Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Algunos Resultados de Números Sub-Ramsey

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemática

presenta:

Itzel Xahil del Ángel Vela

Tutor:

Dr. Juan José Montellano Ballasteros

Ciudad Universitaria, CD.MX 2021

Datos del Jurado

1. Datos del alumno:
Apellido paterno: Del Angel
Apellido materno: Vela
Nombre(s): Itzel Xahil
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemáticas
Número de cuenta: 413013349

2. Datos del tutor:
Grado: Dr
Nombre(s): Juan José
Apellido paterno: Montellano
Apellido materno: Ballesteros

3. Datos del sinodal 1: Grado: Dra
Nombre(s): Mucuy-kak
Apellido paterno: Guevara
Apellido materno: Aguirre

4. Datos del sinodal 2:
Grado: Dra
Nombre(s): Martha Gabriela
Apellido paterno: Araujo
Apellido materno: Pardo

5. Datos del sinodal 3:
Grado: M. en C.
Nombre(s): Loiret Alejandría
Apellido paterno: Dosal
Apellido materno: Trujillo

6. Datos del sinodal 4:
Grado: Dra
Nombre(s): Mika
Apellido paterno: Olsen

7. Datos de la tesis:
Título:Algunos Resultados de Números Sub-Ramsey
Número de páginas:
Año: 2020

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor Juan José Montellano Ballesteros por todo el apoyo brindado a lo largo de este trabajo. A las doctoras Martha Gabriela Araujo Pardo, Mucuy-kak Guevara Aguirre y Mika Olsen, por tomarse el tiempo para leer este trabajo. Quiero agradecer a Loiret Alejandría Dosal Trujillo por que con su curso me ayudo a encontrar la pasión que no había encontrado en las matemáticas y gracias a este descubrí mi gustó por la Teoría de Gráficas, especialmente la Teoría de Ramsey.

Quiero agradecer a mi mamá por su apoyo y amor incondicional, porque siempre tiene palabras de aliento cuando es necesario. A mi papá por creer en mi incluso cuando yo no logré hacerlo. Gracias a ambos por ser mi mayor inspiración.

A Cristina, Joce, Jazmin, Valeria, Mariana y Sofía por que sé estan conmigo aún en la distancia. A Alejandro, Alejandra y Raúl, porque los días con ustedes siempre están llenos de risas y enseñanzas. Gracias también a Gaby por enseñarme que se puede tener una hermana del alma pero de diferente familia.

A Ollin porque sin su apoyo y amor no estaría aquí hoy. También gracias a Ursula por abrirme las puertas de su casa y por todas las ricas comidas.

A mi tía Paty y a mi prima Maru por recibirme en su casa y darme asilo cuando necesite a mi familia cerca.

Y sobre todo gracias a Penélope y a Momo, porque si no hubieran llegado a mi vida quizá nunca habría encontrado la motivación para seguir adelante.

Introducción

En 1930 el matemático inglés Frank. P. Ramsey, publicó en la segunda edición del *Procedings of the London Mathematical Society* un artículo titulado “On a problem of formal logic.” [10] en el cual pretendía resolver un caso particular del *Problema de la decisión* o *Entscheidungsproblem* de la lógica de primer orden. Dicho problema, planteado tan sólo dos años antes por David Hilbert y Wilhelm Ackermann, pretendía encontrar un algoritmo general que decidiese si dada cualquier fórmula de la lógica de primer orden, ésta era o no un teorema. En 1936 fue demostrado, por Alonzo Church, y poco después de forma independiente por Alan Turing, que este no podía resolverse en su forma general, es decir, que el algoritmo antes mencionado no existía. Sin embargo el trabajo del entonces joven Ramsey pasó a la historia como el punto clave para la creación de una nueva teoría matemática, la Teoría de Ramsey.

Ahora bien, la Teoría de Ramsey, no fue producto de un único resultado publicado en un sólo artículo, pues a pesar de que la obra publicada por Ramsey fue el punto decisivo para el nacimiento de la misma, esta venía gestándose desde hacia treinta y ocho años antes cuando David Hilbert demostró el *Lema del Cubo de Hilbert* [9], no obstante, dicho lema no logró despertar el interés suficiente como para inspirar a sus contemporáneos a explorar problemas parecidos y así este pasó desapercibido. Tuvieron que pasar veinticuatro años del resultado de Hilbert para la publicación de un resultado similar, en 1917 el matemático ruso Issai Schur, mientras trabajaba en la Universidad de Bonn, publicó el siguiente teorema, en un artículo titulado “Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m$.” [11].

Teorema 0.0.1. *Para todo entero positivo n existe un entero $S(n)$ tal que al colorear los elementos del conjunto [S(n)] con n colores, este contiene enteros a, b, c del mismo color tales que $a + b = c$.*

A diferencia de Hilbert y sus contemporaneos, Schur se dio cuenta de lo novedoso que era este resultado, por lo que continuo estudiando problemas parecidos. Inspirado en su resultado original, Schur postuló la siguiente conjetura, la cual sería demostrada en 1927 por el joven holandés Bartel Leender van der Waerden [13].

Conjetura 0.0.2. *Para cualesquiera enteros k, l, existe un entero $W(k, l)$ tal que al colorear los elementos del conjunto $[W(k, l)]$ con k colores, se obtienen progresiones aritméticas de l términos, todos del mismo color.*

Por otro lado y de forma independiente al trabajo de Issai Schur, el matemático holandés Pierre Joseph Henry Baudet postuló por su parte la misma conjetura, por lo que esta ahora se conoce como el *Teorema de Baudet-Schur-Van der Waerden*.

Regresemos ahora, al artículo publicado por Frank P. Ramsey en enero de 1930, en éste está formulado, originalemente como un lema el resultado que ahora conocemos como el *Teorema de Ramsey* y, en palabras del mismo Ramsey, "$\cdots$ es más fácil de probar y da un simple ejemplo del argumento" [10]. El teorema, tal y como fue postulado originalmente, es el siguiente.

Teorema 0.0.3 (Teorema de Ramsey)**.** *Sea Γ una clase infinita, y μ y r enteros positivos, dividamos todas las subclases de Γ con exactamente r elementos, o bien, todas lar r-combinaciones de los elementos de Γ de cualquier manera en μ classes $C_i(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ mutuamente excluyentes de modo que toda r-combinación es elemento de una única C_i, entonces, asumiendo el axioma de elección, Γ debe contener una subclase infinita Δ, tal que todas las r-combinacióncs de elementos en Δ pertencen a la misma C_i.*

En otras palabras, si Γ es una clase infinita y r un entero positivo, si coloreamos todas las subclases de Γ que contiene exactamente r elementos, con μ colores distintos y asignando un único color a cada una de esas subclases, entonces existe una subclase infinita Δ de Γ cuyas subclases de r elementos(r-combinaciones) son todas del mismo color. Dicho de este modo, es posible notar cierto parecido con los teoremas anteriores, incluso podríamos decir que este último es una generalización de los otros.

Del teorema anterior existe asimismo una versión para gráficas, que enunciaremos a continuación.

Teorema 0.0.4 (Teorema de Ramsey)**.** *Para cualesquiera $G_1, G_2, \cdots, G_n$ gráficas, existe m, el menor entero positivo tal que si se colorean las aristas de K_m con n colores, entonces se tiene una subgráfica de K_m isomorfa a G_i cuyas aristas son de color i, para alguna $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Al número n se le conoce como el *número de Ramsey* de $G_1, G_2, \cdots, G_n$.

Del teorema postulado por Ramsey, se dieron como consecuencia varios resultados, entre ellos el siguiente, publicado en un artículo titulado *On sub-Ramsey numbers* en 1998 [2].

Teorema 0.0.5. *Dados G una gráfica y k un entero positivo, existe m, el menor entero positivo tal que si se colorean las aristas de K_m de forma que ningún color se repita más de k veces, entonces se tiene una subgráfica de K_m isomorfa a G cuyas aristas son todas de distinto color.*

A m se le denomina como el *número sub-Ramsey* de G y k. La existencia de los números sub-Ramsey es consecuencia directa de la existencia de los número de Ramsey, como veremos en el siguiente capítulo. Resulta casi imposible dar un valor exacto de número sub-Ramsey para toda gráfica G y todo entero positivo k, sin embargo si se puede encontrar dicho valor en casos particulares o al menos mostrar alguna característica del mismo.

A lo largo de este trabajo, analizaremos principalmente los resultados dados respecto a este tipo de números en tres artículos. En el primero de ellos, publicado en 2004 y titulado “Polychromatic cliques”, se mejoran los valores dados en [2] para las cotas del número sub-Ramsey de gráficas completas. El segundo expone un valor exacto para las gráficas del tipo $K_{1,3}$ es decir la estrella de tres picos, este fue publicado en 1981 y se titula “More star sub-Ramsey numbers”. Por último el tercer articulo aquí analizado, publicado en 1986 y titulado “Path and Cycle sub-Ramsey numbers” tiene como objetivo mostrar que para enteros suficientemente grandes, el número sub-Ramsey del ciclo de n vértices y el de la trayectoria de igual número de vértices es el mismo número. Dedicaremos un capítulo a cada uno de estos resultados.

Capítulo 1

Resultados y Conceptos Preeliminares

Antes de poder comenzar a analizar los resultados de los artículos estudiados en este trabajo, debemos dar un par de conceptos básicos y resultados preeliminares, los cuales sentarán las bases para los capítulos venideros. Comenzaremos por los conceptos básicos, muchos de los cuales serán usados a lo largo de esta obra.

Para conceptos y definiciones no presentados en este capítulo el lector puede consultar [3] y [4].

Empecemos por definir lo que es una gráfica. Una *gráfica* G es un conjunto no vacío de vértices y un conjunto de pares no ordenados de vértices llamados aristas. Al conjunto de vértices en G se le denota por $V(G)$, mientras que $E(G)$ denota al conjunto de aristas de G. A la cardinalidad de $V(G)$ la llamamos el *orden* de G y a la de $E(G)$ el *tamaño* de G y las denotamos por $|V(G)|$ y $|E(G)|$ respectivamente. Dadas dos gráficas G y H, decimos que H es *subgráfica* de G, o bien que G *contiene* a H si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Definición 1. Decimos que una gráfica G de orden n es completa si para todo par de vertices $u, v \in V(G)$ existe $uv \in E(G)$ y la denotamos por K_n.

Notemos entonces que K_n contiene como subgráfica a cualquier otra gráfica de orden a lo más n, pues dada una gráfica completa K_n es posible construir cualquier otra gráfica G de orden n o menor, con los vértices y aristas de K_n. Esto nos lleva a las siguientes dos definiciones.

Definición 2. Dada una gráfica G de orden n, definimos al complemento de G, denotado por $\overline{G}$, como la gráfica de orden n tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ y

$$E(\overline{G}) = \{uv \, |u, v \in V(\overline{G}) \ y \ uv \notin E(G)\}$$

Definición 3. Decimos que dos gráficas G y H son isomorfas si existe $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ una biyección tal que para todo par de vértices u y v en G se cumple que $uv \in E(G)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in E(H)$.

Pues si K_n contiene a una gráfica G, de orden n, entonces contiene a su complemento así como a cualquier gráfica isomorfa a G.

Ahora fijémonos por un momento en los vértices y las aristas que forman una gráfica y en cómo están relacionados entre si.

Dados dos vértices $u, v \in V(G)$, estos son *vértices adyacentes* si existe $e = uv$ una arista en G. Además decimos que e *incide* en u y e *incide* en v. Asimismo si dos aristas e_1 y e_2 inciden en un mismo vértice v, se dice que estas son *adyacentes*.

Sea $v \in V(G)$, al conjunto de vértices adyacentes a v en G se le llama *vecindad* de v y se denota por $N_G(v)$. Asimismo definimos por *grado* de v a la cardinalidad de $|N_G(v)|$. Al menor entre los grados de los vértices de G se le conoce por *grado minimo* y se denota por $\delta(G)$ o simplemente δ, mientras que $\Delta(G)$ o Δ denota al mayor entro los grados de los vértices de G, llamado *grado máximo*.

Algunas de las gráficas y subgráficas más estudiadas son los ciclos y trayectorias, los cuales veremos de manera más detallada en el contexto de los números de sub-Ramsey en el último capítulo, para ello demos las siguientes definiciónes.

Definición 4. Una secuencia alternante de vértices y aristas de la forma

$$v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \cdots v_{n-1} e_{n-1} v_n$$

donde $e_i = v_i v_{i+1}$ es llamada *camino*, donde la n indica el número de vértices. Un camino que no repite vértices es llamado *trayectoria* y una trayectoria cuyos vértices inicial y final son iguales es llamada *ciclo*.

Definición 5. Sea P una trayectoria en una gráfica G, decimos que P es *hamiltoniana* si contiene a todo vértice en $V(G)$. Asimismo decimos que un ciclo C es *hamiltoniano* si al quitarle una arista nos queda una trayectoria hamiltoniana.

Antes de pasar a las definicíones más relacionadas con el tema a tratar, debemos dar unas últimas definiciónes, que aunque no serán muy usadas son importantes para el entendimiento de algunos resultados próximos.

Definición 6. Sean f y g funciones reales, entonces decimos que $f(n) \in O(g(n))$ si existe una constante positiva c y n_0 tales que para todo $n > n_0$ se cumple que

$$f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Definición 7. Sean f y g funciones reales, entonces decimos que $f(n) \in \Omega(g(n))$ si existe una constante positiva c y n_0 tales que para todo $n > n_0$ se cumple que

$$f(n) \geq c \cdot g(n).$$

Dados ya los conceptos y definiciones básicos, pasaremos, ahora sí, a dar las definiciones y resultados necesarios para poder tratar los resultados expuestos a lo largo de las siguientes páginas.

Definición 8. Sean $c_1, c_2, \cdots c_m$ un conjunto finito de colores, entonces decimos que una función $f : E(G) \longrightarrow \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ es una *coloración* de las aristas de G.

Definición 9. Sea $f : E(K_n) \longrightarrow \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ una coloración de las aristas de K_n. Diremos que una subgráfica G de K_n es *monocromática* si todas sus aristas son del mismo color bajo la coloración f y diremos que es *heterocromática* si todas sus aristas son de distinto color bajo dicha coloración.

Definición 10. Sean $G_1, G_2, \cdots, G_m$ gráficas y n un entero positivo. Decimos que n es el *número de Ramsey* de $G_1, G_2, \cdots, G_m$, denotado por $R(G_1, G_2, \cdots, G_m)$, si n es el entero positivo más chico para el cual se cumple que bajo cualquier coloración de las aristas de K_n con m colores, $c_1, c_2, \cdots, c_m$, se obtiene una subgráfica mónocromática de color c_i isomorfa a G_i, para alguna $i = 1, 2, \cdots, m$.

OBSERVACIÓNES.

- Si $G_i = K_{n_i}$ para toda $i = 1, 2, \cdots, m$, entonces podemos denotar al número de Ramsey $R(G_1, G_2, \cdots, G_m)$, simplemente como $R(n_1, n_2, \cdots, n_m)$.
- Si para m entero positivo, $G = G_1 = G_2 = \cdots = G_m$, entonces al número de Ramsey $R(G_1, G_2, \cdots, G_m)$ lo denotaremos por $R_m(G)$.

Lema 1.0.1. *Para $t \geq 2$ entero positivo se cumple*

$$R(2, t) = R(t, 2) = t$$

DEMOSTRACIÓN.

Notemos que $R(2, t) \geq t$ pues basta colorear todas las aristas de K_{t-1} de color 2 para asegurar que no haya una subgráfica monocromática isomorfa a K_2 de color 1 ni una subgráfica monocromática de color 2 isomorfa a K_t.

Ahora veamos que $R(2, t) \leq t$. Para ello consideremos cualquier coloración de las aristas de K_t que use dos colores c_1, c_2. Si alguna arista en K_t bajo dicha coloración es de color c_1, entonces se tiene una subgráfica monocromática isomorfa a K_2 de color c_1, de otra forma toda arista de K_t es de color c_2 cono lo que K_t contiene una subgráfica isomorfa a K_t de color c_2. $\square$

Teorema 1.0.2. *Para cualesquiera enteros positivos $s, t \geq 2$ el número de Ramsey R(s,t) existe.*

DEMOSTRACIÓN.

La demostración del teorema se realizará por inducción sobre $n = s + t$.

Del lema anterior sabemos que $R(2, t) = R(t, 2) = t$ para cualquier entero positivo $t \geq 2$. Por lo tanto podemos asumir que $s, t \geq 3$ es decir $n \geq 6$.

Supongamos que para cualesquiera enteros positivos s' y t' tales que $s' + t' < k$, donde $k \geq 6$, existe $R(s', t')$.

Ahora, sean $s \geq 3$ y $t \geq 3$ enteros positivos tales que $s + t = k$.Como $(s-1)+t = s+(t-1) = k-1$, por hipotesis de inducción existen $R(s-1,t)$ y $R(s,t-1)$. Sea K una gráfica completa de orden $R(s-1,t)+R(s,t-1)$. Consideremos $C : A(K) \longrightarrow \{c_1, c_2\}$ una coloración de las aristas de K.

Sea $v \in V(K)$ y definamos $M = \{u \in V(K) | \, C(v,u) = c_1\}$ y $N = \{w \in V(K) | \, C(v,w) = c_2\}$, entonces

$$R(s-1,t) + R(s,t-1) = |M| + |N| + 1$$

.

Si $|M| < R(s-1,t)$ y $|N| < R(s,t-1)$, entonces

$$|M| \leq R(s-1,t) - 1, \ |N| \leq R(s,t-1) - 1$$

por lo tanto

$$|M| + |N| \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 2,$$

es decir

$$|M| + |N| + 2 \leq R(s-1,t) + R(s,t-1),$$

de donde se tendría

$$|M| + |N| + 1 < R(s-1,t) + R(s,t-1),$$

lo cual es una contradicción. Por lo anterior se debe tener que $|M| \geq R(s-1,t)$ o bien que $|N| \geq R(s,t-1)$.

Si $|M| \geq R(s-1,t)$, entonces la gráfica completa inducida por los vértices en M contiene una K_t de color c_2 o una K_{s-1} de color c_1, por lo tanto la gráfica completa inducida por $M \cup \{v\}$ contiene una K_t de color c_2 o una K_s de color c_1.

De forma análoga si $|M| \geq R(s,t-1)$, la gráfica completa inducida por $|N| \cup \{v\}$ contiene una K_s de color c_1 o una K_t de color c_2. $\square$

Teorema 1.0.3. *(Teorema de Ramsey)*

Para cualesquiera m enteros positivos $n_1, n_2, \cdots, n_m \geq 2$, el número de Ramsey $R(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ existe.

Demostración.

Por el teorema anterior sabemos que si $m = 2$, entonces el número de Ramsey $R(n_1, n_2)$ efectivamente existe.

Supongamos que para $m' \leq k$, $R(n_1, n_2, \cdots, n_{m'})$ existe y consideremos $m = k + 1$.

Veamos primero que si $n_i = 2$ para alguna $i = 1, 2, \cdots, k+1$, entonces

$$R(n_1, n_2, \cdots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \cdots n_{k+1}) = R(n_1, n_2, \cdots, n_{i-1}, n_{i+1}, \cdots, n_{k+1})$$

pues si se colorea $K_{R(n_1,n_2,\cdots,n_{i-1},n_{i+1},\cdots,n_{k+1})}$ con $k+1$ colores y al menos una arista es de color i, se obtiene una subgráfica monocromática isomorfa a K_2 de color i. De otro modo se usaron solamente k colores y por lo tanto existe una subgráfica monocromática isomorfa a K_j para alguna $j \neq i$.

Entonces podemos asumir que $n_i \geq 3$ para toda $i = 1, 2, \cdots, k+1$ y $n = \sum_{j=1}^{k+1} n_j \geq 3m$. Supongamos que para cualesquiera $n'_1, n'_2, \cdots, n'_{k+1}$ tales que $\sum_{j=1}^{k+1} n_j < r$, donde $r \geq 3m$, existe $R(n'_1, n'_2, \cdots, n'_{k+1})$.

Sean $n_1, n_2, \cdots, n_{k+1}$ enteros postivos tales que $n_i \geq 3$ para toda $i = 1, 2, \cdots, k+1$ y $\sum_{j=1}^{k+1} n_j = r$.

Denotemos por K a la gráfica completa de orden

$$R(n_1-1, n_2, \cdots, n_{k+1}) + R(n_1, n_2-1, \cdots, n_{k+1}) + \cdots + R(n_1, n_2, \cdots, n_{k+1}-1)$$

y consideremos $f : A(K) \longrightarrow \{c_1, c_2, \cdots, c_{k+1}\}$ una coloración de las aristas de K. Sea $v \in V(K)$ y definamos $N_i = \{u \in V(K) | f(vu) = c_i\}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{k+1} R(n_1, n_2, \cdots, n_i - 1, \cdots, n_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} N_j + 1$$

Si $|N_i| < R(n_1, n_2, \cdots, n_i - 1, \cdots, n_{k+1})$ para toda $i = 1, 2, \cdots, k+1$, entonces

$$|N_i| \leq R(n_1, n_2, \cdots, n_i - 1, \cdots, n_{k+1}) - 1$$

por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{k+1} N_j \leq \sum_{j=1}^{k+1} R(n_1, n_2, \cdots, n_j - 1, \cdots, n_{k+1}) - k + 1$$

es decir

$$\sum_{j=1}^{k+1} N_j + k - 1 \leq \sum_{j=1}^{k+1} R(n_1, n_2, \cdots, n_j - 1, \cdots, n_{k+1})$$

de donde se tiene que

$$\sum_{j=1}^{k+1} N_j + 1 < \sum_{j=1}^{k+1} R(n_1, n_2, \cdots, n_j - 1, \cdots, n_{k+1}).$$

Asi $|N_i| \geq R(n_1, n_2, \cdots, n_i - 1, \cdots, n_{k+1})$ para algún $i = 1, 2, \cdots, k+1$, por lo que la subgráfica completa inducida por los vertices en N_i contiene una K_{n_j} de color c_j, para alguna $j \neq i$ o bien una $K_{n_i - 1}$ de color c_i. De esta forma la subgráfica completa inducida por $N_i \cup \{v\}$ contiene una subgráfica monocromática ismorfa a K_{n_j} de color c_j, para alguna $j \neq i$ o bien una subgráfica monocromática isomorfa a K_{n_i} de color c_i.$\square$

Definición 11. Sean G una gráfica y k un entero positivo, decimos que una coloración $f : E(G) \longrightarrow \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ de las aristas de G es *k-acotada* si cada color se usa a lo más k veces.

Definición 12. Sean G una gráfica y k y n enteros positivos. Decimos que n es el número *sub-Ramsey* $sr(G,k)$ si n es el entero positivo más chico tal que K_n contiene una subgráfica heterocromática isomorfa a G bajo cuálquier coloración k- acotada de las aristas de K_n.

Ahora veremos que para toda k, el número $sr(G,k)$ existe.

Teorema 1.0.4. *Sean G una gráfica y k un entero positivo, entonces $sr(G,k)$ existe y*

$$sr(G,k) \leq R_k(G)$$

.

DEMOSTRACIÓN.

Sean G una gráfica y k un entero positivo, por el Teorema de Ramsey, sabemos que $R_k(G)$ existe, por lo tanto podemos considerar $K_{R_k(G)}$ la gráfica completa de orden $R_k(G)$.

Sea m un entero positivo y $f : E(K_{R_k(G)}) \longrightarrow \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ una coloración k-acotada de las aristas de $K_{R_k(G)}$.

Denotemos por A_i al conjunto de aristas de $K_{R_k(G)}$ de color c_i y enúmeremos los elementos de A_i de la siguiente manera, $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p}$, con $p \leq k$, para cada i.

Ahora consideremos $f' : E(K_{R_k(G)}) \longrightarrow \{c'_1, c'_2, \cdots, c'_k\}$ una coloración de las aristas de $K_{R_k(G)}$ tal que $f(a_{i_j}) = c'_j$. De este modo obtenemos una coloración de las aristas de $K_{R_k(G)}$ que usa k colores. Por el Teorema de Ramsey sabemos que entonces existe una subgráfica de $K_{R_k(G)}$ monocrómatica isomorfa a G bajo esta nueva coloración de color c'_j para alguna $j = 1, 2, \cdots, k$. Sea G' dicha subgráfica, entonces cada arista en G' es de la forma a_{i_j}, donde $f(a_{r_j}) \neq f(a_{s_j})$ si $r \neq s$. Por lo tanto las aristas de G' son todas de distinto color y G' es una subgráfica de $K_{R_k(G)}$ heterocromática isomorfa a G bajo la coloración f. $\square$

Definición 13. Dados dos enteros positivos q y n denotamos por $t_{q,n}$ al máximo número de aristas en una gráfica de orden q que no contiene cómo subgráfica a K_n.

Teorema 1.0.5. *(Teorema de Turán [1])*

Sean q y n enteros positivos, entonces

$$t_{q,n} \leq \frac{q^2(n-2)}{2(n-1)}$$

DEMOSTRACIÓN.

Notemos primero que para gráficas F de orden $q \leq n-1$, que no tienen a K_n como subgráfica, se cumple que

$$\frac{q-1}{2q} \leq \frac{n-2}{2(n-1)}$$

por lo que, al multiplicar por q^2 la desigualdad, se tiene que

$$|E(F)| = \frac{q(q-1)}{2} \leq \frac{q^2(n-2)}{2(n-1)}$$

Sean q y n enteros positivos tales que $q > n-1$ y consideremos G la gráfica de orden q con mayor número de aristas que no tiene a K_n como subgráfica, entonces G contiene una subgráfica isomorfa a K_{n-1} pues de otra forma sería posible agregar aristas.

Sea H una subgráfica de G isomorfa a K_{n-1} y definamos H' como la subgráfica inducida de G tal que $V(H') = V(G) - V(H)$. Notese que $|V(H')| = q-n+1$, entonces por hipotesis de inducción se tiene

$$|E(H')| \leq \frac{n-2}{2(n-1)}(q-n+1)^2.$$

Consideremos ahora $e = \{vu \in E(G) : v \in V(H'),\ u \in V(H)\}$. Dado que G no contiene una subgráfica isomorfa a K_n, todo vertice $v \in V(H')$ es adyacente a lo más a $n-2$ vértices en $V(H)$. Por lo tanto $|e| \leq (n-2)(q-n+1)$

Como $|E(H)| = \binom{n-1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
|E(G)| &\leq \binom{n-1}{2} + \frac{n-2}{2(n-1)}(q-n+1)^2 + (n-2)(q-n+1) \\
&= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{n-2}{2(n-1)}(q-n+1)^2 + (n-2)(q-n+1) \\
&= \frac{(n-2)(n-1)^2 + (n-2)(q-n+1)^2 + 2(n-2)(n-1)(q-n+1)}{2(n-1)} \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)}((n-1)^2 + (q-n+1)^2 + 2(n-1)(q-n+1)) \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)}((n-1) + (q-n+1))^2 \\
&= \frac{(n-2)}{2(n-1)}q^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $t_{q,n} = |E(G)| \leq \frac{q^2(n-2)}{2(n-1)}$. $\square$

Capítulo 2

Cotas para el número Sub-Ramsey $sr(K_n, k)$

Como vimos en el Teorema 1.0.4 el número $sr(G, k)$ esta acotado superiormente por el número $R_k(G)$ para cualquier gráfica G, por lo tanto es claro que $R_k(K_n) \geq sr(K_n, k)$. Sin embargo dicha cota puede refinarse. Ya en 1986, se demostró que dado un entero positivo k, $sr(K_n, k) \in O(kn^3)$ y $sr(K_n, k) \in \Omega(n)$ para k mayor o igual a 15 [2]. Después en 2004 se mejoraron estas cotas a $sr(K_n, k) \in O(kn^2)$ y $sr(K_n, k) \in \Omega(n^{3/2})$ para k mayor o igual a 15 y $sr(K_n, k) \in \Omega(n^{4/3})$ para $3 \leq k < 15$ [8]. La finalidad de este capítulo es analizar estos últimos resultados.

Teorema 2.0.1. *Sean $n \geq 3$ y $k \geq 2$ enteros positivos, entonces*

$$sr(K_n, k) \leq (2n-3)(n-2)(k-1) + 3.$$

Demostración.

Sea $m < sr(K_n, k)$, un entero positivo, entonces existe $C : E(K_m) \longrightarrow \{c_1, c_2, \cdots, c_s\}$ una coloración k-acotada de las aristas de K_m, en la cual ninguna subgráfica de K_m isomorfa a K_n es heterocromática.

Denotemos por C_i al número de aristas en K_m de color c_i bajo la coloración C, y por P al número de pares de aristas del mismo color. Dado que $C_i \leq k$ para toda $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$, entonces

$$C_i - 1 \leq k - 1$$

de modo que

$$C_i(C_i - 1) \leq C_i(k-1)$$

lo que implica

$$\frac{C_i}{2}(C_i - 1) \leq \frac{C_i}{2}(k-1).$$

De lo anterior tenemos

$$P = \sum_{i=1}^{s} \binom{C_i}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} C_i \frac{k-1}{2} = |E(K_m)| \frac{k-1}{2} = \binom{m}{2} \frac{k-1}{2},$$

es decir
$$P \leq \binom{m}{2}\frac{k-1}{2}. \tag{1}$$

Sea $q > n$ y denotemos por $t_{q,n}$ al máximo número de aristas que puede tener una gráfica de orden q que no contiene una subgráfica isomorfa K_n. Consideremos Q una subgráfica de K_m isomorfa a K_q y notemos que Q puede estar coloreada con a lo más $t_{q,n}$ colores bajo C, pues, de otro modo, al tomar una arista de cada color tendríamos que, la subgráfica de Q inducida por estas aristas, de orden menor o igual a q y número de aristas mayor a $t_{q,n}$, necesariamente contiene una K_n heterocrómatica.

Sean $c_1, c_2, \cdots, c_t$ los colores en las aristas de Q y sean $P(Q)$ el número de pares de aristas del mismo color en Q y $C_i(Q)$ el número de aristas de color c_i. Entonces
$$\begin{aligned} P(Q) &= \sum_{i=1}^{t}\binom{C_i(Q)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{t}(C_i(Q)-1)\frac{C_i(Q)}{2} \\ &\geq \sum_{i=1}^{t}(C_i(Q)-1) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{t} C_i(Q)\Big) - t \\ &= \binom{q}{2} - t \\ &\geq \binom{q}{2} - t_{q,n} \end{aligned} \tag{2}$$

Consideremos ahora el conjunto A de subgráficas de K_m isomorfas a K_q. Todo par de aristas en K_m esta en $\binom{m-3}{q-3}$ gráficas en A si éstas son adyacentes y en, $\binom{m-4}{q-4}$ gráficas, en caso contrario. Sea $M = \max\{\binom{m-3}{q-3}, \binom{m-4}{q-4}\}$, entonces
$$MP \geq \sum_{Q\in A} P(Q). \tag{3}$$

Para el caso en que $\binom{m-3}{q-3} \leq \binom{m-4}{q-4}$, tenemos
$$\frac{(m-3)!}{(m-q)!(q-3)!} \leq \frac{(m-4)!}{(m-q)!(q-4)!}$$

es decir
$$\frac{(m-3)!}{(q-3)!} \leq \frac{(m-4)!}{(q-4)!}$$
por lo que
$$\frac{(m-3)(m-4)!}{(q-3)(q-4)!} \leq \frac{(m-4)!}{(q-4)!}$$
así
$$\frac{m-3}{q-3} \leq 1$$
de donde
$$m-3 \leq q-3$$
por lo tanto
$$m \leq q.$$

Cómo únicamente pedimos que $q > n$, entonces tomemos $q = 2n-2$. Dado que $k \geq 2$ y $q \geq 4$, entonces

$$\begin{aligned}(2n-3)(n-2)(k-1)+2 &= (q-1)(\tfrac{q}{2}-1)(k-1)+2\\ &\geq (q-1)(\tfrac{4}{2}-1)(2-1)+2\\ &\geq q+1\\ &> q\end{aligned}$$

es decir $m \leq (2n-3)(n-2)(k-1)+2$.

En el caso en que $\binom{m-3}{q-3} > \binom{m-4}{q-4}$, por (3) tenemos que
$$\binom{m-3}{q-3} P \geq \sum_{Q \in A} P(Q)$$
entonces, por (1) se sigue que
$$\binom{m-3}{q-3}\binom{m}{2}\frac{k-1}{2} \geq \sum_{Q \in A} P(Q)$$
de donde, por (2) vemos que
$$\binom{m-3}{q-3}\binom{m}{2}\frac{k-1}{2} \geq \binom{m}{q}\left(\binom{q}{2} - t_{q,n}\right) \tag{4}$$

Como sabemos por el teorema 1.0.5, $t_{q,n} \leq \frac{q^2(n-2)}{2(n-1)}$, entonces

$$\binom{q}{2} - t_{q,n} \geq \frac{q(q-1)}{2} - \frac{q^2(n-2)}{2(n-1)}$$

$$= \frac{q}{2}\left((q-1) - q\frac{n-2}{n-1}\right)$$

$$= \frac{q}{2}\left(q\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\right) - 1\right)$$

$$= \frac{q}{2}\left(\frac{q}{n-1} - 1\right).$$

Sea $q = 2n-2$, entonces

$$\binom{q}{2} - t_{q,n} \geq \frac{q}{2}\left(\frac{q}{n-1} - 1\right) = \frac{q}{2}\left(\frac{2(n-1)}{n-1} - 1\right) = \frac{q}{2}$$

Por lo tanto, de (4) se sigue que

$$\binom{m-3}{q-3}\binom{m}{2}\frac{k-1}{2} \geq \binom{m}{q}\frac{q}{2}$$

es decir

$$\left(\frac{(m-3)!}{(m-q)!(q-3)!}\right)\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)\left(\frac{k-1}{2}\right) \geq \left(\frac{m!}{(m-q)!(q)!}\right)\left(\frac{q}{2}\right)$$

de lo cual se obtiene

$$\left(\frac{(m-3)!}{(q-3)!}\right)\left(\frac{k-1}{2}\right)(m(m-1)) \geq \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)!}{(q-1)(q-2)(q-3)!}$$

y entonces

$$\frac{k-1}{2} \geq \frac{m-2}{(q-1)(q-2)}$$

lo que implica

$$\frac{(q-1)(q-2)(k-1)}{2}+2\geq m$$

de lo que, al sustituir $q=2n-2$, se sigue

$$(2n-3)(n-2)(k-1)+2\geq m.$$

Por lo tanto podemos concluir que

$$(2n-3)(n-2)(k-1)+3\geq sr(K_n,k).\quad \square$$

Con lo anterior hemos logrado demostrar que $sr(K_n,k)\in O(kn^2)$. Para poder proceder a dar una cota inferior es necesario introducir antes algunas definiciones.

Definición 14. Dado t un entero positivo, denotamos por $U(t)$ al máximo número de formas en que puede escribirse un conjunto como la unión de dos conjuntos de t elementos.

Ejemplo 1. Sea $t=2$, veamos que $U(2)=3$. Notemos que el conjunto más grande que puede escribirse como la unión de dos conjuntos de dos elementos es el conjunto $\{1,2,3,4\}$. Por lo tanto basta ver cuál es el máximo número de formas de escribir los conjuntos $\{1,2,3\}$ y $\{1,2,3,4\}$. Dado que $\{1,2,3\}$ puede escribirse cómo $\{1,2\}\cup\{1,3\}$,$\{1,2\}\cup\{2,3\}$ y $\{1,3\}\cup\{2,3\}$ y $\{1,2,3,4\}$ como $\{1,2\}\cup\{3,4\}$,$\{1,3\}\cup\{2,4\}$ y $\{1,4\}\cup\{2,3\}$, y ya que estos son los únicos dos conjuntos que pueden escribirse como la union de dos conjuntos de dos elementos, podemos concluir que $U(2)=3$.

Ejemplo 2. Sea $t=3$, veamos que $U(3)=15$. Primero notemos que los únicos conjuntos que puedes escribirse como la union de dos conjuntos de tres elementos son $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,4,5\}$ y $\{1,2,3,4,5,6\}$, ahora basta ver que el máximo número de formas de escribir estos conjuntos es 15. Para ello veamos de cuántas maneras puede escribirse cada uno.

- $\{1,2,3,4\}$

$$\{1,2,3,4\}=\{1,2,3\}\cup\{1,2,4\}\tag{1}$$
$$\{1,2,3,4\}=\{1,2,3\}\cup\{1,3,4\}\tag{2}$$
$$\{1,2,3,4\}=\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}\tag{3}$$
$$\{1,2,3,4\}=\{1,2,4\}\cup\{1,3,4\}\tag{4}$$
$$\{1,2,3,4\}=\{1,2,4\}\cup\{2,3,4\}\tag{5}$$
$$\{1,2,3,4\}=\{1,3,4\}\cup\{2,3,4\}\tag{6}$$

- $\{1,2,3,4,5\}$

$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3\} \cup \{1,4,5\} \tag{1}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3\} \cup \{2,4,5\} \tag{2}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} \tag{3}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,4\} \cup \{1,3,5\} \tag{4}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,4\} \cup \{2,3,5\} \tag{5}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,4\} \cup \{3,4,5\} \tag{6}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,5\} \cup \{1,3,4\} \tag{7}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,5\} \cup \{2,3,4\} \tag{8}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,2,5\} \cup \{3,4,5\} \tag{9}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,3,4\} \cup \{2,3,5\} \tag{10}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,3,4\} \cup \{2,4,5\} \tag{11}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,3,5\} \cup \{2,3,4\} \tag{12}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,3,5\} \cup \{2,4,5\} \tag{13}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,4,5\} \cup \{2,3,4\} \tag{14}$$
$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,4,5\} \cup \{2,3,5\} \tag{15}$$

- $\{1,2,3,4,5,6\}$

$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,2,3\} \cup \{4,5,6\} \tag{1}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,2,4\} \cup \{3,5,6\} \tag{2}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,2,5\} \cup \{3,4,6\} \tag{3}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,2,6\} \cup \{3,4,5\} \tag{4}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,3,4\} \cup \{2,5,6\} \tag{5}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} \tag{6}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,3,6\} \cup \{2,4,5\} \tag{7}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,4,5\} \cup \{2,3,6\} \tag{8}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,4,6\} \cup \{2,3,5\} \tag{9}$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,5,6\} \cup \{2,3,4\} \tag{10}$$

Dado que estos son los únicos conjuntos que pueden escribirse como la unión de dos conjuntos de tres elementos, y como el máximo número de formas de escribir uno de ellos es 15, entonces $U(3) = 15$.

Definición 15. Decimos que una familia F de conjuntos A_i, $i \in I$ esta libre de uniones si todas las $\binom{|I|}{2}$ uniones $A_i \cup A_j$, $A_i, A_j \in F$ son distintas.

Definición 16. Sean m y t enteros positivos, denotamos por $F(m,t)$ el mayor número de elementos que tiene una familia de subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, m\}$ de t elementos que esta libre de uniones.

Teorema 2.0.2. *Si $n > F(m,t)$ y $k \geq U(t)$, entonces*

$$sr(K_n, k) \geq \binom{m}{t}.$$

Demostración.

Sea $K(m,t)$ la gráfica completa cuyos vertices son todos los subconjuntos de t elementos de $\{1, 2, \cdots, m\}$ y asignemos a cada arista S_iS_j el color $S_i \cup S_j$. Notemos que si $S \cup S' = S_i \cup S_j$, entonces las aristas SS' y S_iS_j estarán coloreadas del mismo color, por lo que cada color se repite a lo más $U(t)$ veces. Por otro lado las subráficas de $K(m,t)$ cuyas aristas son todas de distinto color, son de orden a lo más $F(m,t)$, por lo que dicha coloración no contiene una K_n heterocromática. De lo anterior, dado que $U(t) \leq k$ y el orden de $K(m,t)$ es $\binom{m}{t}$, podemos concluir que

$$sr(K_n, k) \geq \binom{m}{t}. \quad \square$$

Corolario 2.0.3. *Si $k \geq 15$, entonces existe una contante c tal que*

$$sr(K_n, k) \geq cn^{3/2}$$

y, si $3 \leq k < 15$, entonces

$$sr(K_n, k) \geq cn^{4/3}.$$

Para la demostración del Corolario usaremos el siguiente teorema, publicado por Frankl y Füredi en 1986 [5].

Teorema 2.0.4 (Frankl y Füredi)**.** *Sea t un entero positivo. Existen c_1 y c_2 constantes positivas tales que*

$$c_1 m^{\lceil \frac{4t}{3} \rceil /2} \leq F(m,t) \leq c_2 m^{\lceil \frac{4t}{3} \rceil /2}.$$

Demostración. (Corolario 2.0.3)

Sea $k \geq 15$, del ejemplo 2 sabemos que $U(3) = 15$, entonces $t = 3$ en el Teorema 2.0.2. Por el Teorema de Frankl y Füredi, para $t = 3$ y m entero positivo, existe c_2, constante positiva tal que

$$F(m,t) \leq c_2 m^{\lceil \frac{4t}{3} \rceil /2},$$

es decir

$$F(m,3) \leq c_2 m^2,$$

por lo que si escogemos m tal que $n > c_2m^2$, entonces

$$n > F(m,3).$$

Tomemos ahora $m-2 = \lceil c_2^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \rceil$. Así, dado que

$$\binom{m}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

$$\geq \frac{(m-2)^3}{6}$$

$$\geq \frac{(c_2^{-\frac{1}{2}})^3}{6} n^{\frac{3}{2}}$$

Si $c = \frac{(c_2^{-\frac{1}{2}})^3}{6}$, entonces $\binom{m}{3} \geq cn^{\frac{3}{2}}$ de donde se sigue

$$sr(K_n,k) \geq cn^{\frac{3}{2}}.$$

Por lo tanto $sr(K_n,k) \in \Omega(n^{\frac{3}{2}})$.

Ahora sea $k \geq 3$, del ejemplo 1 sabemos que $U(2) = 3$, entonces $t = 2$ en el Teorema 2.0.2. Por el Teorema de Frankl y Füredi, para $t = 2$ y m entero positivo, existe c_3, constante positiva tal que

$$F(m,t) \leq c_3 m^{\lceil \frac{4t}{3} \rceil /2},$$

es decir

$$F(m,2) = \leq c_3 m^{\frac{3}{2}},$$

por lo que si escogemos m tal que $n > c_3 m^{\frac{3}{2}}$, entonces

$$n > F(m,2).$$

Sea $m-1=\lceil c_3^{-\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}\rceil$. Así

$$\begin{aligned}\binom{m}{2} &= \frac{m(m-1)}{2}\\ &\geq \frac{(m-1)^2}{2}\\ &\geq \frac{(c_3^{-\frac{2}{3}})^2}{2} n^{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

Si $c=\frac{(c_3^{-\frac{2}{3}})^2}{2}$, entonces $\binom{m}{2} \geq cn^{\frac{4}{3}}$ por lo que

$$sr(K_n, k) \geq cn^{\frac{4}{3}}.$$

Así, $sr(K_n, k) \in \Omega(n^{\frac{4}{3}})$. $\square$

Capítulo 3

Números Sub-Ramsey $sr(K_{1,3}, k)$

Encontrar un valor general para $sr(G, k)$, es un problema bastante difícil, quizá imposible, pero, como vimos en el capítulo anterior, dada una gráfica H con características específicas, es posible al menos dar una cota para el número $sr(H, k)$, en algunos casos, para determinadas gráficas es incluso posible dar un valor exacto a dicho número. En 1981, Gena Hahn publicó el siguiente resultado, ver [6], el cual resuelve completamente el caso para los números sub-Ramsey $sr(K_{1,3}, k)$.

Teorema 3.0.1. *Dado $k \geq 1$, $sr(K_{1,3}, k) = \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$, excepto en los casos, $sr(K_{1,3}, 2) = 4$ y $sr(K_{1,3}, 7) = 7$.*

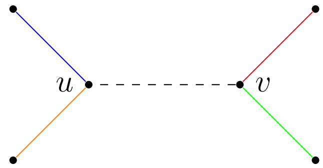
Para poder probar el teorema en general debemos probar primero los siguientes lemas.

Lema 3.0.2. *Si $m < sr(K_{1,3}, k)$ entonces, existe una coloración k-acotada, f, de las aristas de K_m tal que $|f(E(K_m))| \leq 3$, en la cual ninguna subgráfica de K_m isomorfa a $K_{1,3}$ es heterocromática.*

Demostración.

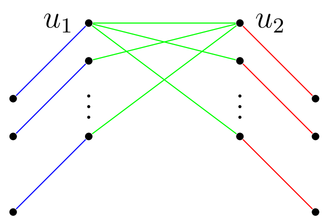
Sea $n > 2$ el entero positivo más chico tal que $|f(E(K_m))| = n + 1$ para alguna coloración $f : E(K_m) \longrightarrow \{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$ que usa cada color a lo más k veces. Para $i = 1, 2, \cdots, n$ denotemos por G_i la subgráfica inducida por las aristas de color c_i y sea $V_i = V(G_i)$.

Diremos que dos colores c_k y c_j son adyacentes si existen aristas adyacentes $v_i u$ y $v_j u$ tales que $c(v_k u) = c_k$ y $c(v_j u) = c_j$. Supongamos que los colores, c_i, son adyacentes dos a dos, entonces existen u y v vertices de K_m tales que u incide con c_0 y c_1, y v incide con c_2 y c_3.



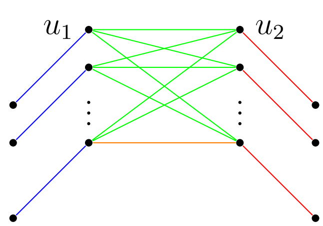
Notemos, que en este caso, no hay forma de colorear la arista (u,v) sin formar una $K_{1,3}$ heterocromática. Por lo tanto, podemos deducir que existen al menos dos colores c_1 y c_2 que no son adyacentes, de donde $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Sean $u_1 \in V_1$ y $u_2 \in V_2$, como $f(u_1,u_2) \neq c_1, c_2$, entonces, podemos asumir que $f(u_1,u_2) = c_0$, más aún, $f(u_1,v) = c_0$ para toda $v \in V_2$, pues de otra forma obtendríamos una $K_{1,3}$ heterocromática en las aristas incidentes a u_1, ya que $f(u_1,v) \neq c_1, c_2$.



Análogamente $f(w,u_2) = c_0$ para toda $w \in V_1$.

Supongamos que existen $w_1 \in V_1$ y $w_2 \in V_2$ tales que (w_1,w_2) no es de color c_0, entonces $f(w_1,w_2) = c_j$ para alguna $j = 3,4,\cdots,n$, notemos que entonces tanto en las aristas de w_1 como en las de w_2 se forma una $K_{1,3}$ heterocromática, lo cuál no es posible.

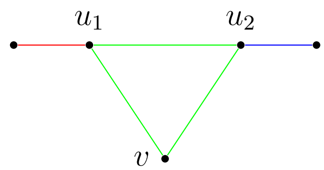


Por lo tanto todas las aristas entre V_1 y V_2 son de color c_0.

Tomemos ahora $v \in V(K_m)$, entonces

a) Si $v \in V_1$, ó $v \in V_2$, entonces claramente v incide con c_0.

b) Si $v \notin V_1 \cup V_2$, entonces $f(u_1,v) \neq c_1$, por lo que $f(u_1,v) = c_0$, pues de otra forma obtendríamos una $K_{1,3}$ heterocromática. Análogamente $f(u_2,v) = c_0$



De los casos anteriores podemos concluir que todo vértice de K_m es incidente a c_0, por lo que $V_i \cap V_j = \emptyset$ para $i \neq j$, con $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, y toda arista entre G_i y G_j es de color c_0.

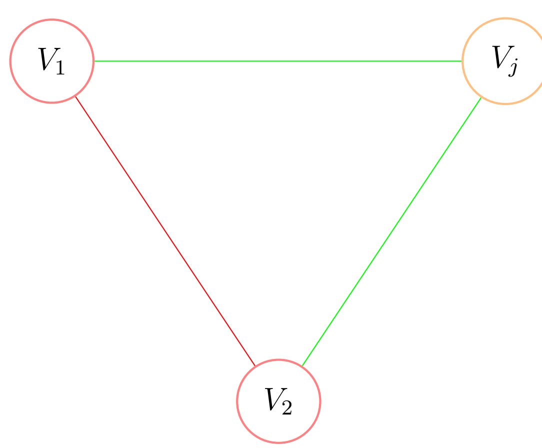
Sea $n_i = |V_i|$ y supongamos que $n_i \leq n_{i+1}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Como $n > 2$, entonces

$$\begin{aligned}\binom{n_1+n_2}{2} &= \frac{(n_1+n_2-1)(n_1+n_2)}{2} \\ &= \frac{n_1^2-n_1}{2} + \frac{n_2^2-n_2}{2} + n_1n_2 \\ &\leq n_1^2 + n_2^2 + n_1n_2 \\ &\leq n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 \\ &\leq \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} n_in_j.\end{aligned}$$

Dado que éste último es exactamente el número de veces aparece el color c_0, entonces

$$\binom{n_1+n_2}{2} \leq \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} n_in_j \leq k.$$

Por lo tanto, la subgráfica inducida por $V_1 \cup V_2$ contiene a lo más k aristas, por lo que es posible definir una coloración de K_m, preservando los demás colores originales, en la cual dicha subgráfica sea de un sólo color c_1 o c_2. Esta nueva coloración de K_m usa solamente n colores y no contiene una $K_{1,3}$ heterocromática.



De lo anterior podemos deducir que $n \leq 2$, con lo cual $|f(E(K_m))| \leq 3$. $\square$

Lema 3.0.3. *Para $k \geq 1$, $sr(K_{1,3}, k) \leq \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$.*

Demostración.

Del lema anterior tenemos que si $m < sr(K_{1,3}, k)$, entonces $\binom{m}{2} \leq 3k$.

Sea $s \geq \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$, entonces

$$s > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) - 1$$

por lo que

$$s > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 24k})$$

de donde se sigue

$$2s - 1 > \sqrt{1 + 24k}.$$

Así

$$4s^2 - 4s + 1 > 1 + 24k$$

por lo cual

$$8\left(\frac{s^2 - s}{2}\right) > 24k$$

lo que implica

$$\binom{s}{2} > 3k,$$

de modo que

$$s \geq sr(K_{1,3}, k).$$

Por lo tanto, si $m < sr(K_{1,3}, k)$, entonces, $m < \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$, en particular

$$sr(K_{1,3}, k) - 1 < \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$$

de donde

$$sr(K_{1,3}, k) < \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor + 1$$

de modo que

$$sr(K_{1,3}, k) \leq \lfloor \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor. \ \square$$

Lema 3.0.4. *Para todo entero positivo k existen i y n enteros positivos únicos tales que $i \leq 3n$ y $k = \frac{1}{2}(3n^2 - n) + i$.*

Demostración.

Primero veamos que para todo natural n, $\frac{1}{2}(3n^2 - n) \in \mathbb{Z}$.

Como $\frac{1}{2}(3n^2 - n) = \frac{1}{2}(n^2 - n) + n^2 = \frac{1}{2}n(n-1) + n^2$ y $n^2 \in \mathbb{Z}$, entonces basta probar que $\frac{1}{2}n(n-1) \in \mathbb{Z}$

Sea $n \in \mathbb{N}$

- Si $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, entonces
$$\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(2m)(2m-1) = m(2m-1)$$
- Si $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, entonces
$$\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(2m+1)(2m) = m(2m+1)$$

Por lo tanto $\frac{1}{2}n(n-1) \in \mathbb{Z}$.

Sea $S_k = \{n | \frac{1}{2}(3n^2 - n) \leq k\}$ cuyo mayor elemento es n_k. Veamos que $\frac{1}{2}(3n_k^2 - n_k) + i_k = k$, para algún entero positivo $i_k \leq 3n_k$.

Dado que n_k es el mayor elemento de S_k, entonces $\frac{1}{2}(3(n_k+1)^2 - (n_k+1)) > k$. Asi
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3(n_k+1)^2 - (n_k+1)) &= \frac{1}{2}(3(n_k^2 + 2n_k + 1) - (n_k+1)) \\ &= \frac{1}{2}((3n_k^2 + 6n_k + 3) - (n_k+1)) \\ &= \frac{1}{2}(3n_k^2 - n_k + 6n_k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(3n_k^2 - n_k) + 3n_k + 1\end{aligned}$$

Por lo que $\frac{1}{2}(3n_k^2 - n_k) + 3n_k + 1 > k$, de donde se sigue
$$\frac{1}{2}(3n_k^2 - n_k) + 3n_k + 1 > \frac{1}{2}(3n_k^2 - n_k) + i_k$$
lo que implica
$$3n_k + 1 > i_k$$
y entonces
$$i_k \leq 3n_k.$$

Veamos ahora que i_k y n_k son únicos. Sea $n \in S_k$ tal que $n \neq n_k$, entonces existe i, entero positivo, tal que $k = \frac{1}{2}(3n^2 - n) + i$. Supongamos que $i \leq 3n$, entonces
$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{2}(3n^2 - n) + i \\ &\leq \frac{1}{2}(3n^2 - n) + 3n \\ &= \frac{1}{2}(3(n+1)^2 - (n+1)) - 1 \\ &< \frac{1}{2}(3(n+1)^2 - (n+1)) \\ &\leq \frac{1}{2}(3n_k^2 - n_k) \\ &\leq k\end{aligned}$$

Así $k < k$, lo cual es imposible y por lo tanto n_k e i_k son únicos. $\square$

Lema 3.0.5. *Para* $k = \frac{1}{2}(3n^2 - n) + i$, *con* $i \leq 3n$, *se tiene*

$$\lfloor \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor = \begin{cases} 3n & \text{si } 0 \leq i < n, \\ 3n + 1 & \text{si } n \leq i \leq 2n, \\ 3n + 2 & \text{si } 2n < i \leq 3n. \end{cases}$$

Demostración.

Notemos primero que, si $k = \frac{1}{2}(3n^2 - n) + i$, entonces se tiene

$$\sqrt{1 + 24k} = \sqrt{1 + 12(3n^2 - n) + 24i} = \sqrt{1 + 36n^2 - 12n + 24i}$$

a) $0 \leq i < n$.

Dado que

$$\begin{aligned} 6n - 1 &= \sqrt{36n^2 - 12n + 1} \\ &\leq \sqrt{36n^2 - 12n + 24i + 1} \\ &< \sqrt{36n^2 - 12n + 24n + 1} \\ &= \sqrt{36n^2 + 12n + 1} \\ &= 6n + 1; \end{aligned}$$

entonces

$$6n \leq \sqrt{36n^2 - 12n + 24i + 1} + 1 < 6n + 2$$

lo que implica

$$6n \leq 1 + \sqrt{1 + 24k} < 6n + 2$$

es decir

$$3n \leq \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 24k}) < 3n + 1$$

por lo tanto

$$3n = \lfloor \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor.$$

b) $n \leq i \leq 2n$

Como

$$\begin{aligned}
6n+1 &= \sqrt{36n^2+12n+1}\\
&= \sqrt{36n^2-12n+24n+1}\\
&\leq \sqrt{36n^2-12n+24i+1}\\
&\leq \sqrt{36n^2-12n+48n+1}\\
&= \sqrt{36n^2+36n+1}\\
&< \sqrt{36n^2+36n+9}\\
&= 6n+3;
\end{aligned}$$

entonces

$$6n+2 \leq \sqrt{36n^2-12n+24i+1}+1 < 6n+4$$

de donde se sigue

$$6n+2 \leq 1+\sqrt{1+24k} < 6n+4$$

Así

$$3n+1 \leq \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+24k}) < 3n+2$$

por lo cual

$$3n+1 = \lfloor \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+24k}) \rfloor$$

c) $2n < i \leq 3n$

Dado que

$$\begin{aligned}
6n+3 &= \sqrt{36n^2+36n+9}\\
&= \sqrt{36n^2-12n+48n+9}\\
&< \sqrt{36n^2-12n+48n+9+16}\\
&= \sqrt{36n^2-12n+48n+25}\\
&= \sqrt{36n^2-12n+24(2n+1)+1}\\
&\leq \sqrt{36n^2-12n+24i+1}\\
&\leq \sqrt{36n^2-12n+72n+1}\\
&= \sqrt{36n^2+60n+1}\\
&< \sqrt{36n^2+60n+25}\\
&= 6n+5;
\end{aligned}$$

entonces

$$6n+4 < \sqrt{36n^2-12n+24i+1}+1 < 6n+6$$

es decir

$$6n+4 < 1+\sqrt{1+24k} < 6n+6$$

de donde tenemos

$$3n + 2 < \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 24k}) < 3n + 3$$

por lo tanto

$$3n + 2 = \lfloor \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$$

con lo que concluye la prueba. $\square$

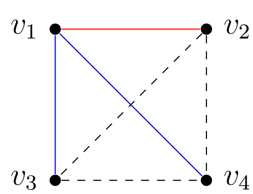
Ahora sí podemos pasar a demostrar el Teorema 3.0.1 comenzando por los casos $k = 2$ y $k = 7$.

Lema 3.0.6. $sr(K_{1,3}, 2) = 4$.

DEMOSTRACIÓN.

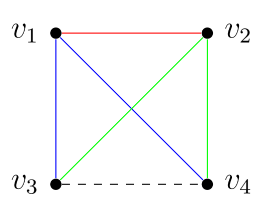
Notemos primero que $m = 4$ es el entero positivo más chico para el cual $K_{1,3}$ es subgráfica de K_m, por lo que basta probar que no existe una coloración 2-acotada de las aristas de K_4 , que no contenga una subgráfica isomorfa a $K_{1,3}$, heterocromática.

Sea v_1 un vértice de K_4, coloreemos las aristas adyacentes a él de manera que éstas no formen una $K_{1,3}$ heterocromática. Asignemos a (v_1, v_2) el color c_1 y a (v_1, v_3) y (v_1, v_4) el color c_2.

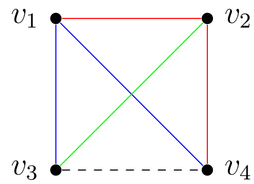


Dado que (v_1, v_2) es de color c_1, entonces (v_2, v_3) y (v_2, v_4) son ambas del mismo color, c_3, o una de ellas es de color c_1.

- Si (v_2, v_3) y (v_2, v_4) son ambas del mismo color c_3, entonces a la arista restante (v_3, v_4), no podemos asignarle los colores c_2 y c_3, pues éstos ya han sido utilizados dos veces, por lo que a esta arista le corresponde el color c_1 o un cuarto color c_4, en cualquiera de estos dos casos obtendremos dos $K_{1,3}$ heterocromáticas, ya que (v_3, v_4), (v_1, v_3) y (v_2, v_3) son todas de distinto color al igual que (v_3, v_4), (v_1, v_4) y (v_2, v_4).



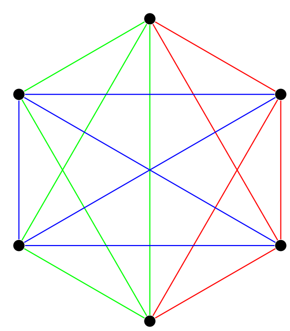
- Si sólo una de las aristas (v_2, v_3) y (v_2, v_4) es de color c_3, supongamos (v_2, v_3), entonces la otra es de color c_1, en esta caso (v_2, v_4), por lo que la arista restante (v_3, v_4) debe colorearse con el color c_3 o con un cuarto color c_4, en ambos casos (v_3, v_4), (v_1, v_4) y (v_2, v_4) forman una $K_{1,3}$ heterocromática.



De los casos anteriores es claro que $sr(K_{1,3}, k) = 4$. $\square$

Lema 3.0.7. $sr(K_{1,3}, 7) \geq 7$

Veamos ahora que $sr(K_{1,3}, 7) \geq 7$, para ello demos la siguiente coloración de K_6, que usa cada color a lo más 7 veces, en la cuál no aparece ninguna $K_{1,3}$ heterocromática.



Antes de poder presentar la demostración de $sr(K_{1,3}, 7) = 7$, tenemos que demostrar el siguiente lema.

Lema 3.0.8. *Sea $m < sr(K_{1,n}, k)$, donde $\binom{m}{2} = k \cdot c$ para algún entero c. Si existe una coloración k-acotada de K_m que usa c colores en la cual ninguna subgráfica de K_m ismorfa a $K_{1,3}$ es heterocromática, entonces*

$$m \leq \lfloor \tfrac{2k(n-1)}{p} \rfloor + 1,$$

donde $p = \lceil \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k}) \rceil$.

Demostración.

Sea $m < sr(K_{1,n}, k)$ tal que $\binom{m}{2} = k \cdot c$ y sea C una coloración k-acotada de las aristas de K_m , en la cual ninguna subgráfica de K_m isomorfa a $K_{1,n}$ es heterocrómatica, entonces, dado que K_m tiene $k \cdot c$ aristas y cada color aparece a lo más k veces, C usa exactamente c colores y cada uno de ellos se repite exactamente k veces.

Definamos G_i como la subgráfica de K_m inducida por las aristas de color c_i, para $i = 1, \cdots, c$. Vemos que ningún vertice v de K_m esta en más de $n-1$ de los G_i, pues de otra forma existiría $K_{1,n}$ subgráfica de K_m heterocromática.
Sea $a = \text{mín}_i |V(G_i)|$, entonces

$$m(n-1) \geq \sum_{i=1}^{c} |V(G_i)| \geq c \cdot a = \left(\begin{smallmatrix} m \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \tfrac{a}{k},$$

de donde

$$n - 1 \geq \binom{m}{2} \frac{a}{mk}$$

entonces

$$\frac{k(n-1)}{a} \geq \frac{m-1}{2},$$

de lo que se sigue

$$\frac{2k(n-1)}{a} + 1 \geq m. \tag{1}$$

Como cada color aparece k veces, entonces $\binom{a}{2} \geq k$, por lo que

$$\frac{a(a-1)}{2} \geq k$$

de donde se sigue

$$a(a-1) \geq 2k$$

por lo tanto

$$4a^2 - 4a \geq 8k$$

y así

$$4a^2 - 4a + 1 \geq 1 + 8k.$$

Dado que $4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$, entonces

$$2a - 1 \geq \sqrt{1 + 8k}$$

de modo que al despejar a se tiene

$$a \geq \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k})$$

luego

$$a \geq \lceil \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8k}) \rceil = p$$

lo que por (1) implica

$$m \leq \lfloor 2k(n-1)p \rfloor + 1. \quad \square$$

Lema 3.0.9. *$sr(K_{1,3}, 7) = 7$.*

Demostración.

Supongamos $7 < sr(k_{1,3}, 7)$. Por el lema 3.0.2 existe una coloración k-acotada de las aristas de K_7 tal que ninguna subgráfica de K_m isomorfa a $K_{1,3}$ es heterocrómatica, que usa a lo más 3 colores. Dado que $\binom{7}{2} = 3 \cdot 7$, del lema anteríor se tiene que

$$7 \leq \lfloor \frac{2(14)}{p} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{28}{p} \rfloor + 1$$

donde $p = \lceil \frac{1}{2}(1 + \sqrt{57}) \rceil = 5$. Por lo tanto

$$7 \leq \lfloor \frac{28}{5} \rfloor + 1 = 6$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto $7 \geq sr(K_{1,3}, 7)$.

Como sabemos por el lema 3.0.7 que $sr(K_{1,3}, 7) \geq 7$, podemos concluir con lo anterior que $sr(K_{1,3}, 7) = 7$. $\square$

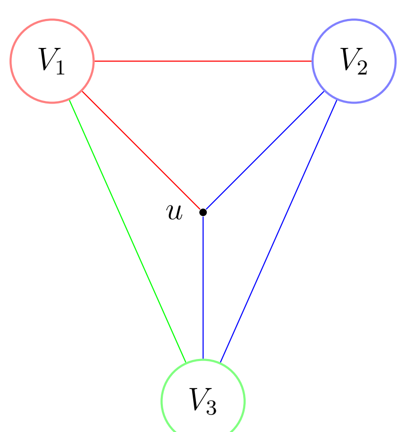
Ahora podemos demostrar el Teorema 3.0.1 para $k \neq 2, 7$.

Demostración. (Teorema 3.0.1)

Sean $k = \frac{1}{2}(3n^2 - n) + i$, $k \neq 2, 7$ y $m = \lfloor \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$. Consideremos los tres casos del lema 3.0.5.

a) $0 \leq i < n$ y $m = 3n$.

Escribimos $V(K_m) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{u\}$, donde $|V_1| = |V_3| = |V_2| + 1 = n$ y coloreemos de color c_1 las aristas de la gráfica completa inducida por V_1 así como las que unen V_1 con $V_2 \cup \{u\}$. A las aristas de la gráfica inducida por V_3 y a las que van de V_1 a V_3 les asignaremos el color c_3 y al resto el color c_2.



Sea $|c_i|$ el número de aristas de color c_i, entonces

$$|c_1| = \binom{n}{2} + n(n-1) + n = \frac{n^2 - n + 2n^2 - 2n + 2n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

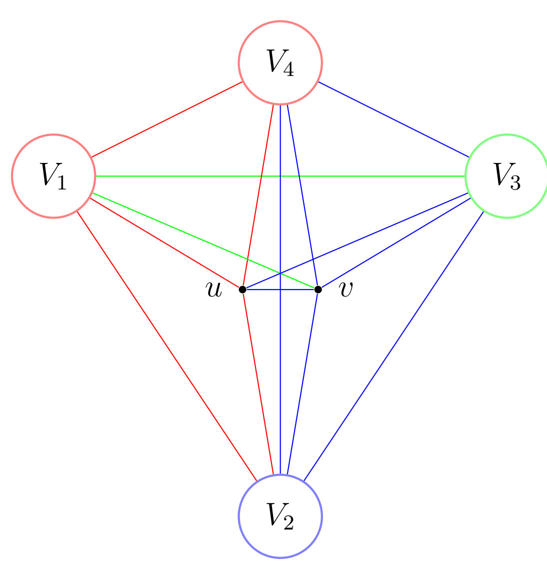
$$|c_2| = \binom{n-1}{2} + n(n-1) + 2n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2 + 2n^2 - 2n + 4n - 2}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

$$|c_3| = \binom{n}{2} + n^2 = \frac{n^2 - n + 2n^2}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Notemos que con esto hemos coloreado todas las aristas de K_m, usando cada color $\frac{1}{2}(3n^2 - n) \leq k$ veces, de forma que ninguna subgráfica isomorfa a $K_{1,3}$ es heterocromática.

b) $n \leq i \leq 2n$ y $m = 3n + 1$.

Sea $V(K_m) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup \{u\} \cup \{v\}$, con $|V_1| = |V_3| = |V_2| + 3 = n$ y $|V_4| = 2$. Asignaremos el color c_1 a las aristas de las gráficas inducidas por V_1 y V_4 así como a las que unen u con $V_1 \cup V_2 \cup V_4$ y V_1 con $V_2 \cup V_4$. Las aristas que van de V_1 a $V_3 \cup \{v\}$ las colorearemos de color c_3, de igual forma las aristas de la gráfica inducida por V_3 y el resto de color c_2.



Sea $|c_i|$ el número de aristas de color c_i, entonces

$$|c_1| = \binom{n}{2} + n(n-3) + 4n = \frac{n^2 - n + 2n^2 - 6n + 8n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}.$$

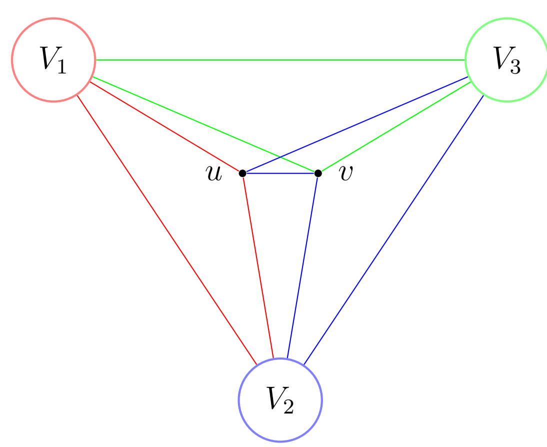
$$|c_2| = \binom{n-3}{2} + (n+3)(n-3) + 4n + 3 = \frac{n^2 - 7n + 12 + 2n^2 - 18 + 8n + 6}{2} = \frac{3n^2+n}{2}.$$

$$|c_3| = \binom{n}{2} + n^2 + n = \frac{n^2 - n + 2n^2 + 2n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}.$$

De esta forma hemos coloreado las aristas de K_m, usando cada color $\frac{1}{2}(3n^2 + n) = \frac{1}{2}(3n^2 - n) + n \leq k$ veces, sin que ninguna subgráfica isomorfa a $K_{1,3}$ sea heterocromática.

c) $2n < i \leq 3n$ y $m = 3n+2$.

Sea $V(K_m) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{u\} \cup \{v\}$, con $|V_i| = n$ para $i = 1,2,3$ y coloreemos las aristas de la grafica completa inducida por V_1 de color c_1, asi como las que unen V_1 con $V_2 \cup \{u\}$ y u con V_2. El color c_3 se lo asignaremos a las aristas de la gráfica completa inducida por V_3 y a las que van de V_3 a $V_1 \cup \{v\}$ y de v a V_1, al resto de las aristas las colorearemos con el color c_2.



Sea $|c_i|$ el número de aristas de color c_i, entonces

$$|c_1| = \binom{n}{2} + n^2 + 2n = \frac{n^2 - n + 2n^2}{2} + 2n = \frac{3n^2 - n}{2} + 2n.$$

$$|c_2| = \binom{n}{2} + n^2 + 2n + 1 = \frac{n^2 - n + 2n^2}{2} + 2n + 1 = \frac{3n^2 - n}{2} + 2n + 1.$$

$$|c_3| = \binom{n}{2} + n^2 + 2n = \frac{n^2 - n + 2n^2}{2} + 2n = \frac{3n^2 - n}{2} + 2n.$$

Notemos que con esto hemos coloreado todas las aristas de K_m, usando cada color a lo más $\frac{1}{2}(3n^2 - n) + 2n + 1 \leq k$ veces, de forma que ninguna subgráfica isomorfa a $K_{1,3}$ es heterocromática.

Con las coloraciones anteriores hemos mostrado que

$$sr(K_{1,3}, k) \geq \lfloor \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor + 1 = \lfloor \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$$

y del Lema 3.0.3 tenemos

$$sr(K_{1,3}, k) \leq \lfloor \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor$$

por lo tanto

$$sr(K_{1,3}, k) = \lfloor \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{1 + 24k}) \rfloor. \quad \square$$

Capítulo 4

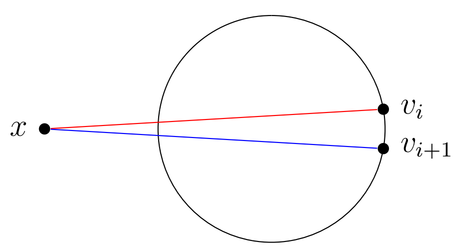
Números Sub-Ramsey de Ciclos y Trayectorias

En los capítulos anteriores hemos visto que si bien para toda gráfica G de orden n, el número $sr(G,k) \in O(kn^2)$, para algunos casos particulares de G, puede incluso darse un valor exacto de $sr(G,k)$ respecto a k. A veces no es posible dar dicho valor, pero si podemos asegurar algunas cosas sobre éste. En este capítulo, por ejemplo, veremos que existe una constante c tal que si $n \geq ck^3$, entonces bajo toda coloración k-acotada, K_n contiene un ciclo hamiltoniano heterocromático. De ahi deduciremos que para $n \geq ck^3$ se cumple que $sr(P_n,k) = sr(C_n,k) = n$.

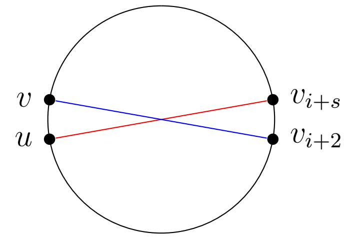
Los resultados vistos en este capítulo fueron publicados en [7].

En los siguientes lemas y definiciones, sean k y n enteros positivos y c un real positivo, tales que $n \geq ck^3$. Además sea $f : E(K_n) \longrightarrow \{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$ una coloración de las aristas de K_n que no repite ningún color más de k veces.

Definición 17. Sea $x \in V(K_n)$ y $C = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ un ciclo en K_n. Para $v_i \in V(C)$ decimos que el par de aristas $\{xv_i, xv_{i+1}\}$ es un *cambio* de x en C si xv_i y xv_{i+1} son de distinto color.



Definición 18. Sean C como en la definición anterior y $u = v_j,\ v = v_{j+1}$ vértices consecutivos en C. Para $v_i \in V(C)$ definimos un *cruce* de uv en C como un par de aristas $\{uv_{i+s}, vv_{i+2}\}$, con $s = 0, 1$, tales que xv_{i+s} y xv_{i+2} son de distinto color y $\{v_{i+s}, v_{i+2}\} \cap \{u, v\} = \emptyset$.



Decimos que un cruce es de *tipo* s dependiendo de la s.

Lema 4.0.1. *Sea $C = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ con $m \geq n - O(1)$ un ciclo de K_n, $x \in V(K_n)$ y uv una arista en C, entonces se cumple lo siguiente*

a) Hay al menos $n/k - O(1)$ cambios de x en C.

b) Hay al menos $n/k - O(1)$ cruces de uv en C.

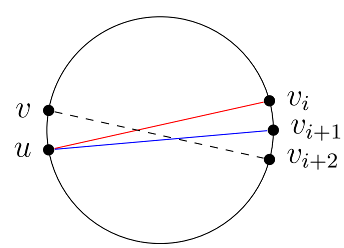
Demostración.

(Inciso a).
Sea $x \in V(K_n)$ y supongamos que $m = \alpha k + r$, $r \geq 0$.
Denotemos por $B_1, B_2, \cdots, B_q$ a los conjuntos de aristas consecutivas de x en el orden definido por el ciclo C, tales que son del mismo color bajo la coloración f.
Notemos que entonces hay al menos q cambios de x en C, si $x \notin C$ y al menos $q-1$ cambios si $x \in C$. Dado que el número de aristas de cada B_j es a lo más k, entonces $q \geq \alpha$, es decir hay al menos $\alpha - 1$ cambios de x en C, pero

$$\alpha - 1 = \frac{m-r}{k} - 1 \geq \frac{n - O(1) - r}{k} - 1 \geq \frac{n}{k} - O(1).$$

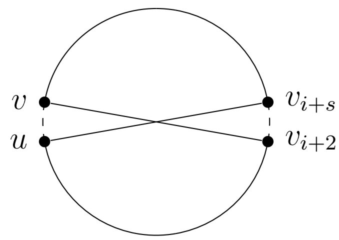
Por lo tanto hay al menos $\frac{n}{k} - O(1)$ cambios de x en C.

(Inciso b)
Sea uv una arista en C, veremos que cada cambio, $\{uv_i, uv_{i+1}\}$, de u en C define un cruce de uv en C, si $v_{i+2} \neq u$.
Sea $\{uv_i, uv_{i+1}\}$ un cambio de u en C, tal que uv_i es de color c_1 y uv_{i+1} de color c_2.



Si vv_{i+2} repite alguno de los colores de c_1 y c_2, entonces $\{uv_{i+1}, vv_{i+2}\}$ o $\{uv_i, vv_{i+2}\}$ es un cruce de uv en C respectivamente. En caso contrario, si vv_{i+2} es de un tercer color, ambos son cruces de uv en C.
Por lo tanto hay al menos un cruce de uv en C por cada cambio de u en C, salvo si $v_{i+2} = u$. Es decir, por el inciso a), hay al menos $\frac{n}{k} - O(1)$ cruces de uv en C. $\square$

Definición 19. Para cada cruce $\{uv_{i+s}, vv_{i+2}\}$ concideremos el ciclo $C_{i,s} = (uv_{i+s}v_{i+s-1} \cdots vv_{i+2} \cdots v_{j-1})$.



Sea W un conjunto de a lo más n colores. Decimos que un cruce es W-*útil* si

i) $s = 0$ y existen al menos $n/2k - O(1)$ cambios de v_{i+1} en $C_{i,0}$ cuyos colores no están en W.

ii) $s = 1$.

Lema 4.0.2. *Hay al menos $n/2k - O(1)$ cruces W-útiles de uv en C.*

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que la afirmación no es cierta. Por el lema anterior, existen entonces al menos $n/k - O(1)$ cruces de uv en C de los cuales al menos $n/2k - O(1)$ son del tipo 0 tales que al menos $n/2k - O(1)$ cambios de v_{i+1} en $C_{i,0}$ contienen al menos una arista con color en W. Es decir hay al menos $\frac{1}{2}(n/2k - O(1))^2$ aristas cuyo color esta en W.

Para n suficientemente grande, como por ejemplo $n \geq 8k^3 + 4k(O(1))$, se tiene

$$\tfrac{n}{8k^3} \geq 1 + \tfrac{O(1)}{2k^2}$$

por lo que

$$\tfrac{n}{8k^3} - \tfrac{O(1)}{2k^2} \geq 1$$

lo cuál implica

$$\tfrac{n}{8k^3} - \tfrac{O(1)}{2k^2} + O(1) > 1$$

de donde se obtiene que

$$nk(\tfrac{n}{8k^3} - \tfrac{O(1)}{2k^2} + O(1)) > nk$$

es decir

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{n}{2k} - O(1)\right)^2 > nk.$$

Pero nk es el mayor número posible de aristas cuyo color esta en W. Por lo tanto existen al menos $n/2k - O(1)$ cruces útiles de uv en C. $\square$

Definición 20. Sea W como en la definición anterior, decimos que un cruce W-útil de xy en un ciclo C' de longitud al menos m es W-*bueno* si los colores de sus aristas no están en W. Un cruce $\{uv_{i+s}, vv_{i+2}\}$ es *muy* W-*útil* si al menos $n/4k - O(1)$ cruces de uv_{i+s} y vv_{i+2} en $C_{i,s}$ son buenos.

Lema 4.0.3. *Hay al menos $n/4k - O(1)$ cruces muy W-útiles de uv en C.*

Demostración.

Supongamos que no, entonces existen al menos $n/4k - O(1)$ cruces útiles de uv en C tales que al menos $n/4k - O(1)$ cruces de uv_{i+s} en $C_{i,s}$ y al menos $n/4k - O(1)$ cruces de vv_{i+2} en $C_{i,s}$ contienen al menos una arista con color en W. Es decir hay al menos $\frac{1}{4}(n/4k - O(1))^2$ aristas cuyo color esta en W.

Pero para n suficiententemente grande, como para $n \geq 64k^3 + 8k(O(1))$, se tiene

$$\tfrac{n}{64k^3} \geq 1 + \tfrac{O(1)}{8k^2}$$

por lo que

$$\tfrac{n}{64k^3} - \tfrac{O(1)}{8k^2} \geq 1$$

lo cuál implica

$$\tfrac{n}{64k^3} - \tfrac{O(1)}{8k^2} + O(1) > 1$$

de donde se obtiene que

$$nk(\tfrac{n}{64k^3} - \tfrac{O(1)}{8k^2} + O(1)) > nk,$$

es decir

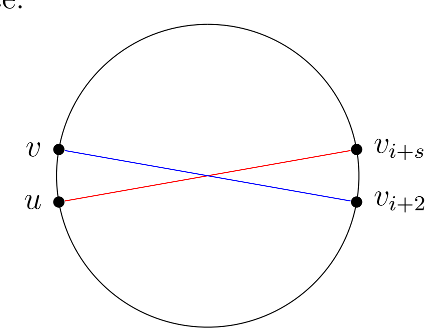
$$\tfrac{1}{4}\big(\tfrac{n}{4k} - O(1)\big)^2 > nk.$$

Pero nk es el mayor número posible de aristas cuyo color esta en W, por lo tanto existen al menos $n/4k - O(1)$ cruces muy útiles de uv en C. $\square$

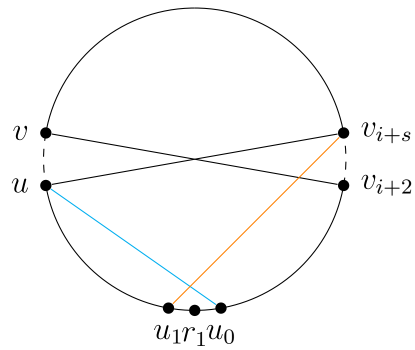
Teorema 4.0.4. *Existe una constante positiva c tal que si k y n son enteros positivos tales que $n \geq ck^3$ y K_n se colorea sin usar ningún color más de k veces, entonces hay un ciclo Hamiltoniano en K_n heterocromático.*

Demostración.

Sea $C = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ un ciclo Hamiltoniano en K_n con el menor número de pares de aristas del mismo color y sea uv una arista de C cuyo color se repite. Llamemos W al conjunto de colores de las aristas de C.
Del lema 4.0.3 sabemos que hay al menos $\frac{n}{4k} - O(1)$ cruces muy W-útiles de uv en C. Sea $\{uv_{i+s}, vv_{i+2}\}$ uno de estos cruces y sea $C_{i,s} = (v_{i+s}v_{i+s-1} \cdots vv_{i+2}v_{i+3} \cdots u)$ el ciclo asociado a dicho cruce.

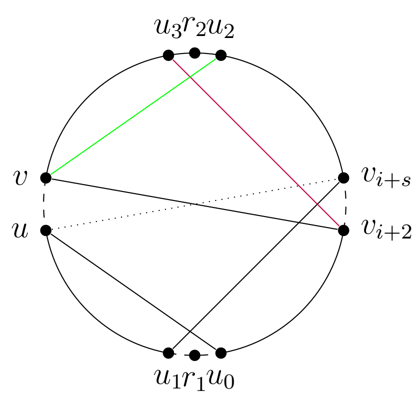


Dado que $\{uv_{i+s}, vv_{i+2}\}$ es un cruce muy W-útil de uv en C, entonces al menos $\frac{n}{4k} - O(1)$ cruces tanto de uv_{i+s} en $C_{i,s}$ como de vv_{i+2} en $C_{i,s}$ son W-buenos. Sea $\{uu_0, v_{i+s}u_1\}$ un W-buen cruce de uv_{i+s}. Si u_0u_1 no esta en las aristas de $C_{i,s}$ entonces llamemos r_1 al vértice tal que u_0r_1 y r_1u_1 están en $C_{i,s}$.

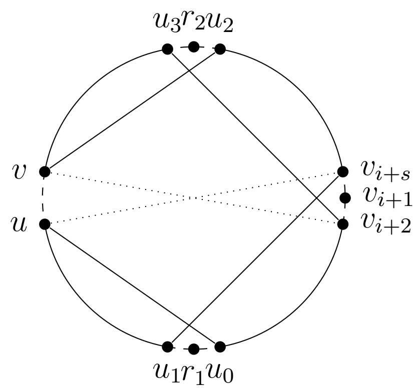


Sea $C_0 = (u_0 \cdots v_{i+s}u_1 \cdots u)$ el ciclo asociado al cruce $uu_0, v_{i+s}u_1$. Dado que a lo más $2k-2$ aristas en los W-buenos cruces de vv_{i+2} en $C_{i,s}$ tienen los mismos colores que uu_0 y $v_{i+s}u_1$, entonces a lo más $2k-2$ aristas en los W-buenos cruces de vv_{i+2} en C_0 tienen los mismos colores que uu_0 y $v_{i+s}u_1$.

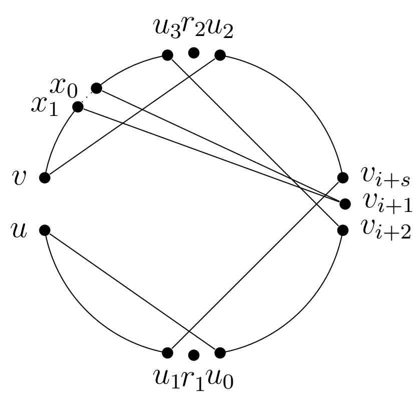
Sea $\{vu_2, v_{i+2}u_3\}$ un W-buen cruce de vv_{i+2} en C_0 cuyo color no es igual a uu_0 ni a $v_{i+s}u_1$. Denotemos por r_2 el vértice tal que u_2r_2 y r_2u_3 están en C_0 si u_2u_3 no es una arista de C_0.



Sea $C_1 = (u_2 \cdots v_{i+2}u_3 \cdots v)$ el ciclo asociado al cruce $vu_2, v_{i+2}u_3$. Notemos que este ciclo tiene menos pares de aristas del mismo color que C y a lo mas 3 vértices, v_{i+1}, r_1, r_2 que no están en C_1, por lo que su longitud es al menos $n-3$. Dado que $\{uv_{i+s}, vv_{i+2}\}$, $\{uu_0, vi+su_1\}$ y $\{vu_2, v_{i+2}u_3\}$ son todos cruces útiles por definición, entonces al menos $\frac{n}{2k} - O(1)$ cambios de v_{i+1}, r_1 y r_2 en C_1 tienen colores que no estan en W.



Dado que a lo más $4k-4$ aristas pueden tener los mismos colores que uu_0, $v_{i+s}u_1$, vu_2 y $v_{i+2}u_3$, entonces puede escogerse un cambio de v_{i+1} en C cuyos colores sean distintos a estos y no estén en W ni en los cruces anteriormente usados. Sea $\{v_{i+1}x_0, v_{i+1}x_1\}$ uno de estos cambios, y denotemos por C_2 el ciclo formado al sustituir la arista x_0x_1 en C_1 por el camino $x_0v_{i+1}x_1$.



De manera análoga pueden encontrarse cambios de r_1 y r_2 en C, $\{r_1x_2, r_1x_3\}$ y $\{r_2x_4, r_2x_5\}$ cuyos colores no estén en W ni en cambios anteriores, los cuales al remplazar las aristas x_2x_3 y x_4x_5 en C_2 por los caminos $x_2r_1x_3$ y $x_4r_2x_5$ respectivamente nos dan un ciclo Hamiltoniano C' con menos pares de aristas del mismo color que C. Por lo tanto C debe ser un ciclo Hamiltoniano heterocromático. $\square$

Como implicación del resultado anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.0.5. *Existe una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que si $n \geq f(k)$ entonces $sr(P_n, k) = n$ y $f(k) \leq ck^3$.*

Demostración.

Por el Teorema 3.0.4 existe c una constante positiva tal que si k y n son enteros positivos que cumple que $n \geq ck^3$, entonces al colorear K_n con una coloración k-acotada, se obtiene un ciclo Hamiltoniano heterocromático, es decir K_n contiene una C_n heterocromática bajo dicha coloración. Dado que al quitar cualquier arista del ciclo C_n se obtiene una P_n, entonces K_n contiene una P_n heterocromática.

Definamos $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como $f(m) = cm^3$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Entonces $cm^3 \geq f(m)$

para cualquier entero positivo m.

Sea $n \geq f(k)$, entonces $n \geq ck^3$. Asi al colorear K_n de manera que cada color se repita a lo más k veces, se obtiene un ciclo Hamiltoniano heterocromático y por lo tanto una P_n heterocrómatica, por lo que $sr(P_n, k) \leq n$.

Por otro lado $sr(P_n, k) \geq n$ pues K_n es la gráfica completa de menor orden que contiene a P_n. Así $sr(P_n, k) = n$. $\square$

Corolario 4.0.6. *Para $n \geq ck^3$, $sr(P_n, k) = sr(C_n, k) = n$.*

Demostración.

Por el Teorema 3.0.4 existe c una constante positiva tal que si k y n son enteros positivos que cumple que $n \geq ck^3$, entonces al colorear K_n con una coloración k-acotada, se obtiene un ciclo Hamiltoniano heterocromático, es decir K_n contiene una C_n heterocromática bajo dicha coloración, por lo tanto $sr(C_n, k) \leq n$, si $n \geq ck^3$. Además dado que al quitar cualquier arista de C_n se obtiene una P_n, si K_n contiene una C_n heterocromática bajo la coloración anterior, entonces contiene asimismo una P_n heterocromática, es decir $sr(P_n, k) \leq n$.

Por otro lado K_n es la completa de orden menor que contiene tanto a C_n como a P_n, por lo que $sr(C_n, k) \geq n$ y $sr(P_n, k) \geq n$.

De lo anterior se puede concluir que $sr(P_n, k) = sr(C_n, k) = n$. $\square$

Para terminar este capítulo veremos un resultado similar que involucra gráficas infinitas.

Definición 21. Sea $C : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ una coloración de K_ω definida de la siguiente manera: si $i < j$, entonces $C(ij) = j$. Denotaremos por K^0 a la gráfica resultante de aplicar la coloración C a K_ω.

Teorema 4.0.7. *Si K_ω esta coloreada de forma que toda gráfica monocromática sea localmente finita, entonces K_ω contiene una subgráfica isomorfa K^0 o en cualquier vértice comienza una trayectoria Hamiltoniana cuyas aristas son todas de distinto color.*

Demostración.

Sean $V(K_\omega) = \omega$ y $P = (v_0 v_1 \cdots v_m)$ una trayectoria heterocrómatica en K_ω. Veamos que K_ω contiene una subgráfica isomorfa a K^0 o P puede extenderse a una trayectoria $\{v_0 \cdots v_m \cdots r\}$ cuyas aristas sean todas de distinto color, donde $r = \min\{j | j \notin V(P)\}$.

Dado que toda subgráfica monocromática es localmente finita, existe $x_0 \notin V(P)$ tal que x_0 es el n más chico cuyas aristas a v_m y r son de colores no en P, pues de no existir dicho x_0, para todo $x \notin V(P)$ alguna de las aristas $v_m x$, xr sería de algún color en P, por lo tanto de v_m o de r saldrían una infinidad de aristas de colores en P. Dado que el número de colores en P es finito, entonces de v_m o de r saldrían una infinidad de aristas de uno de dichos colores, lo cual es imposible pues toda subgráfica monocromática en localmente finita. Asimismo existen, para toda n, $x_0, x_1, \cdots, x_n$ tales que, para cada $i < n$, x_i es el s más chico cuyas aristas a $r, v_m, x_0, \cdots, x_{i-1}$ son de colores no presentes en la trayectoria $v_0v_1 \cdots v_m x_0 \cdots x_{i-1}$. Es decir existe una sucesión $x_0, x_1, \cdots, x_j, \cdots$ de vértices no en P tal que los colores de las aristas de x_j a $r, v_m, x_0, \cdots, x_{j-1}$ no aparecen en la trayectoria $v_0v_1 \cdots v_m x_0 \cdots x_{j-1}$, en donde $x_j = min\{s | s \notin V(P) \cup \{x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\}\}$.

Si para algún par i, j con $i < j$ las aristas x_ix_j y x_jr son de colores distintos, entonces P puede extenderse a la trayectoria $v_0v_1 \cdots v_m x_0 x_1 \cdots x_i x_j r$. Si esto es posible hacerlo indefinidamente, dado que para cada trayectoria P obtenemos una extension P' de P donde $r \in V(P')$ con $r = min\{j : j \notin V(P)\}$, entonces P puede extenderse a una trayectoria Hamiltoniana heterocromática. En caso contrario, para toda j las aristas de la forma x_ix_j con $i < j$ son del mismo color, por lo tanto la gráfica inducida por la sucesión $x_0, x_1, \cdots, x_j, \cdots$ es isomorfa a K^0. $\square$

Corolario 4.0.8. *Para toda coloración k-acotada de K_ω se cumple que K_ω contiene una trayectoria Hamiltoniana heterocromática.*

Demostración.

Sea $V(K_\omega) = \omega$. Dado que ninguna subgráfica monocromática de K_ω contiene más de k aristas bajo esta coloración, entonces toda subgráfica monocromática es finita, por lo tanto es localmente finita y por el Teorema 4.0.8 contiene una subgráfica isomorfa a K^0 o en cualquier vértice comienza una trayectoria Hamiltoniana. Sin embargo para $j > k$ no es posible asignar el mismo color a toda arista de la forma ij con $i < j$, por lo que K_ω debe contener una trayectoria Hamiltoniana cuyas aristas son todas de distinto color. $\square$

Bibliografía

[1] Aigner, Martin. 'Turán's graph theorem."*The American Mathematical Monthly* 102, no. 9 (1995): 808-816.

[2] Alspach, Brian, Martin Gerson, Gena Hahn, and Pavol Hell. "On sub-Ramsey numbers."*Ars Combinatoria* 22 (1986): 199-206.

[3] Chartrand, Gary, Linda Lesniak, and Ping Zhang. *Graphs & digraphs*. Vol. 39. CRC press, 2010.

[4] Chartrand, Gary, and Ping Zhang. Chromatic graph theory. CRC press, 2019.

[5] Frankl, P., and Z. Füredi. "Union-free families of sets and equations over fields."*Journal of Number Theory* 23, no. 2 (1986): 210-218.

[6] Hahn, Geňa. "More star sub-Ramsey numbers." *Discrete Mathematics* 34, no. 2 (1981): 131-139.

[7] Hahn, Geňa, and Carsten Thomassen. "Path and cycle sub-Ramsey numbers and an edge-colouring conjecture."

[8] Hell, Pavol, and Montellano-Ballesteros, Juan José. "Polychromatic cliques."*Discrete mathematics* 285, no. 1-3 (2004): 319-322.

[9] Hilbert, David. "Über die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten."(1892): 104-129.

[10] Ramsey, Frank P. "On a problem of formal logic."*Proceedings of the London Mathematical Society* 2, no. 1 (1930): 264-286.

[11] Schur, Issai. "Über Kongruenz $x^m + y^m = z^m (mod\, p)$."*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 25 (1917): 114-116.

[12] Soifer, Alexander. "Ramsey theory before Ramsey, prehistory and early history: an essay in 13 parts." In *Ramsey theory*, pp. 1-26. Birkhäuser, Boston, MA, 2011.

[13] Waerden, Bartel Leendert van der. "Beweis einer baudetschen vermutung."*Nieuw Arch. Wisk* 15 (1927): 212-216.

Este trabajo fue patrocinado por Proyecto Conacyt A!-S-12891 y Proyecto PAPIIT IN108121