approx \sum_{k=0}^{k_{max}} ik \hat{f}_k(r, z, t) e^{ik\theta} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 f(r, z, \theta, t)}{\partial \theta^2} \approx - \sum_{k=0}^{k_{max}} k^2 \hat{f}_k(r, z, t) e^{ik\theta} \quad (2.28)$$

Entonces las incógnitas son los coeficientes de Fourier  $\hat{f}_k(r, z, t)$  a los cuales se les aplicó el método de diferencias finitas.

## 2.5. Discretización de las derivadas

Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas se discretizaron las derivadas respecto a la coordenada  $r$  y  $z$  y la variable temporal  $t$  pues los coeficientes de la serie de Fourier son funciones de estas variables por lo que se usó el método de diferencias finitas. Aproximando las derivadas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial V(r, \theta, z, t)}{\partial r} = \frac{V(r + \Delta r, \theta, z, t) - V(r - \Delta r, \theta, z, t)}{2\Delta r} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 V(r, \theta, z, t)}{\partial r^2} = \frac{V(r + \Delta r, \theta, z, t) - 2V(r, \theta, z, t) + V(r - \Delta r, \theta, z, t)}{\Delta r^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial V(r, \theta, z, t)}{\partial z} = \frac{V(r, \theta, z + \Delta z, t) - V(r, \theta, z - \Delta z, t)}{2\Delta z} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 V(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} = \frac{V(r, \theta, z + \Delta z, t) - 2V(r, \theta, z, t) + V(r, \theta, z - \Delta z, t)}{\Delta z^2} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial V(r, \theta, z, t)}{\partial t} = \frac{3V(r, \theta, z, t + \Delta t) - 4V(r, \theta, z, t) + V(r, \theta, z, t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.33)$$

Para el término no lineal se usó un esquema semi-implícito de Adams-Bashforth [24] el cual es un método lineal para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias en el que se aproximó el término no lineal de la siguiente forma:

$$(V^{n+1} \cdot \nabla) V^{n+1} = 2NL(V^n) - NL(V^{n-1}) = \aleph(V^{n,n-1}) \quad (2.34)$$

Donde el término  $NL(V^n) = (V^n \cdot \nabla)V^n$  es el término no lineal en el tiempo  $n$  y el término  $NL(V^{n-1}) = (V^{n-1} \cdot \nabla)V^{n-1}$  al tiempo  $n - 1$ .

## 2.6. Método de Proyección

El método de proyección se utilizó para resolver la ecuación de Navier-Stokes. Este método lo que hace es desacoplar los campos de presión y velocidad.

Entonces tomando la ecuación de Navier-Stokes adimensional tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V = -\nabla P + \frac{Gr}{Re^2} \Phi + \frac{1}{Re} \nabla^2 V$$

por comodidad ya no se colocará el símbolo  $*$  de adimensionalización, entonces sustituyendo las aproximaciones para la derivada temporal y el término no lineal obtenemos:

$$\frac{3V^{n+1} - 4V^n + V^{n-1}}{2\Delta t} + \aleph(V^{n,n-1}) = -\nabla P + \frac{Gr}{Re^2} \Phi + \frac{1}{Re} \nabla^2 V^{n+1} \quad (2.35)$$

Donde el super-índice  $n + 1$  indica el tiempo actual y el índice  $n$  y  $n - 1$  son tiempos ya conocidos. Si suponemos que la presión es constante obtendríamos una ecuación que sería válida para una velocidad auxiliar  $V^*$  obteniendo lo siguiente:

$$\frac{3V^* - 4V^n + V^{n-1}}{2\Delta t} + \aleph(V^{n,n-1}) = \frac{1}{Re} \nabla^2 V^* + \frac{Gr}{Re^2} \Phi \quad (2.36)$$

Restando la ecs. 2.35 y 2.36 tenemos:

$$\frac{3(V^* - V^{n+1})}{2\Delta t} = \nabla P + \frac{1}{Re} (\nabla^2 V^* - \nabla^2 V^{n+1})$$

Calculando la divergencia tenemos:

$$\frac{3(\nabla \cdot V^* - \nabla \cdot V^{n+1})}{2\Delta t} = \nabla \cdot \nabla P + \frac{1}{Re} (\nabla \cdot \nabla^2 V^* - \nabla \cdot \nabla^2 V^{n+1})$$

Aplicando la ecuación de continuidad y suponiendo que el campo de velocidad es bien comportado podemos intercambiar el laplaciano con la divergencia teniendo así,

$$\frac{3(\nabla \cdot V^* - \nabla \cdot V^{n+1})}{2\Delta t} = \nabla^2 P + \frac{1}{Re} (\nabla \cdot \nabla^2 V^* - \nabla^2 \nabla \cdot V^{n+1})$$

Donde el término  $\nabla \cdot V^{n+1} = 0$  mientras que el término  $\nabla \cdot V^*$  no cumple con la ecuación de continuidad al no ser una velocidad real.

Despejando el laplaciano de la presión tenemos:

$$\nabla^2 P = \frac{3(\nabla \cdot V^*)}{2\Delta t} - \frac{1}{Re} (\nabla \cdot \nabla^2 V^*) \quad (2.37)$$

Con la ecuación anterior podemos encontrar la presión al tiempo  $n + 1$ , teniendo la presión ahora sí podemos resolver la ecuación 2.35 obteniendo de esta forma  $V^{n+1}$ , por lo tanto si conocemos como es el campo de velocidades en dos instantes del tiempo podemos obtener el tiempo siguiente y de esta forma podemos calcular la evolución del campo hasta el instante

que se quiera.

La base de esta simulación fue realizada por el Dr. Gerardo Ruíz Chavarría, el Dr. Erick Javier López Sánchez y el M. en C. Sergio Hernández Zapata.

## 2.7. Mallado

Para una simulación numérica la región en la que se analiza el problema se discretiza, es decir, se calcula la solución con un número finito de puntos, entre mayor sea el número de puntos sobre nuestro dominio mayor será la resolución que tengamos, sin embargo, esto llega a tener ciertos inconvenientes pues si se aumenta el número de puntos aumenta el tiempo de cálculo y el número de datos a guardar. En este caso la región que se analiza es la de un cilindro, por lo que se usaron coordenadas cilíndricas. Sea  $n_r = 50$ ,  $n_\theta = 64$  y  $n_z = 400$ , entonces para la coordenada radial tenemos que:

$$r_i = i\Delta r \quad (2.38)$$

con

$$\Delta r = \frac{R}{n_r}$$

para la coordenada angular tenemos:

$$\theta_k = -\pi + k\Delta\theta \quad (2.39)$$

con

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{n_\theta}$$

y para la coordenada  $z$  tenemos:

$$z_j = j\Delta z \quad (2.40)$$

con

$$\Delta z = \frac{L}{n_z}$$

donde  $i = 0, \dots, 50$ ,  $j = 0, \dots, 400$  y  $k = 0, \dots, 64$ .

Para la variable temporal  $t$  con  $l = 0, \dots, 40000$  y  $\Delta t = 0,001s$  tenemos:

$$t_l = l\Delta t \quad (2.41)$$

## 2.8. Potencia angular

Para calentar el fluido de manera no uniforme se usaron diferentes distribuciones de potencia. Para una distribución senoidal se usó la siguiente distribución:

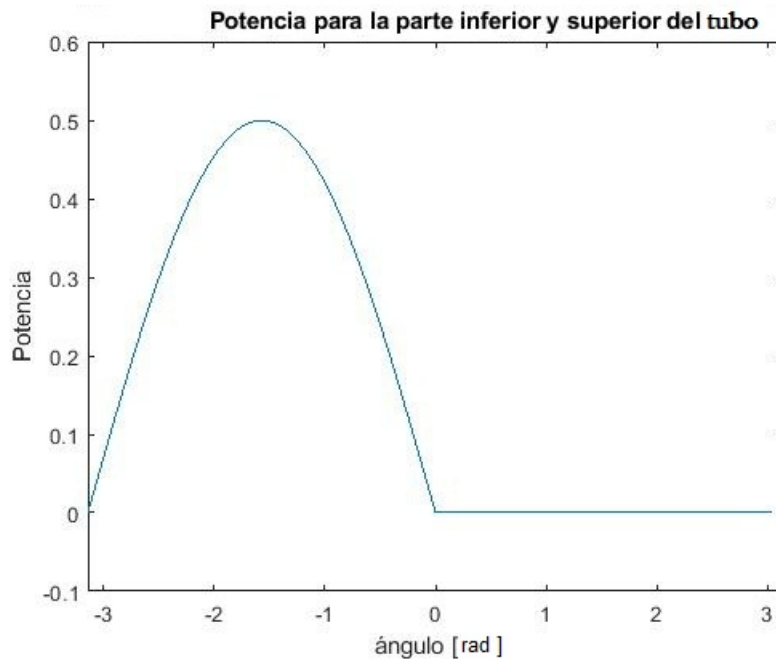


Figura 2.1: Potencia para la parte inferior y superior del tubo para una distribución senoidal. En esta figura notamos que el tubo se calienta por la parte de abajo.

De la figura 2.1 tenemos que el tubo se calienta sólo de la parte de abajo teniendo una potencia mayor en  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  y conforme nos acercamos a  $\theta = \pm\pi$  la potencia disminuye.

La distribución de potencia que se usó para un concentrador parabólico es la siguiente:

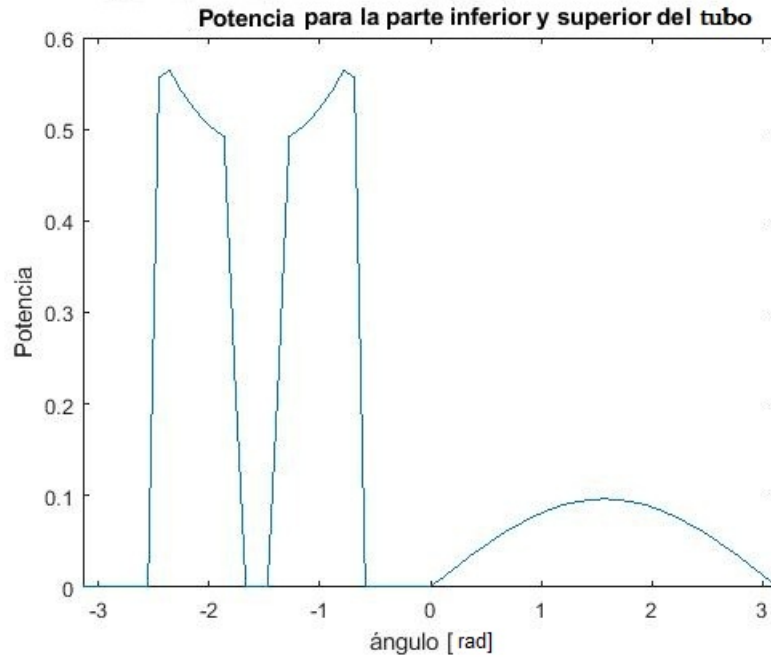


Figura 2.2: Potencia angular para la parte inferior y superior del tubo para un concentrador parabólico.

En la figura 2.2 para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$  y  $\theta = -\pi/4$  tenemos máximos de potencia, esto se debe a que hay mayor concentración de rayos en estos puntos y conforme nos acercamos a  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  y a  $\theta = \pm\pi$  la potencia disminuye, lo mismo pasa para la parte superior del tubo, teniendo una potencia máxima en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Por último la distribución de potencia que se usó para un concentrador anidólico es:

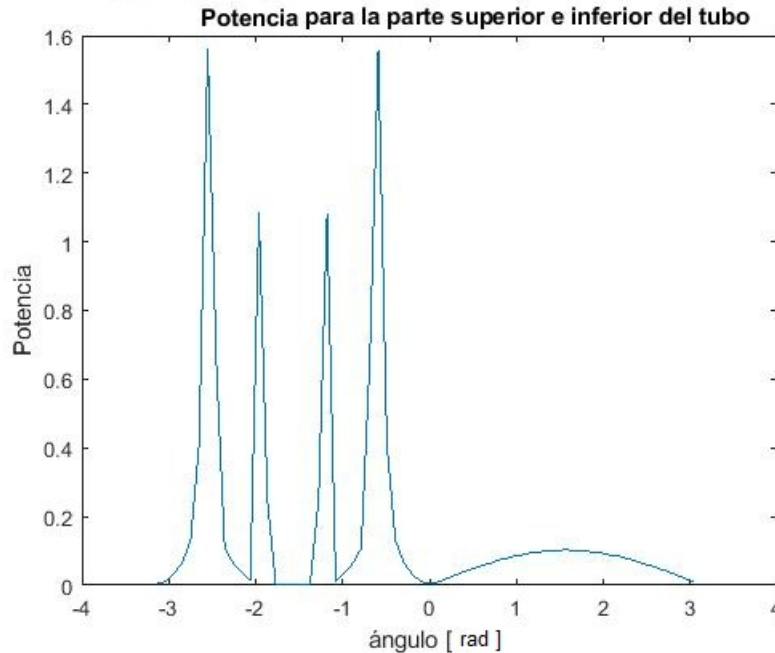


Figura 2.3: Potencia angular para la parte inferior y superior del tubo para un concentrador anidólico.

En éste caso para la parte inferior tenemos 4 picos donde hay una concentración mayor que va desde  $\theta = -3\pi/4$  hasta  $\theta = -\pi/4$  y en la parte superior del tubo la concentración máxima se da en  $\theta = \pi/2$

## 2.9. Trayectoria de las partículas y cambio de temperatura.

Para la última parte se calculó las trayectorias y el cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria de las partículas. Recordemos que la posición de una partícula en coordenadas cilíndricas es  $(r_0, \theta_0, z_0)$  con su velocidad respectiva  $(V_{r0}, V_{\theta0}, V_{z0})$  en este caso se optó por hacer una transformación a coordenadas cartesianas teniendo así la posición para la partícula en  $(x_0, y_0, z_0)$  con su velocidad  $(V_{x0}, V_{y0}, V_{z0})$ . Para conocer éstas velocidades en ese punto, se hizo una interpolación en coordenadas cilíndricas en 3D con ayuda de Matlab y después se hizo la transformación de velocidad a coordenadas cartesianas.

$$V_{x0} = V_{r0}\cos(\theta) - V_{\theta0}\sen(\theta)$$

$$V_{y0} = V_{r0}\sen(\theta) + V_{\theta0}\cos(\theta)$$

$$V_{z0} = V_{z0}$$

Donde  $V_{r0}$ ,  $V_{\theta0}$  y  $V_{z0}$  han sido interpoladas.

La ecuación general de la trayectoria es de la forma:



$$\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r} + \bar{V} \Delta t \quad (2.42)$$

Entonces, la nueva trayectoria en coordenadas cartesianas es:

$$x(t + \Delta t) = x_0(t) + (V_{r0} \cos(\theta) - V_{\theta 0} \sin(\theta)) \Delta t \quad (2.43)$$

$$y(t + \Delta t) = y_0(t) + (V_{r0} \sin(\theta) + V_{\theta 0} \cos(\theta)) \Delta t \quad (2.44)$$

$$z(t + \Delta t) = z_0(t) + V_{z0} \Delta t \quad (2.45)$$

Este programa también nos calcula el cambio de presión a lo largo del tubo.

# Capítulo 3

## Resultados y discusión para una distribución senoidal

### 3.1. Campo de velocidades y perfil de temperatura

En la ec. 2.17 definamos:

$$\alpha = \frac{Gr}{Re^2} \quad (3.1)$$

donde  $\alpha$  lo nombramos "coeficiente de flotabilidad". Entre más grande sea el valor de  $\alpha$ , el fenómeno de convección será mayor. Para ésta sección se presentaran tres valores del coeficiente de flotabilidad donde se variaron los número de Gr y Re.

Para un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=50000$  tenemos que el coeficiente de flotabilidad es  $\alpha = 0,05$ . En la figura 3.1 se muestra el campo de velocidades y el cambio de temperatura del fluido en un corte transversal del tubo en  $z = 27$  con un  $t = 39$ , se tomaron estos valores ya que se nota mejor el comportamiento del flujo debido al cambio de temperatura.

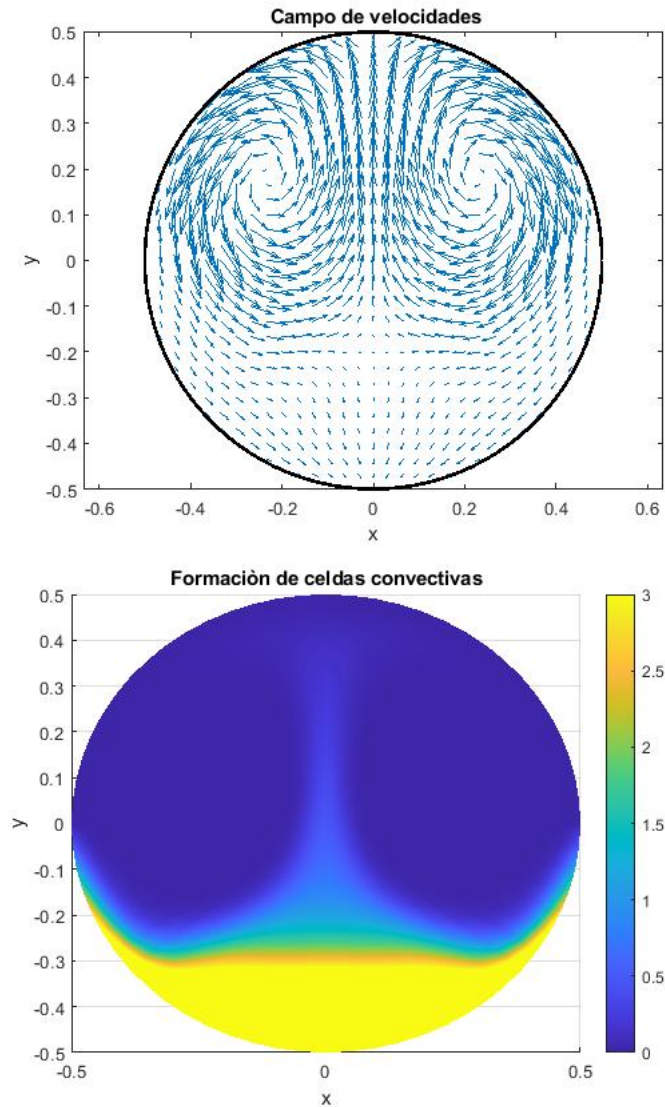


Figura 3.1: [a] Corte transversal del tubo donde se muestra el campo de velocidades. [b] Formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del fluido es mayor en la parte inferior del tubo para el mismo plano que la gráfica anterior. Ambas gráficas tienen un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=50000$  con  $\alpha = 0,05$  en  $z = 27$  con  $t = 39$ .

Para observar como es el campo de velocidades vista a lo largo del tubo (eje  $z$ ) para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  y  $t = 39$  tenemos la siguiente figura.

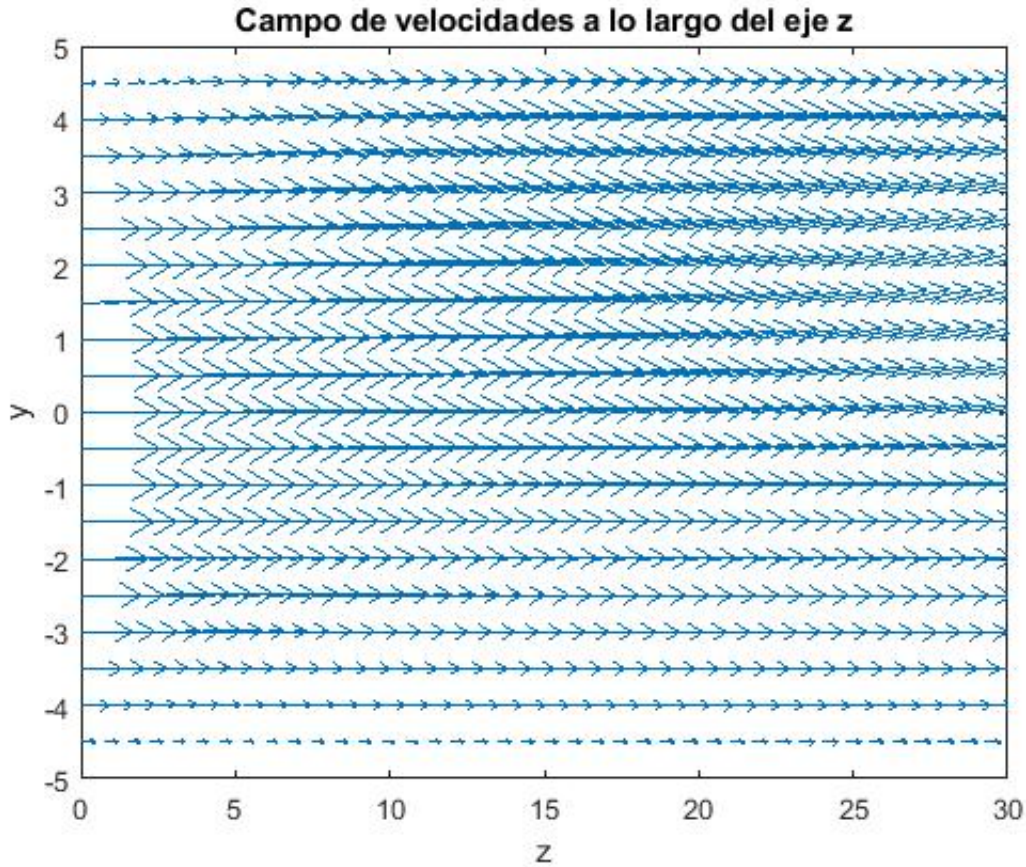


Figura 3.2: Campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  y  $t = 39$ , donde se observa un cambio de velocidad mínimo tanto en dirección como en magnitud en el eje  $y$  positivo antes de salir del tubo.

En la figura 3.2 podemos notar que a la entrada del tubo ( $z = 0$ ) la velocidad va en una sola dirección (eje  $z$ ) manteniendo el perfil de velocidad parabólico y conforme nos acercamos al final del tubo ( $z = 30$ ) la magnitud y dirección de la velocidad respecto al eje  $y$  positivo empieza a cambiar debido a la convección que se presenta en el fluido para un  $t = 39$ .

En la figura 3.3 tenemos la temperatura del fluido en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = \pm 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  (parte superior e inferior del tubo) en un  $t = 39$ .

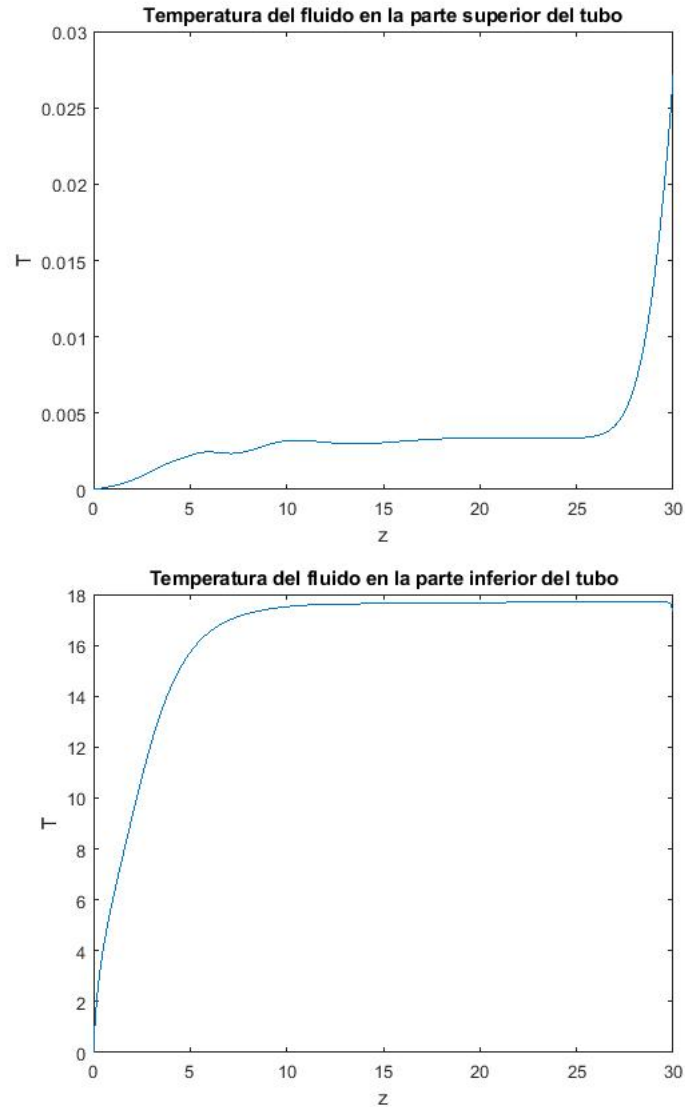


Figura 3.3: [a] Temperatura del fluido en función de  $z$  en la parte superior del tubo para  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0,49$  en  $t = 39$ . [b] Temperatura del fluido en función de  $z$  en la parte inferior del tubo para  $\theta = -\pi/2$  y  $r = 0,49$  en  $t = 39$  En estas gráficas podemos observar como la temperatura del fluido es mayor en la parte inferior del tubo.

De acuerdo a la gráfica anterior podemos decir, que en la parte inferior la temperatura aumenta casi 18 unidades y luego permanece constante hasta el final del tubo y en la parte superior el aumento de temperatura es pequeño a la entrada y salida del tubo.

Para el segundo caso se tomó el valor de  $Re=1000$  y  $Gr=100000$  teniendo así un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,1$ . En la figura 3.4 se muestra un corte transversal del tubo donde se observa el campo de velocidades y la formación de las celdas convectivas debido a la temperatura en la parte superior e inferior del tubo para un valor de  $z = 27$  fijo con un  $t = 39$ , se tomaron estos valores porque se observa mejor el comportamiento del flujo cuando hay un mayor cambio de temperatura.

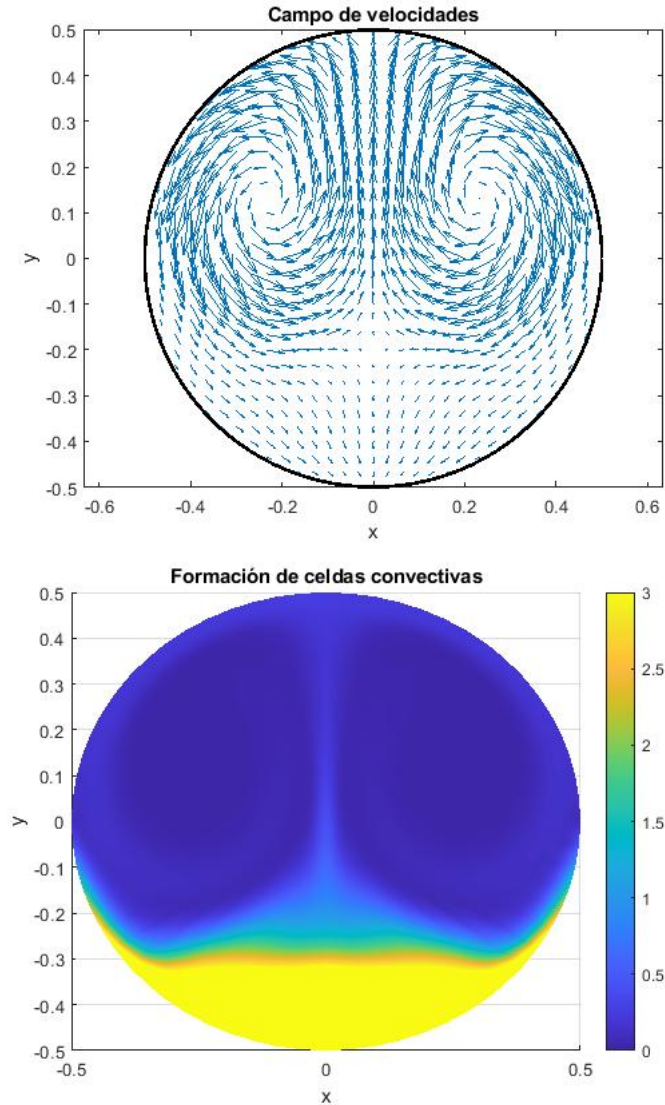


Figura 3.4: [a] Corte transversal del tubo donde se muestra el campo de velocidades. [b] Formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del fluido es mayor en la parte inferior del tubo para el mismo plano que la gráfica anterior. Ambas gráficas tienen un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=100000$  con  $\alpha = 0,1$  en  $z = 27$  con  $t = 39$ .

Para observar cómo es el campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  se tomó un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  en un tiempo  $t = 39$  (figura 3.5).



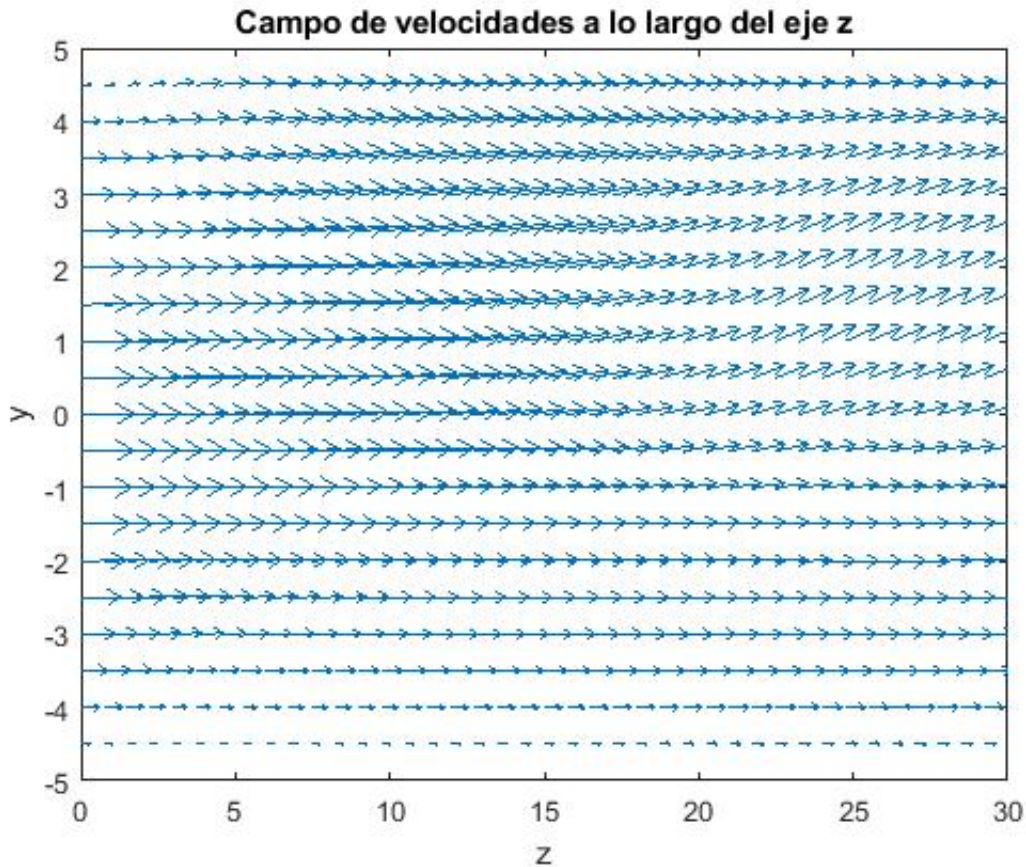


Figura 3.5: Campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  en un tiempo  $t = 39$ , donde se observa un cambio de dirección de velocidad tanto en dirección como en magnitud en el eje  $y$  positivo antes de salir del tubo.

Para este caso se podría decir que a simple vista el campo de velocidades de la figura 3.4 [a] es similar al campo de velocidades de la figura 3.1 [a] pero no es así, ya que en la figura 3.5 podemos notar que a la entrada del tubo ( $z=0$ ) la velocidad sigue yendo en una sola dirección (eje  $z$ ) pero conforme nos acercamos a la parte media ( $z=15$ ) la dirección de la velocidad en el eje  $y$  positivo cambia y la magnitud aumenta conforme nos acercamos a la salida del tubo debido a que la convección es mayor para un  $\alpha = 0,1$  en un tiempo de  $t = 39$ .

En la figura 3.6 tenemos la temperatura del fluido en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pi/2$  para la parte superior y  $\theta = -\pi/2$  para la parte inferior del tubo en un tiempo de  $t = 39$

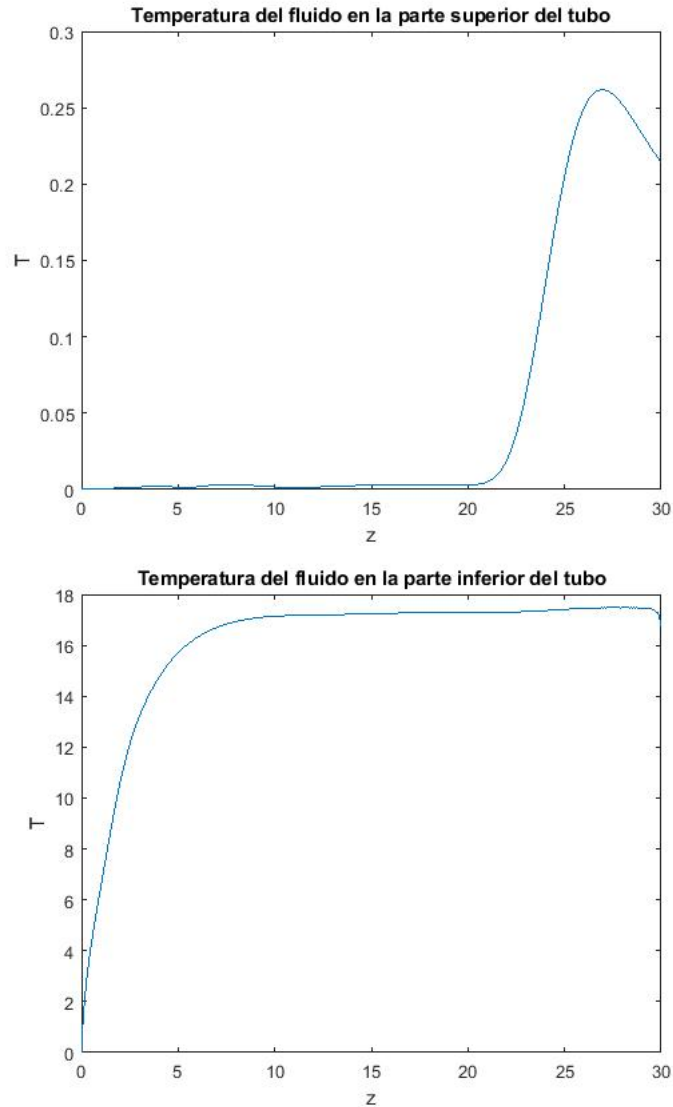


Figura 3.6: [a] Temperatura del fluido en función de  $z$  en la parte superior del tubo para  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo de  $t = 39$ . [b] Temperatura del fluido en función de  $z$  en la parte inferior del tubo para  $\theta = -\pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo de  $t = 39$ . En éstas gráficas podemos observar cómo la temperatura del fluido es mayor en la parte inferior del tubo.

De acuerdo a la figura 3.6 en la parte superior a la entrada del tubo la temperatura del fluido es muy pequeña y permanece constante, luego al acercarnos a la salida el fluido aumenta su temperatura aproximadamente a 0.26 unidades y luego vuelve a disminuir. Esta variación de temperatura se debe que las partículas ya tienden a subir y a bajar debido a una convección mayor.

Para la parte inferior, el fluido aumenta su temperatura a la entrada y luego permanece constante hasta el final del tubo, alcanzando una temperatura de 17 unidades.

Finalmente para el último caso con un número de  $Re=2000$  y  $Gr=2000000$  se tuvo un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,5$ . Para esta última parte se disminuyó el tamaño de paso



temporal en la simulación numérica ya que empezaron aparecer inestabilidades en el flujo.

En la figura 3.7 se muestra un corte transversal del tubo donde se observa el campo de velocidades y la distribución de temperaturas para la formación de las celdas convectivas para un valor de  $z = 27$  fijo con un tiempo de  $t = 32$ , se tomaron estos valores porque se observa mejor el comportamiento del flujo cuando hay un mayor cambio de temperatura, además de que nuestra simulación falló para tiempos posteriores a éste debido a la inestabilidad del flujo.

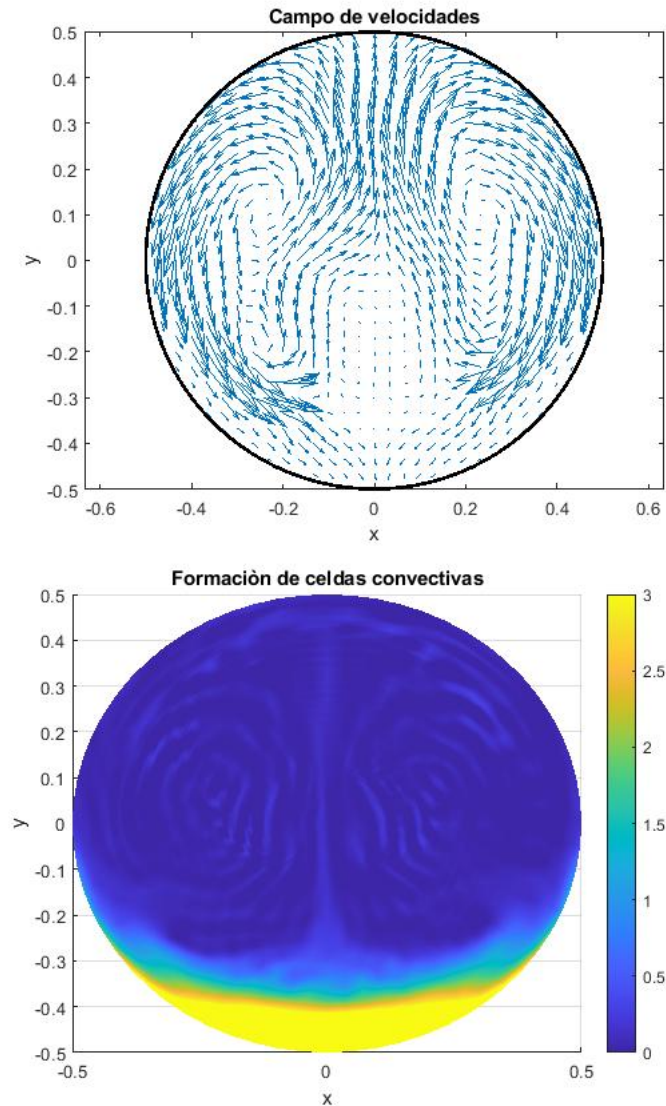


Figura 3.7: [a] Corte transversal del tubo donde se muestra el campo de velocidades. [b] Formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo para el mismo plano de la gráfica anterior. Ambas gráficas tienen un valor de  $Re=2000$  y  $Gr=2000000$  con  $\alpha = 0,5$  en  $z = 27$  con un tiempo de  $t = 32$ .

Para este caso notamos que el flujo ya no es laminar debido a que se empiezan a tener fluctuaciones que provocan un rompimiento en la simetría del campo de velocidades, también

al tener un coeficiente de flotabilidad mayor a los casos anteriores (figura 3.1[b] y 3.4[b]), es mejor la formación de celdas convectivas que ayudan a tener un mejoramiento en el mezclado del fluido para  $\alpha = 0,5$  (figura 3.7[b]).

Para observar como es el campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  se tomó un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  para un tiempo  $t = 32$  (figura 3.8).

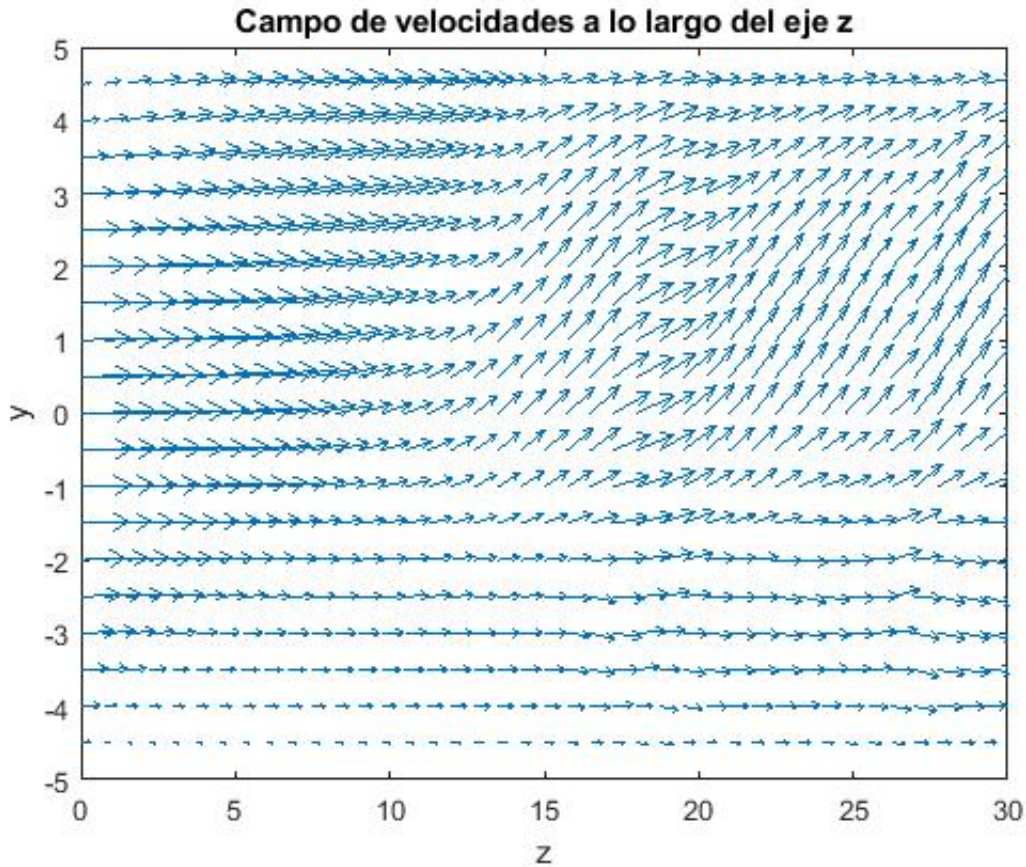


Figura 3.8: Campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  para un tiempo  $t = 32$ , donde se observa que antes de llegar a la mitad del tubo hay un cambio de dirección en la velocidad en el eje  $y$  y la magnitud aumenta a la salida.

En la figura 3.8 podemos notar que hay una velocidad mayor en la parte superior del tubo. Antes de llegar a la mitad del tubo ( $z=15$ ), la magnitud y dirección de la velocidad empiezan a aumentar ligeramente hasta llegar a la salida con una velocidad mucho mayor comparada con la figura 3.2 y 3.5. Este cambio de velocidad se debe a que el coeficiente de flotabilidad es muy grande provocando rápidamente la formación de celdas convectivas.

En la figura 3.9 tenemos la temperatura del fluido en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pi/2$  para la parte superior y  $\theta = -\pi/2$  para la parte inferior del tubo en un tiempo  $t = 32$ .

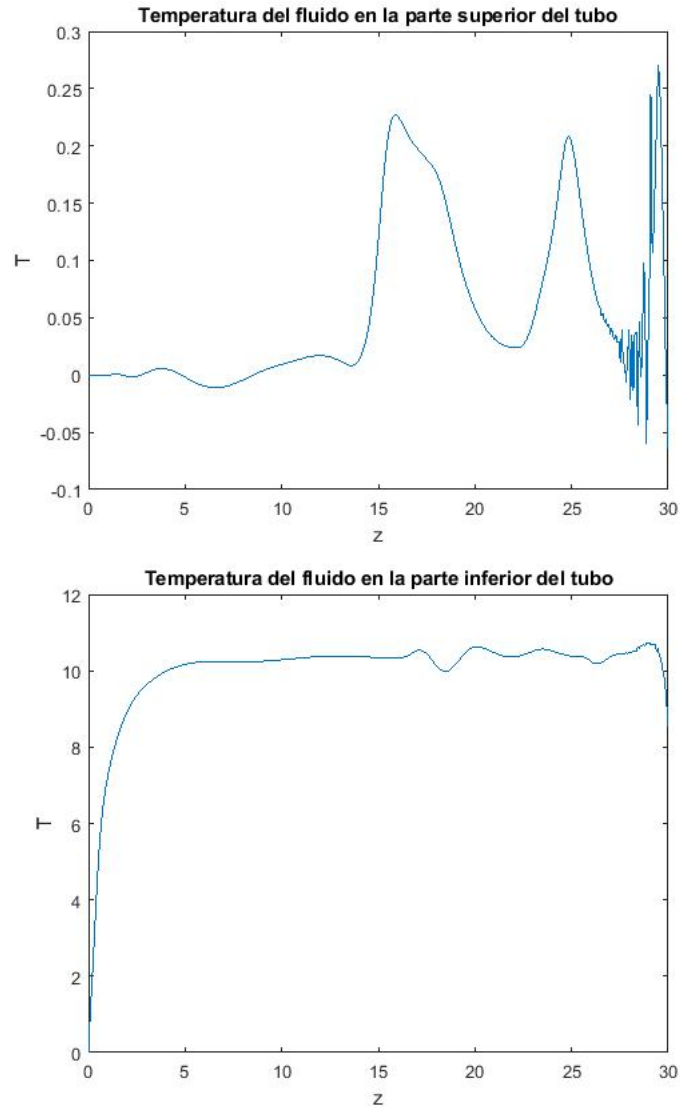


Figura 3.9: [a]Temperatura del fluido en función de  $z$  en la parte superior en  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo  $t = 32$ . [b]Temperatura del fluido en función de  $z$  en la parte inferior en  $\theta = -\pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo  $t = 32$ . En éstas gráficas podemos observar como la temperatura del fluido es mayor en la parte inferior del tubo.

De acuerdo a la figura 3.9 en la parte inferior, a la entrada la temperatura del flujo aumenta y se mantiene casi constante hasta la salida del tubo. Para la parte superior, la temperatura del flujo es menor y tiene variaciones debido a que las partículas suben y bajan varias veces y a la salida del tubo al tener un flujo inestable la temperatura tiene fluctuaciones.

La temperatura que se alcanzó en la parte inferior en la figura 3.9 es menor comparada con la temperatura inferior de las figuras 3.3 y 3.6. Esta disminución de temperatura se debe a que se usó un valor de  $Re = 2000$  y de acuerdo a la ec. 1.57 al tener un valor de  $Re$  grande la velocidad tiende a aumentar de tal modo que el fluido no alcanza a calentarse lo suficiente.

Ahora, para los tres casos anteriores ( $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,1$  y  $\alpha = 0,5$ ) existe una deformación

del perfil parabólico a lo largo del eje  $z$  debido al incremento de temperatura del fluido.

En la figura 3.10 se muestra únicamente la deformación del perfil de velocidad parabólico para  $\alpha = 0,5$ , debido a que en este caso se logra observar mejor la deformación. Para  $z = 0$  para un  $t = 0,2$  tenemos un perfil de velocidad parabólico debido a que aún no hay algún cambio de temperatura en el fluido sin embargo, para un valor de  $z = 27$  a un  $t = 32$  ya existe una deformación del perfil de velocidad parabólico. Ésta deformación depende del coeficiente de flotabilidad, pues entre mayor sea  $\alpha$  mayor será la deformación del perfil parabólico.

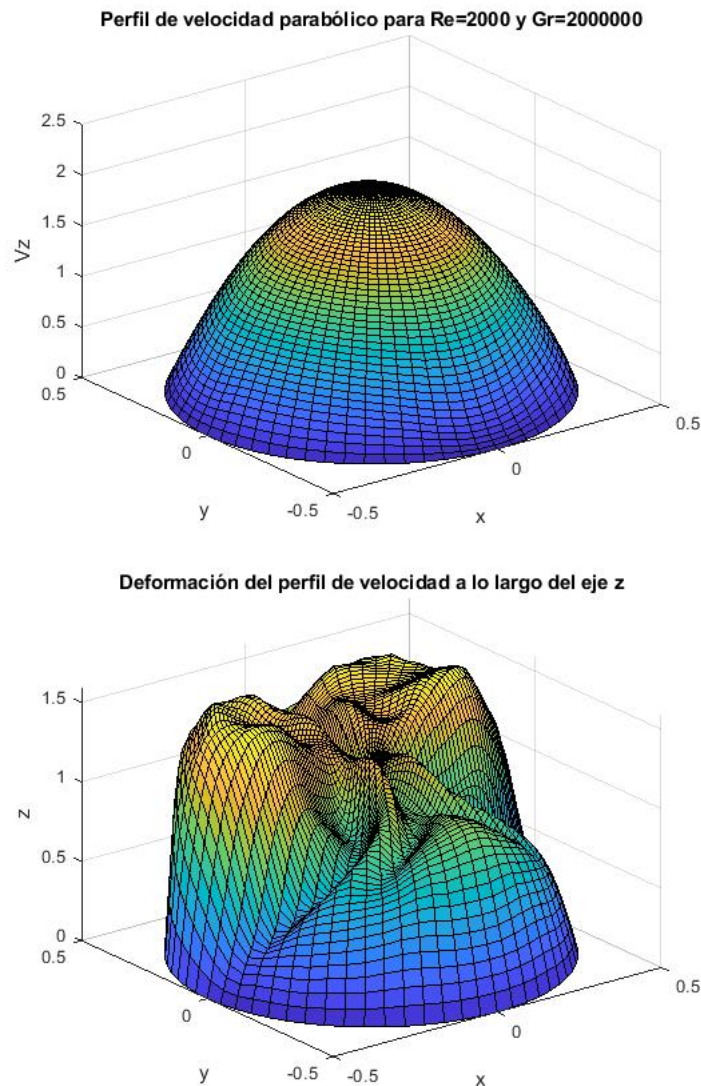


Figura 3.10: [a] Perfil de velocidad parabólico para un valor de  $z = 2$  a un  $t = 0,2$  con  $Re = 2000$  y  $Gr = 2000000$ . Este perfil de velocidad parabólico se presenta en los casos con  $\alpha = 0,05$  y  $\alpha = 0,1$  debido a que es una condición de frontera. [b] Deformación del perfil de velocidad parabólico para un valor de  $z = 27$  a un  $t = 32$  con un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,5$  con valor de  $Re = 2000$  y  $Gr = 2000000$ .

### 3.2. Trayectorias de las partículas

Se tomaron diferentes posiciones a lo largo del radio del tubo para observar cómo influye la temperatura en la trayectoria de las partículas en diferentes partes del tubo.

Para todos los casos ( $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,1$  y  $\alpha = 0,5$ ) se usó la tabla 3.1 donde se muestran los valores de la posición inicial de la partícula en la coordenada  $r$  (cabe señalar que para la posición  $r = 0,053$  estamos cerca del centro del tubo y para la posición  $r = 0,495$  nos encontramos cerca de la pared).

Valores de la coordenada $r$
0.053
0.122
0.181
0.222
0.281
0.315
0.380
0.410
0.452
0.495

Tabla 3.1: Valores para la posición inicial de la partícula en la coordenada  $r$ .

Se fijó el valor de la coordenada  $z$  con un valor de  $z = 0,810$  y la coordenada angular tomó valores de  $\theta = \pm\pi/4$  y  $\theta = \pm3\pi/4$ , ya que en estos ángulos el flujo tiene mayor movimiento debido a la formación de celdas convectivas.

A continuación se muestran las trayectorias para un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,05$ .

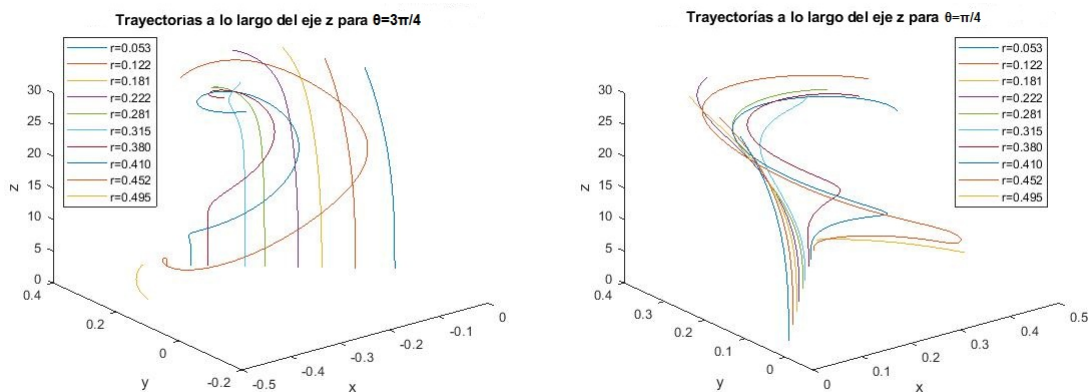


Figura 3.11: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = 3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,05$  y  $z = 0,810$



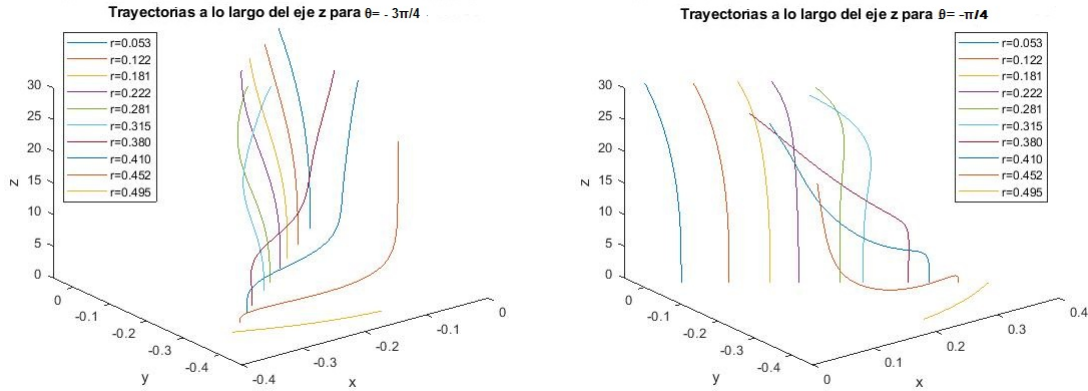


Figura 3.12: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,05$  y  $z = 0,810$

De acuerdo a la figura 3.11 notamos que las trayectorias son opuestas entre sí, lo mismo ocurre para las trayectorias de la parte inferior del tubo (figura 3.12). Debido a que la convección es mínima, las partículas de la parte inferior y cerca del centro del tubo sólo tienden a subir mientras que las partículas que se encuentran cerca de la pared en la parte superior tiene trayectorias circulares con un radio de giro muy pequeño.

Ahora para un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,1$  tenemos las siguientes trayectorias para la parte superior del tubo:

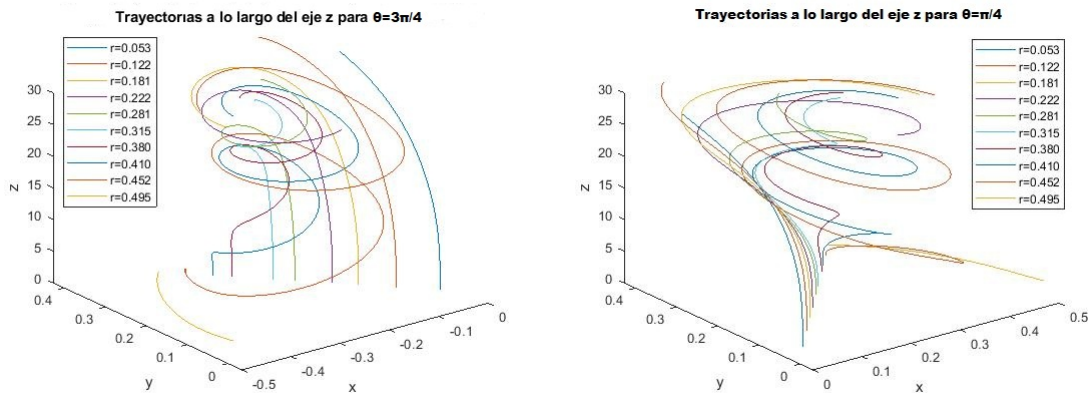


Figura 3.13: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = 3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,1$  y  $z = 0,810$

Y para la parte inferior del tubo tenemos:

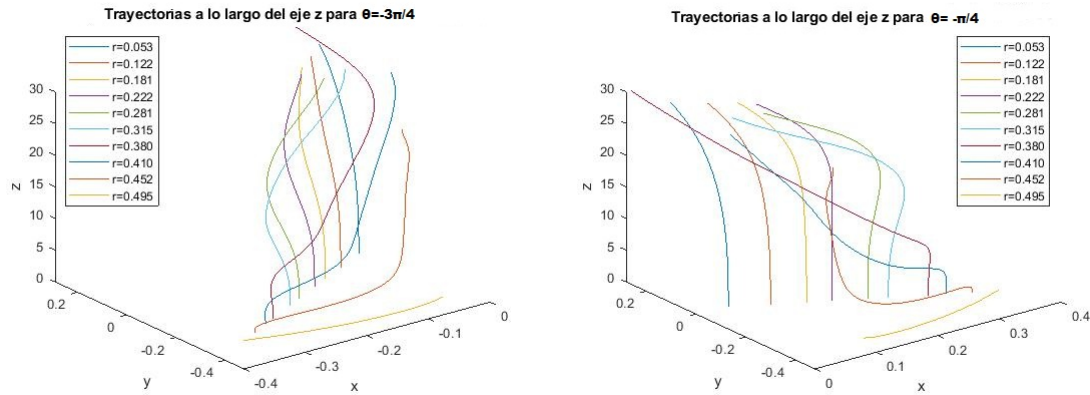


Figura 3.14: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,1$  y  $z = 0,810$

En este caso observamos que las partículas que se encuentran en la parte inferior del tubo tienden a subir mientras que las partículas que se encuentran en la parte superior bajan y suben varias veces aumentando su radio de giro conforme se acercan a la salida del tubo.

Por último, para un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,5$  para la parte superior del tubo tenemos las siguientes trayectorias:

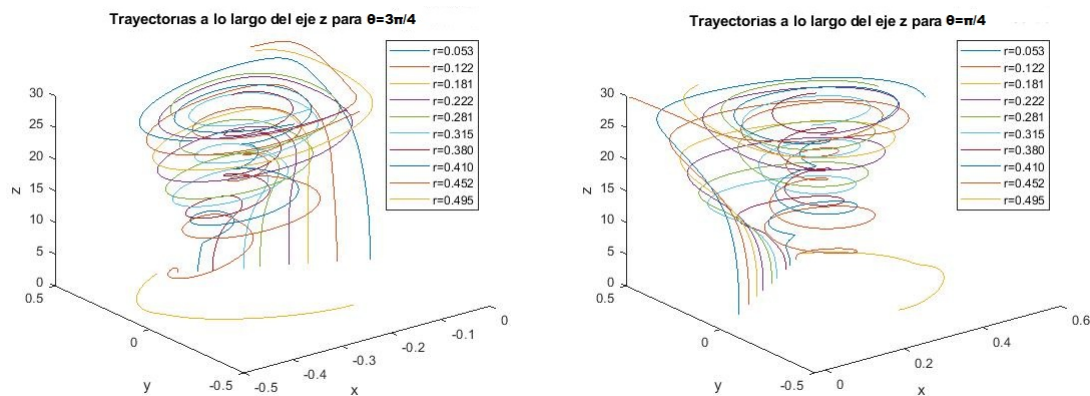


Figura 3.15: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = 3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,5$  y  $z = 0,810$

Y para la parte inferior las trayectorias son:

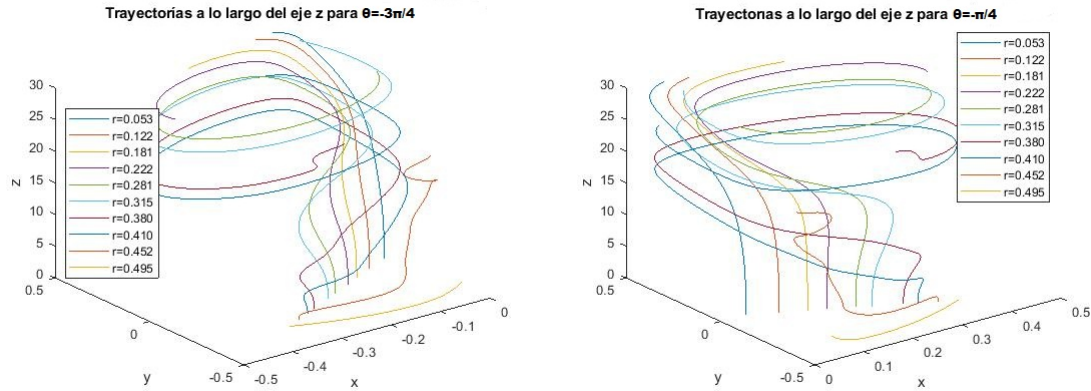


Figura 3.16: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje z para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje z para un ángulo de  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,5$  y  $z = 0,810$

De acuerdo a la figura 3.15 y 3.16 notamos que la mayoría de las partículas tanto de la parte superior e inferior tienen trayectorias circulares aumentando su radio de giro conforme se acercan a la salida del tubo.

Cabe señalar que las trayectorias de las partículas que se encuentran cerca de la pared son muy cortas debido a que la velocidad es muy pequeña. Finalmente, conforme se aumenta el coeficiente de flotabilidad el radio y el número de giros a lo largo de la trayectoria de las partículas aumenta.

### 3.3. Cambio de Temperatura a lo largo de la trayectoria.

En este caso se analizó a dos partículas que están en  $\theta = \pi/4$  para la parte superior del tubo y a dos partículas que están en  $\theta = -\pi/4$  para la parte inferior, esto con la finalidad de observar como influye la distribución de temperatura en la trayectoria de las partículas dentro del tubo (figura 3.17) .



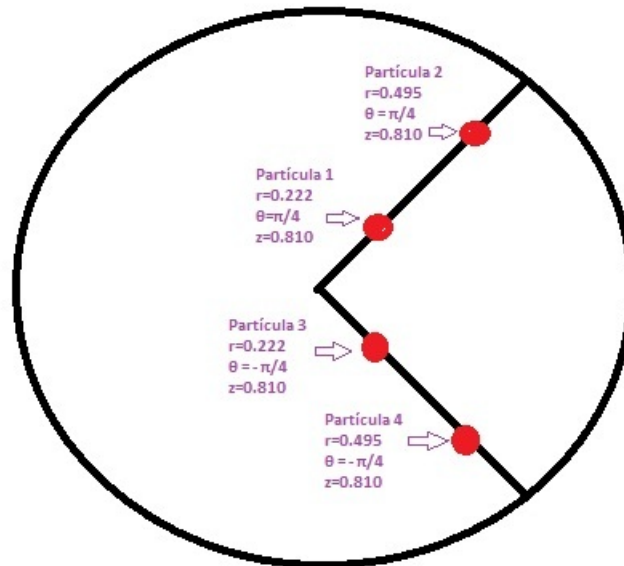


Figura 3.17: Corte transversal del tubo donde se muestran a dos partículas en la parte inferior y superior del tubo.

Como las trayectorias son opuestas entre sí debido a la simetría del tubo se tomó únicamente un ángulo de  $\theta = \pm\pi/4$  con  $z = 0,810$ , la coordenada  $r$  con valores de  $r = 0,222$  (cerca del centro) y  $r = 0,495$  (cerca de la pared) para la parte superior e inferior.

Para esta parte sólo vamos a analizar la temperatura a lo largo de la trayectoria de las partículas para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,1$  ya que para los demás casos se tendrá un resultado similar, la única diferencia será que entre mayor sea el número de giros a lo largo de las trayectorias, habrá más variaciones de temperatura.

Para una partícula que se encuentra en una posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$  se tuvo el siguiente cambio de temperatura a lo largo de su trayectoria (figura 3.18).

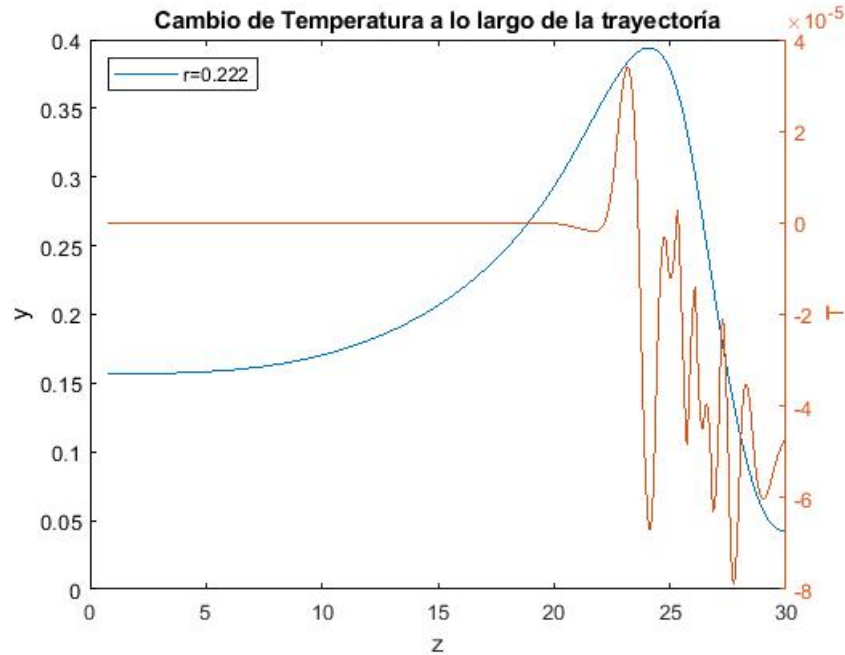


Figura 3.18: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . En esta figura se observa variaciones muy pequeñas de temperatura cuando la partícula sube y baja a lo largo del eje  $z$ .

De la figura 3.18 podemos notar que la temperatura permanece constante desde la entrada al tener una trayectoria casi recta y conforme la partícula empieza a ascender debido a la convección la temperatura aumenta antes de llegar a la salida del tubo. Este cambio de temperatura es muy pequeño debido a que nos encontramos cerca del centro en la parte superior del tubo.

Ahora, el cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria de la partícula que se encuentra en una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$  se obtuvo la figura 3.19.

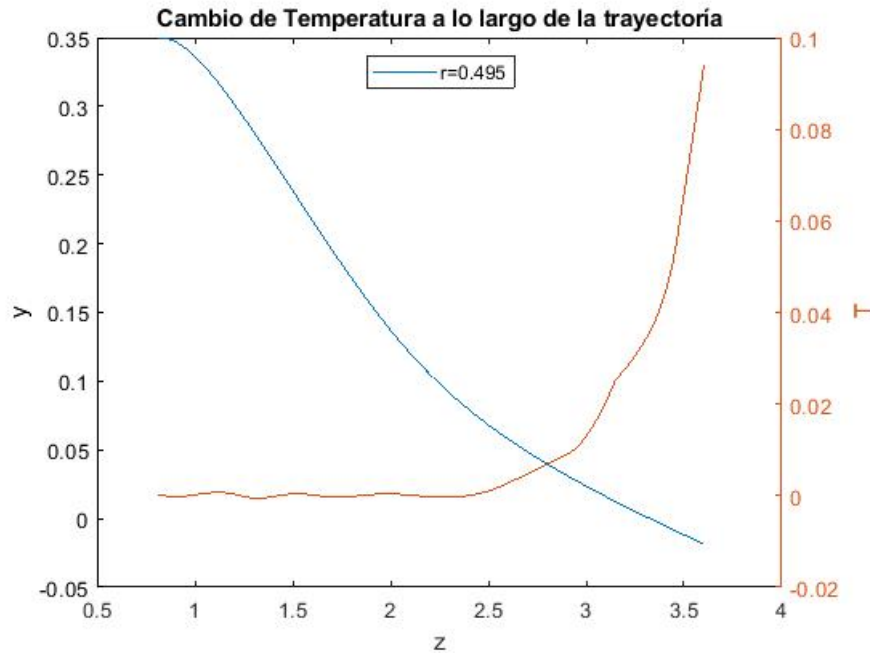


Figura 3.19: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . En esta figura se observa que la temperatura aumenta a lo largo de la trayectoria conforme la partícula desciende al centro del tubo.

De la figura 3.19 podemos observar que la temperatura no tiene variaciones conforme la partícula desciende hasta llegar al centro del tubo aproximadamente. Sin embargo, el cambio de temperatura sigue siendo pequeño ya que la trayectoria de la partícula a lo largo del eje  $z$  es muy corta debido a que la velocidad cerca de la pared es baja.

Ahora, para una partícula que se encuentra en la parte inferior del tubo con una posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = -\pi/4$  se obtuvo el siguiente cambio de temperatura (figura 3.20).

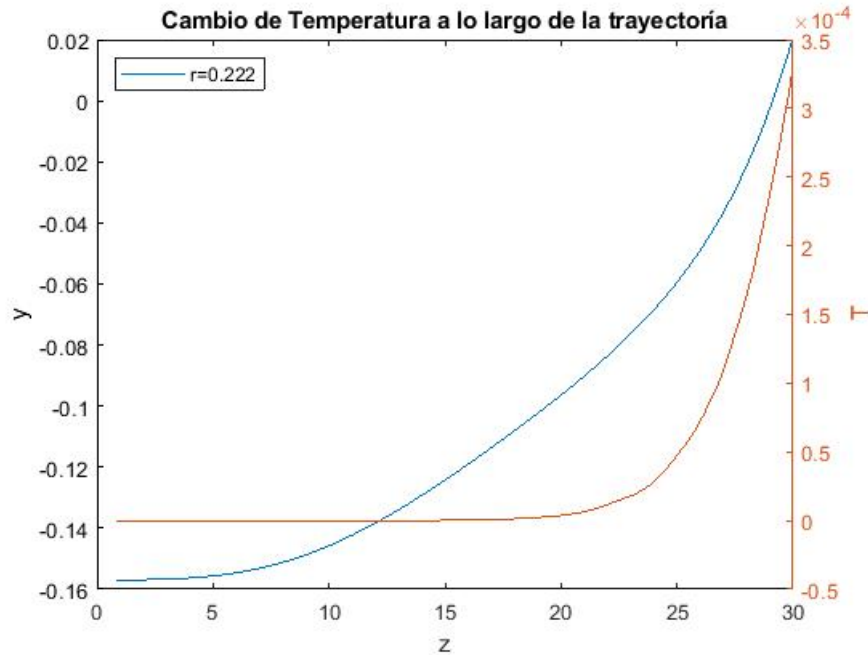


Figura 3.20: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = -\pi/4$ . En esta figura se observa que la temperatura va aumentando conforme la partícula se acerca al centro del tubo.

De la figura 3.20 podemos notar que a la entrada la temperatura permanece constante, cuando la partícula empieza a subir llegando al centro del tubo la temperatura aumenta. Este cambio de temperatura sigue siendo pequeño ya que en la parte superior contamos con temperaturas bajas.

Para otra partícula que se encuentra en la parte inferior del tubo con una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = -\pi/4$  se obtuvo el siguiente cambio de temperatura (figura 3.21).

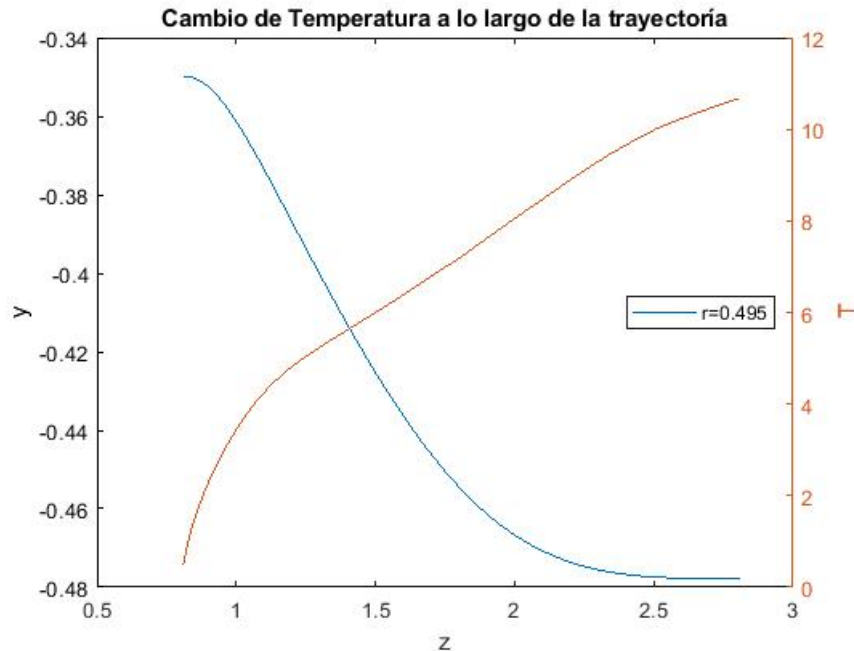


Figura 3.21: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = -\pi/4$ . En esta gráfica se observa que la temperatura aumenta conforme la partícula desciende a la parte inferior del tubo.

De acuerdo a la figura 3.21 la temperatura va aumentando conforme la partícula va descendiendo, la temperatura final es mucho mayor a la de las otras partículas ya que su trayectoria termina muy cerca de la pared en la parte inferior del tubo.

Por lo tanto, generalizando para los tres coeficiente de flotabilidad tenemos que conforme las partículas se acercan a la parte superior la temperatura es baja y conforme se acercan a la parte inferior la temperatura aumenta. Las variaciones de temperatura dependen de la cantidad de giros que tenga la partícula a lo largo de su trayectoria.

### 3.4. Caída de Presión

A continuación se muestra la caída de presión para los tres casos  $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,1$  y  $\alpha = 0,5$  con una posición inicial en  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ , la coordenada  $r$  tomó los valores de la tabla 3.1.

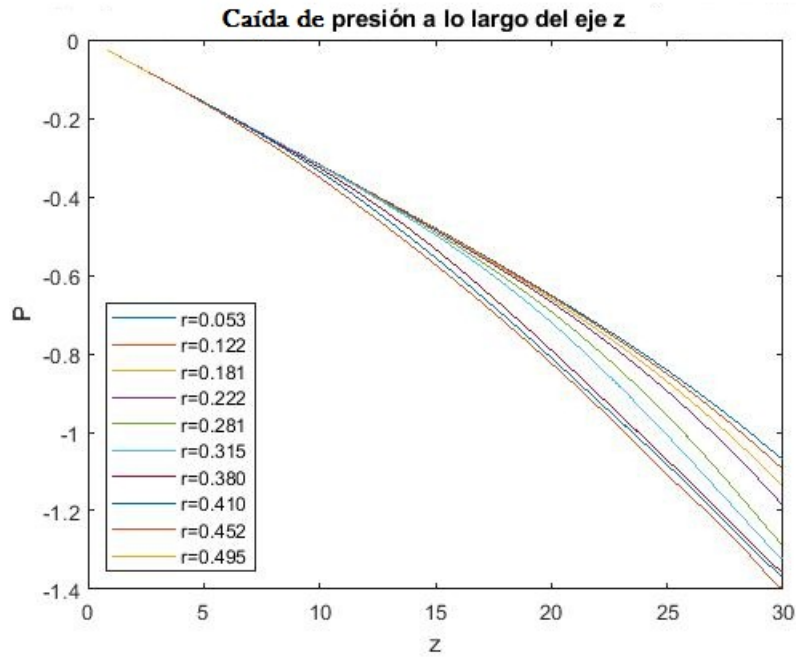


Figura 3.22: Caída de presión a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$  con posición inicial en  $z = 0,810$  para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,05$

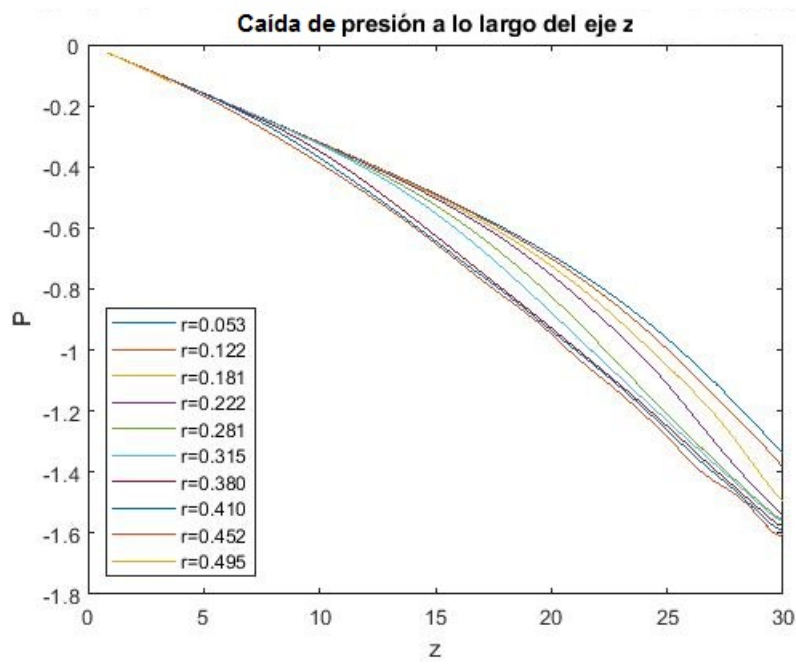


Figura 3.23: Caída de presión a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$  con posición inicial en  $z = 0,810$  para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,1$

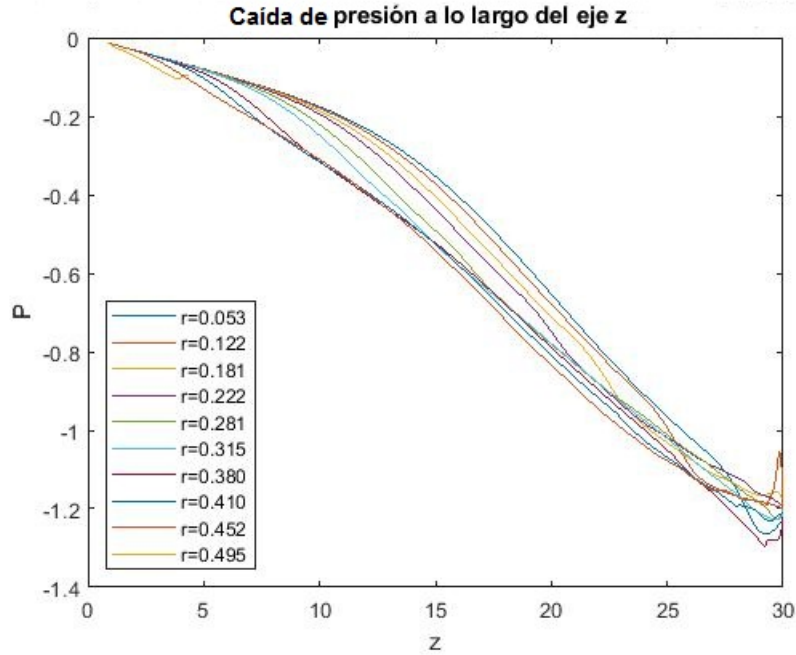


Figura 3.24: Caída de presión a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$  con posición inicial en  $z = 0,810$  para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,5$

Para poder discutir la caída de presión vamos retomar la ec. 1.68 para un flujo que pasa a través de un tubo sin efectos térmicos, si el término  $dP/dx = \Delta P/L$  tenemos:

$$V_{prom} = -\frac{R^2}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} \quad (3.2)$$

despejando  $\Delta P$  y tomando el valor absoluto de la ec. anterior tenemos:

$$|\Delta P| = \frac{LV_{prom}8\eta}{R^2} \quad (3.3)$$

para adimensionalizar la ec. anterior se usó la ec. 2.9 obteniendo:

$$\Delta P^* = \frac{|\Delta P|}{P_0} = \frac{|\Delta P|}{\rho V^2}$$

sustituyendo  $|\Delta P|$  en la ec. anterior,

$$\begin{aligned} \Delta P^* &= \frac{LV_{prom}8\eta}{R^2 \rho V^2} \\ &= \frac{LV_{prom}8\eta}{R^2 \rho V^2} \end{aligned}$$

como  $\nu = \eta/\rho$  tenemos:

$$\Delta P^* = \frac{8LV}{R^2 V_{prom}} \quad (3.4)$$

para escribir la ec. anterior en términos del número de Reynolds tenemos:

$$\Delta P^* = \frac{8L}{\frac{1}{2}R} \frac{\nu}{2RV_{prom}}$$

como  $D = 2R$  y  $1/Re = \nu/DV_{prom}$  finalmente obtenemos:

$$\Delta P^* = \frac{16L}{R} \frac{1}{Re} \quad (3.5)$$

Sustituyendo valores para el radio y la longitud del tubo en la ecuación anterior y resolviendo tenemos:

$$\Delta P^* = \frac{960}{Re} \quad (3.6)$$

sustituyendo para un valor de  $Re = 1000$  la caída de presión es:

$$\Delta P^* = \frac{960}{1000} = 0,96 \quad (3.7)$$

y para un valor de  $Re = 2000$  la caída de presión es:

$$\Delta P^* = \frac{960}{2000} = 0,48 \quad (3.8)$$

la caída de presión de la ec. 3.7 y 3.8 se da cuando el flujo no presenta ningun cambio de temperatura.

Ahora, para nuestros dos primeros casos de acuerdo a las gráficas de caída de presión para  $Re=1000$  tenemos que  $|\Delta P^*| = 1,4$  y  $|\Delta P^*| = 1,6$ , comparando estos resultados con la ec. 3.7 notamos que la caída de presión aumentó cuando existe un cambio de temperatura en el flujo.

De acuerdo a la gráfica de caída de presión para un valor de  $Re=2000$  tenemos que  $|\Delta P^*| = 1,3$  aproximadamente, comparando este resultado con la ec. 3.8 nuevamente la caída de presión aumenta.

Por lo tanto, de acuerdo a la ec. 3.6 conforme se aumenta el número de Reynolds la caída de presión disminuye. Sin embargo, la caída de presión es mayor cuando existe un cambio de temperatura, es decir, se necesita más fuerza para mover el fluido cuando hay convección.





## Capítulo 4

# Resultados y discusión para un concentrador parabólico

### 4.1. Campo de velocidades y perfil de temperatura

Para un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=50000$  tenemos que el coeficiente de flotabilidad es  $\alpha = 0,05$ . En la figura 4.1 se muestra el campo de velocidades y el cambio de temperatura del fluido para un corte transversal del tubo con un valor de  $z = 27$  y  $t = 39$ , se tomaron estos valores ya que se nota mejor el comportamiento del flujo debido al cambio de temperatura.

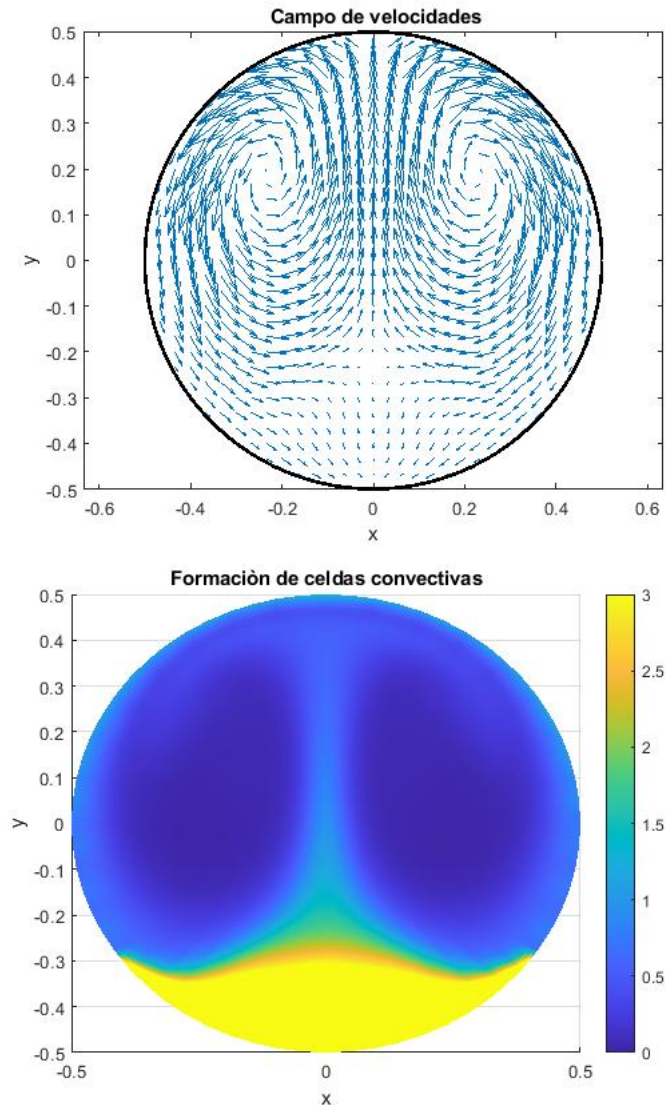


Figura 4.1: [a] Corte transversal del tubo donde se muestra el campo de velocidades. [b] Formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo para el mismo plano que la gráfica anterior. Ambas gráficas tienen un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=50000$  con  $\alpha = 0,05$  en  $z = 27$  y  $t = 39$

Notemos que el campo de velocidades sigue siendo simétrico obteniendo una velocidad mayor en la parte superior del tubo (figura 4.1). Como el flujo tiene una temperatura mayor en la parte inferior se empiezan a formar celdas convectivas debido al cambio de densidad de las partículas. Para  $\alpha = 0,05$  tenemos una convección mínima.

Para observar cómo es el campo de velocidades vista a lo largo del tubo (eje  $z$ ) para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  en  $t = 39$  tenemos la siguiente figura.

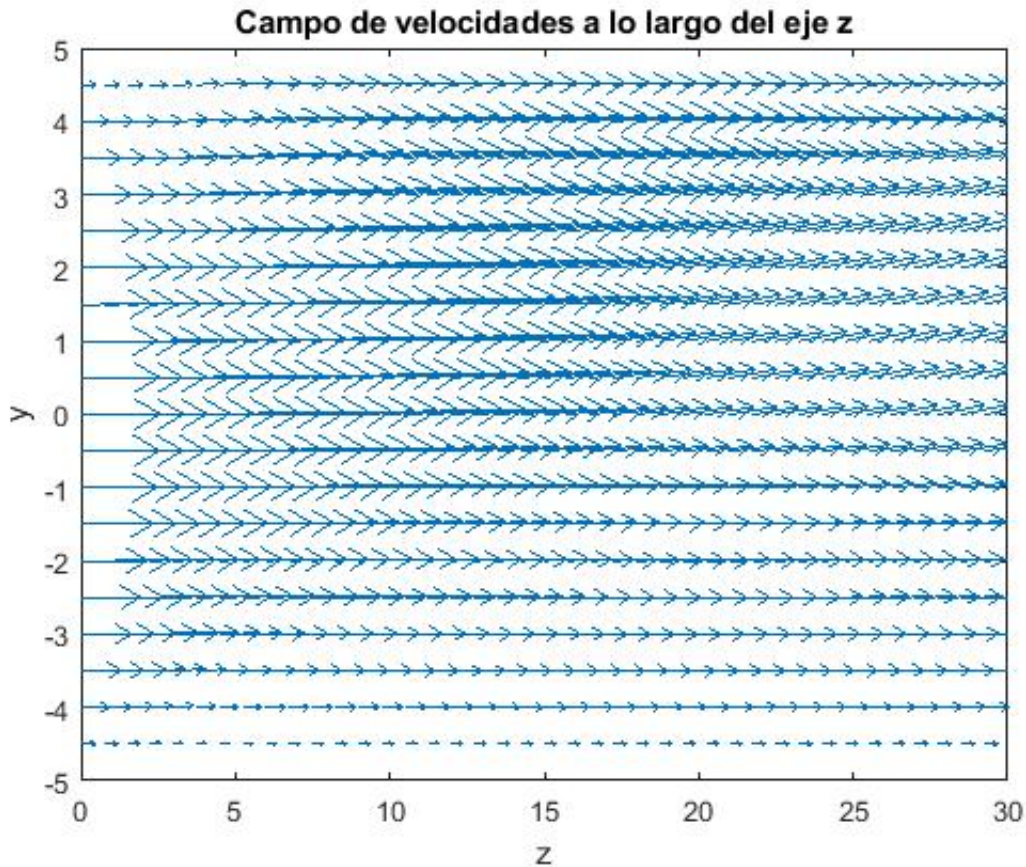


Figura 4.2: Campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  en  $t = 39$ , donde se observa un cambio de velocidad mínimo tanto en dirección como en magnitud en el eje  $y$  positivo antes de salir del tubo

En la figura 4.2 podemos notar que a la entrada del tubo ( $z=0$ ) la velocidad va en una sola dirección (eje  $z$ ) y conforme nos acercamos al final del tubo ( $z=30$ ) la magnitud y dirección de la velocidad respecto al eje  $y$  positivo empieza a cambiar muy ligeramente debido a la convección mínima que se presenta en el flujo para un  $t = 39$ .

En la figura 4.3 tenemos la temperatura del flujo en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pi/2$  para la parte superior y  $\theta = -\pi/2$  para la parte inferior del tubo en un  $t = 39$ .

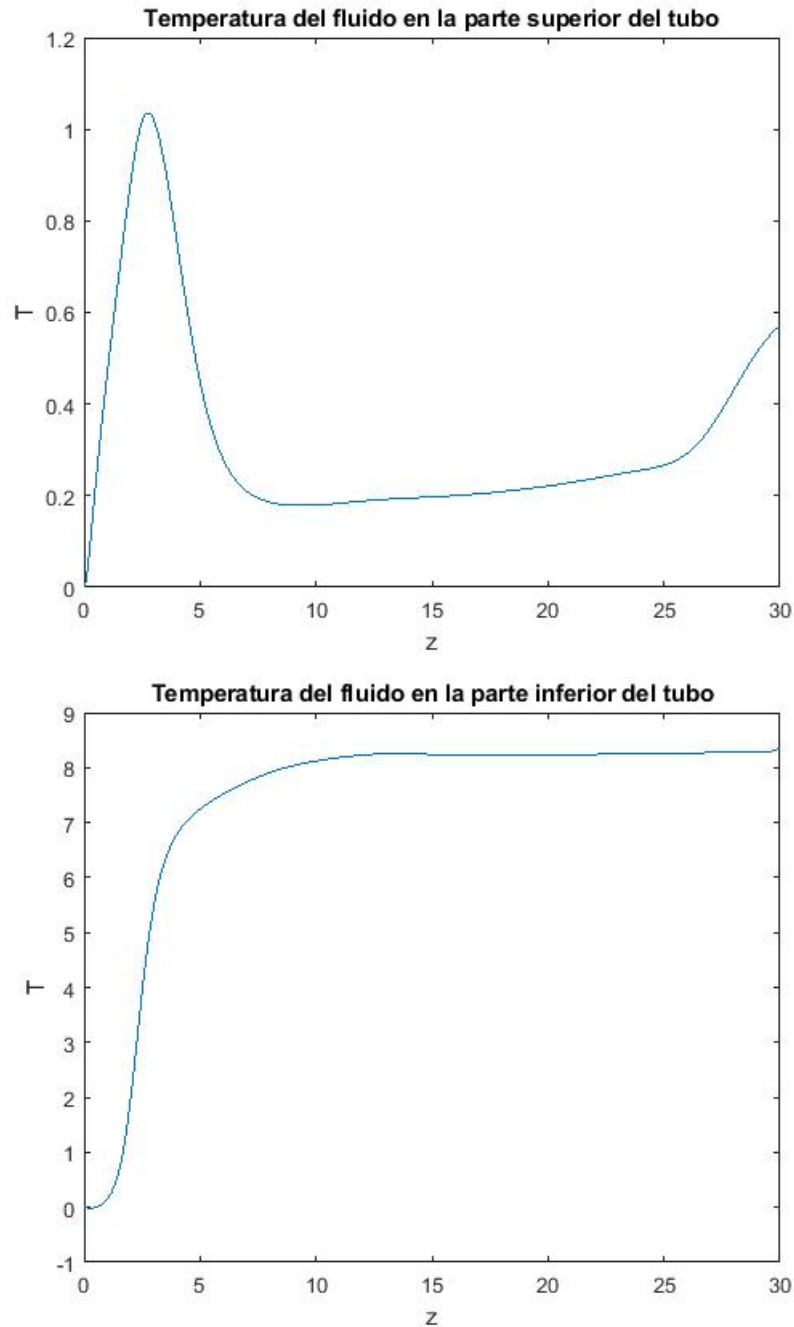


Figura 4.3: [a] Temperatura del flujo en función de  $z$  para la parte superior del tubo en  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0,49$  en  $t = 39$ . [b] Temperatura del flujo en función de  $z$  para la parte inferior del tubo en  $\theta = -\pi/2$  y  $r = 0,49$  en  $t = 39$ . En estas gráficas podemos observar cómo la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior.

De acuerdo a la figura 4.3 podemos notar que en la parte superior la temperatura aumenta y disminuye a la entrada del tubo y luego mantiene una temperatura casi constante a lo largo del eje  $z$  y conforme nos acercamos a la salida la temperatura vuelve a incrementar. Para la parte inferior, la temperatura aumenta a la entrada y permanece constante hasta la salida del tubo alcanzando un valor de 8 unidades aproximadamente.

Para el segundo caso se tomó el valor de  $Re=1000$  y  $Gr=100000$  teniendo así un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,1$ . En la figura 4.4 se muestra un corte transversal del tubo donde se observa el campo de velocidades y la formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo para un valor de  $z = 27$  fijo con un  $t = 39$ , se tomaron estos valores porque se observa mejor el comportamiento del flujo cuando hay un mayor cambio de temperatura.

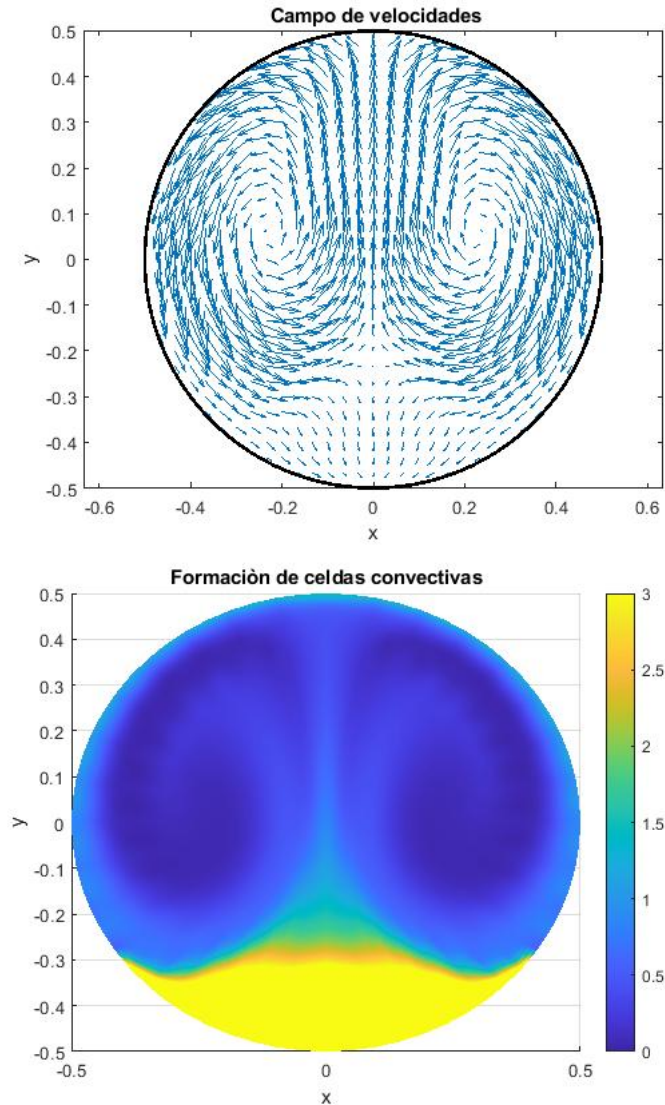


Figura 4.4: [a] Corte transversal del tubo donde se muestra el campo de velocidades. [b] Formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo para el mismo plano que la gráfica anterior. Ambas gráficas tienen un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=100000$  con  $\alpha = 0,1$  en  $z = 27$  con  $t = 39$ .

En la figura 4.4 seguimos conservando la simetría en el campo de velocidades con una velocidad mayor en la parte superior del tubo ocasionada por una diferencia de temperaturas en el flujo. Para observar mejor el comportamiento del campo de velocidades se tomó un plano vertical a lo largo del eje  $z$  en  $\theta = \pm\pi/2$  para un tiempo  $t = 39$  (figura 4.5).



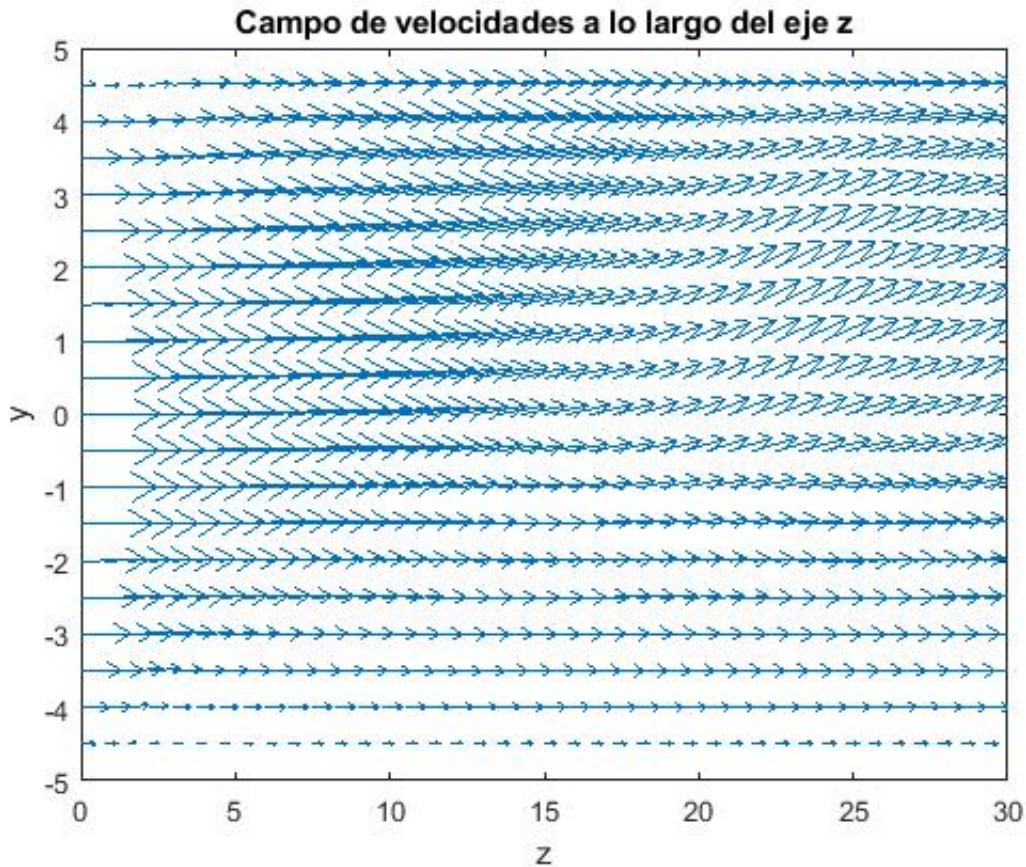


Figura 4.5: Campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  en un tiempo  $t = 39$ , donde se observa un cambio de velocidad pequeño tanto en dirección como en magnitud en el eje  $y$  antes de llegar a la mitad del tubo, conforme nos acercamos a la salida la magnitud aumenta y la dirección cambia.

En la figura 4.5 a la entrada del tubo ( $z=0$ ) la dirección de la velocidad va en una sola dirección (eje  $z$ ) conservando el perfil de velocidad parabólico pero conforme nos acercamos a la mitad del tubo ( $z= 15$ ) hasta la salida ( $z=30$ ) la dirección y la magnitud de la velocidad en el eje  $y$  va aumentando hasta obtener una velocidad mayor a la salida del tubo en la parte superior debido a que la convección es mayor para un  $\alpha = 0, 1$  en un tiempo  $t = 39$ .

En la figura 4.6 tenemos la temperatura del flujo en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pi/2$  para la parte superior y  $\theta = -\pi/2$  para la parte inferior del tubo en un tiempo  $t = 39$ .

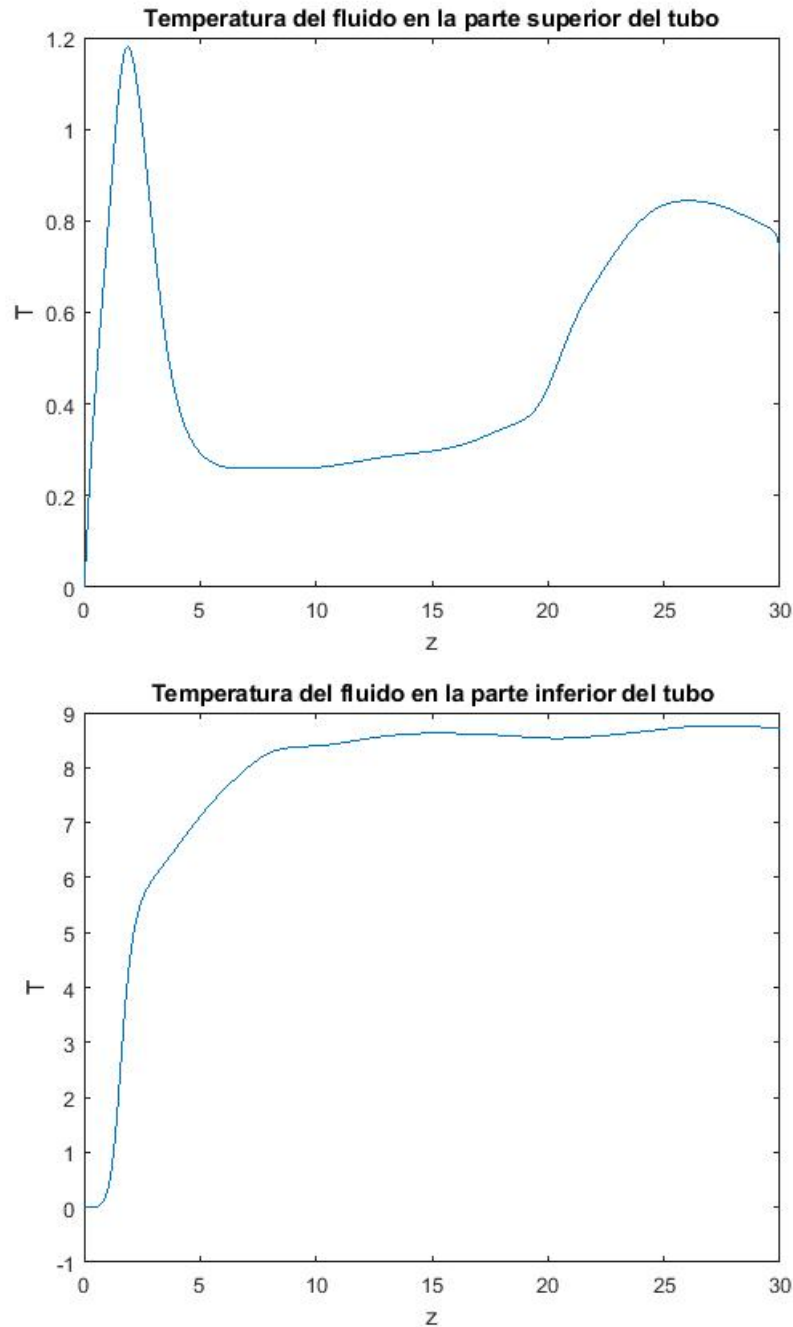


Figura 4.6: [a] Temperatura del flujo en función de  $z$  para la parte superior del tubo en  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo  $t = 39$ . [b] Temperatura del flujo en función de  $z$  para la parte inferior del tubo en  $\theta = -\pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo  $t = 39$ . En estas gráficas podemos observar cómo la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo.

De acuerdo a la figura 4.6 podemos observar que para la parte superior del tubo la temperatura aumenta y disminuye a la entrada y luego permanece casi constante a lo largo del eje  $z$  y al final del tubo la temperatura vuelve a incrementar. Para la parte inferior, la temperatura aumenta a la entrada y luego permanece constante a lo largo del eje  $z$  hasta la salida del tubo alcanzando una temperatura de 8.8 unidades aproximadamente.



Finalmente para el último caso con un número de  $Re=2000$  y  $Gr=2000000$  se tuvo un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,5$ . Para esta última parte se disminuyó el tamaño de paso temporal en la simulación numérica ya que se empezaba a tener un flujo inestable.

En la figura 4.7 se muestra un corte transversal del tubo donde se observa el campo de velocidades y la distribución de temperaturas para la formación de las celdas convectivas para un valor de  $z = 27$  fijo con un tiempo  $t = 25$ , se tomaron estos valores porque se observa mejor el comportamiento del flujo cuando hay un mayor cambio de temperatura, además de que nuestra simulación empezaba a tener inestabilidad a tiempos posteriores.

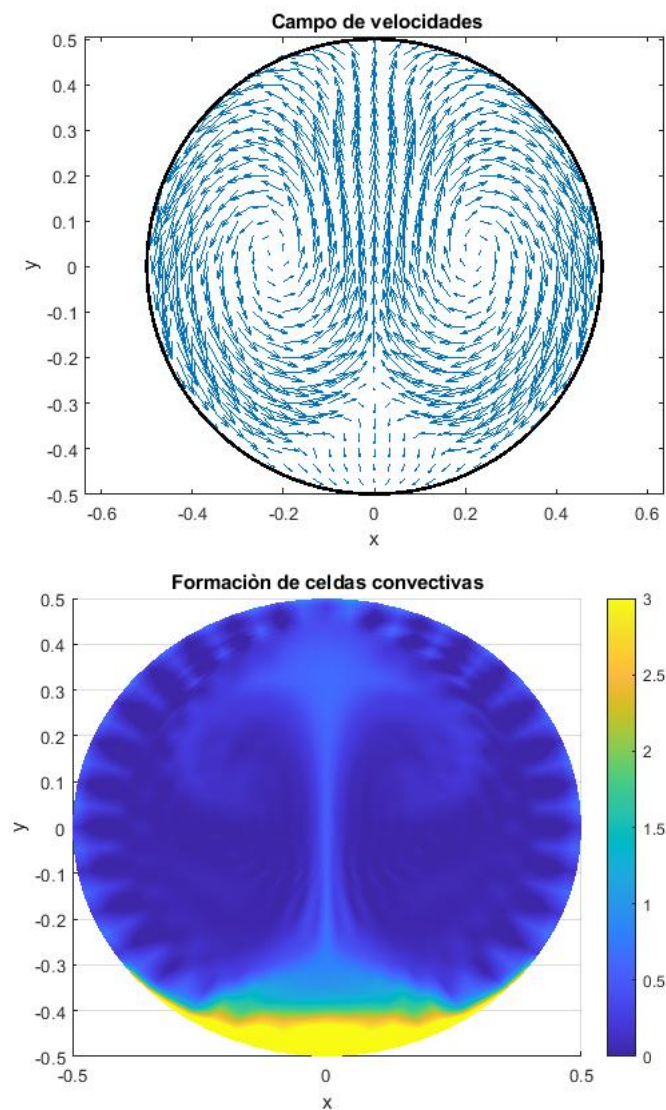


Figura 4.7: [a] Corte transversal del tubo donde se muestra el campo de velocidades.[b]Formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo para el mismo plano de la gráfica anterior. Ambas gráficas tienen un valor de  $Re=2000$  y  $Gr=2000000$  con  $\alpha = 0,5$  en  $z = 27$  con un tiempo  $t = 25$ .

Para este caso notamos que el flujo sigue siendo estable ya que se conserva la simetría en el campo de velocidades, también al tener un coeficiente de flotabilidad mayor a los casos anteriores (figura 4.4[b] y 4.1[b]) hay una mejor formación de celdas convectivas que ayudan a tener un mejoramiento en el mezclado del fluido para  $\alpha = 0,5$  (figura 4.7). Para observar como es el campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  se tomó un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  para un tiempo  $t = 25$  (figura 4.2).

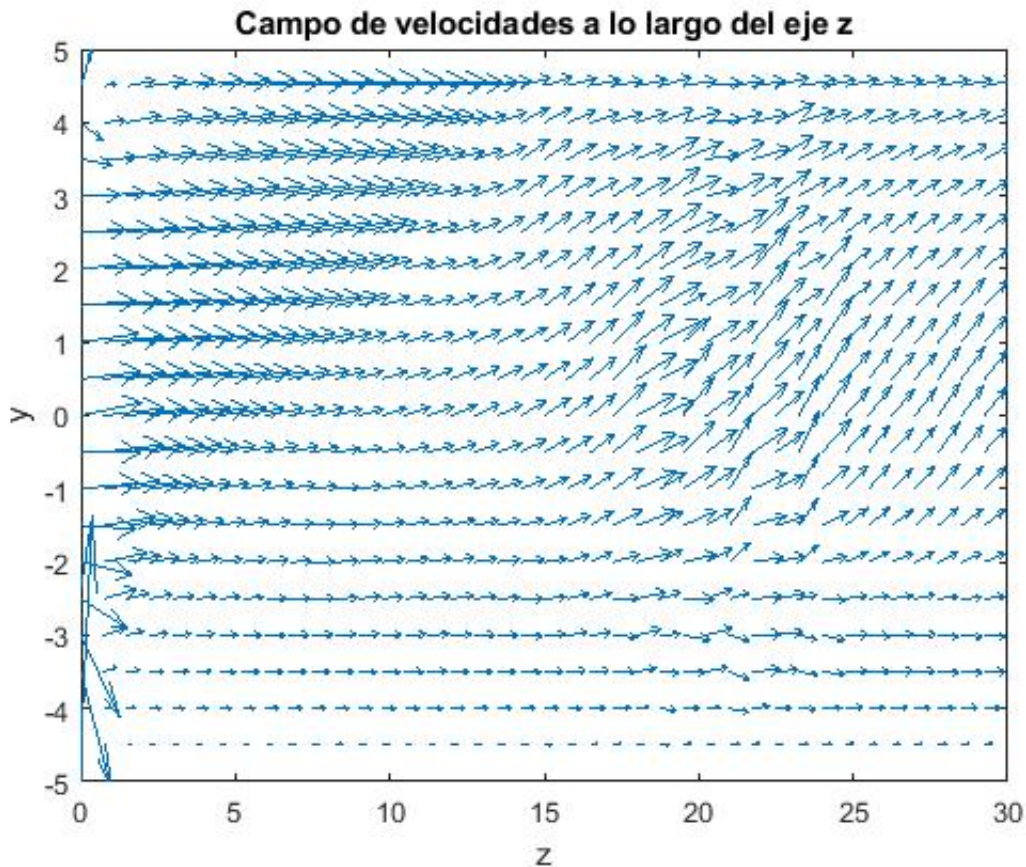


Figura 4.8: Campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  para un tiempo  $t = 32$ , donde se observa que a la entrada y antes de la mitad del tubo hay un cambio de velocidad pequeño en el eje  $y$ , y a la salida hay un cambio de velocidad mayor tanto en dirección como en magnitud.

En la figura anterior podemos ver que ya no se conserva el perfil de velocidad parabólico y que la velocidad a la entrada en el eje  $y$  cambia su dirección aumentando su magnitud hasta la salida del tubo. En este caso, para  $\alpha = 0,5$  ya tenemos una velocidad mucho mayor a la salida debido a que el flujo está en constante movimiento comparado a los casos anteriores (figura 4.2 y 4.5).

En la figura 4.9 tenemos la temperatura del flujo en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pi/2$  para la parte superior y  $\theta = -\pi/2$  para la parte inferior del tubo en un tiempo  $t = 25$

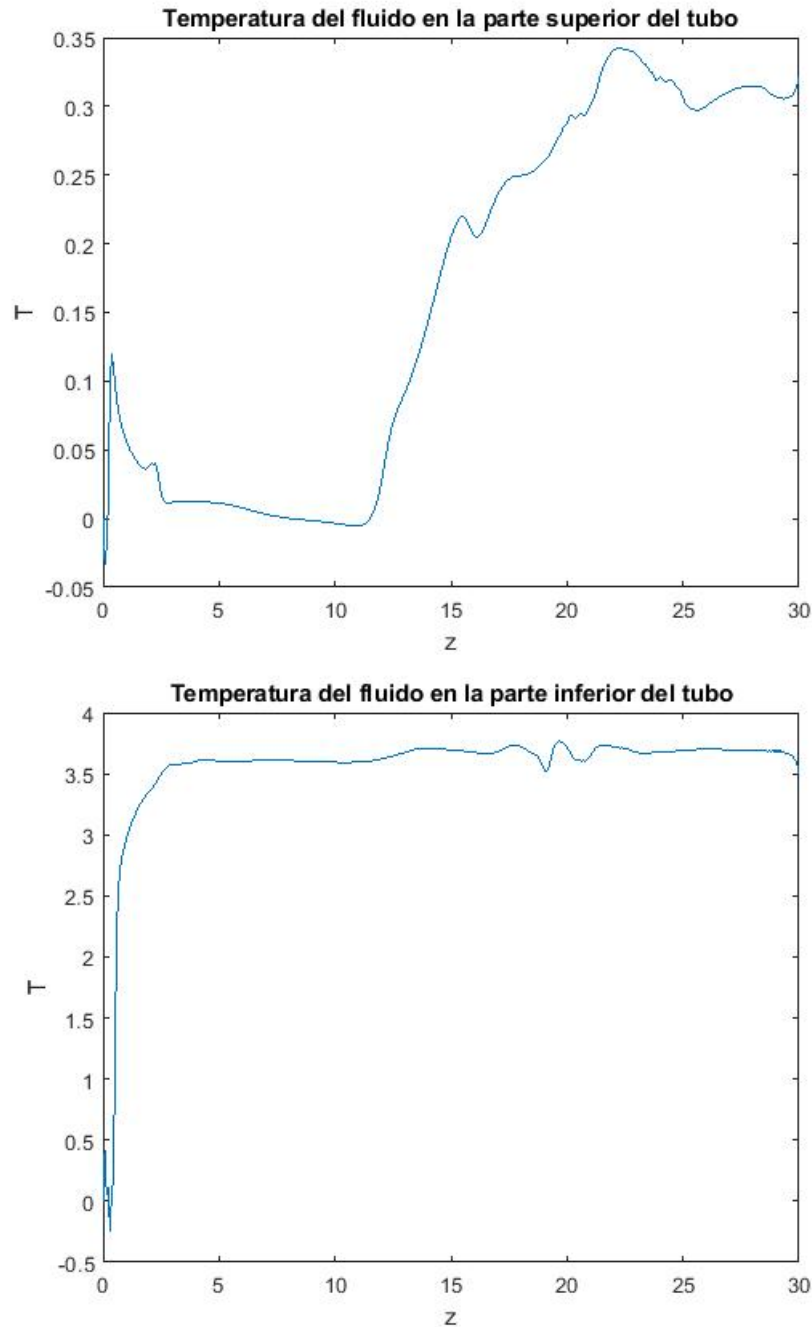


Figura 4.9: [a] Temperatura del flujo en función de  $z$  para la parte superior del tubo en  $\theta = \pi/2$  en  $r = \pm 0,49$  a un tiempo  $t = 25$ . [b] Temperatura del flujo en función de  $z$  para la parte inferior del tubo en  $\theta = -\pi/2$  en  $r = \pm 0,49$  a un tiempo  $t = 25$ . En estas gráficas podemos observar cómo la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo.

En la figura 4.9 podemos observar que en la parte superior la temperatura es mínima a la entrada y luego conforme nos acercamos a la parte media del tubo la temperatura empieza a incrementar hasta la salida. También al tener un movimiento constante en el flujo la temperatura a lo largo del eje  $z$  presenta variaciones muy pequeñas. Para la parte inferior, la temperatura del flujo aumenta a la entrada y se mantiene casi constante hasta la salida

del tubo.

Ahora, para los tres casos anteriores ( $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,1$  y  $\alpha = 0,5$ ) existe una deformación del perfil parabólico a lo largo del eje  $z$  debido al incremento de temperatura del flujo. En este caso sólo se muestra la deformación del perfil de velocidad parabólico para  $\alpha = 0,5$ . Se tomó este coeficiente de flotabilidad ya que la deformación es mayor. En la figura 4.10 para un valor de  $z = 27$  a un  $t = 25$  ya existe una deformación del perfil de velocidad parabólico.

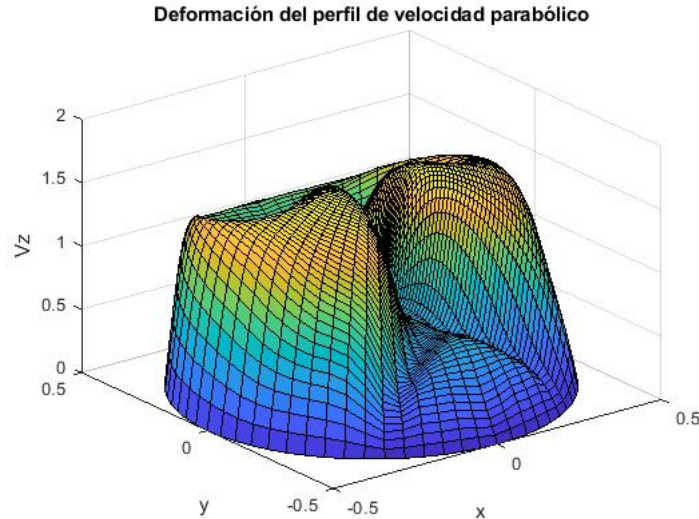


Figura 4.10: Deformación del perfil de velocidad parabólico para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,5$  con valor de  $Re = 2000$  y  $Gr = 2000000$  para  $z = 27$  a un  $t = 25$ .

Esta deformación disminuye cuando el coeficiente de flotabilidad es pequeño.

Por lo tanto, para un concentrador parabólico se mantiene una simetría en la forma del campo de velocidades para un corte transversal y conforme el coeficiente de flotabilidad es mayor la magnitud de la velocidad aumenta en la parte superior del tubo. Tomando en cuenta la forma en la que se calienta el flujo (figura 2.2) tenemos que la temperatura es mayor en la parte inferior, este cambio de temperatura en el flujo genera una deformación en el perfil de velocidad parabólico a lo largo del eje  $z$ .

## 4.2. Trayectorias de las partículas

Se tomó  $\theta = \pm 3\pi/4$  y  $\theta = \pm \pi/4$  ya que en estos ángulos ocurre un mayor movimiento del flujo, también se fijó la coordenada  $z = 0,810$  y la coordenada  $r$  varió de acuerdo a la tabla 3.1.

Para un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,05$  con  $Re = 1000$  y  $Gr = 50000$  tenemos las siguientes trayectorias para la parte superior e inferior del tubo.

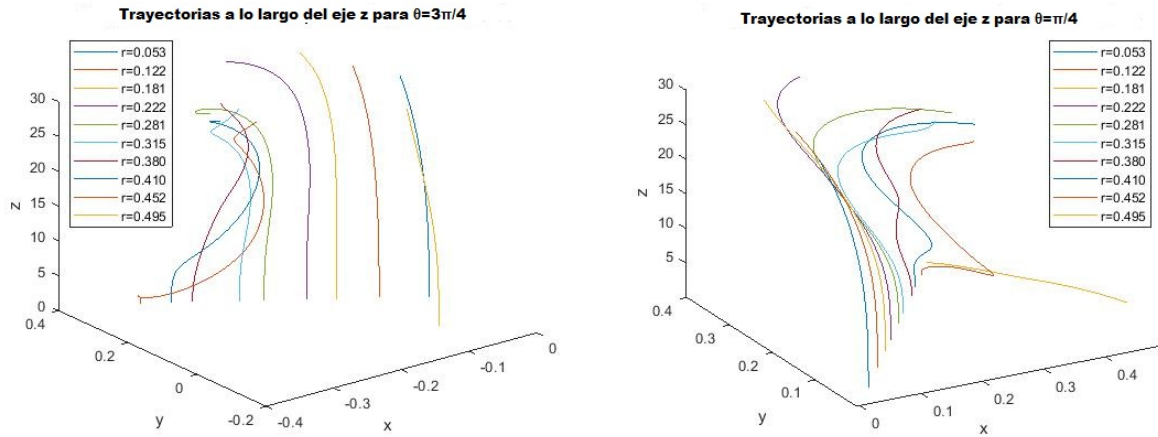


Figura 4.11: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = 3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,05$  y  $z = 0,810$

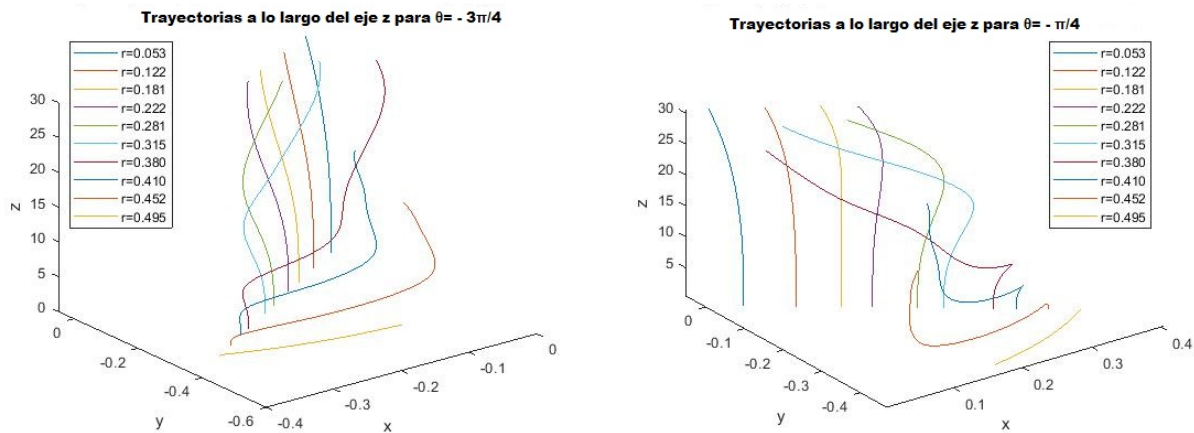


Figura 4.12: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,05$  y  $z = 0,810$

De acuerdo a la figura 4.11 y 4.12 las partículas que se encuentran en la parte inferior y cerca del centro del tubo tienden a subir a la parte superior debido a su baja densidad por el cambio de temperatura. Las partículas que se encuentran cerca de la pared del tubo en la parte superior tienden a bajar y a subir un par de veces, en este caso el radio de giro es muy pequeño.

Para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,1$  con  $Re = 1000$  y  $Gr = 100000$  tenemos las siguientes trayectorias.



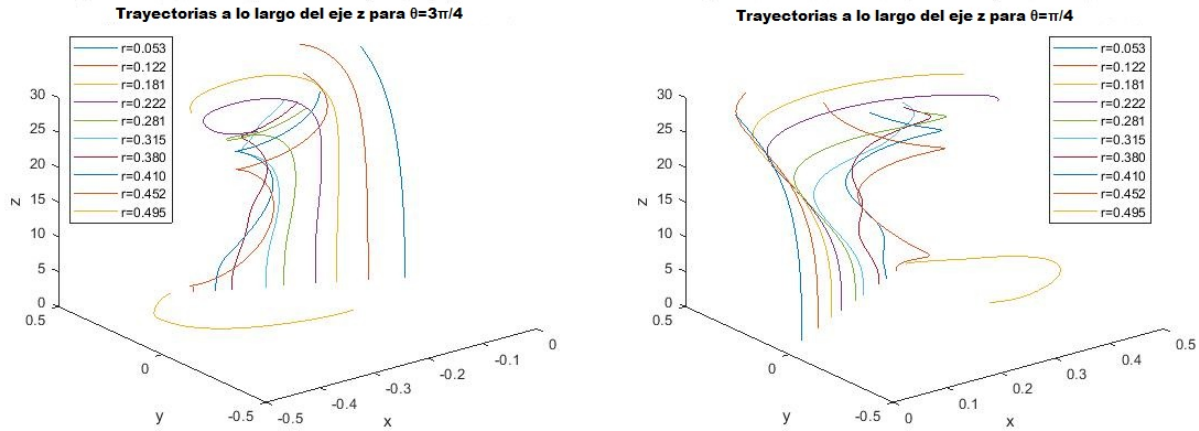


Figura 4.13: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = 3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,1$  y  $z = 0,810$

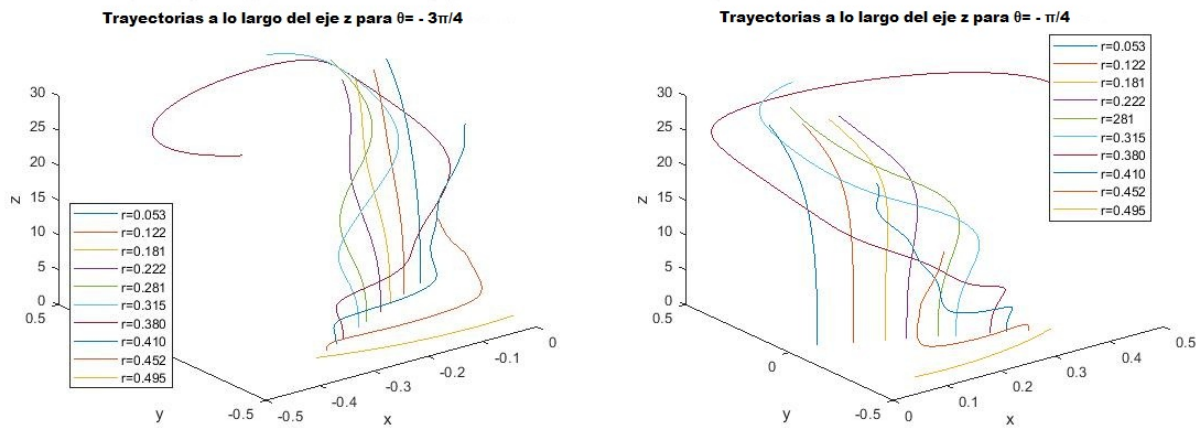


Figura 4.14: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,1$  y  $z = 0,810$

De acuerdo a la figura 4.13 y 4.14 podemos notar que las partículas que se encuentran en la parte inferior y cerca del centro del tubo tienden a subir a la parte superior, y las partículas cercanas a la pared en la parte superior suben y bajan varias veces aumentando su radio de giro conforme se acercan a la salida del tubo.

Para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,5$  con valor de  $Re = 2000$  y  $Gr = 2000000$  tenemos:

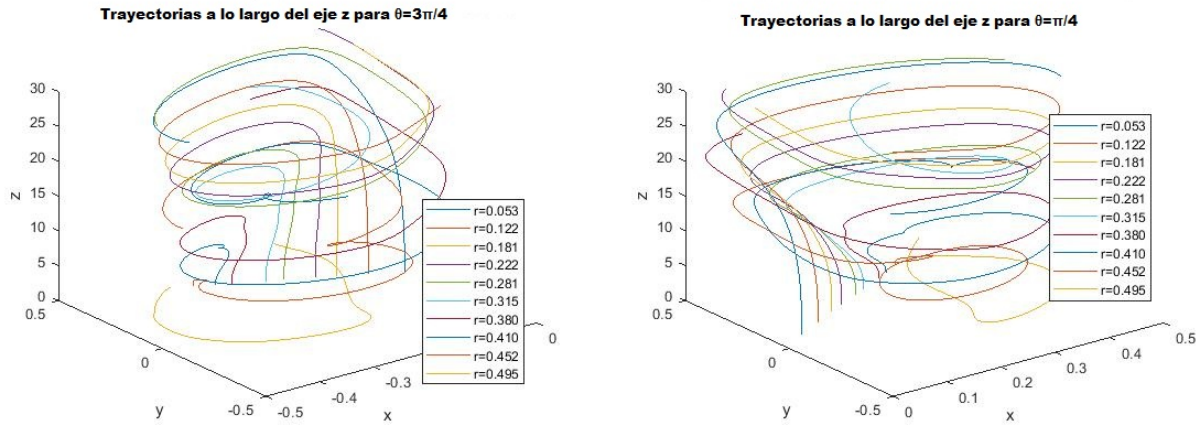


Figura 4.15: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = 3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,5$  y  $z = 0,810$

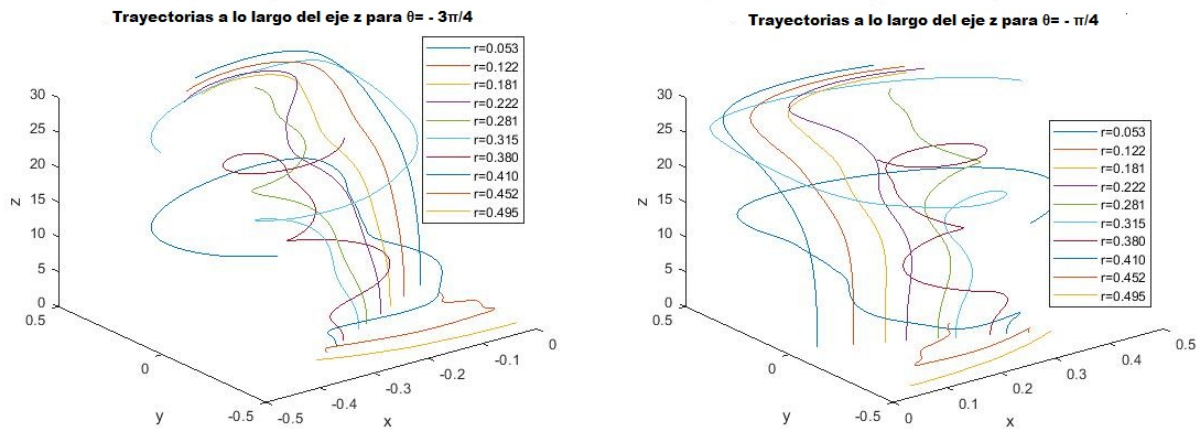


Figura 4.16: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,5$  y  $z = 0,810$

Para este último caso, de acuerdo a la figura 4.15 todas las partículas suben y bajan varias veces teniendo trayectorias circulares donde su radio de giro incrementa demasiado al irse acercando a la salida del tubo. En la figura 4.16 las partículas que se encuentran cerca del centro suben y bajan un par de veces, sin embargo las que se encuentran cerca de la pared del tubo en la parte inferior tienen muchas fluctuaciones a lo largo de su trayectoria y su radio de giro disminuye.

### 4.3. Cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria.

En este caso también se analizaron dos partículas para la parte inferior y superior respectivamente (figura 3.17). Se tomó un ángulo de  $\theta = \pm\pi/4$  con  $z = 0,810$ , la coordenada  $r$  tomó valores de  $r = 0,222$  (cerca del centro) y  $r = 0,495$  (cerca de la pared) para la parte superior e inferior.

Para esta parte solo se analizó la temperatura a lo largo de la trayectoria de las partículas para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,1$  ya que para los demás casos entre mayor sea el número de giros a lo largo de las trayectorias, habrá mas variaciones de temperatura.

Para una partícula que se encuentra en una posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$  se tuvo el siguiente cambio de temperatura a lo largo de su trayectoria (figura 4.17).

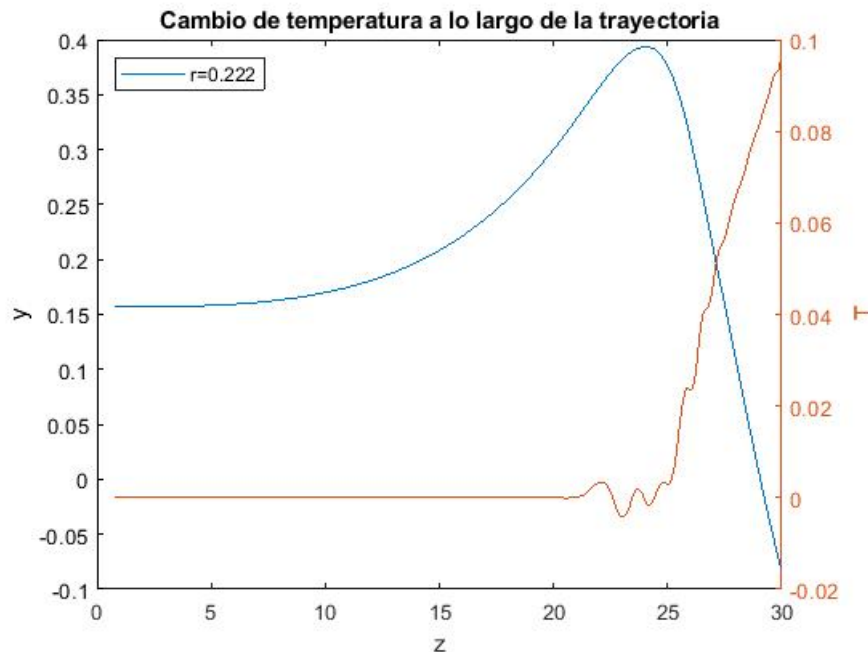


Figura 4.17: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . En esta figura se observa que la partícula sube a la parte superior del tubo cerca de la pared y luego baja mientras que la temperatura va aumentando a lo largo de la trayectoria.

En la figura 4.17 notamos que la temperatura es constante a la entrada y conforme la partícula alcanza su altura máxima tenemos fluctuaciones de temperatura, sin embargo la temperatura incrementa cuando la partícula desciende.

Ahora, para una partícula que se encuentra en una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$  se obtuvo el siguiente cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria (figura 4.18).



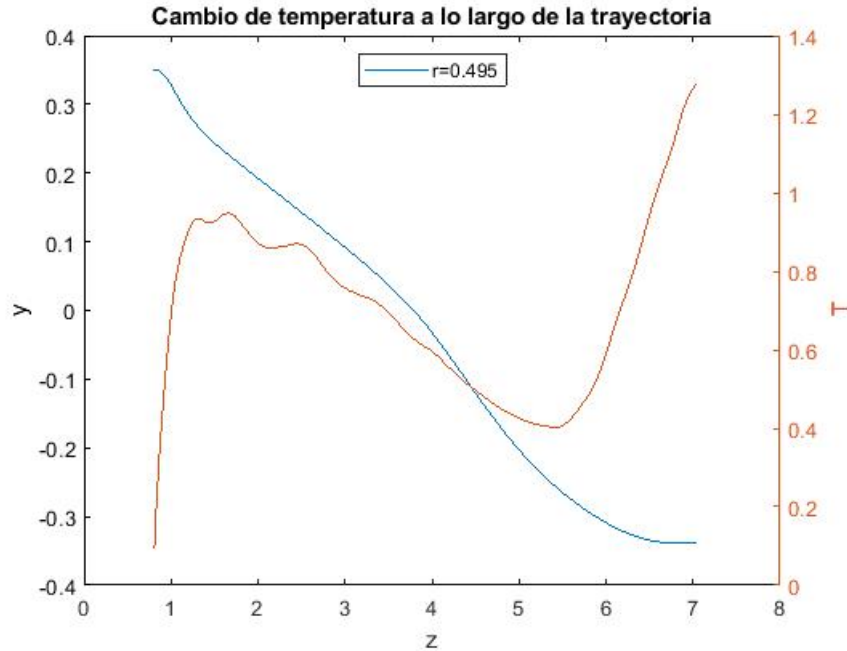


Figura 4.18: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . En esta figura se observa que la temperatura aumenta y disminuye conforme la partícula va descendiendo.

En la figura 4.18 podemos observar como la partícula al ir descendiendo hasta llegar al otro extremo del tubo cerca de la pared inferior la temperatura aumenta, teniendo una variación de temperatura debido al fenómeno de convección.

Ahora, para una partícula que se encuentra en la parte inferior del tubo con una posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = -\pi/4$  se obtuvo el siguiente cambio de temperatura (figura 4.19).

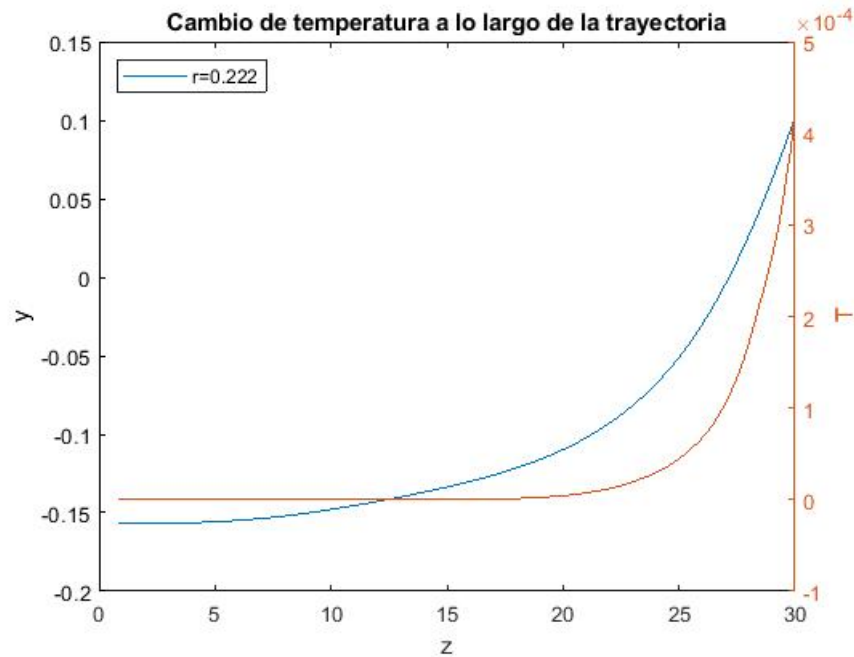


Figura 4.19: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = -\pi/4$ . En esta figura se observa que la temperatura va aumentando conforme la partícula sube a la parte superior.

De la figura 4.19 tenemos que la partícula al estar en la parte inferior tiende a aumentar su temperatura logrando una baja densidad para poder subir a la parte superior del tubo. En este caso ya no tenemos variaciones de temperatura ya que el calentamiento del flujo en la parte inferior es más uniforme.

Para otra partícula que se encuentra en la parte inferior del tubo con una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = -\pi/4$  se obtuvo el siguiente cambio de temperatura (figura 4.20).

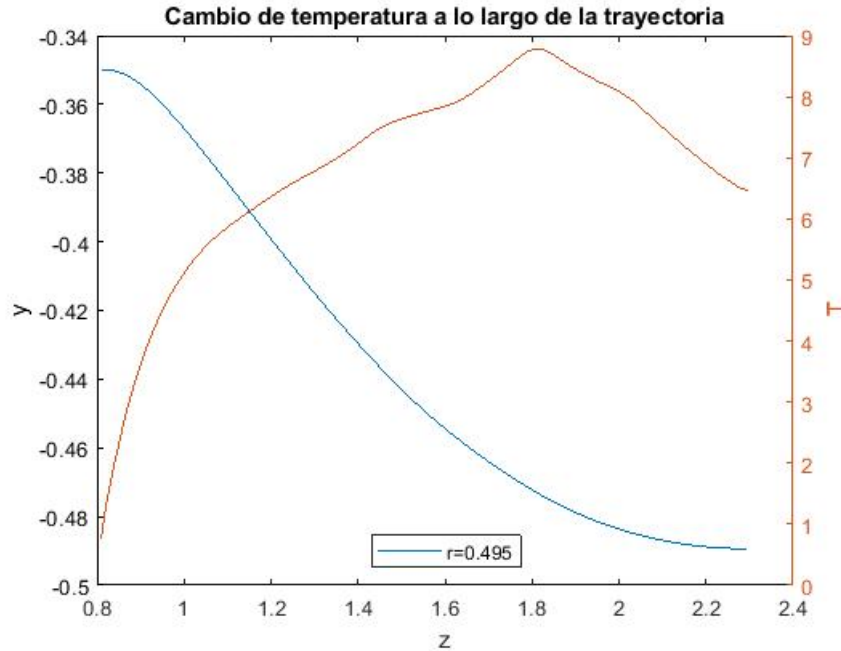


Figura 4.20: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = -\pi/4$ . En esta gráfica se observa que la temperatura aumenta conforme la partícula desciende a la parte inferior del tubo.

Por lo tanto, de la figura 4.20 al descender la partícula cerca de la pared en la parte inferior la temperatura aumenta y disminuye a la salida del tubo.

Finalmente, generalizando para los tres coeficientes de flotabilidad tenemos que las partículas conforme se acercan a la parte superior la temperatura baja y conforme se acercan a la parte inferior la temperatura aumenta.

## 4.4. Caída de Presión

Para el primer caso con  $Re = 1000$  y  $Gr = 50000$  tenemos  $\alpha = 0,05$ . En la figura 4.21 tenemos la caída de presión a lo largo del eje  $z$  con una posición inicial  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$ , donde la coordenada  $r$  varía de acuerdo a la tabla 3.1.

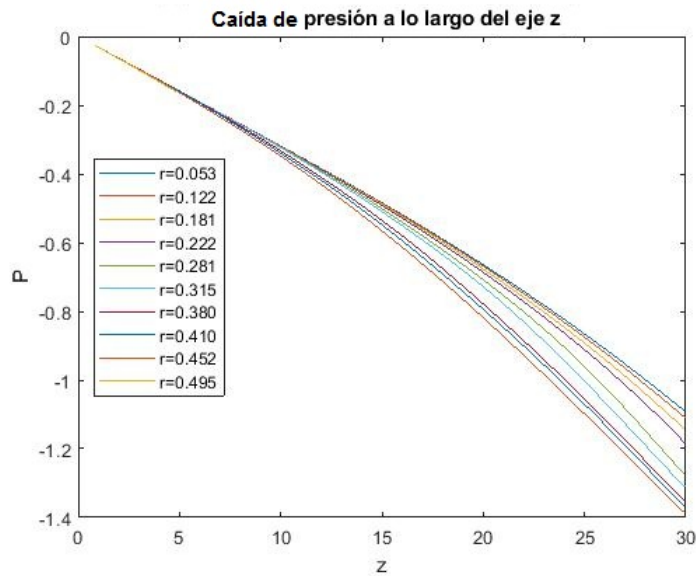


Figura 4.21: Caída de presión a lo largo del eje  $z$  con una posición inicial  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$ , para  $\alpha = 0,05$ .

Para el segundo caso en la figura 4.22 se muestra la caída de presión para un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,1$  ( con  $Re = 1000$  y  $Gr = 100000$ ) con los mismos valores de la coordenada  $r$ ,  $z$  y  $\theta$  del caso anterior.

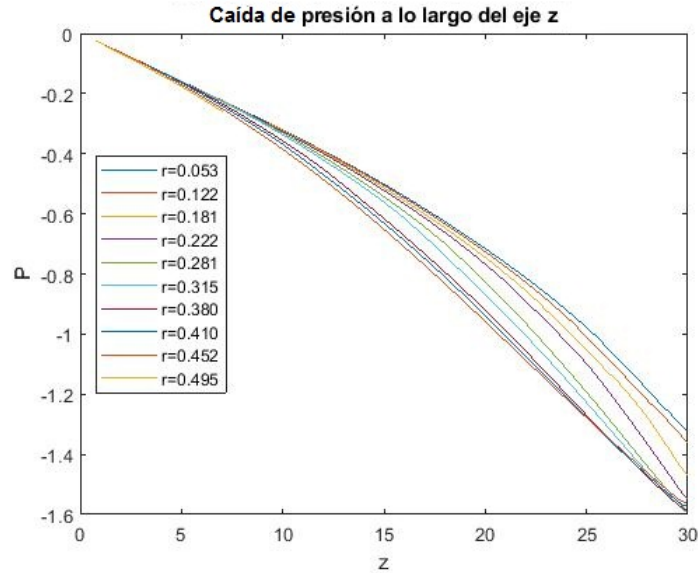


Figura 4.22: Caída de presión a lo largo del eje  $z$  con una posición inicial  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$ , para  $\alpha = 0,1$ .

Y por último para el tercer caso en la figura 4.23 se muestra la caída de presión para un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,5$  ( con  $Re = 2000$  y  $Gr = 2000000$ ) con los mismos valores de la coordenada  $r$ ,  $z$  y  $\theta$ .

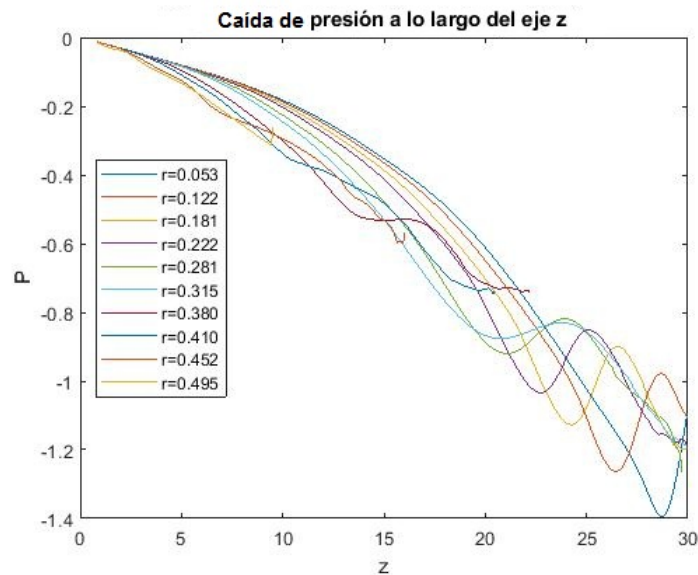


Figura 4.23: Caída de presión a lo largo del eje  $z$  con una posición inicial  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$ , para  $\alpha = 0,5$

Para los dos primeros casos de acuerdo a la figura 4.21 y 4.22 para  $Re = 1000$  tenemos una caída de presión de  $|\Delta P^*| = 1,4$  y  $|\Delta P^*| = 1,6$  respectivamente, comparando estos resultados con la ec. 3.7 para un flujo sin efectos térmicos podemos notar que hay variaciones en la

caída de presión y que a su vez ésta aumenta cuando el flujo tiene un cambio de temperatura.

Para el último caso, de acuerdo a la figura 4.23 para un valor de  $Re = 2000$  la caída de presión disminuye a un valor de  $|\Delta P^*| = 1,18$  sin embargo, la caída de presión sigue siendo mayor comparada con la ec. 3.8 (flujo sin efectos térmicos). En este caso para  $\alpha = 0,5$  la caída de presión tiene muchas variaciones, esto se debe a que las partículas cambian constantemente su temperatura a lo largo de su trayectoria.



# Capítulo 5

## Resultados y discusión para un concentrador anidólico

### 5.1. Campo de velocidades y perfil de temperatura

Para un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=50000$  tenemos que el coeficiente de flotabilidad es  $\alpha = 0,05$ . En la figura 5.1 se muestra el campo de velocidades y el cambio de temperatura del flujo para un corte transversal del tubo para un valor de  $z = 27$  con un  $t = 39$ . Se tomaron estos valores ya que se observa mejor el comportamiento del flujo debido al cambio de temperatura.



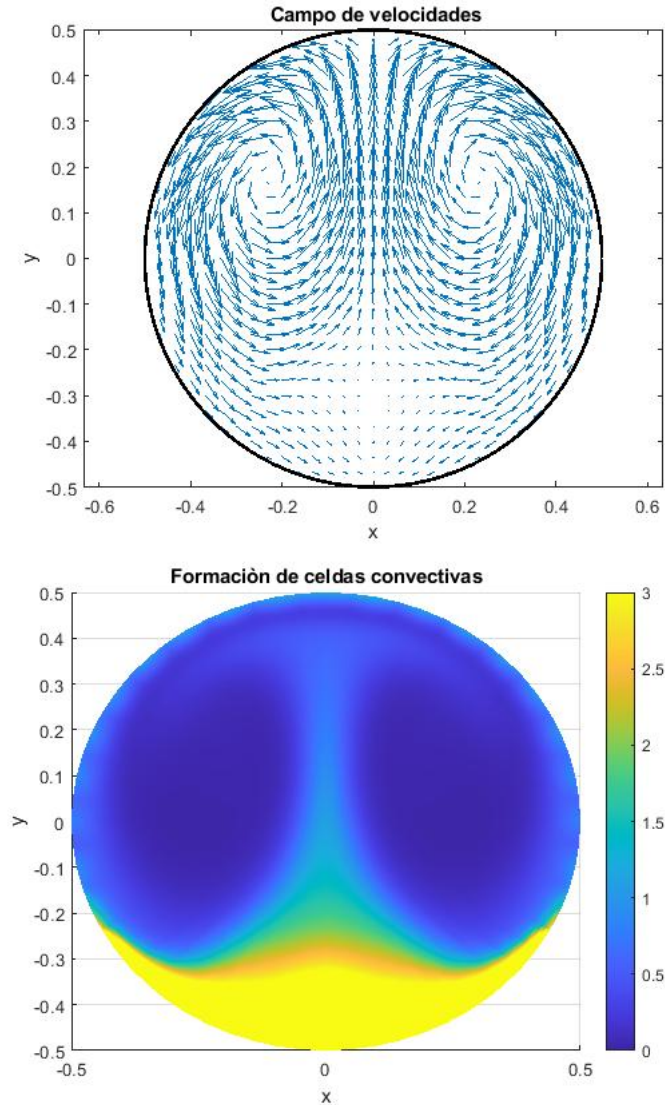


Figura 5.1: [a] Corte transversal del tubo donde se muestra el campo de velocidades. [b] Formación de las celdas convectivas debido a que la temperatura del flujo es mayor en la parte inferior del tubo para el mismo plano que la gráfica anterior. Ambas figuras tienen un valor de  $Re=1000$  y  $Gr=50000$  con  $\alpha = 0,05$  en  $z = 27$  con  $t = 39$ .

De acuerdo a la figura 5.1 el campo de velocidades sigue conservando su simetría teniendo una velocidad mayor en la parte superior del tubo. De acuerdo a la forma en la que se calienta el flujo (figura 2.3) tenemos una temperatura mayor en la parte inferior y como el coeficiente de flotabilidad  $\alpha$  es muy pequeño la convección es mínima.

Para observar como es el campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  se tomó un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  en un tiempo  $t = 39$  (figura 5.2).

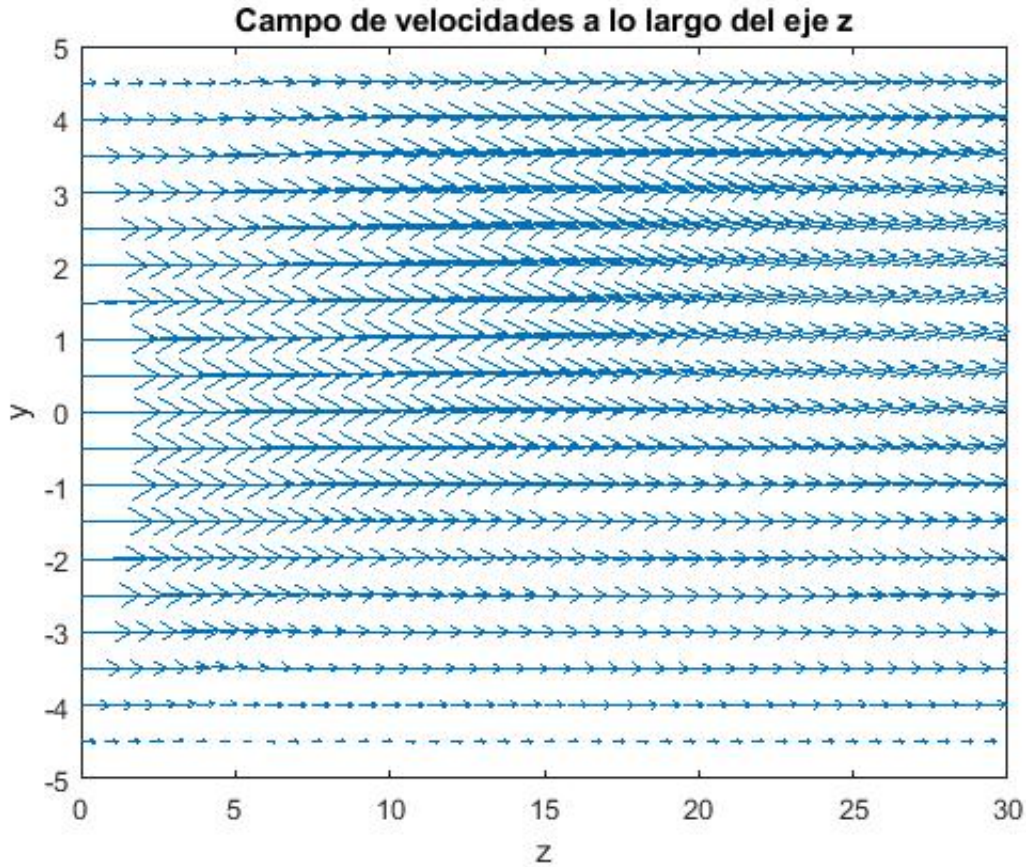


Figura 5.2: Campo de velocidades a lo largo del eje  $z$  para un plano vertical en  $\theta = \pm\pi/2$  en un tiempo  $t = 39$ , donde se observa un cambio de velocidad tanto en dirección como en magnitud en el eje  $y$  positivo antes de salir del tubo.

En la figura 5.2 podemos notar que a la entrada del tubo ( $z=0$ ) la velocidad va en una sola dirección (eje  $z$ ) manteniendo el perfil de velocidad parabólico y conforme nos acercamos al final del tubo ( $z=30$ ) la magnitud y dirección de la velocidad respecto al eje  $y$  positivo empieza a cambiar debido a la convección mínima que se presenta en el flujo para un  $t = 39$ .

En la figura 5.3 tenemos la temperatura del flujo en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pi/2$  para la parte superior y  $\theta = -\pi/2$  para la parte inferior del tubo en un  $t = 39$ .

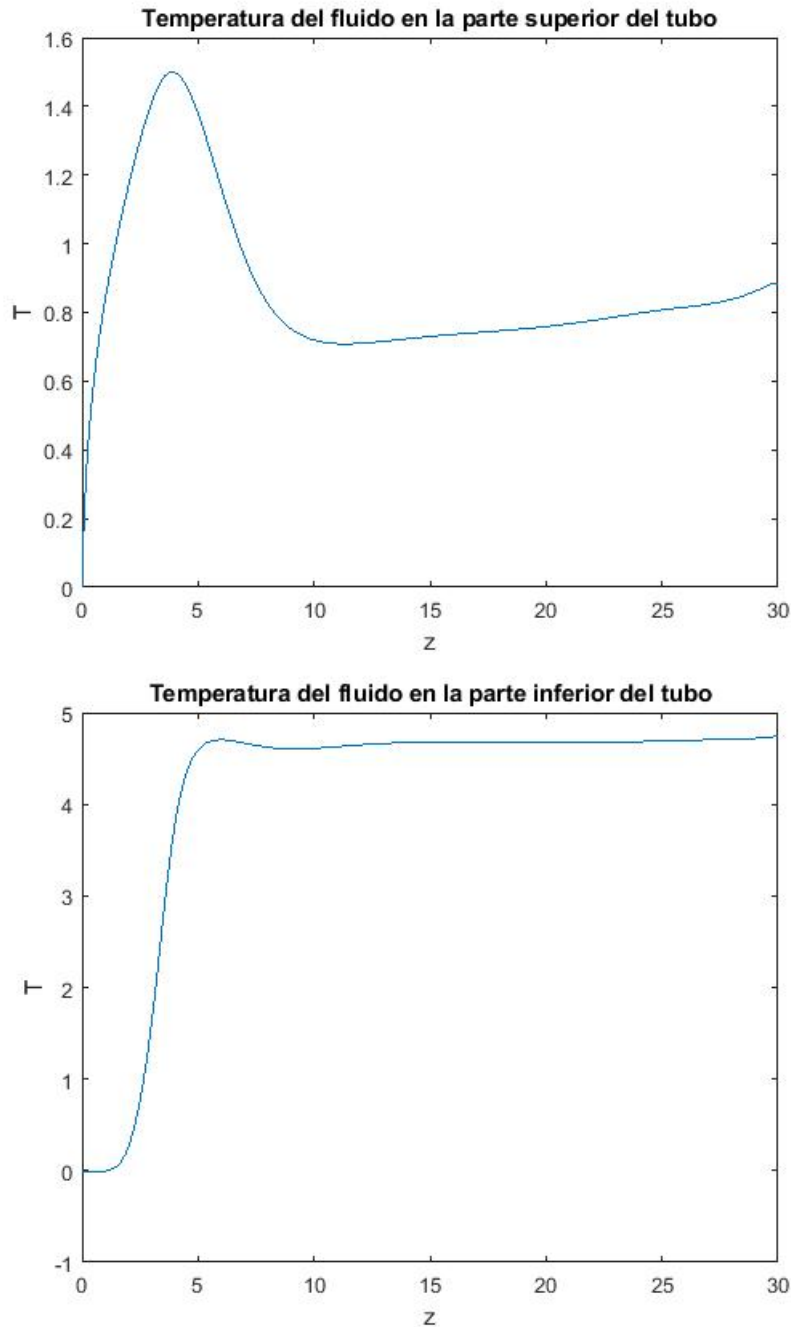


Figura 5.3: [a]Temperatura del flujo en función de  $z$  en la parte superior del tubo para  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0,49$  en  $t = 39$ . [b]Temperatura del flujo en función de  $z$  en la parte inferior del tubo para  $\theta = -\pi/2$  y  $r = 0,49$  en  $t = 39$ . En estas gráficas podemos observar como la temperatura del fluido es mayor en la parte inferior del tubo.

De acuerdo a la figura 5.3 tenemos que el flujo aumenta su temperatura a la entrada y se mantiene constante hasta la salida del tubo. Para la parte superior, la temperatura a la entrada aumenta debido a que aún no se presenta el fenómeno de convección, una vez que las partículas empiezan a subir y a bajar la temperatura disminuye manteniéndose constante a lo largo del eje  $z$ .

Para este caso también contamos con una deformación en el perfil de velocidad parabólico a lo largo del eje  $z$ . Para un valor de  $z = 27$  para un  $t = 39$  tenemos la siguiente deformación (figura 5.2).

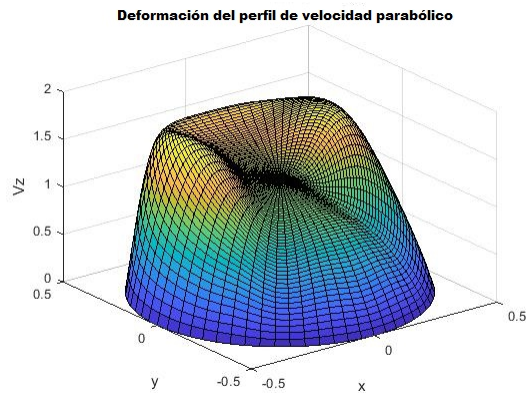


Figura 5.4: Deformación del perfil de velocidad parabólico para un valor de  $z = 27$  a un  $t = 39$  para un coeficiente de flotabilidad de  $\alpha = 0,5$  con valor de  $Re = 1000$  y  $Gr = 50000$ .

La deformación de la figura 5.4 es baja ya que el coeficiente de flotabilidad es muy pequeño.

## 5.2. Trayectorias de las partículas

Se tomaron diferentes posiciones a lo largo del radio del tubo para observar como influye la temperatura en la trayectoria de las partículas en diferentes partes del tubo.

Para este caso con  $\alpha = 0,05$  se usó la tabla 3.1 donde se muestran los valores de la posición inicial de la partícula en la coordenada  $r$  y se tomaron ángulos de  $\theta = \pm\pi/4$  y  $\theta = \pm3\pi/4$  debido a que en estos ángulos se da el mayor movimiento del flujo (figura 5.1 [a]).

Las trayectorias en la parte superior son:

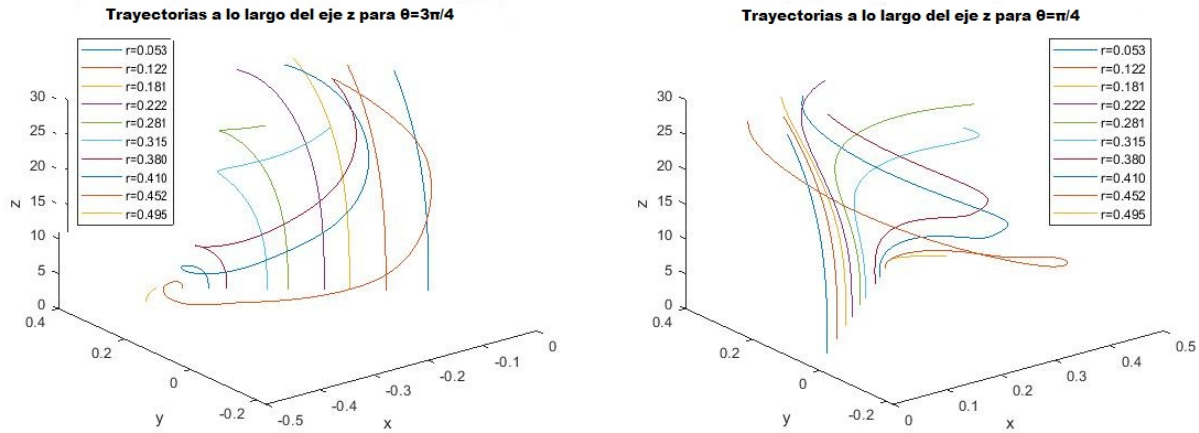


Figura 5.5: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = 3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = \pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,05$  y  $z = 0,810$

Las trayectorias en la parte inferior del tubo son:

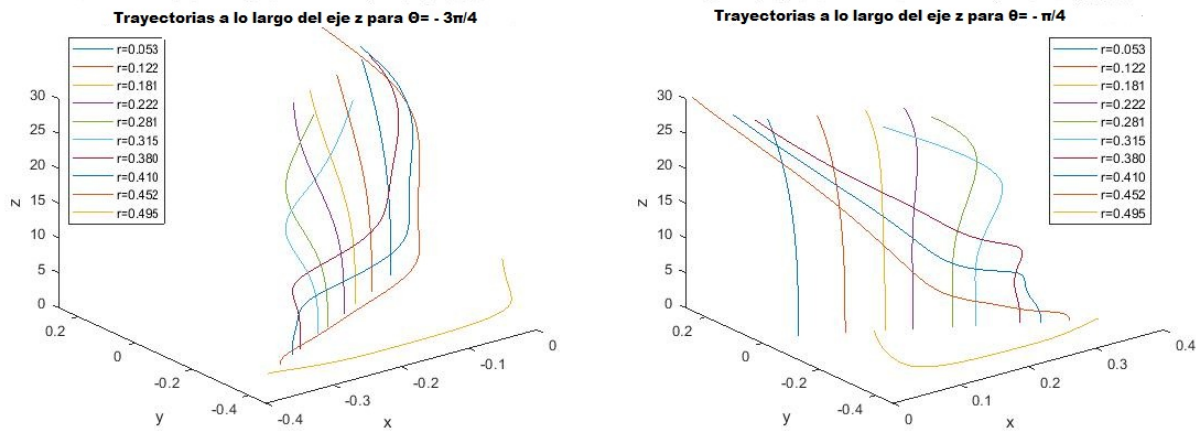


Figura 5.6: [a] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -3\pi/4$ . [b] Trayectorias de las partículas a lo largo del eje  $z$  para un ángulo de  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos para  $\alpha = 0,05$  y  $z = 0,810$

De acuerdo a la figura 5.5 notamos que las trayectorias son opuestas entre sí, lo mismo ocurre para las trayectorias de la parte inferior del tubo (figura 5.6). Debido a que la convección es pequeña, las partículas de la parte inferior y cerca del centro del tubo sólo tienden a subir mientras que las partículas que se encuentran cerca de la pared en la parte superior tiene trayectorias circulares con un radio de giro muy pequeño.



### 5.3. Cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria.

En este caso se analizó a dos partículas, una muy cerca de la pared con  $r = 0,495$  y otra muy cerca del centro del tubo con  $r = 0,222$  para la parte superior e inferior. Como las trayectorias son opuestas entre sí se tomó únicamente un ángulo de  $\theta = \pm\pi/4$  con  $z = 0,810$  (figura 3.17).

Para la parte superior tenemos:

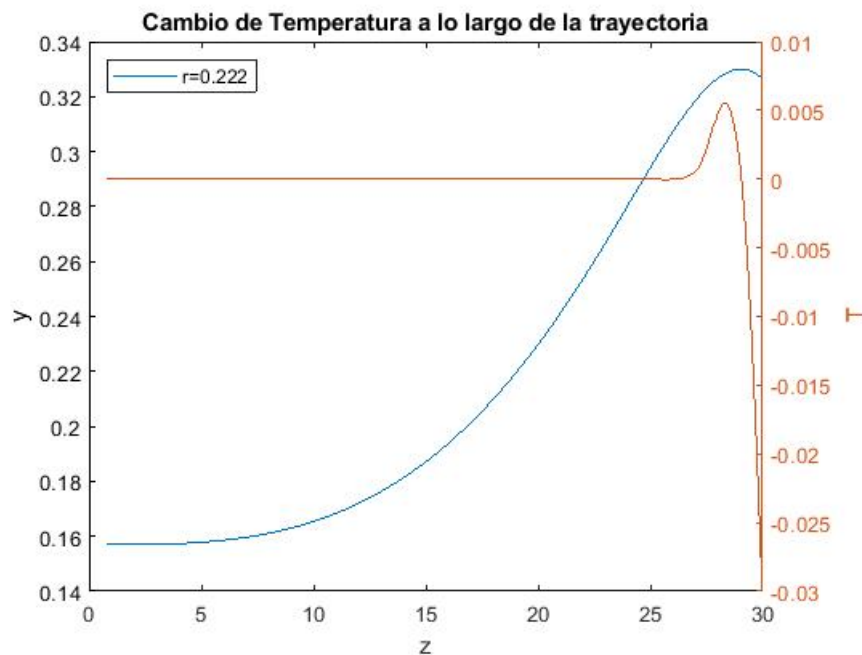


Figura 5.7: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . En esta figura se observa que la partícula al ascender a la parte superior la temperatura aumenta muy poco a la salida del tubo.

De la figura 5.7 podemos observar cómo la partícula va ascendiendo a la parte superior del tubo con una temperatura constante, cuando la partícula se encuentra en su posición más alta la temperatura aumenta. Esta variación de temperatura es muy pequeña.

Ahora, el cambio de temperatura a lo largo de la trayectoria de la partícula que se encuentra en una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$  se obtuvo de la figura 5.8.

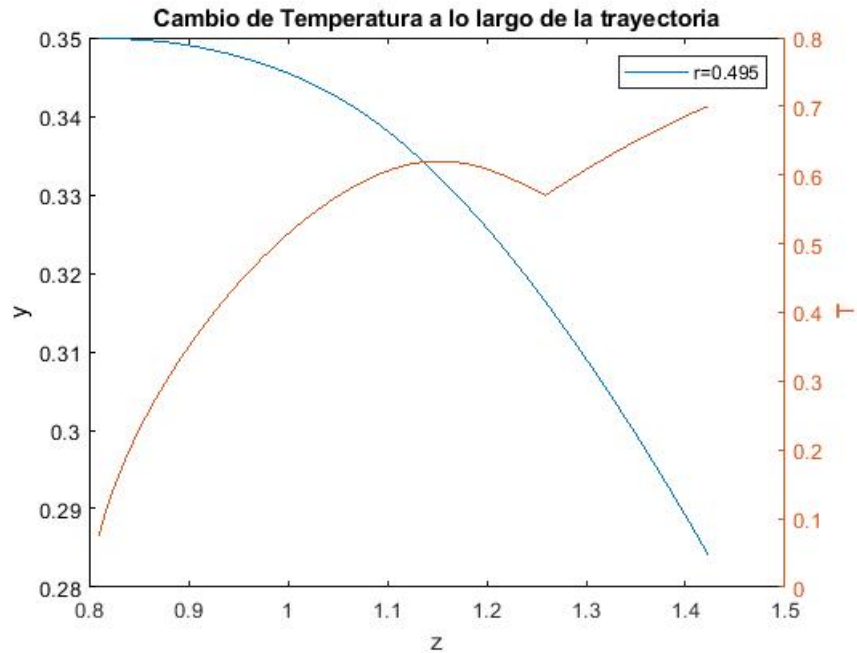


Figura 5.8: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . En esta figura se observa que la temperatura aumenta conforme la partícula desciende .

De la figura 5.8 la partícula al ir descendiendo la temperatura va aumentando hasta llegar cerca del centro del tubo. Como la trayectoria de la partícula es pequeña al estar cerca de la pared el cambio de temperatura es bajo.

Ahora, para una partícula que se encuentra en la parte inferior del tubo con una posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = \pi/4$  se obtuvo el siguiente cambio de temperatura(figura 5.9).

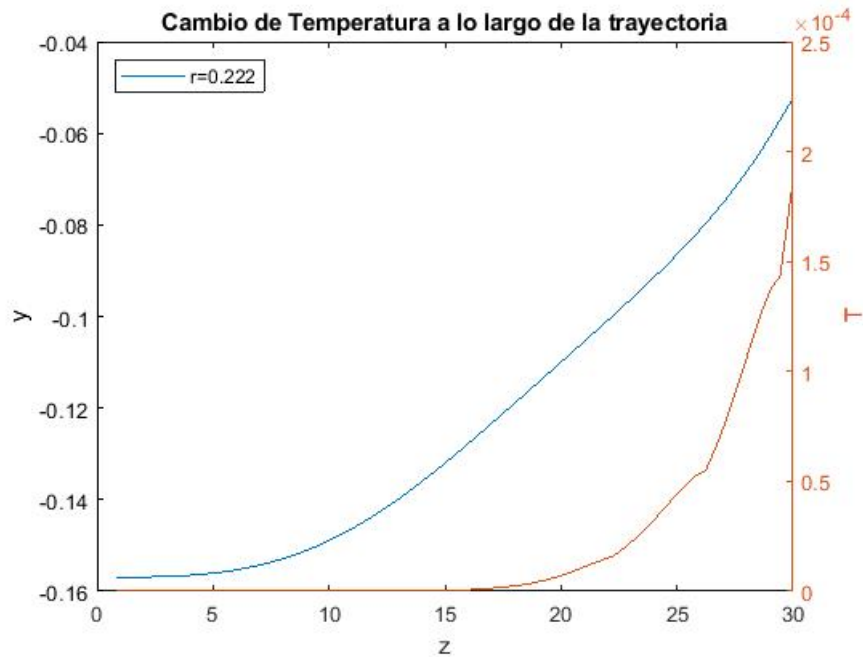


Figura 5.9: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,222$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . En esta figura se observa que la temperatura va aumentando conforme la partícula sube a la parte superior del tubo.

De acuerdo a la figura 5.9 la partícula al ir ascendiendo a la parte superior la temperatura va aumentando a lo largo de la trayectoria. Este cambio de temperatura sigue siendo muy pequeño.

Para otra partícula que se encuentra en la parte inferior del tubo con una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  en  $\theta = -\pi/4$  se obtuvo el siguiente cambio de temperatura (figura 5.10)



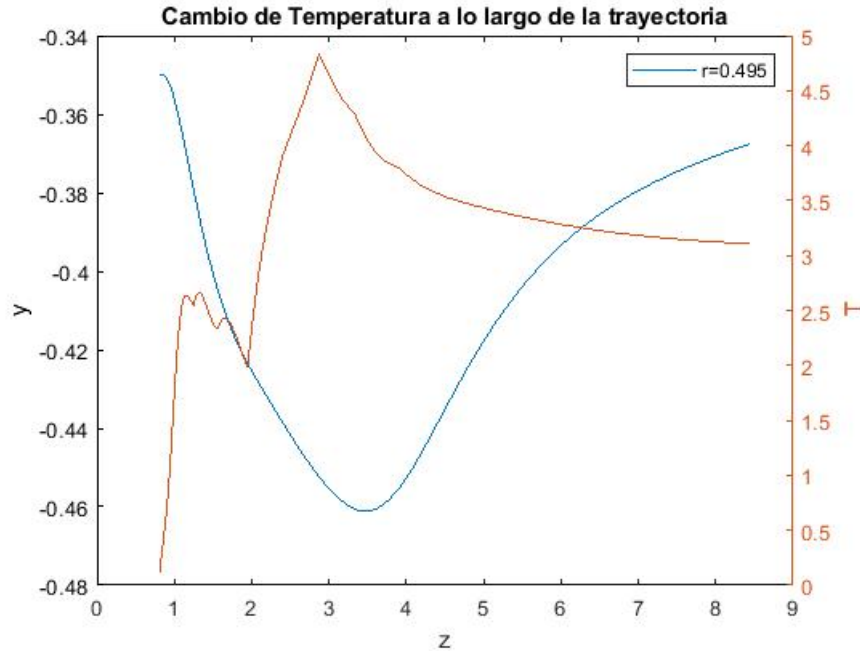


Figura 5.10: Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $0z = 0,810$  y  $\theta = -\pi/4$ . En esta figura se observa que la temperatura aumenta conforme la partícula desciende a la parte inferior y conforme la partícula vuelve a ascender la temperatura disminuye.

Como se puede notar en la figura 5.10 cuando la partícula tiende a bajar la temperatura va aumentando, al tener ahora un cambio en su densidad la partícula tiende a subir nuevamente ocasionando una disminución en la temperatura.

## 5.4. Caída de presión

A continuación se muestra la caída de presión para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,05$  con una posición inicial en  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ , la coordenada  $r$  tomo los valores de la tabla 3.1.

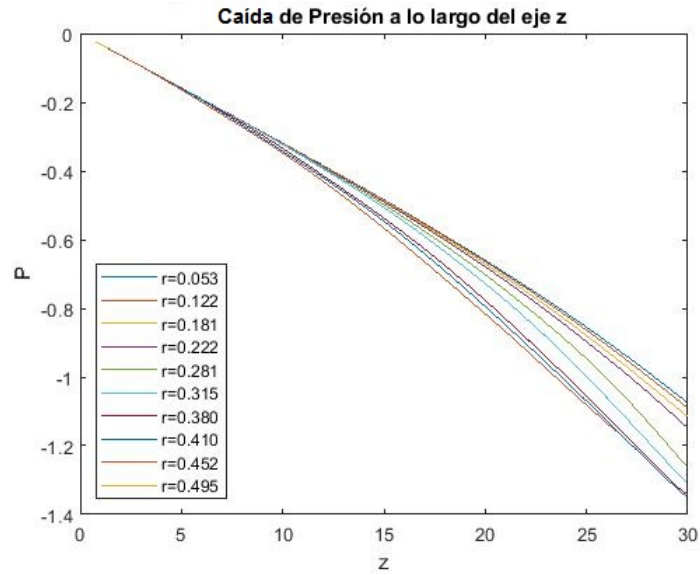


Figura 5.11: Caída de presión a lo largo del eje z para un ángulo de  $\theta = \pi/4$  con posición inicial en  $z = 0,810$  para un coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,05$ .

Para este caso tenemos una caída de presión de  $|\Delta P^*| = 1,35$  comparando este resultado con la ec. 3.7 tenemos que la caída de presión aumenta. Las variaciones de caída de presión se debe a que el flujo tiene cambios en su temperatura.



# Capítulo 6

## Pérdidas de calor

En las secciones anteriores se hizo un análisis sin pérdidas de calor, ahora en este capítulo se analizó el cambio de temperatura del flujo en la parte inferior y superior del tubo y de las partículas a lo largo de sus trayectorias cuando existen pérdidas de calor. Se definió a  $\phi$  como el factor de pérdidas de calor.

Por lo que se modificaron las condiciones iniciales de la simulación numérica incluyendo el factor de pérdidas de calor  $\phi$  pues, en la vida real estas pérdidas se manifiestan sobre la superficie del tubo a través de radiación o conducción cuando hay un cambio de temperatura. En nuestra simulación este factor  $\phi$  tuvo un valor de  $\phi = 10$  para poder observar un cambio notable en la temperatura del flujo debido a las pérdidas de calor. En este caso se usó un concentrador parabólico con valores de  $Re = 1000$  y  $Gr = 50000$ .

Al final se compararon los resultados obtenidos en este capítulo y se compararon con los resultados obtenidos en el capítulo 5 para los mismos valores de  $Re$  y  $Gr$ .

En la figura 6.1 tenemos la temperatura del flujo en función de  $z$  para una línea que va desde  $z = 0$  hasta  $z = 30$  en  $r = 0,49$  para un plano vertical en  $\theta = \pi/2$  para la parte superior y  $\theta = -\pi/2$  para la parte inferior del tubo en un tiempo  $t = 39$ .

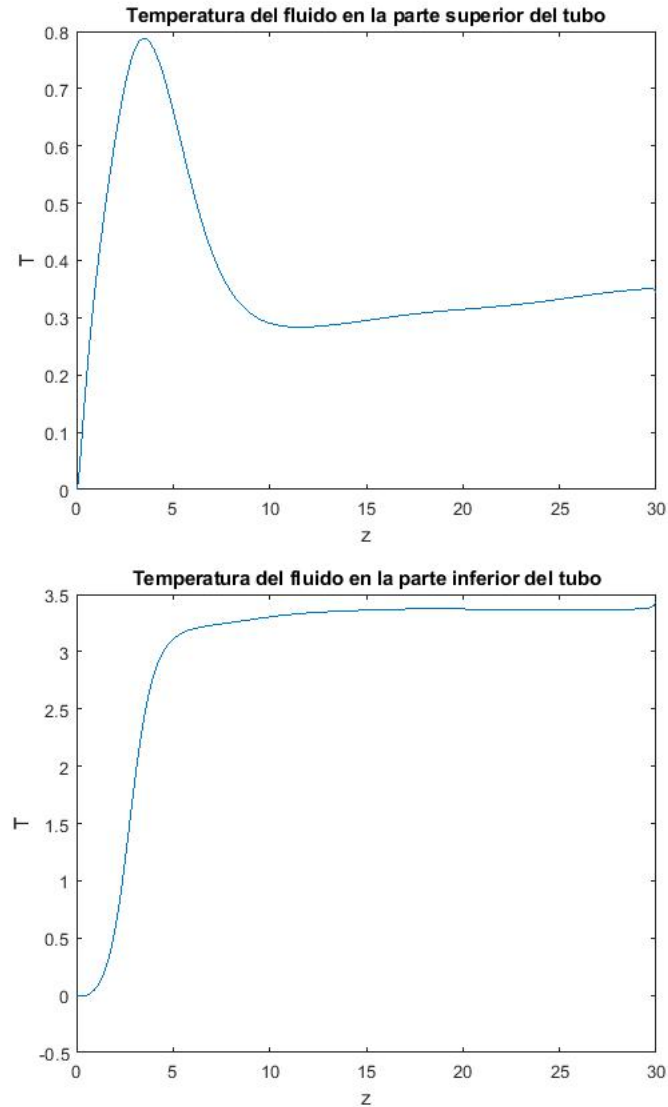


Figura 6.1: [a]Temperatura del flujo en función de  $z$  en la parte superior del tubo para  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo  $t = 39$  tomando en cuenta las pérdidas de calor donde  $\phi = 10$ . [b]Temperatura del flujo en función de  $z$  en la parte inferior del tubo para  $\theta = -\pi/2$  y  $r = 0,49$  en un tiempo  $t = 39$  tomando en cuenta las pérdidas de calor donde  $\phi = 10$ . En estas gráficas podemos observar como la temperatura del flujo sigue siendo mayor en la parte inferior del tubo.

Comparando únicamente el valor de la temperatura final del flujo de la figura 6.1 con la figura 4.3 tenemos la siguiente tabla:

Parte:	Temperatura final
Superior	0.7
Inferior	3.5

Tabla 6.1: Temperatura final del flujo en la parte superior e inferior del tubo tomando en cuenta las pérdidas de calor.

Los valores de temperatura final que se obtuvieron cuando no hay pérdidas de calor (figura 4.3) son:

Parte:	Temperatura final
Superior	1.8
Inferior	8.2

Tabla 6.2: Temperatura final del flujo en la parte superior e inferior del tubo cuando no hay pérdidas de calor.

De la tabla 6.1 y 6.2 podemos notar que hay una pérdida de temperatura del fluido para la parte inferior del 43 % y para la parte superior del tubo del 39 %.

Ahora, para una partícula que se encuentra en una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pm\pi/4$  se tuvo el siguiente cambio de temperatura a lo largo de su trayectoria tomando en cuenta las pérdidas de calor.(figura 6.2)

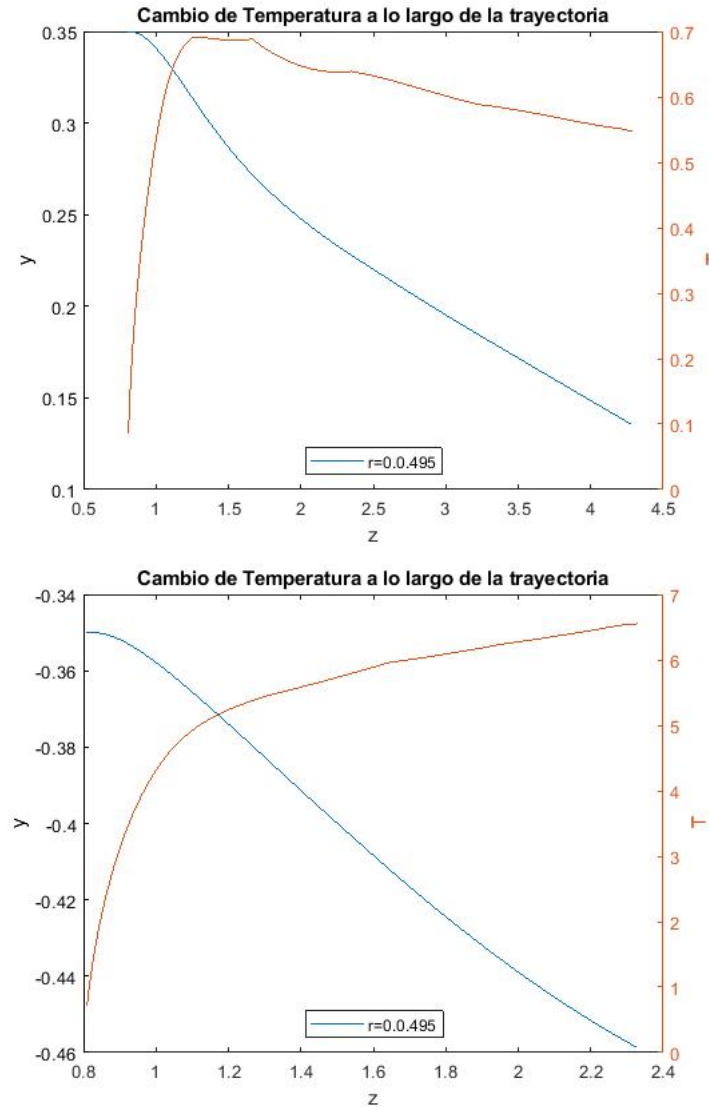


Figura 6.2: [a] Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . [b] Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos tomando en cuenta las pérdidas de calor con  $\phi = 10$ .

Ahora la temperatura a lo largo de la trayectoria de la partícula en una posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pm\pi/4$  sin tomar en cuenta las pérdidas de calor para un concentrador parabólico con coeficiente de flotabilidad  $\alpha = 0,05$  tenemos la figura 6.3.

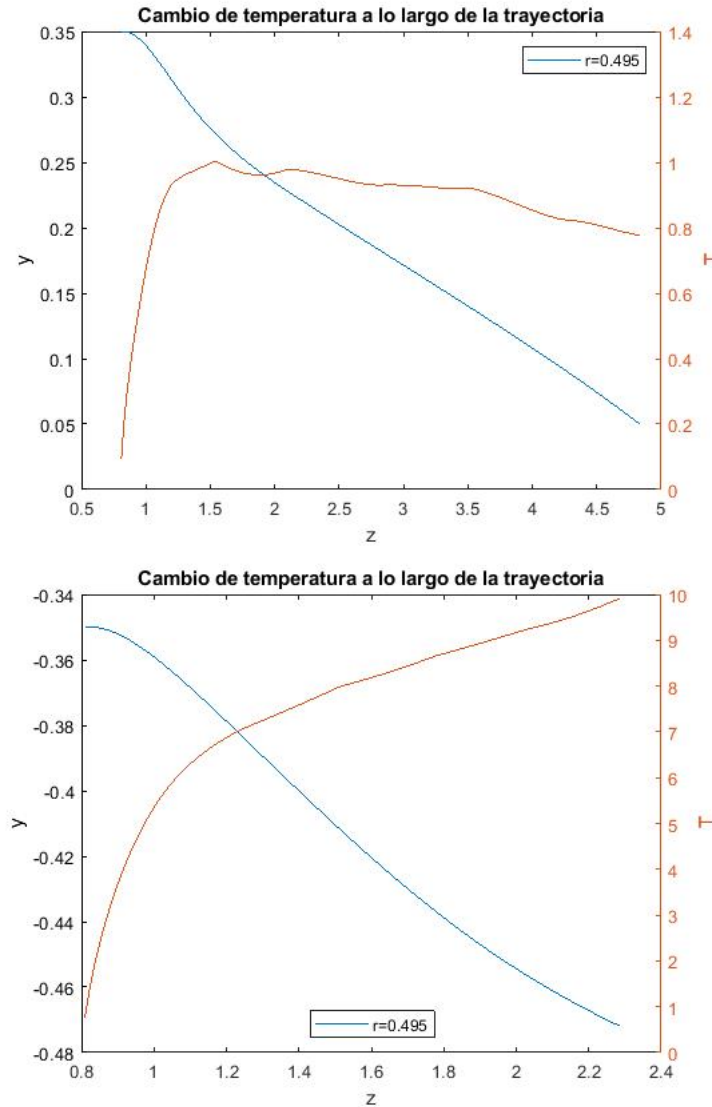


Figura 6.3: [a] Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = \pi/4$ . [b] Cambio de temperatura (gráfica en color rojo) a lo largo de la trayectoria de la partícula (gráfica en color azul) con posición inicial  $r = 0,495$ ,  $z = 0,810$  y  $\theta = -\pi/4$ . Ambos casos sin tomar en cuenta las pérdidas de calor  $\phi$ .

Tomando los valores finales de la temperatura a lo largo de la trayectoria cuando hay pérdidas de calor (figura 6.2) y haciendo una comparación con los valores finales de la temperatura a lo largo de la trayectoria de la partícula cuando no hay pérdidas de calor (figura 6.3) tenemos lo siguiente:



Trayectoria	Temperatura final sin pérdidas de calor
Superior	0.78
Inferior	10.00

Tabla 6.3: Temperatura final a lo largo de trayectoria de la partícula en la parte superior e inferior del tubo cuando no hay pérdidas de calor.

Los valores de temperatura final cuando hay pérdidas de calor son:

Trayectoria	Temperatura final con pérdidas de calor
Superior	0.55
Inferior	6.55

Tabla 6.4: Temperatura final a lo largo de la trayectoria de la partícula en la parte superior e inferior del tubo cuando hay pérdidas de calor.

Con los resultados de la tabla 6.3 y 6.4 podemos notar que la temperatura en la parte superior disminuye un 30 % y en la parte inferior un 35 % aproximadamente.

Entonces, podemos decir que sí cambia la temperatura del flujo cuando se toma en cuenta las pérdidas de calor. Entre mayor sea  $\phi$  las pérdidas serán mayores provocando que el flujo se caliente menos.

Generalizando para los demás casos con un concentrador anidólico y una distribución de potencia senoidal tendríamos el mismo resultado es decir, las pérdidas de calor afectarán la temperatura del flujo.

# Capítulo 7

## Conclusiones

Al usar dos tipos de concentradores, en este caso uno parabólico y otro anidólico y usando también una distribución de potencia senoidal se observó como influyó la forma de cada uno para obtener un calentamiento no uniforme del fluido.

Para la distribución de potencia senoidal y el concentrador parabólico se usaron los mismos valores de  $Re$  y  $Gr$  para poder hacer una comparación del cambio de temperatura que sufre el flujo al tener mayor o menor convección.

Como tenemos un flujo que se calienta de manera no uniforme se obtuvo una mayor temperatura en la parte inferior del tubo. También se pudo observar que conforme se aumenta el número de Grashof, mayor será el fenómeno de convección. El número de Reynolds también es importante, pues de éste depende la velocidad del fluido y también conforme se aumente su valor la caída de presión disminuye.

Para cada caso se obtuvo una deformación en el perfil de velocidad parabólico debido al incremento de temperatura, esta deformación varió a causa del mezclado del fluido. También se conservó la misma forma y dirección del campo de velocidades para un corte transversal del tubo. Sin embargo, a lo largo del eje  $z$  en un plano vertical el campo de velocidades es diferente pues, al ir incrementando el coeficiente de flotabilidad  $\alpha$  la velocidad aumenta a la salida del tubo.

Asimismo, también se hizo un análisis del comportamiento de las partículas cuando sufren un cambio de temperatura, donde las partículas que se encuentran en la parte inferior del tubo siempre tienden a subir debido a su baja densidad, y las partículas que se encuentran en la parte superior tienden a bajar. Al tener un mejor mezclado en el flujo, las partículas suben y bajan varias veces teniendo trayectorias circulares donde aumenta su radio de giro conforme las partículas se acercan a la salida del tubo.

Finalmente, se observó que las pérdidas de calor son muy importantes, ya que afectan la temperatura del flujo. El factor de pérdidas de calor  $\phi$  es proporcional a la temperatura, pues entre mayor sea la temperatura mayores serán las pérdidas de calor.



# Bibliografía

- [1] Frank Benford and John E Bock. A time analysis of sunshine. *Transactions of the American Illumination Engineering Society*, 200, 1939.
- [2] Yunus AI Cengel and M John. Mecánica de fluidos/yunus a. cengel y john m. cimbala. Technical report.
- [3] Juan Francisco Cerón Muñoz et al. Análisis del mecanismo de transferencia de calor en colectores solares térmicos y de la influencia de las condiciones de contorno. 2012.
- [4] JA Duffie and WA Beckmann. *Solar Energy. Thermal Processes.(Stichworte Teil 1)*. Wiley & Sons, 1974.
- [5] John A Duffie, William A Beckman, and Nathan Blair. *Solar engineering of thermal processes, photovoltaics and wind*. John Wiley & Sons, 2020.
- [6] RP Feynman. Leighton, R., & Sands, M.(1965). The Feynman lectures on physics (vol. ii).
- [7] RANALD V EVETT GILES et al. Mecanica de los fluidos e hidraulica/ranald v. giles, jack b. evett, cheng liu; tr. jaimé moneva moneva. Technical report.
- [8] D Yogi Goswami, Frank Kreith, and Jan F Kreider. *Principles of solar engineering*. CRC Press, 2000.
- [9] Alan Josué Gutiérrez Castillo. Inestabilidades del flujo entre dos discos giratorios. tesis. 2020.
- [10] M Iqbal. Sun-earth astronomical relationships. *An Introduction to Solar Radiation*, 1:28, 1983.
- [11] LD Landau and EM Lifshitz. Fluid mechanics, 1959. *Course of theoretical physics*, 1959.
- [12] Octave Levenspiel. *Flujo de fluidos e intercambio de calor*. Reverté, 1993.
- [13] Fernando Llorente Martínez. Los movimientos de la tierra en el espacio y la radiación solar como causas del rompecabezas meteorológico. 2003.
- [14] David MacKay. *Sustainable Energy-without the hot air*. UIT cambridge, 2008.
- [15] Edward Mazria. *Passive solar energy book*. 1979.

- [16] J Cleland McVeigh. *Sun power: an introduction to the applications of solar energy*. Elsevier, 2013.
- [17] Rosalía Morales Jiménez. Metodología e implementacion para instalaciones de los sistemas fotovoltaico de elirmex. Technical report, 2017.
- [18] Alberto Montoya P Ernesto Palo and Wilson Cabana H Lourdes Soria. Estudio de evaluacion de eficiencia de un calentador solar de tubos al vacio con tanque acumulador, de la empresa dsol.
- [19] FLUIDOS REALES. Dinamica de fluidos.
- [20] N. Robinson. In *Solar Radiation*. Elsevier, Amsterdam (1966).
- [21] Pamela Villamil Sapién and Gerardo Ruiz Chavarría. Transferencia de calor en un concentrador solar. *Latin-American Journal of Physics Education*, 4(1):12, 2010.
- [22] Umesh Saxena and Arun Garg. Equivalence of cash flows when compounding occurs less frequently than the cash flows. *The Engineering Economist*, 26(2):148–153, 1980.
- [23] GG Stokes. On the theories of internal friction of fluids in motion, translated by cambridge phil. *Soc., UK*, 8(1845):287–305.
- [24] NY Sánchez Torres, EJ López Sánchez, S Hernández Zapata, and G Ruiz Chavarría. 3D numerical simulation of Rayleigh-Bénard convection in a cylindrical container. In *Selected Topics of Computational and Experimental Fluid Mechanics*, pages 367–374. Springer, 2015.
- [25] FM White. Fluid mechanics/frank m. white, 2003.
- [26] Richard C Willson, S Gulkis, M Janssen, HS Hudson, and GAz Chapman. Observations of solar irradiance variability. *Science*, 211(4483):700–702, 1981.
- [27] Mónica Guadalupe González Yñigo and José Juan Méndez Ramírez. Capítulo 1 política de fomento de la vivienda sustentable: Infonavit y el programa hipoteca verde. *VIVIENDA Y ESPACIO PÚBLICO. POLÍTICAS, APROPIACIÓN Y SUBJETIVIDADES*, page 11.