



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Estudio de decoherencia de estados
SPDC mezclados con estados
coherentes**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Josué Cantera Fernández

TUTOR

Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar



CIUDAD DE MÉXICO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Josué
Cantera
Fernández

TEL: 55 58 18 66 65
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
Cuenta 305062006

2. Datos del tutor

Dr.
Víctor Manuel
Velázquez
Aguilar

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Ruben Yvan
Maarten
Fossion

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Jehú
López
Aparicio

5. Datos del sinodal 3

M. en C.
Erick
Barrios
Barocio

6. Datos del sinodal 4

Dra.
Edna Magdalena
Hernández
González

7. Datos del trabajo escrito.

Estudio de decoherencia de estados SPDC
mezclados con estados coherentes 48p
2021

Dedicado a

A mis padres Froylan y Sara quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía.

Mis hermanos Gerardo, Eduardo y Jesús por su cariño y apoyo incondicional durante todo este proceso. Por estar conmigo en todo momento gracias. A toda mi familia y pareja porque con sus consejos y palabras de aliento hicieron de mí una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

De igual manera quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento al Dr. Víctor Manuel, principal colaborador durante todo este proceso, quien con su dirección, conocimiento y enseñanza permitió el desarrollo de este trabajo.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a todas mis amigos y compañeros del laboratorio de óptica cuántica por apoyarme cuando más lo necesito, por extender su mano en momentos difíciles y por el amor brindado cada día, de verdad mil gracias.

Agradecimientos

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) con clave de proyecto IN 116717.

Índice general

Lista de Figuras	II
1. Introducción	2
2. Cuantización del campo Electromagnético	3
3. Estados Coherentes	13
4. Estados SPDC	19
5. Función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(0)$	22
6. Experimento	27
6.1. Montaje experimental	27
6.2. Resultados	29
6.2.1. Ajuste Teórico	31
7. Conclusiones	35
A. Operador de densidad	37

Índice de figuras

2.1. Cavidad con paredes perfectamente conductoras localizadas en $z = 0$ y $z = L$. El campo eléctrico está polarizado en la dirección de x	4
3.1. Distribución de probabilidad de número de fotones para estados coherentes con promedio de fotones (a) $\bar{n} = 2$ y (b) $\bar{n} = 10$	17
3.2. Gráfica del valor de expectación del campo eléctrico, junto con su fluctuación, como función del tiempo a posición fija. Las fluctuaciones del campo son las mismas en todo tiempo de manera que el campo es tan parecido a un campo clásico como es posible para cualquier estado cuántico coherente.	17
4.1. Diagrama esquemático de la producción de pares de fotones por el cristal no lineal BBO.	19
6.1. Diagrama experimental del experimento de la prueba de la existencia del fotón.	27
6.2. Esquema que muestra el arreglo experimental para el estudio de la mezcla estadística.	28
6.3. Gráfica que muestra la función de correlación $g^{(2)}$ para tres detectores vs el número de fotones de la fuente clásica.	31
6.4. Gráfica que muestra la función de correlación $g^{(2)}$ para tres detectores vs el número de fotones de la fuente clásica.	34
6.5. Gráfica que muestra la función de correlación $g^{(2)}$ para tres detectores vs el número de fotones de la fuente clásica hasta 10^8	34

Resumen

En éste trabajo se presenta la construcción y estudio de una transición de un estado mixto compuesto por un estado coherente y un estado SPDC, utilizando la función de correlación de segundo orden. De acuerdo con los resultados mientras en el estado mixto se tengan mas fotones provenientes del haz coherente la función de correlación transitará al valor clásico correspondiente a un estado coherente.

El objetivo principal de esta tesis es construir experimentalmente un estado mixto entre estados SPDC y estados coherentes y en consecuencia estudiar la transición entre estos dos estados mediante la función de correlación de segundo orden. Se sabe que la función de correlación tiene valores bien establecidos dependiendo de la fuente de luz que se ocupe, en el caso del presente trabajo se parte del valor típico asociado a una fuente cuántica (valor teórico es $g^{(2)} = 0$) dado por el estado SPDC y posteriormente se fueron mezclando los fotones provenientes de la fuente SPDC con un haz coherente por lo que la función de correlación aumentó desde $g^{(2)} = 0.03 \pm 0.03$ hasta a un valor de $g^{(2)} = 0.79 \pm 0.05$ ya que el incremento de los fotones de la fuente coherente generan coincidencias con el haz testigo y el valor de la $g^{(2)}$ tiende al valor típico asociado a una fuente de luz coherente.

Una vez construido el estado mixto se realizó el ajuste teórico utilizando una variación de la función de correlación de segundo orden definida por Beck en en [4], agregando coincidencias fortuitas debidas al haz coherente, como se puede ver en el capítulo 6, esta función de ajuste concuerda con los resultados experimentales.

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo principal construir una mezcla de estados bifotónicos (SPDC, spontaneous parametric down conversion) y coherentes, para estudiar la decoherencia, utilizando la función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(\tau)$.

La importancia de estudiar este tema particular radica en que las transiciones cuántico-clásicas siguen siendo un problema abierto de la teoría cuántica.

La decoherencia cuántica es el término utilizado en mecánica cuántica para explicar cómo un estado cuántico puede dar lugar a un estado físico clásico. En otras palabras cómo un sistema físico, bajo ciertas condiciones específicas, deja de exhibir efectos cuánticos y pasa a exhibir un comportamiento típicamente clásico, sin los efectos contra intuitivos típicos de la mecánica cuántica. Así la decoherencia cuántica explicaría por qué a grandes escalas la física clásica que ignora los efectos cuánticos constituye una buena explicación del comportamiento del mundo [7].

En este trabajo como sistema cuántico tenemos a los estados de Fock provenientes de una fuente SPDC los cuales se mezclan con un estado semiclásico, estados coherentes. Todo el sistema, el estado de Fock mezclado con el estado coherente, lo podemos describir por medio del operador de densidad. Al ir incrementando el número de fotones semiclásicos en la mezcla podemos observar cómo el sistema, el cual tiene un comportamiento cuántico inicialmente, pasa gradualmente a un comportamiento semiclásico al monitorear la función de correlación de segundo orden. La función de correlación de segundo orden para sistemas clásicos es mayor o igual a uno y para sistemas cuánticos el valor debe ser menor a uno.

Capítulo 2

Cuantización del campo Electromagnético

El trabajo de esta tesis consiste en presentar un estudio cuántico de la luz, es por ello que es indispensable cuantizar el campo electromagnético (EM). Esto se hará siguiendo el proceso de cuantización canónica, el cual consiste en encontrar pares de variables canónicas conjugadas que describan al campo y posteriormente promoverlas a operadores. En este capítulo veremos la cuantización del campo electromagnético para una cavidad electrodinámica unidimensional, que es uno de los casos más simples para cuantizar el campo electromagnético.

Consideremos el caso del campo EM confinado a una cavidad electrodinámica unidimensional. La cavidad consta de dos paredes perfectamente reflectantes, una de las paredes se encuentra en $z = 0$ y la otra en $z = L$ como se muestra en la Figura 2.1. El campo eléctrico tiene que desaparecer en la frontera, las paredes de la cavidad. Asumimos que no hay fuentes de radiación como corrientes o cargas, ni algún material dieléctrico dentro de la cavidad, y el campo está polarizado en la dirección x , $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x E_x(z, t)$, donde \vec{e}_x es un vector de polarización unitario. Las ecuaciones de Maxwell **sin fuentes**, en el sistema internacional, son

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

Un solo modo de campo satisface las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera implican que

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} q(t) \text{Sen}(kz), \quad (2.5)$$

donde ω es la frecuencia del modo y k es el número de onda que se relaciona con la frecuencia de acuerdo con $k = \omega/c$. Las condiciones de frontera nos dan los valores permitidos de las frecuencias $\omega_m = c\frac{m\pi}{L}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Asumimos que la frecuencia ω de la ecuación (2.5) es una de estas frecuencias e ignoraremos el resto por ahora. V de la ecuación (2.5) es el volumen efectivo de la cavidad y $q(t)$ es un factor que depende del tiempo y con unidades de longitud. Mas adelante veremos que $q(t)$ actúa como una posición canónica. El campo magnético en la cavidad lo obtenemos de combinar (2.2) y (2.5), el cual resulta ser $\vec{B} = \vec{e}_y B_y(z, t)$ donde

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{q}(t) \text{Cos}(kz). \quad (2.6)$$

Aquí, $\dot{q}(t)$ juega el rol de un momento canónico conjugado de una partícula de masa unidad, es decir, $p(t) = \dot{q}(t)$. Veamos la deducción de (2.6). Recordemos (2.2),

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Calculemos $\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

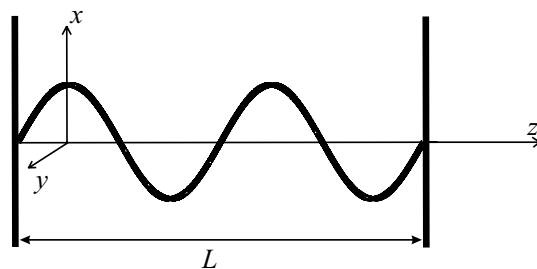


Figura 2.1: Cavidad con paredes perfectamente conductoras localizadas en $z = 0$ y $z = L$. El campo eléctrico está polarizado en la dirección de x .

$$\begin{aligned}
\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} q(t) \text{Sen}(kz) \vec{e}_x \right] \\
&= \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(kz) \dot{q}(t) \vec{e}_x.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Calculemos $\nabla \times \vec{B}$,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \vec{e}_x \left(\underbrace{\partial_y B_z}_{=0} - \partial_z B_y \right) - \vec{e}_y \left(\underbrace{\partial_x B_z}_{=0} - \underbrace{\partial_z B_x}_{=0} \right) \\
&\quad + \vec{e}_z \left(\underbrace{\partial_x B_y}_{=0} - \underbrace{\partial_y B_x}_{=0} \right) \\
&= -\partial_z B_y,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

igualando (2.7) y (2.8) se obtiene

$$-\partial_z B_y = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(kz) \dot{q}(t) \tag{2.9}$$

que al integrar resulta en (2.6).

La energía clásica, o función hamiltoniana H , de un campo unimodal, está dada por

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int dV \left[\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int dV \left[\varepsilon_0 E_x^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(\vec{r}, t) \right].
\end{aligned} \tag{2.10}$$

De las ecuaciones (2.5) y (2.6) al sustituirlas en (2.10) se puede mostrar directamente que

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2), \tag{2.11}$$

lo cual dice que el campo electromagnético unimodal es formalmente equivalente a un oscilador armónico de masa unidad donde los campos eléctrico y magnético, salvo constantes, juegan un papel de variables canónicas conjugadas como posición y momento. Veamos

como se llega a (2.11).

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int dV \left[\varepsilon_0 E_x^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(\vec{r}, t) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int dV \left[\varepsilon_0 \left[\left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} q(t) \text{Sen}(kz) \right]^2 + \frac{1}{\mu_0} \left[\left(\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{q}(t) \text{Cos}(kz) \right]^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{V} \left[\omega^2 q^2(t) \int dV \text{Sen}^2(kz) + \omega^2 \left(\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k^2} \right) \dot{q}^2(t) \int dV \text{Cos}^2(kz) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{V} \left[\omega^2 q^2(t) \int dx dy \int dz \text{Sen}^2(kz) + \omega^2 \left(\frac{1/c^2}{k^2} \right) \dot{q}^2(t) \int dx dy \int dz \text{Cos}^2(kz) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{V} \left[\omega^2 q^2(t) A \int dz \text{Sen}^2(kz) + \left(\frac{k^2}{k^2} \right) \dot{q}^2(t) A \int dz \text{Cos}^2(kz) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{V} \left[\omega^2 q^2(t) A \left[\frac{z}{2} - \frac{\text{Sen}(2kz)}{4k} \right]_0^L + \dot{q}^2(t) A \left[\frac{z}{2} + \frac{\text{Sen}(2kz)}{4k} \right]_0^L \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{V} \left[\omega^2 q^2(t) A \left[\frac{z}{2} - \frac{\text{Sen}(2\frac{m\pi}{L}z)}{4\frac{m\pi}{L}} \right]_0^L + \dot{q}^2(t) A \left[\frac{z}{2} + \frac{\text{Sen}(2\frac{m\pi}{L}z)}{4\frac{m\pi}{L}} \right]_0^L \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{V} \left[\omega^2 q^2(t) A \frac{L}{2} + \dot{q}^2(t) A \frac{L}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{V} \left[\omega^2 q^2(t) \frac{V}{2} + \dot{q}^2(t) \frac{V}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\omega^2 q^2(t) + \dot{q}^2(t) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\omega^2 q^2(t) + p^2(t) \right]. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

La forma de la ecuación (2.11) en que queda expresado el campo permite identificar variables canónicas conjugadas q y p , por lo tanto, podemos hacer el remplazo a los operadores \hat{q} y \hat{p} . Estos operadores satisfacen una relación de conmutación canónica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}, \tag{2.13}$$

que normalmente se ignora el operador identidad \hat{I} , por costumbre, y la ecuación anterior suele escribirse como

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{2.14}$$

Ahora, todo lo dicho de pasar de variables canónicas conjugadas a operadores, nos permite

conocer los operadores de campo eléctrico y magnético,

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{q}(t) \text{Sen}(kz), \quad (2.15)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{p}(t) \text{Cos}(kz), \quad (2.16)$$

así, el operador hamiltoniano \hat{H} es

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2). \quad (2.17)$$

Los operadores \hat{q} y \hat{p} son hermitianos y por tanto corresponden a cantidades observables. Sin embargo, es conveniente introducir los operadores de aniquilación \hat{a} y de creación \hat{a}^\dagger que no son hermitianos (y por lo tanto no son observables) en las combinaciones

$$\hat{a} = \frac{1}{(2\hbar\omega)^2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (2.18)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega)^2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (2.19)$$

Con las definiciones anteriores, los operadores de campo eléctrico y magnético quedan como

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\text{Sen}(kz), \quad (2.20)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \frac{1}{i}\mathcal{B}_0(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\text{Cos}(kz), \quad (2.21)$$

donde $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0V)^{\frac{1}{2}}$ y $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k)(\epsilon_0\hbar\omega/V)^{\frac{1}{2}}$ representan el campo eléctrico y magnético “por fotón”. Las comillas indican que esto no es del todo cierto, ya que el promedio de estos campos es cero. \mathcal{E}_0 y \mathcal{B}_0 son medidas que parametrizan las fluctuaciones del campo cuantizado. Los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (2.22)$$

con este resultado, el operador hamiltoniano (2.17) toma la forma de

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.23)$$

Hasta ahora, no hemos dicho nada sobre la evolución temporal de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Para un operador cualquiera \hat{O} que no tiene una dependencia explícita en el tiempo,

la ecuación de Schrödinger para este operador es

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}], \quad (2.24)$$

aplicando esto al operador de aniquilación \hat{a} tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \\ &= i\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \\ &= i\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \right) \hat{a} \\ &= i\omega \underbrace{\left[\hat{a}^\dagger, \hat{a} \right]}_{=-1} \hat{a} \\ &= -i\omega \hat{a}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

la cual tiene la solución

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}. \quad (2.26)$$

Por el mismo método, o simplemente tomando el conjugado hermitiano de (2.26), tenemos

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}. \quad (2.27)$$

Una alternativa de obtener esta solución es escribir la solución formal de la ecuación (2.24) en la forma

$$\hat{O}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (2.28)$$

y entonces usar el lema de Baker-Hausdorff para obtener

$$\begin{aligned} \hat{O}(t) &= \hat{O}(0) + \frac{it}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}(0)] \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^2 [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{O}(0)]] + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^n [\hat{H}, [\hat{H}, [\hat{H}, \dots [\hat{H}, \hat{O}(0)] \dots]]] + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Aplicando esto al operador \hat{a} obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= \hat{a}(0) \left[1 - i\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + i \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \dots \right] \\ &= \hat{a}(0) e^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

El operador producto $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ tiene un significado especial y lo llamamos el operador de número, el cual lo denotamos como \hat{n} . El ket $|n\rangle$ denota un eigenestado de energía de un campo unimodal con eigenvalor de energía E_n satisfaciendo

$$\begin{aligned}\hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ &= E_n |n\rangle.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Si multiplicamos la ecuación (2.31) por \hat{a}^\dagger ,

$$\begin{aligned}\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a}}_{-1 + \hat{a} \hat{a}^\dagger} + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle &= E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ &= \hbar\omega \left(-\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle,\end{aligned}\tag{2.32}$$

implicando

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a}^\dagger |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle,\tag{2.33}$$

lo cual dice que tenemos un problema de eigenvalor para el estado $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ con eigenenergía $E_n + \hbar\omega$. Esto aclara el por qué llamamos operador de creación al operador \hat{a}^\dagger ; \hat{a}^\dagger crea un cuanto de energía $\hbar\omega$. Nos atrevemos a decir que un fotón de energía $\hbar\omega$ es creado por \hat{a}^\dagger . Similarmente si multiplicamos (2.31) por \hat{a} y usando la relación de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ podemos llegar a

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle = (E_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle,\tag{2.34}$$

donde podemos interpretar que el operador \hat{a} destruye o aniquila un cuanto de energía o un fotón, el eigenestado $\hat{a} |n\rangle$ posee la eigenenergía $E_n - \hbar\omega$. Veamos la deducción de

(2.34). Comencemos multiplicando a (2.31) por \hat{a} ,

$$\begin{aligned}
\hat{a}\hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n\hat{a}|n\rangle \\
&= \hbar\omega \left(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1} + \frac{1}{2} \right) \hat{a}|n\rangle \\
&= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \frac{1}{2} \right) \hat{a}|n\rangle = E_n\hat{a}|n\rangle,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

implicando (2.34). Evidentemente, repitiendo el procedimiento en la ecuación (2.34) resultará que la energía va a ir disminuyendo en múltiplos de $\hbar\omega$. Pero la energía del oscilador armónico siempre tiene que ser positiva incluyendo la energía más baja posible $E_0 > 0$, y con el eigenestado correspondiente $|0\rangle$ satisfacen

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\hat{a}|0\rangle) &= (E_0 - \hbar\omega)(\hat{a}|0\rangle) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

porque

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \tag{2.37}$$

Considerando esto, el problema de eigenvalor para el estado más bajo es

$$\begin{aligned}
\hat{H}|0\rangle &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle \\
&= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \underbrace{\hat{a}|0\rangle}_{=0} + \frac{1}{2}|0\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

de modo que el eigenvalor de energía más baja le llamamos energía de punto cero $\hbar\omega/2$. Como $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$, los eigenvalores de energía son

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.39}$$

Justificaremos este resultado más adelante. Para el operador de número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ tenemos

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \tag{2.40}$$

estos estados de número tienen que estar normalizados de acuerdo a $\langle n|n\rangle = 1$. Para el estado $\hat{a}|n\rangle$ tenemos

$$\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle, \quad (2.41)$$

donde c_n es una constante a determinar. Entonces el producto interno de $\hat{a}|n\rangle$ con sigo mismo es

$$\begin{aligned} \left(\langle n|\hat{a}^\dagger\right) (\hat{a}|n\rangle) &= \langle n|\hat{n}|n\rangle = n \\ &= \langle n-1|c_n^*c_n|n-1\rangle \\ &= |c_n|^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

implicando que $|c_n|^2 = n$, y por lo tanto $c_n = \sqrt{n}$. De esta forma

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.43)$$

Similarmente podemos mostrar que

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.44)$$

La deducción de la ecuación de arriba es la siguiente: empezamos planteando que

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = c|n+1\rangle, \quad (2.45)$$

donde c es un número complejo. Haciendo el producto interno con sigo mismo obtenemos

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \langle n+1|c^*c|n+1\rangle \\ &= |c|^2 \underbrace{\langle n+1|n+1\rangle}_{=1} \\ &= |c|^2 \\ &= \langle n|(1 + \hat{a}^\dagger\hat{a})|n\rangle \\ &= \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} + \langle n|\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=\hat{n}}|n\rangle \\ &= 1 + n, \end{aligned} \quad (2.46)$$

implicando $c = \sqrt{n+1}$, sustituyendo este valor de c en (2.45) obtenemos (2.44).

A partir de este último resultado, ecuación (2.44), mostramos directamente que el estado de número $|n\rangle$ lo podemos generar a partir del estado base $|0\rangle$ por la acción repetida del

operador de creación \hat{a}^\dagger :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.47)$$

Debido a que \hat{H} y \hat{n} son operadores hermitianos, los estados de número diferente son ortogonales, es decir $\langle n'|n\rangle = \delta_{nn'}$ y por lo tanto, los estados de número forman una base completa, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1. \quad (2.48)$$

Los únicos elementos de matriz que no desaparecen de los operadores de creación y aniquilación son

$$\begin{aligned} \langle n-1|\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}\langle n-1|n-1\rangle, \\ &= \sqrt{n} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \langle n+1|\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\langle n+1|n+1\rangle, \\ &= \sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Recordemos que $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$, apliquemos lo a $|n\rangle$,

$$\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)|n\rangle \\ &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\sqrt{n}|n-1\rangle + 1/2|n\rangle) \\ &= \hbar\omega(\sqrt{n}\sqrt{n}|n\rangle + 1/2|n\rangle) \\ &= \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde se puede identificar a (2.39).

Podemos observar que la cuantización del campo electromagnético corresponde a un espectro discreto de oscilador armónico. Una de las características interesantes de este espectro energético es que, al nivel más bajo, cuando el estado es $|0\rangle$ y $n = 0$, la energía es distinta de cero, esto juega un papel importante en las fluctuaciones del campo. A partir del vacío $|0\rangle$ podemos obtener los llamados estados coherentes que son estados cuánticos que reproducen los resultados esperados para el campo electromagnético observados en el tratamiento clásico.

Capítulo 3

Estados Coherentes

Una de las maneras más simples de definir los estados coherentes es como los eigenestados del operador de aniquilación [3]

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (3.1)$$

donde α es un número complejo. Note que eigenvalores complejos se permiten aquí porque \hat{a} es un operador no hermitiano. Los estados $|\alpha\rangle$ son eigenestados derechos del operador \hat{a} y $\langle\alpha|$ son eigenestados izquierdos de \hat{a}^\dagger con eigenvalor α^* ,

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|. \quad (3.2)$$

Los estados de número $|n\rangle$ definen un conjunto completo, de manera que el estado coherente $|\alpha\rangle$ se puede poner como una combinación lineal de estos estados,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (3.3)$$

apliquemos el operador \hat{a} a cada elemento de la expansión (3.3),

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{a} |n\rangle,$$

usando la ecuación (3.1) y $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, la ecuación anterior queda como

$$\alpha |\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

sustituyendo (3.3) en la ecuación anterior

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

igualando los coeficientes de $|n\rangle$ de la ecuación anterior obtenemos

$$\alpha C_{n-1} = C_n \sqrt{n}, \quad (3.4)$$

o bien

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} C_{n-2} \\ &= \dots \\ &\vdots \\ &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

y así, al sustituir (3.5) en (3.3) obtenemos

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.6)$$

Un estado coherente está normalizado, lo cual ayuda a determinar el valor de C_0 ;

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= 1 \\ &= C_0^* \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n'}}{\sqrt{n'!}} \langle n' | \cdot C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= |C_0|^2 \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n'}}{\sqrt{n'!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle n' | n \rangle \\ &= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \\ &= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ &= |C_0|^2 e^{|\alpha|^2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

lo cual implica que

$$C_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2},$$

sustituyendo en (3.6) se tiene

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.8)$$

El operador de campo eléctrico es [2]

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}], \quad (3.9)$$

calculemos su valor de expectación,

$$\langle\alpha| \hat{E}_x(\vec{r}, t) |\alpha\rangle = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\alpha e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \alpha^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}], \quad (3.10)$$

al escribir α en coordenadas polares, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, obtenemos

$$\langle\alpha| \hat{E}_x(\vec{r}, t) |\alpha\rangle = 2|\alpha| \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \theta), \quad (3.11)$$

lo cual se asemeja a un campo clásico. Aún más, podemos mostrar que

$$\langle\alpha| \hat{E}_x^2(\vec{r}, t) |\alpha\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} [1 + 4|\alpha|^2 \text{Sen}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \theta)], \quad (3.12)$$

entonces, de (3.12) y (3.11), las fluctuaciones del campo eléctrico son

$$\begin{aligned} \Delta\hat{E}_x &= \langle(\Delta\hat{E}_x)^2\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\langle\hat{E}^2\rangle - \langle\hat{E}\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

que son idénticas a las fluctuaciones del vacío. Los estados coherentes hacen que el valor esperado del operador campo electromagnético se comporte como un campo electromagnético clásico y el ruido asociado a este operador es únicamente el del vacío.

Si tenemos al sistema en el estado coherente $|\alpha\rangle$, el número promedio de fotones es

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \langle\alpha| \underbrace{\hat{n}}_{\hat{a}^\dagger \hat{a}} |\alpha\rangle \\ &= |\alpha|^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

y así, $|\alpha|^2$ es el número promedio de fotones del campo. Para calcular las fluctuaciones del número de fotones necesitamos calcular $\langle \hat{n}^2 \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}^2 \rangle &= \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \underbrace{\hat{a} \hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \hat{a} | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | \alpha \rangle \\
&= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \\
&= \bar{n}^2 + \bar{n} \\
&= \langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

y así

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{n} &= \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} \\
&= \langle \hat{n} \rangle^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

lo cual es característico de un proceso de Poisson. De hecho, para una medición del número de fotones del campo, la probabilidad de detectar n fotones es

$$\begin{aligned}
P_n &= |\langle n | \alpha \rangle|^2 \\
&= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\
&= e^{-\langle \hat{n} \rangle} \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{n!} \\
&= e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

la cual es una distribución de Poisson con un promedio de \bar{n} . Note que la incertidumbre fraccionaria en el número de fotones es

$$\frac{\Delta \hat{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\bar{n}^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.18}$$

En la Figura 3.1 graficamos un par de ejemplos de la distribución de probabilidad de números de fotones para diferentes promedios \bar{n} . Los estados coherentes $|\alpha\rangle$ son estados cuánticos muy parecidos a estados clásicos porque (i) el valor de expectación del campo eléctrico tiene la forma de la expresión del campo eléctrico clásico, (ii) las fluctuaciones del campo eléctrico son las mismas que las del vacío, (iii) las fluctuaciones fraccionarias para el número de fotones decrece con el promedio del número promedio de fotones.

Otra manera de definir los estados coherentes es como estados desplazados del vacío,

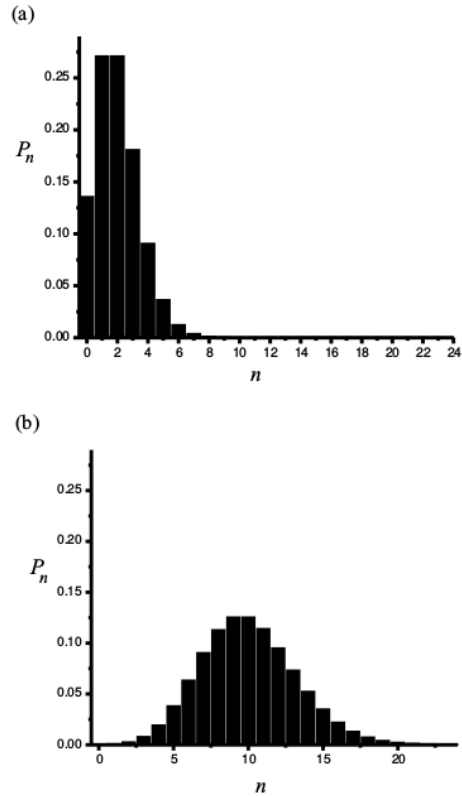


Figura 3.1: Distribución de probabilidad de número de fotones para estados coherentes con promedio de fotones (a) $\bar{n} = 2$ y (b) $\bar{n} = 10$.

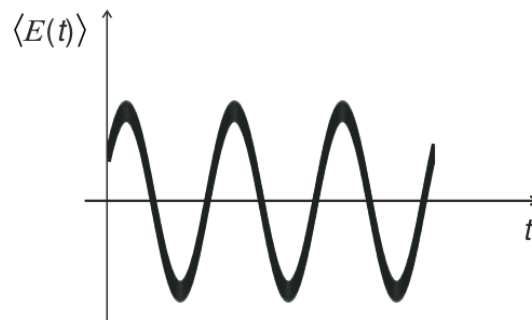


Figura 3.2: Gráfica del valor de expectación del campo eléctrico, junto con su fluctuación, como función del tiempo a posición fija. Las fluctuaciones del campo son las mismas en todo tiempo de manera que el campo es tan parecido a un campo clásico como es posible para cualquier estado cuántico coherente.

que a su vez involucra un mecanismo para generar estados coherentes. El operador de desplazamiento se define como

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}), \quad (3.19)$$

y los estados coherentes son dados por

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (3.20)$$

El operador de desplazamiento tiene las siguientes propiedades.

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha), \quad (3.21)$$

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = 1, \quad (3.22)$$

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\beta) = \exp[i\text{Im}(\alpha\beta^*)]\hat{D}(\alpha + \beta). \quad (3.23)$$

La propiedad (3.22) satisface el requerimiento de unitariedad, conservación de la norma del vector desplazado del vacío. El factor $\exp[i\text{Im}(\alpha\beta^*)]$, en (3.23), es un factor de fase global y de esta manera es físicamente irrelevante.

Los estados coherentes surgen de considerar estados cuánticos más generales en los cuales el campo exhiba propiedades clásicas, estos estados se conocen como los estados cuánticos más clásicos posibles para el campo. Los estados coherentes le deben sus propiedades clásicas al estado de vacío, el estado $|0\rangle$, ya que cualquier estado coherente $|\alpha\rangle$ lo podemos encontrar a partir del estado $|0\rangle$ aplicándole el operador de desplazamiento. De hecho los estados coherentes y el vacío tienen la misma fluctuación del campo.

Capítulo 4

Estados SPDC

Cuando un cristal con susceptibilidad no lineal χ es bombeado con un haz láser, sucede un proceso denominado SPDC, debido al término de segundo orden de la susceptibilidad, dos fotones correlacionados son emitidos, a dichos fotones se les llama señal (s) y testigo (i). El estado que describe el estado de estos dos fotones es llamado estado bifotónico SPDC.

En el presente trabajo, se bombeo un cristal β -BBO tipo I, que produce pares de fotones correlacionados espacial y temporalmente.

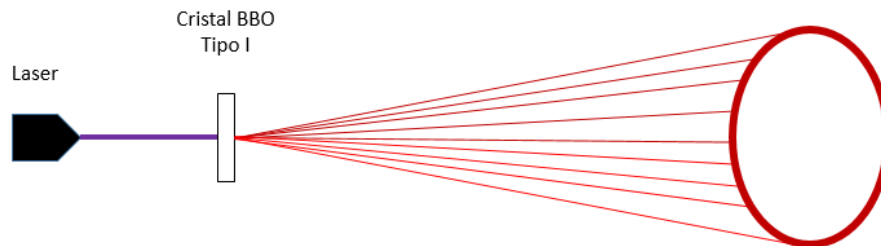


Figura 4.1: Diagrama esquemático de la producción de pares de fotones por el cristal no lineal BBO.

Conversión espontánea paramétrica descendente

La conversión paramétrica resulta de la interacción no lineal de un estímulo electromagnético donde la polarización es afectada tan fuertemente por la radiación que deforma mas allá de la respuesta lineal que genera la dispersión y absorción usual. Para nuestro propósito podemos expandir la polarización no lineal en una serie de potencias en el campo de radiación aplicado. Los cristales que se usan comúnmente en óptica no lineal son

altamente anisotrópicos y su respuesta se describe en forma tensorial de acuerdo a

$$\hat{P}_i = \chi_{i,j}^{(1)} \hat{E}_j + \chi_{i,j,k}^{(2)} \hat{E}_j \hat{E}_k + \chi_{i,j,k,l}^{(3)} \hat{E}_j \hat{E}_k \hat{E}_l + \dots \quad (4.1)$$

donde $\chi^{(m)}$ es la susceptibilidad tensorial eléctrica de m-ésimo orden, los índices repetidos indican suma. La densidad de energía eléctrica es entonces $\varepsilon_0 E_i P_i$ y así la contribución a segundo orden del hamiltoniano, la interacción hamiltoniana, es

$$\hat{H}^{(2)} = \varepsilon_0 \int_V d\mathbf{r} \chi_{i,j,k}^{(2)} \hat{E}_i \hat{E}_j \hat{E}_k \quad (4.2)$$

donde la integral es sobre el volumen de interacción. Ahora representamos las componentes del campo como integrales de Fourier de la forma

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{E}^{(-)}(\mathbf{k}) e^{-i[\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]} + \hat{E}^{(+)}(\mathbf{k}) e^{i[\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]} \right] \quad (4.3)$$

donde

$$\hat{E}^{(-)} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega(\mathbf{k})}{V}} \hat{a}(\mathbf{k}), \text{ y } \hat{E}^{(+)} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega(\mathbf{k})}{V}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \quad (4.4)$$

Los operador $\hat{a}(\mathbf{k})$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ son los operadores de aniquilación y creación respectivamente de fotones con momento $\hbar\mathbf{k}$. Si sustituimos las expresiones del campo de arriba en la ecuación (4.2) y retenemos los términos importantes para el caso cuando los modos señal y testigo están inicialmente en los estados de vacío, obtenemos la interacción hamiltoniana siguiente

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) = & \varepsilon_0 \int_V d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{k}_s d^3\mathbf{k}_i \chi_{lmn}^{(2)} \\ & \times \hat{E}_{pl}^{(+)} e^{i[\omega_p(\mathbf{k}_p)t - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}]} \hat{E}_{sm}^{(-)} e^{-i[\omega_s(\mathbf{k}_s)t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}]} \hat{E}_{in}^{(-)} e^{-i[\omega_i(\mathbf{k}_i)t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}]} + H.C. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La tasa de conversión para el proceso depende término de segundo orden de la susceptibilidad eléctrica $\chi^{(2)}$ pero típicamente tiene eficiencia en el rango de 10^{-7} a 10^{-11} , tasa extremadamente baja. Por esta razón, con el fin de obtener una tasa significativa en los haces señal y testigo, es necesario bombear el medio con un campo coherente muy fuerte el cual podemos modelar como un campo clásico que se obtiene a partir de un láser mientras nos interesamos en interacciones de tiempo suficientemente corto tales que el agotamiento del bombeo de fotones se puede ignorar. El láser de bombeo está usualmente en el ultravioleta mientras que los fotones que surgen de la conversión descendente están en el rango espectral visible.

A partir de la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo asumiendo que el estado

inicial del modo señal y testigo están en el estado del vacío, los cuales denotamos por el momento como, obtenemos a primer orden, $|\Psi\rangle \approx |\Psi_0\rangle + |\Psi_1\rangle$, donde

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{H}(t) |\Psi_0\rangle \\
&= \mathcal{N} \int d^3\mathbf{k}_s d^3\mathbf{k}_i \delta(\omega_p - \omega_s(\mathbf{k}_s) - \omega_i(\mathbf{k}_i)) \\
&\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_i) |\Psi_0\rangle
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde \mathcal{N} es un factor de normalización en el cual todas las constantes se han absorbido. Uno observa que la función delta contiene las condiciones de phase matching.

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \tag{4.7}$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \tag{4.8}$$

Las condiciones anteriores, condiciones de phase matching, corresponden a dos principios fundamentales de la física, la ecuación (4.7) corresponde a la conservación de energía, y (4.8) corresponde a conservación de momento. Esto permite obtener luz altamente correlacionada espacial y temporalmente. La manera de estudiar la correlación entre campos es a través de la función de correlación de orden n . Para el caso del presente trabajo utilizaremos la función de correlación de segundo orden, $g^{(2)}$ para dos y tres detectores.

Capítulo 5

Función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(0)$

El grado de coherencia de segundo orden $g^{(2)}(\tau)$ tiene una gran importancia en la historia de la óptica cuántica. De hecho, se puede argumentar que las mediciones realizadas por Hanbury Brown y Twiss acerca de las cantidades relacionadas al grado de coherencia de segundo orden son las que estimulan la creación de campos ópticos modernos. Uno de los primeros experimentos para observar un efecto puramente cuántico en un campo óptico fue la observación de amontonamiento de fotones en el cual la cantidad de interés es $g^{(2)}(\tau)$. Desde entonces las mediciones de $g^{(2)}(\tau)$ han jugado un papel importante en la óptica cuántica.

Presentamos la expresión de $g^{(2)}(\tau)$ en términos de cantidades experimentales medibles. El caso especial de $\tau = 0$ es importante, porque $g^{(2)}(0)$ se puede usar para distinguir entre un campo clásico y cuántico. La teoría de función de onda clásica predice que $g^{(2)}(0) \geq 1$, mientras que la mecánica cuántica permite $g^{(2)}(0) < 1$.

Hacemos una distinción entre dos y tres detectores en las mediciones de $g^{(2)}(0)$. Para aclarar, nos referimos a estas como $g_{2D}^{(2)}(0)$ y $g_{3D}^{(2)}(0)$ respectivamente.

Cuando consideramos un divisor de haz por donde el campo incide, como resultado se obtienen dos salidas las cuales se monitorean por dos fotodetectores respectivamente. Las mediciones para tres detectores las llamamos condicionales, porque los dos detectores que monitorean las salidas del divisor de haz se toman como una detección cuando existe otra en el tercer detector. Este tercer detector monitorea un segundo campo. De modo que $g_{3D}^{(2)}(0)$ depende no solo de las propiedades del campo incidente sobre el divisor de haz sino también de las correlaciones entre este campo y el campo incidente sobre el tercer detector.

La medición de $g^{(2)}(0)$ de un haz de luz que se dirige a un divisor de haz se realiza calculando la correlación entre los haces de salida, reflejado y transmitido, a través de sus

intensidades I_R y I_T respectivamente. Clásicamente $g^{(2)}(\tau)$ de un haz incidente es dada por las correlaciones normalizadas de los haces de salida:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_T(t + \tau)I_R(t) \rangle}{\langle I_T(t + \tau) \rangle \langle I_R(t) \rangle} \quad (5.1)$$

donde los brackets indican un promedio temporal, el cual se puede remplazar por un promedio de ensamble para un campo estacionario. Para una función de onda clásica, las intensidades de los haces transmitidos y reflejados se relacionan con la intensidad de entrada a través de $I_T(t) = TI_I(t)$ y $I_R(\tau) = RI_I(t)$, donde T y R son los coeficientes de transmisión y reflexión del divisor de haz $T + R = 1$. Debido a este hecho, $g^{(2)}(\tau)$ se puede escribir en términos de la intensidad incidente de la siguiente manera,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_I(t + \tau)I_I(t) \rangle}{\langle I_I(t + \tau) \rangle \langle I_I(t) \rangle} \quad (5.2)$$

vea que esta expresión ya no tiene dependencia de las propiedades T y S del divisor de haz. En la práctica no podemos tener un haz perfectamente dividido ya que existen pérdidas por detalles microscópicos del divisor.

Para $\tau = 0$, la función de correlación es

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I_I^2(t) \rangle}{\langle I_I(t) \rangle^2} \quad (5.3)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada a esta expresión conlleva a $g^{(2)}(0) \geq 1$ para funciones de onda clásica. La ecuación

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_I(t + \tau)I_I(t) \rangle}{\langle I_I(t + \tau) \rangle \langle I_I(t) \rangle}$$

es una expresión clásica; en la expresión cuántica, las intensidades se remplazan por sus correspondientes operadores

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : \hat{I}_I(t + \tau) \hat{I}_I(t) : \rangle}{\langle \hat{I}_I(t + \tau) \rangle \langle \hat{I}_I(t) \rangle} \quad (5.4)$$

donde los dos puntos indica que los operadores involucrados tienen que tener un ordenamiento normal. Si la luz está en un estado de Fock de n fotones y se hace incidir en un divisor de haz, inmediatamente

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{\langle \Delta n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} \quad (5.5)$$

dado que para cualquier estado de Fock $|n\rangle$, $\Delta n^2 = 0$ y ecuación anterior queda como:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} = \frac{n-1}{n} \quad (5.6)$$

Para un estado de Fock es siempre verdad que $g^{(2)}(0) < 1$, lo cual claramente viola la desigualdad clásica. El máximo de violación de esta desigualdad ocurre para un estado de Fock de un solo fotón, para el cual $g^{(2)}(0) = 0$.

En los experimentos no se miden directamente las intensidades, de modo que es necesario relacionar las expresiones para $g^{(2)}(0)$, dadas anteriormente, con cantidades experimentales o medibles. Se puede mostrar que cuando $g^{(2)}(0)$ se mide usando fotodetectores, esta queda en términos de probabilidades de fotodetecciones individuales como

$$g_{2D}^{(2)}(0) = \frac{P_{TR}}{P_T P_R} \quad (5.7)$$

donde P_T (P_R) es la probabilidad de detección en el detector T (R) en un intervalo de tiempo Δt , y P_{TR} es la probabilidad de hacer detecciones en ambos detectores T y R en el mismo intervalo de tiempo. El subíndice $2D$ enfatiza que la ecuación de arriba es válida para mediciones realizadas con dos detectores.

La ecuación de arriba se obtiene usando tanto teoría semiclásica o cuántica de la fotodetección. La diferencia entre las dos es de como se calculan las probabilidades. Permanece el caso en que para la luz clásica $g_{2D}^{(2)}(0) \geq 1$, mientras que para la luz no clásica $g_{2D}^{(2)}(0) < 1$.

Experimentalmente, ¿cómo se mide $g_{2D}^{(2)}(0)$? Para contestar tenemos que explicar como se determinan las probabilidades de la ecuación de arriba. Por ejemplo, la probabilidad de detección en el detector T en un intervalo de tiempo Δt , es dada simplemente por el ancho promedio de detecciones en T , R_T , multiplicado por Δt . El ancho promedio es simplemente el número total de detecciones N_T dividido por el tiempo total de conteos ΔT . Las probabilidades para las detecciones en R y coincidencias en TR son dadas similarmente:

$$\begin{aligned} P_T = R_T \Delta t &= \left(\frac{N_T}{\Delta T} \right) \Delta t \\ P_R = R_R \Delta t &= \left(\frac{N_R}{\Delta T} \right) \Delta t \\ P_{TR} = R_{TR} \Delta t &= \left(\frac{N_{TR}}{\Delta T} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (5.8)$$

Estas ecuaciones son válidas siempre que las probabilidades de detección son mucho me-

nores que uno. Sustituyendo estas probabilidades en la ecuación (5.7) resulta

$$g_{2D}^{(2)}(0) = \frac{N_{TR}}{N_T N_R} \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (5.9)$$

Esta misma ecuación se puede derivar más rigurosamente usando los resultados de referencia [5].

Como hemos descrito antes, $g_{2D}^{(2)}(0)$ se mide para un solo haz que incide sobre un divisor de haz de donde emergen dos haces, uno transmitido y otro reflejado, que se dirigen a dos detectores etiquetados por T y R respectivamente. Sin embargo, existen experimentos que se realizan frecuentemente donde se utiliza un segundo haz fuente que incide sobre un tercer detector que se usa como un testigo, ver Figura 6.1. Como se puede observar, un haz se detecta en el detector que está interpuesto en el camino del haz testigo, mientras que el haz restante va al divisor de haz de donde emergen dos haces, uno transmitido y otro reflejado para los cuales les esperan los detectores T y R respectivamente. Es razonable pensar que las probabilidades de la ecuación cinco sean aún más condicionadas, por esta razón la expresión para tres detectores es

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{P_{GRT}}{P_{GT}P_{GR}} \quad (5.10)$$

donde P_{GRT} es la probabilidad de obtener una triple coincidencia entre los detectores T , R y G en el intervalo de tiempo Δt . El subíndice $3D$ es para enfatizar que esta expresión es válida para mediciones de tres detectores de $g^{(2)}(0)$. Decimos que esta medición es condicional porque la condición la impone el tercer detector.

Debido a las mediciones del tercer detector, las detecciones testigo se pueden usar como el número de ensayos, es posible normalizar las probabilidades de la ecuación (5.10) de forma diferente de la ecuación (5.7). Las probabilidades son dadas por el número de coincidencias dividida por el número de ensayos lo cual es igual al número de detecciones testigo:

$$\begin{aligned} P_{iRT} &= \frac{N_{iRT}}{N_i} \\ P_{iR} &= \frac{N_{iT}}{N_i} \\ P_{iR} &= \frac{N_{iR}}{N_i} \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde, dado una ventana de tiempo, N_{GT} (N_{GR}) es el número de fotoconteos simultáneos en el detector T (R) y el detector G , N_{GTR} es el número de triples coincidencias, N_G es el número de conteos en el detector G . Note que en estas expresiones no hacemos explícita la ventana de coincidencias o el tiempo total. Usando la ecuación (5.11), la determinación

experimental de $g_{3D}^{(2)}(0)$ se puede reescribir como

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{N_{iTR}N_i}{N_{iT}N_{iR}} \quad (5.12)$$

Nuevamente, esta cantidad es independiente de la eficiencias de los detectores, porque cuando relacionamos el número de fotodetecciones con las intensidades ambos, el numerador y el denominador dependen linealmente de las eficiencias en T y R y cuadráticamente en la eficiencia de G.

Con el fin de evitar confusión, comentaremos las diferencias entre las mediciones para dos y tres detectores. Las mediciones de dos detectores para $g_{2D}^{(2)}(0)$ es lo más cercano a la verdadera definición de $g^{(2)}(0)$ para un haz de luz. Las mediciones de tres detectores de $g_{3D}^{(2)}(0)$ representa una condicional de $g^{(2)}(0)$, donde la condición es hecha al usar mediciones sobre un segundo haz, en algún sentido uno podría pensar que (5.10)-(5.12) es lo que define una medición condicional. Una condición se usa en casos donde se tienen dos haces que se correlacionan en intensidad y uno desea medir $g^{(2)}(0)$ de un haz condicionado por la presencia de un fotón que se encuentra en el segundo haz.

El método descrito anteriormente es con el propósito de obtener una función de correlación de segundo orden lo más cercana a cero, es decir, obtener una anticorrelación que está asociada a un estado de número $|1\rangle$ (este método es utilizado por Aspect et al., para medir la existencia del fotón [6]), la importancia de medir este estado juega un papel relevante en la visualización experimental del carácter de onda ó partícula que exhibe la luz, por lo que la función de correlación de segundo orden funge como un parámetro que dice si lo que estamos midiendo es un cuanto de luz ó es una onda.

Capítulo 6

Experimento

6.1. Montaje experimental

El experimento consiste básicamente en una variante del experimento de la prueba de la existencia del fotón basado en el artículo de Mark Beck [4], La variante utilizada se muestra esquemáticamente en la Figura 6.1. El experimento consiste en medir la función de correlación asociada a la fuente de pares de fotones para 2 y 3 detectores, comprobando así los dos valores típicos de la función de correlación de segundo orden para una fuente cuántica $g_{3D}^{(2)} = 0.029 \pm 0.03 \sim 0$ y para una fuente coherente (clásica) $g_{2D}^{(2)} = 0.79 \pm 0.05 \sim 1$.

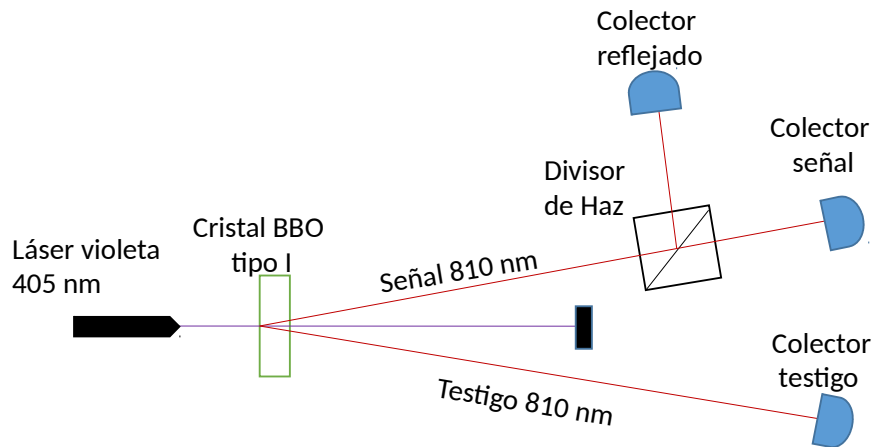


Figura 6.1: Diagrama experimental del experimento de la prueba de la existencia del fotón.

Una vez montado el experimento y verificado los valores correspondientes de $g^{(2)}$, se procedió a montar un láser rojo 635 nm. con el cual se plantea ver la pérdida de correlación entre los fotones señal s y testigo i . El láser rojo se coloca de tal forma que llegue al colector señal de manera que pase por el divisor de Haz y se divida en una parte transmitida y

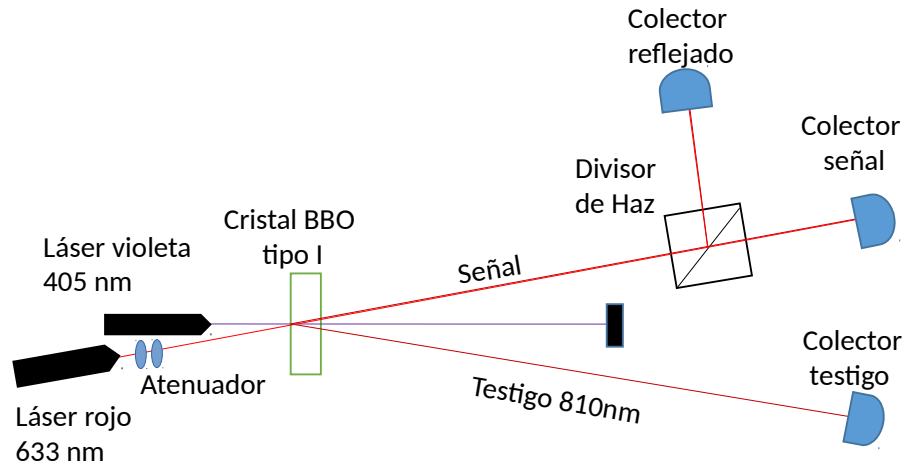


Figura 6.2: Esquema que muestra el arreglo experimental para el estudio de la mezcla estadística.

una reflejada. Cabe mencionar que el camino que sigue el fotón testigo queda como en un principio, es decir por ese camino no pasa el láser rojo. El diagrama experimental de éste montaje se puede observar en la Figura 6.2. Es importante mencionar que, como los detectores son muy sensibles se debe tener cuidado con la cantidad de fotones provenientes del láser rojo, ya que estos no deben pasar los 8 millones, de lo contrario los detectores (APD) se quemarían. Es por eso que se atenuó el láser rojo con dos polarizadores, que también nos sirven para ir aumentando la cantidad de fotones que utilizaremos en la mezcla.

Experimento

Se prende la computadora, tarjeta, los tres APD, y el láser violeta. El láser violeta debe estar a 100 mW. Se captura la intensidad que llega a cada uno de los colectores y la ayuda del programa Labview se calcula la función de correlación correspondiente para tres detectores $g_{3D}^{(2)}$. En sección de resultados se muestra la tabla de los datos adquiridos por el programa. Se verifica que la función de correlación $g_{3D}^{(2)}$ sea cercana a cero. El valor que se obtiene es de $g_{3D}^{(2)} = 0.0285 \pm 0.0275$. Cabe señalar que si se calcula la función de correlación para dos detectores, $g_{2D}^{(2)}$, el valor que se obtiene para este arreglo $g_{2D}^{(2)} = 1.0394 \pm 0.126$. Prendemos el láser Helio-Neón, y moviendo uno de los polarizadores cambiamos la intensidad del láser Helio-Neón implicando un incremento en el número de fotones en el haz reflejado y señal. La intensidad, en número de fotones, a capturar es la suma de las intensidades del haz reflejado y señal menos la intensidad que se obtiene del camino testigo.

Problemas técnicos

Cuando el haz rojo que pasa entre los polarizadores, en el primer polarizador se nota una luz blanca tenue que logra pasar a través del otro polarizador implicando un conteo no deseado de fotones. Para quitarla ponemos un pinhole, a la altura del haz rojo, entre los polarizadores y el láser Helio-Neón.

6.2. Resultados

Los datos capturados del experimento son: número de fotones cuánticos, número de fotones clásicos, porcentaje de fotones clásicos en la mezcla, función de correlación para tres detectores y su incertidumbre,

Número de fotones cuánticos	Número de fotones clásicos	Fracción de fotones clásicos	$g_{3D}^{(2)}$
168872	7965948	0.9792	0.7876 ± 0.0474
166307	7554886	0.9785	0.7844 ± 0.0615
162812	7109101	0.9776	0.7673 ± 0.0660
159023	6560379	0.9763	0.7676 ± 0.0550
154589	5904059	0.9745	0.7234 ± 0.0613
150615	5305148	0.9724	0.7213 ± 0.0670
145991	4605956	0.9693	0.6796 ± 0.0652
141524	3830559	0.9644	0.6132 ± 0.0799
137066	3059710	0.9571	0.5715 ± 0.0673
133339	2428047	0.9479	0.5055 ± 0.0798
129449	1789117	0.9325	0.4216 ± 0.0701
126455	1166279	0.9022	0.2986 ± 0.0753
123847	645449	0.8390	0.1984 ± 0.0582
122042	326571	0.7280	0.1247 ± 0.0482
121197	134054	0.5252	0.0691 ± 0.0371
120692	59267	0.3293	0.0431 ± 0.0302
120326	0	0.0000	0.0285 ± 0.0275

A manera de ejemplo, la primera fila de la tabla de arriba proviene de procesar cincuenta mediciones como la siguiente

A	B	B'	AB	AB'	ABB	g2
169080.0	4308494.0	3823605.0	6828.0	6491.0	202.0	0.771
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50 filas en total						
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

donde

- A Número de fotones en el camino testigo que se detectan en un segundo.
- B Número de fotones en el camino señal que se detectan en un segundo.
- B' Número de fotones en el camino reflejado que se detectan en un segundo.
- AB Coincidencias que se detectan entre el camino testigo y señal con una ventana temporal de 7.39 ns en un intervalo de tiempo de un segundo.
- AB' Coincidencias que se detectan entre el camino testigo y reflejado con una ventana temporal de 7.39 ns en un intervalo de tiempo de un segundo.
- ABB Coincidencias que se detectan entre el camino testigo, señal y reflejado con una ventana temporal de 7.39 ns en un intervalo de tiempo de un segundo.
- g2 Valor de la función de correlación $g_{3D}^{(2)}$ para tres detectores que se registran en la computadora durante un intervalo de tiempo de un segundo en una ventana temporal de 7.39 ns.

Para el cálculo de la función de correlación que está, por ejemplo, en la primer fila y columna cuatro de la primera tabla, se usa la fórmula

$$g_{3D}^{(2)} = \frac{\bar{N}_{ABB'}}{\bar{N}_{AB'}\bar{N}_{AB}} N_A \quad (6.1)$$

donde

- $\bar{N}_{ABB'}$ Promedio de las 50 filas de la columna 6 de la segunda tabla.
- $\bar{N}_{AB'}$ Promedio de las 50 filas de la columna 5 de la segunda tabla.
- \bar{N}_{AB} Promedio de las 50 filas de la columna 4 de la segunda tabla.
- \bar{N}_A Promedio de las 50 filas de la columna 1 de la segunda tabla.

La Figura 6.3 muestra el comportamiento de la función de correlación en función del número de fotones clásicos involucrados en la mezcla estadística. Si nos fijamos en la antepenúltima fila de la primer tabla, el porcentaje de fotones clásicos en la mezcla es casi el mismo que el de los fotones cuánticos, y aún así la función de correlación $g_{3D}^{(2)}(0)$ es aproximadamente cero. En la gráfica podemos observar cómo el sistema mezcla transita desde un comportamiento cuántico, donde la función de correlación $g_{3D}^{(2)} \approx 0$, hasta un comportamiento clásico, donde la función de correlación $g_{3D}^{(2)} \approx 1$. También podemos ob-

servar cómo el comportamiento cuántico es mayormente influyente en la mezcla, es decir, cuando tenemos 54 % de fotones clásicos en la mezcla, el valor de la función de correlación sigue siendo cercano a cero, $g_{3D}^{(2)} = 0.07 \pm 0.04$, diciéndonos que es un comportamiento cuántico aún.

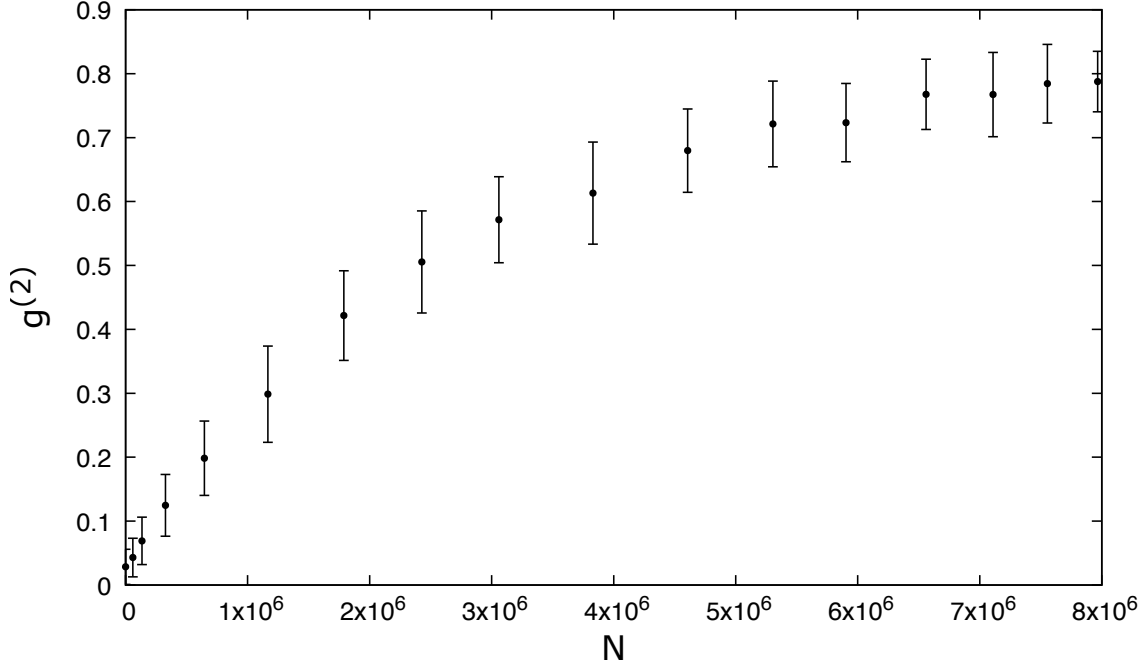


Figura 6.3: Gráfica que muestra la función de correlación $g^{(2)}$ para tres detectores vs el número de fotones de la fuente clásica.

6.2.1. Ajuste Teórico

El ajuste teórico se hizo partiendo de las ecuaciones (5.9) y (5.12), incorporando las nuevas condiciones del experimento. Dado que en diferencia del experimento clásico de anti correlación tenemos un haz coherente incidiendo sobre el divisor de haz y por consiguiente llega a los colectores transmitido y reflejado, es por ello que proponemos agregar términos de coincidencias fortuitas N^α debidas a los fotones del estado coherente en los detectores antes mencionados, de tal forma que tenemos la siguiente ecuación:

$$g_{2D}^{(2)}(0) = \frac{N_{TR}^\alpha}{(N_T^\alpha)(N_R^\alpha)} \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right) = 1. \quad (6.2)$$

Por otro lado, considerando las coincidencias fortuitas debidas al haz coherente la función de correlación de segundo orden para tres detectores queda de la siguiente forma:

$$g_{3D}^{(2)} = \frac{(N_{iTR}^\alpha) N_i}{(N_{iT}^\alpha) (N_{iR}^\alpha)} = 1 \quad (6.3)$$

de la ecuación (6.2) tenemos una expresión para N_{TR}^α :

$$N_{TR}^\alpha = \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} \right) (N_T^\alpha) (N_R^\alpha). \quad (6.4)$$

Por otro lado de la ecuación (6.3), obtenemos la siguiente expresión para N_{iTR}^α :

$$N_{iTR}^\alpha = \frac{N_{iT}^\alpha N_{iR}^\alpha}{N_i}. \quad (6.5)$$

de forma similar N_{iT}^α :

$$N_{iT}^\alpha = \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} \right) N_i N_T^\alpha. \quad (6.6)$$

y para N_{iR}^α :

$$N_{iR}^\alpha = \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} \right) N_i N_R^\alpha. \quad (6.7)$$

Además, sabemos que:

$$N_{iTR}^\alpha = N_i^\alpha N_{TR}^\alpha = N_i N_{TR}^\alpha \quad (6.8)$$

donde $N_i^\alpha = N_i$, debido a que en el camino del fotón testigo i , no hay fotones provenientes del haz coherente.

Ahora agregando los términos de coincidencias fortuitas en la ecuación (5.12), obtenemos la siguiente expresión para la función de correlación de segundo orden de tres detectores:

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{(N_{iTR} + N_{iTR}^\alpha) N_i}{(N_{iT} + N_{iT}^\alpha) (N_{iR} + N_{iR}^\alpha)}. \quad (6.9)$$

Ahora, sustituyendo (6.5) en (6.9) obtenemos:

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{\left(N_{iTR} + \frac{N_{iT}^\alpha N_{iR}^\alpha}{N_i}\right) N_i}{(N_{iT} + N_{iT}^\alpha)(N_{iR} + N_{iR}^\alpha)}. \quad (6.10)$$

Desarrollando

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{N_{iTR}N_i + N_{iT}^\alpha N_{iR}^\alpha}{(N_{iT} + N_{iT}^\alpha)(N_{iR} + N_{iR}^\alpha)}. \quad (6.11)$$

Recordando las ecuaciones (6.4), (6.6), (6.7) y (6.8), se puede reescribir (6.11) como:

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{N_{iTR}N_i + \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N_T^\alpha\right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N_R^\alpha\right)}{\left(N_{iT} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N_T^\alpha\right)\right) \left(N_{iR} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N_R^\alpha\right)\right)}. \quad (6.12)$$

Además, sabemos que $N_T^\alpha = N_R^\alpha = N^\alpha$, por lo que (6.12) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} g_{3D}^{(2)}(0) &= \frac{N_{iTR}N_i + \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N^\alpha\right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N^\alpha\right)}{\left(N_{iT} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N^\alpha\right)\right) \left(N_{iR} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N^\alpha\right)\right)} \\ &= \frac{N_{iTR}N_i + \left(\frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N^\alpha\right)^2}{\left(N_{iT} + \frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N^\alpha\right) \left(N_{iR} + \frac{\Delta t}{\Delta T} N_i N^\alpha\right)} \end{aligned} \quad (6.13)$$

y como $\Delta T = 1s$, entonces

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{N_{iTR}N_i + (\Delta t N_i N^\alpha)^2}{(N_{iT} + \Delta t N_i N^\alpha)(N_{iR} + \Delta t N_i N^\alpha)} \quad (6.14)$$

Utilizando la ecuación (6.14), la Figura (6.4) muestra los resultados experimentales y la curva teórica, donde $r = 2.8$ es un parámetro de ajuste:

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{N_{iTR}N_i + (r\Delta t N_i N^\alpha)^2}{(N_{iT} + r\Delta t N_i N^\alpha)(N_{iR} + r\Delta t N_i N^\alpha)} \quad (6.15)$$

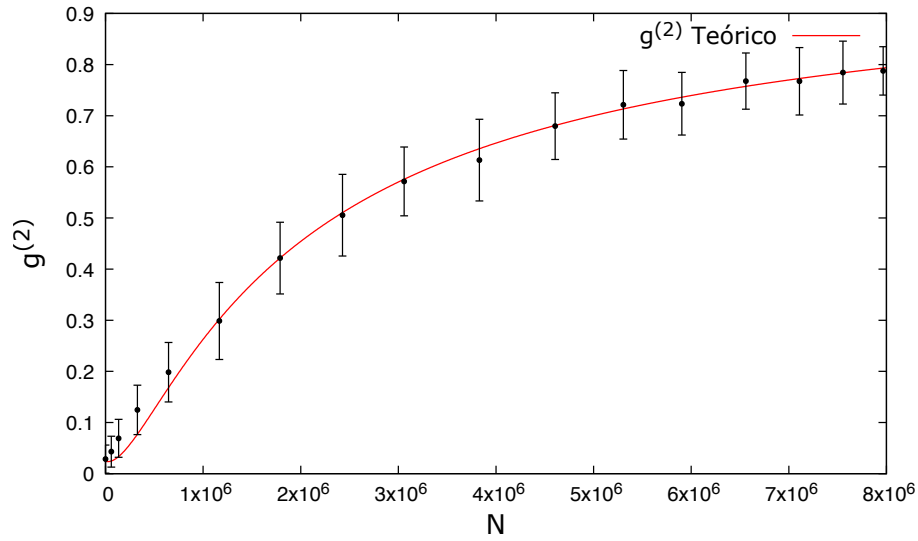


Figura 6.4: Gráfica que muestra la función de correlación $g^{(2)}$ para tres detectores vs el número de fotones de la fuente clásica.

Por otra parte, utilizando la ecuación (6.15) con $N \in [0, 10^8]$ fotones se obtiene la Figura 6.5 donde se puede apreciar que la función de correlación de segundo orden no alcanza el valor de 1.04 ± 0.13 , debido a que existe una fuerte correlación entre el fotón testigo y el fotón señal, por lo que, la parte cuántica sigue teniendo impacto en el valor final de la función de correlación.

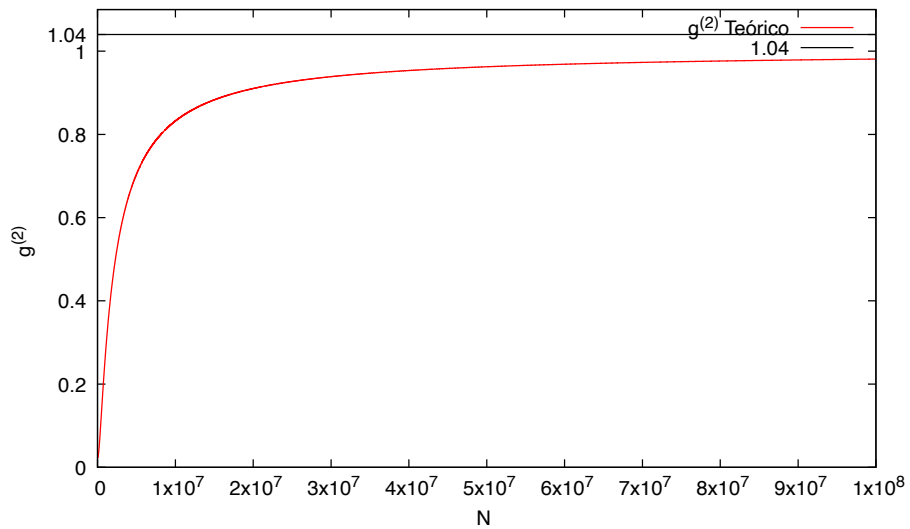


Figura 6.5: Gráfica que muestra la función de correlación $g^{(2)}$ para tres detectores vs el número de fotones de la fuente clásica hasta 10^8 .

Capítulo 7

Conclusiones

Se obtuvo una transición experimental entre un estado bifotónico (SPDC) y un estado coherente, utilizando la función de correlación de segundo orden, dicha transición parte del valor típico correspondiente a la función de correlación asociada a una fuente cuántica $g^{(2)} = 0.029 \pm 0.03 \sim 0$ transitando hacia el valor típico para un estado coherente $g^{(2)} = 0.79 \pm 0.05 \sim 1$.

Las mediciones experimentales de $g^{(2)}$ se aproximan a cero aún cuando la fuente clásica tiene un orden de magnitud más por arriba de la fuente cuántica. Lo cual nos dice que el comportamiento cuántico del sistema predomina sobre el clásico. Dado que este trabajo en su mayoría se realizó de forma experimental, la alineación para el montaje y desarrollo del mismo es muy importante, por lo que se trató de trabajar con el ambiente lo mayor controlado posible y evitar la contaminación de los estados mixtos generados en el experimento.

Podemos concluir que la influencia de la fuente cuántica es mayor que la de la fuente clásica en el comportamiento de la $g_{3D}^{(2)}(0)$, esto es debido a que el fotón testigo está fuertemente correlacionado con el campo cuántico (estados de Fock), haciendo que la fuente clásica (estado coherente), deba tener más fotones para poder obtener triples coincidencias y entonces aumentar el valor de la función de correlación, es decir, aumenta la probabilidad de que un fotón del estado coherente se correlacione con un fotón testigo de la fuente cuántica. Además, haciendo una extrapolación a 10^8 fotones con el ajuste teórico, se puede notar que el comportamiento de la función de correlación sigue una asíntota en $g^{(2)} = 1.04 \pm 0.13$ como se esperaba de acuerdo con la teoría. Cabe mencionar que de forma experimental estamos limitados en el rango de fotones que podemos tener en los detectores, por lo que no es posible tener una cantidad de 10^8 fotones debido a que los detectores no soportan dicha cantidad y se deteriorarían. Aunado a eso, la cantidad de fotones cuánticos también está limitada por el tipo de cristal que tenemos en este caso un cristal no lineal BBO tipo I y la fuente de bombeo, por lo que, en este caso no podemos generar mas

de 120 mil pares de fotones. El ajuste teórico describe de manera óptima lo obtenido experimentalmente como se muestra en los resultados. Como trabajo a futuro se puede hacer un tratamiento con el formalismo de la matriz de densidad.

Apéndice A

Operador de densidad

En mecánica cuántica el vector de estado $|\psi\rangle$ expresa la máxima cantidad de información de un sistema admisible por las leyes de la mecánica cuántica. Típicamente, la información consiste de números cuánticos asociados a un conjunto completo de observables que conmutan. Ahora, si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son dos estados cuánticos posibles, su superposición coherente es

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \quad (\text{A.1})$$

si los coeficientes c_1 y c_2 se conocen. Si los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son ortogonales ($\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$) entonces sucede que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Pero existe frecuentemente situaciones en las que el vector de estado no se conoce. Por ejemplo, hay casos donde el sistema de interés está interactuando con otro sistema, posiblemente un sistema enorme, por decir algo un reservorio, con el cual se encuentra enredado. Es posible escribir el vector de estado por un sistema de muchas componentes pero no el subsistema de interés. Por ejemplo, para sistemas de partículas de espín $\frac{1}{2}$, los estados de espín de la componente z los denotamos por: $|\uparrow\rangle$ para espín hacia arriba y $|\downarrow\rangle$ para espín hacia abajo, un estado posible del sistema combinado es

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2], \quad (\text{A.2})$$

a quien nombramos como un estado singlete (cuyo momento angular total es cero), también se conoce como un estado de Bell. Un estado enredado no se puede factorizar, en ninguna base, en un producto de estados de dos subsistemas, por ejemplo

$$|\psi\rangle \neq \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{spin } 1\rangle|\text{spin } 2\rangle. \quad (\text{A.3})$$

El entrelazamiento es, partiendo del principio de superposición en sí mismo, un misterio esencial de la mecánica cuántica, como fue expuesto por Schrödinger. Vea que el entrelazamiento se sigue del principio de superposición, no es algo que se impone en la teoría.

Los estados cuánticos descritos por un vector de estado los llamamos estados puros. Estados que no pueden describirse por vectores de estado los llamamos estados mezclados. Los estados mezclados los describimos por el operador de densidad

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i| \\ &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|,\end{aligned}\tag{A.4}$$

donde la suma es sobre todo el ensamble (en el sentido de la mecánica estadística) donde p_i es la probabilidad de que el sistema esté en el i -ésimo estado $|\psi_i\rangle$ del ensamble, cumpliéndose $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$. Las probabilidades p_i satisfacen la relación

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \sum_i p_i^2 \leq 1.\tag{A.5}$$

Para el caso especial donde todas las p_i desaparecen excepto la j -ésima, $p_i = \delta_{ij}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \\ &= \sum_i \delta_{ij} |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \\ &= |\psi_j\rangle \langle\psi_j|,\end{aligned}\tag{A.6}$$

este es el operador de densidad para un estado puro. Note que el operador de densidad para este caso es un operador de proyección al estado $|\psi_j\rangle$, y para el caso más general de la ecuación A.4, el operador de densidad es una suma de operadores de proyección sobre el ensamble, pesados con las probabilidades p_i correspondiente a cada miembro del ensamble.

Introduzcamos una base completa ortonormal $\{|\varphi_i\rangle\}$ ($\sum_i |\varphi_i\rangle \langle\varphi_i| = \hat{I}$), que son eigenestados de algún observable. Entonces, el i -ésimo miembro del ensamble se puede escribir

$$\begin{aligned}|\psi_i\rangle &= \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|\psi_i\rangle \\ &= \sum_n c_n^{(i)} |\varphi_n\rangle,\end{aligned}\tag{A.7}$$

donde $c_n^{(i)} = \langle \varphi_n | \psi_i \rangle$. El elemento matricial de $\hat{\rho}$ entre el estado n y n' es

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_{n'} \rangle &= \sum_i \langle \varphi_n | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | \varphi_{n'} \rangle \\ &= \sum_i p_i c_n^{(i)} c_{n'}^{(i)*}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

las cantidades $\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_{n'} \rangle$ forman los elementos de la matriz de densidad. Tomando la traza de esta matriz tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{\rho} &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i \langle \varphi_n | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i p_i \langle \psi_i | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i p_i = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

del hecho de que $\hat{\rho}$ es hermitiano, como es evidente en la ecuación A.4, los elementos de la diagonal $\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle$ deben ser reales, y juntamente con la ecuación A.9 se cumple que

$$0 \leq \langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle \leq 1. \quad (\text{A.10})$$

Ahora consideremos el cuadrado del operador de densidad, $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \cdot \hat{\rho}$. Para un estado puro donde $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ se sigue que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^2 &= |\psi\rangle\langle\psi| \psi\rangle\langle\psi| \\ &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \hat{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

y así,

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \text{Tr} \hat{\rho} = 1. \quad (\text{A.12})$$

Para un estado mezcla

$$\hat{\rho}^2 = \sum_i \sum_j p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \langle\psi_i|\psi_j\rangle \langle\psi_j| \quad (\text{A.13})$$

tomando la traza

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \hat{\rho}^2 &= \sum_n \langle \varphi_n | \rho^2 | \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n \sum_i \sum_j p_i p_j \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \varphi_n \rangle \\
&= \sum_i \sum_j p_i p_j \langle \psi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \\
&= \sum_i \sum_j p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \\
&\leq \left[\sum_i p_i \right]^2 = 1.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

La igualdad se da sólo si $|\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 = 1$ para cualquier par de $|\psi_i\rangle$ y $|\psi_j\rangle$. Esto es posible si todos los $|\psi_i\rangle$ son colineales en el espacio de Hilbert, equivalente a decir que sólo difieren por un factor de fase global. Entonces tenemos el siguiente criterio para estados puros y mezclados:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \hat{\rho}^2 &= 1, \text{ para un estado puro} \\
\text{Tr} \hat{\rho}^2 &\leq 1, \text{ para un estado mezcla}
\end{aligned}$$

Exponer un ejemplo justifica el punto anterior. Consideremos una superposición de estados conformada por el estado de vacío y el estado de un fotón,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle] \tag{A.15}$$

donde ϕ es cualquier fase, el operador de densidad asociado a este estado es

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_\psi &= |\psi\rangle\langle\psi| \\
&= \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 0| + e^{-i\phi}|0\rangle\langle 1|].
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Por otro lado, el operador de densidad para una mezcla igualmente poblada del vacío y el estado de un fotón es

$$\hat{\rho}_M = \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|]. \tag{A.17}$$

Los operadores A.16 y A.17 difieren por la presencia de elementos fuera de la diagonal, llamadas también coherencias. Vea que las coherencias no existen para el caso de una mezcla. La ausencia de términos de coherencia es lo que hace la distinción entre un estado que exhibe un comportamiento completamente cuántico y otro que no. Para A.17 es fácil ver que $\text{Tr} \hat{\rho}_M^2 = 1/2$.

Para alguno de los estados del ensamble $|\psi_i\rangle$, que en sí mismo es puro, el valor de expectación de algún operador \hat{O} está dado por

$$\langle \hat{O} \rangle_i = \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle, \quad (\text{A.18})$$

para una mezcla estadística,

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle, \quad (\text{A.19})$$

el cual es simplemente el promedio de los valores de expectación de la mecánica cuántica pesado con probabilidades p_i . Formalmente escribimos

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}) \quad (\text{A.20})$$

por el hecho de que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}) &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho} \hat{O} | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i p_i \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{O} | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Bibliografía

- [1] M Fox. Quantum Optics: An Introduction. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, (2006).
- [2] C Gerry and P Knight. Introductory Quantum Optics. Cambridge University Press, 2005.
- [3] R. J. Glauber, Phys. Rev. Letter **131**, 84 (1963)
- [4] Beck. M. Comparing measurements of $g(2)(0)$ performed with different coincidence detection techniques. J. Opt. Soc. Am., (2007).
- [5] L. Mandel and E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics (Cambridge U. Press, 1995)
- [6] A. Aspect P. Grangier, G. Roger. Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences. Europhysics Letter, 4:173–179, (1986)
- [7] Maximilian A. Schlosshauer. Decoherence and the quantum-to-classical transition. (2007).
- [8] M Beck. Quantum Mechanics: Theory and Experiment. Oxford University Press, 2012.
- [9] Shih Yanhua. An introduction to quantum optics. photon and biphoton physics, Series in Optics and Optoelectronics, CRC Press (2011).