



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FEM INDUCIDA EN LA LUNA USANDO SU  
MOVIMIENTO NATURAL DEBIDO AL CAMPO  
MAGNÉTICO CIRCUNDANTE

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Físico**

PRESENTA:

**Jorge Luis Briseño Gómez**

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alejandro Reyes Coronado



Ciudad de México, México, 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



1. Datos del alumno

Briseño

Gómez

Jorge Luis

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

414010248

2. Datos del tutor

Dr.

Alejandro

Reyes

Coronado

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Julio Javier

Martinell

Benito

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Martha

Rosete

Aguilar

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Miguel Ángel

Pizaña

López

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Alexander

Nahmad

Rohen

7. Datos del trabajo escrito

FEM inducida en la Luna usando su movimiento natural debido al campo magnético circundante

57 páginas

2021









# Agradecimientos

---

Agradezco el apoyo económico que se me otorgó durante 12 meses a través de una beca de licenciatura del proyecto DGAPA-UNAM PAPIIT IN114919.

Agradezco también al Dr. Miguel Ángel Pizaña por aportar la idea original del trabajo y por su valiosa contribución al marco teórico. Agradezco a la Facultad de Ciencias de la UNAM por brindarme los servicios necesarios para completar mi educación universitaria, así como por poner a disposición de los estudiantes una amplia plantilla de docentes especialistas en temas de vanguardia, como lo es mi asesor, el Dr. Alejandro Reyes Coronado, a quien también agradezco por todo el apoyo brindado para discutir ideas, revisar mi trabajo y escribir esta tesis de licenciatura. Mi gratitud al Dr. Ángel Castellanos y al Dr. Jesús Castrejón, por haberse tomado el tiempo de darme retroalimentación sobre mi escrito, así como por haberme enseñado las bases para programar métodos numéricos para aproximar integrales multidimensionales.

Agradezco a todos los profesores con los que cursé mis asignaturas en la carrera, y quisiera extender un agradecimiento especial en orden cronológico a ciertos profesores cuya pasión despertó en mí un cariño especial por su asignatura. Gracias los Dres. Fermín Viniegra, Miguel Ángel Bastarrachea, Alejandro Reyes Coronado, Martha Rosete, Eugenio Ley Koo, Mariano Chernicoff, Miguel Alcubierre, Víctor Romero, David Sanders, Leonardo Patiño, Carlos Ramírez, Thomas Stegmann, Jesús Garduño y Giuseppe Pirruccio.

Por último, quisiera agradecer a todas las personas cercanas a mí que siempre me dieron su apoyo. Cada una de sus muestras de afecto y cada una de sus palabras de aliento fueron indispensables para mi desarrollo académico y personal. En particular quisiera agradecer a mi mamá, a Tita, a Toña, a Robin, a Any (y a sus hermosos padres), a Roberto, a Bere, a Bruno y a Renata.

*«Cuando escuché al docto astrónomo;  
cuando las pruebas, las figuras, se alinearon frente a mí;  
cuando me mostraron los mapas celestes y las tablas para sumar; dividir y medir;  
cuando, sentado, escuché al astrónomo hablar con gran éxito en el salón de conferencias,  
de repente, sin motivo, me sentí cansado y enfermo;  
hasta que me levanté y me deslicé hacia la salida, para caminar solo,  
en el mismo aire húmedo de la noche,  
y de cuando en cuando,  
mirar en silencio perfecto a las estrellas.»*

*Hojas de hierba*

*Walt Whitman*





# Resumen/Abstract

---

Diversas naciones han propuesto la construcción de una base lunar para impulsar el desarrollo de las ciencias espaciales. El funcionamiento de una base espacial de estas características necesitará el generar energía eléctrica sobre la superficie de la Luna. La motivación de este trabajo surge como una propuesta para generar energía eléctrica de manera sustentable, por medio de la fuerza electromotriz (FEM) inducida sobre la superficie de la Luna debida al campo magnético circundante. El campo magnético generado por la Tierra (campo geomagnético) y el campo debido a los diversos sistemas de corriente eléctrica que circulan en la magnetósfera (campo magnetosférico), inducidos por el viento solar, son las dos contribuciones al campo magnético total sobre la Luna. En este trabajo, se calcula el campo magnético de la Tierra mediante la referencia internacional de campo geomagnético (IGRF, por sus siglas en inglés), mientras que el campo magnetosférico se calcula mediante un modelo que ajusta datos espaciales de mediciones satelitales en la magnetósfera. Dado que los datos espaciales que ajusta el modelo de campo magnetosférico se toman de una región de la magnetósfera que no incluye la trayectoria de la Luna en su totalidad, para contar con una estimación de la FEM debida al campo magnetosférico se reduce el radio orbital de la Luna de  $60R_T$  (radios terrestres) a  $10R_T$ . De esta manera la trayectoria estaría completamente contenida en la región de validez del código. Se compara la FEM debida al campo geomagnético con respecto a la FEM debida al campo magnetosférico, ambas calculadas para un radio orbital de  $10R_T$ , mostrando que la contribución del campo magnetosférico es casi 4 veces más grande. Se calcula el flujo magnético de estas contribuciones a través de un alambre de cobre hipotético enrollado sobre la superficie de la Luna, sobre el cual se induciría la FEM. Dado que el flujo magnético se calcula a través de una integral de superficie, se utiliza una extensión del método de cuadraturas de Gauss-Legendre para integrales de una variable. El principal inconveniente de extender métodos unidimensionales para integrales en dos dimensiones consiste en que el error crece conforme crece la dimensión de la integral. En este trabajo se estima el error numéricamente a través de una función de prueba, cuya integral es conocida. El error obtenido con las cuadraturas de Gauss-Legendre se encuentra en la séptima cifra significativa, que es un error 4 órdenes de magnitud más pequeño que el que se obtiene con los métodos de *midpoint* y del trapecio. En los cálculos mencionados anteriormente se consideró al movimiento de la Luna como una órbita circular uniforme, sin embargo, la trayectoria lunar es más complicada. Para calcular la contribución a la FEM debida a las perturbaciones del movimiento real de la Luna se utiliza una solución semi-analítica de la ecuación de movimiento lunar, que no considera el movimiento de rotación de la Tierra sobre su propio eje, con la que se calcula de forma separada la FEM debida al campo geomagnético. Considerando las



perturbaciones de la trayectoria lunar fuera de su movimiento circular uniforme, se demuestra que la FEM aumenta en dos órdenes de magnitud, sin considerar el movimiento de rotación de la Tierra sobre su propio eje. Por último se calculó la energía eléctrica debida al campo magnético total sobre el alambre enrollado en la Luna, considerando una trayectoria circular uniforme con un radio orbital de  $10R_T$  y contemplando la rotación de la Tierra sobre su propio eje. Mediante esta configuración se obtiene una energía de 1.6 KJ por mes por vuelta del alambre sobre la superficie lunar.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Campo magnético total en la Luna</b>	<b>3</b>
1.1. Sistemas de coordenadas . . . . .	5
1.1.1. Sistema GEI . . . . .	6
1.1.2. Sistema GEO . . . . .	7
1.1.3. Sistema GSE . . . . .	8
1.1.4. Sistema GSM . . . . .	9
1.2. Ecuación de Laplace para el potencial escalar geomagnético . . . . .	11
1.2.1. Funciones cuasi-normalizadas de Schmidt-Legendre . . . . .	11
1.2.2. Referencia internacional de campo geomagnético (IGRF) . . . . .	12
1.3. Campo magnetosférico . . . . .	14
1.3.1. Modelación del campo magnetosférico . . . . .	19
1.3.2. Campo de magnetopausa y campo de interconexión . . . . .	19
1.3.3. Corrientes de cola (TC), corrientes de cinturón (RC) y corrientes alineadas al campo (FAC) . . . . .	20
1.3.4. Tormentas solares . . . . .	21
1.3.5. Alcances del código T05 y sus repercusiones en este trabajo . . . . .	22
<b>2. Metodología para el cálculo de la FEM inducida en la Luna</b>	<b>25</b>
2.1. Parametrización de la superficie de la Luna . . . . .	25
2.2. Cálculo del flujo magnético mediante la cuadratura de Gauss-Legendre . . . . .	29
2.2.1. Comparativa con otras cuadraturas . . . . .	30
2.3. Cálculo de la FEM . . . . .	31
2.4. Descripción del movimiento real de la Luna . . . . .	31

<b>3. Análisis y discusión de resultados</b>	<b>35</b>
3.1. Contribución del campo geomagnético a la FEM . . . . .	36
3.2. Contribución del campo magnetosférico a la FEM . . . . .	39
3.2.1. Contribución de las tormentas solares a la FEM . . . . .	40
3.3. Contribución del movimiento real de la Luna a la FEM . . . . .	42
3.4. Carga de una computadora portátil . . . . .	42
<b>Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>45</b>
<b>A. Coeficientes de la IGRF</b>	<b>47</b>
<b>B. Cuadraturas</b>	<b>53</b>
B.1. <i>Midpoint</i> . . . . .	53
B.2. Trapecio . . . . .	54
B.3. Gauss-Legendre . . . . .	54

# Introducción

---

La idea de construir una base lunar ha sido propuesta por diversas naciones tales como Estados Unidos, los países de la Unión Europea, Rusia y China [1-3]. Sin embargo, dejando de lado el impacto positivo que un proyecto de esta magnitud podría tener para el desarrollo de las ciencias espaciales, surge la pregunta de cómo se podría generar energía sobre la superficie lunar para alimentar las necesidades energéticas de la base. Existe una estación espacial internacional que funciona mediante un arreglo de 262,400 paneles solares, generando una potencia eléctrica de entre 84 y 120 kW [4]. Sin embargo, se ha demostrado que la potencia de los paneles solares decae en promedio un 0.8% al año, y tienen una vida útil de 25 años [5]. Por esta razón, se propone la posibilidad de construir un alternador (generador eléctrico convencional) sobre la superficie de la Luna, compuesto de un rotor y un estator. En otras palabras, se propone construir un sistema eléctrico compuesto por un embobinado que esté expuesto a un campo magnético externo, de manera tal que exista un movimiento relativo entre ellos. De esta manera se podría extender la vida útil del sistema de generación de energía eléctrica. La ventaja de proponer un sistema de esta naturaleza sobre la superficie de la Luna es que ya existe campo magnético circundante sobre la superficie de la Luna y, debido a la naturaleza dinámica del satélite natural de la Tierra, ya existe también un movimiento natural relativo entre la superficie lunar y el campo magnético espacial. De esta manera, la variación del campo magnético sobre la superficie de la Luna induciría una FEM. Se propone modelar al embobinado como un alambre de cobre enrollado sobre la superficie de la Luna<sup>1</sup>, donde se induciría una corriente eléctrica, produciendo así energía. Sobre la superficie de la Luna hay dos contribuciones de campo magnético: el generado por la Tierra, llamado campo geomagnético [7-9]; y el generado por diversos sistemas de corrientes sobre la magnetósfera [10], llamado campo magnetosférico, inducido por el viento solar. En este trabajo, se realiza un estudio teórico de los distintos factores que contribuyen a la FEM inducida sobre la superficie de la Luna. Aunada a la FEM, se busca estimar la energía eléctrica total generada por este circuito hipotético. Para poner en perspectiva esta energía, se compara con la energía necesaria para cargar la batería de una computadora portátil.

La contribución geomagnética se puede describir a través de un potencial escalar sobre la superficie de la Luna, debido a que todas las fuentes de campo geomagnético se encuentran inmersas dentro del núcleo de la Tierra [7-9]; mientras que el campo magnetosférico es producto de la interacción del campo geomagnético y el viento solar, que está constituido por partículas cargadas expulsadas fuera de la superficie del Sol [10]. Entonces, el modelo del campo magnético

---

<sup>1</sup>Suponiendo una densidad del cobre de  $8.89 \text{ g/mm}^3$ , y un alambre calibre 18 con sección transversal de  $0.823 \text{ mm}^2$  [6], para enrollar un alambre de cobre con una vuelta alrededor de la Luna se necesitarían llevar  $\sim 80$  toneladas de alambre.

total consiste en una descripción empírica de campo geomagnético, basada en la referencia internacional de campo geomagnético (IGRF, por sus siglas en inglés) [8], y su respuesta al viento solar, que se obtiene al ajustar los parámetros de una familia códigos numéricos a datos espaciales acumulados desde la década de los 60s [11-15]. En particular, en este trabajo se utiliza el código T05 [15], que es el código abierto más actual capaz de modelar el campo magnetosférico.

La FEM inducida sobre el alambre de cobre enrollado sobre la superficie de la Luna se puede calcular como la derivada del flujo magnético respecto al tiempo. Para calcular el flujo magnético se realiza la integral de superficie del campo magnético a través de la superficie delimitada por el alambre. Esta integral se realiza utilizando una extensión de un método de integración de una variable para aproximar integrales múltiples, buscando que el error numérico sea lo más pequeño posible. Existen maneras de calcular una cota para el error numérico de este tipo de extensiones [16], sin embargo esa cota crece conforme crece el integrando, las derivadas del integrando y los intervalos de integración, por lo que el error también podría crecer junto con estas cantidades. En este trabajo se estimó el error de las cuadraturas de *midpoint* y de trapecio [17, 18], extendidas para integrales dobles. Se utilizó una función de prueba, cuya integral analítica es conocida, y se dividieron los intervalos de integración en partes iguales de hasta 50 pedazos. Esto significa que la integral se aproximó por una doble suma con hasta  $50 \times 50 = 2,500$  términos, obteniendo un error en la tercer cifra significativa. Para disminuir el error de la integral se propuso utilizar una cuadratura de Gauss-Legendre [17, 18] como alternativa. Con la cuadratura de Gauss-Legendre de orden 10 se obtuvo un error hasta la séptima cifra significativa. Entonces, la cuadratura de Gauss-Legendre permitió aproximar la integral de superficie mediante una doble suma con  $10 \times 10 = 100$  términos, con un error 4 órdenes de magnitud menor que el que se obtiene con las cuadraturas de *midpoint* y del trapecio. Posteriormente, para calcular la FEM inducida se utiliza el método de derivación numérica por diferencias finitas centradas [17, 18]. A partir de la FEM se calcula la potencia eléctrica, y la energía eléctrica a lo largo de un periodo de rotación lunar alrededor de la Tierra, utilizando el análisis de circuitos [19]. En el capítulo 2 se describe tanto el método de cuadraturas de Gauss-Legendre para integrales dobles como el método de diferencias finitas, aplicado al cálculo de la FEM.

Finalmente, para calcular la FEM se requiere describir la dinámica de la trayectoria lunar. Una primera aproximación fue considerar la trayectoria como un movimiento circular uniforme. Sin embargo, las variaciones en el radio orbital de la Luna pueden llegar a ser de hasta 4 radios terrestres, lo cual no es despreciable. Chapront-Touzé y Chapront presentaron una solución semi-analítica a las ecuaciones de movimiento de la Luna, denotada como ELP 2000-85 [20]. Esta solución describe el movimiento real de la Luna con respecto al plano eclíptico y equinoccio dinámicos, lo que significa que esta solución no considera el movimiento de rotación de la Tierra. Para calcular la contribución a la FEM debida al movimiento real de la Luna, se utilizaron las tablas y subrutinas publicadas por Chapront-Touzé y Chapront [21], basadas en la solución ELP. Se utilizó la precisión más baja, que tiene un error estimado de 0.02 radios terrestres para la coordenada radial y  $0.03^\circ$  para las coordenadas angulares. Con este modelo se muestra que la FEM se incrementa en dos órdenes de magnitud debido a estas perturbaciones de la Luna fuera del movimiento circular uniforme.

# Campo magnético total en la Luna

---

Dado que el objetivo de esta tesis de licenciatura consiste en estimar la fuerza electromotriz (FEM) inducida sobre un alambre de cobre enrollado en la superficie de la Luna, usando su movimiento natural alrededor tanto de la Tierra como del Sol, es necesario evaluar el campo magnético total sobre la superficie de la Luna, cuyas principales componentes son el campo magnético debido a la Tierra —*geomagnético*— y el debido al viento solar —*magnetosférico*—. La FEM inducida podría ser utilizada como una fuente de generación de energía eléctrica sustentable en la superficie lunar. En el capítulo 1 se describen las partes que componen al campo magnético total sobre la superficie de la Luna. En la sección 1.1, se definen los sistemas de coordenadas necesarios para describir el campo magnético total en la Luna y las matrices de transformación para pasar de un sistema a otro. En la sección 1.2 se analiza la ecuación que describe al campo magnético producido por la Tierra —campo geomagnético—, debido a movimientos de convección de metales fundidos en el interior del núcleo y al movimiento de rotación de la Tierra [7]. En la sección 1.2.1 se analiza la base de funciones que generan la solución para calcular el campo geomagnético y en la sección 1.2.2 se presenta el cálculo del campo geomagnético utilizando la 12<sup>va</sup> generación de la referencia internacional de campo geomagnético (*IGRF* por sus siglas en inglés) [9].

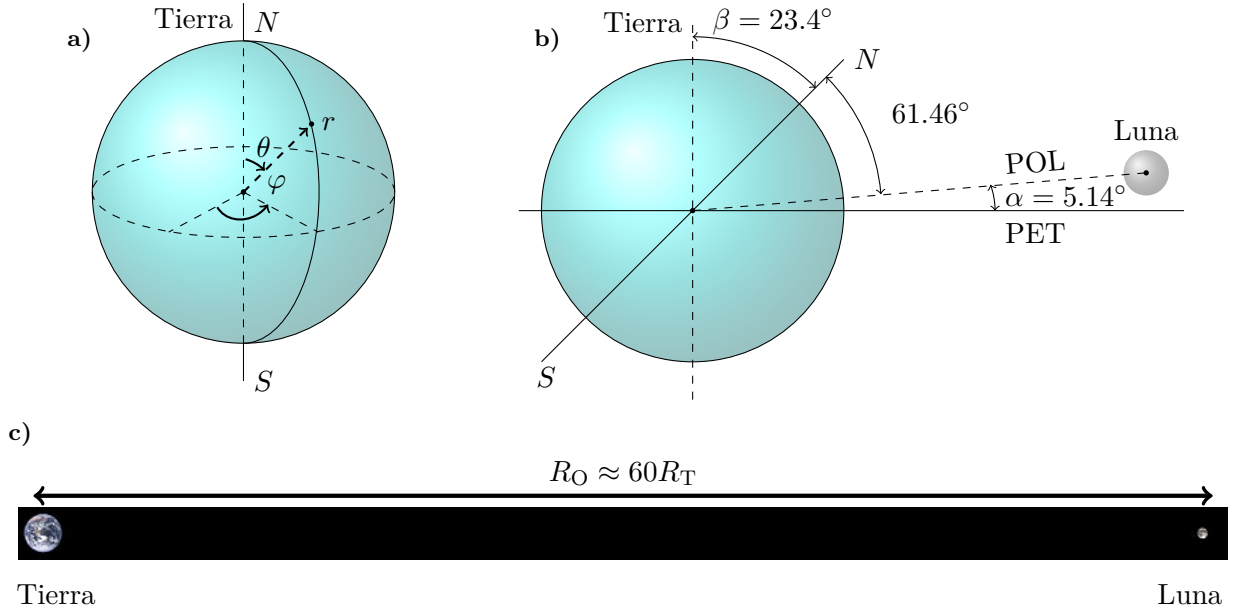
Para la descripción de campo geomagnético es conveniente definir un sistema de coordenadas esféricas colocando el origen en el centro de la Tierra y alineando el eje  $z$  con el polo norte geográfico  $N^1$ , denominadas como coordenadas *geográficas* (GEO) [22]. Las coordenadas esféricas para describir el campo geomagnético se muestra en la Fig. 1.1a). El radio medio de la Tierra, que es la distancia promedio desde el centro de la Tierra hasta su superficie, mide  $R_T = 6,371$  km [14] y la distancia orbital promedio de la Luna alrededor la Tierra es igual a  $R_O = 384,400$  km  $\approx 60R_T$  [14, 23] —ver Fig. 1.1c)—. El plano eclíptico de la Tierra (PET), que es el plano donde el planeta realiza su movimiento de traslación alrededor del Sol, forma un ángulo de  $5.14^\circ$

---

<sup>1</sup>Se utilizan las coordenadas geográficas debido a que el modelo con el que se calcula el campo geomagnético está en estas coordenadas. En la Fig. 1.5 se muestra la orientación del polo norte magnético  $\mathbf{m}$  con respecto al polo norte geográfico  $N$ .

## 1. CAMPO MAGNÉTICO TOTAL EN LA LUNA

respecto al plano orbital de la Luna (POL), mientras que el eje de rotación de la Tierra forma en promedio un ángulo de  $23.4^\circ$  respecto a la dirección normal del plano eclíptico, como se muestra en la Fig. 1.1b) [14, 23]. Entonces, el plano que contiene a la órbita lunar forma, en promedio, un ángulo de  $\alpha = 61.46^\circ$  respecto al eje de rotación de la Tierra, como se muestra en la Fig. 1.1b).



**Fig. 1.1:** a) Definición del sistema de coordenadas esféricas usadas en este trabajo, con el origen colocado en el centro de la Tierra y el polo norte geográfico  $N$  alineado con el eje  $z$ . b) La inclinación del plano orbital de la Luna (POL) respecto al plano eclíptico de la Tierra (PET), que es el plano en el que la Tierra realiza su movimiento de traslación alrededor del Sol, es de  $5.14^\circ$ . La oblicuidad de la Tierra, que es el ángulo entre ecuador de la Tierra con respecto al plano eclíptico, mide  $\beta = 23.4^\circ$ . El ángulo entre el plano orbital de la Luna y el polo norte geográfico de la Tierra es de  $61.46^\circ$  [14, 23] y el radio orbital de la Luna ( $R_O$ ) mide aproximadamente 60 radios terrestres ( $R_T$ ). c) Imagen a escala de la distancia entre la Tierra y la Luna, tomada de la página *Astronomy Workshop* [24].

Además del campo geomagnético, la trayectoria de la Luna se encuentra inmersa en sistemas dinámicos de corrientes espaciales debidas tanto al viento solar como a la interacción del viento solar con la magnetósfera. La atmósfera solar consiste en núcleos de hidrógeno  $H^+$ , núcleos de helio —también conocidos como partículas  $\alpha$ —  ${}^4\text{He}^{2+}$  y electrones, que son expulsados del Sol debido a que la presión del plasma vence a la fuerza gravitacional. A este flujo de partículas cargadas se le conoce como viento solar [7]. Al campo magnético generado por el viento solar se le conoce como campo magnético interplanetario (IMF por sus siglas en inglés) o campo magnético heliosférico. Como el viento solar consta de partículas cargadas en movimiento, el viento solar interactúa con el campo geomagnético dando lugar a la magnetósfera, que es una cavidad de campo magnético que desvía el viento solar de la superficie de la Tierra. Cerca de la Tierra, el campo geomagnético es lo suficientemente intenso para hacer circular al viento solar alrededor de la Tierra, generando a su vez corrientes que se acoplan con el campo geomagnético, modificando su geometría. Estas corrientes que se acoplan al campo geomagnético generan a su vez campo magnético dentro de la magnetósfera, conocido como campo magnetosférico. La Luna, al realizar su movimiento de traslación alrededor de la Tierra, se encuentra inmersa en el IMF y cruza la región del campo magnetosférico. En la sección 1.3, se describirán las partes de la magnetósfera, así como su tamaño y forma, las corrientes que circulan sobre la magnetósfera, la manera en que se modela el campo magnetosférico y cómo se acopla el campo magnetosférico al IMF. En la sección 1.3.1 se describe el código T05 [15] desarrollado por el Dr. Nikolai Tsyganenko del Departamento

de Física de la Tierra en la Universidad de San Petersburgo, Rusia, que se utiliza en este trabajo para modelar el campo magnético debido al viento solar en los alrededores de la Tierra. Se eligió este código porque es el código más reciente de dominio público, que además requiere recursos computacionales asequibles. A pesar de que el código T05 se publicó en 2005, en este trabajo de tesis se utiliza la actualización más reciente del trabajo, que contiene actualizaciones de las subrutinas hasta el año 2008 y actualizaciones de los datos espaciales hasta el año 2020.

En los cálculos de la FEM inducida en un alambre de cobre enrollado sobre el perímetro de la Luna, se aproximó el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra a través de una circunferencia, pero en realidad el movimiento es mucho más complicado. En la sección 2.4 se muestra la trayectoria real de la Luna que se obtiene a partir de la solución semianálítica (ELP 2000-85) [20] de las ecuaciones de movimiento.

## 1.1. Sistemas de coordenadas

Los distintos sistemas de coordenadas espaciales a utilizar son el sistema solar eclíptico geocéntrico (GSE), el geocéntrico ecuatorial inercial (GEI), el geocéntrico (GEO) y el geocéntrico solar magnético (GSM), que se definirán a continuación. Todos los sistemas, como su nombre lo indica, tienen su origen de coordenadas en el centro de la Tierra y son sistemas de referencia derechos, por lo que basta con definir sólo dos vectores unitarios para que el tercero esté unívocamente determinado. Para denotar las transformaciones entre diferentes sistemas coordenados, se usará la notación  $\langle \text{ángulo, eje} \rangle$  para representar una rotación positiva a cierto ángulo sobre un eje. Por ejemplo, la rotación  $\langle \zeta, z \rangle$  se puede representar de forma matricial de la siguiente manera<sup>2</sup>

$$\langle \zeta, z \rangle = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \sin \zeta & 0 \\ -\sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

En general, cada uno de los ángulos de rotación involucrados en los cálculos depende del tiempo de manera distinta, y para describir esta dependencia se utiliza un parámetro de tiempo universal. La dependencia temporal de las transformaciones se denota a través de un parámetro de tiempo  $t = (JD - 2'451, 545)/36, 525$ , donde  $JD$ <sup>3</sup> representa la fecha juliana [25], que se calcula como

$$JD = 1'720, 994.5 + [365.25y' + C] + [30.60001(m' + 1)] + d + B + \frac{h}{24} + \frac{n}{1, 440} + \frac{s}{86, 400}, \quad (1.2)$$

con

$$\begin{aligned} y' &= y & y & m' = m & \text{si } m > 2, \\ y' &= y - 1 & y & m' = m + 12 & \text{si } m \in \{1, 2\}, \\ C &= -0.75 & y' & & \text{si } y' < 0, \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Dentro de este trabajo se utiliza la misma convención de matrices de rotación definida en el trabajo de Chapront-Touze y Chapront [21], en donde el signo menos se encuentra por debajo de la diagonal.

<sup>3</sup>La necesidad de definir este parámetro de tiempo proviene de que las expresiones para las coordenadas espaciales están calculadas a partir de estas definiciones. Nótese que el parámetro de tiempo está en unidades de siglos, que es el tiempo característico en el que cambian las variables dinámicas de la Luna, ver Refs. [21, 22].



$$C = 0 \quad \text{si } y' \geq 0,$$

$$B = 2 - A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor,$$

$$A = \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor,$$

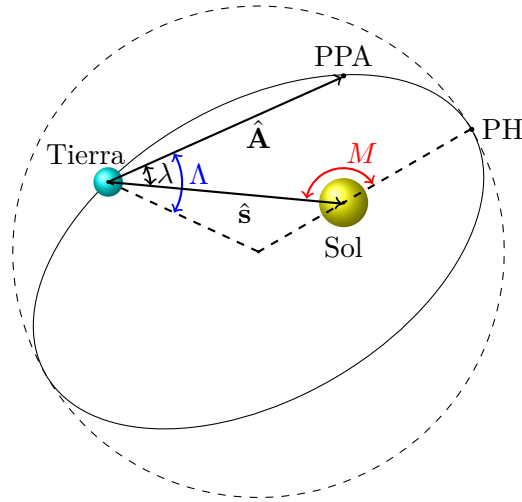
donde  $y$ ,  $m$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $n$  y  $s$  representan el año, el mes, el día, la hora, el minuto y el segundo respectivamente, expresados en tiempo universal ( $UT$  por sus siglas en inglés) y la función parte entera de  $x$  se denota con los corchetes cuadrados  $\lfloor x \rfloor$ . Además, se define otro parámetro de tiempo  $t_0 = t(y, m, d, h = 0, n = 0, s = 0)$ , que se requiere para ciertas transformaciones que no son sensibles ante cambios de tiempo menores a días.

### 1.1.1. Sistema GEI

Es necesario definir un sistema inercial para definir los demás sistemas de referencia. De esta manera se define una transformación entre el sistema GEI y GEO, y otra entre el sistema GEI y GSM, y por lo tanto se requiere este sistema inercial para construir una transformación entre el sistema GEO y el GSM. El sistema GEI se define de la siguiente manera:<sup>4</sup>

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{GEI}} = \hat{\mathbf{A}}, \quad (1.3a)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{\text{GEI}} = \hat{\mathbf{L}}_R, \quad (1.3b)$$



**Fig. 1.2:** Representación esquemática del primer punto de Aries (PPA), que es el punto sobre el plano eclíptico por el que pasa la Tierra durante el equinoccio de primavera, y del perihelio (PH), que es el punto sobre el plano eclíptico en el que la Tierra pasa más cerca del Sol sobre su trayectoria. La dirección del centro de la Tierra al primer punto de Aries se denota como  $\hat{\mathbf{A}}$ , la dirección del centro de la Tierra al centro del Sol se denota como  $\hat{\mathbf{s}}$  y el ángulo entre  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{s}}$  —longitud eclíptica solar— se denota como  $\lambda$ . La longitud media solar  $\Lambda$  es el ángulo que se formaría entre  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{s}}$  si la órbita de la Tierra fuera completamente circular, y la anomalía media solar  $M$  es el ángulo que se forma entre la línea que une al centro del Sol con el perihelio y la línea que une al centro del Sol con el centro de la Tierra.

---

<sup>4</sup>No confundir el vector  $\hat{\mathbf{A}}$  con el vector de Runge-Lenz. El vector  $\hat{\mathbf{A}}$  no es una constante de movimiento, es un vector con referencia en un punto fijo (el primer punto de Aries), lo que garantiza que el sistema GEI sea inercial.

donde  $\hat{\mathbf{A}}$  es el vector que une al centro de la Tierra con el primer punto de Aries (PPA), y  $\hat{\mathbf{L}}_R$  es la dirección del momento angular de rotación de la Tierra. En la Fig. 1.2 se muestra una representación esquemática del primer punto de Aries —que es el punto donde la Tierra se encuentra durante el equinoccio de primavera— sobre el plano eclíptico, plano sobre el cual la Tierra realiza su movimiento de traslación alrededor del Sol. La dirección del centro del Sol al centro de la Tierra se denota como  $\hat{\mathbf{s}}$  y el ángulo entre  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{s}}$  —longitud eclíptica solar— se denota como  $\lambda$ . La longitud media solar  $\Lambda$  es el ángulo que se formaría entre  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{s}}$  si la órbita de la Tierra fuera completamente circular, y la anomalía media solar  $M$  es el ángulo que se forma entre la línea que une al centro del Sol con el perihelio (PH) y la línea que une al centro del Sol con el centro de la Tierra.

### 1.1.2. Sistema GEO

En el sistema GEO de coordenadas se describe el campo geomagnético a través de la referencia internacional de campo geomagnético (IGRF por sus siglas en inglés), como se mostrará en la sección 1.2.2. El sistema GEO se define de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{GEO}} = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (1.4a) \quad \hat{\mathbf{z}}_{\text{GEO}} = \hat{\mathbf{L}}_R, \quad (1.4b)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}_0$  es la línea que une al centro de la Tierra con el punto cero, y  $\hat{\mathbf{L}}_R$  es la dirección del momento angular de rotación de la Tierra. En la Fig. 1.3 se muestra el punto cero de la Tierra —que es la intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador—. El eje  $\hat{\mathbf{z}}_{\text{GEO}}$  apunta en la dirección del polo norte geográfico.

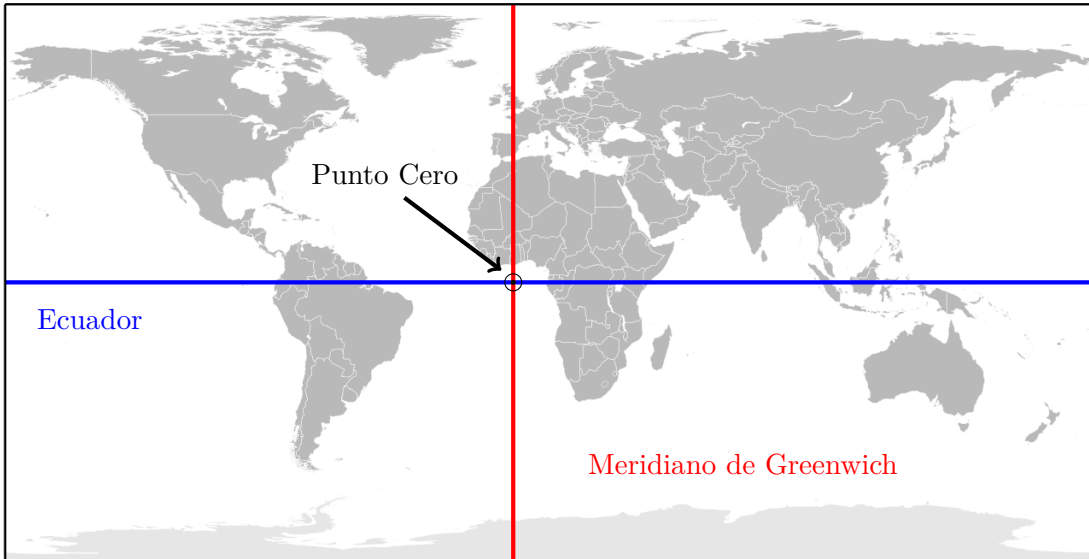


Fig. 1.3: Punto cero de la Tierra (intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador) con coordenadas  $(0^\circ, 0^\circ)$

La transformación correspondiente entre los sistemas GEI y GEO se representa a través de  $\mathbf{T}_1 = \langle \theta, z \rangle$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre el primer punto de Aries y el punto cero, medido desde

el centro de la Tierra. Hapgood [22] propone una manera de calcular  $\theta$  como

$$\theta = 100.461 + 36,000.770 t_0 + 15.04107 h, \quad (1.5)$$

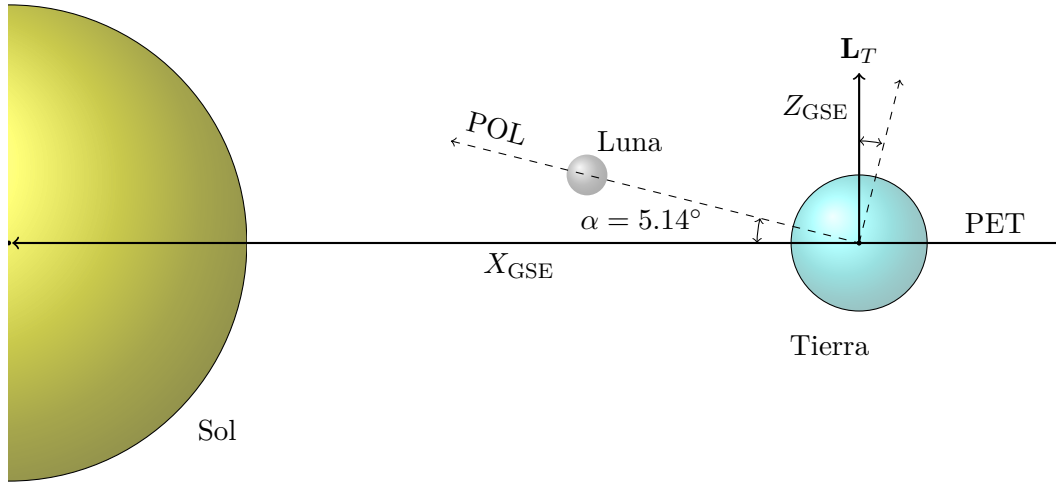
donde  $h$  representa la fracción de tiempo del día en horas descrito en el sistema de tiempo universal UT, y todas las constantes tienen las unidades adecuadas para que  $\theta$  se exprese en grados.

### 1.1.3. Sistema GSE

El sistema GSE, que es el que se utiliza para describir el movimiento de la Luna, se define de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{GSE}} = \hat{\mathbf{s}}, \quad (1.6a) \quad \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}} = \hat{\mathbf{L}}_T, \quad (1.6b)$$

donde  $\hat{\mathbf{s}}$  es la línea que une a los centros de la Tierra y del Sol, y  $\hat{\mathbf{L}}_T$  es la dirección del momento angular de traslación de la Tierra. En la Fig. 1.4 se muestra una representación esquemática tanto de las coordenadas GSE como de la inclinación que hace el plano orbital de la Luna (POL) con respecto al plano eclíptico (PET), que es el plano donde la Tierra realiza su movimiento de traslación alrededor del Sol.



**Fig. 1.4:** Representación esquemática de las coordenadas GSE y de la inclinación del plano orbital de la Luna (POL) con respecto al plano eclíptico (PET). El eje  $X_{\text{GSE}}$  apunta del origen, colocado en el centro de la Tierra, al centro del Sol. El eje  $Z_{\text{GSE}}$  apunta en la dirección del momento angular de traslación de la Tierra. El eje  $Y_{\text{GSE}}$  se define de manera que se conforme un sistema ortogonal derecho.

Por simplicidad, se utiliza el sistema de coordenadas GSE para describir el movimiento de la Luna, debido a que el plano orbital de la Luna forma un ángulo de  $5.14^\circ$  con respecto al plano eclíptico. Sobre el plano orbital de la Luna, la ecuación de movimiento del centro lunar se puede aproximar como

$$\mathbf{r}_{\text{POL}} = R_O \begin{pmatrix} \cos(\omega_L t) \\ \sin(\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

donde  $\omega_L$  es la velocidad angular de traslación de la Luna y  $R_O$  es el radio orbital de la Luna.

La matriz de rotación que transforma un vector en el sistema POL al sistema GSE (POL  $\rightarrow$  GSE) se puede escribir como  $\mathbf{T}_0 = \langle -\alpha, y \rangle$  y por lo tanto  $\mathbf{r}_{\text{GSE}} = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{r}_{\text{POL}}$ .

De acuerdo con Hapgood [22], la transformación correspondiente entre el sistema GEI y el GEO se representa a través de  $\mathbf{T}_2 = \langle \lambda, z \rangle \cdot \langle \beta, x \rangle$ , donde  $\beta$  es la oblicuidad del ecuador de la Tierra con respecto al plano eclíptico, como se observa en la Fig. 1.1b), y  $\lambda$  es la longitud solar eclíptica, que se muestra en la Fig. 1.2. Hapgood proporciona la manera de calcular la oblicuidad  $\beta$  y la longitud solar eclíptica  $\lambda$  en grados a través de

$$\beta = 23.430 - 0.013 t_0, \quad (1.8)$$

$$\lambda = \Lambda + (1.915 - 0.0048 t_0) \sin M + 0.02 \sin 2M, \quad (1.9)$$

$$M = 357.528 + 35,999.05 t_0 + 0.04107 h, \quad (1.10)$$

$$\Lambda = 280.46 + 36,000.772 t_0 + 0.04107 h, \quad (1.11)$$

donde nuevamente  $M$  es la anomalía media solar, que es el ángulo entre la línea que une al Sol con el perihelio y la línea que une los centros del Sol y la Tierra; y  $\Lambda$  es la longitud media solar que representaría la longitud solar eclíptica si la órbita de la Tierra fuera circular. La representación esquemática de  $M$  y  $\Lambda$  se muestran en la Fig. 1.2.

#### 1.1.4. Sistema GSM

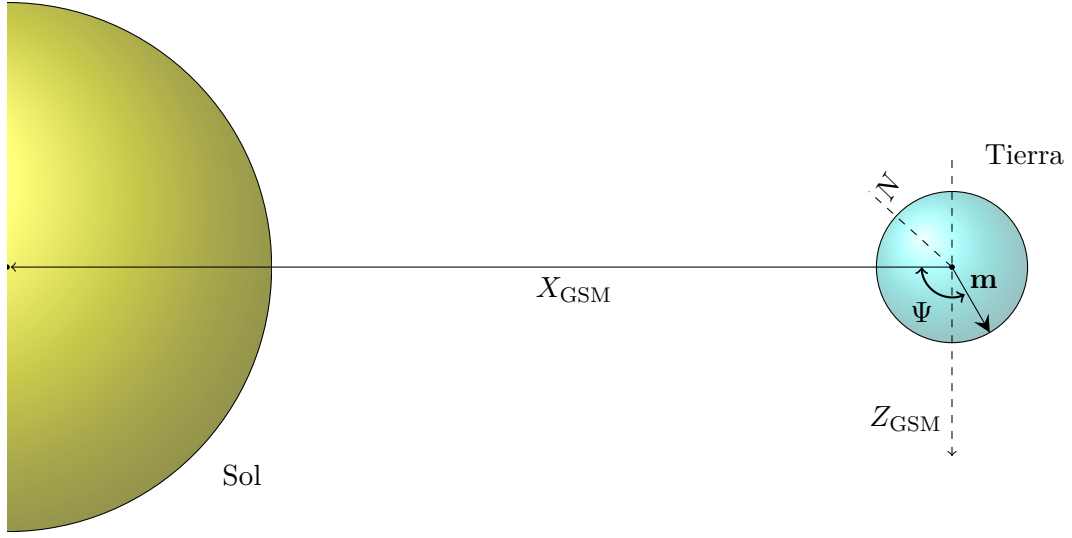
Para describir el campo magnetosférico, que se discutirá en detalle en la sección 1.3.1, se utiliza el sistema de coordenadas geocéntrico solar magnético (GSM por sus siglas en inglés), que se muestra en la Fig. 1.5. El eje  $X_{\text{GSM}}$  apunta del origen, colocado en el centro de la Tierra, al centro del Sol. El eje  $Y_{\text{GSM}}$  es perpendicular tanto al eje geomagnético dipolar  $\hat{\mathbf{m}}$  —que es la dirección del geodipolo magnético en la representación de la IGRF, que se discutirá en la sección 1.2.2— como a la línea Tierra-Sol [26],

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}} = \hat{\mathbf{s}}, \quad (1.12a) \quad \hat{\mathbf{y}}_{\text{GSM}} = \frac{\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}}}{\|\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}}\|}. \quad (1.12b)$$

La transformación entre el sistema GSE y el GSM se define como  $\mathbf{T}_3 = \langle -\psi, x \rangle$ , donde el ángulo  $\psi$  es el ángulo formado entre  $\hat{\mathbf{z}}_{\text{GSM}}$  y  $\hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}}$ . En GSM los vectores unitarios son  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSE}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_{\text{GSM}} = \hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}} / \|\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}}\|$  y  $\hat{\mathbf{z}}_{\text{GSM}} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}} \times (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}}) / \|\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}}\| = [\hat{\mathbf{m}} - (\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}})\hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}}] / \|\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}}\|$ , entonces

$$\cos \psi = \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSM}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}} = \frac{\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}}}{\|\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSE}}\|} = \frac{m_{z_{\text{GSE}}}}{\sqrt{m_{z_{\text{GSE}}}^2 + m_{y_{\text{GSE}}}^2}}, \quad (1.13)$$

de donde se ha hecho explícito que el numerador de  $\hat{\mathbf{z}}_{\text{GSM}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}}$  se escribe como  $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}} - (\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}})\hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}}$ , notando que  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}} = 0$ , y el denominador se escribe como  $\|\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{x}}_{\text{GSE}}\| = \|(0, m_{z_{\text{GSE}}}, -m_{y_{\text{GSE}}})\|$ . Usando identidades trigonométricas junto con la Ec. (1.13)



**Fig. 1.5:** Representación de las coordenadas GSM. El eje  $X_{\text{GSM}}$  apunta del origen, colocado en el centro de la Tierra, al centro del Sol. El eje  $Y_{\text{GSM}}$  es perpendicular tanto al eje geomagnético dipolar  $\hat{\mathbf{m}}$  como a la línea Tierra-Sol. El eje  $Z_{\text{GSM}}$  se define de manera que se conforme un sistema ortogonal derecho. El ángulo entre  $X_{\text{GSM}}$  y  $\hat{\mathbf{m}}$  se conoce como ángulo de inclinación del geodipolo  $\Psi$ .

se puede expresar  $\sin \psi = m_{y_{\text{GSE}}} / \sqrt{m_{z_{\text{GSE}}}^2 + m_{y_{\text{GSE}}}^2}$  y por lo tanto  $\tan \psi = m_{y_{\text{GSE}}} / m_{z_{\text{GSE}}}$ .

Se puede expresar a  $\hat{\mathbf{m}}$  en coordenadas GEO, como se mostrará más adelante en la sección 1.2.2, debido a que en el sistema GEO el geodipolo se encuentra estático. Sin embargo, se requiere expresar  $\hat{\mathbf{m}}$  en coordenadas GSE para calcular el ángulo  $\psi$ . Entonces para describir  $\hat{\mathbf{m}}_{\text{GSE}}$ , se puede hacer uso de las matrices de transformación  $\mathbf{T}_2$  y  $\mathbf{T}_1$  de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{m}}_{\text{GSE}} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} \cdot \hat{\mathbf{m}}_{\text{GEO}}, \quad (1.14)$$

debido a que  $\mathbf{T}_1^{-1}$  transforma un vector de GEO a GEI, y  $\mathbf{T}_2$  transforma un vector de GEI a GSE. A partir de  $\hat{\mathbf{m}}_{\text{GSE}}$  se puede calcular  $\psi$  y por tanto  $\mathbf{T}_3$ .

TRANSFORMACIONES ENTRE SISTEMAS COORDENADOS					
	GEI	GEO	GSE	GSM	POL
GEI	1	$\mathbf{T}_1^{-1}$	$\mathbf{T}_2^{-1}$	$\mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{T}_3^{-1}$	$\mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{T}_0^{-1}$
GEO	$\mathbf{T}_1$	1	$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2^{-1}$	$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{T}_3^{-1}$	$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{T}_0^{-1}$
GSE	$\mathbf{T}_2$	$\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1}$	1	$\mathbf{T}_3^{-1}$	$\mathbf{T}_0^{-1}$
GSM	$\mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2$	$\mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1}$	$\mathbf{T}_3$	1	$\mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_0^{-1}$
POL	$\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{T}_2$	$\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1}$	$\mathbf{T}_0$	$\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{T}_3^{-1}$	1

**Tabla 1.1:** Transformaciones entre los diferentes sistemas de referencia de interés

En la tabla 1.1 se muestra un resumen de las diferentes transformaciones de coordenadas espaciales entre los diferentes sistemas de referencia de interés.

## 1.2. Ecuación de Laplace para el potencial escalar geomagnético

El campo geomagnético, denominado como campo interno  $\mathbf{B}_I$ , es una de las múltiples contribuciones del campo magnetosférico. Las variaciones en el tiempo de campo geomagnético son relativamente lentas, de tal manera que la IGRF se ajusta cada cinco años [8]. Por lo tanto, para modelar el campo geomagnético se desprecian sus derivadas en el tiempo, y se asume que todas las corrientes que generan al campo geomagnético están contenidas en el interior de la Tierra. Con estas suposiciones, las ecuaciones de Maxwell que describen al campo geomagnético son [27]:

### Ecuaciones de Maxwell para el campo geomagnético

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_I = 0, \quad (\text{Ley de Gauss magnética}) \quad (1.15a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_I = \mathbf{0}. \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.15b)$$

Dado que  $\mathbf{B}_I$  es un campo irrotacional, se puede describir al campo geomagnético en términos de un potencial escalar  $\phi_I$  [27] como  $\mathbf{B}_I = -\nabla\phi_I$ . Calculando la divergencia del campo geomagnético en términos del potencial escalar, y sustituyendo en la Ec. (1.15a) se obtiene

### Ecuación de Laplace para el potencial escalar geomagnético

$$\nabla^2\phi_I = 0. \quad (1.16)$$

### 1.2.1. Funciones cuasi-normalizadas de Schmidt-Legendre

El potencial escalar geomagnético, solución de la Ec. (1.16), se describe en términos de las funciones cuasi-normalizadas de Schmidt-Legendre [28], que están relacionadas con las funciones asociadas de Legendre. Abramowitz y Stegung [29] definen las funciones asociadas de Legendre como

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell+m} (x^2-1)^\ell, \quad (1.17)$$

donde  $x = \cos\theta$ , mientras que Ferrers [30] las define como

$$P_{\ell,m}^F(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell+m} (x^2-1)^\ell, \quad (1.18)$$

donde el término  $(-1)^m$ , conocido como la fase de Condon-Shortley, no aparece. Schmidt definió las funciones cuasi-normalizadas de Schmidt-Legendre  $\mathcal{P}_\ell^m(x)$ , que son las que se emplean en la expansión del potencial escalar geomagnético [28], como

$$\mathcal{P}_\ell^m(x) = \sqrt{(2-\delta_m^0) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}^F(x) = (-1)^m \sqrt{(2-\delta_m^0) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(x), \quad (1.19)$$

donde se ha hecho explícita la relación  $P_{\ell,m}^F(x) = P_\ell^m(x)/(-1)^m = (-1)^m P_\ell^m(x)$ .

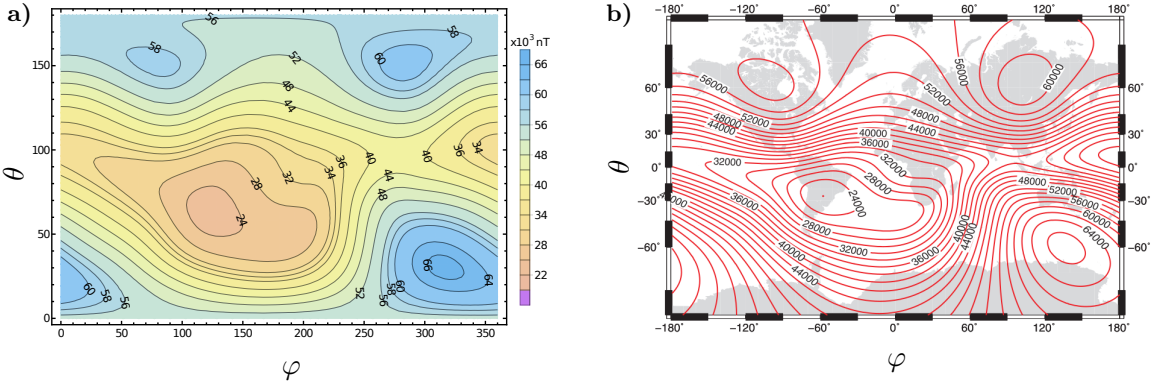
### 1.2.2. Referencia internacional de campo geomagnético (IGRF)

La solución de la Ec. (1.16) en coordenadas esféricas se escribe en términos de funciones armónicas [8]:

$$\phi_I(r, \theta, \varphi) = R_T \sum_{\ell=1}^N \sum_{m=0}^{\ell} \left( \frac{R_T}{r} \right)^{\ell+1} \left[ g_{\ell}^m(t) \cos(m\varphi) + h_{\ell}^m(t) \sin(m\varphi) \right] \mathcal{P}_{\ell}^m(\cos \theta), \quad (1.20)$$

donde  $R_T$  es el radio de la Tierra,  $g_{\ell}^m(t)$  y  $h_{\ell}^m(t)$  son coeficientes determinados experimentalmente, llamados coeficientes de Gauss, publicados por la Asociación Internacional de Geomagnetismo y Aeronomía (IAGA, por sus siglas en inglés) [9],  $\mathcal{P}_{\ell}^m$  son las funciones cuasi-normalizadas de Schmidt-Legendre [28] [ver Ec. (1.19)],  $N = 13^5$  y  $(r, \theta$  y  $\varphi)$  son las coordenadas esféricas GEO definidas en la sección 1.1.2.

En la Fig. 1.6a) se muestran las curvas de nivel del campo geomagnético evaluado en la superficie de la Tierra, usando la Ec. (1.20) con los valores de los coeficientes  $g_{\ell}^m(t)$  y  $h_{\ell}^m(t)$  mostrados en el apéndice A. En la Figura 1.6b) se muestran las curvas de nivel del campo geomagnético publicadas por la IAGA [8], mostrando un buen acuerdo<sup>6</sup> con lo calculado usando el programa desarrollado en esta tesis, por lo que se gana confianza en éste para evaluar el campo geomagnético en la superficie de la Luna.



**Fig. 1.6:** Campo geomagnético **a)** calculado en esta tesis usando la Ec. (1.20), con los valores de los coeficientes  $g_{\ell}^m(t)$  y  $h_{\ell}^m(t)$  mostrados en el apéndice A, y **b)** publicado por la IAGA (ver Fig. 1 en la referencia [8]).

Al calcular el gradiente de la Ec. (1.20) se obtiene el campo geomagnético

$$\mathbf{B}_I = -\nabla \phi_I(r, \theta, \varphi) = -\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \phi_I}{\partial r} - \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_I}{\partial \theta} - \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi_I}{\partial \varphi}, \quad (1.21)$$

en donde las componentes del campo geomagnético están dadas de manera explícita como

<sup>5</sup>IAGA proporciona los coeficientes  $g_{\ell}^m(t)$  y  $h_{\ell}^m(t)$  para  $\ell = 1, 2, \dots, 13$ , mostrados en el apéndice A.

<sup>6</sup>La Fig. 1.6a) difiere de la Fig. 1.6b) en los intervalos de  $\varphi$  y  $\theta$ . En la Fig. 1.6b) se recorre la gráfica debido a una convención de la comunidad aeroespacial. Sin embargo en el resultado calculado para este trabajo se muestra sin recorrer la gráfica para ser consistentes con la notación de los cálculos.

**Componentes del campo magnético de la Tierra**

$$B_{I,r} = \sum_{\ell=1}^N \sum_{m=0}^{\ell} (\ell+1) \left(\frac{R_E}{r}\right)^{\ell+2} \left[ g_{\ell}^m(t) \cos(m\varphi) + h_{\ell}^m(t) \sin(m\varphi) \right] \mathcal{P}_{\ell}^m(\cos\theta), \quad (1.22a)$$

$$B_{I,\theta} = - \sum_{\ell=1}^N \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{\ell+2} \left[ g_{\ell}^m(t) \cos(m\varphi) + h_{\ell}^m(t) \sin(m\varphi) \right] \frac{d\mathcal{P}_{\ell}^m(\cos\theta)}{d\theta}, \quad (1.22b)$$

$$B_{I,\varphi} = \sum_{\ell=1}^N \sum_{m=0}^{\ell} m \left(\frac{R_E}{r}\right)^{\ell+2} \left[ g_{\ell}^m(t) \sin(m\varphi) - h_{\ell}^m(t) \cos(m\varphi) \right] \frac{\mathcal{P}_{\ell}^m(\cos\theta)}{\sin\theta}. \quad (1.22c)$$

La componente azimutal del campo geomagnético, Ec. (1.22c), aparenta un comportamiento patológico en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , porque  $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \propto \mathcal{P}_{\ell}^m(\cos\theta)/\sin\theta$ . Para evitar problemas numéricos, es útil notar que los términos con  $m = 0$  no contribuyen a la componente azimutal y, desde la definición de las funciones asociadas de Legendre, se puede escribir [29]

$$P_{\ell}^m(x) = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_{\ell}(x)}{dx^m}. \quad (1.23)$$

Entonces, se puede definir una función auxiliar  $\Pi(\theta)$  como

$$\Pi(\theta) \equiv \frac{P_{\ell}^m(\cos\theta)}{\sin\theta} = (-1)^m \sin^{m-1} \theta \frac{d^m P_{\ell}(x)}{dx^m}, \quad (1.24)$$

que es bien comportada  $\forall m > 0$ . De la definición de la función auxiliar, Ec. (1.24), se puede calcular el campo geomagnético de forma numérica.

Como se observa de la Ec. (1.20), el potencial geomagnético total de la IGRF consta de un total de  $N = 13$  multipolos. Mientras más grande sea el orden  $\ell$  de cada multipolo, menor será su contribución al campo geomagnético, dado que su dependencia decae como  $\sim (1/r)^{\ell+2}$ . A continuación se presenta un análisis de la dependencia del potencial y el campo geomagnético con respecto al orden multipolar  $\ell$ . Para el término dipolar,  $\ell = 1$ , el campo magnético  $\mathbf{B}_{\text{dip}}$  de un dipolo puntual  $\mathbf{m}$  colocado en el origen a una distancia  $\mathbf{r}$  está dado por [27]

$$\mathbf{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[ 3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m} \right]. \quad (1.25)$$

Por otra parte, el término dipolar ( $\ell = 1$ ) de la expansión del potencial geomagnético [ver Ec. (1.20)], está dado por

$$\phi_1 = R_T \left(\frac{R_T}{r}\right)^2 \left[ g_1^0 \cos\theta + g_1^1 \cos\varphi \sin\theta + h_1^1 \sin\varphi \sin\theta \right] = \frac{g_1^0 z + g_1^1 x + h_1^1 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} R_T^3, \quad (1.26)$$

donde se han hecho explícitas las transformaciones de coordenadas de esféricas a cartesianas y  $(g_1^0, g_1^1, h_1^1)$  son los primeros tres coeficientes de Gauss de la Ec. (1.20), mostrados en el apéndice A. Para calcular el campo geomagnético dipolar basta con calcular el menos gradiente de la Ec.



(1.26), obteniendo las siguientes componentes:

$$B_x = 3R_T^3 x \frac{g_1^0 z + g_1^1 x + h_1^1 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{R_T^3 g_1^1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.27)$$

$$B_y = 3R_E^3 y \frac{g_1^0 z + g_1^1 x + h_1^1 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{R_T^3 h_1^1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.28)$$

$$B_z = 3R_E^3 z \frac{g_1^0 z + g_1^1 x + h_1^1 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{R_T^3 g_1^0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1.29)$$

De aquí se observa que si se define  $\mathbf{m} = 4\pi R_T^3 (g_1^1, h_1^1, g_1^0)/\mu_0$ , se puede escribir el campo geomagnético dipolar como

$$\mathbf{B}_1 = 3R_T^3 \frac{[(g_1^1, h_1^1, g_1^0) \cdot \mathbf{r}]\mathbf{r}}{r^5} - R_T^3 \frac{(g_1^1, h_1^1, g_1^0)}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}]. \quad (1.30)$$

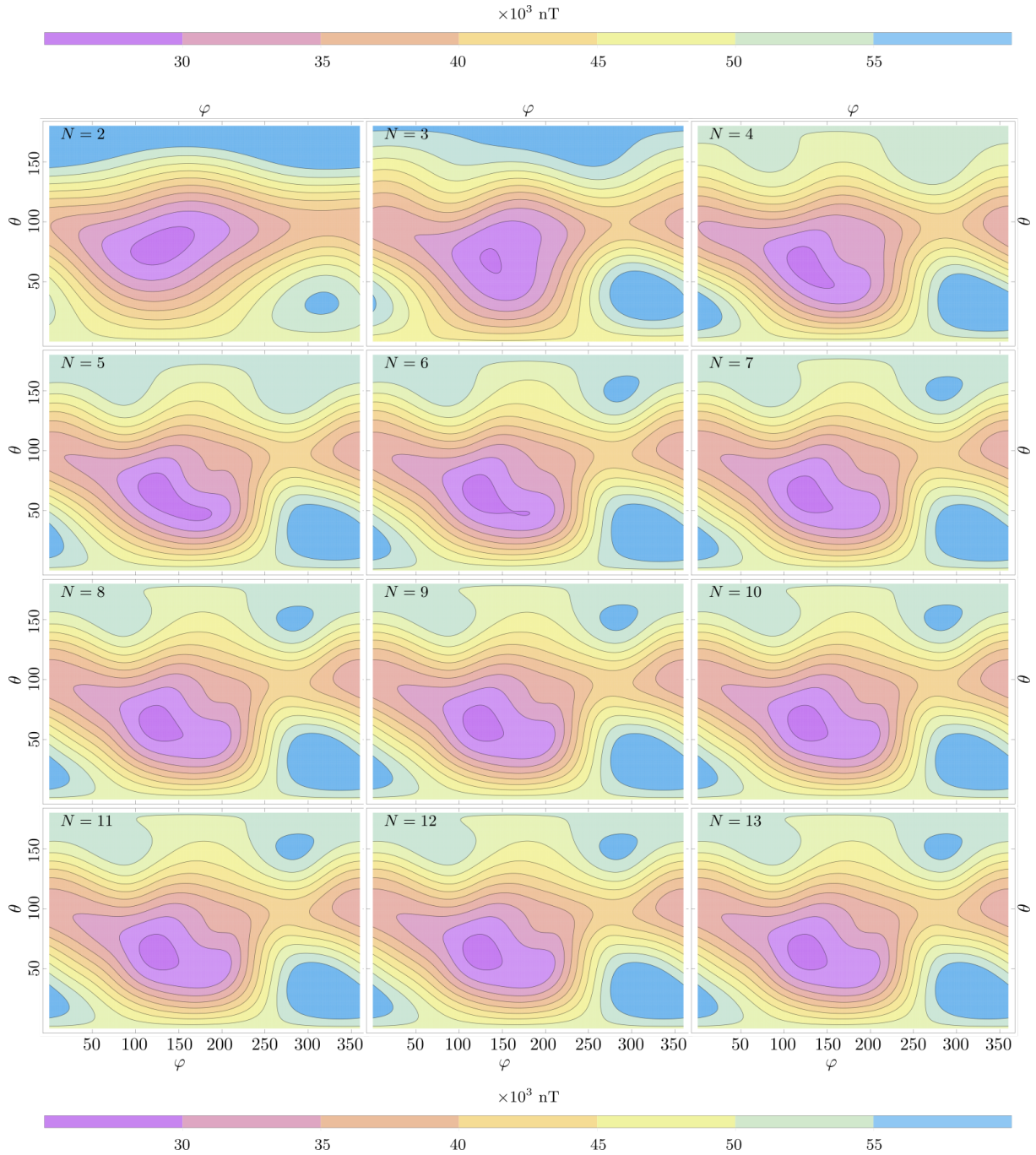
En la Fig. 1.7 se muestran gráficas de contorno de la magnitud de la suma acumulada del campo geomagnético sobre la superficie de la Tierra, para distintos valores del límite multipolar máximo  $N = 2, \dots, 13$ . Se observa que, hasta la suma acumulada con  $N = 7$ , las variaciones son perceptibles, lo que significa que existen cambios de un orden de magnitud de 1,000 nT, que es la escala que se utiliza en la Fig. 1.7. Después de  $N = 7$ , los cambios dejan de ser perceptibles, por lo que los cambios están por debajo de los 1,000 nT. Para calcular la FEM inducida sobre la superficie de la Luna, es necesario calcular la derivada en el tiempo del flujo magnético a través de la superficie lunar. Por lo tanto, se calcula la contribución al flujo magnético y a su derivada de los términos multipolares a la distancia orbital de la Luna. Para este análisis, se coloca una espira hipotética sobre el perímetro de la Luna de manera que su vector velocidad es normal a la superficie,  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{v}}$ , y se compara  $\mathbf{B}_\ell \cdot \hat{\mathbf{n}}$  sobre la trayectoria del centro de la Luna, con la Tierra fija y, por tanto, el campo geomagnético estático. En la Fig. 1.8 se muestra el resultado del cálculo analítico del geodipolo  $\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$  y el geocuatrupolo  $\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}$  (línea azul), que coinciden con los resultados del código numérico realizado durante este trabajo de tesis (línea negra punteada). Con base en estos resultados se gana confianza sobre los alcances del código numérico para comparar las contribuciones de todos los órdenes multipolares. Se puede observar en la Fig. 1.8 que la contribución del geocuatrupolo es dos órdenes de magnitud más pequeña respecto a la contribución del geodipolo.

Para estimar la contribución de cada orden multipolar al flujo magnético total, y por lo tanto a la FEM, se calcula el promedio del valor absoluto de  $\mathbf{B}_\ell \cdot \hat{\mathbf{n}}$  sobre toda la trayectoria de la Luna. La Fig. 1.9 muestra la gráfica del promedio  $\langle \mathbf{B}_\ell \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle$  en función del orden multipolar  $\ell$ . Se observa que la contribución multipolar decae exponencialmente mientras crece el orden multipolar  $\ell$ .

### 1.3. Campo magnetosférico

La magnetósfera terrestre está conformada por distintas regiones: el arco de choque, la envoltura magnética, la magnetopausa y la magnetocola, como se muestra en la Fig. 1.10a). Hay

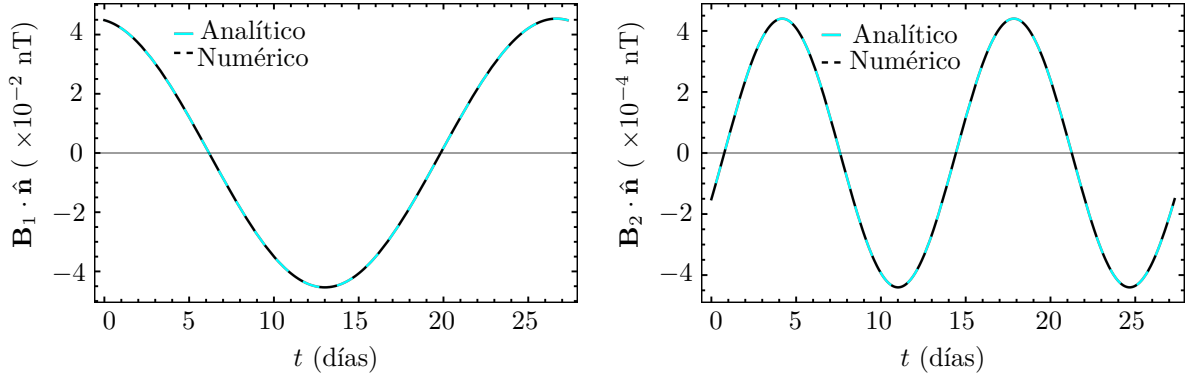
### 1.3 Campo magnetosférico



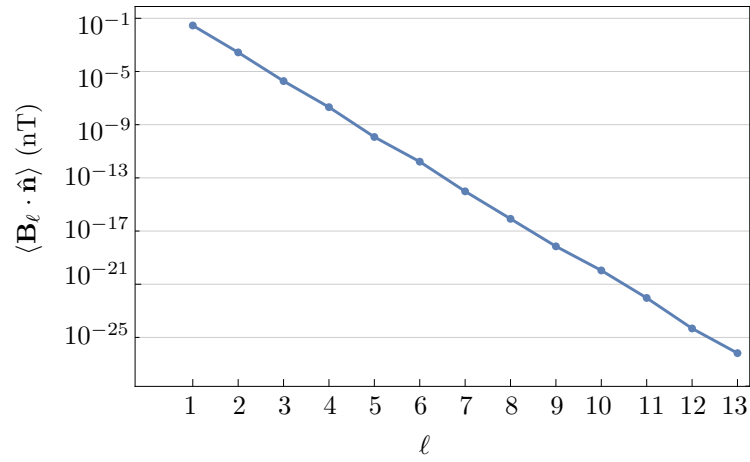
**Fig. 1.7:** Gráficas de contorno de la suma acumulada del campo geomagnético en  $\mu\text{T}$  para  $N = 2, \dots, 13$  órdenes multipolares.

cuatro puntos característicos de la magnetósfera que ayudan a describir su geometría, dividiendo el espacio en cuatro regiones: la región de día, la región de noche, el amanecer y el anochecer —ver Fig. 1.10a)—. La región de la magnetósfera por donde incide el viento solar sobre la magnetósfera se conoce como día, porque es la que da la cara al Sol, mientras que la región de la magnetósfera por donde se aleja el viento solar, extendiéndose por la magnetocola, se conoce como noche [10]. La región de la magnetósfera por donde la Tierra cambia de noche a día, según

## 1. CAMPO MAGNÉTICO TOTAL EN LA LUNA

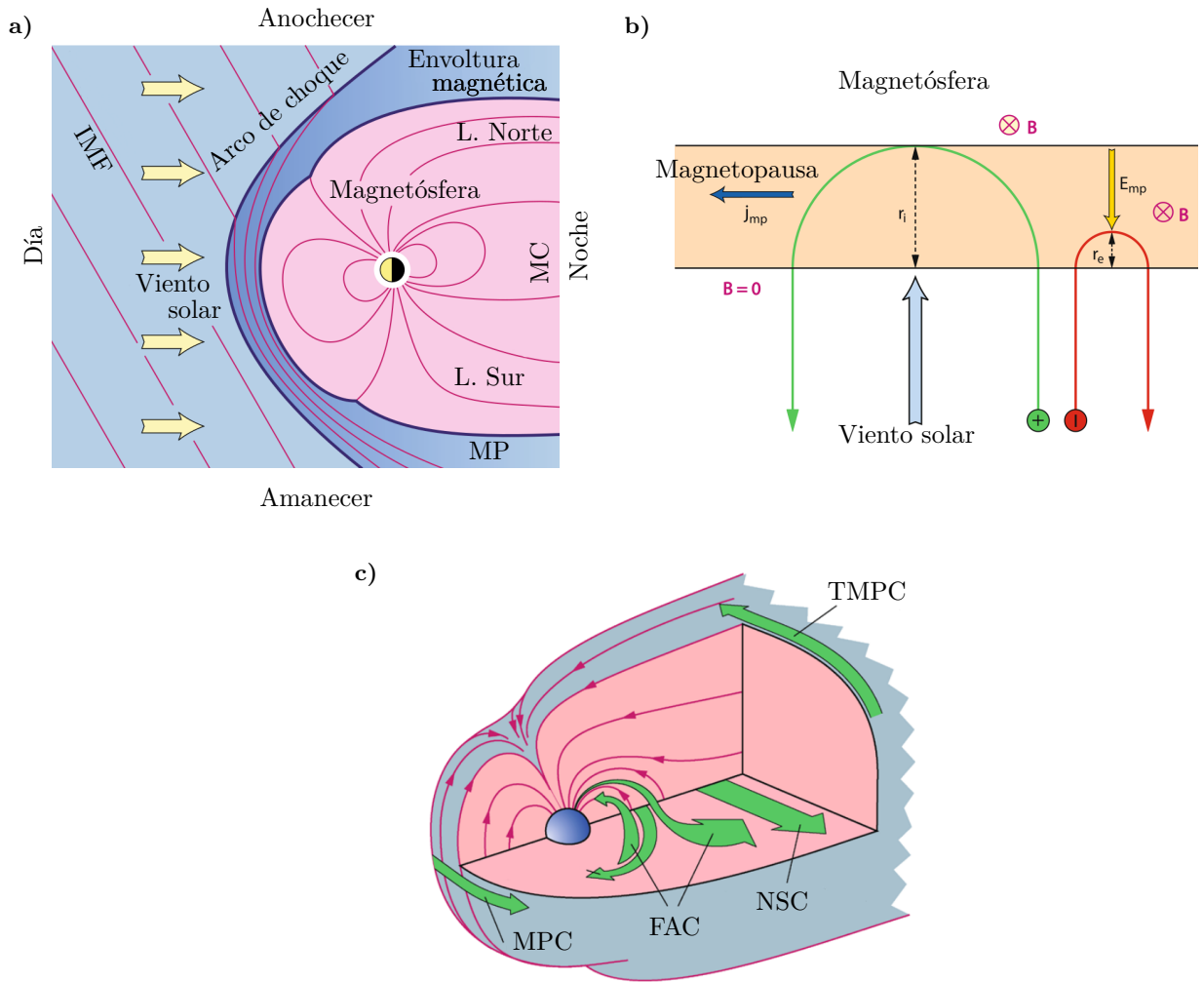


**Fig. 1.8:** Comportamiento del geodipolo  $\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$  y el geocuatropolo  $\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}$  en función del tiempo, en días, calculado de manera analítica (línea azul) y de manera numérica con el código realizado durante esta tesis (línea negra punteada).



**Fig. 1.9:** Promedio de  $\mathbf{B}_\ell \cdot \hat{\mathbf{n}}$  en función del orden multipolar  $\ell$  en escala logarítmica

su movimiento de rotación, se conoce como el amanecer; análogamente, la región por donde la Tierra cambia de día a noche se conoce como el anochecer, como se muestra en la Fig. 1.10a). El viento solar se encuentra con el arco de choque fuera de la magnetósfera en la región de día, que es donde las partículas cargadas que provienen del Sol comienzan a desviarse alrededor de la Tierra, debido a la presencia del campo geomagnético. La magnetopausa es la superficie que separa a la magnetósfera del medio interplanetario y se representa como una capa de corriente eléctrica superficial, que se origina debido a la deflexión de partículas cargadas provenientes del viento solar, como se muestra en la Fig. 1.10b). El giro de las partículas cargadas genera una corriente promedio en la superficie de magnetopausa, generando un campo magnético adicional que comprime al campo magnético dentro de la magnetopausa y al mismo tiempo aniquila la parte externa del campo magnético fuera de la magnetósfera, como se muestra en la Fig. 1.10b). La magnetopausa se forma a una distancia de entre  $10R_T$  y  $15R_T$  sobre la región de día y se extiende sobre la magnetocola a través de la región de noche. La densidad de corriente eléctrica en la magnetopausa terrestre es de  $10^{-6}$  A m $^{-2}$ , que se traduce en una corriente total de 10 MA [10] a lo largo de toda la superficie. La región entre la magnetopausa y el arco de choque se conoce como la envoltura magnética o magnetofunda.



**Fig. 1.10:** a) Representación esquemática de las partes de la magnetósfera, Fig. 1 en [10]. b) Representación esquemática de la corriente eléctrica en la magnetopausa, Fig. 4 en [10]. c) Representación esquemática de los distintos sistemas de corrientes eléctricas dentro de la magnetósfera —corrientes de magnetopausa (MPC), corrientes alineadas al campo (FAC), corrientes de sábana neutral (NSC), corrientes de cola de la magnetopausa (TMPC)—, Fig. 12 en [10].

La magnetósfera en la región de día se comprime y se confina debido al viento solar, mientras que en la región de noche se alarga para dar lugar a la cola magnética, que se extiende más allá del radio orbital de la Luna  $R_O$  en la región de noche. La cola está dividida por dos lóbulos: el lóbulo norte y el lóbulo sur, como se observa en la Fig. 1.10a). En el lóbulo sur las líneas de campo magnético se extienden desde el polo sur alejándose del Sol, mientras que en el lóbulo norte las líneas de campo magnético vienen desde la cola acercándose hacia la región de día y terminan en el polo norte. Separando a los lóbulos se encuentra la sábana neutral de plasma o lámina neutra de corriente, llamada así por su campo magnético débil, 1–5 nT, y su plasma cuasi-neutral denso, de una partícula por  $\text{cm}^{-3}$ , y energético, 1–10 keV [10]. Las corrientes de cola, representadas en la Fig. 1.10c) como las corrientes de la sábana neutral (NSC) y las corrientes de cola en la magnetopausa (TMPC), fluyen a través de la sábana de plasma. Las cargas positivas circulan del amanecer al anoecer, mientras que las cargas negativas circulan en dirección opuesta, cerrando el circuito a través de las ramas que constituyen la magnetopausa

alrededor de la cola. Estas corrientes estacionarias son causadas por un gradiente de presión en el plasma que apunta de norte a sur en el lóbulo norte y de sur a norte en el lóbulo sur. A este tipo de corrientes se les conoce como corrientes diamagnéticas en la física de plasmas [31]. El grosor de la sábana neutral de plasma es de  $1-2 R_T$  y la densidad de corriente máxima sobre la sábana es del orden de  $nA/m^2$ . El campo magnético transversal a la sábana neutral es del orden de  $1-5$  nT [10, 32].

Las partículas cargadas provenientes del Sol que llegan a la magnetósfera pueden quedar atrapadas en las líneas de campo magnético, de tal manera que oscilan del polo norte magnético al sur magnético de la Tierra. El campo magnético de la magnetósfera presenta heterogeneidades que dan lugar a un gradiente de intensidad de campo magnético que curva a las líneas de campo magnético, dando lugar a una deriva magnética por parte de las partículas cargadas en dirección perpendicular a  $\mathbf{B}$  y a  $\nabla B$ . Esta deriva de las partículas cargadas genera una corriente a lo largo de las líneas de campo magnético, haciendo espirales a las frecuencias y radios de ciclotrón. Este flujo se produce principalmente sobre el plano ecuatorial magnético a una distancia entre  $2R_T$  y  $6R_T$ , medida desde el centro de la Tierra, en la región de los cinturones de van Allen [10]. Este flujo neto de partículas produce lo que se conoce como *corrientes de cinturón*, cuyos perfil radial, intensidad y grosor dependen de la densidad de portadores de carga: iones y electrones. La intensidad del campo magnético asociado a las corrientes de cinturón se mide en promedios por hora con el índice Dst (por las siglas en inglés de *Disturbance Storm-Time*) en nanoteslas. Durante una tormenta solar el índice Dst puede alcanzar hasta  $-200$  nT [10, 14]. Sobre la magnetósfera terrestre la corriente de cinturón es del orden de  $1-10$  MA. Cuando el acoplamiento entre la magnetósfera y el viento solar es intenso, un mayor número de partículas se inyecta desde la cola magnética a las corrientes de cinturón, de tal manera que durante una tormenta solar las corrientes de cinturón pueden exceder los  $10$  MA [10, 33].

Sobre la magnetósfera existen zonas de acumulación de carga que generan caídas de potencial eléctrico, así como también existen zonas que se conectan a fuentes permanentes de corriente eléctrica interplanetaria. Tanto las acumulaciones de carga como las fuentes externas de corriente eléctrica interplanetaria generan un flujo de corriente eléctrica a lo largo de trayectorias que conectan distintas regiones de la magnetósfera. Dentro de la magnetósfera, las líneas de campo magnético funcionan como conductores casi perfectos para los electrones ionosféricos a bajas temperaturas, conectando regiones de acumulación de carga con la ionosfera terrestre. Dentro de estas líneas de campo magnético fluyen electrones ionosféricos, lo que da lugar a la llamada *corriente alineada al campo* (FAC, por sus siglas en inglés de *field-aligned currents*). Estas FAC proporcionan una conexión eléctrica directa entre la ionosfera y las regiones magnetosféricas distantes sobre altas latitudes en la Tierra, donde las líneas de campo ionosféricas son casi verticales. Una manifestación visible del flujo de estas FAC es la generación de emisiones aurorales [10].

De lo anterior se concluye que la trayectoria de la Luna, al estar inmersa tanto en el medio interplanetario como en la magnetósfera, se encuentra dentro de un campo magnético dinámico, con distintos regímenes de variación, lo que favorece tanto al cambio en el flujo magnético, y por tanto a la FEM, como a la energía eléctrica que se podría generar sobre la superficie lunar.

### 1.3.1. Modelación del campo magnetosférico

El campo magnético total en la Luna se puede representar como la suma

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_E, \quad (1.31)$$

donde  $\mathbf{B}_I$  representa al campo interno, conocido así porque es el campo que genera la Tierra, también llamado campo geomagnético, y

$$\mathbf{B}_E = \mathbf{B}_{RC} + \mathbf{B}_{TC} + \mathbf{B}_{FAC} + \mathbf{B}_{MP} + \mathbf{B}_{INT}, \quad (1.32)$$

donde  $\mathbf{B}_E$  representa el campo externo, porque es el generado por las contribuciones externas a la Tierra, conformado por el campo  $\mathbf{B}_{RC}$ , que está asociado a la corriente de cinturón (*ring current*), el campo  $\mathbf{B}_{TC}$ , generado por la corriente de cola (*tail current*), el campo  $\mathbf{B}_{FAC}$ , debido a los sistemas de corrientes que se alinean al campo (*field-aligned current*), el campo  $\mathbf{B}_{MP}$ , que es el campo de magnetopausa (*magnetopause current*) y el campo  $\mathbf{B}_{INT}$  que está relacionado al campo de interconexión, que es proporcional a la componente transversal a la dirección  $\hat{\mathbf{x}}_{GSM}$  del campo magnético interplanetario (IMF, por sus siglas en inglés de *interplanetary magnetic field*); es decir,  $\mathbf{B}_{INT} \propto \mathbf{B}_{IMF}^\perp$ . La mayor parte de la órbita de la Luna se encuentra fuera de la magnetósfera, donde solo interactúa con el IMF. En las subsecciones siguientes, se presentará una breve descripción de cada una de estas contribuciones.

El campo interno  $\mathbf{B}_I$  domina cerca de la superficie de la Tierra con un campo magnético del orden de 50,000 nT, pero decrece rápidamente con el inverso del cubo de la distancia y se vuelve comparable —del orden de 50 nT— al campo externo  $\mathbf{B}_E$  a una distancia de  $r \sim 10 R_T$  [14], por lo que sobre la órbita  $R_O \sim 60 R_T$  de la Luna domina el campo externo  $\mathbf{B}_E$ , que sigue estando en el orden de las decenas de nT. El campo externo  $\mathbf{B}_E$ , al estar relacionado con corrientes volumétricas ampliamente distribuidas por toda la magnetósfera, no puede ser descrito por un potencial escalar. Además, dentro de la magnetósfera ocurren distintos fenómenos que afectan al campo magnético en distintas escalas de tiempo, desde segundos, horas, días y hasta un periodo de 11 años, que es lo que dura un ciclo solar. Estas variaciones se atribuyen a distintos factores, tales como el movimiento intrínseco de la Tierra, que se puede traducir en oscilaciones de la orientación del geodipolo magnético con respecto a la línea que une a la Tierra con el Sol, cambios en el estado de movimiento del flujo de viento solar, e inestabilidades irregulares dentro de la magnetósfera [14]. A continuación se muestra de manera general cómo se calculan las distintas contribuciones al campo externo y su dinámica, dentro del código T05 [15].

### 1.3.2. Campo de magnetopausa y campo de interconexión

El campo magnético interplanetario (IMF) penetra la magnetopausa dando lugar a un término de interconexión  $\mathbf{B}_{INT} = \epsilon \mathbf{B}_{IMF}$ , donde la constante  $\epsilon$  es uno de los parámetros a ajustar usando datos del campo magnético sobre la magnetósfera. Por otra parte, el campo de magnetopausa se encuentra relacionado a todas las fuentes de campo magnético total. Es un término que complementa a los campos de la Ec. (1.31), y en particular a los términos de la Ec. (1.32), para asegurar el completo confinamiento del campo magnético dentro de la magnetósfera. El campo de magnetopausa se construye de manera tal que se satisfaga la siguiente condición de



confinamiento:

$$\mathbf{B}_{\text{TOT}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{MP}}} = (\mathbf{B}_{\text{MP}} + \mathbf{B}_{\text{RC}} + \mathbf{B}_{\text{TC}} + \mathbf{B}_{\text{FAC}} + \mathbf{B}_{\text{INT}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{MP}}} = 0, \quad (1.33)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector normal a la superficie de la magnetopausa  $S_{\text{MP}}$ , que es la superficie que separa a la magnetósfera del resto del espacio. En los códigos numéricos utilizados para modelar el campo magnético dentro de la magnetósfera, por ejemplo el T05, y sus actualizaciones, [15] que se usa para este trabajo, la magnetopausa se representa como una superficie empírica predefinida, por lo que para calcular el campo de magnetopausa se puede dividir en contribuciones para confinar cada término en la Ec. (1.33) de manera independiente, de forma que  $(\mathbf{B}_{\text{MP}, i} + \mathbf{B}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{MP}}} = 0$ , para cada  $i \in \{\text{RC}, \text{TC}, \text{FAC}, \text{INT}\}$ . Por lo tanto se puede escribir el campo magnético  $\mathbf{B}_{\text{MP}}$  como

$$\mathbf{B}_{\text{MP}} = \mathbf{B}_{\text{MP}, \text{I}} + \mathbf{B}_{\text{MP}, \text{RC}} + \mathbf{B}_{\text{MP}, \text{TC}} + \mathbf{B}_{\text{MP}, \text{FAC}} + \mathbf{B}_{\text{MP}, \text{INT}}. \quad (1.34)$$

Entonces, cada uno de los términos de la Ec. (1.34) satisface  $\mathbf{B}_{\text{MP}, i} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{B}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$ . Además, debido a su naturaleza irrotacional, el campo de magnetopausa puede ser calculado a través de un potencial escalar como  $\mathbf{B}_{\text{MP}} = -\nabla\phi_{\text{MP}}$ . De la ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi_{\text{MP}} = 0$ , usando las condiciones de frontera de Neumann [12]

$$\frac{\partial\phi_{\text{MP}, i}}{\partial n} \Big|_{S_n} = B_{n, i}^{\text{int}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - B_{n, i}^{\text{ext}} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.35)$$

se puede calcular  $\mathbf{B}_{\text{MP}, i}$ , conociendo cada uno de los términos  $\mathbf{B}_i$ .

### 1.3.3. Corrientes de cola (TC), corrientes de cinturón (RC) y corrientes alineadas al campo (FAC)

Para modelar los campos magnéticos producidos por las corrientes de cola, las corrientes de cinturón y las corrientes alineadas al campo, se utiliza una combinación lineal de vectores base  $\mathbf{b}_{\text{FAC}}^{(k)}$ ,  $\mathbf{b}_{\text{TC}}^{(k)}$  y  $\mathbf{b}_{\text{RC}}^{(k)}$  junto con su respectiva base de vectores de magnetopausa  $\mathbf{h}_{\text{FAC}}^{(k)}$ ,  $\mathbf{h}_{\text{TC}}^{(k)}$  y  $\mathbf{h}_{\text{RC}}^{(k)}$ . Como resultado, el caso más general del campo generado por estos sistemas de corriente se escribe como [14]

$$\mathbf{B}_i = \sum_{k=1}^{K_i} a_i^{(k)} \left[ \mathbf{b}_i^{(k)} \left( \mathbf{r}, \{\alpha_i^{(k)}\} \right) + \mathbf{h}_i^{(k)} \left( \mathbf{r}, \{\alpha_i^{(k)}\} \right) \right], \quad (1.36)$$

donde  $i \in \{\text{FAC}, \text{TC}, \text{RC}\}$ ,  $K_i$  es el número máximo de términos dentro del modelo y el  $k$ -ésimo término de la suma está conformado por un coeficiente lineal  $a_i^{(k)}$  y un conjunto de parámetros no lineales  $\{\alpha_i^{(k)}\}$  que cuantifican la magnitud y las propiedades geométricas de los vectores base  $\mathbf{b}_i^{(k)} + \mathbf{h}_i^{(k)}$ , así como su respuesta a los parámetros de entrada del modelo, que incluyen al ángulo de inclinación del geodipolo  $\Psi$  —que describe la orientación del eje geodipolar con respecto a la línea que va del centro del Sol al centro de la Tierra, eje  $X_{\text{GSM}}$ , como se observa en la Fig. 1.5. El ángulo de inclinación del geodipolo se calcula como  $\Psi = \arcsin(\hat{\mathbf{x}}_{\text{GSM}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_g)$  [26]—, a la velocidad de incidencia del viento solar, a la presión dinámica  $P_{\text{din}}$  del viento solar y al campo magnético interplanetario (IMF), que es el campo magnético debido únicamente al viento solar.

Por construcción, cada término en la Ec. (1.36) debe satisfacer la condición de confinamiento en la magnetopausa  $(\mathbf{b}_i^{(k)} + \mathbf{h}_i^{(k)}) \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\text{SMP}} = 0$ , lo que permite variar los parámetros  $a_i^{(k)}$  y  $\{\alpha_i^{(k)}\}$ , manteniendo completamente confinado el campo magnetosférico dentro de la superficie de la magnetósfera. La manera de construir la base  $\mathbf{b}_i^{(k)}$  y  $\mathbf{h}_i^{(k)}$  es la siguiente: se propone un *ansatz* para el potencial vectorial  $\mathbf{A}_i(\mathbf{r}, \{\alpha_i^{(k)}\})$  con base en la forma de las corrientes magnetosféricas (FAC, TC, RC) [14]. De esta manera  $\mathbf{b}_i^{(k)}(\mathbf{r}, \{\alpha_i^{(k)}\}) = \nabla \times \mathbf{A}_i(\mathbf{r}, \{\alpha_i^{(k)}\})$ . Por otra parte, como el campo  $\mathbf{h}_i^{(k)}$  es un término de confinamiento de magnetopausa, se calcula a través de un potencial escalar  $\phi_i$  que satisface la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \phi_i = 0$ , como se discutió en la sección anterior. Al resolver para  $\phi_i$  con las condiciones de frontera de la Ec. (1.35), se puede calcular el campo de confinamiento  $\mathbf{h}_i^{(k)}$  como  $\mathbf{h}_i^{(k)} = -\nabla \phi_i$ .

### 1.3.4. Tormentas solares

Para modelar las tormentas solares se calcula una respuesta de los términos que conforman al campo externo, Ec. (1.32). Tsyganenko y Sitnov [15] asumen que la respuesta de los campos magnéticos de la Ec. (1.32) está relacionada con flujos de carga eléctrica hacia dentro y fuera de la magnetósfera. La respuesta de cada campo magnético en la Ec. (1.32) que conforman al campo magnético externo, se modela a través de un término empírico  $W_i$  que modifica la intensidad de campo  $B_i$  de cada término en la Ec. (1.32). Se propone que la magnitud de  $W$  varía de acuerdo con la ecuación

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F - P, \quad (1.37)$$

donde  $F$  y  $P$  son funciones de fuentes y pérdidas, respectivamente. El término  $F$  representa la razón de incremento de un determinado sistema de corriente debido al flujo de partículas hacia adentro de la magnetósfera, y se puede calcular a través de

$$F = aN^\nu V^\nu B_s^\zeta, \quad (1.38)$$

donde  $N$  y  $V$  son la densidad y la velocidad del viento solar, respectivamente,  $B_s$  es la componente que apunta en dirección sur ( $-\mathbf{B}_{\text{TOT}} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\text{GSE}}$ ) del IMF y el coeficiente  $a$ , y los exponentes  $\nu$ ,  $\nu$  y  $\zeta$  son parámetros desconocidos a ajustar del modelo. El término  $P$  depende de cada sistema de corriente eléctrica a considerar. Se asume que el término de pérdidas  $P$  es proporcional a la diferencia entre el valor de  $W$  y su valor residual sin tormenta solar  $W_0$ , dado como

$$P = \Omega(W - W_0), \quad (1.39)$$

de donde se obtiene la solución

$$W(t) = W_0 + \int_0^t F(\tau) e^{\Omega(\tau-t)} d\tau, \quad (1.40)$$

donde  $\Omega$  se conoce como razón de decaimiento. La integración se realiza desde el inicio de la tormenta  $\tau = 0$  hasta el momento actual a observar  $\tau$ . De esta forma, se obtienen 6 parámetros  $W$ :  $W_1$  y  $W_2$  asociados a las corrientes de cola,  $W_3$  y  $W_4$  asociados a las corrientes de cinturón, y  $W_5$  y  $W_6$  asociados a las corrientes alineadas al campo.



Dentro de la documentación para utilizar el código T05 [34] se encuentran los rangos para los parámetros de entrada que se muestran en la tabla 1.2<sup>7</sup>. Los parámetros se pueden dividir en dos grupos: las propiedades intrínsecas del viento solar y los parámetros de respuesta magnetosférica al viento solar. Los parámetros de respuesta son los que permiten modelar fenómenos de tormentas solares.

RANGO DE PARÁMETROS DE ENTRADA DEL CÓDIGO T05					
Propiedades intrínsecas del viento solar			Respuesta magnetosférica al viento solar		
Parámetro	Mínimo	Máximo	Parámetro	Mínimo	Máximo
$P_{\text{din}}$ (nPa)	0.5	10	$W_1$	0	12
$B_y$ (nT)	-10	10	$W_2$	0	7
$B_z$ (nT)	-10	10	$W_3$ y $W_4$	0	15
$V_x$ (km/s)	-430	-400	$W_5$	0	30
$V_y$ (km/s)	0	0	$W_6$	0	100
$V_z$ (km/s)	0	0	$Dst$ (nT)	-100	20

**Tabla 1.2:** Rango de los parámetros de entrada para el código T05 obtenidos de la documentación del código [34] divididos en dos grupos: propiedades intrínsecas y parámetros de respuesta.

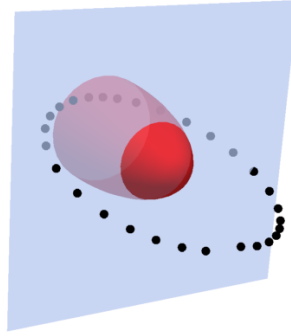
### 1.3.5. Alcances del código T05 y sus repercusiones en este trabajo

En la documentación del código T05 [34], se discuten los alcances de los resultados que se pueden obtener numéricamente. El autor menciona que únicamente serán válidos los resultados del código para modelar el campo magnetosférico para la región  $X_{\text{GSM}} > -10R_T$ <sup>8</sup>. En la Fig. 1.11 se muestra el plano  $X_{\text{GSM}} = -10R_T$  y se muestra la trayectoria de la Luna por medio de los puntos negros. Cada punto representa la posición de la Luna a inicios de un día. La superficie roja representa a la magnetósfera. Se observa que casi la mitad de la trayectoria de la Luna está fuera de la región de validez del código. Es decir, cuando la Luna se encuentra en la región  $X_{\text{GSM}} < -10R_T$  no es posible calcular el campo magnético de la magnetósfera por medio del código T05.

---

<sup>7</sup>Los parámetros  $W_i$  se obtienen integrando la Ec. (1.40) usando datos espaciales. Los rangos se encuentran en la documentación del código [34].

<sup>8</sup>Esta restricción proviene del hecho de que el código T05 interpola datos espaciales. En la documentación del código, el autor advierte que el código no funciona para regiones dentro de la magnetósfera más allá de  $10R_T$ , lo que sugiere que los datos espaciales no son suficientes para interpolar el campo magnético en esa región.



**Fig. 1.11:** Representación de la magnetósfera (elipsoide roja) junto con el movimiento de la Luna por día (puntos negros). El plano  $X_{GSM} = -10R_T$  corta tanto a la magnetósfera como a la trayectoria de la Luna.

Para realizar los cálculos del flujo magnético, la FEM y la energía electromagnética del viento solar sobre la superficie de la Luna debidos al campo magnetosférico, y poder comparar estos resultados con los respectivos flujo magnético, FEM y energía electromagnética debidos al campo geomagnético, se modela un satélite hipotético que orbite la Tierra con el mismo periodo de la Luna, pero con un radio orbital menor, de manera tal que su trayectoria siempre se encuentre en la región  $X_{GSM} > -10R_T$  para calcular la contribución del viento solar sobre el flujo magnético sobre el satélite hipotético orbitando a la Tierra a  $10R_T$ .



# Metodología para el cálculo de la FEM inducida en la Luna

---

En la sección 1.1 se definieron los distintos sistemas de coordenadas espaciales necesarios para el cálculo de la FEM inducida en la Luna, y en las secciones 1.2 y 1.3.1 se describieron las partes del campo magnético total sobre la trayectoria de la Luna. El movimiento orbital de la Luna se describe en el sistema GSE, mientras que la descripción de los campos interno y externo se realiza en los sistemas GEO y GSM, respectivamente. Para estudiar la dinámica del campo magnético total sobre la superficie de la Luna, es conveniente elegir un solo sistema de referencia para describir tanto el campo magnético total como la ecuación de movimiento de la Luna. Los métodos para describir el campo magnético externo, que es el sistema más dinámico y complejo, están descritos en el sistema GSM, e intentar describirlo en otras coordenadas resultaría poco práctico. Por esta razón, se prefiere describir tanto al campo geomagnético como al movimiento de traslación de la Luna en coordenadas GSM.

El movimiento de la Luna se podría considerar, como una primera aproximación, como un movimiento circular uniforme a través de la Ec. (1.7). A partir del vector unitario de la posición del centro de la Luna,  $\hat{\mathbf{r}}_{\text{POL}}$ , se puede definir el vector unitario de la velocidad del centro de la Luna como  $\hat{\mathbf{v}}_{\text{POL}} = d\hat{\mathbf{r}}_{\text{POL}}/dt$ . A través de las transformaciones resumidas en la tabla 1.1, se pueden calcular tanto  $\hat{\mathbf{r}}_{\text{GSM}}$  como  $\hat{\mathbf{v}}_{\text{GSM}}$  de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{GSM}} = \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_0^{-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\text{POL}}, \quad (2.1)$$

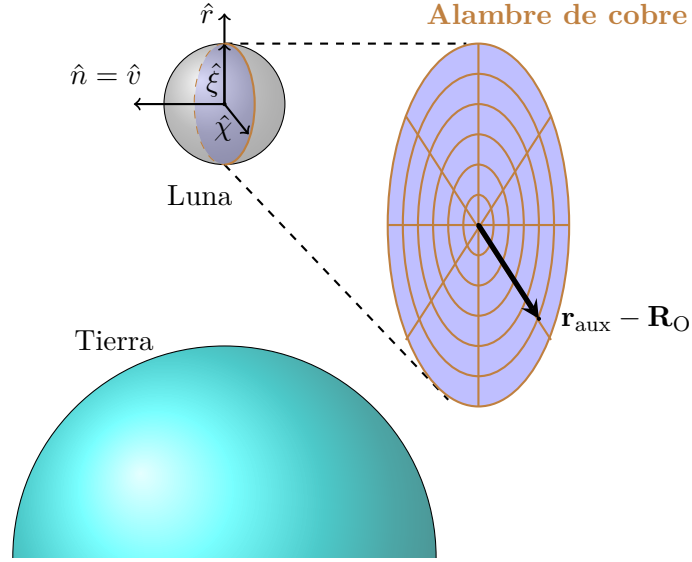
$$\hat{\mathbf{v}}_{\text{GSM}} = \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_0^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\text{POL}}, \quad (2.2)$$

y el campo magnético se puede calcular como

$$\mathbf{B}_{\text{GSM}} = \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\text{GEO}}. \quad (2.3)$$

## 2.1. Parametrización de la superficie de la Luna

Una primera aproximación para calcular el flujo a través de la superficie de la Luna sería calcular el campo magnético solo en el centro de la Luna y multiplicar este valor por la sección transversal de la Luna, pero como se mostrará más adelante esta aproximación no es buena.



**Fig. 2.1:** Representación del alambre de cobre enrollado en el perímetro de la Luna, de tal forma que el área vector de la superficie delimitada por el alambre es paralelo a la velocidad  $\hat{v}$ . Se muestra una ampliación de la superficie subtendida por el alambre de cobre con el mallado que se utiliza para calcular la integral de flujo magnético numéricamente; se muestra el vector  $\mathbf{r}_{\text{aux}} - \mathbf{R}_O$  para exhibir la función del vector auxiliar  $\mathbf{r}_{\text{aux}}$ : parametrizar la superficie para calcular la integral de flujo magnético a través del alambre de cobre.

Entonces, para el cálculo del flujo magnético a través de la superficie delimitada por un alambre de cobre enrollado en el perímetro de la Luna (ver Fig. 2.1), se parametriza la superficie. Como la velocidad angular rotacional y traslacional de la Luna es la misma, razón por la cual la Luna siempre muestra la misma cara hacia la Tierra, entonces se considera el alambre de cobre de manera tal que su vector normal  $\hat{\mathbf{n}}(t)$  sea paralelo al vector velocidad del centro de la Luna:  $\hat{\mathbf{n}}(t) = \hat{\mathbf{v}}(t)$ , como se muestra en la Fig. 2.1. Se definen dos vectores  $\hat{\xi}(t)$  y  $\hat{\chi}(t)$ , linealmente independientes y perpendiculares a  $\hat{\mathbf{n}}(t)$ , para parametrizar la superficie. Se puede construir a  $\hat{\xi}(t)$  y  $\hat{\chi}(t)$  como

$$\hat{\xi}(t) = \hat{\mathbf{r}}(t), \quad (2.4)$$

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\mathbf{n}}(t) \times \hat{\mathbf{r}}(t), \quad (2.5)$$

donde  $\hat{\mathbf{r}}$  es el vector unitario del radio vector que une el centro de la Tierra con el centro de la Luna, como se muestra en la Fig. 2.1. Por lo tanto, se puede definir un vector auxiliar que se encuentre sobre la superficie de la Luna para cada tiempo  $t$ , en términos de dos parámetros  $s$  y  $\gamma$ , de la siguiente manera:

**Vector auxiliar de parametrización de la superficie de la Luna**

$$\mathbf{r}_{\text{aux}}(t; s, \gamma) = R_O \hat{\mathbf{r}}(t) + s \cos \gamma \hat{\xi}(t) + s \sin \gamma \hat{\chi}(t), \quad (2.6)$$

donde  $R_O \approx 60R_E$  es el radio orbital de la Luna medido desde el centro de la Tierra.

Se puede elegir una orientación del alambre más general al rotar el circuito con respecto al eje alineado con el vector posición del centro de la Luna  $\hat{\mathbf{r}}(t)$ . Para rotar al vector  $\hat{\mathbf{n}}(t)$  un

ángulo  $\Theta$  alrededor de un vector arbitrario  $\mathbf{A} = (u, v, w)$ , se hace uso de la matriz  $R(\Theta) = T_{xz}^{-1}T_z^{-1}R_z(\Theta)T_zT_{xz}$ . A continuación se describe el proceso para construir las matrices  $T_{xz}$ ,  $T_z$  y  $R_z(\Theta)$ .

Se definen las matrices de rotación a un ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $y$  y a un ángulo  $\gamma$  alrededor del eje  $z$  como

$$R_y(\beta) = \langle \beta, y \rangle = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$R_z(\gamma) = \langle -\gamma, z \rangle = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

respectivamente. A través de estas matrices, se construye una matriz de rotación alrededor de un vector arbitrario  $\mathbf{A} = (u, v, w)$ . Sin pérdida de generalidad y por simplicidad, se supone al vector  $\mathbf{A}$  con norma 1, es decir,  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 1$ . El ángulo que forma  $\mathbf{A}$  con respecto al eje  $z$  se denota como  $\theta$  y el ángulo que forma la proyección de  $\mathbf{A}$  en el plano  $xy$  con respecto al eje  $x$  se denota como  $\varphi$ , como se muestra en la Fig. 2.2a). Posteriormente, al calcular los valores de  $\theta$  y  $\varphi$  en términos de  $(u, v, w)$ , se obtiene

$$\theta = \arccos\left(\frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\right) = \arccos(w), \quad (2.9)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{u}{v}\right), \quad (2.10)$$

y por lo tanto  $\sin \theta = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\cos \theta = w$ ,  $\sin \varphi = v/\sqrt{u^2 + v^2}$  y  $\cos \varphi = u/\sqrt{u^2 + v^2}$ .

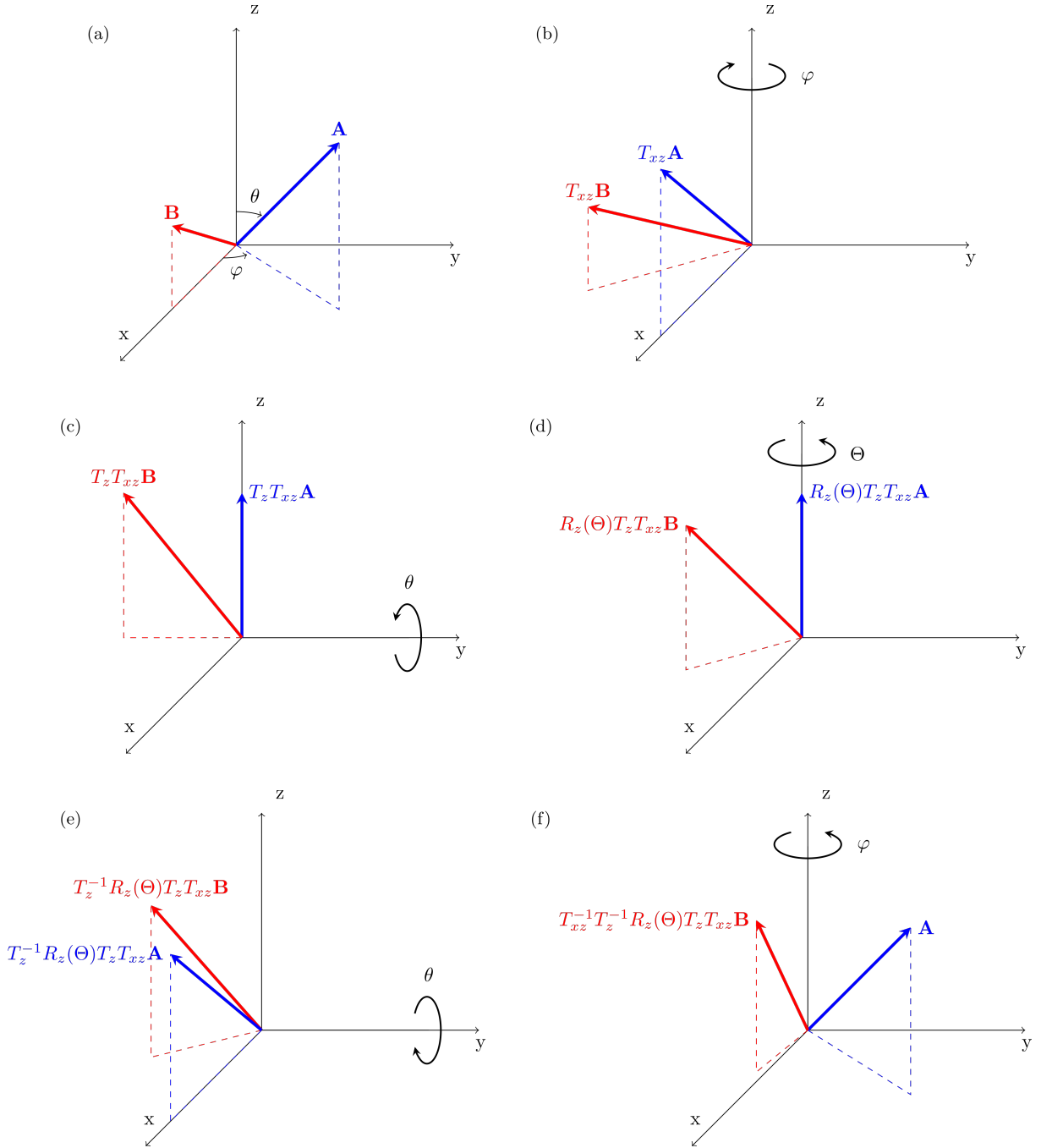
Para rotar el vector  $\mathbf{B}$  alrededor del vector  $\mathbf{A}$  se puede expresar al vector  $\mathbf{B}$  en el sistema de coordenadas donde el vector  $\mathbf{A}$  está alineado con el eje  $z$ , y rotar al vector  $\mathbf{B}$  resultante en ese sistema de coordenadas a través de la matriz  $R_z$  dada por la Ec. (2.8). Para alinear el vector  $\mathbf{A}$  con el eje  $z$ , primero se rota a un ángulo  $-\varphi$  alrededor del eje  $z$  a través de la matriz de transformación

$$T_{xz} = \langle -(-\varphi), z \rangle = \langle \varphi, z \rangle = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/\sqrt{u^2 + v^2} & v/\sqrt{u^2 + v^2} & 0 \\ -v/\sqrt{u^2 + v^2} & u/\sqrt{u^2 + v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

De esta manera, el vector  $\mathbf{A}$  se alinea con el plano  $xz$ , como se muestra en la Fig. 2.2b). Posteriormente, se rota al vector resultante  $T_{xz}\mathbf{A}$  un ángulo de  $-\theta$  alrededor del eje  $y$  a través de la transformación

$$T_z = \langle -\theta, z \rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 & -\sqrt{u^2 + v^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{u^2 + v^2} & 0 & w \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

como se muestra en la Fig. 2.2c). Entonces el vector  $T_zT_{xz}\mathbf{A}$  se encuentra alineado con el eje  $z$ . Una vez construidas las matrices  $T_{xz}$ , Ec. (2.11), y  $T_z$ , Ec. (2.12), se pueden utilizar para rotar a



**Fig. 2.2:** Proceso de construcción de la matriz de rotación de un vector  $\mathbf{B}$  alrededor de un vector arbitrario  $\mathbf{A}$

un vector  $\mathbf{B}$  alrededor del vector  $\mathbf{A}$  de la siguiente manera: Primero, se describe al vector  $\mathbf{B}$  en el sistema de coordenadas donde  $\mathbf{A}$  está alineado con el eje  $z$ . Esto se consigue de la misma manera en la que se consiguió alinear al vector  $\mathbf{A}$  con el eje  $z$ : se rota al vector  $\mathbf{B}$  el mismo ángulo  $-\varphi$  alrededor de eje  $z$ , a través de la matriz  $T_{xz}$ , y posteriormente se rota al vector resultante  $T_{xz} \mathbf{B}$  el mismo ángulo  $-\theta$  alrededor del eje  $y$ , a través de la matriz  $T_z$ . Por lo tanto, para rotar al vector  $T_z T_{xz} \mathbf{B}$  un ángulo  $\Theta$  alrededor del vector  $\mathbf{A}$ , basta con aplicar la transformación  $R_z(\Theta)$  dada por la Ec. (2.8), porque bajo este sistema de coordenadas el vector  $\mathbf{A}$  está alineado con

el eje  $z$ , como se muestra en la Fig. 2.2d). Por lo tanto, el vector  $R_z(\Theta) T_z T_{xz} \mathbf{B}$  es el vector  $T_z T_{xz} \mathbf{B}$  rotado a un ángulo  $\Theta$  alrededor del vector  $\mathbf{A}$  en el sistema de coordenadas en el que  $\mathbf{A}$  está alineado con el eje  $z$ . Por último, se requiere describir al vector  $\mathbf{B}$  rotado en el sistema de coordenadas original, en el que  $\mathbf{A}$  está fuera del eje  $z$ . Para esto basta con rotar al vector resultante  $R_z(\Theta) T_z T_{xz} \mathbf{B}$  un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y$ , a través de la matriz  $T_z^{-1}$ , como se muestra en la Fig. 2.2e), y finalmente rotar al vector resultante  $T_z^{-1} R_z(\Theta) T_z T_{xz} \mathbf{B}$  a un ángulo  $\varphi$  alrededor del eje  $z$ , a través de la matriz  $T_{xz}^{-1}$ , como se muestra en la Fig. 2.2f). Por lo tanto, el resultado de rotar al vector  $\mathbf{B}$  alrededor del vector  $\mathbf{A}$  a un ángulo  $\Theta$  es  $T_{xz}^{-1} T_z^{-1} R_z(\Theta) T_z T_{xz} \mathbf{B}$ , y la matriz de rotación buscada es

$$R(\Theta) = T_{xz}^{-1} T_z^{-1} R_z(\Theta) T_z T_{xz}. \quad (2.13)$$

A partir de la matriz (2.13) se puede calcular la dirección del vector normal de una espira rotada un ángulo  $\Theta$  alrededor del eje radial, que apunta en la dirección del vector  $\hat{\mathbf{r}}(t)$ , con respecto a la posición originalmente propuesta donde  $\hat{\mathbf{n}}(t) = \hat{\mathbf{v}}(t)$ , como se muestra en la Fig. 2.3.

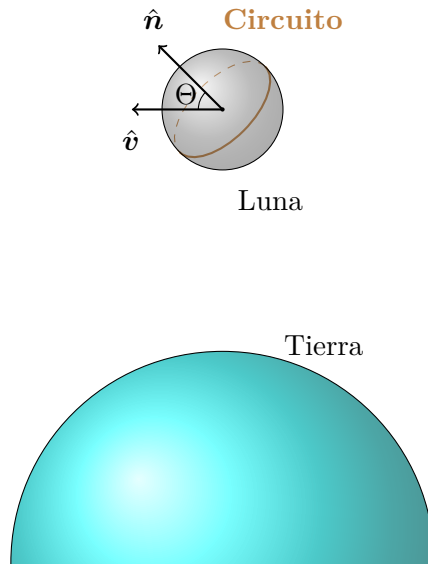


Fig. 2.3: Representación esquemática de la rotación del alambre de cobre alrededor del vector  $\hat{\mathbf{r}}$ , de manera tal que su vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$  forme un ángulo  $\Theta$  con respecto al vector  $\hat{\mathbf{v}}$ .

## 2.2. Cálculo del flujo magnético mediante la cuadratura de Gauss-Legendre

Se puede escribir el flujo del campo magnético  $\Phi(t)$  a través de la superficie del alambre como

$$\Phi(t) = \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_L} \mathbf{B}[\mathbf{r}_{\text{aux}}(t; s, \gamma)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(t) s ds d\gamma, \quad (2.14)$$

donde  $R_L$  es el radio medio de la Luna. Para resolver la integral dada por la Ec (2.14) se utiliza el método de cuadraturas de Gauss-Legendre [17], que aproxima la integral  $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$ ,



a través de la siguiente suma

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad (2.15)$$

donde los coeficientes  $w_i$  se conocen como pesos y los puntos  $x_i$  se conocen como nodos. Se define el error de la cuadratura como  $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ . Si para algún polinomio  $p$  de grado  $r > n$ , se tiene que  $E_n(p) = 0$ , se dice que la cuadratura tiene un grado de exactitud de  $r$  (ver Apéndice B). Para asegurar un grado de exactitud de  $r = 2n + 1$  en la cuadratura, se calculan los nodos y los pesos de  $I_n(f)$  sustituyendo  $f$  por su polinomio de interpolación de Lagrange de grado  $n$ ,  $\Pi_n f = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_j(x)$ , donde  $x_j$  son los nodos de interpolación de Lagrange y  $\ell_i(x)$  son las bases polinómicas de Lagrange. Los nodos de la interpolación son los mismos nodos de la cuadratura, y los pesos se pueden calcular como  $w_i = \int_{-1}^1 \ell_i(x) dx$  [17] (ver detalles en el apéndice B). En la práctica, los nodos que se utilizan son las raíces de los polinomios de Legendre  $P_n(x)$  y los pesos se calculan como [29]

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P'_n(x_i)]^2}. \quad (2.16)$$

Para extender el intervalo de integración de  $[-1, 1]$  a un intervalo arbitrario  $[a, b]$ , se hace un cambio de variable de la siguiente forma

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) dx, \quad (2.17)$$

de manera tal que tanto la fórmula de cuadratura como el error, se pueden escribir como [29]

$$I_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right), \quad (2.18)$$

$$E_n(f) = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad (2.19)$$

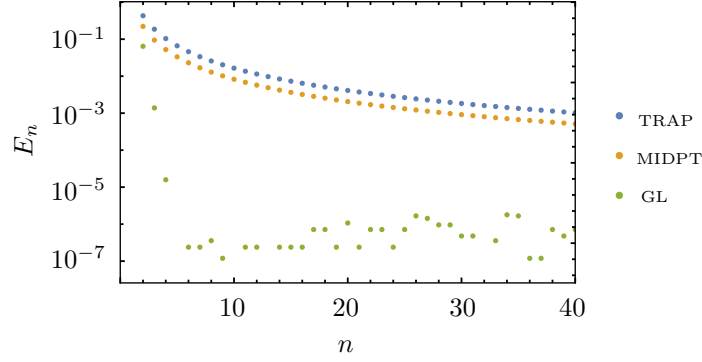
donde  $\xi \in [a, b]$ . Por lo tanto, se puede aproximar el flujo magnético a través de la superficie de la Luna, Ec. (2.14), como

$$\Phi(t) \approx \frac{\pi R_T}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j s_i \mathbf{B}[\mathbf{r}_{\text{aux}}(t; s_i, \gamma_j)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(t), \quad (2.20)$$

donde  $s_i = R_T(1 + x_i)/2$  y  $\gamma_i = \pi(1 + x_i)$ . En el apéndice B se muestran los detalles.

### 2.2.1. Comparativa con otras cuadraturas

En esta sección se discute el alcance del método de cuadraturas de Gauss-Legendre comparado con otras cuadraturas. La manera de proceder es seleccionar una función de prueba cuya integral se conozca analíticamente y comparar el error que se obtiene con cada cuadratura. Se elige la función de prueba  $f(s, \gamma) = \sin(\gamma/2)$  cuya integral de superficie sobre un círculo es  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin(\gamma/2) s ds d\gamma = 2$ . En la Fig. 2.4 se muestran las curvas del error en escala logarítmica de tres cuadraturas: Midpoint (MIDPT), Trapecio (TRAP) —descritas en el apéndice B— y Gauss-Legendre (GL), en función del orden de la cuadratura. Se observa que para alcanzar una



**Fig. 2.4:** Comparativa entre el error numérico al integrar la función  $\sin(\gamma/2)$  usando como métodos las cuadraturas Midpoint (MIDPT), Trapecio (TRAP) y Gauss-Legendre (GL).

precisión de  $10^{-3}$  se requiere que  $n > 40$  para las cuadraturas Midpoint y Trapecio, mientras que con la cuadratura de Gauss-Legendre con  $n = 3$  es suficiente. Si se considera  $n = 10$  en la cuadratura de Gauss-Legendre, se obtiene una precisión de  $\sim 10^{-7}$ . Por lo tanto, en los cálculos subsecuentes, se utilizan las cuadraturas de Gauss-Legendre de orden 10 para calcular los resultados.

### 2.3. Cálculo de la FEM

Para calcular la FEM numéricamente se emplea el método de diferencias finitas centradas [17]

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}, \quad (2.21)$$

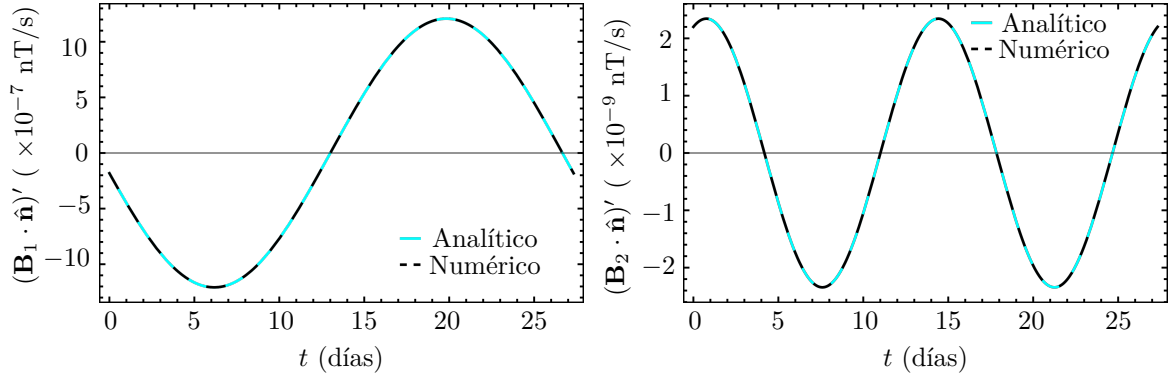
donde  $x_{i\pm 1} = x_i \pm h$  y  $h$  es el paso numérico de la derivada. Dado que el error en la derivada es de segundo orden  $\mathcal{O}(h^2)$ , es necesario considerar que  $h$  sea lo más pequeño posible. Por lo tanto, la FEM se calcula de la siguiente manera

$$\mathcal{E}(t) \approx \frac{\pi R_T}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j s_i \left\{ \frac{\mathbf{B}[\mathbf{r}_{\text{aux}}(t+h; s_i, \gamma_j)] - \mathbf{B}[\mathbf{r}_{\text{aux}}(t-h; s_i, \gamma_j)]}{2h} \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}(t). \quad (2.22)$$

En la Fig. 2.5 se muestra el comportamiento de la derivada  $\frac{d}{dt}(\mathbf{B}_\ell \cdot \hat{\mathbf{n}}) = (\mathbf{B}_\ell \cdot \hat{\mathbf{n}})'$  tanto del geodipolo como del geocuatropolo, calculados mediante la Ec. (2.22) (línea negra punteada), que coinciden con la derivada analítica (línea azul) en ambos casos.

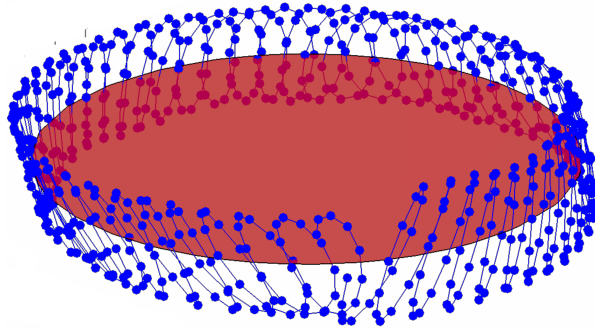
### 2.4. Descripción del movimiento real de la Luna

En el capítulo 3 se presentan los cálculos de la FEM inducida en un alambre enrollado sobre el perímetro de la Luna, donde se aproximó el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra a través de un movimiento circular uniforme, pero en realidad el movimiento es mucho más



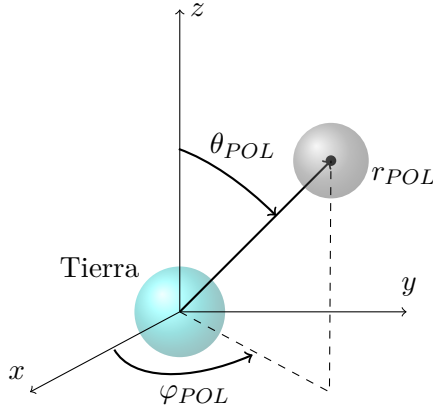
**Fig. 2.5:** Derivada temporal del geodipolo  $\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$  y el geocquadropole  $\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}$  en función del tiempo, en días, calculado de manera analítica (línea azul) y de manera numérica con el código generado durante esta tesis (línea negra punteada).

complicado. En esta sección se muestra la descripción matemática de la trayectoria real de la Luna que se obtiene a partir de la solución semi-analítica ELP 2000-85 (por sus siglas en francés *Ephémérides Lunaires Parisiennes*) de las ecuaciones de movimiento de la Luna presentada por Chapront-Touzé y Chapront [20]. A partir del trabajo de Chapront-Touzé y Chapront se derivan tablas y códigos [21] con parámetros obtenidos a partir de la solución ELP 2000-85 que permiten describir el movimiento de la Luna a través de las Ecs. (2.23). En la Fig. 2.6 se muestra que el movimiento real de la Luna describe oscilaciones fuera de su plano orbital. Cada punto azul representa la posición cada hora y se encuentran unidos por una línea azul como una ayuda para el ojo. El plano color rojo representa el plano orbital de la Luna. Una primera suposición sobre la magnitud de esta contribución podría ser que es despreciable para el cálculo de la FEM, sin embargo al examinar las oscilaciones de la trayectoria lunar se obtiene que las variaciones en la trayectoria son del orden de  $5R_T$ , es decir, 18 radios lunares, por lo que se esperaría que la contribución a la FEM de estas oscilaciones sí fuera importante.



**Fig. 2.6:** Representación esquemática del movimiento real de la Luna, con cada punto azul representando la posición de la Luna cada hora. Los puntos se unen por una línea para una mejor visualización. El plano rojo representa el plano orbital de la Luna.

Para describir la trayectoria real de la Luna, primero se definen las coordenadas  $r_{\text{POL}}$ ,  $\theta_{\text{POL}}$  y  $\varphi_{\text{POL}}$ . La distancia radial geocéntrica  $r_{\text{POL}}$  denota la distancia entre el origen, colocado en el centro de la Tierra, y el centro de la Luna, la colatitud  $\theta_{\text{POL}}$  denota la distancia angular que forma el radio vector del centro de la Luna con respecto al plano orbital de la Luna, y la colongitud  $\varphi_{\text{POL}}$  denota la coordenada angular de giro sobre el plano orbital, como se muestra



**Fig. 2.7:** Representación de las coordenadas  $r_{POL}$ ,  $\theta_{POL}$  y  $\varphi_{POL}$ .

en la Fig. 2.7.

De acuerdo con Chapront-Touzé y Chapront [21], se puede expresar a  $r_{POL}$ ,  $\theta_{POL}$  y  $\varphi_{POL}$  como

$$r_{POL} = 385,000.57 + S_r + S'_r + t S''_r, \quad (2.23a)$$

$$\theta_{POL} = S_\theta + 10^{-3}(S'_\theta + t S''_\theta), \quad (2.23b)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{POL} = & 218.31665 + 481,267.88134 t - 13.268 \times 10^{-4} t^2 \\ & + 1.856 \times 10^{-6} t^3 - 1.534 \times 10^{-8} t^4 + S_\varphi + 10^{-3}(S'_\varphi + t S''_\varphi), \end{aligned} \quad (2.23c)$$

expresando a  $\theta_{POL}$  y  $\varphi_{POL}$  en grados, y a  $r_{POL}$  en kilómetros. Las funciones  $S_r$ ,  $S'_r$ ,  $S''_r$ ,  $S_\theta$ ,  $S'_\theta$ ,  $S''_\theta$ ,  $S_\varphi$ ,  $S'_\varphi$ ,  $S''_\varphi$  están dadas de la siguiente manera:

$$S_r = \sum_{n=1}^{N_r} r_n \cos \left( \delta_n^{(0)} + \delta_n^{(1)} t + \delta_n^{(2)} 10^{-4} t^2 \right), \quad (2.24)$$

$$S'_r = \sum_{n=1}^{N'_r} r'_n \cos \left( \delta_n'^{(0)} + \delta_n'^{(1)} t \right), \quad (2.25)$$

$$S''_r = \sum_{n=1}^{N''_r} r''_n \cos \left( \delta_n''^{(0)} + \delta_n''^{(1)} t \right), \quad (2.26)$$

$$S_\theta = \sum_{n=1}^{N_\theta} \theta_n \cos \left( \beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)} t + \beta_n^{(2)} 10^{-4} t^2 \right), \quad (2.27)$$

$$S'_\theta = \sum_{n=1}^{N'_\theta} \theta'_n \cos \left( \beta_n'^{(0)} + \beta_n'^{(1)} t \right), \quad (2.28)$$

$$S''_\theta = \sum_{n=1}^{N''_\theta} \theta''_n \cos \left( \beta_n''^{(0)} + \beta_n''^{(1)} t \right), \quad (2.29)$$

$$S_\varphi = \sum_{n=1}^{N_\varphi} \varphi'_n \cos \left( \alpha_n^{(0)} + \alpha_n^{(1)} t + \alpha_n^{(2)} 10^{-4} t^2 \right), \quad (2.30)$$

$$S'_{\varphi} = \sum_{n=1}^{N'_{\varphi}} \theta'_n \cos \left( \alpha_n'^{(0)} + \alpha_n^{\beta(1)} t \right), \quad (2.31)$$

$$S''_{\varphi} = \sum_{n=1}^{N''_{\varphi}} \theta''_n \cos \left( \alpha_n''^{(0)} + \alpha_n''^{(1)} t \right), \quad (2.32)$$

donde el valor de las constantes  $N_i, N'_i, N''_i, i_n, i'_n, i''_n, \chi_n^{(0)}, \chi_n^{(1)}, \chi_n^{(2)}, \chi_n'^{(0)}, \chi_n'^{(1)}, \chi_n''^{(0)}, \chi_n''^{(1)}$  con  $i \in \{r, \theta, \varphi\}$  y  $\chi \in \{\delta, \beta, \alpha\}$ , se encuentran en tablas de las soluciones a las ecuaciones de movimiento de la Luna publicadas por Chapront-Touzé y Chapront [21].

Con ayuda de esta solución se puede calcular la contribución a la FEM debida a las perturbaciones del movimiento real de la Luna. Sin embargo, las ecuaciones de Chapront-Touzé y Chapront están descritas con respecto al plano eclíptico y equinoccio dinámicos, lo que significa que estas coordenadas no consideran el movimiento de rotación de la Tierra. Para realizar un cálculo completo de la FEM, considerando la dinámica completa, es necesaria una matriz de transformación similar a las que se presentaron en la sección 1.1, que no está incluida en la tabla 1.1. Por lo tanto, la manera de estimar la contribución a la FEM de las variaciones en el movimiento real de la Luna se realiza a través de calcular la FEM sin considerar la rotación de la Tierra para ambas trayectorias, la solución (ELP 2000-85) y un movimiento circular uniforme, para después comparar los resultados entre sí, como se muestra en la sección 3.3.

## Análisis y discusión de resultados

---

El campo magnético total sobre la trayectoria de la Luna está conformado por dos contribuciones con características diferentes, tanto en su forma de ser modeladas matemáticamente como en sus variaciones a lo largo del tiempo y a lo largo de la trayectoria de la Luna. A continuación se presenta la contribución a la FEM por parte del campo interno (geomagnético) y del campo externo (magnetosférico) de manera separada. Debido a los alcances en el código T05, discutidos en la sección 1.3.5, el campo externo sólo se puede calcular en la región  $X_{\text{GSM}} > -10R_{\text{T}}$  y por lo tanto se estudia la contribución a la FEM sobre un hipotético satélite circulando a  $10R_{\text{RT}}$  con el mismo periodo orbital de la Luna. En la sección 3.1 se presenta la contribución a la FEM inducida sobre un alambre de cobre enrollado sobre el perímetro de la Luna debida solamente al campo geomagnético, tanto a  $60R_{\text{RT}}$  como a  $10R_{\text{RT}}$ , mientras que en la sección 3.2 se estudia la contribución a la FEM solamente debida al campo magnetosférico a  $10R_{\text{RT}}$  y se compara con la FEM debida al campo total, y en la subsección 3.2.1 se introduce un parámetro de actividad solar para estimar la contribución a la FEM debida a tormentas solares moderadas. En la sección 3.3 se presenta el cálculo de la contribución a la FEM debida a las oscilaciones del movimiento real de la Luna, resaltando que se utiliza un código diferente al T05 para estimar esta contribución, que no toma en cuenta la rotación de la Tierra. Por último, en la sección 3.4 se muestra una comparativa entre el tiempo de carga de equipos electrónicos comunes, como una computadora portátil, usando la energía generada sobre la superficie de la Luna con respecto al tiempo de carga con una línea eléctrica doméstica.

Todos los cálculos que se presentan a continuación consideran una sola vuelta del alambre alrededor de la Luna. Aumentando el número de vueltas se puede incrementar la FEM y la energía eléctrica del circuito de la siguiente manera. Al calcular el flujo magnético sobre un alambre de cobre enrollado sobre el perímetro de la Luna, como se muestra en la Fig. 2.1, se obtiene el flujo  $\Phi_1$ , y al agregar  $N$  vueltas al circuito, se obtiene un flujo  $\Phi_N = N\Phi_1$ . Por lo tanto, la FEM satisface la misma condición:  $\mathcal{E}_N = N\mathcal{E}_1$ , donde  $\mathcal{E}_1$  es la FEM inducida alrededor de una sola espira y  $\mathcal{E}_N$  es la FEM inducida sobre  $N$  espiras alrededor de la Luna. La resistencia eléctrica de un alambre de cobre está dada por  $R = \rho L/A$  [27], donde  $\rho$  es la resistividad del material,  $L$  la longitud del alambre y  $A$  es la sección transversal. Entonces, el circuito conformado por una sola vuelta del alambre de cobre tiene una resistencia eléctrica  $R_1 = \rho L_1/A$  donde  $L_1 = 2\pi R_L$ , con  $R_L$  el radio de la Luna, y la resistencia del circuito con  $N$  vueltas es  $R_N = NR_1$ , ya que su longitud es igual a  $L_N = NL_1$ . Por otra parte, la corriente que circula a través del circuito  $I = V/R$  es siempre la misma, porque el voltaje  $V$  y la resistencia  $R$  escalan de la misma forma

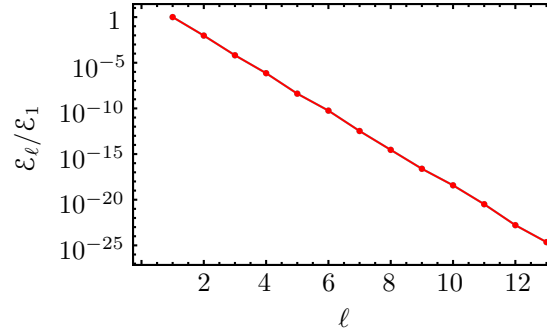
con respecto al número de vueltas  $N$ . Es decir,  $I_N = \mathcal{E}_N/R_N = (N\mathcal{E}_1)/(NR_1) = \mathcal{E}_1/R_1 = I_1$ . Para calcular la potencia del circuito, se parte del trabajo por unidad de tiempo  $P = dw/dt$ , obteniéndose [19]

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}, \quad (3.1)$$

donde  $q$  es la carga eléctrica que genera la corriente eléctrica inducida en el alambre,  $w$  es el trabajo realizado por la FEM y se ha hecho explícita la relación  $\mathcal{E} = dw/dq$ . Con esta consideración, se cumple que la potencia del circuito con  $N$  vueltas es  $P_N = NP_1$ , respecto a la potencia que se obtiene con una sola vuelta  $P_1$ . La energía total generada por el circuito se calcula como la integral de la potencia en un ciclo completo (28 días, que es el periodo aproximado de la Luna alrededor de la Tierra).

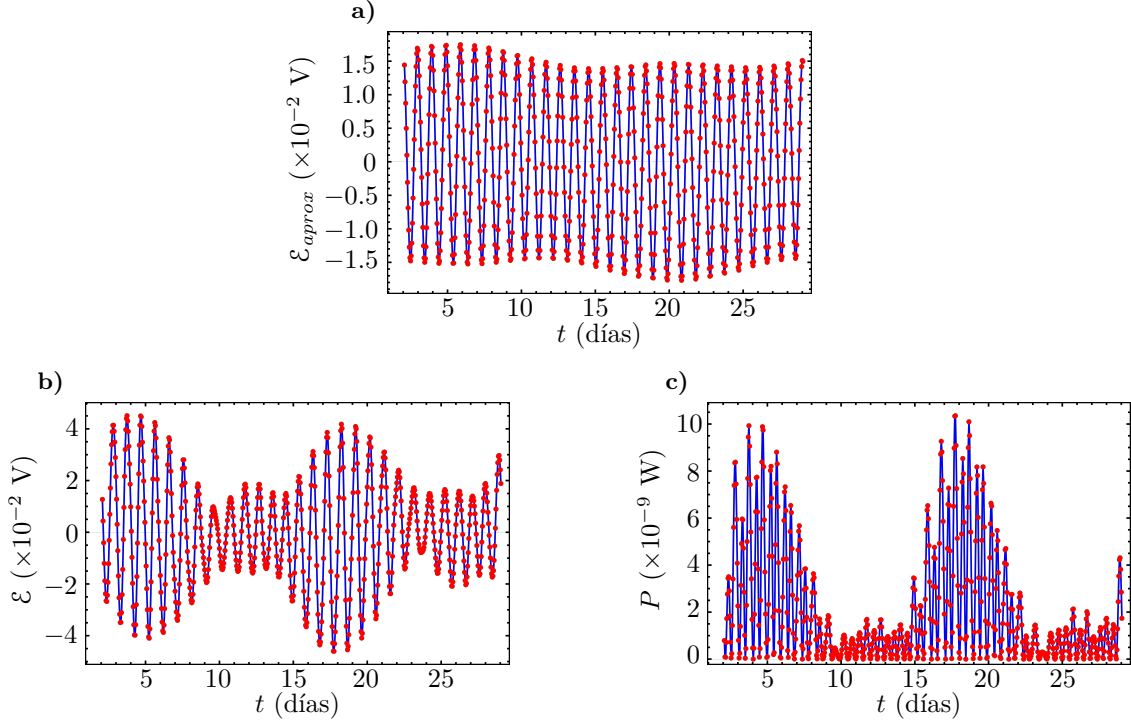
#### 3.1. Contribución del campo geomagnético a la FEM

Primero, se presenta una comparativa de las contribuciones multipolares a la FEM inducida sobre el circuito en el perímetro de la Luna, que muestra que la FEM está dominada por la contribución del geodipolo magnético  $\ell = 1$ . En la Fig. 3.1 se muestra que la contribución del multipolo  $\ell + 1$  es dos órdenes de magnitud menor que el multipolo  $\ell$ .



**Fig. 3.1:** Contribución a la FEM del término multipolar  $\ell$  respecto al término geodipolar con  $\ell = 1$

Dado que la Luna se encuentra a  $60R_T$  de la Tierra, se podría pensar en aproximar el flujo magnético debido al dipolo geomagnético sobre la espira como simplemente aquel en el que se evalúa el campo magnético en el centro de la espira, multiplicada por el área de la misma. Es decir, calcular  $\Phi \approx (\mathbf{B}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}) S_L$ , donde  $\mathbf{B}_c$  representa el campo magnético evaluado en el centro de la Luna y  $S_L$  la sección transversal delimitada por el perímetro de la Luna. Este resultado para la FEM, denotado como  $\mathcal{E}_{approx}$ , se muestra en la Fig. 3.2a) y se aprecia un comportamiento oscilatorio dado que el geodipolo está precesando cada 24 horas alrededor del eje de simetría de la Tierra. Por otra parte, en la Fig. 3.2b) se muestra la FEM calculada mediante las cuadraturas de Gauss-Legendre, donde se observa un aumento ( $\sim 4$  veces) en la magnitud de la FEM comparada con la  $\mathcal{E}_{approx}$ , ver Figs. 3.2a) y 3.2b). Por lo tanto, se concluye que el aproximar el flujo a través de  $\Phi \approx (\mathbf{B}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}) S_L$  no es una buena aproximación. Tanto la FEM como la potencia se pueden aumentar eligiendo un número mayor de vueltas en la espira. En particular, las Figs. 3.2b) y 3.2c) muestran la FEM y la potencia en función del tiempo,



**Fig. 3.2:** a) Aproximación de la FEM mediante el flujo  $\Phi \approx \mathbf{B}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_L}$ . b) FEM y c) potencia eléctrica sobre una espira circular sobre el perímetro de la Luna, en función del tiempo, debida al campo geomagnético, calculadas mediante cuadraturas de Gauss-Legendre. En los cálculos se consideró un radio orbital de  $R_O = 60R_T$ . Cada punto rojo representa el cálculo numérico de cada una de las cantidades respectivas, unidos mediante la línea azul, como una ayuda al ojo.

respectivamente, para un alambre de cobre 18 AWG<sup>1</sup> con sección transversal  $A = 0.823 \text{ mm}^2$  y resistividad de  $\rho/A = 0.021 \times 10^{-8} \Omega/\text{m}$  [6, 35], enrollado una vez sobre el perímetro de la Luna  $2\pi R_L \sim 10^7 \text{ m}$ , cuya resistencia es  $R_1 = (\rho/A)2\pi R_L \approx 0.23 \text{ M}\Omega$ . Se observa que la FEM tiene un comportamiento oscilatorio dentro de una envolvente, en donde el periodo de la envolvente está relacionado con el periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra, y el periodo de las oscilaciones dentro de la envolvente está relacionado con el periodo de rotación de la Tierra alrededor de su propio eje. La potencia, al estar relacionada con  $\mathcal{E}^2$ , preserva el comportamiento oscilatorio pero es positiva durante todo el movimiento de la Luna, y su integral sobre el periodo de rotación de la Luna es la energía total generada por el circuito. Con esta configuración se obtiene una FEM oscilante con una amplitud del orden de decenas de milivolts y una potencia del orden de  $10^{-9} \text{ W}$ , obteniendo un total de  $4.7 \times 10^{-3} \text{ J}$  de energía después de un ciclo.

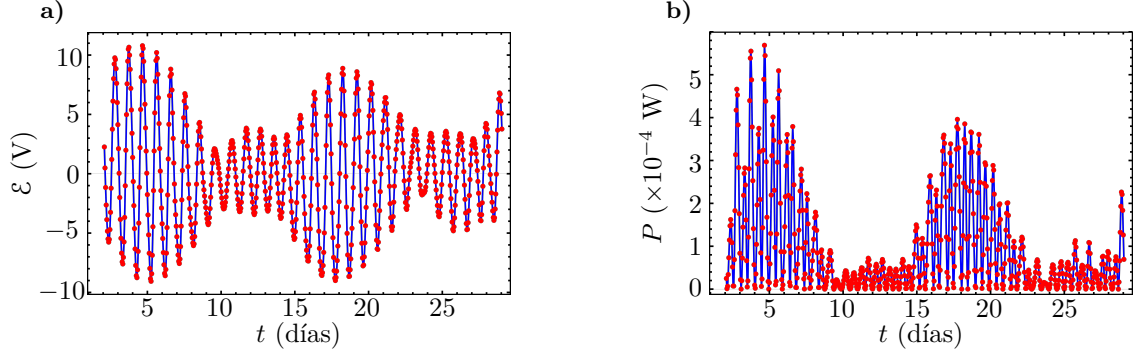
Como se mencionó anteriormente, el código T05 que se utiliza para calcular el campo magnetosférico sólo es válido para regiones en que  $X_{\text{GSM}} > -10R_T$ . Por lo tanto, no es posible calcular el campo magnetosférico en la posición real de la Luna, dada por un radio  $R_O = 60R_T$ . Debido a lo anterior, se considerará un caso hipotético en el que la Luna gire alrededor de la Tierra con un radio  $R_O = 10R_T$ , para tener una estimación del orden de magnitud de la FEM inducida, y poder compararla con la debida al campo geomagnético a la misma distancia. A

<sup>1</sup>Calibre de alambre estadounidense, por sus siglas en inglés, *American Wire Gauge* (AWG).



### 3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

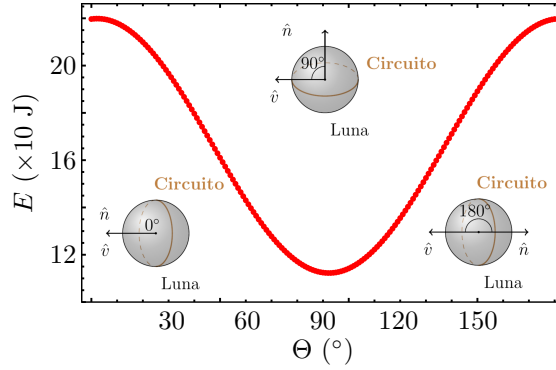
continuación se muestran los resultados de la FEM y la potencia debidas solamente al campo geomagnético, y en la sección 3.2 las debidas al campo magnetosférico, considerando en ambos casos un radio  $R_O = 10R_T$ . En las Figs. 3.3a) y 3.3b) se muestran la FEM inducida sobre la



**Fig. 3.3:** a) FEM y b) potencia eléctrica sobre el circuito de alambre enrollado en el perímetro de la Luna en función del tiempo, debida al campo geomagnético considerando un radio orbital de  $R_O = 10R_T$ . Los puntos se unen por una línea azul para una mejor visualización.

superficie delimitada por el circuito de alambre enrollado en el perímetro de Luna (considerando que su radio orbital fuera de  $10R_T$ ) y la potencia sobre el circuito bajo las mismas condiciones, y como era de esperarse tanto la FEM como la potencia tienen la misma forma que en el caso de  $R_O = 60R_T$  (ver Figs. 3.2 y 3.3) pero dos órdenes de diferencia en la FEM y casi 5 órdenes de magnitud de diferencia en la potencia. Se observa que en este caso se obtiene una FEM del orden de volts y una potencia del orden de  $10^{-4}$  W, obteniendo 220 J de energía después de un ciclo.

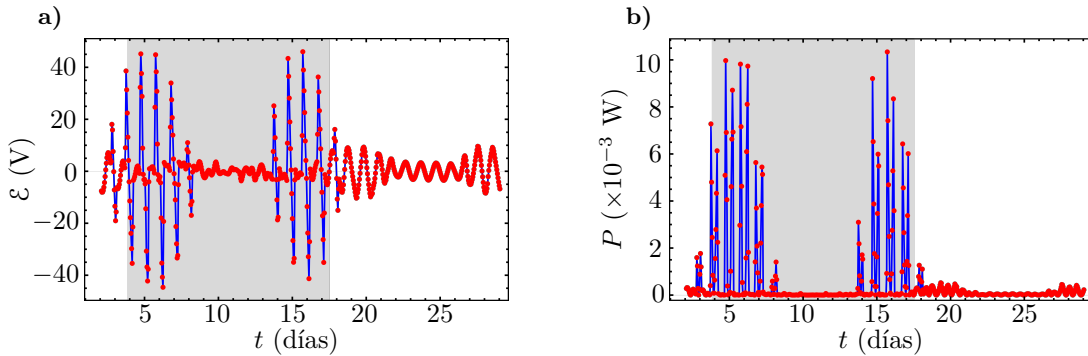
Ambas configuraciones, consideradas para las Figs. 3.2 y 3.3, se calculan con el vector normal de la superficie de la espira  $\hat{n}$  paralelo al vector velocidad de la Luna  $\hat{v}$ . Sin embargo, no es claro que esta sea la configuración óptima para obtener una FEM máxima. Para estudiar la dependencia de la energía eléctrica total del circuito con respecto a la orientación de la espira, a continuación se muestran los resultados para el cálculo de la energía a diferentes ángulos  $\Theta$  entre  $\hat{v}$  y  $\hat{n}$ . Al rotar el circuito alrededor del eje radial Tierra-Luna mediante la matriz de rotación alrededor de un eje arbitrario, definida a través de la Ec. (2.13), tal que el vector normal  $\hat{n}$  del área delimitada por el alambre de cobre forme un ángulo  $\Theta$  con el vector velocidad  $\hat{v}$  de la Luna, como se muestra en la Fig. 2.3, se obtiene una variación en la FEM. Con el objetivo de visualizar esta variación, para cada configuración de  $\Theta$  se calculó la FEM desde  $\Theta = 0^\circ$  hasta  $\Theta = 180^\circ$ , cada 1 grado, y se integró la potencia del circuito a lo largo de una vuelta completa alrededor de la Tierra para calcular la energía total del circuito en función de  $\Theta$ . En la Fig. 3.4 se muestra la energía total del circuito en función del ángulo  $\Theta$ , de donde se concluye que para  $\Theta \approx 89^\circ$  se obtiene un mínimo en la energía total del circuito, mientras que el máximo se obtiene cuando  $\Theta \approx 2^\circ$ , lo cual tiene sentido debido a que a esa distancia las líneas de campo son primordialmente líneas geodipolares, por lo que al colocar la espira de manera perpendicular al vector  $\hat{v}$ , menos líneas de campo atraviesan la superficie delimitada por el circuito.



**Fig. 3.4:** Energía total sobre el circuito debido al campo geomagnético alrededor de un mes lunar en función del ángulo de inclinación de la espira con respecto al vector velocidad  $\hat{v}$  de la Luna, suponiendo que orbita a  $10R_T$ . Cada uno de los puntos representa la energía total a lo largo de un periodo de rotación de la Luna a un ángulo  $\Theta$  cada  $1^\circ$ .

## 3.2. Contribución del campo magnetosférico a la FEM

Considerando solamente la contribución del campo magnetosférico, en las Figs. 3.6a) y 3.6b) se muestran la FEM y la potencia obtenida en la espira enrollada sobre el perímetro de la Luna, con el vector normal de la espira alineado con el vector velocidad, es decir, con  $\Theta = 0$ , calculadas con un radio orbital de  $R_O = 10R_T$ , de tal manera que toda la trayectoria de la Luna esté dentro de la región de validez del código T05. La trayectoria se eligió de manera tal que, aproximadamente, la primera mitad del recorrido se realizara a lo largo de la región de noche de la magnetósfera, resaltada en color gris en la Fig. 3.5, y la segunda mitad del recorrido se realizara a lo largo de la región de día. Los parámetros de entrada que se utilizaron son los que se recomiendan en la documentación del código T05 como valores en situaciones normales<sup>2</sup>. Se observa que tanto la FEM como la potencia presentan más estructura que en la contribución geomagnética mostrada en las Figs. 3.2 y 3.3, debido a las distintas contribuciones de campo magnetosférico que se hacen más intensas en la región de noche —resaltada en color gris en las Figs. 3.6a) y 3.6b)—, donde se encuentra la magnetocola. También se observa en la Fig. 3.6a)



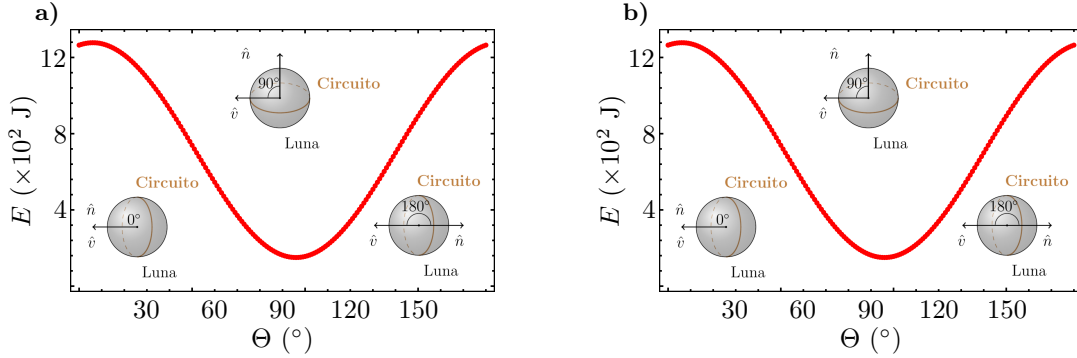
**Fig. 3.5:** a) FEM y b) potencia sobre el circuito en función del tiempo debida al campo magnetosférico, ambas para un radio orbital de  $R_O = 10R_T$ . La región resaltada en gris representa el trayecto recorrido por la Luna en la región de noche. Los puntos se unen por una línea azul para una mejor visualización.

que la FEM es casi 5 veces más grande que la FEM en la Fig. 3.3a), mientras que la potencia es,

<sup>2</sup> $P_{din} = 3 \text{ nPa}$ ,  $Dst = -20$ ,  $B_y = 3 \text{ nT}$ ,  $B_z = -5 \text{ nT}$ ,  $W_1 = 4$ ,  $W_2 = 3$ ,  $W_3 = 4$ ,  $W_4 = 10$ ,  $W_5 = 7$ ,  $W_6 = 20$

### 3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

a su vez,  $10 \times 10^{-3}/6 \times 10^{-4} \sim 16$  veces más grande que en el caso geomagnético, dando un total de 1,259 J al integrarla a lo largo de una vuelta completa alrededor de la Tierra, sin considerar los posibles efectos de las tormentas solares. Al modificar la orientación de la espira enrollada en el perímetro de la Luna, se obtiene un comportamiento similar respecto a lo obtenido para el caso de la componente geomagnética de la FEM. En la Fig. 3.6 se observa que el máximo en la energía se obtiene para un ángulo  $\Theta \approx 6^\circ$ , alcanzando una energía total del orden de 1.33 kJ.

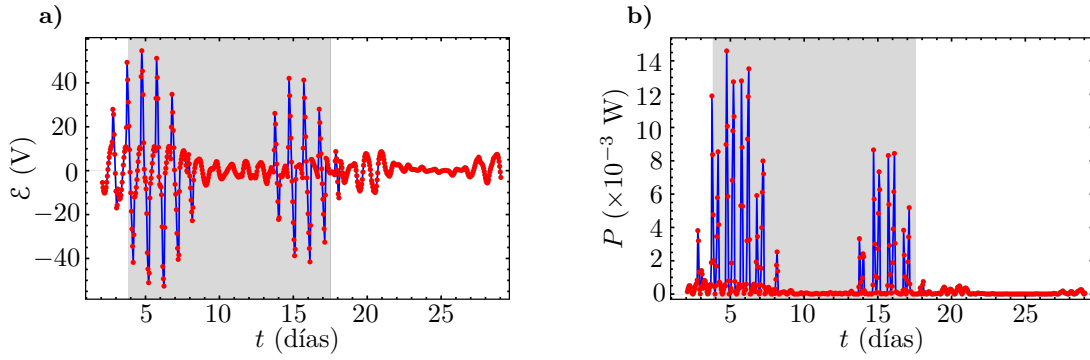


**Fig. 3.6:** Energía total sobre el circuito de cobre enrollado en el perímetro de la Luna, dando una vuelta, debida **a)** al campo magnetosférico y **b)** al campo magnético total alrededor de un mes lunar en función del ángulo de inclinación de la espira con respecto al vector velocidad  $\hat{v}$  de la Luna. Cada uno de los puntos representa la energía total a lo largo de un periodo de rotación de la Luna a un ángulo  $\Theta$  cada  $1^\circ$ .

En la Fig. 3.7 se muestra el cálculo tanto de la FEM como de la potencia debida al campo magnético total, suma de la contribución del campo geomagnético como del magnetosférico a  $10R_{RT}$ , para comparar los resultados y mostrar que la contribución predominante es la del campo magnetosférico. Se considera la orientación de la espira  $\Theta = 6^\circ$  debido a que es la orientación óptima para el campo total, y se encuentra cerca de la orientación óptima de la contribución geomagnética. Al comparar la Fig. 3.5 con la Fig. 3.7 se observa que la contribución magnetosférica prácticamente domina el comportamiento de la FEM y de la Potencia, y al calcular la energía a lo largo de un ciclo se obtiene que la energía eléctrica sobre el circuito debida al campo magnetosférico ( $\sim 1.3$  kJ) representa el 81 % de la energía total ( $\sim 1.6$  kJ) para un radio orbital de  $10R_T$ . Sin embargo, en la región de día la FEM debida al campo magnetosférico, Fig. 3.6a), es equiparable a la FEM debida al campo geomagnético, Fig. 3.3a). Ambas contribuciones oscilan alrededor de los 10 V con la misma frecuencia. A pesar de eso, en la Fig 3.7a), se observa que la suma de estos campos disminuye el valor de la FEM en la región de día. Esto sugiere que al calcular el flujo total, el campo geomagnético ( $\mathbf{B}_{\text{int}}$ ) se contrapone al campo magnetosférico ( $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ ), debido a que al considerar el radio orbital como  $R_O = 10R_T$ , la trayectoria en la región de día se encuentra muy cerca de la magnetopausa, y en la magnetopausa se satisface la condición de confinamiento  $(\mathbf{B}_{\text{int}} + \mathbf{B}_{\text{ext}}) \cdot \mathbf{n} \Big|_{S_{\text{MP}}} = 0$ .

#### 3.2.1. Contribución de las tormentas solares a la FEM

Una tormenta solar es una perturbación en la magnetósfera producida por actividad solar fuera de lo común, que se cuantifica con un cambio en el índice *Dst* (siglas en inglés de *Disturbance storm index*). El índice *Dst* da información sobre la intensidad de corriente eléctrica de cinturón, causada por el viento solar dentro de la magnetósfera. En condiciones normal, el *Dst* oscila

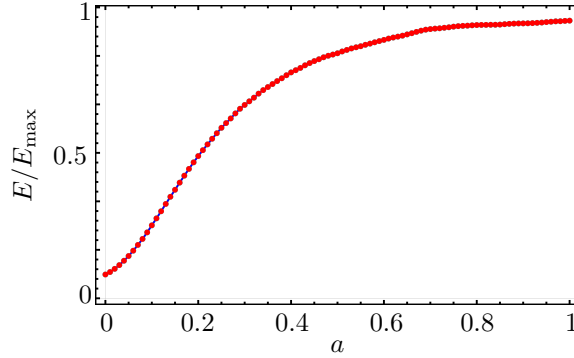


**Fig. 3.7:** a) FEM y b) potencia sobre el circuito de cobre enrollado en el perímetro de la Luna, dando una vuelta, en función del tiempo debida al campo magnético total (geomagnético más magnetosférico), ambas para un radio orbital de  $R_O = 10R_T$ . La región resaltada en gris representa el trayecto recorrido por la Luna en la región de noche. Los puntos se unen por una línea azul para una mejor visualización.

entre los  $-20$  y  $20$  nanoteslas. Se ha demostrado que tormentas moderadas ( $-100 < Dst < -20$ ) ocurren en promedio 5 veces al año, tormentas más intensas ( $-200 < Dst < -100$ ) ocurren en promedio una vez al año, y tormentas fuertes ( $-400 < Dst < -200$ ) ocurren en promedio una vez cada 6 años [36]. Por otra parte, los parámetros  $W_i$ , con  $i \in I_6$ , del código T05, cuantifican la respuesta de los diversos sistemas de corrientes eléctricas dentro de la magnetósfera a la actividad solar. En la tabla 1.2 se muestran los rangos sugeridos en la documentación del código T05, para los parámetros de entrada que cuantifican la contribución de actividad solar al campo magnetosférico ( $Dst$ ,  $W_i$ ).

Para estimar la contribución de las tormentas solares se define un parámetro de actividad solar  $a \in (0, 1)$ . Se propone modelar a los parámetros de entrada del código T05 ( $Dst$ ,  $W_i$ ) mediante una dependencia lineal del parámetro de actividad solar  $a$ , de la siguiente manera:  $Dst = -100a$ ,  $W_i = W_i^{\max}a$ . De esta manera  $a = 0$  representa actividad solar baja ( $Dst = 0$ ,  $W_i = 0$ ), y  $a = 1$  representa la actividad solar máxima permitida por el código T05 ( $Dst = -100$ ,  $W_i = W_i^{\max}$ ), que equivale a una tormenta solar moderada. Todos los cálculos mostrados anteriormente corresponden a un parámetro de actividad solar  $a \sim 0.20$ . Se calculó la potencia eléctrica  $P$  debida al campo magnético total sobre el alambre de cobre en función del parámetro de actividad solar  $a$ , usando la orientación óptima de la espira  $\Theta = 6^\circ$ . En la Fig. 3.8 se muestra el cálculo la energía  $E = \int P dt$  en función del parámetro de actividad solar  $a$ , después de un periodo de tiempo  $T = 1$  día, que es la duración promedio de una tormenta solar. La energía  $E$  se muestra normalizada respecto a la energía máxima  $E_{\max} \sim 120$  J, que se obtiene cuando el parámetro de actividad solar es  $a = 1$ .

La Fig. 3.6 muestra que la energía después de un mes lunar, en condiciones de actividad solar moderada, es de 1,600 J. Esto representa  $\sim 60$  J al día, es decir,  $\sim 21.9$  kJ al año. Si existieran 5 tormentas moderadas ( $-100 < Dst < -20$ ) en un año, con un parámetro de actividad solar  $a = 1$ , se generarían  $\sim 60$  J extras diarios, es decir, 300 J extras al año. De esta manera, la energía anual aumentaría de 21.9 kJ a 22.2 kJ, lo que representa un aumento del 1.4%, considerando tormentas solares moderadas.



**Fig. 3.8:** Cálculo de la energía en función del parámetro de actividad solar  $a$ , después de un periodo de tiempo  $T = 1$  día, que es la duración promedio de una tormenta solar. La energía  $E$  se muestra normalizada respecto a la energía máxima  $E_{\max} \sim 120$  J, que se obtiene cuando el parámetro de actividad solar es  $a = 1$ .

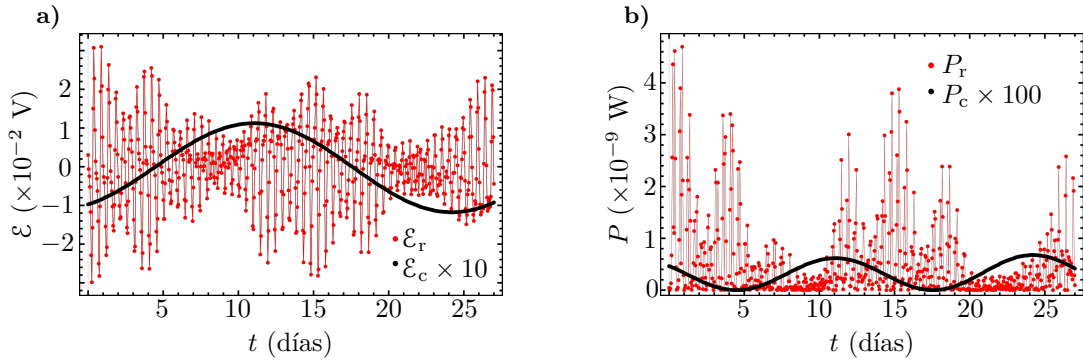
### 3.3. Contribución del movimiento real de la Luna a la FEM

Todos los cálculos presentados anteriormente se realizaron bajo la suposición de que el movimiento de la Luna es circular y uniforme, sin embargo, el movimiento de la Luna es más complicado. En la sección 2.4 se describió el trabajo de Chapront-Touzé y Chapront [20, 21], donde se presentan tanto las soluciones semi-analíticas de las ecuaciones de movimiento de la Luna descritas desde el plano eclíptico y el equinoccio dinámicos, lo que significa que no toman en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra, así como diversos códigos y subrutinas que implementan las soluciones para calcular las coordenadas de la Luna. Durante este trabajo de tesis se generó un código que implementa las subrutinas de Chapront-Touzé y Chapront [21] para calcular la contribución a la FEM sobre la superficie de la Luna debida sólo al campo geomagnético.

En la Fig. 3.9a) se compara la FEM asociada al movimiento real de la Luna  $\mathcal{E}_r$ , en color rojo, con la FEM asociada al movimiento circular uniforme de la Luna  $\mathcal{E}_c$ , en color negro, multiplicada por 10. Se observa que, asociado al movimiento real de la Luna, se obtiene una FEM un orden de magnitud mayor. En la Fig. 3.9b) se compara la potencia asociada al movimiento real de la Luna  $P_r$ , en rojo, con la potencia asociada al movimiento circular uniforme de la Luna  $P_c$ , en negro, multiplicada por 100. Calculando la integral a lo largo de un periodo orbital lunar, se obtiene la relación entre las energías  $E_r \approx 157.94 E_c$ , lo que indica que la energía es dos órdenes de magnitud más grande cuando se toma en cuenta el movimiento real de la Luna.

### 3.4. Carga de una computadora portátil

En la tabla 3.1 se muestra un resumen de la energía total  $E$  a lo largo de un periodo de rotación lunar alrededor de la Tierra. Se presentan 6 distintas configuraciones, ordenadas de la menor a la mayor. La tabla muestra las distintas contribuciones a la FEM en cuatro columnas: el movimiento real de la Luna (ELP por sus siglas en francés *Ephémérides Lunaires Parisiennes*), el movimiento de rotación de la Tierra, el campo interno o geomagnético ( $\mathbf{B}_{\text{int}}$ ), y el campo externo o magnetosférico ( $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ ). Cuando la casilla de alguna contribución esté marcada con el símbolo  $\checkmark$ ,



**Fig. 3.9:** a) FEM y b) potencia sobre el circuito de cobre enrollado en el perímetro de la Luna, dando una vuelta, en función del tiempo debida al campo geomagnético, ambas para un radio orbital de  $R_O = 60R_T$ , sin considerar la rotación de la Tierra alrededor de su propio eje. Los puntos se unen por una línea para una mejor visualización.

significa que esa contribución está contenida en el cálculo de la energía  $E$ , que se muestra en la última columna. La columna del radio orbital  $R_O$ , denota, en términos de radios terrestres ( $R_T$ ), la distancia promedio del centro de la Tierra al centro de la Luna considerada para ese cálculo.

CONTRIBUCIONES A LA ENERGÍA					
ELP	Rotación de la Tierra	$\mathbf{B}_{\text{int}}$	$\mathbf{B}_{\text{ext}}$	Radio orbital ( $R_T$ )	Energía (J)
		✓		60	$7.6 \times 10^{-6}$
✓		✓		60	$1.2 \times 10^{-3}$
	✓	✓		60	$4.7 \times 10^{-3}$
	✓	✓		10	$2.2 \times 10^2$
	✓		✓	10	$1.3 \times 10^3$
	✓	✓	✓	10	$1.6 \times 10^3$

**Tabla 3.1:** Energía  $E$  obtenida sobre el alambre de cobre a lo largo de un ciclo con una o más de las cuatro contribuciones a la FEM: el movimiento real de la Luna (ELP), el movimiento de rotación de la Tierra, el campo interno o geomagnético ( $\mathbf{B}_{\text{int}}$ ), y el campo externo o magnetosférico ( $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ ). La columna del radio orbital  $R_O$  denota, en términos de radios terrestres ( $R_T$ ), la distancia promedio del centro de la Tierra al centro de la Luna.

En la tabla 3.1 se observa que el campo magnético total sobre la superficie de la Luna puede generar un estimado de hasta 1.5 kJ a lo largo de 1 mes lunar por cada vuelta de la espira. Esto que equivale a  $\approx 4.4 \times 10^{-4}$  kWh por vuelta del circuito por mes. Si, por ejemplo, una computadora portátil consume alrededor de 2 kWh al mes, el sistema propuesto en este trabajo requeriría de casi  $N \approx 4,550$  vueltas en el alambre para generar esa energía. En caso de que el circuito constara de una sola vuelta, tardaría 380 años en generar 2 kWh. Si se considera que la estimación en el realce debido a incluir el movimiento real de la Luna es de casi dos órdenes de magnitud, la energía podría incrementar hasta 4.4 kWh, necesitando así solo la mitad del mes para cargar la computadora portátil con una sola vuelta.



# Conclusiones y trabajo a futuro

---

## Conclusiones

Se utilizó una extensión del método unidimensional de cuadraturas de Gauss-Legendre para calcular el flujo magnético a través del alambre de cobre enrollado sobre el perímetro de la Luna. En este trabajo, se utilizó la cuadratura de orden 10, cuyo error asociado se encuentra hasta la séptima cifra significativa. A partir del flujo magnético, se calculó numéricamente la FEM inducida sobre un alambre de cobre enrollado sobre la superficie de la Luna debida al campo magnético circundante. Primero, se consideró la trayectoria lunar como un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra en coordenadas GSM, que toman en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su propio eje. Se consideró un radio orbital de  $60R_T$  (radios terrestres) para calcular la contribución del campo geomagnético a la FEM. El campo geomagnético está descrito como una suma de términos multipolares, en la que el término geodipolar es la contribución dominante a  $60R_T$ , siendo dos órdenes de magnitud más grande que la contribución debida al geocuatrupolo, y al menos cuatro órdenes de magnitud más grande que las contribuciones de términos multipolares de orden superior. Posteriormente, se consideró un radio orbital de  $10R_T$  para calcular la FEM debida al campo total, porque la trayectoria de la Luna está fuera de la región de validez del código que se utilizó para modelar el campo magnetosférico (T05). El campo magnetosférico está constituido por diversos sistemas dinámicos de corrientes eléctricas que dependen de diferentes escalas de tiempo. La FEM inducida aumenta hasta en un orden de magnitud cuando la Luna recorre la región de noche de la magnetósfera, que es donde existe una mayor concentración de estas corrientes eléctricas. Debido a esto, el campo magnetosférico es la contribución predominante a la FEM sobre el perímetro de la Luna. A partir de la FEM se calcula la potencia eléctrica, e integrando la potencia a lo largo de un periodo de rotación de la Luna alrededor de la Tierra se obtiene la energía generada por el sistema después de un ciclo. La energía debida al campo magnetosférico representa el 86 % de la energía total. La contribución de las tormentas solares moderadas, se estimó mediante un parámetro de actividad solar  $a$ , y se mostró que la contribución de las 5 tormentas solares moderadas que suceden anualmente solo representa un incremento del 1.3 % sobre la energía total. El sistema propuesto es capaz de cargar la batería de una computadora portátil en un mes, con un embobinado de 4,550 vueltas, mientras que el sistema que consta de una sola vuelta, tardaría 380 años en generar esta energía. Sin embargo, el movimiento real de la Luna presenta oscilaciones fuera del movimiento circular uniforme de hasta  $4R_T$ . Para estimar la contribución a la FEM debida a estas perturbaciones se utilizó la solución semi-analítica de las ecuaciones de movimiento de la Luna ELP 2000-85. La solución ELP describe al movimiento real de la



Luna desde el plano eclíptico y el equinoccio dinámicos, lo que significa que no toma en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su propio eje. Al comparar el cálculo de la FEM considerando el movimiento real de la Luna con la FEM considerando la trayectoria lunar como un movimiento circular uniforme, la energía se incrementa en un factor de  $\sim 158$ , sin tomar en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su propio eje.

## Trabajo a futuro

Debido a las limitaciones del código T05, la órbita de la Luna se consideró con un radio orbital de  $10R_T$ , por lo que el primer punto a tratar en el trabajo a futuro sería modelar el campo magnético sobre la trayectoria real de la Luna a  $60R_T$ . La siguiente propuesta sería considerar el movimiento real de la Luna. Debido a que las ecuaciones ELP 2000-85 están descritas en un sistema de coordenadas que no contempla la rotación de la Tierra alrededor de su propio eje, las subrutinas publicadas por Chapront-Touzé y Chapront no son compatibles con el código T05. Por lo tanto, se requiere una transformación de coordenadas para escribir las ecuaciones ELP 2000-85 en el sistema GSM. Además, durante una tormenta solar los parámetros de actividad solar ( $Dst$ ,  $W_i$ ) son dinámicos, es decir, no permanecen constantes como se supuso durante este trabajo. Se propone usar datos empíricos de tormentas documentadas como parámetros de entrada del código T05 (o alguna versión actualizada que permita realizar el cálculo a  $60R_T$ ), lo que permitiría también calcular la contribución a la energía total tanto de tormentas solares más intensa ( $-400 < Dst < -100$ ). Para que sea viable la obtención de energía eléctrica a partir de la FEM inducida en la Luna usando su movimiento natural, es necesario investigar sobre las posibles pérdidas energéticas y eficiencias del circuito, así como un método para almacenar la energía eléctrica generada.

Debido a la extensión del método de cuadraturas de Gauss-Legendre de orden  $n$ , se aproxima la integral a través de una suma con  $n \times n$  términos. El cálculo de la energía a lo largo de un ciclo tardaba del orden de un minuto, usando una cuadratura de orden 10. Entonces, tarda aproximadamente 3 horas realizar el cálculo de la energía después de un ciclo, en función del ángulo  $\Theta$  subtendido entre los vectores velocidad de la Luna  $\hat{v}$  y el vector normal de la espiral  $\hat{n}$ , de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  con resolución de  $1^\circ$ . Si se quisiera estudiar el efecto de realizar otro giro en una dirección diferente para encontrar la posición óptima de la espira, al introducir ahora dos grados de libertad angulares, se requerirían  $180 \times 180$  cálculos para obtener una resolución de  $1^\circ$  en cada una de las dirección angulares. Esto significaría un tiempo de cómputo de casi 23 días. Existen métodos para realizar integrales multidimensionales más eficientemente, llamados cubaturas [37], que permiten reducir estos tiempos de cómputo. Se propone implementar una cubatura a futuro para realizar el cálculo de la FEM.

## Coeficientes de la IGRF

<b>g/h</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>1990</b>	<b>1995</b>	<b>2000</b>	<b>2005</b>	<b>2010</b>	<b>2015</b>	<b>2020</b>
g	1	0	-29775	-29692	-29619.4	-29554.63	-29496.57	-29441.46	-29404.8
g	1	1	-1848	-1784	-1728.2	-1669.05	-1586.42	-1501.77	-1450.9
h	1	1	5406	5306	5186.1	5077.99	4944.26	4795.99	4652.5
g	2	0	-2131	-2200	-2267.7	-2337.24	-2396.06	-2445.88	-2499.6
g	2	1	3059	3070	3068.4	3047.69	3026.34	3012.2	2982.0
h	2	1	-2279	-2366	-2481.6	-2594.50	-2708.54	-2845.41	-2991.6
g	2	2	1686	1681	1670.9	1657.76	1668.17	1676.35	1677.0
h	2	2	-373	-413	-458.0	-515.43	-575.73	-642.17	-734.6
g	3	0	1314	1335	1339.6	1336.30	1339.85	1350.33	1363.2
g	3	1	-2239	-2267	-2288.0	-2305.83	-2326.54	-2352.26	-2381.2
h	3	1	-284	-262	-227.6	-198.86	-160.40	-115.29	-82.1
g	3	2	1248	1249	1252.1	1246.39	1232.10	1225.85	1236.2
h	3	2	293	302	293.4	269.72	251.75	245.04	241.9
g	3	3	802	759	714.5	672.51	633.73	581.69	525.7
h	3	3	-352	-427	-491.1	-524.72	-537.03	-538.7	-543.4
g	4	0	939	940	932.3	920.55	912.66	907.42	903.0
g	4	1	780	780	786.8	797.96	808.97	813.68	809.5
h	4	1	247	262	272.6	282.07	286.48	283.54	281.9
g	4	2	325	290	250.0	210.65	166.58	120.49	86.3
h	4	2	-240	-236	-231.9	-225.23	-211.03	-188.43	-158.4
g	4	3	-423	-418	-403.0	-379.86	-356.83	-334.85	-309.4
h	4	3	84	97	119.8	145.15	164.46	180.95	199.7
g	4	4	141	122	111.3	100.00	89.40	70.38	48.0
h	4	4	-299	-306	-303.8	-305.36	-309.72	-329.23	-349.7
g	5	0	-214	-214	-218.8	-227.00	-230.87	-232.91	-234.3
g	5	1	353	352	351.4	354.41	357.29	360.14	363.2
h	5	1	46	46	43.8	42.72	44.58	46.98	47.7
g	5	2	245	235	222.3	208.95	200.26	192.35	187.8
h	5	2	154	165	171.9	180.25	189.01	196.98	208.3
g	5	3	-109	-118	-130.4	-136.54	-141.05	-140.94	-140.7
h	5	3	-153	-143	-133.1	-123.45	-118.06	-119.14	-121.2

A. COEFICIENTES DE LA IGRF

<b>g/h</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>1990</b>	<b>1995</b>	<b>2000</b>	<b>2005</b>	<b>2010</b>	<b>2015</b>	<b>2020</b>
g	5	4	-165	-166	-168.6	-168.05	-163.17	-157.4	-151.2
h	5	4	-69	-55	-39.3	-19.57	-0.01	15.98	32.3
g	5	5	-36	-17	-12.9	-13.55	-8.03	4.3	13.5
h	5	5	97	107	106.3	103.85	101.04	100.12	98.9
g	6	0	61	68	72.3	73.60	72.78	69.55	66.0
g	6	1	65	67	68.2	69.56	68.69	67.57	65.5
h	6	1	-16	-17	-17.4	-20.33	-20.90	-20.61	-19.1
g	6	2	59	68	74.2	76.74	75.92	72.79	72.9
h	6	2	82	72	63.7	54.75	44.18	33.3	25.1
g	6	3	-178	-170	-160.9	-151.34	-141.40	-129.85	-121.5
h	6	3	69	67	65.1	63.63	61.54	58.74	52.8
g	6	4	3	-1	-5.9	-14.58	-22.83	-28.93	-36.2
h	6	4	-52	-58	-61.2	-63.53	-66.26	-66.64	-64.5
g	6	5	18	19	16.9	14.58	13.10	13.14	13.5
h	6	5	1	1	0.7	0.24	3.02	7.35	8.9
g	6	6	-96	-93	-90.4	-86.36	-78.09	-70.85	-64.7
h	6	6	24	36	43.8	50.94	55.40	62.41	68.1
g	7	0	77	77	79.0	79.88	80.44	81.29	80.6
g	7	1	-64	-72	-74.0	-74.46	-75.00	-75.99	-76.7
h	7	1	-80	-69	-64.6	-61.14	-57.80	-54.27	-51.5
g	7	2	2	1	0.0	-1.65	-4.55	-6.79	-8.2
h	7	2	-26	-25	-24.2	-22.57	-21.20	-19.53	-16.9
g	7	3	26	28	33.3	38.73	45.24	51.82	56.5
h	7	3	0	4	6.2	6.82	6.54	5.59	2.2
g	7	4	-1	5	9.1	12.30	14.00	15.07	15.8
h	7	4	21	24	24.0	25.35	24.96	24.45	23.5
g	7	5	5	4	6.9	9.37	10.46	9.32	6.4
h	7	5	17	17	14.8	10.93	7.03	3.27	-2.2
g	7	6	9	8	7.3	5.42	1.64	-2.88	-7.2
h	7	6	-23	-24	-25.4	-26.32	-27.61	-27.5	-27.2
g	7	7	0	-2	-1.2	1.94	4.92	6.61	9.8
h	7	7	-4	-6	-5.8	-4.64	-3.28	-2.32	-1.8
g	8	0	23	25	24.4	24.80	24.41	23.98	23.7
g	8	1	5	6	6.6	7.62	8.21	8.89	9.7
h	8	1	10	11	11.9	11.20	10.84	10.04	8.4
g	8	2	-1	-6	-9.2	-11.73	-14.50	-16.78	-17.6
h	8	2	-19	-21	-21.5	-20.88	-20.03	-18.26	-15.3
g	8	3	-10	-9	-7.9	-6.88	-5.59	-3.16	-0.5
h	8	3	6	8	8.5	9.83	11.83	13.18	12.8
g	8	4	-12	-14	-16.6	-18.11	-19.34	-20.56	-21.1
h	8	4	-22	-23	-21.5	-19.71	-17.41	-14.6	-11.7
g	8	5	3	9	9.1	10.17	11.61	13.33	15.3
h	8	5	12	15	15.5	16.22	16.71	16.16	14.9
g	8	6	4	6	7.0	9.36	10.85	11.76	13.7

<b>g/h</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>1990</b>	<b>1995</b>	<b>2000</b>	<b>2005</b>	<b>2010</b>	<b>2015</b>	<b>2020</b>
h	8	6	12	11	8.9	7.61	6.96	5.69	3.6
g	8	7	2	-5	-7.9	-11.25	-14.05	-15.98	-16.5
h	8	7	-16	-16	-14.9	-12.76	-10.74	-9.1	-6.9
g	8	8	-6	-7	-7.0	-4.87	-3.54	-2.02	-0.3
h	8	8	-10	-4	-2.1	-0.06	1.64	2.26	2.8
g	9	0	4	4	5.0	5.58	5.50	5.33	5.0
g	9	1	9	9	9.4	9.76	9.45	8.83	8.4
h	9	1	-20	-20	-19.7	-20.11	-20.54	-21.77	-23.4
g	9	2	1	3	3.0	3.58	3.45	3.02	2.9
h	9	2	15	15	13.4	12.69	11.51	10.76	11.0
g	9	3	-12	-10	-8.4	-6.94	-5.27	-3.22	-1.5
h	9	3	11	12	12.5	12.67	12.75	11.74	9.8
g	9	4	9	8	6.3	5.01	3.13	0.67	-1.1
h	9	4	-7	-6	-6.2	-6.72	-7.14	-6.74	-5.1
g	9	5	-4	-8	-8.9	-10.76	-12.38	-13.2	-13.2
h	9	5	-7	-8	-8.4	-8.16	-7.42	-6.88	-6.3
g	9	6	-2	-1	-1.5	-1.25	-0.76	-0.1	1.1
h	9	6	9	8	8.4	8.10	7.97	7.79	7.8
g	9	7	7	10	9.3	8.76	8.43	8.68	8.8
h	9	7	8	5	3.8	2.92	2.14	1.04	0.4
g	9	8	1	-2	-4.3	-6.66	-8.42	-9.06	-9.3
h	9	8	-7	-8	-8.2	-7.73	-6.08	-3.89	-1.4
g	9	9	-6	-8	-8.2	-9.22	-10.08	-10.54	-11.9
h	9	9	2	3	4.8	6.01	7.01	8.44	9.6
g	10	0	-3	-3	-2.6	-2.17	-1.94	-2.01	-1.9
g	10	1	-4	-6	-6.0	-6.12	-6.24	-6.26	-6.2
h	10	1	2	1	1.7	2.19	2.73	3.28	3.4
g	10	2	2	2	1.7	1.42	0.89	0.17	-0.1
h	10	2	1	0	0.0	0.10	-0.10	-0.4	-0.2
g	10	3	-5	-4	-3.1	-2.35	-1.07	0.55	1.7
h	10	3	3	4	4.0	4.46	4.71	4.55	3.6
g	10	4	-2	-1	-0.5	-0.15	-0.16	-0.55	-0.9
h	10	4	6	5	4.9	4.76	4.44	4.4	4.8
g	10	5	4	4	3.7	3.06	2.45	1.7	0.7
h	10	5	-4	-5	-5.9	-6.58	-7.22	-7.92	-8.6
g	10	6	3	2	1.0	0.29	-0.33	-0.67	-0.9
h	10	6	0	-1	-1.2	-1.01	-0.96	-0.61	-0.1
g	10	7	1	2	2.0	2.06	2.13	2.13	1.9
h	10	7	-2	-2	-2.9	-3.47	-3.95	-4.16	-4.3
g	10	8	3	5	4.2	3.77	3.09	2.33	1.4
h	10	8	3	1	0.2	-0.86	-1.99	-2.85	-3.4
g	10	9	3	1	0.3	-0.21	-1.03	-1.8	-2.4
h	10	9	-1	-2	-2.2	-2.31	-1.97	-1.12	-0.1
g	10	10	0	0	-1.1	-2.09	-2.80	-3.59	-3.8

A. COEFICIENTES DE LA IGRF

<b>g/h</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>1990</b>	<b>1995</b>	<b>2000</b>	<b>2005</b>	<b>2010</b>	<b>2015</b>	<b>2020</b>
h	10	10	-6	-7	-7.4	-7.93	-8.31	-8.72	-8.8
g	11	0	0	0	2.7	2.95	3.05	3	3.0
g	11	1	0	0	-1.7	-1.60	-1.48	-1.4	-1.4
h	11	1	0	0	0.1	0.26	0.13	0	0.0
g	11	2	0	0	-1.9	-1.88	-2.03	-2.3	-2.5
h	11	2	0	0	1.3	1.44	1.67	2.11	2.5
g	11	3	0	0	1.5	1.44	1.65	2.08	2.3
h	11	3	0	0	-0.9	-0.77	-0.66	-0.6	-0.6
g	11	4	0	0	-0.1	-0.31	-0.51	-0.79	-0.9
h	11	4	0	0	-2.6	-2.27	-1.76	-1.05	-0.4
g	11	5	0	0	0.1	0.29	0.54	0.58	0.3
h	11	5	0	0	0.9	0.90	0.85	0.76	0.6
g	11	6	0	0	-0.7	-0.79	-0.79	-0.7	-0.7
h	11	6	0	0	-0.7	-0.58	-0.39	-0.2	-0.2
g	11	7	0	0	0.7	0.53	0.37	0.14	-0.1
h	11	7	0	0	-2.8	-2.69	-2.51	-2.12	-1.7
g	11	8	0	0	1.7	1.80	1.79	1.7	1.4
h	11	8	0	0	-0.9	-1.08	-1.27	-1.44	-1.6
g	11	9	0	0	0.1	0.16	0.12	-0.22	-0.6
h	11	9	0	0	-1.2	-1.58	-2.11	-2.57	-3.0
g	11	10	0	0	1.2	0.96	0.75	0.44	0.2
h	11	10	0	0	-1.9	-1.90	-1.94	-2.01	-2.0
g	11	11	0	0	4.0	3.99	3.75	3.49	3.1
h	11	11	0	0	-0.9	-1.39	-1.86	-2.34	-2.6
g	12	0	0	0	-2.2	-2.15	-2.12	-2.09	-2.0
g	12	1	0	0	-0.3	-0.29	-0.21	-0.16	-0.1
h	12	1	0	0	-0.4	-0.55	-0.87	-1.08	-1.2
g	12	2	0	0	0.2	0.21	0.30	0.46	0.5
h	12	2	0	0	0.3	0.23	0.27	0.37	0.5
g	12	3	0	0	0.9	0.89	1.04	1.23	1.3
h	12	3	0	0	2.5	2.38	2.13	1.75	1.4
g	12	4	0	0	-0.2	-0.38	-0.63	-0.89	-1.2
h	12	4	0	0	-2.6	-2.63	-2.49	-2.19	-1.8
g	12	5	0	0	0.9	0.96	0.95	0.85	0.7
h	12	5	0	0	0.7	0.61	0.49	0.27	0.1
g	12	6	0	0	-0.5	-0.30	-0.11	0.1	0.3
h	12	6	0	0	0.3	0.40	0.59	0.72	0.8
g	12	7	0	0	0.3	0.46	0.52	0.54	0.5
h	12	7	0	0	0.0	0.01	0.00	-0.09	-0.2
g	12	8	0	0	-0.3	-0.35	-0.39	-0.37	-0.3
h	12	8	0	0	0.0	0.02	0.13	0.29	0.6
g	12	9	0	0	-0.4	-0.36	-0.37	-0.43	-0.5
h	12	9	0	0	0.3	0.28	0.27	0.23	0.2
g	12	10	0	0	-0.1	0.08	0.21	0.22	0.1

<b>g/h</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>1990</b>	<b>1995</b>	<b>2000</b>	<b>2005</b>	<b>2010</b>	<b>2015</b>	<b>2020</b>
h	12	10	0	0	-0.9	-0.87	-0.86	-0.89	-0.9
g	12	11	0	0	-0.2	-0.49	-0.77	-0.94	-1.1
h	12	11	0	0	-0.4	-0.34	-0.23	-0.16	0.0
g	12	12	0	0	-0.4	-0.08	0.04	-0.03	-0.3
h	12	12	0	0	0.8	0.88	0.87	0.72	0.5
g	13	0	0	0	-0.2	-0.16	-0.09	-0.02	0.1
g	13	1	0	0	-0.9	-0.88	-0.89	-0.92	-0.9
h	13	1	0	0	-0.9	-0.76	-0.87	-0.88	-0.9
g	13	2	0	0	0.3	0.30	0.31	0.42	0.5
h	13	2	0	0	0.2	0.33	0.30	0.49	0.6
g	13	3	0	0	0.1	0.28	0.42	0.63	0.7
h	13	3	0	0	1.8	1.72	1.66	1.56	1.4
g	13	4	0	0	-0.4	-0.43	-0.45	-0.42	-0.3
h	13	4	0	0	-0.4	-0.54	-0.59	-0.5	-0.4
g	13	5	0	0	1.3	1.18	1.08	0.96	0.8
h	13	5	0	0	-1.0	-1.07	-1.14	-1.24	-1.3
g	13	6	0	0	-0.4	-0.37	-0.31	-0.19	0.0
h	13	6	0	0	-0.1	-0.04	-0.07	-0.1	-0.1
g	13	7	0	0	0.7	0.75	0.78	0.81	0.8
h	13	7	0	0	0.7	0.63	0.54	0.42	0.3
g	13	8	0	0	-0.4	-0.26	-0.18	-0.13	0.0
h	13	8	0	0	0.3	0.21	0.10	-0.04	-0.1
g	13	9	0	0	0.3	0.35	0.38	0.38	0.4
h	13	9	0	0	0.6	0.53	0.49	0.48	0.5
g	13	10	0	0	-0.1	-0.05	0.02	0.08	0.1
h	13	10	0	0	0.3	0.38	0.44	0.48	0.5
g	13	11	0	0	0.4	0.41	0.42	0.46	0.5
h	13	11	0	0	-0.2	-0.22	-0.25	-0.3	-0.4
g	13	12	0	0	0.0	-0.10	-0.26	-0.35	-0.5
h	13	12	0	0	-0.5	-0.57	-0.53	-0.43	-0.4
g	13	13	0	0	0.1	-0.18	-0.26	-0.36	-0.4
h	13	13	0	0	-0.9	-0.82	-0.79	-0.71	-0.6

**Tabla A.1:** Coeficientes  $g_{\ell}^m(t)$  y  $h_{\ell}^m(t)$  de la IGRF desde 1990 hasta 2020 [9].



---

# Cuadraturas

---

Una cuadratura es una fórmula para aproximar la integral de una función  $f(x)$  dentro de un intervalo  $(a, b)$  a través de la suma

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j), \quad (\text{B.1})$$

donde los coeficientes  $\alpha_j$  se conocen como pesos de la cuadratura y los valores  $x_j$  se conocen como nodos de la cuadratura. A continuación, se presentan las bases de las cuadraturas de *midpoint*, de trapecio y de Gauss-Legendre.

## B.1. *Midpoint*

La cuadratura de *midpoint* aproxima el valor de la función por el valor de la función en el punto medio del intervalo [17]. Entonces la cuadratura de *midpoint* se escribe como

$$\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (\text{B.2})$$

Para reducir el error en la cuadratura, se divide el intervalo  $(a, b)$  en  $m$  partes iguales de ancho  $H = (b-a)/m$  y se evalúa la función en el punto medio de cada uno de estos subintervalos, dando lugar a los nodos  $x_j = a + (2j+1)H/2$  con  $j = 0, \dots, m-1$  y se obtiene una aproximación como la de la Ec. (B.2) para cada subintervalo  $j$ . La cuadratura que aproxima a la integral en el intervalo completo  $(a, b)$  es la suma de las cuadraturas en los subintervalos, es decir

$$\int_a^b f(x) dx = H \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j), \quad (\text{B.3})$$

donde los pesos de la cuadratura son todos iguales y están dados por  $\alpha_j = H$ , y cuyo error está dado por la expresión

$$E_m(f) = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi), \quad (\text{B.4})$$



donde  $\xi \in (a, b)$  [17]. El orden de la cuadratura está determinado por el valor de  $H$ . Si  $H \propto 10^n$ , el error de la cuadratura será de orden  $2n$ , porque  $E_m \propto 10^{2n}$ .

## B.2. Trapecio

La cuadratura del trapecio aproxima el valor de la función en el intervalo  $(a, b)$  por el promedio de la función relativo a los valores extremos del intervalo, es decir  $f(x) \approx [f(a) + f(b)]/2$  [17]. Entonces la cuadratura se escribe como

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)] \int_a^b dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \quad (\text{B.5})$$

Para reducir el error en la cuadratura, se divide el intervalo  $(a, b)$  en  $m$  partes iguales de ancho  $H = (b-a)/m$  y se evalúa la función en los puntos extremos de cada uno de estos subintervalos, dando lugar a los nodos  $x_j = a + jH$  con  $j = 0, \dots, m$ , obteniendo una aproximación como la de la Ec. (B.5) para cada subintervalo  $j$ . La cuadratura que aproxima a la integral en el intervalo completo  $(a, b)$  es la suma de las cuadraturas en los subintervalos, es decir

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{H}{2} \sum_{j=0}^{m-1} [f(x_j) + f(x_{j+1})], \quad (\text{B.6})$$

donde los pesos de la cuadratura son todos iguales y están dados por  $\alpha_j = H/2$ , y cuyo error está dado por la expresión

$$E_m(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi), \quad (\text{B.7})$$

donde  $\xi \in (a, b)$  [17]. El orden de la cuadratura está determinado por el valor de  $H$ . Si  $H \propto 10^n$ , el error de la cuadratura será de orden  $2n$ , porque  $E_m \propto 10^{2n}$ .

## B.3. Gauss-Legendre

La cuadratura de Gauss-Legendre [17] aproxima la integral de una función  $f(x)$  en el intervalo  $(-1, 1)$  a través de

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j) + E_{I_n}(f), \quad (\text{B.8})$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  son los pesos de la cuadratura,  $x_i$  son los nodos y  $E_{I_n}$  denota el error de la cuadratura. Para construir la cuadratura de Gauss-Legendre, se busca que la fórmula tenga un error  $E_{I_n} = 0$  para el polinomio de grado más alto posible. Mientras mayor sea el grado de exactitud de la cuadratura, mayor será la exactitud sobre la integración numérica de funciones que se pueden aproximar a través de polinomios. En el método de cuadraturas de Gauss-Legendre se aproxima a la función  $f(x)$  a través del polinomio  $p_n(x)$  de interpolación de Lagrange de grado

$n$  como

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) = \sum_{i=1}^n l_i(x) f(x_i), \quad (\text{B.9})$$

donde  $l_i = \prod_{j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j)$  se conoce como el polinomio característico de Lagrange. Se eligen  $n + 1$  nodos  $x_i$  de manera arbitraria, que se conocen como los nodos de la interpolación, y se satisfacen las condiciones  $p_n(x_i) = f(x_i)$  y  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ , por construcción. Según Quarteroni, Sacco y Saleri [17] la Ec. (B.9) se puede reescribir de la siguiente manera

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i)w'_{n+1}(x_i)} f(x_i), \quad (\text{B.10})$$

donde  $w_{n+1} = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$  se conoce como polinomio nodal y  $w'_{n+1}(x)$  denota la derivada del polinomio nodal. Se puede reescribir el polinomio característico en función del polinomio nodal como  $l_i(x) = w_{n+1}(x) / (x - x_i)w'_{n+1}(x_i)$ . El error de la interpolación  $E_n(x) = f(x) - p_n(x)$  se puede calcular a través de [17]

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x), \quad (\text{B.11})$$

donde  $\xi \in (x_0, x_n)$ . Integrando la Ec. (B.9) en el intervalo  $(-1, 1)$  se obtiene

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \left( \int_{-1}^1 l_i(x) dx \right) f(x_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i). \quad (\text{B.12})$$

De esta manera se definen explícitamente los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre a través de

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i)w'_{n+1}(x_i)} dx. \quad (\text{B.13})$$

Se puede demostrar que al utilizar las raíces  $\{x_i\}$  de una familia de polinomios ortogonales  $\{\mathcal{P}_{n+1}\}$  para construir las funciones  $\{w_{n+1}\}$  de la Ec. (B.10), se obtiene la integral exacta. Es decir,  $E_{I_n} = 0$  para polinomios de grado hasta  $2n + 1$  [17], que es el grado máximo de exactitud que se puede obtener con este método. Entonces, basta con resolver

$$\mathcal{P}_{n+1}(x_j) = 0, \quad \text{con } j = 0, \dots, n, \quad (\text{B.14})$$

para encontrar los nodos. Si se utilizan los polinomios de Legendre  $P_n$  para calcular los nodos y los pesos a través de las Ecs. (B.13) y (B.14), se obtiene la cuadratura de Gauss-Legendre [18]. Al resolver explícitamente la integral (B.13) para calcular los pesos, usando las raíces de los polinomio de Legendre como nodos, se obtiene una expresión más compacta

$$\alpha_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P'(x_i)]^2}. \quad (\text{B.15})$$

Para integrar la función  $f(x)$  en un intervalo arbitrario  $(a, b)$ , basta con hacer el cambio de variable  $u(x) = (b+a)/2 + x(b-a)/2$  para reescribir la integral de la Ec. (B.8) como

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(u) du = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n \alpha_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right) + E_{I_n}(f). \quad (\text{B.16})$$

Por lo tanto, se puede aproximar una doble integral en  $(x, y)$  sobre dos intervalos arbitrarios  $(a, b)$  y  $(c, d)$  al hacer los cambios de variable  $u(x) = (b+a)/2 + x(b-a)/2$  y  $v(y) = (d+c)/2 + y(d-c)/2$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d F(x, y) dx dy &= \frac{(b-a)(d-c)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(u, v) du dv \\ &\approx \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_i \alpha_j F\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}y_j + \frac{d+c}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Al considerar los intervalos de integración  $(0, 2\pi)$  y  $(0, R_L)$  se obtiene la Ec. (2.20)

$$\Phi(t) \approx \frac{\pi R_T}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j s_i \mathbf{B}[\mathbf{r}_{\text{aux}}(t; s_i, \gamma_j)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(t),$$

donde  $s_i = R_T(1 + x_i)/2$  y  $\gamma_i = \pi(1 + x_i)$ .

# Bibliografía

---

- [1] NASA. Lunar Gateway. <https://www.nasa.gov/gateway>. Recuperado el 17 de junio de 2021 (citado en la pág. 1).
- [2] ESA. Lunar Gateway. [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Human\\_and\\_Robotic\\_Exploration/Exploration/Gateway](https://www.esa.int/Science_Exploration/Human_and_Robotic_Exploration/Exploration/Gateway). Recuperado el 17 de junio de 2021 (citado en la pág. 1).
- [3] Earthsky. China And Russia Will Be Building A Moon Base Together. <https://earthsky.org/space/china-russia-will-be-building-moon-base-together-march9-21/>. Recuperado el 17 de junio de 2021 (citado en la pág. 1).
- [4] NASA. About the Space Station Solar Arrays. [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/station/structure/elements/solar\\_arrays-about.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/station/structure/elements/solar_arrays-about.html). Recuperado el 27 de junio de 2021 (citado en la pág. 1).
- [5] D. Jordan and S. Kurtz. Photovoltaic Degradation Rates—an Analytical Review. *Prog. Photovolt.*, 2013. DOI: [10.1002/pip.1182](https://doi.org/10.1002/pip.1182) (citado en la pág. 1).
- [6] N. B. of Standards. Copper Wire Tables. *NIST Publications* (citado en las págs. 1, 37).
- [7] R. T. Merrill, M. W. McElhinny y P. L. McFadden. *The Magnetic Field of the Earth*. Academic Press, 2<sup>da</sup> edición, 1996 (citado en las págs. 1, 3, 4).
- [8] E. Thébault et al. International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation. *Earth, Planets and Space*, 2015. DOI: [10.1186/s40623-015-0228-9](https://doi.org/10.1186/s40623-015-0228-9) (citado en las págs. 1, 2, 11, 12).
- [9] IAGA Division V-Mod Geomagnetic Field Modeling. International Geomagnetic Reference Field, 2019. URL: <https://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html> (citado en las págs. 1, 3, 12, 51).
- [10] W. Baumjohann, M. Blanc, A. Fedorov y K.-H. Glassmeier. Current systems in planetary magnetospheres and ionospheres. *Space Sci. Rev.*, **152**:99-134, 2010. DOI: [10.1007/s11214-010-9629-z](https://doi.org/10.1007/s11214-010-9629-z) (citado en las págs. 1, 15-18).
- [11] T. Sotirelis, N. A. Tsyganenko y D. P. Stern. Method for confining the magnetic field of the cross-tail current inside the magnetopause. *J. Geophys. Res.*, 1994. DOI: [10.1029/94JA01656](https://doi.org/10.1029/94JA01656) (citado en la pág. 2).
- [12] N. A. Tsyganenko. Modeling the Earth’s magnetospheric magnetic field confined within a realistic magnetopause. *J. Geophys. Res.*, 1995. DOI: [10.1029/94JA03193](https://doi.org/10.1029/94JA03193) (citado en las págs. 2, 20).
- [13] N. A. Tsyganenko. Effects of the solar wind conditions on the global magnetospheric configuration as deduced from data-based field models. *Hughes STX Corporation, NASA GSFC, Greenbelt, MD 20771*, 1996 (citado en la pág. 2).

- [14] N. A. Tsyganenko. Data-based modelling of the Earth's dynamic magnetosphere: a review. *Ann. Geophys.*, 2013. DOI: [10.5194/angeo-31-1745-2013](https://doi.org/10.5194/angeo-31-1745-2013) (citado en las págs. 2-4, 18-21).
- [15] N. A. Tsyganenko y M. I. Sitnov. Modeling the dynamics of the inner magnetosphere during strong geomagnetic storms. *J. Geophys. Res.*, 2005 (citado en las págs. 2, 4, 19-21).
- [16] C. Grant and E. Talvila. Elementary numerical methods for double integrals, 2019. arXiv: [1905.05805 \[math.NA\]](https://arxiv.org/abs/1905.05805) (citado en la pág. 2).
- [17] A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. *Numerical Mathematics*, volumen 37. 2000 (citado en las págs. 2, 29-31, 53-55).
- [18] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. Dover Publications, 1<sup>ra</sup> edición, 1987 (citado en las págs. 2, 55).
- [19] J. A. Svobdova y R. C. Dorf. *Introduction to electric circuits*. Wiley, 9<sup>na</sup> edición, 2013 (citado en las págs. 2, 36).
- [20] M. Chapront-Touzé y J. Chapront. Elp 2000-85: a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times. *Astron. Astrophys.*, 1988 (citado en las págs. 2, 5, 32, 42).
- [21] M. Chapront-Touzé y J. Chapront. *Lunar tables and programs from 4000 B.C. to A.D. 8000*. Willmann-Bell, Inc., 1<sup>ra</sup> edición, 1991 (citado en las págs. 2, 5, 32-34, 42).
- [22] M. A. Hapgood. Space physics coordinates transformations: a user guide. *Planet. Space Sci.*, 1992. DOI: [10.1016/0032-0633\(92\)90012-D](https://doi.org/10.1016/0032-0633(92)90012-D) (citado en las págs. 3, 5, 8, 9).
- [23] Moon Fact Sheet. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html>. Recuperado el 1 de abril de 2020 (citado en las págs. 3, 4).
- [24] D. P. H. et al. Did you know that flying a Boeing 747 to the Moon non-stop would take 17 days? <https://janus.astro.umd.edu/front/pages/links/Distances1.html> (citado en la pág. 4).
- [25] J. Meeus. *Astronomical Algorithms*. Willmann-Bell, Inc., 2<sup>da</sup> edición, 1998 (citado en la pág. 5).
- [26] K. M. Laundal y A. D. Richmond. Magnetic coordinates systems. *Space Sci Rev*, 2016. DOI: [10.1007/s11214-016-0275-y](https://doi.org/10.1007/s11214-016-0275-y) (citado en las págs. 9, 20).
- [27] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 4<sup>ta</sup> edición, 2013 (citado en las págs. 11, 13, 35).
- [28] D. E. Winch, D. J. Ivers, J. P. R. Turner y R. J. Stening. Geomagnetism and Schmidt quasi-normalization. *Geophys. J. Int.*, 2005. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2004.02472.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02472.x) (citado en las págs. 11, 12).
- [29] M. Abramowitz e I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 10<sup>ma</sup> edición, 1972 (citado en las págs. 11, 13, 30).
- [30] N. M. Ferrers. *An elementary treatise on spherical harmonics and subjects connected with them*. Cambridge University Press, 1<sup>ra</sup> edición, 1877 (citado en la pág. 11).
- [31] D. D. Schnack. *Lectures in Magnetohydrodynamics*. Springer, 1<sup>ra</sup> edición, 2009. DOI: [10.1007/978-3-642-00688-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00688-3) (citado en la pág. 18).
- [32] NASA. The Tail of the Magnetosphere. <https://www-spod.gsfc.nasa.gov/Education/wtail.html>. Recuperado el 29 de junio de 2020 (citado en la pág. 18).
- [33] NASA. What is the Ring Current? <https://image.gsfc.nasa.gov/poetry/ask/a10021.html>. Recuperado el 14 de mayo de 2020 (citado en la pág. 18).
- [34] N. Tsyganenko y V. Andreeva. Modeling the Earth's Magnetosphere Using Spacecraft Magnetometer Data. <https://geo.phys.spbu.ru/~tsyganenko/modeling.html>. Recuperado el 9 de noviembre de 2020 (citado en la pág. 22).

- [35] Cetronic. Componentes Electrónicos. <https://www.cetronic.es/sqlcommerce/disenos/plantilla1/seccion/producto/DetalleProducto.jsp?idIdioma=&idTienda=93&codProducto=639139004&cPath=1191>. Recuperado el 15 de enero de 2021 (citado en la pág. 37).
- [36] D. Moriña and I. Serra and P. Puig and A. Corral. Probability estimation of a Carrington-like geomagnetic storm. *Sci. Rep.*, 2019. DOI: [10.1038/s41598-019-38918-8](https://doi.org/10.1038/s41598-019-38918-8) (citado en la pág. 41).
- [37] T. Hahn. Cuba—a library for multidimensional numerical integration. *Comput. Phys. Commun.* DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010> (citado en la pág. 46).