UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

Centro de Investigaciones Interdiciplinarias en Ciencias y Humanidades,

Facultad de Ciencias y

Facultad de Filosofía y Letras

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA

Un acercamiento al *topos de Grothendieck*

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRA EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

Karina García Buendía

TUTORES: DRA. GISELA T. MATEOS GONZÁLEZ, CEIICH
Y DR. CRISTIAN A. GUTIÉRREZ RAMÍREZ, FFyL

CD. MX. ENERO de 2022

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezco el apoyo de CONACYT por la beca otorgada durante el periodo 2019 a 2021.

Un acercamiento al *topos de Grothendieck*

Con amor de hija, a Aurora Buendía Cocon.
Con admiración de alumna, a Gisela T. Mateos.
Con sororidad, al movimiento feminista 2020.
Por creer en mí, a Cristian A. Gutiérrez.
Por aguantar mi humor, a Camilo Hernández.
Por tantas discusiones juntos, a Luis J. Turcio.
¡Gracias!

Índice general

Introducción

Este trabajo es producto de un largo proceso de diálogo y reflexión en torno a los estudios de la ciencia. Surge gracias a la concurrencia de observaciones matemáticas, históricas y filosóficas, que orientaron el rumbo de la investigación. Comenzó con intuiciones poco claras, pero gracias al acompañamiento de mis tutores aprendí a afinar mis preguntas, a enfocar mis intereses y a organizar mis ideas. Muy al principio pensaba abordar la relación conceptual de *espacio* entre la física y las matemáticas. La motivación surge porque en las definiciones de espacio que yo conocía se da por hecho que esa noción se caracteriza por los elementos que la componen, y que dichos elementos solamente deben ser de un tipo. La importancia que se le da a los elementos en sí es necesaria para definir *espacio*. Así, por ejemplo, los puntos del plano que cumplen $x^2 + y^2 = 1$ forman parte de una circunferencia; mientras que, los elementos no orientables, como la banda de Möbius, o los objetos cuya posición y velocidad se pueden indicar, son ejemplos de lugares bien conocidos. Pero ¿qué pasa con los sitios cuyos elementos no podemos caracterizar de la misma manera? ¿Son *espacios*? Para comenzar, elaboré una lista de definiciones de *espacio* que me parecían importantes, y las relacioné con hitos históricos que era obligatorio revisar; con esto presenté mi primera propuesta de investigación.

Mis lectores no tardaron en advertirme que la relación entre el espacio físico y los modelos matemáticos que subyacen a este concepto tiene muchas vías de aproximación, y que un proyecto como el que yo proponía debía abarcar varias formas de estudiarlas. Me convencí entonces de que tenía que estudiar los modelos matemáticos de espacio, y esto me llevó a estudiar la teoría de *topos*. En esta búsqueda hallé el *topos de Grothendieck*, que resultó ser una generalización del concepto de *espacio* sumamente atractiva, pues parece recuperar las propiedades estructurales de los espacios que se trabajan en las diferentes disciplinas matemáticas. Además de haber introducido el *topos* que lleva su nombre, el matemático Alexander Grothendieck resultó ser un personaje interesante tanto por su postura política como por su compromiso con las nuevas matemáticas.

Mi objetivo principal es elucidar desde un punto de vista histórico y matemático el desarrollo del concepto de *topos de Grothendieck*. Para conseguirlo, tuve que profundizar en cómo se gestó esta propuesta, cuáles fueron las motivaciones, intenciones y contingencias que hicieron posible que Grothendieck formulara su teoría. El siguiente paso es anclar históricamente las discusiones de las cuales se derivó la construcción del concepto de *topos*. En la reconstrucción de su genealogía surgió como fundamental la escuela matemática francesa denominada Bourbaki, cuya característica más importante fue su compromiso con el estructuralismo que buscaba presentar de forma generalizada, sistematizada e interconectada al conocimiento matemático. Entre los miembros mejor conocidos de esta escuela destacan los matemáticos André Weil, Jean A. E. Dieudoneé y Henri Cartan. La reflexión sobre la hipótesis de Riemann llevó a Weil a escribir un conjunto de sentencias, que son las conjeturas que llevan su nombre y cuya solución fue ampliamente discutida por la escuela francesa. El trabajo de Weil sobre sus conjeturas tuvo gran influencia en el desarrollo de la teoría de Grothendieck.

A lo largo de la tesis intento responder la siguiente pregunta: ¿cómo se gestó y en qué consiste el *topos de Grothendieck*? Para ello, ubico los inicios de la investigación de Grothendieck dentro de la tradición del colectivo Bourbaki. Tiempo después, él se separó del grupo por diferencias políticas y filosóficas, y continuó trabajando con lo que consideraba una propuesta más ambiciosa y general que aquella que subyacía a la metodología y a las herramientas matemáticas que usaban los Bourbaki. El producto de su trabajo fue una teoría en donde convivían conceptos duales y que permitía que las conjeturas de Weil se pudieran resolver. Como bien lo dice el filósofo Fernando Zalamea en su libro *Grothendieck: Una guía a la obra matemática y filosófica*, éste emprende la tarea titánica de reconstruir la geometría algebraica desde una perspectiva categórica, es decir, definir la categoría de todos los objetos similares y explorar, de manera axiomática, la estructura externa de dicha categoría. Se busca entender a los objetos en su contexto y no de manera aislada, a través de lo que se conoce como el funtor representable asociado.[1] El resultado es una narrativa con perspectiva histórica, que destaca la posición política y filosófica de Grothendieck como elemento crucial en su investigación, y que evidencia la importancia del contexto para comprender una teoría matemática.

[1]En este trabajo el funtor representable se obtiene por medio del funtor de Yoneda.

La tesis consta de tres capítulos y una reflexión final. Los primeros dos capítulos abordan los orígenes y el proceso de construcción del *topos de Grothendieck*. En el último capítulo se construye el *topos* y se muestra la relevancia de la intuición de localización en dicha construcción. Darse cuenta de la importancia del contexto no le impidió a Grothendieck desarrollar una teoría general sobre el concepto de *espacio*, ya que capturó sus diferentes usos en la mayoría de las disciplinas matemáticas de ese momento. En el capítulo 1 hago una semblanza histórica de la escuela Bourbaki, a cuyos integrantes llamaré los Bourbaki. Con ellos Grothendieck aprendió el método axiomático y las discusiones matemáticas contemporáneas. En este mismo capítulo se reseña brevemente la historia del *Tôhoku*, considerado como el segundo artículo más importante para la teoría de categorías, y que originalmente fue una propuesta para el proyecto editorial de los *Elementos*.[2] Este documento fue expuesto, discutido y finalmente rechazado por los Bourbaki, en gran medida, por el uso que le daba Grothendieck al lenguaje categórico. Ante este hecho, Grothendieck decide adoptar la teoría de categorías como el marco fundamental para hacer matemáticas. Por ello, el *topos* se inserta como una herramienta indispensable para la construcción de las categorías abelianas.

En el capítulo 2 se busca verificar que las conjeturas de Weil sugieren el estudio de lo discreto y lo continuo, de número y forma. También se explica lo mínimo indispensable para plantear dichas conjeturas, de manera no exhaustiva pero sí formal. No es coincidencia que para estudiar de manera clásica dichas conjeturas, se requieren dos de las tres estructuras más importantes para los Bourbaki, por lo cual el capítulo 2 comienza con las estructuras de orden, continúa con las algebraicas y concluye con las topológicas. En este mismo capítulo fue imprescindible anotar las definiciones que utilizamos en la sección de estructuras algebraicas.

Bourbaki visualizó la estructura de orden como un conjunto de elementos con ciertos vínculos: reflexividad, transitividad y antisimetría; es decir, como un conjunto parcialmente ordenado. Las estructuras de orden están correlacionadas

[2] Los *Elementos* es el proyecto editorial de los Bourbaki para la enseñanza de las matemáticas. Dicho proyecto consistió en una serie de volúmenes de diferentes tópicos que ellos consideraban las principales ramas de la matemática, y que cuidaron que dichas ramas estuvieran interconectados de tal manera que presentaran una unidad. Entre los volúmenes están, por ejemplo, *Teoría de conjuntos*, *Álgebra* y *Topología*.

con la lógica y los conjuntos; sin embargo, estos matemáticos consideraban que la lógica se necesitaba únicamente para construir la teoría de conjuntos; aun así, se forzaron a trabajar con esta área para edificar su visión de la matemática. Debo aclarar que la estructura de orden no tiene conexión directa con este trabajo, pero se utilizó como preámbulo para introducir el concepto de forcing, que discutiremos en el capítulo 3. Este ejemplo es necesario porque crea puentes entre el *topos* y la lógica, cuya vinculación pasó inadvertida para la escuela francesa —pero no para la estadounidense—. A finales de los cincuenta, Grothendieck publica en el *Tôhoku* las primeras construcciones categóricas con propiedades apropiadas, mientras el matemático holandés Daniel Kan escribe sobre funtores adjuntos. Ya en la década de 1960, el matemático estadounidense Paul Joseph Cohen inventó la técnica de forcing, demostrando la independencia de la hipótesis del continuo respecto a los axiomas de ZFC.[3] En esta misma década, en el primer congreso internacional de categorías, Jean-Louis Verdier comenta a F. William Lawvere las nuevas clases de categorías que Grothendieck estaba investigando. Cuando Grothendieck, por motivaciones políticas, sale de la escena matemática, sus construcciones y el concepto de *topos* fueron minimizados por un sector de la escuela francesa, y a pesar de que los temas estaban presentes en las discusiones de los especialistas, no había un vínculo claro entre la lógica categórica y el programa de Grothendieck. En los años setenta, los matemáticos Lawvere y Myles Tierney vieron que los modelos habituales de lógica y matemáticas intuicionistas, así como el método de forcing de Cohen, eran casos específicos del *topos de Grothendieck*, por lo cual en la década de 1970 recuperaron este concepto y abrieron nuevas perspectivas de investigación.

Las aportaciones categóricas de Grothendieck construyeron un marco común que vinculó dos teorías. Él se interesó en las estructuras algebraicas y topológicas para conocer qué de lo discreto y qué de lo continuo era importante para alcanzar sus objetivos. Respecto a la estructura algebraica primero se muestra que estas son conjuntos dotados de una ley de composición y regidos por ciertos axiomas; como ejemplos se ven grupos, anillos, ideales, etcétera. Después se muestra de qué tratan las conjeturas de Weil. Todos los tecnicismos se consignan en el marco de

[3] Me refiero a los axiomas de teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel.

la estructura algebraica, como los $\mathbb{Z}_p$ y las extensiones de campo. En el texto se mencionan, sin exceder los objetivos del trabajo, la conexión de álgebra y topología: por un lado la cohomología o los números de Betti; y por el otro, la topología de Zariski —de la cual Grothendieck afirmaba que era una topología sin ley ni dios—, ambas muy importantes en la matemática.

En la siguiente sección se discute las estructuras topológicas, que son conjuntos no vacíos A, en los que a cada elemento del conjunto se le asocia una colección de subconjuntos de A, los cuales satisfacen una serie de axiomas —lo que Bourbaki denominó un "sistema de entornos" de ese punto—. También se introducen conceptos básicos que Grothendieck generaliza, como *cubierta abierta* o *función continua*, entre otros. Este apartado funciona como preámbulo para el tema de espacio de funciones que se discute en el capítulo 3. Además, se analiza un ejemplo de física desde una perspectiva estructuralista, pues para la investigación era importante encontrar prototipos que ayudaran a entender esta visión, que pudieran generalizarse y que fueran significativos desde este marco conceptual. Según los Bourbaki, partiendo de esta base común —orden, álgebra y topología—, las diferentes teorías matemáticas podrían organizarse mediante una jerarquía de estructuras.

En el capítulo 3 presento información de la matemática contemporánea que resulta indispensable para definir el *topos de Grothendieck*. Esta entidad resulta ser una categoría con buenas propiedades de composición y cubrimiento, una topología abstracta que se define como una colección de morfismos, y un buen "pegado" de ciertos elementos. Las diferentes interpretaciones del *topos* son relevantes. Ofrezco ejemplos de muchas teorías matemáticas que pueden ser modeladas por un *topos de Grothendieck*. Los ejemplos también demuestran que esta noción se utiliza para modelar situaciones físicas y computacionales, e incluso en el arte. Este último ejemplo no se desarrolla en el texto.

Como en toda tesis, hay logros y múltiples hilos que se dejan sueltos. Este trabajo no es la excepción. En cuanto a la reflexión histórica, no me fue posible revisar cartas, minutas, actas de congresos y otros documentos que eran necesarios para elaborar la narrativa. Por ejemplo, las cartas de Eilenberg con algunos miembros Bourbaki, algunas *Exposè* de los años sesenta del seminario Bourbaki —después de la salida de Grothendieck—, etcétera. Aunque mi intención no era hacer un estudio exhaustivo de los Bourbaki, era obligado revisar sus archivos y habría sido enriquecedor tener a disposición la mayoría de los documentos, porque fue en donde Grothendieck encontró la motivación y estructuró su proyecto. Tampoco hice un seguimiento del trabajo de Grothendieck después de los años sesenta. A fin de cuentas, esta tesis no pretende ser un estudio filosófico del pensamiento de Grothendieck ni toca el lado literario ni artístico de nuestro personaje.

En mi propuesta no está contemplado hacer una comparación conceptual del *topos elemental* de Lawvere y el *topos de Grothendieck*. La mención de Lawvere en la narrativa forma parte de la reconstrucción de dicho concepto, pues él subraya aspectos del trabajo de Grothendieck que dieron como resultado nuevas vertientes de investigación de la matemática y, por ende, empoderó dicha noción. Tampoco es una historia conceptual de la noción de *espacio* en la matemática. En la literatura que revisamos, no hay acuerdo sobre el rumbo que siguió Grothendieck en la construcción del *topos*, pero mi postura es más concorde con MacLarty, quien consideró que el objetivo del *topos de Grothendieck* fue resolver las conjeturas de Weil. Aunque, no comparto la postura en la que este filósofo plantea cómo Grothendieck resuelve problemas, ya que a lo largo de la tesis argumento que el *topos* se originó dentro de las ideas estructuralistas bourbakianas y se gestó durante las desavenencias dentro de este colectivo. Intento mostrar cuales fueron las intuiciones topológicas que Grothendieck generalizó, desde una perspectiva matemática.

Este trabajo responde el qué y quiénes formaron parte de la genealogía del *topos*, y proporciona una reconstrucción formal del concepto, que está dictada por su genealogía y no por los conceptos que la preceden para poder estudiarla. Así pues, al tiempo que ahondaba en las motivaciones y las herramientas —materiales, intelectuales, políticas y filosóficas— de Grothendieck, estaba experimentando con una forma de trabajo poco utilizada en la historia de la matemática contemporánea. Lo hice con la convicción de que esta perspectiva es útil para crear narrativas robustas y considero que es un procedimiento adecuado para elaborar una historia de la *teoría de topos* o reflexionar sobre posibles relaciones entre los positivistas lógicos y Bourbaki, o incluso para hacer una historia cultural de la matemática de la segunda mitad del siglo XX. Todavía hay mucho por investigar.

Por último, no puedo dejar de mencionar los retos que supuso concluir esta tesis en medio de la pandemia de la COVID -19 en el año 2020. Por un lado, el seminario de tesis que celebrábamos cada martes, y que era un espacio de reflexión e intercambio de opiniones, se suspendió temporalmente. Luego, comenzamos a reunirnos de manera virtual, lo cual modificó la interacción y requirió adecuar el trabajo a nuevos formatos, como la pizarra virtual. La redacción del primer capítulo demandó un esfuerzo adicional, porque necesité dividir mi tiempo y mi espacio entre lo doméstico y lo académico. La incertidumbre y la falta de movilidad también dificultaron la organización de mis ideas. Por otro lado, aprendí a sacar mayor provecho de las revistas y las bibliotecas digitales de diferentes universidades, aunque no tuve el beneficio de acceder a ciertos catálogos estadounidenses y europeos por no tener una IP de esos países. Y en los seminarios virtuales aprendí que las presentaciones vía remota deben ser concisas —no lo he logrado—, pues las exposiciones prolongadas dispersan la atención de los oyentes. En resumen, descubrí la importancia de la síntesis de la información, del compromiso y del trabajo constante.

1 | Legado Bourbaki

> Horas después de escribir estas líneas [en *Recoltes et Semailles*], me di cuenta de que no había pensado aquí en la vasta síntesis de la matemática contemporánea que el tratado ([del] colectivo) del Sr. Bourbaki se esfuerza por presentar[...] Esto se debe, en mi opinión, a dos razones. Por un lado, esta síntesis se limita a una especie de "ordenación" de un extenso conjunto de ideas y resultados ya conocidos, sin aportar ninguna idea nueva propia. Si hay una idea nueva, sería la de una definición matemática precisa de la noción de "estructura", que ha resultado ser un valioso hilo conductor a lo largo del tratado[...] Por otro lado, a partir de los años 50, la idea de estructura se vio superada por los acontecimientos, con la repentina afluencia de métodos "categóricos"[...] (Grothendieck, 1985, p. 70).

1.1 | Introducción

ESTE ENSAYO no pretende hacer una descripción exhaustiva de las aportaciones o el legado del grupo Bourbaki, sino mostrar la relación entre los miembros de este colectivo y Grothendieck. Me centraré tanto en sus coincidencias como en sus diferencias ideológicas y metodológicas, así como en las singularidades en los planteamientos de sus trabajos. Considero que para explicar el concepto de *topos de Grothendieck* es indispensable pensar en la apropiación de la teoría de categorías como parte de su repertorio matemático, suponer la existencia de estructura matemática y construir generalizaciones.

Nicolas Bourbaki fue el seudónimo de un colectivo de matemáticos, constituido en 1935, que se propuso modificar el enfoque de la enseñanza de la matemática, y durante su existencia se caracterizó por hacer matemáticas abstractas y unificadas. Después de la Segunda Guerra Mundial, el seminario convocaba a aproximadamente 200 matemáticos parisinos, quienes se reunían durante tres fines de semana a escuchar de voz de los expertos las teorías matemáticas más recientes.[1] Parte del éxito de estas reuniones se debió al tratamiento accesible de los temas, pues allí se podía participar de una experiencia académica única sin necesidad de ser

[1]El grupo Bourbaki consideró que no se podía nombrar al conjunto de todas las teorías formales como *las matemáticas*. Ellos creían que había sólo una y de ella se derivaban las diferentes teorías. Por eso en este trabajo nombraremos de esa manera a (la matemática) lo que comúnmente se denomina las matemáticas.

especialista. Para mediados del siglo XX, el seminario Bourbaki ya era reconocido por contar entre sus filas a los matemáticos más importantes de la época. Se creó una memoria colectiva del grupo mediante publicaciones, pláticas y el trabajo individual de sus miembros, muchos de los cuales fueron galardonados con premios como las medallas Fields, Crawford, Pagels, Wolf, Steele y Balzac, entre otros reconocimientos.

Entre los matemáticos franceses más destacados que formaron parte del grupo Bourbaki se encontraban Henri Cartan (1904-2008), André Weil (1906-1998), Jean Delsartre (1903-1968), Jean Dieudonné (1906-1992), René de Possel (1905-1974) y Claude Chevalley (1909-1984). En 1934, cuando se realizaron las primeras reuniones, estuvieron Paul Dubreil (1904-1994), Jean Leray (1906-1998) y el matemático polaco Szolem Mandelbrojt (1899-1983).[2] Después de la Segunda Guerra Mundial se unieron a sus filas Roger Godement (1921-2016), Pierre Samuel (1921-2009), Jacques Dixmier (1924-), Jean-Pierre Serre (1926-), el estadounidense Samuel Eilenberg (1913-1998), Jean-Louis Koszul (1921-2018), Laurent Schwartz (1915-2002) y el apátria Alexander Grothendieck (1928-2014).

En la época en que nació el colectivo Bourbaki predominaba –en Occidente— la idea de que la ciencia era acumulativa y, por lo tanto, que las investigaciones y los resultados mejoraban con el tiempo. De lo anterior se concluía que la matemática avanzaba de acuerdo con la cantidad de resultados. También, en esas culturas, se consideraba que la construcción de nuevos conceptos era producto de la genialidad de personajes aislados. Bourbaki, en cambio, apostó por el quehacer colectivo con objetivos claros y comprometidos con la educación matemática francesa. Sus aportes en el ámbito de la enseñanza se basaron en su visión sobre la unidad matemática y la existencia de estructuras. Sus publicaciones, en general, fueron innovadoras por su intento de reescribir la matemática, desde el supuesto de que existe una estructura que da orden; para ello, introdujeron nueva notación matemática, nuevas definiciones y un nuevo estilo de escritura. Se podría decir que

[2]Szolem Mandelbrojt es tío del matemático Benoit Mandelbrot, famoso por la teoría de fractales. Paul Dubreil, Jean Leray y Mandelbrojt no participaron en la conformación del grupo Nicolas Bourbaki, por diferencias de enfoque. En su lugar, formalmente invitaron a Jean Coulumb y Charles Ehresmann para formar parte de dicha empresa.

crearon una nueva manera de hacer y de pensar el orden de las diferentes teorías. Esta idea estructural tuvo influencia no sólo en la matemática, sino también en otras áreas del conocimiento.[3]

El periodo de entreguerras de 1919 a 1939 fue una época de gran agitación, tanto política como científica. Europa se reestructuró y en diversas partes del mundo surgieron ideologías totalitarias de derecha —como el fascismo y el nazismo— y de izquierda —como el comunismo estalinista—. En Nueva York, la caída de la bolsa de valores, en 1929, derivó en una crisis económica mundial, que los gobiernos totalitarios aprovecharon para promover su agenda. Conflictos como la Guerra Civil española (1936-1939), la invasión japonesa de Manchuria (1931-1932) o la invasión de Etiopía por los italianos (1935-1936) fueron eventos clave de este periodo, pues tuvieron como consecuencia migraciones masivas, escasez de materiales y cambios en las políticas de estado. En el campo de la física, se profundizó en el estudio de la radiactividad, del electrón y del núcleo atómico, y se desarrolló la mecánica cuántica. En la matemática, se hizo evidente el estudio de la geometría algebraica, el álgebra avanzada, la topología algebraica y las relaciones entre geometría diferencial y topología algebraica. En este periodo tuvieron lugar las primeras reuniones de los futuros participantes de Bourbaki, que para mediados de los años treinta se constituirá como un colectivo.

1.2 | Un ovillo de lana

Cuando Grothendieck se integra a la comunidad matemática de París, el quehacer científico había cambiado drásticamente, se estaba reconfigurando la nueva geopolítica y se estaban redefiniendo los actores que intervendrían en el financiamiento de la ciencia. En la matemática se habían hecho trabajos en teoría de conjuntos, en teoría de la integración, en álgebras de Lie, geometría algebraica, etcétera; este

[3] Weil se hizo cercano al lingüista Roman Jakobson y al antropólogo Claude Levi-Strauss. La influencia de los Bourbaki alcanzó al constructivista Jean Piaget, quien fue enfático en resaltar el papel central de la matemática en el aprendizaje. Esto lo retomó después de asistir a la charla “Estructuras matemáticas y estructuras mentales” que se realizó en Melun en el año 1952, en donde Dieudonné fue invitado por la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Educación Matemática.

bloque de conocimiento se relaciona con la matemática "pura".[4] Bourbaki acometió la tarea de mirar la disposición estructural de cada teoría para poder clasificarlas, cuyo proceder aseguraba que esta era una visión moderna: "es un *ovillo*[...] una madeja enmarañada donde toda la matemática reacciona una sobre la otra de una manera casi impredecible[...] en este *ovillo de lana*, hay un cierto número de hilos que salen en todas direcciones y no se conecta con nada más" (Dieudonné, 1970).[5]

Por otra parte, a principios del siglo XX la matemática pasaba por una crisis de fundamentos (logicismo, formalismo e intuicionismo).[6] David Hilbert (1862-1943) fue uno de los protagonistas de esta discusión, él creía que la forma adecuada de desarrollar cualquier tema científico, de manera rigurosa, requería de un enfoque axiomático.[7] Cualquier teoría se podía desarrollar independientemente de la intuición, sólo bastaba analizar las relaciones lógicas entre los conceptos elementales y sus axiomas. Su principal oponente fue el intuicionista Luitzen Egbertus Jan Brower (1881-1966).[8] No abundaré en esta disputa, basta señalar que la visión de los intuicionistas, dentro de las comunidades académicas, adquiere relevancia en la matemática contemporánea.

La propuesta de Hilbert consistió en remodelar las bases axiomáticas de la geometría euclidiana, por lo que inició un cambio de pensamiento no sólo para esta área, sino también para los fundamentos de la matemática. En este sentido, Hilbert planteó la posibilidad de que la matemática se desarrollara de manera independiente de cualquier área de las ciencias. Pero matemáticos como Hermann Weyl (1855-1955) y J. Henri Poincaré (1854-1912) no estaban tan convencidos. Lo cierto es que estas discusiones dieron origen a nuevas áreas de investigación; por ejemplo, el avance en lógica generó la teoría de modelos, se desarrolló la teoría

[4]La distinción entre matemática "pura" o "aplicada" es una separación que interpreté después de leer los archivos de Bourbaki. Es una distinción informal, ya que considero que la discusión sobre esta diferencia no es parte de este trabajo.

[5]Las itálicas son mías.

[6]Este hecho se escribe de manera simplificada (Domínguez, 2004).

[7]Los axiomas son enunciados que hablan de las propiedades de los objetos de la teoría. Estos enunciados son los principios por los que la teoría se rige.

[8]Una diferencia entre el formalismo y el intuicionismo es la idea de que la lógica de cualquier construcción matemática no puede ser *a priori*, es decir, la lógica de cualquier construcción matemática se genera al mismo tiempo que se construye. La lógica de Heyting–Arend Heyting (1898-1980) también es intuicionista. En teoría de *topos* se utiliza esta lógica.

de conjuntos, etc. Los textos de Hilbert se convirtieron en un referente en todo el mundo, por lo que Alemania se volvió un referente en el estudio de las teorías desde una metodología axiomática.

Los Bourbaki consideraban necesario replantearse la tradición matemática, sus objetivos y su metodología. De acuerdo con ellos, antes de la Segunda Guerra Mundial, la física tuvo un periodo de mucha actividad y discusión, mientras que para la matemática, la mayor parte pensaba que se debía seguir la agenda de Hilbert. Para ellos, la matemática perseguía dos metas principales: el estudio de las ecuaciones que modelaban las teorías físicas y la axiomatización de las disciplinas matemáticas. Esto no significa que el estudio de la matemática fuera relevante únicamente por su aplicación en la física, pero se valoraba el lenguaje matemático porque servía para calcular las predicciones de las teorías. Aunque, en países como Alemania y Francia, los estudios e investigaciones de la matemática fueron tomando un camino institucional gracias a que las escuelas realizaron ajustes académicos que permitían a los estudiantes generar una trayectoria académica. No sólo se incluyó el estudio de la geometría y aritmética, sino también la enseñanza de disciplinas con resultados más abstractos, como el análisis o el álgebra. Los planes de estudio de cada país fueron instrumentos esenciales para que se cristalizaran las diferentes tradiciones. La interacción cotidiana entre físicos y matemáticos en Gotinga propició que los matemáticos reconocieran la relevancia de las teorías físicas que se desarrollaban en esa época. Reconocidas escuelas, como Cambridge, modificaron sus programas escolares y la tradición de la física-matemática se reforzó.

A continuación presento un panorama para revisar en qué momento se encontraba la escuela francesa cuando Bourbaki se constituyó, con la finalidad de señalar cómo el colectivo influyó en el cambio en la enseñanza de la matemática, pues de manera progresiva las universidades en Europa comenzaron a ampliar los temas de matemáticas y a ajustar sus métodos pedagógicos. Para la enseñanza, los libros de texto comenzaron a ser una herramienta y un referente. Sin embargo, aunque las teorías matemáticas son más fáciles de transportar —por ejemplo, en libros o artículos de revistas—, en comparación con las teorías físicas —laboratorios formaban parte importante de la enseñanza de ser físico—, éstas sólo pueden ser aprendidas a cabalidad mediante la formación dentro de una comunidad. Los libros de textos son importantes para conocer la forma de enseñanza de la institución, pero sus contenidos no son fácilmente reproducibles, pues no hay conocimiento sin una comunidad en donde se debata, se necesita una colectividad para poder pensar de una cierta manera. La práctica de los expertos forma parte de las pautas metodológicas y dinámicas de las comunidades (Cetina, 1999). Y, aunque las conferencias, debates orales y lectura son útiles, para dominar los complicados métodos matemáticos y su aplicación a problemas difíciles, los estudiantes requerían de un plan de estudio ordenado y progresivo, largos periodos de ensayo privado para resolver ejercicios en papel, y una interacción regular cara a cara con un tutor preparado que corrija su trabajo escrito, les explique conceptos y técnicas, y les enseñe buenas prácticas (Warwick, 2003).

Este trabajo no profundiza en la creación u origen de cada escuela, pero sabemos que cada una de estas desarrolló una forma particular de enseñanza y que estudiarlas ayuda a entender el modo de cómo se consolidaron las diferentes tradiciones. Resulta necesario comprender a cada institución y, en general, a cada país para percatarse de sus prácticas y estilos característicos.

En Italia, la topología y el álgebra se hicieron necesarias en la época de Enrico Betti (1823-1892) y Samuel G. Vito Volterra (1860-1940), ellos observaron que el comportamiento de los campos electromagnéticos y los fluidos elásticos puede depender de características cualitativas de la forma de los cuerpos, y que esas características cualitativas requieren la medición por medio de cantidades de un tipo específico.[9] El geómetra Conrado Segre (1863-1924) fundó la escuela de geometría algebraica y, aunque muchos de sus resultados no fueron probados, se le considera uno de los precursores en esta área de la matemática. Por más de medio siglo, la escuela italiana se enfocó en las superficies algebraicas, la geometría y la resolución de ecuaciones polinomiales. Weil se vio influenciado por esta escuela, ya que realizó una estancia de seis meses en Italia con una beca que le otorgó la Sorbona en 1926. Asistió a las conferencias de Vito Volterra y Francesco Severi,

[9] El tutor de tesis de Volterra fue Enrico Betti (1823-1892); juntos publicaron sobre hidrodinámica *Sopra alcuni problemi di idrodinamica*. En el texto se exponen la resolución de algunos problemas de hidrodinámica por un método análogo al de W. Thomson, pero George Stokes ya los había resuelto.

quienes en esos momentos se encontraban trabajando en geometría algebraica en la resolución de las ecuaciones polinomiales. Se reconoció el trabajo de Weil sobre estos temas; en particular, él creó los métodos que resuelven cálculos de manera más simple y desarrolló la primera teoría algebraica local (Van der Waerden, 1970).

Para mediados del siglo XIX Gotinga era una institución reconocida; Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Felix Klein (1849-1925), entre otros, fueron miembros reconocidos. La institución también se dio a conocer por promover derechos y libertades, como sucedió con "Los siete de Gotinga".[10] Durante la rectoría de Klein, dicha universidad se convirtió en un referente para otros centros de investigación en matemáticas.[11] Este matemático organizó reuniones semanales de discusión, promovió la relación entre la física y la matemática, e incorporó como profesor a Hilbert.[12] Para principios y mediados del siglo XX la universidad experimentó una fase de reconocimiento mundial, ya que muchos de sus investigadores fueron galardonados con el premio Nobel. Gracias a una beca de la Fundación Rockefeller, en 1927 Weil realizó una investigación sobre la teoría de las curvas algebraicas. En este lugar discutió con Richard Courant (1888-1972) y Emmy Noether (1882-1935), entre otros. En 1931, Cartán hizo labores de investigación en este país, colaboró con Heinrich Behnke (1898-1979), trabajó sobre funciones analíticas y complejas y finalmente regresó a París en 1933. Por su parte, Chevalley estudió con Artin y conoció a Noether en Hamburgo, y luego a Helmut Hasse (1898-1979) en la Universidad de Marburgo. Ehresmann también estudió en Gotinga, pero por las dificultades de la guerra terminó su carrera en Princeton.

Los matemáticos estadounidenses estuvieron muy influenciados por la escuela alemana. Félix Klein reclutó a muchos estudiantes de estas latitudes, que a su

[10]En 1837 el rey Ernst August de Hannover rescindió la constitución y en protesta siete eruditos renunciaron a su cargo, por lo cual la cantidad de estudiantes matriculados cayó, tal acto se reconoció como una demostración de coraje civil en Alemania.

[11]El matemático Klein tenía la ambición de que Gotinga fuera un microcosmos de la matemática mundial. Desarrolló un proyecto de enciclopedia matemática cuya participación estuvo a cargo de la escuela italiana, británica, francesa y estadounidense, lo cual muestra el gran proyecto que tenía él en mente.

[12]La posición eminente de Hilbert en el mundo hizo que otras instituciones quisieran tenerlo como catedrático. Para 1902, la Universidad de Berlín le ofreció una cátedra; sin embargo, él negoció con la Universidad de Gotinga para permanecer y crear una cátedra para su amigo Hermann Minkowski (1864-1909).

regreso encabezaron el diseño e implementación de programas de posgrado en matemáticas en tres de las universidades más importantes de Estados Unidos: Chicago, Harvard y Princeton. Entre los graduados de la escuela de Chicago surgieron personajes protagónicos durante las décadas de 1920 y 1930: George D. Birkhoff (1884-1944), quien consolidó la posición de Harvard como el principal centro de investigación en análisis y física matemática; Oswald Veblen (1880-1960), quien lideró la geometría y la topología en Princeton; y Robert Lee Moore (1881-1974), quien fundó una escuela de investigación en topología en la Universidad de Texas. Los Bourbaki estuvieron muy relacionados con esta escuela, en particular Chevalley y Dieudonné, quienes trabajaron en la Universidad de Princeton antes de la Segunda Guerra Mundial. El primero de ellos fue profesor y el segundo, becario de dicha institución, ambos con apoyo de la Fundación Rockefeller.[13]

En 1938 Chevalley fue invitado por el Institute for Advanced Study, y debido al estallido de la Segunda Guerra Mundial se quedó por una temporada larga. Chevalley fue profesor de Princeton, donde permaneció hasta 1948, y luego de pasar un año en París con una beca Guggenheim, se incorporó a la Universidad de Columbia en Nueva York. En 1941, Weil y su esposa llegaron a los Estados Unidos gracias a un programa de rescate de científicos franceses dirigido por la Fundación Rockefeller, tiempo después Weil obtuvo un puesto de profesor en la Universidad de Chicago. Princeton cobijó a varios miembros Bourbaki, ya que también Eilenberg trabajó como profesor en dicha institución con la ayuda de Solomon Lefschetz (1884-1972). Para 1940 le otorgan el nombramiento de instructor en la Universidad de Michigan, en donde desarrolló gran parte de sus discusiones sobre topología, y en 1945 obtuvo el nombramiento de profesor asociado. Entre 1945 y 1946 fue profesor visitante en Princeton, antes de ser nombrado profesor titular en la Universidad de Indiana en 1946. Después de un año se trasladó a la Universidad de Columbia, donde permaneció durante el resto de su carrera, poco después obtuvo la nacionalidad estadounidense. A partir de 1948, Eilenberg comenzó a colaborar de manera muy cercana con Henri Cartan y en general con los Bourbaki.

[13]La Fundación Rockefeller tuvo un papel relevante en la formación no sólo de matemáticos a nivel mundial sino de científicos en general.

A principios del siglo XX, la escuela rusa fue impulsada por Dmitri Egorov (1869-1931) y creció gracias a la participación de su estudiante Nikolái N. Luzin (1896-1931), quien trabajó en teoría de funciones reales. Estaban enfocados principalmente en las aplicaciones de la matemática. Esta escuela influyó mucho en el trabajo de los franceses Emile Borel (1871-1956) y Henri Lebesgue (1875-1941) hasta la llegada de Andréi Kolmogorov (1903-1987). Este último personaje no tiene gran relación con los Bourbaki, pero fue crucial en el proceso de construcción y consolidación de la escuela polaca. Los matemáticos polacos más reconocidos fueron Waclaw Sierpiński (1882-1969), Stefan Mazurkiewicz (1888-1945), Stefan Banach (1892-1945), Kazimierz Kuratowski (1896-1980), Stanislaw Saks (1897-1942), Karol Borsuk (1905-1982) y Alfred Tarski (1901-1983).[14] Además, la Universidad de Varsovia se distinguió por el estudio de la topología y fue precisamente de aquí de donde egresó Samuel Eilenberg, quien en 1936 recibió su doctorado bajo la tutoría de Karol Boursuk (1905-1982). En 1939 el padre de Eilenberg lo convence de emigrar a los Estados Unidos debido al turbulento ambiente político. Fue en este país donde desarrolló gran parte de su trabajo en topología y teoría de categorías.

1.3 | La suma de las partes

El ambiente social en el que se desenvolvían los matemáticos franceses durante el periodo de entreguerras parecía sin avances; los escasos materiales bibliográficos, la pérdida de matemáticos en la guerra y la falta de conocimientos de las nuevas áreas de la matemática produjeron una sensación de "atraso" en la escuela francesa respecto a otras escuelas en Europa, en particular la de Gotinga. Se percibía la veneración a la generación perdida y, se pensaba que a nivel mundial, los únicos matemáticos franceses reconocidos eran Pierre Fermat y Henri Poincaré (Beaulieu, 1999). La crisis derivada de la Gran Guerra provocó el exilio de muchos profesio-

[14]Tarski se relacionó con varios de los positivistas lógicos, en particular con Kurt Gödel (1906-1978). Él comenzó estudiando biología y después se cambió de área de estudio para dedicarse a la lógica matemática. Para 1924, publicó el resultado conocido como la paradoja de Banach-Tarski, llamada así porque el resultado es contraintuitivo; sin embargo, prueba que una esfera puede ser cortada en un número finito de pedazos y luego reconfigurarla en una esfera de mayor tamaño o en dos esferas de igual tamaño a la original.

nales.[15] La Universidad de Estrasburgo (EU) se consideró la segunda universidad más importante y la de mejor calidad, después de las instituciones de París. Debido a su cercanía con Alemania se perfiló como una universidad fundamental en el establecimiento de relaciones profesionales entre alemanes y franceses. Fue el matemático René Maurice Fréchet (1878-1973) quien la posicionó como una de las más importantes de Europa.

En este mismo periodo, las tendencias de investigación en las comunidades matemáticas de Francia y Alemania se habían planteado trabajar en matemáticas que no estuvieran vinculadas con las aplicaciones.[16] Para 1900, la École Normale (ENS) había reemplazado a la École Polytechnique (EP) como el principal campo de entrenamiento para la nueva generación de matemáticos de élite. Gaston Darboux (1842-1917), Poincaré y Emile Picard (1856-1941), entre otros, fueron los responsables de este cambio. En el sistema de enseñanza francés seguía predominando la instrucción y el dominio técnico, en ese entonces se pensaba que la creatividad matemática era un talento innato. Poincaré y Picard, en París, ofrecían regularmente cursos sobre temas de matemáticas avanzadas, pero los estudiantes sentían que no podían encontrar en Francia nada comparable a los seminarios de estilo alemán que servían como un puente a la investigación. El principal promotor del Institut Henri Poincaré (IHP), fundado en 1928, fue Émile Borel.[17] Su función era proporcionar una base institucional apropiada para el desarrollo de la física matemática, así como para el estudio de la probabilidad y la estadística. Se cuidaban mucho las condiciones para recibir científicos del extranjero, pues se quería que el instituto

[15]Por ejemplo, el físico Pierre Weiss (1865-1940) trabajó en Suiza antes de regresar a Francia. Fue él quien renovó la relación entre los científicos de Francia y Alemania, pues desde los años veinte reclutó a matemáticos para la Universidad de Estrasburgo (UE). Esta ciudad fue muy disputada entre Francia y Alemania durante la Primera Guerra Mundial. Después se traslada a la Facultad de Ciencias de Clermont-Ferrand, en este lugar los alemanes realizaron experimentos científicos con humanos durante la Segunda Guerra.

[16]En este sentido se dice que son matemáticas “puras” o “formales”. Esta distinción es sensible porque, al madurar su proyecto editorial, los Bourbaki buscan hacer matemática desde su quehacer matemático, es decir, sin preocuparse de las aplicaciones en otras áreas de las ciencias. Esta diferencia hace posible distinguirlos de las escuelas de Cambridge o de Gotinga, es matemática “pura” en un sentido Bourbaki.

[17]Esta institución fue creada gracias al financiamiento de la Fundación Edmond de Rothschild de Francia y la Fundación Rockefeller.

(a) El café Capoulade (b) Los universitarios frecuentaban este lugar

Figura 1.1: Café grill-room, A. Capoulade. Agencia Roger-Viollet, foto de Boyer.

fuera un lugar de encuentro y que se asemejara a lo que representaba Gotinga en esa época. En los años setenta se convirtió en la sede del seminario Bourbaki.

Fueron tres espacios físicos en donde los primeros miembros del colectivo Nicolas Bourbaki convergieron. El primero fue la ENS, en donde se formaron como matemáticos; el segundo fue la UE, en donde algunos trabajaron como profesores; y el tercero fue el conocido café La Caoupolade, que se encontraba cerca de la Sorbona, la ENS, la EP y el Barrio Latino en París.[18] El 10 de diciembre de 1934 fue la primera reunión en este café y sus asistentes fueron Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné, Possel y Weil. Todos ellos eran de origen francés, hijos de profesores o maestros, de familias de comerciantes o de diplomáticos; en general, los miembros Bourbaki eran hijos de profesionistas.

El padre de Cartan, Élie Cartan, enseñó matemáticas en diferentes instituciones francesas como la Sorbona. Henri Cartan fue admitido en la ENS en 1923 y se graduó tres años después, en esta institución se le concedió una beca para preparar su tesis, que completó dos años después. En 1928 entró como profesor del liceo

[18]Se encontraba en 63 Boulevard Saint-Michel, barrio de Souffiot, París. Era un lugar que los intelectuales frecuentaban. En el interior de la cafetería hay dos salas de estar propicias para comer y estar. Las salas del sótano se usaban para reuniones. El ambiente que se creaba por los clientes del Barrio Latino y los universitarios de tendencias libertarias le dieron carácter al lugar. Los cafés en París eran visitados por artistas e intelectuales y en general eran un semillero de reuniones tanto intelectuales como políticas (Beaulieu, 1993).

de Caen, cargo que dejó en abril de 1929 para convertirse en profesor de la UE. El sudafricano de origen francés Chevalley nació en Johannesburgo, donde sus padres se desempeñaban como diplomáticos. En 1926, entró en la ENS, y de 1929 a 1930 consiguió una beca que le permitió hacer investigación matemática, después fue becario de Caisse Nationale des Sciences, precursora del actual Centre Nationale de la Recherche Scientifique (CNRS), lo cual le permitió dedicarse a la matemática, la filosofía y la política.[19] Delsarte provenía de una familia católica —Weil comenta que su pensamiento y comportamiento eran coherentes con sus creencias—. Fue admitido en la ENS en 1922 y para 1927 obtuvo un puesto de profesor en la Facultad de Ciencias de Nancy, donde desarrolló toda su carrera profesional. Gran parte de su tiempo se dedicó a fortalecer la enseñanza de la matemática en esta institución.[20] Dieudonné fue hijo de un textilero y de una maestra; realizó la mayor parte de sus estudios en Francia e hizo una estadía en Inglaterra para aprender inglés, también ingresó a la ENS y obtuvo una beca para ir a Princeton, donde permaneció un año. En 1930 regresó a Francia y trabajó como profesor de matemáticas en la preparatoria; posteriormente recibió una beca de la Fundación Rockefeller que le permitió pasar unos meses en la Universidad de Berlín —con Ludwig Bieberbach (1886-1982)— y luego en la Universidad de Zúrich —con György Polya (1887-1985)—. Trabajó como profesor en la Facultad de Ciencias de Burdeos, y en 1933 se integró a la Facultad de Ciencias de Rennes, donde permaneció hasta 1937, año en que se convirtió en profesor de la Facultad de Ciencias de Nancy, y luego en catedrático. Possel proviene de una familia de jueces; también ingresó a la ENS. Pasó un tiempo estudiando en Munich, Gotinga y Berlín, lo cual tuvo una gran influencia en su tesis de doctorado, grado que obtuvo en 1933. Sus estudios fueron financiados por una beca Rockefeller durante 1930 a 1932. Alcanzó un nombramiento como maestro de conferencias en la Facultad de Ciencias de Marsella en 1933; luego ocupó el mismo puesto en la Facultad de Ciencias de Clermont-Ferrand a partir de

[19] El CNRS se creó el 19 de octubre de 1939 por un decreto presidencial. Esta centro es, hasta este momento, un referente mundial de la investigación científica.

[20] En 1937 se convirtió en el portavoz de la “guerra de las medallas”, rebelándose contra el proyecto de un sistema de recompensas monetarias y honoríficas concebido por el físico Jean Perrin (1870-1942), creador del CNRS y luego primer subsecretario de Estado para la investigación científica.

Figura 1.2: En el verano de 1935. De izquierda a derecha de pie Henri Cartan, René de Possel, Jean Dieudonné, André Weil y Luc Olivier (biólogo). Sentados están Mirles (conejillo de indias), Calude Chevalley y Szolem Mandelbrojt. `http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr`

1934, Szolem Mandelbrojt también era miembro de esta institución y participó sólo en algunas reuniones.

Finalmente, el matemático con una personalidad profunda dentro de los Bourbaki fue Weil, quien significó mucho para Grothendieck porque cuestionó su participación y su actuar dentro de esta empresa. Los padres de este matemático eran judíos, su padre fue médico, y algunas biografías coinciden en que su madre veló por la educación de su hijo y su hija Simone Weil.[21] En 1922, a la edad de dieciséis años, entró a la ENS, y después de sus viajes por Italia y Alemania se doctoró en 1928 con la tesis *L'arithmétique sur les courbes algébriques*. De 1930 a

[21] La vida de Simone Weil fue breve e intensa. André le enseñó a leer a su hermana. Era una mujer inquieta por lo que quiso ver con sus ojos lo que sucedía en Alemania. En 1932 se fue con una familia obrera. Durante la Segunda Guerra Mundial, André Weil había logrado instalarse en los Estados Unidos, y se movilizó para que sus padres y su hermana también llegaran a este país. Los Weil dejaron Marsella el 14 de mayo de 1942 tras una travesía que comprendió una estancia de diecisiete días en un campo de refugiados, en Casablanca. Después de seis meses Simone Weil regresó a Europa; sin embargo, por sus convicciones y las condiciones tan precarias de la guerra su salud se fue deteriorando, muere a los 34 años de edad.

1932 viajó a la India, a la Universidad Musulmana de Aligarh, donde asistió a una cátedra de matemáticas; asumió la responsabilidad de reformar la enseñanza de la matemática allí, sin tener éxito. A su regreso obtuvo un puesto como profesor en la Universidad de Marsella. En 1933 se incorporó a la UE, donde su amigo Henri Cartan ya era profesor; enseñó en esta institución hasta 1939.

La mayoría de los miembros Bourbaki asistían regularmente al seminario de matemáticas en el IHP. Esto les dio la oportunidad de visitar librerías, bibliotecas y reunirse para almorzar con amigos de la universidad en cafés (Beaulieu, 1993).

Existen diversas versiones de por qué el colectivo adoptó el nombre Bourbaki. Weil, Cartan y Delsarte, quienes se formaron la ENS, contaron una anécdota de su época de estudiantes: Raoul Husson, de mayor grado, convocó a los novatos a la conferencia de un catedrático invitado llamado Holmgrem. La asistencia era obligatoria. Husson se hizo pasar por este último, y su plática abarcó temas como la teoría de funciones y otros tópicos extravagantes, como el "teorema de Bourbaki". La mayoría de los asistentes no tenían idea de qué estaba pasando, pero algunos novatos afirmaron haber entendido la broma. Los futuros Bourbaki recordarían este evento. El nombre del mencionado teorema no era una ocurrencia: se sabía que Napoleón III tuvo bajo su mando a un general llamado Charles Bourbaki, quien participó en la guerra Franco-Prusiana de 1870. De acuerdo con su biografía, se narra que al llevar a su ejército a Suiza para resguardarlo de los ataques, intentó suicidarse. El recuerdo de este personaje permaneció porque algunos de los estudiantes de la normal fueron reclutados y entre sus compañeros avanzados había soldados de las tropas del General Bourbaki.

> Se dice que, cuando él [Raoul Husson] era alumno de la Escuela y que, como todos nosotros, tomaba los cursos de preparación militar que entonces impartía un capitán, este funcionario daba sus conferencias en un tono tan dogmático que, durante la "revisión" de la Escuela que tenía lugar a finales de año (una tradición que desgraciadamente se ha perdido), aparecía en el escenario para dar un curso que consistía en una serie de teoremas, ¡que por supuesto llevaban los nombres de los generales! Aquí está finalmente

> la explicación del nombre Bourbaki dado a nuestro tratado (Mashaal, 2002, p. 48).[22]

Durante su estancia en India, Weil le propuso a su colega Damodar D. Kosambi (1907-1966) que publicara un artículo con tono de burla, y sugirió que el autor fuera un científico ruso apellidado Bourbaki. La idea era que Kosambi le mencionara a uno de sus rivales las aportaciones de este artículo, aprovechando que el colega en cuestión no sabía nada del folclore de la ENS. Kosambi llamó al artículo *Sobre una generalización del segundo "teorema de Bourbaki"*, y fue el primer texto atribuido al colectivo (Beaulieu, 1993).

Al principio, los Bourbaki acordaron colocar la inicial "N" antes del apellido, esta letra se usó tradicionalmente en los carteles de los centros que anunciaban un curso, y se ponía en lugar del nombre del profesor en caso de no saber quién expondría. La anécdota que relata Liliane Beaulieu acerca del primer nombre ocurrió unos meses después de haber constituido el grupo: en otoño, los Bourbaki querían presentar al colectivo en las Actas de la Academia de Ciencias mediante un breve artículo. Mientras discutían el nombre del seudónimo, la esposa de Weil propuso llamarle *Nicolas.* Con el tiempo, surgieron más versiones o relatos de quién era ese general y todas son una forma de memoria relacionada con la guerra. A diferencia de otros países, los alumnos y profesores franceses fueron combatientes en la Primera Guerra Mundial. La adopción del nombre evocó el antimilitarismo, un sentimiento generalizado en esa época. El humor que envolvió al personaje era una manera de ridiculizar a la jerarquía, se trataba de evocar un espíritu libertario. El nombre *Bourbaki* les permitió jugar con su historia, hacer poemas y bromas, además de resolver la dificultad de firmar el trabajo colectivo con un seudónimo significativo.

En el periodo de entreguerras, Cartan y Weil coincidieron como profesores en la Universidad de Estrasburgo, donde enseñaban cálculo diferencial e integral, y llegaron a la conclusión de que el *Cours D'Analyse Mathématique* de Édouard Goursat (1858-1936) —con el cual preparaban sus clases— ya era anticuado y resultaba artificial, pues no deducía de forma natural los teoremas del cálculo y

[22] Explicación que ofreció Henri Cartan a Maran Schmidt.

el análisis. Así surgió la idea de escribir un libro de texto de matemáticas que abordara temas de una forma distinta. Ambos se preocupaban por la manera en que se estaban formando los futuros matemáticos franceses, y reflexionaron sobre las habilidades que debían adquirir y los temas que debían dominar. Cartan y Weil reconocieron la importancia de los libros de texto en la educación, pero no tenían claro ni la forma ni el método adecuado para elaborarlos. Este asunto les llevó varios años de reflexión. Los colegas de la ENS compartían la inquietud de incidir en la enseñanza, no sólo para elevar el nivel de la matemática francesa, sino también para crear un punto de inflexión respecto a las generaciones anteriores. Entre sus aspiraciones estaban que se pudieran deducir los teoremas importantes, así como abordar otros campos de la matemática que quedaban fuera de los planes de estudio. Además, Chevalley opinaba que a los matemáticos franceses les faltaba rigor en comparación con los alemanes, es decir, con los hilbertianos.[23] El rigor, para él, consistía en deshacerse de los detalles superfluos.

El cálculo diferencial e integral, la geometría avanzada, la mecánica analítica, la mecánica celeste, la aplicación de la geometría analítica, la teoría de grupos, el cálculo de variaciones (o la teoría de funciones y la teoría de transformaciones), la probabilidad, la física matemática y la física general formaron parte del plan de estudios francés. Cada curso y sus respectivos exámenes otorgaban un "certificado". Para ese tiempo, la enseñanza de la matemática en Francia estaba muy orientada hacia el cálculo y el análisis, por lo cual era común que los profesores hicieran sus notas de clase, como lo hicieron Goursat, Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), Camille Jordan (1838-1922) y Charles Émile Picard (1856-1941).

Cartan y Weil, herederos del cálculo diferencial y de teoría de la medida, organizaron una reunión con algunos de sus excompañeros de la ENS en el café parisino La Capoulade. Allí comentaron su deseo de escribir un libro de texto que abordara los temas de manera diferente, Weil pensaba que este libro definiría el programa de estudio del cálculo y el análisis en Francia durante 25 años, en realidad

[23]El programa de Hilbert es una propuesta al quehacer matemático. Denominamos hilbertianos a los académicos que asumieron esta postura, dicha corriente de pensamiento fue emprendida con gran aceptación. Pero Chevalley se refiere a que estos matemáticos utilizan el método aximático como parte de su práctica.

ambicionaba escribir un tratado de análisis que contuviera la matemática avanzada, cuyo contenido fuera siempre vigente.[24] El objetivo de reunir a especialistas para planear la elaboración de este material era abarcar de manera puntual y diversa la mayoría de los temas. Los participantes en esta primera reunión estuvieron de acuerdo en que el libro estuviera enfocado en la enseñanza y que no fuera un referente de su trabajo individual.

El currículo de los años veinte y treinta se había modificado muy poco. Su primera intención fue elevar el nivel de la matemática en Francia, pero luego ellos pensaron que era preferible llegar a un público más amplio, que abarcara a físicos, ingenieros y otros especialistas. En un principio no excluyeron la matemática aplicada en la física o en otras áreas del conocimiento, pero con el paso de los años Bourbaki sería reconocido por su falta de interés en la matemática aplicada, la lógica y la filosofía de la matemática. Weil, Chevalley y otros tuvieron la oportunidad de conocer la matemática de otras partes del mundo, y comprendieron que si los matemáticos franceses continuaban haciendo únicamente análisis funcional, pronto quedarían obsoletos.[25] Además, reconocían que en Francia había pocas oportunidades para que los matemáticos conocieran los temas más recientes; uno de estos lugares era el seminario de Hadamard.[26] En este espacio se invitaba a investigadores extranjeros a platicar sobre su trabajo. En una nueva versión del seminario, se elaboró una recopilación de las principales ideas de la matemática moderna. Bourbaki retomó los ideales y la nueva versión del seminario.

La propuesta de recopilar en un libro los temas más recientes en matemáticas fue crucial, pero este proyecto quedó rebasado cuando los Bourbaki percibieron la necesidad de editar una serie de libros para organizar la matemática moderna de una manera “natural”. Para lograrlo, se inspiraron en la forma de abordar los temas de álgebra moderna del tratado de Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996).

[24] Esta reunión se llevó acabo el 10 de diciembre de 1934; el archivo está disponible en: `http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/focus`

[25] Muchos de los Bourbaki habían viajado después o durante su doctorado como parte de su investigación. La fundación que más becas otorgó fue la Rockefeller. Los lugares más visitados fueron Dinamarca, Alemania, Hungría, Italia, Suecia, Suiza y Estados Unidos, por lo que estaban más familiarizados con áreas de investigación como teoría de conjuntos, álgebra y topología.

[26] Cartan, Weil, entre otros Bourbaki, asistieron a este seminario.

Este matemático mantuvo relación con personajes importantes. En la Universidad de Ámsterdam había tenido como profesor a Brouwer; en Gotinga, a Noether y en Hamburgo, a Artin. El matemático van der Waerden estudió en la Universidad de Ámsterdam de 1919 a 1923, se convirtió en un destacado algebrista bajo la tutoría de Noether, y el resultado de su colaboración se publicó en *Mathematische Annalen*, el tema fue sobre ideales polinómicos. En 1927 se le otorgó una beca Rockefeller por un año, los primero seis meses los pasó en Gotinga y terminó el año en Hamburgo para estudiar con Hecke, Artin y Schreier. Asistió al curso de álgebra de Artin y tomó nota con el fin de escribir un libro conjunto con él. Sin embargo, Artin vio la parte del texto que estaba escribiendo y le sugirió que él escribiera todo el libro sin su ayuda. Ese mismo año regresa a Gotinga y asiste a las conferencias de Noether.

Finalmente, este matemático neerlandés redactó un texto que se convirtió en el famoso libro de *Modern Algebra*, el volumen I se publicó en 1930 y el volumen II, un año después. Fue la primera presentación holística del álgebra moderna basada en la noción de estructura algebraica (Dieudonné, 1970). En 1931 fue nombrado profesor de matemáticas en la Universidad de Leipzig, donde se convirtió en colega de Werner Heisenberg (1901-1976). La relación con Heisenberg y otros físicos teóricos lo llevó a publicar, en 1932, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*.[27] Van der Waender comenzó a publicar una serie de artículos en los *Mathematische Annalen* sobre geometría algebraica, en los cuales definió la noción de dimensión de una variedad algebraica, un concepto que la escuela italiana ya había definido de manera intuitiva. Su trabajo en geometría algebraica utiliza la teoría ideal de los anillos polinómicos creados por Artin, Hilbert y Noether.[28] Su trabajo también está estrechamente relacionado con la teoría algebraica de campos.

[27] *El método de grupo en la mecánica cuántica.* No fue el único libro de este tema que redacta el autor.

[28] En algunos de sus textos van der Waerden menciona que la mayoría de sus planteamientos nuevos, Noether ya los había pensado y que ella ya los había planteado de una manera más general: "Cuando vine a Gotinga en 1924 y le mostré a Emmy Noether mi trabajo...Yo había hecho una generalización del *teorema fundamental* de Max Noether, ella dijo: 'Lo que has hecho está bien, pero Lasker y Macaulay han obtenido resultados mucho más generales'. Me dijo que estudiara el documento del tratado de Steinitz y Macaulay sobre los ideales polinómicos, y me dio un poco de su trabajo sobre la teoría ideal y sobre la teoría de la eliminación de Hentzelt" (Van der Waerden, 1970).

Los Bourbaki sabían que el texto de *Modern Algebra* tenía varios autores y era una forma innovadora de escribir la teoría, estas características sugerían un camino adecuado para abordar los temas. Para el colectivo, ésta fue la forma apropiada de organizar las teorías. Dieudonné comentó que los estudiantes graduados de la ENS en 1930 no sabían lo que era un *ideal*, se graduaban resolviendo polinomios y describiendo la estructura de grupo.[29] En este contexto, el libro de Van der Waerden fue un descubrimiento intelectual notable. La perspectiva axiomática de esa obra, escribe Dieudonné, sirvió para ordenar los temas. Si lo que querían era un tratado de análisis, ¿cuáles son las estructuras esenciales que debían de considerar para escribir el libro? El tratado de análisis había quedado en el recuerdo de sus primeras reuniones. El proyecto fue editar una serie de libros que abordaran las áreas más importantes y avanzadas de la matemática.[30] Pronto se dieron cuenta de que no podían escribir para un público muy amplio: tenían que priorizar a los estudiantes de matemáticas; por lo tanto, dejaron fuera de sus temas la matemática aplicada. También se percataron de que tenían que comenzar desde cero e iniciar la serie con un compendio de lenguaje y axiomas; es decir, necesitaban escribir un paquete abstracto para comenzar por lo más general. El propósito era tener la notación mínima y los axiomas necesarios para poder aprender matemáticas y estudiar los temas que no se abordaran en los cursos. Así, para los Bourbaki empezar por lo general y finalizar con lo particular suponía una conexión entre los temas, y después de un tiempo llegaron a la conclusión de que debía existir una estructura matemática que diera orden.

Ellos querían evitar que sus textos carecieran de orden, por lo cual la discusión se dio en torno a la idea de estructura esencial. Conocían los temas y las referencias bibliográficas que se utilizaban en ese entonces. Por ejemplo, la topología general solamente se encontraba en algunas memorias y en el libro de René Maurice Fréchet, que era una recopilación de varios resultados que parecían no tener conexión entre sí. Lo mismo opinaban sobre el libro, *Calcul Différentiel et Intégral*

[29]Los *ideales* aparecen en la teoría de los anillos, este tema lo abordamos en el siguiente capítulo.

[30]La edición de los textos se hizo con una pequeña empresa independiente. La ventaja de esta editorial es que podía asumir proyectos nuevos, aventurarse en la edición de estos textos. El dueño era Enrique Freymann.

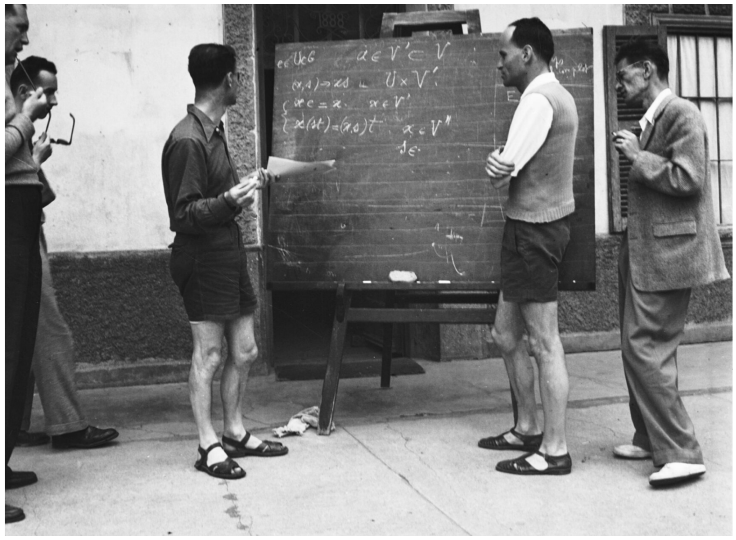


Figura 1.3: Los Bourbaki valoraba la discusión entre sus miembros, no publicaban sin que se tuviera un consenso entre ellos. En el pizarrón se encuentra André Weil. https://www.quantamagazine.org/inside-the-secret-math-society-known-as-nicolas-bourbaki-20201109/

de Stefan Banach (1892-1945), que contenía una investigación reconocible pero carecía de un hilo conductor que pudiera enlazar los resultados.[31] A partir de los acuerdos anteriores, parecía que sólo faltaba definir cuáles eran los resultados de las áreas de la matemática que en ese momento se enseñaban y que se ocuparían para deducir otras teorías más abstractas, como el álgebra moderna. Decidir lo anterior desató discusiones que desembocaron en una postura profundamente filosófica. Eso los llevó a revisar el trabajo de Hermann Grassmann (1809-1877), que no les parecía particularmente "claro". Y así fueron llegando a una postura estructuralista. Algunos autores como Aubin, enlazaron la filosofía estructuralista de Saussure y Lévi-Strauss con la idea de los Bourbaki, este punto lo explicaré más adelante. Aunque no estaban interesados en los asuntos filosóficos o epistémicos de la matemática, en este sentido, se alejaron del espíritu fundamentalista de Hilbert. Su práctica matemática los impulsó a escribir de una manera distinta: presentaban

[31] Esta referencia se encuentra en el archivo de la reunión del 13 de abril de 1935, disponible en: http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/1934-38

las pruebas de los teoremas a partir de los axiomas y usando pasos inferenciales claros con demostraciones rigurosas y comprobables.

En esta primera etapa, los Bourbaki eran un colectivo comprometido con hacer matemáticas desde una perspectiva axiomática, con incluir a investigadores menores de 50 años, para tener perspectivas frescas, y con renunciar a la autoría personal.[32] En los años que median entre las dos guerras se definió la agenda del proyecto y en el proceso se produjeron debates y una gran cantidad de borradores, que eran puestos bajo el escrutinio de sus integrantes. Todo este quehacer matemático les dio la convicción de que era correcto pensar en la existencia de una estructura matemática esencial.

En 1939, los Bourbaki publican *Éléments de Mathématique*, en el que afirman que existe una unidad en la matemática.[33] También publicaron dos series: la primera está firmada como N. Bourbaki, y la segunda, como Nicolas Bourbaki. La primera parte, subtitulada *Les Structures Fondamentales de L'Analyse*, responde a la nueva forma de abordar el análisis, y esta idea se continúa en los volúmenes de *Théorie des Ensembles*, *Algèbre* y *Algèbre Commutative*, seguidos de dos pequeños libros: *Théories Spectrales* y *Variétés Différentielles es Analytiques*. En 1942, antes de que terminara la Segunda Guerra Mundial, se publicaron los capítulos tres y cuatro de *Topologie Générale* y un capítulo de *Algèbre*. En ese tiempo, Weil se va de Francia por la persecución hacía los judíos, fue invitado por el Instituto de Estudios Avanzados a colaborar en Princeton, mientras que Cartan y Dieudonné permanecen en Francia y continúan con el proyecto.

Los libros de texto y las relatorías de las reuniones nos muestran cómo se delimitó el proyecto y se decidieron los temas. Los textos de N. Bourbaki son limpios y cuidados; sin embargo, las relatorías de sus discusiones se encuentran llenas de bromas que refieren a teoremas absurdos, resultados graciosos y, en

[32]Por ello se piensa que son los que continúan con el trabajo de Hilbert. Sin embargo, no comparten la idea de que los axiomas representan características esenciales de todo un campo de investigación, ya sean categorías epistemológicas o propiedades ontológicas básicas. En este sentido, los Bourbaki se distinguen de la escuela de Gotinga porque rompen la dependencia de la relevancia de la matemática para otras ciencias, en particular para la física.

[33]Se planeaba editar seis libros de *Éléments de Mathématique*; los temas serían Teoría de Conjuntos, Álgebra, Topología, Función de una variable real, Topología de Espacio Vectorial e Integración.

ocasiones, chistes subidos de tono. En reuniones amistosas se discutía con rigor la relación entre diseño y escritura. En la década de los cincuenta, Nicolas Bourbaki encarnó mucho más que un nombre propio o un seudónimo para un grupo de autores: representó la relación entre lo que es la matemática y lo que implica hacerla, ya que estableció una clasificación y definió conceptos para poder escribir desde su postura. El grupo intentó hacer una distribución jerárquica de las diferentes áreas de la matemática y, por ende, determinar su unidad, las interconexiones debían ser lineales, pero desde 1950 Grothendieck se propuso hacer matemática con toda la herramienta disponible en ese entonces y con ello evidenció la linealidad que suponía la unidad matemática.

Los primeros seis textos de Bourbaki evidenciaron su estilo de hacer matemática, sus filiaciones, el compromiso de todos sus miembros por conocer la mayoría de los temas y que el conocimiento fuera recíproco. Para ellos, la existencia de dicha estructura matemática era la mejor manera de enseñar, mientras que seguir en orden las diferentes áreas era la mejor manera de aprender. Con estos supuestos, Bourbaki formó a varias generaciones de matemáticos que se fueron posicionando en el ambiente intelectual de Francia y de Estados Unidos. Su trabajo individual y colectivo comenzó a ser reconocido por la comunidad académica internacional. En sus primeros libros no interesaban tanto los objetos y sus propiedades como las estructuras y sus inferencias sustantivas.[34] No se puede discernir qué aportación hizo cada miembro, pues se omitieron las particularidades en favor de un texto claro. Su estilo no es ni el discurso ordinario de los seminarios ni tampoco el de las aulas: está dirigido a lectores dispuestos a aprender la matemática más avanzada, pero sin orientarse a la especialidad.

Los Bourbaki se distinguieron por tener un discurso influyente en las comunidades matemáticas. Fundaron una tradición de cómo pensar y hacer la matemática (Atiyah, 2001) —axiomatización y formalización— pero, como subrayamos en otro momento, con motivaciones pedagógicas. Acuñaron el discurso del es-

[34] A esto actualmente se le llama metodología estructuralista. Es relevante que la filosofía que estudia el estructuralismo matemático señala a los franceses como los que originaron este pensamiento. Se relaciona a Bourbaki con el estructuralismo formal, el cual plantea que la matemática es la búsqueda de estructuras (Reck y Price, 2000).

tructuralismo, que también atravesó a la literatura, la pedagogía y la filosofía.[35] Los Bourbaki hicieron posible diferenciar un constructo de una *estructura esencial* y ayudaron a relativizar la estructura matemática mediante el estudio de las categorías. Utilizaron el lenguaje categórico de manera heurística para hacer generalizaciones y construir propiedades universales; aunque, no como lenguaje para la redacción de sus textos.

> Cada estructura lleva consigo su propio lenguaje, cargado de referencias intuitivas especiales derivadas de las teorías del análisis axiomático[...] ha derivado la estructura. Y, para el investigador que descubre repentinamente esta estructura en los fenómenos que estudia, es como una modulación repentina que orienta de inmediato el trazo en una dirección inesperada en el curso intuitivo de su pensamiento y que ilumina con una nueva luz el paisaje matemático en el que se mueve... las matemáticas se han reducido menos que nunca a un juego puramente mecánico de fórmulas aisladas; la intuición domina más que nunca en la génesis de los descubrimientos. Pero a partir de ahora, posee las poderosas herramientas proporcionadas por la teoría de los grandes tipos de estructuras; en una sola visión, barre inmensos dominios, ahora unificados por el método axiomático, pero que antes se encontraban en un estado completamente caótico (Nicholas Bourbaki, 1950, pp. 227-228).

Los Bourbaki creían que la matemática que contenían sus textos no iba a ser modificada en ninguna etapa de la historia; por esa razón decidieron escribir con el método axiomático, que establecía una esencia que los formalismos lógicos no podían suministrar a la matemática.[36] Los miembros del colectivo estaban convencidos de que este método, junto con la búsqueda de las estructuras matemáticas, eran los constituyentes del conocimiento matemático y permitían encontrar las ideas comunes de teorías que parecían alejadas. La tesis central de su proyecto

[35]En 1959 se realizó una conferencias en París, un simposio sobre *Significado y uso del término estructura en las ciencias humanas y sociales*, patrocinado por la UNESCO. La noción de estructura matemática, la de Bourbaki, se discutió en esta reunión (Aubin, 1997). En el libro de *Estructuras* de Jean Piaget se explica lo importante que fue la ayuda de Weil para los planteamientos antropológicos, en particular las explicaciones hechas por Lévi-Strauss.

[36]En la lógica de primer orden se establecen los silogismos y algunos mecanismos que, a partir de deducciones concatenadas, permiten llegar a un resultado. Parece que Bourbaki no ponía el acento en la lógica porque parecía que esta forma de hacer matemáticas era una técnica en la que la combinación de fórmulas predominaba, tal como proponía Hilbert.

era que las estructuras matemáticas debían ser las herramientas del investigador. Así, una vez que éste las ha identificado, puede estudiar las relaciones de dichas estructura con otras a través de los axiomas de cada una.

1.4 | Reunión de locos

La Segunda Guerra Mundial impactó el proyecto editorial de los Bourbaki. La guerra estalló cuando Weil estaba en Finlandia visitando a Rolf Nevanlinna (1895-1980) y a Lars Ahlfors (1907-1996). Sus escritos con Sophus Lie —arrestado por espionaje en París— así como las tarjetas de visita a nombre de Nicolas Bourbaki y otros documentos hicieron sospechoso a Weil. Fue investigado y deportado a Francia; allí lo arrestaron y apresaron en la cárcel de Rouen. Para 1940, las condiciones de su encierro fueron rigurosas, pero con el tiempo pudo mantener comunicación con su hermana Simone, con su esposa y con Borel. Fue en esa época que Weil escribió sus famosas conjeturas. Durante su cautiverio, se dedicó a estudiar la hipótesis de Riemann de curvas sobre campos finitos. En una carta dirigida a su esposa le menciona que estaba contento con los resultados de su trabajo y, en especial, por el lugar en donde lo escribió; pensaba que debía ser la primera vez en la historia de la matemática en que se descubriera algo similar en el encierro. Le emocionaba la belleza de sus teoremas y creía que eran una vía para que sus colegas matemáticos y el resto del mundo lo conocieran. En 1941 Weil sale de la cárcel y viaja a Estados Unidos gracias a un programa de rescate a científicos de la Fundación Rockefeller, que no dejó de apoyarlo mientras estuvo en América; en este país obtuvo un puesto como profesor y, finalmente, se reunió con su familia. En 1945 Weil emigró a Brasil, donde se le ofreció una cátedra en la Universidad de São Paulo, que ocupó hasta 1947. Regresó a los Estados Unidos para ocupar un puesto en la Universidad de Chicago, al que renunció 11 años después.

Por su parte, Cartan siguió enseñando en la Universidad de Estrasburgo, hasta que la ciudad tuvo que ser evacuada. Durante un año enseñó en Clermont-Ferrand, el lugar a donde fue desplazada la universidad. Tiempo después lo nombran profesor de la Sorbona de París. Durante la guerra su hermano Louis, que era miembro de la Resistencia, fue arrestado.[37] Cartan decide quedarse en Francia durante este periodo para estar junto a sus padres. En 1947 colabora con Eilenberg en el libro *Homological Algebra*, que publican en 1956. Un año después recibe la invitación de Weil para visitar Chicago y también fue invitado por la Universidad de Harvard. Dieudonné también permanece en Francia durante la guerra. De 1937 a 1946 trabaja como profesor en la Universidad de Nancy y de Clermont–Ferrand. Para 1948 viaja a São Paulo y se integra a la planta docente de la Universidad. Después de la guerra trabaja con Laurent Schwartz en este mismo centro. Ellos serán los tutores de la tesis doctoral de Grothendieck.

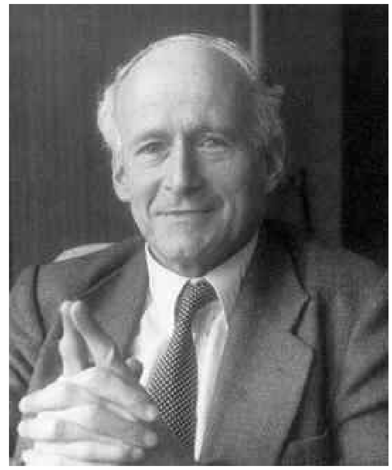
Chevalley era uno de los miembros más jóvenes de Bourbaki. Cuando estalló la Segunda Guerra Mundial se encontraba trabajando en los Estados Unidos, y en ese momento se presentó en la embajada francesa para promover su regreso, pero no lo consiguió. En este periodo se desempeñó como profesor de la Universidad de Princeton. Su trabajo *Cohomology theory of Lie Groups and Lie Algebras*, en colaboración con Samuel Eilenberg, se publicó en 1948. Desde 1949 hasta junio de 1957 fue docente de matemáticas en la Universidad de Columbia. Durante su estancia en América colaboró con Eilenberg. En 1955, Chevalley regresó a Francia, luego de recibir un nombramiento de la Sorbona, a pesar de una campaña de oposición de ciertos matemáticos que consideraban injusto otorgar dicho nombramiento a alguien con tantos privilegios.[38] A partir de entonces, su carrera se desarrolló en la Universidad de París.

Después de la guerra, casi todos los miembros del colectivo regresaron a Francia y retomaron el proyecto; pronto Bourbaki reclutó a jóvenes matemáticos, como Roger Godement (1921-2016), quien fue alumno de Cartan en la Universidad de la Sorbona, profesor en la Universidad de Nancy hasta 1955 y después obtuvo una cátedra en la Facultad de Ciencias de París. A principios de los años cincuenta se convirtió en miembro del colectivo y, al igual que otros participantes, manifestó fuertes convicciones en contra del uso de la matemática para el desarrollo de armas. Entre los reclutados también estuvo Pierre Samuel (1921-2009), cuyo asesor fue

[37]La familia Cartan no tuvo información de Louis hasta finales de 1945: había sido decapitado por los nazis dos años antes.

[38]Leray era de los oponentes a que se le otorgara la plaza a Chevalley.

(a) Jean Dieudonné



(b) Laurent Schwartz

Figura 1.4: Asesores de la tesis doctoral de Grothendieck. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk`

Oscar A. Zariski, de la Universidad de Princeton. Fue miembro de la ENS, trabajó en el CNRS de 1947 a 1949 y después en la Facultad de Ciencias de Clermont-Ferrand hasta principios de los años sesenta. Al igual que varios de sus colegas, expresó públicamente su descontento con el estado en el que se encontraba el mundo.

Otro recluta fue Jacques Dixmier (1924-), cuyo asesor fue Gaston Julia, de la Universidad de París. Dixmier es de origen francés y sus padres fueron maestros. Asistió a algunas reuniones de la resistencia, pero no formó parte de la resistencia armada. Él era estudiante de la ENS cuando llegó la ocupación alemana.

También se alistó Jean-Pierre Serre (1926-), quien fue alumno de Cartan en la Universidad la Sorbona. Nació en Bages, Francia; sus padres eran farmacéuticos en la Universidad de Montpellier. Ingresó a la ENS en 1945 y se integró al grupo Bourbaki en 1948, el mismo año en que se graduó. A partir de 1948 y hasta 1954 tuvo cargos en el CNRS, se convirtió en compañero de estudio de Grothendieck desde que ambos asistieron al seminario de Cartan sobre topología algebraica. Obtuvo su doctorado en 1951 con la tesis *Homologie Singulière des Espaces Fibrés*. En 1954 Serre fue a la Universidad de Nancy, donde trabajó hasta 1956; a partir de ese año ocupó la cátedra de Álgebra y Geometría en el Collège de France hasta 1994, cuando se convirtió en profesor honorario. Este puesto le permitió hacer

(a) Cartan y Serre (b) Godement

Figura 1.5: Miembros Bourbaki. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk`

diversas estancias de investigación: visitó las Universidades de Princeton, Harvard, Argel, Bonn, CalTech, Ginebra, Gotinga, Autónoma de México, etcétera. Todos estos matemáticos se unieron a Bourbaki a finales de 1940.

A principios de los años cincuenta Eilenberg fue invitado por Chevalley y Weil, quienes se encontraban en América en ese momento; también fueron invitados Jean-Louis Koszul, cuyo asesor era Cartan, y Laurent Schwartz, cuyo asesor era Georges Valiron, de la Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo. Grothendieck fue un caso particular, pues llegó de la Universidad de Montpellier por recomendación de Soula, un profesor poco conocido. En *Recoltes et Semailles* él narra que Cartan lo invita a su seminario, al de Leray y al de Bourbaki, pues había mucho que aprender. De alguna manera, Grothendieck se siente bienvenido y atraído por el ambiente bourbakiano. Había un nuevo ánimo de reconstrucción y compromiso; además faltaba mucho por escribir, pues la edición de los *Éléments de Mathématique* no se había completado. Para 1940 Dieudonné asumió la tarea de ser el editor del boletín de Bourbaki, cuyo nombre era *La Tribu*.[39] Durante esos años, Clemont-Ferrand fue la sede de apasionadas reuniones, donde los participantes solían hablar al mismo tiempo, casi a gritos. Tanto Borel como Grothendieck comentan que parecía una *reunión de locos*, en la que sólo Weil podía poner orden.

[39]Subtitulado: *Un boletín ecuménico, moroso y bourbákico.*

> Uno podría pensar que… [el predominio de Weil] contradice la afirmación de que no hay un líder, cuando en realidad lo hay. Para los… [fundadores] de Bourbaki, me parece que Weil era visto como el alma de la banda, pero nunca como un "líder". Cuando estaba cerca y cuando le gustaba, se convertía en "point guard"[…] pero no lo hizo ley. Cuando estaba de mal humor, podía bloquear la discusión en un tema importante que no le gustaba, aunque [esto] significara retomar el tema tranquilo en otro congreso, cuando Weil no estaba allí, o incluso al día siguiente cuando ya no obstruía. Las decisiones se adoptaron por unanimidad de los miembros presentes, considerando que no se excluía a nadie (o incluso raramente) que una persona estuviera en el derecho [de estar en contra de] la unanimidad de todos los demás. Este principio puede parecer una aberración para el trabajo en grupo. ¡Lo extraordinario es que funcionaba! (Grothendieck, 1985, pp. 238).

El colectivo se reunió tres o cuatro veces al año en lugares apartados de Francia, como campamentos juveniles, monasterios, centros turísticos u hoteles. En 1948 el grupo estableció un seminario sobre matemáticas avanzadas, conocido como el seminario Bourbaki. Los miembros del grupo elegían los temas de los expositores y redactaban una publicación del evento. En esta época se mantenía la discreción respecto a la identidad de los miembros. No se tiene registro histórico de que se requiriera una solicitud para formar parte del seminario. Los reclutados eran recomendados de algún Bourbaki, la mayoría eran estudiantes de la ENS y lo único que se les pedía a estos "conejillos de indias" —como se les llamaba— es que tuvieran una participación activa en el seminario. Se celebraba la entrada de nuevos reclutas, pero no las salidas.

En 1950 el colectivo adquirió renombre como resultado de la edición de los *Éléments de Mathématique* y por el prestigio del seminario. Los Bourbaki dominaban entonces la escena de la matemática francesa. Su influencia permeó otras disciplinas como la literatura, la pedagogía y la filosofía.[40] El concepto de estructuras esenciales se conecta en las obras de Piaget, ya que él puso en práctica la idea de la estructura matemática en su estudio del aprendizaje; esto se observa en libros como: *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problemas centrales del*

[40]David Aubin en su texto *The Withering Immortality of Nicolas Bourbaki: A Cultural Connector at the Confluence of Mathematics, Structuralims, and the Oulipo in France* argumenta sobre conectores culturales y en particular la relación del estructuralismo de Bourbaki con otras áreas del conocimiento.

desarrollo, o *Estructuralismo*, donde se hace explícita la idea de buscar estructuras como una forma de aprender.[41] Respecto a la literatura, en 1960 un grupo de escritores y matemáticos fundaron una sociedad secreta llamada *Ouvroir de Littérature Potentialle* (Oulipo), cuya consigna era arrojar "luz sobre el ejercicio de escribir", y su objetivo era encontrar nuevas formas y estructuras. Los miembros del colectivo se describían como "ratas que construyen el laberinto del cual se proponen salir". Quizá el más célebre de sus participantes es Georges Perec (1936-1982), quien escribió *La disparition, novela oulipiana por excelencia*; en ella, gracias a un lipograma, no aparece nunca la letra e. Otros miembros destacados fueron Italo Calvino (1923-1985), Harry Mathews (1930-2017), Paul Fournel (1947-), Jacques Roubaud (1932-), Marcel Bénabou (1939-) y Eduardo Berti (1964-) entre otros. Este grupo también pensó en mantener una permanente renovación y la discreción de sus miembros. Para ellos los textos debían ser construcciones con estructura; Roubaud señaló: "Mi idea de la prosa fue muy influenciada por... el famoso tratado de Bourbaki". Los modos de pensamiento estructuralista en la Francia de la época se encontraba en las discusiones de los círculos intelectuales.

Para 1950, Bourbaki ya estaba totalmente organizado, y sus seminarios y congresos eran más sistemáticos. Se acercaba el momento en que los fundadores del colectivo debían jubilarse, pues el grupo se había autoimpuesto 50 años como límite de edad. Los integrantes más jóvenes prometieron seguir aportando ideas novedosas, pero los retiros no siempre ocurrieron como se había pensado, de manera que el grupo conservó su forma de discutir, diseñar y escribir textos. Si bien nunca se definió cuál era el orden de las teorías matemáticas —no se cumplieron los objetivos— en el libro de teoría de conjuntos se propone una definición formal de estructura, cuya construcción se caracteriza por cómo se obtienen elementos.

[41] Las ideas estructuralista de la matemática se extendió hasta al ámbito de la enseñanza en Francia, pues en los años setenta algunos miembros de los Bourbaki participaron en las discusiones de los programas académicos de niveles elementales. Dieudonné expresó sus opiniones sobre la enseñanza de la matemática dictando conferencias. No participó en el diseño de los planes de estudio, pero su idea de la enseñanza de la geometría algebrizada era muy conocida. Pierre Samuel participó en la Comisión de Lichnerowic con otras 17 personas. Además, Cartan y Schwartz habían dado conferencias sobre matemáticas contemporáneas a la Asociación de Profesores de Matemáticas. Aunque, estos personajes no formaron parte de la reforma sí tuvieron cierta participación. Se puede revisar la bibliografía de los libros citados en: Piaget, 1978 y Piaget, 2002.

Cartan afirma que dicho concepto permitió una definición de isomorfismo y, por lo tanto, una clasificación de las disciplinas fundamentales dentro de la matemática. Además de hacer explícita una definición de estructura —que no se utiliza después en sus textos—, se sabe que también introdujeron notación que hasta hoy se utiliza, como el símbolo del vacío $\emptyset$ y las letras capitulares $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ para denotar los diferentes conjuntos de números. Además, destacaron la importancia de los conceptos de *función*, *función inyectiva* y *biyectiva*.

1.5 | Grothendieck y Bourbaki

La riqueza intelectual y la perspectiva matemática del grupo beneficiaron mucho a Grothendieck. Cuando él llegó a París, no tenía idea de todas las discusiones e intereses intelectuales que compartirían hasta finales de los años cincuenta, cuando finalmente sale del grupo. Grothendieck escribe en *Recoltes et Semailles* que al llegar a París desconocía gran parte de los temas que trataban los Bourbaki, pero de alguna manera atraparon su atención, y comenzó una interacción intelectual muy fructífera junto con Jean Pierre Serre. Además, él se comprometió a entender la matemática más moderna y discutir con sus pares los problemas a los que se enfrentaban, en particular las conjeturas de Weil.

Para 1960 se construye el Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) en Francia, financiado por el empresario Léon Motchane. Este centro está inspirado en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, en donde Robert Oppenheimer era conocido por su activa relación con los militares. Él y Jean Dieudonné fueron los encargados del desarrollo de esta institución en Francia. La intención era ofrecer un lugar en donde los investigadores pudieran proponer temas de investigación de alto nivel, para apuntalar estos estudios a las aplicaciones militares. Definitivamente, las condiciones después de la guerra cambiaron abruptamente los objetivos de investigación.[42] En respuesta a esta tendencia, Chevalley, Godement, Schwartz y

[42]En el ámbito social, después de la Segunda Guerra Mundial, el éxodo de matemáticos europeos a los Estados Unidos hizo que la investigación se guiara por intereses distintos a la matemática abstracta que se desarrolló en el periodo entre guerras. La matemática aplicada en aerodinámica, balística, sistemas de radar, entre otros, fue privilegiada y financiada en mayor parte por los militares. En Francia, la mayoría de las universidades eran financiada por el Estado; sin embargo, la Guerra

otros integrantes de Bourbaki comenzaron a participar activamente en la política. Grothendieck heredó de su familia el interés por la política, pues su padre, Aleksandr Petróvich Shapiro —o Sasha Shapiro— (1890-¿1942?) fue un judío anarquista; y su madre, Hanka Grothendieck (1900-1957), fue una activista alemana.[43]

En los años sesenta, Grothendieck se integró a la planta de profesores del IHES; de hecho, fue de los primeros matemáticos que formaron parte de este instituto. Al enterarse de que el instituto recibía financiamiento de los militares, reunió a los profesores para que se opusieran; en este primer intento evitaron recibir ayuda militar, pero con el tiempo el IHES obtuvo parte de su presupuesto de fondos militares. En esta ocasión Grothendieck no logró una contraofensiva y la mayoría de los investigadores no apoyó sus propuestas. Renunció a su puesto como protesta por los financiamientos que el instituto recibía de los militares. En 1970 se aparta abruptamente de la matemática para militar a favor de la ecología. Schwartz también militó en este grupo ecologista y es conocido tanto por haber creado la teoría de las distribuciones —funciones generalizadas— como por su actividad política en relación con la guerra de Argelia y de Vietnam, los matemáticos disidentes soviéticos y la evaluación del sistema universitario francés. Otro personaje con fuertes convicciones políticas fue Claude Chevalley, quien discutió las posibilidades de una vía que no fuera ni capitalista ni socialista, y a finales de los años sesenta se integra, junto con Grothendieck y Godement, a un grupo de intelectuales que defienden el medioambiente y colaboran en la revista *Survivre et vivre*.[44] Como grupo, Bourbaki nunca tomó partido por una ideología política ni manifestó opiniones

Fría y la carrera espacial entre Estados Unidos y la Unión Soviética puso a disposición de los estudios científicos una gran cantidad de presupuesto de origen militar.

[43]Con 15 años de edad, el padre de Grothendieck luchó contra los zares en la guerra de 1905. Fue capturado y sentenciado a cadena perpetua; paso 10 años en prisión, pero logró escapara durante la Revolución 1917, en la que luchó al lado de los anarquistas. La madre de Grothendieck conoció a Sasha cuando el anarquista estuvo en Berlín trabajando como fotógrafo. Hanka Grothendieck nació en Hamburgo; también militaba en la izquierda. El padre de Grothendieck, la madre y su media hermana vivieron juntos de 1928 a 1933.

[44]Su objetivo, como explica Alexander Grothendieck, es "la lucha por la supervivencia de la especie humana, e incluso de la vida misma, amenazada por el creciente desequilibrio ecológico causado por el uso indiscriminado de la ciencia y la tecnología y por mecanismos sociales suicidas, y también amenazada por conflictos militares vinculados a la proliferación de aparatos militares e industrias de armamento". El grupo desapareció a mediados de la década de 1970.

Figura 1.6: Grothendieck en el SGA. `http://www.grothendieckcircle.org`.

respecto a temas sociales o económicos pero, como mencionamos anteriormente, muchos participantes tenían gran cercanía con la izquierda. Weil era reservado en sus posturas; sin embargo, tenía una relación estrecha con su hermana, la filósofa Simone Weil (1909-1943).[45]

Para Grothendieck, la actividad en Bourbaki le sirvió como campo de entrenamiento; fue una experiencia que amplió y agudizó su comprensión de la matemática. La colaboración personal con Serre también fue relevante, ya que ambos compartían información sobre análisis funcional, álgebra homológica y geometría algebraica, entre otros temas, como se muestra en sus cartas. Grothendieck reconoce que el trabajo en común con hombres de caracteres muy diferentes, con una fuerte personalidad y movidos por un ideal de perfección, le enseñó mucho, y menciona a estos matemáticos como parte de su formación académica. En los años cincuenta Alexander Grothendieck comienza su proceso de creación, hasta llegar a encarnar las ideas de Bourbaki en la búsqueda de lo más general y lo más claro. A partir de

[45]Simone fue filósofa y activista. Escribió *Reflexiones sobre las causas de la libertad*, donde expone sus argumentos acerca de la colectividad. Trabajó como obrera para conocer cómo era la situación de los más desfavorecidos.

1949 sus trabajos de investigación se enfocan al análisis funcional; los resultados obtenidos se encuentran en su tesis *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, donde se expone la relación entre los espacios localmente convexos. Al desarrollar esta idea surgieron varios problemas, y tanto Dieudonné como Schwartz, sus directores de tesis, le propusieron enfrentarlos. Grothendieck no sólo resolvió varios de los problemas, sino que trató de desarrollar una teoría de la dualidad. Después, dirigió su atención a la topología algebraica, a la geometría algebraica y a otras áreas de la matemática.

> Es posible que no esté hecho para el trabajo colectivo. Sin embargo, la dificultad que tuve para encajar [en los Bourbaki] fue que no estaba realmente adaptado a una obra colectiva. En el trabajo común, o las reservas que pude haber tenido por otras razones con Cartan y otros, [esto] no tienen relación con mi momento [en el que] atraje el sarcasmo o el rechazo, o solamente una sombra de condescendencia… Weil (¡definitivamente [fue] un caso especial!). En ningún momento Cartan dejó de mostrarme la misma amabilidad [...] marcada por su cordialidad; también ese toque de humor que tiene, que para mí sigue siendo inseparable de su persona (Grothendieck, 1985, p. 235).

En esta etapa, Bourbaki gozaba de gran éxito, como lo demuestra la considerable cantidad de alumnos que tenían Cartan y Serre. La comunidad de matemáticos reconocía la manera de investigar de los afiliados. Leo Corry explica en su texto *Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure* cómo la visión de la matemática que tenía Bourbaki se convirtió en un símbolo poderoso; sin embargo, no toda la comunidad matemática francesa estaba de acuerdo con ellos, y parte del colectivo Bourbaki rechazaba a aquellos que tuvieran un temperamento diferente (Corry, 2011, p. 235).

En los años sesenta, no sólo se obtuvieron nuevos resultados matemáticos respecto al primer decenio del colectivo, sino que se desarrolló la tecnología y se popularizó el uso de computadoras. El contacto de Francia con la Unión Soviética, las demandas sociales y las dificultades del mercado laboral contribuyeron al estudio e investigación de la matemática no aplicada. La visión de la matemática vinculada con otras áreas de las ciencias era opuesta a la visión Bourbaki; por ejemplo, la teoría de la catástrofe de René Thom (1923-2002) y la geometría fractal de Benoît Mandelbrot (1924-2010) fueron contrarias a la matemática abstracta, pues planteaban que la matemática debía estar anclada a la realidad. La teoría de la catástrofe fue un intento por mostrar cómo la acción continúa produce cambios discontinuos; los fractales, por su parte, son una descripción geométrica de conjuntos extremadamente irregulares.

> Muchos fenómenos cotidianos, tan triviales que escapan por completo a la atención —por ejemplo, las grietas de una vieja pared, la forma de una nube, la trayectoria de una hoja que cae o la espuma de una pinta de cerveza— son muy difíciles de formalizar; pero ¿acaso es imposible que una teoría matemática formulada para explicar estos fenómenos cotidianos pueda, después de todo, ser provechosa para la ciencia? (Thom, 1972, p. 9).

Mandelbrot pensaba que sí: "Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y, más en general, las preguntas más antiguas del hombre sobre la forma de este mundo quedaron sin respuesta por parte de Euclides y sus sucesores". Thom y Mandelbrot conocían muy bien a Bourbaki. El tío de Mandelbrot estaba entre los fundadores y Thom fue uno de los primeros "conejillos de indias" o miembros potenciales que propuso Cartan; de hecho realizó su tesis en 1951 titulada *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod* con Cartan. Sin embargo, se encaminó en una dirección contrapuesta.

Si observamos la evolución ideológica de Bourbaki, en un inicio no se negaban a incluir a la física en sus investigaciones, pero esto resultó inviable por la organización de los temas y el público al cual se dirigían. Por otro lado, la lógica y los conjuntos no formaban parte de su tratado; sin embargo, el paquete abstracto que se necesita para aprender matemáticas hizo que cedieran a la idea de incluir estos temas en uno de sus textos. Finalmente, cuando tuvieron gran parte de su arquitectura matemática y trataron de seguir construyendo o ampliando la obra, se enfrentaron a la dificultad de colocar nuevas piezas en una estructura que quizá no tenía capacidad para incluirlas. Esta nueva controversia los llevó a hacerse preguntas profundamente filosóficas sobre los fundamentos de la matemática, práctica que tanto desdeñaron al escribir su tratado. Así, las posturas que ahondaron las diferencias entre los miembros del grupo no fueron las ideas externas a la comunidad como las de Thom o Mandelbrot, sino las ideas internas sobre el rumbo de la matemática contemporánea.

Esta dificultad comenzó en la segunda etapa, es decir, cuando se trató de continuar la edición de los *Éléments de Mathématique*. En los años cincuenta, estos textos estaban esencialmente terminados, y se propuso que las energías de Bourbaki se concentrarían en finalizar el tratado de análisis. Para ese momento, el panorama de la matemática se amplió.[46] Bourbaki sabía que no podían continuar con la misma línea de trabajo; los fundadores habían cumplido la cuota de edad y la responsabilidad se estaba trasladando a nuevos miembros. Tenían que reexaminar algunos principios básicos, pero ni los fundadores se jubilaron ni se delegó la responsabilidad a los jóvenes. El primer supuesto que se debía revisar era el orden lineal de la matemática, y tratar de colocar en el lugar adecuado la teoría de categorías que habían elaborado Mac Lane y Eilenberg en 1945. Esta teoría proporcionó un marco lingüístico apto para describir propiedades generales, haciendo hincapié en las relaciones y no en los objetos que habitan la estructura, su percepción es similar a su idea de estructura esencial. Por su naturaleza, no había forma de darle lugar en la arquitectura Bourbaki, ya que las categorías no se pueden deducir de la lógica y los conjuntos. En este contexto, las razones prácticas, filosóficas y personales fueron motivo de discusión dentro de su seminario.

Sostener la creencia en la existencia de un orden lineal de la matemática pospuso la redacción de algunos volúmenes. Para ese momento había crecido mucho la cantidad de libros de textos con contenido similar al producido por Bourbaki; este hecho no es irrelevante, pues suponía repetir un trabajo que ya estaba hecho. Para seguir con el propósito de editar la matemática más actual y escribir un texto de teoría de categorías, se discutió si había que romper con su creencia central o simplemente seguir usando de manera heurística las categorías. Y entre los principios bourbakianos estaba que todos los miembros debían interesarse por la mayoría de los temas; no obstante, había mucho más material de la matemática que cuando se publicaron los *Éléments de Mathématique*, además de que los temas que

[46]Hubo nuevos aspectos en el estudio de la matemática, los logros de la teoría de conjuntos, el desarrollo en topología y geometría algebraica, la creciente ciencia de la computación, etc.

estaban en la obra completada eran matemáticas básicas, y los temas que ahora debían desarrollar y escribir eran más especializados.

1.6 | La subversión de Grothendieck

Los siguientes párrafos abordan el problema de construir un marco común con el lenguaje categórico para relacionar dos teorías matemáticas involucradas que se estudiaban dentro de la geometría algebraica y que estaban estrechamente relacionadas con las conjeturas de Weil; los matemáticos franceses tenían la esperanza de entender la cohomología de los espacios involucrados. Por estas razones y con el objetivo de acercarse a la solución de dichas conjeturas, Serre escribe su teorema de dualidad. La subversión de Grothendieck contra los Bourbaki y su interés por generalizar el teorema de dualidad de Serre fueron hilos conductores que gestaron una noción de espacio con propiedades adecuadas, es decir, se introdujo una noción categórica con límites inductivos y proyectivos. Para los Bourbaki las categorías sólo debían ser utilizadas para elucidar problemas, mientras que para Grothendieck eran herramientas que permitían resolverlos. Esto lo llevó a oponerse al grupo, y no fue el único que cuestionó lo anterior; también otros discutieron sostener el programa original. La principal motivación de Grothendieck se encontraba en escribir la matemática contemporánea. Las disputas dentro del colectivo se recuperan en el trabajo de Borel; *Twenty-Five Years with Bourbaki, 1949-1973*. Él narra que en los *Éléments de Mathématique* se planeó escribir sobre la teoría de gavillas; de hecho, ya se tenía un borrador, y la intención era sentar las bases para el estudio de la topología algebraica, haces fibrados, geometría algebraica, etcétera. Pero Grothendieck propuso comenzar con los fundamentos de estos temas, su contrapropuesta era escribir un libro sobre álgebra homológica y geometría algebraica. A pesar de que este plan estaba en el espíritu de Bourbaki, para desarrollar el material, había que usar el lenguaje categórico y esto aún no estaba resuelto dentro del grupo. Uno de los que se opuso a la adopción de este lenguaje fue Weil (Krömer, 2006).

Eilenberg se esforzó por hacer coincidir el concepto de estructura definido en Bourbaki con los universales que se relacionan con otras áreas de la matemática.[47] De hecho, muchas ideas categoristas se aplican en sus textos, como las propiedades de morfismo.[48] Este énfasis en los morfismos fue una característica del enfoque Bourbaki. Mac Lane hace una observación al respecto, dando a entender que los conceptos generalizadores de Bourbaki, especialmente los que se refieren a las construcciones universales, eran demasiado engorrosos para permitir la identificación de las ideas matemáticas centrales de los problemas que consideraban. Eilenberg y Grothendieck trataron de convencer a estos matemáticos de las ventajas de las construcciones categóricas, por lo que siguieron los principios conceptuales rectores en los que Bourbaki creía, pero el problema era que esta teoría, en ese tiempo, no era usada por una cantidad suficiente de matemáticos. Mac Lane y Eilenberg sentaron las bases de un sistema lingüístico que hizo posible relacionar dos dominios matemáticos diferentes, pero no era un área de la matemática en desarrollo. Recordemos que Bourbaki construyó una estructura en donde las funciones tenían un papel protagónico; de hecho, el álgebra homológica que crearon se basó en esta idea, y muchos de sus conceptos son categóricos, aunque no hayan utilizado diagramas en sus textos. Matemáticamente parecen ideas muy similares, pero las razones de Bourbaki para no incluir las categorías eran de tipo filosófico.

El estilo axiomático estuvo presente en el trabajo de Eilenberg y el uso que daba a las categorías.[49] Grothendieck y Serre se unieron al colectivo a principio de los años cincuenta, en ese momento el precepto estructuralista y las ideas categóricas eran las herramientas naturales de estos matemáticos. Sin embargo, los primeros desarrollos de la formulación categórica —que en ese entonces no se sabía que

[47]Bourbaki invitó a Eilenberg al grupo en 1946, aunque la carta que envían está fechada en 1948 (Krömer, 2006). En el texto se lee que se encontrará con Weil, quien le dará todos los detalles. El grupo esperaba que participara en la escritura de topología y álgebra homólogica. En ese entonces Chevalley y Weil seguían trabajando en Estados Unidos, y Cartan había sido invitado a la Universidad de Chicago. Para 1950, Eilenberg viaja a París para trabajar con Cartan en la teoría de homología y cohomología.

[48]Eilenberg define un morfismo f como una función entre dos estructuras del mismo tipo que también debe satisfacer una serie de condiciones. Estas condiciones adicionales se asemejan a los axiomas de los funtores en categorías.

[49]*La Tribu* 24 y 26. Se observa el estudio de los límites inductivo (colímite) y proyectivo (límite).

aportaban flexibilidad y eran más eficaces desde una perspectiva estructuralista— hicieron cuestionables las esperanzas iniciales de Bourbaki y pusieron en duda la universalidad inicialmente prevista por el colectivo. Al respecto Krömer reseña:

> El trabajo de Cartier muestra que los resultados de Samuel sobre los límites inductivos son casos especiales de endomorfismos ultrageneralizados en la conmutación de problemas universales. Esta lógica difusa sólo puede expresarse bien en el marco de las categorías y de los funtores. Cartier propone un método meta-matemático para introducir este último. Capítulo IV —Estructuras— (Krömer, 2006, p. 131).

La Tribu hizo evidente que en varias ocasiones se asignó a sus miembros la preparación de borradores sobre categorías y funtores, aunque nunca se publicó un capítulo sobre estos conceptos.[50] En estos textos también hay indicaciones de diversos problemas técnicos relacionados con el tratamiento detallado de muchas nociones estructurales. Se sabe que la publicación definitiva de los resultados sobre las estructuras de las categorías no sólo se retrasó, sino que no se publicó debido a las preguntas que surgieron a partir de esta teoría, como se muestra en la siguiente cita:

> [cómo incluir las categorías]... sin cambiar nuestro sistema lógico. Pero este sistema se lanza porque resulta no dar la espalda a la extensión... Por lo tanto, se decide que es mejor extender el sistema para incluir categorías; a primera vista, el sistema de Gödel parece adecuado. Para no ser el burro entre dos sillas, también para no retrasar la publicación de un capítulo sobre el que se ha trabajado mucho, se decidió —a pesar del veto de Dixmier [miembro del colectivo], retirar *in extremis*— enviar a imprimir el capítulo IV sin modificar los límites inductivos, y añadiendo las pequeñas modificaciones relativas a las soluciones estrictas de los problemas universales. En cuanto a las categorías y los funtores, estamos finalmente convencidos de que esto es muy importante. Por lo tanto: Capítulo V, *Categorías y funtores*[...] (ibíd., p. 147).

Leo Corry mostró en *The Concept of Matehmatical Structure* que era difícil hacer coincidir la teoría de categorías con el estructuralismo que Bourbaki construyó por

[50]Krömer indica los números de *La Tribu* —28, 30, 34, 38, 39, etcétera— en los que se encuentra esta discusión.

más de 15 años, tanto por sus implicaciones filosóficas como por las dificultades formales de adoptar el lenguaje categórico. Enetz E. Arriola en su artículo *Lo que nos dio y no nos dio Bourbaki* argumenta que el colectivo logró parcialmente ordenar muchas áreas de la matemática, en particular las teorías algebraicas; sin embargo, el enfoque de Bourbaki —que metafóricamente dijo que la matemática es un edificio— no se adapta bien ni favorece la reflexión sobre la adopción del lenguaje categórico. Parece claro que la teoría de categorías cumple la regla de comenzar de lo más general y también con ser matemáticas avanzadas, los problemas filosóficos fueron de índole lógica, sobre la legitimidad de las propuestas dentro del sistema clásico.[51] El no haber adoptado esta perspectiva matemática no se debió al desinterés, sino a que no era coherente con la unidad de la matemática que Bourbaki se impuso. Sin embargo, tanto Eilenberg como Grothendieck utilizaron tal lenguaje, no sólo por su expresividad sino por las construcciones y la información que proporcionó a la matemática. Aunque Bourbaki coincidió con la perspectiva categórica, ellos dudaron del potencial del uso de las categorías. En *La Tribu* 25, Eilenberg intentó incluir el concepto de funtor. En su texto titulado *Concerning Functor and Livre I* mencionó que para unificar las diferentes teorías de homología era necesario utilizar un sistema como las categorías.[52] Al parecer, las categorías compitieron con el concepto de estructura, y Eilenberg señaló que el cierre de tal debate sólo era posible mediante el desarrollo de homomorfismos estructurales que convirtieran a cada tipo de estructura en una categoría. Esta falta de definición, dijo, requiere de una explicación que modifique el concepto de estructura tradicional. Lo anterior acarreó complicaciones adicionales, pero aunque el autor declaró estar preparado para tal tarea, confesó no poder generar tal definición en ese momento.

En los escritos de Bourbaki se mostró el problema de adoptar las categorías no sólo porque se apartaba de los fundamentos, sino también porque había problemas en demostrar la conmutatividad de los universales. En *La Tribu* 24 se leen

[51] Las construcciones de Grothendieck no se encontraban dentro de los formalismos de la teoría de conjuntos. Para el filósofo Colin MacLarty, él no trata (solamente) de construir un mundo de teoría de conjuntos para la matemática, sino de construir un mundo entero (MacLarty, 2003, p. 2).

[52] Este se encuentra en los archivos de Nachlaß, Krömer lo cita en su artículo *La «Machine De Grothendieck» se fonde-t-elle seulement sur des vocables metamatematiques? Bourbaki et les categories au cours des annees cinquante* pág. 142.

las dificultades que enfrentan respecto a la construcción de límites que propuso Grothendieck; en documentos subsecuentes se puede encontrar una vasta discusión sobre el tema. En *La Tribu* 39 se declara: "Para empezar, Grothendieck escribirá una especie de cuaderno de resultados al estilo de Näif, para que Bourbaki se dé cuenta de lo que es útil [...]", respecto a esta discusión únicamente se conoce el escrito de Cartier; no se sabe si Grothendieck escribió el texto (Krömer, 2006). Es hasta *La Tribu* 41 que se hizo un plan general de edición: "*Livre I, Catégories et foncteurs (avec les catégories additives et abéliennes)*; *Livre II, Algèbre homologique* [...]; *Livre III, Catégories topologiques (avec fibrés, faisceaux, revêtements)"*, pero la postura de Weil respecto a las modificaciones a la geometría algebraica generó disenso. Por ello, sólo se dejó lo que estaba listo para publicarse. Las primeras desavenencias respecto a la teoría de las categorías se encuentra en *La Tribu* 43: "[...] hay una agitación sobre el texto *Notes sur les catégories et foncteurs* [...]. El Congreso tenía bastante miedo de este 'diplodocus que tropieza' [el diplodocus se refieren a los escritos de Grothendieck]". En esta presentación hubo una oposición general a la propuesta de este matemático, ya que en el mismo texto se puede leer: "El punto de vista adoptado para este capítulo parece incompatible con el de las estructuras, y Bourbaki no quiere abandonar estas últimas sin razones muy serias". Así, Grothendieck propone un nuevo capítulo para el *Libro I*, donde escribe: "[se] sustituirá al antiguo, que de todas formas es inutilizable". La unión general dentro del grupo se comenzó a resquebrajar; era claro que no había consenso sobre qué y cómo seguir escribiendo los *Éléments de Mathématique.* Para el Congreso 43 de Bourbaki, Grothendieck presentó otra propuesta, pero en esta ocasión el documento fue muy cuestionado; Bourbaki le reclamó que no hubiera expuesto sus ideas en dicho congreso, al cual asistió pero no defendió sus planteamientos. Hay que mencionar que Weil también estuvo presente en esta reunión. Se sabía que a este matemático no le convencían las construcciones que Grothendieck sugería para los fundamentos de la geometría algebraica, pues consideraba que esas innovaciones carecían de rigor. Estos señalamientos en contra de Grothendieck crearon desavenencias.

Al terminó de su trabajo doctoral con Dieudonné y Schwartz, Grothendieck se encuentra con pocas perspectivas de empleo, pues era apátrida y en ese momento quienes no eran ciudadanos franceses tenían dificultades para conseguir trabajo; adquirir la ciudadanía implicaba hacer el servició militar, a lo que Grothendieck se negó. En esos años comenzó a recibir becas del CNRS, con las que se mantuvo a sí mismo y a su madre, quien padeció tuberculosis desde su estancia en el campo de concentración hasta su muerte, en 1957. Schwartz le ofrece a su estudiante trabajar como profesor visitante en la Universidad de Säo Paulo durante 1953 y 1954. Según José Barros-Neto, Grothendieck pidió permiso para asistir en el otoño a un seminario en París; recordemos que se está discutiendo dentro del seminario Bourbaki la dirección que tomaría su proyecto editorial. Después de su estancia en Säo Paulo en 1955, viajó a Kansas invitado por Nachman Aronszajn (1907-1980), según escribe Serre en el libro de correspondencias. Grothendieck recibió una beca para trabajar en análisis funcional, parece que su trabajo sobre espacios vectoriales topológicos fue lo que les interesaba discutir. Durante este periodo asistió al seminario de categorías en el que participaba Mac Lane y ahí expuso su trabajo sobre categorías abelianas, que originalmente estaba pensado para un texto de los Bourbaki. El reporte final de su estancia versó sobre categorías, no sobre análisis funcional. Grothendieck le envío una parte de este reporte a Serre, quien fungió como interlocutor entre él y los Bourbaki mientras éste se encontraba en Kansas, para que su trabajo fuese considerado para ser publicado en los *Éléments de Mathématique*; sin embargo, Serre le respondió en una carta citada el 13 de julio de 1955 (Grothendieck y Serre, 2000) que su trabajo sobre álgebra homológica —“el diplodocus”— planteaba cuestiones sin conexión, y que gran parte de lo que ahí anotaba ya lo estaba desarrollando con David Buchsbaum (1929-), por lo que le propuso que se comunicara con Eilenberg para discutir el asunto.[53] También le hizo saber que su artículo no sólo fue rechazado por Bourbaki, sino que generó molestias por parecerles ilegible, y le recomendó mandar el borrador para ser revisado y corregido por Eilenberg. Grothendieck le contestó que no estaba dispuesto a hacerlo y trató de explicarle a su amigo que los errores que Eilenberg

[53]Buchsbaum es alumno doctoral de Eilenberg. Tanto Buchsbaum como Grothendieck discutían sobre lo que se estaba desarrollando dentro de los Bourbaki. Las similitudes que tuviera el trabajo de Grothendieck con Buchsbaum debían ser discutidas dentro del colectivo, esta discusión se encuentra en (Krömer, 2006).

señalaría serían de índole editorial (Krömer, 2006). Finalmente, dicho documento fue publicado en 1958 en la revista japonesa *Tôhoku Mathematics Journal*, con el título de *Sur quelques points d'Algèbre Homologique*, pero es mejor conocido como *Tôhoku*.

La mayoría de los artículos que Grothendieck publicó se editaron en París, Canadá, Estados Unidos y São Paulo, y hay una memoria del *Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en LATINO AMÉRICA* que se realizó en julio de 1954 y se publicó en Uruguay. *Tôhoku* es el único documento que escribió Grothendieck y se publicó en Japón. Él sabía que enviar este artículo a la escuela francesa para su publicación era imposible, y aunque intentó publicarlo en la American Mathematical Society no lo logró. Buena parte de los matemáticos de estas escuelas eran los revisores de los artículos sobre geometría algebraica, teoría de categorías, entre otros temas. En este periodo ocurrió un rompimiento intelectual entre los Bourbaki y Grothendieck. Él se dedicará los siguientes quince años a la reconstrucción de la geometría algebraica. Para 1958 fue nombrado investigador del IHES, gracias a su antiguo maestro Dieudonné; allí Grothendieck comenzó a trabajar en los *Eléments de Géométrie Algébrique* (EGA) y en el *Séminaire de Géométrie Algébrique* (SGA); en esta institución seguirá con sus propuestas innovadoras. Este alejamiento intelectual lo acompañará en las discusiones dentro de los seminarios en los que participa. Muchos matemáticos que estaban cerca de Grothendieck enfatizan que su forma de hacer matemáticas era completamente singular: "[él] no estaba interesado en la solución de problemas difíciles o famosos, especialmente si se tenían que resolver 'por la fuerza', pero su objetivo era lograr una comprensión tan profunda y completa de las estructuras subyacentes que las soluciones de tales problemas se caerían 'por su cuenta'."

Tôhoku fue un texto controversial, pero dio origen a la categoría de gavillas que hizo posible construir un lugar en donde los duales pudieran convivir. Habíamos mencionado que un hilo conductor en el trabajo de Grothendieck era tener una teoría general de la dualidad. La escuela japonesa antes de la Segunda Guerra Mundial estaba interesada en hacer física y matemáticas con una perspectiva diferente, pues se observa que los editores de la revista fundada por Tsuruichi Hayashi (1783-1935) están trabajando sobre geometría algebraica, probabilidad, ecuaciones diferenciales, etcétera pero con una visión dualista —esto se puede observar en los títulos de sus trabajos, las motivaciones pueden ser diferentes pero hay que señalar este punto de encuentro—.

Además, los japoneses comienzan una interacción con la escuela estadounidense después de perder la guerra; por ejemplo, Akizuki Yasuo (1902-1984) viaja a la Universidad de Chicago como profesor invitado, en América conoce a Zariski y comienzan una relación. También llega a América el matemático japonés Tadao Tannaka, quien está interesado en el trabajo de Mac Lane; a este personaje es a quien Grothendieck le pide publicar su "diplodocus". En resumen, en los *Éléments de Mathématique* se tenía planeado incluir el concepto de *límite proyectivo* e *inductivo*, y Grothendieck presentó esta generalización con su llamada "topología límite". También escribió un borrador sobre estructura —la idea era escribir lo necesario para estudiar una "matemática estructuralista"—. Además, propuso a los Bourbaki que se redactara un artículo sobre el álgebra homológica.

En un principio, como se dijo, el artículo *Tôhoku* iba a formar parte de esta obra; sin embargo, un comité revisor decidió no incluirlo y propuso que fuera parte del libro de teoría de conjuntos en el apartado de álgebra, pues les pareció que estaba tratando con propiedades universales. Grothendieck explicó que estos límites se trataban en los espacios vectoriales topológicos porque representaban un problema de aplicación universal, al ser casos particulares de las propiedades de conmutatividad universal. En el texto se muestra cómo Grothendieck adoptó el lenguaje categórico e intentó resolver los cuestionamientos sobre la legitimidad conjuntista de sus construcciones. Él no sólo trabajó dentro del marco conceptual que Bourbaki construyó desde 1935, también propuso resolver problemas utilizando categorías que producían relaciones mucho más generales en la geometría algebraica. En relación con los debates sobre el fundamento lógico y conjuntista en categorías, él responde con la propuesta de los Universos. No estuvo de acuerdo con la distinción entre objetos matemáticos y los objetos metamatemáticos propuestos por Daniel Lacombe (19..-2016) —este lógico pensaba que el uso de las categorías era hacer metamatemáticas, una distinción que Hilbert hizo y que se conoce como "matemáticas sin sentido"—. Al parecer, los opositores a las categorías frenaron la propuesta de escritos que llevaran esta dirección. Krömer lo explica señalando que el proceso de producción de libros de texto comenzó a ser largo y accidentado, y que las publicación dependían del renombre de los autores. Ya no resultaba conveniente dejarlos en el anonimato de un colectivo y se fueron publicando libros sobre categorías firmados de manera individual. Definitivamente, el contexto había cambiado.

¿Por qué no adoptaron este lenguaje los Bourbaki, si al parecer la propuesta de *Los Universos* constituía un marco conceptual lo suficientemente robusto para seguir con su ideología? Tal vez sí tiene que ver, como analiza Corry, con un debate filosófico que no deseaban tener, aunque la propuesta categórica al parecer se encamina hacia la unificación de la matemática. Todavía no sabemos si esto será posible y considero que esta visión no se podía tener en ese momento. Tampoco puedo afirmar que Grothendieck vio en las categorías una manera de emprender un trabajo de este estilo. Lo que me atrevo a decir es que las posturas políticas atravesaron las discusiones de los Bourbaki y determinaron los caminos que cada miembro tomó. Lo que queda fuera de duda es que Grothendieck estaba muy comprometido en resolver problemas que no estaban claros, a pesar de Bourbaki, y que creía que se podían resolver usando el lenguaje categórico.

Conclusiones

La idea estructuralista que predominaba en los círculos intelectuales en Francia se convirtió en centro de los debates para buscar esencias que permitieran entender el mundo. Bourbaki se configuró después de la Primera Guerra Mundial como un colectivo de matemáticos convencidos de cambiar la educación de la matemática francesa con un enfoque estructuralista. Sin embargo, en su evolución, después de la Segunda Guerra Mundial tropezaron con sus planteamientos originales. No es coincidencia que este cambio haya ocurrido cuando el mundo se estaba reconfigurando y comenzaron los grandes financiamientos de la milicia a la ciencia. Los presupuestos a los matemáticos de Bourbaki también se transformaron: las estancias cortas de investigación, las invitaciones como profesores extranjeros, así como los premios que recibieron se debieron a los recursos que estos matemáticos recibieron en los años sesenta. Es incuestionable que los Bourbaki influyeron en la formación en el oficio de ser matemático de Grothendieck, como lo demuestra su trabajo intelectual de la década de los cincuenta y principios de los sesenta, cuando ocurre el primer rompimiento de carácter intelectual con Bourbaki y después en los años setenta, cuando rompe con ellos por razones políticas.

Grothendieck se formó como matemático con los miembros de Bourbaki; su afinidad política y moral con algunos de ellos le ayudó a integrarse a la comunidad de matemáticos franceses. Pero, al mismo tiempo, los cambios políticos, culturales y sociales hicieron evidente el envejecimiento de este colectivo. Para 1960, el estructuralismo fue perdiendo importancia en los círculos intelectuales. Los jóvenes matemáticos como Mandelbrot se identificaban con una visión anti-Bourbaki, que considera que las matemáticas debían conectar con el mundo real; en cambio, la discrepancia de Grothendieck con los Bourbaki se debió a que su postura ideológica rebasó los límites que ellos se autoimpusieron. Para afrontar los retos de la matemática, Grothendieck utilizó las ideas más contemporáneas y esto lo llevó a construir una matemática abstracta. También, reconocemos que su desapego a las tradiciones en la matemática y su postura contra las injusticias le ayudó a transitar en otra dirección cuando los Bourbaki rechazaron sus ideas.

La matemática necesita tiempo para saber si la teoría de categorías es el lenguaje de las estructuras que hace posible el sueño de N. Bourbaki. Es decir, ¿es posible la unificación estructuralista de las matemáticas de forma consistente? En este nivel, no importa si la representación de la unificación es un ovillo de lana, un grafo, o bien, un edificio o una casa nueva. Grothendieck, para 1984, estaba convencido de que estaba construyendo los cimientos de un lugar nuevo en donde habite la matemática y los problemas que él quería resolver.

2 | Estructuras clásicas

> Y toda la ciencia, cuando la entendemos no como un instrumento de poder y dominación, sino como una aventura de conocimiento de nuestra especie a través de los tiempos, no es otra cosa que esta armonía, más o menos vasta y más o menos rica de una época a otra, que se despliega a través de generaciones y siglos, a través del delicado contrapunto de todos los temas que aparecieron a su vez, como si fueran llamados de la nada, para unirse y entrelazarse dentro de ella.[1] (Grothendieck, 1985, p. 44).

2.1 | Introducción

La idea estructuralista de la matemática no fue exclusiva de Bourbaki. Como revisamos en el capítulo anterior, la escuela alemana fue parte de esta visión, pero un rasgo importante fue que los Bourbaki asumieron de forma colectiva un compromiso con la enseñanza de la matemática desde esta perspectiva. Por ello, en el desarrollo de su proyecto acuñan una definición formal que reúne lo que ellos consideraban las estructuras fundamentales: de orden, algebraica y topológica.[2]

---

[1] La traducción es mía.

[2] Sea $\mathscr{T}$ una teoría la cual es más fuerte que la teoría de conjuntos. *Una especie de estructura* en $\mathscr{T}$ es un texto Σ formado por los siguientes conjuntos:

1. un cierto número de letras $x_1, \ldots, x_n, s$, distintas entre si y las constantes de $\mathscr{T}$; $x_1, \ldots, x_n$ se denominan *conjuntos de bases principales* de la especie de estructuras Σ;
2. un cierto número de términos $A_1, \ldots, A_m$ en $\mathscr{T}$ en el que una de las letras $x_1, \ldots, x_n, s$ aparecen, y son llamados *el auxiliar base de conjuntos* de Σ; posiblemente Σ no contenga conjuntos base (pero deben contener al menos un conjunto de base principal);
3. una tipificación $T(x_1, \ldots, x_n, s)$:

   $$s \in S(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m),$$

   donde S es un esquema de construcción de peldaños en $n+m$ términos (no. 1); $T(x_1, \ldots, x_n, s)$ es llamado la *caracterización típica* de un espacio de estructura Σ;
4. una relación $R(x_1, \ldots, x_n, s)$ que es transportable (en $\mathscr{T}$) respecto a la tipificación T, siendo x_i los principales conjuntos base y la A_h los conjuntos auxiliares base (no. 3); R es llamado el *axioma* de la especie de las estructuras.

Esta definición se encuentra en el tratado de *Éléments de Mathématique, Théorie des Ensemble* editado en 1970.

En este capítulo describimos lo necesario para entender lo que conlleva el estudio de las conjeturas de Weil. Sus postulados son el resultado de conectar diferentes áreas de las matemáticas que, para la época en la que fueron planteadas, eran poco claras dentro de la ortodoxia matemática. No obstante, desde su planteamiento en 1949, las conjeturas fueron trabajadas por la escuela francesa, el seminario Cartan fue un lugar en donde la solución de éstas se discutía. En 1974, el alumno de Grothendieck, Pierre Deligne (1944-) demostró las conjeturas de Weil.[3] En este trabajo no abordaremos la discusión de los métodos de Grothendieck en la resolución de dichas conjeturas.

El estudio del *topos de Grothendieck* hace necesario repasar conceptos de álgebra y topología, la estructura de orden tiene un papel inevitable, así como Bourbaki no pudo omitir esta parte, ni Grothendieck se salvó de legitimar sus construcciones postulando axiomas relacionados con el orden y los conjuntos, de la misma manera, la estructura de orden es inapelable en este trabajo. Asumiré que el lector tiene conocimientos de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. No es mi intención desarrollar toda la teoría de las estructuras, únicamente tomaré de ellas lo necesario para mi objetivo. Sin embargo, los temas son tratados con rigor matemático para mostrar que estos tecnicismos cobran sentido cuando conocemos las motivaciones y los debates en donde surge el concepto; por ejemplo, las conjeturas de Weil son un conjunto de enunciados muy especializados, pero saber que estos se fueron construyendo porque se quería resolver sumas de ecuaciones muy elementales, ayuda a clarificar el sentido de las sentencias, aunque su demostración sea muy complicada. Usaré la notación actual, ya que la escritura que se encuentra en los *Éléments de Mathématique* es compleja en el sentido sintáctico. Trataré de respetar la estructura de los Bourbaki.

2.2 | Estructura de orden

Los miembros de Bourbaki no estaban interesados en la historia de las matemáticas, aunque en su serie los *Éléments de Mathématique* se contempla incluir notas históricas. Sin embargo, en el texto *Théorie des Ensembles* se incluyó un apartado

[3] Solamente faltó la demostración de la hipótesis de Riemann.

histórico sobre la controversia de la hipótesis del continuo y los diferentes modos de enfrentar el problema de la construcción del continuo matemático, así como una historia sucinta de la lógica matemática. Argumentan que no es posible hacer una separación de la lógica y de la teoría de conjuntos, y de cómo éstos son parte fundamental de la matemática. Ellos piensan que el origen de los lenguajes formales se encuentra en la práctica aristotélica de analizar el lenguaje de los argumentos retóricos, en la búsqueda de tener un método que permitiera construir un discurso estructurado. Consideran que estos análisis siempre estuvieron inspirados en la matemática de la época y afirman que la evolución de la lógica estaba muy encaminada a obtener reglas aplicables a conceptos y a proposiciones, de tal manera que haciendo cálculos —puramente formales— se obtuvieran razonamientos válidos "genuinamente matemáticos". En el contexto matemático la lógica relevante es aquella que recupera o modela de manera adecuada el razonamiento matemático y por ello no hay pretensiones, de los Bourbaki, de estudiar nuevas lógicas.[4] Para ellos, estas lógicas difieren estructuralmente en muy poco, a ellos sólo les interesa el sistema lógico clásico que forma parte del desarrollo de la teoría de conjuntos. Ellos observan que en el desarrollo de esta teoría se subraya la importancia de los conceptos de cardinalidad, pertenencia $\in$ y contención $\subset$; asimismo, reflexionan acerca del concepto de *infinito* y comentan que éste es controversial mientras que la $(\in)$ y $(\subset)$ no lo son. Entre otras cosas recuperan el trabajo de Ernst Zermelo (1871-1953) quien demostró que todo conjunto se puede bien ordenar, pero critican que tome como básica la noción de pertenencia.

Para los Bourbaki la teoría de conjuntos se construye desde una estructura que consiste de elementos con relaciones, en este caso relaciones de orden, por lo que definirán orden cero a las variables sin relaciones, orden uno a las variables con una relación…, las variables relacionadas con objetos de orden $\leq n$ son llamadas objetos de orden $n+1$. Ellos no consideran que los objetos matemáticos están dados junto con su estructura. La naturaleza de los objetos no es tan relevante como las relaciones que constituyen la estructura. Los Bourbaki utilizan la τ de Hilbert en el lenguaje formal que adoptan, también la usará Grothendieck. Este

[4]Hay una tendencia en la investigación de lógicas no clásicas, especialmente porque se estaban estudiando lógicas para la computación.

símbolo les permitió considerar los cuantificadores $\exists$ y $\forall$ como símbolos abreviados, para evitar el símbolo funcional universal y prescindir del axioma de elección en la teoría de conjuntos. Con todos estos supuestos es que Bourbaki desarrolló el material de teoría de conjuntos para los *Éléments de Mathématique*. En este apartado necesitamos la definición de relación para luego definir lo que es una operación en álgebra, además se define un preorden y algo de forcing para construir en el capítulo 3 los ejemplos que necesitamos. Para los fines de la tesis no uso la notación de los *Éléments de Mathématique* ni la definición de estructura, pues sería necesario estudiar el texto completo para seguir nuestro objetivo. Por lo anterior, el concepto de relación es de los más importantes, sean A y B dos conjuntos. Una relación R de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.[5] Es decir, $R \subseteq A \times B$. Si A es un conjunto, la diagonal $A \times A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ es una relación y se denota con Δ_A. Una relación tiene dominio, imagen y posee una relación inversa.[6]

Hay varios tipos de relaciones y se distinguen por tener ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas. Sea $R \subseteq A \times A$. La relación R es irreflexiva en A si $(x,x) \notin R$ para toda $x \in A$.[7] La relación R es reflexiva en A, si para cualquier $x \in A$ se tiene $(x,x) \in R$. Es transitiva, si y solo si $\forall x, y, z \in A$, si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, entonces $(x,z) \in R$. Además, R es antisimétrica si y solo si $\forall x, y \in A$, si $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$, entonces $x = y$.

El conjunto P y la relación binaria $\leq$ forman la pareja $(P, \leq)$. Si la relación cumple la propiedad reflexiva y transitiva, entonces la pareja $(P, \leq)$ es un preorden. Un orden parcial es una pareja $(P, \leq)$ que es un preorden y la relación es antisimétrica. También es posible definir orden parcial mediante una relación irreflexiva. La pareja $(P, <)$ es un orden parcial si la relación es irreflexiva y transitiva. En general, para los Bourbaki una estructura de orden consiste en un conjunto de

[5]Bourbaki denota una relación con $R\{x,y\}$ y $x \neq y$.

[6]El dominio de una relación es el conjunto formado por el primer elemento de cada par ordenado de R y la imagen es el conjunto formado por el segundo elemento de cada par ordenado de R, es decir, $Dom(R) = \{x \mid \text{ hay } y \text{ tal que } (x,y) \in R\}$ y $Im(R) = \{y \mid \text{ hay } x \text{ tal que } (x,y) \in R\}$. Dada una relación R con $Dom(R) \subseteq A$ y $Im(A) \subseteq B$, se tiene asociada una relación inversa R^{-1} que resulta de invertir los pares ordenados que pertenecen a R, es decir, $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in A \times B\}$.

[7]A esta propiedad también se le denomina antirreflexiva.

objetos y una relación que determinará el tipo de acomodo que tienen los objetos, con el siguiente ejemplo se muestra la manera de pensar una estructura de orden.

Cualquier orden parcial se puede representar como una clase particular de gráficas dirigidas o digráficas, la visualización del esquema representa la estructura interna del conjunto.[8] Sean $V = \{a, b, c\}$ y $E = \{(a, b),\ (b, c),\ (a, c)\}$ la gráfica dirigida $G = (V, E)$. Cumple que $(a, a) \notin E$, $(b, b) \notin E$ y $(c, c) \notin E$, es decir, es irreflexiva. Además, como (a, b) y $(b, c) \in E$, entonces $(a, c) \in E$, es decir, es transitiva.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[dr] & b \arrow[d] \\
 & c
\end{tikzcd}$$

Otros ejemplos son las parejas $(P(X), \subseteq)$ y $(P(X), \supseteq)$, donde X es un conjunto y $P(X)$ es su potencia. Veamos que la primera es un orden parcial. Sea $A \in P(X)$, es claro que $A \subseteq A$. Además, sean A, B y $C \in P(X)$, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces todo elemento de A está en B y como todo elemento de B está en C, tenemos que todo elemento de A está en C; es decir, $A \subseteq C$. Se prueba de manera análoga que la segunda pareja es un orden parcial. Un ejemplo interesante es $P = (\{f\colon A \to 2 \mid \mathbb{N} \supseteq A \text{ con } A \text{ finito}\}, \supseteq)$, ya que se utiliza en el método de forcing donde sirve como un puente para conectar el *topos* de Grohtendieck.[9]

En 1963 el matemático estadounidense Paul Joseph Cohen (1934-2007)[10] exhibió su método de forcing y le aportó a la teoría de conjuntos un arsenal mayor. Un método general para la construcción de modelos. Su prueba mostró la independencia de la hipótesis del continuo de los axiomas de la teoría de Zermelo Fraenkel (ZFC). El matemático inglés Robert Goldblatt (1949-) señaló que los resultados de Cohen encajan bien en la teoría de *topos* y sugirió que los *topos* son a su vez una

[8] Una gráfica consiste en un conjunto de vértices V y uno de aristas E, tal que dos vértices son adyacentes si comparten una arista, y dos aristas son adyacentes si comparten un vértice.

[9] El conjunto P, f es una función, es decir, $f \subseteq A \times B$ es una relación tal que para cada elemento del dominio $a \in A$ hay un único elemento $b \in B$ con $(a, b) \in f$. En una visión estructuralista la noción de función es muy importante porque es la que codifica información relevante en las estructuras.

[10] Cohen fue un matemático estadounidense que recibió la medalla Fields en 1966 por sus trabajo en la teoría de conjuntos.

consecuencia de generalizar la teoría de conjuntos. Pero como vimos en el capítulo 1 la categoría de gavillas se escribió formalmente en el *Tôhoku* y se estudió como una teoría cuyo origen estuvo en los seminarios de geometría algebraica. Quien miró la lógica de un *topos* fue F. William Lawvere (1937-) y señaló cómo la prueba de Cohen podía ser traducida al lenguaje de la teoría de los *topos* y fue el topólogo Myles Tierney quien presentó la prueba completa en 1972 (Makkai y Reyes, 1977).

Forcing: un método que extiende

La idea principal de este método fue el de añadir "elementos indeterminados" a un modelo base, generando así un nuevo modelo, con el fin de hacer que cierto tipo de oraciones fueran verdaderas o falsas en el nuevo modelo. Estas oraciones pueden ser axiomas; por ejemplo, el axioma de elección. No describiré con detalle el método de forcing.[11] La idea principal es muy parecida a las extensiones de campos que se hacen en álgebra, es decir, se quiere extender el campo de los números reales, $\mathbb{R}$; para ello, se incorpora un imaginario i, que denotamos como $i \notin \mathbb{R}$. Consideremos al conjunto $\mathbb{R} \cup \{i\}$ y lo cerramos bajo las operaciones de campo. De manera muy simplista, decimos que se obtiene al campo de los números complejos, $\mathbb{C}$. Con esta idea y de manera intuitiva, podemos referirnos a $\mathbb{C}$ solamente conociendo el campo $\mathbb{R}$, ya que —con las operaciones adecuadas para $\mathbb{R}^2$— $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cabe observar que esta idea de extender los reales a los complejos nos sirve para entender, de manera somera, el método de forcing, ya que el ejemplo clásico es comenzar con un universo de la teoría de conjuntos y añadir objetos que no estén en ese universo. Vale la pena hacer hincapié que en este caso el método es diferente al anterior, pues "cerrar bajo los axiomas de ZFC" es un proceso distinto a "cerrar bajo los axiomas de campo". Por ejemplo, para agregar una función, que no esté en dicho universo, es necesario tomar funciones —en el universo— que codifiquen información de la "nueva" función que se quiere agregar, con estos pedazos de información, se pueda construir algo mucho más "grande" que originalmente no estaba.[12]

[11]Más adelante se señala que este es un ejemplo de gavillas.

[12]Una función es una relación f con la propiedad de que para toda $x \in \mathrm{Dom}(f)$ hay una única y tal que $(x, y) \in f$, y es el valor de f en x y se denota $y = f(x)$.

Consideremos a M un modelo de la teoría de Zermelo Fraenkel con elección, es decir, sea $M \models ZFC$ y tomemos "piezas pequeñas" de M que nos ayuden a construir una nueva función; por ejemplo, $g: \mathbb{N} \to 2$, es decir, $g \notin M$. Estas "piezas pequeñas" serán funciones con dominio finito que están en M. Consideramos el conjunto de todas ellas y las ordenamos $\supseteq$, es decir, obtenemos un orden parcial $P = (\{f: A \to 2 \mid A \subseteq \mathbb{N} \text{ finito}\}, \supseteq)$ en M. Queremos elegir elementos de P —que se "peguen bien"— para formar la función "nueva" g, pretendemos garantizar que el "pegado" de los elementos sea una función. Por ejemplo, notemos que $f_0 = \{(0,0)\}$ y $f_1 = \{(0,1)\}$ ¡no se pueden pegar!, ya que el resultado es una relación que no es una función. Por ello, buscamos un subconjunto $G \subseteq P$ con el que sea posible construir tal función. Una vez que tengamos el subconjunto G propondremos a la función g como $\bigcup G$. Para que la unión de los elementos de G sea una función necesitamos que los objetos de G cumplan las siguientes condiciones:

(i) Si $f_1, f_2 \in G$, entonces $\exists\, h \in G$ tal que $h \supseteq f_1$ y $h \supseteq f_2$.

(ii) Si $f \in G$ y $f \supseteq h$, entonces $h \in G$.

(iii) El $\emptyset$ está en G. En otras palabras, el máximo de P está en G.

La condición (i) nos garantiza que el "pegado" de dos funciones sea una función, a esto se le llama sistema compatible de funciones. La siguiente nos confirma que hay un rastreo de las "piezas que se pegan"; y la última, nos presenta la posibilidad de tener un objeto diferente al vacío que satisfaga (i) y (ii). Como $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto, es posible que $G = \emptyset$, por vacuidad este objeto cumple (i) y (ii). Pero con este objeto G no podemos construir nada. Si el objeto satisface los tres puntos anteriores se llama *filtro*. Para poder extender nuestro modelo original M se requiere de un *filtro genérico*, un aspecto interesante es que las tres propiedades son suficientes para demostrar que la unión de un filtro es una función que tiene como dominio a los naturales, pero antes de definir esta clase de objetos es necesario hacer varios señalamientos.

Si G es un filtro, entonces $g = \bigcup G : \bigcup_{f \in G} \mathrm{dom}(f) \to 2$ es una función. En efecto, sea $n \in \bigcup_{f \in G} \mathrm{dom}(f)$, entonces $\exists\ f \in G$ tal que $n \in \mathrm{dom}(f)$. Así, por definición, $g(n) = f(n)$. Para estar seguros de que g está bien definida, supongamos que existe $f_1 \in G$ tal que $n \in \mathrm{dom}(f_1)$, por la condición (i) de filtro $\exists\, h \in G$ tal que $h \supseteq f$ y $h \supseteq f_1$. Por lo tanto $f(n) = h(n) = f_1(n)$.

El conjunto $G = \{\emptyset\}$ es un filtro, cuya $g = \bigcup G : \emptyset \to 2$ asociada es la función vacía es claro que $\mathrm{dom}(g)$ no es $\mathbb{N}$, pero se quiere construir una función g tal que todo natural esté en su dominio, por ello G no puede ser cualquier filtro. Para mostrar que el dominio de esta función son todos los naturales se necesita la tercera propiedad tomando el conjunto D_n de las funciones que tienen en su dominio a n, para cada n natural, y demostrando que se trata de un conjunto denso. Para cada $n \in \mathbb{N}$ queremos que $n \in \mathrm{dom}(g) = \bigcup_{f \in G} \mathrm{dom}(f)$, es decir, deseamos que exista $f \in G$ tal que $n \in \mathrm{dom}(f)$, recurramos a los conjuntos D_n. Definimos para toda $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $D_n = \{p \in P \mid n \in \mathrm{dom}(p)\}$. Para que el dominio de g sea el conjunto de los naturales, necesitamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ suceda que $G \cap D_n \neq \emptyset$. No es difícil ver que si un filtro G satisface lo anterior, entonces $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$. La contención $\mathrm{dom}(g) \subset \mathbb{N}$ es clara, ya que de origen los dominios de las "piezas" son conjuntos finitos de naturales. La otra contención hay que probarla. Sea $n \in \mathbb{N}$, como $D_n \cap G \neq \emptyset$, entonces existe una función $f \in G$ tal que $n \in \mathrm{dom}(f)$. Por lo tanto, $n \in \bigcup_{f \in G} \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$. Con esta construcción, el filtro G solo satisface una cantidad numerable de condiciones.

Ahora, para demostrar que $g \notin M$ queremos que si $h : \mathbb{N} \to 2$ está en M, entonces $g \neq h$, es decir, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) \neq h(n)$. Como $g(n) = f(n)$ con $f \in G$ y $n \in \mathrm{dom}(f)$, entonces para cada h en M requerimos $f \in G$ y $n \in \mathrm{dom}(f)$ tal que $f(n) \neq h(n)$. De la misma forma que en al párrafo anterior consideramos $D_h = \{p \in P \mid \exists\, n \in \mathrm{dom}(p)\ (p(n) \neq h(n))\}$. Es evidente que si $G \cap D_h \neq \emptyset$, entonces $g \neq h$. Con esta construcción, tenemos un filtro G que satisface tantas condiciones como números reales.

La propiedad que comparten los D_n y D_h es la siguiente: en un orden parcial $(P, \leq)$ un conjunto $D \subseteq P$ es denso si para cualquier $p \in P$ existe $d \in D$, tal que $d \leq p$. Veamos que D_h es denso. Sea $p \in P$, si $p \in D_h$ entonces existe $q \in D_h$ tal que $q \leq p$, a saber $q = p$. Si $p \notin D_h$, entonces $\forall\, n \in \mathrm{dom}(p)\ (p(n) = h(n))$, como $p \in P$ y el $\mathrm{dom}(p)$ es finito, entonces $\exists\, m \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{dom}(p)$. Consideremos $q = p \cup \{(m, 1 - h(m))\} \supseteq p$. Así, $q \in D_h$ y $q \supseteq p$. Por lo tanto D_h es denso. No es difícil ver que también D_n es denso para todo natural n. Sea $p \in P$, si $p \in D_n$, es trivial. Si $p \notin D_n$, entonces $n \notin \mathrm{dom}(p)$. Consideremos $q = p \cup \{(n, 0)\} \supseteq p$. Por lo que, $q \in D_n$ y $q \subseteq p$. Todas las condiciones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera. Si $\mathscr{D}$ es una colección de densos, entonces un filtro $G \subseteq P$ es $\mathscr{D}$-genérico si y solo si $G \cap D \neq \emptyset$ para toda $D \in \mathscr{D}$.

Finalmente, lo que necesitamos para obtener la función nueva g es un filtro $\mathscr{D}$-genérico, donde $\mathscr{D} = \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{D_h \mid h : \mathbb{N} \to 2,\ h \in M\}$. Se puede demostrar que $G \notin M$ y al considerar la extensión $M[G]$ tal que $G \in M[G]$ y $M[G] \models ZFC$, entonces $g = \bigcup G \in M[G]$.

El método de forcing proporcionó a la matemática mundos en donde se puede decidir si ciertas oraciones son verdaderas o falsas obteniendo la consistencia o incosistencia de dichas oraciones. Es una herramienta útil, pero algunos matemáticos estaban más preocupados en resolver problemas, en lugar de saber si tal enunciado es consistente o no. Este fue el caso de los Bourbaki, quienes encontraron poco útil incluir lógica en su proyecto; sin embargo, con el tiempo y como consecuencia de sus discusiones, se hicieron conscientes de que estaban en terrenos de la lógica. Por ejemplo, cuando pensaron que el orden de las estructuras daba elementos suficientes para hablar de un fundamento de la matemática, también estudiaron la legitimidad de las construcciones de Grothendieck cuando hacía uso de las categorías.

El poco interés que tenían los Bourbaki en la lógica de ese tiempo sirvió para que fueran criticados de ignorantes (Mathias, 1990), aunque las propuestas de Grothendieck tenían poca legitimidad en la teoría de conjuntos y lógica, esto fue un impedimento para incluir la teoría de categorías en su trabajo.[13] Los Bourbaki se enfrascaron en los fundamentos conjuntistas de la teoría de categorías que llevaron a Grothendieck a proponer el concepto de *universos de Grothendieck* y en particular el axioma de universos que afirma que para todo conjunto x existe un universo U tal que $x \in U$. En ZFC sería equivalente a postular una sucesión infinita de cardinales

[13] Se les cuestiona por qué no incluyeron en los *Éléments de Mathématique* los resultados de Gödel. Bourbaki era consciente de que su propuesta los direccionaba a una fundamentación de la matemática e ignoran todo el desarrollo lógico de los americanos porque desde su perspectiva los desarrollos que interesaban eran los de Boole y no los de Frege.

fuertemente inaccesibles.[14] Grothendieck no estaba interesado en el estudio de los fundamentos lógicos de las categorías, pero al construir el *topos* que lleva su nombre proporcionó a las categorías una lógica que permitió el desarrollo de la teoría. De hecho, el desarrollo lógico de los *topos* es lo que lleva a Lawvere a idear el *topos elemental* (Lawvere, 1976).

2.3 | Estructura algebraica

Algunos críticos de Bourbaki afirman que el caballito de batalla era la estructura algebraica, y que la unificación que buscaban estaba basada en esta creencia (Mathias, 1990). Lo que es un hecho es que la noción de *topos de Grothendieck* como entidad de estudio se planteó desde las construcciones de herramientas para la resolución de problemas en el álgebra y geometría abstracta.

Esta sección aborda las estructuras algebraicas que son necesarias para entender las conjeturas de Weil y para el desarrollo del concepto de *topos de Grothendieck*. Hasta ahora he adoptado la notación actual en vez de la de Bourbaki, porque no sabría cómo hacer las construcciones en teoría de categorías. Grothendieck menciona que seguir a los Bourbaki sería una complicación innecesaria.

Las estructuras algebraicas son la parte de la matemática en la cual Bourbaki se inspiró y con la que desarrolló gran parte de su propuesta. En los *Éléments de Mathématique* consideraron editar tres libros de *Álgebra* con un total de once capítulos. Al final de la serie se pensó incluir notas históricas, pero el último capítulo y las notas no se publicaron debido a que no lograron ponerse de acuerdo respecto al uso de las construcciones que resultaban demasiado generales, algunos miembros consideraban que debían modificar la teoría de conjuntos para escribir las generalizaciones y otros pensaban que no debían ser parte de los *Éléments de Mathématique*.

Sin embargo, en el libro *Eléments d'histoire des Mathématiques*, editado por primera vez en 1960, incluyeron un resumen de la historia del álgebra. Los Bourbaki destacaron, como primer logro, la generalización de la noción de número, pues esta

[14]Un cardinal fuertemente inaccesible se obtiene como una generalización de $\mathbb{N}$ pero es tan grande que no se puede demostrar su existencia desde *ZFC*.

ya no dependió de las propiedades particulares del objeto sino del conjunto. Ellos reconocieron las generalizaciones más destacadas; por ejemplo, la representación algebraica de los números complejos gracias a que se les visualizó geométricamente. O la solución del polinomio de segundo y tercer grado que logró la escuela italiana. Mencionaron que la expresión formal de la gravedad y otras aportaciones en física motivaron a determinar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas y de grados mayores.[15] Los Bourbaki señalaron que en la evolución del álgebra se encuentra el álgebra de Boole (algunos matemáticos piensan que es lógica), los vectores, los cuaterniones y, en general, los sistemas hipercomplejos, las matrices, entre otros.

Finalmente, se prestó atención al estudio de las estructuras algebraicas. Bourbaki identificó tres tendencias de investigación. La primera se relaciona con la noción de *ideal*, cuyos ejemplos aportaron información acerca de nuevas leyes de composición entre elementos de conjuntos. La escuela alemana fue quien planteó los conceptos de *grupo abeliano*, *módulo* y otros más. La segunda tendencia desarrolló el álgebra lineal y los sistemas hipercomplejos. Y la última destacó las reglas de composición de un grupo y no la naturaleza de sus objetos. Por ello se estudiaron las nociones de grupo libre, generadores, invariantes, entre otros. Bourbaki pensó que las tres tendencias se unificaron con la axiomatización del álgebra que construyeron Artin, Noether y Van der Waerden, y que ilustraron en su libro de texto.

Para entender las estructuras algebraicas, es necesario definir lo que es una *operación*. Sea A un conjunto, una operación binaria es una función $p: A \times A \to A$.[16] Por ejemplo, sea A un conjunto y $X, Y \subseteq A$, las asignaciones $(X, Y) \mapsto X \cup Y$ y $(X, Y) \mapsto X \cap Y$ son operaciones. En el conjunto $\mathbb{N}$, la suma, la multiplicación y la exponencial son ejemplos de operaciones sobre los naturales.

[15] Fue Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quien planteó lo que es una *relación de equivalencia*, y estableció una notación. Después utilizó el concepto de cociente, la unicidad de un elemento simétrico, así como la composición y los módulos, entre otros conceptos. Évariste Galois (1811-1832) también hizo aportaciones importantes al álgebra. Él redujo las soluciones de ecuaciones a permutaciones de un grupo. La noción de grupo, aunque *grupo* es la noción moderna, comienza a tener importancia, ya no está en relación directa con las teorías físicas.

[16] Bourbaki lo distingue como la composición de objetos en una relación.

Un grupo $\mathfrak{G} = \langle G, *, e\rangle$, donde $G \neq \emptyset$ con una operación binaria ($*: G \times G \to G$) que cumple[17]

G_1 La ley asociativa, $(a * b) * c = a * (b * c)$ con a, b y c en G.

G_2 La existencia del elemento identidad, $\exists\, e \in G$, tal que $\forall\, a \in G\;\; e * a = a$.

G_3 La existencia de inversos, $\forall\, a \in G\; \exists\, a^{-1} \in G$, tal que $a * a^{-1} = e$ y $a^{-1} * a = e$.

Un monoide $\mathfrak{M} = \langle M, *, e\rangle$ es un conjunto $M \neq \emptyset$ con una operación binaria que satisface los axiomas G_1 y G_2.

Un grupo abeliano satisface ser un grupo $\mathfrak{G}$ y además:

G_a La ley conmutativa, $a * b = b * a$ con a y b en G.

Es común que para denotar la operación de un grupo abeliano se considera la operación $+: G \times G \to G$, por eso esta clase de grupo se denota como $\mathfrak{G} = \langle G, +, 0\rangle$, en vez de $\mathfrak{G} = \langle G, *, e\rangle$.

Formalmente el grupo de *simetrías* está definido como $S_X = \{f : X \to X \mid f \text{ biyectiva}\}$, con la composición de funciones y la función identidad. Así, los axiomas de grupo representan adecuadamente el concepto de *simetría*, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Cayley). *Si $\mathfrak{G}$ es un grupo, entonces existen un conjunto X y una función $f: \mathfrak{G} \to S_X$ que es un monomorfismo de grupo.*

Demostración. Sea $\mathfrak{G}$ un grupo y veamos que la función $f: \mathfrak{G} \to S_G$ definida como $f(g): G \to G$ con $x \mapsto gx$ es biyectiva. Observemos que $f(g^{-1})$ es la inversa de $f(g)$. Como $f(g^{-1}) \circ f(g)(x) = f(g^{-1})(gx) = (g^{-1}g)x = x$, entonces $f(g) \in S_G$.

Además, f es morfismo de grupos. Por demostrar que $f(gh) = f(g) \circ f(h)$. Evaluando tenemos que $f(gh)(x) = ghx = f(g)(hx) = f(g) \circ f(h)(x)$. Además, demostremos que $f(e) = e_G$. Pero es fácil ver que $f(e)(x) = ex = x$. Por lo tanto f es morfismo.

[17]Zalamea señala que Évariste Galois fue una influencia para Grothendieck, Galois estudió el conjunto de simetrías y visualizó que éstas tenían ciertas propiedades y este conjunto es lo que actualmente se conoce como *grupo*.

Por último, probemos que f es inyectiva. Supongamos que $f(g) = f(h)$, entonces $f(g)(e) = f(h)(e)$. Por lo tanto $g = ge = he = h$. □

Sean X un conjunto y S_X su grupo de simetría. Consideremos $ev\colon S_X \times X \to X$ con regla de correspondencia $(f, x) \mapsto f(x)$. Notemos que $ev(g \circ f, x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(ev(f, x)) = ev(g, ev(f, x))$. Además, la $ev(id_X, x) = id_X(x) = x$. Lo anterior define una *acción* de S_X sobre X. Asimismo, todo subgrupo G de S_X determina una *acción* $ev\colon G \times X \to X$.

El concepto de *acción* lo necesitaremos en el siguiente capítulo para mostrar ejemplos de *topos de Grothendieck*. Dados G un grupo y X un conjunto una *acción* de G sobre X es una función $\alpha\colon G \times X \to X$ que satisface las siguientes propiedades:

a_1 Sea $x \in X$ y sean g y h en G, entonces $\alpha(g * h, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$.

a_2 Sea $x \in X$, sucede que $\alpha(e, x) = x$.

Denotamos a la acción de α en la pareja (g, x) con $\alpha(g, x) = g \cdot x$. Sea $\alpha\colon G \times X \to X$ una acción, si para cada $g \in G$ definimos $\alpha_g\colon X \to X$ con $\alpha_g(x) = g \cdot x$, entonces α_g es biyectiva. Mostremos que $\alpha_{g^{-1}}$ es la inversa de α_g

$$\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} * g) \cdot x = e \cdot x = x.$$

Análogamente se demuestra que $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)) = x$.

Una estructura algebraica con dos operaciones y que es necesaria para estudiar las conjeturas de Weil es la estructura de anillo. Un *anillo* $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot \rangle$ es un conjunto $R \neq \emptyset$ con dos operaciones binarias, la $+$ (suma) y la $\cdot$ (multiplicación) que satisfacen los siguientes axiomas:

R_1 La suma es asociativa, $(a + b) + c = a + (b + c)$ con a, b y c en R.

R_2 La suma es conmutativa, $a + b = b + a$ con a y b en R.

R_3 Hay un neutro aditivo, $\exists\ 0 \in R$, tal que $\forall a \in R$, $a + 0 = a$.

R_4 Hay inversos aditivos, $\forall a \in R$, $\exists -a \in R$, tal que $a + (-a) = 0$.

R_5 El producto es asociativo, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ con a, b y c en R.

R_6 La ley distributiva, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ con a, b y c en R.

Un *anillo* $\mathfrak{R}$ es *conmutativo* si satisface los axiomas R_1 a R_6, y cumple lo siguiente:

R_7 El producto es conmutativo, $a \cdot b = b \cdot a$, con a y b en R.

Un *anillo con unidad* $\mathfrak{R}$ cumple los axiomas R_1 a R_6 y además:

R_8 Hay un neutro multiplicativo, $\exists\ e \neq 0$ en R, tal que $\forall a \in R\ a \cdot e = e \cdot a = a$. El elemento e es llamado *unidad* o *identidad* de $\mathfrak{R}$.

Un anillo conmutativo $\mathfrak{R}$ con unidad es llamado *dominio entero*, si satisface:

R_9 Cancelación, $\forall\ a$, b y c en R con $c \neq 0$, si $c \cdot a = c \cdot b$, entonces $a = b$.

Un dominio entero $\mathfrak{R}$ se llama *dominio euclidiano* si hay una función $\delta :\ R \to \mathbb{N}$ tal que $\delta(0) = 0$ y para cada $a \in R$, y toda $b \in R \setminus \{0\}$ existen q y r en R tales que

$$a = qb + r \quad \text{y} \quad \delta(r) < \delta(b).$$

Un ejemplo de anillo es $\mathbb{Z}$ que no solo es un anillo conmutativo con unidad, sino que es un dominio euclideano. Otro ejemplo de dominio euclidiano son los polinomios con coeficientes en un anillo $\mathfrak{R}$, pueden ser con una variable $R[x]$ o con una cantidad finita de éstas $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Además, si $\mathfrak{R}$ es conmutativo, estos anillos de polinomios son conmutativos; y si $\mathfrak{R}$ tiene unidad, éstos tienen unidad.[18]

Dado un anillo $\mathfrak{R}$ podemos considerar el espacio R^n, que es similar a $\mathbb{R}^n$, y también consideramos a $R[x_1, \dots, x_n]$. Entre estos conjuntos hay una relación, que es la base de la geometría algebraica, en donde ciertos subconjuntos del anillo representan subconjuntos especiales del espacio, llamados variedades algebraicas.

Dado un anillo $\mathfrak{R}$, un subconjunto $I \subseteq R$ se llama *ideal* si cumple lo siguiente:

I_1 $0 \in I$

[18] Otro ejemplo es $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, que cumple las propiedades de anillo con la adición y la multiplicación de $\mathbb{R}$ y se puede observar que es una estructura parecida a los complejos.

I_2 Si $a, b \in I$, entonces $a + b \in I$.

I_3 Si $a \in I$ y $x \in R$, entonces $ax \in I$.

Un ejemplo de ideal en $\mathbb{Z}$ es el conjunto de múltiplos de n, ya que claramente cumplen I_1-I_3. Para construir otro ejemplo de ideal, tomamos polinomios $p, q \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ y consideramos el conjunto

$$(p, q) = \{ap + bq \mid a, b \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]\};$$

es fácil ver que es un ideal. Observemos que si, en el ejemplo anterior, $p = q$ se tiene un ideal análogo al de los múltiplos de n. Además, se puede generar un ideal con más de dos polinomios.

Un ideal I puede definir una relación de equivalencia en un anillo $\mathfrak{R}$ de la siguiente manera:

$$\text{dados } a, b \in R \quad a \sim b \iff a - b \in I.$$

Como $0 \in I$, esta relación es reflexiva. Como I es cerrado bajo sumas, la relación es transitiva —esta definición está en la sección 2.2— y como I es cerrado bajo productos con elementos de R, entonces la relación es simétrica. Con esta relación de equivalencia se pueden formar clases de equivalencia. Para cada $a \in R$ la clase de equivalencia se denota con $a + I = \{a + i \mid i \in I\}$. Consideremos el conjunto de clases $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$ con las operaciones definidas como:

$$\begin{aligned} &\text{la suma } (a + I) \ + \ (b + I) = (a + b) + I \ \text{ y} \\ &\text{la multiplicación } (a + I) \ \cdot \ (b + I) = (a \cdot b) + I. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En resumidas cuantas, es posible demostrar que R/I es un anillo, la idea general es que R/I hereda las propiedades de R dadas las definiciones usadas. Un ejemplo de ideal consiste en considerar al conjunto de múltiplos de n comúnmente denotado con $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$, examinemos los de la forma $a + n\mathbb{Z}$. Dos de estos objetos son iguales: $a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}$, si $a - b \in n\mathbb{Z}$, es decir, si su diferencia es un múltiplo de n. Por ejemplo: $0 + n\mathbb{Z} = n + n\mathbb{Z}$, $1 + n\mathbb{Z} = (n + 1) + n\mathbb{Z}$, $-2 + n\mathbb{Z} = (n - 2) + n\mathbb{Z}$.

Entonces, podemos formar el anillo cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ denotado por $\mathbb{Z}_n$, que consiste de los números

$$0 + n\mathbb{Z},\ 1 + n\mathbb{Z},\ \dots,\ (n-1) + n\mathbb{Z}.$$

Estas estructuras heredan las operaciones de $\mathbb{Z}$ definidas como en (2.1).

Si además, p es primo, entonces hay inversos multiplicativos, es decir, $\mathbb{Z}_p$ se vuelve una estructura algebraica mucho más relevante para el estudio de las conjeturas de Weil.

En el caso de $n\mathbb{Z}$ es importante notar que no es necesariamente un ideal maximal, por ejemplo $8\mathbb{Z} \subsetneq 4\mathbb{Z}$. Es decir, por cada divisor propio de n podemos encontrar un ideal estrictamente más grande que $n\mathbb{Z}$. De esta manera si p es primo, entonces $p\mathbb{Z}$ es maximal, es decir, como p es primo no puede ser factorizado por otro.[19] Análogamente, un polinomio irreducible $f(x) \in R[x]$ genera un ideal maximal (f).[20]

Siguiendo con la construcción de estructuras algebraicas más complejas veamos qué es un campo. Un anillo conmutativo $\mathfrak{R}$ con unidad es llamado *campo*, si tiene inversos multiplicativos:

R_{10} Inversos, $\forall\ a \neq 0 \in R\ \exists\ a^{-1} \in R$, tal que $a \cdot a^{-1} = e$.

Los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son los ejemplos más conocidos de campos. Continuando con el estudio de las conjeturas de Weil, necesitamos campos de tamaño p^n y lo anterior no basta para tener estos campos; por lo que presentaremos el siguiente teorema.[21]

Teorema 2. [22] *Sean $\mathfrak{R}$ un dominio euclidiano y $a \in R$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

[19]Los ideales generados por un primo no están contenidos propiamente en ningún otro, pero los demás están contenidos en estos.

[20]Un polinomio es irreducible, con coeficientes en R, si no puede factorizarse como producto de polinomios de manera que todos ellos tengan grados menores que el grado del polinomio.

[21]Cuando hablamos de tamaño de un campo estamos señalando del cardinal del conjunto.

[22]A principio del siglo XX para estudiar teoría de ideales se necesitaba conocer la teoría de Galois. Y para estudiar dicha teoría se creó el seminario de Artin y el de Noether, cuyas exposiciones se recuperaron en el libro que escribe Van der Warden y este teorema se escribe en el libro: *Álgebra moderna*. La versión que presento del teorema es una versión reciente (Howie, 2006).

1. *a es irreducible.*[23]

2. *El conjunto de múltiplos de a, (a) es un ideal maximal.*

3. *$R/(a)$ es un campo.*

Una consecuencia de este teorema es que como $p\mathbb{Z}$ es maximal, entonces $\mathbb{Z}_p$ es un campo —tiene inversos multiplicativos—. Otra consecuencia es que estructuras de la forma $\mathbb{Z}_p(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}_p\}$ también son campos, ya que se pueden construir a partir de anillo de polinomios $\mathbb{Z}_p[x]$ y el polinomio irreducible, en $\mathbb{Z}_p$, $x^2 - 2$, es decir, $\mathbb{Z}_p(\sqrt{2}) \cong \mathbb{Z}_p[x]/(x^2 - 2)$.

En el último ejemplo observamos que $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_p(\sqrt{2})$. En este caso diremos que $\mathbb{Z}_p(\sqrt{2})$ es una extensión de $\mathbb{Z}_p$. En general, si k y K son campos entonces K es una extensión de k si hay una función inyectiva $f\colon\ k \to K$ que preserva las operaciones de campo, un monomorfismo. Entre las posibles extensiones de un campo k hay una que es especial en el sentido de que cualquier polinomio con coeficientes en el campo tiene una raíz. Esta extensión se llama cerradura algebraica de k y se suele denotar con $\bar{k}$. Un ejemplo de esto es $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$.

Si tomamos un *ideal* I en $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$, entonces podemos considerar el conjunto

$$X(I) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \ \ \forall\ f \in I\}.$$

A este conjunto se le denomina *variedad algebraica* y representa un lugar geométrico en R^n. Por ejemplo, el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ está dado por los ceros de $x^2 + y^2 - 1$. También se puede considerar un conjunto de puntos $S \subseteq R^n$ y generar el *ideal*:

$$\mathcal{I}(S) = \{p \in R[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid p(\bar{x}) = 0 \ \ \forall\ \bar{x} \in S\}.$$

Los conjuntos $X(I)$ e $\mathcal{I}(S)$ están relacionados como muestran los siguientes resultados, esta relación encontrada por Hilbert, se denomina *Nullstellensatz*.

[23]Un elemento a en un anillo R es irreducible si la factorización $a = bc$ implica $b = u$ o $c = u$, donde u es una unidad, es decir, tiene inverso multiplicativo.

Teorema 3 (Nullstellensatz débil)**.** *Si k es un campo algebraicamente cerrado e I es un ideal contenido propiamente en $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, entonces $X(I)$ es diferente del vacío.*[24]

Teorema 4 (Nullstellensatz)**.** *Sea I un ideal de $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, entonces $\mathscr{I}(X(I)) = rad(I)$.*[25]

El teorema 3 afirma la existencia de puntos en la variedad descrita por I, mientras que el teorema 4 relaciona el ideal I con el proceso de componer X seguido de $\mathscr{I}$. Esto hace evidente la relación entre los ceros de un polinomio y la superficie que describe dicha función, en el caso de campos finitos es un conjunto discreto relacionado con curvas o superficies continuas, cuya síntesis se manifiesta con las conjeturas de Weil. Dichas conjeturas se presentaron en 1949, en un artículo dedicado al estudio sobre el número de soluciones de ecuaciones sobre campos finitos, y en este mismo se escribe sobre su relación con la distribución de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann.

Las conjeturas de Weil

En 1946, Weil extendió el método de función local sobre un campo arbitrario, siendo una pregunta importante en la época: qué era un invariante en una variedad en el sentido de Weil. Fue Serre quien, inspirado en el trabajo de Oscar Zariski (1899-1986), proporcionó una primera respuesta donde planteó que el esquema de una variedad algebraica es la colección de anillos locales de las subvariedades dentro de los campos de las funciones racionales. En estos lugares no hay una topología explícita, por lo que tanto Serre como Chevalley intentaron dar una solución; el primero; se concentró en los campos algebraicamente cerrados y el segundo en las variedades irreducibles. Para mediados de los años cincuenta, Serre propuso una posible solución en gavillas, que era un nuevo método en topología

[24]La demostración de estos teoremas se encuentran en Perrin (2008, pp. 14-15).

[25]En general, si R es un anillo e $I \subseteq R$ es un ideal, entonces...

$$rad(I) = \{x \in R \mid x^n \in I \text{ para algún } n \geq 0\}.$$

propuesto por Leray en 1946. Ya se conocía que los ideales primos dan conjuntos cerrados, es decir, que el conjunto de ideales primos —llamado espectro y denotado Spec(A)— tiene una topología de Zariski. Los esquemas en general vienen de pegar espectros, lo cual la escuela francesa sabía que era la manera de dar una geometría a cada anillo.

En el seminario Cartan se discutió el cómo dar una topología adecuada a los espacios aritméticos Spec(A) de Weil, y que de dicha topología se pudiera tomar la información requerida. Grothendieck estaba convencido de que lo anterior se podía generalizar de tal forma que la solución del problema se escribiera de manera sencilla. Fue uno de sus alumnos, el matemático belga Pierre Deligne (1944-) quien demostró, en los años setenta, la hipótesis de Riemann en el contexto de las variedades algebraicas sobre campos finitos, que se conoce como las conjeturas de Weil.[26]

No es posible asegurar cuál es el comienzo de las conjeturas de Weil, pero si es posible identificar qué problema querían resolver. Se quería resolver ecuaciones del siguiente tipo:

$$a_0x_0^{n_0} + a_1x_1^{n_1} + \cdots + a_rx_r^{n_r} = b.^{27}$$

Para resolverlas en $\mathbb{Z}_p$, Gauss determinó las sumas gaussianas de orden 3 para cada primo de la forma $p = 3n + 1$.[28] Una vez hecho esto, aplicó el mismo método para resolver las sumas de orden 4 para cada primo de la forma $p = 4n + 1$ —estas ecuaciones son de la forma (2.3)—. Como resultado, obtuvo el número de soluciones para las congruencias del tipo $y^2 \equiv ax^4 - b \pmod{p}$ (Weil, 1949). A partir de la hipótesis de Riemann, Weil formuló una serie de conjeturas, cuyo origen se encuentra en las soluciones de las sumas de Gauss, $\sum_{s=0}^{p-1} \exp(\frac{2\pi i s^2}{p})$ para cada primo p (Freitag y Kiehl, 1988). Lo anterior implica que para resolver las sumas de

[26] En la hipótesis de Riemann se conjetura que la distribución de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann se distribuyen sobre la recta $x = \frac{1}{2}$.

[27] Cabe añadir que los coeficientes de este tipo de expresiones, primero se pensaron en los números enteros y con el tiempo se planteó en los racionales. En el artículo (Weil, 1949, p. 497) se plantea con coeficientes en un campo k.

[28] La resolución de estas sumas incluye un caso especial de la conocida hipótesis de Riemann para campos de funciones definidas por ecuaciones sobre el campo primo de p elementos. Estas ecuaciones son de la forma (2.2).

Gauss es suficiente calcular las soluciones de las congruencias de ecuaciones del tipo

$$ax^3 - by^3 \equiv 1 \pmod{p} \tag{2.2}$$

$$ax^4 - by^4 \equiv 1 \pmod{p} \tag{2.3}$$

$$y^2 \equiv ax^4 - b \pmod{p}.$$

La congruencia (2.2) quiere decir que el residuo de la división de $ax^3 - by^3$ entre p es 1. Análogamente, las otras congruencias dicen algo del residuo de la división de un número dividido entre p. Esta relación entre sumas y congruencias permite usar lo que se sabe de $\mathbb{Z}$ porque es un dominio euclidiano.

Como vimos en la sección anterior, $\mathbb{Z}_p$ es un campo. En el caso de las congruencias, notemos que hay un elemento en $\mathbb{Z}_p$ por cada residuo que resulta de dividir un número entre p; por ejemplo, el residuo de la división de $p + 1$ entre p es 1, éste coincide con $1 + p\mathbb{Z} = (p + 1) + p\mathbb{Z}$. De esta forma, las congruencias en (2.2) y (2.3) se vuelven ecuaciones en $\mathbb{Z}_p$.

Así, la discusión acerca de congruencias se puede trasladar a ecuaciones en campos finitos. Es importante observar que la existencia de soluciones es diferente en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Z}_p$. Además, para las conjeturas de Weil, necesitamos campos de tamaño p^r con p primo, observamos que $(x^{p^r-1}) - 1$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$ y por el teorema 2 de la sección anterior, $\mathbb{F}_{p^r} = \mathbb{Z}_p[x]/\langle (x^{p^r-1}) - 1\rangle$ es un campo. Asimismo, es posible mostrar que este campo tiene exactamente p^r elementos. Denotamos con $\mathbb{F}_n$ a un campo finito de n elementos; reparemos en que cualesquiera dos campos con n elementos son isomorfos.

Regresando a ecuaciones en campos finitos de la forma (2.3), Hua-Vandiver (Vandiver, 1946) y Weil mostraron, de manera simultánea, que una estimación de la cantidad de soluciones de ecuaciones de la forma

$$a_0 x_0^{k_0} + \cdots + a_n x_n^{k_n} = 0 \quad (a_0 a_1 \cdots a_n \neq 0) \tag{2.4}$$

en $\mathbb{F}_q$, con $q = p^r$ es

$$N = q^n + O\left(q^{(n+1)/2}\right) \tag{2.5}$$

De aquí es posible conectar este desarrollo con geometría algebraica. Recordemos que en la sección 2.3 vimos que las soluciones del polinomio anterior representa un conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{F}_q^{n+1}$, llamado variedad. Así, el número de soluciones de ecuaciones como (2.4) es el mismo que el número de puntos de cierta variedad. Como explica Dieudonné, transferir el lenguaje geométrico y la intuición a estas variedades es satisfactorio cuando se usa un campo algebraicamente cerrado (Freitag y Kiehl, 1988). De esta forma se consideran las soluciones de la ecuación (2.4) en la cerradura algebraica de $\mathbb{F}_q$ y se dice que tal variedad está definida sobre $\mathbb{F}_q$. En las conjeturas de Weil se usan hipersuperficies no singulares, es decir, variedades X generadas por un polinomio irreducible f tal que las derivadas parciales de f no se anulan simultáneamente en X.

Dado un campo k consideremos el homomorfismo $k[x_1, \dots, x_n] \to \bar{k}$ que manda a cada polinomio $f(x_1, \dots, x_n)$ a $f(a_1, \dots, a_n)$. Si I es el núcleo de dicho morfismo, entonces I es un ideal maximal y $k[x_1, \dots, x_n]/I$ es la mínima extensión de k que tiene a $a_1, \dots, a_n$. Con esto se define el grado de I como el grado de la extensión $k[x_1, \dots, x_n]/I \supseteq k$ y se denota con $gr(I)$.[29] Se puede probar que todo ideal maximal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ tiene asociado un número de puntos en $\overline{k}^n$ igual a $gr(I)$.

Sea X una variedad definida sobre $\mathbb{F}_q$. Se define la función zeta de X como sigue:

$$Z_X(x) = \prod_{P \in I} (1 - x^{gr(I)})^{-1}$$

donde $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ es ideal maximal y $x \in \mathbb{F}_q$.

Sea $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio irreducible en ese campo y $V \subseteq \overline{\mathbb{F}_q}^n$ la hipersuperficie generada por f. Consideramos la función $\Phi : \overline{\mathbb{F}_q}^n \to \overline{\mathbb{F}_q}^n$ definida por

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1^q, \dots, x_n^q).$$

Como los coeficientes de f están en $\mathbb{F}_q$, satisfacen $t^q = t$ y así $f(\Phi(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)^q$. Por lo tanto, $\Phi(X) \subseteq X$ y la restricción a X se llama morfismo de Frobenius para V.

Finalmente, las conjeturas de Weil se pueden enunciar como la existencia de una cohomología que tenga buenas propiedades sobre variedades X irreducibles y

[29] El grado de la extensión $K \supseteq k$ es la dimensión de K como espacio vectorial sobre k.

no singulares de dimensión d.[30] Esta interpretación que le dio Weil a la hipótesis de Riemann permitió la construcción de una función racional que capturó el número de soluciones de un sistema de ecuaciones, con una variedad algebraica sobre un campo finito de tamaño determinado.

Así pues, podemos considerar estos resultados como una secuencia de conjeturas donde se cuentan el número de puntos de variedades algebraicas X sobre campos finitos $\mathbb{F}_q$. Es decir, se quiere encontrar el número de homomorfismos $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_n) \to X$, con n fija y para cada $n \geq 1$. La conjetura nos dice que la función generadora del número de puntos a medida que n varía —la función zeta de Weil— es una función racional con propiedades particulares.

Los Bourbaki sabían que para resolver las conjeturas de Weil se necesitaba una teoría de cohomología adecuada.[31] A partir del trabajo de Deligne, sabemos que todas las conjeturas, excepto una, la hipótesis de Riemann, se derivaron formalmente de la existencia de una teoría cohomológica sobre variedades algebraicas que se comportan, en ciertos aspectos, de manera adecuada. Lo anterior fue posible ya que para resolverlas, se adoptó una perspectiva grothendikiana. Delignie tomó la perspectiva de la teoría dualista que construyó Grothendieck.

2.4 | Estructura topológica

En esta sección se verá la historia de la topología que los Bourbaki publicaron. Ejemplificaré cómo la topología es una herramienta que los físicos pueden usar para medir en un espacio en donde no se tiene una medida estándar, puesto que fue importante buscar ejemplos al estilo estructuralista, que mostraran la necesidad de tener la mayor cantidad de "varas de medir" a la Grothendieck, es decir, para la física sería deseable tener todas las funciones medibles en un espacio topológico. Seguiré escribiendo, como en cada estructura anterior, con notación actual los conceptos imprescindibles para la construcción del *topos de Grothendieck*. Para ello, presentaré las nociones topológicas que Grothendieck generalizó y que estarán

[30] La cohomología y la homología son los principales objetos matemáticos que dan información de un objeto geométrico.

[31] La homología y la cohomología son propiedades duales. La homología es una cualidad extensiva que depende de la forma y parcialmente la mide (Lawvere, 2007).

descritas en el capítulo 3. Finalmente, terminaré con un ejemplo de cubierta que es significativo para la noción de *topos*, porque muestra qué nociones topológicas fueron las que generalizó Grothendieck.

Los Bourbaki comenzaron su texto sobre topología mencionando que el cálculo infinitesimal ayudó a modelar las leyes del movimiento en la física, por lo cual los conceptos de *límite* y *continuidad* se consideraban importantes. En este desarrollo influyó el estudio del análisis que hizo Riemann.[32] Ellos consideraron a este matemático como el creador de la topología porque fue él, a decir de ellos, quien intentó desentrañar lo que es hoy un espacio topológico y concibió la idea de estudiar una teoría autónoma de espacios, además definió los invariantes topológicos como los números de Betti.[33]

El programa de Riemann resultó ser la materia de estudio de la topología moderna y, en gran medida, de la topología que Bourbaki discutió en su comunidad. Ellos dijeron que Riemann, al definir los números de Betti para una superficie, dio la multiplicidad de un número arbitrio y luego aplicó estas ideas a la teoría de integración por lo que inauguró la topología algebraica. Durante los años cincuenta y sesenta, los Bourbaki analizaron parte de esta teoría, en particular las ideas de invariantes topológicos. Las ideas conjuntistas de Cantor y Dedekind también fueron relevantes en el desarrollo de la topología, pues la difusión de estas nociones por parte de las escuelas alemana y francesa —Jordan, Poincaré, Klein, Hadamard, Borel, Lebegue, entre otros— posibilitó el comienzo de su aplicación, no sólo a puntos sino a curvas o funciones. Con el tiempo llegó a ser común pensar a una función como un argumento, y un conjunto de funciones como un análogo a un conjunto de puntos. Además, señalaron que el matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942) comenzó con el estudio de la topología moderna al apoderarse de la

[32]Riemann estuvo bajo la tutoría de Gauss cuando realizó su doctorado. Él se especializó en variable compleja, se interesó en construir una teoría general; además, dio condiciones para que una función fuera integrable, estudió las funciones abelianas, y se interesó por la función zeta, Riemann la consideró como una función en los complejos, él quería dar estimaciones del número de primos menores a un número determinado. Esto sólo es parte de su trabajo, aquí no mencionamos su interés en topología.

[33]Estos número se pueden pensar como el número máximo de cortes que se pueden hacer a un espacio sin que éste se desconecte. Hay que tener cuidado en esta lectura pues es un resumen de lo que Bourbaki escribió de la historia de la topología.

noción de vecindad y elegir algunos axiomas de Hilbert sobre vecindades en el plano. Esta teoría la estudió la escuela rusa que estaba interesada en la metrización de los espacios.[34] Las nociones que ellos remarcaron son los espacios compactos, los productos de estos espacios, entre otros.[35]

Definición 5. Un *espacio topológico* es una pareja (X, τ) donde X es un conjunto y $\tau \subseteq P(X)$ que satisface los siguientes axiomas:

1. X y $\emptyset \in \tau$

2. Si U y $V \in \tau$,entonces $U \cap V \in \tau$.

3. Para toda I, si $U_i \in \tau$ para toda $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman *abiertos* y se dice que τ es una topología para el conjunto X. Si no es necesario aclarar cuál es la topología, se dice que X es un *espacio topológico*. Además, se define el concepto de cerrado como el complemento de un abierto, es decir $C \subseteq X$ es cerrado si $X - C$ es abierto.[36]

Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, es posible dar al menos dos topologías al conjunto X, una es $P(X)$, que es la topología más grande —o bien, más fina— y se le llama a $(X, P(X))$ *espacio discreto*. De manera opuesta, se puede dar a X la topología más chica —o bien, más gruesa— que por el punto 1 de la definición debe ser $\{X, \emptyset\}$, donde al espacio $(X, \{X, \emptyset\})$ se le denomina *espacio codiscreto* o *caótico*.

El concepto de *espacio topológico* es una noción importante en física clásica. Se define como la generalización de un espacio medible, es decir, una estructura (Y, σ) donde Y es un conjunto y σ es una σ-álgebra sobre Y. Una σ-álgebra satisface los siguientes axiomas:

[34] Como fundadores de la escuela rusa se encuentran: Dimitri Fedorovich Egorov y Nikolai Nikolaevich Luzin. La escuela polaca sufrió varios conflictos políticos y como resultado no siempre se consideró parte de la escuela rusa. Sin embargo, hay matemáticos como Zygmunt Janiszewski, Richard Courant, Theodor Kaluza muy reconocidos.

[35] Los Bourbaki reconocieron la contribución de los conceptos de *filtro* y *ultrafiltro* y afirmaron que estas nociones aclara y simplifica la idea de sucesión convergente en la topología. Se cuenta que la noción de *filtro* se originó en uno de los congreso de Bourbaki, se dice que en un descanso Chevalley se quedó escribiendo dicho planteamiento.

[36] En general, los únicos abiertos y cerrados al mismo tiempo son el total y el vacío.

1. Y y $\emptyset \in \sigma$
2. Si $A_1, A_2, \ldots \in \sigma$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma$.
3. Si $A \in \sigma$, entonces $Y - A \in \sigma$.

Intuitivamente, las σ-álgebras se pueden pensar, que son los subconjuntos de Y, que están en σ y que sí se pueden "medir". Por ejemplo, en los reales se puede definir la medida del intervalo (a, b) como $b - a$, por lo que la σ-álgebra generada por estos intervalos representa los subconjuntos de reales que, en efecto, sabemos medir. Los elementos de dicha álgebra reciben el nombre de *borelianos*. Así, una medida sobre Y es una función $\mu: \sigma \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $A_1, A_2, \ldots \in \sigma$ son ajenos dos a dos, entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

El matemático indio Varadarajan en el libro *Geometry of Quantum Theory* comenta, respecto a la medida para los físicos: "un sistema físico tiene asociado un conjunto de estados llamado *estado fase* Y". Este conjunto tiene sus *observables*, es decir, las posibles mediciones que se pueden hacer. Los observables se modelan con una σ-álgebra sobre Y, una medida $\mu: \sigma \to \mathbb{R}$ representa un aparato de medición y $\mu(A)$ es el resultado de la medición, con $A \in \sigma$. ¿Qué pasa si se tienen todas las posibles mediciones? Desde el punto de vista físico probablemente es imposible. Pero lo que sí es posible hacer, es una idealización matemática por medio de un conjunto de funciones, es decir, al variar σ y μ se obtiene el conjunto $\{\mu: \sigma \to \mathbb{R} \mid \sigma \text{ es una } \sigma\text{-álgebra y } \mu \text{ es una medida}\}$ que representa toda la posible información del sistema.

Por otro lado, un conjunto con una σ-álgebra recibe el nombre de *espacio medible*. Además, cuando se considera también una medida, el espacio (Y, σ, μ) recibe el nombre de *espacio de medida*. Si se consideran dos espacios medibles (Y, σ) y (X, ρ), una medida sobre X, digamos $\eta: \rho \to \mathbb{R}$ y una función $f: X \to Y$, entonces es posible definir una medida $\mu: \sigma \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera: $\mu(A) = \eta(f^{-1}(A))$ para todo $A \in \sigma$, pero esta expresión sólo tiene sentido cuando $f^{-1}(A) \in \rho$. Por lo que se dice que una función $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ es *medible* si para cualquier $A \in \sigma$ se tiene que $f^{-1}(A) \in \rho$.

Así, se considera el espacio de funciones $\hom((X,\rho),(Y,\sigma)) = \{f\colon X \to Y \mid f \text{ es medible}\}$.[37] Luego, en algunos casos sucede:

$$\hom((X,\rho),(Y,\sigma)) = \hom((X,\rho'),(Y,\sigma)), \text{ donde } \rho \neq \rho'.$$

Dado que ρ y ρ' son σ-álgebras distintas, se esperaría que los espacios de funciones sean distintos, pero al ser iguales debe haber alguna estructura en X que no está siendo tomada en cuenta y ello obliga a que estos espacios de funciones no cambien. La estructura que lo sostiene es la topología. Con la estructura de un espacio de medida es posible definir una topología —definiendo un espacio métrico—, de tal forma que una función medible se vuelve una función continua. Una función entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ es continua si para todo abierto $V \subseteq Y$ se cumple que $f^{-1}(V)$ es un abierto en X. Finalmente, se puede observar que hay muchas σ-álgebras que, junto con una medida, definen la misma topología y, por tanto, el mismo espacio de funciones continuas.

Un ejemplo importante

Una de las dificultades que enfrentaron en el seminario Cartan fue la modificación de la cohomología, pues se quería obtener información algebraica que, únicamente con la topología no se podía encontrar. Serre se enfrentó con la topología de Zariski, donde se tenían abiertos muy grandes.[38] Para la escritura del *Tôhoku* resultó difícil trabajar con esta topología, por ello Grothendieck consideró el conjunto de abiertos de un espacio topológico como una categoría y trasladó la intuición de “cubrir” y “pegar” de manera adecuada. La idea es que las operaciones básicas sobre conjuntos abiertos, intersecciones finitas y uniones arbitrarias podían caracterizarse en la categoría de pregavillas, lo cual se discutirá en el siguiente capítulo. Como veremos, se puede entender a una gavilla como mirar un mundo muy grande —universo de los conjuntos— donde la categoría de todas las gavillas construye el mundo de tal

[37] Este conjunto toma todas las funciones medibles de un espacio a otro.
[38] Grothendieck menciona que es una topología sin ley ni dios (Grothendieck, 1985).

manera, que permite resolver el problema en cuestión (MacLarty, 2003), perspectiva que va más en el sentido lógico que geométrico.[39]

Para ver un ejemplo del significado de “cubrir” y “pegar”, veamos que la continuidad de una función es un comportamiento “local”, es decir, se puede pasar de lo global a lo local; y si lo local es compatible, entonces se puede pasar a lo global.

Sean X y Y espacios topológicos. Si $U \subseteq X$ es un abierto y $\{U_i \subseteq U \mid i \in I\}$ es una familia de abiertos que cubre a U, entonces toda función continua $f\colon U \to Y$ se puede restringir a cada abierto U_i, es decir, la función $f|_{U_i} : U_i \to Y$ es continua.[40] Por otro lado, supongamos que para cada $i \in I$ tenemos una función continua $f_i : U_i \to Y$, es decir, consideramos la familia $\{f_i \mid i \in I\}$. Si esta familia cumple que para cualesquiera $i, j \in I$, $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$, entonces hay una única función continua $f\colon U \to Y$ tal que $f|_{U_i} = f_i$. En este caso la función f es la unión $\bigcup_{i\in I} f_i$.

Como este ejemplo será importante para la construcción del *topos*, haré algunas observaciones acerca de los conceptos que aparecen. Primero, las cubiertas de U tienen las siguientes propiedades:

1. La familia $\{U_i\}$ cubre a U.

2. Si $\{U_i \mid i \in I\}$ cubre a U y $V \subseteq U$ es un abierto, entonces la familia $\{V \cap U_i \mid i \in I\}$ cubre a V.

3. Si $\{U_i \mid i \in I\}$ cubre a U, y para cada $i \in I$ la familia $\{U_{ij} \mid j \in I_i\}$ cubre a U_i, entonces $\{U_{ij} \mid i \in I,\ j \in I_i\}$ cubre a U.

Además, si $C(X, Y)$ denota al conjunto de funciones continuas de X en Y, entonces la restricción del abierto U a cada U_i se puede escribir como una función $C(U, Y) \to C(U_i, Y)$. Para el resto del ejemplo se puede decir que una familia $\{f_i \in C(U_i, Y) \mid i \in I\}$ es compatible si $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ (notemos que esta condición es equivalente a la del inicio del ejemplo). Así, las funciones continuas satisfacen

[39] Esto se traduce como encontrar el *topos* adecuado.

[40] Dado un espacio topológico X y un abierto U, diremos que una familia de abiertos $\{U_i \mid i \in I\}$ cubre a U si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$.

que toda familia compatible tiene una única amalgama, es decir, existe una única $f \in C(U, Y)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$.

Hay muchas cubiertas de U que definen las mismas funciones continuas $f\colon U \to Y$. Por ejemplo, si $\{U_i \mid i \in I\}$ es una cubierta de U, y $W \subseteq U_i$ es un abierto, entonces la familia anterior y $\{U_i \mid i \in I\} \cup \{W\}$ definirán las mismas funciones continuas. Esto es cierto porque toda familia compatible para la segunda familia debe satisfacer $f_i|_W = f_W$.

Para evitar esta multiplicidad de cubiertas definiendo la misma función continua, se puede restringir nuestra atención a cierto tipo de cubiertas. Como lo sugiere el ejemplo del párrafo anterior, debemos hacer que las cubiertas sean cerradas bajo subconjuntos abiertos. Sea C una familia de subconjuntos abiertos de U, diremos que C es una criba sobre U si cada vez que $V \in C$ y $W \subseteq V$ es un abierto, entonces $W \in C$. Además las cribas cubrientes satisfacen las siguientes propiedades:

1. La criba total $\{V \subseteq U \mid V \text{ es abierto}\}$ cubre a U.

2. Si C es una criba que cubre a U y $V \subseteq U$ es abierto, entonces $\{W \subseteq V \mid W \in C\}$ es una criba que cubre a V.

3. Si C es una criba que cubre a U, y S es una criba sobre U tal que para todo $V \in C$, la criba $\{W \subseteq V \mid W \in S\}$ cubre a V, entonces S cubre a U.

Lo anterior nos servirá para analizar las generalizaciones que propuso Grothendieck en la construcción del *topos*. Y poder plantear un camino posible en la reconstrucción de este concepto.

Conclusiones

En este capítulo se revisaron las estructuras matemáticas que los Bourbaki pensaron como: de orden, algebraica y topológica. Con base en éstas fue que ellos organizaron los temas de su proyecto editorial y plantearon que eran fundamentales para la enseñanza de la matemática. El acercamiento matemático —de dichas estructuras— que se realizó en el trabajo no fue exhaustivo, sólo se escribió lo necesario para entender de forma general las conjeturas de Weil y para la reconstrucción del *topos* *de Grothendieck* que se abordará en el siguiente capítulo. Esta forma de abordar la reconstrucción —desde un punto de vista matemático e histórico— resultó adecuada para discutir, al final de la tesis, algunas interpretaciones que se le dan al *topos.* Así también para los ejemplos que se escriben en el siguiente capítulo.

El método de forcing que surgió en la lógica se relaciona con una estructura categórica que se origina en la geometría algebraica. Si bien, la teoría de *topos* comenzó desde la publicación del *Tôhoku*, en la década de los cincuenta, esta teoría no se estudió por los Bourbaki, ni fue empujada por una parte de la escuela francesa. Únicamente se trabajó en los seminarios de Grothendieck y, cómo resultado, la perspectiva lógica del concepto no se observó sino hasta quince años después.

Estudiar las conjeturas de Weil desde un punto de vista matemático mostró la necesidad de construir un lugar en donde lo discreto y lo continuo puedan convivir; además, se observaron algunas de las preocupaciones que los Bourbaki discutían, principalmente una teoría de cohomología. Finalmente, en la sección 2.4 se escribieron las nociones que nos ayudarán a realizar una reconstrucción del *topos* con base en la generalización de las nociones que se anotan en dicha sección y que Grothendick llamará "intuiciones" topológicas.

3 | Matemática de Grothendieck

> La mayoría de los matemáticos [...] se inclinan por limitarse a un marco conceptual, a un "Universo" fijado de una vez por todas —el que, esencialmente, encontraron "listo" cuando fueron a la escuela—. Son como los herederos de una gran y hermosa casa, toda arreglada, con sus salas de estar y cocinas y talleres, y sus ollas y utensilios para todos, con los que hay [...] algo que cocinar y arreglar (Grothendieck, 1985, p. 38).

3.1 | Introducción

Recogiendo lo más importante del texto, en el capítulo 1 discutimos la importancia de la escuela Bourbaki en la formación de Grothendieck y en la matemática; en el captítulo 2 subrayamos que las conjeturas de Weil sugieren la construcción de un lugar en donde lo continuo y lo discreto puedan convivir; además, se señalaron las principales intuiciones topológicas que Grothendieck generalizó y que mostraremos cómo las interpretamos. Por ello, definiremos los tecnicismos necesarios para construir el *topos de Grothendieck* y mostraremos ejemplos de diferentes áreas de la ciencia. Nos hubiera gustado escribir, desde la perspectiva que sigue la tesis, las discusiones de los seminarios Cartan y Chevalley, para así mostrar un paso terso entre la matemática moderna y contemporánea; sin embargo, por cuestión de espacio y tiempo nos centraremos únicamente en la construcción del *topos*. Estamos convencidos que la perspectiva histórica, filosófica y matemática han nutrido y esclarecido la genealogía de este concepto.

Si los Bourbaki estaban comprometidos en resolver las conjeturas de Weil; y estas nos sugieren tener un lugar en donde lo continuo y lo discreto puedan convivir, Grothendieck asumió esta tarea usando todas las herramientas matemáticas a su alcance. Por ello, Jean-Pierre Marquis afirma en su libro *From a Geometrical Point of View* que fue él quien amplió la noción de espacio a la de *topos*. Para Grothendieck, la idea de *topos* proporciona una síntesis de la geometría algebraica, la topología y la aritmética. Pensaba que cada área de las matemáticas permitía ver a un objeto matemático desde distintos puntos de vista; de este modo, se podía tener una visión más amplia de éste. Asimismo, le interesaba tener una comprensión de lo continuo, lo discreto y la forma, es decir, de la magnitud, el número y la topología.

Con esta perspectiva trabajó en análisis funcional, álgebra homológica, topología, álgebra, geometría analítica, grupos algebraicos, grupos discretos, grupos formales, aritmética y geometría algebraica.[1] En suma, para Grothendieck conocer era comprender en sus aspectos esenciales.

Grothendieck aprendió y observó esta forma de hacer matemáticas al integrarse al seminario de Henri Cartan, estudiar con Monsieur Larey en el Collège de France y participar en el seminario Bourbaki.[2] Se formó con la convicción de que la matemática debía partir del estudio de los fenómenos generales, casi "universales"; esta perspectiva corresponde a Bourbaki, tal como se expuso en el capítulo 1.

Después de su salida de Bourbaki, Grothendieck manifestó su propio estilo de hacer matemáticas, el cual no sólo le permitió trascender en las prácticas en las que se formó, sino también concebir, desde sus cimientos, una estructura que le ayudó a sintetizar tres áreas de las matemáticas: el análisis, la aritmética y la topología. Desde su perspectiva, los espacios topológicos, las funciones continuas y el espacio de funciones formaron parte fundamental de la práctica matemática en la que se formó y por tanto debían tener un lugar relevante en su propuesta.

Los historiadores de teoría de categorías identifican el inicio de la teoría con el artículo *A General Theory of Natural Equivalences* de Mac Lane y Eilenberg, de 1945; sin embargo, el *Tôhoku* fue un punto de inflexión que modificó y configuró la práctica de la matemática contemporánea, ya que en este documento Grothendieck expuso el fundamento para la cohomología de cualquier *topos*. Por esta razón, el *topos de Grothendieck* forma parte de la matemática contemporánea, en tanto esta noción es la síntesis de una perspectiva estructuralista y extiende la posibilidad de construir universos matemáticos. Comprender la esencia del espacio topológico, la función continua y los espacios de funciones, le permitió a Grothendieck examinar

[1]Propuso técnicas de construcción de espacios analíticos, el teorema de dualidad local, formulación del teorema de tipo de Riemann-Roch, teorema de De Rham, cohomología cristalina completa, espacios rígidos-analíticos, etcétera.

[2]Grothendieck cuenta que no conocía la definición de espacio topológico ni tenía mucha idea de los conceptos que en estos círculos se discutían; sin embargo, jamás se sintió un extraño.

sus propiedades intrínsecas. Con esto pudo generalizar una noción adecuada de *espacio matemático*.[3]

Esta discusión se insertó en un problema mayor: cómo construir un lugar donde lo continuo y lo discreto convivieran. Para resolverlo, Grothendieck trazó una ruta. No había una demostración en matemáticas que probara que este lugar no se podía construir en el marco formal de la lógica y los conjuntos; sin embargo, con el lenguaje categórico resultó posible y natural. Para Grothendieck ni la matemática clásica ni la moderna bastaron para proponer nuevas construcciones en donde habitaran conceptos duales.[4] Es por ello que para construir esta nueva casa, para ser habitada por las nuevas generaciones de matemáticos, requería de conceptos dados por la teoría de categorías, como: funtor covariante, funtor contravariante, transformación natural, límites, colímite, etcétera, y su aplicación en categorías como **Con**, **Gru**, **Top**, **M**, **P** y $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$.[5]

La discusión que Grothendieck tomó como punto de partida tiene sus orígenes en la conjetura de Weil; en el capítulo anterior se mencionó que trató de solucionarla calcando un modelo continuo para estudiar una geometría algebraica de característica p, para cada p primo. A partir de lo anterior, Grothendieck señaló que eso implicaría el divorcio de lo discreto y lo continuo:

> Estos nuevos objetos geométricos [sc. geometrías de característica p] adquirieron una importancia creciente desde principios de siglo [XX], en particular por sus estrechas relaciones con la aritmética, la ciencia de la estructura discreta por excelencia[...], las célebres *conjeturas de Weil*. Conjeturas absolutamente pasmosas, a decir verdad, dejaban entrever, en esas nuevas "variedades" —o "espacios"— de naturaleza discreta, la posibilidad de ciertas construcciones y argumentos que hasta entonces sólo parecían posibles en el cuadro de los "espacios" considerados dignos de tal nombre por el análisis; a saber, los espacios llamados "topológicos" —donde tiene sentido la noción de variación continua— (Grothendieck, 1985, p. 57).

[3]El espacio de funciones es el concepto más relevante si adoptamos la perspectiva de un conjunto variable, según F. William Lawvere. No hay una definición como tal pero se puede pensar como un elemento de un *topos*.

[4]Los conceptos duales fueron parte de la discusión del seminario Bourbaki y Grothendieck fue de los primeros en tratar de formalizar esta idea.

[5]La primera categoría es la de conjuntos, la segunda de grupos; además tenemos la de espacios topológicos, un monoide visto como categoría, un preorden visto como categoría y la de pregavillas.

Entre 1958 y 1969 se dedicó a construir una teoría robusta con la cual se pudieran resolver, de forma clara, las conjeturas de Weil. Para lograrlo necesitaba crear un lugar en donde el mundo aritmético y los espacios de magnitud continua coexistieran. Por ello, decidió concentrarse en la cohomología de los espacios topológicos y de grupos, pues estaba convencido de que había algo común en estos dos tipos de cohomología y trabajó para explicitar un "patrón" que las relacionara.

3.2 | Matemática contemporánea

En la década de 1950, Mac Lane caracterizó de manera categórica toda el álgebra lineal, y Grothendieck le aplicó el análisis complejo a las funciones lineales de variación continua en dicho campo. La relevancia de las categorías en el siglo XX permitió que la matemática avanzara de manera cualitativa. Las categorías permitieron que se observara que para toda clase de objetos matemáticos; como espacios vectoriales, grupos, espacios topológicos, etcétera; no sólo importan las propiedades de los objetos, sino cómo se relacionan mediante funciones.[6] Esto hace que los entes matemáticos estudiados se vuelvan *categorías* (Eilenberg y Mac Lane, 1945). Estas construcciones fueron posibles gracias a las discusiones entre las ideas estructuralistas de los Bourbaki y el lenguaje categórico de la escuela estadounidense. Mac Lane comentó que este lenguaje no fue adoptado por los franceses a pesar de que él, junto con Eilenberg y otros, lo promovieron.[7] En el seminario de Cartan se discutió gran parte de la geometría algebraica de Francia, sus debates se centraron en la posibilidad de modificar la cohomología de espacios y, a pesar de que trabajaban con funciones que se comportaban como funtores, no introdujeron este lenguaje ni incluyeron este concepto como parte de su aparato conceptual base. Entre 1945 y 1956, los fundadores de esta teoría pensaron que las categorías eran únicamente un lenguaje conveniente, o bien, un marco general con el cual se podían expresar ideas matemáticas matemáticas de manera heurística.

[6] La importancia de las funciones que preservan estructura se discute desde la época de Emmy Noether. Es común usar morfismo y homomorfismo como sinónimos; en general, se puede pensar a una flecha como el proceso de pasar de una estructura a otra.

[7] Visto desde un punto de vista actual el lenguaje de categoría en principio parece ser una herramienta más ergonómica que el lenguaje usado por los Bourbaki.

Este lenguaje no iba ser incluido como parte de su propuesta de reconstrucción de la matemática.

Grothendieck no fue el único que hizo posible que las construcciones con categorías fueran un objeto de estudio. En 1958, Daniel Kan (1927-2013) introdujo el concepto de funtores adjuntos, el cual permitió estudiar de manera general y unificada muchas nociones matemáticas, incluidos los conceptos lógicos y fundacionales.[8] De acuerdo con (Marquis, 2009), después de la publicación de estos dos trabajos y aproximadamente hasta los años setenta, la investigación en categorías puede dividirse en tres momentos. En el primer periodo, mientras Cartan y Eilenberg estudiaban las aplicaciones de la topología algebraica, Grothendieck reescribió los fundamentos de la geometría algebraica y centró su atención en la solución de las conjeturas de Weil utilizando categorías. Durante el segundo periodo se estudió el desarrollo, las aplicaciones y las extensiones de las categorías abelianas. Finalmente, en la última etapa se estudiaron las diferentes áreas de la matemática en situación contigua, en particular las mónadas.

Para tener una idea intuitiva acerca de las categorías, es útil pensarlas como entidades constituidas con una colección de objetos y una colección de flechas regidas por axiomas.[9] Comenzaré con la presentación formal de una categoría y después la clarificaré mediante algunos ejemplos. Después continuaré con un ejemplo sobre dualidad, seguiré con la noción de transformación natural, categoría opuesta y el teorema de Yoneda. Finalmente, discutiré las intuiciones topológicas que Grothendieck generaliza para la construcción de su propuesta de *topos*.

Definición 6. Una categoría **C** consta de lo siguiente:

1. Una colección de objetos A, B, C...

[8]Kan era un matemático de origen holandés. En 1955 se doctoró en la Universidad Hebrea bajo la tutela de Eilenberg. Fue profesor emérito del Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT), donde enseñó desde principios de los años sesenta.

[9]La noción de flecha en teoría de categorías es una abstracción de la noción de *morfismo*. En general, en una categoría **C** un *morfismo* es una flecha entre dos objetos. En particular, un *endomorfismo* de un objeto X en una categoría **C** es un *morfismo* $f\colon X \to X$. La noción de *monomorfismo* es la generalización del concepto de función inyectiva de conjuntos. La noción dual en categorías es el concepto de *epimorfismo*; esta noción generaliza el concepto de función suprayectiva en conjuntos. Un *isomorfismo* es una flecha que tiene inversa. Un *automorfismo* es un endomorfismo que es isomorfismo.

2. Una colección de flechas $f\colon\ A \to B$, $g:\ C \to D$...

que satisfacen que para cada objeto A en **C** hay una flecha $1_A:\ A \to A$. Además, hay una composición de flechas. Si $f\colon\ A \to B$ y $g:\ B \to C$, entonces $g \circ f\colon\ A \to C$ cumple los siguientes axiomas:

i La composición es asociativa, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

ii Si f cumple lo anterior, entonces $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$. Es decir, $1_A(f) = f$ y $f(1_B) = f$.

Vistas así, las categorías resultan abstractas. Los ejemplos que presentaré a continuación no sólo tienen como objetivo mostrar instancias de categorías que sean fácilmente comprendidas, sino además mostrar que la práctica matemática nos muestra la existencia de algunas categorías particulares. También me gustaría mostrar mediante ejemplos la manera en que las categorías muestran cómo codifican la información de las teorías matemáticas. Sobre conjuntos, la categoría se denota **Con**. Sus objetos son conjuntos, $X, Y, Z\ldots$ y sus flechas son funciones, equipadas con la composición usual, donde $1_X\colon\ X \to X$ es la función identidad. Como la composición usual de funciones es asociativa, y puesto que al componer cualquier función con la identidad, tanto por la derecha como por la izquierda, resulta ser la misma función, entonces **Con** es una categoría.

Una categoría que codifica la información de una forma diferente a **Con** es un monoide visto como categoría. Dado un monoide $(M, \cdot, e)$, construimos la categoría **M** cuyo único objeto es $*$. Hay una flecha en **M** para cada elemento del monoide. Además, la composición es la multiplicación de M, es decir, $n \circ m = n \cdot m$. Observemos que si $m:\ * \to *$, $n:\ * \to *$ y $s:\ * \to *$ son elementos de M, entonces $(n \circ m) \circ s = (n \cdot m) \cdot s = n \cdot m \cdot s = n \cdot (m \cdot s) = n \circ (m \circ s)$. Es decir, la composición es asociativa.

Para terminar la prueba, afirmamos que $e:\ * \to *$ es la flecha identidad, ya que si $m:\ * \to *$, entonces $m \circ e = m \cdot e = m$ y $e \circ m = e \cdot m = m$. Por tanto, **M** es una categoría. Una representación de la categoría sería:[10]

[10]Hay que destacar que en esta representación no se dibujan todos sus morfismos.

$$\begin{tikzcd} * \arrow["e", loop left] \arrow["m", loop above] \arrow["n", loop right] \end{tikzcd}.$$

La categoría de grupos se denota **Gru**. Sus objetos son grupos $G, H, K \dots$ y sus flechas son homomorfismos, donde $1_G : G \to G$ es el homomorfismo identidad. En este caso, la representación categórica propicia una mejor comprensión de la situación de sus elementos esenciales.

La categoría de espacios topológicos se denota **Top**. Sus objetos son espacios topológicos $X = (X, \tau)$, $Y = (Y, \mu)$, $Z = (Z, \eta) \dots$ y sus flechas son funciones continuas, donde $1_X : X \to X$ es la función identidad. Las categorías anteriores tienen una estructura muy parecida a la categoría de conjuntos, ya que la relación entre sus objetos son funciones.

Observemos otro tipo de categoría que es diferente, constructivamente, a las anteriores. Sea $(P, \leq)$ un preorden.[11] Un preorden visto como una categoría se denota **P** y tiene como objetos a los elementos de P cuya flecha $p \to q$ existe si $p \leq q$. Es importante observar que entre cada par de objetos a lo más hay una flecha. Por transitividad hay una composición si $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \leq r$; lo anterior se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & q \arrow[d, "g"] \\ & r. \end{tikzcd}$$

Se ha mencionado que la noción de funtor no era desconocida para los Bourbaki, pues ellos estuvieron interesados en mapear estructuras y promovieron el uso del método axiomático para definir conceptos generales. En este contexto es relevante la información que resulta de vincular dos categorías. Observemos su definición formal.

Definición 7. Sean **C** y **D** dos categorías. Un funtor (covariante) $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ consiste de una función en objetos $F_0 : Obj(\mathbf{C}) \to Obj(\mathbf{D})$ y además de una función en flechas que se escribe como $F_1 : Ar(\mathbf{C}) \to Ar(\mathbf{D})$ que cumple lo siguiente:

[11]El preorden $\leq$ cumple con ser una relación reflexiva y transitiva sobre P. A un preorden también se le denomina COPO.

1. $\mathrm{dom}(F_1(A \to B)) = F_0(\mathrm{dom}(A \to B))$
2. $\mathrm{cod}(F_1(A \to B)) = F_0(\mathrm{cod}(A \to B))$
3. $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$
4. $F(1_A) = 1_{FA}$

La definición se explica con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & & FA \arrow[d, "Ff"'] \\ B & \text{en } \mathbf{C} \arrow[r, mapsto] & FB. & \text{en } \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, sea M un monoide. Un funtor que va de la categoría $\mathbf{M}$ a la categoría de conjuntos, $F\colon \mathbf{M} \to \mathbf{Con}$ debe satisfacer $F(*) = X$ donde X es cualquier conjunto. Además observemos el siguiente diagrama:

$$F(* \xrightarrow{m} *) \qquad = \qquad \begin{array}{l} X \xrightarrow{\alpha_m} X \\ x \longmapsto m \cdot x, \end{array}$$

que explica la evaluación de $x \in X$ en la flecha $\alpha_m(x) = m \cdot x$. Además, como F es funtor, cumple lo siguiente:

$$F(n \circ m) \;=\; F(* \xrightarrow{m} * \xrightarrow{n} *) \;=\; F(* \xrightarrow{n} *) \;\circ\; F(* \xrightarrow{m} *).$$

Por lo que $\alpha_{n \cdot m} = \alpha_n \circ \alpha_m$. Por un lado, $\alpha_{n \cdot m}(x) = (n \cdot m) \cdot x$. Por otro lado, $\alpha_n \circ \alpha_m(x) = \alpha_n(m \cdot x) = n \cdot (m \cdot x)$. Así, $(n \cdot m) \cdot x = n \cdot (m \cdot x)$. Finalmente, $F(e) = 1_X\colon X \to X$, es decir, $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.

Definición 8. Una función $\alpha\colon M \times X \to X$ se llama acción de M sobre X si satisface que $\alpha(n \cdot m, x) = \alpha(n, \alpha(m, x))$ y $\alpha(e, x) = x$.

El concepto de acción, desarrollado en el capítulo 2 mostró que la función *ev* fue una acción natural, es decir, la estructura de grupo se encajó bien en un conjunto; dicho de otra forma, el grupo G actuó sobre el conjunto X. Lo que se mostró en esta sección 2.3 es que una acción es un homomorfismo entre el grupo G y el grupo de simetría S_X. Como pudo verse, un monoide visto como una categoría nos permitió utilizar el potencial de esta teoría, ya que cada flecha de la categoría $\mathbf{M}$ se mandó bajo el funtor F a la acción α_m. Esta visión brindó una perspectiva más general de lo que pasa con $\mathbf{M}$ cuando se manda a $\mathbf{C}$, bajo F.

Grothendieck vio en las categorías un campo de expresividad para los conceptos duales y sus deducciones, y observó que se podían obtener resultados más profundos. En la discusión con Bourbaki planteó que si se establecía determinada categoría con ciertas propiedades, a partir de ésta se podían obtener otras categorías mediante procesos de construcción que tuvieran esas propiedades. Incluso, observó que esto permitiría construir categorías mediante propiedades duales a las de las categorías con las que ya se contaba; estas categorías se llamaron, por lo general, categorías duales. Los ejemplos que se muestran enseguida permiten visualizar la dualidad en una categoría. Sean **Gra** la categoría de gráficas reflexivas y **Con**, se construye el *funtor pedazos* que va de las gráficas reflexivas a sus componentes conexas, denotado como $p_! : \mathbf{Gra} \to \mathbf{Con}$.[12] Sean C_G una componente conexa de G tal que $x \in C_G$, y C_H una componente conexa de H tal que $f(x) \in C_H$, así $p_!(C_G) = C_H$ donde la evaluación no depende de x, ya que para cualquier otro vértice $y \in C_G$ conectado con x, los vértices $f(x)$ y $f(y)$ estarán conectados en C_H.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "f"'] & & p_!(G) \arrow[d, "p_! f"] & = \{\text{componentes conexas de } G\} \\ H \arrow[rr, phantom, "\overset{p_!}{\longmapsto}"] & & p_!(H) & = \{\text{componentes conexas de } H\}. \end{tikzcd}$$

Tomemos G, H y J gráficas reflexivas y $G \xrightarrow{f} H$, $H \xrightarrow{g} J$ flechas en **Gra**. Sea C_G componente conexa de G tal que $x \in C_G$. Además, sea C_H componente conexa de H

[12] De manera informal, un gráfica dirigida es una pareja (V, E) donde V es el conjunto de vértices o puntos y E es el conjunto de aristas en donde se encuentran los vértices relacionados. El siguiente esquema muestra visualmente una gráfica reflexiva.

tal que $f(x) \in C_H$, y C_J componente conexa de J tal que $g(f(x)) \in C_J$. Afirmamos que $p_! g \circ p_! f(C_G) = C_J = p_!(g \circ f)$. Conjuntamente $p_!(1_G) = 1_{p_!(G)}$; por todo lo anterior $p_!$ es funtor. A continuación presentaré otros funtores; sin embargo, no está dentro de los objetivos de este trabajo demostrar que en efecto lo son.

El *funtor discreto* es $p^* : \mathbf{Con} \to \mathbf{Gra}$, cuyos conjuntos van a los vértices de la gráfica con lazos especiales.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & p^*(X) \arrow[d, "p^* f"] & = (X, \{\text{lazos especiales de } X\}) \\ Y & p^*(Y) & = (Y, \{\text{lazos especiales de } Y\}). \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\overset{p^*}{\longmapsto}"] \end{tikzcd}$$

El *funtor puntos* es $p_* : \mathbf{Gra} \to \mathbf{Con}$, que abarca desde gráficas reflexivas hasta el conjunto de vértices de la gráfica.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "f"'] & p_*(G) \arrow[d, "p_* f"] & = V(G) \\ H & p_*(H) & = V(H). \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\overset{p_*}{\longmapsto}"] \end{tikzcd}$$

El *funtor codiscreto* $p^! : \mathbf{Con} \to \mathbf{Gra}$ que va de conjuntos a las gráficas reflexivas con el mayor número de relaciones posible.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & p^!(X) \arrow[d, "p^! f"] & = (X, \{\text{todo par de vértices en } X \text{ están relacionados}\}) \\ Y & p^!(Y) & = (Y, \{\text{todo par de vértices en } Y \text{ están relacionados}\}). \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\overset{p^!}{\longmapsto}"] \end{tikzcd}$$

Si se considera al espacio generalizado como el lugar que posee *puntos* y alguna estructura adicional, habrá que contemplar la totalidad de estos espacios y organizarla en un sistema tipificado por relaciones con dominio y codominio. Por ello, la teoría de categorías es un lenguaje adecuado para el estudio de estos espacios (Lawvere, 2005). Por ejemplo, si se consideran las gráficas reflexivas como un tipo de espacio, se observa que p^* y $p^!$ son funtores duales. Estas características se expresan diciendo que los puntos en un espacio discreto permanecen separados de los demás puntos; es decir, no hay relación entre puntos distintos, mientras que en un espacio codiscreto las relaciones son todas las posibles y, en este sentido, hay tantas relaciones que sus puntos están "muy cerca". Esto se describe mediante una cadena de tres funtores adjuntos.[13]

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gra} \arrow[d, "p_*" description] \\ \mathbf{Con} \arrow[u, shift left=8, "p^*"] \arrow[u, shift right=8, "p^!"'] \end{tikzcd}$$

Los dos funtores que suben son opuestos, ya que discreto expresa separación y codiscreto, cercanía; estos dos son idénticos en **Con** pero distintos en **Gra**. Con este mismo razonamiento podemos ver que los dos funtores que bajan (véase siguiente diagrama) expresan la oposición entre *puntos* y *pedazos* (Lawvere, 2007).

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gra} \arrow[d, shift right=12, "p_!"'] \arrow[d, shift left=4, "p_*" description] \\ \mathbf{Con}. \arrow[u, shift right=4, "p^*" description] \arrow[u, shift left=12, "p^!"'] \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

La oposición se codifica con el concepto de funtores adjuntos de tres formas diferentes: a) por medio de una función biyectiva, b) con la construcción de unidad, counidad que satisfacen las propiedades triangulares, o c) por medio de flechas universales. Cuando un funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es adjunto izquierdo de $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ se anota $F \dashv G$. No desarrollaré la teoría en este trabajo. En el ejemplo tenemos que $p_! \dashv p^* \dashv p_* \dashv p^!$. Como se encuentran los siguientes isomorfismos $\tau\colon\ p_! \circ p^* \to 1_{\mathbf{Con}}$, $\alpha\colon\ 1_{\mathbf{Con}} \to p_* \circ p^!$ y $\varepsilon\colon\ p_* \circ p^! \to 1_{\mathbf{Con}}$.[14]

El concepto de *transformación natural*, como hemos mencionado anteriormente, fue parte del artículo de Eilenberg y Mac Lane de 1945; ellos dieron sentido a conceptos "generalizadores" que se utilizaban dentro de los Bourbaki y otras escuelas. Pensaron que esta trasformación generalizaba las relaciones dentro de una

[13] La definición de funtor adjunto se escribe de manera escueta en este trabajo. Sin embargo, se puede revisar en (Lawvere, 2007).

[14] En opinión de Lawvere, resultan dos modelos de lo que en la filosofía hegeliana se conoce como unidad e identidad de los opuestos, es decir, este modelo captura de manera adecuada la dialéctica (Lawvere, 1996).

categoría y se preservaban dibujos.[15] Veamos la definición formal de trasformación natural.

Definición 9. Una *transformación natural* $\tau\colon\ F \to G$ asocia a cada objeto de $\mathbf{C}$ una flecha en $\mathbf{D}$, donde $C \mapsto \tau_C\colon\ FC \to GC$ es la componente C de τ. Tal que si $f\colon\ A \to B$ es una flecha en $\mathbf{C}$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & FA \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ B & FB \arrow[r, "\tau_B"'] & GB. \end{tikzcd}$$

Un ejemplo, usando los funtores duales puntos y pedazo, es la *transformación natural* canónica $\theta\colon\ p_* \to p_!$. Para cada gráfica G definimos $\theta_G\colon\ p_*G \to p_!G$ de la siguiente manera: a cada vértice lo manda a su componente conexa. Sea $f\colon\ G \to H$ un morfismo y

$$\begin{tikzcd} p_*G \arrow[r, "p_*f"] \arrow[d, "\theta_G"'] & p_*H \arrow[d, "\theta_H"] \\ p_!G \arrow[r, "p_!f"'] & p_!H. \end{tikzcd}$$

Sea $x \in V(G)$ y supongamos que x está en la siguiente componente conexa C:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(x) \arrow[d, mapsto] \\ C \arrow[r, mapsto] & D, \end{tikzcd}$$

donde D es la componente conexa tal que $f(x) \in D$. Una observación adicional: para cada $G \in \mathbf{Gra}$ la función θ_G es suprayectiva, es decir, toda componente conexa tiene un punto. Mientras que $\varphi\colon\ p^* \to p^!$ es una transformación natural inyectiva, puesto que es la identidad en vértices y la gráfica codiscreta tiene más aristas que la discreta.

[15]Un dibujo se piensa como la preservación de las relaciones dentro de las categorías involucradas.

Sean las *transformaciones naturales* $\tau\colon F \Rightarrow G, \sigma\colon G \Rightarrow H$, donde $F, G, H\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Definimos $\sigma\tau\colon F \Rightarrow H$ como $(\sigma\tau)_C := FC \xrightarrow{\tau_C} GC \xrightarrow{\sigma_C} HC$. Como cada cuadrado del siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "\tau"'] & FC \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "F_C"'] & GC \arrow[r, "\sigma_C"] \arrow[d, "G_C"] & HC \arrow[d, "H_C"] \\
C' & FC' \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & GC' \arrow[r, "\sigma_{C'}"'] & HC',
\end{tikzcd}$$

entonces el cuadrado exterior conmuta. Además, como las identidades son neutros para la composición, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d] & FC \arrow[r, "1_{FX}"] \arrow[d, "F_C"'] & FC \arrow[d, "F_C"] \\
C' & FC' \arrow[r, "1_{FC'}"'] & FC'.
\end{tikzcd}$$

En esta sección mencionamos que las categorías eran utilizadas en la geometría algebraica y en la topología algebraica, pero de manera no formal. Además, se señaló que los Bourbaki discutieron sobre categorías y conceptos duales, mientras que Mac Lane y Eilenberg, para 1945, habían mostrado algunas de las nociones que se mencionan en esta sección. En cambio, la oposición de los funtores adjuntos que se ejemplifica en 3.1, se construyó tras incluir en las comunidades matemáticas a las categorías abelianas como categorías con buenas propiedades después de la publicación del *Tôhoku*. Puesto que el interés de Grothendieck en construir el *topos* se insertó dentro de la geometría algebraica, fue la escuela estadounidense quien reconoció que las categorías con "buenas propiedades" eran las que se parecían a conjuntos. Por ello, no es posible asegurar que la teoría de *topos*, que surge desde una preocupación en la geometría algebraica, es una generalización de la teoría de conjuntos. Esta confusión surge al preguntarse qué propiedades debe tener una categoría para ser como la categoría de conjuntos, y resultan, como consecuencia, los axiomas de *topos* elemental (MacLarty, 1990).

¿Por qué queremos definir C^{op}?

En esta sección mostramos cómo la categoría opuesta es necesaria para la construcción del *topos*. Trabajaremos con categorías que satisfacen que para cada par de objetos, hay un conjunto de flechas —conocidas como localmente pequeñas—, y que tendrán un conjunto de objetos. Vincularemos el ejemplo de forcing visto en el capítulo 2, sección 2.2, con la categoría opuesta. También retomaremos que el lema de Yoneda se puede pensar como una generalización de teoremas de representación como el teorema 1 de Cayley visto en el capítulo 2, sección 2.3.

Recordemos que en matemáticas clásicas si X, Y son conjuntos, la exponencial se escribe $Y^X = \{f\colon X \to Y \mid f \text{ es función}\}$. Existe un concepto análogo en categorías, si $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son categorías, la exponencial $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ tiene como objetos a los funtores que van de $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Esta idea va ser muy útil para construir la categoría de pregavillas.

Veamos unos ejemplos. El funtor *potencia* $P\colon \mathbf{Con} \to \mathbf{Con}$ asigna a cada conjunto X la potencia del conjunto $P(X)$, y para cada función f la función Pf se calcula mediante imagen inversa.

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbf{Con} & & & \mathbf{Con} \\
\text{para cada } f & & & \\
X & PX & & f^{-1}(S) = \{x \in X \mid f(x) = Y \in S\} \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & {\scriptstyle Pf}\big\uparrow & & {\scriptstyle f^{-1}}\big\uparrow \\
Y & PY & & S
\end{array}
$$

Esta asignación satisface $P(g \circ f) = Pf \circ Pg$, por lo que en principio no podría llamarse funtor. Sin embargo, como estas asignaciones "dan vuelta" a las flechas, se le da el nombre de *funtor contravariante*. Estos funtores primero le dan la vuelta a las flechas del dominio y luego las mandan al codominio de manera covariante. La notación usual para este proceso, en este ejemplo, es $P\colon \mathbf{Con}^{op} \to \mathbf{Con}$. En la categoría opuesta únicamente le damos la vuelta a las flechas.

Definición 10. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Se define a la categoría $\mathbf{C}^{op}$ cuyos objetos son los mismos que en $\mathbf{C}$ de manera que hay una flecha $A \to B$ en $\mathbf{C}^{op}$ si y sólo si hay una flecha $B \to A$ en $\mathbf{C}$.

Si se tiene $P\colon\ \mathbf{Con}^{op} \to \mathbf{Con}$, es posible construir a los cuantificadores como adjuntos de éste. Grothendieck no estaba interesado en la lógica matemática, pero siempre trató de hacer legítimas sus construcciones, puesto que los Bourbaki le pidieron que sus propuestas fueran válidas desde una perspectiva lógica.[16] Otro ejemplo, que revisaremos más adelante, donde se usan categorías opuestas es forcing, que es un caso particular del *topos de Grothendieck*. La construcción se realiza definiendo $\supseteq$, que es opuesta a la contención clásica, revisar 2.2. En este método no se entiende por qué la contención está definida de esa manera.

Hoy los categóricos llaman, categoría geométrica a $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ y categoría algebraica a $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}}$. En la primera, los objetos son funtores $F\colon\ \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ y sus flechas son transformaciones naturales. En la segunda, los objetos son funtores covariantes y sus flechas también son transformaciones naturales.

Otro ejemplo sería el de un sistema dinámico discreto, que consta de un conjunto X y una función $f\colon\ X \to X$ que le da dinámica a X.[17] La evolución de un elemento del sistema a través del tiempo discreto se puede representar como se muestra en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} t_o & t_1 & t_2 & t_3 & \dots \\ x & f(x) & f(f(x)) & f(f(f(x))) & \dots \end{array} \tag{3.2}$$

[16]Su noción categórica de espacio hizo posible que el *topos* tuviera una lógica interna que ni él mismo ni sus alumnos observaron; fue Lawvere quien propuso los cuantificadores y demostró que los *topos* tienen una lógica interna.

> [...] como consecuencia del teorema de completud de Kripke no hay lógica más fuerte que la intuicionista que pueda ser válida en conjuntos que están variando de forma seria, y en la otra dirección el cálculo de predicados de Heyting es válido en todos los topos[...] (Lawvere, 1976).

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[d, "Pf"] \\ PY \arrow[u, bend left=60, "\exists_f"] \arrow[u, bend right=60, "\forall_f"'] \end{tikzcd}$$

[17]Cuando escribimos dinámica estamos pensando en que los elementos de un conjunto van cambiando, por ejemplo, respecto al tiempo.

Como un sistema dinámico discreto sólo tiene un conjunto y un endomorfismo, el arquetipo de esto es la categoría $\circlearrowleft\bullet$, el resultado de calcular su categoría opuesta es $\bullet\circlearrowright$, por lo que podemos considerar cualquiera.

Un funtor $X \in \mathbf{Con}^{\bullet\circlearrowright}$ consiste de un conjunto X y una función $f\colon X \to X$, que llamaremos la "dinámica" de X, es decir, un funtor $X \in \mathbf{Con}^{\bullet\circlearrowright}$ es un sistema dinámico discreto. Desde el punto de vista categórico, lo más importante para estudiar una estructura son los morfismos. Si (X, f_X) y (Y, f_Y) son sistemas dinámicos discretos, entonces un morfismo es una función $h\colon X \to Y$ que preserva la dinámica, es decir, que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "f_Y"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Lo anterior equivale a que $X, Y \in \mathbf{Con}^{\bullet\circlearrowright}$ y $h\colon X \to Y$ sea una *transformación natural*. En otras palabras, una *transformación natural* h es una función que preserva la dinámica.

En la categoría **Con** se puede cambiar la noción de "ser elemento" por un morfismo que tenga como dominio al conjunto $1 = \{*\}$. Este conjunto satisface que para cualquier otro conjunto X hay una única función $X \to 1$, por esta razón recibe el nombre de *conjunto terminal*. De esta manera, un elemento $x \in X$ es lo mismo que la función $x\colon 1 \to X$ definida con $x(*) = x$, con un abuso de notación entre el conjunto y la función.

Es posible intentar hacer la misma descripción de elementos en sistemas dinámicos discretos. En esta categoría el objeto terminal está dado por $id\colon 1 \to 1$. Este es un sistema con un sólo elemento y donde todo permanece estático. Una transformación natural $h\colon 1 \to X$ en $\mathbf{Con}^{\bullet\circlearrowright}$ se puede representar con los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "id"] \arrow[d, "h"'] & 1 \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} * \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] \\ * \arrow[r, mapsto] & x = f(x), \end{tikzcd}$$

como el cuadrado de la izquierda conmuta, entonces $f(x) = x$, lo anterior se observa en el diagrama de la derecha. Así, los únicos elementos de X que quedan fijos pueden ser "señalados" por el objeto terminal. El problema es que la dinámica del objeto terminal 1 en $\mathbf{Con}^{\bullet \circlearrowleft}$ es trivial.

Para obtener un objeto que permita detectar los elementos de un sistema dinámico discreto que no se queden fijos bajo la dinámica es necesario considerar un nuevo objeto $N \in \mathbf{Con}^{\bullet \circlearrowleft}$ que tenga un punto $0 : 1 \to N$ tal que su dinámica $s : N \to N$ no sea trivial, es decir, si denotamos $1 = s \circ 0$ y en general $n + 1 = s \circ n$, entonces queremos que n sea distinto a $0, \ldots, n - 1$ para toda $n \geq 1$. Así, si x es un elemento arbitrario del sistema X, entonces la evolución de este elemento a través del tiempo —ver (3.2)—, está descrita por un morfismo $h : N \to X$, como muestra el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "x"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\
& X \arrow[r, "f_X"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
* \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 2 \arrow[d, mapsto] & \ldots \\
& x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & f(f(x)) & \ldots
\end{tikzcd}$$

Además, todo morfismo $h : N \to X$ describe la evolución del elemento $0 \circ h : 1 \to X$ a través del tiempo. De esta manera un elemento arbitrario del sistema x junto con su evolución están en correspondencia biunívoca con morfismos de la forma $N \to X$. Notemos que N es el conjunto de naturales y que un corolario inmediato de estas observaciones es el teorema de recursión para naturales.

Teorema 11. *Si X es un conjunto, $x \in X$ y $f : X \to X$ es una función, entonces existe una única función $h : \mathbb{N} \to X$ tal que*

$$h(0) = x$$
$$h(s(n)) = f(h(n)).$$

Demostración. Notemos que la función $f : X \to X$ le da estructura de sistema dinámico discreto a X. Por la correspondencia descrita arriba existe un único $h : N \to X$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "x"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\
& X \arrow[r, "f_X"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Esto significa que $h(0) = x$ y $h(s(n)) = f(h(n))$ como se quería. □

Consideremos la categoría $\mathbf{Con}^{(0\to 1)^{op}}$. Un objeto X en dicha categoría consta de dos conjuntos X_0 y X_1. Además, entre ellos debe haber una función $f_X : X_1 \to X_0$. Una interpretación de estos objetos es que el conjunto X_1 evolucionó del conjunto X_0 mediante la regla de evolución f_X. Una transformación natural $h : X \to Y$ en $\mathbf{Con}^{(0\to 1)^{op}}$ es un diagrama conmutativo como el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_X"] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\
Y_1 \arrow[r, "f_Y"] & Y_0.
\end{tikzcd}$$

Es decir, consta de dos funciones $h_0 : X_0 \to Y_0$ y $h_1 : X_1 \to Y_1$, que son compatibles con la evolución de estos nuevos sistemas. Hay una interpretación similar para categorías similares, por ejemplo $\mathbf{Con}^{(0\to 1\to 2\to 3\to \dots)^{op}}$.

Un último ejemplo de este tipo de estructuras es el que proviene de considerar la categoría $\mathbf{C}$ definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{C} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & \bullet. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Como la opuesta de esta categoría es la misma que la original, se puede tomar cualquiera de las dos. Consideremos la categoría $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$. Un objeto $G \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ consta de los siguientes conjuntos y funciones:

$$\begin{tikzcd} A(G) \arrow[r, shift left=2, "d"] \arrow[r, shift right=2, "c"'] & V(G). \arrow[l, "l" description] \end{tikzcd}$$

La interpretación de estos objetos son digráficas reflexivas, las cuales tienen un conjunto de vértices $V(G)$ y un conjunto de aristas $A(G)$. Además, como las aristas están dirigidas, tienen un dominio dado por la función d, y un codominio dado por c. Por último, para que sean reflexivas, cada vértice debe tener un lazo especial dado por l. Este lazo es una arista con un mismo dominio y codominio, es decir, las composiciones $d \circ l$ y $c \circ l$ son la identidad.

Con los ejemplos anteriores, se observan categorías de la forma $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ que pueden codificar muchas estructuras matemáticas, por lo que fue importante darles un nombre. Un objeto $X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ se denomina pregavilla, y $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ es la categoría de pregavillas sobre $\mathbf{C}$.

Observemos que se puede relacionar a una categoría arbitraria $\mathbf{C}$ con su categoría de pregavillas $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \\
\text{dado } C & & \text{hay un conjunto } \mathbf{C}(A, C) \\
& & \text{para cualquier } A \in \mathbf{C} \\
C & \longmapsto & \mathbf{C}(__, C) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con} \\
& & A \mapsto \mathbf{C}(A, C).
\end{array}$$

Primero veremos que $\mathbf{C}(\_\_, C) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ es un funtor. Dada una flecha $f : A \to B$ definimos la función $f^* = \mathbf{C}(f, C) : \mathbf{C}(B, C) \to \mathbf{C}(A, C)$ mediante $(B \xrightarrow{g} C) \mapsto (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C)$. Luego habrá que considerar lo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\text{en } \mathbf{C} & \text{en } \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \\
A \arrow[d, "f"'] & \mathbf{C}(A, C) \\
B \arrow[d, "h"'] & \mathbf{C}(B, C) \arrow[u, "f^*"'] \\
D & \mathbf{C}(D, C). \arrow[u, "h^*"'] \arrow[uu, bend right=60, "(hf)^*"']
\end{tikzcd}$$

Si se considera una flecha $D \xrightarrow{k} C$ en $\mathbf{C}(D, C)$, será evidente que $(hf)^*(k)$ se obtiene del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "hf"] \arrow[dr, "f"'] & & D \arrow[r, "k"] & C \\
& B, \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

es decir, por la regla de correspondencia se tiene que $(hf)^*(k) = k \circ (h \circ f) = (k \circ f) \circ h = h^*(k \circ f) = (f^* \circ h^*)(k)$.

Falta mostrar qué pasa con la identidad. Sea $A \xrightarrow{g} C$ en $\mathbf{C}(A, C)$, se tiene que $1_A^*(g) = g \circ 1_A = g$. Por lo tanto, $\mathbf{C}(\_, C) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ es funtor.

La asignación de Yoneda se define como se muestra en el siguiente diagrama:

$$Y\colon \quad \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & \mathbf{C}(_, C) \arrow[d, "f_*"] & (A \xrightarrow{g} C) \arrow[d, mapsto] \\
D \arrow[ur, phantom, "\longmapsto"] & \mathbf{C}(_, D) & (A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D).
\end{tikzcd}$$

Lo primero que debemos hacer es mostrar que la asignación de Yoneda es un funtor, para esto consideramos la situación del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & \mathbf{C}(_, C) : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con} \arrow[d, "f_*"] & (A \xrightarrow{h} C) \arrow[d, mapsto] \\
D \arrow[d, "g"'] & \mathbf{C}(_, D) : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con} \arrow[d, "g_*"] & (A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{f} D) \arrow[d, mapsto] \\
E & \mathbf{C}(_, E) : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con} & (A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E).
\end{tikzcd}$$

Para probar $Y(g \circ f) = Yg \circ Yf$, hay que observar que $(g \circ f)_*(h)$ es igual al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] & C \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & E \\
& & D, \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

donde se muestra que $(g \circ f)_*(h) = g_* \circ f_*(h)$. La identidad se prueba de la misma manera. Por tanto $Y\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ es funtor y se le designa *funtor de Yoneda.*

Así como el teorema 1 de Cayley (ver sección 2.3) se puede pensar como un teorema de representación, ya que un grupo está bien representado por un conjunto conocido, el conjunto de simetrías, también se puede pensar como un resultado de una "buena representación" en el mismo sentido que el teorema 1. Es decir, el lema de Yoneda nos dice que los elementos de un conjunto, en este caso PC, pueden ser representados por morfismos, o bien, se puede entender que $\mathbf{C}$ está bien representada en una categoría de pregavillas.

Antes de mostrar el lema, es necesario introducir la siguiente notación. Si $f\colon C \to D$ está en $\mathbf{C}$ y $P \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$, entonces tenemos una función $Pf\colon PD \to PC$ la evaluación de esta función en un elemento $x \in PD$, se denota con $x \cdot f$ y se le llama la *restricción* de x a f. Además, si $g\colon D \to E$ es otra flecha y $y \in PE$, entonces $y \cdot (g \circ f) = (y \cdot g) \cdot f$.

Lema 12 (Yoneda)**.** *Si* $\mathbf{C}$ *es una categoría pequeña,* $C \in \mathbf{C}$ *y* $P \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$*, entonces* PC *es biyectable con* $\mathrm{Nat}(\mathbf{C}(\_\_, C), P)$.

Demostración. Definiremos una biyección mediante una función y su inversa. Sea

$$\begin{aligned} \varphi_C\colon PC &\longrightarrow \mathrm{Nat}(\mathbf{C}(\_\_, C), P) \\ x &\longmapsto \tau_x\,, \end{aligned}$$

donde $(\tau_x)_A\colon \mathbf{C}(A, C) \to PA$ está definida como $(\tau_x)_A(f) = x \cdot f$ para toda $f \in \mathbf{C}(A, C)$. Tenemos que mostrar que, en efecto, τ_x es una transformación natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & \mathbf{C}(A,C) \arrow[r, "(\tau_x)_A"] & PA \\ B & \mathbf{C}(B,C) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "(\tau_x)_B"'] & PB\,. \arrow[u, "Pf"'] \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Qué pasa al evaluar $k \in \mathbf{C}(B, C)$, observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{k} C) \arrow[r, mapsto] & x \cdot (k \circ f) = (x \cdot k) \cdot f \\
(B \xrightarrow{k} C) \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & x \cdot k \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

de donde es evidente que el diagrama en (3.3) conmuta. Por lo tanto, (τ_x) es natural y así φ está bien definida.

Para demostrar que φ_C es biyectiva hay que definir su inversa y nombrarla como $\psi : \ \mathrm{Nat}(\mathbf{C}(\_\_, C), P) \to PC$. Dado un elemento $\tau \in \mathrm{Nat}(\mathbf{C}(\_\_, C), P)$ queremos que este tenga un elemento asignado en PC. Para ello, tomamos la componente $\tau_C : \ \mathbf{C}(C, C) \to PC$ y definimos $\psi(\tau) = \tau_C(1_C) \in PC$.

Hay que considerar la composición $\psi \circ \varphi(x) = \psi(\tau_x) = (\tau_x)_C(1_C)$ y observar que $(\tau_x)_C(1_C) = x$, en efecto, $(\tau_x)_C(C \xrightarrow{1_C} C) = x \cdot 1_C = P1_C(x) = x$. Por último, para la otra composición $\varphi \circ \psi(\tau) = \varphi(\tau_C(1_C)) = \tau_{\tau_C(1_C)}$, hay que mostrar que $\tau_{\tau_C(1_C)} = \tau$. Por demostrar que $(\tau_{\tau_C(1_C)})_A = \tau_A$ y como la regla de evaluación de $(\tau_{\tau_C(1_C)})_A : \ \mathbf{C}(A, C) \to PA$ es $(A \xrightarrow{f} C) \mapsto Pf(\tau_C(1_C))$, entonces se necesita probar que $Pf(\tau_C(1_C)) = \tau_A(f)$. Como τ es natural, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \mathbf{C}(A, C) \arrow[r, "\tau_A"] & PA \\
C & \mathbf{C}(C, C) \arrow[u, "\mathbf{C}(f, C)"] \arrow[r, "\tau_C"] & PC, \arrow[u, "Pf"']
\end{tikzcd}$$

es decir, resulta la siguiente igualdad:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] & \tau_A(f) = Pf(\tau_C(1_C)) \\
1_C \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \tau_C(1_C). \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\varphi \circ \psi(\tau) = \tau$. Por lo tanto, $PC \cong \mathrm{Nat}(\mathbf{C}(\_\_, C), P)$. $\square$

La concepción de sumergir una categoría en otra la expuso Grothendieck en el seminario Bourbaki, en la *Exposé* número 195 (Grothendieck, 1959). A pesar de que se piensa que Yoneda fue quien postuló la concepción anterior, el matemático estadounidense Peter John Freyd (1936-) fue quién buscó el lema en el artículo de Yoneda y se dio cuenta de que este resultado no se encontraba dentro de su trabajo (Yoneda, 1954). Al conocer que el lema no era parte del artículo de Yoneda, consultó sus referencias y se percató de que fue Mac Lane quien, en una platica, lo citó como el tratamiento de Yoneda (Freyd, 2003). Ahora es conocido por la comunidad matemática como tal.

3.3 | Aportaciones de Grothendieck

> Hace 50 años [1970] se celebró en La Jolla, California, el primer encuentro internacional de teoría de categorías[...] Jean-Louis Verdier nos introdujo a muchos de nosotros en una nueva clase de categorías debidas a Grothendieck [...] Mi uso de conceptos como la subcategoría booleana revela que estoy convencido de que las categorías de espacio se modelan más eficazmente como topos apropiados [...] la existencia de espacios funcionales (la característica que se ha llamado “cartesiana cerrada” desde la contribución de Eilenberg y Kelly hace 50 años) había sido reconocida como fundamental por Hadamard y Volterra en la época de 1897 en Zurich. Sin embargo, esta propiedad esencial fue enfatizada por Grothendieck en 1957 en su documento *Tôhoku* (Lawvere, 2015, pp. 1-3).

En el capítulo 1 discutimos la controversia entre los Bourbaki sobre la tarea de incluir teoría de categorías en su proyecto editorial. También discutimos que uno de los problemas eran las generalizaciones que hacía Grothendieck, ya que no se comprendía si estas debían ser parte de la teoría de conjuntos o si era necesario fundamentar de una manera distinta la idea estructuralista de la matemática que ellos conocían; en suma, no se entendía el uso que le daba Grothendieck a la teoría de categorías. La diferencia de origen y las preferencias sobre cierta área de la matemática le quitaban credibilidad a sus planteamientos, y le costó trabajo legitimar sus propuestas. Para 1957, Grothendieck demostró Riemman-Roche; con este resultado disipó las dudas de Bourbaki. Asimismo, en este seminario fue donde propuso el uso de los conceptos límite y colímite infinitos –en esa época se llamaba límite inductivo y proyectivo–. Es importante comprender qué significa la noción de *límite infinito*. Por ello, en la siguiente sección definiremos *límite*, pero antes necesitamos definir otras nociones, como *objeto terminal* y *objeto inicial*.

En **Con** hay un objeto $1 = \{*\}$ que satisface que si $A \in$ **Con**, entonces existe una única $A \xrightarrow{f} 1$. Además, **Con** tiene un objeto $0 = \emptyset$ que cumple que si $A \in$ **Con**, entonces existe una única $\emptyset \xrightarrow{f} A$. En general, definimos un *objeto terminal* en **C** como un $A \in \mathbf{C}$ que realiza que para todo $C \in \mathbf{C}$ existe una única $C \xrightarrow{f} A$. Más aún, un *objeto inicial* en **C** es un $A \in \mathbf{C}$ que satisface que para todo $C \in \mathbf{C}$ existe una única flecha $A \xrightarrow{f} C$.

Proposición 13. *Si $A, B \in \mathbf{C}$ son objetos terminales, entonces $A \cong B$.*

Demostración. Como A, B son objetos terminales, entonces existen únicas $B \xrightarrow{f} A$ y $A \xrightarrow{g} B$. Por ello tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "1_A"] & B \arrow[r, "f"] & A. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $g \circ f = 1_A$. Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1_B"] & A \arrow[r, "g"] & B. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $f \circ g = 1_B$. Es decir, A y B son isomorfos. □

Para definir *límites* requerimos construir *productos* y *productos fibrados*, estos últimos serán cierto tipo de *límite*. La idea en la construcción de *límite* es tomar un objeto particular de la categoría y ciertas flechas, denominadas *categoría de índices*. Para finalizar la construcción definimos un diagrama.

En conjuntos, un producto viene acompañado de proyecciones. Observemos el siguiente diagrama:

$$A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B.$$

Pero necesitamos ser más precisos para definir un *producto*, ya que hay muchas flechas que mandan a A y a B; por lo tanto, hace falta definir una propiedad universal.

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \\ & C. \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "(f,g)"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Si hay flechas f y g, como en el diagrama anterior, existe una única que va de C al producto $A \times B$.

Para construir un *producto fibrado* se requieren de las flechas $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$, tal que el siguiente cuadrado conmute:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "PA"] \arrow[d, "PB"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B. \end{tikzcd}$$

Además, debe satisfacer una propiedad universal. Para cualquier otro cuadrado conmutativo existe una única flecha como la del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] \arrow[ddr, bend right, "h_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & B. \end{tikzcd}$$

Para construir un *igualador* pedimos un par de flechas $E \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$; de esta forma el *igualador* de f y g es una flecha $E \xrightarrow{e} A$, que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$E \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \qquad f \circ e = g \circ e.$$

También satisface la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ T. \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Con todos los conceptos anteriores podemos definir el concepto de *cono*, que es un método general de construcción que permite tener productos, subconjuntos, etcétera, dependiendo de la categoría. Observemos la definición formal.

Definición 14. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ un funtor al que llamamos *diagrama*, $\mathbf{I}$ es la categoría de índices. Un *cono* es un objeto $C \in \mathbf{C}$ junto con una colección de flechas $\langle C \xrightarrow{\gamma_I} \Gamma I \rangle_{I \in \mathbf{I}}$ tal que para cualquier $i : I \to S$ en $\mathbf{I}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma I \arrow[d, "\Gamma i"] \\ C \arrow[ur, "\gamma_I"] \arrow[r, "\gamma_S"'] & \Gamma S. \end{tikzcd}$$

Definición 15. Un *cono límite* es un cono que cumple una propiedad universal. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ un diagrama, un *límite* para Γ es un cono $\langle L \xrightarrow{\gamma_I} \Gamma I \rangle_{I \in \mathbf{I}}$ tal que para cualquier otro cono $\langle A \xrightarrow{\alpha_I} \Gamma I \rangle_{I \in \mathbf{I}}$ existe una única $\alpha : A \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\gamma_I"] & \Gamma I \\ A. \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha_I"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos algunos ejemplos. Si $\mathbf{I} = \emptyset$ y $\langle A \xrightarrow{\gamma_I} \quad \rangle_{I \in \emptyset}$, por vacuidad todo objeto es un cono. Un *límite* es un *objeto terminal* denotado 1. Además, satisface que para cualquier $A \in \mathbf{C}$ $\exists!$ $A \to 1$.

En la categoría de conjuntos hay un objeto denotado $1 = \{0\}$ que es un objeto terminal, es decir, para cualquier conjunto C existe una única función $C \xrightarrow{f} 1$.

Si $\mathbf{I}$ tiene como objetos dos puntos, el funtor $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ elige dos objetos $A, B \in \mathbf{C}$. Un cono es un objeto $C \in \mathbf{C}$ junto con las siguientes flechas:

$$A \longleftarrow C \longrightarrow B$$

L es un límite si tiene flechas hacia A y B como arriba, y para cualquier otro C con flechas como las anteriores existe una única $C \to L$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A & L \arrow[l] \arrow[r] & B \\
& C. \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En este caso L es un producto, es decir, tiene proyecciones $A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B$. Si C es un objeto tal que $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ y se define $h\colon C \to A \times B$ como $h(c) = (f(c), g(c))$, entonces

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \\
& C. \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\exists! h"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que h y h' son dos flechas que van de C a $A \times B$ tal que hacen conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \\
& C. \arrow[ul, "f"] \arrow[u, shift left, "h"'] \arrow[u, shift right, "h'"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Además, tenemos que $p_A h'(c) = f(c)$ y $p_B h'(c) = g(c)$, por lo que $c \mapsto (p_A h'(c), p_B h'(c)) = (f(c), g(c))$. Por lo tanto $h = h'$.

Ahora miremos a la categoría $\mathbf{I}$ que consiste en $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$, el funtor $\Gamma\colon \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ elige en $\mathbf{C}$ objetos y flechas de la forma $A \to C \leftarrow B$. Un cono es:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

por lo que un *límite* va ser un *producto fibrado* que cumple la propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
& B \arrow[r] & C.
\end{tikzcd}$$

Veamos qué sucede con conjuntos y funciones en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C. \end{tikzcd}$$

El diagrama va a conmutar sólo cuando $g(b) = f(a)$, de manera que pedimos $P = \{(a,b) \in A\times B \mid f(a) = g(b)\}$. Debido a lo cual el cuadrado exterior e interior conmutan:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "h", "\exists!"'] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\ & P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C. \end{tikzcd}$$

Comencemos con $g\circ h_2 = f\circ h_1$ y definimos $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$, probemos que $h(x) \in P$. Como $g\circ h_2(x) = f\circ h_1(x)$, por ello se sigue que $g(h_2(x)) = f(h_1(x))$, entonces $(h_1(x), h_2(x)) \in P$.

Veamos qué pasa cuando $\mathbf{I}$ elige los siguientes objetos y flechas $\bullet \rightrightarrows \bullet$, el funtor $\Gamma : \mathbf{I}\to\mathbf{C}$ escoge $A \rightrightarrows B$. Así, un cono límite debe satisfacer ser cono $\langle C \xrightarrow{\gamma_I} \Gamma I\rangle_{I\in\mathbf{I}}$ tal que para cualquier otro cono suceda lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \\ D \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

por lo que resulta ser un igualador.

Veamos qué pasa en la categoría de conjuntos. Si $A \rightrightarrows B \in \mathbf{Con}$, el diagrama que queremos construir es un igualador, entonces un primer intento para esta construcción es considerar a $A \xrightarrow{id} A \rightrightarrows B$. Observemos que el diagrama conmuta si $f(a) = g(a)$. Por ello necesitamos un objeto en la categoría de conjuntos muy particular, es decir $C \in \mathbf{Con}$ debe cumplir $C = \{a\in A \mid f(a) = g(a)\}$, por lo que el siguiente diagrama debe conmutar:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook, "id"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X. \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Para ello definimos a $k(x) = h(x)$ y tenemos que probar que $h(x) \in C$. Como $f \circ h(x) = g \circ h(x)$ y sabemos que $f(h(x)) = g(h(x))$, entonces $h(x) \in C$.

Veamos límites en órdenes parciales. Sean $\mathbf{P}$ la categoría $(P, \leq)$ y un cono $\langle r \xrightarrow{\gamma_I} \Gamma q \rangle_{I \in \mathbf{I}}$. Sean $p, q \in P$, el producto es un elemento $r \in P$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} p & r \arrow[l] \arrow[r] & q \\ & x. \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Se observa en el diagrama que $r \leq p$ y $r \leq q$, es decir, r es cota inferior de $\{p, q\}$. Si existe otra cota inferior x, entonces (como se muestra en 3.3) $x \leq r$, ya que r cumple la propiedad del producto, por lo tanto r es el ínfimo de $\{p, q\}$. También podemos encontrar máximos, ya que la categoría tiene objeto terminal. Una última observación de este ejemplo es que el producto fibrado de $\mathbf{P}$ nos brinda la misma información que el producto.

Para construir límites más generales necesitamos objeto terminal y producto fibrado para tener producto e igualador. No hay que olvidar que si la categoría de índices es finita, los límites son finitos. Sea $A, B \in \mathbf{C}$, consideremos el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Podemos observar que $P \cong A \times B$. Sea $C \in \mathbf{C}$ y $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$, consideramos $!_A \circ f = !_B \circ g$, como 1 es objeto terminal, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
& B \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Sea $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ en $\mathbf{C}$, denotemos el siguiente diagrama como (3.4):

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "e"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "(f,g)"] \\
B \arrow[r, "(1,1)", "\Delta_B"'] & B \times B.
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Por la propiedad universal del producto, sabemos que el diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B & B \times B \arrow[l] \arrow[r] & B \\
& A. \arrow[ul] \arrow[u, dashed, "(f,g)"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Si probamos que $f \circ e = g \circ e$, solamente bastaría demostrar la propiedad universal para tener un igualador. Regresemos al diagrama (3.4) y observemos que, como es conmutativo, entonces tenemos $(p, p) = (1, 1) \circ p = (f, g) \circ e = (f \circ e, g \circ e)$ por lo que $f \circ e = p = g \circ e$. Falta demostrar que satisface la propiedad universal. Supongamos que hay otro igualador, es decir $C \xrightarrow{h} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$, y queremos que el cuadrado exterior del siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "k"'] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "f\circ h"'] & & \\
& P \arrow[r, "e"] \arrow[d] & A \arrow[d, "(f,g)"] \\
& B \arrow[r, "\Delta_B", "(1,1)"'] & B \times B,
\end{tikzcd}$$

notemos que $(f, g) \circ h = (f \circ h, g \circ h)$ y como la flecha h igual a f y g, entonces $(f \circ h, g \circ h) = (f \circ h, f \circ h) = \Delta_B(f \circ h)$, por lo tanto existe una única función que hace conmutar al diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C. \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Hay que tener presente que si hay productos e igualadores, entonces hay límites. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \mathrm{dom}(i) \arrow[r, "\Gamma_i"] & \Gamma \mathrm{cod}(i) \\ L \arrow[r, "e"] & \prod_{I \in \mathbf{I}} \Gamma I \arrow[u, "p_{\mathrm{dom}(i)}"] \arrow[d, "p_{\mathrm{cod}(i)}"'] \arrow[r, dashed, shift left, "f"] \arrow[r, dashed, shift right, "g"'] & \prod_{i \in \mathbf{I}} \Gamma\, \mathrm{cod}(i) \arrow[u, "p_i"'] \arrow[d, "p_i"] \\ & \Gamma\, \mathrm{cod}(i) \arrow[r, equal] & \Gamma\, \mathrm{cod}(i), \end{tikzcd}$$

donde f y g se construyen con la propiedad universal del producto. Primero debemos ver que $\langle L \xrightarrow{e} \prod \Gamma I \xrightarrow{p_I} \Gamma I \rangle_{I \in \mathbf{I}}$ es un cono. Si $i : I \to J$ en $\mathbf{I}$, entonces tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & \Gamma I \arrow[d, "\Gamma_i"] \\ L \arrow[r, "e"] & \prod \Gamma I \arrow[ur, "p_I"] \arrow[dr, "p_J"'] & \\ & & \Gamma J. \end{tikzcd}$$

Pero por construcción del siguiente diagrama, conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma I \arrow[r, "\Gamma_i"] & \Gamma J \\ L \arrow[r, "e"] & \prod_{I \in \mathbf{I}} \Gamma I \arrow[u, "p_I", "p_{\mathrm{dom}(i)}"'] \arrow[d, "p_{\mathrm{cod}(i)}"', "p_J"] \arrow[r, dashed, shift left, "f"] \arrow[r, dashed, shift right, "g"'] & \prod_{i \in \mathbf{I}} \Gamma\, \mathrm{cod}(i) \arrow[u, "p_i"'] \arrow[d, "p_i"] \\ & \Gamma J \arrow[r, equal] & \Gamma J. \end{tikzcd}$$

Sólo falta demostrar la propiedad universal de cono, para ello necesitamos de tres observaciones: (1) la propiedad universal del producto, (2) si $i : \mathrm{dom}(i) \to \mathrm{cod}(i)$, entonces

$$\begin{tikzcd} & \Gamma\,\mathrm{dom}(i) \arrow[d, "\Gamma_i"] \\ A \arrow[ur, "h_{\mathrm{dom}(i)}"] \arrow[r, "h_{\mathrm{cod}(i)}"'] & \Gamma\,\mathrm{cod}(i) \end{tikzcd}$$

y (3) si $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \prod X_I$ tal que $p_I \circ f = p_I \circ g$ para toda I, entonces $f = g$.

Con estos ejemplos mostramos herramientas que permitieron tener una concepción diferente de construcción de objetos. El objetivo era observar que la construcción de *límites* no solamente puede ser finito. Ya habíamos mencionado que esta noción fue importante para la historia de las categorías porque en diferentes situaciones se utilizó, y de alguna manera promovió el uso del lenguaje. Recordemos que Bourbaki se refirió a este concepto intentando no adoptar la visión categórica; sin embargo, lo conveniente de este noción creó los motivó a adoptar las categorías. Grothendieck no fue el único en insistir en lo provechoso de los límites, pero fue parte importante en este debate. El filósofo e historiador alemán Krömer comenta que en la *Tribu* 38 se menciona: "Grothendieck señala que la búsqueda de un límite inductivo [colímite] es un problema de aplicación universal, y que la mezcla anterior de conmutabilidad puede ser un caso especial de una propiedad de conmutabilidad de problemas universales".[18] En definitiva, a Grothendieck le interesó la construcción de límites no necesariamente finitos.

3.4 | Topología de Grothendieck

Así como la teoría de categorías fue más que un lenguaje útil gracias a los trabajos de Grothendieck y Kan, la teoría de gavillas se desarrolló gracias al trabajo de Leray, Cartan, Serre y Godement, entre otros matemáticos.[19] Como mencionamos en el capítulo 2, en el seminario de Cartan, Serre proporciona una visión cohomológica

[18]No está disponible este documento en el archivo digital de Bourbaki.

[19]El concepto de gavilla nació con Leray en 1942 y la denominó *faisceau*; después se identificó como *espace etalé* en el seminario de Cartan. Se conoció como *garbe* en alemán, *shesf* como traducción al inglés y *haz* en los países de habla hispana, excepto en México. El nombre de *gavilla* fue acuñado por el matemático mexicano Félix Recillas, quien estudió en la Universidad de Harvard y depués en Princeton, donde inició sus estudios de posgrado en septiembre de 1944 bajo la dirección de Chevalley —como becario de la fundación Rockefeller—. En Harvard, además de

a las conjeturas de Weil. Él le explicó a Grothendieck el problema en 1955, y con esta perspectiva Grothendieck se convence de que hay algo en la cohomología que permite ver con claridad la solución de dichas conjeturas. Serre propone una posible solución en gavillas y Grothendieck concibe, un poco más tarde, que una gavilla en un espacio topológico es como una regla de medir sobre el sitio.[20] Es decir, para él la cohomología debía dar la información gruesa de una gavilla y permitir que emergiera la información que se buscaba. Él generalizó esta noción y afirmó que debía haber un lugar en donde se tuviera la mayor cantidad de reglas para medir. Quería encontrar similitudes entre los espacios topológicos y los grupos, de tal manera que este patrón común entre espacios se capturara en un patrón de funtores.

Grothendieck escribió a Serre que la cohomología de gavillas es un caso especial del funtor derivado y que lo anterior no está en la propuesta de Cartan y Eilenberg. Él le explica que la categoría de gavillas es una categoría abeliana con suficientes inyectables, y que para la resolución de las conjeturas de Weil basta con encontrar la categoría abeliana que tenga la cohomología de las conjeturas de Weil (MacLarty, 2003).

Serre produjo los grupos de cohomología de Weil en una dimensión con la topología de Zariski, y Grothendieck pensó que se podía generalizar esto para todas las dimensiones. Grothendieck encontró que las conjeturas de Weil necesitaban de la cohomología de las cubiertas isotriviales para una topología de Zariski.[21] Para Grothendieck sólo bastaba encontrar la cohomología adecuada para una topología particular; su visión era cubrir de una forma bien determinada para obtener la información que se necesita. En este sentido, la *topología de Grothendieck* es el primer paso técnico que se necesitó para la construcción de *topos*. En esta sección reconstruiremos dicho concepto haciendo énfasis en algunas generalizaciones de lo escrito en el capítulo 2, sección 2.4. Supondremos que **C** es una categoría pequeña con límites finitos. Siguiendo el ejemplo de la sección 2.4, subrayamos que para

estudiar astronomía, asistió a una clase sobre álgebra conmutativa que impartía Oscar Zariski. Por consejo de Chevalley, viajó a Francia para participar durante un año en el seminario de Cartan.

[20]La noción de gavilla intuitivamente se puede pensar como mapeos que codifican la información de manera que permite ir de lo local a lo global.

[21]Estas son familias de fibras sobre abiertos de Zariski que son isomorfas a una variedad.

definir una función continua es importante el concepto de *cubierta*. Además, se resaltan las propiedades que deben cumplir los conjuntos de cubiertas.

Definición 16. Una pretopología de Grothendieck K para $\mathbf{C}$ es una función que a cada $C \in \mathbf{C}$ le asigna una familia de morfismos, KC, con codominio C que satisface los siguientes axiomas:

(i) La identidad $\{1_C\}$ está en KC.

(ii) Si $\{f_i : C_i \to C\} \in KC$ y $g : D \to C$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces la familia de productos fibrados $\{p_i : C_i \times_C D \to D\}$ está en KD, donde

$$\begin{tikzcd} C_i \times_C D \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "p_i"'] & C_i \arrow[d, "f_i"] \\ D \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado para toda $i \in I$.[22]

(iii) Si $\{f_i : C_i \to C\} \in KC$ y $\{g_{ij} : D_{ij} \to C_i \mid j \in I_i\} \in KC_i$ para toda $i \in I$, entonces la familia $\{f_i \circ g_{ij} : D_{ij} \to C \mid i \in I,\ j \in I_i\}$ está en KC.

Las familias en KC se llaman *familias cubrientes*. Además, el axioma (ii) es conocido como *estabilidad*, y el (iii) como *transitividad* o *carácter local*.

Como en el ejemplo de abiertos de la sección 2.4, estas bases tendrán una multiplicidad que no es conveniente, así que seguiremos la misma idea que en el ejemplo.

Definición 17. Una *criba* R sobre $C \in \mathbf{C}$ es una familia de morfismos con codominio C tal que si $f \in R$ y la composición $f \circ g$ tiene sentido, entonces $f \circ g \in R$.

Para obtener la idea intuitiva del punto 2 de las propiedades de cribas en el ejemplo 2.4, necesitamos el siguiente resultado:

[22] Su alumno Jean Giraud (1936-2007) le llamó *base* para una topología de Grothendieck a esta misma noción.

Proposición 18. *Si R es una criba sobre C y $h: D \to C$ es un morfismo, entonces $h^*(R) = \{f: D_f \to D \mid h \circ f \in S\}$ es una criba sobre D.*

Demostración. Sean $f: D_f \to D$ en R y $g: E \to D_f$. Como $h \circ f \in R$ y R es criba, entonces $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g \in R$, por lo que $f \circ g \in h^*(R)$. □

Con lo anterior es posible definir la *topología de Grothendieck*.

Definición 19. Una *topología de Grothendieck* J sobre $\mathbf{C}$ es una función que a cada objeto $C \in \mathbf{C}$ le asigna una familia de cribas JC que satisface los siguientes axiomas:

1. La criba total $t_C = \{f: D_f \to C \mid f \in \mathbf{C}\}$ está en JC.
2. Si $R \in JC$ y $h: D \to C$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces $h^*(R)$ está en JD.
3. Si $R \in JC$ y S es una criba sobre C tal que para cualquier $h \in R$ se cumple que $h^*(S) \in J(\mathrm{dom}(h))$, entonces S está en JC.

Cuando se refiere a topología no es necesario pedir que $\mathbf{C}$ tenga límites finitos. De hecho, es posible dar una definición de pretopología que no dependa de límites finitos (Mac Lane y Iele Moerdijk, 1992). Una vez más, el axioma 2 se llama *estabilidad* y el 3 *transitividad* o *carácter local*. De igual forma, una criba en JC se llama *criba cubriente*.

Si K es una pretopología, entonces se puede considerar la topología J generada por K. Para esto decimos que una criba sobre C está en JC si y sólo si contiene a un elemento de KC. Es posible demostrar que con esta definición J es la topología más pequeña que contiene a K.[23]

Definición 20. Un *sitio* es un par $(\mathbf{C}, J)$ donde C es una categoría pequeña y J es una topología sobre $\mathbf{C}$.

Un ejemplo de topología y de sitio se conforma al considerar la *topología discreta* J_d en una categoría $\mathbf{C}$. Una criba R sobre C está en J_dC si y sólo si R es la criba total. Como $J_dC = \{t_C\}$, entonces se satisface el primer axioma. Para mostrar estabilidad basta observar que si $h: D \to C$ es un morfismo, entonces $h^*(t_C)$ está en J_dD, es

[23] Por esta razón también se llama *base* a una pretopología.

decir, $h^*(t_C) = t_D$. Esto último es consecuencia de que $h \in t_C$, por lo que $h \circ 1_D \in t_C$ y así, $1_D \in h^*(t_C)$. Al cabo, como $h^*(t_C)$ es una criba (ver proposición 18) que tiene a la identidad, entonces es igual a t_D.

Para probar que se satisface el axioma 3, supongamos que R es una criba sobre C tal que para cualquier $h : D \to C$ se cumple que $h^*(R) = t_D$ y veamos que $R = t_C$. Por hipótesis se tiene que $1_C^*(R) = t_C$ y por definición $1_C^*(R) = \{f : D_f \to C \mid 1_C \circ f \in R\}$, es decir, $1_C^*(R) = R$, es decir, se cumple el axioma de transitividad. Por lo tanto J_d es una topología de Grothendieck sobre $\mathbf{C}$. Por lo que $(\mathbf{C}, J_d)$ es un sitio.

Dados P un orden parcial y $p \in P$, se dice que $D \subseteq P$ es *denso bajo* p si para todo $q \leq p$ existe $d \in D$, tal que $d \leq q$. En este caso, un criba R sobre p satisface que para cualquier $x \in R$ se cumple $x \leq p$; además, si $x \in R$ y $q \leq x$, entonces $q \in R$. De esta forma definimos la *topología densa* J sobre P de la siguiente manera:

$$Jp = \{D \subseteq P \mid D \text{ es una criba densa bajo } p\}.$$

Como la criba total sobre p es $\{q \in P \mid q \leq p\}$ —todo lo que tiene codominio P— y ésta es claramente densa bajo p, entonces se satisface el primer axioma. Para el axioma 2, proporcionados $D \in Jp$ y $q \leq p$, es fácil ver que $\{r \leq q \mid r \in D\}$ está en J_q (ver proposición 18), es decir $\{r \leq q \mid r \in D\}$ es denso bajo q.[24] Sean $s \leq q$ y $s \leq p$, existe $d \in D$ tal que $d \leq s \leq q$. Por lo tanto $d \in \{r \leq q \mid r \in D\}$, por lo que se satisface el axioma de estabilidad. Para demostrar que se cumple el axioma 3, tenemos que si $D \in Jp$ y R es una criba sobre p tal que para cualquier $q \in D$ el conjunto $\{r \leq q \mid r \in R\}$ es denso bajo q. Tenemos que probar que $R \in J_P$, pero sólo basta mostrar que es denso bajo p. Sea $x \leq p$, entonces existe $d \in D$ tal que $d \leq x$, como $\{r \leq d \mid r \in R\}$ es denso bajo d, entonces existe $r \in R$ tal que $r \leq d \leq x \leq p$. Así, R es denso bajo p, es decir $R \in J_p$ y por lo tanto J es una topología de Grothendieck. De está manera, (P, J) es un sitio.

3.5 | El topos de Grothendieck

> [el topos] es la versión más intrínseca de la noción de sitio, el sitio fue introducido para formalizar la intuición topológica de "localización" (el término

[24] Si $q \leq p$, entonces $q \in t_P$, es decir, q es denso bajo p.

> sitio fue acuñado por Giraud, quién también hizo mucho por la noción de topos y sitio)[...el topos y sitio] contiene una potencia y renovación tanto geométrica, aritmética y topológica, que mediante una síntesis de estos mundos, separados por mucho tiempo, [pero unidos] por una intuición geométrica común...que durante quince años (después de mi partida) la idea unificadora y la poderosa herramienta que es el topos[...] no es considerada una noción seria (El entierro Grothendieck, 1985, p. 264).

Leray no fue parte de Bourbaki porque en un inicio él estaba interesado en la matemática aplicada. A pesar de su postura, Leray propuso gavillas que no eran parte de la matemática aplicada, por lo que algunos Bourbaki se interesaron en su seminario; Grothendieck asiste por recomendación de Cartan. La escuela francesa se interesó por la geometría algebraica mientras que la escuela estadounidense se centró en la conexión entre el álgebra y topología. En una carta con fecha de 1958, Eilenberg escribió que todo mundo hace geometría algebraica en Francia; también afirmó que la topología era inaudita, aunque comentó que hay matemáticos interesados en el álgebra homológica (Krömer, 2006). En el capítulo 1 se señaló la importancia de la comunicación entre estas dos escuelas; sin embargo, mientras que Leray fue prisionero de guerra en Australia, no fue posible que él estuviera al tanto de los trabajos de la escuela estadounidense. La comunicación entre estas escuelas se favorece después de la Segunda Guerra Mundial, cuyos protagonistas principales fueron los miembros Bourbaki.

En la sección anterior nos centramos en la generalización que hace Grothendieck de cubierta y criba. En esta sección enfatizamos que el traslado de la propiedad de "localización" es relevante para saber quién cubre al objeto, ya que para él, esta propiedad es la que proporciona información de "cómo" es el espacio. Por ello, nos centraremos en la extensión de la noción de función continua, o bien, podemos decir que se universalizan las nociones locales. Las funciones continuas —se caracterizan por ser una noción local— se pueden describir en términos de cubiertas con una topología de Grothendieck y gavillas donde el espacio topológico puede ser recuperado por medio de "subobjetos" del objeto terminal. Por ello, la definición de gavilla está motivada por el ejemplo del capítulo 2 de la sección 2.4. La noción de *topos de Grothendieck* encarna al espacio original, ya que dado un abierto $U \subseteq X$ será posible encontrar un objeto en el *topos* que represente a U. Este traslado adecuado es el resultado de aplicar el funtor de Yoneda y gavillanización, cuyo concepto veremos en esta sección.

Definición 21. Sean $(\mathbf{C}, J)$ un sitio, $C \in \mathbf{C}$, $R \in JC$ y P una pregavilla. Una *familia compatible* para R de elementos de P es un conjunto $\{x_f \in PD \mid (f\colon D \to C) \in R\}$ tal que

$$x_f \cdot g = x_{f\circ g}, \qquad \text{para todo } g\colon E \to D. \tag{3.5}$$

Además, una *amalgama* para una familia compatible es un elemento $x \in PC$ tal que $x \cdot f = x_f$ para todo $f \in R$.

Para escribir la definición de gavilla examinemos que el conjunto de funciones continuas $C(\_\_, Y)$ del ejemplo 2.4; junto con las funciones restricción, para cada inclusión, forman un funtor de la forma $C(\_\_, Y)\colon \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$. Así, podemos traducir el comportamiento de $C(\_\_, Y)$.

Definición 22. Una pregavilla $P \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ es una *J-gavilla* si para todo $C \in \mathbf{C}$ y cualquier criba cubriente $R \in JC$ se cumple que toda familia compatible para R de elementos de P tiene una única amalgama.

Cuando del contexto la topología es evidente, entonces sólo se le llamará gavilla. Las gavillas son las que codifican los sistemas de localización del sitios.

Definición 23. Sea $(\mathbf{C}, J)$ un sitio. La *categoría de gavillas* del sitio, que se denota con $\mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J)$, tiene como objetos las gavillas $P\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$, y sus morfismos son transformaciones naturales entre ellos.

Es inmediato de la definición que toda categoría de gavillas es una subcategoría de una de pregavillas, es decir, existe un funtor inclusión.[25]

$$\mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}.$$

Una de las razones por la que una pregavilla no es una gavilla es que no toda familia compatible tiene amalgama. Si tenemos una pregavilla P y queremos dar una gavilla a partir de P, necesitamos considerar las familias compatibles de elementos

[25]Que es fiel y pleno, es decir, tiene las mismas flechas.

de P y añadir una amalgama para cada una de ellas. Al agregar estas amalgamas, pueden aparecer nuevas familias compatibles que no tengan amalgama, por lo que es necesario repetir este desarrollo. Al repetirlo aparecerán nuevas amalgamas y, por lo tanto, nuevas familias compatibles. Cuando sucede algo así lo más común es repetir recursivamente el proceso tantas veces como números naturales y luego tomar la unión del resultado de cada paso.

Para formalizar esta evolución tomemos un sitio $(\mathbf{C}, J)$ y una pregavilla $P \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$. Dada una criba cubriente $R \in JC$ consideramos el conjunto de familias compatibles para R de elementos de P, que denotamos con $\mathrm{Comp}(R, P)$. Además consideramos a JC como una categoría que tiene como objetos a las cribas cubrientes sobre C y hay una flecha $R \to S$ si y sólo si $S \subseteq R$. Si tomamos a JC como una categoría de índices, podemos considerar en $\mathbf{Con}$ el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Gamma : & JC \arrow[r] & \mathbf{Con} \\ & R \arrow[d] \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Comp}(R,P) \arrow[d] \\ & S & \mathrm{Comp}(S,P), \end{tikzcd}$$

donde la función de la derecha manda a una familia compatible $\mathbf{x} = \{x_f \in PD \mid (f\colon D \to C) \in R\}$ a la familia compatible $\{x_f \in \mathbf{x} \mid f \in S\}$. De esta manera podemos dar el resultado del primer proceso tomando el colímite del diagrama anterior, es decir:

$$P^+C = \operatorname*{colim}_{R \in JC} \mathrm{Comp}(R, P).$$

Y para una flecha $h\colon D \to C$ la función $P^+C \to P^+D$ está definida como sigue:

$$\{x_f \mid f \in R\} \cdot h = \{x_{h \circ g} \mid g \in h^*(R)\}.$$

Esta construcción se muestra en (Dold y Eckmann, 1977) conocido como SGA4, donde se denota con L. Hoy en día se conoce como la construcción + de Grothendieck, contenida en el libro Mac Lane y Iele Moerdijk (1992, pp. 128-129). Dicha noción considera a la familia compatible como su propia amalgama y se identifica la familia $\{x_f \mid f \in R\}$ con $\{y_g \mid g \in S\}$ si existe $T \subseteq R \cap S$, tal que $T \in JC$ y $x_f = y_f$ para toda $f \in T$.

Siguiendo la idea intuitiva para obtener una gavilla a partir de una pregavilla, deberíamos hacer la construcción + tantas veces como naturales y unir el resultado, es decir, deberíamos considerar la unión de la siguiente familia de conjuntos:

$$PC, P^{+}C, P^{++}C, P^{+++}C, \dots$$

Lo interesante de esta construcción es que se puede demostrar que P^{++} es una gavilla para cualquier pregavilla P. Con este resultado definimos $a: \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J)$ como $aP = P^{++}$. Este funtor tiene propiedades convenientes ya que + y por tanto a preservan límites finitos y hay una relación especial, que no haremos explícita, entre el funtor $a: \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J)$ y la inclusión $i: \mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J) \to \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$.[26]

Definición 24. Una categoría es un *topos de Grothendieck* si es equivalente a la categoría de gavillas sobre un sitio.

Finalmente llegamos a la construcción del *topos de Grothendieck.* Se ha reiterado la dualidad que captura esta noción y la manera en que generaliza ciertas intuiciones topológicas en una categoría de gavillas. Ahora observemos qué se puede modelar con este concepto.

Ejemplos

El *topos de Grothendieck* es al mismo tiempo geométrico, aritmético y lógico. Esta noción permite ir de un dominio inherente y transferirlo a otro, es decir, es posible ir de lo geométrico a lo aritmético, y de lo lógico a lo topológico, como veremos en los siguientes ejemplos. Algo interesante es que en el *topos* siempre es posible recuperar cualquier geometría; tal vez por esto se pueden modelar diferentes situaciones en muchas áreas del conocimiento (Marquis, 2009). Un ejemplo significativo es que toda categoría de pregavillas es una categoría de gavillas con topología discreta.

Sea $(\mathbf{C}, J_d)$ un sitio, donde J_d es la topología discreta definida en 3.4. Para demostrar que toda pregavilla P es una gavilla, se considera un objeto $C \in \mathbf{C}$ y una

[26] Un funtor $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ preserva límites si dados $\mathbf{I}$ una categoría de índices y $\Gamma: \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ un diagrama tales que $\langle L \xrightarrow{\gamma_I} \Gamma I\rangle_{I\in\mathbf{I}}$ es el límite en $\mathbf{C}$, entonces $\langle FL \xrightarrow{F\gamma_I} F\Gamma I\rangle_{I\in\mathbf{I}}$ es el límite del diagrama $F \circ \Gamma: \mathbf{I} \to \mathbf{D}$.

criba cubriente $R \in J_d C$. Por definición de topología discreta se tiene que $R = t_C$. Sea $\{x_f \in PD \mid (f\colon D \to C) \in R\}$ una familia compatible, y definimos $x = x_{1_C}$. Luego, por (3.5) se tiene que $x \cdot f = x_{1_C f} = x_f$, así x es una amalgama para la familia. Ahora, si $y \in PC$ es otra amalgama, entonces

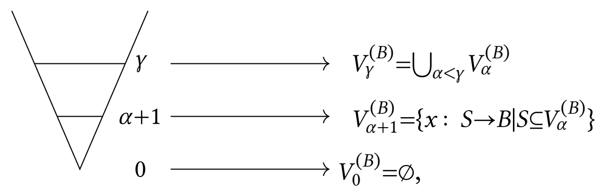
$$y = y \cdot 1_C = x_{1_C} = x.$$

Con lo que se concluye que toda pregavilla es una gavilla y así $\mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J_d) = \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$. Por lo que toda categoría de pregavillas es un topos de Grothendieck. Con este ejemplo se pueden obtener muchos otros ejemplos interesantes simplemente dando una categoría con la topología discreta.

Sea $\mathbf{1}$ la categoría con sólo un objeto y su morfismo identidad. Con esta categoría se tiene que $\mathbf{Con}^{\mathbf{1}^{op}}$ es una categoría de gavillas. Además es fácil ver que $\mathbf{Con}^{\mathbf{1}^{op}}$ es justamente **Con**, es decir, **Con** es un topos de Grothendieck.

Otro ejemplo tiene que ver con el método de forcing. Como vimos en la sección 2.2 del capítulo 2, se empieza con un modelo de ZFC y un orden parcial, luego se considera un subconjunto especial de P, un filtro genérico y se construye un modelo de ZFC a partir de él. En 1967 Dana Scott, Robert M. Solovay y Petr Vopěnka desarrollaron una versión de forcing a partir de modelos booleano valuados, revisar Jech (2002). A grandes rasgos, una estructura booleano valuada es el resultado de cambiar la noción de conjunto de valores verdad, de un conjunto con dos elementos $\{0, 1\}$ a un álgebra de Boole completa B. Para hacer esto, conservando el mismo sentido, es necesario cambiar el tipo de elementos de la estructura; en lugar de elementos comunes, ahora deben ser funciones con codominio el álgebra B. Además también se debe cambiar la forma de evaluar fórmulas, ya que ahora hay muchos valores de verdad.

En el caso de modelos de ZFC, todo lo anterior se puede hacer de manera explícita. Dada un álgebra de Boole completa B se construye un modelo booleano valuado de ZFC por medio de la siguiente jerarquía:



donde γ es un ordinal límite y $V^{(B)} = \bigcup_{\alpha\in Ord} V_{\alpha}^{(B)}$. De la misma forma que en la jerarquía tradicional V, se puede demostrar que si $\alpha < \beta$, entonces $V_{\alpha}^{(B)} \subseteq V_{\beta}^{(B)}$ y definir un rango para cada $x \in V^{(B)}$, denotado por $\mathrm{ran}(x)$, como el mínimo ordinal α tal que $x \in V_{\alpha+1}^{(B)}$. Con este rango se puede definir, por recursión simultanea sobre los pares $(\mathrm{ran}(x), \mathrm{ran}(y))$, el valor booleano de fórmulas atómicas como sigue:

$$\begin{aligned}
[\![x \in y]\!] &= \bigvee_{s\in\mathrm{dom}(y)} y(s) \wedge [\![x = s]\!] \\
[\![x \subseteq y]\!] &= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!] \\
[\![x = y]\!] &= [\![x \subseteq y]\!] \wedge [\![y \subseteq x]\!],
\end{aligned}$$

donde dados $a, b \in B$, el elemento $a \Rightarrow b$ se define como $\neg a \vee b$. Con la definición para fórmulas atómicas se define el valor de una fórmula arbitraria de la siguiente forma:

1. $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$,
2. $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$,
3. $[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!]$,
4. $[\![\exists x\varphi(x)]\!] = \bigvee_{a\in V^{(B)}} [\![\varphi(a)]\!]$,
5. $[\![\forall x\varphi(x)]\!] = \bigwedge_{a\in V^{(B)}} [\![\varphi(a)]\!]$.

Finalmente, diremos que $V^{(B)} \models \varphi$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$. Con todo lo anterior es posible demostrar que $V^{(B)} \models$ ZFC (ver teorema 14.24 en Jech, 2002).

Ahora podemos hacer una categoría a partir de $V^{(B)}$, como se forma la categoría **Con**. La categoría $\mathbf{V^{(B)}}$ tiene como objetos a los elementos de $V^{(B)}$. Una flecha $f\colon\ x \to y$ en esta categoría es la clase de equivalencia de un elemento $f \in V^{(B)}$, tal que $[\![f\colon x \to y \text{ es función}]\!] = 1$, donde la relación de equivalencia está definida como $f \sim f'$ si $[\![f = f']\!] = 1$. La composición $f \circ g$ en esta categoría se define como el único elemento $h \in V^{(B)}$, salvo equivalencia tal que $[\![h = f \circ g]\!] = 1$.

Como B es un álgebra de Boole completa, entonces también es un orden parcial, donde $a \leq b$ si $a \wedge b = a$. Una equivalencia de este orden es $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge \neg b = 0$. El orden parcial $(B, \leq)$ se puede pensar como una categoría $\mathbf{B}$ y, como en el ejemplo de la sección 3.4 del capítulo, se le puede dar la topología densa a $\mathbf{B}$ para obtener un sitio $(\mathbf{B}, J)$. En el caso de álgebras de Boole completas hay una mejor caracterización de la topología densa. Pero antes tenemos que observar que como $0 \leq b$ para todo $b \in B$, entonces cualquier conjunto que tenga a 0 sería denso bajo cualquier elemento del álgebra, por lo que se quita a 0 de los posibles densos.

Proposición 25. *Si B es un álgebra de Boole completa, $b \in B$ y $D \subsetneq B \setminus \{0\}$ es una criba sobre b tal que $D \neq \emptyset$, entonces:*

$$D \in Jb \iff \bigvee D = b.$$

Demostración. Supongamos que $D \in Jb$, es decir, D es denso bajo b. Como D es una criba sobre b tenemos que $\forall d \in D (d \leq b)$. Así, b es una cota superior para D y por lo tanto $\bigvee D \leq b$. Por otro lado, si $b \nleq \bigvee D$, entonces $b \wedge \neg \bigvee D \neq 0$. Usando las leyes de De Morgan tenemos que $0 \neq b \wedge \bigwedge_{d \in D} \neg d$, y como D es denso bajo b, entonces existe $x \in D$ tal que:

$$x \leq b \wedge \bigwedge_{d \in D} \neg d \leq b \wedge \neg x \leq \neg x.$$

Como $D \subsetneq B \setminus \{0\}$, entonces $x \neq 0$ y así la desigualdad de arriba es una contradicción.

Ahora supongamos que $\bigvee D = b$. Para ver que D es denso bajo b consideramos $x \leq b$. Por hipótesis $D \neq \emptyset$, por lo que podemos dar $d \in D$. Como $d \wedge x \leq d$, entonces $d \wedge x \in D$, además este elemento de D cumple $d \wedge x \leq x$. Por lo tanto, D es denso bajo b. $\square$

Para finalizar con este ejemplo, el resultado que necesitamos es el siguiente.

Teorema 26 (Higgs). *El topos de Grothendieck* $\mathrm{Gav}(\mathbf{B}, J)$ *es equivalente a la categoría* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$.

Este teorema muestra que también el método de forcing es el resultado de realizar algunas operaciones a un *topos de Grothendieck*. Además, vimos la categoría de gráficas reflexivas y la de G-conjuntos, y es claro que ambas son ejemplos de *topos de Grothendieck*. En matemáticas hay muchos ejemplos más de este tipo, como la formalización de la geometría diferencial mediante estos *topos*, conocida como geometría diferencial sintética en (Makkai y Reyes, 1977). En topología algebraica está la categoría de conjuntos simpliciales y el desarrollo de la teoría de homotopía en ese contexto, la cual se encuentra en (Gabriel y Zisman, 1967). En lógica existen los topos clasificantes y las generalizaciones del teorema de completud. En geometría algebraica está el topos de Zariski y la reciente relación entre geometría y el lenguaje interno del topos que se encuentra en el texto *Using the internal language of toposes in algebraic geometry* de Ingo Blechschmidt.

También hay ejemplos que pueden ser útiles en otras ciencias; uno de ellos es el de Owen (1986), llamado *Global and Local Versions of the Second Law of Thermodynamics*. Antes de abordar el *topos de Grothendieck* es necesario introducir algunos conceptos, y en este ejemplo se puede entender la palabra "sistema" en el sentido físico. Encontramos otras interpretaciones admisibles en otras ciencias y disciplinas: biología, una célula o cualquier ser vivo; en computación, una base de datos; en teoría de la información, un mensaje que es enviado por medio de un canal de comunicación, etcétera.

Definición 27. Un *semi-sistema algebraico* es un par de conjuntos (Σ, Π) donde los elementos $\sigma \in \Sigma$ se llaman *estados* y los elementos $p \in \Pi$ se llaman procesos. Cada *proceso* p tiene asociado una función $\rho_P : \mathscr{D}(p) \to \Sigma$ llamada *transformación asociada a* p con $\mathscr{D}(p) \subseteq \Sigma$.

Los semi-sistemas algebraicos deben satisfacer ciertos axiomas. Para introducirlos observemos que dados dos procesos $p, p' \in \Pi$ no siempre tiene sentido aplicar un proceso y luego el otro. Esta "composición" de procesos sólo tiene sentido cuando $\rho_p^{-1}(\mathscr{D}(p')) \neq \emptyset$. En este caso es posible hacer la composición $p' \circ p$. Así, denotamos con $\mathbb{P}$ al conjunto de pares de procesos componibles, es decir:

$$\mathbb{P} = \{(p', p) \in \Pi \times \Pi \mid \rho_p^{-1}(\mathscr{D}(p')) \neq \emptyset\}.$$

Con lo anterior, afirmamos hay una función $\mathbb{P} \to \Pi$ que a cada par $(p', p) \in \Pi$ le asigna su composición $p' \circ p$.

El primer axioma para semi-sistemas algebraicos dice que para cualquier par $(p', p) \in \mathbb{P}$, la transformación inducida por $p' \circ p$ tiene dominio $\mathscr{D}(p'p) = \rho_p^{-1}(\mathscr{D}(p'))$, y para cada $\sigma \in \mathscr{D}(p'p)$ se tiene que $\rho_{p'p}(\sigma) = \rho'_p \circ \rho_p(\sigma)$.

El segundo axioma afirma la existencia de un estado base, es decir, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que:

$$\Pi\sigma := \{\rho_p(\sigma) \mid p \in \Pi \text{ y } \sigma \in \mathscr{D}(p)\} = \Sigma.$$

Se suele escribir $p\sigma$ en lugar de $\rho_p(\sigma)$ y se le llama estado final. El conjunto $\{(p,\sigma) \mid \sigma \in \mathscr{D}(p)\}$ se denota con $\Pi\Sigma$. Además, para un estado arbitrario σ, el conjunto $\Pi\sigma$ es el conjunto de estados accesibles a partir de σ, y un semi-sistema algebraico donde todos los estados son base se llama *sistema de accesibilidad perfecta*.

Un morfismo entre semi-sistemas, $f\colon (\Sigma,\Pi) \to (\Sigma',\Pi')$, es una pareja de funciones $f_0 : \Sigma \to \Sigma'$ y $f_1 : \Pi \to \Pi'$ que preservan dominios, estados finales y composición de procesos, es decir

$$\mathscr{D}(f_1(p)) = f_0(\mathscr{D}(p)), \quad f_0(p\sigma) = f_1(p)(f_0(\sigma)) \quad \text{y} \quad f_1(p' \circ p) = f_1(p') \circ f_1(p).$$

Como se infiere del contexto que parte de f se aplica en estados y procesos, en lugar de f_0 y f_1 escribiremos f. Con este cambio de notación escribiremos, por ejemplo, $f(p,\sigma)$ en lugar de $(f_1(p), f_0(\sigma))$.

Diremos que un morfismo f es un epimorfismo si cumple lo siguiente:

$$f(\Sigma) = \Sigma', \quad f(\Pi) = \Pi', \quad f(\Pi\Sigma) = \Pi'\Sigma' \quad \text{y} \quad f(\mathbb{P}) = \mathbb{P}'.$$

Ahora consideramos un "cuerpo en el espacio" B, esto quiere decir que B es un cerrado regular en un espacio topológico y lo consideramos como un espacio con la topología restringida de X, es decir, un abierto en B es de la forma $B \cap U$ con $U \subseteq X$ abierto.[27]

[27] Sean X un espacio topológico y $B \subseteq X$. Decimos que B es un cerrado regular en X si $\overline{\mathrm{int}(B)} = B$, donde el interior, $\mathrm{int}(B)$, es el abierto más grande contenido en B y la cerradura, $\overline{B}$, es el cerrado más chico que contiene a B.

Definición 28. El *álgebra de subcuerpos* de B es la colección de cerrados regulares contenidos de B junto las operaciones:

$$S \wedge T = S \cap T, \quad S \vee T = \overline{\mathrm{int}(S \cup T)} \quad y \quad \neg S = \overline{B \setminus S}.$$

Notemos que esta estructura está ordenada por $\subseteq$ y que con este orden las operaciones $\wedge$ y $\vee$ son ínfimo y supremo, respectivamente. Denotaremos con $\mathbb{B}$ tanto al álgebra como al orden así definidos.

Definición 29. Sean B un cuerpo y $\mathbb{B}$ su álgebra de subcuerpos. Un semi-sistema algebraico sobre B es una pregavilla $F \in \mathbf{Con}^{\mathbb{B}^{op}}$ tal que para cualesquiera $S, T \in \mathbb{B}$ se cumple lo siguiente:

1. FS es un semi-sistema algebraico (Σ_S, Π_S).
2. Si $S \subseteq T$ entonces la función $f_{S,T}\colon\ FT \to FS$ es un epimorfismo.

Ahora cada estado $\sigma \in \Sigma_S$ tiene el sentido físico deseado; por ejemplo, la temperatura de la parte S del cuerpo B. Además, se puede interpretar que cada proceso $p \in \Pi_S$ se lleva a cabo en la parte S de B; por ejemplo, la síntesis de un proteína en el ribosoma de una célula. Así, el estado final $p\sigma$ es el estado en el que está S después de haber realizado el proceso p.

Como se pidió a cada subcuerpo $S \subseteq T$ de un epimorfismo, entonces cada par $(p, \sigma) \in \Pi_S\Sigma_S$ está inducido por un par en $\Pi_T\Sigma_T$, es decir, todo proceso en S implica un proceso en T. De esta manera todo proceso en alguna parte de B implica un proceso en B.

En este *topos de Grothendieck* es posible hacer una definición general de entropía por medio de acciones en semi-sistemas algebraicos sobre cuerpos (Owen, 1986). De esta forma es posible crear un marco conceptual general para algunas teorías físicas, como la termodinámica en nuestro ejemplo. Esto permite tener un mejor entendimiento de dichas teorías, y como en algunas otras áreas de las matemáticas, podría aportar una forma sintética de desarrollarlas.

El último ejemplo que mencionaremos es de computación. Una base de datos relacional se puede pensar como una representación sintáctica de entidades del mundo real. Cada entidad tiene una descripción dada por un renglón de una tabla de la base de datos. Por ejemplo, una lista de calificaciones tiene renglones formados por el nombre de los alumnos y sus calificaciones en ciertas tareas y exámenes. Además, es común que cada entidad en la base de datos tenga un identificador, este es un mecanismo que sirve para apuntar hacia dicha entidad al realizar cómputos. En el ejemplo de la lista de calificaciones este identificador puede ser el número de cuenta o el número que ocupan en la lista al ordenarla en orden alfabético. En Spivak (2012) se formaliza el esquema de una base de datos relacional mediante una categoría de la siguiente manera.

Definición 30. Un *esquema para una base de datos* es una categoría pequeña $\mathbf{C}$. Un objeto $C \in \mathbf{C}$ es una tabla y una flecha $C \to C'$ en $\mathbf{C}$ es una "columna" de C valuada en C'.

En este contexto, una flecha identidad $1_C \colon C \to C$ representa la columna de la tabla C que tiene a los identificadores de cada entidad. Esta representación es totalmente sintáctica; con el esquema sólo se puede saber qué tablas y columnas tienen una base de datos, pero dicha base aún esta vacía. Para escribir información en la base de datos se usa el siguiente concepto.

Definición 31. Un *estado de una base de datos* es un funtor $X \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Con}$. Dado un objeto $C \in \mathbf{C}$, un elemento $x \in XC$ es un renglón de XC. Un par (x, f) con $x \in XC$ y $f \colon C \to C'$ es una celda en XC, y para cada celda (x, f) el elemento $x \cdot f \in XC'$ es el valor de la celda.

Una flecha $X \to X'$ en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}}$ representa una consulta hecha a la base de datos. Por esta razón se debe usar todo el *topos de Grothendieck* $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}}$ para estudiar a una base de datos y las posibles consultas que se hagan. Esta es sólo la idea general; para ver los detalles acerca de la coherencia que deben mantener estas bases de datos, se puede consultar a Spivak (2012).[28] Sin embargo, en el mismo trabajo se puede ver cómo ciertas construcciones comunes en bases de datos se pueden formalizar con límites y colímites. Seguir desarrollando este ejemplo requiere de

[28] David Spivak es el fundador del Topos Institute en MIT.

la noción de extensiones de Kan que se salen de los objetivos de esta tesis. La formalización de la migración de datos y, en general, consultas a base de datos por medio de este lenguaje categórico preserva su consistencia de mejor forma que el método relacional —clásico—. Por ello las herramientas construidas con este lenguaje son de gran utilidad para la seguridad nacional de los Estados Unidos. En suma, el *topos de Grothendieck* es, a pesar de lo abstracto en su definición, una noción que no será olvidada pronto, porque los ejemplos desvelaron que la teoría de categorías y en particular la teoría de *topos* tienen múltiples aplicaciones.

Conclusiones

El capítulo 3 tomó un punto de vista estructuralista bourbakiano para reconstruir y entender en qué consiste el *topos de Grothendieck*. Por lo anterior, fue obligado definir categoría, funtor, transformación natural, entre otros conceptos. También fue obligado definir la categoría opuesta, ya que era necesario para definir pregavilla y gavilla. Un ejemplo interesante de una categoría de pregavilla fue el de sistemas dinámicos discretos, ya que hace posible que se modele la evolución de un conjunto y muestra que el lenguaje categórico captura estas nociones —de la matemática clásica— de manera clara. Después, nos adentramos a las construcciones grothendieckianas como son topología de Grothendieck, sitio y los conceptos que hicieron posible decir que una categoría es un *topos de Grothendieck* si es equivalente a la categoría de gavillas sobre un sitio. Además, vimos el lema de Yoneda que podemos pensar como una representación de una categoría dentro de una categoría de pregavillas, si la topología de Grothendieck tiene propiedades adecuadas, la misma representación incluye a la categoría dentro de una categoría de gavillas.

Es relevante observar que la teoría de categorías se encuentra cerca de la matemática constructivista, dicho de otro modo, en este lenguaje sólo se tiene lo que se puede construir. Además, la lógica que emerge del *topos* es intuicionista y no puede ser más fuerte que eso (MacLarty, 2006).[29] Por lo anterior, en categorías

[29] Demostrar que la lógica que emerge de un topos es intuicionista se sale de los límites de este trabajo pues hay que demostrar que los subobjetos forman un álgebra de Heyting. Se puede revisar el trabajo de Lawvere para profundizar en el tema.

es interesante poder realizar la mayor cantidad de construcciones. En este capítulo se mostró que la noción de límite es una herramienta para construir objetos, y en este sentido, las categorías con mejores propiedades son las que tienen límites. Este trabajo muestra que los *topos de Grothendieck* al tener límites y colímites son categorías preciadas para los categóricos.[30]

Otros aspecto importante del *topos de Grothendieck* es que los ejemplos —que se escribieron en el capítulo— mostraron una diversidad de aplicaciones. Por un lado, el *topos de Grothendieck* es un noción que se obtiene de abstracciones y generalizaciones; sin embargo, resulta ser un lugar adecuado para modelar diversas situaciones de la ciencia y tecnología, es decir, esta noción acerca a la matemática abstracta y aplicada.

[30]Es fácil ver que los colímites son la noción dual de límite.

Conclusiones

Investigar a la escuela francesa y —una parte de— la estadounidense era obligado para rastrear el origen de la teoría de categorías y su desarrollo. Esta teoría nació con la publicación *General Theory of Natural Equivalences* de Mac Lane y Eilenberg. En el artículo se demostró que se puede capturar la estructura de una teoría matemática con el objetivo de identificar en qué otras áreas de investigación se comparte; para ello tuvieron que definir *transformación natural*, *funtor* y *categoría*. Su intención fue dilucidar el desarrollo conceptual de la topología algebraica. Pero no eran la única escuela matemática que discutió cómo tener un marco axiomático general en el que una noción en particular pudiera ser definida. Cartan y Eilenberg definieron la categoría de módulos; Serre, Godement y Grothendieck, entre otros matemáticos franceses, desarrollaron la teoría de gavillas.

En esta época, a decir de Mac Lane, las categorías eran un campo independiente de investigación matemática; a decir de Weil y Cartan, entre otros matemáticos franceses, las categorías era una herramienta heurística para dilucidar teorías. El giro epistémico que dio dicha teoría se observó en el trabajo de Grothendieck, porque brindó la posibilidad de que conceptos duales pudieran convivir, cuestión que en la matemática clásica no podía suceder, pues era necesario recurrir a la teoría de conjuntos para hacer construcciones. Por ejemplo, en el paso de trasladar un conjunto cuyos elementos tienen propiedades bien definidas a uno donde sus elementos carecen de propiedades, se obtiene un conjunto cuyos elementos son diferentes y no tienen propiedades que los distingan, es decir, en términos de sus propiedades todos son iguales pero aun así son diferentes. Esta contradicción en la matemática clásica es una cualidad en el *topos de Grothendieck* (Lawvere, 1976, 1994, 2015).[31]

La búsqueda o construcción de un lugar en donde lo continuo y lo discreto convivieran no era una preocupación únicamente de Grothendieck, sino de varios de los Bourbaki. La mayoría de sus miembros estaban comprometidos en resolver las conjeturas de Weil y, en particular, la hipótesis de Riemman. Sin embargo, los planteamientos de Grothendieck se salían de los límites que los Bourbaki se

[31]El trabajo del matemático holandés Kan, quien trabajó en teoría de homotopía y vislumbró —junto con su tutor Eilenberg— que era posible unificar varios resultados con la noción de funtor adjunto; también muestra un giro epistémico en la teoría de categorías.

autoimpusieron. Él propuso una jerarquía axiomática que permitió determinar lo que se podía construir en contextos determinados y, por ello, surgieron desacuerdos. Las controversias a su trabajo radicalizaron sus planteamientos; trasladó ciertas intuiciones topológicas a categorías y logró que la noción de *topos* desempeñara una función más relevante que ser sólo una teoría. Este planteamiento cambió la concepción de cómo entender la matemática, ya que permitió caracterizar un tipo de estructura en términos de morfismos, sin que se necesitara especificar las propiedades que distinguen a los objetos. Mientras tanto, los estructuralistas bourbakianos entendieron a la matemática como una unidad que generaliza, sistematiza y sintetiza sus diferentes áreas, y por ende, las categorías debían ser una generalización de esta síntesis estructural; es decir, estas construcciones tenían que ser un tipo de sistema estructurado por conjuntos o por clases. Obviamente esto los llevó a discutir el marco fundacional de la matemática que se debía elegir. Los Bourbaki estuvieron comprometidos en resolver desde su perspectiva los problemas matemáticos. Sin embargo, hacer coincidir su posición estructuralista con las categorías no fue una generalización natural. Ellos no encontraron equivalencias formales que llevaran una a la otra; al contrario, los llevó a la división entre sus miembros por cuestionar su creencia metafísica.

En este trabajo encontramos evidencias sobre la postura de matemáticos estadounidenses y franceses que marcaron el rumbo que tomaron los estudios sobre las categorías, en particular la teoría de *topos*. En las historias conceptuales que revisamos se le da poca relevancia al rompimiento de Grothendieck con Bourbaki, aun cuando este acontecimiento da una posible explicación sobre el giro fundacional de la geometría algebraica; cuya propuesta difiere de la posición estructuralista bourbakiana. Este conflicto se reflejó en la omisión o minimización de sus propuestas, como se observó en el lema de Yoneda, llamado así por Mac Lane en alguna de sus pláticas, a pesar de la evidencia de que este lema fue expuesto por primera vez por Grothendieck en el seminario Bourbaki. Como consecuencia de estos relatos históricos, se confundió el origen del concepto de *topos*, así como la dirección que tomó su investigación. Esto propició a que algunos teóricos escribieran que las categorías son una generalización de la teoría de conjuntos o que el componente lógico del *topos* sugiere que su origen es diferente al geométrico.

El *topos* no escapó de las contingencias de la historia, ya que las posturas políticas y personales de los personajes que formaron parte de esta genealogía fueron fundamentales para entender la propuesta de Grothendieck. Por lo anterior, es indiscutible que las cartas, fotos, artículos, notas y otros testimonios fueron significativos para la reconstrucción del *topos*, ya que documentaron el quehacer científico y social de la comunidad matemática en donde se gestó dicha noción. En esta reconstrucción se mencionan actores determinantes para entender la innovación teórica de Grothendieck, ya que este resultado conceptual se gestó tanto por la interacción de Grothendieck con Bourbaki, Serre y Leray, entre otros matemáticos, como por su convicción de que era posible construir una estructura matemática que sirviera para sus fines, así como por su obstinación en usar un lenguaje que se fue modificando para construir un lugar en donde conceptos duales pudieran convivir. La innovación teórica de Grothendieck proporcionó una manera de cómo entender la matemática y, por ende, qué se puede demostrar o construir en ella. Sin esta componente histórica no hubiera sido posible entender la concepción matemática estructuralista bourbakiana ni la constructivista grothendieckiana.

Aún no hay consenso sobre el camino que siguió Grothendieck en la construcción del *topos*. El filósofo e historiador alemán Kröme sugiere que Grothendieck generalizó la noción de *espacio topológico* a la de *sitio*, ya que en el *Tôhoku* es donde propuso su topología. Por su parte, Marquis afirma que el concepto de *sitio* no es importante porque no es una concepción de un espacio generalizado, mientras que el *topos de Grothendieck* es relevante porque es la generalización de topología. Mi postura es más concorde con MacLarty, quien considera que el objetivo del *topos de Grothendieck* fue resolver las conjeturas de Weil y que la cohomología es el concepto más importante en el *Tôhoku*, pues allí se establece el fundamento para la “forma” de cualquier *topos*. Para este autor, Grothendieck resuelve un problema de la siguiente manera:

1. Encuentra el mundo natural para el problema.

2. Expresa el problema en ese mundo.

3. La cohomología del mundo resuelve de forma natural el problema.

Una propuesta similar, al menos a los primeros dos puntos anteriores, fue desarrollada por Cohen con el método de forcing. Esta propuesta proporciona mundos —desde la matemática clásica— y esto parece factible con la propuesta estructuralista bourbakiana; sin embargo, los Bourbaki no utilizaron forcing como una manera de resolver problemas, mientras que las construcciones grothendieckianas van más allá de construir mundos y resolver problemas. Cronológicamente, forcing se propuso a finales de los años sesenta y el *Tôhoku* se publicó a mediados de los cincuenta. Hay que señalar que nadie se había dado cuenta de que en el *topos de Grothendieck* subyace una lógica interna; fue hasta 1969 cuando Lawvere, en colaboración con Myles Tierney (1937-2017), se encamina a una presentación en lenguaje de primer orden y categórico del *topos de Grothendieck*. En este trabajo Lawvere motiva, entre otras cosas, que el forcing de Cohen es una aplicación del *topos de Grothendieck*.

El aspecto geométrico de los *topos* viene directamente de Grothendieck, quien lo definió en el contexto de la geometría algebraica mediante gavillas. Grothendieck lo presentó como una generalización de intuiciones topológicas adecuadas y como posibilidad de un verdadero objeto de estudio de la matemática. Él señaló que un *topos* heredaba muchas de las propiedades de la categoría de conjuntos, y por ello podía considerarse una generalización de esta última. Así pues, un *topos* era al mismo tiempo una generalización de la idea de un espacio topológico y de una categoría de conjuntos. Sin embargo, ni él ni sus estudiantes vieron el aspecto lógico, o no le prestaron atención. Las nociones clave de la lógica de categorías estaban directamente relacionadas con estos desarrollos de la geometría algebraica; de hecho, estas nociones clave se consideraban esclarecedoras de algunas nociones de la lógica. Por lo que la comprensión del *topos*, anclada en la práctica matemática, sacó a la luz que su origen y desarrollo no fue producto de una generalización de la teoría de conjuntos o de la topología, ni era una más de las teorías lógicas.

Cuando Grothendieck salió de la comunidad matemática, sus sucesores minimizaron la importancia de algunas de sus construcciones, en particular el concepto de *topos*, mientras que los fundamentos de la geometría algebraica nunca se perdieron de vista. Aunque la lógica categórica estaba relacionada directamente con las ideas del programa de Grothendieck, éstas ya no estaban vinculadas a las ideas de la comunidad matemática (Marquis y Reyes, s.f.); por ello los puentes entre la geometría algebraica y la lógica no fueron parte de las discusiones entre la escuela francesa y estadounidense.

Grothendieck escribió mucho sobre el desencanto que le produjo el lugar en donde se identificó como matemático y afirmó que logró resultados contundentes en la matemática contemporánea, que no fue posible atribuirle a un tercero. Él señaló que la comunidad de "cohomólogos" fue la más falta de delicadeza. En un pie de página de su texto *Recoltes et Semailles* agradeció a sus colegas y amigos "no comohologos", en su mayoría matemáticos que no eran parte del círculo al que perteneció. En esta lista se encuentra a W. Lawvere, J. Murre, D. Mumford, I.M. Gelfand y J. P. Serre, entre otros. Serre también forma parte de la lista de colegas desleales.

Esta reconstrucción no es neutral; mi postura es que una filosofía centrada en las prácticas matemáticas permite reconstruir una historia más robusta del *topos*. Las claves históricas resultaron muy enriquecedoras para sacar un hilo de la maraña matemática que se devanó en la tesis. La reconstrucción formal del *topos* tomó como referente la discusión estructuralista bourbakiana. Esta postura se alejó de una reconstrucción matemática guiada por una historia conceptual; también se distanció de una historia configurada para resaltar el aspecto lógico del *topos*. Esta narración no sólo consideró al *topos* como parte de la historia de la teoría de categorías, sino que hizo evidente que la generalización de la postura estructuralista bourbakiana se sintetizó en el *Tôhoku*. Además, se destacaron las reconstrucciones formales que permitieron la inserción del *topos* en la matemática.

La reconstrucción hizo posible comprobar que los formalismos matemáticos así planteados eran los necesarios para entender en qué consistió el *topos de Grothendieck*. La estructura de orden nos permitió verificar, en el capítulo 3, que el método de forcing se pueden generalizar en teoría de categorías, ya que este planteamiento resulta más claro y natural. Para el estudio de la estructura algebraica fue necesario constatar que las conjeturas de Weil sugieren lo discreto y lo continuo. Mi objetivo en este texto ha sido mejorar la comprensión del concepto del *topos*, que muestre el origen y dirección de su desarrollo teórico. Estoy convencida de que esta reconstrucción aporta a la discusión de cómo abordar el estudio histórico en la teoría de *topos*, proporciona claridad conceptual en las discusiones filosóficas y brinda —a la manera grothendieckiana— intuición matemática a los estudiantes iniciados en estos temas. Por ello, la reconstrucción del *topos de Grothendieck* con estos elementos brinda una manera natural de entender y aprender la matemática contemporánea, en particular el *topos*.

Finalmente, aunque en el trabajo mostramos la utilidad y el alcance del *topos*, dejando la teoría de *topos* a un lado, todavía hace falta responder muchas preguntas; por ejemplo, si hubo alguna relación entre los positivistas lógicos y los Bourbaki, cómo abordar el estudio histórico sobre la teoría de *topos*, si es posible que el *topos* sea un lugar que corporice a la teoría de conjuntos, o bien, si es necesaria una teoría de conjuntos externa para parametrizar límites y colímites. Además, abre la interrogante sobre qué relación tiene el *topos de Grothendieck* con el concepto de *espacio*.

A | Propiedades de la cohomología

En este apartado se van a escribir los enunciados que conforman las conjeturas de Weil. Dada una variedad X irreducible no singular de dimensión d, las conjeturas de Weil afirman la existencia de una cohomolgía con coeficientes en un campo k que satisface las siguientes condiciones:

1. Todo $H^i(X)$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre k, que es el espacio 0 excepto si $0 \leq i \leq 2d$. Hay un isomorfismo natural $H^{2d}(X) \cong k$. Finalmente, la multiplicación en $H^\bullet(X)$ genera una forma bilineal $H^i(X) \times H^{2d-i}(X) \to H^{2d}(X) \cong k$ que permite identificar $H^{2d-1}(X)$ con $H_i(X)$. Esto se conoce como *dualidad de Poincaré.*

2. Si Y es otra variedad no singular, entonces $H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \cong H^\bullet(X \times Y)$. Éstas son llamadas fórmulas de Künneth.

3. Todo morfismo $g : X \to X$ define una transformación lineal $g^{(i)} : H^i(X) \to H^i(X)$ tal que si $0 \leq i \leq 2d$ entonces $g^{(i)}$ es un morfismo de álgebras graduadas. Los puntos fijos de g son la proyección sobre X de la intersección de la gráfica Γ de g con la diagonal Δ de $X \times X$. Además, si Γ y Δ se intersectan transversalmente en cada punto, entonces el número de puntos fijos de g está dado por la fórmula de la traza de Lefschetz:
$$N = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i Tr(g^{(i)}).$$

4. Si Y es una subvariedad no singular de X de dimensión $d-1$, entonces hay transformaciones lineales $H^i(X) \to H^i(Y)$ que son biyectivas si $i \leq d-2$, e inyectivas si $i = d-1$.

5. Sea $h \in H^2(X)$ y consideramos L la función que multiplica por h en $H^\bullet(X)$. Así, $L^{d-1} : H^i(X) \to H^{2d-i}(X)$ es un isomorfismo si $i \leq d$. Esto implica que si $g : X \to X$ es un morfismo tal que $g^{(2)}(h) = qh$, donde $q > 0$ y es un racional, y si $g_i = q^{-1/2} g^{(i)}$, entonces g_i es biyectiva.

6. Si $i \leq d$ entonces $H^i(X)$ tiene un subespacio $A^i(X)$ que es estable bajo $f^{(i)}$ para todo morfismo $g : X \to X$. Además, cada $A^i(X)$, considerado como un

espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, tiene un producto escalar tal que si g es como en el inciso anterior, entonces cada g_i es una función unitaria para ese producto escalar.

7. Supongamos que la hipersuperficie no singular V definida sobre $\mathbb{F}_q$ tiene un álgebra graduada $H^\bullet(X)$ asociada con las propiedades de los incisos anteriores, y que el morfismo de Frobenius satisface $\phi^{(2)} = qh$; entonces la gráfica de ϕ^v intercepta transversalmente a la diagonal Δ. Por lo tanto, el número de puntos fijos de Φ^v, denotado con N_v, está dado por

$$N_v = \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{ij}^v,$$

donde α_{ij}^v son los valores propios de $(\Phi^v)^{(i)}$. Con esto se tendría que para $d = n - 1 = dim(V)$:

$$Z_V(x) = \frac{p_1(x)p_3(x)\cdots p_{2d-1}(x)}{p_0(x)p_2(x)\cdots p_{2d}(x)},$$

donde $p_i(x) = det(1 - x\Phi^{(i)})$ es un polinomio con coeficientes enteros. En particular $Z_V(x)$ sería una función racional. Finalmente, sea V_0 la hipersuperficie generada por el mismo polinomio que define a V pero en $\overline{Q}^n$, entonces el grado de cada p_i debe ser igual al i-ésimo número de Betti de V_0.

B | Propiedades del topos de Grothendieck

La primera construcción que haremos en *topos de Grothendieck* es la de límite, es decir, se mostrará que el límite de gavillas es una gavilla, por lo cual es necesario construir dicho límite en pregavillas.

Lema 32. *Todo diagrama pequeño* $\Gamma\colon \mathbf{I} \to \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ *tiene límite.*

Demostración. Se construye el límite del diagrama como la pregavilla L definida como sigue: $LC = \lim_{I\in\mathbf{I}} \Gamma I(C)$, esto es posible ya que $\mathbf{Con}$ es una categoría con límites pequeños. Si $f\colon C \to D$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, se define Lf como en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
LD \arrow[r, "\pi_I(D)"] \arrow[d, dashed, "Lf"'] & \Gamma I(D) \arrow[d, "\Gamma I(f)"] \\
LC \arrow[r, "\pi_I(C)"'] & \Gamma I(C).
\end{tikzcd}$$

Además, el diagrama anterior muestra que hay una transformación natural $\pi_I\colon L \to \Gamma I$ cuya componente en C es $\pi_I(C)$. Así, se tiene un cono $(L \xrightarrow{\pi_I} \Gamma I)_{I\in\mathbf{I}}$.

Si $(A \xrightarrow{\alpha_I} \Gamma I)_{I\in\mathbf{I}}$ es otro cono, entonces se define $\alpha(C)\colon AC \to LC$ usando la propiedad universal del límite:

$$\begin{tikzcd}
LC \arrow[r, "\pi_I(C)"] & \Gamma I(C) \\
AC. \arrow[u, dashed, "\alpha(C)"] \arrow[ur, "\alpha_I(C)"'] &
\end{tikzcd}$$

De nuevo, es fácil ver que las $\alpha(C)$ son las componentes de una única transformación natural $\alpha\colon A \to L$. □

Luego hay que demostrar que si en el lema anterior cada ΓI fuera una gavilla, entonces el límite L construido como arriba es también una gavilla.

Proposición 33. *Sean* $(\mathbf{C}, J)$ *un sitio y* $\Gamma\colon \mathbf{I} \to \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ *un diagrama pequeño. Si* ΓI *es una gavilla para todo* $I \in \mathbf{I}$*, entonces* $\lim_{I\in\mathbf{I}} \Gamma I$ *es una gavilla.*

Demostración. Sean $C \in \mathbf{C}$, $R \in JC$ una criba cubriente y $\{x_f \in LD \mid (f\colon D \to C) \in R\}$ una familia compatible. Para cada $I \in \mathbf{I}$ tomamos la proyección de la familia compatible para obtener una familia

$$\{x_{If} \mid (f\colon D \to C) \in R\}. \tag{B.1}$$

Como cada proyección $\pi_I\colon L \to \Gamma I$ es una transformación natural y la familia original es compatible, entonces las familias (B.1) son compatibles para toda $I \in \mathbf{I}$. Como cada ΓI es una gavilla, entonces existe una única amalgama $x_I \in \Gamma IC$ para cada $I \in \mathbf{I}$.

Si tomamos una flecha $i\colon I \to J$ en $\mathbf{I}$ entonces $\Gamma i\colon \Gamma I \to \Gamma J$ es una transformación natural. De este hecho podemos concluir que $(\Gamma i)_C(x_I)$ es una amalgama para la familia $\{x_{Jf} \mid (f\colon D \to C) \in R\}$, es decir, $(\Gamma i)_C(x_I) = x_J$.

Si recordamos que los límites se pueden construir con productos e igualadores, el párrafo anterior muestra que el elemento $(x_I)_{I\in\mathbf{I}} \in \prod \Gamma IC$ satisface:

$$f_C((x_I)_{I\in\mathbf{I}}) = g_C((x_I)_{I\in\mathbf{I}}),$$

y así, hay un elemento $x \in LC$ tal que $e(x) = (x_I)_{I\in\mathbf{I}}$. Es fácil ver que este elemento es la única amalgama para la familia compatible $\{x_f \in LD \mid (f\colon D \to C) \in R\}$. $\square$

Una de las construcciones más importantes para una categoría de espacios, y para las matemáticas en sí, es la del “espacio de funciones” o “exponencial”. Así, las categorías de gavillas deben tener *exponenciales*. Para mostrar esto, nuevamente se construirá la exponencial en pregavillas y se verá qué sucede al exponenciar gavillas.

Sean F y G en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$, usando que la exponencial es adjunto derecho del producto (ver Mac Lane y Iele Moerdijk, 1992), se define F^G de tal forma que se tenga la adjunción, es decir,

$$F^G(C) = \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}(\mathbf{y}C \times G, F).$$

En otras palabras, $F^G(C)$ es el conjunto de transformaciones naturales de $\mathbf{y}C \times G$ a F. Es fácil ver que si en en una flecha f se define como precomponer con $\mathbf{y}f \times G$, el resultado es un funtor. Además, el morfismo evaluación $ev\colon G \times F^G \to F$ está definido, en la componente C, como la función $ev_C\colon GC \times F^G C \to FC$ que a cada par (x,τ) lo manda a $\tau_C(1_C, x)$.

Con esto se verá algo más definitorio que la existencia de exponenciales en categorías de gavillas (ver ibíd., p.136).

Proposición 34. *Si* $F \in \mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J)$ *y* $G \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$, *entonces* $F^G \in \mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J)$.

Demostración. Dada una criba cubriente $R \in JC$ y $\{\tau_f \in F^G D \mid (f\colon D \to C) \in R\}$ una familia compatible se demuestra la unicidad de la amalgama de la siguiente manera.

Supongamos que $\tau, \sigma \in F^G C$ son tales que $\tau \cdot f = \sigma \cdot f$ para toda $f\colon D \to C$ en R. Esto significa, en la componente E, que para cualesquiera $g\colon E \to D$ y $x \in FE$ se tiene que $\tau(fg, x) = \sigma(fg, x)$. En particular, si $g = 1_D$ entonces $\tau(f, x) = \sigma(f, x)$ para toda $f \in S$ y $x \in FD$. Usando esto y la naturalidad de τ y σ, para cualquier $g \in k^*(S)$ se tiene que

$$\tau(k, x) \cdot g = \sigma(k, x) \cdot g.$$

Como $k^*(S)$ cubre y F es gavilla, entonces $\tau(k,x) = \sigma(k,x)$. Finalmente, como k y x son arbitrarios se concluye $\tau = \sigma$, provando la unicidad de las amalgamas.

Para la existencia se define $\tau'\colon \mathbf{y}C \times G \to F$ en la componente B de la siguiente manera: dados $k\colon B \to C$ y $x \in GB$, $\tau'_B(k, x) = \{\tau'_{kh}(1, x \cdot h \mid h \in k^*(S))\}$. Se puede demostrar que con esta definición el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{y}D \times G \arrow[r, "\tau_f"] \arrow[d, "\mathbf{y}f \times G"'] & F \arrow[d, "\eta_F"] \\
\mathbf{y}C \times G \arrow[r, "\tau"'] & F,
\end{tikzcd}$$

donde η_F en la componente C es la función que a x lo manda a $\{x \cdot f \mid f \in t_C\}$, que en el caso cuando F es una gavilla resulta ser un isomorfismo. Con esto, una amalgama para la familia es $(\eta_F)^{-1} \circ \tau'$. □

Finalmente se verá que $\mathrm{Gav}(\mathbf{C}, J)$ tiene clasificador de subobjetos. Recordemos que Ω es un *clasificador de subobjetos* en la categoría $\mathscr{E}$ con límites finitos si tiene un punto $v\colon 1 \to \Omega$ y para cualquier monomorfismo $m\colon S \rightarrowtail X$ existe una única $\varphi_m\colon X \to \Omega$ que hace al siguiente diagrama un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "\varphi_m"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Las categorías de gavillas, en general, no son equivalentes a categorías de pregavillas. Por esta razón no todas las construcciones deben hacerse de la misma forma que en pregavillas; un ejemplo significativo de esto es que la construcción del clasificador de subobjetos difiere en estos dos tipos de categoría. De hecho, si el clasificador de subobjetos de gavillas coincide con el de pregavillas entonces las categorías son equivalentes.

En pregavillas se define al clasificador de subobjetos como el funtor $\Omega : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ que en un objeto C es el conjunto

$$\Omega C = \{S \mid S \text{ es una criba sobre } C\}.$$

Si $h : D \to C$, entonces $\Omega h(S) = h^*(S)$. Es fácil ver que, con esta definición, Ω es un funtor. Además el morfismo v en la componente C está definido como la función que manda al único elemento de $1C$ a la criba total t_C.

Ahora, dados $F, G \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ note que $\tau : G \to F$ es un monomorfismo si y sólo si $\tau_C : GC \to FC$ es inyectiva para cada $C \in \mathbf{C}$. Con esto se puede definir $\varphi : F \to \Omega$ en la componente C como:

$$\begin{aligned} FC &\xrightarrow{\quad\varphi_C\quad} \Omega C \\ x &\longmapsto \{f \mid x \cdot f \in G(\operatorname{dom} f)\}. \end{aligned}$$

No es difícil ver que $\varphi_C(x)$ es un criba, φ es natural y $\varphi_C(x) = t_C$ si y sólo si $x \in GC$. Por lo tanto, Ω es el clasificador de subobjetos de $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$.

Para definir el clasificador de subobjetos en gavillas una definición más. Antes de esto daremos nombre a la situación que nos interesa. Una criba R sobre C cubre a una flecha $h : D \to C$ si $h^*(R) \in JD$.

Definición 35. Sea $(\mathbf{C}, J)$ un sitio. Una criba R sobre C es cerrada (para J) si para cualquier f con codominio C se cumple la siguiente afirmación:

$$R \text{ cubre a } f \implies f \in R.$$

El clasificador de subobjetos en gavillas se define como

$$\Omega C = \{R \mid R \text{ es una criba cerrada sobre } C\}. \tag{B.2}$$

Para definir Ω en una flecha $h: D \to C$ es suficiente notar que si R es una criba cerrada sobre C, entonces $h^*(R)$ es una criba cerrada sobre D. En efecto, ya tenemos que $h^*(R)$ es una criba sobre D. Para mostrar que es cerrada, supongamos que $h^*(R)$ cubre a $g: E \to D$, es decir, $g^*h^*(R) \in JE$. Como $g^*h^*(R) = (h \circ g)^*(R)$, entonces tenemos que R cubre a $h \circ g$. Como R es cerrada entonces $h \circ g \in R$, es decir, $g \in R$.

Así, la definición de Ω en flechas es la misma que en el caso de pregavillas. Esto es si $h: D \to C$ es una flecha en $\mathbf{C}$ entonces Ωh es la siguiente función:

$$\begin{aligned} \Omega h: \quad \Omega C &\longrightarrow \Omega D \\ R &\longmapsto h^*(R). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Lema 36. *La pregavilla Ω definida como en* (B.2) *y* (B.3) *es una gavilla.*

Demostración. Sean $R \in JC$ una criba cubriente y $\{S_f \in \Omega D \mid (f: D \to C) \in R\}$ una familia compatible. Una amalgama para la familia se construye considerando la criba $S = \{f \circ g \mid f \in R \text{ y } g \in S_f\}$. Como esta criba no es cerrada, tomamos su cerradura

$$\overline{S} = \{h \mid \mathrm{cod}(h) = C \text{ y } S \text{ cubre a } h\}.$$

Se puede ver en (Mac Lane y Iele Moerdijk, 1992) que esta criba es cerrada y es una amalgama para la familia.

Para demostrar la unicidad se consideran dos amalgamas $S, T \in \Omega C$. Esto significa que para toda $f \in R$ se satisface $f^*(S) = f^*(T)$. Si ahora tomamos $(f: D \to C) \in S \cap R$ entonces $f^*(T) = f^*(S) = t_D$, por lo que T cubre a f, y como T es cerrada concluimos $f \in T \cap R$. Intercambiando los papeles de S y T hemos demostrado que $S \cap R = T \cap R$. Ahora, si $(g: E \to C) \in S$, entonces S cubre a g y como $R \in JC$ entonces $g^*(R) \in JE$, es decir, R cubre a g. Por lo tanto $T \cap R = S \cap R$ cubre a g; por lo que T cubre a g; y como T es cerrada concluimos que $g \in T$ y así $S \subseteq T$. Análogamente $T \subseteq S$. Por lo tanto $S = T$. □

Bibliografía

Arriola, Enetz Ezenarro (2017). “Lo que nos dio y no nos dio Bourbaki”. *Theoria* 32.1, pp. 25-40.

Atiyah, Michael (2001). “Mathematics in the 20th Century”. *The Mathematical Association of America*, pp. 654-666.

Aubin, David (1997). “The Withering Immortality of Nicolas Bourbaki: A Cultural Connector at the Confluence of Mathematics, Structuralism, and the Oulipo in France”. *Science in Context* 10, pp. 291-342.

Beaulieu, Liliane (1993). “A Parisian Café and Ten Proto-Bourbaki Meetings (1934-1935)”. *The Mathematical Intelligencer* 15.1, pp. 27-35.

— (1999). “Art of Memory”. *The University of Chicago Press* 14, pp. 219-251.

— (2009). “Regards sur les mathématiques en France entre les deux guerres”. *Revue d'histoire des sciences* 62.1, pp. 9-38.

Borel, Armand (1995). “Twenty-Five Years with Bourbaki, 1949-1973”: Lecture given at the University of Bochum.

Bourbaki, N. (1968). *Theory of Sets*. Elements of Mathematics. Springer.

— (2006). *Algèbre: Chapitre 4 à 7*. Springer. ISBN: 9783540343981,3540343989.

Bourbaki, Nicholas (1950). “The Architecture of Mathematics”. *The American Mathematical Monthly* 57.4, pp. 221-232.

Bourbaki, Nicolas (1998). *Algebra I*. Vol. Chapters 1-3. Springer.

Cetina, Karin Knorr (1999). *Epistemic Cultures*. Estados Unidos de América: Harvard University Press.

Corry, Leo (1997). “The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond”. *Science in Context* 10, pp. 253-296.

— (2011). “Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure”. *Springer* 92.3, pp. 315-348.

Deligne, Pierre (1991). “Quelques idées maîtresses de l'œuvre de A. Grothendieck”, pp. 11-19. URL: `https://www.emis.de/journals/SC/1998/3/pdf/smf_sem-cong_3_11-19.pdf`.

Dieudonné, Jean A. (feb. de 1970). “The work of Nicholas Bourbaki”. *The American Mathematical Monthly* 77.2, pp. 134-145.

Dold, A. y B. Eckmann, eds. (1977). *Seminario de Geometría Algebraica.* Springer–Verlag.

Domínguez, José Ferreirós (2004). "Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904". *La gaceta de la RSME*, pp. 449-467.

Dumas, Eric (1994). "Une entrevue avec Jean Giraud, à propos d'Alexandre Grothendieck". URL: `https://wstein.org/sga/circle/giraud.pdf`.

Eilenberg, Samuel y Saunders Mac Lane (1945). *General theory of natural equivalences.* AMS.

Freitag, Eberhard y Reinhardt Kiehl (1988). *Etale Cohomology and the Weil Conjecture.* Springer-Verlag.

Freitag, Eberhard, Reinhardt Kiehl y col. (1988). *Etale cohomology and the Weil conjecture.* 1ª ed. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer.

Freyd, Peter Jhon (2003). "Abelian Categories". 3, pp. 23-164. URL: `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/3/tr3.pdf`.

Gabriel, P. y M. Zisman (1967). *Calculus of Farctions and Homotopy Theory.* Berlín: Springer, p. 168.

Grothendieck, Alexander (1955). "A General Theory of Fibre Spaces With Structure Sheaf". *Reserch Grant NSF-G 1126* 4, p. 96.

— (1957). "Sur quelques points d'algèbre homologique". *Tôhoku Mathematical Journal* 9, p. 119.

— (1959). "Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébriques". URL: `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/3/tr3.pdf` (visitado 01-01-2021).

— (1985). *Récoltes et Semailles: réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien.* Université des Sciences et Techniques du Languedoc (Montpellier) et CNRS.

Grothendieck, Alexander y Jean-Pierre Serre (2000). *Grothendieck–Serre Correspondence.* Pierre Colmez. Classification mathématique par sujets. URL: `https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Letters/GS.pdf`.

Howie, John M. (2006). *Fields and Galois Theory.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.

Jech, Thomas (2002). *Set Theory*. Berlín: Springer.

Kragh, Helge (2007). *Generaciones Cuánticas*. Ediciones Akal.

Krömer, Ralf (2006). “La «Machine De Grothendieck» se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques? Bourbaki et les categories au cours des annees cinquante”. *Revue d’histoire des mathématiques* 12, pp. 119-162.

— (2007). *Tool and Object*. Birkhäuser.

Lawvere, F. William (1976). “Variable Quantities and Variable Structures in Topoi”.

— (1994). “Cohesive Toposes and Cantor’s *lauter Einsen*”. 2.3, pp. 5-15.

— (1996). “Unity and Identity of Opposites in Calculus and Physics”. 4, pp. 167-174.

— (2005). “Categories Of Spaces May Not Be Generalized Spaces As Exemplified By Directed Graphs”. 9, pp. 1-7.

— (2007). “Axiomatic cohesion”. 3, pp. 41-49.

— (2015). “Alexander Grothendieck and the concept of space”.

Leray, Jean (1959). “Théorie des points fixes : indice total et nombre de Lefschetz”. fr. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 87, pp. 221-233. DOI: `10.24033/bsmf.1519`. URL: `http://www.numdam.org/item/BSMF_1959__87__221_0/`.

Mac Lane, Saunders y Iele Moerdijk (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Nueva York: Springer, p. 629.

Macarro, Luis Narváez (2017). “En recuerdo de Alexander Grothendieck: Prólogo para una lectura de su vida y obra”. 20.2, pp. 297-324.

MacLarty, Colin (1990). “The Uses and Abuses of the History of Topos Theory”. 41, pp. 351-375.

— (2003). “The Rising Sea: Grothendicek on simplicity and generality I”. URL: `https://www.landsburg.com/grothendieck/mclarty1.pdf` (visitado 09-10-2020).

— (2006). “Two Constructivist Aspects of Category Theory”. 6, pp. 95-114.

Makkai, Michael y Gonzalo E. Reyes (1977). *First Order Categorical Logic*. Germany: Springer, p. 301.

Marquis, Jean-Pierre (2009). *From a Geometrical Point of Viey*. Shahid Rahman and John Symons. Springer.

Marquis, Jean-Pierre y Gonzalo E. Reyes (s.f.). “The History of categorical Logic 1963–1977” (). URL: https://www.webdepot.umontreal.ca/Usagers/marquisj/MonDepotPublic/HistofCatLog.pdf.

Mashaal, Maurice (2002). *Bourbaki. Une sociéte secrète de mathématiciens*. Belin.

Mathias, Adrian Richard David (1990). “The Ignorance of Bourbaki”. 14, pp. 4-13.

Moerdijk, Ieke y Gonzalo E. Reyes (1991). *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer–Verlag, p. 399.

Nye, Mary Jo, ed. (2002). *The Cambridge History of Science*. Vol. The Modern Physical and Mathematical Sciences. 5. Cambridge University Press.

Owen, David R. (1986). “Global and Local Versions of the Second Law of Thermodynamics”: *Categories in Continuum Physics*. Ed. por F. William Lawvere y Stephen H. Schanuel. Berlin: Springer–Verlag, pp. 100-114.

Perrin, Daniel (2008). *Algebraic Geometry*. 1ª ed. Universitext. Springer-Verlag London.

Piaget, Jean (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Siglo veintiuno editores, p. 201.

— (2002). *El estructuralismo ¿Qué es?* Publicaciones Cruz O., S.A., p. 65.

Reck, Erick H. y Michael P. Price (2000). “Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics”. *Kluwer Academic Publishers* 125, pp. 341-383.

Spivak, David I. (ago. de 2012). “Functorial data migration”, pp. 31-51.

Stewart, Ian (1995). “Bye-Bye Bourbaki Paradigm Shifts in Mathematics”. *The Mathematical Gazette* 79.486, pp. 496-498.

Thom, Rene (1972). *Structural Stability and Morphogenesis: Outline of a General Theory of Models*. University of Edinburgh Press.

Van der Waerden, B. L. (oct. de 1970). “The Foundation of Algebraic Geometry from Severi to André Weil”. *Mathematisches Institut Universität Zürich*, pp. 172-180.

Vandiver, Harry Schultz (1946). “On the Number of Solutions of Some General Types of Equations in a Finite Field”, pp. 47-52.

Warwick, Andrew (2003). *Master of Theory*. Chicago y London: The University of Chicago Press.

Weil, André (1949). “Numbers of Solutions of Equations in Finite Fields”. *The University of Chicago*, pp. 497-508.

Yoneda, Nobuo (1954). "On the homology theory of modules", pp. 193-227.

Zalamea, Fernando (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.

— (2019). *Una guía a la obra matemática y filosófica*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, p. 618.