



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMA DE SUSPENSIÓN Y AMORTIGUAMIENTO DE  
CORRIENTES DE EDDY PARA UN MICROSCOPIO DE  
EFECTO TÚNEL (STM)

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

BERNARDO FUENTES PÉREZ



TUTOR

DR. CARLOS JAVIER VILLAGÓMEZ OJEDA  
CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Se agradece al proyecto PAPIIT IN116320 por los recursos provistos para apoyar la elaboración de este trabajo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Microscopía de efecto túnel . . . . .	1
1.2. Aislamiento del ruido mecánico . . . . .	8
1.3. Frenado con corrientes parásitas . . . . .	12
<b>2. Sistema de suspensión y frenado para el escaner del STM</b>	<b>15</b>
2.1. Efecto Túnel . . . . .	15
2.1.1. Tunelaje de Bardeen para barreras de vacío . . . . .	16
2.1.2. Dependencia vertical de la corriente . . . . .	22
2.2. Aislamiento de ruido mecánico . . . . .	25
2.3. Trayectorias del oscilador armónico frenado . . . . .	30
2.4. Solución al problema dinámico sin fuerzas de frenado . . . . .	32
2.4.1. Sistema de referencia . . . . .	32
2.4.2. Planteamiento del Lagrangiano y ecuaciones de movimiento . . . . .	36
2.4.3. Simulaciones . . . . .	45
2.5. Fuerza de frenado . . . . .	48
2.5.1. Cálculo del campo de corrientes inducidas . . . . .	51
2.5.2. Fuerza de Frenado . . . . .	59
2.5.3. Simulación . . . . .	62

<b>3. Sistema experimental diseñado y construido para validar el modelo de la fuerza de frenado</b>	<b>65</b>
3.1. Descripción del experimento . . . . .	67
3.1.1. Características del sensor de imagen TCD 1304 . . . . .	67
3.1.2. Configuración del microcontrolador y mediciones de posición .	68
3.1.3. Medición del tiempo . . . . .	74
3.1.4. Selección de la lente . . . . .	76
3.1.5. Mediciones de la constante de frenado . . . . .	78
3.1.6. Resolución atómica del Au(111) . . . . .	81
<b>4. Discusión y Conclusiones</b>	<b>85</b>
4.1. Discusión . . . . .	85
4.2. Conclusiones . . . . .	87

# Resumen

La microscopía de efecto túnel es usada para estudiar características superficiales de materiales conductores. Una de sus características más importantes es que permite obtener imágenes topográficas con resolución atómica. Los factores más importantes para alcanzar la resolución atómica son la forma de la punta que se usa en la medición, la temperatura de la muestra y del microscopio, el nivel de vacío de la cámara donde se encuentra el STM y un correcto aislamiento del ruido mecánico.

En este trabajo se estudia un sistema de aislamiento de ruido mecánico que consta de 3 resortes y un sistema de frenado por corrientes parásitas. Con este propósito se desarrolla un modelo para simular en 3 dimensiones espaciales el movimiento de un escaner de STM incorporado al sistema de aislamiento, también se desarrolla un modelo para calcular la constante de frenado para un imán de sección transversal circular que se mueve con respecto a una placa conductora y se hace una validación experimental de este modelo.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Microscopía de efecto túnel

Un microscopio de efecto túnel es un instrumento que permite generar un perfil de la superficie de una muestra conductora acercando una punta y usando como señal de referencia una pequeña corriente que circula entre la punta y la muestra, el instrumento suele abreviarse por sus siglas en inglés STM (Scanning Tunneling Microscope). Su invención en 1982 le valió a sus creadores, Gerd Binnig y Heinrich Rohrer entonces integrantes de la división en Zurich de la compañía IBM, ganar el premio Nobel en 1986.

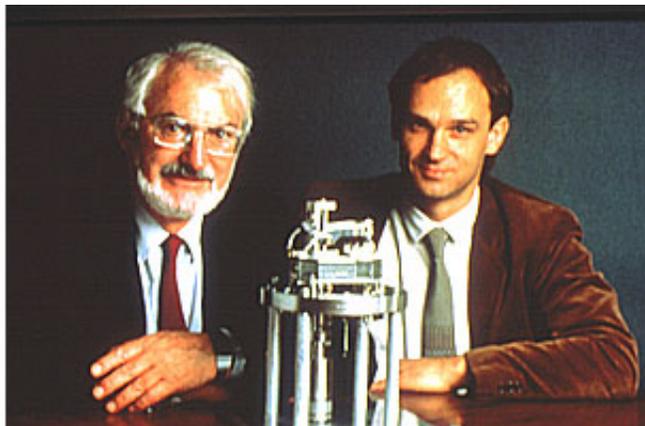


Figura 1.1: De izquierda a derecha Heinrich Rohrer y Gerd Binnig inventores del STM.

El principio de operación de un STM consiste en aplicar un voltaje entre una punta con terminación nanométrica o picométrica, idealmente con un átomo en el ápice de la punta, y una muestra de material conductor que se acerca a la muestra a una distancia aproximada de 10 angstroms, a esta distancia un preamplificador I/V puede detectar la corriente que circula entre la punta y la muestra debido al efecto túnel. El efecto túnel es la capacidad de las partículas de atravesar barreras de energía cuando la energía de la partícula es menor a la altura de la barrera de energía. La medición de esta corriente de tunelaje provee información de las propiedades físicas y químicas de la muestra donde está ubicada la punta.

Con el STM se pueden generar imágenes topográficas de la superficie de la muestra. En general una imagen topográfica se genera por el movimiento de la punta cerca de la superficie de manera que una señal de control mantenga la corriente constante al que se denomina de la misma manera, modo de corriente constante. También existe otro modo usado pero menos utilizado donde se mantiene a la punta a una altura constante y se registra la corriente de tunelaje, aunque este modo se utiliza ampliamente para manipular átomos y moléculas en la superficie con una trayectoria bien definida a una distancia muy cercana de la superficie. Cuando la corriente de tunelaje es usada como señal de control la imagen resultante es un mapa de las variaciones en  $z$  de la función  $I(x, y, z)$  en el espacio real. Cuando la distancia a la muestra es usada como señal de control la imagen que se obtiene representa los cambios en la corriente de tunelaje a una distancia definida, y corresponde con una función de la forma  $I(x, y, z = constante)$ . Los movimientos horizontales y verticales de la punta se llevan a cabo generalmente usando un tubo piezo eléctrico. Este piezo tubo se encuentran conectado a un sistema de control por retroalimentación que se encarga de ajustar la distancia vertical entre la punta y la muestra para mantener constante la señal de control. Ver figura 1.2. Al sistema en el que se encuentran integrados, el motor de aproximación a la superficie, el piezo tubo central, la muestra y la punta se le llama escaner STM.

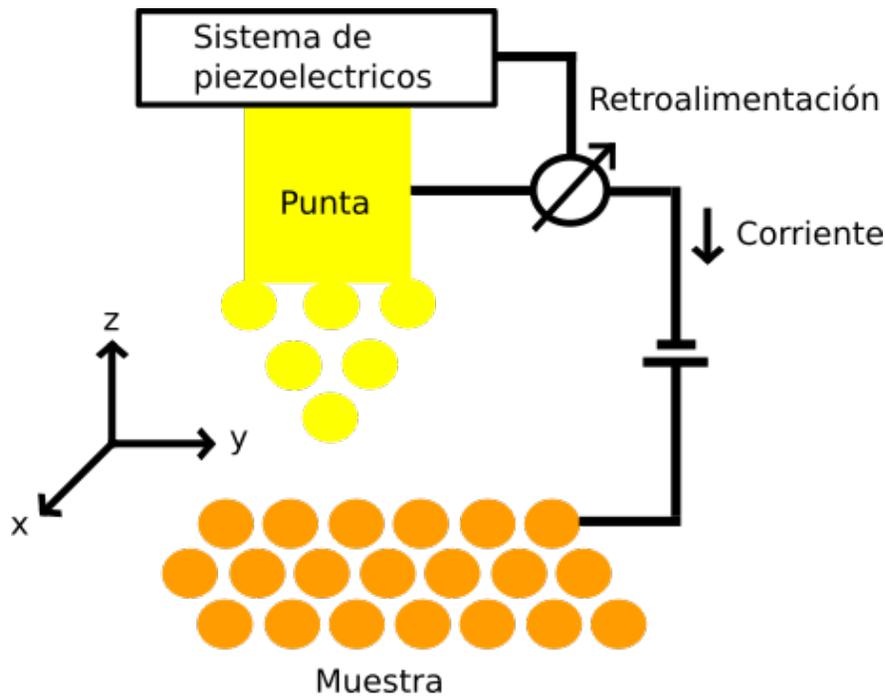


Figura 1.2: Se muestra un diagrama de la estructura de un STM.

Debido a que el STM trabaja con corrientes de tunelaje, puede operar tanto en el aire como en fluidos y en el vacío. El STM es capaz de estudiar directamente las propiedades electrónicas locales de la muestra con resolución atómica en condiciones ideales de preparación y medición. Es por esto que el STM es útil para estudiar fenómenos localizados en la muestra, por ejemplo defectos en las estructuras cristalinas, impurezas, dislocaciones, fronteras de grano o moléculas adheridas en la superficie.

Se espera que el STM cumpla un papel fundamental en el desarrollo de nuevas tecnologías ya que la constante búsqueda para miniaturizar dispositivos requiere de herramientas para estudiar y manipular la materia a nivel nanométrico. Un ejemplo de esto es la construcción de transistores moleculares que se controlan aplicando un voltaje de compuerta con la punta de un STM [1].

La naturaleza de interacción directa con la muestra el STM abre las puertas a la manipulación y fabricación atómica y molecular. Los primeros avances en esta

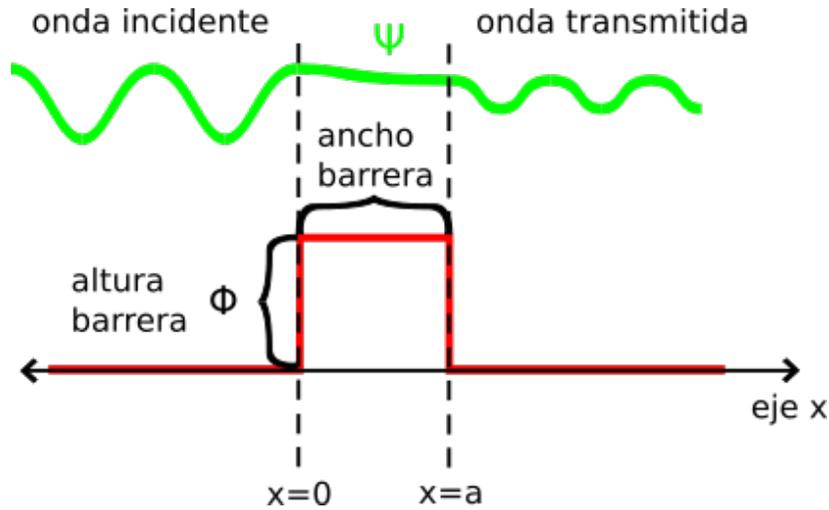


Figura 1.3: Se muestra un diagrama del fenómeno de tunelaje.

línea fueron experimentos para colocar y remover moléculas en la superficie de la muestra [2] y para transferir átomos desde la punta a la superficie [3]. En 1990 Eigler y Swcheizer lograron manipular átomos de Xenon con precisión nanométrica en una superficie cristalina de níquel. Otro de los logros alcanzados gracias al perfeccionamiento de las técnicas de manipulación atómica en superficies fue la construcción de un corral cuántico [4].

El microscopio de efecto túnel puede alcanzar resolución atómica debido a que la intensidad de la corriente de efecto túnel depende exponencialmente de la distancia entre la muestra y la punta.

Se le llama efecto túnel a la capacidad de las partículas de atravesar barreras de potencial de mayor energía que en una descripción clásica de la naturaleza no serían capaces de atravesar. Un electron con energía menor a la energía requerida clásicamente para atravesar una barrera de potencial tiene una probabilidad no cero de transmitirse al otro lado de la barrera.

La forma más sencilla del efecto túnel se estudia usando una barrera de potencial en una dimensión, ver figura 1.3. En este planteamiento una onda que clásicamente no tiene suficiente energía para atravesar la barrera incide por el lado izquierdo de la barrera. La barrera tiene una altura  $\phi$  y un ancho  $a$ . Para analizar este problema es

conveniente dividir al espacio completo en 3 partes, a la parte del espacio que coincide con  $x < 0$  se le llamará región I, a la parte del espacio para la cual  $0 \leq x \leq a$  se le llamará región II y finalmente a la parte del espacio con  $x > a$  se le llamará región III. La ecuación de Schrödinger en cada región es:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E\Psi(x) \quad \text{en las regiones I y III} \quad (1.1)$$

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \phi\Psi(x) = E\Psi(x) \quad \text{en la región II} \quad (1.2)$$

donde  $\phi$  es la altura de la barrera de potencial.

El fenómeno de tunelaje se presenta para las soluciones que tienen una energía,  $E$ , menor a la altura de la barrera de tunelaje por lo que  $\phi - E > 0$ , en la región I existen existen electrones incidentes y reflejados, en la región III por el contrario solo existen partículas transmitidas. Por lo que las soluciones en cada una de las regiones son:

$$\text{Región I} \quad \Psi_I(x) = e^{i\kappa x} + Ae^{-i\kappa x} \quad (1.3)$$

$$\text{Región II} \quad \Psi_{II}(x) = Be^{\kappa_b x} + Ce^{-i\kappa_b x} \quad (1.4)$$

$$\text{Región III} \quad \Psi_{III}(x) = De^{i\kappa x} \quad (1.5)$$

donde  $\kappa = \sqrt{\frac{2m_e E}{\hbar^2}}$  y  $\kappa_b = \sqrt{\frac{2m_e(\phi - E)}{\hbar^2}}$

Los coeficientes A, B, C, D se obtienen aplicando condiciones de frontera para

las funciones de onda  $\Psi_I$ ,  $\Psi_{II}$  y  $\Psi_{III}$  en los puntos donde inicia y termina la barrera,  $x = 0$  y  $x = a$ . Estas condiciones de frontera son:

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \quad (1.6)$$

$$\Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a) \quad (1.7)$$

Usando la ecuación de Schrödinger se pueden obtener otras dos condiciones de continuidad para la primera derivada de las funciones de onda:

$$\frac{d}{dx}\Psi_I(0) = \frac{d}{dx}\Psi_{II}(0) \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dx}\Psi_{II}(a) = \frac{d}{dx}\Psi_{III}(a) \quad (1.9)$$

El resultado es que el coeficiente D es:

$$D = \frac{e^{i\kappa a}}{\cosh(\kappa_b a) + \frac{i}{2}\left(\frac{\kappa_b}{\kappa} - \frac{\kappa}{\kappa_b}\right)\sinh(\kappa_b a)} \quad (1.10)$$

La corriente en la región III viene dada por la ecuación:

$$I_{III} = -i\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \Psi_{III}^*(x) \frac{d}{dx}\Psi_{III}(x) - \Psi_{III}(x) \frac{d}{dx}\Psi_{III}^*(x) \right) \quad (1.11)$$

que sustituyendo la ecuación 1.5 resulta en:

$$I_{III} = \frac{\hbar\kappa}{m_e} |D|^2 \quad (1.12)$$

$$I_{III} = \frac{\hbar\kappa}{m_e} \frac{1}{1 + \frac{(\kappa^2 + \kappa_b^2)^2}{4\kappa\kappa_b} \sinh^2(\kappa a)} \quad (1.13)$$

Que en el límite de una barrera muy alta,  $\kappa_b$  grande, presenta una proporciona-

lidad:

$$I_{III} \propto e^{-2\kappa a} \quad (1.14)$$

En el caso del tunelaje en un STM la altura del potencial,  $\phi$ , corresponde con la función de trabajo de los metales con los que están hechas la muestra y la punta, que es la energía necesaria para extraer un electrón del metal. Usando un valor típico para la función de trabajo  $\phi = 4,5eV$  el coeficiente  $2\kappa$  tiene un valor aproximado de  $\frac{1}{0,5\text{\AA}}$ . Esto significa que cada  $\text{\AA}$  que se incrementa la distancia entre la punta y la muestra la corriente se reduce por un factor de  $e^{-2} \approx 10$ , alrededor de un orden de magnitud. Esta fuerte dependencia con la distancia no solo es la razón por la cual el microscopio de efecto túnel puede alcanzar resolución atómica, también es la razón por la cual su construcción no fue posible sino hasta que se incorporó un sistema de aislamiento de ruido mecánico en el diseño. En la sección 2.1 se hace un desarrollo más detallado del efecto túnel utilizando la teoría de Bardeen.

Históricamente la primera observación experimental del efecto túnel ocurrió en 1957 en experimentos con uniones p-n delgadas de germanio [5]. En los años posteriores a su detección el efecto túnel fue utilizado ampliamente para estudiar las propiedades superficiales o de bulto de los materiales, en estas primeras aplicaciones se fabricaban sandwiches hechos de dos metales con un dieléctrico en medio de los dos, uno de los metales funjía como sonda y el otro como muestra, el dieléctrico funcionaba como la barrera de potencial a través de la cual debía atravesar la corriente de tunelaje. Uno de los primeros experimentos utilizando esta técnica fue la medición del tamaño de la banda de energía del plomo en estado superconductor, en este experimento se utilizó una barrera de óxido de aluminio como barrera de tunelaje, plomo en estado superconductor como muestra y aluminio puro como sonda [6].

Las barreras de tunelaje sólidas tienen la desventaja de quedar unidas tanto a la sonda como al material que se está investigando, es por esto que existieron muchos intentos de conducir experimentos de efecto túnel sin utilizar una barrera sólida, es

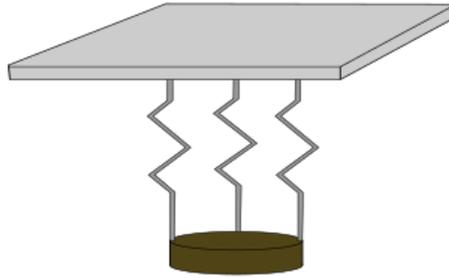
decir, con una barrera de vacío. La barrera de vacío, a diferencia de la barrera sólida, permitiría reutilizar tanto la sonda como el material. Pero no fue hasta 1981 que G. Binnig, H. Rohrer, Ch. Gerber, y E. Weibel lograron construir un aparato capaz de generar el efecto túnel con una barrera de vacío de tamaño controlable gracias a la inclusión de un sistema de aislamiento del ruido mecánico por suspensión magnética [7]. Un año después el mismo grupo de investigación capturaría la primera imagen topográfica de la superficie un material utilizando el efecto túnel [8].

## 1.2. Aislamiento del ruido mecánico

Como se discutió en la sección anterior uno de los componentes esenciales para que el microscopio de efecto túnel alcance la resolución atómica es la incorporación de mecanismos para eliminar el ruido mecánico, por lo que el escaner que contiene los motores piezo eléctricos, la punta y la muestra se incorporan en uno o más de estos mecanismos. El primer sistema de aislamiento de ruido utilizado en el contexto de la microscopía de efecto túnel fue un dispositivo de levitación magnética, en este dispositivo el escaner de tunelaje se encontraba montado sobre imanes permanentes que levitaban por encima de un tazón superconductor hecho de plomo, además contaba un mecanismo de frenado de corrientes parásitas [9]. De acuerdo a los autores del artículo este método de aislamiento filtraba efectivamente el ruido mecánico con una frecuencia mayor a 20Hz. En la siguiente versión del STM, [10], el dispositivo de levitación magnética fue reemplazado por un sistema de suspensión de dos etapas con resortes combinado con elementos hechos de Vitón. En trabajos posteriores este sistema de aislamiento se complementaría con frenado por corrientes parásitas.

Los sistemas de aislamiento descritos funcionan como filtros pasabajos. Hay dos factores que caracterizan a un filtro pasabajos, su frecuencia de resonancia y su factor de calidad. La frecuencia de resonancia indica la frecuencia a partir de la cual se aplica el filtrado y el factor de calidad es una medida inversa de cuanta

Soporte de donde cuelgan los resortes



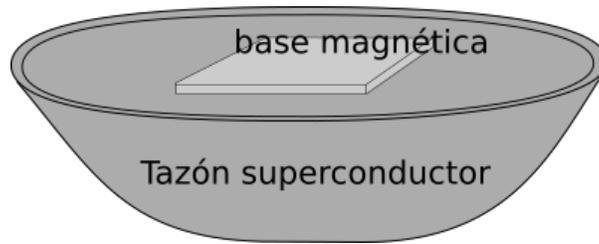
Elemento que se desea  
aislar del ruido externo

**Figura 1.4:** Se muestra sistema de aislamiento de ruido mecánico de una etapa con resortes.

energía se pierde por ciclo. Los filtros pasabajos además de filtrar frecuencias altas con respecto a su frecuencia de resonancia tienen el efecto de amplificar las señales que poseen una frecuencia cercana a su frecuencia de resonancia. Al diseñar un filtro pasabajos siempre existe un intercambio entre su capacidad para filtrar señales de alta frecuencia y la amplificación de las señales cercanas a la frecuencia de resonancia. Un filtro pasa bajas con un alto factor de calidad amplifica las señales con frecuencia cercana a su frecuencia de resonancia y reduce las señales frecuencia mayor a su frecuencia de resonancia, en contraste cuando el filtro tiene un bajo factor de calidad las señales con frecuencia cercana a su frecuencia de resonancia se amplifican mucho menos y las señales de alta frecuencia se filtran de manera menos efectiva.

Ahora se hará una breve discusión de las características de algunos sistemas de aislamiento de ruido que funcionan como filtros pasabajos: aislamiento con resortes, aislamiento con suspensión magnética y aislamiento con espaciadores Vitón.

Los sistemas de aislamiento de ruido mecánico con resortes proveen el filtrado de ruido gracias a las propiedades elásticas de los resortes. En estos sistemas el objeto que quiere aislarse mecánicamente cuelga de o reposa en un conjunto de resortes. En la figura 1.4 se ejemplifica un sistema de una etapa, en este sistema el objeto que se desea aislar del ruido externo cuelga de 3 resortes. La frecuencia de resonancia de los sistemas de aislamiento con resortes está determinada por la constante de

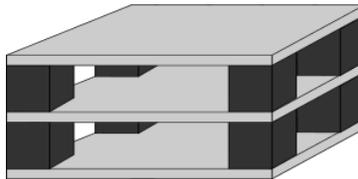


**Figura 1.5:** Se muestra sistema de aislamiento de ruido mecánico por suspensión magnética.

restitución de los resortes. Idealmente si se selecciona una constante de restitución lo suficientemente baja se puede obtener una frecuencia de resonancia baja, sin embargo producir frecuencias de resonancia bajas necesita de resortes con constantes de restitución bajas lo que implica que los resortes deben estirarse bastante, por ejemplo para obtener una frecuencia de resonancia de 1Hz los resortes deben estirarse 25 cm y para obtener una frecuencia de resonancia de 0.5 Hz deben estirarse 1m. Conseguir espacio para colocar resortes muy largos puede ser complicado por lo que usualmente se trabajan frecuencias de resonancia de 1- 2 Hz. Otra dificultad que presentan estos sistemas es que tienen un alto factor de calidad y amplifican el ruido con frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia del resorte. La forma más habitual de corregir esto es utilizar un sistema de frenado, como el frenado por corrientes parásitas.

En los sistemas de aislamiento por suspensión magnética una base magnética se coloca encima de un tazón en estado superconductor, ver figura 1.5, el objeto que se desea aislar del ruido mecánico se coloca sobre la base magnética. Estos sistemas presentan un alto factor de calidad al igual que los de suspensión de resortes y proveen aislamiento térmico. Debido a que la fuerza magnética debe soportar el peso del escaner del STM, no existe mucha libertad al momento de seleccionar la frecuencia de resonancia. A esto hay que sumar las complejidades de producir la levitación magnética, como por ejemplo la producción del estado superconductor.

Un espaciador vitón es una goma sintética, los sistemas que usan estos espaciadores se construyen colocando bloques de goma entre placas metálicas, en forma de pila, y el objeto que se desea proteger el ruido externo se coloca encima de la pila, ver



**Figura 1.6:** Se muestra una pila de dos niveles con espaciadores vitón. Los elementos grises representan las placas de metal y los elementos negros representan los espaciadores vitón.

figura 1.6. Los sistemas con espaciadores Vitón presentan un bajo factor de calidad, ya que el Vitón disipa mucha energía en forma de calor cuando se deforma. El vitón tiene un comportamiento elástico no lineal y colapsa si sufre cambios bruscos de temperatura o soporta mucho peso. Estas dos características hacen que sea complicado incorporar este sistema de aislamiento en microscopios que trabajen en ultra alto vacío, ya que durante la generación del vacío suelen aplicarse altas temperaturas.

Además del aislamiento del ruido de altas frecuencias, con sistemas que implementan filtros pasa bajas se requiere filtrar el ruido de bajas frecuencias con filtros pasa altas. El filtrado de ruido mecánico de bajas frecuencias se consigue asegurando que el escaner del STM tenga una estructura rígida. La punta y la muestra son un sistema oscilante acoplado por las características elásticas tanto de la estructura del escaner como de los piezoeléctricos que mueven la punta. Un modelo sencillo para este sistema se muestra en la figura 1.7, donde las características elásticas de la estructura del escaner y los piezoeléctricos son representados por resortes con frecuencia de resonancia  $\omega$  y constante de frenado  $\gamma$ . El ruido externo se aplica en la base del escaner, donde está la muestra, una parte de esta señal es transmitida a la punta. El ruido que afecta a la medición es el que modifica la distancia relativa entre la punta y la muestra. Como se discutió antes un resorte es un filtro pasa bajas, en este caso el efecto del resorte es permitir que las señales con frecuencia menor a la frecuencia de resonancia sean transmitidas a la punta y que tanto la punta como la muestra presenten el mismo efecto, por lo tanto, para las señales de menores frecuencias a la frecuencia de resonancia el ruido es filtrado. Para señales con frecuencia mayor a la frecuencia de resonancia el ruido no se transmite a la punta y sí se ve

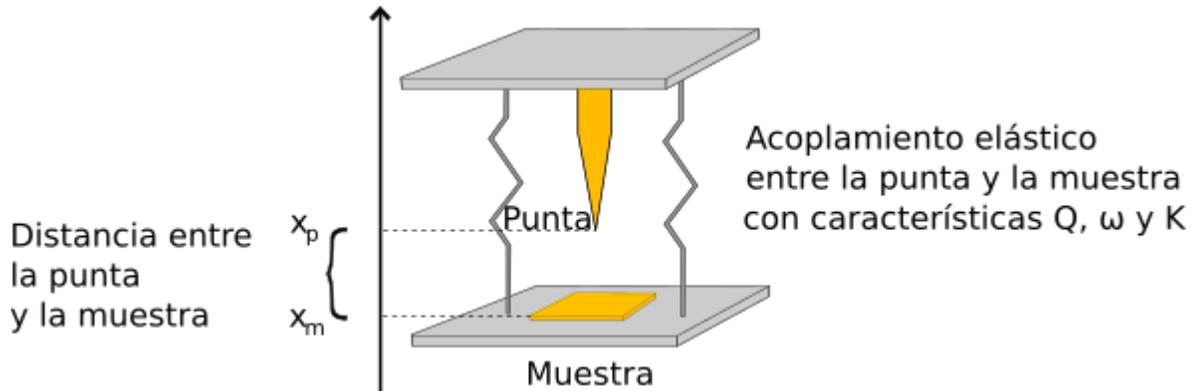


Figura 1.7: Modelo del escaner STM como filtro pasa altas.

afectada la distancia relativa entre la punta y la muestra.

Hoy en día los mejores aislamientos de ruido se logran montando el STM en pies neumáticos con frecuencia de resonancia de 1Hz o menos. Usando un sistema de suspensión con resortes de dos etapas y frenado por corrientes parásitas. Adicionalmente se usa un sistema de pila de platos metálicos separados por espaciadores vitón en la plataforma interna. Todo esto en conjunto con un diseño adecuado del escaner como filtro pasa altas resulta en una amplitud de ruido de alrededor de 1 pm [11].

### 1.3. Frenado con corrientes parásitas

Cuando un imán se mueve cerca de un conductor la variación del campo magnético en el tiempo genera un campo eléctrico no conservativo, este campo eléctrico produce corrientes dentro del conductor, estas corrientes son llamadas corrientes parásitas. Las corrientes parásitas producen un campo magnético que tiene el efecto de frenar el imán en movimiento.

Este efecto se conoce desde hace más de un siglo y existen artículos sobre él que datan de finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, por ejemplo [12], [13]. En los trabajos previos a mediados del siglo XX se trataba con casos especiales o aproximaciones que permitiesen una solución analítica o se buscaba que pudiera implementarse un método de solución numérica de manera sencilla. Con la llegada

de las computadoras y el aumento de capacidad de procesamiento se empezaron a utilizar intensivamente métodos numéricos, como el método de elemento finito, estos métodos permiten obtener predicciones exactas pero con un costo computacional relativamente alto, [14], [15]. Este costo computacional ha llevado a la búsqueda de métodos menos exactos pero computacionalmente menos costosos, entre ellos, y de particular importancia para este trabajo, se encuentra la incorporación del método de imágenes para satisfacer aproximadamente la condición de frontera  $\vec{J}_n = \vec{0}$ , i.e. que las corrientes estén confinadas dentro del conductor [16], [17].

En el contexto de la microscopía de efecto túnel el frenado por corrientes parásitas es preferido con respecto a otros mecanismos de frenado por su naturaleza de no contacto. Los métodos de frenado con contacto, como los que usan un fluido viscoso, tienen el efecto de acoplarse elásticamente al sistema afectando negativamente el filtrado del ruido de baja frecuencia. Otras desventajas de los sistemas que requieren contacto es el desgaste con el tiempo, que puede liberar contaminantes dentro de los microscopios, y que al estar en contacto directo permiten el flujo de calor desde o hacia el sistema que se quiere aislar mecánicamente.

## Capítulo 2

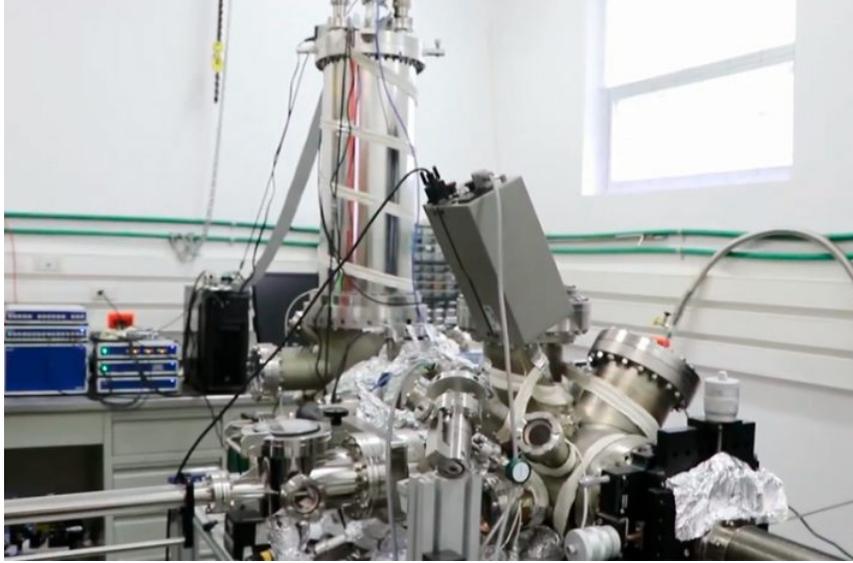
# Sistema de suspensión y frenado para el escaner del STM

El escaner del microscopio cuelga de 3 resortes y usa un sistema de frenado por corrientes parásitas, en este capítulo se detallan los desarrollos matemáticos necesarios para entender la importancia del mecanismo de aislamiento de vibraciones, su funcionamiento y simular su comportamiento. Se incluyen gráficas con los resultados de las simulaciones. El presente trabajo se realizó en el Laboratorio de Espectroscopia Óptica de Átomos y Moléculas Individuales en Superficies del Instituto de Física de la UNAM ubicado en Ciudad Universitaria, en la figura 2.1.

En la figura 2.2 se muestran imágenes de la instrumentación implementada para llevar a cabo los experimentos de validación de parte de la teoría y modelos desarrollados en este capítulo.

### 2.1. Efecto Túnel

Por ser de suma importancia para comprender el efecto del ruido mecánico en las mediciones del STM y la importancia de incluir un sistema de aislamiento en experimentos STM que buscan generar imágenes con resolución atómica en esta



**Figura 2.1:** Fotografía del Laboratorio de Espectroscopia Óptica de Átomos y Moléculas Individuales en Superficies en el Instituto de Física de la UNAM.

sección se describe la teoría del efecto túnel.

### 2.1.1. Tunelaje de Bardeen para barreras de vacío

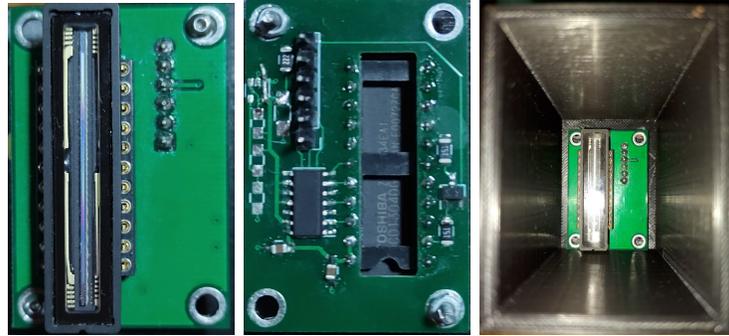
La teoría de Bardeen describe el tunelaje entre dos materiales conductores separados por una barrera [18]. En esta teoría se considera que la punta y la muestra inicialmente se encuentran separados por una gran distancia, por lo que los dos sistemas no interactúan y los estados de la punta y de la muestra cumplen respectivamente:

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi_n + V_{punta}\Psi_n = E_n^{punta}\Psi_n \quad (2.1)$$

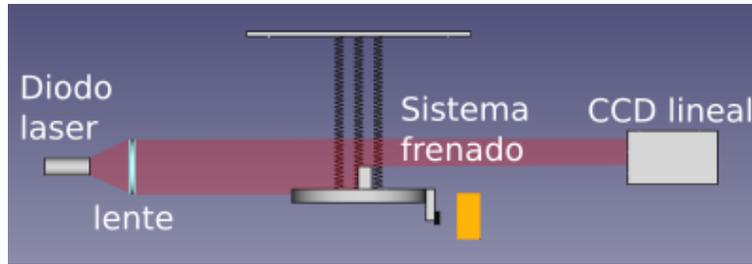
$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Phi_m + V_{muestra}\Phi_m = E_m^{muestra}\Phi_m \quad (2.2)$$

Cuando los dos sistemas están cerca el sistema completo está descrito por la ecuación de Schrödinger con el potencial de la punta y la muestra.

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi + (V_{muestra} + V_{punta})\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (2.3)$$



(a) Imágen frontal (b) Imágen trasera (c) Imágen de la cámara CCD lineal. cámara CCD lineal. cámara CCD lineal. Se puede apreciar el dentro del armazón circuito impreso. que la protege de la luz.



(d) Diagrama del montaje experimental completo.

**Figura 2.2:** Imágenes de la instrumentación implementada para realizar el experimento.

El objetivo es calcular la probabilidad de transición por unidad de tiempo, una vez que se acerquen la punta y la muestra existe una transición desde el estado  $m$  de la punta hacia algún estado de la muestra, para esto la función de onda del sistema se expande en términos de los estados de ocupación de la muestra y de la punta en el esquema de interacción y se analiza su evolución temporal.

La función de onda del sistema completo en términos de el estado inicial de la punta y los estados de la muestra en el esquema de interacción es:

$$\Psi(t) = a_m(t)e^{\frac{-iE_m^{punta}t}{\hbar}}\Psi_m + \sum_n b_n(t)e^{\frac{-iE_n^{muestra}t}{\hbar}}\Phi_n \quad (2.4)$$

En esta expansión los términos exponenciales capturan la evolución temporal de

los sistemas cuando no están interactuando.

Los estados  $\Psi_n$  y  $\Phi_m$  de las ecuaciones 2.1 y 2.2 no son soluciones de la ecuación de Schrödinger del sistema completo 2.3, sin embargo se considera que estos estados son aproximadamente ortogonales.

Para obtener la evolución temporal la función de onda del sistema se sustituye en la ecuación de Schrödinger para el sistema completo:

$$\begin{aligned}
 i\hbar\left(\dot{a}_m(t) - \frac{-iE_m^{punta}}{\hbar}a_m(t)\right)e^{\frac{-iE_m^{punta}t}{\hbar}}\Psi_m + \sum_n \left(\dot{b}_n(t) - \frac{-iE_n^{muestra}}{\hbar}b_n(t)\right)e^{\frac{-iE_n^{muestra}t}{\hbar}}\Phi_n = \\
 a_m(t)e^{\frac{-iE_m^{punta}t}{\hbar}}\left(-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V_{punta} + V_{muestra}\right)\Psi_m \\
 + \sum_n b_n(t)e^{\frac{-iE_n^{punta}t}{\hbar}}\left(-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V_{punta} + V_{muestra}\right)\Phi_n
 \end{aligned}$$

Que usando las ecuaciones de Schrödinger de los sistemas individuales se reduce a:

$$\begin{aligned}
 i\hbar\left(\dot{a}_m(t)e^{\frac{-iE_m^{punta}t}{\hbar}}\Psi_m + \sum_n \dot{b}_n(t)e^{\frac{-iE_n^{muestra}t}{\hbar}}\Phi_n\right) = \\
 a_m(t)e^{\frac{-iE_m^{punta}t}{\hbar}}V_{muestra}\Psi_m + \sum_n b_n(t)e^{\frac{-iE_n^{muestra}t}{\hbar}}V_{punta}\Phi_n
 \end{aligned}$$

Para obtener una ecuación diferencial para las amplitudes de probabilidad de los estados en la muestra se usará la condición de ortogonalidad para los estados de la muestra  $\int \Phi_m \Phi_n d^3x = \delta_{mn}$  y la condición de ortogonalidad aproximada entre los estados de la punta y la muestra  $\int \Psi_m \Phi_n d^3x \simeq 0$ :

$$\begin{aligned}
 i\hbar\dot{b}_n(t) = a_m(t)e^{\frac{-i(E_m^{punta} - E_n^{muestra})t}{\hbar}} \langle \Phi_n | V_{muestra} | \Psi_m \rangle \\
 + \sum_n b_m(t)e^{\frac{-i(E_m^{muestra} - E_n^{muestra})t}{\hbar}} \langle \Phi_n | V_{punta} | \Phi_m \rangle
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se hara una aproximación de primer orden en el tiempo para  $b_n(t)$ , por lo que el segundo término de la ecuación 2.5 que incluye efectos en el tiempo de segundo orden y superiores debe despreciarse:

$$i\hbar\dot{b}_n(t) = e^{\frac{-i(E_m^{punta} - E_n^{muestra})t}{\hbar}} \langle \Phi_n | V_{muestra} | \Psi_m \rangle \quad (2.6)$$

Una forma de entender esto es que al integrar la ecuación 2.5 cada término se multiplica por un  $dt$ , sin embargo como el sistema está acoplado los coeficientes  $b_m(t)$  en el segundo término de la ecuación 2.5 incluyen uno de estos términos. El primer término que incluye el coeficiente  $a_m(t)$  representa el estado inicial y en el tiempo 0 tiene el valor 1.

Como se mencionó previamente para obtener  $b(t)$  se debe integrar la ecuación anterior, para ello haremos uso de la aproximación adiabática, y supondremos que  $V_{muestra}$  se enciende lentamente:  $V_{muestra}(t) = e^{\frac{\eta}{\hbar}t} V_{muestra}$ , para después tomar el límite  $\eta \rightarrow 0$

$$i\hbar b_n(t) = \int_0^t e^{\frac{-i(E_m^{punta} - E_n^{muestra} - i\eta)t}{\hbar}} dt \langle \Phi_n | V_{muestra} | \Psi_m \rangle \quad (2.7)$$

$$b_n(t) = \frac{1}{E_m^{punta} - E_n^{muestra} - i\eta} e^{\frac{-i(E_m^{punta} - E_n^{muestra} - i\eta)t}{\hbar}} \langle \Phi_n | V_{muestra} | \Psi_m \rangle$$

Por lo tanto la probabilidad de transición del estado inicial m en la punta al estado final n en la muestra es:

$$|b_n(t)|^2 = \frac{e^{\frac{2\eta t}{\hbar}}}{(E_m^{punta} - E_n^{muestra})^2 + \eta^2} |M_{nm}|^2 \quad (2.8)$$

donde se han definido las cantidades  $M_{nm} = \langle \Phi_n | V_{muestra} | \Psi_m \rangle$ , que en la litera-

tura suelen ser llamados elementos de la matriz de tunelaje.

Y la probabilidad de la transición por unidad de tiempo es:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{d | b_n(t) |^2}{dt} = \frac{2\eta}{\hbar((E_m^{punta} - E_n^{muestra})^2 + \eta^2)} | M_{nm} |^2 \quad (2.9)$$

Al evaluar el límite  $\eta \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\frac{dP_{nm}}{dt} = \frac{d | b_n(t) |^2}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_m^{punta} - E_n^{muestra}) | M_{nm} |^2 \quad (2.10)$$

expresión conocida como la regla dorada de Fermi y fue derivada por primera vez por P. A. M. Dirac [19], la primer implicación de esta fórmula es que solo pueden existir transiciones entre estados de la punta y la muestra con la misma energía.

El efecto de tener un voltaje  $V_{bias}$  aplicado a la punta es recorrer los estados de energía de energía de la punta:  $E_{m'}^{punta} \rightarrow E_{m'}^{punta} + eV$ . De manera que la ecuación 2.10 se transforma en:

$$\frac{dP_{nm}(t)}{dt} = \frac{d | b_n(t) |^2}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_m^{punta} - E_n^{muestra} + eV) | M_{nm} |^2 \quad (2.11)$$

Para obtener la corriente total se deben considerar todas las transiciones posibles de estados de la punta a estados de la muestra y viceversa, además debe incluir un factor de 2 debido a los canales disponibles asociados a los estados de spin. Dependiendo la polarización túnel entre la muestra y la punta, en este caso suponiendo una polarización negativa a la punta, las transiciones solo pueden ocurrir desde estados ocupados hacia estados desocupados, cada probabilidad de transición por unidad de tiempo del estado de ocupación m en la punta al estado n en la muestra debe multiplicarse por la probabilidad de que exista un electron en el estado m y la probabilidad de que no exista un electrón en el estado n. Para los metales la probabilidad de que un estado con energía E esté ocupado viene descrita por la distribución de

fermi:  $f(E - E_f) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_f}{k_B T}}}$  [20] [21], por lo que la expresión para la corriente de la punta a la muestra es:

$$I_{punta \rightarrow muestra} = \frac{4\pi e}{\hbar} \sum_m \sum_n f(E_m^{punta} - E_f)(1 - f(E_n^{muestra} - E_f)) \delta(E_m^{punta} - E_n^{muestra} + eV) |M_{nm}|^2$$

Análogamente para la corriente desde la muestra a la punta:

$$I_{muestra \rightarrow punta} = \frac{4\pi e}{\hbar} \sum_m \sum_n f(E_m - E_f)(1 - f(E_n^{punta} - E_f)) \delta(E_m^{punta} - E_n^{muestra} + eV) |M_{nm}|^2$$

La corriente total se obtiene sumando ambas expresiones:

$$I = \frac{4\pi e}{\hbar} \sum_m \sum_n (f(E_m^{muestra} - E_f) - f(E_n^{punta} - E_f)) \delta(E_m^{punta} - E_n^{muestra} + eV) |M_{nm}|^2$$

En el límite continuo,  $\sum E_n \rightarrow \int \rho(E)dE$  la corriente se transforma en:

$$I = \frac{4\pi e}{\hbar} \int \rho_{muestra}(E)\rho_{punta}(E - eV)(f(E - eV - E_f) - f(E - E_f)) |M_{E+eV,E}|^2 dE \quad (2.12)$$

Lo primero que hay que notar en esta fórmula es que si no existe un voltaje aplicado a la punta o a la muestra la corriente se hace 0, en general esto no es así, ya que la punta y la muestra suelen tener distintos niveles de fermi, lo que

produce una corriente de tunelaje incluso si no hay un voltaje aplicado, sin embargo por simplicidad se ha supuesto que la punta y la muestra tienen el mismo nivel de fermi. El efecto del voltaje aplicado es elevar los niveles de energía de la punta colocando estados ocupados en la punta al nivel de energía de estados no ocupados en la muestra.

A bajas temperaturas, el régimen en el que opera el STM, la distribución de fermi se transforma en una función escalón, usando este hecho y el cambio de variable  $E \rightarrow E + E_f$  la ecuación 2.12 se transforma en:

$$I = \frac{4\pi e}{\hbar} \int_0^{eV} \rho_{muestra}(E + E_f) \rho_{punta}(E + E_f + eV) | M_{E+E_f+eV, E+E_f} |^2 dE \quad (2.13)$$

Cuando el cambio de energía inducido por la aplicación del voltaje en la punta es pequeño la corriente es directamente proporcional al elemento  $| M_{E+E_f+eV, E+E_f} |^2 dE$ :

$$I = \frac{4\pi e^2}{\hbar} V \rho_{muestra}(E_f) \rho_{punta}(E_f) | M_{E_f+eV, E+E_f} |^2 dE \quad (2.14)$$

### 2.1.2. Dependencia vertical de la corriente

Para entender como cambia la corriente dependiendo de la distancia entre la muestra y la punta se utilizará un modelo de una dimensión en el cual los potenciales de barrera están descritos por la función de trabajo de la muestra y la punta,  $\phi$ . El potencial de la muestra toma el valor  $-\phi$  para  $x \leq 0$  y el valor 0 para  $x > 0$ . El potencial de la punta toma el valor de 0 para  $x < x_{punta}$  y  $-\phi$  para  $x \geq x_{punta}$ . Se supone que el voltaje aplicado en la punta es pequeño y la fórmula 2.14 es válida.

Resulta necesario calcular el valor de los elementos de la matriz de tunelaje:

$$M_{E,E} = \langle E | V_{muestra} | E \rangle.$$

$$\langle \Psi_E^{muestra} | V_{muestra} | \Psi_E^{muestra} \rangle = \int \Psi_{punta}(x) \Psi_{muestra} V_{muestra}(x) dx \quad (2.15)$$

Como  $V_{muestra}$  es 0 salvo para  $x < 0$  la integral puede evaluarse desde  $-\infty$  hasta 0, en esta región la función de onda de la muestra tiene un comportamiento oscilatorio y la función de onda de la punta tiene un comportamiento evanescente. Hay que recordar que estas funciones de onda no son las soluciones al sistema completo sino los estados de la punta y la muestra por separado. Debido a que el potencial aplicado es pequeño, los estados cerca del nivel de fermi tienen una energía cercana a  $-\phi$  y son representados por funciones similares por lo que los elementos de la matriz de tunelaje no dependen de la energía. Tomando esto en cuenta las funciones de onda para la punta y para la muestra en esta región son:

$$\begin{aligned} \Psi_{punta} &= \Psi(x_{punta}) e^{\kappa(x-x_{punta})} \\ \Psi_{muestra} &= A e^{-i\kappa x} + B e^{i\kappa x} \end{aligned}$$

donde  $\kappa = \sqrt{\frac{2m\phi}{\hbar}}$ .

En la figura 2.3 se muestra un diagrama con los potenciales y un bosquejo de las funciones de onda.

Introduciendo las funciones de onda en la ecuación 2.15 se obtiene:

$$M = \int_{-\infty}^0 (-\Phi) \Psi(x_{punta}) e^{\kappa(x-x_{punta})} (A e^{-i\kappa x} + B e^{i\kappa x}) dx$$

En esta ecuación podemos observar que los elementos de la matriz de tunelaje son proporcionales a  $e^{-\kappa x_{punta}}$ , este hecho en conjunto con la ecuación 2.14 implican



Figura 2.3: Se muestra un diagrama del fenómeno de tunelaje

que la corriente túnel es proporcional a  $e^{-2\kappa x_{punta}}$ :

$$I \propto e^{-2\kappa x_{punta}} \quad (2.16)$$

En la tabla 2.1 se muestran las funciones de trabajo de algunos metales [22], la mayoría tiene un valor cercano a 5 eV, usando este valor en la expresión 2.16 el exponente toma el valor  $2\sqrt{\frac{2m\phi}{\hbar}} \simeq \frac{1}{3}\text{\AA}$ . Esto significa que por cada 6 Å que se separan la punta y la muestra la intensidad de la corriente de tunelaje disminuye un orden de magnitud.

Este análisis nos muestra que cambios del orden de 1 Å en la distancia entre la punta y la muestra inducen cambios bastante importantes en la intensidad de la corriente, esta es la razón por la observación del efecto túnel usando barreras de vacío no fue posible hasta que se integró un sistema de aislamiento de ruido mecánico y por la cual para alcanzar la resolución atómica en los experimentos de STM se necesita que el nivel de ruido mecánico tenga una amplitud de 0.1 Å o menos.

Metal	Función de trabajo (eV)
Plata	4.26
Aluminio	4.28
Oro	5.1
Cesio	2.14
Cobre	4.65
Tungsteno	4.5

Tabla 2.1: Funciones de trabajo de algunos metales.

## 2.2. Aislamiento de ruido mecánico

Como fue discutido en la sección anterior para llevar a cabo las mediciones en el nivel atómico se requiere una resolución vertical de al menos  $0,1 \text{ \AA}$ , sin embargo las vibraciones mecánicas del suelo por lo general tienen una amplitud del orden  $\sim 0,1 \mu\text{m}$ , lo que significa que el ruido mecánico del ambiente debe atenuarse al menos por un factor de  $10^{-6}$ .

Para lograr esta atenuación se utilizan dos mecanismos de aislamiento que funcionan respectivamente como un filtro pasa altas y un filtro pasa bajas. En esta sección analizaremos la teoría del funcionamiento del filtro pasa bajas que corresponde a un sistema de suspensión de resortes con frenado por corrientes parásitas. El filtro pasa altas se consigue haciendo un correcto diseño del escaner del STM.

El escaner del STM se modela como una masa rígida que cuelga de tres resortes dentro de la cámara de ultra alto vacío, con tres imanes que se desplazan de manera paralela a tres placas de cobre, ver figura 2.4.

Para entender como se transmiten las vibraciones externas de la cámara se obtendrá la función de transferencia del sistema cuando la cámara de la que cuelgan los resortes es sometida a una excitación vertical externa con frecuencia  $\omega$  y amplitud  $y_0$  que se puede escribir como  $y = y_0 \sin(\omega t)$ .

La fuerza que los resortes transmiten al escaner depende de los desplazamientos  $x$  e  $y$ :

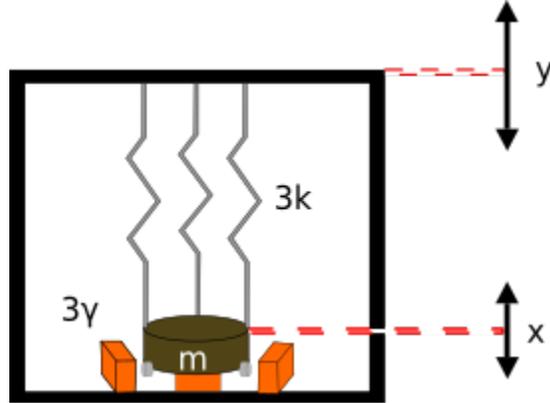


Figura 2.4: Esquema del sistema de suspensión con frenado por corrientes parásitas.  $x$  es el desplazamiento del escáner medido desde la posición de equilibrio del sistema,  $y$  es el desplazamiento de la cámara medido desde su posición inicial.

$$F_{resortes} = -K'(x - y)$$

siendo  $K' = 3k$  y  $k$  es la magnitud de la constante de restitución de los resortes.

Además existe una fuerza de oposición al movimiento del escáner debida a las corrientes parásitas generadas en las placas de cobre por el movimiento relativo entre los imanes y las placas de cobre, esta fuerza depende de la velocidad relativa entre el escáner y la cámara ya que las placas de cobre están acopladas a la cámara:

$$F_{frenado} = \gamma'(\dot{y} - \dot{x})$$

siendo  $\gamma' = 3\gamma$  y  $\gamma$  es la constante de frenado del sistema.

La ecuación de movimiento para el escáner es:

$$F_{total} = F_{resortes} + F_{frenado} = ma$$

donde  $m$  es la masa del escáner y  $a$  es la aceleración lineal en dirección vertical.

$$m\ddot{x} = -K(x - y) + \gamma(\dot{y} - \dot{x}) \tag{2.17}$$

## 2.2. AISLAMIENTO DE RUIDO MECÁNICO

---

La función de transferencia es el cociente entre la amplitud de la oscilación transmitida al escaner  $x_0$  y la amplitud de la oscilación de la cámara  $y_0$ :

$$\kappa(\omega) = \frac{|x_0|}{|y_0|}$$

El movimiento de la cámara se escribe en notación compleja:

$$y = y_0 e^{i\omega t}$$

Y la solución estacionaria del movimiento es:

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación de movimiento del sistema:

$$-\omega^2 m x_0 e^{i\omega t} = -K(x_0 - y_0) e^{i\omega t} + i\gamma\omega(y_0 - x_0) e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 m + K + i\gamma\omega)x_0 e^{i\omega t} = (K + i\gamma\omega)y_0 e^{i\omega t}$$

Acomodando la ecuación para obtener el cociente de la amplitud de salida entre la amplitud de excitación se obtiene:

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{K + i\gamma\omega}{-\omega^2 m + K + i\gamma\omega} \quad (2.18)$$

La frecuencia de resonancia para un oscilador armónico con frenado es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (2.19)$$

Para simplificar las expresiones, se usará en lugar de  $\gamma$  la constante  $\gamma_{eff}$  definida como:

$$\gamma_{eff} = \frac{\gamma}{m}$$

También definiremos el factor de calidad del sistema como:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma_{eff}}$$

Reescribiendo la ecuación 2.18 usando la frecuencia de resonancia se obtiene:

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{\omega_0^2 + \gamma_{eff}\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma_{eff}\omega} \quad (2.20)$$

Por lo que la función de transferencia es:

$$\kappa(\omega) = \frac{|x_0|}{|y_0|} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + \gamma_{eff}^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_{eff}^2\omega^2}} \quad (2.21)$$

Para analizar cualitativamente la función de transferencia se revisarán 3 modos de operación, cuando la frecuencia de excitación es mucho menor a la frecuencia de resonancia,  $\omega \ll \omega_0$ , cuando son iguales,  $\omega = \omega_0$  y cuando la frecuencia de excitación es mucho mayor a la frecuencia de resonancia  $\omega \gg \omega_0$ .

Cuando la frecuencia de excitación es mucho menor a la frecuencia de resonancia:

$$\kappa \approx 1$$

lo que significa que la amplitud de excitación es transmitida por completo al sistema.

Cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia de resonancia:

$$\kappa(\omega_0) = \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma_{eff}^2}} = \sqrt{1 + Q^2}$$

que significa que las señales con frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia se amplifican y el factor de calidad determina la magnitud de la amplificación.

El análisis para cuando la frecuencia de excitación es mucho mayor a la frecuencia de resonancia se hará para dos casos, con un factor de calidad infinito y con un factor de calidad bajo, cercano a 1, para ello reescribiremos la ecuación 2.21 en términos

del factor de calidad:

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}}} \quad (2.22)$$

En la expresión 2.22 se puede observar que cuando el factor de calidad tiende a infinito la función de transferencia tiende a:

$$\kappa(\omega) \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

Y cuando el factor de calidad se aproxima a 1 la función de transferencia tiende asintóticamente a:

$$\kappa(\omega) \approx \frac{\omega_0}{\omega}$$

Cuando existe un factor de calidad alto las frecuencias altas se atenúan por un factor  $\frac{1}{\omega^2}$  y cuando el factor de calidad es bajo se atenúan por un factor  $\frac{1}{\omega}$ .

En la figura 2.5 se graficaron las funciones de transferencia para distintos factores de calidad, la variable independiente no es la frecuencia sino el cociente de la frecuencia dividido por la frecuencia de resonancia.

El análisis para frecuencias altas y frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia revela que un alto factor de calidad mejora el filtrado de ruido de altas frecuencias pero amplifica el ruido cercano a la frecuencia de resonancia y que un bajo factor de calidad disminuye la calidad del filtrado para altas frecuencias pero disminuye la amplificación del ruido con frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia.

Al tratarse de un filtro pasa altas el mejor filtrado se logra seleccionando la menor frecuencia de resonancia posible. Una fórmula que ayuda al momento de seleccionar resortes para el sistema de atenuación se puede obtener usando la ley de Hooke,  $F = k\Delta l = mg$ , y la fórmula para la frecuencia de resonancia de un oscilador armónico,  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ , de donde se obtiene:

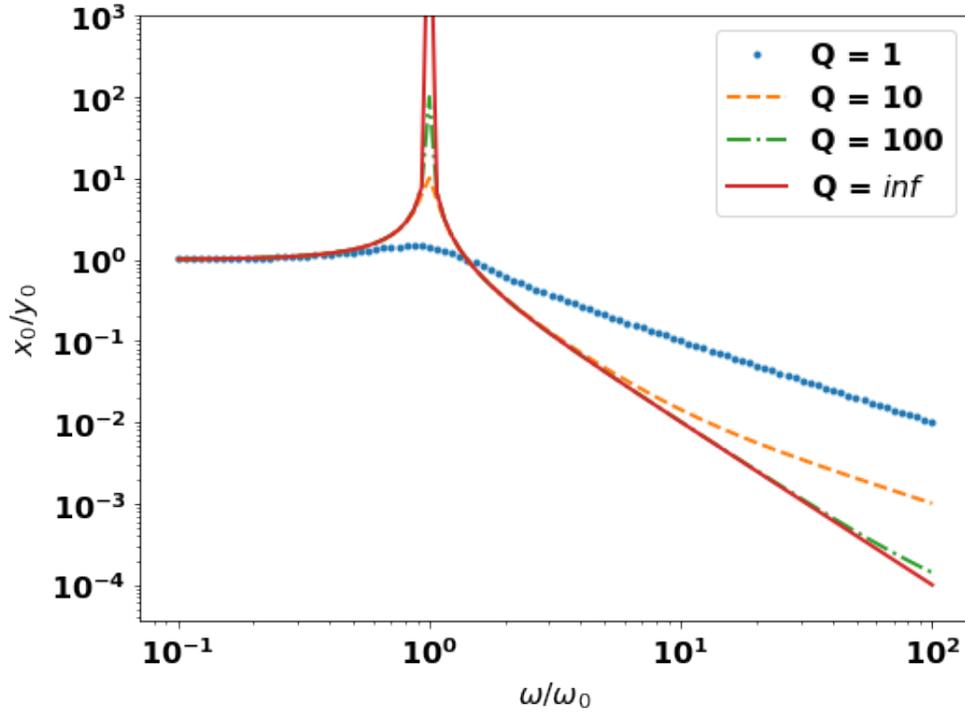


Figura 2.5: Se muestra la función de transferencia para distintos factores de calidad.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$

Esta ecuación muestra que para obtener la frecuencia de resonancia más baja posible se deben seleccionar resortes que presenten la mayor elongación posible.

### 2.3. Trayectorias del oscilador armónico frenado

En esta sección se obtiene la ecuación de la trayectoria para un oscilador armónico amortiguado. La ecuación de movimiento será relevante para las mediciones de la constante de frenado.

Iniciamos con el mismo planeamiento de la sección anterior, sin embargo no consideraremos el movimiento de la cámara que contiene al escaner. Por lo que la ecuación 2.17 en esta toma la forma:

### 2.3. TRAYECTORIAS DEL OSCILADOR ARMÓNICO FRENADO

---

$$m\ddot{x} = -Kx - \gamma\dot{x}$$

donde  $m$  es la masas del movil,  $K$  es la constante de restitución del resorte y  $\gamma$  es la constante de frenado del sistema.

Usando el clásico ansatz  $x = exp(\lambda t)$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + K = 0$$

que tiene dos soluciones:

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}$$

Dependiendo de las características del sistema ( $K$ ,  $\gamma$  y  $m$ ),  $\lambda$  puede ser un número real negativo o un número complejo, el comportamiento de la solución está definido por el valor del determinante  $\gamma^2 - 4mK$ .

Cuando  $\gamma^2 - 4mK > 0$  la solución es una combinación lineal de dos decaimientos exponenciales, a este regimen de comportamiento se le llama sobre frenado:

$$x = Ae^{-\left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}\right)t} + Be^{-\left(\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}\right)t} \quad (2.23)$$

Cuando  $\gamma^2 - 4mK = 0$  la solución es un decaimiento exponencial multiplicado a un movimiento rectilíneo uniforme, a este comportamiento se le llama de frenado crítico porque se encuentra justo en medio de las soluciones de comportamiento oscilatorio y las soluciones de comportamiento puramente exponencial:

$$x = e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}(A + Bt) \quad (2.24)$$

Cuando  $\gamma^2 - 4mK < 0$  la solución consta de un decaimiento exponencial multi-

plicado por un componente oscilatorio, esta solución recibe el nombre de subfrenado:

$$x = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t} \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}t + \phi\right) \quad (2.25)$$

## 2.4. Solución al problema dinámico sin fuerzas de frenado

En el STM del laboratorio de átomos y moléculas individuales del IFUNAM el escaner cuelga de 3 resortes y para termalizarse se hace descender 3 mm para que haga contacto con la base de la cámara de vacío.

La comprensión del movimiento del escaner bajo la acción de los resortes es interesante porque nos puede ayudar a evitar choques contra la cámara. En esta sección se desarrolla un modelo para el movimiento del escaner en 3 dimensiones sin disipación.

El primer paso es obtener las ecuaciones de movimiento para de un cuerpo rígido suspendido por 3 resortes, el objetivo es entender de forma realista el movimiento del cuerpo sin una fuerza de frenado. Como la forma del escaner es complicada se usa un modelo de dos cilindros de radio distinto uno sobre el otro, ver figura 2.6.

### 2.4.1. Sistema de referencia

El cilindro principal cuelga de 3 resortes, estos tres resortes cuelgan de un lugar fijo. Los tres resortes tienen la misma constante,  $K$  y la misma longitud en reposo  $l_0$ . Los puntos donde se unen al cilindro forman triángulo equilátero cuyo baricentro coincide con el eje del cilindro. Véase Figura 2.6.

El sistema de referencia del laboratorio se selecciona de forma que coincide con la posición del centro de masa del modelo del escaner cuando el sistema está en equilibrio dinámico.

## 2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

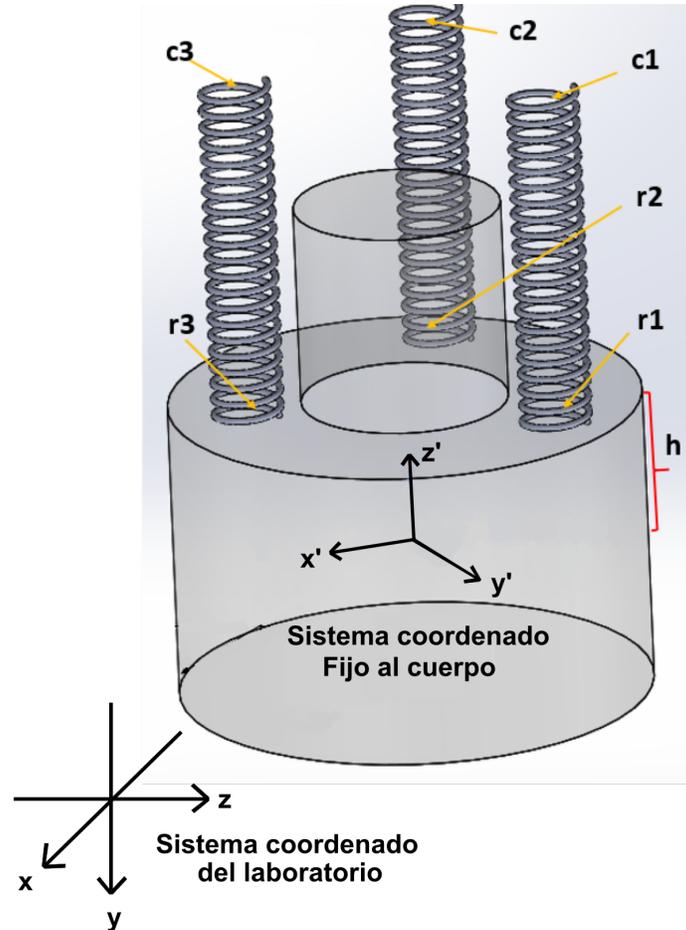


Figura 2.6: Sistemas coordenados, los puntos  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  son donde se unen los resortes con el cilindro,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  es donde los resortes se unen al techo,  $h$  es la distancia entre el centro de masa del cilindro grueso y el plano donde los resortes se unen al cilindro

Se llamará  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$  a los puntos donde los resortes se unen al cilindro principal y  $\vec{c}_1$ ,  $\vec{c}_2$  y  $\vec{c}_3$  a los puntos donde los resortes se sujetan del techo.

Véase figura 2.6 para la orientación de los ejes.

Para tratar el problema de la dinámica del cilindro usaremos la descripción Lagrangiana de la Mecánica, usando como coordenadas generalizadas las coordenadas del centro de masa y los ángulos de Euler.

Los ángulos de Euler son una serie de rotaciones que codifican la orientación de un sistema de referencia fijo en el cuerpo con respecto al sistema del laboratorio, la convención de giros usada en este trabajo es la misma que se define en la referencia

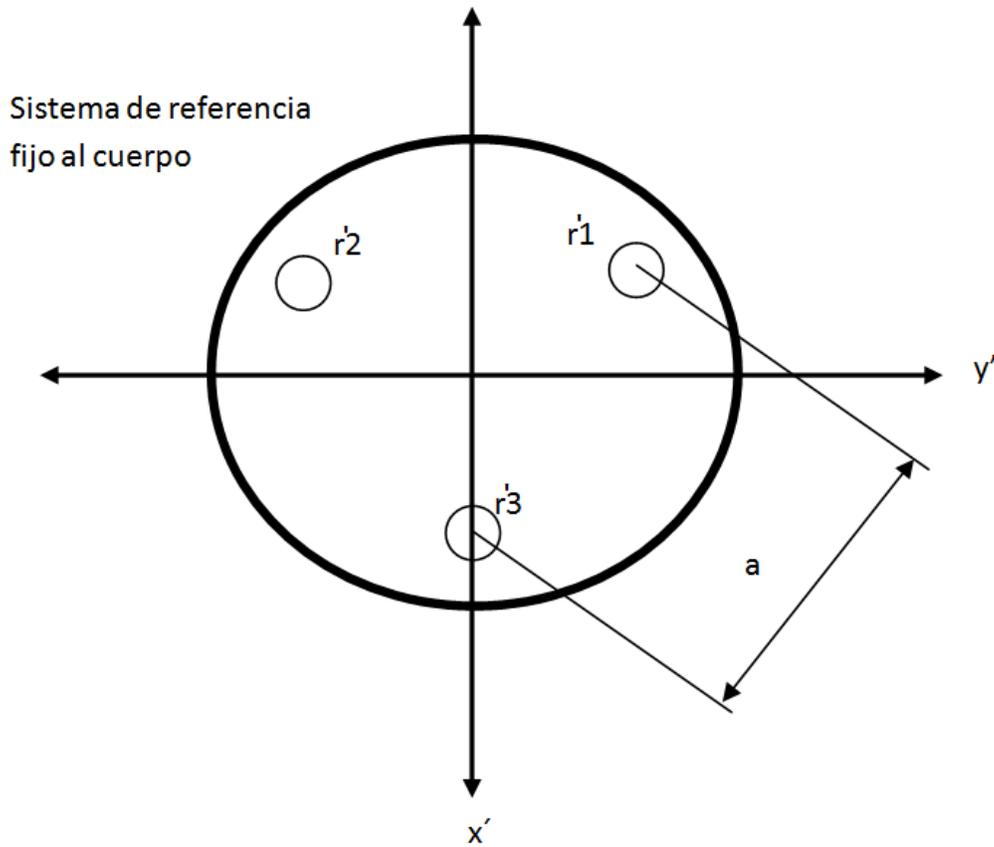


Figura 2.7: Sistema coordenado fijo al cilindro, los puntos  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  son donde se unen los resortes con el cilindro, estos puntos forman un triángulo equilátero de lado  $a$  cuyo baricentro coincide con el eje axial del cilindro.

[23]. En esta convención el primer giro se hace alrededor del eje  $z$  del sistema de laboratorio, el segundo giro se hace alrededor del eje  $x$  del sistema rotado una vez y el tercer giro se hace alrededor del eje  $z$  del sistema rotado dos veces, ver figura 2.8. Al ángulo de la primera rotación se le identificará con la letra  $\phi$ , al ángulo de la segunda rotación se le identificará con la letra  $\theta$  y al ángulo de la última rotación se le identificará con la letra  $\psi$ .

De ahora en más a las cantidades expresadas con respecto al sistema fijo en el cuerpo se les colocará un apóstrofe, por ejemplo  $\vec{r}'_1$  es la posición de la unión del primer resorte con el escaner en el sistema ligado al cuerpo rígido, y  $\vec{r}_1$  es la misma posición pero medida con respecto al sistema del laboratorio.

2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

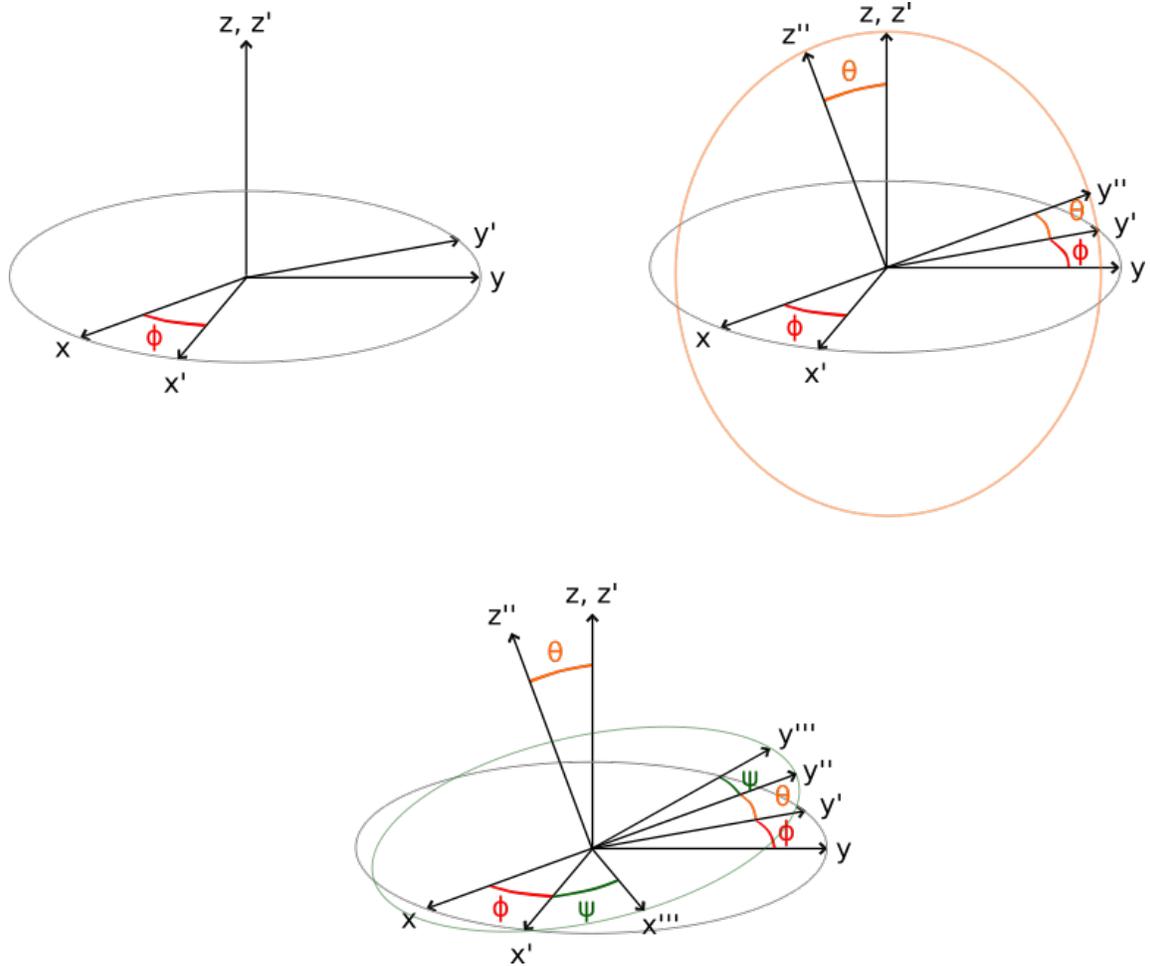


Figura 2.8: Se ejemplifican las rotaciones asociadas a cada ángulo de euler. La primera rotación se encuentra arriba a la izquierda, la segunda arriba a la derecha y la tercera abajo

Nótese que el sistema coordenado de laboratorio no está orientado en la posición estandar, con el eje  $z$  apuntando hacia arriba, sin embargo cuando el sistema está en equilibrio el sistema coordenado asociado al cuerpo rígido sí tiene a su eje  $z'$  apuntando hacia arriba, esto significa que las coordenadas de la posición de equilibrio del sistema son  $x_{cm} = (0, 0, 0)$ ,  $\phi = 0$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  y  $\psi = 0$ . Los ejes del laboratorio se han orientado de esta forma para evitar las singularidades que ocurren en las ecuaciones de movimiento cuando alguno de los ángulos de Euler tienen un valor de 0, por ejemplo la ecuación 2.57.

### 2.4.2. Planteamiento del Lagrangiano y ecuaciones de movimiento

Primero se escribirá el Lagrangiano del sistema

$$L = T - U$$

en términos de las coordenadas generalizadas  $x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}, \phi, \theta$  y  $\psi$ . De acuerdo a [23] la energía cinética de un cuerpo rígido en términos de las coordenadas generalizadas para un cuerpo con simetría axial es:

$$T = \frac{M}{2}[\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2 + \dot{z}_{CM}^2] + \frac{I_{//}}{2}[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)] + \frac{I_{\perp}}{2}[\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)]^2 \quad (2.26)$$

La energía potencial del sistema tiene dos componentes, la energía almacenada por los resortes y la energía potencial gravitacional del centro de masa:

$$V = \frac{K}{2}[(\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0)^2 + (\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0)^2 + (\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0)^2] - Mgy \quad (2.27)$$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$  son los puntos donde los resortes se unen al escaner, medidos con respecto al sistema fijo en el cuerpo. Véase la figura 2.7.

Las coordenadas de  $r'_1, r'_2$  y  $r'_3$  son:

$$r'_1 = \left( -\frac{\sqrt{3}}{6}a \quad \frac{a}{2} \quad h \right)$$

$$r'_2 = \left( -\frac{\sqrt{3}}{6}a \quad -\frac{a}{2} \quad h \right)$$

$$r'_3 = \left( \frac{a}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad h \right)$$

En el sistema de referencia ligado al escaner los puntos donde los resortes se unen al escaner,  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$ , son representados por vectores constantes, por lo que es muy útil tener una expresión para la posición de estos puntos medida con respecto al sistema

## 2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

---

de laboratorio en términos de los vectores constantes, la matriz de transformación entre ambos sistemas R y la traslación del centro de masa:

$$\vec{r}_1 = R^{-1}\vec{r}'_1 + \vec{x}_{cm} \quad (2.28)$$

$$\vec{r}_2 = R^{-1}\vec{r}'_2 + \vec{x}_{cm} \quad (2.29)$$

$$\vec{r}_3 = R^{-1}\vec{r}'_3 + \vec{x}_{cm} \quad (2.30)$$

nótese que T depende de los ángulos de Euler.

De acuerdo a [23] esta matriz viene dada por:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi) & -\sin(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\psi) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\psi)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\psi) & -\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ , figura 2.6, en el sistema de laboratorio son:

$$\begin{aligned} c_1 &= \left( -\frac{-\sqrt{3}}{6}a \quad -(l_0 + \frac{Mg}{3k} + h) \quad \frac{a}{2} \right) \\ c_2 &= \left( -\frac{-\sqrt{3}}{6}a \quad -(l_0 + \frac{Mg}{3k} + h) \quad -\frac{a}{2} \right) \\ c_3 &= \left( \frac{a}{\sqrt{3}} \quad -(l_0 + \frac{Mg}{3k} + h) \quad 0 \right) \end{aligned}$$

Las derivadas de la energía cinética con respecto a las coordenadas generalizadas son:

$$\frac{\partial T}{\partial x_{cm}} = \frac{\partial T}{\partial y_{cm}} = \frac{\partial T}{\partial z_{cm}} = 0 \quad (2.31)$$

ya que T no depende de las coordenadas del centro de masa.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{cm}} = M\dot{x}_{cm} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_{cm}} = M\dot{y}_{cm} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{cm}} = M\dot{z}_{cm} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = I_{//}\dot{\phi}^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - I_{\perp}(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})\sin(\theta) \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = M\dot{\theta} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I_{//}\dot{\phi}\sin(\theta)^2 + I_{\perp}(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})\cos(\theta) \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{\perp}(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi}) \quad (2.39)$$

Se procede a obtener las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas usando el formalismo de Euler-Lagrange.

Para el centro de masa:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{cm}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cm}} \right) = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{cm}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{cm}} \right) = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_{cm}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{cm}} \right) = 0 \quad (2.42)$$

## 2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

---

Sustituyendo las derivadas de la energía cinética resulta:

$$M\ddot{x}_{cm} = -\frac{\partial V}{\partial x_{cm}} \quad (2.43)$$

$$M\ddot{y}_{cm} = -\frac{\partial V}{\partial y_{cm}} \quad (2.44)$$

$$M\ddot{z}_{cm} = -\frac{\partial V}{\partial z_{cm}} \quad (2.45)$$

que describen el movimiento del centro de masa y prácticamente son la segunda ley de Newton.

Sustituyendo las ecuaciones 2.35 y 2.37 en la ecuación de Lagrange para  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_{//} \ddot{\theta} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (2.48)$$

$$I_{//} \ddot{\theta} = I_{//} \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \dot{\phi} \sin(\theta) I_{\perp} (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) - \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (2.49)$$

Haciendo lo mismo para  $\psi$  y  $\phi$  resulta:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) \quad (2.50)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) \quad (2.51)$$

Ya que V no depende de las velocidades generalizadas.

Substituyendo las derivadas de V y de T en la ecuación 2.52 obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \ddot{\phi}(I_{//} \sin^2(\theta) + I_{\perp} \cos^2(\theta)) + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)(I_{\perp} - I_{//}) \\ &\quad + \ddot{\psi} I_{\perp} \cos(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} I_{\perp} \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(I_{//} \sin^2(\theta) + I_{\perp} \cos^2(\theta)) + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)(I_{\perp} - I_{//}) \\ + \ddot{\psi} I_{\perp} \cos(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} I_{\perp} \operatorname{sen}(\theta) &= -\frac{\partial V}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para obtener al ecuación de movimiento para  $\psi$  se sustituye la ecuación 2.39 en la fórmula de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} \left( I_{\perp}(\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) \right) = I_{\perp}(\ddot{\psi} \cos(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) + \ddot{\psi}) \quad (2.54)$$

$$I_{\perp}(\ddot{\psi} \cos(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) + \ddot{\psi}) = -\frac{\partial V}{\partial \psi} \quad (2.55)$$

Tanto  $\ddot{\psi}$  como  $\ddot{\phi}$  aparecen en las ecuaciones 2.55 y 2.53. Para resolver numericamente el sistema es conveniente tenerlas separadas:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{1}{I_{//} \sin^2(\theta)} \left( -\frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \dot{\theta} I_{\perp} \operatorname{sen}(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\phi} \dot{\theta} (2I_{//} - I_{\perp}) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -\frac{1}{I_{\perp}} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{\cos(\theta)}{I_{//} \sin^2(\theta)} \left( -\frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \dot{\theta} I_{\perp} \operatorname{sen}(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\phi} \dot{\theta} (2I_{//} - I_{\perp}) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Las ecuaciones 2.43, 2.44, 2.45, 2.49, 2.56 y 2.57 son el sistema de ecuaciones que se

## 2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

---

ha de resolver para determinar la trayectoria del cilindro. Cada una de estas ecuaciones entrega la segunda derivada temporal de una coordenada generalizada como función de las coordenadas generalizadas y las primeras derivadas de las coordenadas generalizadas esto es:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}) \quad (2.58)$$

Resta obtener expresiones para las derivadas del potencial en términos de las coordenadas generalizadas. Recordando la expresión para el potencial:

$$V = \frac{K}{2} [(\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0)^2 + (\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0)^2 + (\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0)^2] - Mgy \quad (2.59)$$

Primero se calculan las derivadas de V con respecto a las coordenadas del centro de masa

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_{cm}} &= k \left( [\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0] \frac{\partial}{\partial x_{cm}} (\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|) \right. \\ &\quad + [\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0] \frac{\partial}{\partial x_{cm}} (\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|) \\ &\quad \left. + [\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0] \frac{\partial}{\partial x_{cm}} (\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|) \right) \\ &= k \left( [\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0] \frac{r_{1x} - c_{1x}}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} \right. \\ &\quad + [\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0] \frac{r_{2x} - c_{2x}}{\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|} \\ &\quad \left. + [\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0] \frac{r_{3x} - c_{3x}}{\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|} \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Los resultados para  $y_{cm}$  y  $z_{cm}$  son análogos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y_{cm}} &= k \left( [\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0] \frac{r_{1y} - c_{1y}}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} + [\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0] \frac{r_{2y} - c_{2y}}{\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|} \right. \\ &\quad \left. + [\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0] \frac{r_{3y} - c_{3y}}{\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|} \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_{cm}} = k \left( [ \|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0 ] \frac{r_{1z} - c_{1z}}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} + [ \|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0 ] \frac{r_{2z} - c_{2z}}{\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|} + [ \|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0 ] \frac{r_{3z} - c_{3z}}{\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|} \right) \quad (2.62)$$

Las derivadas con respecto a los ángulos de euler son:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k \left( [ \|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0 ] \frac{\partial}{\partial \theta} (\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|) + [ \|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0 ] \frac{\partial}{\partial \theta} (\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|) + [ \|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0 ] \frac{\partial}{\partial \theta} (\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|) \right) \quad (2.63)$$

Trabajando sobre  $\frac{\partial \|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|}{\partial \theta}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( ((r_{1x} - c_{1x})^2 + (r_{1y} - c_{1y})^2 + (r_{1z} - c_{1z})^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} \left[ (r_{1x} - c_{1x}) \frac{\partial r_{1x}}{\partial \theta} + (r_{1y} - c_{1y}) \frac{\partial r_{1y}}{\partial \theta} + (r_{1z} - c_{1z}) \frac{\partial r_{1z}}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} (\vec{r}_1 - \vec{c}_1) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.64)$$

La ecuación 2.63 se puede reescribir como:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k \left( [ \|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_1 - \vec{c}_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} + [ \|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_2 - \vec{c}_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} + [ \|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_3 - \vec{c}_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \theta} \right) \quad (2.65)$$

Las expresiones para  $\frac{\partial V}{\partial \phi}$  y  $\frac{\partial V}{\partial \psi}$  son análogas:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = k \left( [ \|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_1 - \vec{c}_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \phi} + [ \|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_2 - \vec{c}_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \phi} + [ \|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_3 - \vec{c}_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \phi} \right) \quad (2.66)$$

## 2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

---

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = k \left( [ \|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_1 - \vec{c}_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{c}_1\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \psi} + [ \|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_2 - \vec{c}_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{c}_2\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \psi} + [ \|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\| - l_0 ] \frac{\vec{r}_3 - \vec{c}_3}{\|\vec{r}_3 - \vec{c}_3\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \psi} \right) \quad (2.67)$$

Ahora se buscará una expresión para  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \psi}$  y  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \phi}$ . Usando las ecuaciones de transformación entre sistemas coordenados 2.28, y las ecuaciones 2.29 y 2.30 estas derivadas toman la forma:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = \frac{\partial T^{-1}}{\partial \theta} \vec{r}'_i \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \phi} = \frac{\partial T^{-1}}{\partial \phi} \vec{r}'_i \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \psi} = \frac{\partial T^{-1}}{\partial \psi} \vec{r}'_i \quad (2.70)$$

Finalmente las ecuaciones:

$$M \ddot{x}_{cm} = - \frac{\partial V}{\partial x_{cm}} \quad (2.71)$$

$$M \ddot{y}_{cm} = - \frac{\partial V}{\partial y_{cm}} \quad (2.72)$$

$$M \ddot{y}_{cm} = - \frac{\partial V}{\partial y_{cm}} \quad (2.73)$$

$$I_{//} \ddot{\theta} = I_{//} \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \dot{\phi} \sin(\theta) I_{\perp} (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}) - \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (2.74)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_{//}\sin^2(\theta)} \left( -\frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \dot{\theta} I_{\perp} \operatorname{sen}(\theta) - \dot{\phi} \dot{\theta} (2I_{//} - I_{\perp}) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \quad (2.75)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{1}{I_{\perp}} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{\cos(\theta)}{I_{//}\sin^2(\theta)} \left( -\frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \dot{\theta} I_{\perp} \operatorname{sen}(\theta) - \dot{\phi} \dot{\theta} (2I_{//} - I_{\perp}) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \quad (2.76)$$

son sistema de ecuaciones diferenciales que al integrarse nos permitirá conocer la trayectoria del escaner.

Para resolver el sistema para algunas longitudes en reposo y constantes elásticas se implementó el método de Runge Kutta de cuarto orden en C#.

## 2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

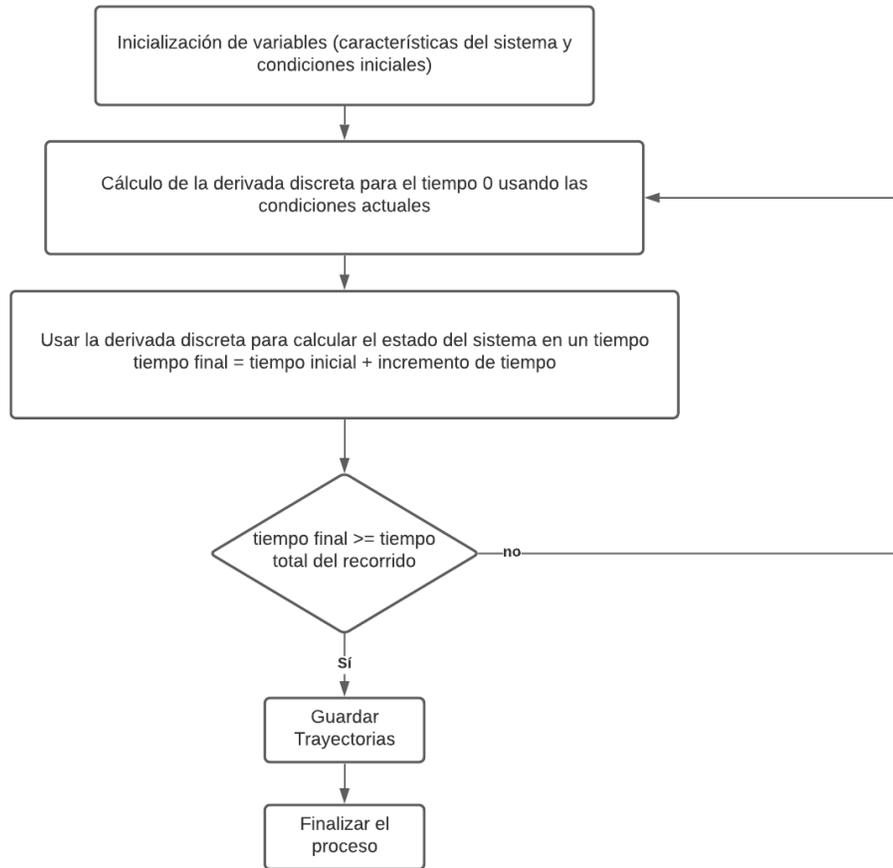


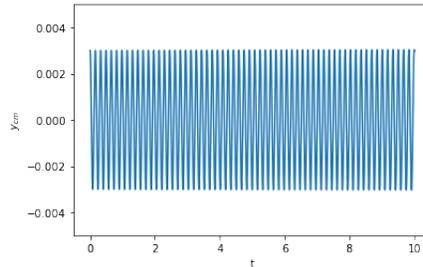
Figura 2.9: Se muestra el diagrama de flujo del programa que implementa Runge-Kutta

### 2.4.3. Simulaciones

En esta sección se muestra el resultado de la simulación para varias condiciones iniciales, se excluyen las gráficas de las variables que no cambian de manera apreciable, por ejemplo en la primera gráfica, figura 2.10, que corresponde con un desplazamiento vertical del escaner solo la coordenada  $y_{cm}$  cambia, por tanto se excluyeron las gráficas de las otras coordenadas. Todas las simulaciones de esta sección se hicieron con resortes que tienen longitud de reposo de 14cm y resortes con constante de elasticidad de 500N/m. Las condiciones iniciales de cada simulación se representan con objetos de la forma  $(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}, \phi, \theta, \psi)$ .

La primera simulación, figura 2.10 es una comprobación para las ecuaciones de

movimiento. En esta simulación el escaner se desplaza verticalmente hacia abajo 3mm. No existen fuerzas laterales y las torcas de todos los resortes alrededor del centro de masa están balanceadas, por lo tanto el desplazamiento es sólo vertical y la coordenada  $y_{cm}$  se comporta como un oscilador armónico simple.



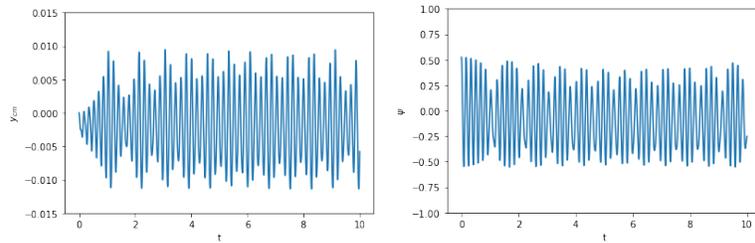
**Figura 2.10: Condición inicial: el centro de masa del escaner se encuentra 3mm abajo de su posición de equilibrio.**

En la segunda simulación, figura 2.11, el escaner rota 30 grados alrededor de su eje, las coordenadas iniciales en el sistema de laboratorio son  $(0, 0, 0, 0, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ . En esta configuración los resortes se encuentran tensionados debido al giro, y la torca resultante se encuentra en el eje  $y$  del laboratorio. El escaner empieza moviéndose hacia arriba debido a la tensión de los resortes. En las gráficas se aprecia que existe un intercambio de energía entre el movimiento vertical del centro de masa y el movimiento de rotación, la implicación de esto para un STM es que si no se tiene cuidado de no rotar el escaner cuando desciende para termalizarse o colocar la muestra este podría chocar contra la base de la cámara de vacío, cuando ocurra uno de los picos de movimiento vertical que se observan en la gráfica 2.11 a).

En la tercera simulación las condiciones iniciales son  $(3mm, 3mm, 0, 0, -\frac{\pi}{4}, 0)$ , y en la cuarta simulación las condiciones iniciales son  $(0, 3mm, 3mm, 0, -\frac{\pi}{4}, 0)$  ver figura 2.12. Los escenarios en estas simulaciones son un desplazamiento hacia abajo y hacia adelante y un desplazamiento hacia abajo y hacia uno de los lados. En estas dos simulaciones el movimiento es primero hacia abajo y luego un desplazamiento sobre el plano horizontal. Las dos figuras presentan intercambios de energía entre el movimiento vertical y el movimiento horizontal sin embargo en estos movimientos

## 2.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DINÁMICO SIN FUERZAS DE FRENADO

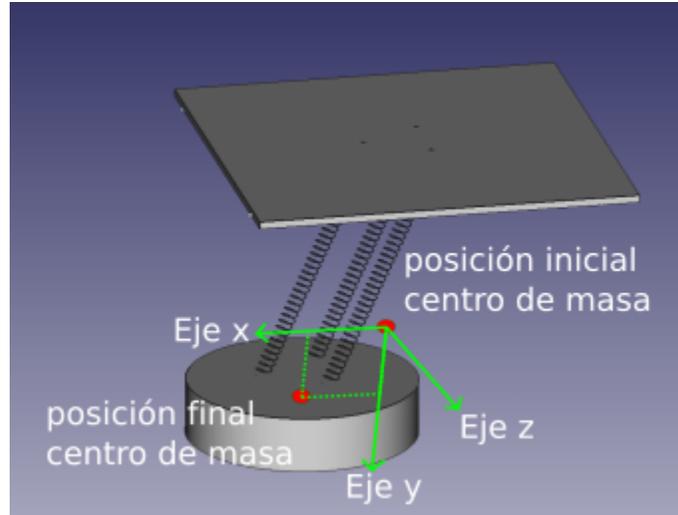
---



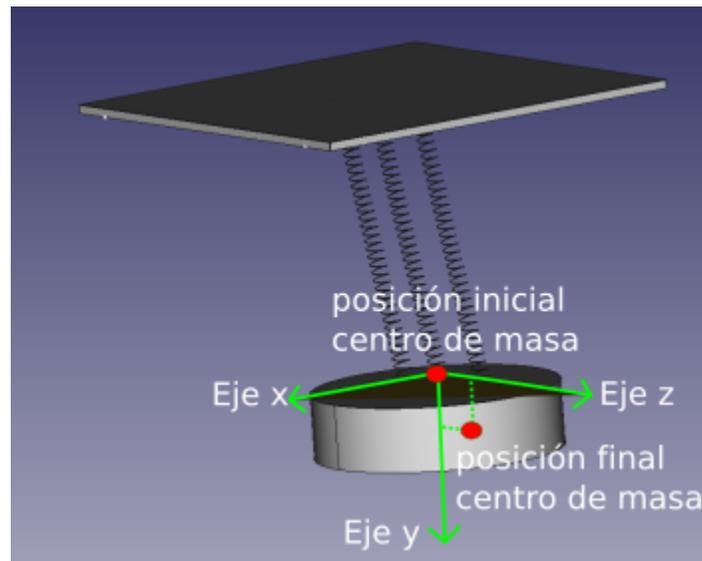
(a) Movimiento vertical del centro de masa  
(b) Giro del escaner alrededor de su propio eje

**Figura 2.11:** Condición inicial: el centro de masa del escaner se encuentra en su posición de equilibrio, pero el escaner se hace rotar 30 grados sobre su eje de simetría.

nunca ocurre un descenso más bajo que el del inicio, ver gráficas 2.13 y 2.14. Esto implica que al hacer descender el escaner hay ligeros desplazamientos en el plano horizontal no hay riesgo de que el escaner choque contra la base.



(a) En la simulación 3 la posición del centro de masa es  $(3\text{mm}, 3\text{mm}, 0)$  y no hay rotaciones.

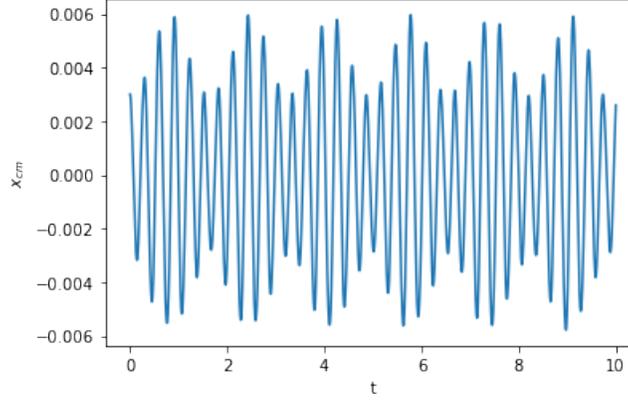


(b) En la simulación 4 la posición del centro de masa es  $(0, 3\text{mm}, 3\text{mm})$  y no hay rotaciones.

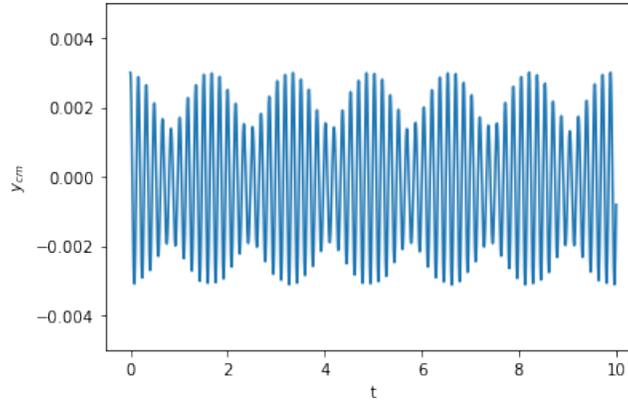
**Figura 2.12:** Esquema de las condiciones iniciales para las simulaciones 3 y 4, los puntos rojos en esta figura representan la posición de equilibrio del sistema que coincide con el origen del sistema de referencia y la posición del centro de masa cuando la simulación inicia.

## 2.5. Fuerza de frenado

En esta sección se detalla el desarrollo teórico para calcular la fuerza de frenado producida por el movimiento relativo entre un imán de forma cilíndrica y una placa



(a) Coordenada x del centro de masa

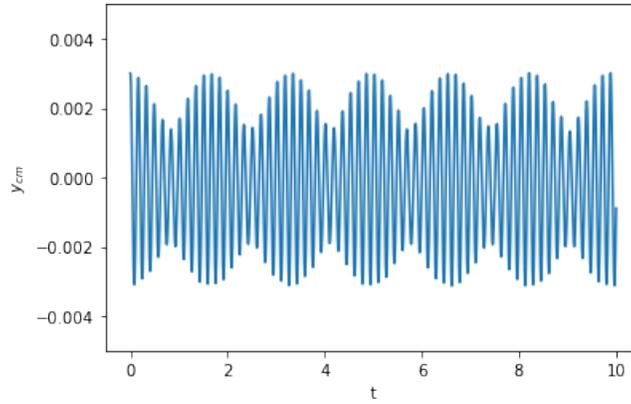


(b) Coordenada y del centro de masa

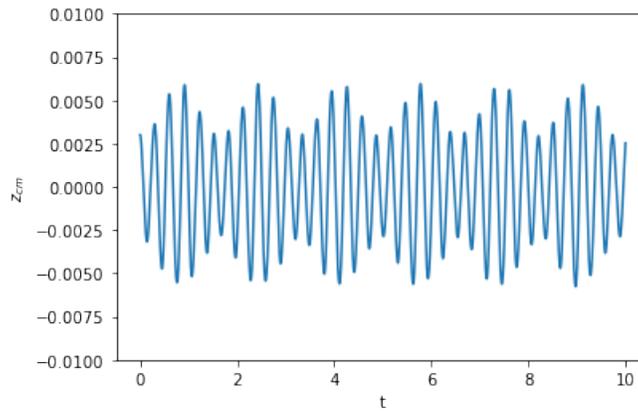
**Figura 2.13: Trayectorias en la simulación 3.**

conductora de sección transversal rectangular. La fuerza de frenado resulta tener la forma  $F = -c_f v$ , donde  $v$  es la velocidad de movimiento relativa. Posteriormente se graficó el comportamiento de la constante de frenado para diferentes características del imán y de la placa. El método es análogo al desarrollado para imanes de sección transversal rectangular en la referencia [17], pero usando imanes cilíndricos. En esta sección la orientación de los ejes coordenados es la siguiente: eje  $z$  apunta hacia arriba, eje  $y$  se extiende desde el centro del imán hacia el centro de la placa y el eje  $x$  es ortogonal a estos dos, ver figura 2.16.

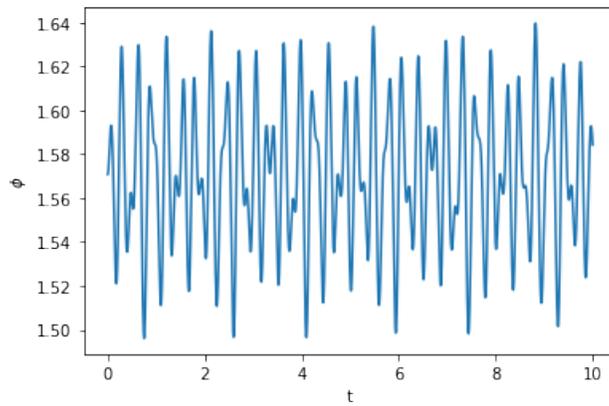
El mecanismo de frenado se ilustra en la figura 2.15. El momento magnético del



(a) Coordenada y del centro de masa



(b) Coordenada z del centro de masa



(c) Ángulo  $\phi$

Figura 2.14: Condición inicial: el centro de masa del escaner se encuentra en las coordenadas (0, 0.003mm, 0.003mm).

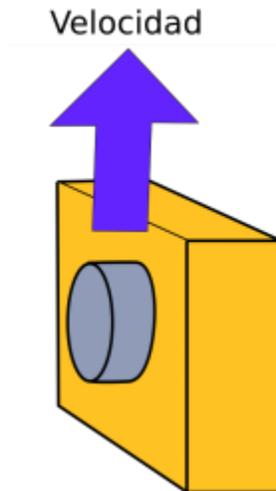


Figura 2.15: Movimiento del imán

imán tiene una orientación horizontal y enfrente se encuentra la placa de cobre. El movimiento del imán genera corrientes parasitas en la placa de cobre y la interacción entre las corrientes y el imán produce una fuerza que frena al sistema. El sistema de frenado tiene dos propósitos, el primero es frenar el escaner cuando se suelta luego de ponerlo en contacto con la base de la cámara para cargar la muestra y termalizarlo y el segundo es disminuir la amplificación del ruido mecánico que tiene una frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia.

### 2.5.1. Cálculo del campo de corrientes inducidas

En un material óhmico la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.77)$$

Por tanto se desarrollará un modelo para calcular el campo eléctrico inducido por el movimiento de los imanes. El campo eléctrico inducido por el movimiento de los imanes se calcula resolviendo las ecuaciones de Maxwell. En el modelo desarrollado en esta sección se asume que la interacción de las corrientes consigo mismas y el efecto de piel son despreciables y que el campo eléctrico inducido es paralelo al plano

x-z, es decir paralelo a la sección transversal de la placa. Además se considera que la placa de material conductor tiene una sección transversal infinita, ver figura 2.16. Se considera que el campo magnético es producido únicamente por el imán y que cuando el imán se mueve su campo magnético se propaga infinitamente rápido, es decir en todo momento el campo magnético en todo el espacio es el campo magnético en el tiempo 0 pero trasladado. El cambio en el tiempo de este campo magnético se debe únicamente al cambio de posición del imán. En un paso posterior se aplicará el método de imágenes para incluir las fronteras de la placa en la formulación

El modelo desarrollado en esta sección recibe el nombre de Método de Potencial Escalar, (SPM por sus siglas en inglés) y pertenece al conjunto de métodos de solución semianalíticos. Los métodos semianalíticos se caracterizan por simplificar un problema electromagnético adicionando algunas suposiciones, a diferencia de los métodos de solución numérica que resuelven el problema exacto como el método de elemento finito. Los métodos de solución semianalíticos demandan mucho menos recursos computacionales que los métodos numéricos además de disminuir el tiempo de cómputo necesario para obtener la solución a un problema.

Otro ejemplo de un método semianalítico es llamado método de potencial vectorial, (VPM), en este método se resuelve la ecuación de difusión para el potencial magnético dentro de una placa infinita, la ventaja de este método sobre el usado en este capítulo es que incluye la interacción del campo de corrientes consigo mismo y a diferencia del método usado en este capítulo la constante de frenado que se obtiene depende de la frecuencia del movimiento del imán, [17]. La desventaja de este método con respecto al método de potencial escalar es que requiere de un tiempo de cálculo mayor.

En la referencia [17] se hace una comparación entre los tiempos de cálculo que requiere cada método para resolver el mismo problema, se reporta que el método de elemento finito tarda un poco más de 5 horas, el método de potencial vectorial tardar media hora y el método de potencial escalar tarda alrededor de 12 segundos.

Otros métodos para calcular corrientes parásitas usan una distribución de carga imaginaria y calculan el campo eléctrico usando la ley de Coulomb. En trabajos previos, Heald [24] calculó las corrientes parásitas producidas por el movimiento relativo entre una placa infinita moviéndose de forma paralela a un imán de sección transversal rectangular, para lograr esto Heald obtiene una expresión para la densidad de carga eléctrica superficial en la proyección del imán sobre la placa y usa la ley de Coulomb para obtener una expresión para el campo eléctrico en toda la placa. En este trabajo apareció por primera vez la idea de usar el método de espejos para trabajar con placas de sección transversal finita. El método de espejos en el contexto de las corrientes parásitas fue aplicado por primera vez por Kapjin Lee y Kyihwan Park como una extensión del modelo de Heald para obligar a que el campo eléctrico normal a la frontera sea cercano a 0 [25]. En este método la distribución de carga obtenida por Heald se refleja en las fronteras de la placa conductora. Cabe destacar que estos modelos que usan dsitribuciones de carga no incluyen de ninguna forma la interacción de las corrientes inducidas consigo mismas y por lo tanto no incluyen el efecto de piel.

Para frecuencias bajas la profundidad de piel se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} \quad (2.78)$$

Donde  $\rho$  es la resistividad del material,  $\omega$  es la frecuencia de oscilación del campo magnético,  $\mu$  es la permeabilidad relativa del material. En la validación experimental se usará una frecuencia de alrededor de 40Hz, para esta frecuencia la profundidad de piel es de 2 cm o 20 mm.

### 2.5.1.1. Método de potencial escalar para un imán circular

Como fue mencionado antes en el método de potencial escalar se consiera que el campo magnético es producido únicamente por el imán.

El campo magnético de un imán cilíndrico con su eje de simetría orientado a lo largo del eje z esta descrito por las ecuaciones [26]:

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \int_{-L}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi)(z - z') d\phi dz'}{(b^2 + r^2 + (z - z')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.79)$$

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \int_{-L}^0 \int_0^{2\pi} \frac{(b - r\sin(\phi)) d\phi dz'}{(b^2 + r^2 + (z - z')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.80)$$

Donde  $B_r$  y  $B_z$  son las componentes del campo magnético en direcciones r y z,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío, M es la magnetización del imán, b es el radio del imán y  $(r, z, \phi)$  son las coordenadas en un sistema de coordenadas cilíndrico del punto para el que se calculará el campo magnético.

Para trabajar con una velocidad en el eje z, se modifican las ecuaciones anteriores para que el eje del imán coincida con el eje y y el momento magnético quede orientado en la dirección de  $-y$ . Definimos ahora  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ .

$$B_r(r, y) = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi)(y - y') d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.81)$$

$$B_y(r, y) = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{(b - r\sin(\phi)) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.82)$$

Ahora se escribirán los componentes del campo magnético en coordenadas cartesianas para cada punto del espacio si el eje del imán esta a una distancia  $z_{iman}$  del eje y. Definiremos  $r = \sqrt{x^2 + (z - z_{iman})^2}$ .

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0 M b x}{4\pi r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi)(y - y') d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.83)$$

$$B_z(x, y, z) = \frac{\mu_0 M b z - z_{iman}}{4\pi r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi)(y - y') d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.84)$$

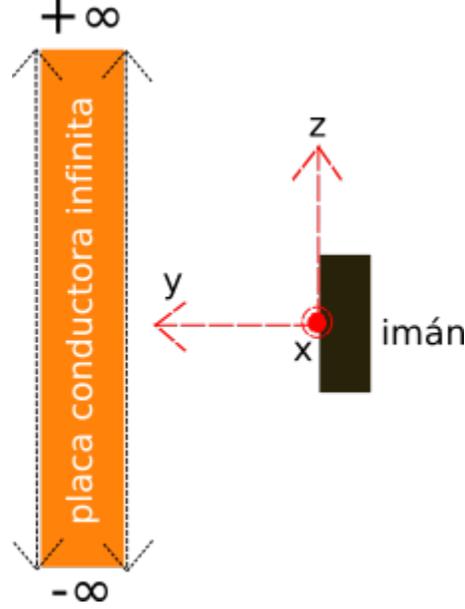


Figura 2.16: Placa de sección transversal infinita e imán.

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{(b - r \sin(\phi)) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rb \sin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.85)$$

Al despreciar el campo eléctrico paralelo al eje  $y$  la ley de faraday-lenz se escribe como las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.87)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.88)$$

donde  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$  son las componentes del campo eléctrico.

Que se transforman en las siguientes integrales:

$$E_z = -\int_{-\infty}^y \frac{\partial B_x}{\partial t} dy' \quad (2.89)$$

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\infty}^y B_x dy \quad (2.90)$$

$$E_x = \int_{\infty}^y \frac{\partial B_z}{\partial t} dy \quad (2.91)$$

$$E_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\infty}^y B_z dy \quad (2.92)$$

$$E_z = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\infty}^y B_x dy = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\infty}^y \frac{\mu_0 M b x}{4\pi r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi)(y-y') d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} dy \right]$$

$$E_z = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{x}{r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\infty}^y \frac{-\sin(\phi)(y-y') d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} dy \right]$$

$$E_z = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{x}{r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$E_z = \frac{\mu_0 M b x}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \right) \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$E_z = \frac{\mu_0 M b x}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{\partial r}{\partial z_{iman}} \frac{\partial z_{iman}}{\partial t}$$

Por convenciencia se definirá:

$$I_3(x, y, z, z_{iman}) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y-y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{1}{2}}} \quad (2.93)$$

$$I_3(x, y, z, z_{iman}) = \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \ln \left( \frac{\sqrt{(y-L)^2 + b^2 + r^2 - 2rbsin(\phi)} + y - L}{\sqrt{y^2 + b^2 + r^2 - 2rbsin(\phi)} + y} \right) d\phi \quad (2.94)$$

Notando que  $\frac{\partial z_{iman}}{\partial t} = v_{iman}$

$$E_z = \frac{\mu_0 M b x v_z}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial z_{iman}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) I_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$E_z = \frac{\mu_0 M b x v_z}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial z_{iman}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) I_3 + \frac{1}{r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\frac{-1}{2}(2r - 2bsin(\phi)) \sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Por convenciencia se definirá:

$$I_4(x, y, z, z_{iman}) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{(r - bsin(\phi)) \sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rbsin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.95)$$

$$I_4(x, y, z, z_{iman}) = \int_0^{2\pi} \frac{(r - bsin(\phi)) \sin(\phi) d\phi}{b^2 + r^2 - 2rbsin(\phi)} \left( \frac{y}{\sqrt{b^2 + r^2 + y^2 - 2rbsin(\phi)}} - \frac{y - L}{b^2 + r^2 + (y - L)^2 - 2rbsin(\phi)} \right) \quad (2.96)$$

$$E_z = \frac{\mu_0 M b x v_z}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial z_{iman}} \left[ -\frac{1}{r^2} I_3 - \frac{1}{r} I_4 \right]$$

$r = \sqrt{x^2 + (z - z_{iman})^2}$  por tanto:

$$\frac{\partial r}{\partial z_{iman}} = -\frac{z - z_{iman}}{r} \quad (2.97)$$

y se tiene:

$$E_z = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} v_z \frac{x(z - z_{iman})}{r^2} \left[ \frac{1}{r} I_3 + I_4 \right] \quad (2.98)$$

Para  $E_x$ .

$$E_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^y B_z dy = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{-\infty}^y \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \frac{z - z_{iman}}{r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi)(y - y') d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rb\sin(\phi))^{\frac{3}{2}}} dy \right]$$

$$E_x = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{z - z_{iman}}{r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^y \frac{\sin(\phi)(y - y') d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rb\sin(\phi))^{\frac{3}{2}}} dy \right]$$

$$E_x = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{z - z_{iman}}{r} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{-\sin(\phi) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rb\sin(\phi))^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Se deriva con respecto al tiempo e identificamos a  $I_3$ :

$$E_x = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{z - z_{iman}}{r} \right) I_3 + \frac{z - z_{iman}}{r} \frac{\partial}{\partial r} I_3 \frac{\partial r}{\partial z_{iman}} v_z \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{z - z_{iman}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z_{iman}} \left( \frac{z - z_{iman}}{r} v_z \right)$$

$$= \frac{-r^2 + (z - z_{iman})^2}{r^3} v_z = -\frac{x^2}{r^3} v_z \quad (2.99)$$

Recordando la ecuación [2.97] tenemos:

$$E_x = -\frac{\mu_0 M b}{4\pi} v_z \left( -\frac{x^2}{r^3} I_3 + \left( \frac{z - z_{iman}}{r} \right)^2 I_4 \right) \quad (2.100)$$

### 2.5.1.2. Método de espejos

Hasta este punto no se han tomado en consideración los límites físicos de la placa de cobre. El método anterior supone que la placa se extiende en área hasta el infinito o que es muy grande comparada con el tamaño del imán. El hecho de que las corrientes están confinadas dentro del bloque de metal implica que el campo eléctrico debe satisfacer la condición de frontera:

$$E_n = 0 \quad (2.101)$$

Es decir el campo normal a la superficie debe ser cero. Para que se cumplan parcialmente las condiciones de frontera se aplica el método de imágenes. Se genera un reflejo de todo el sistema en cada una de las caras laterales de la placa conductora y se suman los campos de cada sistema reflejado al campo del sistema original.

En la figura 2.17 se muestra el campo de las corrientes antes de aplicar el método de espejos y después de aplicar el método de espejos, este campo de corrientes está calculado a una distancia de 1mm del imán.

### 2.5.2. Fuerza de Frenado

La fuerza de Lorentz para una partícula con una carga  $q$  es:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.102)$$

Donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula y  $\vec{B}$  es el campo magnético.

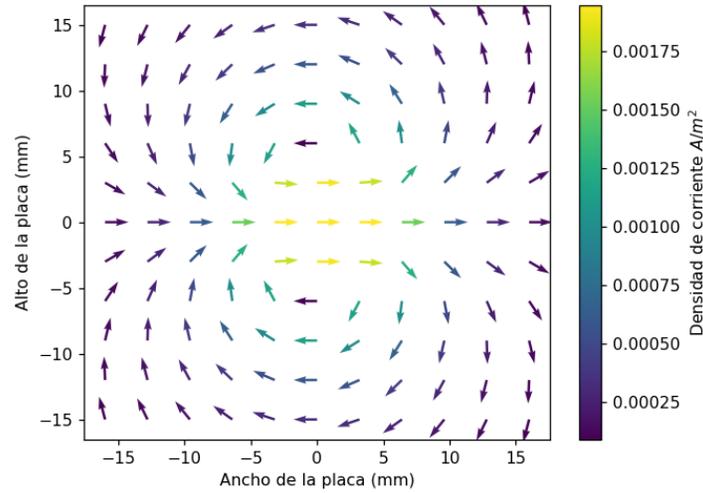
Para calcular la fuerza sobre el bloque de material conductor se necesita aplicar esta ecuación en forma de medio continuo, si pensamos en un pequeño cubo dentro del material orientado de manera que una de sus caras sea normal a  $\vec{J}$ , la corriente que atraviesa el bloque es:

$$I = J dA \quad (2.103)$$

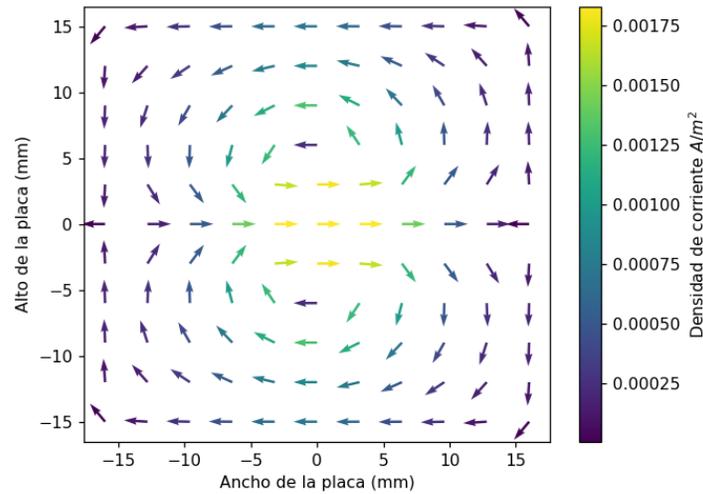
donde  $dA$  es el area de la cara normal a  $J$ .

En un instante de tiempo  $dt$  la carga que entra al bloque es  $q = Idt$  Sustituyendo esta expresión para la carga en la fuerza de lorentz obtenemos que la fuerza sobre el bloque de tamaño diferencial del material es:

$$d\vec{F} = J dA dt \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.104)$$



(a) Campo de corrientes sin aplicar método de espejos



(b) Campo de corrientes aplicando método de espejos

Figura 2.17: Se muestran los campos de densidad de corriente generados en un plano horizontal dentro de una placa de cobre con ancho y alto de 30mm a una distancia de 1mm de un imán que se mueve a velocidad de 0.05 m/s. Todas las flechas tienen la misma longitud para facilitar la visualización de la dirección del flujo de corriente, el color de cada flecha representa la intensidad de la densidad de corriente.

Como la velocidad,  $\vec{v}$ , tiene la misma orientación que  $\vec{J}$ :

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (2.105)$$

Así la fuerza sobre todo el bloque es:

$$\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (2.106)$$

Como los campos eléctricos (ecuaciones 2.100 y 2.5.1.1) son lineales con respecto a la velocidad la fuerza resultante es lineal con respecto a la velocidad, además, como el campo magnético es antisimétrico respecto al eje  $x$  pero las corrientes son simétricas respecto al eje  $x$  la fuerza en dirección  $x$  es 0 y las corrientes en el eje  $y$  son despreciables esta fuerza estará orientada en dirección vertical (eje  $z$ ):

$$\vec{F} = -c_f v_z \hat{z} \quad (2.107)$$

Usando estos argumentos la ecuación 2.106 resulta ser:

$$\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} J_x B_y dV \vec{z} \quad (2.108)$$

Que usando la ley de Ohm microscópica,  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , se escribe como:

$$\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} \sigma E_x B_y dV \vec{z} \quad (2.109)$$

Insertando las expresiones para el campo eléctrico  $E_x$  2.100 y para el campo magnético  $B_y$  2.85 en la ecuación anterior:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0^2 M^2 b^2}{16\pi^2} v_z \sigma \int_{Volumen} \left( -\frac{x^2}{r^3} I_3 + \left( \frac{z - z_{iman}}{r} \right)^2 I_4 \right) \times \left( \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{(b - r \sin(\phi)) d\phi dy'}{(b^2 + r^2 + (y - y')^2 - 2rb \sin(\phi))^{\frac{3}{2}}} \right) dV \vec{z}$$

La primera parte de esta ecuación es particularmente interesante porque describe como depende la fuerza de frenado de las características del imán y de la conductividad de la placa:

$$\frac{\mu_0^2 M^2 b^2}{16\pi^2} \sigma \tag{2.110}$$

### 2.5.3. Simulación

En esta sección se estudia el comportamiento de la constante de frenado  $c_f$ , para diferentes características del imán y de la placa.

Para calcular la constante de frenado se hizo un programa usando el lenguaje C++ y la librería GSL con el método de integración de montecarlo, en esta sección se muestran gráficas que representan la variación de la constante de frenado en función de las características del sistema.

En los primeros dos cálculos se usa un imán de ferrita con radio de 6 mm y campo magnético residual de 0.5 T.

En la figura 2.18 se graficó la constante de frenado en términos de la distancia entre el imán y una bloque de cobre con sección transversal de 30mm x 30mm y 5mm de grosor. La constante de frenado prácticamente desaparece cuando la distancia del imán a la placa es de 10 mm. La fuerza de frenado se divide aproximadamente a la mitad por cada milímetro de separación.

En la figura 2.19 se graficó la constante de frenado en términos del grosor de la placa a una distancia del imán de 1mm, se usa un bloque con sección transversal

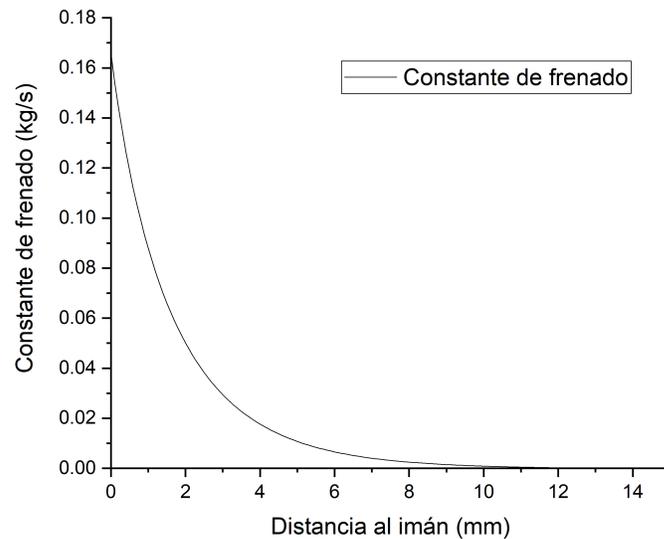


Figura 2.18: Constante de frenado contra la distancia entre la placa conductora y el imán.

de 30mm x 30mm. En general mientras más gruesa es la placa más grande es la constante de frenado, sin embargo la mayor parte de la fuerza se consigue con los primeros 10 mm de grosor. El segundo intervalo de 10mm solo aporta un 4% de fuerza de frenado con respecto de frenado.

En la figura 2.20 se graficó la constante de frenado contra la razón entre el lado de la placa y el diámetro del imán para una placa de sección transversal cuadrada de cobre grosor de 1mm con lado variable. Se usa un imán de ferrita con radio de 6 mm y campo magnético residual 0.5 T. Lo primero que hay que notar es que cuando el imán tiene un diámetro igual al lado de la placa la fuerza de frenado es despreciable. Como es de esperarse mientras más grande es la placa con respecto al imán, sin embargo cada milímetro adicional agregado al lado de la placa aporta menos a la fuerza total que el anterior.

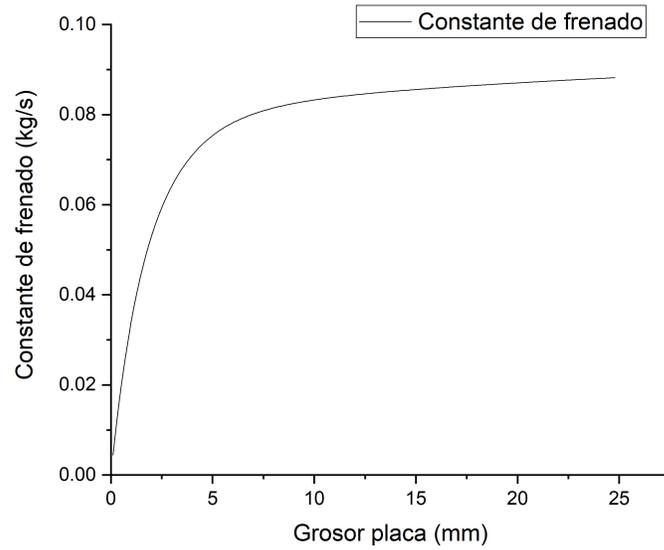


Figura 2.19: Constante de frenado contra el grosor de la placa conductora.

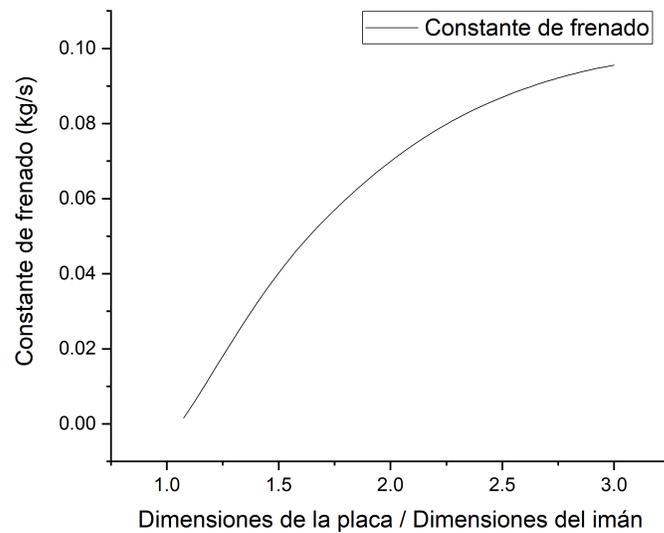


Figura 2.20: Constante de frenado contra la razón entre el ancho/alto de la placa y el diámetro del imán.

## Capítulo 3

# Sistema experimental diseñado y construido para validar el modelo de la fuerza de frenado

Se condujo un experimento para medir directamente la constante de frenado. El sistema experimental es una mesa de la que cuelgan tres resortes. Unido a los resortes se encuentra un disco de 1kg de masa y diámetro de 112 mm. El disco tiene adherido un imán de ferrita con una magnetización de  $0,49 \pm 0,05T$ .

En frente del imán se coloca una placa de cobre con dimensiones de 31 mm X 29 mm X 24 mm. Para medir la constante de frenado se registra la trayectoria del centro de masa del disco y se usan los puntos de la trayectoria para hacer un ajuste de la ecuación 2.25, que contiene la constante de frenado.

Las oscilaciones verticales del disco se midieron usando un sistema que consta de un laser, una lente y una cámara ccd lineal TCD1304. Se usó el microcontrolador STMF32103C8T6 para controlar la cámara, capturar la imagen, analizar la imagen y generar las mediciones de posición que componen a cada trayectoria. También se desarrolló un programa en python para recibir los resultados de la medición, ver diagrama de flujo en figura 3.1.

*CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO  
PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO*

---

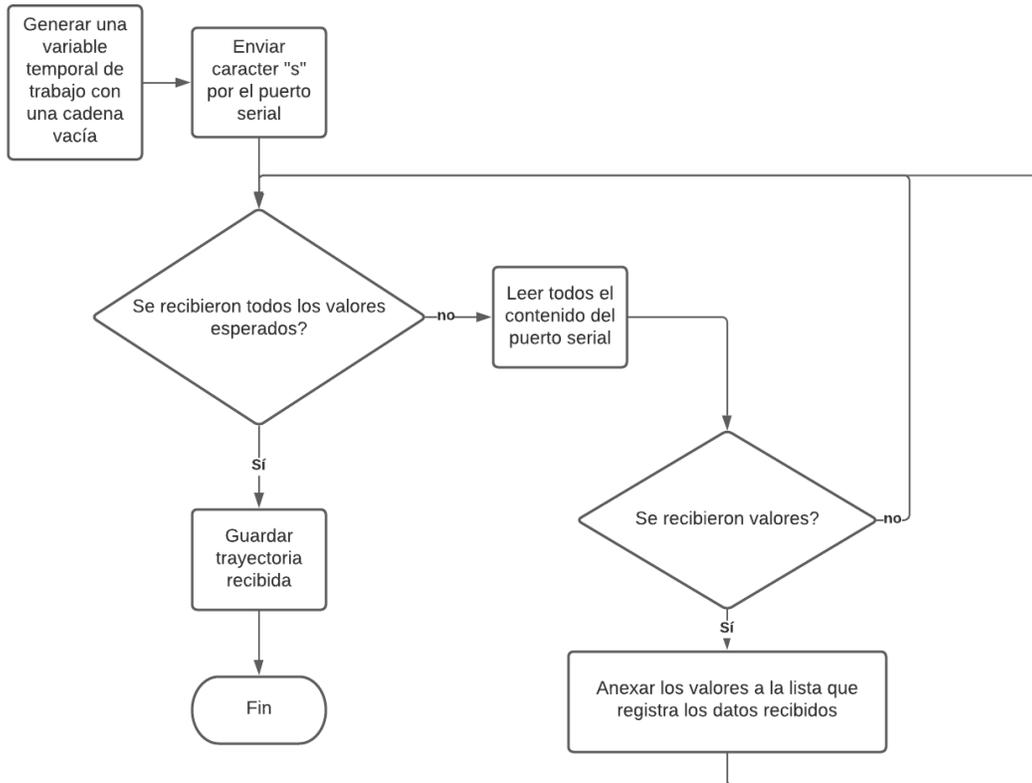


Figura 3.1: Se muestra el diagrama de flujo del programa que recibe la trayectoria capturada por el micro controlador.

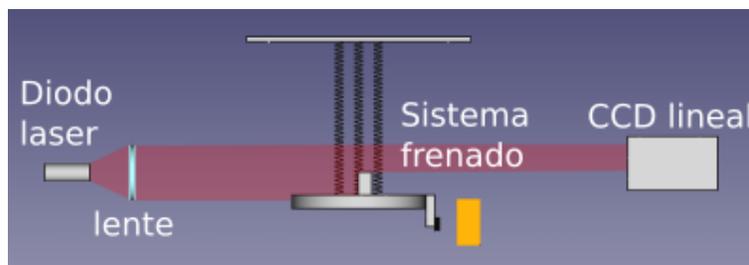


Figura 3.2: Montaje del experimento

## 3.1. Descripción del experimento

La posición vertical se mide utilizando una cámara ccd lineal. Un diodo laser y una lente convergente se utilizan para generar un haz de luz colimada, el sistema bloquea una parte de este haz de luz y el borde de la luz bloqueada se proyecta sobre la ccd lineal. La posición que se registra es la posición del primer pixel sobre el que cae la sombra. Para proteger la medición de la luz ambiental, el sensor de CCD lineal se encuentra dentro de una cámara que solo permite pasar la luz con dirección normal a su cara frontal. Se recolecta una serie de mediciones de posición y tiempo y se hace un ajuste de la ecuación 2.25 para determinar un conjunto de constantes que sustituidas en la ecuación 2.25 reproducen adecuadamente la trayectoria medida durante el experimento, la constante de frenado se obtiene como producto de este ajuste.

### 3.1.1. Características del sensor de imagen TCD 1304

La cámara TCD1304 es un CCD lineal que cuenta con 3648 pixeles activos. Cada pixel tiene una altura de  $8\mu m$  y un ancho de  $200\mu m$ . La altura de los pixeles se encuentra orientada en la misma dirección en la cual están alineados los pixeles. El dispositivo se puede alimentar con voltajes entre 3V y 7V y opera correctamente en el rango de temperaturas de  $-25^\circ$  a  $60^\circ$  [27]. Antes y después de los 3684 pixeles activos la cámara cuenta con un conjunto de pixeles auxiliares (sin utilidad) que son usados para corregir errores producidos por corrientes residuales dentro de los pixeles.

#### 3.1.1.1. Funcionamiento del sensor de imagen CCD

Para generar una imagen, el CCD necesita recibir 3 señales:

- $f_m$  Frecuencia maestra de reloj: Esta señal define la velocidad de funcionamiento de la cámara, puede tener una frecuencia entre 0.8Mhz y 4 MHz

- SH, Shift Gate: Controla el tiempo de integración.
  
- ICG, Integration clear gate: Indica cuando deben empezar a enviarse los datos

La señal de salida de la cámara se denota como OS. OS es una secuencia de voltajes que se corresponden con cada pixel de la cámara, la frecuencia de esta señal es un cuarto de la frecuencia maestra de reloj,  $\frac{f_m}{4}$ . Adicionalmente a los 3648 pixeles de la cámara la trama completa de OS incluye 32 pixeles auxiliares al inicio y 14 pixeles auxiliares al final.

En la figura 3.3 se muestra un diagrama de como deben estar configuradas las señales. Para iniciar el proceso de transferencia de información de la cámara un flanco alto de la señal SH debe coincidir con un flanco bajo de la señal ICG, sin embargo la transferencia pixeles inicia hasta que ocurre un flanco alto en la señal ICG, este flanco alto debe coincidir con un flanco bajo de la señal  $f_m$ .

Adicionalmente las señales deben cumplir con algunas características de sincronización, ver figura 3.4.

### **3.1.2. Configuración del microcontrolador y mediciones de posición**

La medición de la posición se consigue tomando una captura de la luz proyectada sobre la cámara. Los voltajes de la señal OS de la cámara se almacenan en un arreglo de datos y se busca la posición del arreglo en la que está representado el cambio entre la proyección de la luz y la proyección de la sombra. La posición entonces es la resolución de la medición multiplicada por el índice del arreglo.

Se utilizó el microcontrolador STMF32103C8T6 embebido en una tarjeta de desarrollo genérica que incluye un reloj de cuarzo de 8MHz y un regulador de voltaje de 3.3 V. Este microcontrolador trabaja con una frecuencia de reloj de hasta 72 MHz. Sus características más relevantes para este trabajo son:

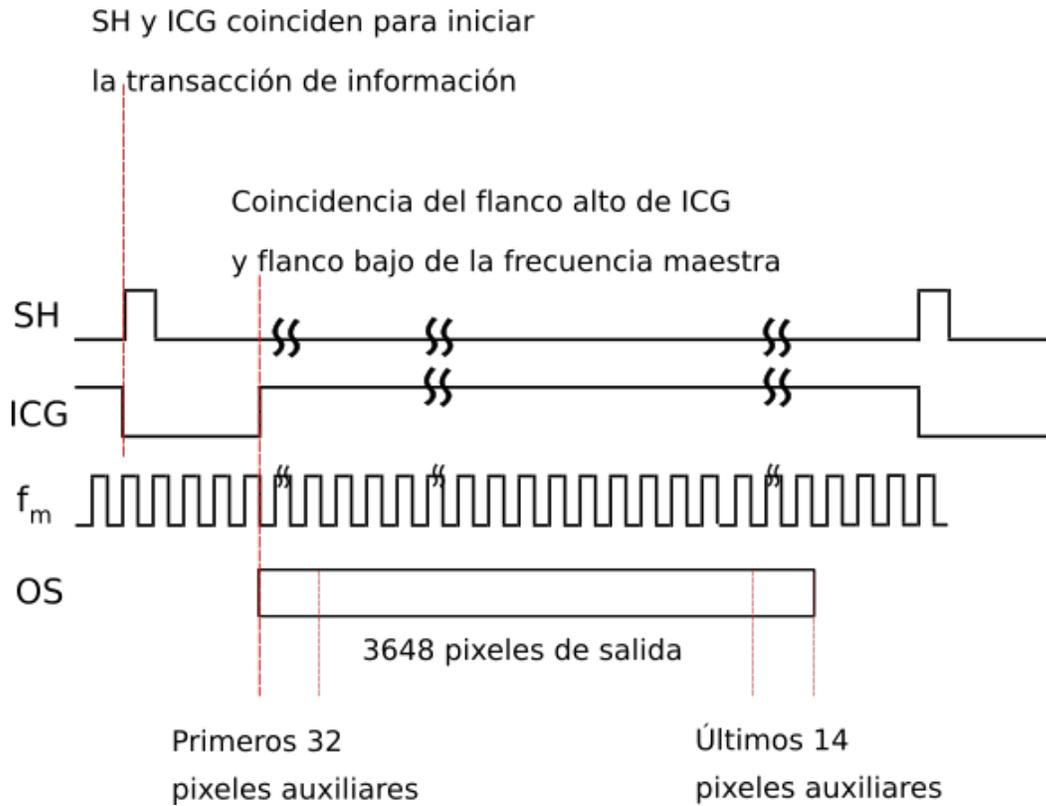


Figura 3.3: Timing de las señales de la CCD TCD1304.

Característica	Símbolo	Min.	Typ.	Max.	Unidad
Retraso del puseo ICG	t1	1000	5000	NA	ns
Sincronización de ICG y SH	t2	100	500	1000	ns
Ancho del pulso SH	t3	1000	NA	NA	ns
Sincronización de ICG y $f_m$	t4	0	20	*	ns

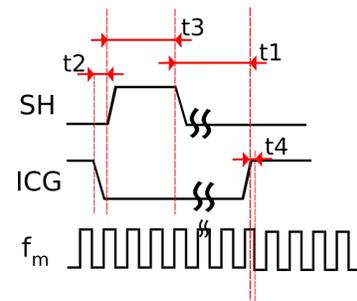


Figura 3.4: Requisitos de sincronización de las señales de la CCD TCD1304. \*El flanco alto de ICG debe ocurrir mientras  $f_m$  se encuentra en estado alto.

### CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO

---

- 2 módulos de conversión ADC de 12 bits con un tiempo mínimo de conversión de 1  $\mu s$ .
- Puerto de comunicación serial USART.
- Sistema de transferencia DMA.
- Tres timers de 16 bits, cada uno con 8 canales.
- Pre escalador para el reloj general.
- Generadores de señal PWM.

Una señal PWM, o señal de modulación por pulso es una señal periódica con forma cuadrada en la cual el voltaje toma un valor lógico por un tiempo  $t_1$  y el valor lógico contrario por un tiempo  $t_2$ . La suma de  $t_1$  y  $t_2$  es el periodo de la señal.

El sistema de transferencia DMA o Direct Memory Access es una funcionalidad de los microcontroladores que permite mover información a un arreglo de registros automáticamente cuando se activa una señal, esta señal es seleccionable por software.

Un USART o Universal Synchronous and Asynchronous serial Receiver and Transmitter es un dispositivo usado para transferir información de forma serial, es decir envía bits uno por uno. Se puede configurar para funcionar de forma síncrona y de forma asíncrona. La velocidad de transferencia o bits por segundo es configurable.

El microcontrolador se encarga de producir las señales SH, ICG y  $f_m$ , leer la señal OS y producir una medición de posición.

Para aprovechar al máximo la capacidad del microcontrolador se usó un pre escalador para elevar la frecuencia de trabajo de los 8MHz que provee el cristal de la placa a 72MHz.

Para controlar la camara se replicó el circuito recomendado en la hoja de datos de la cámara lineal [27]. El circuito controlador recibe las señales invertidas, por lo que el microcontrolador esta configurado para generar las señales invertidas.

### 3.1.2.1. Timers y señales de control

Las señales de control se producen utilizando los generadores de señales PWM ligados a los timers, en la tabla 3.1 se muestra la configuración de cada timer. Los timers están conectados a la frecuencia principal del microcontrolador (72MHz), sin embargo su frecuencia de trabajo se puede modificar haciendo uso de su prescalador.

El pre escalador trabaja como divisor de frecuencia, la frecuencia final es la frecuencia inicial dividida entre el valor numérico del pre escalador sumado a uno:

$$f_{final} = f_{inicial} / (PREESCALADOR + 1) \quad (3.1)$$

Cada timer tiene disponibles 8 canales para generar señales distintas. Cada canal puede generar una señal PWM distinta dependiendo de su configuración. La forma de señal PWM se define especificando al menos 3 parámetros: el periodo, el pulso y polaridad. Todos los canales de un timer trabajan con la frecuencia de trabajo del timer.

El periodo que representa la cantidad de ciclos de la frecuencia de trabajo que tienen que pasar antes de que la señal se repita.

El pulso representa la cantidad de ciclos que la señal se encontrará en el estado inicial antes de pasar al estado opuesto.

La polaridad define el estado inicial, si la polaridad se define como positiva, cada periodo la señal PWM iniciará en estado alto y luego pasará a estado bajo, si la polaridad se define como negativa la señal iniciará en estado bajo y pasará a estado alto.

En general la frecuencia maestra de la cámara determinará la cantidad de cuadros por segundo que se pueden tomar así que se ha buscado tener una frecuencia lo suficientemente alta para generar en promedio 165 cuadros por segundo.

*CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO  
PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO*

---

Timer	Canal	Señal producida	Pre escalador	Periodo	Pulso	Polaridad	Frecuencia
1	1	$f_{adc}$	319	1	1	POSITIVA	225KHz
2	1	$f_m$	7	1	1	POSITIVA	9MHz
3	1	$\overline{SH}$	31	16000	1	NEGATIVA	2.25MHz
3	2	$\overline{ICG}$	31	16000	2	POSITIVA	2.25MHz
-	-	$OS$	-	-	-	-	2.25MHz

**Tabla 3.1:** Configuración de los timers. La barra horizontal sobre el nombre de las señales significa que la señal está invertida. Para facilitar la comparación se incluye la frecuencia de la señal OS.

### 3.1.2.2. Medición de voltaje

Un ADC es un dispositivo que transforma el voltaje de una señal análoga en un número entero representado por un conjunto de bits. La cantidad de bits que se utiliza para representar el número entero define la resolución del ADC. Los ADC no pueden medir cualquier voltaje, trabajan únicamente dentro de un rango de voltaje de operación bien definido que en algunos dispositivos puede configurarse.

Para ejemplificar la operación del ADC digamos que se tiene un ADC con un rango de operación de entre 0 y 5 volts y que usa 4 bits para representar su resultado. Con estos 4 bits el número más alto que se puede representar es  $2^4 - 1 = 15$ , pero en total se pueden representar 16 números, contando el cero. Para hacer una medición de voltaje el ADC divide su rango de voltaje de operación en 16 intervalos consecutivos y asigna a cada intervalo uno de los 16 números, luego busca el intervalo en el cual se encuentra contenido el voltaje que tiene en su entrada, y reporta el número asignado al intervalo como medición de voltaje.

El módulo ADC incluido en el microcontrolador funciona con el método de aproximaciones sucesivas, este método requiere ejecutar un paso de aproximación por cada bit del resultado, como este ADC trabaja con 12 bits se requieren 12 pasos. Cada paso se ejecuta en un ciclo de reloj de la frecuencia de trabajo asignada al ADC. El ADC incluye un pre escalador para definir su frecuencia de trabajo.

Además del tiempo necesario para la conversión de un resultado el ADC tiene que tomar un tiempo para leer el valor, a este tiempo se le conoce como tiempo de

muestreo, en general un tiempo de muestreo más alto permite mediciones más precisas. Los tiempos de muestreo disponibles para configurarse en el microcontrolador son: 1.5, 7.5, 13.5, 28.5, 41.5, 55.5, 71.5 y 239.5.

Se seleccionó un valor de pre escalador de 5 para producir una frecuencia de trabajo de  $\frac{72MHz}{6} = 12MHz$ . Se seleccionó un tiempo de muestreo de 1.5 ciclos. Por lo tanto se necesitan 13.5 ciclos o  $1.125 \mu s$  para completar una medición de voltaje. En este trabajo la precisión de las mediciones de voltaje no es tan relevante ya que la señal que produce la cámara presenta un cambio brusco de voltaje, mucho mayor a la resolución de la medición de voltaje, en donde comienza la proyección de la sombra, en cambio seleccionar un tiempo corto de muestreo permite tener una mayor cantidad de cuadros por segundo, que sí es muy importante para capturar correctamente la trayectoria.

#### 3.1.2.3. Cáptura de un cuadro

Con todas las configuraciones anteriores la cámara se encuentra produciendo la señal de salida OS. Lo que resta es capturar la señal utilizando el ADC. Para lograr esto es conveniente tener una señal que esté sincronizada con OS y que indique cuando debe tomarse una medición, esta señal se representa con el símbolo  $f_{adc}$ . La selección de la frecuencia de  $f_{adc}$  está limitada por el tiempo que el adc tarda tomar una medición, como fue mencionado previamente cada medición tarda  $1.125 \mu s$ , lo que significa que la máxima frecuencia que se puede seleccionar es 888.88 KHz. Se decidió generar la señal  $f_{adc}$  usando la funcionalidad PWM del timer 1 con una frecuencia de 225KHz. La frecuencia de  $f_{adc}$  seleccionada es un décimo de la frecuencia de OS, esta selección permite que el inicio de cada medición de voltaje esté sincronizado con el inicio de la señal de voltaje que representa a un pixel, sin embargo esta configuración sacrifica la medición de voltaje de 9 de cada 10 pixeles. Esto tiene el efecto de reducir la resolución del instrumento. La resolución máxima de la medición de posición viene dada por la altura de cada pixel, es decir  $8\mu m$ , sin

### *CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO*

---

embargo debido al sacrificio de pixeles la resolución de la medición no son los  $8 \mu m$  de cada pixel sino 10 veces esta cantidad  $80 \mu m$ . Cada medición de voltaje se guarda automáticamente en un arreglo usando la funcionalidad DMA del microcontrolador.

Cada imagen capturada por el microcontrolador es analizada para extraer la información de la posición, hay que recordar que sobre la cámara lineal están proyectados el haz de luz y la sombra del sistema, la imagen capturada se ve como una gráfica donde hay un cambio brusco de voltaje, la posición del arreglo de mediciones de voltaje donde se da el cambio se usa para calcular la posición del objeto, por ejemplo, si el cambio está en la posición 50 del arreglo de mediciones entonces la posición del disco es  $50 * 80 \mu m = 400 \mu m$ .

Con la configuración descrita se consigue una tasa promedio de 160 cuadros por segundo que entrega una medición de trayectoria bastante detallada, en la figura 3.6 se muestra la captura de 2 segundos de una trayectoria.

Para capturar los cuadros se implementó un programa en C++, en la figura 3.5 se muestra su diagrama de flujo.

#### **3.1.3. Medición del tiempo**

Para medir el tiempo se ocupó el timer 1 que había sido configurado para generar la señal  $f_{adc}$ . Cada vez que se inicia la medición de una trayectoria se inicia un contador que se actualiza cada vez que ocurre un ciclo del timer 1. Como la frecuencia de este timer es 225KHz la resolución temporal es de  $4,444 \mu s$ . La tolerancia reportada para el periodo del cristal reportada en [28] para el cristal de cuarzo de 8MHz es  $\pm 1,25 ps$  por tanto la incertidumbre de la medición de tiempo considerando el efecto de los pre escaladores es  $\pm 50 ps$ .

### 3.1. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

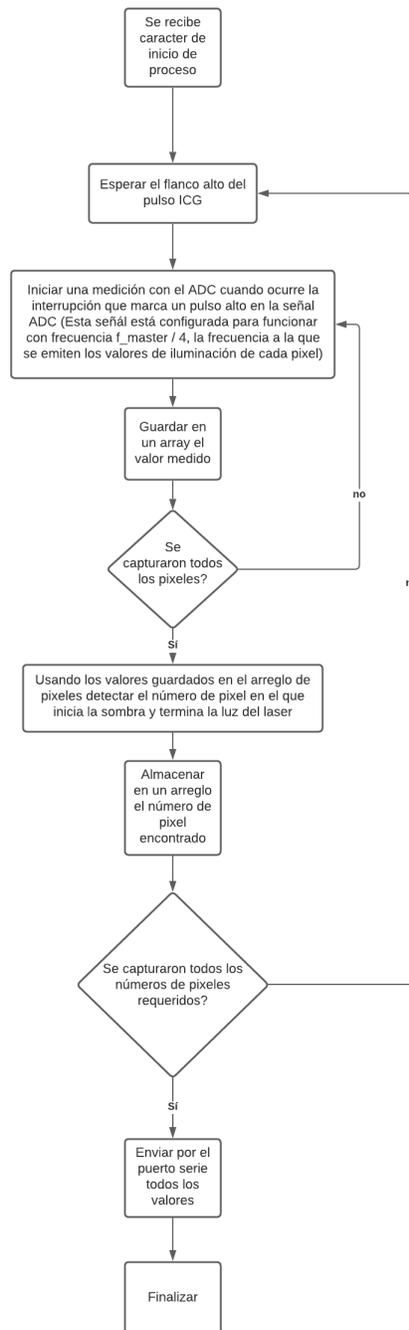


Figura 3.5: Se muestra el diagrama de flujo del programa que captura la trayectoria.

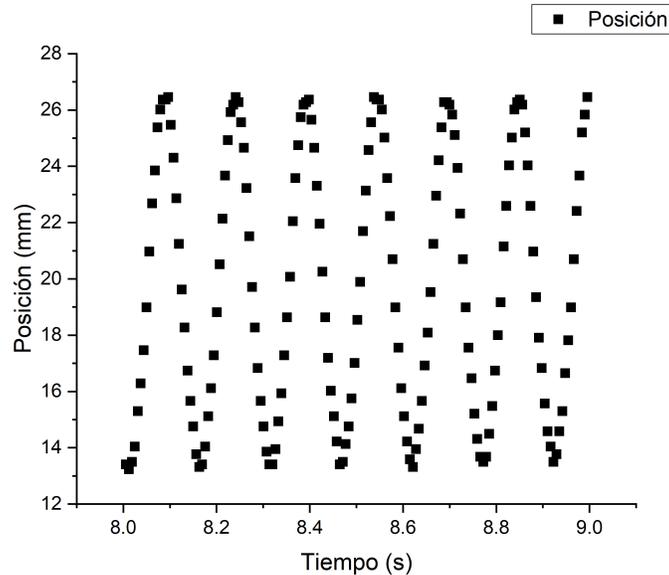


Figura 3.6: Muestra un segundo de mediciones de posición. La posición se mide con respecto uno de los extremos de la cámara

### 3.1.4. Selección de la lente

La producción del haz de luz colimada requiere seleccionar una lente convexa adecuada. Para colimar la luz que proviene de una fuente de luz pequeña se coloca la fuente de luz en la distancia focal de la lente convexa. De manera ideal cuando la fuente de luz es puntual la colimación es perfecta, sin embargo cuando la fuente de luz no es puntual siempre existe un ángulo de divergencia en el haz de luz resultante, ver figura 3.7. Para un sistema con fuente de luz con tamaño finito la dispersión angular es del orden de  $\frac{l}{f}$  donde  $l$  es el tamaño de la fuente y  $f$  la distancia focal de la lente [29]. La lente y las distancias entre la lente, el sistema y la cámara deben ser seleccionadas de forma que la proyección del movimiento vertical del sistema sobre la cámara no sea distorciónada por la divergencia angular. El laser utilizado como fuente de luz tiene un tamaño de 0.1 mm y la lente utilizada tiene una distancia focal de 14 cm y un diámetro de 50mm, con estas características la dispersión angular tiene un valor de  $7,14 \times 10^{-4}$  rad. Esto quiere decir que el cono que forma el haz

### 3.1. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

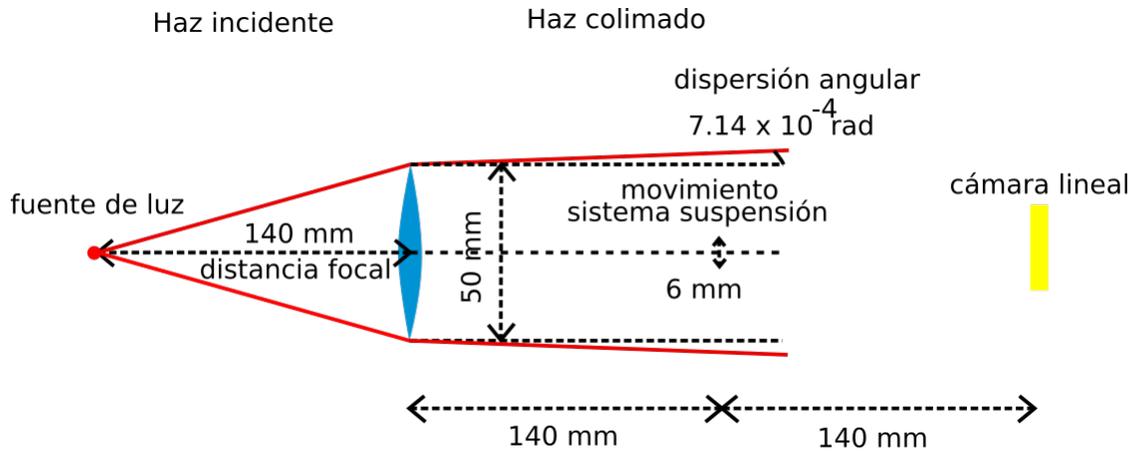


Figura 3.7: Diagrama de como ocurre la dispersión angular en el experimento.

de salida tiene un ángulo de  $7,14 \times 10^{-4}$  rad con respecto a su propio eje. Visto en una proyección lateral el ángulo total subtendido por el haz es de  $15,28 \times 10^{-4}$  rad, por tanto cada 14 mm los rayos frontera del haz de salida se separan 0.2 mm. Esto podría parecer indicar que cada 14 cm de separación entre la lente y el objeto que obstruye la luz se agregan 0.2 mm de incertidumbre en la medición de posición, y esto sería así si el rango de movimiento vertical del objeto ocupara todo el diámetro del haz producido, sin embargo el movimiento abarca solo 6mm de distancia vertical, que es aproximadamente un 12 % del tamaño del haz, esto significa que la distorsión angular de los rayos de luz barridos en todo el desplazamiento es un 12% de lo mencionado anteriormente,  $1,81 \times 10^{-4}$  rad. Los rayos dentro del barrido vertical del objeto se separan  $24\mu m$  por cada 14 cm de separación. Esto significa que si la lente, se coloca a 14 cm del sistema de resortes y la cámara se coloca a 14 cm del sistema de resortes la separación máxima de los rayos que atraviesan la región donde se mueve el sistema será de  $48\mu m$ , esta cantidad es menor a la resolución de  $80 \mu m$  que tiene el instrumento de medición.

*CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO  
PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO*

---

Característica	Valor	Unidades
Campo residual del imán	$0.490 \pm 0.02$	T
Alto Placa	$32.0 \pm 0.1$	mm
Ancho Placa	$29.9 \pm 0.1$	mm
Grosor Placa	$23.9 \pm 0.1$	mm
Diámetro imán	$12.0 \pm 0.1$	mm
Alto imán	$5.0 \pm 0.1$	mm
Conductividad cobre	$5.85 \pm 0.05$	Siemens $\times 10^7$

**Tabla 3.2:** Características de los materiales usados en el experimento.

### 3.1.5. Mediciones de la constante de frenado

Se midieron 10 trayectorias con duración de 12 segundos para 3 distintas distancias entre el imán y la placa de cobre, 1mm, 2mm y 3mm. Las características de los elementos del sistema usados en este experimento se pueden encontrar en la tabla 3.2. En las figuras 3.8, 3.9 y 3.10 se muestran ejemplos de las trayectorias medidas para cada una de las separaciones.

En las 3 gráficas de las trayectorias se observa el movimiento de un oscilador armónico amortiguado.

La constante de frenado se obtuvo realizando un ajuste a la ecuación 2.25 para cada medición de las trayectorias, en la figura 3.11 se reportan los resultados de las mediciones y se compara con las predicciones del modelo desarrollado previamente sin usar el método de espejos y usando el método de espejos.

Las gráficas de la constante de frenado para el método de potencial escalar con y sin espejos muestran el mismo comportamiento de las simulaciones para el método de potencial escalar con método de espejos, se pierde aproximadamente la mitad de la fuerza de frenado con cada milímetro extra de separación entre la placa y el imán. La simulación con método de espejos coinciden bastante bien para 2 y 3 mm pero tienen una desviación relativamente grande para 1 mm, sin embargo, las barras de error de la medición y la simulación se intersectan por lo que esto no

### 3.1. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

---

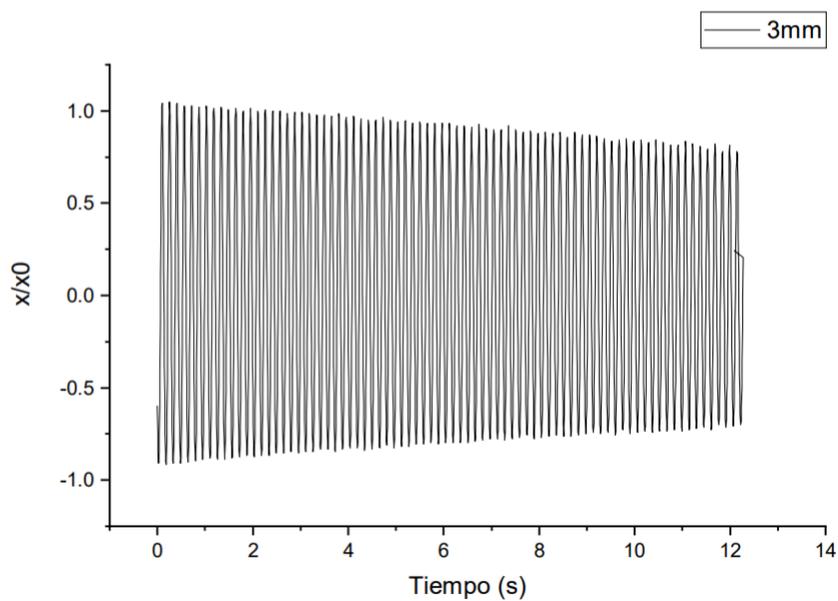


Figura 3.8: Muestra 12 segundos de la trayectoria del sistema cuando el imán está separado de la placa conductora 3mm.

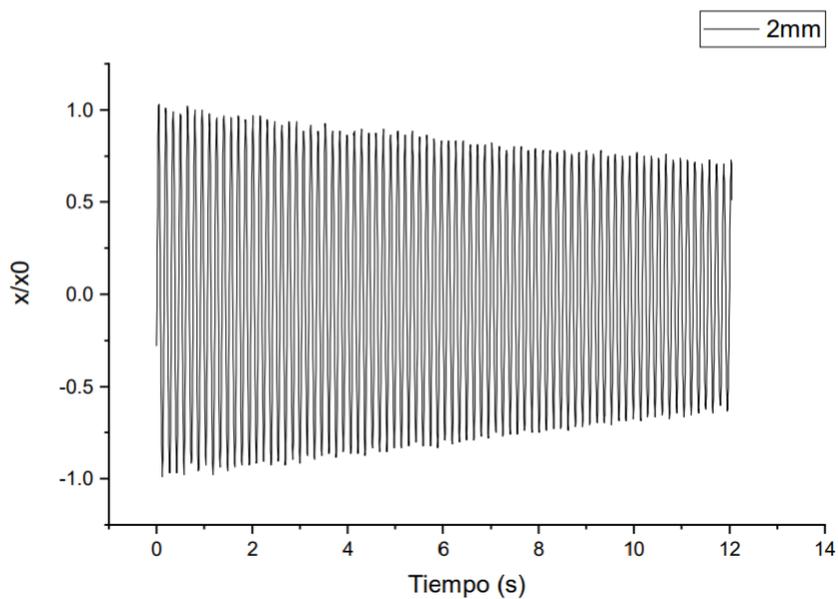
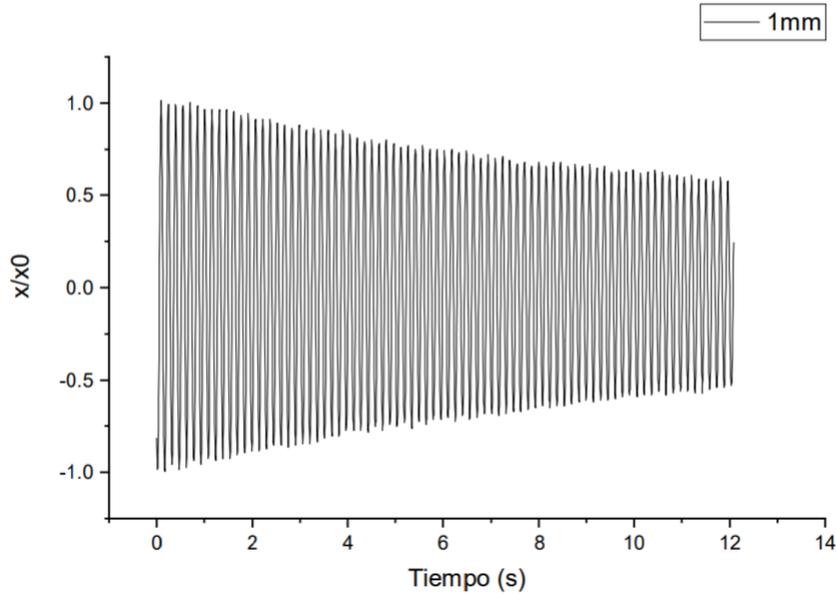


Figura 3.9: Muestra 12 segundos de la trayectoria del sistema cuando el imán está separado de la placa conductora 2mm.

*CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO  
PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO*

---



**Figura 3.10:** Muestra 12 segundos de la trayectoria del sistema cuando el imán está separado de la placa conductora 1mm.

necesariamente significa que el modelo deba extenderse, como fue discutido en la sección de simulaciones la constante de frenado cambia de manera violenta durante el último milímetro de separación entre la placa y el imán. También es debido a esta variación que las barras verticales de error para las dos simulaciones se hacen más grandes conforme la separación disminuye.

En general se obtuvo una buena concordancia entre la simulación y el experimento. Como una comparación, Pluk et al. [17] también mide la constante de frenado y se compara con la constante obtenida con los métodos de potencial escalar, potencial vectorial y un cálculo numérico usando el método de elementos finitos para un sistema de imanes con sección transversal cuadrada. También se obtiene una buena correspondencia entre los cálculos teóricos y su experimento cuando la velocidad del movimiento es baja para el método de potencial escalar y buena correspondencia en general para el método de elemento finito y de potencial vectorial. Los métodos que usan densidades superficiales de carga [24] y [16] tienen una buena coincidencia con

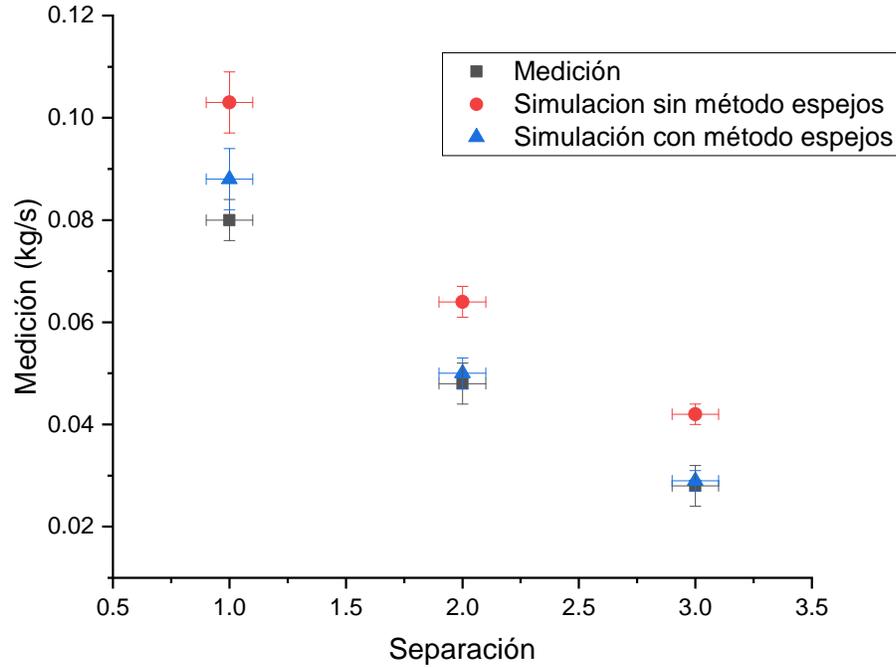


Figura 3.11: Resultados de las mediciones de la constante de frenado comparados con los resultados de las simulaciones.

el experimento solo para velocidades bajas.

### 3.1.6. Resolución atómica del Au(111)

El modelo matemático de las trayectorias del sistema de resortes, simulaciones y mediciones de constante de frenado por el sistema experimental expuesto anteriormente se utilizó para calcular los resortes óptimos del escaner del STM en el laboratorio de Espectroscopia Óptica de Átomos y Moléculas Individuales en Superficies, IFUNAM. En el laboratorio se midió la superficie de oro con dirección cristalográfica Au(111) con el STM sin el sistema de suspensión de soportes hidráulicos que mejorarían aun más el filtrado del ruido mecánico del piso, solo se utilizó el sistema de suspensión descrito en este trabajo. La superficie Au(111) se limpio en condiciones ideales de preparación por medio de ciclos de bombardeo iones de

*CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO  
PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO*

---

Neon por un lapso de 40 minutos y se recalentó la superficie a  $600\text{ }^{\circ}\text{C}$  por 15 minutos a ultra alto vacío para crear terrazas con pasos monoatómicos de Au(111), se visualizaron las reconstrucciones típicas de esta superficie y se hicieron imágenes de resolución atómica, la Fig. 3.12 muestra la resolución atómica de la superficie de oro con la distancia interatómica de 2.8 Angstroms.

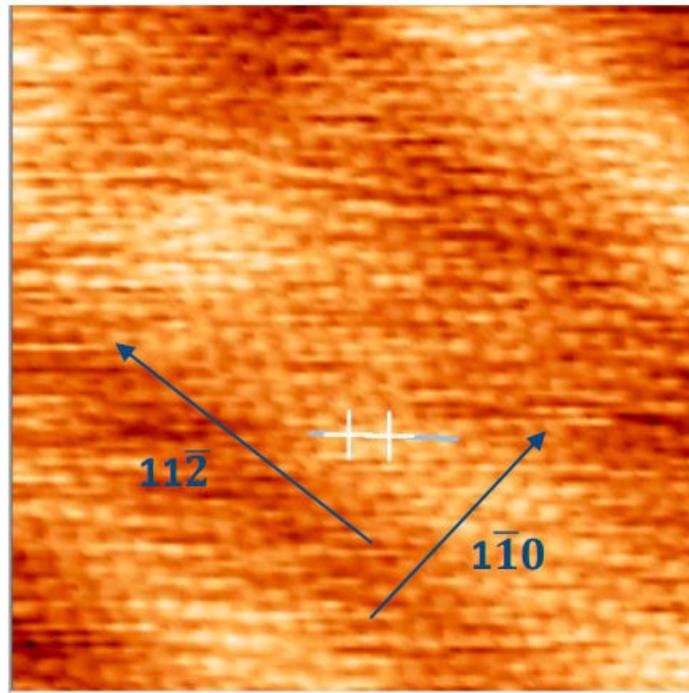


Figura 3.12: Imagen de resolución atómica de la superficie de Au(111) medido con el STM UHV-LT IFUNAM a 77K, 6.5 nm x 6.5 nm, 400mV, se utilizó el sistema de suspension de resortes y sistema de frenado calculado en este trabajo. La imagen se midió sin el sistema de amortiguamiento hidráulico para validar la efectividad del sistema de suspensión. La imagen muestra las reconstrucciones de pescado o "herringbones" y se señalan las direcciones cristalográficas del Au(111).

CAPÍTULO 3. SISTEMA EXPERIMENTAL DISEÑADO Y CONSTRUIDO  
PARA VALIDAR EL MODELO DE LA FUERZA DE FRENADO

---

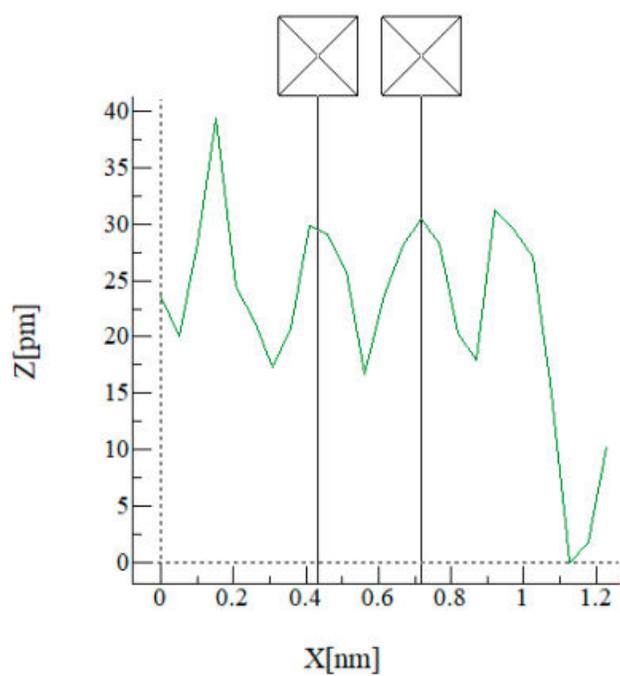


Figura 3.13: En esta gráfica de perfil se muestra la distancia interatómica de  $2.8 \text{ \AA}$  entre dos átomos de oro.

# Capítulo 4

## Discusión y Conclusiones

### 4.1. Discusión

Se construyó un sistema de medición experimental que tiene una tasa de muestreo suficientemente alta como para capturar correctamente el movimiento vertical del disco y medir la constante de frenado del sistema. Una de las debilidades más grandes de este método se encuentra en que la sombra proyectada se mueve tanto por los cambios de altura en el centro de masa como por rotaciones u oscilaciones pendulares, el efecto de estos movimientos adicionales puede disminuirse cuidando que la excitación inicial para cada medición sea lo más vertical posible. A pesar de esto los movimientos en otras direcciones siempre estarán presentes, por lo que cuando la amplitud de oscilación vertical del centro de masa es pequeña la trayectoria pierde la forma senoidal que se puede observar en la figura 3.6.

La gráfica 3.11 demuestra que el modelo de corrientes parásitas con método de espejos describe correctamente el comportamiento de frenado por corrientes parásitas cuando la placa es más grande que el imán. El modelo sin método de espejos tiende a sobrestimar el valor de la constante de frenado.

La capacidad predictiva del modelo parece disminuir cuando la placa se encuentra a 1mm del imán, a esta distancia entre el imán y la placa la variación de la constante

con respecto a la distancia entre el imán y la placa es mucho mayor que estando lejos, la diferencia entre la predicción del modelo y la medición experimental podría explicarse por la incertidumbre en la determinación de la distancia entre el imán y la placa. En este respecto el principal limitante para colocar la separación entre el imán y la placa es el método de medición que presenta una incertidumbre relativa de alrededor de 10 %. Otra posibilidad es que debido a que a esta distancia las corrientes son más intensas, la interacción del campo de corrientes consigo mismo, a través de campos magnéticos o corrientes inducidas secundarias, tiene el efecto de disminuir la constante de frenado. Para discernir entre estas alternativas en el futuro se buscará un método para posicionar de manera más precisa la placa con respecto al imán y se desarrollará un modelo que incluya la interacción del campo de corrientes consigo mismo.

Como está expresado en la ecuación 2.110 la constante de frenado depende de la magnetización del imán de forma cuadrática, por lo que los imanes de neodimio, que pueden llegar a tener una magnetización de 1.4T que es 2.85 veces la magnetización del imán de ferrita utilizado, producen una constante de frenado 8.2 veces más grande que el imán de ferrita. La constante de frenado también tiene una dependencia cuadrática respecto al radio del imán, lo que significa que un imán con un radio  $2 * r$  genera una constante de frenado 4 veces más grande que un imán con un radio  $r$ .

La gráfica 2.18 muestra la constante de frenado disminuye bruscamente con cada milímetro que la placa se aleja del imán, en los primeros milímetros de alejamiento la constante disminuye aproximadamente la mitad de su magnitud.

La gráfica 2.19 muestra como se incrementa la constante de frenado cuando la placa conductora se hace más gruesa, lo que se observa es que usar las placas con un grosor mayor a 1cm tienen una constante de frenado parecida.

La gráfica 2.20 muestra como se incrementa la constante de frenado en función de la razón entre el lado de la placa y el radio del imán,  $\frac{\text{lado placa}}{\text{radio imán}}$ , a diferencia de las dos cantidades anteriores el crecimiento de la constante de frenado al incrementar el

lado de la placa no se detiene de manera brusca.

En un trabajo futuro se desarrollará un modelo de la constante de frenado lo suficientemente completo como para incluirlo en el modelo del movimiento 3D del escaner.

## 4.2. Conclusiones

El análisis del movimiento en tres dimensiones nos permitió entender que al momento de hacer descender el escaner para ponerlo en contacto con la base de la cámara se deben evitar los movimientos de torción alrededor del eje del escaner ya que la energía guardada en la torción se transforma en energía para el movimiento vertical y los resortes pueden estirarse más de lo que se estiraron para hacer bajar el escaner, provocando un choque con la base de la cámara. Por otro lado las desviaciones sobre el plano horizontal no tienen este efecto.

El instrumento construido para medir el desplazamiento vertical del centro de masa del escaner del STM cumplió su objetivo. Este instrumento puede aplicarse para otros experimentos que requieren capturar imágenes lineales con una tasa de cuadros por segundo bastante alta. El dispositivo tiene una resolución vertical de  $80 \mu m$  y alcanza una tasa promedio de 115 cuadros por segundo. Tanto la resolución vertical como la tasa de cuadros por segundo son mejorables utilizando un microprocesador con una velocidad de operación más alta, un ADC que pueda operar con frecuencias más altas y usando una frecuencia maestra más alta. El límite para la resolución vertical son  $8 \mu m$  que es la altura de cada pixel. La frecuencia maestra más alta que puede ocupar la cámara es 4MHz por lo tanto la máxima velocidad a la que se pueden obtene los pixeles es 1MHz. Dado que la cámara tiene en total 3648 pixeles la máxima cantidad de cuadros por segundo considerando la frecuencia de 1MHz es alrededor de 2800 cuadros por segundo.

Se obtuvo una buena concordancia entre la constante de frenado calculada con

el modelo de potencial escalar con método de espejos y la constante de frenado medida para las distancias de 2mm y de 3mm, en la distancia de 1mm el modelo y la medición no concuerdan tan bien como en las otras dos, sin embargo las líneas de error se intersectan, la principal fuente de error en la medición de 1mm es la incertidumbre en la medición de la distancia entre la placa y el imán ya que como fue discutido antes la constante de frenado cambia de forma agresiva en el primer milímetro de separación y el método de medición de la distancia entre el imán y la placa tiene una incertidumbre porcentual de 10 %, para determinar si esta diferencia es un fallo del modelo en el futuro se buscará un método de medición de distancia con una incertidumbre porcentual menor. El modelo potencial escalar sin usar método de espejos tiende a sobre estimar el valor de la constante de frenado.

Por todo esto se concluye que el modelo de potencial escalar con método de espejos es adecuado para calcular la constante de frenado. Este modelo puede usarse para diseñar un sistema de frenado que produzca una constante de frenado que optimice el intercambio entre filtrado de ruido con frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia y filtrado de ruido de alta frecuencia.

# Bibliografía

- [1] Jesús Martínez-Blanco Christophe Nacci y col. «Gating a single-molecule transistor with individual atoms». En: *Nature Physics* 11 (2015), págs. 640-644.
- [2] J. S. Foster, J. E. Frommer y P. C. Arnett. «Molecular manipulation using a tunnelling microscope». En: *Nature* 331 (1988), págs. 324-326.
- [3] R. S. Becker, J. A. Golovchenko y B. S. Swartzentruber. «Atomic-scale surface modifications using a tunnelling microscope». En: *Nature* 325 (1987), págs. 419-421.
- [4] M. F. Crommie, C. P. Lutz y D. M. Eigler. «Confinement of Electrons to Quantum Corrals on a Metal Surface». En: *Science* 262.5131 (1993), págs. 218-220.
- [5] Leo Esaki. «New Phenomenon in Narrow Germanium p-n Junctions». En: *PHYSICAL REVIEW* 109 (1957), pág. 603.
- [6] Ivar Giaever. «ENERGY GAP IN SUPERCONDUCTORS MEASURED BY ELECTRON TUNNELING». En: *PHYSICAL REVIEW LETTERS* 5.4 (1960), pág. 147.
- [7] Gerd Binnig y col. «Tunneling through a controllable vacuum gap». En: *Appl. Phys. Lett* 40 (1982), págs. 178-180.
- [8] Gerd Binnig y col. «Surface Studies by Scanning Tunneling Microscopy». En: *PHYSICAL REVIEW LETTERS* 49.1 (1982), págs. 57-61.
- [9] Gerd Binnig y col. «VACUUM TUNNELING». En: *Physica* 109 (1982), págs. 2075-2077.

- 
- [10] G. Binnig y H. Rohrer. «SCANNING TUNNELING MICROSCOPY». En: *Surface Science* 126 (1982), págs. 236-244.
- [11] Roland Wiesendanger. *SCANNING PROBE MICROSCOPY AND SPECTROSCOPY*. The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge CB2 1RP, United Kingdom: Cambridge University Press, 1994.
- [12] F. Bedell, R. M. Klein y T. P. Thompson. «The Most Efficient Thickness of Transformer Plate». En: *Phys. Rev.* 7.4 (1898), pág. 242.
- [13] S. Butterworth. «Eddy-current losses in cylindrical conductors, with special applications to the alternating current resistances of short coils». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 222.594-604 (1922), págs. 57-100.
- [14] M. V. K. Chari. «FINITE-ELEMENT SOLUTION OF THE EDDY-CURRENT PROBLEM IN MAGNETIC STRUCTURES». En: *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* PAS-93.1 (1974), págs. 62-72.
- [15] O. Bird y K. Preis. «Finite element analysis of 3-D eddy currents». En: *IEEE Transactions on Magnetics* 26.2 (1990), págs. 418-423.
- [16] Kapjin Lee y Kyihwan Park. «Modeling Eddy Currents With Boundary Conditions by Using Coulomb's Law and the Method of Images». En: *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS* 38.2 (2002), págs. 1333-1340.
- [17] K. J. W. Pluk y col. «Modeling and Measurements on a Finite Rectangular Conducting Plate in an Eddy Current Damper». En: *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS* 61.8 (2014), págs. 4061-4072.
- [18] J. Bardeen. «Tunnelling from a Many-Particle Point of View». En: *Phys. Rev.* 6.2 (1961), págs. 57-59.
- [19] P.A.M. Dirac. «The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation». En: *Proceedings of the Royal Society* A114 (1927), págs. 243-265.

- [20] P.A.M. Dirac. «On the theory of quantum mechanics». En: *Proceedings of the Royal Society* A112 (1926), págs. 281-305.
- [21] Enrico Fermi. «Aur Quantelung des idealen einatomigen Gases». En: *Zeitschrift für Physik* 36 (1926), págs. 902-912.
- [22] J. Chen. *Introduction to Scanning Tunneling Microscopy*. Oxford: Oxford University Press, 1993.
- [23] Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Pearson Education India, 2011.
- [24] M. A. Heald. «Magnetic braking: Improved theory». En: *Amer. J. Phys.* 56 (1988), págs. 521-522.
- [25] Kapjin Lee y Kyihwan Park. «Eddy Currents With Boundary Conditions by Using Coulomb's Law and the Method of Images». En: *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS* 38.2 (2002), págs. 1333-1340.
- [26] Henry A. Sodano y col. «Concept and model of eddy current damper for vibration suppression of a beam». En: *Journal of Sound and Vibration* 288.4-5 (2005), págs. 1177-1196.
- [27] *TOSHIBA CCD LINEAR IMAGE SENSOR CCD(Charge Coupled Device)*. TCD1604. Preliminary. Toshiba. Ene. de 2004.
- [28] *Quartz Crystal Specification*. HC49/4HSMX. V1.00018. Würth Elektronik. Nov. de 2018.
- [29] Eugene Hecht. *Optics*. Malaysia: Pearson, 2016.

*BIBLIOGRAFÍA*

---

# Apéndice

En esta sección se incluye el código desarrollado para ejecutar las simulaciones.

## Cálculo de la constante de frenado

Se incluye el código para calcular la constante de frenado incluyendo el método de espejos, este código hace uso de la biblioteca OpenGSL para realizar integraciones.

```
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <gsl/gsl_monte.h>
#include <gsl/gsl_monte_plain.h>
#include <gsl/gsl_monte.h>
#include <gsl/gsl_integration.h>
#include <fstream>
#include <gsl/gsl_errno.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_odeiv2.h>
#include <string>
#include <sstream>
#define NO_REBANADAS 28
```

```
#define NO_ITERACIONES 10000
using namespace std;
int contadorGral = 0;
double PI = 3.14159265358979323846;
double M = 1.02444;
double g = 9.81;
double a = 0.05;
double h = 0.01;
double R = 0.04;
double L = 0.005;
double mu0 = 4 * PI * 10e-7; //Permeability of vacuum
double campo_residual = 0.49; //Teslas
double magnetizacion = campo_residual / mu0; //Magnetizacion
double m0 = magnetizacion; //
double b = 0.006;
double sigma = 58500000;
double distanciaPlaca = 0.001;
double altoPlaca = 0.030;
double anchoPlaca = 0.032;
double grosorPlaca = 0.024;
double l0;
double K = 100;
double atm[3];
double valorRebanada[NO_REBANADAS];

void sumDoubles(double* resultado, double* primero,
               double* segundo) {
    for (int i = 0; i < 3; i++) {
        resultado[i] = primero[i] + segundo[i];
    }
}
```

```
}  
  
double Br_integrable_gsl(double x, void* params) {  
    double* ptr = (double*)params;  
    double r = *ptr;  
    double y = *(ptr + 1);  
    if (x < 1e-6) {  
        return 0;  
    }  
    return -sin(x) * (1.0 / (pow(b * b + r * r  
+ (y) * (y)-2 * r * b * sin(x), (1.0 / 2.0)))  
- 1.0 / (pow(b * b + r * r + (y - L) * (y - L)  
- 2 * b * r * sin(x), 1.0 / 2.0)))));  
}  
  
double Br(double r, double y) {  
    if (r < 1e-6) {  
        return 0;  
    }  
    gsl_integration_workspace* w =  
    gsl_integration_workspace_alloc(NO_ITERACIONES);  
    double result, error;  
    gsl_function F;  
    double params[] = { r,y };  
    F.function = &Br_integrable_gsl;  
    F.params = &params[0];  
    gsl_integration_qags(&F, 0, 2 * PI, 0, 1e-7,  
    NO_ITERACIONES, w, &result, &error);  
    gsl_integration_workspace_free(w);  
    return (campo_residual * b / (4 * PI)) * result;  
}
```

}

```

double IntegrablePaper(double r, void* params) {
    double* ptr = (double*)params;
    double y = ptr[0];
    return r * Br(r, y) * Br(r, y);

```

}

```

double Bz_Integrable_gsl(double x, void* position) {
    double* ptr = (double*)position;
    double r = *ptr;
    double y = *(ptr + 1);
    double c2 = r * r + b * b - 2 * b * r * sin(x);
    if (abs(r - b * sin(x)) < 1e-6) {
        return -(1.0 / (2 * b))
            * (((y) / (pow(c2 + y * y, 0.5)))
              - ((y - L) / (pow(c2
                + (y - L) * (y - L), 0.5))));
    }
    return (b - r * sin(x)) * (1.0 / c2)
        * (((y) / (pow(c2 + y * y, 0.5)))
          - ((y - L) / (pow(c2
            + (y - L) * (y - L), 0.5))));
}

```

```

double Bz(double r, double z)
{
    gsl_integration_workspace* w

```

---

```

        = gsl_integration_workspace_alloc(
            NO_ITERACIONES);
double result, error;
    gsl_function F;
double params[] = { r, z };
    F.function = &Bz_Integrable_gsl;
    F.params = &params[0];
int ERRNO = gsl_integration_qags(&F, 0, 2 * PI,
    0.0, 1e-7,
    NO_ITERACIONES, w, &result, &error);
    gsl_integration_workspace_free(w);
return (campo_residual * b / (4 * PI)) * result;
}

double r_total(double x, double z, double z_iman) {
    return pow(x * x + (z - z_iman)
        * (z - z_iman), 1.0 / 2.0);
}

double I3_Integrable_gsl(double x, void* params) {
    double* ptr = (double*)params;
    double r = *(ptr);
    double y = *(ptr + 1);
    if (x < 1e-6) {
        return 0;
    }
    return -sin(x) * log((pow((y - L)
    * (y - L) + b * b + r * r - 2 * b * r

```

---

```

    * sin(x), 1.0 / 2.0) + y - L) / (pow(y * y
    + b * b + r * r
    - 2 * b * r * sin(x), 1.0 / 2.0) + y));
}

double I3(double x, double y, double z, double z_iman) {
    double r = r_total(x, z, z_iman);
    gsl_integration_workspace* w
        = gsl_integration_workspace_alloc(
            NO_ITERACIONES);
    double result, error;
    gsl_function F;
    double params2[] = { r, y };
    F.function = &I3_Integrable_gsl;
    F.params = &params2[0];
    gsl_integration_qags(&F, 0, 2 * PI, 0, 1e-4,
        NO_ITERACIONES, w, &result, &error);
    gsl_integration_workspace_free(w);
    return result;
}

//

double I5(double x, double y, double z, double z_iman) {

    double r = r_total(x, z, z_iman);
    if (r < 1e-6) {

        return (PI / b) * ((y) / (pow(b * b

```

```

    + y * y, 0.5))
    - (y - L) / pow(b * b
    + (y - L) * (y - L), 0.5));

}
else {
    return I3(x, y, z, z_iman) / r;
}

}

double I4_Integrable_gsl(double theta, void* params) {
    double* ptr = (double*)params;
    double r = *(ptr);
    double y = *(ptr + 1);
    double c2 = r * r + b * b - 2 * b * r * sin(theta);
    if (abs(r - b) < 1e-6) {
        return sin(theta) * (1.0 / (2 * b))
        * ((y) / (pow(c2 + y * y, 0.5))
        - (y - L) / (pow(c2
        + (y - L) * (y - L), 0.5)));
    }
    return (r - b * sin(theta)) * sin(theta)
    * (1.0 / c2) * ((y) / (pow(c2 + y * y, 0.5))
    - (y - L) / (pow(c2 + (y - L) * (y - L), 0.5)));
}

double I4_Integrable_gsl_small(double yprima,
                                void* params) {

```

---

```

double* ptr = (double*)params;
double y = *ptr;
return -(PI / b)
* ((y) / (pow(b * b + y * y, 0.5))
- (y - L) / pow(b * b + (y - L) * (y - L), 0.5));
}

double I4(double x, double y, double z, double z_iman) {

double r = r_total(x, z, z_iman);
if (r < 1e-6) {
    return -(PI / b) * ((y) / (pow(b * b
+ y * y, 0.5))
- (y - L) / pow(b * b
+ (y - L) * (y - L), 0.5));
}

gsl_integration_workspace* w =
gsl_integration_workspace_alloc(NO_ITERACIONES);
double result, error;
gsl_function F;
double params2[] = { r,y };
F.function = &I4_Integrable_gsl;
F.params = &params2[0];
int ERRNO = gsl_integration_qags(&F, 0.0,
2.0 * PI, 0, 1e-5,
NO_ITERACIONES, w, &result, &error);
gsl_integration_workspace_free(w);
return result;
}

//

```

---

```
double Ex(double x, double y, double z,
          double z_iman, double speed) {
    double r = r_total(x, z, z_iman);
    if (r > 1e-6) {
        return -(campo_residual * b / (4 * PI))
            * speed * (-(x / r) * (x / r)
            * I5(x, y, z, z_iman) + ((z - z_iman) / r)
            * ((z - z_iman) / r) * I4(x, y, z, z_iman));
    }
    else {
        return -(campo_residual * b / (4 * PI))
            * speed * (-I5(x, y, z, z_iman));
    }
}
//
double Ez(double x, double y, double z,
          double z_iman, double speed) {
    double r = r_total(x, z, z_iman);
    if (r > 1e-6) {
        return (campo_residual * b
            * speed / (4 * PI))
            * (x / r) * ((z - z_iman) / r)
            * (I5(x, y, z, z_iman)
            + I4(x, y, z, z_iman));
    }
    else {
        return 0;
    }
}
```

```
}  
//  
//norma del campo ortogonal a la direccion de la velocidad  
void B1(double b1[], double coordinates[], double z_iman) {  
    double x = coordinates[0];  
    double y = coordinates[1];  
    double z = coordinates[2];  
    double z_prima = y;  
    double r_prima = r_total(x, z, z_iman);  
    double br = Br(r_prima, z_prima);  
    double bz = Bz(r_prima, z_prima);  
    if (r_prima > 1e-6) {  
        b1[0] = (x / r_prima) * br;  
        b1[1] = bz;  
        b1[2] = (z / r_prima) * br;  
    }  
    else {  
        b1[0] = 0;  
        b1[1] = bz;  
        b1[2] = 0;  
    }  
}  
  
void electricFields(double fields[], double x, double y,  
double z, double z_iman, double speed) {  
    double Ex_local;  
    double Ez_local;  
    double r = r_total(x, z, z_iman);  
    double i5 = I5(x, y, z, z_iman);  
    double i4 = I4(x, y, z, z_iman);
```

---

```

if (r > 1e-6) {
    Ex_local = -(campo_residual * b / (4 * PI))
    * speed * (-(x / r) * (x / r)
    * i5 + ((z - z_iman) / r)
    * ((z - z_iman) / r) * i4);
    Ez_local = (campo_residual * b
    * speed / (4 * PI))
    * (x / r) * ((z - z_iman) / r)
    * (i5 + i4);
}
else {
    Ex_local = -(campo_residual * b / (4 * PI))
    * speed * (-i5);
    Ez_local = 0;

}
fields[0] = Ex_local;
fields[1] = Ez_local;

}
//Calcula la corriente inducida en las coordenadas
//especificadas con respecto al centro del iman
void J(double* j, double coordinates[],
double z_iman, double speed) {

    *j = sigma * Ex(coordinates[0], coordinates[1],
    coordinates[2], z_iman, speed);
    *(j + 1) = 0;
    *(j + 2) = sigma
        * Ez(coordinates[0], coordinates[1],

```

```
        coordinates[2], z_iman, speed);  
  
}  
  
int sign(int g) {  
    if (g == 0)  
        return 0;  
    else {  
        return g / abs(g);  
    }  
}  
  
void J_ik(double j[], int i, int k, double coordinates[],  
double speed, double z_iman) {  
    double jt[3];  
    double x = coordinates[0];  
    double y = coordinates[1];  
    double z = coordinates[2];  
    double x_prima;  
    double y_prima;  
    double z_prima;  
    if (i == 0) {  
        x_prima = x;  
    }  
    else {  
        x_prima = (i * anchoPlaca - x);  
    }  
    if (k == 0)  
    {  
        z_prima = z;  
    }  
}
```

```
}  
else {  
    z_prima = ((k * altoPlaca) - z);  
}  
y_prima = y;  
double secondCoordinates [] = { x_prima ,  
                                y_prima , z_prima };  
J(jt , secondCoordinates , z_iman , speed);  
j [0] = pow(-1, i) * jt [0];  
j [1] = jt [1];  
j [2] = pow(-1, k) * jt [2];  
}
```

```
// funcion que aplica las reflexiones
```

```
void J_m(double j [], double coordinates [],  
double z_iman , double speed) {  
    j [0] = 0;  
    j [1] = 0;  
    j [2] = 0;  
    double j00 [3];  
  
    double j01 [3];  
    double j0_1 [3];  
    double j_1_1 [3];  
    double j_10 [3];  
    double j_11 [3];  
    double j1_1 [3];  
    double j10 [3];  
    double j11 [3];
```

```

J(j00, coordinates, z_iman, speed);
J_ik(j01, 0, 1, coordinates, speed, z_iman);
J_ik(j0_1, 0, -1, coordinates, speed, z_iman);
J_ik(j_1_1, -1, -1, coordinates, speed, z_iman);
J_ik(j_10, -1, 0, coordinates, speed, z_iman);
J_ik(j_11, -1, 1, coordinates, speed, z_iman);
J_ik(j1_1, 1, -1, coordinates, speed, z_iman);
J_ik(j10, 1, 0, coordinates, speed, z_iman);
J_ik(j11, 1, 1, coordinates, speed, z_iman);

sumDoubles(j, j, j00);
sumDoubles(j, j, j01);
sumDoubles(j, j, j0_1);
sumDoubles(j, j, j_1_1);
sumDoubles(j, j, j_10);
sumDoubles(j, j, j_11);
sumDoubles(j, j, j1_1);
sumDoubles(j, j, j10);
sumDoubles(j, j, j11);
}

```

```

double IntegrableFgsl(double coordinates[],
size_t dim, void* distancespeed) {
    double j[3];
    double b_campo[3];
    //double cross[3];
    double z_iman = *((double*)distancespeed);
    double speed = *((double*)distancespeed + 1);

```

```
J_m(j, coordinates, z_iman, speed);
B1(b_campo, coordinates, z_iman);
return j[0] * b_campo[1];

}

struct PosixData {
    double z_iman;
    double speed;
    double x_0;
    double x_f;
    double* result;
};

double F_gsl_rebanada(double x_0, double x_f,
double speed, double z_iman) {

    double res, err;
    double xl[3] = { -anchoPlaca / 2, x_0,
                    -altoPlaca / 2 };
    double xu[3] = { anchoPlaca / 2, x_f,
                    altoPlaca / 2 };
    double distancespeed[] = { z_iman, speed };
    gsl_monte_function F;
    const gsl_rng_type* T;
    gsl_rng* r;
    F.f = &IntegrableFgsl;
    F.dim = 3;
```

---

```
F.params = &distancespeed[0];
size_t calls = 10000;

gsl_rng_env_setup();

T = gsl_rng_default;
r = gsl_rng_alloc(T);
gsl_monte_plain_state* s = gsl_monte_plain_alloc(3);
gsl_monte_plain_integrate(&F, xl, xu, 3, calls,
                          r, s, &res, &err);
gsl_monte_plain_free(s);

return res;
}

// El signo de la distancia se invierte por
// el cambio de sistema de coordenadas
double F_gsl(double speed, double distance)
    double resultArray[NO_REBANADAS];
    double res = 0;
    double xl = -distanciaPlaca - grosorPlaca;
    double xu = -distanciaPlaca;
    res = F_gsl_rebanada(xl, xu, speed, distance);

return res;
}

void printDouble(double array[]) {
    printf("Array: %f %f %f\n",
          *array, *(array+1), *(array+2));
```

```
}  
  
void plotCurrent() {  
    double intervalx [] = { -anchoPlaca / 2,  
                            anchoPlaca / 2 };  
    double intervalz [] = { -altoPlaca / 2,  
                            altoPlaca / 2 };  
    double intervaly [] = { -distanciaPlaca ,  
-distanciaPlaca - grosorPlaca };  
    double nx = 10;  
    double nz = 10;  
    double ny = 11.0;  
    double Jx;  
    double Jy;  
    double Jz;  
    double J_sol [3];  
    double z_iman = 0.000;  
    double speed = 0.05;  
    double coordinates [3];  
  
    J(J_sol , coordinates , z_iman , speed);  
    coordinates [0] = 0.0;  
    coordinates [1] = -distanciaPlaca;  
    coordinates [2] = 0.0;  
    double b_sol [3];  
    ofstream fs ("currentPlot");  
    for (int i = 0; i < nx + 1; i++) {  
        for (int j = 0; j < nz + 1; j++) {  
            double J_sol [3];  
            coordinates [0] = intervalx [0]
```

---

```
+ (i / nx) * (intervalx [1]
    - intervalx [0]);
coordinates [2] = intervalz [0]
+ (j / nz) * (intervalz [1]
    - intervalz [0]);
Jm(&J_sol [0], coordinates,
    z_iman, speed);

Jx = J_sol [0];
Jy = J_sol [1];
Jz = J_sol [2];
B1(&b_sol [0], coordinates,
    z_iman);

fs << coordinates [0] <<
"\t" << coordinates [1]
<< "\t" << coordinates [2]
<< "\t" << Jx * 1e-8
<< "\t" << Jy * 1e-8
<< "\t" << Jz * 1e-8
<< "\t" << b_sol [0] * 1e-1
<< "\t" << b_sol [1] * 1e-1
<< "\t" << b_sol [2] * 1e-1
<< endl;
}

}
fs.close ();

}
```

```
int main(int argc, char* argv[]) {

    gsl_set_error_handler_off();

    double posiciones [] = {
        0.003,
        0.002,
        0.001,
        0.000
    };

    double cambios [] = {
        -0.0001,
        0,
        0.0001
    };

    double fe;
    double posicion_inicial = 0;
    double paso = 0.0003;
    int pasos = 1000;
    distanciaPlaca = 0.001;
    double grosorPlacaBase = 0.0001;
    double anchoPlacaBase = 2 * b;
    anchoPlaca = 0.030;
    //plotCurrent();
    //return 1;
    // sample code to calculate damping constant,
```

```
// F_gsl actually calculates damping force
// but setting velocity to 1 returns damping constant
for (int i = 0; i < pasos; i++) {
    altoPlaca = anchoPlacaBase+ paso * i;
    anchoPlaca = anchoPlacaBase + paso * i;
    fe = F_gsl(1, -0.000);
    printf(" %e\t %e\n", altoPlaca/(2*b), fe);

}

return 0;
}
```

## Simulación del movimiento en 3 dimensiones

Se incluye el código que ejecuta la simulación del movimiento del escaner en 3 modelado como un cuerpo rígido.

### Implementación Runge-Kutta

El siguiente archivo contiene una estructura que implementa el método de Runge-Kutta de cuarto orden aplicado al escaner como cuerpo rígido:

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using System.Windows.Forms;
```

```
namespace CuerpoRigido
{

    struct integradores
    {
        //Constantes

        public static double PI = 3.14159265358979323846;
        public static double M = 1.02;
        public static double g = 9.81;
        public static double a = 0.0549;
        public static double h = 0.01;
        public static double R = 0.04;
        public static double L = 0.04;
        public static double[] rprima1 = { -(Math.Sqrt(3) / 6) * a,
                                           a / 2, h };
        public static double[] rprima2 = { -(Math.Sqrt(3) / 6) * a,
                                           -a / 2, h };
        public static double[] rprima3 = { (1 / Math.Sqrt(3)) * a,
                                           0, h };
        public static double IParalela = 0.5 * M * R * R;
        public static double IOrtogonal = 0.25 * M * R * R
                                           + (1 / 12) * L * L * M;

        public double I0;
        public double K;
        public double[] C1;
        public double[] C2;
        public double[] C3;
    }
}
```

```
public integradores(double valor, double valor2)
{
    K = valor;
    l0 = valor2;
    double [] C1_temp = { -(Math.Sqrt(3) / 6) * a,
                          -(10 + M * g / (3 * K) + h), a / 2 };
    C1 = C1_temp;
    double [] C2_temp = { -(Math.Sqrt(3) / 6) * a,
                          -(10 + M * g / (3 * K) + h), -a / 2 };
    C2 = C2_temp;
    double [] C3_temp = { (1 / Math.Sqrt(3)) * a,
                          -(10 + M * g / (3 * K) + h), 0 };
    C3 = C3_temp;
}

// f es la funcion a integrar,
// x0 son las condiciones iniciales del problema,
// T es el intervalo de tiempo en que se va integrar,
// h es la precision del integrador
public static Int64 RKlentiempos = 0;
public static Int64 RKlenposicion = 0;
public double [,] RK4(double [] x_0, double [] t, double h)
{
    //Definir funcion para construir en
    // arreglo que contenga los tiempos
    double [] T = Tarray(t, h);
```

```
RKlentimes = T.LongLength;

//Define el arreglo donde se guardara
// la solucion en la forma T X
double [,] sol = new double[T.Length,x_0.Length+1];
RKlenposicion = x_0.Length + 1;
//Guarda las condiciones iniciales en el primer nivel
// del arreglo solucion, primero la posicion
for(int i = 0; i < x_0.Length; i++)
{
    sol[0, i+1] = x_0[i];
}
//Luego el tiempo
sol[0,0] = T[0];
//empieza a iterar para integrar
for (int i = 0; i < T.Length-1;i++ )
{

    // Como C# no tiene forma de hacer referencia
    // a un vector fila como arreglo creamos uno
    double [] soli = new double[x_0.Length];
    // le cargamos los valores de la fila correspondiente
    for (int j = 0; j < x_0.Length;j++ )
    {
        soli[j] = sol[i, j+1];
    }

    double [] k1 = f(soli ,T[i]);
    double [] k2 = f(SumDoubles(
        soli , ArrayTimesScalar(k1,0.5*h)
```

```

        ) , T[i] + 0.5*h);
    double [] k3 = f(SumDoubles(
        soli ,
        ArrayTimesScalar(k2, 0.5 * h)
        ),
        T[i] + 0.5 * h);
    double [] k4 = f(SumDoubles(soli ,
        ArrayTimesScalar(k3, 0.5 * h)),
        T[i] + h);
    // calculados los coeficientes de
    // runge-kutta carga en el renglon fila correspondiente
    // el resultado de al siguiente iteracion
    for(int j = 0; j <x_0.Length;j++)
    {
        sol[i + 1, j+1] = sol[i,j+1]
            +(h/6)*(k1[j]+2*k2[j]+2*k3[j]+k4[j]);
    }
    sol[i+1,0] = T[i+1];
}

return sol;
}
//funcion que devuelve un arreglo de tiempos
public static double[] Tarray(double[] t ,double h)
{
    Int64 lenght = Convert.ToInt64(
        Math.Ceiling(((t[1] - t[0]) / h))
        );
    double [] T = new double[lenght+1];
    for (int i = 0; i <= lenght; i++ )

```

```
{
    T[i] = t[0] + h*i;
}
    return T;
}
//Escribimos una rutina para
# multiplicar un escalar por un array
public static double[] ArrayTimesScalar(
    double[] vector, double scalar)
{
    double[] R = new double[vector.Length];
    for (int j = 0; j < vector.Length; j++)
    {
        R[j] = scalar * vector[j];
    }
    return R;
}
public static double[] ArrayTimesScalar(
    double scalar, double[] vector)
{
    double[] R = new double[vector.Length];
    for (int j = 0; j < vector.Length; j++)
    {
        R[j] = scalar * vector[j];
    }
    return R;
}
//sumar arrays de doubles
```

```
public static double[] SumDoubles(
    double[] vector1, double[] vector2)
{
    double[] R = new double[vector1.Length];
    for (int j = 0; j < vector1.Length; j++)
    {
        R[j] = vector1[j] + vector2[j];
    }
    return R;
}

//Funcionando
public double[] SubstractDoubles(
    double[] vector1, double[] vector2)
{
    double[] R = new double[vector1.Length];
    for (int j = 0; j < vector1.Length; j++)
    {
        R[j] = vector1[j] - vector2[j];
    }
    return R;
}

//Funcionando

//funcion a integrar
public double[] f(double[] alfa, double t)
{
    #region
    double dalfa0 = alfa[6];
    double dalfa1 = alfa[7];
    double dalfa2 = alfa[8];
```

---

```

double dalfa3 = alfa [9];
double dalfa4 = alfa [10];
double dalfa5 = alfa [11];
double dalfa6;
double dalfa7;
double dalfa8;
double dalfa9;
double dalfa10;
double dalfa11;
#endregion

dalfa6 = -(1/M) * dVdxCM( alfa );
dalfa7 = -(1/M) * dVdyCM( alfa );
dalfa8 = -(1/M) * dVdzCM( alfa );

dalfa9 = (1 / (IParalela * Math.Sin( alfa [4] ) * Math.Sin( alfa [4] )))
        * (-dVdPHI( alfa ) + dVdPSI( alfa ) * Math.Cos( alfa [4] ))
        + IOrtogonal * Math.Sin( alfa [4] ) * alfa [11] * alfa [10]
        - (2 * IParalela - IOrtogonal) * Math.Sin( alfa [4] )
        * Math.Cos( alfa [4] ) * alfa [9] * alfa [10]);
dalfa10 = (1 / IParalela) * (IParalela * alfa [9] * alfa [9]
        * Math.Sin( alfa [4] ) * Math.Cos( alfa [4] ))
        - IOrtogonal * alfa [9] * Math.Sin( alfa [4] )
        * ( alfa [9] * Math.Cos( alfa [4] ) + alfa [11] )
        - dVdTHETA( alfa ));
dalfa11 = -(1 / IOrtogonal) * dVdPSI( alfa ) + alfa [10]
        * alfa [11] * Math.Sin( alfa [4] )
        - Math.Cos( alfa [4] ) * dalfa9;

double [] fprima = { dalfa0 , dalfa1 , dalfa2 , dalfa3 ,
                    dalfa4 , dalfa5 , dalfa6 , dalfa7 ,

```

---

```
        dalfa8 , dalfa9 , dalfa10 , dalfa11 };

    return fprima;
}

// derivadas del potencial con respecto a
// las coordenadas del centro de masa
#region
double dVdxCM(double[] alfa)
{
    double sol;
    sol = K * (deltaX_1(alfa) * DdeltaX_1dxCM(alfa)
        + deltaX_2(alfa) * DdeltaX_2dxCM(alfa)
        + deltaX_3(alfa) * DdeltaX_3dxCM(alfa));
    return sol;
}

double dVdyCM(double[] alfa)
{
    double sol;
    sol = K * (deltaX_1(alfa) * DdeltaX_1dyCM(alfa)
        + deltaX_2(alfa) * DdeltaX_2dyCM(alfa)
        + deltaX_3(alfa) * DdeltaX_3dyCM(alfa))
        - M * g;
    return sol;
}

public double dVdzCM(double[] alfa)
{
    double sol;
    sol = K * (deltaX_1(alfa) * DdeltaX_1dzCM(alfa)
        + deltaX_2(alfa) * DdeltaX_2dzCM(alfa)
```

```

        + deltaX_3(alfa) * DdeltaX_3dzCM(alfa));
    return sol;
}
#endregion
//derivadas del potencial respecto a los angulos de euler
public double dVdPHI(double[] alfa)
{
    double sol;
    sol = K * (deltaX_1(alfa) * DdeltaX_1dPHI(alfa)
        + deltaX_2(alfa) * DdeltaX_2dPHI(alfa)
        + deltaX_3(alfa) * DdeltaX_3dPHI(alfa));
    return sol;
}
//Partes de la derivada
#region
public double DdeltaX_1dPHI(double[] alfa)
{
    double[] r = r1(alfa);
    double[] c = C1;
    double sol;
    sol = (1 / NormaResta(r1(alfa), C1))
        * Dot(SubstractDoubles(r1(alfa),C1),
            dR1dPHI(alfa));
    return sol;
}
public double[] dR1dPHI(double[] alfa)
{
    double[] sol;
    sol = Dot(dTinvdPHI(alfa),rprima1);
    return sol;
}

```

```

}
public double [,] dTinvdPHI(double [] alfa)
{
    double [,] Tsol = {
{ -Math.Cos( alfa [5])*Math.Sin( alfa [3])
-Math.Cos( alfa [4])*Math.Cos( alfa [3])*Math.Sin( alfa [5]) ,
Math.Sin( alfa [5])*Math.Sin( alfa [3])
-Math.Cos( alfa [4])*Math.Cos( alfa [3])*Math.Cos( alfa [5]) ,
Math.Sin( alfa [4])*Math.Cos( alfa [3]) } ,
{Math.Cos( alfa [5])*Math.Cos( alfa [3])
-Math.Cos( alfa [4])*Math.Sin( alfa [3])*Math.Sin( alfa [5]) ,
-Math.Sin( alfa [5])*Math.Cos( alfa [3])
-Math.Cos( alfa [4])*Math.Sin( alfa [3])*Math.Cos( alfa [5]) ,
Math.Sin( alfa [4])*Math.Sin( alfa [3]) } ,
{ 0, 0, 0 } };
    return Tsol;
}

public double DdeltaX_2dPHI(double [] alfa)
{
    double [] r = r2( alfa );
    double [] c = C2;
    double sol;
    sol = (1 / NormaResta(r2( alfa ), C2))
        * Dot(SubstractDoubles(r2( alfa ), C2),
            dR2dPHI( alfa ));
    return sol;
}

public double [] dR2dPHI(double [] alfa)
{

```

---

```

    double [] sol;
    sol = Dot(dTinvdPHI(alfa), rprima2);
    return sol;
}

public double DdeltaX_3dPHI(double [] alfa)
{
    double [] r = r3(alfa);
    double [] c = C3;
    double sol;
    sol = (1 / NormaResta(r3(alfa), C3))
        * Dot(SubstractDoubles(r3(alfa), C3),
            dR3dPHI(alfa));
    return sol;
}

public double [] dR3dPHI(double [] alfa)
{
    double [] sol;
    sol = Dot(dTinvdPHI(alfa), rprima3);
    return sol;
}

#endregion

//derivadadel potencial respecto a theta
public double dVdTHETA(double [] alfa)
{
    double sol;
    sol = K * (deltaX_1(alfa) * DdeltaX_1dTHETA(alfa)
        + deltaX_2(alfa) * DdeltaX_2dTHETA(alfa)
        + deltaX_3(alfa) * DdeltaX_3dTHETA(alfa));
}

```

```
    return sol;
}

//partes de la derivada

#region

public double DdeltaX_1dTHETA(double[] alfa)
{
    double[] r = r1(alfa);
    double[] c = C1;
    double sol;
    sol = (1 / NormaResta(r1(alfa), C1))
          * Dot(SubstractDoubles(r1(alfa), C1),
                dR1dTHETA(alfa));
    return sol;
}

public double[] dR1dTHETA(double[] alfa)
{
    double[] sol;
    sol = Dot(dTinvdTHETA(alfa), rprim1);
    return sol;
}

public double[,] dTinvdTHETA(double[] alfa)
{
    double[,] Tsol = {
{ Math.Sin(alfa[4])*Math.Sin(alfa[3])*Math.Sin(alfa[5]),
```

```

Math.Sin( alfa [4]) * Math.Sin( alfa [3]) * Math.Cos( alfa [5]) ,
Math.Cos( alfa [4]) * Math.Sin( alfa [3])  } ,
{-Math.Sin( alfa [4]) * Math.Cos( alfa [3]) * Math.Sin( alfa [5]) ,
-Math.Sin( alfa [4]) * Math.Cos( alfa [3]) * Math.Cos( alfa [5]) ,
-Math.Cos( alfa [4]) * Math.Cos( alfa [3])  } ,
{ Math.Cos( alfa [4]) * Math.Sin( alfa [5]) ,
Math.Cos( alfa [4]) * Math.Cos( alfa [5])  ,
-Math.Sin( alfa [4])  }  } ;
    return Tsol ;
}

```

```

public double DdeltaX_2dTHETA(double [] alfa)
{
    double [] r = r2( alfa ) ;
    double [] c = C2 ;
    double sol ;
    sol = (1 / NormaResta(r2( alfa ) , C2))
          * Dot(SubstractDoubles(r2( alfa ) , C2) ,
                dR2dTHETA( alfa ) ) ;
    return sol ;
}

public double [] dR2dTHETA(double [] alfa)
{
    double [] sol ;
    sol = Dot(dTinvdTHETA( alfa ) , rprima2) ;
    return sol ;
}

```

```

public double DdeltaX_3dTHETA(double [] alfa)
{

```

---

```

double [] r = r3(alfa);
double [] c = C3;
double sol;
sol = (1 / NormaResta(r3(alfa), C3))
      * Dot(SubstractDoubles(r3(alfa), C3),
            dR3dTHETA(alfa));
return sol;
}
public double [] dR3dTHETA(double [] alfa)
{
  double [] sol;
  sol = Dot(dTinvdTHETA(alfa), rprima3);
  return sol;
}

#endregion
//la otra derivada, derivada del potencial respecto a PSI

public double dVdPSI(double [] alfa)
{
  double sol;
  sol = K * (deltaX_1(alfa) * DdeltaX_1dPSI(alfa)
            + deltaX_2(alfa) * DdeltaX_2dPSI(alfa)
            + deltaX_3(alfa) * DdeltaX_3dPSI(alfa));
  return sol;
}
//partes de la derivada
#region
public double DdeltaX_1dPSI(double [] alfa)
{

```

```

double [] r = r1(alfa);
double [] c = C1;
double sol;
sol = (1 / NormaResta(r1(alfa), C1))
      * Dot(SubstractDoubles(r1(alfa), C1),
            dR1dPSI(alfa));
return sol;
}
public double [] dR1dPSI(double [] alfa)
{
  double [] sol;
  sol = Dot(dTinvdPSI(alfa), rprim1);
  return sol;
}
public double [,] dTinvdPSI(double [] alfa)
{
  double [,] Tsol = {
{ -Math.Sin(alfa[5])*Math.Cos(alfa[3])
  -Math.Cos(alfa[4])*Math.Sin(alfa[3])*Math.Cos(alfa[5]),
  -Math.Cos(alfa[5])*Math.Cos(alfa[3])
  +Math.Cos(alfa[4])*Math.Sin(alfa[3])
  *Math.Sin(alfa[5]), 0 },
{-Math.Sin(alfa[5])*Math.Sin(alfa[3])
  +Math.Cos(alfa[4])*Math.Cos(alfa[3])
  *Math.Cos(alfa[5]), -Math.Cos(alfa[5])
  *Math.Sin(alfa[3]) - Math.Cos(alfa[4])
  *Math.Cos(alfa[3])*Math.Sin(alfa[5]), 0 },
{ Math.Sin(alfa[4])*Math.Cos(alfa[5]),
  -Math.Sin(alfa[4])*Math.Sin(alfa[5]), 0 } };
return Tsol;
}

```

```
}

public double DdeltaX_2dPSI(double [] alfa)
{
    double [] r = r2(alfa);
    double [] c = C2;
    double sol;
    sol = (1 / NormaResta(r2(alfa), C2))
        * Dot(SubstractDoubles(r2(alfa), C2),
            dR2dPSI(alfa));
    return sol;
}

public double [] dR2dPSI(double [] alfa)
{
    double [] sol;
    sol = Dot(dTinvdPSI(alfa), rprima2);
    return sol;
}

public double DdeltaX_3dPSI(double [] alfa)
{
    double [] r = r3(alfa);
    double [] c = C3;
    double sol;
    sol = (1 / NormaResta(r3(alfa), C3))
        * Dot(SubstractDoubles(r3(alfa), C3),
            dR3dPSI(alfa));
    return sol;
}

public double [] dR3dPSI(double [] alfa)
```

```
{
  double [] sol;
  sol = Dot(dTinvdPSI( alfa ), rprima3);
  return sol;
}

#endregion

//Derivadas de los deltaXi con respecto a X_cm
public double DdeltaX_1dxCM(double [] alfa)
{
  double [] r = r1( alfa );
  double [] c = C1;
  double sol;
  sol = (r[0] - c[0])/NormaResta(r1( alfa ),C1);
  return sol;
}
public double DdeltaX_2dxCM(double [] alfa)
{
  double [] r = r2( alfa );
  double [] c = C2;
  double sol;
  sol = (r[0] - c[0]) / NormaResta(r2( alfa ), C2);
  return sol;
}
public double DdeltaX_3dxCM(double [] alfa)
{
  double [] r = r3( alfa );
```

```
    double [] c = C3;
    double sol;
    sol = (r[0] - c[0]) / NormaResta(r3(alfa), C3);
    return sol;
}
//Derivadas de los deltaXi con respecto a Y_cm
public double DdeltaX_1dyCM(double [] alfa)
{
    double [] r = r1(alfa);
    double [] c = C1;
    double sol;
    sol = (r[1] - c[1]) / NormaResta(r1(alfa), C1);
    return sol;
}
public double DdeltaX_2dyCM(double [] alfa)
{
    double [] r = r2(alfa);
    double [] c = C2;
    double sol;
    sol = (r[1] - c[1]) / NormaResta(r2(alfa), C2);
    return sol;
}
public double DdeltaX_3dyCM(double [] alfa)
{
    double [] r = r3(alfa);
    double [] c =C3;
    double sol;
    sol = (r[1] - c[1]) / NormaResta(r3(alfa), C3);
    return sol;
}
```

---

```
//Derivadas de los deltaXi con respecto a Z_cm
public double DdeltaX_1dzCM(double [] alfa)
{
    double [] r = r1(alfa);
    double [] c = C1;
    double sol;
    sol = (r[2] - c[2]) / NormaResta(r1(alfa), C1);
    return sol;
}
public double DdeltaX_2dzCM(double [] alfa)
{
    double [] r = r2(alfa);
    double [] c = C2;
    double sol;
    sol = (r[2] - c[2]) / NormaResta(r2(alfa), C2);
    return sol;
}
public double DdeltaX_3dzCM(double [] alfa)
{
    double [] r = r3(alfa);
    double [] c = C3;
    double sol;
    sol = (r[2] - c[2]) / NormaResta(r3(alfa), C3);
    return sol;
}

//definicion de los deltaXi
public double deltaX_1(double [] alfa)
{
```

```
double deltaX;
deltaX = NormaResta(r1(alfa), C1) - 10;
return deltaX;
}
public double deltaX_2(double[] alfa)
{
double deltaX;
deltaX = NormaResta(r2(alfa), C2) - 10;
return deltaX;
}
public double deltaX_3(double[] alfa)
{
double deltaX;

deltaX = NormaResta(r3(alfa), C3) - 10;
return deltaX;
}

//estas funciones son para puntos en el espacio en coordenadas cartesianas
public double Norma(double[] r)
{
double S;
S = r[0]*r[0]+r[1]*r[1]+r[2]*r[2];
S = Math.Sqrt(S);
return S;
}//Funcionando

public double NormaResta(double[] r1, double[] r2)
{
```

```

double S;
S = (r1[0] - r2[0])*(r1[0] - r2[0])
    + (r1[1] - r2[1])*(r1[1] - r2[1])
    + (r1[2] - r2[2])*(r1[2] - r2[2]);
S = Math.Sqrt(S);
return S;
} //Funcionando

public double [] r1(double [] alfa)
{
    double [] RCM = { alfa[0], alfa[1], alfa[2] };
    return SumDoubles(Dot(Tinv(alfa), rprima1), RCM);
}

public double [] r2(double [] alfa)
{
    double [] RCM = { alfa[0], alfa[1], alfa[2] };
    return SumDoubles(Dot(Tinv(alfa), rprima2), RCM);
}

public double [] r3(double [] alfa)
{
    double [] RCM = { alfa[0], alfa[1], alfa[2] };
    return SumDoubles(Dot(Tinv(alfa), rprima3), RCM);
}

//Define la matriz de transformacion
public double [,] Tinv(double [] alfa)
{
    double [,] Tsol = {
        { Math.Cos(alfa[5])*Math.Cos(alfa[3])
        -Math.Cos(alfa[4])*Math.Sin(alfa[3])
        *Math.Sin(alfa[5]), -Math.Sin(alfa[5])

```

```

*Math.Cos( alfa [3]) - Math.Cos( alfa [4])
*Math.Sin( alfa [3])*Math.Cos( alfa [5]) ,
Math.Sin( alfa [4])*Math.Sin( alfa [3]) } ,
{Math.Cos( alfa [5])*Math.Sin( alfa [3])
+Math.Cos( alfa [4])*Math.Cos( alfa [3])
*Math.Sin( alfa [5]) , -Math.Sin( alfa [5])
*Math.Sin( alfa [3])+Math.Cos( alfa [4])
*Math.Cos( alfa [3])*Math.Cos( alfa [5]) ,
-Math.Sin( alfa [4])*Math.Cos( alfa [3]) } ,
{ Math.Sin( alfa [4])*Math.Sin( alfa [5]) ,
Math.Sin( alfa [4])*Math.Cos( alfa [5]) ,
Math.Cos( alfa [4]) } } ;
return Tsol ;
}
public double [] Dot(double [,] T, double [] r)
{
double [] Tsol = {0,0,0};
for(int i = 0 ; i < 3; i++)
{
Tsol[i] = T[i,0]*r[0] +T[i,1]*r[1] + T[i,2]*r[2];
}
return Tsol ;
}

public double Dot(double [] r1, double [] r2)
{
double Tsol = 0;

Tsol = r1 [0] * r2 [0] + r1 [1] * r2 [1] + r1 [2] * r2 [2];

```

```
    return Tsol;  
}  
}  
}
```

## Programa principal

El siguiente archivo contiene el código que usa la estructura de datos definida en el archivo para generar las simulaciones:

```
using System;  
using System.Collections.Generic;  
using System.Linq;  
using System.Text;  
using System.Threading.Tasks;  
using System.Windows.Forms;  
using MathNet.Numerics;  
using System.Windows.Forms.DataVisualization.Charting;  
using System.IO;  
  
namespace CuerpoRigido  
{  
    class Program  
    {  
        static void Main(string[] args)  
        {  
            var watch = new System.Diagnostics.Stopwatch();
```

```
watch.Start ();
string mydocpath = @"D:\Documents\Tesis\CuerpoRigido";
// por orden x_cm, angulos euler, derivada tiempo x_cm,
//derivada tiempo angulos euler
double [] x_0 = { 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,
                 Math.PI / 2 - Math.PI / 18,
                 0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 };
// en 8 minutos ejecuta 10 segundos de simulacion
// con un procesador radeon 5 y 8 gb de memoria ram
double [] Tsol = { 0, 10 };
Console.WindowWidth = 170;
Console.WindowHeight = 35;

double [] K_array = {500};
double [] l0_array = {0.0145};
int Num.Op = 0;
int Num.Op.Total = 25;

double [,] valores_max_y = new double[K_array.Length,
                                       l0_array.Length];
double [,] valores_max_teta = new double[K_array.Length,
                                          l0_array.Length];
double [,] valores_max_phi = new double[K_array.Length,
                                         l0_array.Length];
double [,] valores_max_psi = new double[K_array.Length,
                                         l0_array.Length];

for (int s = 0 ; s < K_array.Length; s++ )
{
```

```
for(int j = 0; j < l0_array.Length; j++)
{

    integradores integrador1
        = new integradores(K_array[s],
                            l0_array[j]);
    double[,] solucion = integrador1.RK4(x_0, Tsol, 0.0001);
    double temp_var_teta = Math.Abs(solucion[0, 5]);
    double temp_var_y = Math.Abs(solucion[0, 2]);
    double temp_var_psi = Math.Abs(solucion[0, 6]);
    double temp_var_phi = Math.Abs(solucion[0, 4]);
    #region
    for (int i =0; i < integradores.RKlentiempos; i++)
    {
        if (Math.Abs(solucion[i, 5]) >= temp_var_teta)
        {
            temp_var_teta = Math.Abs(solucion[i, 5]);
        }
        if (Math.Abs(solucion[i, 2]) >= temp_var_y)
        {
            temp_var_y = Math.Abs(solucion[i, 2]);
        }
        if (Math.Abs(solucion[i, 4]) >= temp_var_phi)
        {
            temp_var_phi = Math.Abs(solucion[i, 4]);
        }
        if (Math.Abs(solucion[i, 6]) >= temp_var_psi)
        {
            temp_var_psi = Math.Abs(solucion[i, 6]);
        }
    }
}
```

```

    }
#endregion
//Guardas la trayectoria solo si K ==
if (K_array[s] == 100
      || K_array[s] == 500
      || K_array[s] == 990)
{
string FM
    = String.Format("10_{0}_K_{1}",
                    10_array[j], K_array[s]);
string file_path = mydocpath
                  +@"\\SimResortes\\Trayectorias\\"
                  + FM
                  + ".txt" );
using (StreamWriter outputFile
        = new StreamWriter(file_path)
{
for (int j1 = 0; j1 < integradores.RKlentiempos; j1++)
{

    outputFile.WriteLine (
        "{0}\t{1}\t{2}\t{3}\t{4}\t{5}\t{6}",
        solucion[j1, 0], solucion[j1, 1],
        solucion[j1, 2], solucion[j1, 3],
        solucion[j1, 4], solucion[j1, 5],
        solucion[j1, 6]);

    }
}
}

```

```

    }
    valores_max_teta[s, j] = temp_var_teta;
    valores_max_y[s, j] = temp_var_y;
    valores_max_psi[s, j] = temp_var_psi;
    valores_max_phi[s, j] = temp_var_phi;
    Num_Op += 1;
    double porcentaje
        = ((double)Num_Op*100) / (double)Num_Op_Total;
    Console.Clear();
    Console.WriteLine(
        "Operaciones realizadas: {0}/{1} \t Porcentaje: {2:0.00}%",
        Num_Op, Num_Op_Total, porcentaje);
}

}

// Write the string array to a new file
using (StreamWriter outputFile
        = new StreamWriter(mydocpath + @"\SimResortes\K.txt"))
{

for (int i = 0; i < K_array.Length; i++)
{

    outputFile.WriteLine("{0}", K_array[i]);
}
}

using (StreamWriter outputFile
        = new StreamWriter(mydocpath + @"\SimResortes\l0.txt"))

```

```
{  
  
for (int i = 0; i < l0_array.Length; i++)  
{  
  
    outputFile.WriteLine(" {0}", l0_array[i]);  
}  
}  
  
//K son las columnas l0 son las filas  
using (StreamWriter outputFile  
        = new StreamWriter(mydocpath  
                            + @"\SimResortes\MAP.Y.txt"))  
{  
for (int j = 0; j < K_array.Length ; j++)  
{  
    for (int i = 0; i < l0_array.Length; i++)  
    {  
  
        outputFile.Write(" {0}\t", valores_max_y[j,i]);  
    }  
    outputFile.WriteLine();  
}  
}  
  
using (StreamWriter outputFile  
        = new StreamWriter(mydocpath  
                            + @"\SimResortes\MAP.THETA.txt"))  
{  
for (int j = 0; j < K_array.Length; j++)
```

```
{
    for (int i = 0; i < l0_array.Length; i++)
    {
        outputFile.Write("{0}\t", valores_max_teta[j, i]);

    }
    outputFile.WriteLine();
}
}

using (StreamWriter outputFile
        = new StreamWriter(mydocpath
            + @"\SimResortes\MAP_PHI.txt"))
{
    for (int j = 0; j < K_array.Length; j++)
    {
        for (int i = 0; i < l0_array.Length; i++)
        {
            outputFile.Write("{0}\t", valores_max_phi[j, i]);

        }
        outputFile.WriteLine();
    }
}

using (StreamWriter outputFile
        = new StreamWriter(mydocpath
            + @"\SimResortes\MAP_PSI.txt"))
{
    for (int j = 0; j < K_array.Length; j++)
    {
```

```
    for (int i = 0; i < l0_array.Length; i++)
    {
        outputFile.Write("{0}\t", valores_max_psi[j, i]);

    }
    outputFile.WriteLine();
}
}
watch.Stop();

MessageBox.Show(
    $"Execution Time: {watch.ElapsedMilliseconds} ms"
);
Console.WriteLine(
    $"Execution Time: {watch.ElapsedMilliseconds} ms"
);

}
}

}
```

## Controlador

En esta sección se anexa el código encargado de iniciar el proceso de medición y de recibir los datos y el código encargado de realizar el ajuste a la trayectoria capturada.

## Código para capturar imagen

```
import serial
from time import sleep
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
from threading import Thread
from time import time, sleep
import pandas as pd
import pickle
from pprint import pprint
from analisis_historico import detectar_filo

puerto = 'COM3'
medicion = True
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
contador = 0
bytes = []
die = False
cuadro = []
historico_cuadros = []

def store(historico):
    with open('historico-2.py', 'w+') as fp:
        fp.write('lista _=_ ' + pprint(historico))
```

```
def recibe_cuadros():
    global die, cuadro
    port = serial.Serial(puerto, 256000)
    port.write(b's')
    inicio_encontrado = False
    ultimo_minicuadro = []
    trama = b''
    inicio = time()
    while not die:
        bytes = port.read_all()
        trama += bytes

        if b'\xff\xfe\xff\xff' in trama:
            mini_cuadros = trama.split(b'\xff\xfe\xff\xff')
            ultimo_minicuadro = mini_cuadros[-1]
            if not inicio_encontrado:
                inicio_encontrado = True
                cuadros_para_preparar = mini_cuadros[1:-1]
            else:
                cuadros_para_preparar = mini_cuadros[:-1]
            if cuadros_para_preparar:
                cuadros_preparados = [transform_frame(cuadro, inicio) for cuadro
                                     in cuadros_para_preparar]
                if cuadros_preparados:
                    historico_cuadros.extend(cuadros_preparados)
                cuadro = historico_cuadros[-1]
        trama = ultimo_minicuadro
    if historico_cuadros:
        try:
            print(detectar_filo(historico_cuadros[-1]))
        except:
```

**continue**

```
def transform_frame(frame, inicio):
    divided_in_twos = [[frame[2 * i], frame[2 * i + 1]] for i in range(len(frame) // 2)]
    doubled = 2 ** 8
    total = 0
    numeros = []
    for indice, byte in enumerate(divided_in_twos):
        numero = byte[0] + byte[1] * (doubled)
        total += numero
        numeros.append(numero)
    return {'numeros': numeros, 'tiempo': time() - inicio}
```

```
def animate(i):
    global cuadro
    if not cuadro:
        cuadro = [0]*80
    x = [i for i in range(len(cuadro['numeros']))]
    y = cuadro['numeros']
    ax.clear()
    ax.plot(x, y)
```

```
thread = Thread(target=recive_cuadros)
thread.start()
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, interval=200)
plt.show()
```

## Código para realizar ajuste

```
from historico_3 import lista
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy, scipy.optimize

def es_salto(lista, indice):
    return
    (lista[indice+1]-lista[indice])/lista[indice] > 0.50
    or (lista[indice+2]-lista[indice])/lista[indice] > 0.50

def detectar_filo(imagen):
    for indice, elemento in enumerate(imagen[:-2]):
        if es_salto(imagen, indice):
            return indice
    raise Exception('no encontrado')

def fit_sin(tiempos, posiciones):
    tiempos = numpy.array(tiempos)
    posiciones = numpy.array(posiciones)
    ff = numpy.fft.fftfreq(len(tiempos), (tiempos[1]-tiempos[0]))
    posiciones = abs(numpy.fft.fft(posiciones))
    guess_freq = abs(ff[numpy.argmax(posiciones[1:])+1])
    guess_amp = numpy.std(posiciones) * 2.**0.5
    guess_offset = numpy.mean(posiciones)
    guess_damping = 0.5
    guess = numpy.array([guess_amp,
```

---

```

                2.*numpy.pi*guess_freq ,
                0. ,
                guess_offset ,
                guess_damping])

def esinfunc(t, A, w, p, c, gamma):
    print(t)
    return A * numpy.exp(-gamma*t) * numpy.sin(w*t + p) + c
popt, pcov = scipy.optimize.curve_fit(esinfunc, tiempos,
                                      posiciones, p0=guess)
A, w, p, c, gamma = popt
f = w/(2.*numpy.pi)
fitfunc = lambda t: A * numpy.exp(-gamma*t)
                * numpy.sin(w*t + p) + c
return {"amp": A, "omega": w, "phase": p,
        "offset": c, "freq": f, "period": 1./f,
        "fitfunc": fitfunc, "maxcov": numpy.max(pcov),
        "rawres": (guess, popt, pcov),
        'gamma': gamma}

if __name__ == '__main__':
    primer_elemento = lista[0]

    print(len(lista))

    print('fps:_{:}'.format(len([elem for elem in lista
                                if 1 <= elem['tiempo'] <= 2])))
    filoes = [detectar_filo(imagen['numeros'])
              for imagen in lista

```

```
        if imagen['tiempo'] > 1]
tiempos = [imagen['tiempo'] for imagen in lista
            if imagen['tiempo'] > 1]

res = fit_sin(tiempos, filos)
print(res)
plt.plot(tiempos, filos, label='medicion')
plt.plot(tiempos,
         [res['fitfunc'](tiempo) for tiempo in tiempos],
         label='ajuste')
plt.show()
```