UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

INTERVENCIONES EDUCATIVAS DE FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:

RITA CELIA OJEDA OJEDA

TUTORES:

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA. FACULTAD DE CIENCIAS

DR. VICENTE GABRIEL ZEPEDA BARRIOS. FES ACATLÁN

M. EN E. S. DULCE MARÍA PERALTA GONZÁLEZ RUBIO. CCH SUR

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO,
NOVIEMBRE DE 2021

Dedicatoria:

A mi hijo, Javier Ojeda Ojeda, por ser siempre la inspiración de mi vida.

A mi mamá, María Ojeda Gallegos, no estás conmigo, pero siempre fuiste mi apoyo.

Agradecimientos:

A mis alumnos que participaron sin saber en la realización del presente trabajo.

A mis tutores que me brindaron su experiencia y sabiduría para mejorar mi trabajo, especialmente a los que perseveraron, Dulce y Jorge Javier.

A la FES Acatlán que me abrió sus puertas y me dio la oportunidad de continuar mi aprendizaje en la profesión docente.

Al subsistema COBAEZ que inspiró esta nueva etapa de mi vida.

Índice

Resumen

Una de las razones del alto porcentaje en la reprobación de Matemáticas I es que los alumnos no comprenden el mecanismo algebraico de la factorización. El objetivo de este trabajo es diversificar las representaciones para que al transitar de una a otra el aprendizaje esté asegurado, ya que cada representación aporta aspectos distintos y complementarios entre sí. Los estudiantes mejoran su aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos con una incógnita cuando resuelven problemas contextualizados, donde se vinculan el álgebra y la geometría mediante el empleo de rectángulos que representan geométricamente a un polinomio. El conjunto de artículos y autores significativos se compone de “Marco figural como medio para factorizar polinomios cuadráticos” de Teresita Méndez (2012); “Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos” de Regine Douady (2009); “Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita…” de Esther López (2008); “La caja de polinomios” de Fernando Soto, Saulo Mosquera y Claudia Gómez (2005) y “Diseño de una secuencia didáctica donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática” de Elías Cruz (2008). La intervención educativa consta de 12 sesiones con diferente duración, se aplicó a grupos pequeños de alumnos, 10 sesiones fueron de forma presencial y 2 a distancia. Se planeó realizarla con dos grupos de 20 alumnos cada uno, el grupo A receptor del experimento y el grupo B como control, pero por las restricciones de la pandemia, el método sufrió varias modificaciones con respecto a lo planeado, hubo necesidad de ir haciendo ajustes, los grupos se formaron aleatoriamente, el primero con 13 alumnos y el segundo con 20, que fueron menguando conforme avanzaron las sesiones. Debido a que su presencia era voluntaria; para la evaluación sumativa solo hubo 9 alumnos del grupo A, los alumnos del grupo B dejaron de presentarse a partir de la sesión 8.

Se aplicaron instrumentos cualitativos y cuantitativos. Se compararon los promedios obtenidos entre ambos grupos en la evaluación diagnóstica y los promedios obtenidos por el grupo A en la evaluación diagnóstica y la evaluación sumativa. La intervención educativa fue funcional, reproducible. La manipulación de figuras para la factorización geométrica fue una estrategia de aprendizaje bien recibida. La factorización geométrica de trinomios con términos negativos propició el desarrollo de un método diferenciado de solución que demuestra la reversibilidad de la factorización. Al diversificar las representaciones se logra aumentar el aprendizaje de la factorización.

Abstract

One reason for the high failure rate in Mathematics I is that students do not understand the algebraic mechanism of factoring. The objective of this work is to diversify the representations so that when moving from one to another, learning is assured, since each representation contributes different and complementary aspects to each other. Students improve their learning of factoring quadratic polynomials with one unknown when solving contextualized problems, where algebra and geometry are linked by using rectangles that geometrically represent a polynomial. The set of significant articles and authors is made up of Teresita Méndez (2012)'s "Marco figural como medio para factorizar polinomios cuadráticos"; Regine Douady (2009)'s "Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos"; Esther López (2008)'s "Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita…"; Fernando Soto, Saulo Mosquera and Claudia Gómez (2005)'s "La caja de polinomios" and Elías Cruz (2008)'s "Diseño de una secuencia didáctica donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática". The educational intervention consists of 12 sessions with different duration, it was applied to small groups of students, 10 sessions were face-to-face and

2 remotely. It was planned to carry it out with two groups of 20 students each, group A receiving the experiment and group B as a control, but due to the restrictions of the pandemic, the method underwent several modifications respect to what was planned; there was a need to make adjustments, the groups were formed randomly, the first with 13 students and the second with 20, which decreased as the sessions progressed. Because their presence was voluntary, for the summative assessment there were only 9 group-A students and group-B students stopped showing up from session 8. Qualitative and quantitative instruments were applied. The averages obtain between both groups in the diagnostic assessment were compared as well as the diagnostic assessment and summative assessment obtained by group A. The educational intervention was functional and reproducible. Manipulating figures for geometric factoring was a well-received learning strategy. The geometric factoring of trinomials with negative terms led to the development of a differentiated method of solution that demonstrates the reversibility of factoring. By diversifying the representations, it is possible to increase the learning of factoring.

Lista de tablas

Lista de ilustraciones

Introducción

Aprender matemáticas es parte de la cultura que un joven bachiller necesita para ser competente en este mundo globalizado en el que vivimos; Le permitirá resolver problemas de la vida cotidiana.

La factorización de polinomios es uno de los temas de matemáticas en el cual la mayoría de los jóvenes que cursan el bachillerato tiene problemas, debido a muchos factores: aspectos lingüísticos, comunicación, motivación, lo que puede llegar a causar reprobación y/o deserción. Una de las dificultades es que en la enseñanza tradicional, la factorización se ve únicamente desde la perspectiva algebraica, lo cual resulta insuficiente para comprender el concepto y el procedimiento, las nociones no son funcionales.

En este estudio, la propuesta para mejorar el aprendizaje de la factorización consiste en diversificar las representaciones del concepto matemático: verla desde la perspectiva numérica, algebraica y geométrica, pues al cambiar de una a otra, se desbloquea la comprensión.

Se realizó en cuatro fases: investigación, diseño y/o selección de estrategias didácticas, aplicación y evaluación. La aplicación y evaluación se realizó con alumnos de primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, plantel Los Campos.

La utilidad de un aprendizaje depende de la vinculación que tenga con el contexto de los estudiantes, es tarea del docente organizar la intervención educativa de tal manera que los estudiantes construyan el conocimiento necesario partiendo de un tema de la vida cotidiana, en este caso, el problema del área.

La factorización es un concepto matemático que para ser aprendido requiere el esquema de instrumento-objeto-instrumento, es instrumento cuando funciona como herramienta para resolver un problema (procedimiento) y es objeto cuando se adquiere, se conceptualiza y vuelve a ser instrumento cuando se usa para resolver problemas similares. Al enseñar, el docente debe contextualizar el concepto matemático para que la factorización funcione como herramienta, de esta forma el alumno construye su aprendizaje, una vez aprendido se convierte en objeto y estará descontextualizado.

La simbolización permite la comprensión de un problema al facilitarle establecer las relaciones entre los objetos en la expresión verbal. Los alumnos practicaron la generalización en la estrategia de representación numérica. La identificación de un patrón, es un aprendizaje necesario para el desarrollo del pensamiento algebraico que los llevará a la abstracción para configurar su pensamiento formal y aumentar progresivamente su capacidad de resolución de problemas matemáticos.

En el diseño de la intervención educativa se consideran otros aspectos propios de la docencia como la interacción grupal, el trabajo cooperativo, lo emocional, lo lingüístico, el nivel de pensamiento formal. En la factorización geométrica los alumnos manipularán rectángulos para la visualización del proceso y conceptualmente comprender la reversibilidad entre las factorizaciones algebraica y geométrica al relacionar la expresión algebraica con los objetos concretos. Se logró integrar una estrategia donde los alumnos factoricen trinomios cuadráticos ordenados con términos positivos y negativos. Al lograr rectangularizar (representar como un rectángulo) un polinomio cuadrático ordenado, se ha factorizado: las dimensiones del rectángulo son los factores de la ecuación cuadrática.

Problema de investigación

¿Qué efectos tiene en el aprendizaje de los alumnos de nivel medio superior diversificar las representaciones (algebraica y geométrica) de la factorización de polinomios cuadráticos con una incógnita bajo el enfoque de competencias a través de la intervención educativa?

Objetivo general

Proponer una estrategia didáctica de la factorización de polinomios cuadráticos con una incógnita bajo el enfoque de competencias, diversificando las representaciones del concepto matemático para aumentar su aprendizaje.

Objetivos específicos

Investigar si la transición de una representación a otra (algebraica-geométrica) como formas de abordar la factorización de polinomios cuadráticos favorece el aprendizaje conceptual y procedimental.

Diseñar estrategias didácticas de factorización de polinomios cuadráticos diversificando las representaciones: algebraica y geométrica (rectangularización) a fin de contribuir a mejorar el aprendizaje conceptual y procedimental.

Diseñar instrumentos de evaluación que midan de forma cualitativa y cuantitativa el impacto individual y grupal del aprendizaje de la factorización empleando ambas representaciones: algebraica y geométrica.

Aplicar la intervención didáctica de factorización empleando las representaciones algebraica y geométrica para mejorar el aprendizaje.

Evaluar mediante instrumentos cualitativos y cuantitativos si los estudiantes identifican y emplean la reversibilidad de la factorización.

Evaluar mediante instrumentos cualitativos y cuantitativos si al diversificar las representaciones: numérica, algebraica y geométrica y transitar de una representación a otra del concepto matemático de factorización, esto favorece su aprendizaje.

Hipótesis

Los estudiantes mejoran su aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos con una incógnita cuando resuelven problemas contextualizados donde se vinculan el álgebra y la geometría mediante el empleo de rectángulos que representan geométricamente a un polinomio.

La rectangularización funciona como método complementario de aprendizaje cuando los estudiantes comprenden el procedimiento que articula el álgebra con la geometría, debido a que el marco algebraico es insuficiente.

La generalización del método de la factorización algebraica para resolver trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ facilita el aprendizaje del concepto.

Justificación

Los altos índices de reprobación en la materia de álgebra por dificultades en el aprendizaje conceptual y procedimental de la factorización de polinomios cuadráticos son la justificación para investigar cómo la forma de abordar los contenidos determina el aprendizaje de los mismos.

El problema surge de la necesidad de disminuir los índices de reprobación mejorando el aprendizaje de la factorización. Se pretende que al diversificar las representaciones del concepto matemático los alumnos mejoren la comprensión conceptual y procedimental de la factorización para resolver problemas. Tanto la investigación documental como la cuasi-experimental aportarán elementos para conocer si la diversificación de las representaciones matemáticas tienen un efecto positivo en el aprendizaje de la factorización de polinomios en el nivel medio superior.

En el plantel Los Campos, del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, el porcentaje de reprobación del área de matemáticas del año 2015 al 2019, en los semestres B (en los cuales se imparte álgebra) ha fluctuado de 16.2% hasta 27.08% (ver tabla 1) por lo que el presente estudio se justifica.

La factorización de polinomios es un tema trascendental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, este tema se relaciona con la resolución de la ecuación cuadrática, la resolución de límites algebraicos, la derivación, la obtención de cónicas, problemas de optimización, cálculo de áreas para resolver problemas de agrimensura o construcción, entre otros temas.

Méndez (2001; como se citó en Méndez, 2012) estudia en su tesis las "dificultades en la práctica de factorización y de las identidades notables" deduciendo que para los estudiantes resulta muy difícil decidir entre muchos procedimientos de factorización, de los cuales aquí solamente nos centraremos en dos. Los estudiantes efectúan procesos mentales y ponen en juego conocimientos matemáticos al factorizar, son dos procesos indisociables, al factorizar un polinomio cuadrático ordenado, el alumno tiene que reconocer (tarea cognitiva) el trinomio y factorizarlo (p. 1398):

1) Factorizar el trinomio cuadrático ordenado de la forma $x^2 + bx + c$, con la tarea que consiste en determinar los números $\alpha \, y \, \beta$ tales que: $\alpha + \beta = b$ y $\alpha \cdot \beta = c$ para formar polinomios irreductibles $(x + \alpha)(x + \beta)$ que factoricen utilizando la fórmula $x^2 + bx + c = \ (x + \alpha)(x + \beta)$ (p. 1399).
2) Factorizar el trinomio cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$, donde la tarea consiste en determinar $\alpha \, y \, \beta$ tales que: $a(\alpha + \beta) = b$ y $a(\alpha \cdot \beta) = c$, para formar polinomios irreductibles $(x + \alpha)(x + \beta)$ que factoricen utilizando la fórmula $ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)(x + \beta)$ (p. 1400).

La factorización es uno de los conceptos que los alumnos no llegan a dominar durante el bachillerato, no solo no logran resolver los ejercicios con éxito sino que tampoco eligen el procedimiento correcto cuando la factorización es parte de la solución de un problema más amplio (Méndez, 2008, p. 59)

Méndez (2012) argumenta en su artículo que "en el marco algebraico existen dificultades persistentes de los alumnos, por lo que se revela insuficiente como único medio de enseñar este tema"(p. 1398), porque al estudiar las dificultades que los estudiantes presentan al factorizar polinomios cuadráticos encuentra que:

> Los estudiantes obtienen respuestas incompletas y/o incorrectas, no se dan cuenta si su respuesta es acertada o no, porque el marco no les permite visualizar la reversibilidad de la operación (p. 1397), copian la estructura de la factorización

> pero no se dan cuenta y no comprenden las operaciones que han llevado a cabo (pp. 1397-1398).

El aportar "intervenciones educativas" que mejoren este tipo de aprendizajes contribuirá a la mejora de las matemáticas en diversos niveles educativos y por ende en la problemática general de la enseñanza que aborda nuestro país.

Conocer el impacto que tendrá la diversificación de las representaciones en el aprendizaje de la factorización de polinomios y especialmente su aplicabilidad aporta información útil para la enseñanza de las matemáticas.

Capítulo 1. Marco teórico

Antecedentes

Concepciones sobre el proceso de enseñanza

La enseñanza de las matemáticas es importante para la sociedad como parte de la cultura. La matemática es un área del conocimiento que tiene el propósito de desarrollar habilidades y destrezas útiles para resolver problemas de la vida cotidiana (Dirección General de Bachillerato (DGB), 2017). Es una preocupación constante del docente vincular la enseñanza, el contenido que imparte a la vida cotidiana de los estudiantes con el propósito de generar un aprendizaje significativo, útil.

La enseñanza es una actividad interactiva, en la cual el docente ayuda a aprender al alumno proporcionando la ayuda pedagógica ajustada a su competencia, es decir, el docente se constituye en un organizador y mediador en el encuentro del alumno con la construcción de su conocimiento (Díaz-Barriga y Hernández, 2005, p. 3-7).

Observaciones empíricas sugieren que en el área de matemáticas el tema de la factorización es uno de los principales obstáculos educativos para los alumnos de álgebra. La factorización, como la mayoría de los temas de matemáticas, es muy compleja ya que implica a la vez el concepto y el procedimiento. Dicho concepto debe ser ligado al contexto, debe resolver un problema, ser útil para que se efectúe el aprendizaje, en esta propuesta la factorización se vinculó principalmente con el problema del área. La investigación didáctica realizada recomienda participar y controlar el diseño de la situación didáctica, así como el control de su ejecución en el aula, la observación y análisis del proceso educativo en torno a la factorización. Organizar la construcción del aprendizaje considerando los diversos factores que influyen en su aprendizaje, además de los disciplinares, tales como motivación, la afectividad entre compañeros, etc., considerar los conocimientos previos y el diagnóstico de los errores y las dificultades para su aprendizaje. Es importante que mientras los estudiantes están re-construyendo el aprendizaje puedan practicar la generalización, que será posible si logran identificar un patrón en sus procedimientos matemáticos. La tarea del docente al planificar la enseñanza de un concepto, como puede ser la factorización, es contextualizarlo de tal manera que el alumno lo perciba como un instrumento que le será útil para resolver un problema. Como ya se mencionó líneas arriba se diseñó la propuesta de tal manera que los alumnos resolvieran problemas de áreas de rectángulos, una vez utilizado y construido el concepto, la herramienta se transforma en la mente del estudiante en objeto, en el saber cultural compartido y ya cuando tenga que emplearlo nuevamente para resolver problemas de factorización vuelve a ser instrumento, se realiza la transferencia, es decir, el aprendizaje significativo se ha realizado, el estudiante sabe que es un conocimiento que tiene disponible, se vuelve competente.

Brousseau y Chevallard (1982 y 1982; citados por Gálvez, 1997, pp. 3-4) mencionan que la tendencia en la enseñanza es estudiar y analizar las condiciones en las que se constituyen los conocimientos para reproducirlos y optimizarlos. En el proceso de la enseñanza es importante que el docente investigador participe y controle el diseño de la situación didáctica, tanto como lo que ocurre en el aula.

Brousseau (1982; citado por Gálvez, 1997, p. 4) define la situación didáctica como el objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas:

> un conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Gálvez (1997, pp 6-8) sostiene que el docente investigador debe generar una situación didáctica en la que el alumno o grupo de alumnos se enfrenten a una situación o problema en la que el conocimiento sea construido como respuesta o adaptación, “el alumno construye así un conocimiento contextualizado”, permitiéndole al maestro mayor comprensión y control de su práctica. Los alumnos deben enfrentarse a una situación problemática mientras que el maestro practicamente no interviene, de esta forma los alumnos se responsabilizan de la organización de su actividad para tratar de resolver el problema propuesto, deben anticipar y luego verificar los resultados de su actividad, lo que implica la toma de múltiples decisiones, se permite que los alumnos intenten resolver el problema varias veces y que deban recurrir a diferentes estrategias para resolver el problema planteado. Para ello, es necesario que los alumnos dispongan al menos de una estrategia (estrategia de base) para que puedan comprender la consigna y comenzar su actividad de búsqueda de solución. De tal forma que al docente le corresponde planear y organizar la situación didáctica, de acuerdo al nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos y sus conocimientos previos, seleccionar y acondicionar el contenido para que los alumnos sean quienes resuelvan y de esta forma construyan su conocimiento, y al momento de su implementación monitorear la necesidad de apoyo de parte de algún alumno o del grupo de alumnos, así como la transición entre los tipos de situaciones didácticas: acción, formulación, validación e institucionalización.

La distinción entre el tipo de contenidos requiere también una distinción en la forma como el docente planea su enseñanza, en el caso del conocimiento conceptual es necesario recurrir a los conocimientos previos de los alumnos y que se establezcan relaciones con el nuevo contenido para lograr su afianzamiento, mientras que para el aprendizaje de procedimientos, aprender cómo, los alumnos requieren una estrategia de base, así como problemas contextualizados de forma que comprendan lo que están haciendo y se responsabilicen de las estrategias que les permitan re-construir este tipo de aprendizaje.

Cantoral *et al* (2005, p. 18) mencionan: nos interesa analizar las ejecuciones de los alumnos ante tareas matemáticas, tanto simples como complejas, para entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos.

Gálvez (1997, p. 5) considera que todo conocimiento es una respuesta, una adaptación que la humanidad ha logrado ante situaciones que ha enfrentado o ante problemas que se ha planteado.

Cantoral *et al* (2005, p. 26) indican que la actividad matemática como toda actividad educativa es sumamente compleja, influyen en la formación de ideas matemáticas de los alumnos muy significativamente diversos factores: la motivación, la afectividad, la imaginación, los aspectos lingüísticos o de representación, además de las restricciones puramente formales.

Cantoral *et al* (2005, p. 7) hablan de la esperanza de que al conocer las prácticas educativas y cómo ocurren los procesos de asimilación de los conceptos y procesos matemáticos la enseñanza favorezca el aprendizaje.

Butto y Rojano (2004, p. 128) proponen que el modelo de enseñanza considere los aspectos cognitivos, el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico) y la creación de situaciones que partan del conocimiento de los alumnos y del conocimiento de sus dificultades de aprendizaje para que propicien el aprendizaje significativo.

Deriard (2018, p. 1097) explica que los conocimientos matemáticos se producen en el ámbito científico bajo el esquema de instrumento-objeto-instrumento, "un concepto es instrumento cuando es utilizado con la idea de resolver un problema, siempre se presenta contextualizado", el objeto es el mismo concepto matemático cuando se concibe como un objeto cultural socialmente reconocido: "el objeto no depende de sus usos, se presenta descontextualizado". Douady (1984; como la cita Deriard, 2018, p. 1097-1098) presenta la propuesta de que en clase se adopte este esquema para el aprendizaje: instrumento-objeto-instrumento. El reto para el docente estriba en que el saber a enseñar es un objeto que debe ser contextualizado para que el alumno "lo descubra" como instrumento, que posteriormente lo transforme en objeto, y finalmente en instrumento para que sea útil en la solución de otros problemas. Es así que para el profesor el esquema del saber es objeto-instrumento-objeto y para los alumnos debe ser instrumento-objeto-instrumento, situación que el docente requiere planificar en la secuencia didáctica y facilitar en la clase de matemáticas.

Concepciones sobre el proceso de aprendizaje

Díaz-Barriga y Hernández (2005, p. 27 y 100-101) sostienen que el aprendizaje es una actividad en la que el alumno construye su conocimiento por la influencia del docente y sus compañeros de grupo, determinada por la comunicación y el contacto interpersonal. El aprendizaje es realmente una actividad de re-construcción y co-construcción de los saberes de una cultura, el cual depende de los conocimientos previos y de la actividad externa y/o interna que el aprendiz realice al respecto.

El diseño de una situación didáctica que favorezca el aprendizaje de la factorización debe considerar el análisis cualitativo y cuantitativo del hecho educativo en el salón de clase, es ahí donde puede observarse la actividad constructiva y detectar errores y obstáculos. Al efectuarse la reconstrucción de conceptos en la resolución de problemas matemáticos, los alumnos están aprendiendo significativamente, es decir, pueden aprender resolviendo problemas y pueden así mismo expresarlo de forma eficiente, de tal manera que pueden extrapolarlo. El aprendizje cooperativo ocurre en un ambiente escolar positivo, en el cual intervienen tanto el docente como los compañeros de grupo, donde los alumnos aprenden más, incrementan su autoestima y desarrollan habilidades sociales efectivas. Apenas un porcentaje de alumnos mayor a un 10% posee el nivel de pensamiento formal según López Rupérez *et al* (1986, como los citan Aguilar, Navarro, López y Alcalde, 2002, p. 382) necesario para la resolución de problemas, por lo cual es de esperarse que la mayoría de los alumnos de primer semestre (en el cual se cursa álgebra) tengan dificultades de resolución, no solo en el tema de factorización, sino en la mayoría de los temas de matemáticas. Corresponde pues al docente el diseño de una secuencia que considere un alto porcentaje de pensamiento concreto en los alumnos, en este caso, la manipulación de rectángulos, la visualización numérica del proceso. Propiciar el trabajo en equipo y en grupo facilita el proceso de comunicación, un aspecto determinante en el aprendizaje de la factorización. La resolución de problemas matemáticos requiere la comprensión del problema, el uso de la capacidad lingüística para el intercambio de ideas, la interpretación y transformación de una forma de representación a otra, expresar el resultado, así como la habilidad para argumentar sobre la validez de los resultados de acuerdo al contexto. Situación que puede favorecerse si los estudiantes pueden visualizar y manipular objetos, diversificando así las formas de representación para evitar la dependencia de lo algebraico y/o numérico. De tal manera que entonces, en la secuencia didáctica se propuso gran parte de aprendizaje cooperativo.

Según Díaz-Barriga y Hernández (2005, pp. 52-54) demuestran que el aprendizaje de los diversos tipos de contenidos tiene distintas implicaciones pedagógicas, en el caso de los contenidos declarativos cuando se trata de conocimiento conceptual como conceptos, principios y explicaciones se requiere la abstracción de su significado esencial o la identificación de sus características y reglas; en el caso de los contenidos procedimentales, es necesaria la realización de un conjunto de acciones ordenadas y dirigidas hacia conseguir la meta propuesta, que para el caso de matemáticas consiste en resolver el problema.

Cantoral *et al* (2005, p. 35) argumentan que el salón de clases resulta ser la principal fuente para detectar dificultades y errores en el aprendizaje, conocer cómo funciona la apropiación de conceptos permite establecer acciones de mejora que auxilien a los alumnos en su aprendizje.

Cantoral *et al* (2005, p. 35) infieren que la reconstrucción de los conceptos como respuesta para resolver los problemas funciona para establecer un aprendizaje significativo en los alumnos, descubrir, proponer y crear formas de resolver los problemas facilita la apropiación de un concepto.

Cantoral *et al* (2005, p. 37) deducen que la cooperación entre alumnos, el compartir tanto su experiencia como sus resultados, les permite desarrollar conocimientos y estrategias que los prepararán ante situaciones más complejas, fomenta una visión ampliada de los tratamientos.

Mason y Ursini (1985 y 1993; citados por Butto y Rojano, 2004, p. 129-130) argüyen que para comprender y utilizar adecuadamente el lenguaje algebraico el alumno requiere practicar la generalización: percibir, expresar, comunicar y probar un patrón es fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico, es decir, hacia la abstracción matemática.

La factorización de polinomios es uno de los temas matemáticos que representan mayores dificultades para los alumnos, es deseable conocer cuáles son los obstáculos que dificultan su aprendizaje para actuar en ese sentido. Aguilar, Navarro, López y Alcalde (2002) realizaron una investigación sobre "*pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos*" en adolescentes con edad promedio de 16 años y 3 meses cuya extracción socioeconómica fue de tipo medio y medio-bajo con el objetivo de "observar la relación existente entre los niveles de pensamiento formal y el rendimiento en resolución de problemas… y conocer si existen diferencias en los niveles de resolución de problemas matemáticos en función del nivel de pensamiento formal" (p. 383) y encontraron que

> existe relación entre la habilidad de razonamiento formal y el nivel de ejecución en problemas matemáticos… disponer del pensamiento formal es posible que mejore la resolución de problemas matemáticos. Un pensamiento formal alto supone mayor control sobre la planificación de tareas, de ahí que los problemas matemáticos que ponen en juego esta capacidad sean resueltos por los participantes con mejor razonamiento formal (p. 385).

López Rupérez *et al* (1986, como los citan Aguilar, Navarro, López y Alcalde, 2002, p. 382) mencionan que solo el 11% de los alumnos de bachillerato alcanzan niveles adecuados de pensamiento formal y que el máximo porcentaje se da en tercer año con el 50% de los alumnos.

La comunicación es importante en la resolución de problemas matemáticos: en la comprensión del problema a resolver, en el intercambio de ideas durante el proceso de solución y en el informe e interpretación de resultados. Peralta (2005, pp. 155-160) estudió la aplicación de habilidades de comprensión del lenguaje para resolver problemas algebraicos y encontró que la mayoría de los estudiantes son incapaces de identificar en la expresión verbal la relación entre los objetos y sus atributos, es decir, se tiene incapacidad lingüística para reconocer el sujeto en una oración para establecer las relaciones (conexiones) sin ambigüedades de manera que la simbolización permita operar matemáticamente para encontrar la solución. Que si el estudiante reconoce todas las formas y relaciones posibles entre dichos objetos y puede decirlas en todas las maneras posibles en que es posible enunciarlas es porque ha comprendido el problema y puede resolverlo. De tal forma que es aún más difícil que tengan la habilidad para argumentar.

Cantoral *et al* (2005, p. 37-39) relacionan la falta de habilidad lingüística de los alumnos con la descontextualización del problema matemático a resolver, las dificultades de comunicación entre los docentes y alumnos acerca del problema a resolver pueden suavizarse al vincular el álgebra con otros marcos como el numérico, gráfico e icónico. Para los estudiantes es difícil el tratamiento y la interpretación de los enunciados verbales y escritos, no consiguen encontrar la relación entre las variables, pero se les facilita explorar posibles soluciones si el problema esta contextualizado. El conocimiento matemático en forma abstracta inhibe el aprendizaje, se privilegia el marco algebraico o el numérico, por lo que "resulta conveniente utilizar más la visualización en las clases de matemáticas con el fin de favorecer diversas formas de representación, tanto de conceptos como de procesos y favorecer de este modo el que se exploren otros tipos de argumentación".

Butto y Rojano (2004, p. 125) coinciden en que en la comunicación que se establece entre los sujetos de diversos grados de competencia que participan en las actividades propuestas se conectan y negocian significados matemáticos, se forman y decodifican los textos, así el papel del lenguaje es importante en el proceso de aprendizaje.

Concepciones sobre el proceso de apropiación de procedimientos y nociones matemáticas

Méndez (2012) expone en su artículo una experiencia de enseñanza-aprendizaje realizada con la participación de 16 estudiantes de primer año de pedagogía general básica de la Universidad Católica del Maule, el cual tiene por título: "Marco figural como medio para factorizar polinomios cuadráticos", donde el marco figural "se vuelve una herramienta para resolver el problema…produciendo efectos favorables para el aprendizaje y comprensión de este problema" (p. 1407). Por lo cual propone elaborar un marco figural como herramienta didáctica

> que le permita al estudiante solucionar los problemas de factorización (p. 1403)… y comprender el mecanismo algebraico (p. 1403). La representación del polinomio en el marco figural en rectángulo permite identificar el producto de sus dimensiones con la factorización buscada, la comprobación se da en el marco figural y/o algebraico (p. 1408)… permite a los alumnos tener estrategias de base para enfrentar los problemas (p. 1409)… y ensayar y elegir entre diversos procedimientos (p. 1409)… el marco figural permite decidir si el polinomio es factorizable o no (p. 1410) si es rectangularizable se puede factorizar y si no es así no (Méndez, 2012).

La factorización es un concepto matemático que puede estudiarse desde distintas perspectivas: algebraica, geométrica, numérica, gráfica. Cuando se habla de marco figural se refiere a estudiar la factorización desde su perspectiva geométrica, de manera que facilite el aprendizaje de la factorización porque se emplean figuras, ya sea que se manipulen y/o visualicen para relacionar la expresión algebraica con los objetos concretos. Es necesario porque el aprendizaje de la factorización solo desde la perspectiva algebraica resulta ser poco efectivo, los estudiantes en el bachillerato se encuentran apenas en proceso de desarrollar su pensamiento abstracto, su comprensión lingüística es limitada, lo que dificulta el manejo verbal y escrito de los problemas que requieren la factorización para ser resueltos, no les es fácil traducir un enunciado a la expresión algebraica y resolverlo, requieren relacionar lo concreto de las figuras con lo abstracto de la expresión algebraica para entender el mecanismo de la factorización. Al plantear un problema sobre el área de un terreno, en el enunciado se mencionan las condiciones, para el estudiante es difícil transferir la información que lee a una expresión algebraica y resolverla porque no la comprende totalmente, pero construir un rectángulo y hacer que el producto de sus dimensiones cumpla con las condiciones del problema le facilita encontrar las respuestas buscadas, así, cuando hace uso del concepto de factorización para resolver el problema lo está empleando como herramienta, un instrumento que le ayuda a transitar de lo geométrico a lo algebraico y viceversa. De esta forma adquiere una estrategia para utilizar el concepto de la factorización. Cuando el estudiante está resolviendo un problema de área el aprendizaje está contextualizado porque lo está aplicando a resolver esa situación concreta, cuando el estudiante es consciente de la estrategia que siguió para resolver el problema, puede expresarla por escrito o verbalmente, si es necesario, en ese momento la factorización se convierte en concepto (está descontextualizado, el concepto de la factorización está separado, ya no está vinculado a una situación particular del contexto), vuelve a convertirse en instrumento cuando puede utilizarlo nuevamente para resolver otro problema de su entorno, es decir, contextualizado. La situación didáctica lo conduce a saber hacer, cuando lo resuelve, a saber analizar-pensar cuando lo descontextualiza y a saber profundizar cuando se vuelve una estrategia que puede emplear en condiciones semejantes.

Douady (2009) estudia la forma en que pueden adquirirse los conocimientos matemáticos en situación de clase, su aportación es poder construir aprendizaje en clase con resultados previsibles o por lo menos, probables, y cuyas condiciones sean reproducibles. "Un concepto matemático toma sentido por su carácter de instrumento, es decir, funciona científicamente en los problemas que permite resolver"(p. 4). Propone el juego de marcos: "explotar el hecho de que la mayoría de los conceptos puede intervenir en distintos dominios, diversos marcos: físico, geométrico, numérico, gráfico, u otros" (p. 7). Afirma que podemos estudiar un mismo concepto en diferentes marcos, porque para los alumnos

> los conceptos funcionan de manera parcial y diferente según los marcos (p. 7)… para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos elegimos problemas donde los conceptos intervienen en dos marcos como mínimo (p.7)… es así como la intradisciplina puede accionar eficazmente [el aprendizaje](p. 7)… la acción es eficaz si el alumno tiene un control sobre los efectos producidos" (p. 9).

Para Douady (1986; citada por Cantoral *et al,* 2005 p. 26-27) saber matemáticas requiere dos aspectos: tener la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos como herramientas para enfrentar problemas contextualizados e identificar las mismas nociones y teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente para formular definiciones, establecer relaciones entre nociones mediante teoremas y probando las conjeturas, de esta manera adquieren el estatus de objeto. El aprendizaje ocurre cuando las nociones y teoremas se convierten en objetos, la descontextualización y la despersonalización facilitan el proceso.

Al respecto Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) afirman que: "en el aprendizaje de una noción matemática, o en la resolución de un problema, el hecho de cambiar de marco en el que se afronta dicho problema permite desbloquear los procesos de comprensión y, en muchos casos, generalizar una noción, un procedimiento o un significado matemático" (p. 128). Cantoral *et al* (2005, p. 150) dicen que el conocimiento matemático está garantizado si el alumno reconoce el mismo objeto en por lo menos dos representaciones.

En la siguiente imagen se puede ver la factorización del trinomio $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$. El alumno puede reconocer la representación algebraica y la representación geométrica.

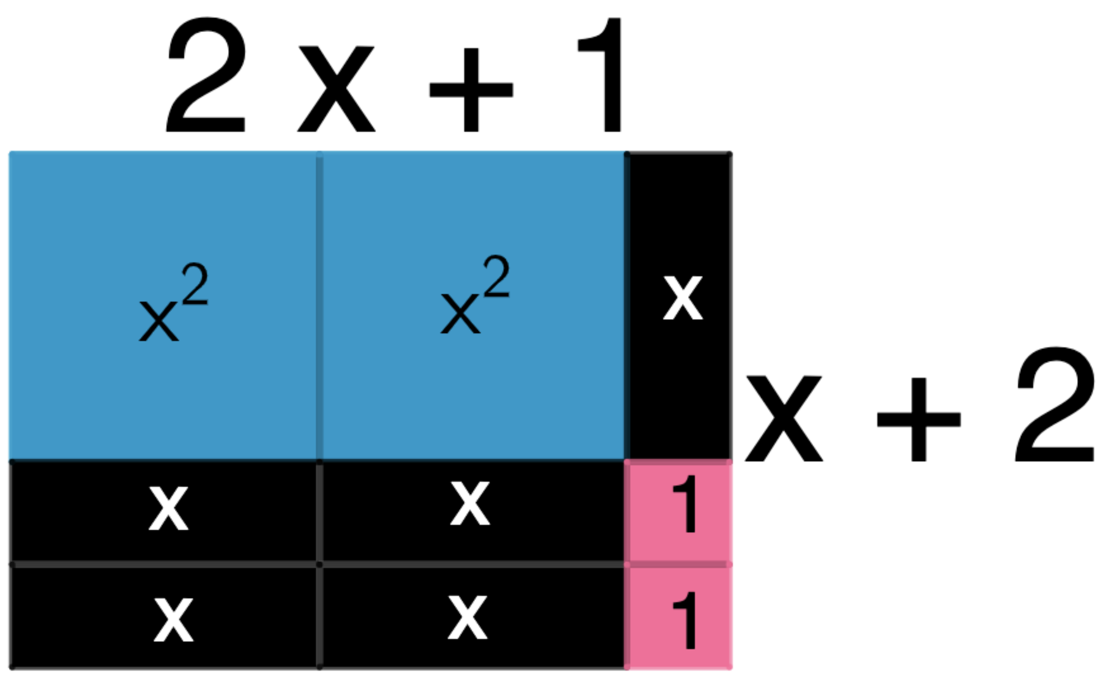


Ilustración 1 La factorización de un trinomio: $2x^2+5x+2$.

Fuente: Ospina, 2015, p. 53

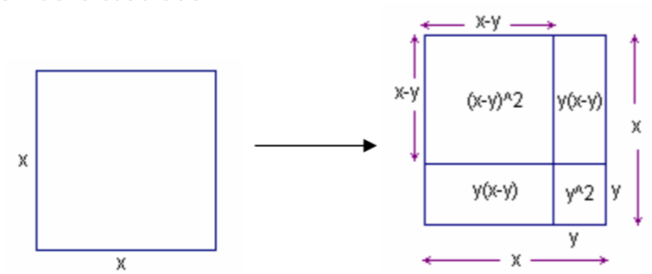
López (2008) diseña como tesis de maestría una propuesta didáctica sobre la enseñanza de las matemáticas, en la que uno de los temas es la factorización (otro es el de los productos notables), su población de estudio consiste en 25 alumnos de primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Azcapotzalco, para lo cual elabora una secuencia didáctica a la que ella nombra como "material didáctico" en la que emplea el cálculo del área de cuadrados y rectángulos para definir el resultado de productos notables tales como binomio al cuadrado $(a+b)^2\ o\ (a-b)^2$ y binomios conjugados $(a+b)(a-b)$ y para el caso de la factorización desarrolla actividades para factorizar por factor común y la factorización de trinomios por el método de factorización algebraica, el método de competar el trinomio cuadrado perfecto y el método de la fórmula general (anexo 2 de su tesis, p. 74-127). Describe como características de contenido de su "material didáctico" que los conceptos son claros, actividades interesantes y flexibles que permitirán un aprendizaje agradable y significativo para construir y reafirmar los conceptos (p. 15). Es importante aprovechar el interés de los alumnos en cuanto al aprendizaje de temas matemáticos cuando se interconectan el álgebra y la geometría:

> con respecto a las actividades de enseñanza-aprendizaje, en el tema de productos notables… este fue uno de los que más les gustó a los alumnos… una vinculación entre el álgebra y la geometría, ya que por lo general solo se enseña el procedimiento algebraico y no se complementa su enseñanza con una representación geométrica… ejercicios en los cuales aparte de dar una solución algebraica, permita al alumno visualizar el problema a través de algunas figuras geométricas… con los resultados obtenidos se observó que esto ayuda a los alumnos a comprender mejor las reglas de los productos notables (López, 2008, p. 64).

En cuanto al uso de material didáctico, según López (2008): "haber aplicado el material didáctico ayudó a los alumnos a que tuvieran mejor comprensión en los temas… el nivel de conocimiento, el nivel algorítmico y el nivel de comprensión fueron significativamente mayores después de haber trabajado con el material didáctico" (p. 65). La autora evaluó en su tesis "Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, una propuesta didáctica para el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades" la aplicación de actividades sobre factorización que relacionan los ámbitos algebraico y geométrico obteniendo resultados positivos, lo que es rescatable y apoya mi intención de probar la efectividad de una secuencia didáctica semejante con mis alumnos. Los siguientes son ejemplos del material didáctico (p. 83 y 94):

Actividad 9

Considera un cuadrado de lado x, el cual se disminuye en y unidades. Encuentra el área del nuevo cuadrado.



El nuevo cuadrado tiene de lado: $(x-y)$

Por lo tanto: $(x-y)^2 = (x-y)(x-y)$

Se aplica propiedad distributiva

$$= x(x-y) - y(x-y)$$

$$= x^2 - xy - yx + y^2$$

Se agrupan términos semejantes

$$= x^2 - 2xy + y^2$$

El área del nuevo cuadrado es: $x^2 - 2xy + y^2$

Generalizando

En general al multiplicar un binomio de la forma $a-b$ por si mismo se obtiene:
El cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término:

Y se simboliza así: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ilustración 2 Ejemplo de material didáctico.

Ejemplo1: Factoriza $2x^2 - 7x - 15$
Solución:

- Encuentra el producto ac: $a = 2$ y $c = -15$ por lo que $ac =$ ________
- Encuentra dos enteros cuyo producto sea -30 y cuya suma sea -7 ¿qué signos deben tener los números buscados? ________________________

Factores	Suma

- Los números buscados son: ______ y ______
- Utilizalos apropiadamente para escribir el término intermedio

$$2x^2 - 7x - 15$$
$$2x^2 + 3x - 10x - 15$$

- Se agrupan los términos en pares
  $(2x^2 + 3x) + (-10x - 15)$
- Se factoriza cada par
  $x(2x + 3) - 5(2x + 3)$
- Observa que $(2x + 3)$ es el MFC
  $(2x + 3)(x - 5)$

Por lo tanto: $2x^2 - 7x - 15 = (2x + 3)(x - 5)$

Ilustración 3 Ejemplo de material didáctico.

Stewart (2007) sobre lo abstracto y lo concreto del álgebra relata

> antes de 1800, los principales objetos de estudio matemático eran relativamente concretos: números, triángulos, esferas. El álgebra utilizaba fórmulas para representar manipulaciones con números, pero las propias fórmulas se veían como representaciones simbólicas de procesos, no como cosas en sí mismas. Pero hacia 1900 fórmulas y transformaciones se veían como cosas, no como procesos y los objetos del álgebra eran mucho más abstractos y más generales (p. 185).

Resignificando la reversibilidad de la factorización

Metodología tomada de Méndez (2012, pp. 1403-1412); Soto, Mosquera y Gómez (2005, pp. 84-86 y 91-93) y Rodríguez (2018, pp. 46-50, 79 y 86-96).

Emplearemos figuras rectangulares para representar geoméricamente diversos polinomios cuadráticos con coeficientes enteros y hacer posible la factorización cuya regla es que las fichas contiguas coincidan en la dimensión de sus lados en común, si existen o por sus vértices si no existen. Es posible tanto para polinomios cuadráticos con una sola varible como polinomios cuadráticos con dos variables con términos positivos y negativos de las formas: $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$.

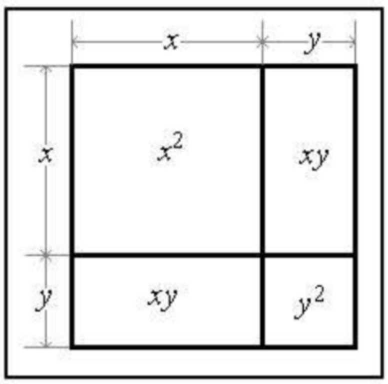


Ilustración 4 Representación geométrica de un polinomio cuadrático de la forma x^2+bx+c.

Fuente: Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 85

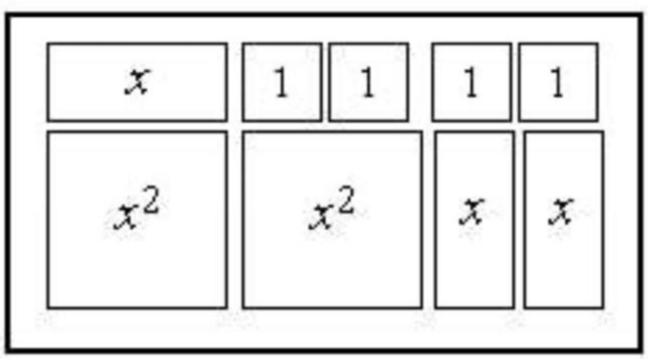


Ilustración 5 Representación geométrica de un trinomio cuadrático de la forma ax^2+bx+c.

Fuente: Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 85

Los rectángulos básicos se denotan como x^2, x y 1, geometricamente pueden verse en la ilustración 6 y son el resultado del producto de sus dimensiones: x por x, x por 1 y 1 por 1, respectivamente.

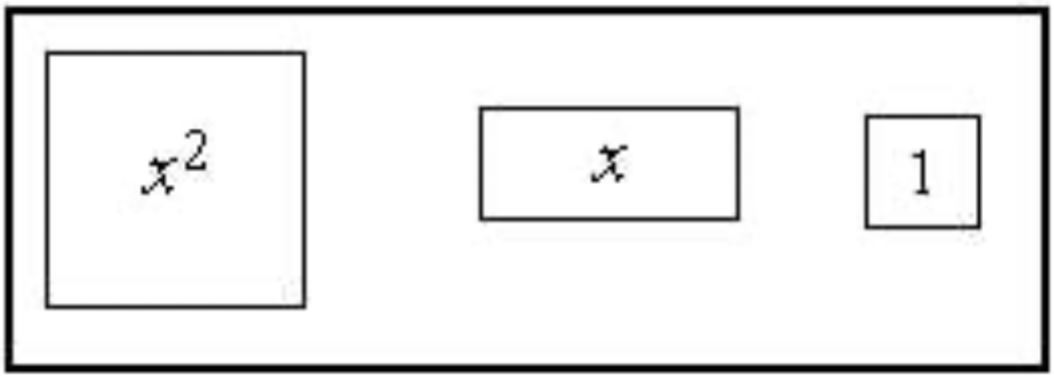


Ilustración 6 Rectángulos básicos para representar polinomios.

Fuente: Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 84

Para representar polinomios con coeficientes negativos es necesario el uso del plano cartesiano, los rectángulos que se ubiquen en el primer y tercer cuadrante se consideran positivos y los que se ubiquen en el segundo y cuarto cuadrante tendrán coeficientes negativos.

Un polinomio cuadrático factorizable es aquel que forma un rectángulo porque las medidas de sus dimensiones son los factores del polinomio, un ejemplo es el de la siguiente ilustración con coeficientes positivos donde claramente se pueden observar sus factores.

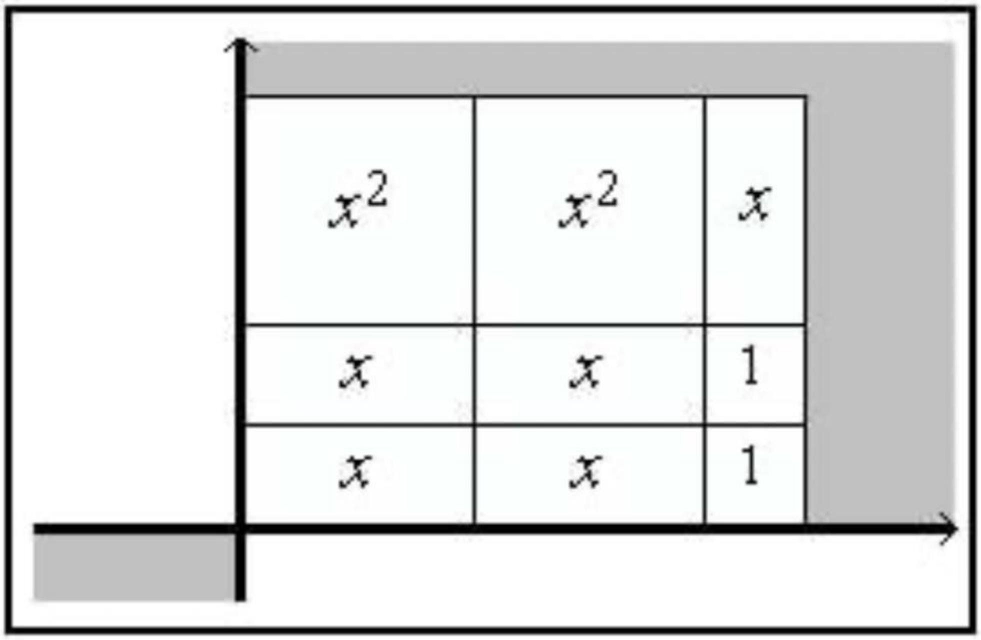


Ilustración 7 Polinomio cuadrático factorizable rectangularizado.

Fuente: Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 89

$$2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$$

Un rectángulo formado por las mismas fichas corresponde a diferentes polinomios de acuerdo a su ubicación:

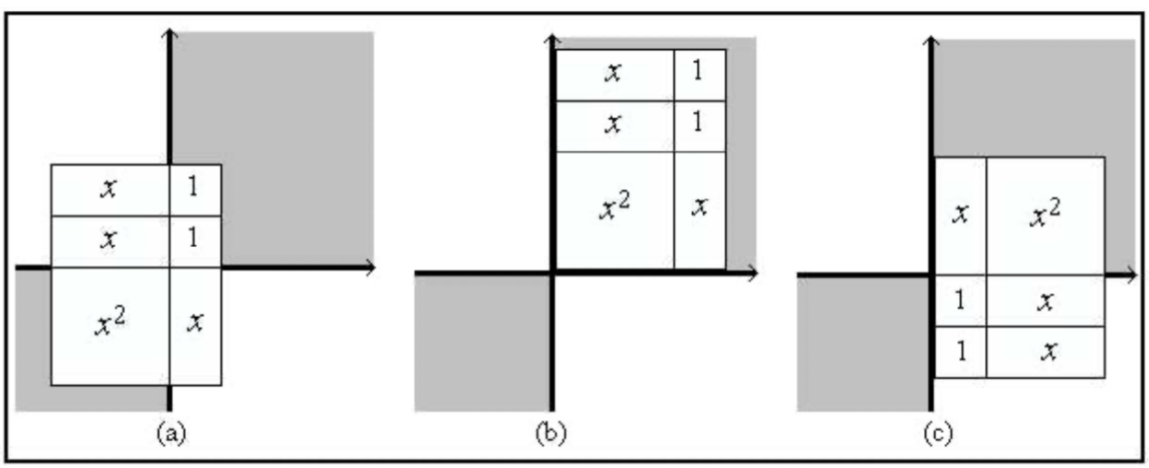


Ilustración 8 Diferentes polinomios obtenidos con las mismas fichas, la diferencia depende de la ubicación.

Fuente: Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 91

$$a) - x^2 - 3x + 2 = (-x + 1)(-x + 2)$$
$$b)\ x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$
$$c)\ x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

Suma algebraica igual a cero. En el inciso c) de la ilustración 8 se observan dos rectángulos de área x que se eliminan entre sí al estar en cuadrantes con distinto signo, esto equivale algebraicamente a cero (en total hay tres rectángulos con área x, al hacer la simplificación de terminos semejantes, en el polinomio solo se expresa uno de los rectángulos que para este caso tiene coeficiente negativo). Estas sumas algebraicas iguales a cero son útiles para completar el rectángulo de algunos polinomios y de esta forma obtener los factores, es decir, posibilitan la factorización por rectangularización.

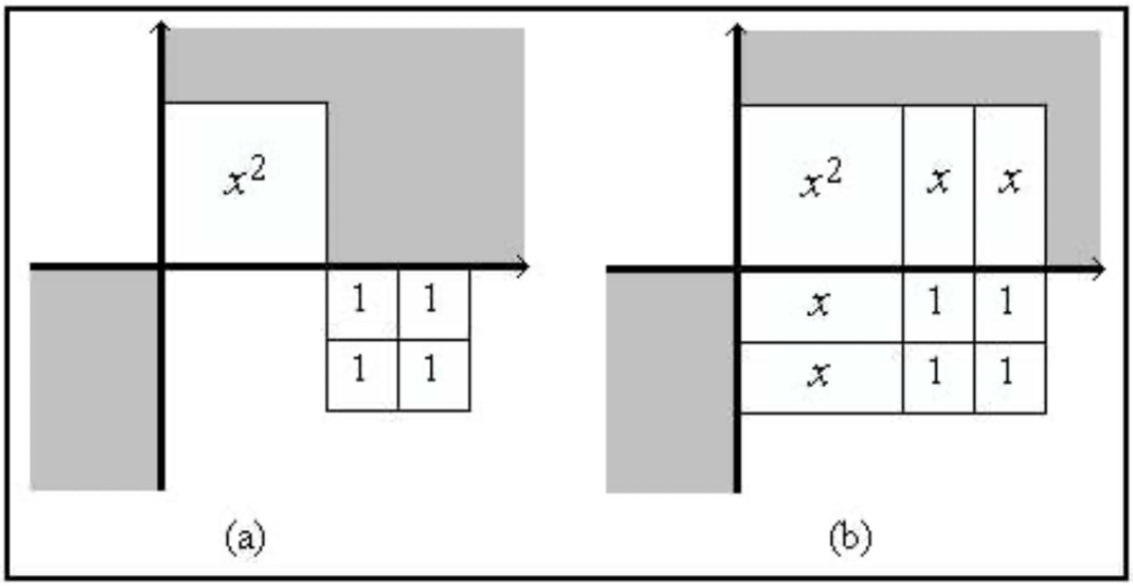


Ilustración 9 (a) Encuadre minimal de un polinomio, (b) Rectangularización de un polinomio a partir del encuadre minimal, agregándole parejas de fichas cuya suma algebraica es cero (de acuerdo a su posición en el plano).

Fuente: Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 92

Un **encuadre minimal** es la representación del polinomio en el plano cartesiano, a partir del cual es posible completar el rectángulo agregando la mínima cantidad de parejas de fichas que algebraicamente sumen cero. Es el caso de la ilustración anterior, cuyo inciso a) representa al polinomio $x^2 - 4$.

En el inciso b) se han agregado cuatro fichas con área x, dos en un cuadrante positivo y dos en un cuadrante negativo, de tal manera que al hacer la lectura de las dimensiones del rectángulo obtenemos los factores del polinomio, lo cual puede verificarse efectuando la multiplicación: $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2x + 2x - 4 = x^2 - 4$.

Hay casos en los que no es posible la factorización, se denominan **polinomios irreductibles**, tal como $x^2 + 2$, es decir, no existen polinomios tales que su producto sea $x^2 + 2$, esto se aprecia en la siguiente ilustración. En este caso se dice que el polinomio no es rectangularizable por lo cual no es factorizable. El cuadrado grande en color obscuro representa a x^2 puesto que sus dimensiones miden x, los cuadrados pequeños en color obscuro representan los 2 enteros al medir 1, por cada lado. Los rectángulos con líneas transversales representan el intento por rectangularizar el polinomio en su conjunto, pero se observa que son insuficientes ya que deben agregarse en parejas para que la suma algebraica sea cero, claramente queda el espacio para un nuevo rectángulo con líneas transversales pero es solo uno por lo cual finalmente aceptamos que no es posible rectangularizar este polinomio. Las dimensiones de los rectángulos son $x \; por \; 1$. Al no formarse un rectángulo con el polinomio este no es factorizable, porque los factores debieran ser las dimensiones del rectángulo que no se logró formar. El polinomio $x^2 + 2$ está representado por los cuadrados en color obscuro.

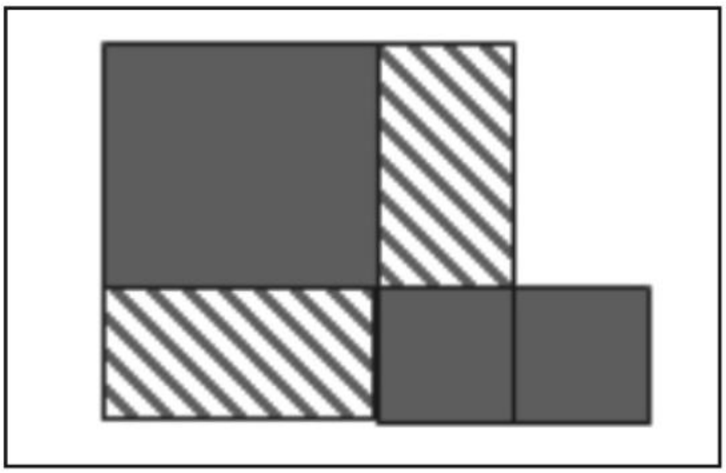


Ilustración 10 Polinomio irreductible, polinomio no factorizable.

Fuente: Méndez, 2012, p. 1410

Entonces, resumiendo, factorizar geometricamente un polinomio cuadrático consiste en construir una figura rectángular, con las fichas básicas, tal que el producto de sus dimensiones, largo y ancho, es su factorización.

Representación geométrica de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto

$\mathbf{9a^2 + 12ab + 4b^2}$ $\quad\quad$ $\mathbf{(3a + 2b)(3a + 2b) =}$

$$\mathbf{9a^2 + 6ab + 6ab + 4b^2}$$

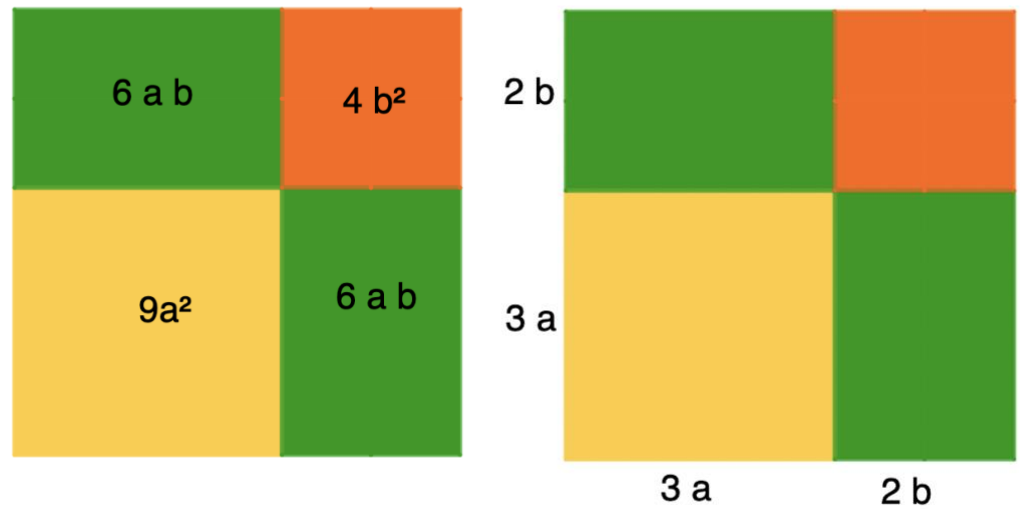


Ilustración 11 Representación geométrica de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

Fuente: Arriaga, Benítez y Ramírez, 2009, p. 112

Representación geométrica de la factorización de un trinomio de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c}$

$6x^2 + 26x + 8$ $\quad\quad$ $(6x + 2)(x + 4) =$

$$6x^2 + 24x + 2x + 8$$

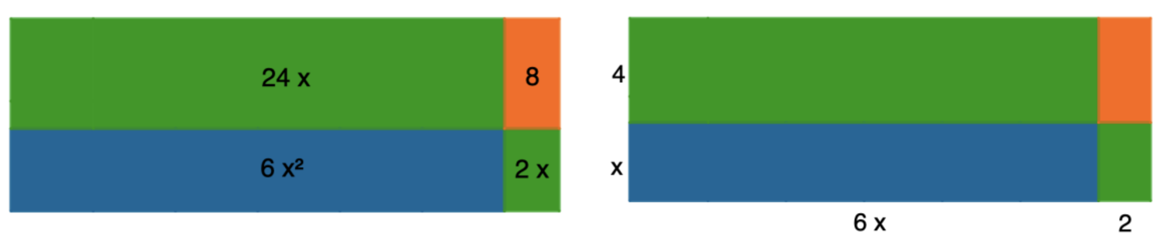


Ilustración 12 Representación geométrica de la factorización de un trinomio de la forma ax^2+bx+c.

Fuente: Ruíz, 2013, p. 93, (el trinomio, la representación geométrica es creación propia).

El caso de los términos negativos.

Para representar polinomios con coeficientes negativos es necesario el uso del plano cartesiano, los rectángulos que se ubiquen en el primer y tercer cuadrante se consideran positivos y los que se ubiquen en el segundo y cuarto cuadrante tendrán coeficientes negativos.

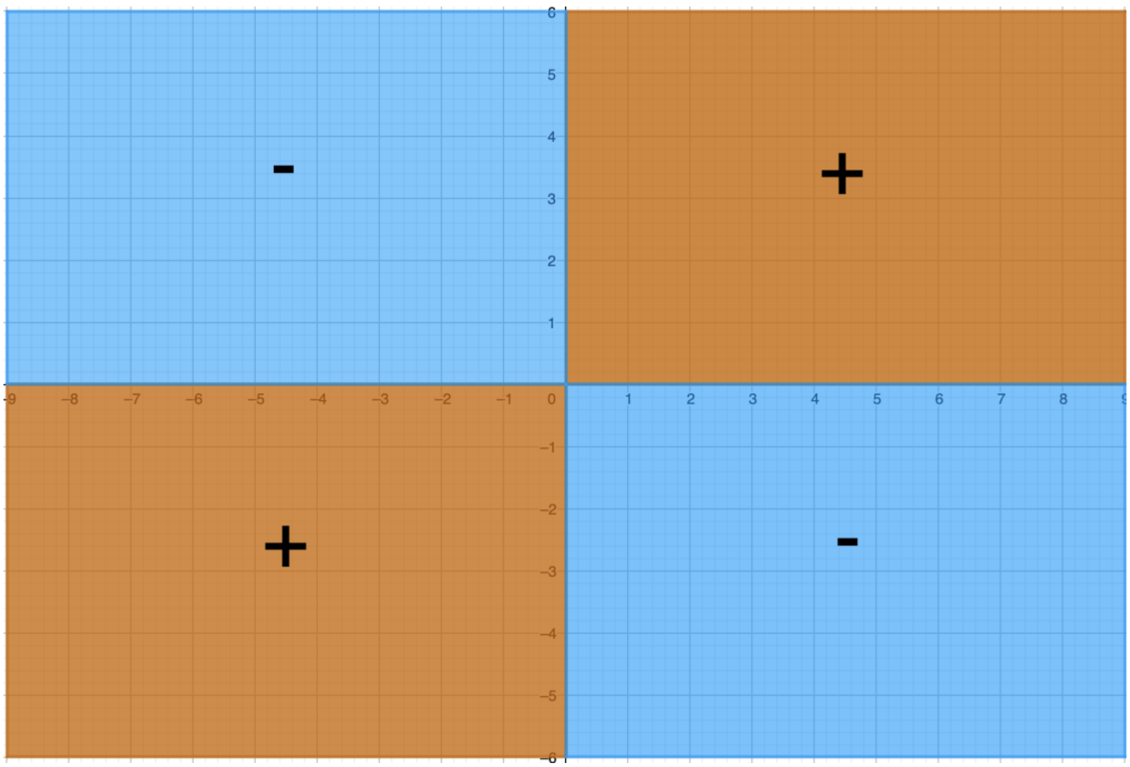


Ilustración 13Plano cartesiano adaptado para el caso de los términos negativos.

Fuente: Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 84

Representación geométrica de la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con términos negativos

$$1.\, 9k^2 + 18k - 16$$

$9k^2 + 24k - 6k - 16$ $\qquad$ $(3k - 2)(3k + 8)$

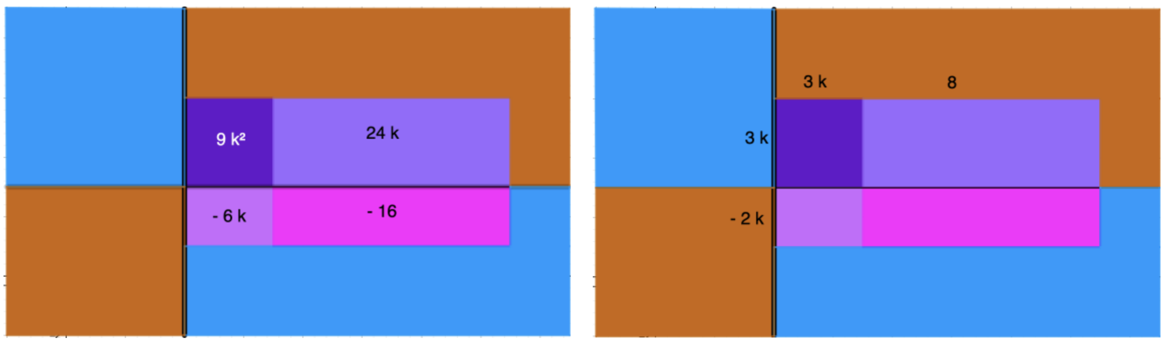


Ilustración 14 Representación geométrica de la factorización del trinomio 9k²+18k-16.

Fuente: Ibáñez, 2018, p. 195 (el trinomio, la representación geométrica es creación propia).

$$2.\, 49 - 42w + 9w^2$$

$49 - 21w - 21w + 9$ $\qquad$ $(7 - 3w)(7 - 3w)$

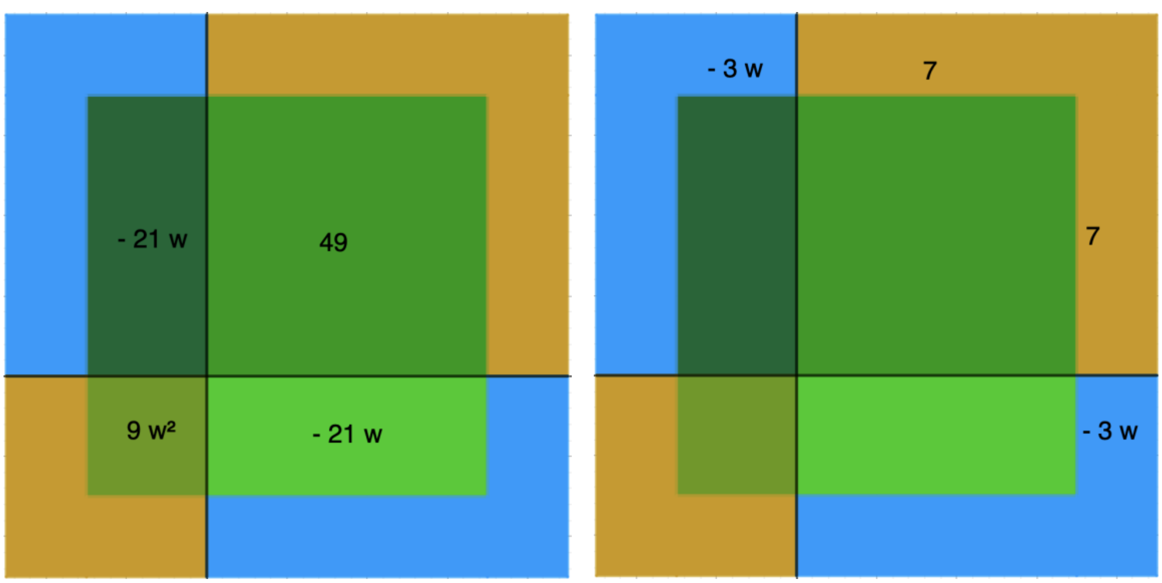


Ilustración 15 Representación geométrica de la factorización del trinomio 49-42w+9w².

Fuente: Ibáñez, 2018, p. 191 (el trinomio, la representación geométrica es creación propia).

$$3. \, 15j^2 - 19j - 10$$

$15j^2 - 25j + 6j - 10$ $\quad$ $(5j + 2)(3j - 5)$

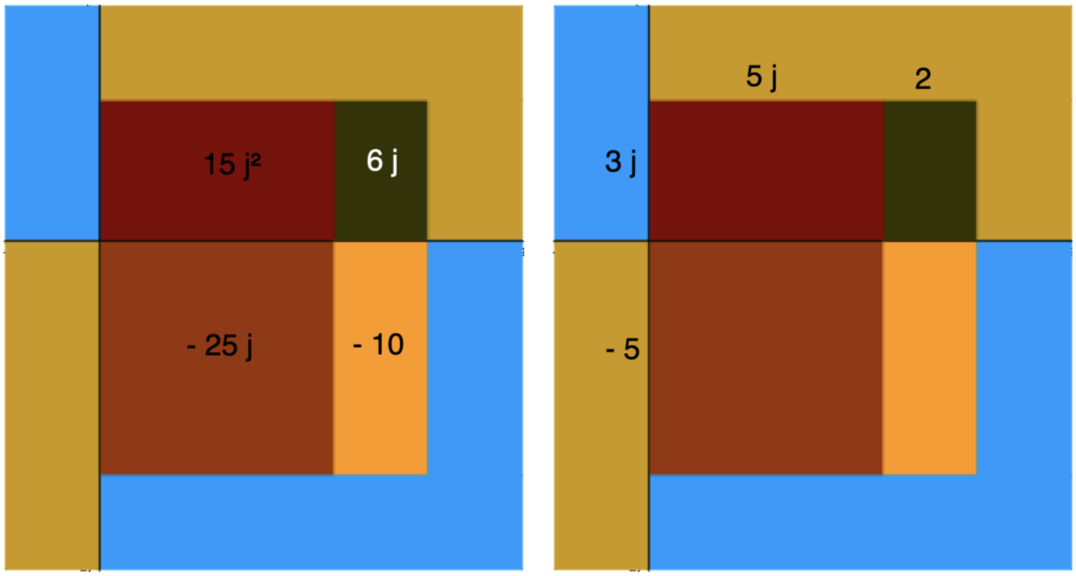


Ilustración 16 Representación geométrica del trinomio $15j^2$-19j-10.

Fuente: Ibáñez, 2018, p. 195 (el trinomio, la representación geométrica es creación propia).

$$4. \, -40n^2 + 23n - 3$$

$-40n^2 + 15n + 8n - 3$ $\quad$ $(-5n + 1)(8n - 3)$

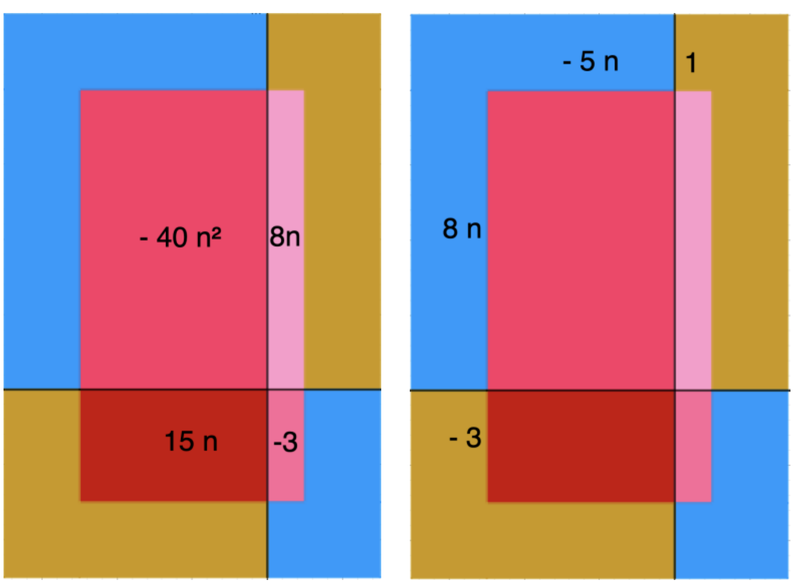


Ilustración 17 Representación geométrica del trinomio -40n^2+23n-3.

Fuente: Ibáñez, 2018, p. 195 (el trinomio, la representación geométrica es creación propia).

$$5.\,3a^2 - 4a - 15$$

$3a^2 - 9a + 5a - 15$ $\quad\quad\quad\quad$ $(3a + 5)(a - 3)$

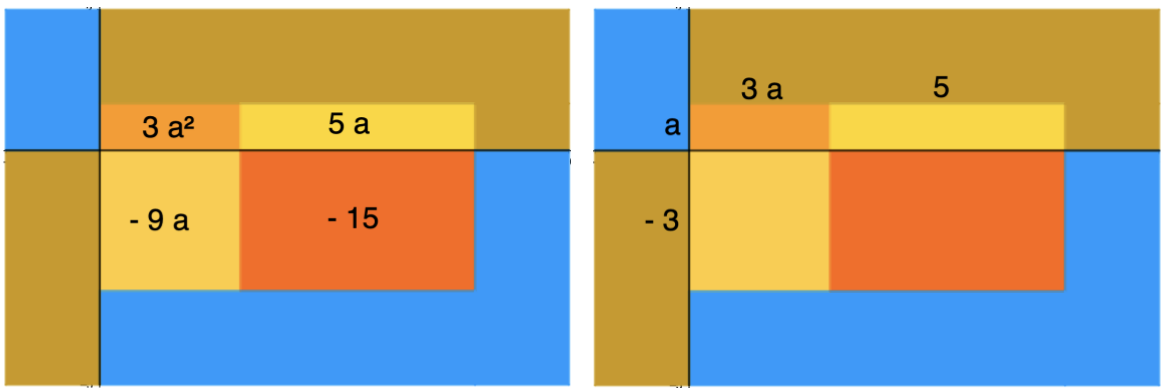


Ilustración 18 Representación geométrica del trinomio 3a²-4a-15.

Fuente: Ibáñez, 2018, p. 195 (el trinomio, la representación geométrica es creación propia)

Capítulo 2. Marco referencial

Las intervenciones educativas de factorización de polinomios se realizaron con alumnos de primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas (Cobaez) plantel Los Campos en el semestre 2020-B. La intención es facilitar el aprendizaje de la factorización puesto que es uno de los temas que representan mayores dificultades para los estudiantes en la materia de álgebra. Matemáticas es el área con mayor índice de reprobación en el Cobaez Los Campos, acentuándose esta problemática en álgebra. En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de reprobación en el área de matemáticas en el Cobaez Los Campos de los últimos años:

Semestre	Porcentaje de reprobación
2015-B	20%
2016-B	27.08%
2017-B	16.21%
2018-B	25.8%
2019-B	25%

Tabla 1Porcentaje de reprobación en el área de matemáticas en el Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas plantel Los Campos.

Fuente: Elaboración propia

La literatura revisada propone el empleo de rectángulos como una de las estrategias didácticas para facilitar el aprendizaje de la factorización. En la secuencia didáctica se consideran una serie de conceptos y aspectos didácticos que contribuyen a mejorar la enseñanza. La propuesta es diversificar las representaciones del concepto de la factorización porque cotidianamente en el salón de clases solo se trabaja desde la perspectiva algebraica, lo cual es ineficiente para los estudiantes y se refleja en su incapacidad para resolver problemas, es necesario que perciban la utilidad de las matemáticas, que les sea satisfactorio aprender a utilizarlas como un recurso, que desarrollen su pensamiento matemático.

Sistema de Bachillerato General

En 1973 se emite el decreto de creación del Colegio de Bachilleres con una duración de estudios de tres años para ofrecer una formación general a los egresados de secundaria, con una doble función: de carácter propedéutico, a fin de prepararlos para continuar con estudios superiores y de ciclo terminal, con el objetivo de capacitarlos para incorporarse a actividades socialmente productivas, es decir, para el trabajo (Dirección General de Bachillerato, DGB, 2018).

Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas

Los objetivos del Sistema de Bachillerato General son tres (DGB, 2018):

Ofrecer una cultura básica: ciencia, humanidades y técnica para la construcción de nuevos conocimientos.

Proporcionar conocimientos, métodos, técnicas y los lenguajes necesarios para ingresar a la educación superior y desempeñarse exitosamente.

Desarrollar habilidades y actitudes esenciales para la realización de una actividad productiva socialmente útil.

En el plan de estudios se considera:

Misión. Proporcionar educación de buena calidad en el bachillerato general, que permita a los estudiantes su desarrollo y participación en las sociedades de su tiempo (DGB, 2018).

Perfil de egreso en cuanto al pensamiento matemático. Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos (DGB, 2018).

Las competencias del Marco Curricular Común son:

Las competencias genéricas. Permiten a los bachilleres comprender el mundo e influir en él; les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean (DGB, 2018)

Las competencias disciplinares básicas. Son las nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que se consideran los mínimos necesarios para cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida (DGB, 2018).

El mapa curricular

CAMPO DE CONOCIMIENTO	SEMESTRE	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	CUARTO	QUINTO	SEXTO
	Matemáticas	Matemáticas I	Matemáticas II	Matemáticas III	Matemáticas IV		
	Ciencias Experimentales	Química I	Química II	Biología I	Biología II	Geografía	Ecología y Medio Ambiente
				Física I	Física II		
	Ciencias Sociales	**Metodología de la Investigación**	**Introducción a las Ciencias Sociales**	**Historia de México I**	**Historia de México II**	**Estructura Socioeconómica de México**	**Historia Universal Contemporánea**
	Humanidades	**Ética I**	**Ética II**	Literatura I	Literatura II		Filosofía
	Comunicación	**Inglés I**	**Inglés II**	**Inglés III**	**Inglés IV**		
		Taller de Lectura y Redacción I	Taller de Lectura y Redacción II				
		Informática I	Informática II				

Tabla 2 Mapa curricular del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas.

Fuente: Dirección General de Bachillerato, 2018, p. 34

Son 31 asignaturas de formación básica, obligatorias y comunes en la educación media superior. Los alumnos cursan ocho submódulos de capacitación para el trabajo, dos por semestre a partir del tercero. Los alumnos de quinto y sexto semestre cursan ocho asignaturas del componente de formación propedéutica (DGB, 2018).

Propósitos del área de matemáticas

La disciplina de Matemáticas tiene como eje desarrollar el pensamiento lógico-matemático para interpretar situaciones reales e hipotéticas que le permitan al estudiante proponer alternativas de solución desde diversos enfoques, priorizando las habilidades del pensamiento, tales como la búsqueda de patrones o principios que subyacen a fenómenos cotidianos, la generación de diversas alternativas para la solución de problemas, el manejo de la información, la toma de decisiones basadas en el análisis critico de información matemática, interpretación de tablas, gráficas, diagramas, textos con símbolos matemáticos que se encuentren en su entorno y permitirán tanto la argumentación de propuestas de solución como la predicción del comportamiento de un fenómeno a partir del análisis de sus variables. Por lo que las estrategias de enseñanza-aprendizaje y la evaluación deben girar en torno a problemas significativos para la vida de los alumnos, dichas situaciones deben promover la movilización de recursos para el diseño de una metodología de solución (Subsecretaria de Educación Media Superior, SEMS, 2017).

Propósitos de Matemáticas I (Álgebra)

La asignatura promueve el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, mediante el uso de la aritmética, álgebra, probabilidad y estadística, permitiéndole proponer alternativas de solución a problemas tomados de su vida cotidiana desde diversos enfoques tales como el determinista o el aleatorio, teniendo en cuenta que los conocimientos son una herramienta para que los estudiantes desarrollen las competencias que definen el perfil de egreso de la Educación Media Superior (SEMS, 2017).

Capítulo 3. Metodología

Tipo y diseño general de estudio. Se realizó una investigación cuasi-experimental en cuatro fases: a) investigación documental, b) diseño y/o selección de una intervención educativa, c) aplicación de la intervención educativa y d) evaluación.

En una una investigación experimental, "casi siempre se utilizan dos grupos: uno es el receptor del experimento y el otro continúa con sus actividades normales (grupo control). El objetivo de la investigación es identificar las diferencias entre los grupos al término del experimento. Este tipo de investigaciones necesita una hipótesis". (Schmelkes y Schmelkes, 2016, pp. 53-54).

Hipótesis. Los estudiantes mejoran su aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos con una incógnita cuando resuelven problemas contextualizados donde se vinculan el álgebra y la geometría mediante el empleo de rectángulos que representan geométricamente a un polinomio.

La rectangularización funciona como método complementario de aprendizaje cuando los estudiantes comprenden el procedimiento que articula el álgebra con la geometría, debido a que el marco algebraico es insuficiente.

Generalizar el método de la factorización algebraica para resolver trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ facilita el aprendizaje del concepto.

El universo de estudio. Se aplicó la intervención educativa a alumnos de primer semestre de bachillerato en el Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, plantel Los Campos.

La selección y tamaño de la muestra. Trabajé con dos grupos de primer semestre, inicié la intervención educativa con 33 alumnos y terminé con 13 (de 40 alumnos en total), debido a que fueron alumnos voluntarios por las restricciones impuestas por la pandemia, fueron grupos aleatorios, a los 13 alumnos que concluyeron la secuencia los designé como grupo experimental y a los 20 alumnos restantes los denominé el grupo control.

Las unidades de análisis y observación. Cada uno de los estudiantes fue una unidad de análisis y observación.

Los criterios. Se efectuaron tres pruebas de aptitud en el tema: diagnóstica (antes de la intervención educativa), formativa (al termino del proceso algebraico) y sumativa (al termino del proceso geométrico).

Los procedimientos y recursos utilizados para la recolección de información.
Aplicación de exámenes de aptitud individual (la parte cuantitativa) a través de observación y la aplicación de un cuestionario (parte cualitativa).

Los instrumentos utilizados. Exámenes, una bitácora de registro anecdótico y un cuestionario.

Los métodos para el control de calidad de los datos. Sustentada en información estadística verificable, por triangulación metodológica intramétodos (uno y/o cada método empleado(s) de forma reiterada en diferentes momentos temporales) y entre métodos (combinación de métodos cuantitativos o cualitativos de investigación en la medición de una misma unidad de análisis): aplicación de diversos métodos en la misma investigación para recaudar información contrastando los resultados, analizando coincidencias y diferencias (Aguilar y Barroso, 2015, pp. 74-75).

Análisis de resultados. Podemos obtener tres tipos de resultados (Kelle y Erzberguer, 2004; citados por Aguilar y Barroso, 2015, p. 80):

- Que los resultados cualitativos y cuantitativos convergen, se confirman mutuamente y apoyan las mismas conclusiones.
- Ambos resultados se centran en aspectos diferentes de un problema, pero son complementarios entre sí y llevan a un enfoque más completo.
- Los resultados cualitativos y cuantitativos son divergentes o contradictorios.

Capítulo 4. Intervención educativa

Se hizo uso de las metodologías o secuencias didácticas desarrolladas en Cruz (2008, pp. 172-186); Méndez (2012, pp. 1403-1412); Soto, Mosquera y Gómez (2005, pp. 84-86 y 91-93) y Rodríguez (2018, pp. 46-50, 79 y 86-96), en cuanto a los ejercicios se utilizaron los libro de *Matemáticas I* de Ibáñez (2018), *Matemáticas 1* de Ruíz (2013) y *Álgebra elemental* de Bello (1998).

El Mtro. Elías Cruz (2008) propuso en su tesis de maestría *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática* la factorización como método general para resolver trinomios cuadráticos de la forma $x^2 + bx + c$, fue una propuesta innovadora porque generalmente se emplea el método de factorización cuando los coeficientes y soluciones del trinomio son números enteros, pero no así cuando los coeficientes son números racionales e irracionales y las soluciones son números racionales, irracionales o complejos. Esta propuesta también es valiosa porque aborda el tema de la factorización desde las perspectivas algebraica, numérica y geométrica. Tiene la deficiencia de que no funciona cuando se quieren factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, tipo de trinomios para el cual se requiere utilizar otras estrategias.

La Mtra. Teresita Méndez (2012) expone en su artículo *Marco figural como medio para factorizar polinomios cuadráticos* los resultados de una investigación educativa donde articula los marcos algebraico y geométrico como propuesta para facilitar el aprendizaje de la factorización. Establece en su estudio un método geométrico compuesto de rectángulos que permiten a los estudiantes descubrir relaciones entre los objetos de la factorización. Es un sistema matemático activo en el que los estudiantes manipulan el material, es decir, se puede armar y desarmar. Esta propuesta tiene, desde mi punto de vista, la debilidad de que no aborda de forma precisa la factorización de términos con coeficientes negativos.

Fernando Soto, Saulo Mosquera y Claudia Gómez (2005) muestran cómo usar *La caja de polinomios*, una herramienta matemática para hacer operaciones con polinomios, entre ellas la factorización. La intención de los autores fue la creación de una estrategia didáctica lúdica que facilitara las operaciones de polinomios a los estudiantes. Me parece una muy buena propuesta, porque ilustra la factorización de polinomios cuadráticos desde la perspectiva geométrica y expone de forma exitosa el manejo de rectángulos cuando se requiere factorizar polinomios con coeficientes negativos.

La Mtra. Luz Patricia Rodríguez (2018) valida la utilización de la herramienta "la caja de polinomios", al aplicar unas secuencias didácticas a un grupo de 31 estudiantes de noveno grado (entre 14 y 15 años de edad) en el INEM Felipe Pérez de Pereira, Colombia, su tesis de maestría se denomina: *El álgebra geométrica como mediadora en el aprendizaje en la factorización de polinomios*. La propuesta de trabajo es interesante porque en sus resultados habla de que hubo aprendizaje significativo con el álgebra geométrica en la factorización de polinomios cuadráticos, determinando su viabilidad en el aula.

En general, estas investigaciones sirvieron de apoyo a mi propuesta. Dos de ellas tienen además la riqueza de haberse realizado en un salón de clase.

El propósito principal de la intervención educativa fue facilitar el aprendizaje de la factorización a los estudiantes de álgebra del Colegio de Bachilleres plantel Los Campos, donde tradicionalmente solo se aborda desde la perspectiva algebraica. La observación de las dificultades, así como la manifestación de los propios estudiantes de ciclos escolares anteriores de que no comprendían el proceso, me llevó a elegir este tema e investigar cuáles aspectos son sensibles de modificarse para mejorar su aprendizaje. Encontré que el marco algebraico resulta insuficiente para comprender el proceso de la factorización y que puede complementarse con el marco geométrico empleando rectángulos con los cuales es posible representar y así factorizar polinomios cuadráticos. Es muy importante resaltar que la revisión realizada me lleva también a considerar como absolutamente necesaria la contextualización de los problemas, a los estudiantes se les facilita comprender el problema cuando está relacionado con su entorno. Así mismo, la investigación llevada a cabo resalta la importancia de la comunicación y el uso correcto del lenguaje, es decir, que es preciso favorecer la comunicación en el aula mediante el trabajo colaborativo entre estudiantes y la retroalimentación con el docente, entre otras estrategias tales como pedirles que expresen verbalmente la interpretación de un problema. Ahora bien, la edad de los estudiantes (14 y 15 años) tiene influencia en su capacidad de abstracción, de razonamiento formal que aún está en formación, de ahí la necesidad de diseñar actividades con material concreto que tenga impacto al manipularlo y relacionarlo con los problemas que está resolviendo. De tal forma que la intervención educativa debió considerar todos estos aspectos.

Esta intervención educativa formará parte de una secuencia didáctica más amplia que abarca el bloque VII Ecuaciones Cuadráticas del Programa de Matemáticas I de la Dirección General de Bachillerato. Está dividida en dos partes, la primera es la parte con la perspectiva algebraica y la segunda es nuestro tema de estudio en la que se vinculan las perspectivas algebraica y geométrica.

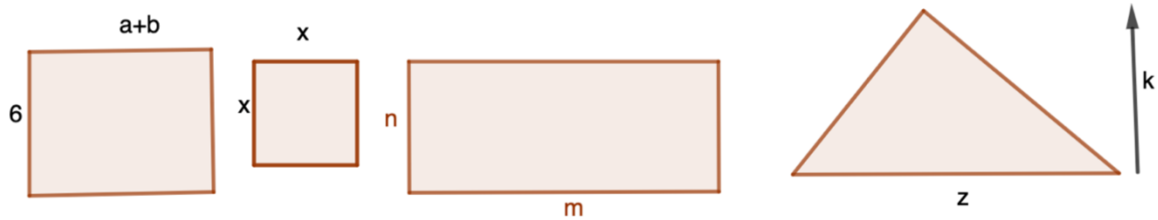
1. Evaluación diagnóstica

Evaluación diagnóstica. Se evaluaron conocimientos de aritmética, geometría, álgebra y factorización (los ejercicios 1 y 2 son de invención propia; los ejercicios 3, 4 y 5 fueron redactados por mí a partir de trinomios extraídos de Ibáñez, 2018, p.195; el problema 6 proviene de Ruíz, 2013, p. 163; el problema 7 lo tomé de Ruíz, 2013, pp. 164 y lo redacté así considerando la secuencia que el autor propone, pero cambiando el sentido de la actividad que el alumno debe realizar, el autor propone una secuencia de pasos para que el alumno resuelva el problema de factorización completando el trinomio cuadrado perfecto, pero como una actividad diagnóstica consideré que el alumno siguiera la secuencia ya resuelta y argumentara si el problema está resuelto correctamente).

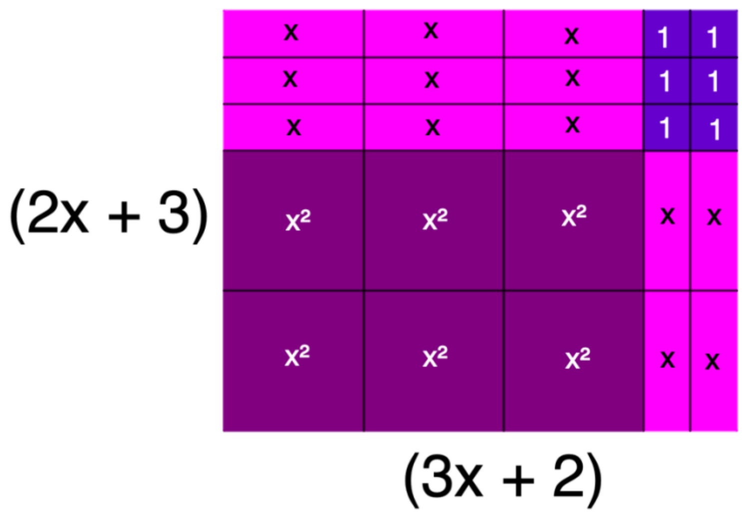
Sesión 1. Carta descriptiva

SESIÓN 1 (1 DE 12): "Evaluación diagnóstica" I. **DATOS GENERALES**			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	8 de diciembre de 2020
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	30 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente proporciona el examen diagnóstico ya impreso que contiene 7 reactivos para evaluar conocimientos de aritmética, geometría, álgebra y factorización.			
ALUMNOS: Resuelven de forma individual, sin apoyo de la docente, pueden usar calculadora científica.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Se evaluarán conocimientos previos.		
INICIO (2 minutos)	La docente explica a los alumnos que resolverán el examen diagnóstico para el cual cuentan con 26 minutos, pueden usar calculadora científica, será una actividad individual, sin apoyo de la docente y no tendrá repercusión alguna en sus calificaciones.		
DESARROLLO (26 minutos)	Los alumnos responden de forma individual lo que conocen sobre aritmética, geometría, álgebra y factorización.		
CIERRE (2 minutos)	Al momento de la entrega del examen la docente les cuestiona cómo se sintieron, si les fue fácil o difícil, si supieron dar respuesta a las interrogantes.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	Los conocimientos previos que los alumnos tienen sobre aritmética, geometría, álgebra y factorización.		
Medio de evaluación:	El examen diagnóstico.		
Instrumento de evaluación:	Lista de cotejo. Autoevaluación.		

1. Escribe una expresión para calcular el área de las siguientes figuras:

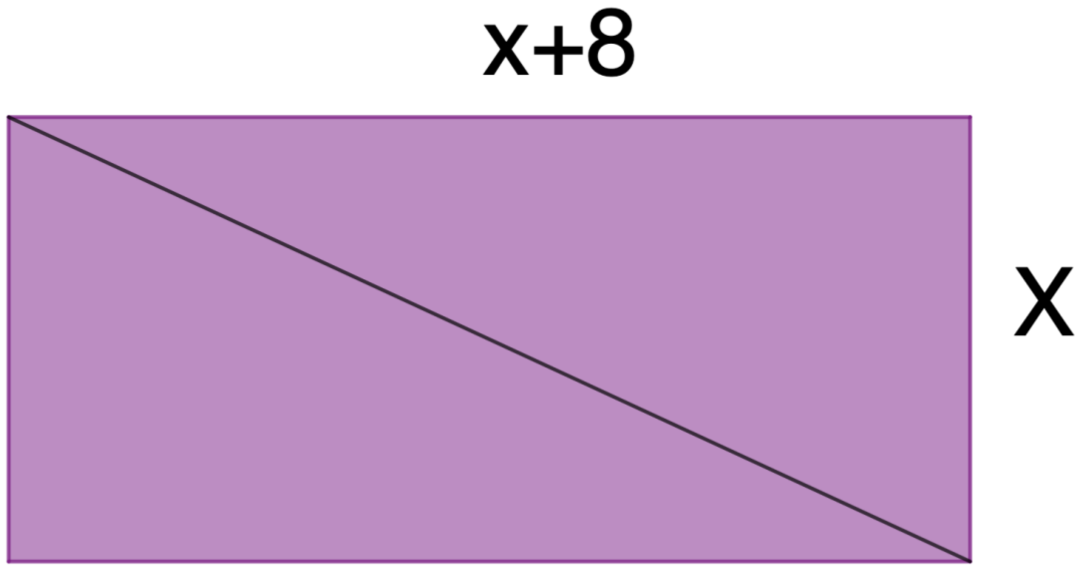


2. Explica qué es factorizar.
3. ¿Es correcta la factorización de $3w^2 - w - 4 = (3w - 4)(w + 1)$?
4. Factoriza $2y^2 - 7y - 4$. Comprueba tu resultado.
5. Observa la figura, multiplica las dimensiones y contesta si lo que observas en la figura corresponde a la factorización del siguiente trinomio cuadrático: $6x^2 + 13x + 6$. ¿Puedes explicar porqué?



6. Plantea la ecuación que resuelva el siguiente problema. ¿Qué dimensiones posee un campo de futbol que tiene el doble de largo que de ancho y ocupa un área de 4, 050 m²? ¿Qué distancia hay en diagonal de una esquina a la opuesta?

7. Para una pantalla de plasma de 40 pulgadas, su ancho y su alto se relacionan como se indica en la figura (su diagonal mide 40 pulgadas).



Un alumno resolvió el problema sabiendo utilizar el teorema de Pitágoras y factorizando al completar el trinomio cuadrado perfecto. ¿Lo resolvió correctamente? Justifica tu respuesta.

$$(x+8)^2 + (x)^2 = 40^2$$
$$x^2 + 16x + 64 + x^2 = 1600$$

Simplificando $\quad 2x^2 + 16x = 1536$

Dividiendo entre 2 $\quad x^2 + 8x = 768$

Completando el TCP en x $\quad x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 768 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$

Factorizando el TCP $\quad (x+4)^2 = 768 + 16$

Simplificando $\quad (x+4)^2 = \pm\sqrt{784}$

Extrayendo raíz y despejando x $\quad x = \pm 28 - 4$

$$x_1 = 28 - 4 = 24$$
$$x_2 = -28 - 4 = -32$$

Se obtienen dos valores, de estos solo es admisible el primero porque una dimensión de la pantalla no puede ser un número negativo, no tendría sentido.

Por lo tanto, el alto de la pantalla es x = 24 y al ancho es x+ 8 = 32
Elevando al cuadrado ambas cantidades y sumándolas se obtiene el cuadrado de 40:

$$(24)^2 + (32)^2 = 40^2$$
$$576 + 1024 = 1600$$

2. *Preguntas detonantes*

Sesión 2. Carta descriptiva

SESIÓN 2 (2 DE 12): "Preguntas detonantes" I. DATOS GENERALES			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	8 de diciembre de 2020
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	20 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente proporciona el documento denominado "preguntas detonantes" ya impreso que contiene 12 preguntas para activar y evaluar conocimientos de geometría, álgebra y factorización.			
ALUMNOS: Resuelven de forma individual, sin apoyo de la docente.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Enunciados que están asociados a las actividades de aprendizaje y evaluación, y que se orientan a la verificación de los procesos cognitivos, motores, valorativos, actitudinales y de apropiación de los conocimientos técnicos y tecnológicos requeridos en el aprendizaje.		
INICIO (2 minutos)	La docente solicita a los alumnos den respuesta a las 12 preguntas, para lo cual cuentan con 16 minutos, será una actividad individual, sin apoyo de la docente y no tendrá repercusión alguna en sus calificaciones.		
DESARROLLO (16 minutos)	Los alumnos responden de forma individual las12 preguntas		
CIERRE (2 minutos)	Al momento de la entrega del examen la docente les cuestiona cómo se sintieron, si les fue fácil o difícil, si supieron dar respuesta a las interrogantes.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	Conocimientos declarativos y procedimentales de geometría, álgebra y factorización.		
Medio de evaluación:	El documento que contiene las 12 preguntas.		
Instrumento de evaluación:	Lista de cotejo. Autoevaluación.		

Análisis ¿Qué de lo que saben es útil para resolver los problemas? ¿Necesitan investigar?

(Preguntas de invención propia) Se evaluarán conocimientos de geometría, álgebra y factorización.

1. ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?
2. ¿Qué es el perímetro?
3. ¿Cómo se calcula el perímetro de un rectángulo?
4. ¿Qué relación tiene el perímetro con el área de un rectángulo?
5. ¿Existe en álgebra alguna manera de resolver este tipo de problemas?
6. ¿Pueden escribirse ecuaciones que relacionen la información y las incógnitas de los problemas?
7. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
8. ¿Sabes cómo resolver las ecuaciones cuadráticas?
9. ¿Qué es la factorización?
10. ¿Cuáles son los métodos de factorización?
11. Si te piden obtener la superficie de un terreno rectangular, ¿qué necesitas saber?
12. ¿El resultado de un problema sobre superficies puede ser un número negativo? Di sí o no y porqué.

3. Visión geométrica y algebraica de la factorización de la ecuación cuadrática. En equipo

Sesión 3. Carta descriptiva

SESIÓN 3 (3 DE 12): "Visión geométrica y algebraica de la factorización de la ecuación cuadrática"			
I. DATOS GENERALES			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	15 de diciembre de 2020
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	50 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente proporciona el documento ya impreso que contiene una secuencia para evaluar conocimientos de geometría, álgebra y factorización.			
ALUMNOS: Resuelven en equipo, con apoyo de la docente. Previo a la sesión les fue solicitado recortar un cuadrado de 3 x 3 cm y cuatro rectángulos de 5 x 8 cm de hojas de color, y traer pegamento.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	El desarrollo de la secuencia lleva a los alumnos a generar un procedimiento para factorizar ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c$ a partir de conocer el resultado de la suma y de la multiplicación de dos números, aquí de acuerdo con la expresión matemática anterior: los valores de b y c.		
INICIO (5 minutos)	La docente solicita a los alumnos que formen equipos de dos o tres personas y les proporciona la secuencia impresa, les pide que formen un cuadrado con los recortes que trajeron, como si fuera un tangram, es decir que no sobran piezas.		
DESARROLLO (40 minutos)	Los alumnos integrados en equipo resuelven procedimentalmente lo que se les solicita en la secuencia generando un procedimiento para factorizar ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c$. La docente monitorea el trabajo de cada equipo y observa si hay dificultades, algo que no se comprenda o a lo que se este dando una interpretación errónea para proporcionar retroalimentación en ese momento.		
CIERRE (5 minutos)	Una vez resuelta la secuencia, la docente pregunta si entienden que generaron un nuevo procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas. También les pregunta qué les pareció, si fue interesante, fácil o difícil o si tienen alguna duda.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	El desarrollo de un procedimiento matemático y una expresión para resolver ecuaciones cuadráticas.		
Medio de evaluación:	La secuencia didáctica resuelta y la expresión verbal y actitudinal durante el proceso y al cierre de la sesión.		

Instrumento de evaluación:	Lista de cotejo. Heteroevaluación.

Secuencia didáctica tomada de Cruz (2008, pp. 172-186)

Con esta actividad adquirirás de forma diferente la interpretación sobre la suma, el producto y la diferencia de dos números. Esto te ayudará en la resolución de las ecuaciones cuadráticas por factorización. Es posible para polinomios cuadráticos con términos positivos y negativos pero solo de la forma $x^2 + bx + c$.

Parte 1. La visión geométrica.

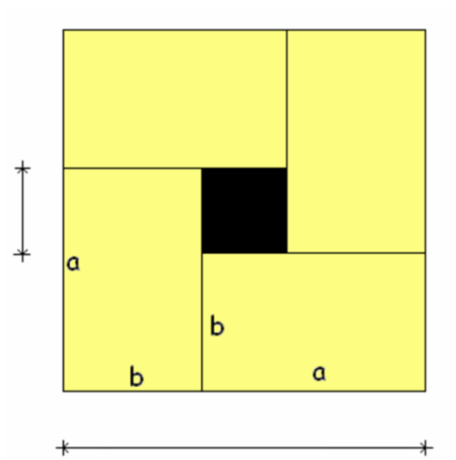
Material necesario. Cuatro rectángulos de 5 x 8 cm y un cuadrado de 3 x 3 cm.

a) Calcula el área de cada figura.
b) Empleando las cinco piezas construye un cuadrado.
c) ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado que construiste?
d) Encuentra el área del cuadrado por dos métodos:
   i) Como un todo (usa la medida encontrada en el inciso c).
   ii) Suma de sus partes (usa las áreas encontradas en el inciso a).

NOTA. Proporcionar las piezas en desorden.

Parte 2. La visión geométrica y algebraica.

En la siguiente figura hay cuatro rectángulos idénticos con lados "a" y "b" que pueden tomar cualquier valor, de acuerdo con ella contesta las siguientes preguntas:



e) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande?
f) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño?

Vamos a utilizar la siguiente notación:
s será la suma de los números (a+b)
d será la diferencia de los mismos números (a – b)

m será la multiplicación de esos mismos números (ab)

Relacionando la figura con la notación acordada

g) ¿Qué representaría s^2?
h) ¿Qué representaría d^2?
i) ¿Cuál sería el significado de m?
j) ¿Qué estará representando 4m?
k) ¿Cómo encontrarían el área del cuadrado pequeño si conocieran el área del cuadrado grande y el área de uno de los rectángulos? Exprésalo en palabras.
l) De acuerdo con lo recién escrito en la descripción completa la expresión algebraica: d^2 = ________ - ________
m) Si conocemos la suma y la multiplicación de dos números. ¿Qué podemos calcular con la expresión anterior?

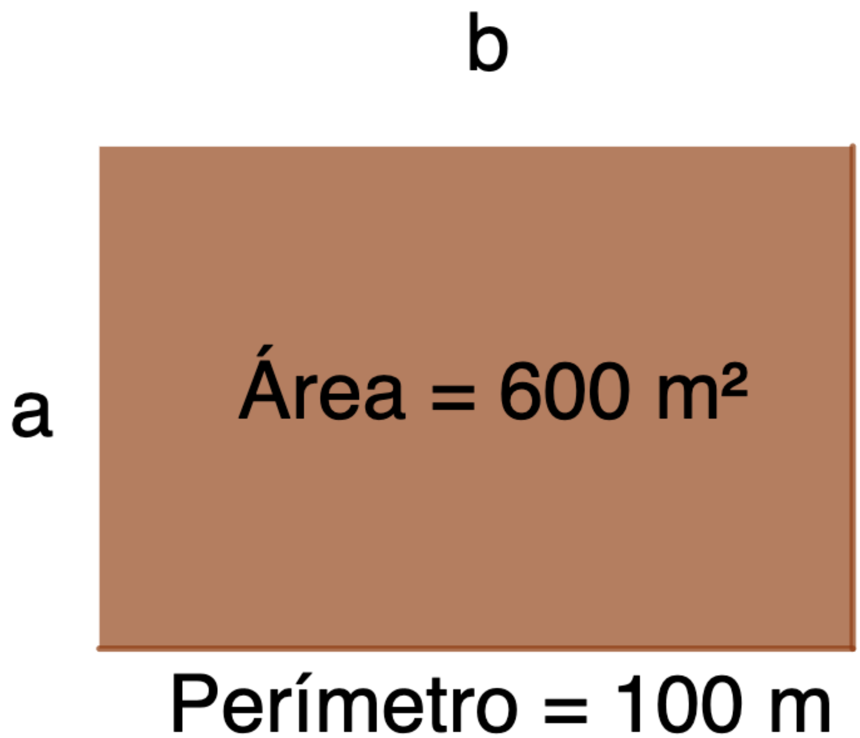
NOTA. Proporcionar la segunda parte hasta que los alumnos hayan concluido la primera.

4. Una aplicación de la factorización. En equipo

Sesión 4. Carta descriptiva

<table>
<tr><th colspan="4">SESIÓN 4 (4 DE 12): “Una aplicación de la factorización”
I. DATOS GENERALES</th></tr>
<tr><td>AUTOR DE LA PLANEACIÓN</td><td>Rita Celia Ojeda Ojeda</td><td>SEMESTRE ESCOLAR</td><td>Semestre 2020-B, 2021-A</td></tr>
<tr><td>ASIGNATURA</td><td>Matemáticas I</td><td>UNIDAD TEMÁTICA</td><td>Factorización geométrica y algebraica</td></tr>
<tr><td>FECHA DE ELABORACIÓN</td><td>Diciembre 2020</td><td>FECHA DE APLICACIÓN</td><td>12 de enero de 2021</td></tr>
<tr><td>SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN</td><td>COBAEZ Los Campos.</td><td>TIEMPO DE LA SESIÓN</td><td>50 minutos</td></tr>
<tr><td>GRUPO</td><td>1°A y 1°B</td><td>NÚMERO DE ALUMNOS</td><td>40 alumnos</td></tr>
<tr><td colspan="4">II. MATERIALES Y RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">PROFESOR: La docente proporciona el documento ya impreso que contiene una secuencia para aplicar la expresión matemática y el procedimiento para factorizar ecuaciones cuadráticas que fueron desarrollados en la sesión anterior.</td></tr>
<tr><td colspan="4">ALUMNOS: Resuelven en equipo, con apoyo de la docente.</td></tr>
<tr><td colspan="4">III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES</td></tr>
<tr><td>APRENDIZAJES</td><td colspan="3">Que los alumnos apliquen el procedimiento y la expresión matemática para factorizar ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c$ desarrollados en la sesión anterior: $d^2 = s^2 - 4m$, donde d es la diferencia, s es la suma y m es la multiplicación de los dos números que son los factores buscados.</td></tr>
<tr><td>INICIO (5 minutos)</td><td colspan="3">La docente solicita a los alumnos que formen equipos de dos o tres personas y les proporciona la secuencia impresa, les informa que aplicarán lo aprendido en la sesión anterior.</td></tr>
<tr><td>DESARROLLO (40 minutos)</td><td colspan="3">Los alumnos integrados en equipo desarrollan procedimentalmente lo que se les solicita en la secuencia resolviendo el problema de aplicación sobre el área de un terreno, toda vez que la información del problema les genera una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c$, que es necesario factorizar para declarar cuales son las dimensiones del terreno. La docente monitorea el trabajo de cada equipo y observa si hay dificultades, algo que no se comprenda o a lo que se este dando una interpretación errónea para proporcionar retroalimentación en ese momento.</td></tr>
<tr><td>CIERRE (5 minutos)</td><td colspan="3">Una vez resuelta la secuencia, la docente les pregunta si lo aprendido tiene relación o no con su contexto. También les pregunta qué les pareció, si fue interesante, fácil o difícil o si tienen alguna duda.</td></tr>
<tr><td colspan="4">IV. EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td>Aprendizajes a evaluar:</td><td colspan="3">La aplicación del procedimiento y la expresión matemática para factorizar la ecuación cuadrática proveniente de un problema sobre el área de un terreno.</td></tr>
<tr><td>Medio de evaluación:</td><td colspan="3">La secuencia didáctica resuelta y la expresión verbal y actitudinal durante el proceso y al cierre de la sesión.</td></tr>
<tr><td>Instrumento de evaluación:</td><td colspan="3">Lista de cotejo. Heteroevaluación.</td></tr>
</table>

El perímetro de un terreno rectángular es igual a 100 m y su área es igual a 600 m^2.



a) De acuerdo con la figura y los datos que se proporcionan di el valor numérico de las siguientes expresiones: ab = _______ a+b = __________
b) Si la expresión ab representa el área del rectángulo, ¿qué representa la expresión a+b?

De acuerdo con la siguiente notación:

s es la suma de a+b
m es la multiplicación de a y b, o sea ab,

c) ¿Cuánto vale s?
d) ¿Cuánto vale m?
e) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$ ¿Cuánto vale d?

d = _________

f) Si a la diferencia de dos números la representamos con d, es decir d = a – b, entonces ¿cuánto vale a - b?

a – b = _________

g) Completa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b = \\ a - b = \end{cases}$$

h) Resuelve el sistema de ecuaciones y expresa el valor de
a = ________
b = ________
i) Regresa a la figura del rectángulo con la que iniciamos la actividad y responde ¿qué representan a y b?
j) Evalúa las siguientes expresiones con los valores obtenidos
a + b = __________
a – b = __________
ab = ____________

Observa los incisos j), a) y f) date cuenta que son los mismos.

k) El perímetro de un terreno rectangular es igual a 100 m y su área es igual a 600 m^2 ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? ________________________________

5. Visión numérica de la factorización. En equipo

Sesión 5. Carta descriptiva

SESIÓN 5 (5 DE 12): "Visión numérica de la factorización"			
I. **DATOS GENERALES**			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	13 de enero de 2021
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	50 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente proporciona el documento ya impreso que contiene una tabla donde es necesario emplear la expresión matemática y el procedimiento para factorizar ecuaciones cuadráticas: $d^2 = s^2 - 4m$, donde d es la diferencia, s, es la suma y m es la multiplicación de los dos números que son los factores buscados.			
ALUMNOS: Factorizan en equipo, con apoyo de la docente.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Que los alumnos completen la tabla encontrando los números que son los factores de la ecuación cuadrática, encontrando primero la diferencia entre dos números si se conoce el valor de la suma y la multiplicación de esos factores. Factorizan.		
INICIO (5 minutos)	La docente solicita a los alumnos que formen equipos de dos o tres personas y les proporciona la tabla impresa, les informa que emplearán lo aprendido.		
DESARROLLO (40 minutos)	Los alumnos integrados en equipo van completando lo que se les solicita, conforme van avanzando aumenta el grado de dificultad por lo que es necesario que empleen la expresión matemática desarrollada dos sesiones antes: $d^2 = s^2 - 4m$, donde d es la diferencia, s.es la suma y m es la multiplicación de los dos números que son los factores buscados. La docente monitorea el trabajo de cada equipo y observa si hay dificultades, algo que no se comprenda o a lo que se este dando una interpretación errónea para proporcionar retroalimentación en ese momento.		
CIERRE (5 minutos)	Cuando completan la tabla, la docente pregunta qué se les dificultó más, si lo resolvieron y si aún tienen alguna duda.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	El uso del procedimiento y la expresión matemática para factorizar.		
Medio de evaluación:	La tabla completada con los factores y la expresión verbal y actitudinal durante el proceso y al cierre de la sesión.		
Instrumento de evaluación:	Lista de cotejo. Heteroevaluación.		

Lee y observa detalladamente la tabla, revisa los valores en ella donde se propone el valor de 2 para a y el valor de 1 para b. Completa los renglones restantes observando y deduciendo comportamientos (para esta actividad es recomendable utilizar calculadora y haber resuelto satisfactoriamente las actividades 1 y 2).

Relaciones entre la suma, diferencia y multiplicación de dos números						
Números propuestos		Suma	Diferencia	Multiplicación		
A	b	s = a+b	d = a-b	m = ab	d^2	s^2-4m
2	1	3	1	2	1	1
5	3				4	
20	40					
		0	-16	-64		
		-5		6		
		300		20000		
		1.5		-10		
		41		420		

NOTA. Observa que los resultados en las dos últimas columnas son iguales.

34. Utiliza la estrategia con la que completaste los últimos cuatro renglones.
    Encuentra los números que sumados dan 7 y multiplicados dan 12.
    Los números que sumados dan 7 y su producto es 9.

35. Verifica los resultados realizando la suma y la multiplicación, puedes emplear decimales y obtener resultados aproximados.

6. Solución de ecuaciones cuadráticas. En grupo

Sesión 6. Carta descriptiva

<table>
<tr><td colspan="4">SESIÓN 6 (6 DE 12): “Solución de ecuaciones cuadráticas”
I. DATOS GENERALES</td></tr>
<tr><td>AUTOR DE LA PLANEACIÓN</td><td>Rita Celia Ojeda Ojeda</td><td>SEMESTRE ESCOLAR</td><td>Semestre 2020-B, 2021-A</td></tr>
<tr><td>ASIGNATURA</td><td>Matemáticas I</td><td>UNIDAD TEMÁTICA</td><td>Factorización geométrica y algebraica</td></tr>
<tr><td>FECHA DE ELABORACIÓN</td><td>Diciembre 2020</td><td>FECHA DE APLICACIÓN</td><td>14 de enero de 2021</td></tr>
<tr><td>SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN</td><td>COBAEZ Los Campos.</td><td>TIEMPO DE LA SESIÓN</td><td>50 minutos</td></tr>
<tr><td>GRUPO</td><td>1°A y 1°B</td><td>NÚMERO DE ALUMNOS</td><td>40 alumnos</td></tr>
<tr><td colspan="4">II. MATERIALES Y RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">PROFESOR: La docente proporciona el documento ya impreso que contiene una pregunta y una serie de ejercicios, todo referente a la factorización, donde es necesario emplear la expresión matemática y el procedimiento para factorizar ecuaciones cuadráticas: $d^2 = s^2 - 4m,$ donde d es la diferencia, $s,$ es la suma y m es la multiplicación de los dos números que son los factores buscados.</td></tr>
<tr><td colspan="4">ALUMNOS: Factorizan en equipo, con apoyo de la docente.</td></tr>
<tr><td colspan="4">III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES</td></tr>
<tr><td>APRENDIZAJES</td><td colspan="3">Se espera que los alumnos hayan interiorizado el procedimiento de la factorización de ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c,$ buscando la diferencia de los números que son los factores cuando se conoce su suma y su multiplicación, toda vez que son los valores buscados.</td></tr>
<tr><td>INICIO (5 minutos)</td><td colspan="3">La docente solicita a los alumnos que formen equipos de dos o tres personas y les proporciona los ejercicios a realizar ya impresos.</td></tr>
<tr><td>DESARROLLO (40 minutos)</td><td colspan="3">Los alumnos integrados en equipo factorizan empleando la expresión matemática: $d^2 = s^2 - 4m,$ donde d es la diferencia, s.es la suma y m es la multiplicación de los dos números que son los factores buscados. La docente monitorea el trabajo de cada equipo y observa si hay dificultades, algo que no se comprenda o a lo que se este dando una interpretación errónea para proporcionar retroalimentación en ese momento.</td></tr>
<tr><td>CIERRE (5 minutos)</td><td colspan="3">Una vez que han resuelto la serie de ejercicios, la docente pregunta qué se les dificultó más, si lo resolvieron y si aún tienen alguna duda.</td></tr>
<tr><td colspan="4">IV. EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td>Aprendizajes a evaluar:</td><td colspan="3">El uso del procedimiento y la expresión matemática para factorizar.</td></tr>
<tr><td>Medio de evaluación:</td><td colspan="3">La factorización hecha de la serie de ejercicios y la expresión verbal y actitudinal durante el proceso y al cierre de la sesión.</td></tr>
<tr><td>Instrumento de evaluación:</td><td colspan="3">Lista de cotejo. Heteroevaluación.</td></tr>
</table>

1. Explica el proceso para resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.

____

____

Encuentra los números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación.

2. Suman 7 y multiplicados dan 12.
3. Suman 1.5 y su producto es -10.
4. Su producto es 9 y suman 7.

Encuentra la factorización de los siguientes trinomios:

5. $x^2 + 7x + 12 = (\qquad)(\qquad)$
6. $x^2 + 1.5\,x - 10 = (\qquad)(\qquad)$
7. $x^2 + 7x + 9 = (\qquad)(\qquad)$

Resuelve las ecuaciones cuadráticas por el método de factorización:

$x^2 + 7x + 12$	8. Proceso:	9. $x_1 =$ $x_2 =$
$x^2 + 1.5\,x - 10$	10. Proceso:	11. $x_1 =$ $x_2 =$
$x^2 + 7x + 9$	12. Proceso:	13. $x_1 =$ $x_2 =$

7. ***Factorización de trinomio cuadrado perfecto y factorización por tanteo. Individual***

Sesión 7. Carta descriptiva

SESIÓN 7 (7 DE 12): "Factorización de trinomio cuadrado perfecto y factorización por tanteo"			
I. DATOS GENERALES			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	19 y 26 de enero de 2021
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	100 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente usa el pintarrón y unos ejercicios ya seleccionados.			
ALUMNOS: Factorizan de forma individual, en su libreta, con apoyo de la docente.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Los alumnos emplean la factorización algebraica, los procedimientos para factorizar trinomio cuadrado perfecto y factorización por tanteo para ecuaciones cuadráticas de las formas $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$.		
INICIO (5 minutos)	La docente explica que las actividades a realizar serán de forma individual y lo harán en su libreta, para lo cual se pueden apoyar de una calculadora científica.		
DESARROLLO (90 minutos)	La docente explica el procedimiento para factorizar trinomios cuadrados perfectos y escribe en el pintarrón los 8 ejercicios a realizar por los alumnos, los alumnos factorizan las ecuaciones cuadráticas que son trinomios cuadrados perfectos. Posteriormente explica el procedimiento para factorizar otro tipo de trinomios por tanteo y escribe en el pintarrón los 12 ejercicios a realizar por los alumnos, los alumnos factorizan estos ejercicios. La docente apoya a los alumnos que muestran dificultades en la realización de ambas factorizaciones.		
CIERRE (5 minutos)	Una vez que han resuelto la serie de ejercicios, la docente pregunta qué se les dificultó más, si lo resolvieron y si aún tienen alguna duda.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	La factorización de trinomios cuadrados perfectos y de otro tipo de trinomios por tanteo.		
Medio de evaluación:	La serie de ejercicios resueltos en su libreta.		
Instrumento de evaluación:	Escala de evaluación. Heteroevaluación.		

Trinomio cuadrado perfecto

1. $x^2 - 6x + 9$

2. $x^2 + 10x + 25$

3. $x^2 + 16x + 64$

4. $x^2 + 8x + 16$

5. $x^2 - 20x + 100$

6. $64y^2 - 112yz + 49z^2$

7. $9e^8 - 30e^4f + 25f^2$

8. $a^6 + 26a^3 + 169$

Otro tipo de trinomio. Factorización por tanteo.

9. $x^2 + 3x - 10$

10. $12x^2 - 25x + 12$

11. $3x^2 - 5x - 2$

12. $2x^2 + 3x - 9$

13. $9x^2 - 9x + 2$

14. $30x^2 - x - 20$

15. $3x^2 + 10x - 8$

16. $12x^2 - 17x + 6$

17. $4x^2 + 4x - 15$

18. $10x^2 + 21x + 9$

19. $15x^2 - 2x - 8$

20. $24x^2 - 2x - 15$

8. *Evaluación formativa*

Sesión 8. Carta descriptiva

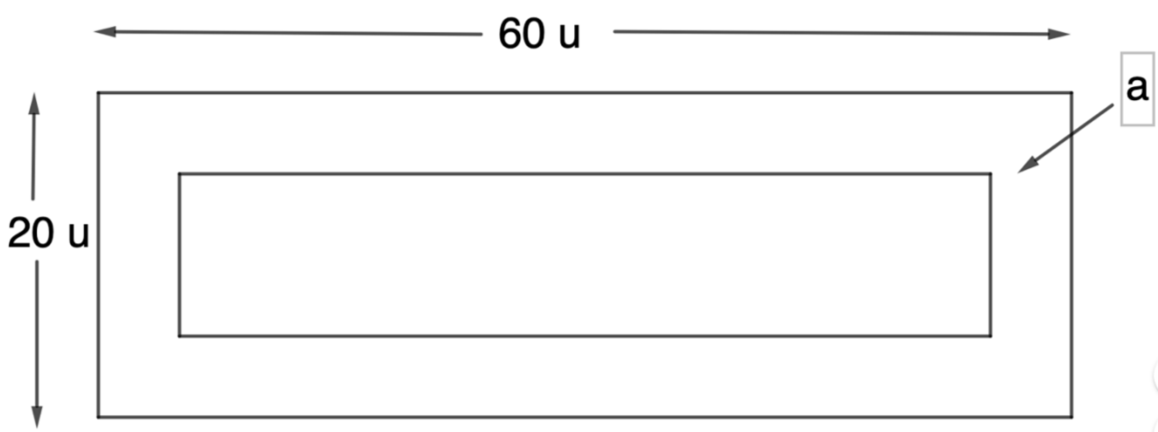
SESIÓN 8 (8 DE 12): "Evaluación formativa" I. DATOS GENERALES			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	2 y 9 de febrero de 2021
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	100 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente proporciona impresos los 6 problemas de aplicación que conforman la evaluación formativa.			
ALUMNOS: Los alumnos se integran en equipo, reciben impresos los seis problemas de aplicación, previo a la sesión se les solicita un pliego de papel bond de cuadrícula y marcadores.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Los alumnos aplican la factorización para resolver un problema en el que se genera una ecuación cuadrática y explican el procedimiento empleado al resto del grupo.		
INICIO (5 minutos)	La docente solicita a los alumnos se organicen en equipo y les proporciona la evaluación formativa que contienen seis problemas.		
DESARROLLO (90 minutos)	La docente pide a los alumnos que lean los problemas y elijan el que les parece que es el más difícil, entonces solicita que un voluntario pase al pintarrón a escribir cómo considera que se resolverá, con la promesa de que todos, incluida la docente, le ayudarán a resolverlo. Todos son problemas sobre el área en el que se genera una ecuación cuadrática, la cual es resuelta por factorización, la docente les explica que pueden usar cualquiera de los métodos ya vistos. El problema es resuelto por el grupo. La docente pide que cada equipo resuelva uno de los 5 problemas que faltan, monitorea la actividad de los equipos, proporcionando ayuda a quienes lo necesitan. Una vez resueltos, la docente les pide a los equipos que escriban todo el proceso en el pliego de papel bond para explicarle al resto del grupo. Cada equipo expone cómo resolvió el ejercicio.		
CIERRE (5 minutos)	Una vez que han resuelto y expuesto los problemas, los equipos aplican la rubrica de coevaluación, para que cada equipo sepa sus fortalezas y debilidades.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	La aplicación de la factorización para resolver un problema de aplicación sobre el área y la expresión verbal de la argumentación sobre el proceso de solución y obtención de los resultados del problema.		
Medio de evaluación:	El problema de aplicación resuelto y expuesto ante el grupo.		
Instrumento de evaluación:	Lista de cotejo para evaluar el problema de aplicación resuelto. Heteroevaluación.		

	Rúbrica de coevaluación de la exposición. Coevaluación.

Evaluación formativa (Los ejercicios 1-5 fueron tomados de Ibáñez, 2018, pp. 284-286; el ejercicio 6 fue modificado a partir del ejemplo 2 de la pág. 282 de la misma autora).

INSTRUCCIONES. Resuelve los siguientes problemas empleando la ecuación cuadrática, verifica que el o los resultados cumplan con las condiciones del problema, es decir que correspondan a lo que se quiere saber de acuerdo con el contexto e interpreta el resultado verbalmente.

1. Una cancha de futbol mide 100 m de largo y 70 m de ancho. El dueño quiere convertirla en una cancha profesional cumpliendo con el requerimiento de tener un área de 13,000 m^2, ya que se necesitan agregar franjas de igual ancho en ambos lados (en el largo y en el ancho) para mantener su forma rectangular. Halla el ancho de las franjas para que se convierta en una cancha de futbol profesional.
2. El área de un terreno rectangular es 216 m^2 y el perímetro del terreno es 60 m. Halla las medidas del terreno.
3. El largo de una sala rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Halla el área original de la sala.
4. El largo de un rectángulo excede 6 m al ancho. Si el área es 720 m^2 ¿cuáles son sus dimensiones?
5. La resta entre las áreas de los rectángulos es de 816 u^2 a = ¿?



6. Una pintura tiene un marco de 20 por 12 cm. Si están a la vista 84 cm^2 de la pintura, ¿cuál es el ancho del marco?

9. El juego reversible. La representación geométrica de la factorización. En equipo

Sesión 9. Carta descriptiva

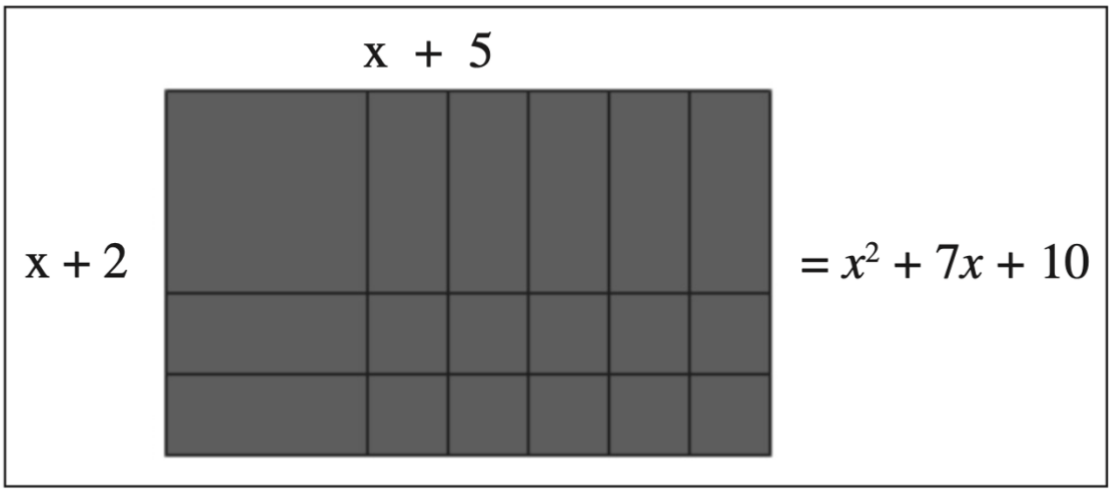
<table>
<tr><td colspan="4">SESIÓN 9 (9 DE 12): “El juego reversible. La representación geométrica de la factorización”
I. DATOS GENERALES</td></tr>
<tr><td>AUTOR DE LA PLANEACIÓN</td><td>Rita Celia Ojeda Ojeda</td><td>SEMESTRE ESCOLAR</td><td>Semestre 2020-B, 2021-A</td></tr>
<tr><td>ASIGNATURA</td><td>Matemáticas I</td><td>UNIDAD TEMÁTICA</td><td>Factorización geométrica y algebraica</td></tr>
<tr><td>FECHA DE ELABORACIÓN</td><td>Diciembre 2020</td><td>FECHA DE APLICACIÓN</td><td>16 y 23 de febrero y 2 de marzo de 2021</td></tr>
<tr><td>SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN</td><td>COBAEZ Los Campos.</td><td>TIEMPO DE LA SESIÓN</td><td>150 minutos</td></tr>
<tr><td>GRUPO</td><td>1°A y 1°B</td><td>NÚMERO DE ALUMNOS</td><td>40 alumnos</td></tr>
<tr><td colspan="4">II. MATERIALES Y RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">PROFESOR: La docente presenta el material didáctico elaborado para explicar la factorización geométrica y el plano cartesiano con cuadrantes para términos positivos y negativos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">ALUMNOS: A los alumnos se les solicita previo a la clase que recorten 12 cuadrados de 13 x 13 cm, 12 rectángulos de 13 x 2 cm y 12 cuadrados de 2 x 2 cm de hojas de color. Que el día de la clase lleven pegamento, un pliego de papel bond o cartulina, marcadores.</td></tr>
<tr><td colspan="4">III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES</td></tr>
<tr><td>APRENDIZAJES</td><td colspan="3">Los alumnos conocen los procedimientos de la factorización geométrica.</td></tr>
<tr><td>INICIO (20 minutos)</td><td colspan="3">La docente explica apoyándose en el material didáctico previamente elaborado cuál es el proceso de la factorización geométrica de acuerdo a si se trata de un trinomio con términos solo positivos o en el caso de trinomios que contienen términos negativos explica el uso del plano cartesiano con cuadrantes para términos positivos y negativos. Explica también que la factorización geométrica es geométrica-algebraica y que es reversible, de tal forma que puede iniciarse con la representación geométrica o bien con la representación algebraica.</td></tr>
<tr><td>DESARROLLO (110 minutos)</td><td colspan="3">La docente pide a los alumnos que elijan un ejercicio y construyan la representación geométrica-algebraica del trinomio. Son 10 ejercicios, es una actividad individual. Para saber que la factorización es correcta, deben conseguir formar un cuadrado o un rectángulo, a lo que se le denomina rectangularización, con la representación de todos los términos del trinomio. En el caso de trinomios con términos negativos, la cantidad de piezas de papel recortados no necesariamente corresponden a la suma numérica de los términos. La docente monitorea la actividad de cada alumno y retroalimenta a quien lo necesite.</td></tr>
<tr><td>CIERRE (20 minutos)</td><td colspan="3">La docente verifica que el ejercicio haya sido resuelto correctamente, cuestiona a los alumnos qué les pareció la actividad, si la entendieron, si les gustó, qué fue lo que se les dificultó. Si son conscientes de que el proceso es reversible.</td></tr>
<tr><td colspan="4">IV. EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td>Aprendizajes a evaluar:</td><td colspan="3">La factorización geométrica-algebraica.</td></tr>
<tr><td>Medio de evaluación:</td><td colspan="3">El material didáctico elaborado por los alumnos, que contenga la factorización geométrica-algebraica.</td></tr>
</table>

Instrumento de evaluación:	Lista de cotejo.

(Ejercicios tomados de Ibáñez, 2018, pp. 271, 275, 280)

Instrucciones. Representa con las figuras los siguientes polinomios y obtén la medida de sus longitudes para posteriormente verificar la factorización efectuando la multiplicación de los factores encontrados.

Ejemplo. La representación del polinomio cuadrático $x^2 + 7x + 10$ es como sigue, claramente puedes ver las dimensiones (son los factores, por lo que se ha efectuado la factorización), el resultado de multiplicarlos es $(x + 5)(x + 2) = (x^2 + 2x + 5x + 10) = x^2 + 7x + 10$.



1. $2x^2 + 3x + 1$
2. $3x^2 - 7x - 6$
3. $3x^2 - 9x + 6$
4. $18x^2 - 3x - 10$
5. $14x^2 + 19x - 3$
6. $15 + 19x - 10$
7. $9x^2 + 18x + 8$
8. $5x^2 - 22x + 8$
9. $9x^2 + 12x - 5$
10. $4x^2 + 4x - 15$

10. Escala de actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos.

Sesión 10. Carta descriptiva

SESIÓN 10 (10 DE 12): “Escala de actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos”			
I. DATOS GENERALES			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	2 de marzo de 2021
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	20 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente proporciona impresa la escala de actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos. Es una actividad individual.			
ALUMNOS: A los alumnos se les solicita responder a las afirmaciones de acuerdo a una escala con cinco opciones de respuesta.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Los alumnos expresan de forma escrita sus actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos.		
INICIO (2 minutos)	La docente distribuye el documento que contiene la escala y les informa que no hay respuestas correctas o incorrectas y que esta actividad no repercutirá en su calificación.		
DESARROLLO (16 minutos)	Los alumnos responden de forma individual las afirmaciones que contiene el documento, cuentan con cinco opciones de respuesta.		
CIERRE (2 minutos)	La docente recibe la escala de actitudes y cuestiona si antes ya habían contestado algo similar.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	Las actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos, sin repercusión para su calificación.		
Medio de evaluación:	La escala de actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos.		
Instrumento de evaluación:	Lista de registro.		

Escala de actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos	
Contesta las siguientes afirmaciones con la escala siguiente	
Totalmente de acuerdo	(5)
Parcialmente de acuerdo	(4)
Indeciso	(3)
Parcialmente en desacuerdo	(2)
Totalmente en desacuerdo	(1)
1. Es una lata leer sobre problemas matemáticos	( )
2. Odio tener que anotar en el cuaderno los procedimientos para resolver problemas matemáticos	( )
3. Las clases de matemáticas me aburren horriblemente	( )
4. Ojalá la clase de matemáticas durara todo el día	( )
5. No me gusta ver presentaciones sobre temas matemáticos en las clases	( )
6. Odio las clases de matemáticas	( )
7. Aprender matemáticas es una lata	( )
8. Trabajar con el equipo de matemáticas hace que me sienta más importante	( )
9. Me gustaría formar parte de un club de matemáticas que se reuniera después de las clases	( )
10. Conocer cómo resolver problemas matemáticos es algo que me produce satisfacción	( )
11. No me importa corregir un problema matemático varias veces, lo importante es aprender a resolverlo	( )
12. Me suelo distraer y aburrir en la clase de matemáticas	( )
13. Compartir mi correcta interpretación a la solución de un problema matemático hace que me sienta bien	( )
14. Es estupendo hablar de matemáticas con mis padres	( )
15. Me gusta hacer dibujos de los problemas matemáticos	( )
16. No se me ocurriría hablar de matemáticas fuera de clase con mis amigos	( )
17. Me gusta aplicar las matemáticas al resolver problemas	( )
18. Suelo estar impaciente porque llegue la clase de matemáticas	( )
19. Ojalá no tuvieramos la clase de matemáticas tan frecuentemente	( )
20. Hacer trabajos de matemáticas en casa es una tontería	( )
21. Matemáticas es una de mis clases preferidas	( )

Modificado de Díaz-Barriga y Hernández, 2005, p. 421-422.

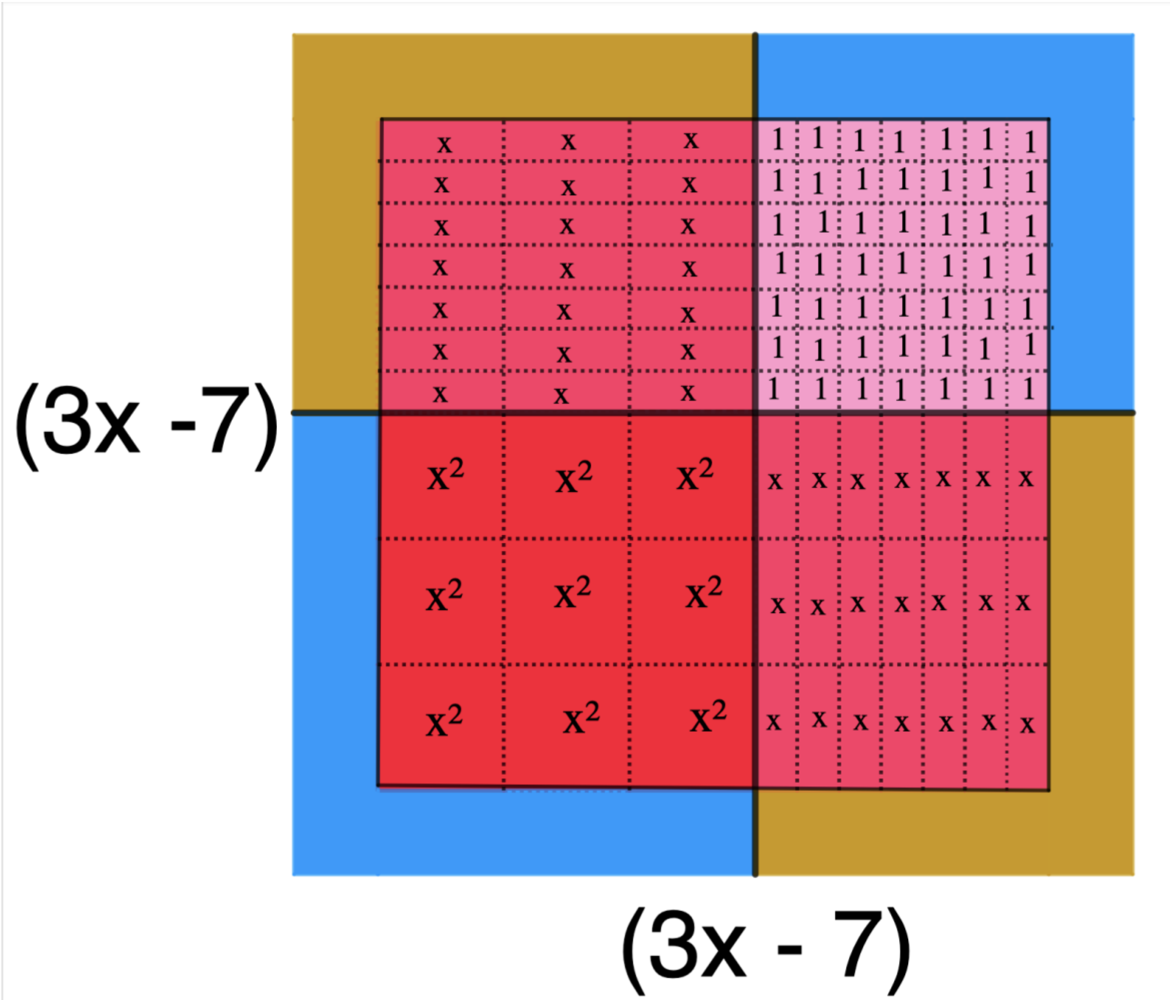
11. Evaluación sumativa

Sesión 11. Carta descriptiva

SESIÓN 11 (11 DE 12): "Evaluación sumativa" I. DATOS GENERALES			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	9 y 16 de marzo de 2021 (resuelta en casa)
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	100 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente proporciona impresa la evaluación sumativa que contiene 10 reactivos. Es una actividad individual.			
ALUMNOS: A los alumnos se les solicita llevar calculadora científica.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Los alumnos resuelven los 10 reactivos de la evaluación sumativa.		
INICIO (5 minutos)	La docente distribuye el documento que contiene los 10 reactivos de la evaluación sumativa y les explica que deben resolverla de forma individual y sin apoyo, que cuentan con 100 minutos en total.		
DESARROLLO (90 minutos)	Los alumnos resuelven la actividad de forma individual, usando su calculadora científica.		
CIERRE (5 minutos)	La docente recibe la evaluación sumativa y cuestiona cómo se sintieron, si les pareció fácil o difícil, cuales temas creen que deben reforzarse.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	La factorización empleada para resolver los 10 reactivos que contiene la evaluación sumativa.		
Medio de evaluación:	La evaluación sumativa.		
Instrumento de evaluación:	Lista de cotejo.		

(Preguntas y ejercicios tomados de Bello (1998), las preguntas y/o ejercicios 1, 3-6 de la p. 292, la pregunta 2 de la p. 504, la pregunta 7 de la p. 511, el ejercicio 8 y las preguntas 9-10 son de invención propia).

1. ¿Qué son las ecuaciones cuadráticas y qué procedimientos utilizas para resolverlas?
2. Explica porqué la ecuación $x^2 + 6 = 0$ no tiene solución real.
3. La ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ puede resolverse por factorización ¿Cuántas soluciones tiene? La ecuación original equivale a $(x + 1)^2 = 0$ ¿porqué pensaría que -1 se conoce como doble raíz para la ecuación?
4. El producto de dos enteros impares consecutivos es la diferencia entre 23 y la suma de los dos enteros. ¿Cuáles son los enteros?
5. Un cuarto rectangular tiene 2 m más de largo que de ancho. Su área excede numéricamente 10 veces su lado mayor por 28 ¿Cuáles son las dimensiones del cuarto?
6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 8 m más larga que el lado más corto y 1 m mayor que el lado restante ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?
7. ¿Puedes resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 = 5$ completando el cuadrado? Explica por qué.
8. Expresa el trinomio cuadrado perfecto del cual la siguiente figura es su factorización geométrica:



9. Describe si el área que representa cada término del trinomio está correctamente ubicada en el plano cartesiano. Explica porqué.
10. ¿El trinomio representa la suma algebraica de las áreas representadas geométricamente en la figura?

12. Cuestionario de opinión de los alumnos sobre las actividades realizadas.

Sesión 12. Carta descriptiva

SESIÓN 12 (12 DE 12): "Cuestionario de opinión de los alumnos sobre las actividades realizadas"			
I. **DATOS GENERALES**			
AUTOR DE LA PLANEACIÓN	Rita Celia Ojeda Ojeda	**SEMESTRE ESCOLAR**	Semestre 2020-B, 2021-A
ASIGNATURA	Matemáticas I	**UNIDAD TEMÁTICA**	Factorización geométrica y algebraica
FECHA DE ELABORACIÓN	Diciembre 2020	**FECHA DE APLICACIÓN**	23 de marzo de 2021
SEDE Y LUGAR DE LA SESIÓN	COBAEZ Los Campos.	**TIEMPO DE LA SESIÓN**	30 minutos
GRUPO	1°A y 1°B	**NÚMERO DE ALUMNOS**	40 alumnos
II. MATERIALES Y RECURSOS			
PROFESOR: La docente dio formato de un cuestionario en línea al documento de la sesión. Es una actividad individual			
ALUMNOS: A los alumnos se les solicita responder a las preguntas para lo cual se les envía la liga.			
III. DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES			
APRENDIZAJES	Los alumnos expresan de forma abierta lo que piensan sobre las actividades realizadas.		
INICIO (2 minutos)	La docente distribuye el documento que contiene la escala.		
DESARROLLO (26 minutos)	Los alumnos responden a las preguntas de forma individual y abierta de acuerdo a lo que piensan en línea accediendo por medio de la liga proporcionada para tal fin.		
CIERRE (2 minutos)	La docente da un lapso de dos semanas para responder y posteriormente revisa las respuestas.		
IV. EVALUACIÓN			
Aprendizajes a evaluar:	Las actitudes hacia las actividades realizadas, sin repercusión para su calificación.		
Medio de evaluación:	El cuestionario de opinión de los alumnos sobre las actividades realizadas, en línea.		
Instrumento de evaluación:	Lista de registro.		

Nombre del alumno:		
Tema:	Fecha:	Hora:

1. ¿Qué aprendiste?
2. ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades?
3. ¿Las superaste?
4. Si fue así, ¿cómo lo hiciste?
5. Registra si estas teniendo dificultades de aprendizaje. Explica.
6. Menciona dos conceptos que aprendiste.
7. ¿Cuáles conceptos no entendiste?
8. Describe dos procedimientos distintos para factorizar trinomios cuadrados ordenados.
9. ¿Con qué tema de la vida cotidiana se relaciona la factorización de una ecuación cuadrática?
10. ¿Será posible usar lo aprendido para resolver problemas matemáticos en el futuro?
11. ¿Hizo falta explicar y/o resolver problemas de aplicación?
12. ¿Identificas plenamente cómo resolver por factorización algebraica una ecuación cuadrática?
13. ¿Identificas plenamente cómo resolver por factorización geométrica una ecuación algebraica?
14. ¿Consideras que la representación geométrica te facilitó entender el proceso de la factorización de ecuaciones cuadráticas?
15. ¿Entiendes y puedes explicar qué es la reversibilidad de la factorización?
16. ¿El ritmo de las clases fue de acuerdo con tu aprendizaje?
17. ¿Se evaluaron conceptos, procedimientos y actitudes?

Capítulo 5. Análisis de resultados

5.1 Análisis cualitativo de los resultados

El diseño de mi propuesta fue trabajar con dos grupos de 20 alumnos, el receptor del experimento y el grupo control, pero por las condiciones de la pandemia trabajé de manera presencial con pequeños grupos de alumnos, en actividades que no eran obligatorias por lo que no todos los alumnos acudieron a todas las sesiones a las que los invité. En el grupo A agremié los resultados de los 13 alumnos que sí concluyeron la secuencia didáctica (receptores del experimento) independientemente de a qué grupo pertenecían originalmente y en el grupo B reuní los resultados de los 20 alumnos que participaron en la aplicación de la secuencia didáctica hasta las actividades propuestas para el grupo control. Siete alumnos eligieron no participar. Esta agrupación de la que hablo ocurrió hasta el momento de redactar este capítulo, en las sesiones siempre trabajé con los alumnos que quisieron asistir. La formación de grupos fue totalmente aleatoria debido a que fue decisión de los alumnos si asistían o no. Ellos no estuvieron enterados que participaron en un experimento.

La aplicación estaba planeada para realizarse en tres semanas, pero se prolongó cuatro meses por las restricciones de la pandemia.

Enseguida muestro los resultados de la evaluación diagnóstica la cual consistió en 7 reactivos (ver en el capítulo anterior).

5.1.1 Evaluación diagnóstica

Grupo A experimental

No de reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	46%
2	23%
3	8%
4	0%
5	62%
6	23%
7	15%

Grupo B control

No de reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	16%
2	10%
3	10%
4	5%
5	30%
6	0%
7	20%

Tabla 3 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Evaluación Diagnóstica, grupos A y B.

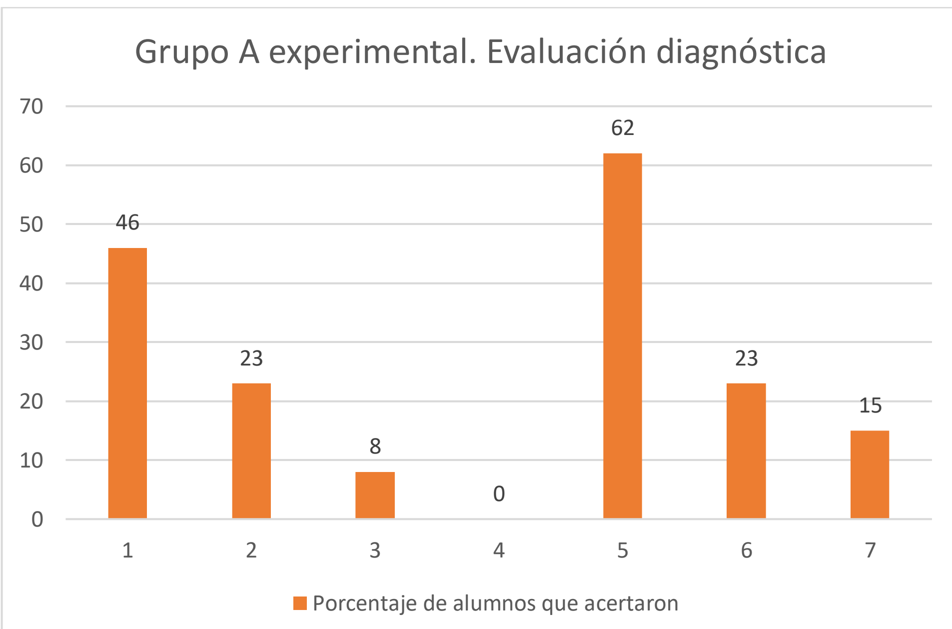


Ilustración 19 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada recativo de la Evaluación Diagnóstica, grupo A

El 62% de los alumnos acertó en el reactivo cinco (contiene la factorización tanto algebraica como geométrica de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$), 46% en el reactivo 1 (se trata de escribir una expresión para calcular el área de algunas figuras geométricas que se presentan), el reactivo 4 no lo acertó ningún alumno (consiste en factorizar una expresión algebraica).

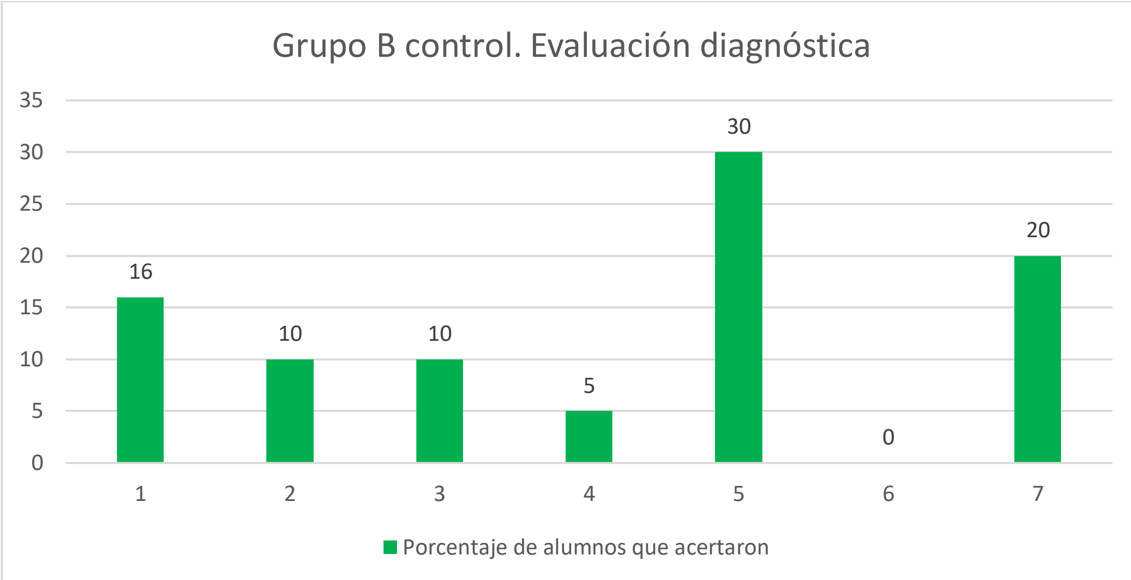


Ilustración 20 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Evaluación Diagnóstica, grupo B.

El 30% de los alumnos acertó en el reactivo cinco que como ya mencioné más arriba contiene la factorización tanto algebraica como geométrica de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, 20% de los alumnos acertó en el reactivo siete que contiene la figura de una pantalla de televisión donde por medio de la factorización se obtienen las dimensiones, pues se proporciona la diagonal, el procedimiento está descrito, pero es necesario argumentar si las operaciones algebraicas son correctas, el reactivo seis nadie lo resuelve pues consistía en plantear un problema y resolverlo por factorización.

5.1.2 Preguntas detonantes

Grupo A experimental

No de reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	69
2	62
3	46
4	0
5	15
6	62
7	8
8	8
9	15
10	7.7
11	31
12	31

Grupo B control

No de reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	60
2	30
3	25
4	0
5	0
6	35
7	25
8	10
9	15
10	5
11	25
12	20

Tabla 4 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de las Preguntas Detonantes, grupos A y B

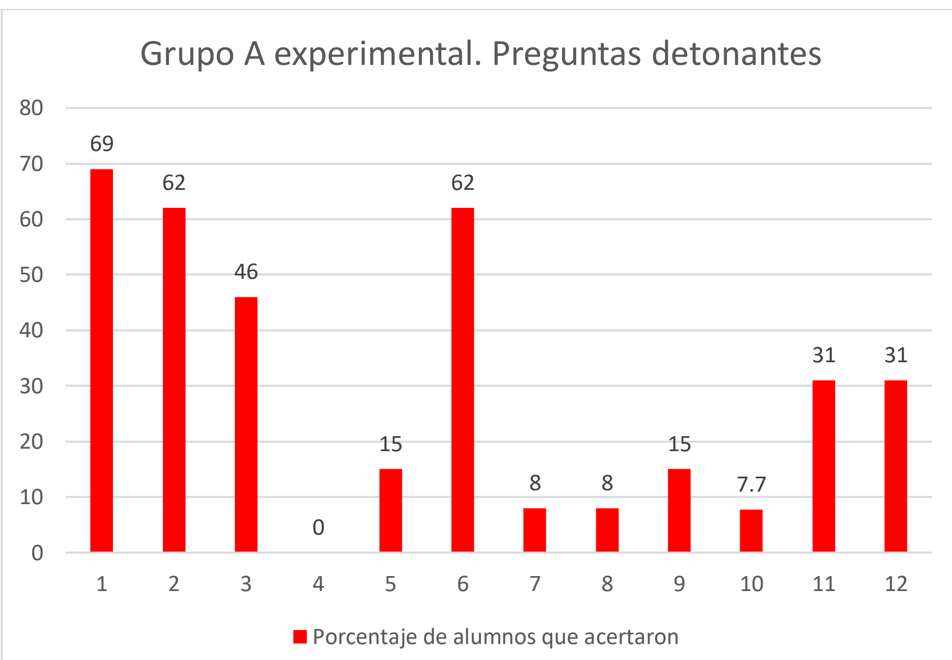


Ilustración 21 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de las Preguntas Detonantes, grupo A.

Los reactivos 1 y 2 se refieren a los conceptos básicos de área y perímetro, en el reactivo 6 se hace la pregunta de si pueden escribirse ecuaciones que relacionen la información y las incógnitas de los problemas (tienen la idea de que es posible aunque ellos no sepan hacerlo), en estos reactivos varios alumnos aciertan; ningún alumno acierta en la pregunta cuatro que consiste en describir la relación entre el perímetro y el área de un rectángulo.

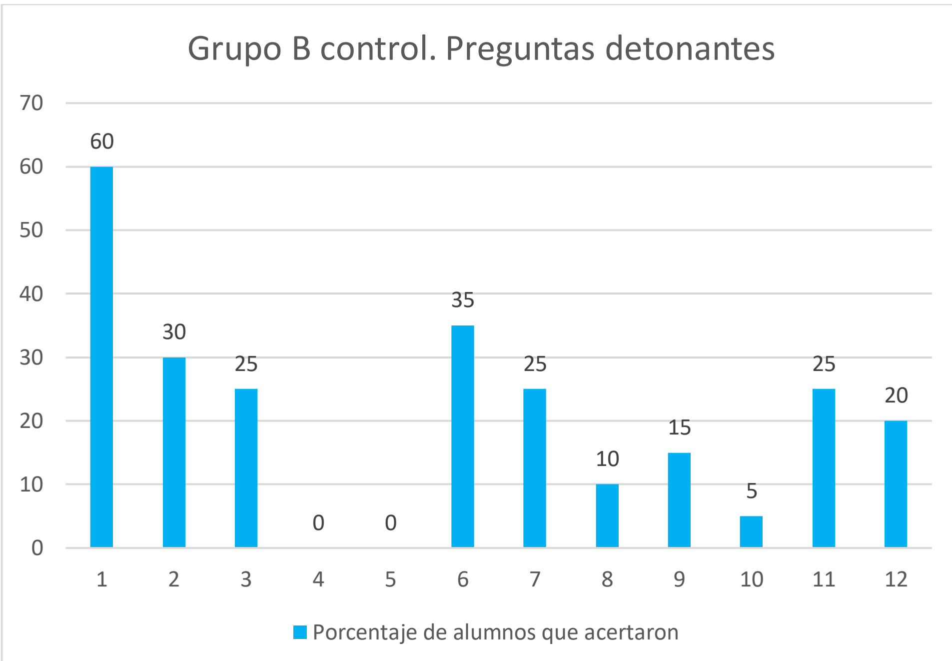


Ilustración 22 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de las Preguntas Detonantes, grupo B.

El 60% de los alumnos acertó en el reactivo uno que corresponde a la pregunta conceptual sobre cómo se calcula el área de un rectángulo. Ningún alumno acierta cuando se quiere saber cuál es la relación matemática entre el área y el perímetro de un rectángulo y si existe manera de resolver en álgebra problemas que tengan relación con el cálculo del perímetro y el área de un rectángulo, mismas que corresponden a los reactivos cuatro y cinco, respectivamente.

Es importante mencionar que tanto la evaluación diagnóstica como las preguntas detonantes fueron actividades que los alumnos resolvieron de manera individual sin el apoyo de la docente.

5.1.3 Visión geométrica y algebraica de la factorización de la ecuación cuadrática

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
a	100
b	100
c	100
d	100
e	92
f	77
g	85
h	92
i	77
j	85
k	92
l	69
m	85

Grupo B control.

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
a	90
b	85
c	85
d	80
e	75
f	75
g	80
h	90
i	85
j	80
k	70
l	65
m	73

Tabla 5 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Visión geométrica y algebraica de la factorización de la ecuación cuadrática, grupos A y B.

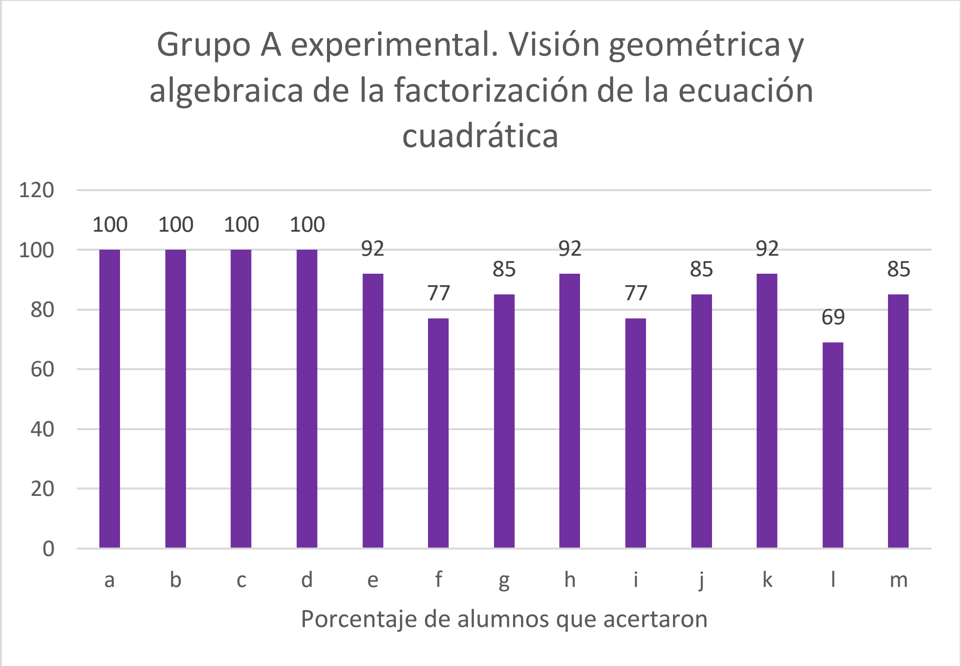


Ilustración 23 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Visión geométrica y algebraica de la factorización de la ecuación cuadrática, grupo A.

Los reactivos a, b, c y d donde el 100% de los alumnos acertó son sobre el cálculo del área de un rectángulo, f, i y l donde 77% o 69% de los alumnos acertó son cuestiones donde es necesario responder con expresiones matemáticas resultado de deducciones: $a - b, m = ab$ y $d^2 = s^2 - 4m$, por lo que tienen grado mayor de dificultad.

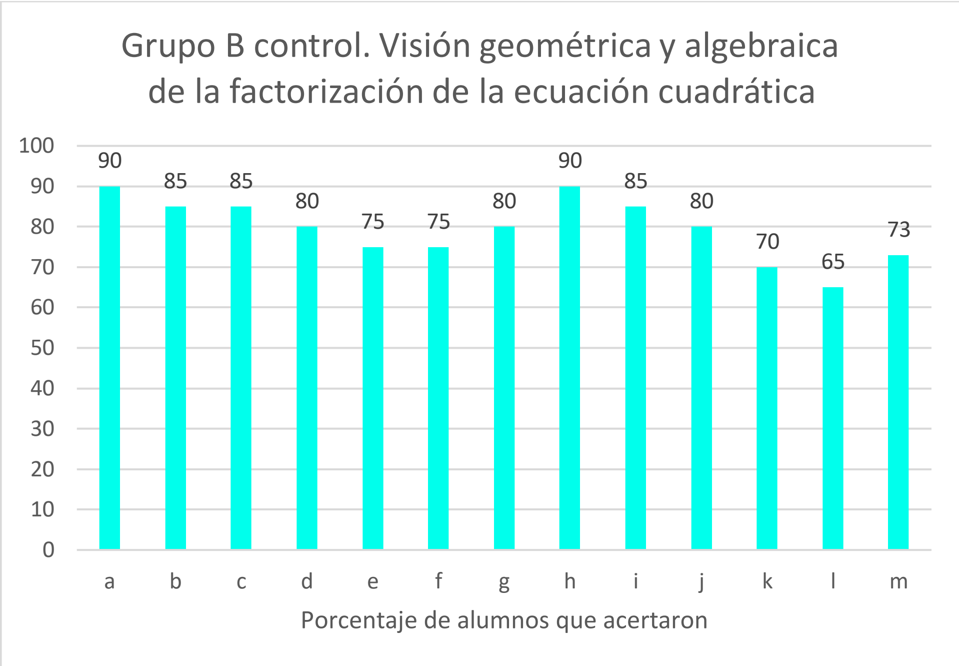


Ilustración 24 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Visión geométrica y algebraica de la factorización de la ecuación cuadrática, grupo B.

Los incisos a y h en los que acertó el 90% de los alumnos son sobre el cálculo del área; el inciso l en el que solo aciertan el 65% de los alumnos requiere deducir la expresión matemática $d^2 = s^2 - 4m$, el inciso k en el que acertó 70% de los alumnos, hace referencia a esta misma expresión pero de forma verbal, deducida a partir de la figura (ver en el capítulo anterior).

Para deducir dicha expresión matemática los alumnos practicaron la generalización, es decir, identificaron un patrón, desarrollando su pensamiento matemático, lo que los lleva a la abstracción, configurando su pensamiento formal.

Los alumnos construyeron este cuadrado de cinco piezas con cuatro rectángulos de 5 x 8 cm y un cuadrado de 3 x 3 cm. Es la respuesta al inciso b.

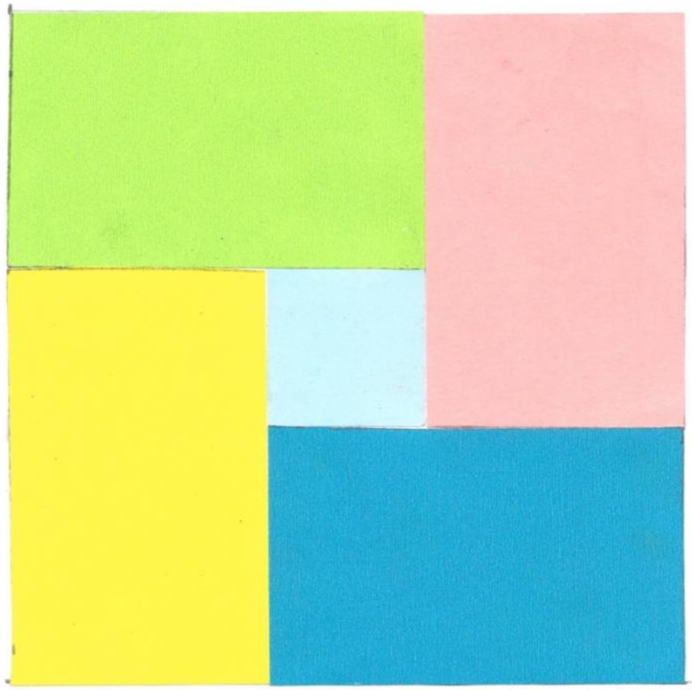


Ilustración 25 Resultado obtenido por un alumno al inciso b de la Visión geométrica y algebraica de la factorización de la ecuación cuadrática.

Esta actividad se realizó en equipos, con apoyo de la docente. Es un ejercicio sencillo, pero mientras que a algunos alumnos les tomó un instante, otros sí requirieron minutos para construir el cuadrado.

5.1.4 Una aplicación de la factorización

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
a	100
b	23
c	85
d	85
e	100
f	100
g	100
h	92
i	38
j	92
k	92

Grupo B control

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
a	95
b	35
c	90
d	85
e	95
f	90
g	90
h	85
i	35
j	75
k	85

Tabla 6 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de Una aplicación de la factorización, grupos A y B.

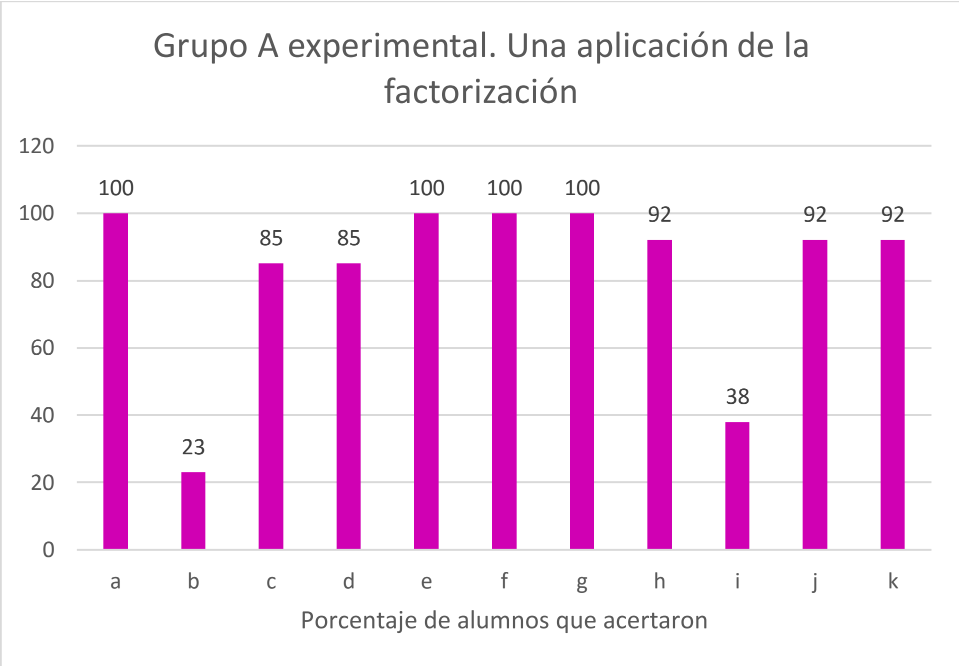


Tabla 7 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de Una aplicación de la factorización, grupo A.

El reactivo a consiste en reconocer los datos de la figura como expresiones geométricas de área y perímetro. Los incisos e, f y g son parte de la secuencia de cálculos para resolver el ejercicio, el 100% de los alumnos lo resuelve de forma efectiva. En cambio, los incisos b e i, con 23% y 38% respectivamente, requieren una deducción, interpretar a partir de los valores numéricos a qué concepto se refieren geométricamente.

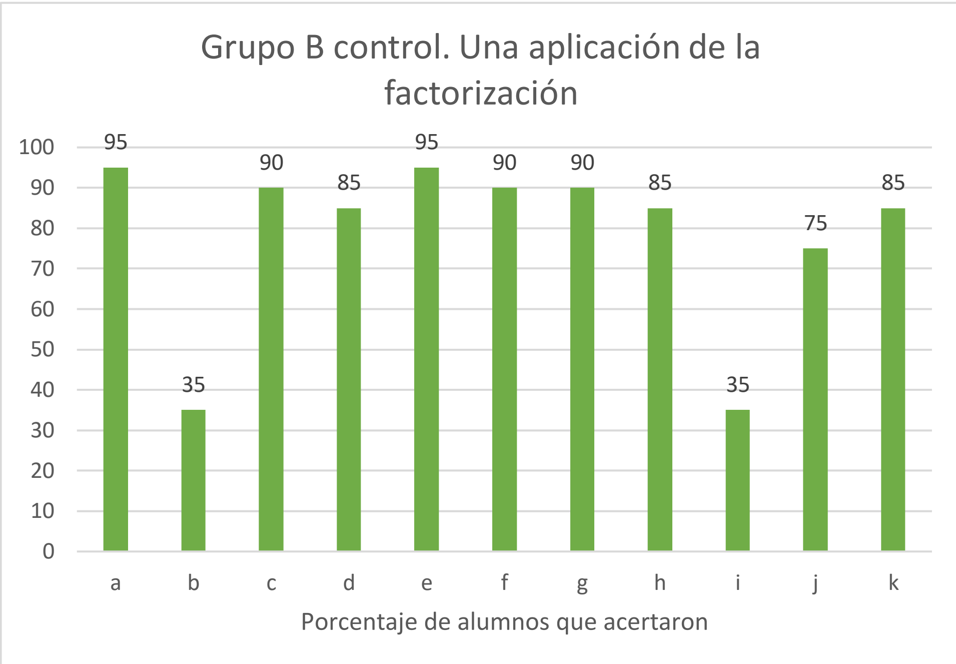


Tabla 8 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de Una aplicación de la factorización, grupo B.

Básicamente se obtuvo un resultado similar en el grupo B. Los alumnos pueden seguir la secuencia de pasos para resolver el problema, pero les cuesta un poco de trabajo la conceptualización.

Fue una actividad realizada en equipos y con apoyo de la docente.

5.1.5 Visión numérica de la factorización

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	100
2	100
3	100
4	85
5	85
6	62
7	69
8	85
9	85
10	85
11	77
12	69
13	69
14	100
15	100
16	85
17	77
18	85
19	62
20	54
21	69
22	69
23	77
24	92
25	85
26	92
27	77
28	85
29	62
30	62
31	77
32	77
33	85
34	85
35	69

Grupo B control

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	100
2	95
3	95
4	100
5	100
6	50
7	100
8	90
9	90
10	85
11	75
12	70
13	70
14	95
15	95
16	95
17	100
18	100
19	65
20	65
21	75
22	70
23	75
24	90
25	85
26	85
27	80
28	80
29	70
30	70
31	85
32	90
33	90
34	55
35	35

Tabla 9 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de Visión numérica de la factorización , grupos A y B.

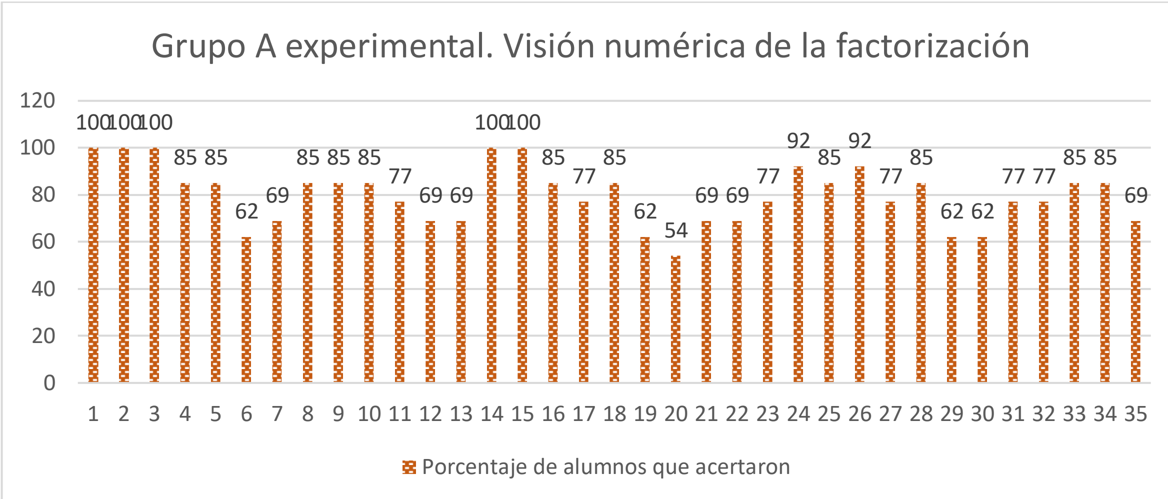


Ilustración 26 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Visión numérica de la factorización, grupo A.

En el reactivo 6 solo acertó el 62% de los alumnos, es un problema de manejo de signos: deficiencias de aritmética que en algunos casos se van resolviendo con el tiempo, en el reactivo veinte solo acertó el 54% de los alumnos, aquí asumen que el orden de los valores de a y b no importa, pero sí es importante en el caso de la resta (también de la división, pero aquí no es el caso), algo semejante pasó con los valores de los reactivos 29 y 30, en el que solo acertó el 62% de los alumnos.

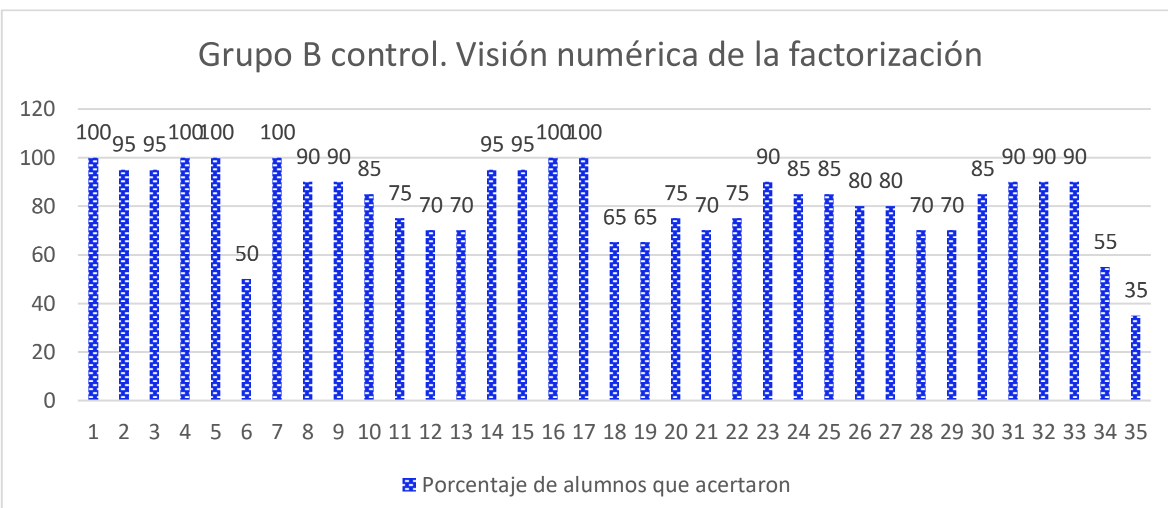


Ilustración 27 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Visión numérica de la factorización, grupo B.

En el reactivo seis solo el 50% de los alumnos acertó, es un problema de operaciones básicas, en este caso una resta donde se equivocan al asignarle el signo correcto al resultado, en los reactivos diecinueve y veinte el error lo cometen por no verificar el resultado de operaciones aritméticas en cuanto al signo, en los reactivos treinta y cuatro y treinta y cinco debieran aplicar el proceso de factorización, se acentúa en el reactivo treinta y cinco porque los resultados a obtener son números racionales (ver en el capítulo anterior).

5.1.6 Solución de ecuaciones cuadráticas

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	23
2	54
3	54
4	38
5	85
6	69
7	54
8	85
9	77
10	77
11	77
12	69
13	62

Grupo B control

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	5
2	50
3	50
4	35
5	50
6	50
7	35
8	50
9	50
10	50
11	50
12	40
13	35

Tabla 10 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Solución a ecuaciones cuadráticas, grupos A y B

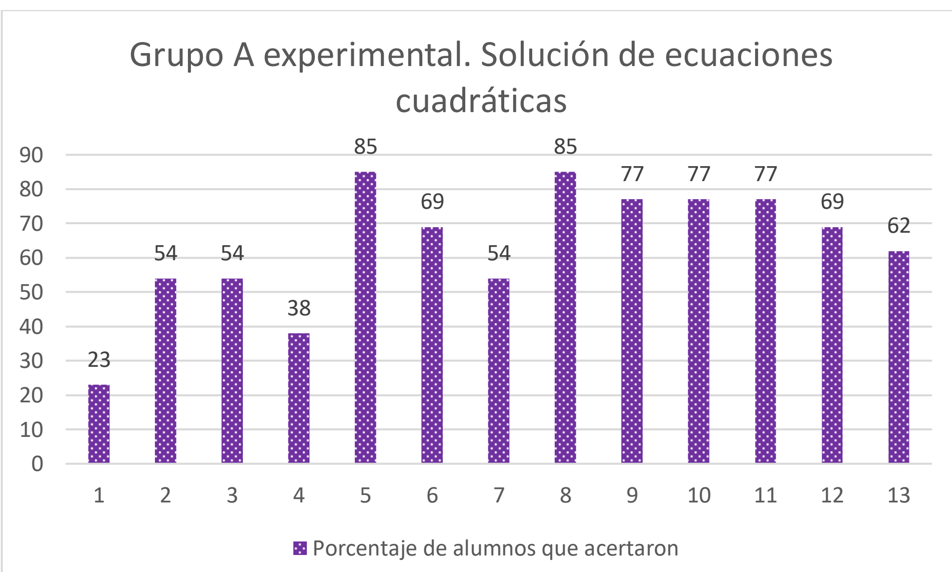


Ilustración 28 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Solución a ecuaciones cuadráticas, grupo A.

Solo el 23% de los alumnos puede expresar de manera verbal la expresión matemática desarrollada para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma

$x^2 + bx + c$ (reactivo 1): $d^2 = s^2 - 4m$ aun cuando los demás puedan emplearla para resolver alguna de las ecuaciones (reactivo 1).

Los reactivos cuatro y siete están relacionados, son una ecuación cuadrática donde ambos factores resultantes son numeros racionales, aspecto que desconcertaba a los alumnos, creían que habían cometido algún error al resolverla.

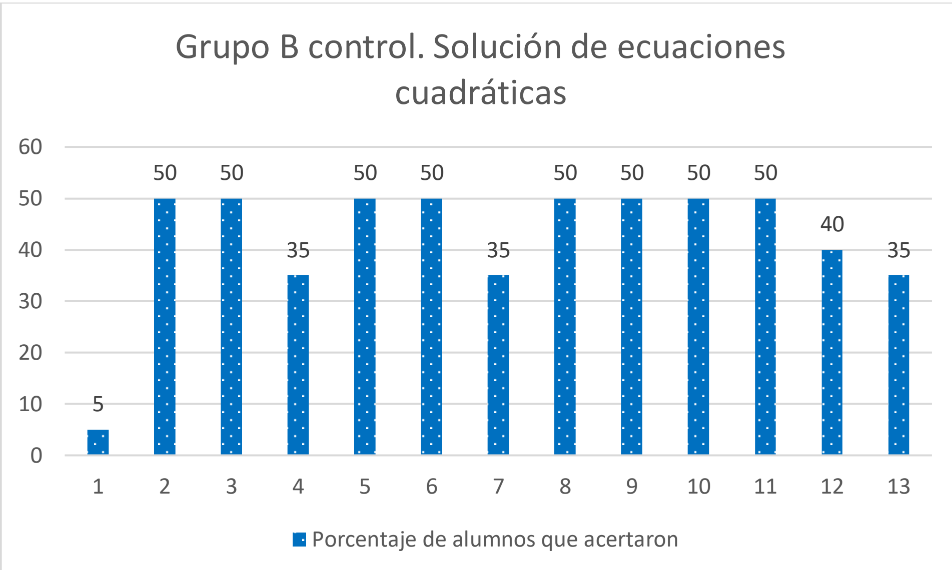


Ilustración 29 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Solución de ecuaciones cuadráticas, grupo B.

En general, es notoria cómo la cantidad de aciertos disminuyó en esta actividad, es una actividad realizada en equipo que requería la aplicación de la expresión matemática desarrollada en sesiones anteriores: $d^2 = s^2 - 4m$, la mayor cantidad de aciertos obtenidos en algunos reactivos es del 50%.

De igual forma, se identifica que en el reactivo uno solo una persona acertó, lo que corresponde al 5% de los alumnos de este grupo, es decir, que solo un alumno es capaz de expresar verbalmente el procedimiento necesario para factorizar.

Los reactivos cuatro, siete y trece están relacionados, se trata de ecuaciones cuyos resultados son números racionales, observé que esto ocasionaba desconcierto en los alumnos, asumían que había algún error en su proceso. Usan el número para expresar una cantidad, obtenida por conteo o como resultado de operaciones elementales de cálculo, normalmente del conjunto de los números naturales.

5.1.7 Factorización de trinomio cuadrado perfecto y factorización por tanteo

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	86
2	86
3	86
4	71
5	86
6	71
7	71
8	86
9	86
10	71
11	71
12	86
13	86
14	86
15	71
16	71
17	57
18	57
19	57
20	43

Grupo B control

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron
1	100
2	100
3	67
4	67
5	100
6	33
7	33
8	33
9	67
10	100
11	67
12	86
13	0
14	33
15	33
16	33
17	0
18	0
19	0
20	0

Tabla 11 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de Factorización de trinomio cuadrado perfecto y factorización por tanteo, grupos A y B.

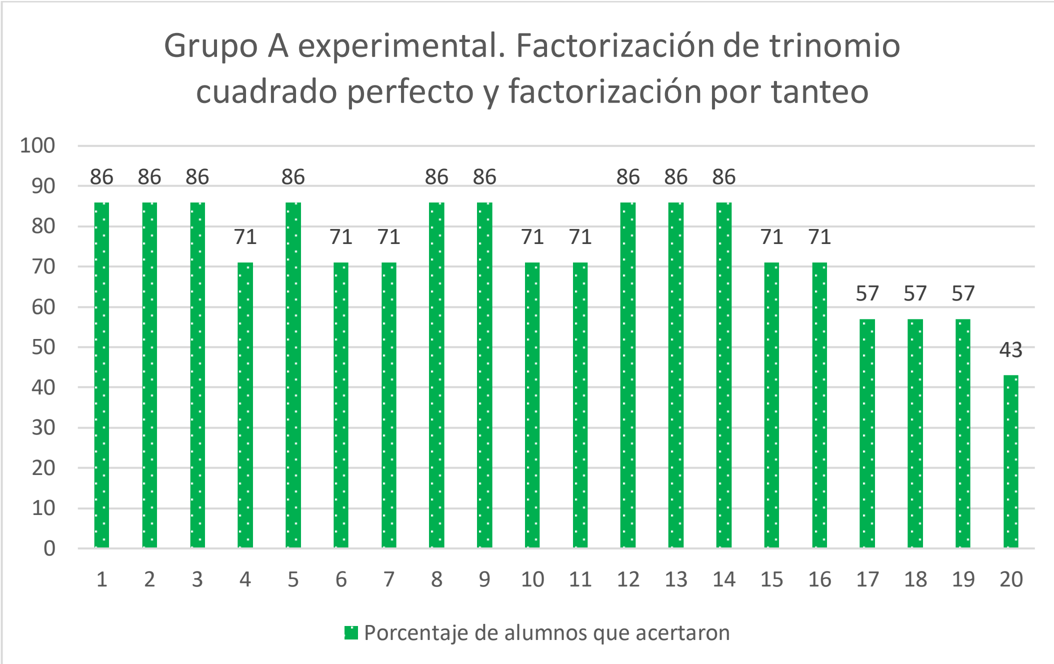


Ilustración 30 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de Factorización de trinomio cuadrado perfecto y factorización por tanteo, grupo A.

Los primeros ocho ejercicios fueron trinomios cuadrados perfectos, los errores más comunes fueron que les faltó colocar el exponente 2 al binomio y en otros casos el signo intermedio del binomio era incorrecto. En los doce ejercicios de factorización por tanteo fue muy usual que el error fuera por la falta de análisis de signos, es decir que eligen correctamente los factores numéricos, pero no verificaron que el resultado coincidiera en signos con el trinomio original, aunque en algunos casos los alumnos simplemente no lograron determinar correctamente los factores numéricos.

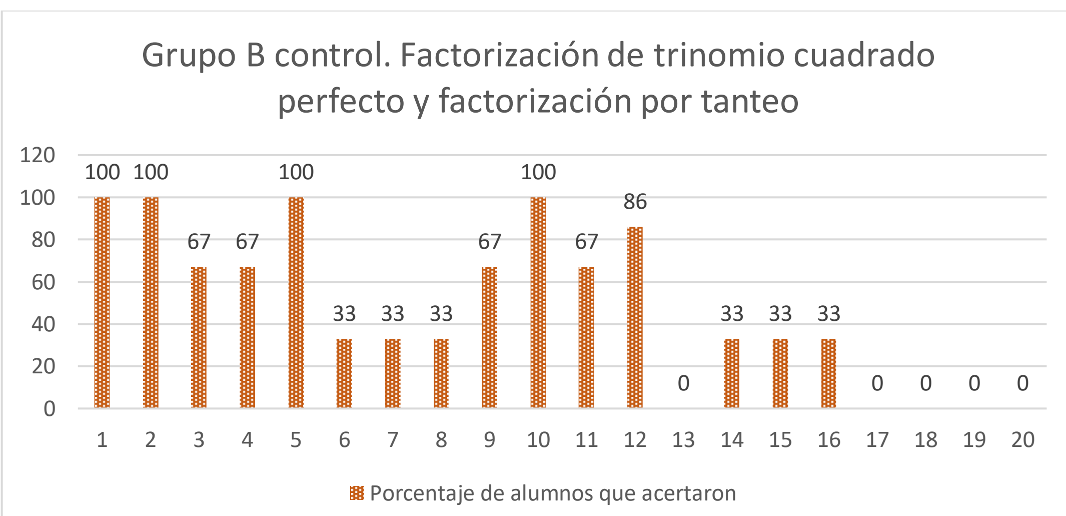


Ilustración 31Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Factorización de trinomio cuadrado perfecto y factorización por tanteo, grupo B.

Es fácilmente observable que los alumnos de este grupo tuvieron un desempeño mucho menor, en cinco de los ejercicios de factorización algebraica por tanteo ningún alumno logró resolverlo de forma correcta.

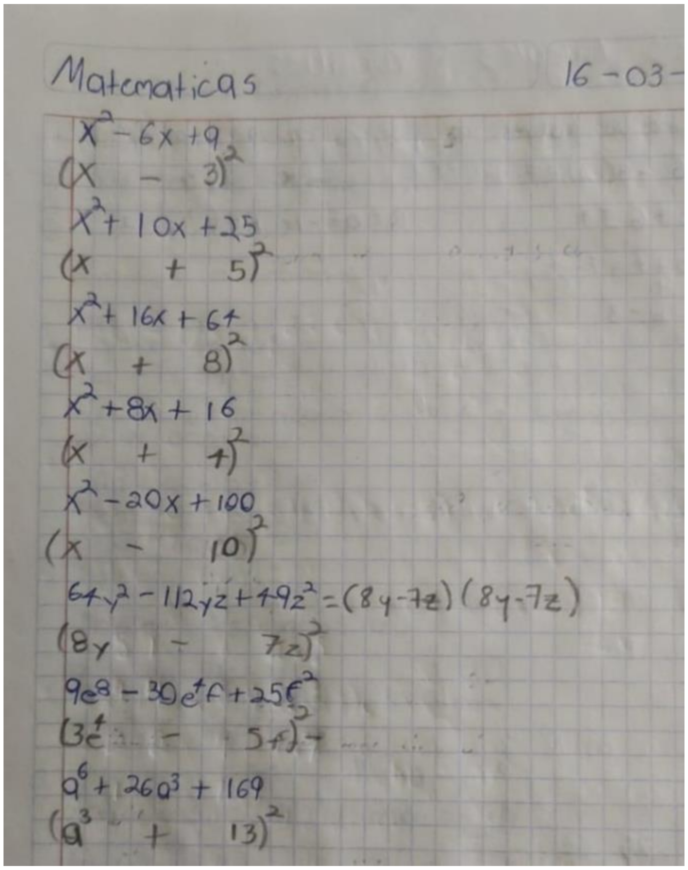
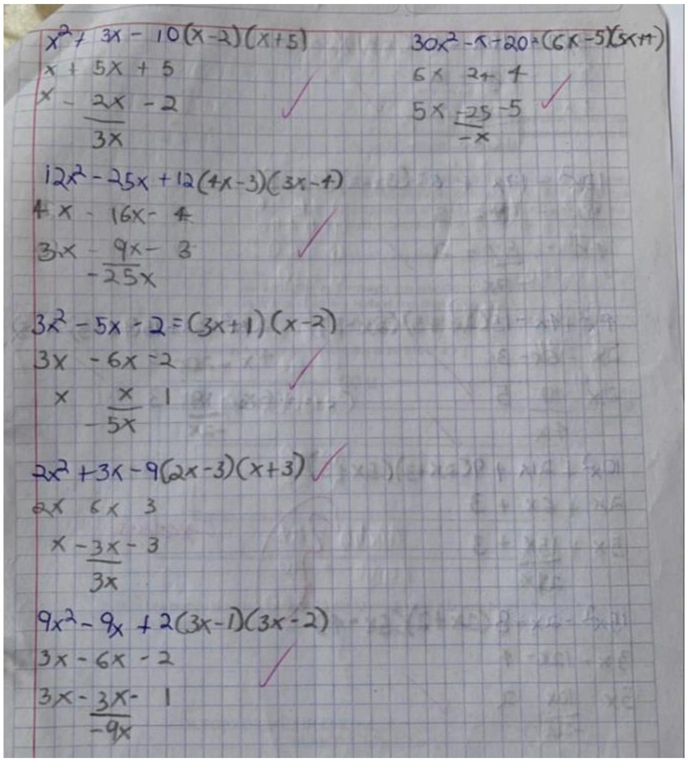


Ilustración 32 Resultados obtenidos por un alumno del grupo A a la Factorización de trinomio cuadrado perfecto.



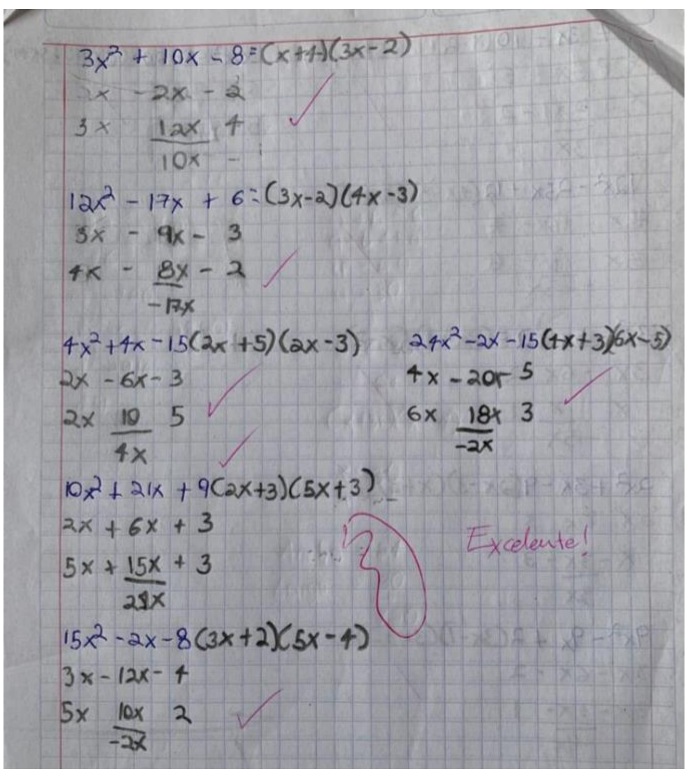


Ilustración 33 Resultados obtenidos por un alumno del grupo A a la Factorización por tanteo.

5.1.8 Evaluación formativa

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que resolvieron este reactivo
1	100
2	23.08
3	15.38
4	30.77
5	15.38
6	15.38

Grupo B control

Reactivo	Porcentaje de alumnos que resolvieron este reactivo
1	100
2	22.22
3	11.11
4	11.11
5	22.22
6	33.33

Tabla 12 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Evaluación Formativa, grupos A y B.

En el caso de la evaluación formativa, se trata de seis problemas de aplicación que dan origen a una ecuación cuadrática, como ejemplo resolvimos el ejercicio 1 y luego ellos eligieron un problema y formaron equipos de 2 o 3 personas, hubo quienes eligieron resolverlo de manera individual, todos lo resolvieron satisfactoriamente, aquí lo que varió fue la cantidad de tiempo que le dedicaron, algunos lograron resolverlo y exponerlo en los 100 minutos con los que contaron y otros tuvieron que quedarse más tiempo, también varió la cantidad de retroalimentación o apoyo que requirieron.

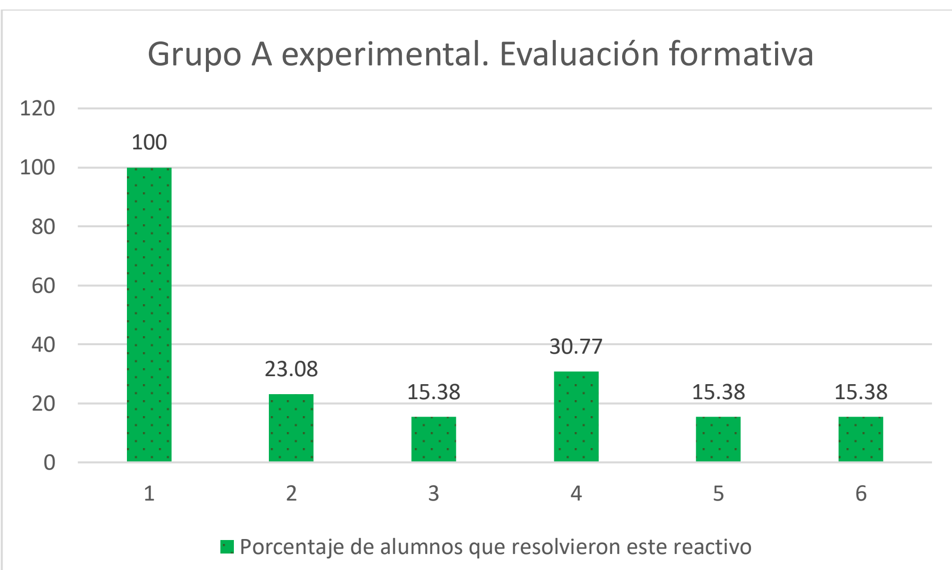


Ilustración 34 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Evaluación Formativa, grupo A.

A esta fase ya solo acudieron 22 de los 33 alumnos, pero entre esos 22 están los 13 del grupo A y solo 9 del grupo B, lo que disminuyó notablemente mi oportunidad de contrastar mis decisiones pedagógicas en la propuesta con la valoración de los aprendizajes en los alumnos.

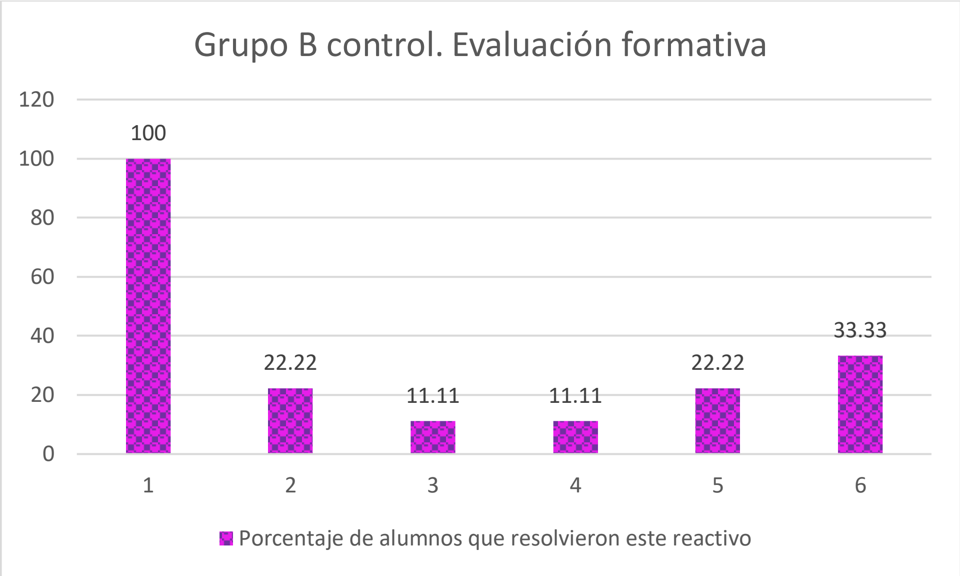
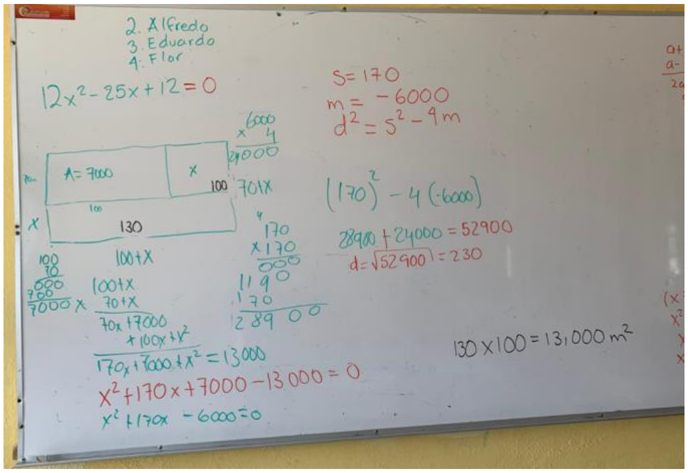


Ilustración 35 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de la Evaluación formativa, grupo B.

El ejercicio uno fue resuelto de forma grupal, a manera de ejemplo, la siguiente imagen muestra a un voluntario, él inicia el proceso, pero todos le apoyamos.

Ilustración 36 Un alumno voluntario resuelve con el apoyo del grupo el problema 1 de la Evaluación formativa.



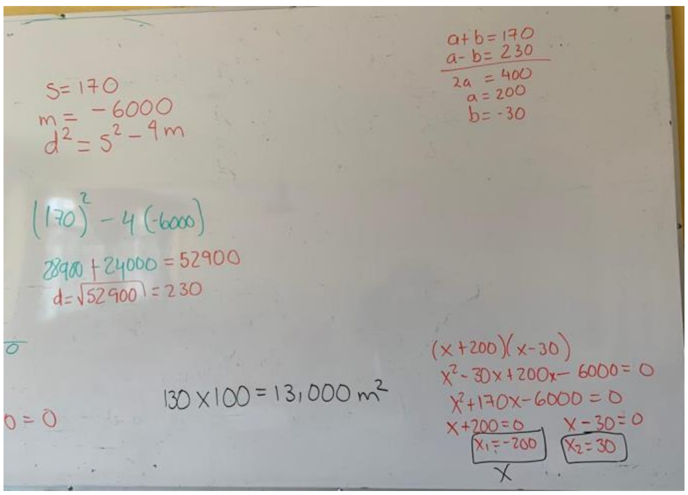


Ilustración 37 Problema 1 de la Evaluación formativa resuelto de forma grupal.

Una vez realizados los ejercicios, los expusieron:

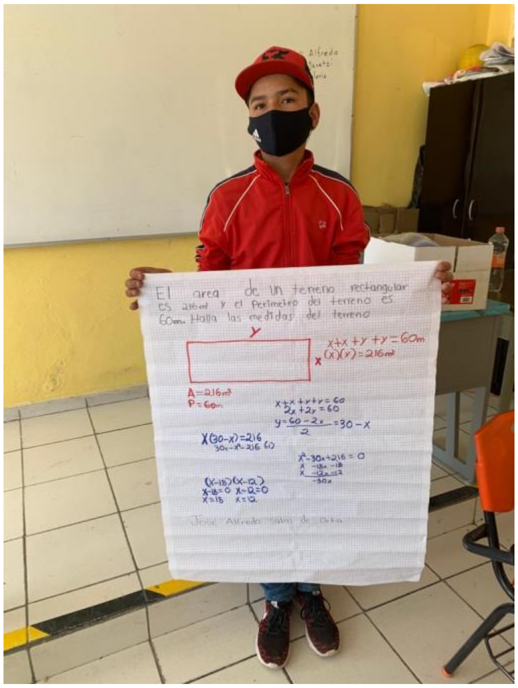


Ilustración 38 El alumno expone el problema 2 de la Evaluación formativa.


Ilustración 39 Dos alumnos exponen el problema que resolvieron de la Evaluación formativa.

A continuación el material elaborado por los alumnos para su exposición:

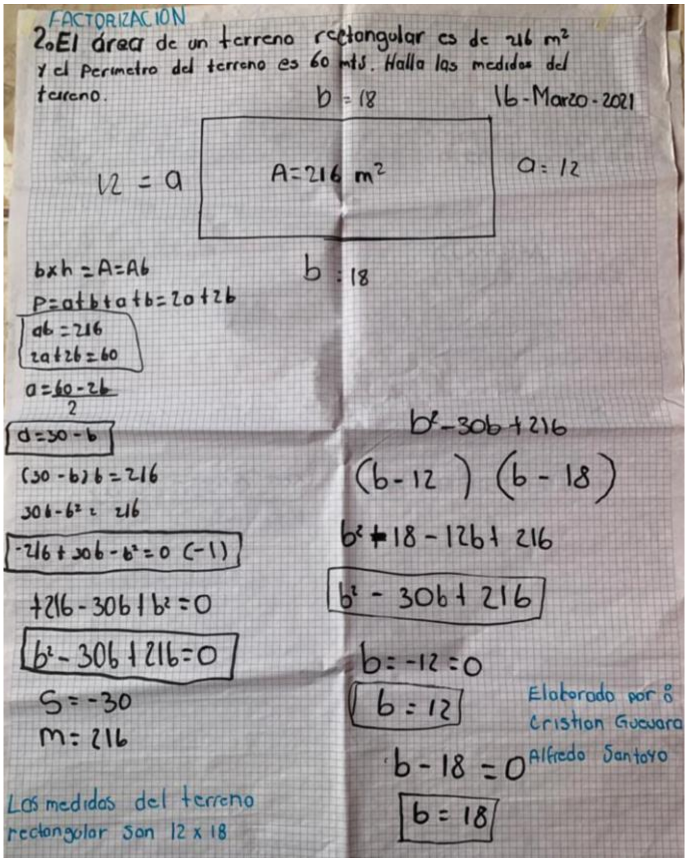


Ilustración 40 Material didáctico elaborado por los alumnos para su exposición, problema 2 de la Evaluación formativa.

Los alumnos usaron las definiciones de perímetro y área y las relacionan con la información del problema para llegar a establecer una ecuación cuadrática que fue resuelta por factorización y verificaron los resultados obtenidos en la imagen del rectángulo. Factorizaron con el método de factorización generalizada desarrollado en la sesión 3. Se lograron los objetivos de aprendizaje, que consistieron en aplicar la factorización para resolver un problema y explicar el procedimiento realizado al resto del grupo. Fue una actividad monitoreada por la docente y sí hubo necesidad de proporcionar apoyo para redireccionar la actividad realizada en varias ocasiones.

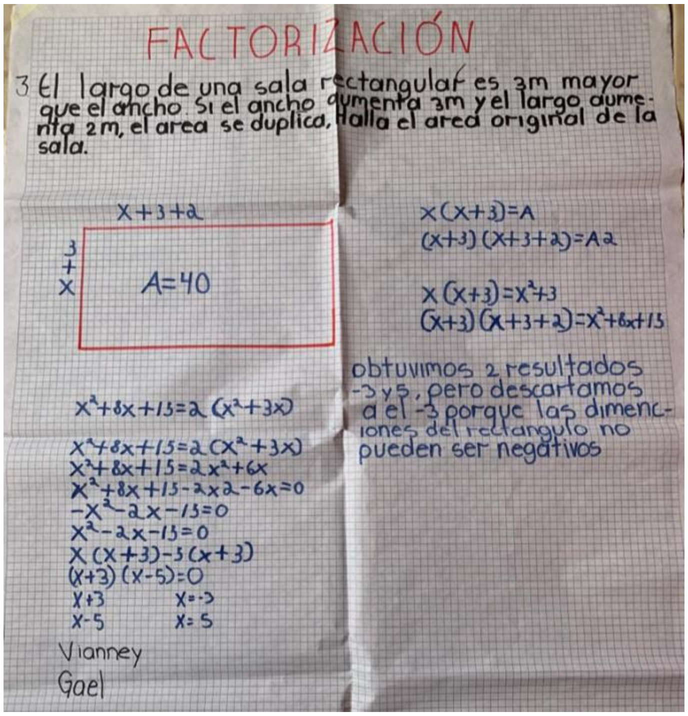


Ilustración 41 Material didáctico elaborado por los alumnos para su exposición, problema 3, de la Evaluación formativa.

Los alumnos usaron el concepto de área, establecieron de forma correcta la expresión de las dimensiones y con la información del enunciado del problema establecieron la ecuación cuadrática que fue resulta por factorización. Factorizan por tanteo. El equipo logró los objetivos de aprendizaje: usar la factorización para resolver un problema de aplicación y explicar el procedimiento empleado al grupo. En este caso el procedimiento también fue siempre monitoreado, pero requirieron menos apoyo.

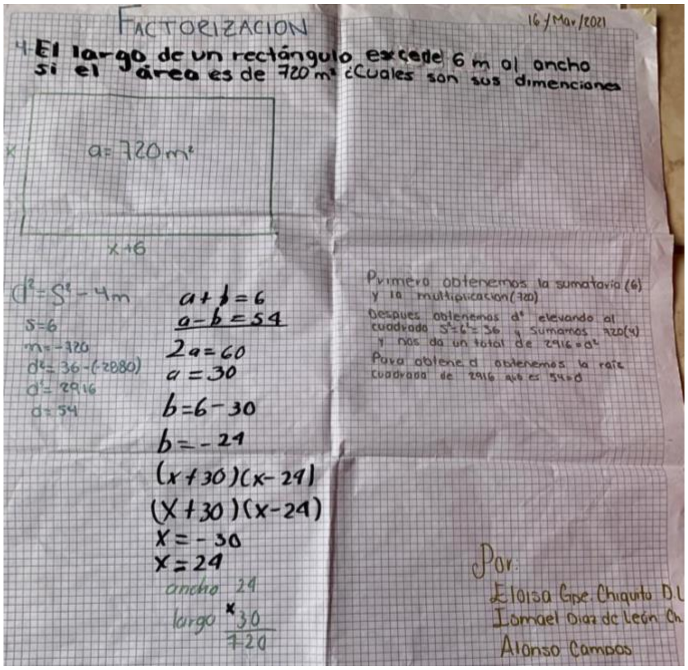


Ilustración 42 Material didáctico elaborado por los alumnos para su exposición, problema 4 de la Evaluación formativa.

Los alumnos usaron el concepto de área de un rectángulo y la información del enunciado del problema para establecer una ecuación cuadrática que no escribieron en el cartel ($x^2 + 6x - 720 = 0$), decidieron darle prioridad en la presentación ante el grupo a explicar que factorizaron por el método de factorización generalizada que desarrollaron en la sesión 3. Se lograron los objetivos de aplicar la factorización para resolver un problema de aplicación y explicar al grupo su procedimiento. Al igual que con el resto de los equipos la docente monitoreó la actividad, pero no fue necesario retroalimentar, el equipo realizó la actividad de forma totalmente independiente.

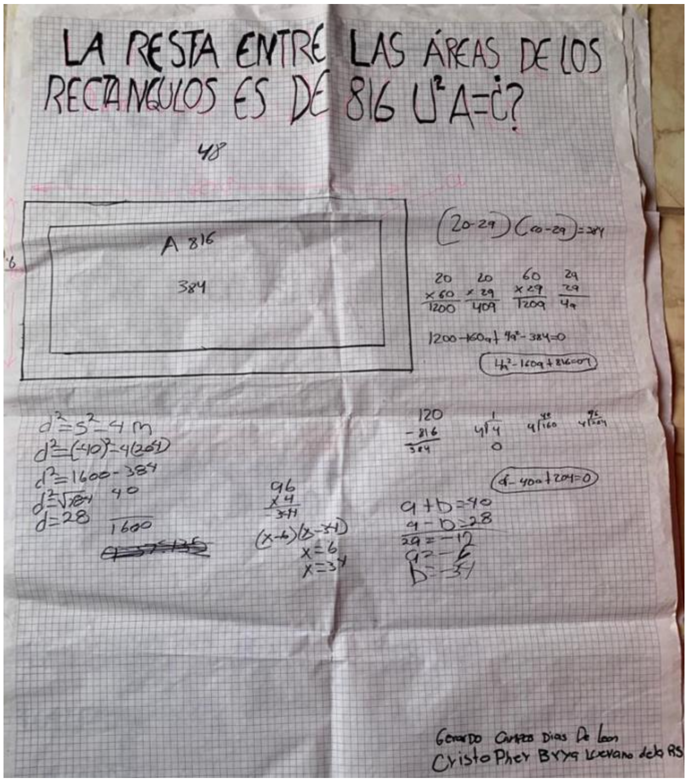
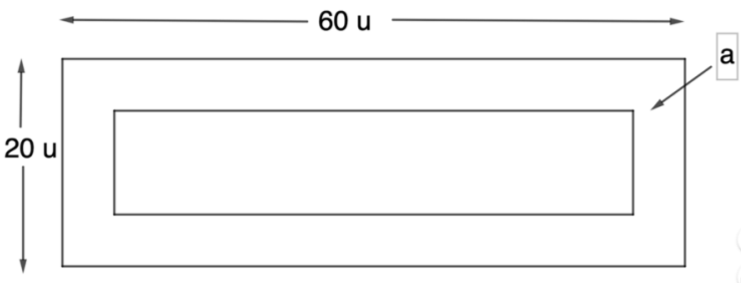


Ilustración 43 Material didáctico elaborado por los alumnos para su exposición, problema 5 de la Evaluación formativa.

Los alumnos de este equipo lograron los objetivos de la actividad, pero requirieron mucho apoyo, su presentación en el cartel es deficiente. En este problema se tiene un enunciado y un rectángulo inicial con información importante que los alumnos no incluyeron:



Usaron la variable a para representar el ancho entre los dos rectángulos, usando el concepto y el procedimiento para obtener el área de un rectángulo establecieron la ecuación cuadrática que resolvieron por factorización, empleando el método de factorización generalizada que fue desarrollado en la sesión 3. Descartaron el resultado donde $a = 34$, porque no se ajusta a las condiciones del problema.

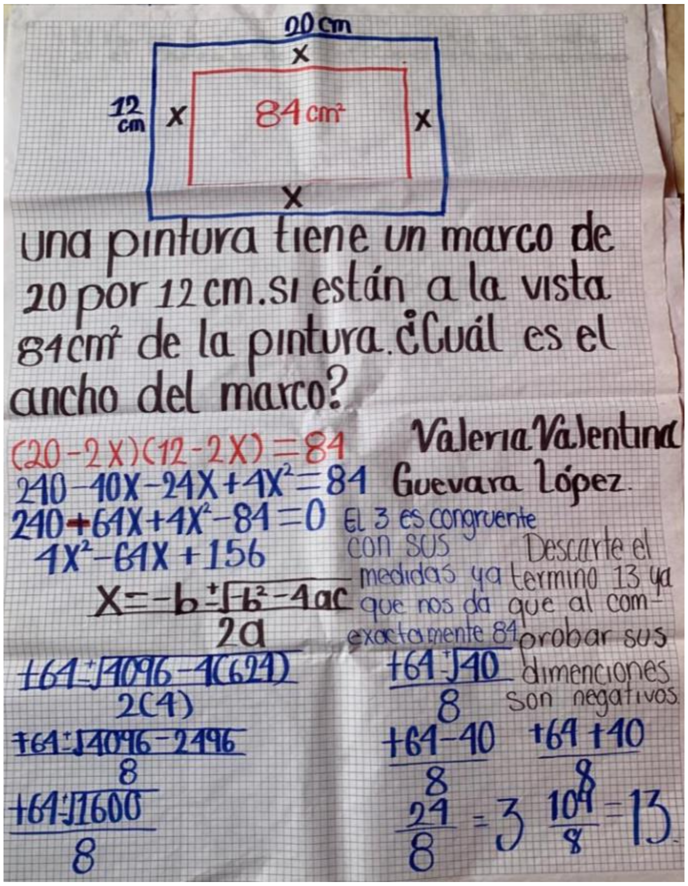


Ilustración 44 Material didáctico elaborado por los alumnos para su exposición, problema 6 de la Evaluación formativa .

La alumna que resolvió el problema usó el concepto y procedimiento de obtención del área de un rectángulo para establecer la ecuación cuadrática que representa al problema y la resolvió usando la fórmula general, realizó la actividad de forma más o menos independiente, pero no consiguió uno de los objetivos de aprendizaje que consistió en el uso de la factorización para resolver un problema de aplicación, el otro objetivo de aprendizaje fue la explicación al grupo sobre cómo fue su procedimiento de solución, si se consiguió. Descartó el resultado $x = 13$ porque no se ajustaba a las condiciones del problema.

5.1.9 El juego reversible. La representación geométrica de la factorización

Para la realización de esta actividad ya solo se presentaron 13 alumnos, los que conforman el grupo A, en dos subgrupos, en el primero trabajaron seis alumnos y en el segundo siete. En esta actividad son 10 reactivos, contaron con 150 minutos, de forma individual eligieron resolver uno de los ejercicios y conforme terminaron, los organicé en equipos para resolver los faltantes. En el caso del ejercicio 6, las alumnas hicieron la factorización geométrica, pero les resultó otro trinomio.

Los ejercicios más difíciles de resolver fueron evidentemente los que tienen términos negativos, la estrategia que adoptaron los alumnos fue la de factorizar el trinomio por tanteo (factorización algebraica) y posteriormente la factorización geométrica, hubo algunos que la verificaron de forma geométrica en su libreta (hecha a lápiz con rectángulos a mano alzada) antes de representarla con los rectángulos recortados. En el caso donde es necesario efectuar una resta para obtener el término que contiene a la variable de forma lineal, en la rectangularización hay más piezas (de las indicadas por los coeficientes numéricos del trinomio, ver ilustración 14), cuando se han de sumar no ocurre.

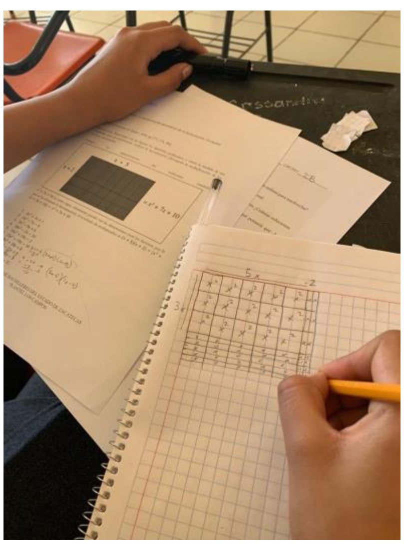


Ilustración 45 Verificación geométrica hecha por un alumno sobre la factorización por tanteo de un trinomio con términos negativos para hacer la representación geométrica con rectángulos recortados.

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que resolvieron este reactivo
1	15.38
2	15.38
3	15.38
4	15.38
5	30.77
6	15.38
7	15.38
8	7.69
9	15.38
10	15.38

Tabla 13 Porcentaje de alumnos que acertaron a cada reactivo de El Juego reversible. La factorización geométrica de la factorización, grupo A.

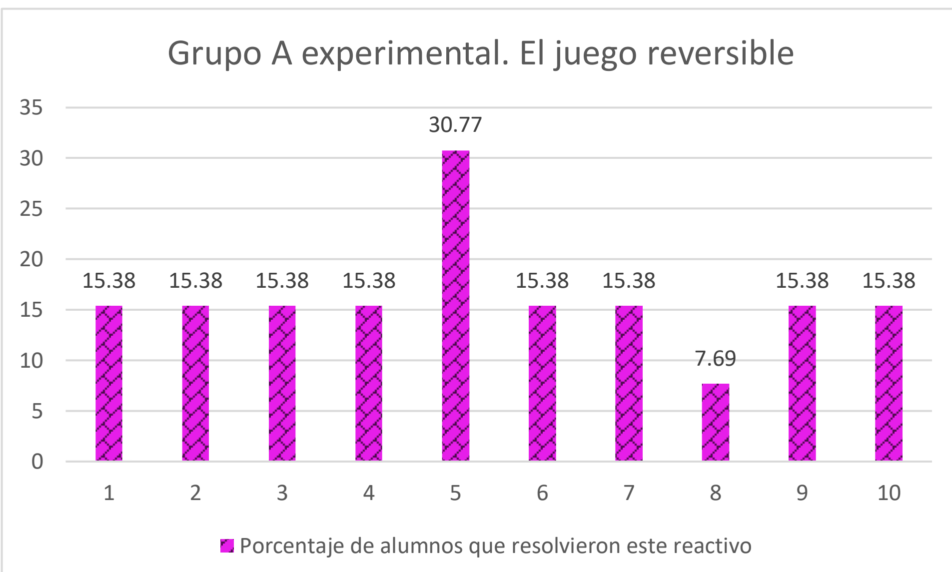


Ilustración 46 Porcentaje de alumnos que resolvieron cada reactivo de El Juego Reversible. La representación geométrica de la factorización.

El 61.5% de los alumnos participó en la solución de dos de los reactivos, el 38.5% restante solo participó en la solución de un ejercicio en los mismos 150 minutos.

Elaboré material didáctico para explicar el proceso de la factorización geométrica, expliqué cómo pueden rectangularizarse de manera que los rectángulos recortados coinciden con la expresión del trinomio. Para el caso de los trinomios con signos negativos expliqué que el espacio puede dividirse en cuadrantes y asignarles a los cuadrantes I y III los signos positivos y a los cuadrantes II y IV signos negativos:

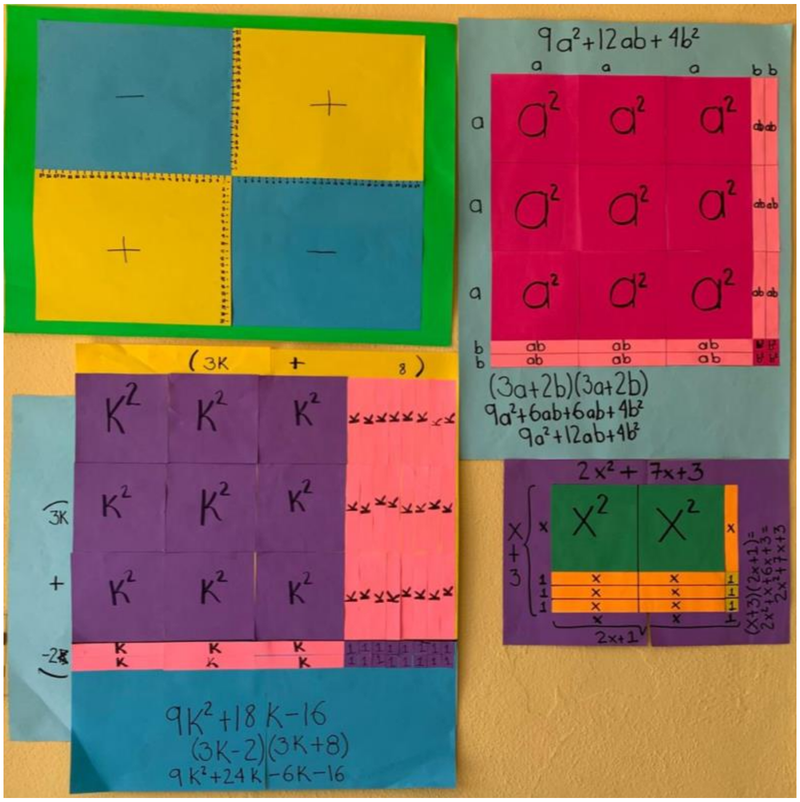


Ilustración 47 Material didáctico elaborado para explicar la representación geométrica de la factorización de los trinomios, el uso de los cuadrantes para comprender la representación geométrica de términos con signos negativos.

Los alumnos en su proceso de factorización geométrica. Es el juego reversible porque ocurre también la factorización algebraica, es posible iniciar con cualquiera de las dos formas, mis alumnos encontraron más sencillo iniciar la geométrica cuando los términos del trinomio son todos positivos e iniciar con la algebraica cuando hay uno o dos términos negativos.

Ilustración 48 Alumnos en el proceso de factorización geométrica.

La representación geométrica de la factorización:

1. $2x^2 + 3x + 1$
2. $3x^2 - 7x - 6$

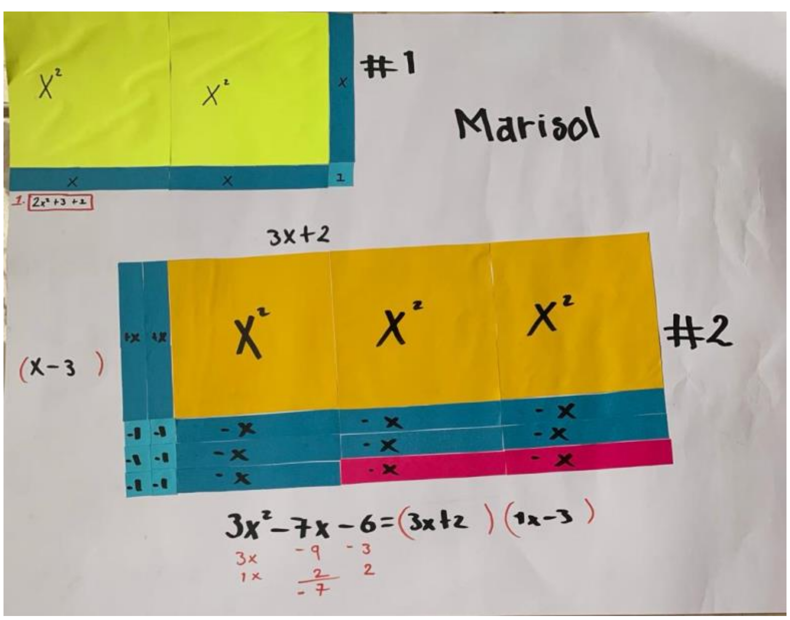


Ilustración 49 Factorización geométrica de los trinomios $2x^2$+3x+1 y $3x^2$-7x-6.

3. $3x^2 - 9x + 6$

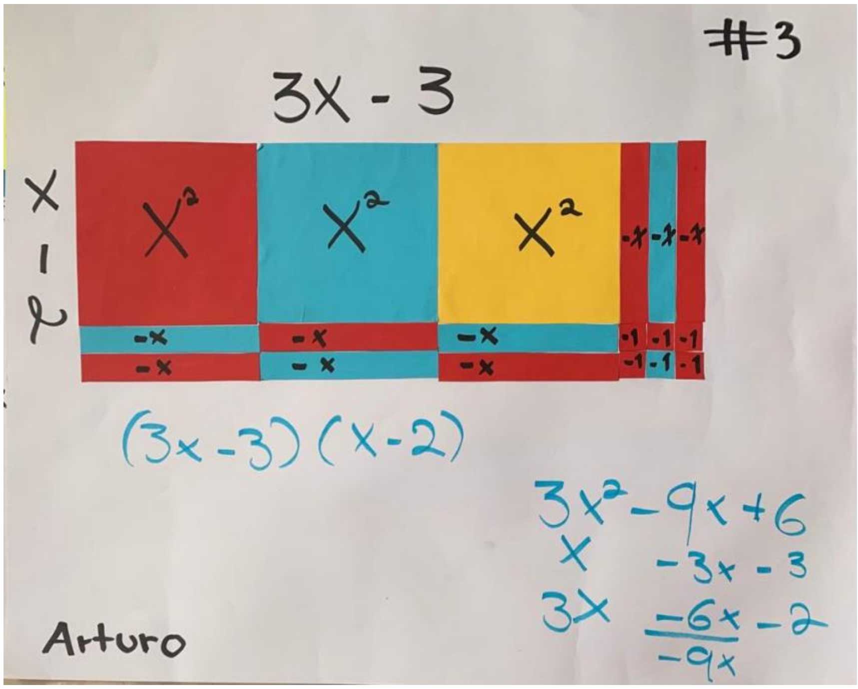


Ilustración 50 Factorización geométrica del trinomio 3x2-9x+6.

4. $18x^2 - 3x - 10$

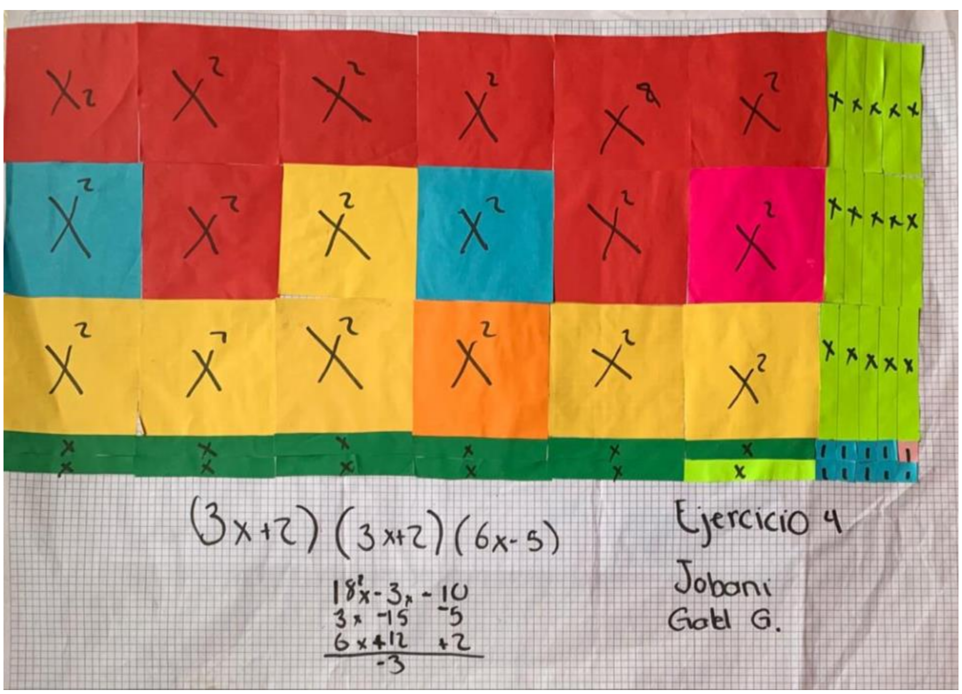


Ilustración 51 Factorización geométrica del trinomio 18x^2-3x-10.

5. $14x^2 + 19x - 3$

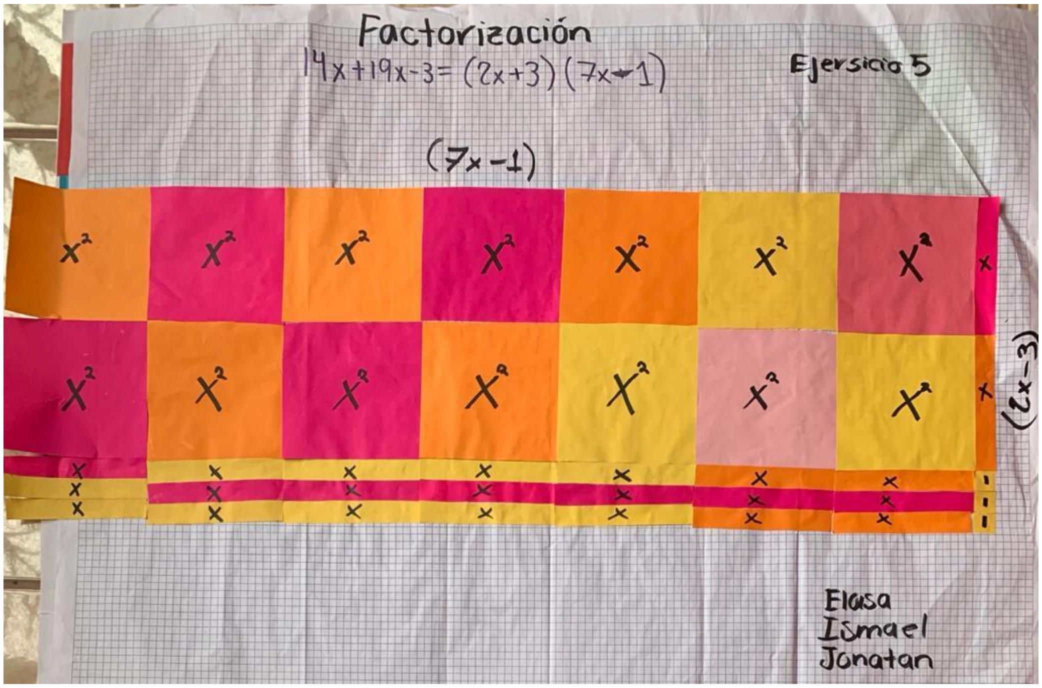


Ilustración 52 Factorización geométrica del trinomio 14x²+19x-3.

6. $15x^2 + 19x - 10$ (propuesta), $12x^2 + 14x - 10$ (realizada)

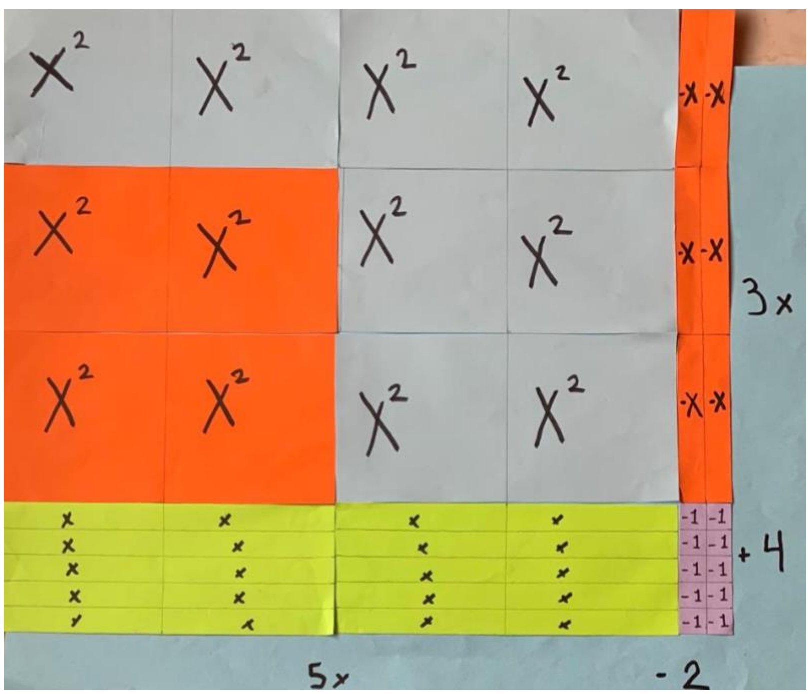


Ilustración 53 Factorización geométrica del trinomio 12x²+14x-10.

7. $9x^2 + 18x + 8$

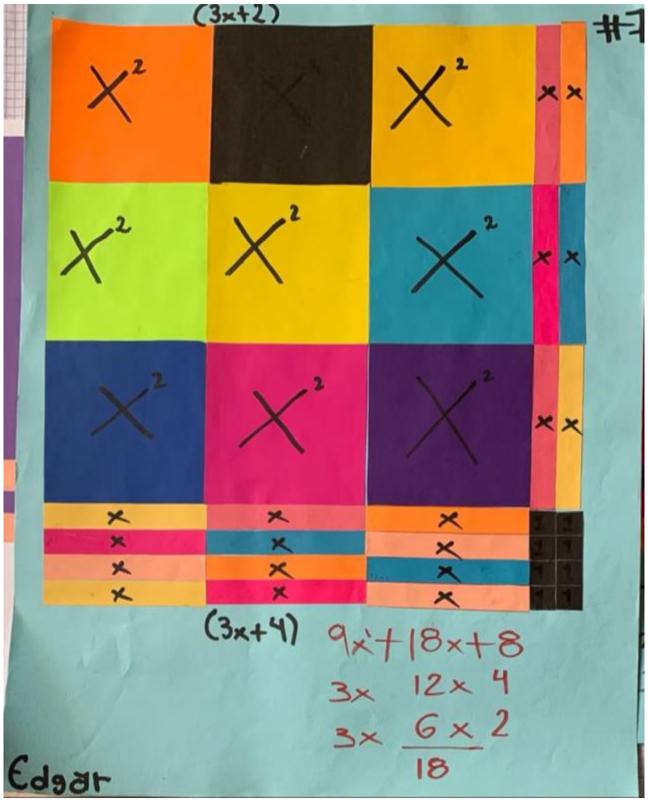


Ilustración 54 Factorización geométrica del trinomio $9x^2+18x+8$.

8. $5x^2 - 22x + 8$

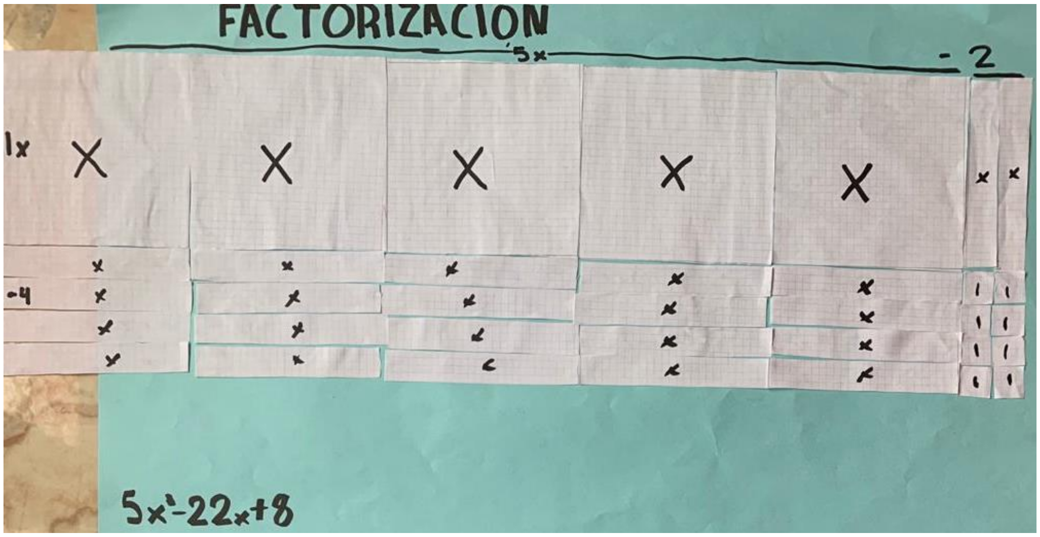


Ilustración 55 Factorización geométrica del trinomio $5x^2-22x+8$.

9. $9x^2 + 12x - 5$

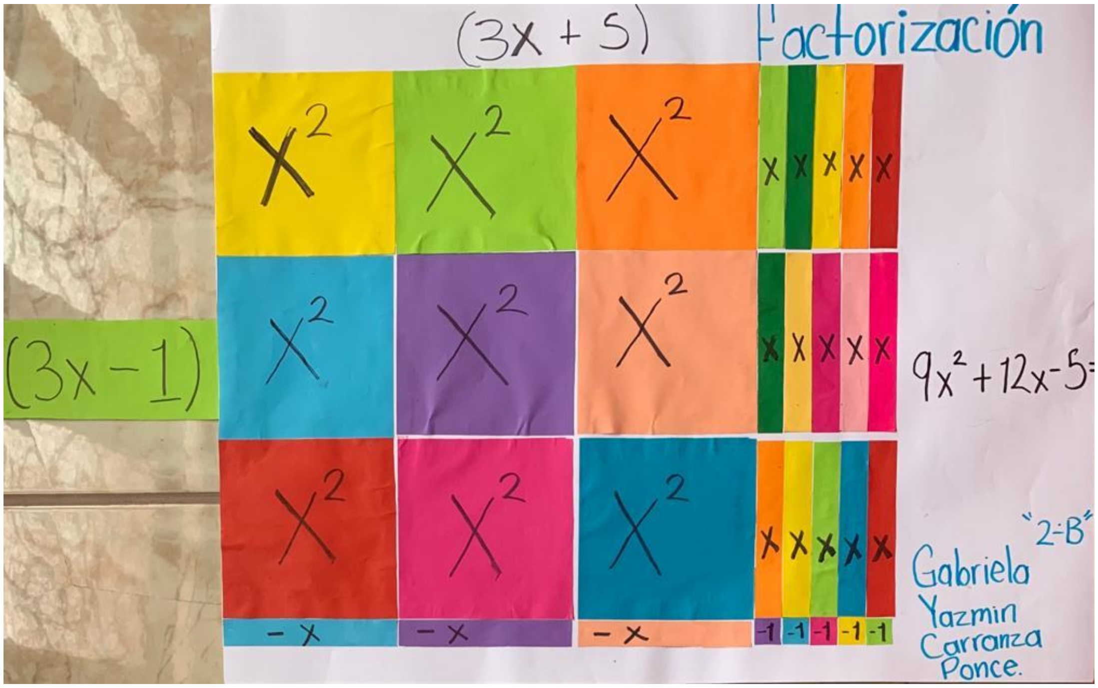


Ilustración 56 Factorización geométrica del trinomio 9x²+12x-5.

10. $4x^2 + 4x - 15$

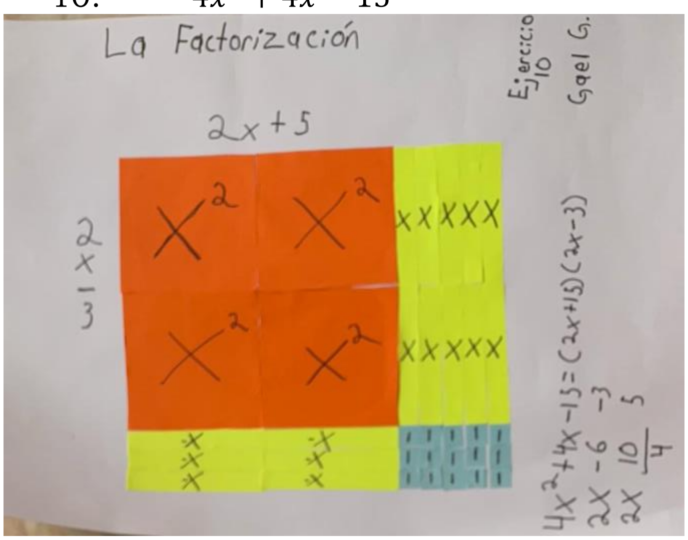


Ilustración 57 Factorización geométrica del trinomio 4x²+4x-15.

5.1.10 Escala de actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos

Este documento contiene 21 afirmaciones relacionadas con la resolución de problemas matemáticos, en las cuales los alumnos tenían cinco opciones para cada una: totalmente de acuerdo, parcialmente de acuerdo, indeciso, parcialmente en desacuerdo y totalmente en desacuerdo. La intención fue conocer y valorar de forma cualitativa, la disposición manifiesta hacia la resolución de problemas matemáticos, la evaluación de las actitudes y los valores forman parte de la triangulación de información. Considero, sin embargo, que dichas respuestas son el "retrato" de ese instante solamente.

Grupo A experimental

Afirmaciones	Los alumnos
1. Es una lata leer sobre problemas matemáticos	50% está indeciso
2. Odio tener que anotar en el cuaderno los procedimientos para resolver problemas matemáticos	33% está parcialmente de acuerdo y 33% está totallmente de acuerdo
3. Las clases de matemáticas me aburren horriblemente	58% están totalmente de acuerdo
4. Ojalá la clase de matemáticas durara todo el día	50% está indeciso
5. No me gusta ver presentaciones sobre temas matemáticos en las clases	42% está indeciso
6. Odio las clases de matemáticas	50% está totalmente de acuerdo
7. Aprender matemáticas es una lata	50% está totalmente de acuerdo
8. Trabajar con el equipo de matemáticas hace que me sienta más importante	42% está parcialmente de acuerdo
9. Me gustaría formar parte de un club de matemáticas que se reuniera después de las clases	58% está indeciso

10. Conocer cómo resolver problemas matemáticos es algo que me produce satisfacción	42% está totalmente en desacuerdo
11. No me importa corregir un problema matemático varias veces, lo importante es aprender a resolverlo	42% está totalmente en desacuerdo
12. Me suelo distraer y aburrir en la clase de matemáticas	50% está parcialmente de acuerdo
13. Compartir mi correcta interpretación a la solución de un problema matemático hace que me sienta bien	33% está indeciso, 33% parcialmente en desacuerdo y 33% totalmente en desacuerdo
14. Es estupendo hablar de matemáticas con mis padres	42% está totalmente de acuerdo
15. Me gusta hacer dibujos de los problemas matemáticos	42% está indeciso
16. No se me ocurriría hablar de matemáticas fuera de clase con mis amigos	42% está indeciso
17. Me gusta aplicar las matemáticas al resolver problemas	33% está parcialmente en desacuerdo y 33% totalmente en desacuerdo
18. Suelo estar impaciente porque llegue la clase de matemáticas	42% está indeciso
19. Ojalá no tuvieramos la clase de matemáticas tan frecuentemente	42% está totalmente de acuerdo y 42% está indeciso
20. Hacer trabajos de matemáticas en casa es una tontería	58% está totalmente de acuerdo
21. Matemáticas es una de mis clases preferidas	67% está parcialmente en desacuerdo

Nota: En la columna de la derecha solo agregué las opiniones que obtuvieron los porcentajes más altos a cada afirmación.

Tabla 14 Opiniones de los alumnos con los porcentajes más altos a cada afirmación de la Escala de actitudes hacia la resolución de problemas matemáticos, grupo A.

5.1.11 Evaluación sumativa

Esta actividad la realizaron de manera individual, sin apoyo de la docente y tuvieron 100 minutos para resolverla.

Grupo A experimental

Reactivo	Porcentaje de alumnos que acertaron en este reactivo
1	70
2	30
3	30
4	40
5	0
6	10
7	0
8	60
9	80
10	80

Tabla 15 Porcentaje de los alumnos que acertaron en cada uno de los reactivos de la Evaluación sumativa, grupo A.

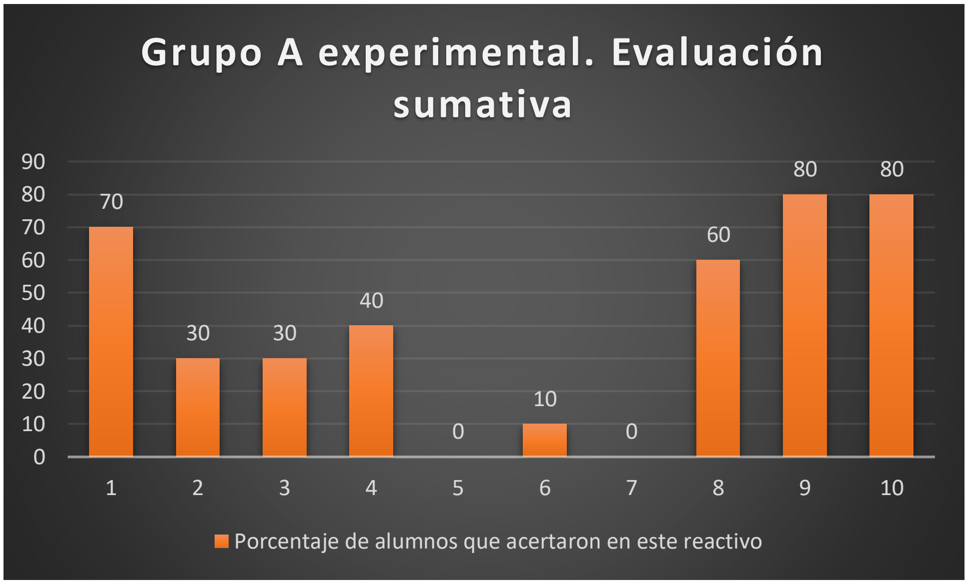


Ilustración 58 Porcentaje de alumnos que acertaron en cada uno de los reactivos de la Evaluación sumativa, grupo A.

Ningún alumno acierta en el reactivo 5, es un ejercicio de aplicación de la ecuación cuadrática. De igual manera, ningún alumno acierta en el reactivo

7, no identifican que no es posible resolverla con los métodos vistos porque se trata de una ecuación cúbica. El reactivo 6 un alumno lo resuelve correctamente de forma aritmética y otro logra plantear el esquema correcto para resolverlo, pero no llega a emplear el Teorema de Pitágoras para resolverlo algebraicamente, este tema forma parte de Matemáticas II. En el reactivo 1 es necesario describir verbalmente lo que es una ecuación cuadrática y cuáles son los procedimientos que pueden usarse para resolverlas. En el reactivo 8, el 60% de los alumnos obtiene la ecuación cuadrática a partir de la representación geométrica de la factorización de un trinomio. El 80% de los alumnos relaciona correctamente la representación geométrica de un trinomio con la factorización algebraica, lo que significa la reversibilidad de la factorización geométrica.

5.1.12 Cuestionario de opinión de los alumnos sobre las actividades realizadas

Este cuestionario consta de 17 preguntas. Lo convertí en un cuestionario en línea, por lo cual fue una actividad a distancia, sin presión de tiempo.

1. **¿Qué aprendiste?**

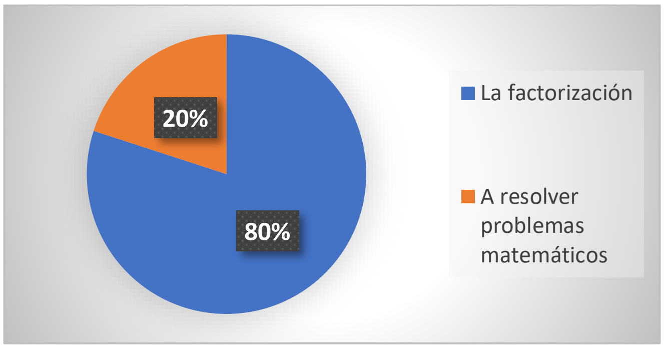


Ilustración 59 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Qué aprendiste?

2. **¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades?**

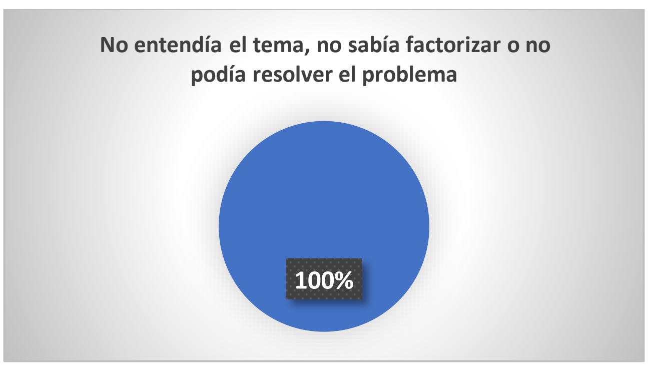


Ilustración 60 Opinión de los alumnos a la pregunta: ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades?

3. **¿Las superaste?**

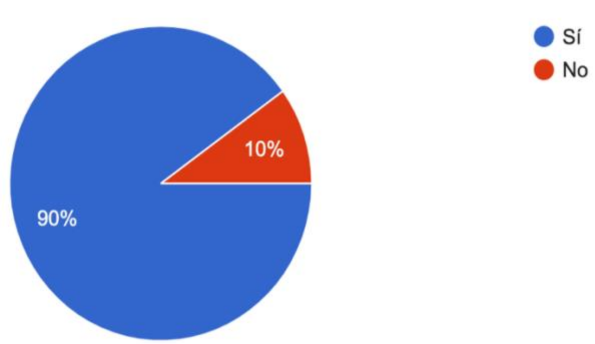


Ilustración 61 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿las superaste?

4. Si fue así, ¿cómo lo hiciste?

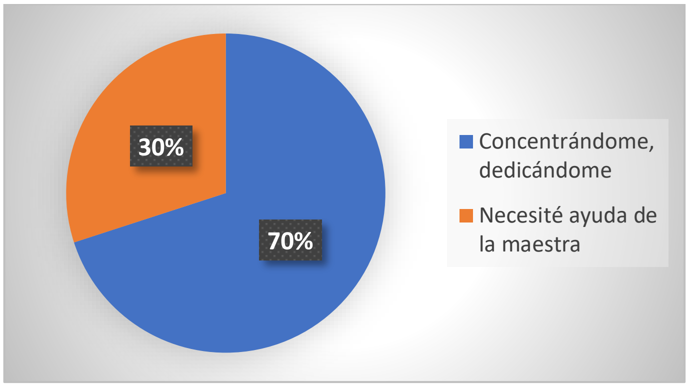


Ilustración 62 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: Si fue así, ¿cómo le hiciste?

5. Registra si estás teniendo dificultades de aprendizaje.

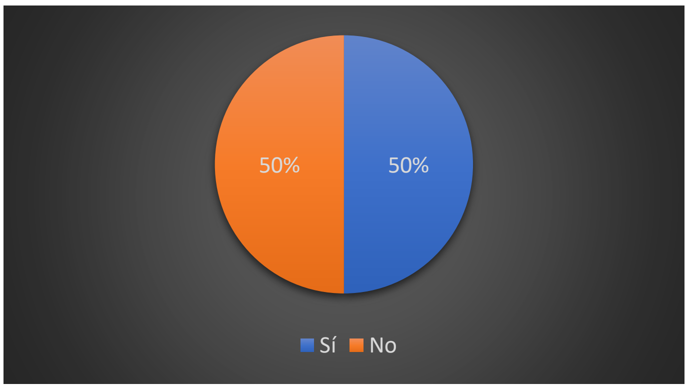


Ilustración 63 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la afirmación: Registra si estás teniendo dificultades de aprendizaje

6. Menciona dos conceptos que aprendiste

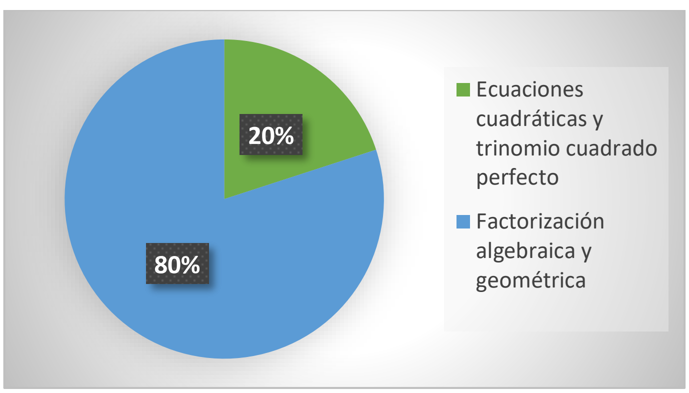


Ilustración 64 Porcentajes de opiniones de los alumnos a: Menciona dos conceptos que aprendiste.

7. ¿Cuáles conceptos no entendiste?

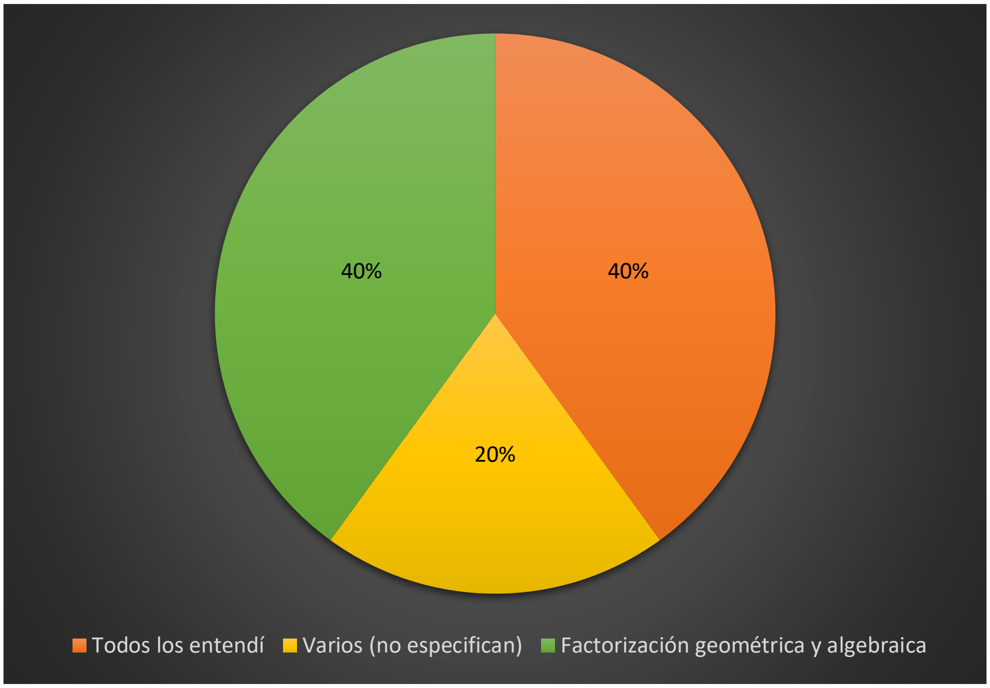


Ilustración 65 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Cuáles conceptos no entendiste?

8. Describe dos procedimientos distintos para factorizar trinomios cuadrados ordenados.

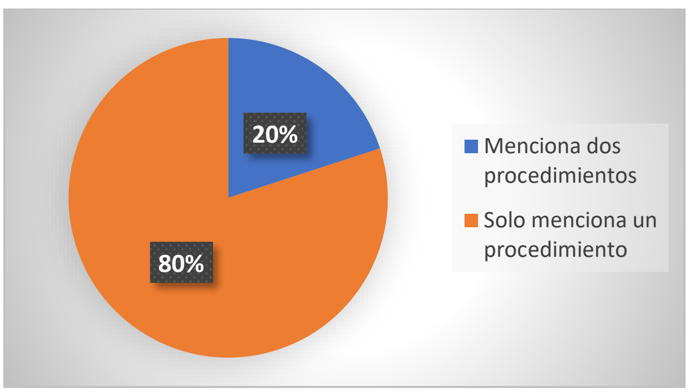


Ilustración 66 Porcentajes de opiniones de los alumnos a: Describe dos procedimientos distintos para factorizar trinomios cuadrados ordenados.

Dos alumnos describen un procedimiento de forma incompleta, todos solo mencionan los procedimientos, algunos sí mencionan dos, la mayoría solo menciona uno.

9. ¿Con qué tema de la vida cotidiana se relaciona la factorización de una ecuación cuadrática?

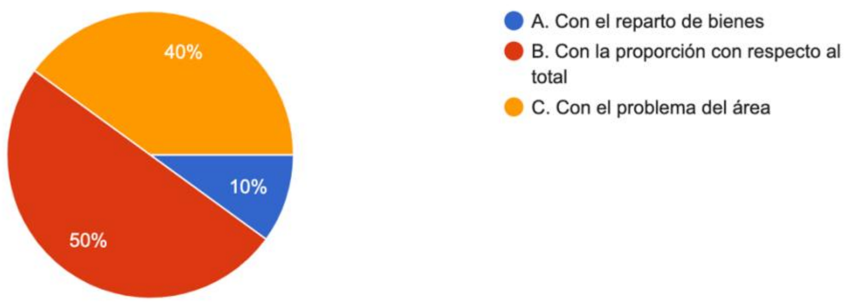


Ilustración 67 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Con qué tema de la vida cotidiana se relaciona la factorización de una ecuación cuadrática?.

10. ¿Será posible usar lo aprendido para resolver problemas matemáticos en el futuro?

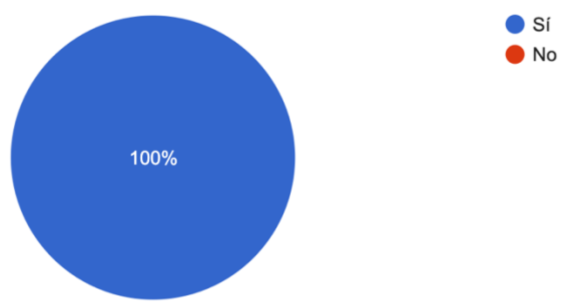


Ilustración 68 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Será posible usar lo aprendido para resolver problemas matemáticos en el futuro?

11. ¿Hizo falta explicar y/o resolver problemas de aplicación?

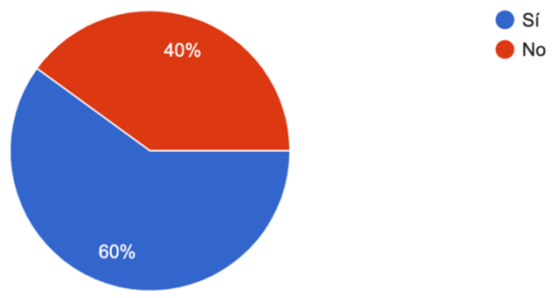


Ilustración 69 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Hizo falta explicar y/o resolver problemas de aplicación?

12. ¿Identificas plenamente cómo resolver por factorización algebraica una ecuación cuadrática?

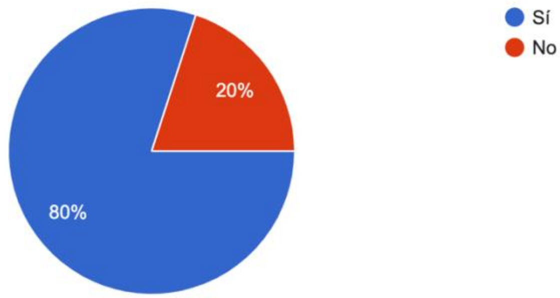


Ilustración 70 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Identificas plenamente cómo resolver por factorización algebraica una ecuación cuadrática?

13. ¿Identificas plenamente cómo resolver por factorización geométrica una ecuación algebraica?

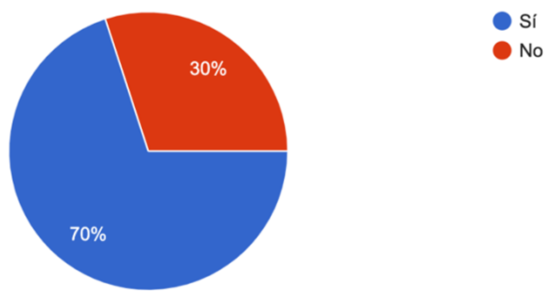


Ilustración 71 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Identificas plenamente cómo resolver por factorización algebraica una ecuación cuadrática?

14. ¿Consideras que la representación geométrica te facilitó entender el proceso de la factorización de ecuaciones cuadráticas?

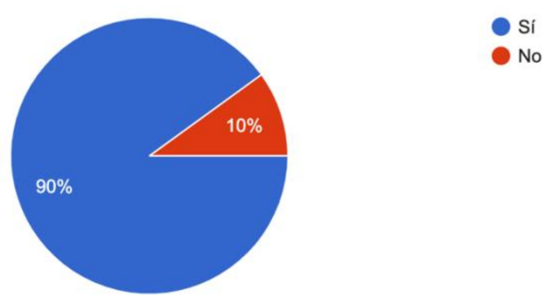


Ilustración 72 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta ¿consideras que la representación geométrica te facilitó entender el proceso de la factorización de ecuaciones cuadráticas?

15. ¿Entiendes y puedes explicar qué es la reversibilidad de la factorización?

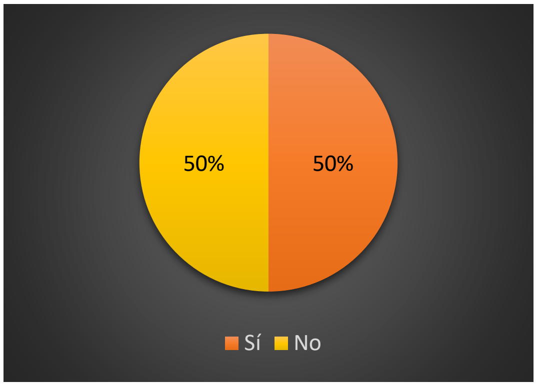


Ilustración 73 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿entiendes y puedes explicar qué es la reversibilidad de la factorización?

El 50% de los alumnos manifiesta que si lo entiende y puede explicarlo, pero no lo explica.

16. ¿El ritmo de las clases fue de acuerdo con tu aprendizaje?

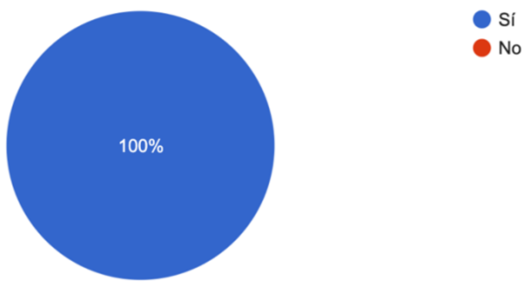


Ilustración 74 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿El ritmo de las clases fue de acuerdo con tu aprendizaje?

17. ¿Se evaluaron conceptos, procedimientos y actitudes?

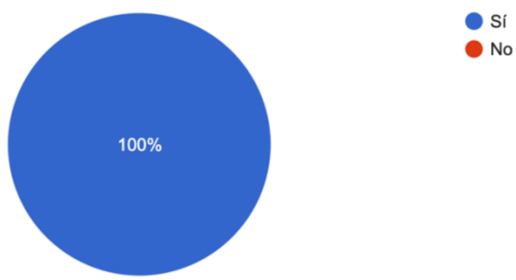


Ilustración 75 Porcentajes de opiniones de los alumnos a la pregunta: ¿Se evaluaron conceptos, procedimientos y actitudes?

5.2 Análisis cuantitativo de los resultados

Se comparan resultados de la evaluación diagnóstica y de la evaluación sumativa y se prueba la hipótesis con la distribución t de Student.

La evaluación diagnóstica consta de 7 reactivos, se aplicó durante la primera sesión, resuelta de forma individual, sin apoyo de la docente a 33 alumnos, 13 del grupo A experimental y 20 del grupo B control.

Evaluación diagnóstica								
Alumno	Reactivo							Total de reactivos correctos
	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	0	1	1	0	5
2	1	1	0	0	1	1	1	5
3	0	0	0	0	1	0	0	1
4	0.75	0	0	0	0	0	0	0.75
5	0	0	0	0	1	0	0	1
6	0.5	0	0	0	0	0	0	0.5
7	0.75	0	0	0	1	1	1	3.75
8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0.75	0	0	0	1	0	0	1.75
10	0	1	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0.75	0	0	0	1	0	0	1.75
13	0.5	0	0	0	1	0	0	1.5
No de alumnos que contestaron correctamente el reactivo	8*	3	1	0	8	3	2	$\bar{x}_1 = 1.76923077$

*8 personas, aunque parcialmente, la suma es 6

Tabla 16 Aciertos por alumno a la Evaluación Diagnóstica, grupo A.

El promedio de aciertos obtenidos para el grupo A es de 1.7692 aciertos por alumno.

El reactivo 5 es el que la mayor cantidad de alumnos acierta con 8 alumnos que aciertan, este trata de factorización geométrica, en el reactivo 4 ninguno acierta, este reactivo trata de la factorización de un trinomio.

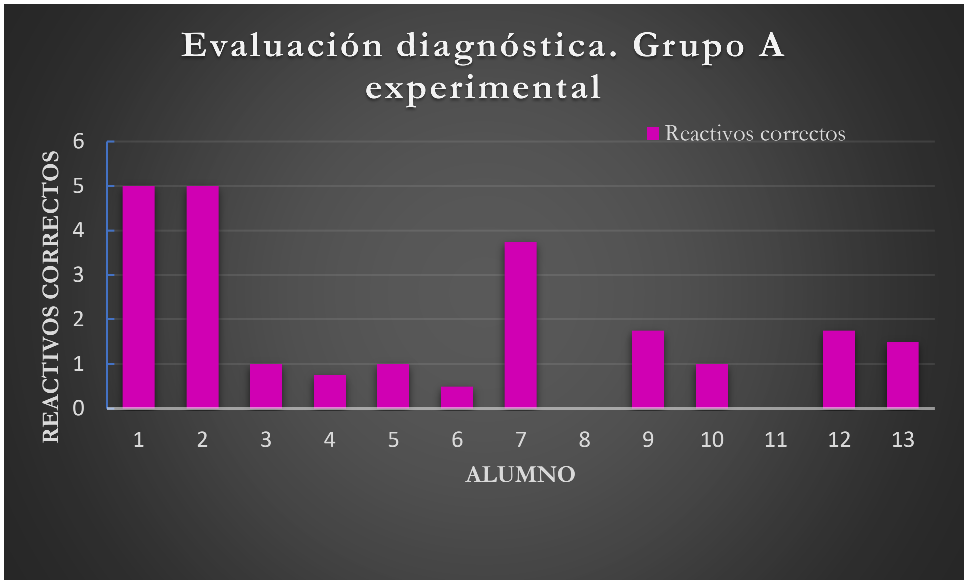


Ilustración 76 Aciertos por alumno a la Evaluación Diagnóstica, grupo A.

La mayor cantidad de aciertos por alumno en el grupo A es 5, de un total de 7. Dos alumnos obtuvieron 5 aciertos, un alumno 3.75, diez alumnos obtienen menos de 2 aciertos, entre ellos hubo dos alumnos que obtuvieron cero aciertos.

Evaluación diagnóstica								
Alumno	Reactivo							Total de reactivos correctos
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.25	0	0	0	0	0	0	0.25
3	0.50	0	0	0	0	0	0	0.50
4	0	0	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0.25	0	0	0	1	0	0	1.25
9	0	0	0	0	1	0	1	2
10	0.5	0	1	0	0	0	0	1.5
11	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0.75	1	1	1	1	0	1	5.75
18	0	0	0	0	1	0	0	1
19	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0
No de alumnos que contestaron correctamente el reactivo	5*	2	2	1	6	0	4	$\bar{x} = 0.9125$

*5 personas, aunque parcialmente, la suma es 3.

Tabla 17 Aciertos por alumno a la Evaluación Diagnóstica, grupo B.

El promedio de aciertos en el grupo B es de 0.9125 aciertos por alumno.

El reactivo 5 es el que más alumnos aciertan, trata sobre factorización geométrica. En el reactivo 6 ningún alumno acierta, es un problema de aplicación que dará origen a una ecuación cuadrática, misma que para resolverla se requiere factorización.

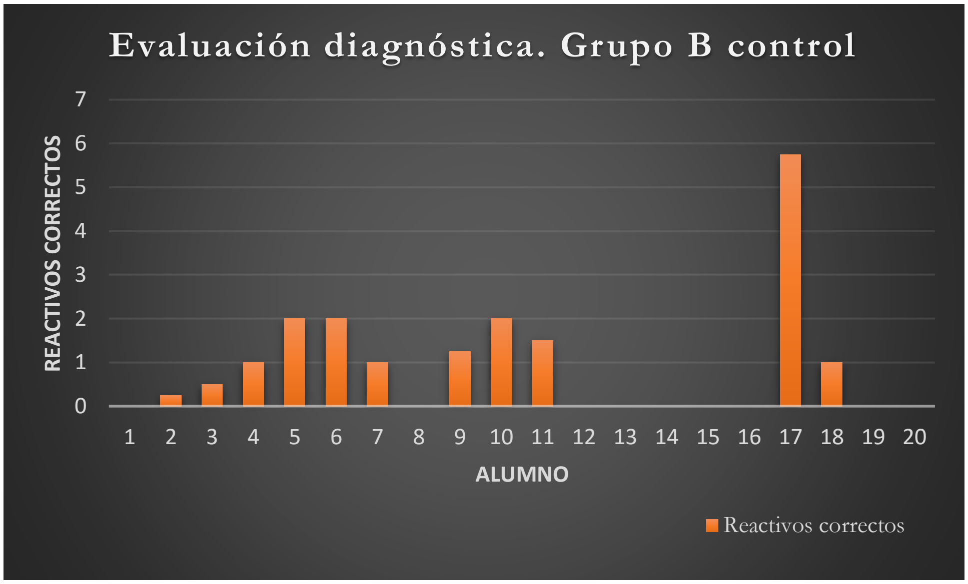


Ilustración 77 Aciertos por alumno a la Evaluación Diagnóstica, grupo B.

La mayor cantidad de aciertos obtenida por un alumno es de 5.75, mayor incluso que en el grupo A. Los 19 alumnos restantes obtienen ≤ 2 aciertos.

El promedio de aciertos es mayor en el grupo A que en el grupo B, con 1.7692 y 0.9125 respectivamente.

En la sesión 11 realizaron la evaluación sumativa, sin apoyo de la docente, de manera no presencial. Dicha evaluación consta de 10 reactivos que solo resolvieron 9 de los 13 alumnos del grupo A. Los alumnos del grupo B ya no se presentaron a partir de la sesión 8.

El promedio obtenido por los 9 alumnos que entregaron la evaluación sumativa es de 4.4444 aciertos por alumno, comparado con el promedio de la evaluación diagnóstica para este grupo, que es de 1.7692, sí se observa un incremento. Ambas evaluaciones contienen reactivos para evaluar conocimiento conceptual y procedimental, pero la evaluación sumativa contiene 3 problemas de aplicación mientras que la evaluación diagnóstica solo contiene 1.

Evaluación sumativa											
Alumno	Reactivo										Total de reactivos correctos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	6
2	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	7
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3
4											
5											
6											
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
8	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	4
9	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	5
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
11	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	5
12											
13	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6
No de alumnos que contestaron correctamente el reactivo	7	3	3	4	0	1	0	6	8	8	$\bar{x}_2 = 4.4444$

Tabla 18 Resultados de la Evaluación sumativa, grupo A.

Nota: Solo nueve de los 13 alumnos entregaron la evaluación sumativa. El promedio se obtiene solo con los resultados de los nueve alumnos.

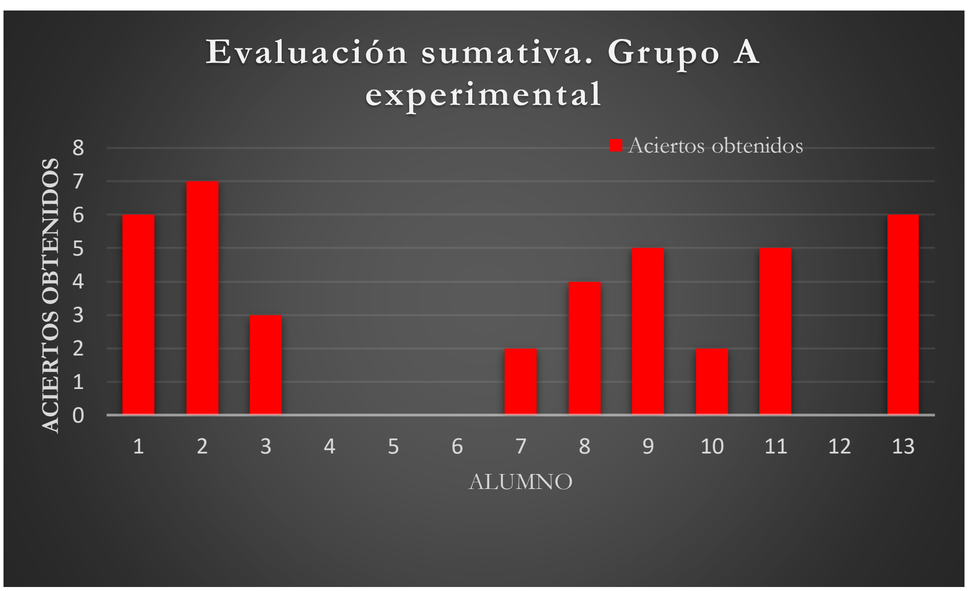


Ilustración 78 Aciertos obtenidos por los alumnos en la Evaluación Sumativa, grupo A.

La mayor cantidad de aciertos la obtiene el alumno 2, con 7 aciertos, dos alumnos obtienen 6 aciertos y dos alumnos solo obtienen 2 aciertos.

5.2.1 Prueba de hipótesis nula

Al emplear el método de diferencias entre dos medias poblacionales se determinó si hay o no diferencias significativas entre los promedios de los reactivos de la evaluación diagnóstica y de la evaluación sumativa. Se utilizó la distribución t de Student debido a que se trata de una muestra pequeña, $n \leq 30$ (13 alumnos).

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 \; no \; existe \; diferencia \; entre \; los \; promedios.$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \; existe \; diferencia \; entre \; los \; promedios.$$

Para usar la distribución t de Student, se requieren los valores de la desviación estándar ponderada y tamaño total de efecto:

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

y

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

En este caso $n_1 = 13$, $n_2 = 9$, sustituyendo:

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(13 - 1) + s_2^2(9 - 1)}{13 + 9 - 2} = \frac{s_1^2(12) + s_2^2(8)}{20}$$

y

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{9}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{22}{117}}}$$

Alumno	Evaluación diagnóstica reactivos correctos	Evaluación sumativa reactivos correctos	Evaluación diagnóstica $(\boldsymbol{x_i - \bar{x}_1})^2$	Evaluación sumativa $(\boldsymbol{x_i - \bar{x}_2})^2$
1	5	6	10.4380	3.1605
2	5	7	10.4380	7.7161
3	1	3	0.5916	1.4937
4	0.75		1.0387	
5	1		0.5916	
6	0.5		1.6108	
7	3.75	2	3.9235	4.9381
8	0	4	3.1300	0.0493
9	1.75	5	0.0003	0.6049
10	1	2	0.5916	4.9381
11	0	5	3.1300	0.6049
12	1.75		0.0003	
13	1.5	6	0.0724	3.1605
TOTALES	**23**	**40**	**35.5576**	**26.6667**

Tabla 19 Tabla para el cálculo de la desviación estándar

Los valores del promedio y la desviación estándar son:

Evaluación diagnóstica: $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} = a_i}{n} = \frac{23}{13} = 1.7692$

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{12}(35.5576)} = 1.72$$

Evaluación sumativa: $\bar{x}_2 = \frac{40}{9} = 4.4444$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{8}(26.6667)} = 1.83$$

Sustituyendo

$$s_p = \sqrt{\frac{1.72^2(12) + 1.83^2(8)}{20}} = \sqrt{\frac{35.5008 + 26.7912}{20}} = \sqrt{\frac{62.2920}{20}} = \sqrt{3.1146}$$

$$s_p = 1.7648$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{22}{117}}} = \frac{4.4444 - 1.7692}{1.7648\sqrt{\frac{22}{117}}} = \frac{2.6752}{0.7653} = 3.4956$$

$t = 3.4956$ que se conoce como t_{cal}

En una distribución t de Student los grados de libertad son $n_1 + n_2 - 2$, por lo tanto:

$$grados\ de\ libertad = n_1 + n_2 - 2 = 13 + 9 - 2 = 20$$

De la tabla de Distribución t de Student para 20 grados de libertad y un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$ (99% de confianza y 1% de riesgo) el valor es 2.528.

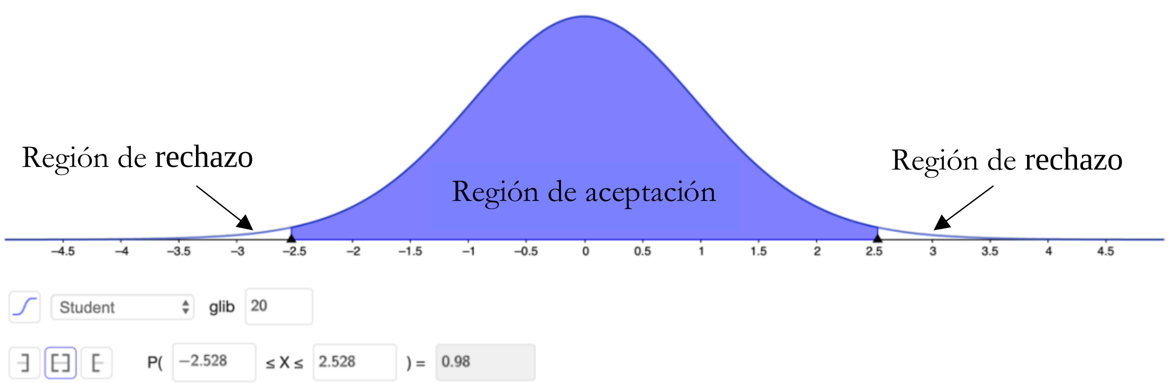


Ilustración 79 Región de aceptación y de rechazo para el valor 2.528.

La regla de decisión es:

Rechazar H_0 si $t_{cal} < -2.528$ ó $t_{cal} > 2.528$

Como $t_{cal} = 3.4956$ se rechaza la hipótesis H_0 y se acepta la hipótesis de investigación H_1 que nos indica que existe una diferencia significativa entre las medias de los resultados obtenidos en la Evaluación diagnóstica y la Evaluación sumativa. Podemos concluir que con un 99% de confianza se puede afirmar que: los alumnos lograron una diferencia de aprendizaje entre los niveles de conocimiento previo y posterior al aplicar la secuencia didáctica, lo cual hace válida la hipótesis de investigación.

5.3 Conclusiones

La factorización es solo uno de los temas de álgebra que inciden en el alto índice de reprobación. Sabemos que los factores son muchos y que es imposible reducir las causas del problema de la reprobación o la mala calidad del aprendizaje a una sola, que tendrían que considerarse muchas de ellas a la vez para lograr incidir de manera significativa. El propósito de esta investigación fue conocer el efecto de diversificar las representaciones matemáticas de la factorización para conocer si con ello el aprendizaje significativo aumenta.

Entre los problemas más frecuentes observados como resultado de la aplicación de la secuencia didáctica es que los alumnos no dominan el proceso de factorización, en muchos de los casos ni siquiera eligen el procedimiento adecuado para resolver un problema. Practicar la resolución de problemas para que los alumnos tengan la oportunidad de transitar de una representación a otra les permite construir y utilizar el concepto de la factorización al ser la herramienta con la cual resuelven el problema, cuando vuelvan a tener la necesidad de resolver nuevos problemas transformarán el concepto en herramienta si los problemas están contextualizados, de esta forma adquieren aprendizajes significativos. En la práctica el que aprende consolida los significados recién aprendidos.

Las dificultades en el aprendizaje de la factorización son persistentes, la influencia de la diversificación es poco notoria debido a que aunados a los factores que tradicionalmente influyen, en la aplicación de esta secuencia influyeron las restricciones impuestas para la contención de la pandemia, lo que hizo aún más difícil lograr efectos positivos. En este estudio partimos de reconocer que la mayoría de los alumnos aún no han desarrollado un pensamiento formal alto, por lo que las actividades son concretas en su mayoría, razón por la cual se obtienen resultados positivos, aunque solo respecto a pocos alumnos porque la mayoría no concluyó la intervención educativa.

La matemática es un aprendizaje cultural que requiere ser re-aprendido y co-aprendido en la interacción, razón por la cual hicimos un gran esfuerzo para aplicar la intervención educativa de manera presencial, con todos los cuidados necesarios, trabajando con pequeños grupos y sin presión en cuanto a la asistencia. La intención fue trabajar con dos grupos de 20 alumnos cada uno, el receptor del experimento y el grupo control. Al iniciar la aplicación participaron 33 estudiantes y al terminar (la sesión 11, que fue la evaluación sumativa) solo participaron 9 alumnos. La sesión 12 fue aplicada de manera virtual, a distancia, no sincrónica (participaron 10 alumnos). Los resultados de la sesión 1 y la sesión 11 son los que se usan para el análisis estadístico (cuantitativo) de los resultados.

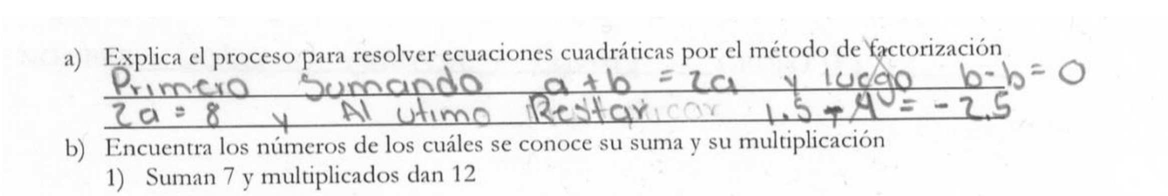
La geometría es visualmente atractiva, cautiva a quienes la practican, en la intervención educativa, en la sesión 9, denominado juego reversible, cuando factorizaron geométricamente, una actividad de tipo concreto, todos los alumnos se integraron al trabajo, en un ambiente cooperativo, donde al manipular objetos intercambiaron ideas, interpretaron y argumentaron resultados. Experimentar entre compañeros fortaleció sus conocimientos y estrategias para cuando se enfrenten a situaciones más complejas. La actividad les gustó y manifestaron que entendían el significado de expresiones cuadráticas porque podían visualizarlo, es decir, establecieron relaciones entre los objetos de la factorización.

El uso de estrategias didácticas dinámicas y participativas permitió observar cómo trabajaron los alumnos con la factorización, donde fue posible detectar dificultades y errores en los procedimientos para proporcionar retroalimentación de tal manera que corrijan las acciones para un mejor aprendizaje.

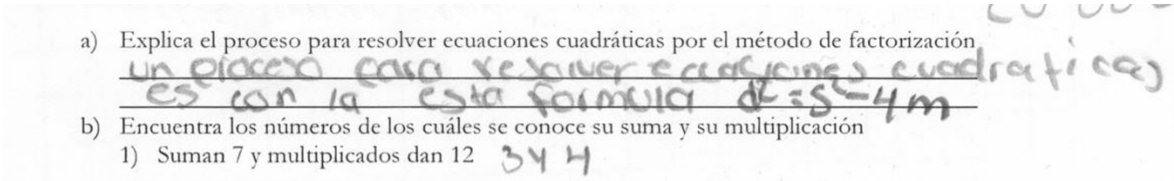
Durante la implementación de la intervención educativa pude corroborar lo dicho por algunos de los investigadores consultados acerca de la incapacidad lingüística de los alumnos para comprender e interpretar los enunciados verbales para la resolución de problemas, este fue un obstáculo recurrente, que no les permitía avanzar en la solución del problema.

Ejemplos de la incomprensión lingüística, para expresar y redactar el procedimiento efectuado durante la actividad:

Alumno a)


a) Explica el proceso para resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización
Primero Sumando a+b = 2a y luego b-b = 0
2a = 8 y Al utimo Restar icar 1.5 + 4 = -2.5
b) Encuentra los números de los cuáles se conoce su suma y su multiplicación
1) Suman 7 y multiplicados dan 12

Alumno b)



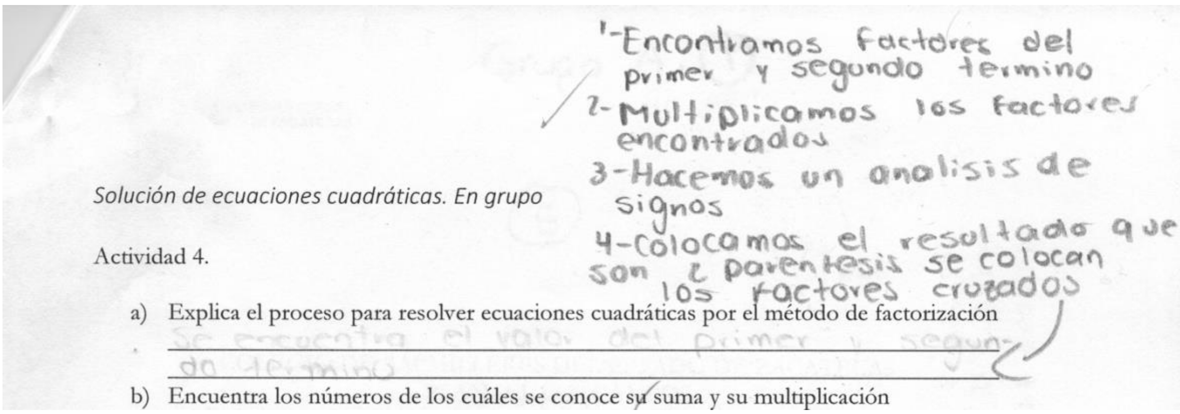
a) Explica el proceso para resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización

un proceso para resolver ecuaciones cuadraticas es con la esta formula $d^2=S^2-4m$

b) Encuentra los números de los cuáles se conoce su suma y su multiplicación

1) Suman 7 y multiplicados dan 12 3 y 4

Alumno c)



Solución de ecuaciones cuadráticas. En grupo

Actividad 4.

1-Encontramos factores del primer y segundo termino
2-Multiplicamos los factores encontrados
3-Hacemos un analisis de signos
4-colocamos el resultado que son 2 parentesis se colocan los factores cruzados

a) Explica el proceso para resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización

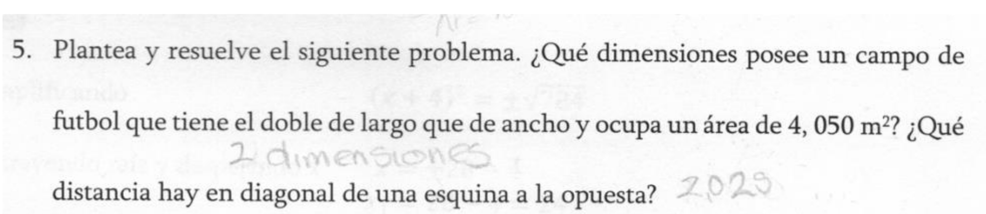
Se encuentra el valor del primer y segundo termino

b) Encuentra los números de los cuáles se conoce su suma y su multiplicación

Es el alumno que demostró mayor comprensión lingüística para expresar el procedimiento de factorización por tanteo, comprende el proceso y lo realiza exitosamente, pero al redactar dice que factoriza el primer y segundo término cuando debiera decir que factoriza el primer y el tercer término.

Ejemplos de incapacidad lingüística para comprender e interpretar los enunciados de problemas a resolver:

Alumno a)



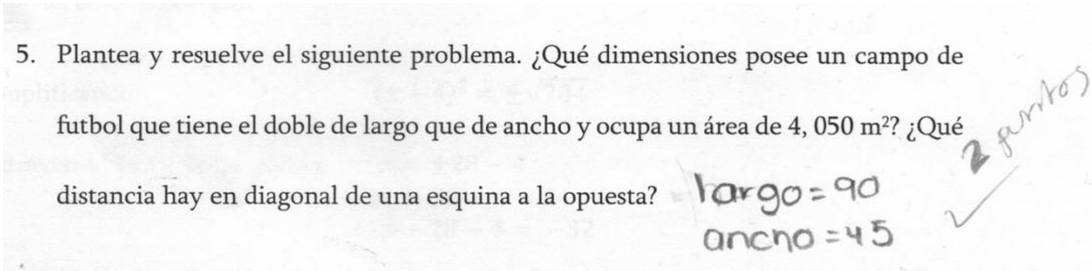
5. Plantea y resuelve el siguiente problema. ¿Qué dimensiones posee un campo de futbol que tiene el doble de largo que de ancho y ocupa un área de 4, 050 m^2? ¿Qué distancia hay en diagonal de una esquina a la opuesta?

2 dimensiones

2025

Este alumno reconoce dos dimensiones: largo y ancho y simplemente divide el área entre dos, no había adquirido de forma correcta el concepto y el procedimiento para obtener el área de un rectángulo. Esta incomprensión bloquea el hecho de que pueda concluir el ejercicio, es decir, no le permite avanzar en el proceso de solución.

Alumno b)

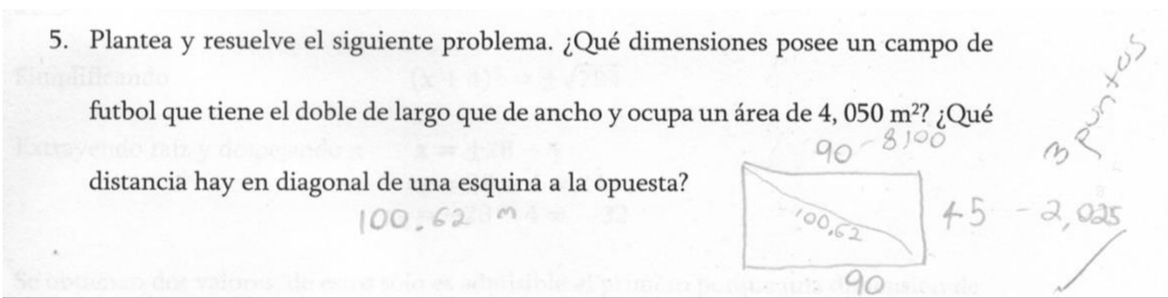

5. Plantea y resuelve el siguiente problema. ¿Qué dimensiones posee un campo de futbol que tiene el doble de largo que de ancho y ocupa un área de 4, 050 m²? ¿Qué distancia hay en diagonal de una esquina a la opuesta?

largo = 90
ancho = 45

2 puntos

Este alumno conoce y usa de forma correcta el concepto y el procedimiento para calcular el área de un rectángulo, pero no obtiene la diagonal por lo que no resuelve por completo el problema, no identifica que se le pide usar el teorema de Pitágoras.

Alumno c)


5. Plantea y resuelve el siguiente problema. ¿Qué dimensiones posee un campo de futbol que tiene el doble de largo que de ancho y ocupa un área de 4, 050 m²? ¿Qué distancia hay en diagonal de una esquina a la opuesta?

100.62

Este alumno comprende y usa de forma correcta los conceptos y procedimientos para obtener el área de un rectángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo (teorema de Pitágoras).

Fueron pocos los que pudieron establecer las relaciones entre los objetos sin apoyo. Para contrarrestar la inhibición del aprendizaje fue efectivo diversificar las representaciones, la contextualización clarifica tanto el concepto como las relaciones entre los objetos y la comunicación favoreció el aprendizaje cooperativo. La contextualización empleada fue relacionar el problema del área con la ecuación cuadrática o trinomio cuadrático ordenado a factorizar. Se eligieron problemas en los cuales fuera posible trabajar en más de una representación: numérica, algebraica y/o geométrica.

De acuerdo con el programa de estudio de Matemáticas I, los alumnos deben aprender matemáticas al resolver problemas significativos de su vida desde diversos enfoques, analizando de forma crítica la información, utilizando los conocimientos como una herramienta, y movilizando recursos y estrategias a fin de promover alternativas de solución, una metodología, proceso en el que argumenten sobre sus decisiones y propuestas. Los alumnos adquirieron el conocimiento matemático referente a la factorización porque pudieron transitar de una representación a otra, es decir, pudieron practicar, aunque no lo suficiente (por cuestiones de tiempo y de riesgo por la situación de pandemia), la reversibilidad, de lo geométrico a lo algebraico y viceversa, así como de lo numérico a lo algebraico.

Con la investigación realizada obtuve algunos datos que le dan sustento a la investigación, pero sé que no aporta grandes conclusiones ampliamente generalizables. Considero que es muy importante lo que he aprendido en el proceso, me queda claro que no conseguí implementar la intervención como lo había planeado, pero con efectos positivos, reproducibles y muy susceptibles de mejorarse, reconozco que en el futuro debo reforzar la parte donde apliqué lo de la rectangularización (el juego reversible, sesión 9), es decir, mis alumnos deben practicar más, primero modelado, luego guiado y posteriormente supervisado para llegar al momento en el que lo hagan de forma independiente y automatizada, para poder evaluar si queda integrado a su bagaje cultural y conocer si lo utilizan para resolver problemas de aplicación. Fue una muy buena estrategia, bien recibida por los estudiantes, pero no tuvimos la oportunidad de que la practicaran lo suficiente, además de que solo lo hizo una pequeña parte del total de alumnos de primer semestre.

La secuencia didáctica tuvo buena aceptación, es funcional y viable, cuyos resultados fueron previsibles y son reproducibles, mejoraría con clases presenciales por la interacción y con una mayor oportunidad de practicar la factorización y especialmente la factorización geométrica.

Por las restricciones de tiempo debido a la pandemia, modifiqué la aplicación de la evaluación formativa, originalmente en mi planeación sería una actividad individual, pero al aplicarla organicé los pequeños grupos con los cuales trabajé como un equipo, por ello no hago la comparación cuantitativa con los resultados de la evaluación formativa. Tanto la evaluación diagnóstica como la evaluación sumativa fueron resueltas de forma individual por los alumnos.

Considero que los resultados cualitativos y cuantitativos convergen, se confirman y apoyan las mismas conclusiones, y a la vez se complementan, llevándonos a un enfoque más completo. En cuanto a la deducción de expresiones matemáticas, recordar expresiones para calcular el área de figuras geométricas, argumentar sobre un procedimiento, plantear una ecuación cuadrática para resolver un problema de aplicación, descripción de la relación entre perímetro y área de un rectángulo, relación entre las incógnitas y los datos de un problema, preguntas conceptuales sobre el área de un rectángulo, expresar verbalmente el significado de una fórmula matemática, deducir e interpretar de qué concepto geométrico se trata a partir de resultados numéricos.

Los alumnos usaron la reversibilidad de la factorización geométrico-algebraica en “El juego reversible” al factorizar los trinomios cuadráticos ordenados con términos positivos y los que contenían términos negativos. Resultó muy interesante ver que adoptaron como metodología factorizar algebraicamente las ecuaciones cuadráticas con términos negativos y luego representarlas geométricamente mientras que para las ecuaciones que solo contenían términos positivos factorizaron geométricamente de forma directa. La explicación a esto es que el número de figuras geométricas corresponde exactamente con los coeficientes del trinomio cuadrático cuando los términos son todos positivos, pero cuando estos trinomios tienen signos negativos no necesariamente ocurre así, en la representación geométrica aún es necesario efectuar la resta (en la suma no) entre los términos que contienen la variable de forma lineal para que corresponda con los coeficientes de la expresión algebraica (ver ilustración 14).

Hubo aprendizaje significativo, pero no el esperado, los errores persisten, incluso los más elementales como manejo erróneo de signos y de números racionales (aritmética), falta de colocación del exponente 2 al binomio y/o signo intermedio incorrecto (al factorizar un trinomio cuadrado perfecto), conceptuales y de resolución de ejercicios de aplicación al no lograr determinar los factores o plantear la ecuación cuadrática correcta.

Las contradicciones que podemos apreciar en las respuestas al cuestionario de opinión (sesión 12) dan cuenta que hubo aprendizaje, pero este no fue lo suficientemente afianzado.

El promedio de aciertos en la Evaluación Diagnóstica es mayor en el grupo A que en el grupo B, con 1.7692 y 0.9125 aciertos por alumno, respectivamente. En una escala de 0 a 10 la calificación promedio para el grupo A que es el receptor del experimento es 2.5, es decir, corresponde al 25% de lo que se pregunta, mientras que la calificación promedio para el grupo B que es el grupo control es 1.3, es decir, corresponde al 13% de lo que se pregunta.

El promedio obtenido de aciertos en el grupo A fue mayor en la Evaluación Sumativa que en la Evaluación Diagnóstica, con 4.4444 y 1.7692 aciertos por alumno, respectivamente. Ambas evaluaciones fueron resueltas de forma individual por los alumnos. Para efectos comparativos, el dominio cognitivo en la evaluación sumativa fue en promedio del 44.4% y en la evaluación sumativa fue del 25% respecto a lo que se pregunta, en una escala del 0 al 10 se obtuvo un promedio de 4.4 en la evaluación sumativa y 2.5 en la evaluación diagnóstica.

Como $t_{cal} = 3.4956$ que valora el efecto, es mayor a 2.528, de la tabla de Distribución de Student de acuerdo con el número de alumnos participantes en las evaluaciones Diagnóstica y Sumativa se concluye que existe una diferencia significativa entre los promedios obtenidos en dichas evaluaciones, por lo que los alumnos lograron una diferencia de aprendizaje, por lo que la hipótesis de investigación es válida.

Referencias bibliográficas

Aguilar, M., Navarro, J., López, J. y Alcalde, C. (2002) "Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos". *Psicothema*. 14(2) 382-386 Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Cádiz. http://www.psicothema.com/pdf/736.pdf

Aguilar, S. y Barroso, J. (2015) "La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa". *Revista Medios y Educación*. 73-88. http://dx.doi.org/10.12795/pixelbit.2005.i47.05

Bello, I. (1998). *Álgebra elemental*. México: Thompson.

Butto, C. y Rojano, T. (2004) "Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría". *Educación Matemática*.16(1) 113-148. www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol16/vol16-1/vol16-1-5.pdf

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanis, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas: ITESM.

Cruz, E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática*. (Tesis de maestría). CICATA. IPN México. http://repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/11394

Deriard, A. (2018) *La historia detrás de los constructos de dialéctica instrumento objeto y el juego de marcos*. DOI https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss6id4896

Dirección General de Bachillerato (2017). *Matemáticas I*. https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFB/1er-semestre/MatematicasI.pdf

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2005) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: McGrawHill.

Dirección General de Bachillerato (2018). *Documento base del bachillerato general (MEPEO)*. Recuperado el 9 de noviembre de 2019 de www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/pdf/Doc_Base_22_11_2018_dgb.pdf

Douady, R. (2009) *Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos*. Cuaderno de didáctica de la matemática (3). http://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady

Gálvez, G. (1997) "La didáctica de las matemáticas". En: Parra, C., Saíz, I. (Comps) *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Editorial Paidós Educador. 39-50. http://didacticadelamatematic4.files.wordpress.com/2013/06/greciagalvez1.pdf

García, F. (2012). *La tesis y el trabajo de tesis*. Recomendaciones metodológicas para la elaboración de los trabajos de tesis. México: Limusa.

Gatica-Lara, F. y Uribarren-Berrueta, T. (2013) "¿Cómo elaborar una rúbrica?" *Investigación en Educación Médica*. Vol. 2 Núm. 5. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id.=349733230010.pdf

Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006) "Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*"*. *Revista Relime 9*(1) 117-150. http://www.ugr.es/~godino/funciones-semioticas/vision_didactica_francesa.pdf

González, M. (enero-abril, 2001) "La evaluación del aprendizaje: tendencias y reflexiones críticas". *Educación Media Superior* (15)1. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=scl_arttext&pid=50864-2141200100010010

Ibáñez, P. (2018). *Matemáticas I*. México: Cengage.

López, E. (2008). *Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, una propuesta didáctica para el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades* (Tesis de maestría). FES-Acatlán, UNAM, México. Consultada el 24 de marzo de 2020. http://es.slideshare.net

Méndez, T. (2008) "Dificultades en la práctica de productos notables y factorización". *Revista del Instituto de Matemática y Física*. (15) Pag. 59-69. http://www.matesup.cl.pdf

Méndez, T. (2012). "Marco figural como medio para factorizar polinomios cuadráticos". *Boletim de Educacao Matemática*, *26*(44), 1395-1416. ISSN: 0103-636X. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291226280013.pdf

Ospina, M. (2015) *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM*. (Tesis de Maestría). Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. http://www.bidigital.unal.edu.co/52816/1/39433770.2016.pdf

Peralta, D. (2005). *Preconcepciones de los estudiantes que dificultan el aprendizaje del álgebra*. (Tesis de maestría). UNAM. México.

Rizo, H. (julio-diciembre, 2004) "La evaluación del aprendizaje. Una propuesta basada en productos académicos". *REICE Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación* (2)2 19-29.
https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwj8yo-aiIrsAhVO-qwKHdLtCw0QFjABegQIBBAB&url=https%3A%2F%2Fwww.redalyc.org%2Fpdf%2F551%2F55120203.pdf&usg=AOvVaw1HHgRiT9R1K--On6tS7aYh

Rodríguez, L. (2018). *El álgebra geométrica como mediadora en el aprendizaje de la factorización de polinomios*. (Tesis de maestría). Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia. http://repositorio.utp.edu.co

Ruíz, J. (2013) *Matemáticas 1. Álgebra en acción*. México: Grupo Editorial Patria.

Schmelkes, C. y Schmelkes, N. (2016). *Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis)*. México: Oxford University Press.

Soto, F., Mosquera, S. y Gómez, C. (2005) *La caja de polinomios*. 13(1) 83-97 Universidad del Valle. Escuela Regional de Matemáticas. Colombia http://revistaerm.univalle.edu.co/volXIIIN1/Mosquera.pdf

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10,000 años.* Barcelona: Paidós. 185.

Subsecretaria de Educación Media Superior. (2017). *Matemáticas I*. Programa de Estudios. México: DGB. https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFB/1er_semestre/Matematicas-I.pdf

Anexos

Instrumentos de evaluación

Lista de cotejo de la evaluación diagnóstica. Autoevaluación

Respuesta	Registre si se observa
1. $6(a+b), \quad x \cdot x, \quad n \cdot m, \quad z \cdot k$	Valor 1 punto
2. Es el procedimiento inverso de multiplicar	Valor 1 punto
3. Es correcta	Valor 1 punto
4. $(2y+1)(y-4)$	Valor 1 punto
5. $6x^2 + 4x + 9x + 6 = 6x^2 + 13x + 6$ Porque las expresiones representan las dimensiones del rectángulo y al obtener el área se obtiene el trinomio cuadrático ordenado	Valor 1 punto
6. $2x^2 = 4050$ $x^2 = 2025$ $x = 45$ Por lo tanto las dimensiones del rectángulo son 45 y 90 Para la diagonal: $c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = (45)^2 + (90)^2$ $c = 100.623$ Entonces, la diagonal mide 100.623	Valor 3 puntos
7. Lo resolvió correctamente. Corresponde con las condiciones del problema	Valor 1 punto

Elaboración propia.

Lista de cotejo de las preguntas detonantes. Autoevaluación

Respuestas	Registre si se observa
1. Multiplicando la medida de sus lados o bxh	
2. Es la suma de los lados de una figura geométrica	
3. Sumando sus lados o bien 2a+2b	
4. Ambas se obtienen conociendo los lados del rectángulo	
5. Formando expresiones matemáticas que se resuelven mediante procedimientos conocidos	
6. Sí	
7. Una expresión algebraica donde la variable tiene exponente 2	
8. Sí	
9. Es el procedimiento inverso de multiplicar. Consiste en obtener los factores que pueden expresarse como una multiplicación de de dos o más términos, que den como resultado la expresión algebraica de la que partimos.	
10. Factor común, factorización por tanteo, completando el trinomio cuadrado perfecto, fórmula general	
11. Sus dimensiones y la fórmula para obtener la superficie (el área).	
12. No debe ser un número negativo puesto que no tiene sentido. Al medir una longitud siempre obtendremos un resultado positivo.	

Elaboración propia

Lista de cotejo de la Visión geométrica y algebraica de la ecuación cuadrática. Heteroevaluación

Respuestas	Registre si se observa
Parte 1	
a) 5x8=40 y 3x3=9	
b)	
c) 13	
d) 169 y 169	
Parte 2	
a) $a+b$	
b) $a-b$	
c) El área del cuadrado mayor (amarillo)	
d) El área del cuadrado menor (negro)	
e) El área de cada uno de los rectángulos (amarillos)	
f) La suma de las áreas de los rectángulos (amarillos)	
g) Restandole al área del cuadrado grande la suma de las áreas de los rectángulos (amarillos).	
h) $d^2 = s^2 - 4m$	
i) Su diferencia	

Elaboración propia

Lista de cotejo de Una aplicación de la factorización. Heteroevaluación

Respuestas	Registre si se observa
a) $ab = 600, a + b = 50$	
b) La mitad de su perímetro	
c) $s = 50$	
d) $m = 600$	
e) $d = 10$	
f) $a - b = 10$	
g) $\begin{cases} a + b = 50 \\ a - b = 10 \end{cases}$	
h) $a = 30$ $b = 20$	
i) Las medidas de los lados de los rectángulos (amarillos)	
j) $a + b = 50$ $a - b = 10$ $ab = 600$	
k) $30\ x\ 20$	

Elaboración propia

Lista de cotejo de evaluación de la Visión numérica de la factorización. Heteroevaluación

a)

a	b	$s = a + b$	$d = a - b$	$m = ab$	d^2	$s^2 - 4m$
2	1	3	1	2	1	1
5	3	8	2	15	4	4
20	40	60	-20	800	400	400
-8	8	0	-16	-64	256	256
-2	-3	-5	1	6	1	1
200	100	300	100	20,000	10,000	10,000
4	-2.5	1.5	6.5	-10	42.25	42.25
21	20	41	1	420	1	1

Nota. Los números en rojo se proporcionan en el ejercicio. Los números en negro son las soluciones que deberán obtenener.

b) $a = 4$, y $b = 3$
$a = 5.3$ y $b = 1.7$

c) Verificado

Lista de cotejo para evaluar la Solución a las ecuaciones cuadráticas. Heteroevaluación

Respuesta	Registre si se observa
a) Conociendo la suma (s) y la multiplicación de dos números (m), se obtiene la diferencia (d), con la fórmula $d^2 = s^2 - 4m$. Se escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $a + b = s$ y $a - b = d$. Se resuelve. Con los valores de a y b se escribe la factorización como sigue: $(x + a)(x + b)$	
b) $a = 4, b = 3$ $a = 4, b = -2.5$ $a = 5.3, b = 1.7$	
c) 1) $(x + 4)(x + 3)$ 2) $(x + 4)(x - 2.5)$ 3) $(x + 5.3)(x + 1.7)$	
d)	

$\boldsymbol{x^2 + 7x + 12}$
$s = 7, m = 12$
$d^2 = s^2 - 4m = (7)^2 - 4(12)$= 1
$d = 1$
$\begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 1 \end{cases}$

Al resolver el sistema por suma y resta, eliminamos la variable b, quedando que $2a = 8$
Por lo tanto $a = 4$ y $b = 3$

$\boldsymbol{x^2 + 1.5x - 10}$
$s = 1.5, m = -10$
$d^2 = s^2 - 4m = (1.5)^2 - 4(-10) = 42.25$=
$d = 6.5$
$\begin{cases} a + b = 1.5 \\ a - b = 6.5 \end{cases}$

Al resolver el sistema por suma y resta, eliminamos la variable b, quedando que $2a = 8$
Por lo tanto $a = 4$ y $b = -2.5$

$\boldsymbol{x^2 + 7x + 9}$
$s = 7, m = 9$
$$d^2 = s^2 - 4m = (7)^2 - 4(12) = 13$$
$d = 3.6$
$\begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 3.6 \end{cases}$

Al resolver el sistema por suma y resta, eliminamos la variable b, quedando que $2a = 10.6$
Por lo tanto $a = 5.3$ y $b = 1.7$

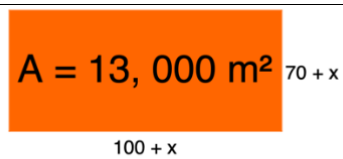
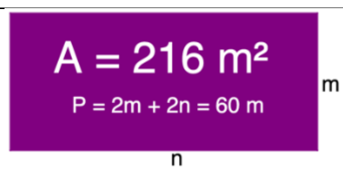
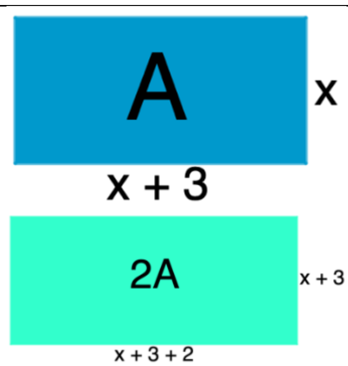
Elaboración propia

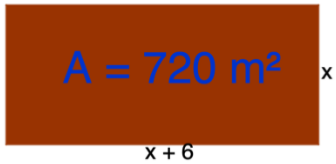
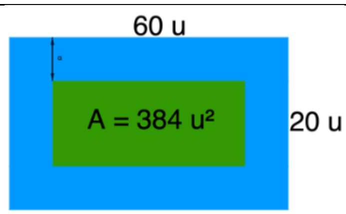
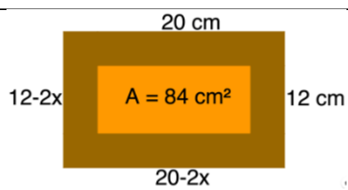
Escala de evaluación de la factorización por tanteo. Heteroevaluación.

Respuesta	Excelente. La respuesta continene el proceso y no hay error en los signos, escribe la respuesta como la multiplicación de dos binomios.	Muy bien. La respuesta contiene el proceso y no hay error en los signos.	Bien. La respuesta contiene el proceso, pero uno de los signos es incorrecto.	Regular. La respuesta solo contiene los resultados o tiene más de un signo incorrecto.	Total
	2	**1.5**	**1**	**0.5**	
1. $(x-2)(x+5)$					
2. $(4x-3)(3x-4)$					
3. $(3x+1)(x-2)$					
4. $(2x-3)(x+3)$					
5. $(3x-1)(3x-2)$					
6. $(6x-5)(5x+4)$					
7. $(3x-2)(x+4)$					
8. $(4x-3)(3x-2)$					
9. $(2x+5)(2x-3)$					
10. $(5x+3)(2x+3)$					
11. $(3x+2)(5x-4)$					
12. $(6x-5)(4x+3)$					
Totales					

Elaboración propia

Lista de cotejo para evaluar el problema de aplicación resuelto. Evaluación formativa. Heteroevaluación.

	Diagrama	Ecuación cuadrática	Solución	Resultados
1		$(100+x)(70+x)=13{,}000$ $7000+100x+70x+x^2=13{,}000$ $\mathbf{x^2+170x-6000=0}$	$s=170$ $m=-6000$ $d^2=s^2-4m$ $d=30$ $\begin{cases} a+b=170 \\ a-b=30 \end{cases}$ $a=200$ $b=-30$ $(x+200)(x-30)$ $x_1=-200$ $x_2=30$ Desechamos $x_1$por ser negativa	Las dimensiones del terreno son: largo 130 y ancho 100 **El ancho de las franjas añadidas es de 30 m**
2		$mn=216$ $m+n=30$ $m=30-n$ $(30-n)n=216$ $30n-n^2=216$ $\mathbf{n^2-30n+216=0}$	$s=-30$ $m=216$ $d^2=s^2-4m$ $d=6$ $\begin{cases} a+b=-30 \\ a-b=6 \end{cases}$ $a=-12$ $b=-18$ $(x-12)(x-18)$ $x_1=12$ $x_2=18$	**Las medidas son: ancho 12 y largo 18**
3		$x(x+3)=A$ $x^2+3x=A$ $(x+3)(x+5)=2A$ $x^2+8x+15=2A$ $x^2+8x+15=2(x^2+3x)$ $\mathbf{x^2-2x-15=0}$	$s=-2$ $m=-15$ $d^2=s^2-4m$ $d=8$ $\begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=8 \end{cases}$ $a=3$ $b=-5$ $(x+3)(x-5)$ $x_1=-3$ $x_2=5$ Desechamos $x_1$por ser negativa	**El área original de la sala es 40 m²** $A=5x8=40$

4		$x(x+6)=720$ $x^2+6x-720$ $=0$	$s=6$ $m=-720$ $d^2=s^2-4m$ $d=54$ $\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=54 \end{cases}$ $a=30$ $b=-24$ $(x+30)(x-24)$ $x_1=-30$ $x_2=24$ Desechamos $x_1$por ser negativa	**Las dimensiones del rectángulo son: ancho 24 y largo 30**
5		$(60-2x)(20$ $-2x)=384$ $1200-160x$ $+4x^2=384$ $4x^2-160x$ $+816=0$ $\boldsymbol{x^2-40x+204}$ $\boldsymbol{=0}$	$s=-40$ $m=204$ $d^2=s^2-4m$ $d=28$ $\begin{cases} a+b=-40 \\ a-b=28 \end{cases}$ $a=-6$ $b=-34$ $(x-6)(x-34)$ $x_1=6$ $x_2=34$ Desechamos $x_2$por no cumplir con las condiciones del problema	**El ancho de la franja es 6** $60-12=48$ $20-12=8$ $48x8=384$
6		$(20-2x)(12$ $-2x)=84$ $240-64x+4x^2$ $=84$ $4x^2-64x+156$ $=0$ $\boldsymbol{x^2-16x+39}$ $\boldsymbol{=0}$	$s=-16$ $m=39$ $d^2=s^2-4m$ $d=10$ $\begin{cases} a+b=-16 \\ a-b=10 \end{cases}$ $a=-3$ $b=-13$ $(x-3)(x-13)$ $x_1=3$ $x_2=13$ Desechamos $x_2$por no cumplir con las condiciones del problema	**El ancho del marco es de 3 cm**

Elaboración propia

Rúbrica de coevaluación de la exposición de la evaluación formativa. Coevaluación entre equipos

	Nivel	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Aspecto a evaluar	**Presentación**	La totalidad del trabajo es legible, organizado y limpio.	La mayor parte del trabajo es legible y organizado, aunque no limpio.	La mayor parte del trabajo es legible, aunque le falta organización y limpieza.	El trabajo en general es poco legible, le falta organización y limpieza.
	Desarrollo	En el problema existe un diagrama con los datos y las incógnitas. Además, identifica correctamente el método de factorización necesario para resolver la ecuación cuadrática generada.	En el problema existe un diagrama con los datos y las incógnitas, pero tiene algunas dificultades para establecer la relación que genera la ecuación cuadrática e identificar correctamente el método de factorización necesario para resolver la ecuación cuadrática.	Requiere apoyo para identificar los datos y las incógnitas y establecer la relación que genera la ecuación cuadrática e identificar correctamente el método de factorización necesario para resolver la ecuación cuadrática.	No logra establecer sin apoyo el diagrama con los datos y las incógnitas, tiene dificultades para establecer la ecuación cuadrática y resolverla por factorización.
	Dominio del tema	Sustituye, despeja y calcula correctamente los resultados, sin apoyo.	Sustituye, despeja y calcula correctamente los resultados, requiere apoyo en algún momento.	Sustituye, despeja y calcula con ayuda de forma correcta.	Requiere apoyo en todo el proceso de sustituir, despejar y calcular de forma correcta.
	Resultados y conclusiones	Interpreta los resultados del problema con sus unidades de medida dando respuesta	Interpreta los resultados del problema con sus unidades de medida, dando respuesta verbal a la	Resuelve las operaciones, pero no relaciona los resultados con las preguntas del problema	Requiere apoyo en todo momento para obtener los resultados finales, no establece la relación entre

		verbal a la pregunta o preguntas de los problemas planteados, sin apoyo.	pregunta o preguntas de los problemas planteados con apoyo en algún momento.	de aplicación. Requiere apoyo para interpretar los resultados y expresarlo de forma verbal.	estos y las preguntas del problema por lo que le cuesta mucho trabajo realizar interpretaciones.

Tabla 20 Rúbrica para evaluar la exposición de problemas de aplicación que dan lugar a la ecuación cuadrática

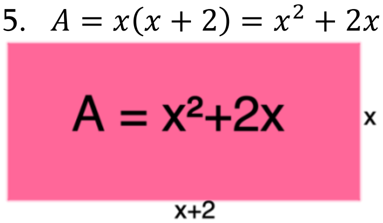
Fuentes: Rizo (2004), González (2001) y Gatica-Lara y Uribarren-Berrueta (2013).

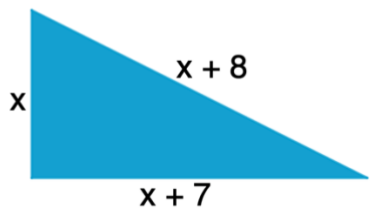
Lista de cotejo de El juego reversible

Respuestas	Registre si se observa
1. $(2x+1)(x+1)$	
2. $(3x+2)(x-3)$	
3. $(3x-3)(x-2)$	
4. $(6x-5)(3x+2)$	
5. $(7x-1)(2x-3)$	
6. $(5x-2)(3x+5)$	
7. $(3x+2)(3x+4)$	
8. $(5x-2)(x-4)$	
9. $(3x-1)(3x+5)$	
10. $(2x+5)(2x-3)$	

Intrumentos de evaluación sumativa

Lista de cotejo de la Evaluación sumativa

Respuestas	Registre si se observa
1. Es una expresión algebraica en la que uno de sus términos contiene a la variable con exponente 2 como máximo. Factorización por tanteo, factorización generalizada, factorización geométrica, por término común, completando el trinomio, con la fórmula general y por graficación.	
2. No tiene solución real porque al despejarla x es igual a dos números imaginarios. $x^2 + 6 = 0$ $x^2 = -6$ $x^2 = \pm\sqrt{-6}$ $x = \pm 2.449i$	
3. $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$ $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$ Tiene dos soluciones iguales cuyo valor numérico es -1	
4. Los números impares consecutivos son x y $x + 2$ $x(x + 2) = x^2 + 2x$ $23 - (x + x + 2) = x^2 + 2x$ $23 - 2x - 2 = x^2 + 2x$ $\boldsymbol{x^2 + 4x - 21 = 0}$ $(x - 3)(x + 7)$ $x_1 = 3$ y $x_2 = -7$ Se desecha x_2 por ser negativo y por no cumplir con las condiciones del problema. Los números buscados son 3 y 5	
5. $A = x(x + 2) = x^2 + 2x$  $10(x + 2) = A - 28$ $10x + 20 = x^2 + 2x - 28$ $x^2 - 8x - 48 = 0$ $(x + 4)(x - 12)$	

$x_1 = -4$ y $x_2 = 12$ Se desecha $x_1$por ser negativo y por no cumplir con las condiciones del problema. Las dimensiones del cuarto son 12 y 14	
6. Usando el teorema de Pitágoras $(x+8)^2 = x^2 + (x+7)^2$  $x^2 + 16x + 64 = x^2 + x^2 + 14x + 49$ $x^2 - 2x - 15 = 0$ $(x-5)(x+3)$ $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$ Se desecha x_2 por ser negativo y no cumplir con las condiciones del problema. Entonces, las dimensiones del triángulo son: 5, 12 y 13	
7. No, porque la ecuación no es cuadrática, es cúbica.	
8. $9x^2 - 42x + 49$	
9. Sí, son 9 cuadrados rojos en un cuadrante positivo con x^2, 42 rectángulos rosa mexicano con x y en los cuadrantes negativos y 49 unidades rosa claro en un cuadrante positivo, con 1. Es correcta	
10. Sí, corresponde fielmente	

Observación cualitativa del interés por realizar las actividades de factorización de polinomios cuadráticos.

Bitácora de clase.

Es un instrumento diseñado para evaluar cualitativamente por observación directa (Díaz-Barriga y Hernández, 2005, p. 419). Permite evaluar los procesos de aprendizaje en el momento que se producen. Es un informe que describe comportamientos, actitudes, intereses o procedimientos. Puede ser individual o grupal.

Nombre del alumno:		
Tema:	Fecha:	Hora:
Contexto de la observación (lugar y ambiente):		
Descripción de lo observado:		
Interpretación de lo observado:		

Grupo:		
Tema:	Fecha:	Hora:
Contexto de la observación (lugar y ambiente):		
Descripción de lo observado:		
Interpretación de lo observado:		