



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN

**ESTUDIO DE LA SUPERFICIE CÁUSTICA Y EL FRENTE DE ONDA
REFRACTADO DE UNA LENTE SIMPLE COLOCANDO UNA FUENTE
PUNTUAL EN UNA POSICIÓN ARBITRARIA A LO LARGO DEL EJE
ÓPTICO**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
OSVALDO PONCE HERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL:
MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Ciudad de México, Noviembre 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado Asignado

Presidente: Dr. Naser Qureshi

Secretario: Dr. Luis Carlos Alvarez Núñez

1^{er} Vocal: Dr. Maximino Avendaño Alejo

2^{do} Vocal: Dr. Pablo Luis Rendón Garrido

3^{er} Vocal: Dr. Daniel Aguirre Aguirre

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT).

TUTOR DE TESIS

Dr. Maximino Avendaño Alejo

FIRMA

*A mis papás, Leonor y Alejandro.
Gracias por su paciencia y amor infinitos.*

*A Blanca Estela, mi mejor amiga y compañera de vida.
Gracias por todo.*

*A todos mis amigos.
Gracias por las risas y el apoyo inagotable.*

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Maximino Avendaño Alejo, tutor y amigo, por las oportunidades brindadas, por todo el tiempo que ha dedicado a compartir su conocimiento y sus experiencias, por su guía y por todo su apoyo.

Agradezco a mi jurado conformado por los doctores Naser Qureshi, Luis Alvarez, Pablo Rendón y Daniel Aguirre, mencionados en orden de asignación, por todos los comentarios, sugerencias, indicaciones y enseñanzas que recibí durante la revisión de este trabajo.

Agradezco a mis compañeros de laboratorio, en particular a mis amigos Jesús del Olmo y Martín Jiménez, quienes dedicaron su tiempo y su conocimiento para ayudarme a enriquecer y mejorar este trabajo.

Agradezco al Programa de Posgrado en Ingeniería Eléctrica con opción en Instrumentación, por la oportunidad de crecer profesionalmente y por todas las oportunidades brindadas durante mis estudios de maestría.

Agradezco al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología por todas las facilidades brindadas para el uso de instalaciones y equipo que permitieron la correcta realización y culminación de este trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada bajo el número CVU 1005036.

Agradezco el apoyo recibido por parte de PAPIIT-UNAM bajo el proyecto IN116420 y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) bajo el proyecto A1-S-44220.

Resumen

Considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico, obtenemos la ecuación exacta que describe a todos los rayos refractados por la lente simple, como función de los parámetros involucrados en el proceso de refracción. Mediante el cálculo de la envolvente a los rayos refractados, obtenemos la ecuación exacta de la superficie cáustica en un plano meridional, como función del ángulo de emisión de la fuente puntual. Adicionalmente, realizando una expansión en series de Taylor de la ecuación de la superficie cáustica a tercer orden, recuperamos la ecuación de Gauss para la formación de imagen y obtenemos el coeficiente de aberración esférica a tercer orden. Utilizando el principio de Huygens, obtenemos la ecuación analítica que describe al frente de onda de fase cero, refractado por una lente simple, considerando un frente de onda esférico incidente que proviene de una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico. Mediante la técnica de las curvas paralelas, obtenemos las ecuaciones exactas del frente de onda refractado por la lente simple, propagado a distancias arbitrarias. Finalmente, utilizando a las superficies principales de una lente simple y el trazo de rayos para la formación de imagen de un objeto plano colocado en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico, proponemos un método para corregir la aberración de curvatura de campo a tercer orden, considerando un doblete separado compuesto por lentes simples.

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	3
1. Introducción	8
1.1. Aberración esférica	9
1.2. Curvatura de campo	11
2. Superficie cáustica en un plano meridional	13
2.1. Preliminares	14
2.2. Trazo exacto de rayos y superficie cáustica	14
2.3. Aproximación paraxial y puntos conjugados	19
2.4. Aproximación a tercer orden y aberración esférica	22
2.5. Ejemplos	24
2.5.1. Óvalos cartesianos	27
3. Frente de onda refractado por una lente simple	31
3.1. Frente de onda por principio de Huygens	32
3.2. Frente de onda refractado por teorema de Malus-Dupin	37
3.3. Propagación del frente de onda de fase cero.	39
3.4. Aproximaciones al frente de onda refractado	40
3.5. Ejemplos	42
4. Corrección de la curvatura de campo a tercer orden	45
4.1. Parábolas principales de una lente simple	46
4.2. Formación de imagen usando parábolas principales	51
4.3. Corrección de la curvatura de campo a tercer orden	55
5. Conclusiones y trabajo a futuro	64

Índice de figuras

1.1.	Formación de imagen de un objeto puntual a través de una lente simple. (a) Lente perfecta. (b) Aberración esférica introducida por una lente simple.	10
1.2.	Aberración esférica en un cúmulo de estrellas [41].	10
1.3.	Formación de imagen a través de una lente. (a) Imagen plana. (b) Imagen curva.	11
1.4.	Curvatura de campo [42]. (a) Centro enfocado. (b) Bordos enfocados.	12
2.1.	Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico.	14
2.2.	Parámetros para la convención de signos considerando $n_2 > n_1$	15
2.3.	Perfiles cónicos de S_1 para distintos valores de la constante de conicidad considerando $c_1 > 0$	16
2.4.	Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$	18
2.5.	Superficie cáustica formada por una lente simple considerando una fuente puntual, con $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$	19
2.6.	Superficie cáustica formada por una lente simple considerando una fuente puntual, con $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$	21
2.7.	Aproximación a tercer orden de la superficie cáustica.	23
2.8.	Superficie cáustica y su aproximación a tercer orden de una lente simple con una fuente puntual colocada en $S_o = -2f$	24
2.9.	Superficie cáustica de una lente simple con una fuente puntual colocada en $S_o = -f$	25
2.10.	Superficie cáustica y su aproximación a tercer orden de una lente simple con una fuente puntual colocada en $ S_o < f $. a) Superficie cáustica real. b) Extrapolación de los rayos refractados y la superficie cáustica virtual formada por la lente simple.	26
2.11.	Superficie cáustica y superficie cáustica aproximada a tercer orden formada por una lente simple y un objeto virtual.	27
2.12.	Superficie exacta y aproximación a tercer orden de la cáustica para una lente simple. (a) Lente equiconvexa. (b) Menisco positivo. (c) Lente biconcava.	28
2.13.	Trazo exacto de rayos para una lente plano-convexa, considerando una fuente puntual en infinito y con $n_l > n_a$. (a) Lente esférica. (b) Óvalo cartesiano.	30
2.14.	Lente aplanática para el caso en el que $n_i = n_o$ y $n_l > n_o$	30
3.1.	(a) Frente de onda esférico incidente en una lente simple. (b) Onduletas y el frente de onda refractado al interior de la lente simple.	32
3.2.	(a) Propagación del frente de onda $\{Z_l, Y_l\}$ al interior de la lente simple. (b) Frente de onda incidente sobre la superficie S_2	34

3.3. (a) Frente de onda $\{Z_{l_o\parallel}, Y_{l_o\parallel}\}$ incidiendo sobre la superficie S_2 . (b) Frente de onda de fase cero refractado al exterior de la lente simple.	36
3.4. Frente de onda refractado por una lente simple, considerando un frente de onda esférico incidente para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$	37
3.5. Frente de onda refractado esférico, frente de onda refractado de fase cero y superficie cáustica de una lente simple, considerando un frente de onda esférico incidente para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$	39
3.6. (a) Parámetros involucrados en la propagación del frente de onda refractado de fase cero. (b) Frente de onda refractado de fase cero propagado a distancias arbitrarias.	40
3.7. Aproximación parabólica del frente de onda refractado de fase cero y del frente de onda propagado al exterior de la lente.	41
3.8. Aproximación por involuta del frente de onda refractado de fase cero y del frente de onda propagado al exterior de la lente.	42
3.9. Frentes de onda propagados de una lente biconvexa cónica positiva, para el caso de una fuente puntual colocada en $s_o = -16.408$ mm.	43
3.10. Frentes de onda propagados de una lente biconvexa cónica positiva, para el caso de una fuente puntual colocada en $s_o = fl$	43
3.11. Frentes de onda propagados de un óvalo cartesiano.	44
4.1. (a) Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando un frente de onda plano incidente, para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$. (b) Formación de la superficie principal secundaria \mathcal{S}_s	46
4.2. Superficie principal secundaria exacta, aproximación parabólica y plano principal secundario de una lente simple.	48
4.3. (a) Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando un frente de onda plano incidente de derecha a izquierda, para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$. (b) Formación de la superficie principal primaria \mathcal{S}_p , donde se presenta reflexión total interna (RTI).	49
4.4. Superficie principal secundaria exacta, aproximación parabólica y plano principal secundario de una lente simple.	50
4.5. Superficies, parábolas y planos principales de distintos tipos de lente simple. (a) Lente equiconvexa. (b) Menisco positivo. (c) Lente biconcava.	51
4.6. Trazo de rayos a través de una lente simple utilizando parábolas principales.	52
4.7. Formación de imagen de un objeto plano a través de una lente simple. a) Usando planos principales. b) Usando parábolas principales.	54
4.8. Esquema de la medición de las distancias objeto, imagen y focales respecto al origen coordenadas y respecto a los planos principales en una lente simple positiva.	55
4.9. Doblete separado formado por lentes simples. (a) Configuración del doblete separado. (b) Formación de imagen utilizando parábolas principales.	56
4.10. Trazo de rayos a través de un doblete separado conformado por lentes simples.	58
4.11. Trazo de rayos para la formación de imagen a través de la lente simple \mathcal{L}_1	61

4.12. Trazo de rayos para la formación de imagen a través de dobletes separados. (a) Doblete formado por una lente biconvexa cónica y una lente equiconvexa. (b) Doblete formado por una lente biconvexa cónica y un menisco positivo. (c) Comparación de las superficies de Petzval formadas por los dobletes separado con el plano de enfocamiento paraxial.	63
--	----

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad se observa a nivel internacional una tendencia a desarrollar lentes simples con materiales de polímeros con características ópticas diferentes a las de los materiales de vidrio existentes. En general, contar con una variedad más amplia de materiales permite no solo incrementar el intervalo de trabajo de los sistemas y componentes ópticos, sino, además, diversificar sus aplicaciones para satisfacer las demandas que plantean el desarrollo científico y tecnológico. Para ello, es necesario verificar si las técnicas y la instrumentación utilizadas tradicionalmente para evaluar sus propiedades son aplicables. Dentro de ese proceso una alternativa interesante a considerar es la posibilidad de utilizar nuevas técnicas de diseño y evaluación, con los recursos técnicos que se encuentran actualmente en el mercado.

La creciente demanda en lo que refiere a sistemas ópticos cuyas dimensiones y costos satisfagan las necesidades del mercado, han presentado un conjunto de nuevos retos al campo de la evaluación de superficies ópticas, especialmente cuando los sistemas ópticos bajo estudio involucran el uso de superficies rápidas, es decir, cuando el cociente entre el diámetro de la pupila de entrada y la distancia focal, denotado simplemente como número $F/\# = F/D$, es muy pequeño o cuando estas superficies entran en el campo de las *freeforms*. Tradicionalmente, las pruebas ópticas están divididas en pruebas *goniométricas* o *deflectométricas* y las pruebas *interferométricas* [1–4]. En ambos casos, el conocimiento preciso de las propiedades tanto de los rayos de luz como de los frentes de onda propagados a través de los distintos tipos de sistemas ópticos, es de gran importancia para el diseño de pruebas que mejor se adapten a estos nuevos retos [5–7].

En óptica, se puede definir a la superficie cóustica como la curva envolvente a todos los rayos refractados y/o reflejados, y esta curva puede ser fotografiada o grabada porque, a diferencia de los frentes de onda, las cóusticas son observables en tiempo real [8]. Las superficies cóusticas guardan una estrecha relación con el frente de onda refractado y/o reflejado por el sistema óptico [9]. Anteriormente, se ha implementado el método de las envolventes para obtener la cóustica tanto por reflexión (catacóustica) como por refracción (diacóustica) que ha permitido obtener de manera analítica fórmulas explícitas que representan la cóustica en un plano meridional, donde se ha implementado satisfactoriamente mediante el método de iluminancia infinita [10, 11] las ecuaciones analíticas de las cóusticas en los planos sagital y tangencial y realizando una expansión en series de Taylor nos ha permitido obtener las ecuaciones de aberración de astigmatismo a tercer orden.

Adicionalmente, utilizando el principio de Huygens se ha obtenido el frente de onda refractado

en una lente biconvexa cónica. Es bien sabido que la cáustica está directamente relacionada con las aberraciones del frente de onda introducidas por los sistemas refractores y/o reflectores. Utilizando este concepto, se han obtenido los coeficientes de conicidad de una lente simple que permiten reducir la aberración esférica a tercer y quinto orden en lentes biconvexas [12], este método tiene una buena correspondencia con los programas de diseño óptico comerciales. Recientemente se ha obtenido el frente de onda exacto y aproximado de lentes cónicas considerando un frente de onda plano que se propaga a lo largo del eje óptico [13] y se obtuvieron las cáusticas sagital y tangencial, así como su respectivo frente de onda refractado considerando un frente de onda plano inclinado un ángulo de oblicuidad con respecto al eje óptico, a través de lentes biconvexas esféricas positivas [14].

La propuesta de este trabajo es ampliar los resultados teóricos para lentes simples, basados en el trabajo desarrollado en el Grupo de Metrología Óptica del ICAT-UNAM, considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico. Para esto, obtenemos las ecuaciones de la cáustica en un plano meridional y del frente de onda esférico que incide sobre la lente bajo prueba. Adicionalmente, proponemos un trazo de rayos a segundo orden para la formación de imagen de un objeto plano y ortogonal al eje óptico, considerando las superficies principales de lentes simples.

1.1. Aberración esférica

La aberración esférica es una de las principales aberraciones monocromáticas introducidas por los sistemas ópticos que, como ha sido estudiado en trabajos recientes [12,15,16], depende fuertemente de las características físicas del sistema óptico. En el caso particular de las lentes simples, la aberración esférica depende de la posición del objeto, de la forma de las superficies refractoras, del índice de refracción, del espesor de la lente y de la apertura de entrada. El nombre de aberración esférica surge originalmente por ser una aberración que desde sus inicios fue asociada a las superficies esféricas utilizadas en los primeros telescopios.

De acuerdo a lo establecido en la óptica paraxial, los rayos de luz emitidos por un objeto puntual O , propagados por un sistema óptico, en este caso, una lente simple, deben converger en una sola imagen puntual I . La presencia de aberración esférica introducida por el sistema óptico bajo estudio produce una serie de imágenes puntuales I' a lo largo del eje óptico, como se muestra en la Figura 1.1.

Desde el punto de vista del estudio de los frentes de onda, idealmente, una lente libre de aberración esférica sobre la que incide un frente de onda esférico desde una fuente puntual, propagará al exterior un frente de onda esférico cuyo centro de curvatura coincide con la imagen paraxial formada por la lente bajo estudio. La aberración esférica se manifiesta en los frentes de onda como deformaciones respecto a la esfera de referencia que formaría una lente perfecta. La Figura 1.2 muestra la comparación entre una fotografía libre de aberración esférica y la misma foto afectada por esta aberración.

En este trabajo, estudiamos la formación de la superficie cáustica considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico desde donde son emitidos

radialmente un conjunto de rayos que inciden sobre la lente bajo estudio. A partir de una aproximación a tercer orden de la superficie cáustica, recuperamos el coeficiente de aberración esférica a tercer orden y presentamos una configuración de puntos conjugados que permite formar un sistema libre de este tipo de aberración. Además, partiendo de la aproximación a tercer orden de la superficie cáustica, realizamos una aproximación al frente de onda refractado por la lente simple.

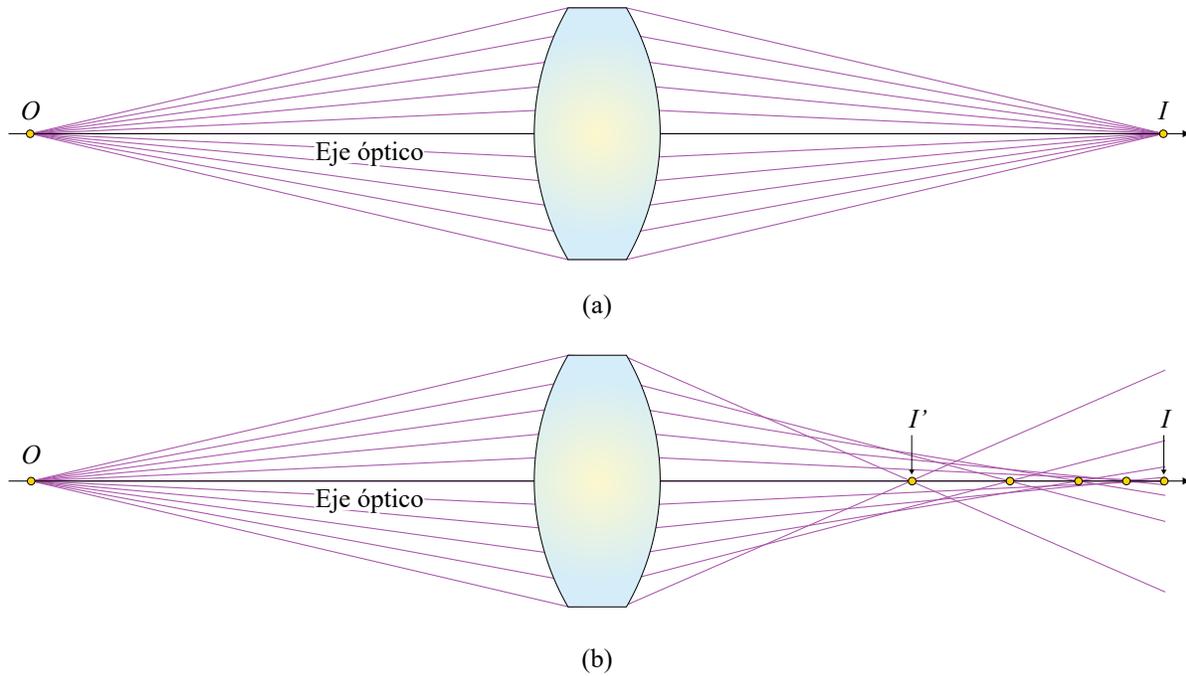


Figura 1.1: Formación de imagen de un objeto puntual a través de una lente simple. (a) Lente perfecta. (b) Aberración esférica introducida por una lente simple.

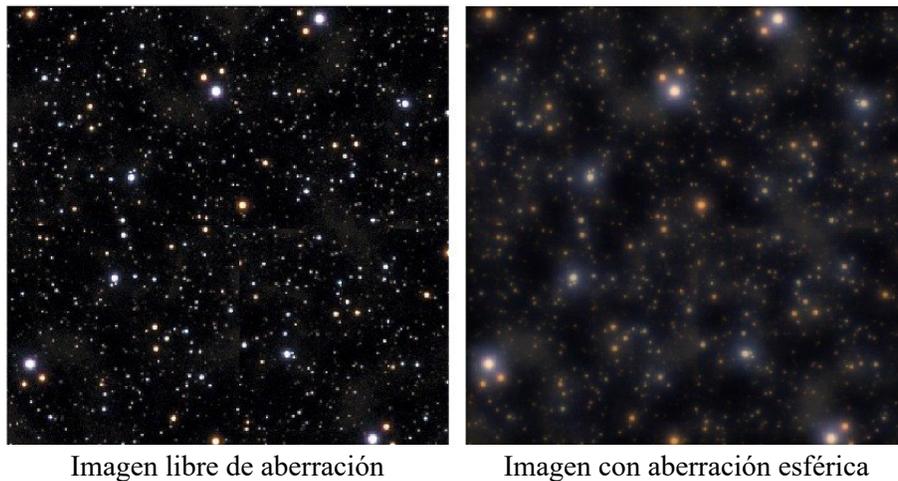


Figura 1.2: Aberración esférica en un cúmulo de estrellas [41].

1.2. Curvatura de campo

La curvatura de campo o curvatura de Petzval, nombrada así en honor al físico y matemático húngaro Josef Max Petzval (1807-1891), es otra de las aberraciones monocromáticas que se presenta de manera común en una gran diversidad de sistemas ópticos [17, 18]. De acuerdo a la teoría paraxial, la imagen de un objeto plano colocado de forma ortogonal al eje óptico del sistema bajo estudio, quedará formada sobre otro plano. Fuera de la región donde la teoría paraxial es aplicable, la imagen de un objeto plano se forma sobre una superficie curva, denominada superficie de Petzval, como se muestra en la Figura 1.3.

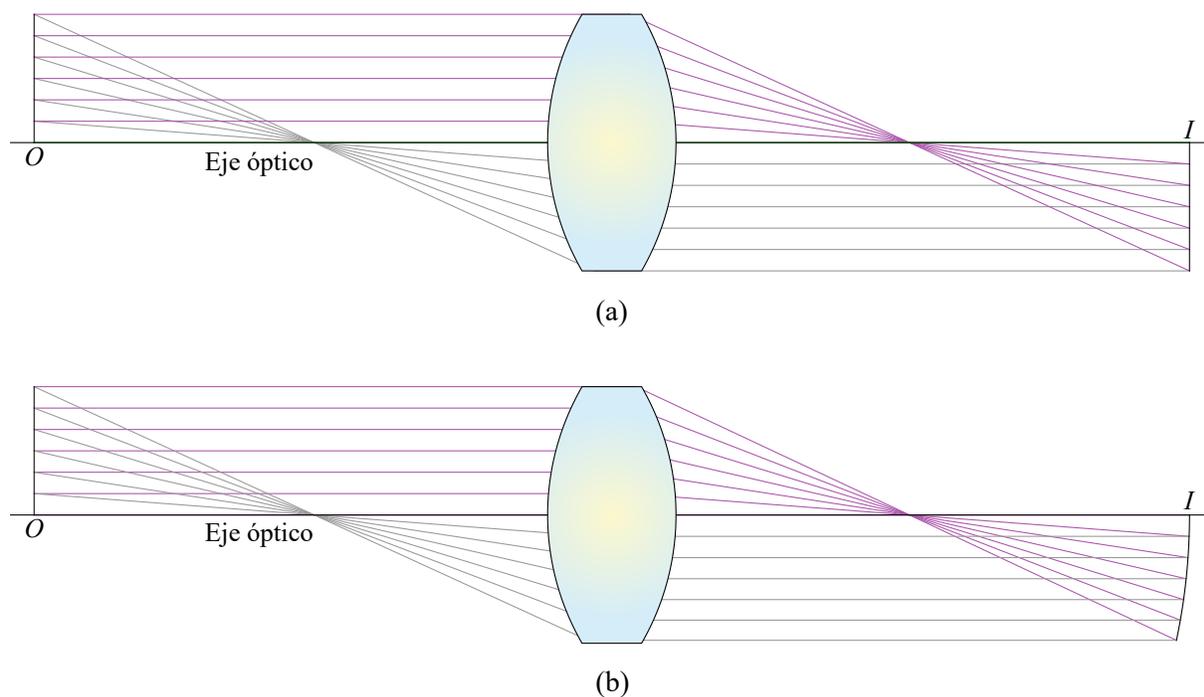


Figura 1.3: Formación de imagen a través de una lente. (a) Imagen plana. (b) Imagen curva.

De igual manera que con las otras aberraciones monocromáticas, la curvatura de campo depende de las características físicas del sistema óptico. Para el caso específico de las lentes delgadas, se tiene bien estudiada la dependencia de la curvatura de Petzval en las propiedades focales de las lentes, en sus índices de refracción y especialmente en el tamaño y la posición de la pupila de entrada. Las principales consecuencias de la presencia de este tipo de aberración pueden observarse en la Figura 1.4 que muestra imágenes obtenidas con un sensor plano colocado a dos distancias diferentes con el propósito de lograr un correcto enfocamiento. En el inciso (a), el centro se observa enfocado y los bordes fuera de foco. En el inciso (b), el sensor fue desplazado, logrando el correcto enfocamiento de los bordes, pero sacando de foco a la región central.

El uso de detectores planos en el trabajo experimental afecta de manera significativa la calidad de las imágenes obtenidas por diversos sistemas ópticos. Históricamente, se han utilizado placas o películas fotográficas con perfiles curvos para contrarrestar la curvatura de campo en

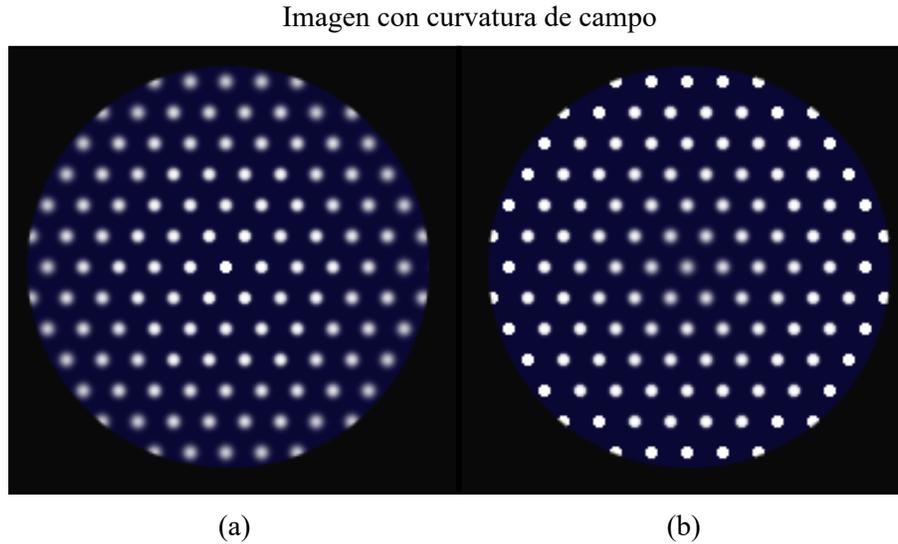


Figura 1.4: Curvatura de campo [42]. (a) Centro enfocado. (b) Bordes enfocados.

las cámaras Schmidt y actualmente el desarrollo de sensores curvos que permitan aumentar la calidad de las imágenes obtenidas a través de cámaras de celular y otros dispositivos móviles es un tema de investigación vigente [19].

En este trabajo, utilizamos el concepto de parábolas principales en sustitución de los planos principales para realizar un trazo de rayos a segundo orden para la formación de imagen de un objeto plano a través de una lente simple, considerando que la posición de la pupila de entrada coincide con el vértice de la primera superficie de la lente, con lo que obtenemos la superficie de Petzval. Mediante una aproximación a segundo orden, expresamos la superficie de Petzval en forma de una superficie paraboidal que permite cuantificar de manera más sencilla la curvatura de la imagen formada a través de una lente simple en función de la apertura de entrada y todos los parámetros de diseño de la lente. Finalmente, proponemos una condición de Petzval generalizada para lentes simples con la que corregimos la curvatura de campo a tercer orden.

Capítulo 2

Superficie cáustica en un plano meridional

La superficie cáustica puede definirse como el lugar geométrico en el que se encuentran los principales centros de curvatura de un frente de onda. Además, la superficie cáustica puede definirse como la envolvente a todos los rayos refractados o reflejados por un sistema óptico. Las propiedades de la superficie cáustica han sido ampliamente estudiadas en la literatura y algunos trabajos publicados recientemente han mostrado que la forma de la superficie cáustica está directamente relacionada con las aberraciones monocromáticas producidas por un sistema óptico, ya sea por refracción o reflexión, también conocidas como errores de imagen [15].

En este trabajo, consideramos exclusivamente un frente de onda esférico incidente sobre una lente simple, provenientes de una fuente puntual colocada a lo largo del eje óptico, considerando a un conjunto de rayos emitidos radialmente y de forma simétrica alrededor del eje óptico. Utilizando la técnica del trazo exacto de rayos, obtenemos la ecuación paramétrica que describe a la familia de rayos refractados por una lente simple, considerando una fuente puntual ubicada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico y mediante el cálculo de la envolvente, obtenemos la ecuación exacta de la superficie cáustica por refracción.

Adicionalmente, realizando una aproximación por series de Taylor de la superficie cáustica por refracción, recuperamos la ecuación de Gauss para la formación de imagen y el coeficiente de aberración esférica a tercer orden, y presentamos algunos ejemplos.

2.1. Preliminares

Consideramos una lente simple al sistema óptico conformado por un solo elemento hecho de un material isotrópico, es decir, con un índice de refracción uniforme en todo el material, delimitado por un par de superficies curvas con simetría de revolución alrededor del eje óptico y cuyo espesor no puede ser despreciado en el proceso de refracción. Asumiendo que un conjunto de rayos se propaga radialmente desde una fuente puntual colocada en un punto P_o sobre el eje óptico, estos inciden sobre la lente simple en la primer superficie curva en un punto P_α , siendo desviados y propagados al interior de la lente hasta alcanzar a la segunda superficie curva en un punto P_β , donde vuelven a sufrir un cambio de dirección y son propagados al exterior de la lente. El resultado final de este doble proceso de refracción es la desviación total de la dirección de propagación de los rayos incidentes, como puede observarse en la Figura 2.1.

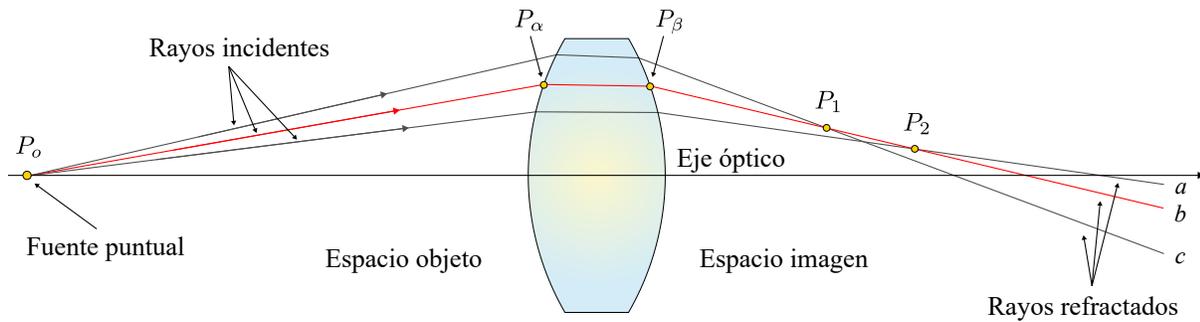


Figura 2.1: Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico.

Por otro lado, consideramos los rayos refractados al exterior de la lente simple; el punto P_1 es la imagen formada por la intersección de los rayos a y b . Asimismo, el punto P_2 es la imagen formada por la intersección de los rayos b y c . De esta forma, la superficie formada por el conjunto de puntos de intersección entre rayos refractados contiguos es la superficie cóustica por refracción de una lente simple.

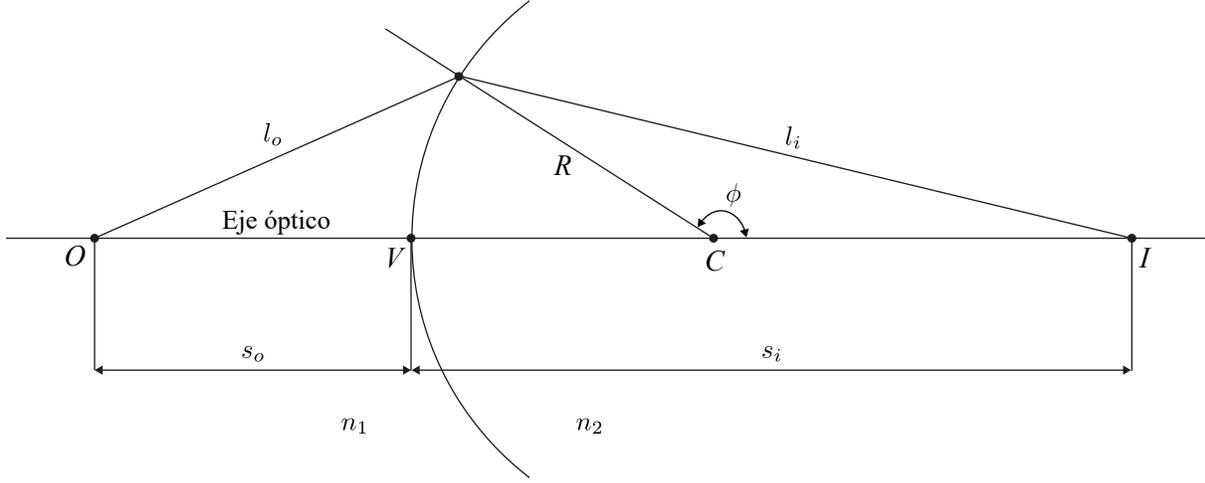
Con el propósito de realizar un análisis cuantitativo del proceso de refracción en una lente simple, en este trabajo consideramos la convención de signos utilizada en la referencia [20] y que se muestra en la Tabla 2.1. De esta forma, midiendo desde el origen de coordenadas que coincide con el vértice de la primera superficie refractora, s_o es la distancia objeto, f_o es la distancia focal anterior, s_i la distancia imagen y f_i es la distancia focal posterior. R_i es el radio de curvatura de la i -ésima superficie refractante y, finalmente, y_o y y_i corresponden a las alturas objeto e imagen, respectivamente, medidas desde el eje óptico, como se muestra en la Figura 2.2.

2.2. Trazo exacto de rayos y superficie cóustica

En esta sección, definimos al eje \mathbf{Z} paralelo al eje óptico y el plano de incidencia coincide con el plano $\mathbf{Z-Y}$, el cual contiene una sección transversal de una lente simple de parámetros arbitra-

s_o, f_o	- a la izquierda del vértice
s_i, f_i	+ a la derecha del vértice
R_i	+ si C está a la derecha del vértice
y_o, y_i	+ si está arriba del eje óptico

Tabla 2.1: Convención de signos.


 Figura 2.2: Parámetros para la convención de signos considerando $n_2 > n_1$.

rios, donde el origen \mathcal{O} de nuestro sistema está colocado en el vértice de la primera superficie de la lente, considerando que el sistema tiene simetría de revolución alrededor del eje \mathbf{Z} .

Sea α el ángulo con el cual los rayos de luz son emitidos desde la fuente puntual colocada en $P_o = [s_o, 0]$ y que inciden en la primera superficie cónica de la lente simple en el punto dado por $P_\alpha = [z_\alpha, y_\alpha]$, ubicado en un plano meridional. Para obtener las coordenadas de P_α , intersectamos un rayo arbitrario emitido desde la fuente puntual con la primer superficie de la lente. La ecuación que describe la primer superficie cónica S_1 como función de y puede escribirse simplemente como

$$S_1 = \left\{ \frac{c_1 y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_1) y^2 c_1^2}}, y \right\}, \quad (2.1)$$

donde $c_1 = 1/R_1$ es la curvatura paraxial de la primera superficie y k_1 es su constante de conicidad que define al perfil de la superficie de acuerdo a lo mostrado en la Tabla 2.2 y como se muestra en la Figura 2.3.

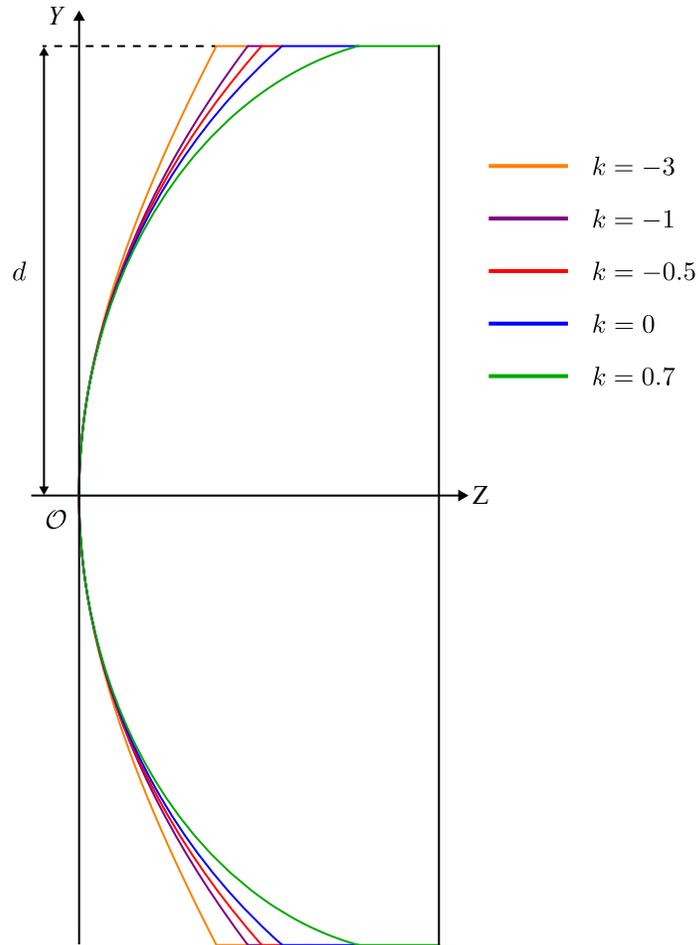
Por otro lado, la ecuación que describe al rayo incidente emitido desde la fuente puntual puede escribirse como

$$y = \tan \alpha (z + s_o), \quad (2.2)$$

imponiendo que el ángulo de emisión sea variable en el intervalo $\alpha \in [-\alpha_m, \alpha_m]$ para los casos en los que $c_1 > 0$, con α_m el ángulo máximo de emisión, medido desde el semieje positivo \mathbf{Z} y

Valor de k	Perfil cónico
$k < -1$	Hipérbola
$k = -1$	Parábola
$-1 < k < 0$	Elipse prolata
$k = 0$	Circunferencia
$k > 0$	Elipse oblata

Tabla 2.2: Constantes de conicidad.

Figura 2.3: Perfiles cónicos de S_1 para distintos valores de la constante de conicidad considerando $c_1 > 0$.

que está dado por la expresión

$$\alpha_m = \arctan \left[\frac{d}{|Z_d| + |s_o|} \right], \quad (2.3)$$

donde $d = D/2$ es el semidiámetro de la superficie y Z_d es la distancia medida sobre el eje óptico al evaluar la ec. (2.1) en d , considerando parámetros predefinidos para la superficie cónica, es

decir, $S_1(d) = [Z_d, d]$. Considerando lo anterior, resolvemos las ecs. (2.1) y (2.2) para z y y con lo que obtenemos

$$z_\alpha = \frac{1 + s_o c_1 \tan^2 \alpha - \sqrt{1 + [2 - c_1(1 + k_1)s_o]c_1 s_o \tan^2 \alpha}}{c_1(1 + k_1 + \tan^2 \alpha)}, \quad (2.4)$$

$$y_\alpha = \tan \alpha \left[\frac{1 - c_1(1 + k_1)s_o - \sqrt{1 + [2 - c_1(1 + k_1)s_o]c_1 s_o \tan^2 \alpha}}{c_1(1 + k_1 + \tan^2 \alpha)} \right],$$

donde se ha considerado el valor positivo (+) de la solución cuadrática que corresponde a la sección de la superficie cónica considerada en el trazo de rayos.

Una vez que el rayo incidente alcanza la primera superficie de la lente simple, consideramos que dicho rayo es refractado dentro de la lente a lo largo del segmento de recta $\overline{P_\alpha P_\beta}$ hasta alcanzar la segunda superficie de la lente en el punto P_β . De esta forma, el rayo $\overline{P_\alpha P_\beta}$ queda expresado como

$$y = y_\alpha + \tan[\gamma_1 + \theta_{r1}](z - z_\alpha), \quad (2.5)$$

en donde los ángulos θ_{i1} y θ_{r1} están relacionados entre si mediante la ley de Snell de tal forma que $\theta_{r1} = \arcsen[(n_o/n_l)\sen\theta_{i1}]$, y γ_1 es el ángulo formado por el eje óptico y la normal a S_1 en el punto P_α . De lo anterior, obtenemos las siguientes expresiones

$$\theta_{i1} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - (1 + k_1)c_1^2 y_\alpha^2}}{c_1 y_\alpha} \right], \quad \gamma_1 = -\arctan \left[\frac{c_1 y_\alpha}{\sqrt{1 - (1 + k_1)c_1^2 y_\alpha^2}} \right], \quad (2.6)$$

donde n_o es el índice de refracción del espacio objeto y n_l es el índice de refracción de la lente. Es importante señalar que los ángulos θ_{i1} y γ_1 están dados en función de α y s_o .

La segunda superficie de la lente, S_2 , como función de una altura arbitraria y puede escribirse como

$$S_2 = \left\{ t + \frac{c_2 y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_2)c_2^2 y_\alpha^2}}, y \right\}, \quad (2.7)$$

donde t es el espesor central de la lente, $c_2 = 1/R_2$ es la curvatura paraxial de la segunda superficie de la lente y k_2 es su constante de conicidad. Por otro lado, sean $P_\beta = [z_\beta, y_\beta]$ las coordenadas del punto donde el rayo $\overline{P_\alpha P_\beta}$ toca a la superficie S_2 . De esta forma, resolviendo las ecs. (2.5) y (2.7) para z y y , obtenemos

$$z_\beta = \frac{1 + c_2\{(1 + k_2)t - (y_\alpha - z_\alpha \tan[\gamma_1 + \theta_{r1}]) \tan[\gamma_1 + \theta_{r1}]\} - \sqrt{\sigma}}{c_2(1 + k_2 + \tan^2[\gamma_1 + \theta_{r1}])}, \quad (2.8)$$

$$y_\beta = \frac{(1 + k_2)c_2 y_\alpha + \tan[\gamma_1 + \theta_{r1}]\{1 + c_2(1 + k_2)(t - z_\alpha) - \sqrt{\sigma}\}}{c_2(1 + k_2 + \tan^2[\gamma_1 + \theta_{r1}])},$$

donde hemos definido

$$\sigma = 1 - c_2\{y_\alpha + (t - z_\alpha) \tan[\gamma_1 + \theta_{r1}]\}\{2 \tan[\gamma_1 + \theta_{r1}] + c_2(1 + k_2)(y_\alpha - (z_\alpha - t) \tan[\gamma_1 + \theta_{r1}])\}. \quad (2.9)$$

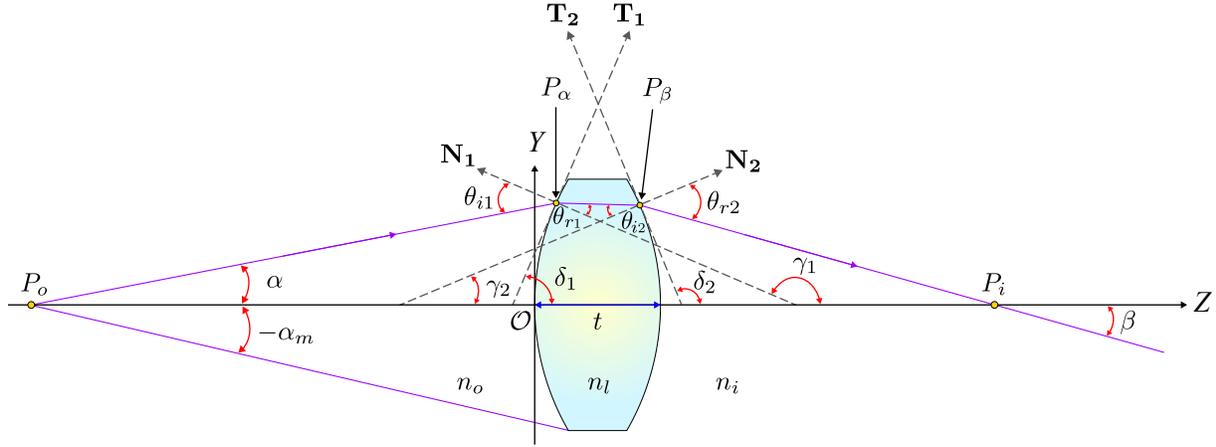


Figura 2.4: Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$.

Es importante señalar que z_β y y_β son funciones de α , s_o y de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción.

El rayo $\overline{P_\alpha P_\beta}$ es refractado al exterior de la lente a lo largo del segmento de recta $\overline{P_\beta P_i}$ como se muestra en la Figura 2.4. El ángulo β es el formado entre el eje óptico y el rayo refractado $\overline{P_\beta P_i}$ y que puede escribirse simplemente como

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \delta_2 + \arcsen \left\{ \left(\frac{n_l}{n_i} \right) \sen[\gamma_1 + \theta_{r1} - \gamma_2] \right\}, \quad (2.10)$$

donde δ_2 y γ_2 son los ángulos formados entre el eje óptico, la tangente y la normal a la segunda superficie en P_β , respectivamente. Así, los ángulos δ_2 y γ_2 pueden escribirse como

$$\delta_2 = \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - (1 + k_2)c_2^2 y_\beta^2}}{c_2 y_\beta} \right], \quad \gamma_2 = -\arctan \left[\frac{c_2 y_\beta}{\sqrt{1 - (1 + k_2)c_2^2 y_\beta^2}} \right]. \quad (2.11)$$

Finalmente, considerando las ecs. (2.10) y (2.11), la ecuación que describe al rayo refractado fuera de la lente a lo largo del segmento de recta $\overline{P_\beta P_i}$ está dada por la expresión

$$y = y_\beta - (z - z_\beta) \tan \beta. \quad (2.12)$$

La ec. (2.12) representa a una familia paramétrica de rayos refractados como función de α y s_o . A partir de estas ecuaciones es posible calcular la superficie cáustica para un conjunto de rayos propagados radialmente por una fuente puntual y que inciden en una lente simple.

Una vez obtenida la ecuación que describe a la familia paramétrica de rayos refractados, con el propósito de calcular la envolvente de dichos rayos [21], derivamos la ec. (2.12) con respecto al parámetro α , se iguala a cero y simplificamos, de tal forma que obtenemos

$$\frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \beta} \left[\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right] (z - z_\beta) + \left[\frac{\partial z_\beta}{\partial \alpha} \right] \tan \beta = 0. \quad (2.13)$$

Finalmente, resolviendo las ecs. (2.12) y (2.13) para z y y , obtenemos

$$\begin{aligned} Z_{c_{oi}} &= z_{\beta} + \left\{ \frac{\left[\frac{\partial y_{\beta}}{\partial \alpha} \right] \cos \beta + \left[\frac{\partial z_{\beta}}{\partial \alpha} \right] \operatorname{sen} \beta}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} \right\} \cos \beta, \\ Y_{c_{oi}} &= y_{\beta} - \left\{ \frac{\left[\frac{\partial y_{\beta}}{\partial \alpha} \right] \cos \beta + \left[\frac{\partial z_{\beta}}{\partial \alpha} \right] \operatorname{sen} \beta}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} \right\} \operatorname{sen} \beta, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde hemos sustituido $z \rightarrow Z_{c_{oi}}$ y $y \rightarrow Y_{c_{oi}}$, y el subíndice c_{oi} significa caústica de una lente simple para rayos emitidos en P_o y que son propagados fuera de la lente hacia P_i . El conjunto de puntos formados por las coordenadas $\{Z_{c_{oi}}, Y_{c_{oi}}\}$ representan paraméricamente a la superficie cáustica en un plano meridional como función del ángulo de incidencia α , considerando una fuente puntual ubicada en s_o sobre el eje óptico como se muestra en la Figura 2.5.

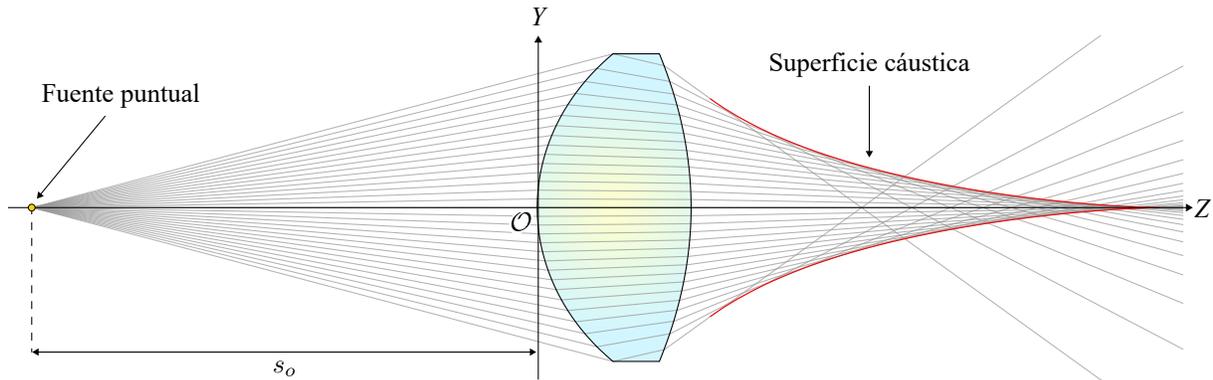


Figura 2.5: Superficie cáustica formada por una lente simple considerando una fuente puntual, con $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$.

2.3. Aproximación paraxial y puntos conjugados

En óptica geométrica, la aproximación paraxial o aproximación a primer orden es el estudio del comportamiento de los rayos de luz cuyos ángulos de emisión α son lo suficientemente pequeños, tales que las aproximaciones $\cos \alpha \approx 1$ y $\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha$ son válidas [17]. Los rayos de luz cuyos ángulos de emisión satisfacen dicha condición son conocidos como *rayos paraxiales* y satisfacen que el frente de onda asociado a ellos es, esencialmente, esférico y formarán una imagen perfecta a una distancia s_i [18].

En esta sección, calculamos el límite de la ec. (2.14) cuando el parámetro α tiende a cero. De

esta forma, se obtienen las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} \beta(0) = y_\beta(0) = 0, \quad z_\beta = t, \quad \cos[\beta(0)] = 1, \quad \text{sen}[\beta(0)] = 0, \\ \frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{n_i}{P_T} \left\{ s_o - \frac{n_o P_2}{n_l P_T} t - \left[\left(\frac{n_l - P_2 t}{n_l} \right) \frac{n_o}{P_T} + s_o \right] \frac{P_1}{n_l} t \right\} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} = s_o - \frac{n_o P_2}{n_l P_T} t + \frac{n_o}{P_T}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $P_1 = c_1 (n_l - n_o)$ y $P_2 = c_2 (n_i - n_l)$ son las potencias ópticas de la primera y segunda superficie de la lente simple, respectivamente, y $P_T = P_1 + P_2 - (P_1 P_2 t)/n_l$ es la potencia óptica total de la lente.

De esta forma, sustituyendo los valores de la ec. (2.15) en la ec. (2.14), obtenemos

$$Z_{c_{oi}}(0) = t + \left(\frac{n_i}{P_T} \right) \frac{\left\{ s_o - \frac{n_o P_2}{n_l P_T} t - \left[s_o + \frac{n_o}{P_T \left(\frac{n_l - P_2 t}{n_l} \right)} \right] \frac{P_1}{n_l} t \right\}}{\left(s_o - \frac{n_o P_2}{n_l P_T} t + \frac{n_o}{P_T} \right)}, \quad (2.16)$$

$$Y_{c_{oi}}(0) = 0.$$

Adicionalmente, hemos definido $s_i = Z_{c_{oi}}(0)$ como un punto singular relacionado con la imagen paraxial producida por una fuente puntual colocada en s_o a lo largo del eje óptico. Los puntos $P_o = [s_o, 0]$ y $P_i = [s_i, 0]$ son comúnmente denominados puntos conjugados. Con el propósito de realizar un estudio de la formación de imagen de una fuente puntual, es necesario considerar algunos parámetros importantes de los sistemas ópticos definidos en la literatura elemental de óptica y conocidos comúnmente como planos principales [17, 18].

Sean H_p y H_s los puntos principales de un sistema óptico definidos como el lugar geométrico donde los planos principales primario y secundario, respectivamente, intersectan al eje óptico como se muestra en la Figura 2.6. De esta forma, las coordenadas de los puntos principales pueden escribirse como $H_p = [P_p, 0]$ y $H_s = [P_s, 0]$, donde P_p y P_s son distancias medidas a lo largo del eje óptico respecto a nuestro origen de coordenadas y donde los subíndices p y s significan primario y secundario, respectivamente. Finalmente, en términos de las potencias ópticas, estas distancias pueden escribirse simplemente como

$$P_p = \frac{n_o P_2}{n_l P_T} t, \quad P_s = t - \frac{n_i P_1}{n_l P_T} t, \quad (2.17)$$

donde la potencia óptica total de la lente, P_T , es definida como el inverso de la distancia focal efectiva (*EFL* del inglés *Effective Focal Length*) y que corresponde a la distancia entre los puntos focales y los planos principales como se muestra en la Figura 2.6. Por simplicidad, hemos

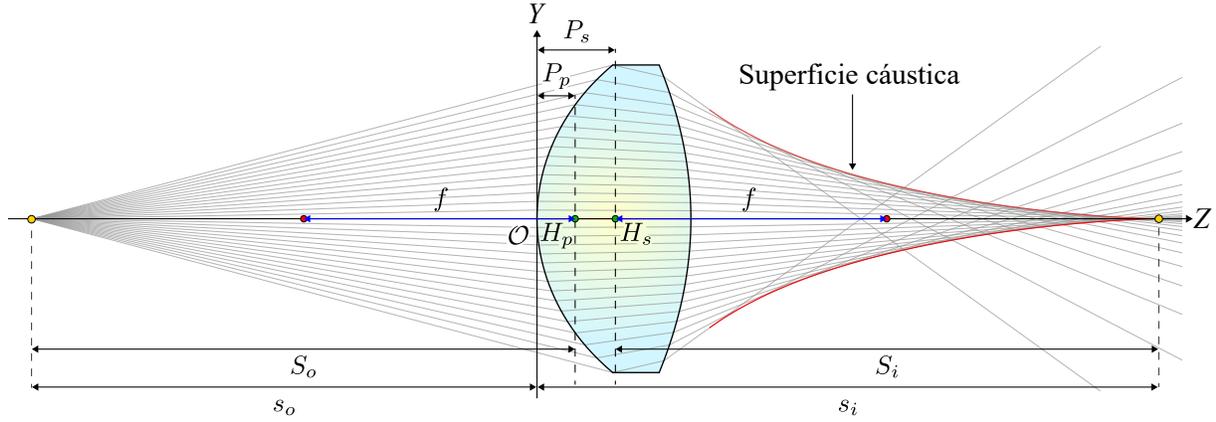


Figura 2.6: Superficie cóustica formada por una lente simple considerando una fuente puntual, con $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$.

redefinido EFL como f , de tal forma que

$$f = \frac{1}{P_T} = \frac{1}{P_1 + P_2 - \frac{P_1 P_2}{n_l} t}. \quad (2.18)$$

Considerando las ecs. (2.17) y (2.18), podemos reescribir la ec. (2.16) para s_i simplemente como

$$s_i = \frac{f n_i (s_o - P_p)}{f n_o + s_o - P_p} + P_s. \quad (2.19)$$

Es importante mencionar que s_i es función de los parámetros de diseño de la lente simple y la posición de la fuente puntual a lo largo del eje óptico. Finalmente, sean S_o y S_i las distancias objeto e imagen medidas desde el plano principal primario y desde el plano principal secundario, respectivamente, tales que $S_o = s_o - P_p$ y $S_i = s_i - P_s$. De esta forma, la ec. (2.19) puede ser reescrita simplemente como

$$\frac{n_i}{S_i} - \frac{n_o}{S_o} = \frac{1}{f}. \quad (2.20)$$

La expresión mostrada en la ec. (2.20) es la fórmula para los puntos conjugados en su forma gaussiana, considerando nuestra convención de signos [20]. En el caso particular en el que la lente simple se encuentra inmersa en aire, es decir, $n_i = n_o = 1$, y utilizando la convención de signos de [18], la ec. (2.20) puede escribirse como

$$\frac{1}{S_i} + \frac{1}{S_o} = \frac{1}{f}, \quad (2.21)$$

que es la forma en la que usualmente es encontrada en la literatura. Finalmente, las ecs. (2.14) y (2.20) nos permiten estudiar la superficie cóustica y la formación de imagen para una lente simple como función de la posición de la fuente puntual a lo largo del eje óptico, s_o , y todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción.

2.4. Aproximación a tercer orden y aberración esférica

En nuestro estudio, la forma natural de extender los resultados de la óptica paraxial es considerando una aproximación a tercer orden. Realizando una expansión en series de Taylor a tercer orden de la ec. (2.14) en función del parámetro α , en una vecindad de $\alpha = 0$, y simplificando, obtenemos

$$\{Z_{c_3}, Y_{c_3}\} = \left\{ s_i - \frac{3}{2} \left[\frac{G_3}{n_i n_l^4 P_T^2 (ffl - s_o)^2} \right] \alpha^2, \left[\frac{G_3}{n_i^2 n_l^4 P_T (ffl - s_o)} \right] \alpha^3 \right\}, \quad (2.22)$$

donde hemos sustituido el subíndice c por c_3 que significa cáustica aproximada a tercer orden. El término s_i corresponde a la posición de la cúspide de la superficie cáustica que, al mismo tiempo, coincide con la posición de la imagen paraxial y cuyos pormenores fueron discutidos en la sección anterior. Adicionalmente, hemos definido

$$\begin{aligned} G_3 = & \{c_2^3 k_2 n_i^3 [n_o t - n_l s_o + c_1(n_l - n_o) t s_o]^3 + c_2 n_i n_l^2 [n_o t - n_l s_o + c_1(n_l - n_o) t s_o] \\ & \times \{n_o + c_2 n_o t + c_1(n_l - n_o) s_o - c_2 s_o [n_l - c_1(n_l - n_o) t]\}^2 \\ & - n_l^3 (n_o + c_2 n_o t + c_1(n_l - n_o) s_o - c_2 s_o [n_l - c_1(n_l - n_o) t])^3 \} [n_o t - n_l s_o + c_1(n_l - n_o) t s_o] \\ & + n_i^2 n_l \{n_l^4 [-c_2^3 k_2 + c_1 c_2^2 (-1 + 4c_2 k_2 t) + c_1^2 c_2 [2 + 3c_2 t (1 - 2c_2 k_2 t)] \\ & + c_1^4 t \{1 + c_2 t [2 + c_2 t (1 - c_2 k_2 t)]\} + c_1^3 \{-1 + k_1 + c_2 t [-4 + c_2 t (-3 + 4c_2 k_2 t)]\}\} s_o^4 \\ & - n_l^2 n_o^2 \{c_2 [-2 + 3c_2 t (-1 + 2c_2 k_2 t)] + c_1 \{2 + 3c_2 t [4 + c_2 t (3 - 4c_2 k_2 t)]\} \\ & + 6c_1^2 t (-1 + c_1 s_o)^2 (-1 + c_2 t [-2 + c_2 t (-1 + c_2 k_2 t)])\} s_o^2 \\ & + n_l n_o^3 t (-1 + c_1 s_o)^3 \{c_2 [4 + c_2 t (3 - 4c_2 k_2 t)] + 4c_1 (-1 + c_2 t [-2 + c_2 t (-1 + c_2 k_2 t)])\} s_o \\ & - n_o^4 t \{-1 + c_2 t [-2 + c_2 t (-1 + c_2 k_2 t)]\} (-1 + c_1 s_o)^4 + n_l^3 n_o s_o (-1 + 2c_1 s_o - (c_1 t - 1) \\ & \times \{c_2^2 (-1 + 4c_2 k_2 t) + c_1 c_2 [4 + c_2 t (5 - 8c_2 k_2 t)] + 4c_1^2 (-1 + c_2 t [-2 + c_2 t (-1 + c_2 k_2 t)])\} s_o^2 \\ & + c_1 \{c_2^2 - 4c_2^3 k_2 t + 2c_1 c_2 [-2 + 3c_2 t (-1 + 2c_2 k_2 t)] + c_1^2 \{3 - k_1 + 3c_2 t [4 + c_2 t (3 - 4c_2 k_2 t)]\} \\ & + 4c_1^3 t (c_2 t [-2 + c_2 t (-1 + c_2 k_2 t)] - 1)\} s_o^3 \}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por otro lado, definimos a la distancia focal frontal (*ffl* del inglés *front focal length*) como

$$ffl = - \left(\frac{n_o}{n_l} \right) \left[\frac{n_l - P_2 t}{P_T} \right], \quad (2.24)$$

y que es medida desde el origen de nuestro sistema de referencia. La Figura 2.7 muestra la forma exacta y su respectiva aproximación a tercer orden de la superficie cáustica formada por una lente simple.

De la ec. (2.22) puede observarse que la componente Z_{c_3} contiene términos de orden 0 y 2 de la expansión en series de Taylor a tercer orden. Por otro lado, la componente Y_{c_3} contiene un único término de orden 3. Claramente, la ec. (2.22) es la representación paramétrica de una parábola semicúbica con origen en $[Z_{c_3}(0), Y_{c_3}(0)] = [s_i, 0]$. Despejando al parámetro α en Z_{c_3} y sustituyendo en Y_{c_3} , es posible obtener una expresión de la superficie cáustica aproximada independiente del parámetro α de la forma

$$y_a = \mu^{1/2} \cdot z_a^{3/2}, \quad (2.25)$$

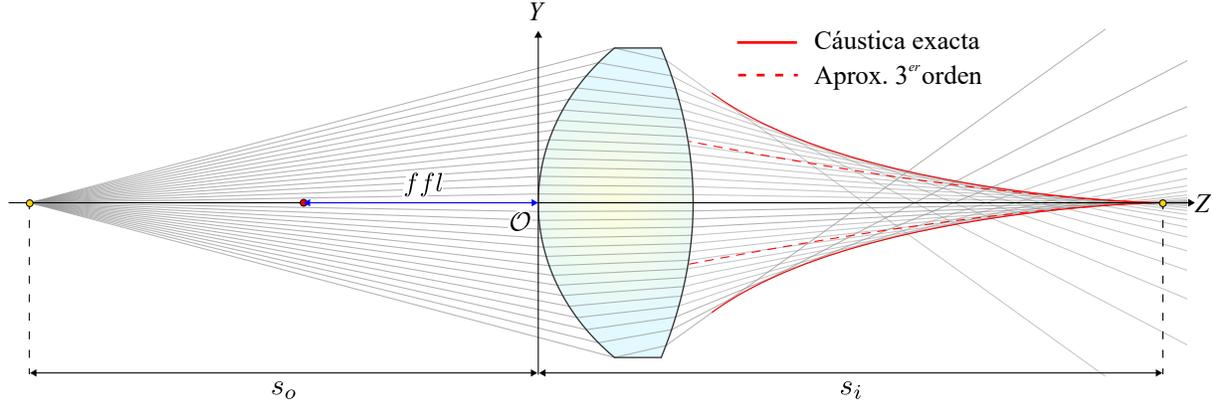


Figura 2.7: Aproximación a tercer orden de la superficie cáustica.

donde hemos realizado un cambio de coordenadas tal que $y_a = Y_{c3}$ y $z_a = s_i - Z_{c3}$, y donde el término μ queda definido como

$$\mu = -\frac{8}{27} \frac{n_i^4 P_T^4 (ffl - s_o)^4}{n_i G_3}. \quad (2.26)$$

De acuerdo al procedimiento ampliamente explicado en [24,25], sabemos que es posible expresar a la superficie cáustica de un frente de onda refractado de la forma

$$\eta = -\frac{\zeta^{3/2}}{3\rho^2} \sqrt{\frac{-n}{3b_1}}, \quad (2.27)$$

donde n es el índice de refracción del espacio imagen y ρ es el radio de la esfera de referencia. Realizando un procedimiento análogo, partiendo de la ec. (2.22), sustituimos $\rho = S_i$, $n = n_i$, $\zeta = z_a$ y $\eta = y_a$ en la ec. (2.27), con lo que obtenemos la expresión

$$y_a = -\frac{z_a^{3/2}}{3 S_i^2} \sqrt{\frac{-n_i}{3b_1}}. \quad (2.28)$$

De esta forma, igualando las ecs. (2.25) y (2.28), y resolviendo para b_1 , proponemos una expresión para el coeficiente generalizado de aberración esférica a tercer orden para el caso de una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico, expresado como

$$b_1 = \frac{n_i^2 G_3}{8 n_i^4 P_T^4 (ffl - s_o)^4 S_i^4}. \quad (2.29)$$

Es importante mencionar que la ec. (2.29) está dada en función de los parámetros de diseño de la lente simple, de la posición de la fuente puntual s_o y de la posición de la imagen paraxial S_i . Adicionalmente, calculando el límite de la ec. (2.29) cuando la distancia objeto tiende a menos infinito, recuperamos el coeficiente de aberración esférica a tercer orden para el caso de un frente de onda plano que incide en una lente simple inmersa en aire, expresado simplemente como

$$b_1 = \frac{n_a^2 G_3}{8 n_i^4 P_T^4 f^4}, \quad (2.30)$$

y que ha sido reportado en trabajos previos [12,23].

2.5. Ejemplos

Con el propósito de ejemplificar la teoría desarrollada en este capítulo, consideramos una lente simple biconvexa con los parámetros de diseño $R_1 = 6\text{mm}$, $R_2 = -12\text{mm}$, $t = 5\text{mm}$, $D = 10\text{mm}$, $k_1 = -0.25$, $k_2 = -1.25$, $n_o = n_i = 1$ y $n_l = 1.5$. Adicionalmente, de acuerdo a las ecs. (2.17) y (2.18), tenemos que la posición de los planos principales a lo largo del eje óptico está dada por $P_p = 1.225\text{mm}$ y $P_s = 2.551\text{mm}$, respecto a nuestro sistema de referencia, tenemos una distancia focal efectiva de $f = 8.816\text{mm}$ y un número $F/\# = 1.134$. Inicialmente, consideramos un objeto puntual colocado a una distancia $S_o = -2f$ que, de acuerdo a nuestro sistema de referencia, es equivalente a una distancia objeto $s_o = -2f + P_p$. Sustituyendo lo anterior en la ec. (2.21) y resolviendo para S_i , obtenemos

$$\frac{1}{S_i} - \frac{1}{(-2f)} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad S_i = 2f. \quad (2.31)$$

La ec. (2.31) corresponde al caso particular en el que la distancia entre el objeto puntual y su imagen es mínima, tal que $|S_o| + |S_i| = 4f$. De esta forma, la distancia objeto y la distancia imagen respecto a los planos principales están dadas por $S_o = -17.632\text{mm}$ y $S_i = 17.632\text{mm}$, y, respecto a nuestro sistema de referencia, estas distancias están dadas por $s_o = -16.408\text{mm}$ y $s_i = 20.184\text{mm}$. Adicionalmente, obtenemos una cáustica real cuya cúspide coincide con la posición de la imagen paraxial y su respectiva cáustica aproximada a tercer orden viene dada como $\{Z_{c_3}(\alpha), Y_{c_3}(\alpha)\} = \{20.184 - 405.375\alpha^2, 270.250\alpha^3\}$. La Figura 2.8 muestra la superficie cáustica, la imagen paraxial y la cáustica aproximada formada por esta lente.

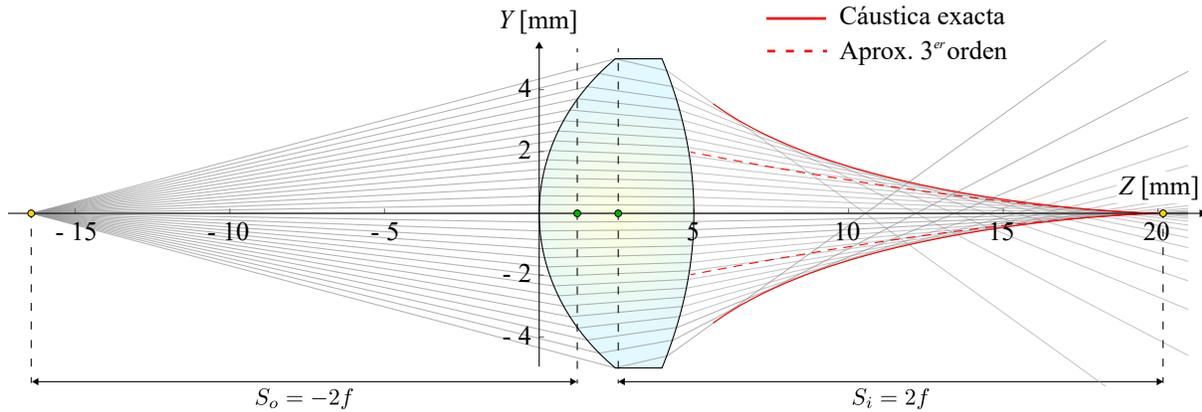


Figura 2.8: Superficie cáustica y su aproximación a tercer orden de una lente simple con una fuente puntual colocada en $S_o = -2f$.

Por otro lado, consideramos ahora un objeto puntual colocado a una distancia objeto $S_o = -f$, es decir, la fuente puntual es colocada a una distancia igual a la distancia focal efectiva de la lente, en el lado negativo del eje óptico. Respecto a nuestro sistema de referencia, esta distancia está dada por $s_o = S_o + P_p$. Sustituyendo el valor de S_o en la ec. (2.21) obtenemos

$$\frac{1}{S_i} - \frac{1}{(-f)} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad S_i \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

La ec. (2.32) representa el caso para el cual la distancia entre el objeto puntual y su imagen es máxima, tal que $|S_o| + |S_i| \rightarrow \infty$. De esta forma, las distancias objeto e imagen son $s_o = -7.592\text{mm}$, $S_o = -8.816\text{mm}$, $s_i \rightarrow \infty$ y $S_i \rightarrow \infty$. En este caso, se obtiene una superficie cáustica real que se extiende indefinidamente hacia s_i . La Figura 2.9 muestra la superficie cáustica formada por la lente simple biconvexa cuando la fuente puntual está colocada en $S_o = -f$.

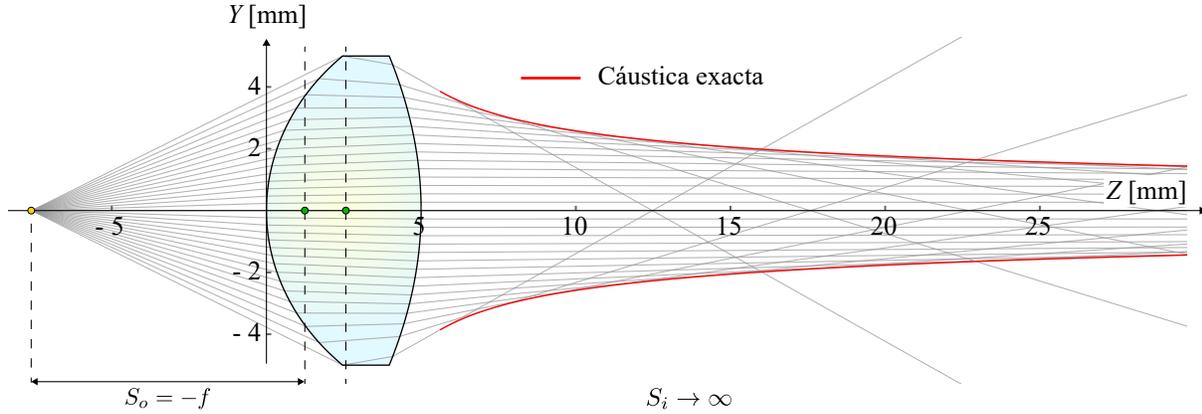


Figura 2.9: Superficie cáustica de una lente simple con una fuente puntual colocada en $S_o = -f$.

Ahora, consideramos el caso para el cual la fuente puntual está colocada a una distancia objeto tal que $S_o < 0$ y $|S_o| < |f|$, es decir, colocamos la fuente puntual a la izquierda de la lente, entre el foco y el vértice de la primera superficie de la lente simple. De esta forma, despejando a S_i de la ec. (2.21) y sustituyendo, obtenemos

$$S_i = \frac{S_o f}{S_o + f}; \quad \text{donde } S_o < 0 \quad \text{y} \quad |S_o| < |f|, \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow S_i < 0.$$

La ec. (2.33) representa el caso en el que la distancia imagen tiene un valor negativo que corresponde a lo que se define en la literatura como una *imagen virtual*, ubicada a la izquierda de la lente. En este caso, hemos considerado una distancia objeto tal que $s_o = -4.127\text{mm}$ y $S_o = -5.351\text{mm}$, obteniendo una distancia imagen tal que $s_i = -11.066\text{mm}$ y $S_i = -13.617\text{mm}$. La superficie cáustica formada por la lente simple bajo estas condiciones está compuesta por una rama real y una rama virtual. La imagen virtual formada por la lente es la cúspide de la superficie cáustica virtual, mientras que la rama real de la superficie cáustica se extiende indefinidamente a la derecha de la lente. Adicionalmente, la superficie cáustica aproximada viene dada por $\{Z_{c_3}(\alpha), Y_{c_3}(\alpha)\} = \{-11.066 - 73.564\alpha^2, -19.274\alpha^3\}$, extendiéndose a la izquierda de la lente y cuyo origen coincide con la posición de la imagen virtual. La Figura 2.10 muestra las superficies cáustica real y virtual, la superficie cáustica aproximada y la imagen virtual formada por la lente simple.

Finalmente, estudiamos el caso de una fuente puntual colocada a una distancia objeto tal que $S_o > 0$. Este caso corresponde a un objeto ubicado a la derecha de la lente simple y que

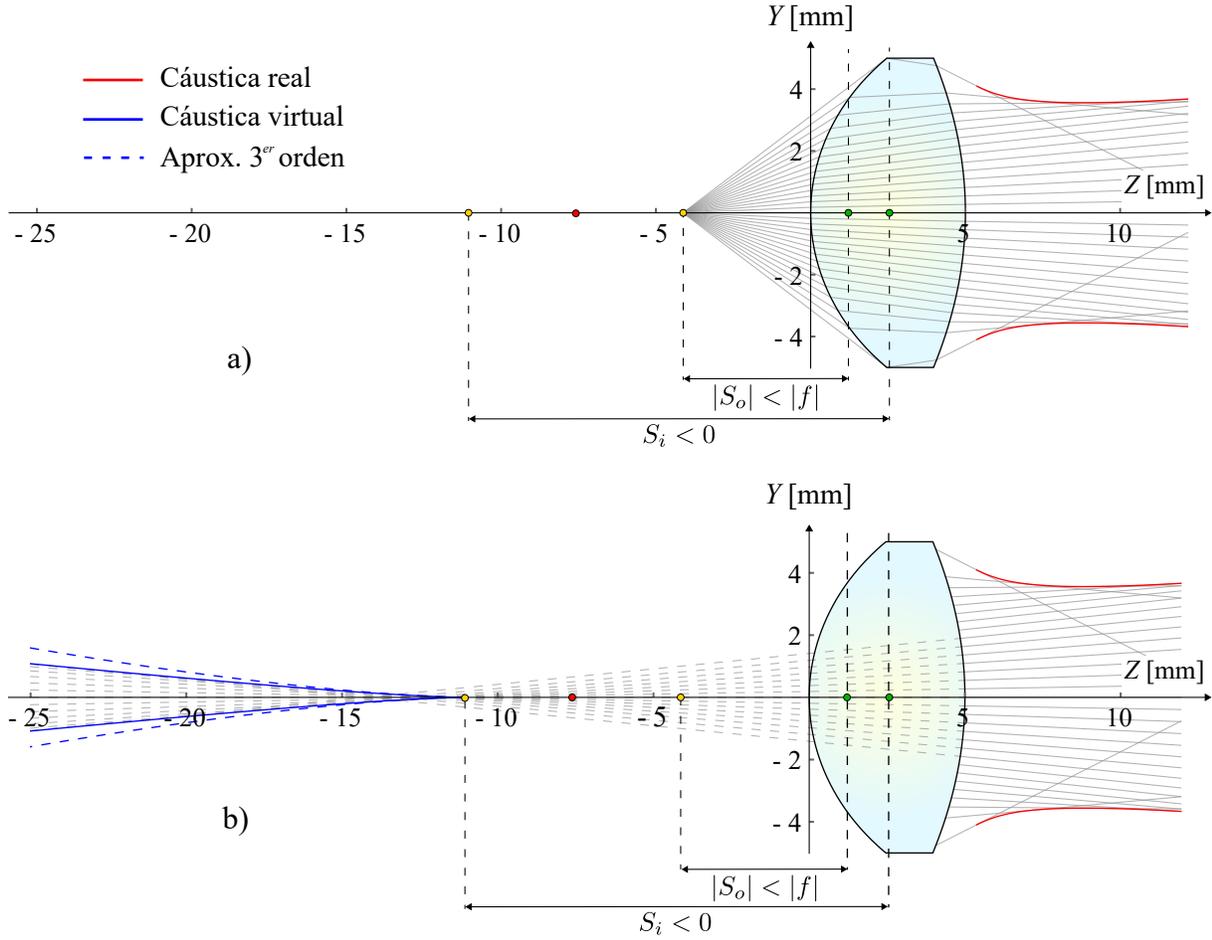


Figura 2.10: Superficie cáustica y su aproximación a tercer orden de una lente simple con una fuente puntual colocada en $|S_o| < |f|$. a) Superficie cáustica real. b) Extrapolación de los rayos refractados y la superficie cáustica virtual formada por la lente simple.

corresponde a lo que se define en la literatura como un *objeto virtual*. Despejando S_i de la ec. (2.21), y considerando la posición de la fuente puntual, obtenemos

$$S_i = \frac{S_o f}{S_o + f}; \quad \text{donde } S_o > 0, \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow S_i > 0.$$

De la ec. (2.34) obtenemos una distancia imagen cuyo valor es positivo y que representa el caso en el que un objeto virtual forma una imagen real. Para ejemplificar este caso, consideramos un objeto puntual colocado a una distancia objeto $s_o = 35.101\text{mm}$ tal que $S_o = 33.877\text{mm}$. De esta forma, las distancias imagen obtenidas son $s_i = 9.547\text{mm}$ y $S_i = 6.996\text{mm}$. Adicionalmente, la imagen paraxial es la cúspide de la superficie cáustica real formada por la lente simple y su aproximación a tercer orden está dada por la expresión $\{Z_{c3}(\alpha), Y_{c3}(\alpha)\} = \{9.547 - 0.485\alpha^2, -1.564\alpha^3\}$. La Figura 2.11 muestra al objeto virtual colocado a la derecha de la lente, la imagen real, la

superficie cáustica formada por la lente simple y su aproximación a tercer orden.

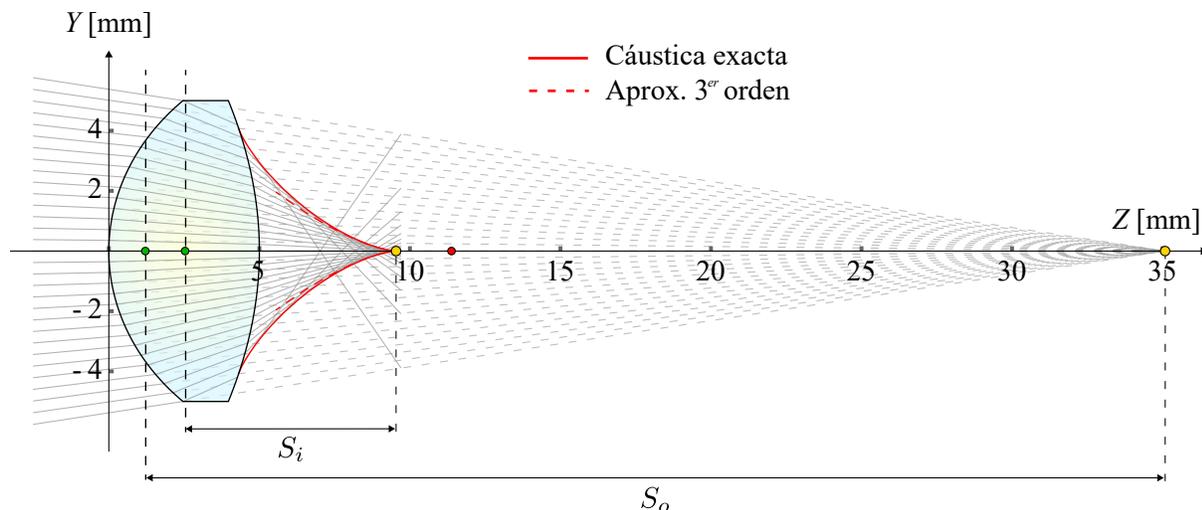


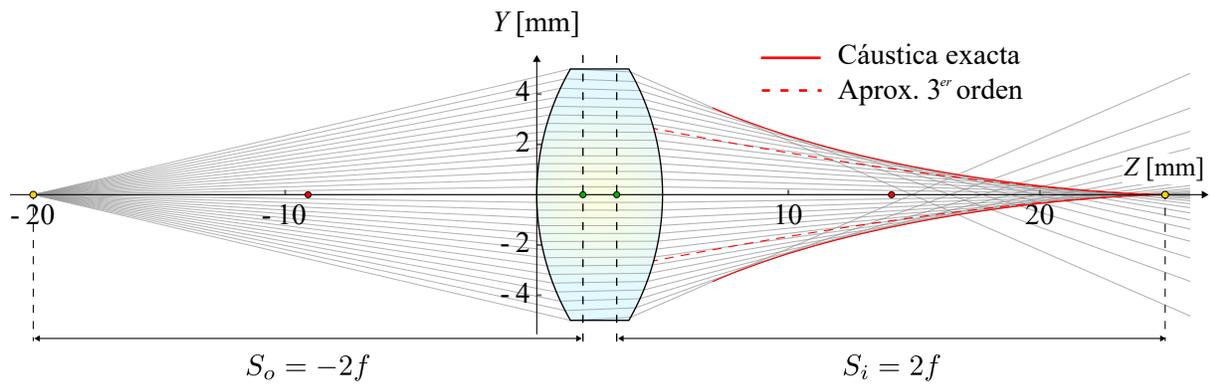
Figura 2.11: Superficie cáustica y superficie cáustica aproximada a tercer orden formada por una lente simple y un objeto virtual.

Cabe señalar que la teoría desarrollada en este capítulo para la obtención de la superficie cáustica y su respectiva aproximación a tercer orden muestra ser adecuada únicamente para el estudio de lentes simples, positivas o negativas, con números $F/\# > 1$. Finalmente, la Figura 2.12 muestra el trazo de rayos, la superficie cáustica y la aproximación a tercer orden para una lente equiconvexa, un menisco positivo y una lente biconcava con números $F/\# > 1$.

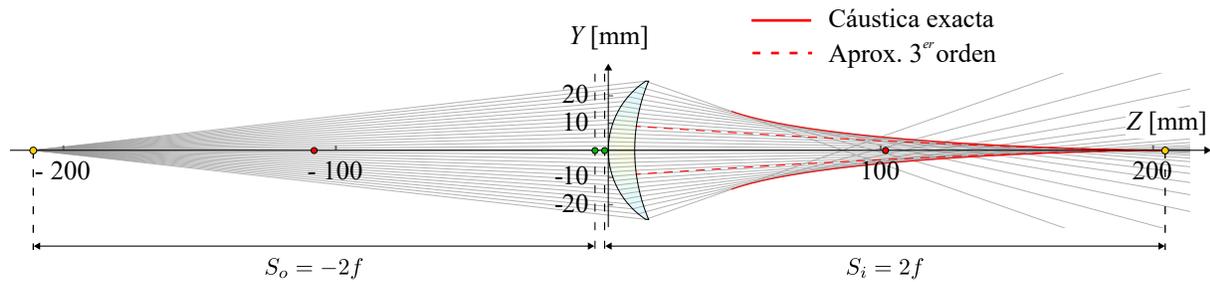
2.5.1. Óvalos cartesianos

En la sección 2.4, hemos establecido una relación directa entre la superficie cáustica por refracción con la aberración esférica introducida por la lente simple, mediante una aproximación a tercer orden de la superficie cáustica exacta. Adicionalmente, hemos recuperado la ecuación de puntos conjugados para una lente simple en su forma gaussiana. A partir de estos resultados, buscamos obtener los parámetros de diseño que permitan reducir la cantidad de aberración esférica introducida por este tipo de sistema óptico.

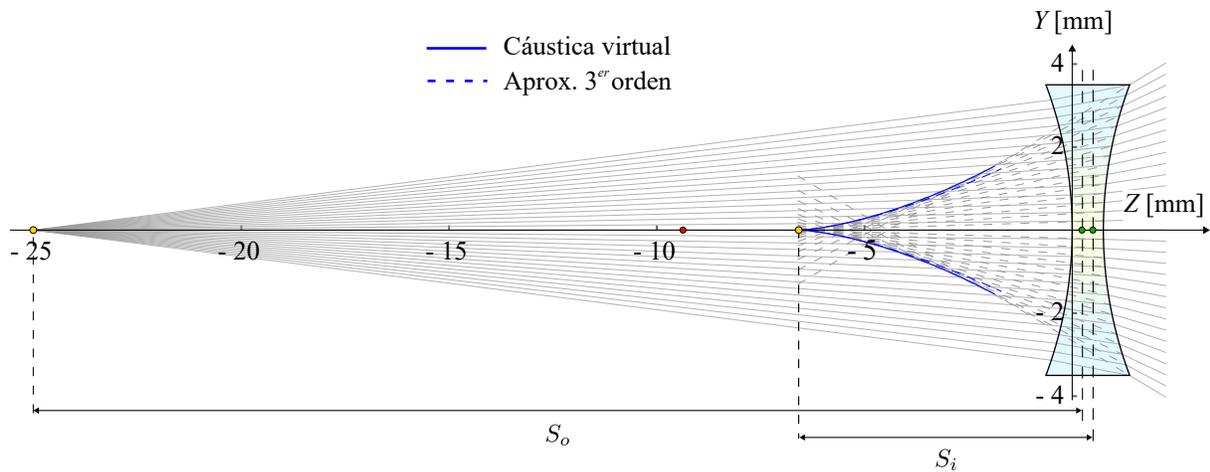
En la literatura especializada, se define como sistema óptico aplanático a la superficie o conjunto de superficies que están libres tanto de aberración esférica como de aberración de coma. Además, los puntos conjugados para los que se cumple esta condición se definen como puntos aplanáticos [17,24]. Generalmente, los sistemas ópticos formados por lentes esféricas, difícilmente quedan libres de ambas aberraciones, salvo por algunas configuraciones de puntos conjugados muy específicas. Asimismo, es bien sabido que, para las lentes con apertura de entrada y distancia focal fijas, la cantidad de aberración esférica depende únicamente de la posición de la fuente puntual y de la forma de las superficies que delimitan a la lente. Es importante señalar que, al trabajar exclusivamente con una fuente puntual colocada a lo largo del eje óptico, la aberración esférica es la única presente.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.12: Superficie exacta y aproximación a tercer orden de la cáustica para una lente simple. (a) Lente equiconvexa. (b) Menisco positivo. (c) Lente biconcava.

Ahora, considerese un sistema óptico formado por una lente equiconvexa, es decir, una lente simple biconvexa tal que los radios de curvatura y las constantes de conicidad de ambas superficies son iguales, que está inmersa en un medio con un índice de refracción tal que $n_o = n_i$ y $n_l > n_o$. Además, se coloca una fuente puntual a una distancia $S_o = -2f$ sobre el eje óptico, de tal forma que, de acuerdo a la ec. (2.21), la imagen está ubicada a una distancia $S_i = 2f$. Esta configuración de puntos conjugados tiene la particularidad de que, tanto la distancia entre objeto e imagen y la aberración esférica introducida por la lente simple, son mínimas [18]. Sustituyendo $c_2 \rightarrow -c_1$, $k_2 \rightarrow k_1$, $n_i \rightarrow n_o$ y $s_o \rightarrow -2f + P_p$ en la ec. (2.23) y simplificando, obtenemos

$$G_3 = \frac{2n_l^4 n_o^4 (n_l^2 + k_1 n_o^2)}{c_1 (n_l - n_o)^3}. \quad (2.35)$$

De las ecs. (2.22) y (2.29) es claro que la cantidad de aberración esférica introducida por la lente simple es directamente proporcional al coeficiente G_3 . De lo anterior, se sigue que la condición de aplanicidad para este sistema óptico quedará satisfecha si el coeficiente G_3 es nulo. Para ello, igualamos la ec. (2.35) a cero y resolviendo para k_1 , obtenemos

$$k = - \left(\frac{n_l}{n_a} \right)^2, \quad (2.36)$$

donde hemos sustituido $k_1 \rightarrow k$ y $n_o \rightarrow n_a$.

La ec. (2.36) es la constante de conicidad que describe el perfil de las superficies de la lente simple que satisfacen las condiciones de aplanicidad. En otras palabras, los puntos conjugados $S_o = -2f$ y $S_i = 2f$ son puntos aplanáticos para la lente cuyos perfiles cónicos están descritos por la ec. (2.36). Es importante señalar que este resultado coincide con un tipo de lentes propuesto originalmente por René Descartes y que es conocido simplemente como *óvalos cartesianos*, cuya principal característica es estar libre de aberración esférica. Un ejemplo clásico de los óvalos cartesianos se muestra en el inciso (b) de la Figura 2.13, donde consideramos una lente plano-convexa sobre la que incide un frente de onda plano, en comparación con una lente plano-convexa esférica que se muestra en el inciso (a).

A pesar de la existencia bien documentada de métodos que permiten obtener óvalos cartesianos [26] y de trabajos recientemente publicados que presentan el diseño de lentes libres de aberración esférica [27], la contribución de este trabajo es la de proponer un método que está basado en aumentar el orden de aproximación a la superficie cáustica por refracción de una lente simple partiendo de un trazo exacto de rayos. Finalmente, con el propósito de ejemplificar la teoría desarrollada en esta sección, consideramos una lente simple con parámetros de diseño $c_1 = 6\text{mm}$, $c_2 = -6\text{mm}$, $t = 5\text{mm}$, $D = 10\text{mm}$, $n_o = n_i = 1$, $n_l = 1.5$ y $k_1 = k_2 = -2.25$, y con una fuente puntual colocada a una distancia $S_o = -13.936\text{mm}$ y su respectiva imagen ubicada a una distancia $S_i = 13.936\text{mm}$. La Figura 2.14 muestra el trazo exacto de rayos para esta lente simple.

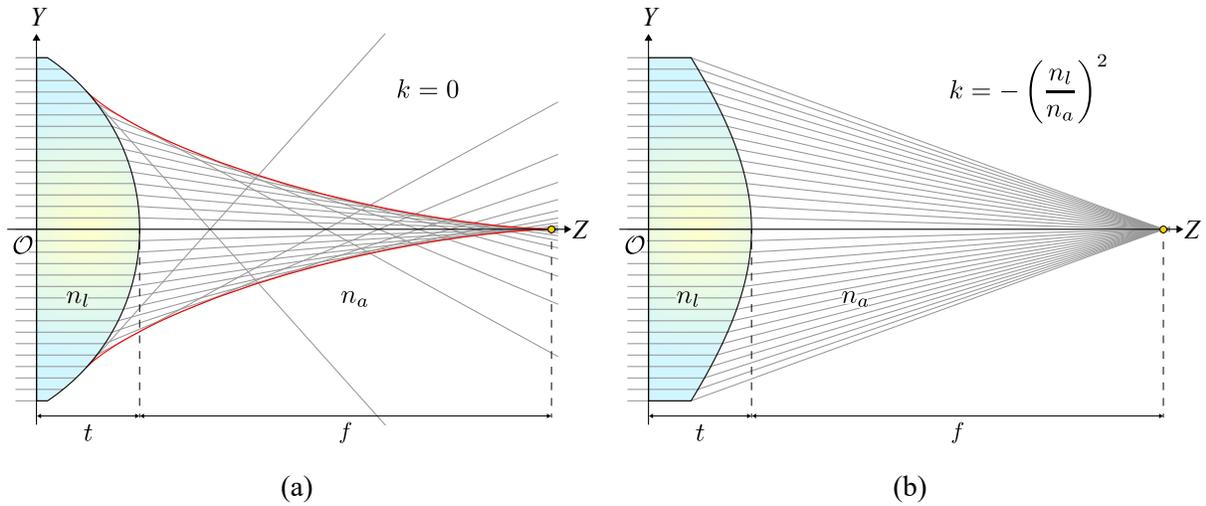


Figura 2.13: Trazo exacto de rayos para una lente plano-convexa, considerando una fuente puntual en infinito y con $n_l > n_a$. (a) Lente esférica. (b) Óvalo cartesiano.

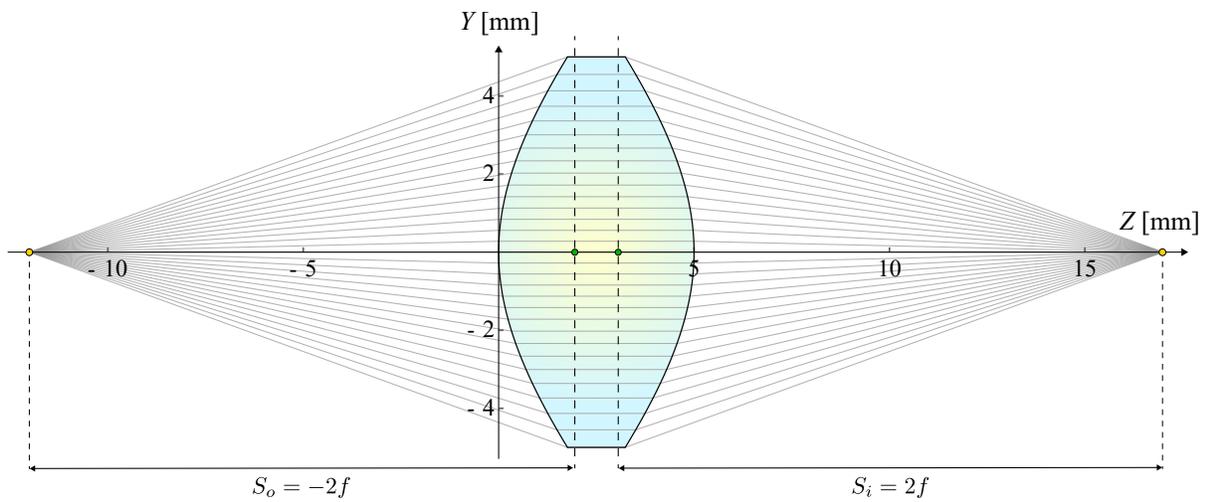


Figura 2.14: Lente aplanática para el caso en el que $n_i = n_o$ y $n_l > n_o$.

Capítulo 3

Frente de onda refractado por una lente simple

En este trabajo, hemos definido a la superficie cáustica como el lugar geométrico de los centros de curvatura de un frente de onda [28]. En otras palabras, si se miden longitudes de camino óptico iguales a lo largo de cada rayo desde la fuente de luz, la superficie formada por los extremos de los rayos es ortogonal a todos los rayos. Estas superficies son los frentes de fase del sistema de ondas.

Aunque las superficies cáusticas y los frentes de onda, formados tanto por reflexión como por refracción, han sido objeto de estudios extensos y minuciosos [12, 13, 29–32], la principal contribución de este trabajo es obtener ecuaciones analíticas de los frentes de onda formados por refracción en una lente simple, considerando un frente de onda esférico incidente, proveniente de una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico, en función de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción. Debido a la simetría de revolución presente en una lente simple, realizamos nuestros cálculos exclusivamente en un plano meridional, utilizando el principio de Huygens y el teorema de Malus-Dupin.

Adicionalmente, obtenemos aproximaciones polinomiales para los frentes de onda refractados por una lente simple y presentamos algunos ejemplos.

3.1. Frente de onda por principio de Huygens

De acuerdo a lo establecido en el principio de Huygens, un frente de onda es la envolvente de un conjunto de onduletas o de frentes de onda esféricos secundarios centrados en un frente de onda previo [18]. De lo anterior, siguiendo un procedimiento análogo a lo realizado en [33, 34], consideramos un frente de onda esférico propagándose a lo largo del eje óptico, de izquierda a derecha, que incide en la primera superficie de la lente simple. Este frente de onda es refractado y propagado en el interior de la lente hasta alcanzar a la segunda superficie para, finalmente, ser refractado al exterior. En esta sección, obtenemos las ecuaciones analíticas del frente de onda refractado por una lente simple, considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico, utilizando el principio de Huygens.

De manera similar a lo elaborado en el capítulo anterior, definimos al eje \mathbf{Z} paralelo al eje óptico y suponemos que el plano de incidencia coincide con el plano \mathbf{Z} - \mathbf{Y} , el cual contiene una sección transversal de una lente simple de parámetros arbitrarios, donde el origen \mathcal{O} de nuestro sistema está colocado en el vértice de la primera superficie de la lente, considerando que el sistema tiene simetría de revolución alrededor del eje \mathbf{Z} . Sin pérdida de generalidad, consideramos un frente de onda esférico que se propaga a lo largo del eje óptico, desde una fuente puntual ubicada en $P_o = [s_o, 0]$, hasta alcanzar a la superficie S_1 de la lente, como se muestra en la figura 3.1(a).

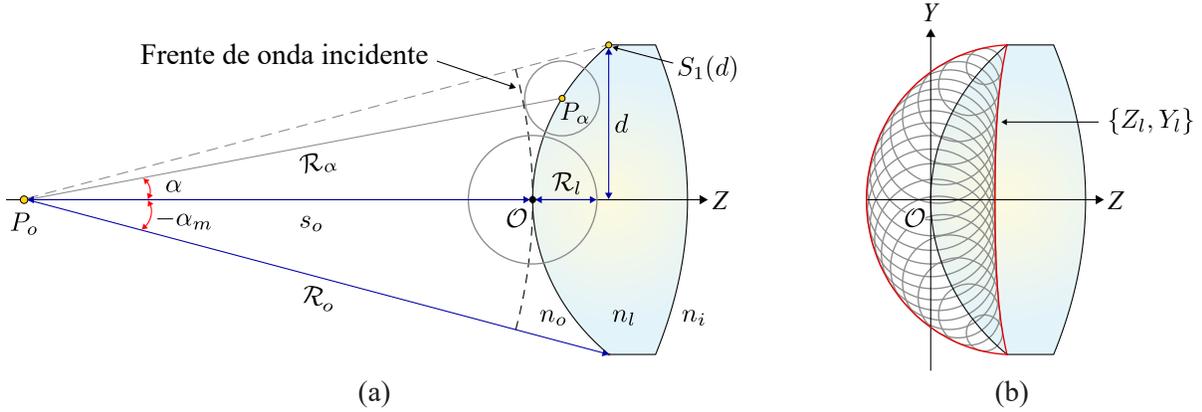


Figura 3.1: (a) Frente de onda esférico incidente en una lente simple. (b) Onduletas y el frente de onda refractado al interior de la lente simple.

Sea \mathcal{R}_α la distancia recorrida por el frente de onda esférico a lo largo del segmento de recta $\overline{P_o P_\alpha}$, desde la fuente puntual hasta un punto de incidencia arbitrario $P_\alpha = [z_\alpha, y_\alpha]$ ubicado sobre la superficie S_1 y cuyas coordenadas están dadas por la ec. (2.4). De lo anterior, \mathcal{R}_α puede escribirse simplemente como

$$\mathcal{R}_\alpha = \sqrt{(z_\alpha + |s_o|)^2 + y_\alpha^2}, \quad \alpha \in [-\alpha_m, \alpha_m], \quad (3.1)$$

donde α_m es el ángulo máximo de emisión, dado por la ec. (2.3).

Ahora, consideramos la *Longitud de Camino Óptico* recorrida por el frente de onda esférico incidente, dada por la expresión

$$LCO = n_o \mathcal{R}_\alpha + n_l \mathcal{R}_l = n_o \mathcal{R}_o, \quad (3.2)$$

donde n_o es el índice de refracción del espacio objeto, n_l es el índice de refracción de la lente, \mathcal{R}_l la distancia que recorre el frente de onda refractado dentro de la lente y \mathcal{R}_o es la distancia que resulta de evaluar la ec. (3.1) en $|\alpha| = \alpha_m$ y que corresponde a la distancia total que debe recorrer el frente de onda esférico, a lo largo del segmento de recta $\overline{P_o S_1(d)}$, para incidir por completo en la lente simple, donde $S_1(d) = [Z_d, d]$ es la ubicación del borde de la lente y cuyas coordenadas se obtienen al evaluar la ec. (2.4) en el semidiametro $d = D/2$.

La ec. (3.2) implica que hemos igualado la longitud de camino óptico que recorre el frente de onda esférico desde P_o hasta P_α con la máxima longitud de camino óptico recorrida por el frente de onda esférico en el espacio objeto. Despejando a \mathcal{R}_l de la ec. (3.2), obtenemos la ecuación que describe a la familia paramétrica de circunferencias centradas en P_α y de radio \mathcal{R}_l , que puede expresarse simplemente como

$$(z - z_\alpha)^2 + (y - y_\alpha)^2 = \frac{n_o^2(\mathcal{R}_o - \mathcal{R}_\alpha)^2}{n_l^2}. \quad (3.3)$$

Analizando la ec. (3.3), es fácil mostrar que el radio de las circunferencias alcanza un máximo cuando $\alpha = 0$ y alcanza un mínimo cuando $|\alpha| = \alpha_m$, como se muestra en la Figura 3.1.

Ahora, con el propósito de obtener las ecuaciones que describan el frente de onda refractado al interior de la lente, calculamos la envolvente de las onduletas, derivando la ec. (3.3) respecto al parámetro α e igualando el resultado a cero, con lo que obtenemos la expresión

$$(z - z_\alpha) \cdot \left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial \alpha} \right] + (y - y_\alpha) \cdot \left[\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} \right] - \frac{n_o^2(\mathcal{R}_o - \mathcal{R}_\alpha)}{n_l^2} \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{R}_\alpha}{\partial \alpha} \right] = 0. \quad (3.4)$$

Finalmente, resolviendo las ecs. (3.3) y (3.4) para z y y , obtenemos

$$Z_{1\mp} = z_\alpha - \frac{n_o(\mathcal{R}_o - \mathcal{R}_\alpha)}{n_l} \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{n_o}{n_l} \right) \left[\frac{\partial \mathcal{R}_\alpha}{\partial \alpha} \right] \cdot \left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial \alpha} \right] \mp \eta_1 \cdot \left[\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} \right]}{\left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} \right]^2} \right\}, \quad (3.5)$$

$$Y_{1\mp} = y_\alpha + \frac{n_o(\mathcal{R}_o - \mathcal{R}_\alpha)}{n_l} \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{n_o}{n_l} \right) \left[\frac{\partial \mathcal{R}_\alpha}{\partial \alpha} \right] \cdot \left[\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} \right] \mp \eta_1 \cdot \left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial \alpha} \right]}{\left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} \right]^2} \right\},$$

donde hemos definido

$$\eta_1 = \sqrt{\left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} \right]^2 - \left(\frac{n_o}{n_l} \right)^2 \left[\frac{\partial \mathcal{R}_\alpha}{\partial \alpha} \right]^2}. \quad (3.6)$$

Adicionalmente, hemos sustituido $\{z, y\} \rightarrow \{Z_{1\mp}, Y_{1\mp}\}$ en la ec. (3.5), donde el subíndice \mp significa que hemos obtenido dos soluciones del cálculo de la envolvente. La solución con los signos $(+, +)$ representa a la superficie envolvente que describe a un frente de onda cuya propagación se da en dirección del semieje negativo \mathbf{Z} y que hemos omitido de nuestro análisis al carecer de

sentido físico. Por otro lado, la solución con signos $(-, -)$ representa al frente de onda refractado al interior de la lente como función del ángulo α , la posición de la fuente puntual s_o y todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción, y que denotamos por $\mathcal{W}_l = \{Z_l, Y_l\}$, como se muestra en la Figura 3.1(b).

Una vez que el frente de onda incidente ha sido completamente refractado al interior de la lente, éste se propaga hasta que uno de sus puntos toca a la superficie S_2 . Para cuantificar este proceso, consideramos un rayo de luz emitido por la fuente puntual y que incide en el borde de la lente simple, para luego ser refractado y propagado al interior hasta intersectar a la superficie S_2 en el punto $P_{\beta_o} = [z_{\beta_o}, y_{\beta_o}]$, cuyas coordenadas se obtienen de seguir el procedimiento descrito en el capítulo 2 y de evaluar a la ec. (2.8) en $\alpha = \alpha_m$. De esta forma, la distancia que debe recorrer el frente de onda \mathcal{W}_l al interior de la lente es igual a la longitud del segmento de recta $\overline{S_1(d)P_{\beta_o}}$. Aplicando el principio de Huygens, consideramos un conjunto de circunferencias centradas en \mathcal{W}_l , de tal forma que la familia paramétrica de onduletas que formará al frente de onda propagado al interior de la lente está dada por

$$(z - Z_l)^2 + (y - Y_l)^2 = \mathcal{L}_o^2, \quad (3.7)$$

donde el radio \mathcal{L}_o es la distancia entre el punto $S_1(d)$ y el punto P_{β_o} y que puede escribirse simplemente como

$$\mathcal{L}_o = \sqrt{(z_{\beta_o} - Z_d)^2 + (y_{\beta_o} - d)^2}. \quad (3.8)$$

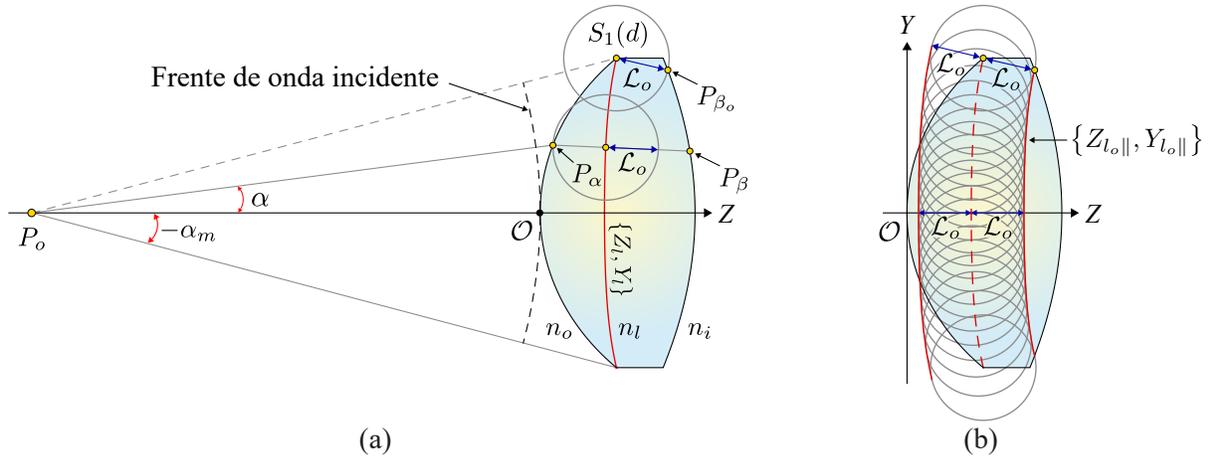


Figura 3.2: (a) Propagación del frente de onda $\{Z_l, Y_l\}$ al interior de la lente simple. (b) Frente de onda incidente sobre la superficie S_2

Es importante señalar que, al tener una lente simple con un índice de refracción constante en todo su interior, el radio de la familia paramétrica de onduletas que formará al frente de onda propagado es constante. Dicho de otra forma, para hallar la ecuación paramétrica del frente de onda que incide en la superficie S_2 , basta con propagar el frente de onda \mathcal{W}_l una distancia \mathcal{L}_o . Para esto, utilizamos el concepto de geometría diferencial conocido como *curvas paralelas* [28], que nos permite obtener las ecuaciones que describen la forma que adquiere una curva paramétrica al ser desplazada una distancia arbitraria [35, 36].

Sea $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}(\tau), \mathcal{G}(\tau)\}$ una curva arbitraria en función del parámetro τ . La ecuación que describe a la curva paralela a \mathcal{C} , ubicada a una distancia L , está dada por

$$\mathcal{C}_{L\parallel} = \left\{ \mathcal{F} \pm s \frac{\left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} \right] \cdot L}{\sqrt{\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} \right]^2 + \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} \right]^2}}, \mathcal{G} \mp \frac{\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} \right] \cdot L}{\sqrt{\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} \right]^2 + \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} \right]^2}} \right\}, \quad (3.9)$$

donde el subíndice $L\parallel$ indica que es la curva paralela a \mathcal{C} al ser propagada una distancia L . Es importante señalar que la ec. (3.9) arroja un par de soluciones en función de la elección de signos: por un lado, considerando la solución correspondiente a $(-, +)$, obtenemos una curva propagada hacia atrás, mientras que la solución $(+, -)$ corresponde a una curva propagada hacia delante. Aplicando este resultado al frente de onda \mathcal{W}_l , obtenemos la ecuación que describe al frente de onda propagado a una distancia \mathcal{L}_o al interior de la lente y que está dada por

$$\mathcal{W}_{l_o\parallel} = \left\{ Z_l + \frac{\left[\frac{\partial Y_l}{\partial \alpha} \right] \cdot \mathcal{L}_o}{\sqrt{\left[\frac{\partial Z_l}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial Y_l}{\partial \alpha} \right]^2}}, Y_l - \frac{\left[\frac{\partial Z_l}{\partial \alpha} \right] \cdot \mathcal{L}_o}{\sqrt{\left[\frac{\partial Z_l}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial Y_l}{\partial \alpha} \right]^2}} \right\}, \quad (3.10)$$

en donde hemos considerado la solución $(+, -)$, es decir, el frente de onda propagado en dirección del semieje positivo \mathbf{Z} y que hemos denotado con el subíndice $l_o \parallel$ que significa frente de onda paralelo, propagado a una distancia \mathcal{L}_o . Es importante señalar que el frente de onda $\mathcal{W}_{l_o\parallel} = \{Z_{l_o\parallel}, Y_{l_o\parallel}\}$ está dado en función de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción, como se muestra en la Figura 3.2.

El siguiente paso en el estudio del proceso de refracción de un frente de onda esférico incidente en una lente simple, consiste en hallar las ecuaciones que describen a la envolvente de la familia de onduletas centradas en la superficie S_2 y que forman al primer frente de onda refractado al exterior de la lente simple, es decir, el frente de onda refractado de fase cero. Para esto, definimos a \mathcal{L}_l como la distancia que recorre el frente de onda $\mathcal{W}_{l_o\parallel}$ a lo largo del segmento de recta $\overline{P_\alpha P_\beta}$ hasta un punto de incidencia arbitrario $P_\beta = [z_\beta, y_\beta]$, ubicado sobre la superficie S_2 y cuyas coordenadas están dadas por la ec. (2.8). De lo anterior, \mathcal{L}_l puede escribirse simplemente como

$$\mathcal{L}_l = \sqrt{(z_\beta - Z_{l_o\parallel})^2 + (y_\beta - Y_{l_o\parallel})^2}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, consideramos la longitud de camino óptico recorrida por el frente de onda $\mathcal{W}_{l_o\parallel}$, dada por la expresión

$$LCO = n_l \mathcal{L}_l + n_i \mathcal{R}_i = n_l \mathcal{L}_t, \quad (3.12)$$

donde n_i es índice de refracción del espacio imagen, \mathcal{R}_i es la distancia que recorre el frente de onda al exterior de la lente y \mathcal{L}_t es la distancia que resulta de evaluar la ec. (3.11) en $\alpha = 0$. Es importante señalar que \mathcal{L}_t es la distancia total que debe recorrer el frente de onda $\mathcal{W}_{l_o\parallel}$, a lo largo del eje óptico, para salir por completo de la lente simple y que puede expresarse simplemente como

$$\mathcal{L}_t = t - Z_{l_o\parallel}(0), \quad (3.13)$$

donde t es el espesor central de la lente y $Z_{l_o\parallel}(0)$ es la componente horizontal del frente de onda $\mathcal{W}_{l_o\parallel}$, evaluada en $\alpha = 0$, como se muestra en la Figura 3.3 (a).

La ec. (3.12) implica que hemos igualado la longitud de camino óptico que recorre el frente de onda propagado al interior de la lente simple desde un punto sobre $\mathcal{W}_{l_o\parallel}$ hasta P_β con la máxima longitud de camino óptico requerida para que el frente de onda refractado y propagado salga por completo de la lente. Despejando \mathcal{R}_i de la ec. (3.12), podemos escribir la ecuación de la familia paramétrica de onduletas que formarán al frente de onda refractado de fase cero como

$$(z - z_\beta)^2 + (y - y_\beta)^2 = \frac{n_l^2 (\mathcal{L}_t - \mathcal{L}_l)^2}{n_i^2}. \quad (3.14)$$

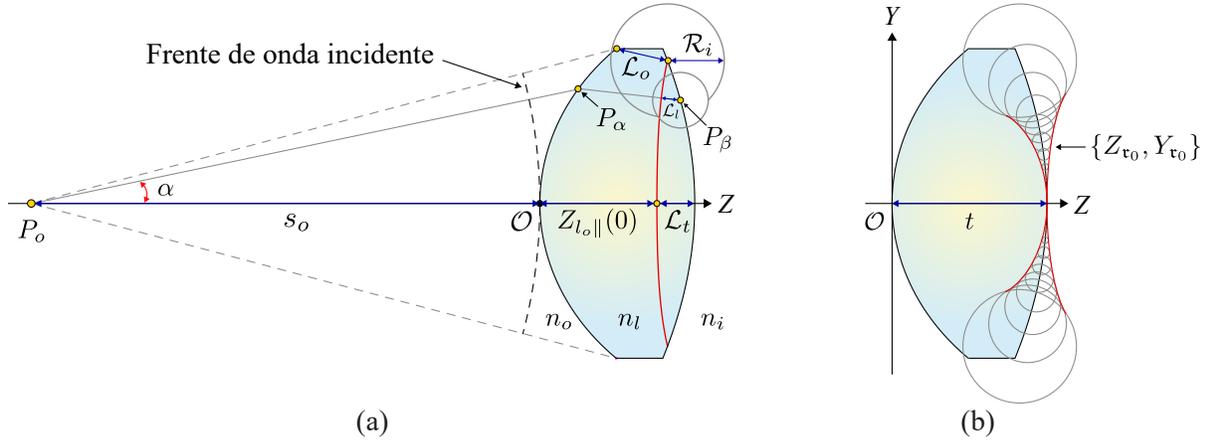


Figura 3.3: (a) Frente de onda $\{Z_{l_o\parallel}, Y_{l_o\parallel}\}$ incidiendo sobre la superficie S_2 . (b) Frente de onda de fase cero refractado al exterior de la lente simple.

Con el propósito de obtener las ecuaciones que describan al frente de onda refractado de fase cero, calculamos la envolvente derivando la ec. (3.14) con respecto al parámetro α , igualamos a cero y simplificamos, con lo que obtenemos la siguiente expresión

$$(z - z_\beta) \cdot \left[\frac{\partial z_\beta}{\partial \alpha} \right] + (y - y_\beta) \cdot \left[\frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha} \right] - \frac{n_l^2 (\mathcal{L}_t - \mathcal{L}_l)^2}{n_i^2} \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \alpha} \right] = 0. \quad (3.15)$$

Finalmente, resolviendo las ecs. (3.14) y (3.15) para z y y , obtenemos

$$Z_{2\mp} = z_\beta + \frac{n_l (\mathcal{L}_t - \mathcal{L}_l)}{n_i} \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{n_l}{n_i} \right) \left[\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \alpha} \right] \cdot \left[\frac{\partial z_\beta}{\partial \alpha} \right] \mp \eta_2 \cdot \left[\frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha} \right]}{\left[\frac{\partial z_\beta}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha} \right]^2} \right\}, \quad (3.16)$$

$$Y_{2\mp} = y_\beta + \frac{n_l (\mathcal{L}_t - \mathcal{L}_l)}{n_i} \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{n_l}{n_i} \right) \left[\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \alpha} \right] \cdot \left[\frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha} \right] \mp \eta_2 \cdot \left[\frac{\partial z_\beta}{\partial \alpha} \right]}{\left[\frac{\partial z_\beta}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[\frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha} \right]^2} \right\},$$

donde hemos definido

$$\eta_2 = \sqrt{\left[\frac{\partial z_\beta}{\partial \alpha}\right]^2 + \left[\frac{\partial y_\beta}{\partial \alpha}\right]^2 - \left(\frac{n_l}{n_i}\right)^2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \alpha}\right]^2}. \quad (3.17)$$

Adicionalmente, hemos sustituido $\{z, y\} \rightarrow \{Z_{2\mp}, Y_{2\mp}\}$ en la ec. (3.16), donde el subíndice (\mp) significa que hemos obtenido dos soluciones del cálculo de la envolvente. Nuevamente, despreciamos la solución correspondiente a los signos $(+, +)$, cuya propagación se da en dirección del semieje negativo \mathbf{Z} , por carecer de sentido físico. Por otro lado, la solución dada por los signos $(-, -)$, representa el frente de onda refractado de fase cero, denotado simplemente como $\mathcal{W}_{\tau_0} = \{Z_{\tau_0}, Y_{\tau_0}\}$, como se muestra en la Figura 3.3, y que es función de α , la posición de la fuente puntual s_o y todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción.

Finalmente, la Figura 3.4 muestra de manera esquemática al frente de onda refractado por una lente simple, considerando un frente de onda esférico proveniente de una fuente puntual colocada a lo largo del eje óptico, para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$.

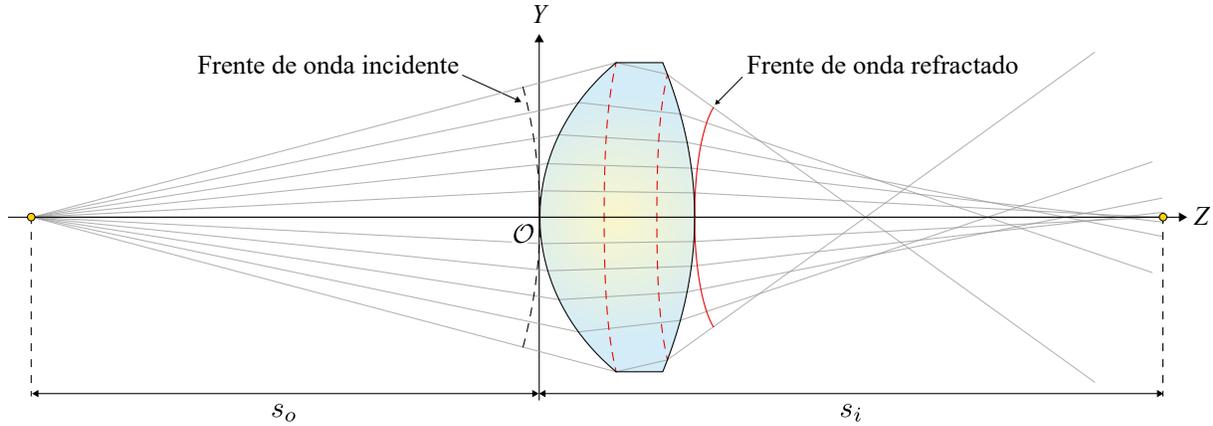


Figura 3.4: Frente de onda refractado por una lente simple, considerando un frente de onda esférico incidente para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$.

3.2. Frente de onda refractado por teorema de Malus-Dupin

Definimos como congruencia al sistema de rayos de luz originados desde una fuente común. Una congruencia que se propaga dentro de un medio isotrópico es perpendicular al frente de onda. De acuerdo a lo establecido en el teorema de Malus-Dupin, un frente de onda que se propaga en un medio uniforme, es normal a la congruencia de rayos en todo punto y esta propiedad se conserva después de cualquier número de reflexiones o refracciones [37].

En el capítulo 2 de este trabajo hemos realizado un estudio de la superficie cáustica formada por una lente simple al considerar una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico. Para ello, hemos definido a la superficie cáustica como el lugar geométrico formado por los principales centros de curvatura del frente de onda. Dicho de otra forma, la superficie cáustica es la *evoluta* del frente de onda refractado de fase cero y, a su vez, el frente de

onda refractado es la *involuta* de la superficie cáustica. En esta sección, calculamos el frente de onda refractado de fase cero a partir de la superficie cáustica, mediante el concepto geométrico de involuta.

Matemáticamente, si una curva \mathcal{A} es la involuta de la curva \mathcal{B} , entonces \mathcal{B} es la evoluta de \mathcal{A} , y viceversa. Ahora, sea \mathcal{C} una curva paramétrica tal que $\mathcal{C} = \{f(\tau), g(\tau)\}$, cuya involuta está dada por la ecuación

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \{f, g\} - \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \{f, g\}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)^2}} \right] \cdot \int \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)^2} d\tau, \quad (3.18)$$

donde, por simplicidad, hemos considerado nula a la constante de integración.

Ahora, consideramos a la superficie cáustica $\{Z_{c_{oi}}, Y_{c_{oi}}\}$, cuyas componentes están dadas por la ec. (2.14) y que son función del ángulo α , la posición de la fuente puntual s_o y todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción. De esta manera, calculando la involuta de la superficie cáustica [38, 39], el frente de onda refractado de fase cero \mathcal{W}_{τ_0} está dado por la expresión

$$\{Z_{\tau_0}, Y_{\tau_0}\} = \{Z_{c_{oi}}, Y_{c_{oi}}\} - \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \{Z_{c_{oi}}, Y_{c_{oi}}\}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z_{c_{oi}}}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_{c_{oi}}}{\partial \alpha}\right)^2}} \right] \cdot \int \sqrt{\left(\frac{\partial Z_{c_{oi}}}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_{c_{oi}}}{\partial \alpha}\right)^2} d\alpha. \quad (3.19)$$

Claramente, el frente de onda refractado de fase cero obtenido mediante el cálculo de la involuta también es función del ángulo α , la posición de la fuente puntual s_o y todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción. Para el caso más general de la superficie cáustica por refracción, la ec. (3.19) resulta muy complicada de integrar de forma exacta. Sin embargo, es posible obtener el frente de onda de fase cero implementando métodos numéricos o integrando una aproximación polinómica de la superficie cáustica, como haremos más adelante para el caso de la aproximación por series de Taylor a tercer orden.

Por otro lado, consideramos un frente de onda refractado esférico, descrito por el segmento de circunferencia centrado en el punto imagen $P_i = [s_i, 0]$ y de radio $\rho = s_i - t$, definido como la distancia entre el vértice de la superficie S_2 de la lente simple y la imagen paraxial. En el caso ideal en el que el frente de onda refractado de fase cero coincide con el frente de onda esférico, la lente bajo estudio es una lente perfecta. En caso contrario, la forma que adquiere el frente de onda estará afectada por las aberraciones introducidas por la lente simple. Finalmente, la Figura 3.5 muestra de manera esquemática al frente de onda refractado de fase cero, al frente de onda refractado esférico y a la superficie cáustica de una lente simple, considerando una fuente puntual colocada a lo largo del eje óptico, para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$.

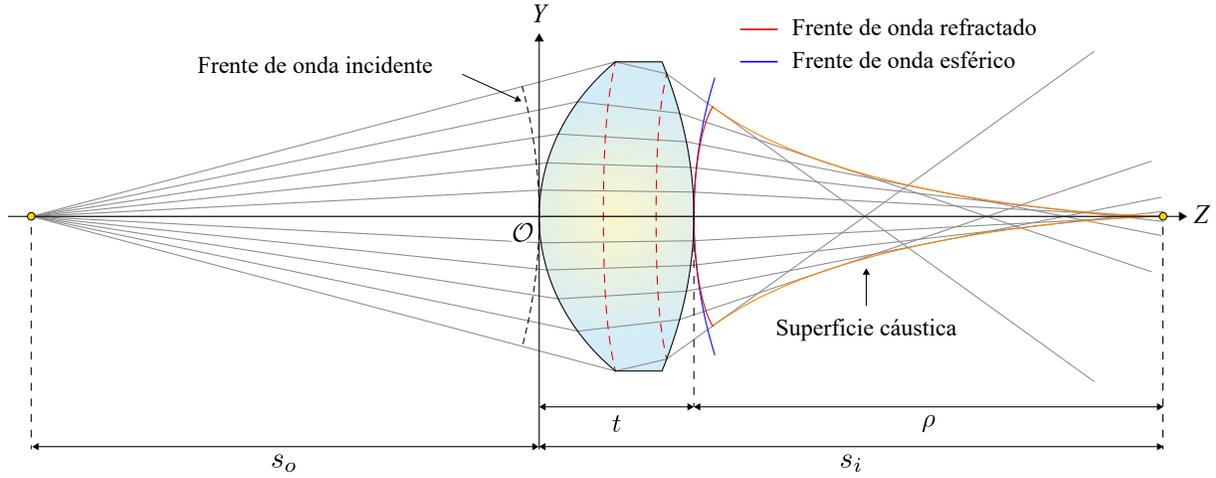


Figura 3.5: Frente de onda refractado esférico, frente de onda refractado de fase cero y superficie cáustica de una lente simple, considerando un frente de onda esférico incidente para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$.

3.3. Propagación del frente de onda de fase cero.

Conocer la forma exacta que toma un frente de onda propagado por un sistema óptico es de gran importancia en el desarrollo de experimentos de alta precisión. Habiendo obtenido el frente de onda refractado de fase cero, ahora estudiamos la forma que adquiere el frente de onda a distancias arbitrarias una vez que éste ha salido por completo de la lente simple. Para esto, retomamos lo estudiado en la subsección 3.1, donde hemos utilizado el concepto de curvas paralelas para estudiar la propagación del frente de onda al interior de la lente.

Aplicando el resultado de la ec. (3.9) para propagar al frente de onda \mathcal{W}_{τ_0} , consideramos una distancia L en el espacio imagen, medida desde el vértice de la superficie S_2 de la lente simple, tal que las curvas paralelas al frente de onda de fase cero están dadas por la expresión

$$\{Z_{\tau_{L\parallel}}, Y_{\tau_{L\parallel}}\} = \left\{ Z_{\tau_0} + \frac{\left[\frac{\partial Y_{\tau_0}}{\partial \alpha}\right] \cdot L}{\sqrt{\left[\frac{\partial Z_{\tau_0}}{\partial \alpha}\right]^2 + \left[\frac{\partial Y_{\tau_0}}{\partial \alpha}\right]^2}}, Y_{\tau_0} - \frac{\left[\frac{\partial Z_{\tau_0}}{\partial \alpha}\right] \cdot L}{\sqrt{\left[\frac{\partial Z_{\tau_0}}{\partial \alpha}\right]^2 + \left[\frac{\partial Y_{\tau_0}}{\partial \alpha}\right]^2}} \right\}. \quad (3.20)$$

donde hemos sustituido $\tau_0 \rightarrow \tau_{L\parallel}$, que significa frente de onda de fase cero propagado una distancia L , y donde hemos considerado únicamente a la solución con los signos $(+, -)$ que corresponde a las curvas paralelas que se propagan en la dirección del semieje positivo \mathbf{Z} .

Es importante señalar que el frente de onda refractado y propagado al exterior de la lente simple, conserva la dependencia de los parámetros α , s_o y los parámetros de diseño de la lente, además de ser función de la distancia L . De la ec. (3.20) es claro que al ser evaluada en $L = 0$, recuperamos el frente de onda de fase cero. Por otro lado, si evaluamos la componente horizontal $Z_{\tau_{L\parallel}}$ en $\alpha = 0$, obtenemos $Z_{\tau_{L\parallel}}(0) = t + L$, que corresponde a la posición sobre el eje óptico del frente de

onda paralelo, medida desde el origen de nuestro sistema de referencia. Finalmente, la Figura 3.6 muestra los parámetros involucrados en la propagación del frente de onda de fase cero a distancias arbitrarias.

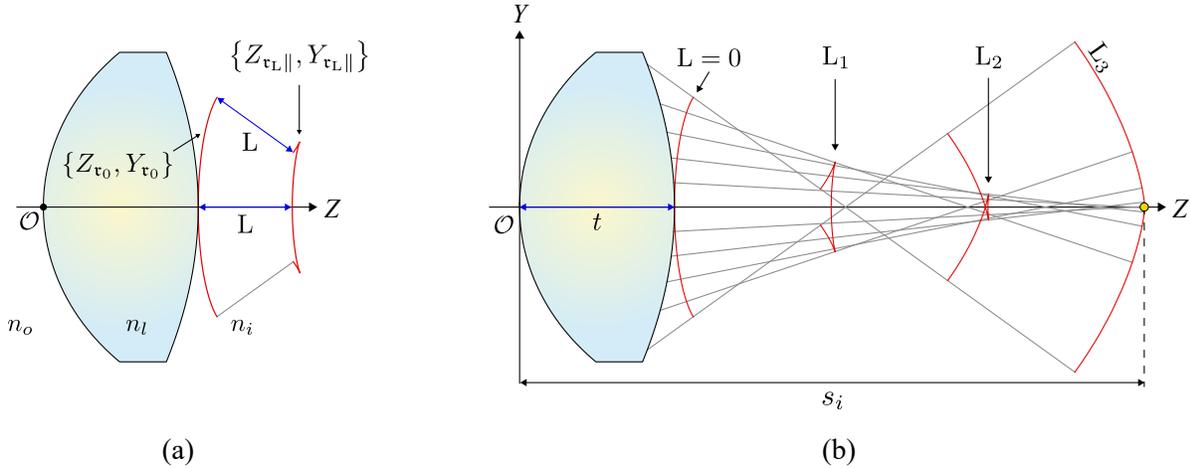


Figura 3.6: (a) Parámetros involucrados en la propagación del frente de onda refractado de fase cero. (b) Frente de onda refractado de fase cero propagado a distancias arbitrarias.

3.4. Aproximaciones al frente de onda refractado

En óptica es muy común limitarse al estudio del comportamiento de la luz en la región paraxial, es decir, en una región muy cercana al eje óptico, lo que implica que se consideran únicamente alturas de incidencia pequeñas o, para el caso de este trabajo, ángulos de emisión pequeños. Hasta ahora hemos realizado el estudio del frente de onda mediante ecuaciones analíticas exactas que, por su complejidad, son difíciles de manipular. Con el propósito de obtener expresiones más sencillas que permitan extraer información física del frente de onda, realizamos aproximaciones mediante una expansión en series de Taylor a segundo orden y mediante el cálculo de la involuta, considerando la aproximación a la superficie cáustica obtenida en el capítulo 2.

Inicialmente, realizamos una expansión en series de Taylor a segundo orden del frente de onda refractado y propagado a distancias arbitrarias dado por la ec. (3.20), en función del parámetro α y en una vecindad de $\alpha = 0$, con lo que obtenemos

$$\{Z_{\tau L}, Y_{\tau L}\} \approx \left\{ (t + L) + \frac{1}{2}(\rho - L)\alpha^2, \quad (\rho - L)\alpha \right\}. \quad (3.21)$$

De esta forma, la ec. (3.21) queda expresada en función de la distancia L , medida desde el frente de onda refractado de fase cero, del radio del frente de onda refractado esférico ρ , del espesor t de la lente simple y del parámetro α . Adicionalmente, se hace notar que este resultado no depende de las constantes de conicidad de la lente simple. Es importante mencionar que, mientras que la óptica paraxial propone un frente de onda esférico para aproximar al frente de onda refractado, el resultado aquí obtenido corresponde a un frente de onda refractado descrito por una parábola. Finalmente, la Figura 3.7 muestra esquemáticamente a la aproximación parabólica del frente

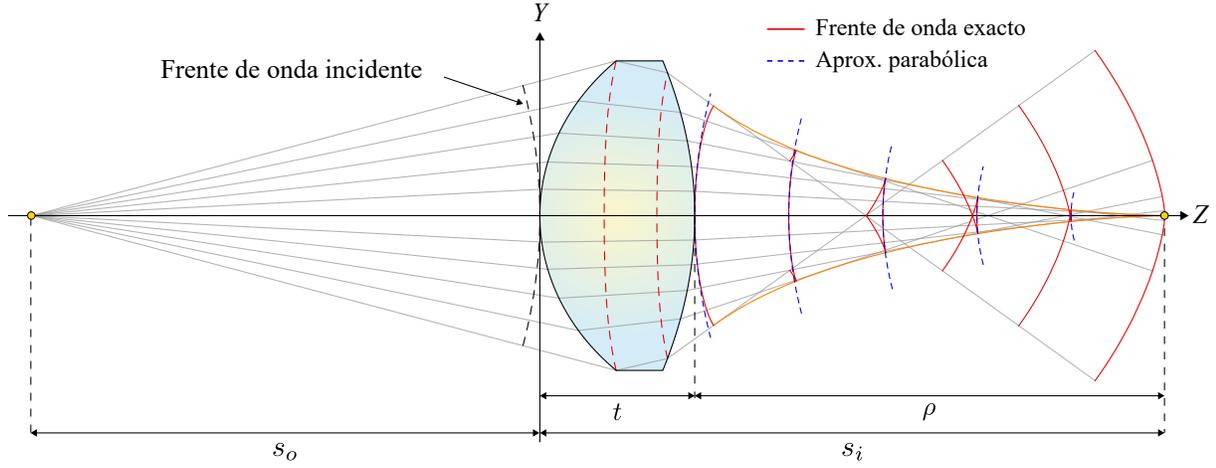


Figura 3.7: Aproximación parabólica del frente de onda refractado de fase cero y del frente de onda propagado al exterior de la lente.

de onda refractado de fase cero y su propagación a distancias arbitrarias a lo largo del eje óptico.

En otro orden de ideas, en la subsección 3.2 recuperamos el frente de onda refractado de fase cero mediante el cálculo de la involuta de la superficie cáustica por refracción formada por la lente simple bajo estudio. Ahora, obtenemos un segundo tipo de aproximación al frente de onda refractado calculando la involuta de la aproximación por series de Taylor a tercer orden de la superficie cáustica. Para esto, aplicamos el resultado de la ec. (3.18) a $\{Z_{c_3}, Y_{c_3}\}$, dados por la ec. (2.22), con lo que obtenemos simplemente

$$\{Z_{\tau_{0i}}, Y_{\tau_{0i}}\} = \left\{ s_i + G_3 \left[\frac{2n_i^2 - P_T^2 (f fl - s_o)^2 \alpha^2}{2n_i n_l^4 P_T^4 (f fl - s_o)^4} \right], -\frac{G_3 \cdot \alpha}{n_l^4 P_T^3 (f fl - s_o)^3} \right\}, \quad (3.22)$$

donde hemos sustituido el subíndice $\tau_0 \rightarrow \tau_{0i}$ que significa frente de onda de fase cero aproximado por la involuta. En este caso, la aproximación obtenida está dada en función de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción, del ángulo α y del coeficiente G_3 , dado por la ec. (2.23), y que está asociado directamente con la aberración esférica introducida por la lente simple.

Una vez obtenida la aproximación del frente de onda refractado de fase cero mediante el cálculo de la involuta, ahora estudiamos su propagación a lo largo del eje óptico aplicando nuevamente el concepto de curvas paralelas. Para esto, derivamos $\{Z_{\tau_{0i}}, Y_{\tau_{0i}}\}$ respecto al parámetro α y simplificamos, con lo que obtenemos las expresiones

$$\left[\frac{\partial Z_{\tau_{0i}}}{\partial \alpha} \right] = -\frac{G_3 \cdot \alpha}{n_i n_l^4 P_T^2 (f fl - s_o)^2}, \quad \left[\frac{\partial Y_{\tau_{0i}}}{\partial \alpha} \right] = -\frac{G_3}{n_l^4 P_T^3 (f fl - s_o)^3}. \quad (3.23)$$

Finalmente, sustituyendo las ecs. (3.22) y (3.23) en la ec. (3.9) y simplificando, obtenemos

$$\{Z_{\tau_{L||}}, Y_{\tau_{L||}}\} \approx \left\{ Z_{\tau_{0i}} + \frac{n_i \cdot L}{\sqrt{n_i^2 + P_T^2 (f fl - s_o)^2 \alpha^2}}, Y_{\tau_{0i}} - \frac{P_T (f fl - s_o) \alpha \cdot L}{\sqrt{n_i^2 + P_T^2 (f fl - s_o)^2 \alpha^2}} \right\}. \quad (3.24)$$

Es importante señalar que la ec. (3.24) es función de todos los parámetros de diseño de la lente simple, la posición de la fuente puntual s_o y el ángulo α , además del coeficiente G_3 .

Por último, la Figura 3.8 presenta de manera esquemática a la aproximación mediante la involuta del frente de onda refractado de fase cero y su propagación a lo largo del eje óptico a distancias arbitrarias.

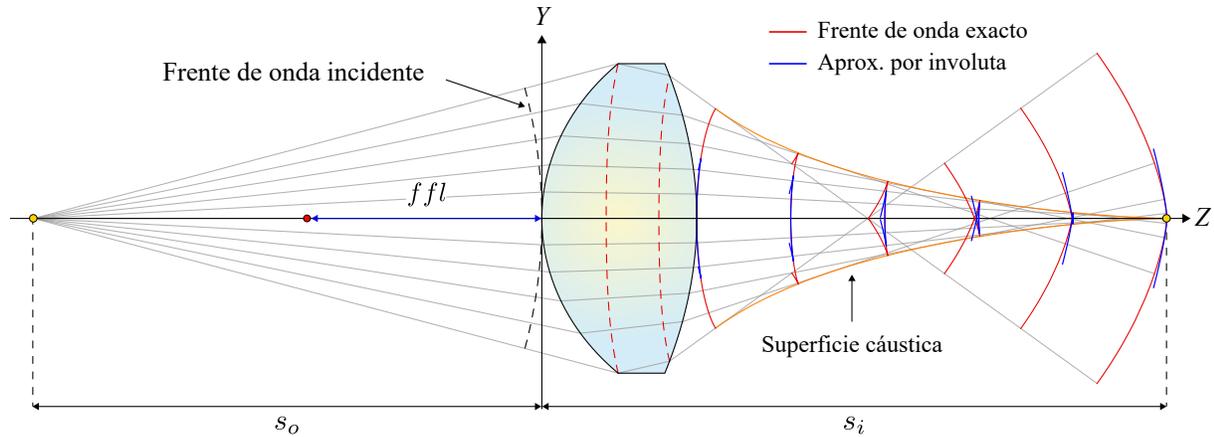


Figura 3.8: Aproximación por involuta del frente de onda refractado de fase cero y del frente de onda propagado al exterior de la lente.

3.5. Ejemplos

Para ejemplificar la teoría desarrollada en este capítulo, presentamos los frentes de onda refractados y propagados a distancias arbitrarias para una lente biconvexa cónica con parámetros de diseño $R_1 = 6\text{mm}$, $R_2 = -12\text{mm}$, $t = 5\text{mm}$, $D = 10\text{mm}$, $k_1 = -0.25$, $k_2 = -1.25$, $n_o = n_i = 1$ y $n_l = 1.5$. Inicialmente, consideramos una fuente puntual colocada a una distancia $s_o = -16.408$ mm, cuya imagen paraxial se ubica a una distancia $s_i = 20.184$ mm, medidas desde el origen de nuestro sistema de referencia. De lo anterior, el radio correspondiente al frente de onda refractado esférico para una lente dispuesta en esta configuración tiene un valor de $\rho = 15.184$ mm.

Para el caso de una lente positiva, como es en el caso de la lente simple bajo estudio, el frente de onda refractado presenta un perfil cóncavo y que va cambiando conforme se propaga en dirección de la imagen paraxial hasta tomar un perfil completamente convexo. Es importante destacar que los frentes de onda refractados producidos por la lente simple en la configuración bajo estudio presentan aberración esférica. Finalmente, la Figura 3.9 muestra al frente de onda refractado por la lente simple y los frentes de onda propagados a distancias fraccionarias de ρ .

A continuación, consideramos los frentes de onda refractados y propagados por la lente simple descrita en el ejemplo anterior, cambiando únicamente la posición de la fuente puntual de tal forma que la distancia objeto coincide con la distancia focal frontal, es decir, $s_o = f fl = -7.592$ mm. En este caso, la distancia imagen y el radio ρ tienden a infinito por lo que los frentes de onda presentan un perfil plano en la región delimitada por la cáustica, como se muestra en la

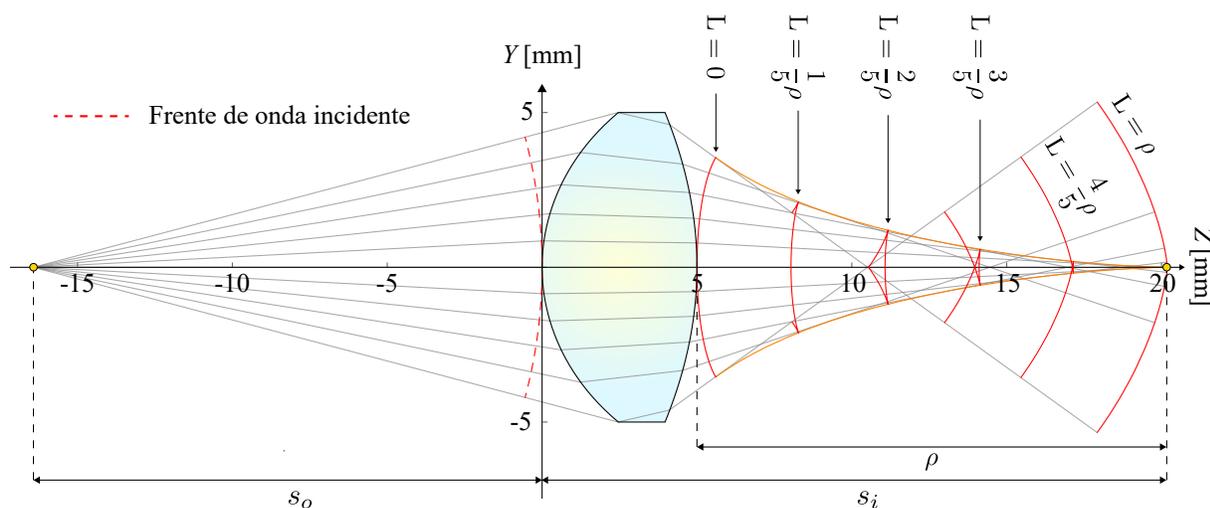


Figura 3.9: Frentes de onda propagados de una lente biconvexa cónica positiva, para el caso de una fuente puntual colocada en $s_o = -16.408$ mm.

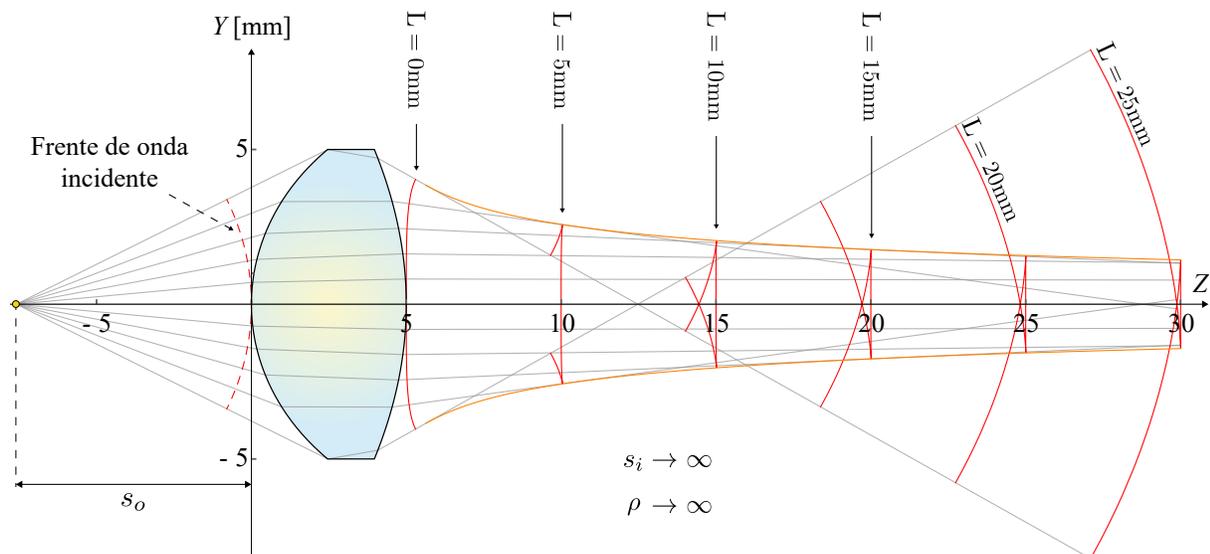


Figura 3.10: Frentes de onda propagados de una lente biconvexa cónica positiva, para el caso de una fuente puntual colocada en $s_o = fl$.

Figura 3.10 y donde la separación entre frentes de onda es de $\Delta L = 5$ mm.

Finalmente, presentamos como ejemplo a un óvalo cartesiano con las características discutidas en el capítulo 2. Para esto, consideramos una lente simple con los parámetros de diseño $R_1 = 6$ mm, $R_2 = -6$ mm, $t = 5$ mm, $D = 10$ mm, $n_o = n_i = 1$, $n_l = 1.5$ y $k_1 = k_2 = -2.25$. En este caso, la fuente puntual es colocada a una distancia equivalente a dos veces la distancia focal efectiva, medida desde el plano principal primario, de tal forma que $s_o = S_o + P_p = -12$ mm y la respectiva imagen paraxial queda ubicada a una distancia $s_i = S_i + P_s = 17$ mm. Como se

muestra en la Figura 3.11, el frente de onda refractado y propagado a una distancia equivalente al radio $\rho = 12$ mm, converge en un solo punto que coincide con la imagen paraxial formada por esta lente. De lo anterior, se establece que la correspondencia entre el frente de onda refractado y un frente de onda esférico centrado en la imagen paraxial es perfecta, por lo que la lente simple está libre de aberración esférica.

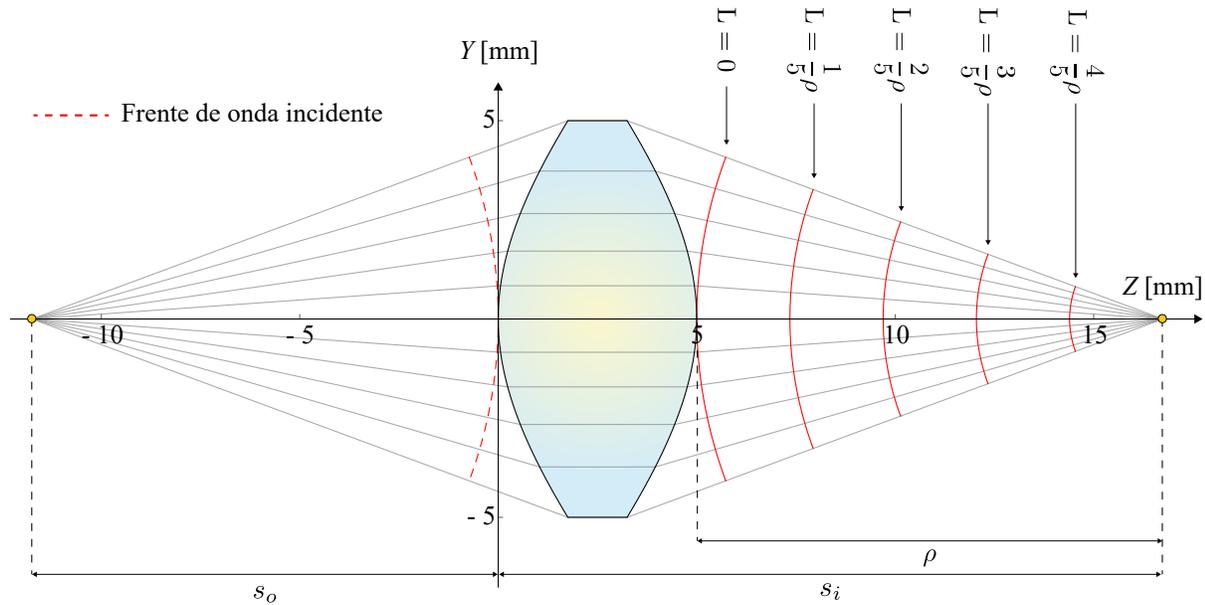


Figura 3.11: Frentes de onda propagados de un óvalo cartesiano.

Capítulo 4

Corrección de la curvatura de campo a tercer orden

Se conoce como *curvatura de campo* o *curvatura de Petzval* a la aberración monocromática asociada a la curvatura de la imagen formada a través de un sistema óptico de un objeto plano y perpendicular al eje óptico [18]. Actualmente, existen diversos métodos que permiten corregir la curvatura de campo mediante la utilización de aplanadores de campo, meniscos positivos, combinaciones de lentes positivas y negativas, e, incluso, con sistemas refractores con índices de refracción variables o negativos [40].

En el estudio de la formación de imagen, un concepto de gran importancia son las superficies principales. Estas superficies están definidas como el lugar geométrico donde se localizan los puntos de intersección entre los rayos de luz incidentes y los rayos refractados por una lente simple [18]. En este trabajo, recuperamos las ecuaciones exactas de las superficies principales de una lente simple, siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en [22, 23] y realizamos una aproximación por series de Taylor a segundo orden de las superficies principales.

Por otro lado, realizamos el trazo de rayos para la formación de imagen a través de una lente simple, considerando el concepto de parábolas principales que permita cuantificar la curvatura de la imagen en función de los parámetros de diseño de la lente bajo estudio. Finalmente, proponemos un método para la corrección de la curvatura de campo a tercer orden en un doblete separado conformado por lentes simples, en función de las propiedades de las parábolas principales.

4.1. Parábolas principales de una lente simple

Con el propósito de hallar las ecuaciones exactas de las superficies principales de una lente simple, consideramos un haz de rayos de luz propagándose paralelos al eje óptico, que provienen de una fuente puntual ubicada en menos infinito y que inciden sobre la superficie S_1 de la lente simple. Posteriormente, los rayos de luz son refractados y propagados al interior de la lente hasta alcanzar a la superficie S_2 , donde son refractados nuevamente y propagados al exterior de la lente simple. Para hallar la familia paramétrica de rectas que describen a los rayos refractados por la lente simple, consideramos la ecuación que describe a los rayos de luz incidente sobre la superficie S_1 , dada por la ec. (2.2) y calculamos su límite cuando la posición de la fuente a lo largo del eje óptico, s_o , tiende a menos infinito. De esta forma, la ecuación de los rayos incidentes queda dada por

$$\lim_{s_o \rightarrow -\infty} y = h, \quad (4.1)$$

donde h es la altura a la que inciden los rayos de luz sobre la lente simple y cuyo ángulo de emisión es $\alpha = 0$, ambos medidos desde el eje óptico. De esta forma, la ec. (4.1) describe a un conjunto de rayos que se propagan paralelos al eje óptico y que están dados únicamente en función del parámetro h . Adicionalmente, podemos escribir las coordenadas del punto de incidencia sobre S_1 , $P_\alpha = [z_\alpha, y_\alpha]$, como

$$z_\alpha(h) = \frac{c_1 h^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_1) h^2 c_1^2}}, \quad y_\alpha(h) = h. \quad (4.2)$$

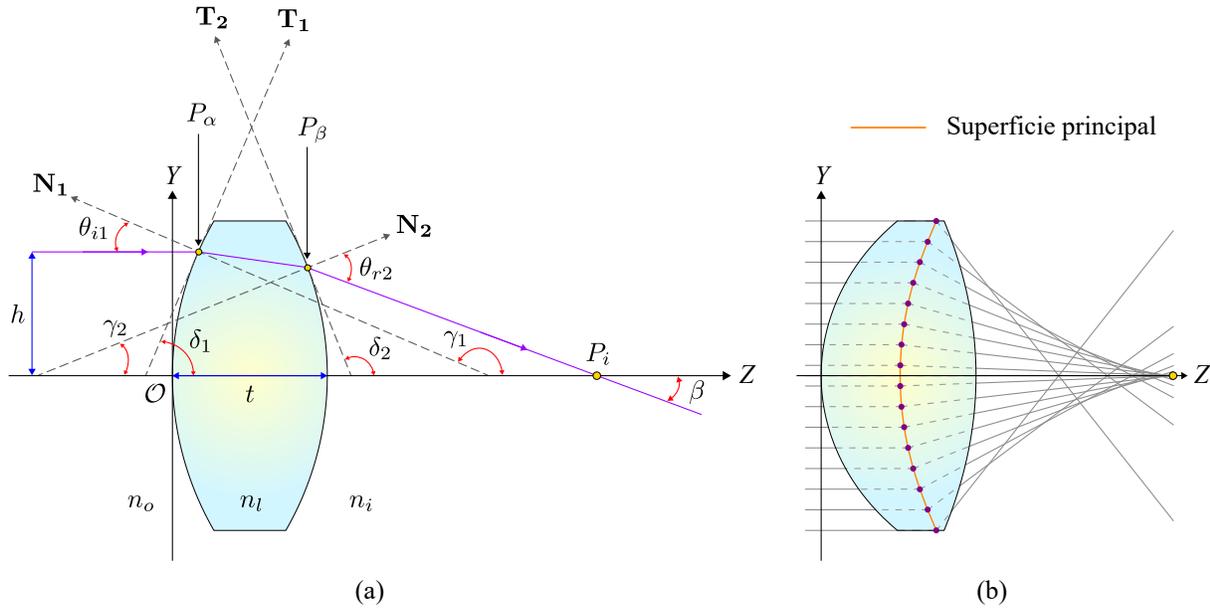


Figura 4.1: (a) Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando un frente de onda plano incidente, para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$. (b) Formación de la superficie principal secundaria \mathcal{S}_s .

Finalmente, de acuerdo a la geometría mostrada en la Figura 4.1 (a), y realizando las sustituciones pertinentes, podemos expresar a la familia paramétrica de rayos refractado por la lente simple en función del parámetro h de la siguiente forma

$$y(h) = y_\beta(h) - \tan[\beta(h)] \cdot [z - z_\beta(h)]. \quad (4.3)$$

Una vez obtenida la ecuación que describe a los rayos refractados por la lente simple, obtenemos la ecuación de la superficie principal secundaria, \mathcal{S}_s , al encontrar el lugar geométrico en el que se ubican los puntos de intersección entre los rayos incidentes y los rayos refractados, como se muestra en la Figura 4.1 (b). Igualando las ecs. (4.1) y (4.3) y resolviendo para z , la ecuación que describe a la superficie principal secundaria está dada como

$$\mathcal{S}_s(h) = \left\{ z_\beta(h) + \frac{h - y_\beta(h)}{\tan[\beta(h)]}, h \right\}. \quad (4.4)$$

Es importante señalar que la ec. (4.4) es función de h y de todos los parámetros de diseño de la lente simple. Además, estos cálculos se han realizado en un plano meridional y la superficie principal presenta simetría de revolución alrededor del eje óptico.

Una de la principales aportaciones de este trabajo es la de proponer un trazo de rayos para la formación de imagen a través de una lente simple, considerando parábolas principales en lugar de planos principales, como ocurre en la teoría paraxial [17, 18]. Con este propósito, realizamos una aproximación por series de Taylor a segundo orden de \mathcal{S}_s , considerando a $c_1 h < 1$ y $c_2 h < 1$, con lo que obtenemos la expresión

$$\mathcal{P}_s(h) = \{P_s + \lambda_1 h^2, h\}, \quad (4.5)$$

donde P_s ha sido definido en la ec. (2.17) y el término λ_1 es un polinomio de orden 4, en función del espesor t de la lente simple, expresado como

$$\lambda_1 = \frac{1}{2 n_i n_l^4 P_T^2} \cdot (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4), \quad (4.6)$$

y cuyos coeficientes están dados de por

$$\begin{aligned} a_0 &= n_i n_l^3 [c_2^3 (n_i - n_l)^2 n_l - c_1 c_2^2 (n_i^2 - 3n_i n_l + 2n_l^2)(n_l - n_o) \\ &\quad + c_1^3 n_i (n_l - n_o)^2 + c_1^2 c_2 (n_i - n_l)(n_l - n_o)(n_i - n_l + n_o)], \\ a_1 &= -c_1 n_l (n_i - n_l)(n_l - n_o) \{-c_2^3 n_l^2 [n_i^2 (-3 + k_2) + 3n_i n_l + n_l^2] \\ &\quad + c_1 c_2^2 n_l (-2n_i^2 + 5n_i n_l + 3n_l^2)(n_l - n_o) + c_1^3 (n_l - n_o)^3 (n_i + n_l) \\ &\quad + c_1^2 c_2 [-3n_i n_l (n_l - n_o)^2 - 3n_l^2 (n_l - n_o)^2 + n_i^2 (-n_l n_o + n_l^2 (1 + k_1) + n_o^2)]\}, \\ a_2 &= -c_1^2 c_2 n_l (n_i - n_l)(n_l - n_o)^2 \{3c_2^2 n_l [n_i^2 (k_2 - 1) + n_i n_l + n_l^2] \\ &\quad + c_1 c_2 (n_l - n_o)(n_i^2 - 4n_i n_l - 6n_l^2) + c_1^2 (n_l - n_o)^2 (2n_i + 3n_l)\}, \\ a_3 &= c_1^3 c_2^2 n_l (n_i - n_l)(n_l - n_o)^3 \{c_2 [n_i^2 (3k_2 - 1) + n_i n_l + 3n_l^2] - c_1 (n_l - n_o)(n_i + 3n_l)\}, \\ a_4 &= -c_1^4 c_2^3 (n_i - n_l)(n_l - n_o)^4 (n_l^2 + k_2 n_i^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

De esta forma, la ec. (4.5) representa a una parábola cuyo vértice está ubicado en el punto principal $H_s = [P_s, 0]$ y que está dada en función de h y de todos los parámetros de diseño de

la lente simple. Finalmente, la Figura 4.2 muestra a la superficie principal secundaria exacta, su aproximación parabólica y el plano principal secundario de la lente simple bajo estudio.

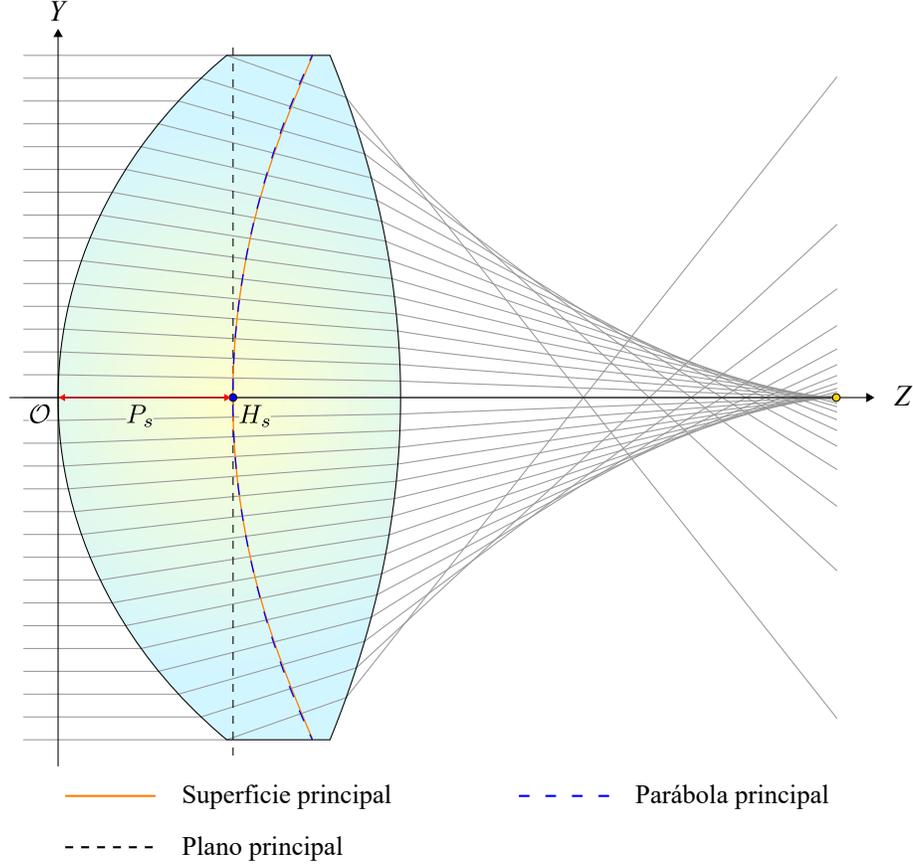


Figura 4.2: Superficie principal secundaria exacta, aproximación parabólica y plano principal secundario de una lente simple.

Ahora, continuando nuestro estudio de las superficies principales, y de manera análoga al procedimiento que hemos realizado para obtener la ec. (4.3), consideramos un frente de onda plano propagándose de derecha a izquierda, desde una fuente puntual colocada en infinito, y que incide en la superficie S_2 , en el punto $P'_\alpha = [z'_\alpha, y'_\alpha]$. De igual forma al caso anterior, la ec. (4.1) describe a los rayos incidente sobre la lente simple, por lo que las coordenadas del punto P'_α están dadas por la expresión

$$z'_\alpha(h) = t + \frac{c_2 h^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_2) h^2 c_2^2}}, \quad y'_\alpha(h) = h. \quad (4.8)$$

Considerando la geometría mostrada en la Figura 4.3 (a), y haciendo las sustituciones pertinentes, la ecuación que describe a los rayos refractados por la lente simple, considerando una fuente puntual colocada en infinito, está dada por la expresión

$$y(h) = y'_\beta(h) - \tan [\beta'(h)] \cdot [z - z'_\beta(h)]. \quad (4.9)$$

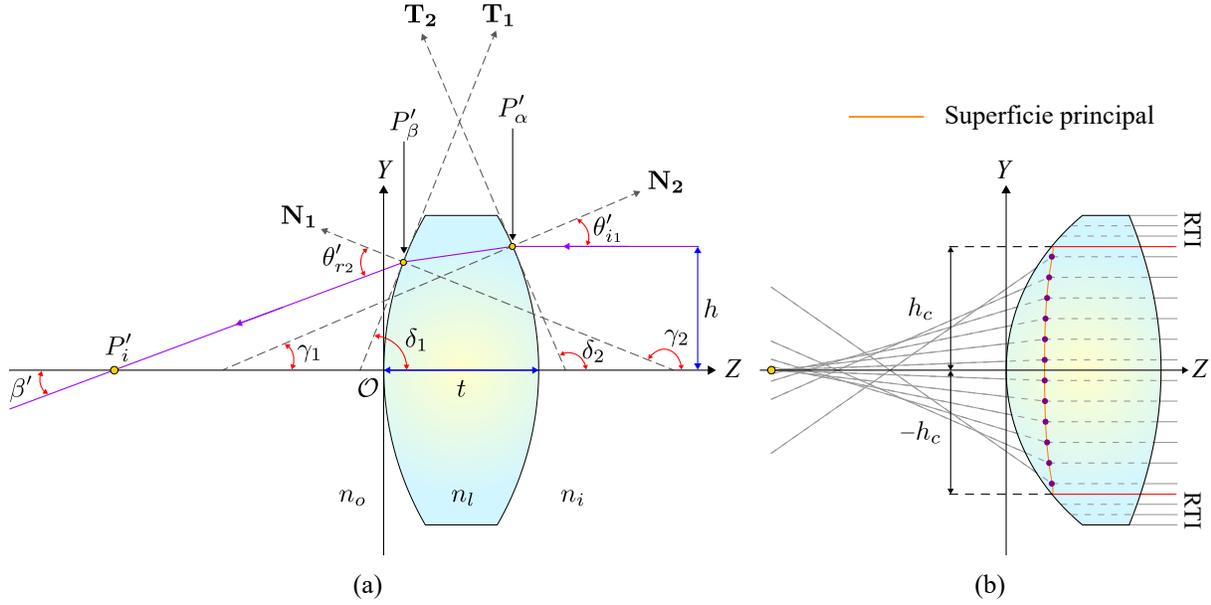


Figura 4.3: (a) Esquema del proceso de refracción en una lente simple, considerando un frente de onda plano incidente de derecha a izquierda, para el caso en el que $n_l > n_o$ y $n_l > n_i$. (b) Formación de la superficie principal primaria \mathcal{S}_p , donde se presenta reflexión total interna (RTI).

Para obtener la ecuación que describe a la superficie principal primaria, \mathcal{S}_p , hallamos el lugar geométrico en el que se encuentran los puntos de intersección entre los rayos incidentes y los rayos refractados, como se muestra en la Figura 4.3 (b). Para esto, igualamos las ecs. (4.3) y (4.9) y resolviendo para z , obtenemos

$$\mathcal{S}_p(h) = \left\{ z'_\beta(h) + \frac{h - y'_\beta(h)}{\tan[\beta'(h)]}, h \right\}. \quad (4.10)$$

Es importante señalar que la ec. (4.10) es función de h y todos los parámetros de diseño de la lente simple. Además, la superficie principal \mathcal{S}_p presenta simetría de revolución alrededor al eje óptico.

De igual forma a lo realizado para el caso de la superficie principal secundaria, realizamos una aproximación por series de Taylor a segundo orden de la ec. (4.10), considerando el caso en el que $c_1 h < 1$ y $c_2 h < 1$, de tal manera que obtenemos la expresión

$$\mathcal{P}_p(h) = \{P_p + \lambda_2 h^2, h\}, \quad (4.11)$$

donde P_p ha sido definido en la ec. (2.17) y el término λ_2 es un polinomio de orden 4, en función del espesor t de la lente simple, expresado simplemente como

$$\lambda_2 = \frac{1}{2 n_o n_l^4 P_T^2} \cdot (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4), \quad (4.12)$$

y cuyos coeficientes están dados de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
b_0 &= n_l^3 n_o [c_1^3 n_l (n_l - n_o)^2 + c_2^3 n_o (n_i - n_l)^2 + c_1 c_2^2 (n_i - n_l) (n_l - n_o) (n_i - n_l + n_o) \\
&\quad + c_1^2 c_2 (n_i - n_l) (2 n_l^2 - 3 n_l n_o + n_o^2)], \\
b_1 &= -c_2 n_l (n_i - n_l) (n_l - n_o) \{c_2^3 (n_i - n_l)^3 (n_l + n_o) + c_1^2 c_2 n_l (n_i - n_l) (3 n_l^2 + 5 n_l n_o - 2 n_o^2) \\
&\quad + c_1^3 n_l^2 [n_l^2 + 3 n_l n_o + (k_1 - 3) n_o^2] + c_1 c_2^2 [n_i^2 (3 n_l^2 + 3 n_l n_o - n_o^2) \\
&\quad + n_i n_l (-6 n_l^2 - 6 n_l n_o + n_o^2) + n_l^2 (3 n_l^2 + 3 n_l n_o - (1 + k_2) n_o^2)]\}, \quad (4.13) \\
b_2 &= c_1 c_2^2 n_l (n_i - n_l)^2 (n_l - n_o) \{c_2^2 (n_i - n_l)^2 (3 n_l + 2 n_o) + c_1 c_2 (n_i - n_l) (6 n_l^2 + 4 n_l n_o - n_o^2) \\
&\quad + 3 c_1^2 n_l [n_l^2 + n_l n_o + (k_1 - 1) n_o^2]\}, \\
b_3 &= -c_1^2 c_2^3 n_l (n_i - n_l)^3 (n_l - n_o) [c_2 (n_i - n_l) (3 n_l + n_o) + c_1 (3 n_l^2 + n_l n_o + (3 k_1 - 1) n_o^2)], \\
b_4 &= c_1^3 c_2^4 (n_i - n_l)^4 (n_l - n_o) (n_l^2 + k_1 n_o^2).
\end{aligned}$$

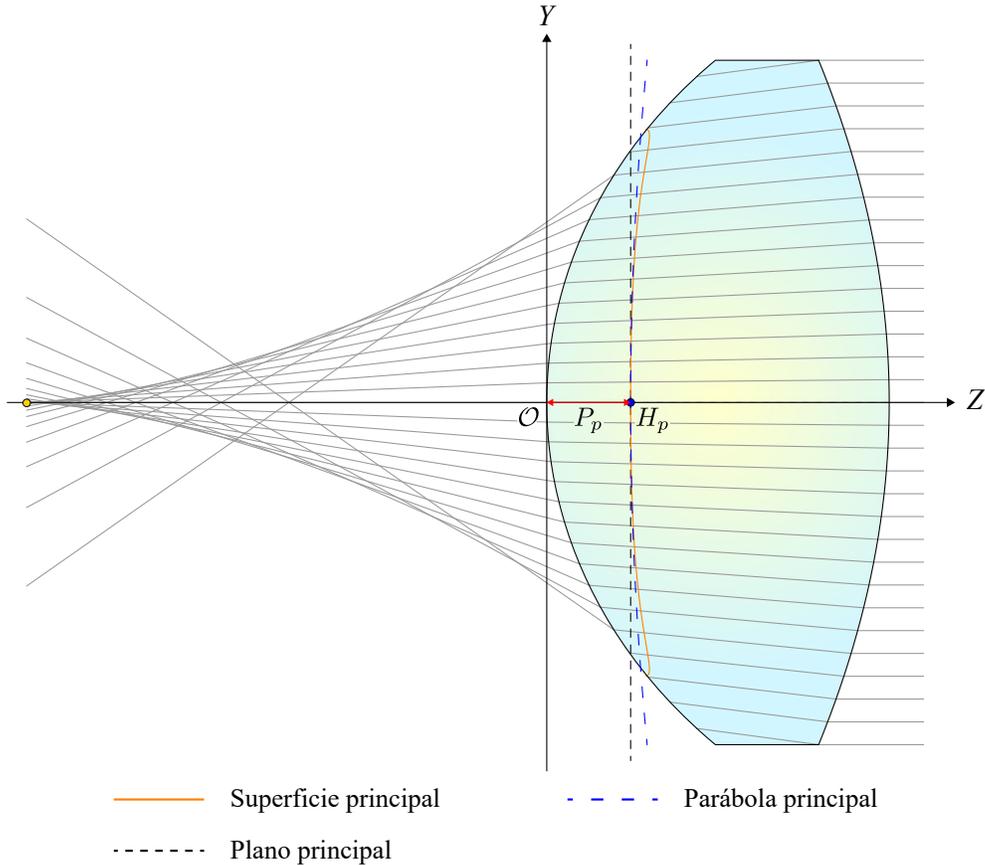


Figura 4.4: Superficie principal secundaria exacta, aproximación parabólica y plano principal secundario de una lente simple.

De esta manera, la ec. (4.11) representa a una parábola cuyo vértice está ubicado en el punto principal $H_p = [P_p, 0]$ y que está dada en función de h y de todos los parámetros de diseño de la lente simple. Finalmente, la Figura 4.4 muestra de manera esquemática la superficie principal primaria exacta, su aproximación parabólica y el plano principal primario de la lente simple

bajo estudio.

Como es claro en las Figuras 4.2 y 4.4, las parábolas principales propuestas en este trabajo guardan una mayor similitud con las superficies principales exactas, especialmente en la región más cercana a los bordes de la lente simple, en comparación con los planos principales establecidos en la teoría paraxial. Esta diferencia entre parábolas y planos principales resulta de gran importancia en la realización del trazo de rayos para la formación de imagen a través de una lente simple, como se mostrará en la siguiente sección.

La teoría desarrollada en esta sección para la obtención de las superficies principales y sus aproximaciones a segundo orden ha sido mayormente ejemplificada para una lente biconvexa cónica. Sin embargo, los resultados aquí presentados son igualmente aplicables para otro tipo de lentes simples como se muestran en la Figura 4.5.

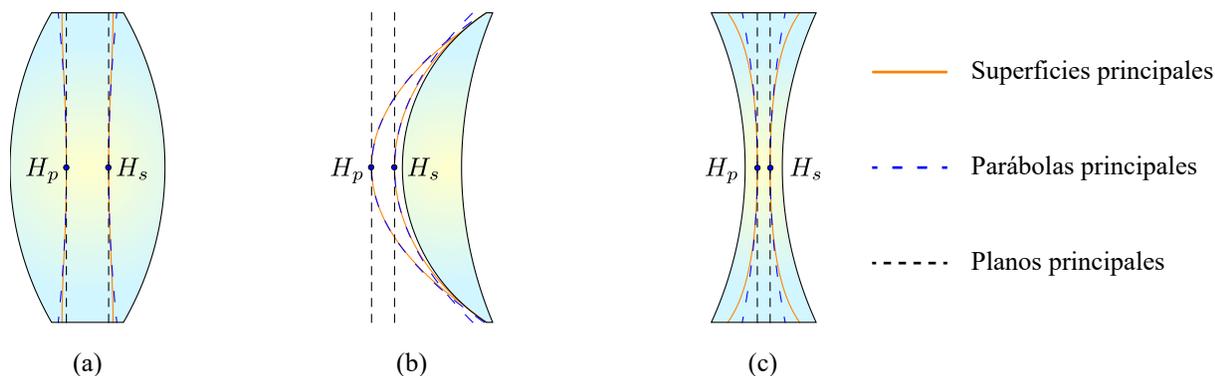


Figura 4.5: Superficies, parábolas y planos principales de distintos tipos de lente simple. (a) Lente equiconvexa. (b) Menisco positivo. (c) Lente biconcava.

En el caso particular de los meniscos positivos como el mostrado en la Figura 4.5(b), y que usualmente son utilizados para la corrección de la curvatura campo, las parábolas principales y las superficies principales exactas presentan un alto grado de correspondencia entre si. Esta característica de los meniscos positivos será aprovechada en la última sección de este capítulo para cuantificar el proceso de corrección de curvatura de campo a tercer orden, utilizando las propiedades de las parábolas principales.

4.2. Formación de imagen usando parábolas principales

En la literatura especializada, se define como sistema óptico *estigmático* a aquel sistema libre de aberración esférica, de coma y de astigmatismo. En otras palabras, un sistema estigmático forma imágenes puntuales perfectas de objetos puntuales, ya sea que estén ubicados en o fuera de eje [17, 24]. En esta sección, estudiamos el proceso de formación de imagen, suponiendo que la relación entre un objeto puntual y su imagen es unívoca, es decir, a un objeto puntual le corresponde una y solo una imagen puntual. Con base en estas condiciones, realizamos un trazo de rayos en el que utilizamos el concepto de parábolas principales discutido en la sección anterior

para obtener la forma y la ubicación de la superficie sobre la que se encuentra la imagen formada por la lente simple, denominada *superficie de Petzval*.

Siguiendo un procedimiento similar al descrito en [18], consideramos un objeto plano y perpendicular al eje óptico conformado por un conjunto de objetos puntuales ubicados sobre su superficie. A cada uno de estos objetos puntuales le corresponderá una y solo una imagen puntual, cuya ubicación se obtiene de intersectar cualesquiera dos rayos de luz provenientes del objeto puntual y cuyas trayectorias son modificadas al incidir sobre la lente simple bajo estudio. Por simplicidad, en este trabajo consideramos una pupila de entrada cuya ubicación coincide con el vértice de la primera superficie de la lente simple y un par de rayos de luz que aprovechan las propiedades focales de la lente bajo estudio como se describe a continuación.

Sea P_o un objeto puntual sobre la superficie del objeto plano y del cual son emitidos dos rayos de luz. El primero de los rayos se propaga paralelo al eje óptico hasta alcanzar a la parábola principal secundaria \mathcal{P}_s , donde es desviado y propagado en dirección del punto focal posterior F_i . El segundo de los rayos es emitido desde P_o en dirección del punto focal anterior F_o , hasta alcanzar a la parábola principal primaria \mathcal{P}_p , donde es desviado y propagado de forma paralela al eje óptico. El punto P_i indica el punto de intersección de los rayos provenientes de las parábolas principales y representa a la imagen formada por la lente simple del punto P_o . La Figura 4.6 muestra de manera esquemática el trazo de rayos para la formación de imagen de un punto sobre un objeto plano.

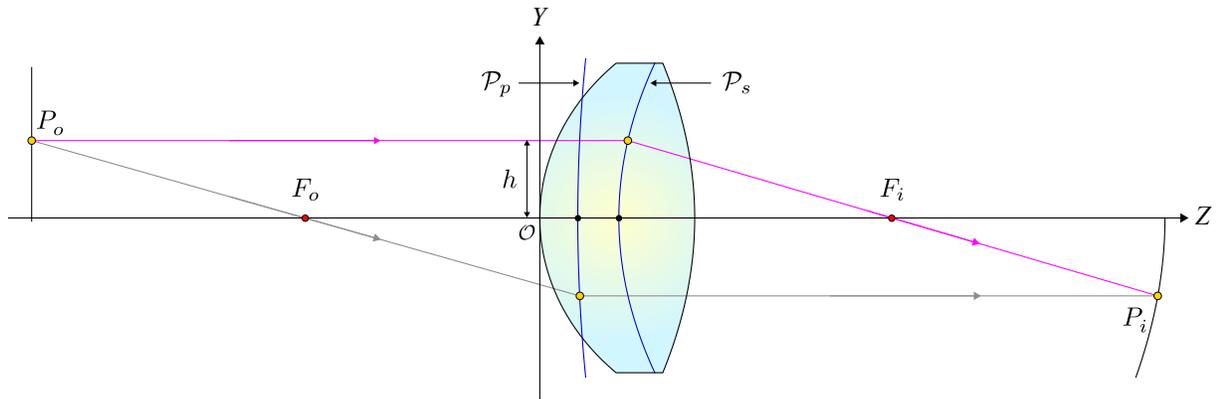


Figura 4.6: Trazo de rayos a través de una lente simple utilizando parábolas principales.

Para obtener las ecuaciones que permitan describir a la superficie de Petzval, definimos al plano **Z-Y** como el plano de incidencia, el cual contiene una sección transversal de la lente simple y del objeto plano colocado de forma ortogonal al eje óptico. Sea $\mathcal{O} = \{s_o, h\}$ el conjunto de objetos puntuales colocados sobre la superficie del objeto plano, donde s_o es la distancia a la que fue colocado el objeto, medida desde el origen de coordenadas, y h es la altura a la que se encuentran los objetos puntuales, medida desde el eje óptico. Ahora, consideramos un conjunto de rayos emitidos desde \mathcal{O} y que se propagan paralelos al eje óptico hasta alcanzar a la parábola principal secundaria en los puntos dados por $\mathcal{P}_s(h)$, definida en la ec. (4.5). Posteriormente, los rayos son propagados en dirección del punto focal posterior $F_i = [F, 0]$, donde F es la distancia

focal medida desde el origen de nuestro sistema de referencia y que está dada por

$$F = t + \left(\frac{n_i}{n_l} \right) \left[\frac{n_l - P_1 t}{P_T} \right], \quad (4.14)$$

donde P_1 es la potencia óptica de la superficie S_1 y P_T es la potencia óptica total de la lente simple. De esta forma, la ecuación que describe a los rayos de luz propagados desde \mathcal{P}_s está dada por

$$y = - \left[\frac{h}{F - P_s - \lambda_1 h^2} \right] \cdot (z - F). \quad (4.15)$$

Ahora, consideramos un conjunto de rayos de luz provenientes de \mathcal{O} , que se propagan en dirección del punto focal anterior $F_o = [f fl, 0]$ y que inciden en la lente simple hasta alcanzar a la parábola principal primaria en los puntos $\{z_p, y_p\}$. De lo anterior, la expresión que describe a este conjunto de rayos de luz está dada por

$$y = \left[\frac{h}{s_o - f fl} \right] \cdot (z - f fl). \quad (4.16)$$

donde $f fl$ es la distancia focal frontal, medida a lo largo del eje óptico desde el origen de nuestro sistema de referencia y que fue definida en la ec. (2.24). Adicionalmente, para hallar el conjunto de puntos de intersección entre los rayos de luz incidente y la parábola principal primaria, igualamos la ec. (4.15), evaluada en una distancia arbitraria y , con la ec. (4.16). Resolviendo para z y y , y simplificando, obtenemos

$$z_p = P_p + \frac{\vartheta^2}{4 \lambda_2 h^2}, \quad y_p = \frac{\vartheta}{2 \lambda_2 h}, \quad (4.17)$$

en donde hemos definido

$$\vartheta = -(f fl - s_o) + \sqrt{(f fl - s_o)^2 + 4 \lambda_2 (f fl - P_p) h^2}. \quad (4.18)$$

Una vez que los rayos de luz han alcanzado a la parábola principal primaria \mathcal{P}_p , estos son desviados y propagados de forma paralela al eje óptico. De lo anterior, la ecuación que describe a los rayos de luz provenientes de la parábola principal está dada por

$$y = \frac{\vartheta}{2 \lambda_2 h}. \quad (4.19)$$

Finalmente, sea $\mathcal{S} = \{Z_{\mathcal{S}}, Y_{\mathcal{S}}\}$ la superficie sobre la que se forma la imagen del objeto plano \mathcal{O} . Esta superficie coincide con el lugar geométrico en el que se encuentran los puntos de intersección entre los rayos provenientes \mathcal{P}_s y de \mathcal{P}_p , cuyas componentes son obtenidas de igualar a las ecs. (4.15) y (4.19) y de resolver para z y y . De esta forma, la superficie \mathcal{S} queda expresada como

$$Z_{\mathcal{S}} = F - \frac{\vartheta \cdot (F - P_s - \lambda_1 h^2)}{2 \lambda_2 h^2}, \quad Y_{\mathcal{S}} = \frac{\vartheta}{2 \lambda_2 h}. \quad (4.20)$$

Es importante señalar que la ec. (4.20) representa a una superficie dada en función de la altura h , la posición del objeto plano a lo largo del eje óptico s_o y todos los parámetros de diseño de la lente simple. Además, la intersección de la superficie resultante con el eje óptico coincide con la posición de la imagen paraxial en el punto $\mathcal{S}(0) = [s_i, 0]$, donde s_i fue definida en la ec.

(2.19). Finalmente, la Figura 4.7 muestra esquemáticamente el trazo de rayos para la formación de imagen usando planos principales y parábolas principales.

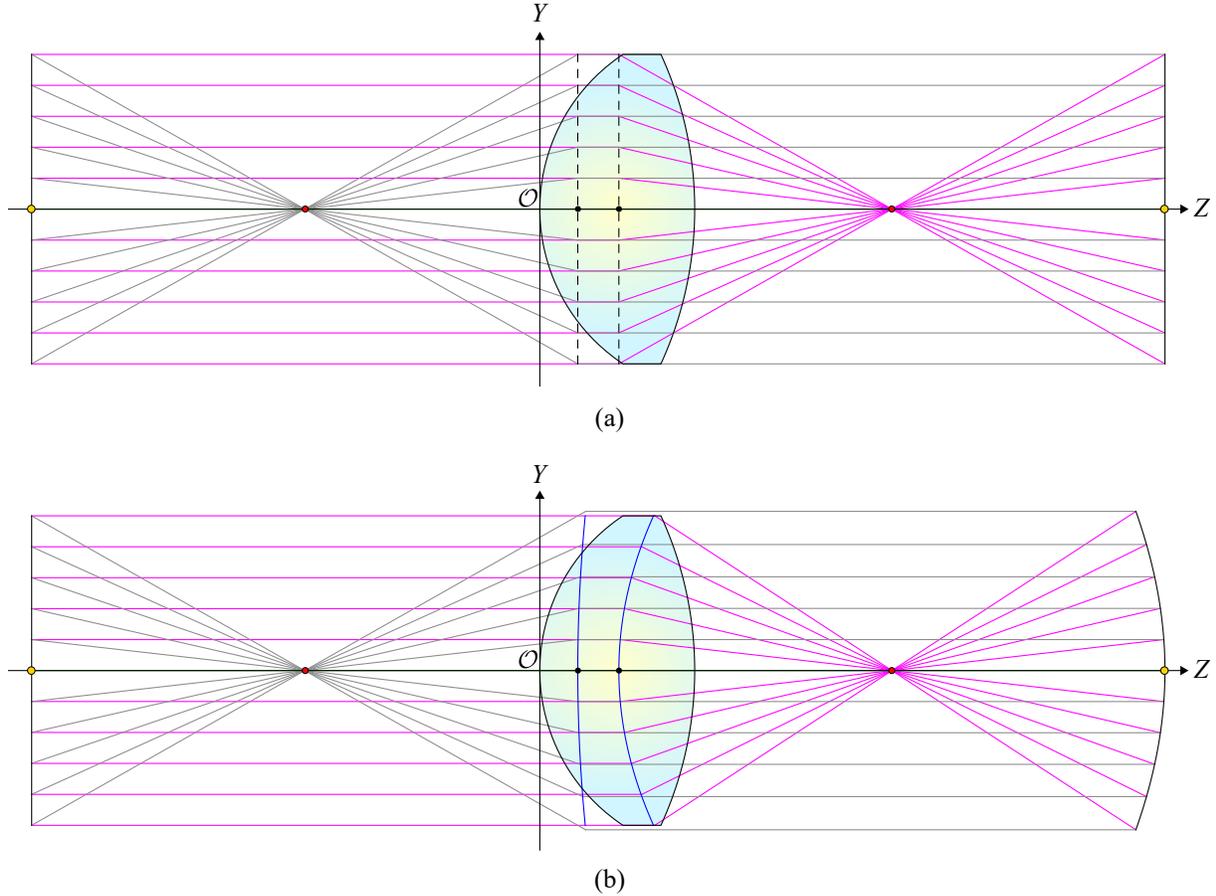


Figura 4.7: Formación de imagen de un objeto plano a través de una lente simple. a) Usando planos principales. b) Usando parábolas principales.

Del estudio de la curvatura de campo introducida por sistemas refractores, se ha hallado que la superficie de Petzval presenta un perfil que asemeja a un paraboloides dado en función de las propiedades focales del sistema bajo estudio [17]. Con base en lo anterior, realizamos una aproximación por series de Taylor a segundo orden de la superficie dada por la ec. (4.20) en función del parámetro h , para valores tales que se cumple que $c_1 h < 1$ y $c_2 h < 1$, con lo que obtenemos la siguiente expresión

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \left\{ s_i + \frac{f_o \cdot [(f_o - S_o)^2 \lambda_1 + f_o f_i \lambda_2]}{(f_o - S_o)^3} h^2, \frac{f_o}{(f_o - S_o)} h \right\}, \quad (4.21)$$

donde el subíndice \mathcal{P} significa aproximación parabólica de la superficie \mathcal{S} y donde hemos definido $S_o = s_o - P_p$, $S_i = s_i - P_s$, $f_o = ffl - P_p$ y $f_i = F - P_s$, que son las distancias objeto e imagen y las distancias focales efectivas en el espacio objeto e imagen, respectivamente, medidas desde los planos principales como se muestran en la Figura 4.8.

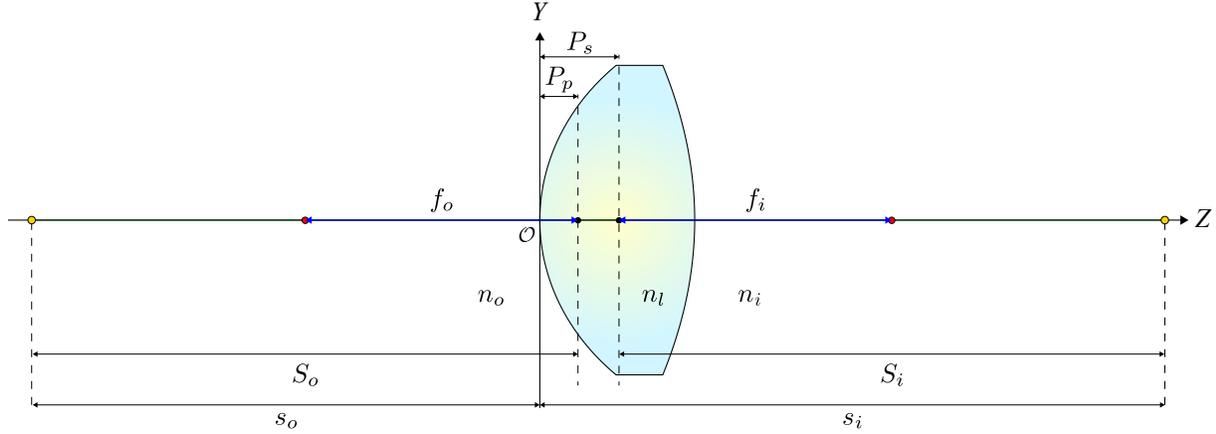


Figura 4.8: Esquema de la medición de las distancias objeto, imagen y focales respecto al origen coordenadas y respecto a los planos principales en una lente simple positiva.

Ahora, despejando h de la componente vertical de \mathcal{S}_P y sustituyendo en la componente horizontal, obtenemos

$$z = s_i + \Lambda y^2, \quad (4.22)$$

donde hemos definido

$$\Lambda = \frac{[(f_o - S_o)^2 \lambda_1 + f_o f_i \lambda_2]}{f_o (f_o - S_o)}. \quad (4.23)$$

La ec. (4.22) representa a una parábola cuyo vértice coincide con la imagen paraxial formada por la lente simple y donde el coeficiente Λ , dado en la ec. (4.23), contiene la información de la curvatura de la superficie de Petzval en función de la posición del objeto plano, de las distancias focales efectivas y de las curvaturas de las parábolas principales.

4.3. Corrección de la curvatura de campo a tercer orden

En este capítulo, hemos propuesto un método para cuantificar la curvatura de campo introducida por una lente simple en función de las propiedades de sus parábolas principales y sus propiedades focales. El siguiente paso en nuestro estudio de la curvatura de campo es proponer un método analítico que permita establecer las condiciones para corregir este tipo de aberración a tercer orden. Para esto, realizamos el trazo de rayos para la formación de imagen de un objeto plano colocado en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico a través de un doblete separado, conformado por dos lentes simples y donde la ubicación de las pupilas de entrada coincide con el vértice de la primera superficie de cada lente.

Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 un par de lentes simples colocadas a una distancia L entre sí, medida desde el vértice posterior de \mathcal{L}_1 hasta el vértice de la primera superficie de \mathcal{L}_2 . Las lentes están colocadas de tal forma que el origen de nuestro sistema de referencia coincide con el vértice de la primera superficie de \mathcal{L}_1 , como se muestra en la Figura 4.9 (a). Ahora, sean P_o un objeto puntual colocado sobre la superficie del objeto plano y P_i su imagen colocada sobre la superficie de Petzval

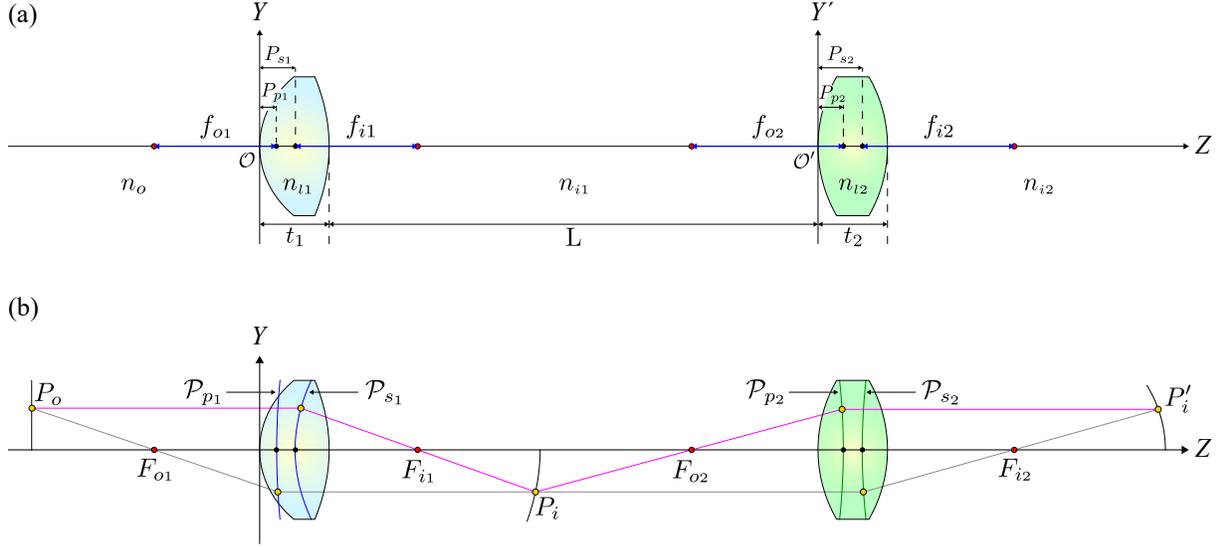


Figura 4.9: Doblete separado formado por lente simples. (a) Configuración del doblete separado. (b) Formación de imagen utilizando parábolas principales.

formada por la lente \mathcal{L}_1 . Siguiendo un procedimiento similar al descrito en la sección 4.2, el punto P_i es el objeto puntual respecto a la lente \mathcal{L}_2 desde donde trazamos un par de rayos que inciden en dicha lente hasta alcanzar a las parábolas principales, para luego ser desviados y propagados hacia el exterior y cuya intersección determina la posición de la imagen puntual P'_i .

Para hallar la superficie de Petzval sobre la que se forma la imagen del sistema de lentes simples, consideramos un conjunto de objetos puntuales colocados sobre la superficie \mathcal{S} , cuyas coordenadas están dadas por la ec. (4.21). Ahora, consideramos a un conjunto de rayos de luz emitidos desde \mathcal{S} y que se propagan paralelos al eje óptico hasta alcanzar a la parábola principal secundaria \mathcal{P}_{s2} , donde son desviados y propagados en dirección del punto focal posterior F_{i2} . De esta forma, considerando la geometría mostrada en la Figura 4.9 (b), la ecuación que describe a este conjunto de rayos de luz está dada por

$$y = -\frac{y_p \cdot [z - (t_1 + L) - (P_{s2} + \lambda_{12} y_p^2)]}{F_2 - (P_{s2} + \lambda_{12} y_p^2)}, \quad (4.24)$$

donde y_p fue definida en la ec. (4.17) y donde λ_{12} es el coeficiente de curvatura de la parábola principal secundaria \mathcal{P}_{s2} , definida en la ec. (4.6), dada en función de los parámetros de \mathcal{L}_2 . Adicionalmente, P_{s2} y F_2 son las distancias asociadas a la posición del plano principal secundario y a la distancia focal, dadas en función de los parámetros de diseño de la lente \mathcal{L}_2 , medidas a lo largo del eje óptico desde un sistema de referencia primado, cuyo origen \mathcal{O}' coincide con el vértice de la primera superficie de la lente \mathcal{L}_2 , como se muestra en la Figura 4.9 (a).

Ahora, consideramos un conjunto de rayos de luz provenientes de \mathcal{S} , que se propagan en dirección del punto focal anterior F_{o2} y que inciden en la lente \mathcal{L}_2 hasta alcanzar a la superficie \mathcal{P}_{p2} en los puntos $\{z'_p, y'_p\}$. De lo anterior, la ecuación que describe a estos rayos de luz está dada por la expresión

$$y = -\frac{y_p \cdot [z - Z_{\mathcal{S}}]}{ffl_2 + (t_1 + L) - Z_{\mathcal{S}}} + y_p, \quad (4.25)$$

donde ffl_2 es la distancia focal frontal de la lente \mathcal{L}_2 , medida a lo largo del eje óptico, desde \mathcal{O}' . Adicionalmente, para hallar el conjunto de puntos $\{z'_p, y'_p\}$, igualamos la ec. (4.25) con P_{p_2} , de acuerdo a la ec. (4.11) evaluada en una distancia arbitraria y , en función de los parámetros de diseño de la lente \mathcal{L}_2 y considerando un desplazamiento t_1+L a lo largo del eje óptico. Resolviendo para z y y , obtenemos

$$z'_p = t_1 + L + P_{p_2} + \frac{[Z_{\mathcal{S}} - ffl_2 - t_1 - L + \vartheta']^2}{4 \lambda_{22} y_p^2}, \quad (4.26)$$

$$y'_p = \frac{Z_{\mathcal{S}} - ffl_2 - t_1 - L + \vartheta'}{2 \lambda_{22} y_p},$$

donde hemos definido

$$\vartheta' = \sqrt{(ffl_2 + t_1 + L - Z_{\mathcal{S}})^2 + 4(ffl_2 - P_{p_2}) \lambda_{22} y_p^2}, \quad (4.27)$$

y donde λ_{22} es el coeficiente de curvatura de la parábola principal primaria \mathcal{P}_{p_2} , definida en la ec. (4.12), dada en función de los parámetros de diseño de \mathcal{L}_2 .

Una vez que los rayos de luz han alcanzado a \mathcal{P}_2 , estos son desviados y propagados de forma paralela al eje óptico. De lo anterior, la ecuación que describe a los rayos de luz provenientes de la parábola principal queda dada por la expresión

$$y = \frac{Z_{\mathcal{S}} - ffl_2 - t_1 - L + \vartheta'}{2 \lambda_{22} y_p}, \quad (4.28)$$

Finalmente, sea $\mathcal{S}' = \{Z'_{\mathcal{S}}, Y'_{\mathcal{S}}\}$ la superficie de Petzval sobre la que se ubica la imagen del objeto plano \mathcal{O} , formada por las lentes simples \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 . Esta superficie coincide con el lugar geométrico en el que se encuentran los puntos de intersección de los rayos de luz provenientes de las parábolas principales \mathcal{P}_{s_2} y \mathcal{P}_{p_2} , cuyas componentes se obtienen igualando las ecs. (4.24) y (4.28) y resolviendo para z y y . De esta forma, la superficie de Petzval queda dada por

$$Z'_{\mathcal{S}} = ffl_2 + t_1 + L - \frac{(ffl_2 - P_{p_2} - \lambda_{22} y_p^2) \cdot y'_p}{y_p}, \quad (4.29)$$

$$Y'_{\mathcal{S}} = \frac{Z_{\mathcal{S}} - ffl_2 - t_1 - L + \vartheta'}{2 \lambda_{22} y_p}.$$

La ec. (4.29) representa a una superficie dada en función de la altura h , la posición del objeto plano s_o , la distancia entre las lentes simples L y todos los parámetros de diseño de las lentes \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 . Además, la intersección de la superficie resultante con el eje óptico coincide con la posición de la imagen paraxial formada por el doblete separado en el punto $\mathcal{S}'(0) = [s'_i, 0]$, con s'_i dada por la expresión

$$s'_i = t_1 + L + P_{s_2} + \frac{(S_{i1} - L_p) \cdot f_{i2}}{(S_{i1} - L_p) - f_{o2}} \quad (4.30)$$

donde $L_p = t_1 + L + P_{p_2} - P_{s_1}$, es la distancia entre los planos principales secundario y primario de las lentes \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , respectivamente, y S_{i1} es la distancia imagen formada por \mathcal{L}_1 , medida desde el correspondiente plano principal secundario, como se muestra en la Figura 4.10.

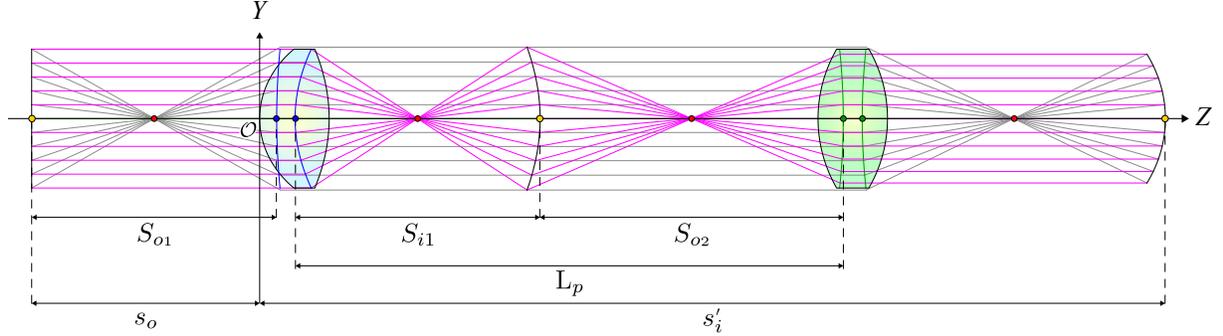


Figura 4.10: Trazo de rayos a través de un doblete separado conformado por lentes simples.

Para cuantificar de manera sencilla la curvatura de la superficie de Petzval formada por el doblete separado, realizamos una aproximación por series de Taylor a segundo orden de la ec. (4.29), en función del parámetro h , para valores tales que se cumple que $c_1 h < 1$ y $c_2 h < 1$, con lo que obtenemos

$$\mathcal{S}'_p = \left\{ s'_i + \Lambda' \left[\frac{(f_{o1} f_{o2}) \cdot h}{(f_{o1} - S_{o1})(f_{o2} + L_p) + f_{i1} S_{o1}} \right]^2, \frac{(f_{o1} f_{o2}) \cdot h}{(f_{o1} - S_{o1})(f_{o2} + L_p) + f_{i1} S_{o1}} \right\}, \quad (4.31)$$

en donde hemos definido

$$\Lambda' = \left[\frac{(f_{o1} - S_{o1})^2 \lambda_{11} + f_{o1} f_{i1} \lambda_{21}}{f_{o1}(f_{o1} - S_{o1})} + \frac{(f_{o2} - S_{o2})^2 \lambda_{12} + f_{o2} f_{i2} \lambda_{22}}{f_{o2}(f_{o2} - S_{o2})} \right], \quad (4.32)$$

y donde λ_{11} y λ_{21} son los coeficientes de curvatura de las parábolas principales de \mathcal{L}_1 .

Es importante señalar que las ecs. (4.31) y (4.32) están dadas en función de las distancias medidas respecto al sistema de referencia definido por los planos principales, de tal forma que S_o , S_i , f_o y f_i son las distancias objeto e imagen y las distancias focales efectivas, respectivamente, medidas desde los planos principales correspondientes. Además, hemos definido $S_{o2} = S_{i1} - L_p$, como la distancia a la que se encuentra la imagen formada por la lente simple \mathcal{L}_1 respecto al plano principal primario de \mathcal{L}_2 , como se muestra en la Figura 4.10.

Ahora, despejando h de la componente vertical de \mathcal{S}'_p y sustituyendo en la componente horizontal, obtenemos la expresión

$$z = s'_i + \Lambda' y^2. \quad (4.33)$$

La ec. (4.33) representa a una parábola cuyo vértice coincide con la imagen paraxial formada por el doblete separado y donde el coeficiente Λ' , dado en la ec. (4.32), contiene la información

de la curvatura de la superficie de Petzval en función de la posición del objeto plano, la separación entre las lentes, de las propiedades focales de las lentes simples y de las curvaturas de sus parábolas principales.

Con base en lo definido en la ec. (4.23), el coeficiente Λ' es el resultado de la suma de las curvaturas individuales introducidas por cada una de las lentes simples. Es decir, sean Λ_1 y Λ_2 los coeficientes de curvatura introducidos por las lentes \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , respectivamente, de tal forma que el coeficiente de curvatura para el doblete separado puede expresarse simplemente como

$$\Lambda' = \Lambda_1 + \Lambda_2. \quad (4.34)$$

De lo anterior, es posible definir al coeficiente de curvatura de la superficie de Petzval para un sistema de N lentes simples como

$$\Lambda' = \sum_{j=1}^N \Lambda_j = \sum_{j=1}^N \frac{[(f_{oj} - S_{oj})^2 \lambda_{1j} + f_{oj} f_{ij} \lambda_{2j}]}{f_{oj}(f_{oj} - S_{oj})}. \quad (4.35)$$

El resultado mostrado en la ec. (4.35) es congruente con un resultado similar al estudiado en la literatura elemental de óptica [18] para el caso de la curvatura de campo introducida por un sistema de N lentes delgadas, calculada con la expresión

$$\Delta z = \frac{y_i}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{n_j f_j}, \quad (4.36)$$

donde y_i es una altura medida desde el eje óptico, n_j y f_j son el índice de refracción y la distancia focal de la j -ésima lente delgada, y Δz es un desplazamiento a lo largo del eje óptico respecto al plano de enfocamiento paraxial.

Adicionalmente, se dice que un sistema óptico satisface la *condición de Petzval* cuando el resultado de la suma expresada en la ec. (4.36) es igual a cero. En este caso, la curvatura de campo del sistema de lentes es nula y el sistema bajo estudio queda libre de este tipo de aberración. De manera análoga, proponemos una condición de Petzval generalizada para un conjunto de lentes simples con la que corregimos la curvatura de campo a tercer orden. Esto se logra al igualar la ec. (4.35) a cero, modificando a alguno de los parámetros que definen al sistema óptico. Es importante mencionar que, para un conjunto de lentes simples con propiedades focales, índices de refracción y parábolas principales fijas, la curvatura de campo únicamente puede alterarse modificando la posición del objeto plano, la distancia entre las lentes y la posición de la pupila de entrada. Sin embargo, por simplicidad, consideramos que la ubicación de las pupilas de entrada coincide con el vértice de la primera superficie de cada lente.

Ahora, consideramos un doblete separado en el que las lentes introducen curvaturas de campo Λ_1 y Λ_2 y con las que se busca corregir la curvatura de campo a tercer orden. De esta forma, igualando la ec. (4.35) a cero, obtenemos la condición de Petzval para dos lentes dada por la expresión

$$\frac{(f_{o1} - S_{o1})^2 \lambda_{11} + f_{o1} f_{i1} \lambda_{21}}{f_{o1}(f_{o1} - S_{o1})} + \frac{(f_{o2} - S_{o2})^2 \lambda_{12} + f_{o2} f_{i2} \lambda_{22}}{f_{o2}(f_{o2} - S_{o2})} = 0, \quad (4.37)$$

donde la distancia objeto respecto a la lente \mathcal{L}_2 fue definida en función de la separación entre las lentes como $S_{o_2} = S_i - Lp$. Finalmente, despejando a la distancia L de la ec. (4.37), obtenemos

$$L_{cp} = s_i - t_1 - f l_2 - \frac{[f_{o_2}(f_{o_1} - S_{o_1})^2 \lambda_{11} + f_{o_2} f_{o_1} f_{i1} \lambda_{21} \mp \sqrt{\Gamma}]}{2f_{o_1}(f_{o_1} - S_{o_1})\lambda_{12}}, \quad (4.38)$$

donde el subíndice cp significa que es la distancia que corrige la curvatura de Petzval a tercer orden y donde hemos definido

$$\Gamma = f_{o_2}^2 [(f_{o_1} - S_{o_1})^2 \lambda_{11} + f_{i1} f_{o_1} \lambda_{21}]^2 - 4 f_{o_1}^2 f_{o_2} f_{i2} (f_{o_1} - S_{o_1})^2 \lambda_{12} \lambda_{22}. \quad (4.39)$$

La ec. (4.38) presenta dos posibles soluciones de acuerdo al signo de la raíz cuadrada. En este trabajo, consideramos únicamente la solución con el signo negativo, ya que dicha solución implica una menor distancia entre el objeto plano y la imagen producida por el doblete separado. Analizando la ec. (4.39), un par de lentes simples pueden ser utilizadas para corregir la curvatura campo a tercer orden, si y solo si, se cumple que $\Gamma > 0$. En caso de no cumplirse lo anterior, la solución cae en el campo de los números complejos y carece de sentido físico.

Para culminar nuestro estudio de la curvatura de campo introducida por lentes simples, presentamos un par de ejemplos del trazo de rayos para la formación de imagen a través de dobletes separados. Para esto, consideramos una lente biconvexa cónica cuyos parámetros están dados en la Tabla 4.1 y cuyo trazo de rayos se muestra en la Figura 4.11.

Lente simple \mathcal{L}_1				
R_1 [mm]	R_2 [mm]	t_1 [mm]	D [mm]	f [mm]
6	-12	5	10	8.577
k_1	k_2	n_o	n_l	n_i
-0.25	-1.25	1	1.515	1
s_o [mm]	s_i [mm]	λ_1 [mm ⁻¹]	λ_2 [mm ⁻¹]	Λ_1 [mm ⁻¹]
-15.939	19.724	0.047	0.009	-0.038

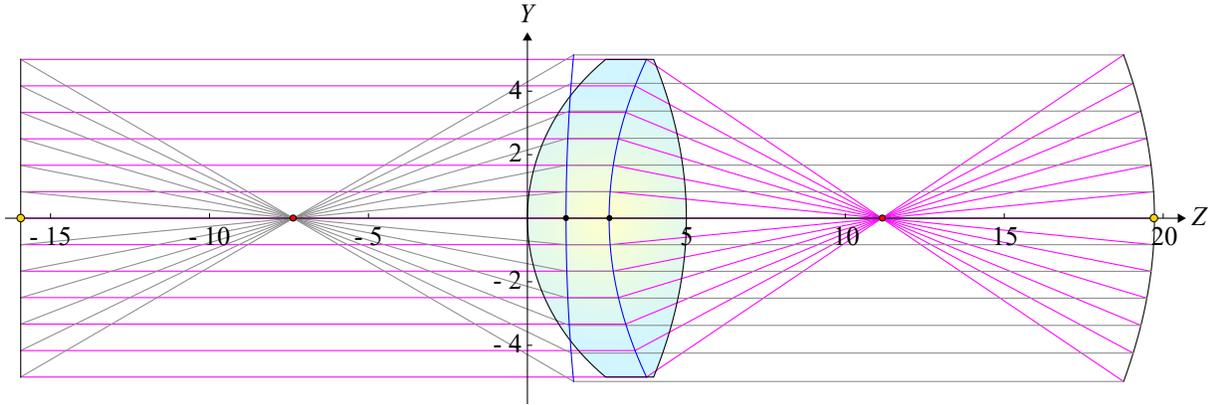
Tabla 4.1: Prámetros de la lente simple \mathcal{L}_1

En este caso la lente simple está dispuesta en una configuración tal que el objeto plano está ubicado a una distancia equivalente a dos veces la distancia focal efectiva medida desde el plano principal primario. Expresando a la superficie de Petzval de acuerdo a la definición dada en la ec. (4.22), la imagen formada por la lente simple queda expresada como

$$z = 19.724 - 0.038 y^2, \quad (4.40)$$

que representa a una parábola cuyo vértice se ubica a una distancia equivalente a dos veces la distancia focal efectiva medida desde el plano principal secundario. Adicionalmente, el coeficiente de curvatura de la superficie de Petzval tiene signo negativo, por lo que la concavidad de la parábola abre en dirección del origen de coordenadas.

Para completar el doblete separado, consideramos una lente equiconvexa \mathcal{L}_2 cuyos parámetros se muestran en la Tabla 4.2. En este sistema, la superficie de Petzval formada por la lente \mathcal{L}_1


 Figura 4.11: Trazo de rayos para la formación de imagen a través de la lente simple \mathcal{L}_1 .

es el objeto para la lente \mathcal{L}_2 , que está colocada de tal forma que la distancia objeto para la segunda lente es igual a dos veces su distancia focal efectiva, medida respecto a su plano principal primario.

Lente simple \mathcal{L}_2				
R_1 [mm]	R_2 [mm]	t_2 [mm]	D [mm]	f [mm]
10	-10	5	10	10.611
k_1	k_2	n_o	n_l	n_i
0	0	1	1.515	1
L [mm]	s'_i [mm]	λ_1 [mm $^{-1}$]	λ_2 [mm $^{-1}$]	Λ_2 [mm $^{-1}$]
34.142	63.559	0.011	-0.011	-0.022

 Tabla 4.2: Prámetros de la lente simple \mathcal{L}_2

De acuerdo a lo definido en las ecs. (4.33) y (4.34), la superficie de Petzval sobre la que se ubica la imagen formada por el doblete separado, puede expresarse simplemente como

$$z = 63.559 - 0.060 y^2, \quad (4.41)$$

que corresponde a una parábola cuyo vértice coincide con la posición de la imagen paraxial formada por el doblete separado y donde el coeficiente de curvatura Λ' resulta de la suma de los coeficientes de curvatura introducidos por cada una de las lentes. Finalmente, la Figura 4.12 (a) muestra el trazo de rayos para la formación de imagen a través de la lente \mathcal{L}_2 , cuyo objeto es la superficie de Petzval formada por la lente \mathcal{L}_1 .

Por otro lado, con el propósito de ejemplificar la corrección de la curvatura de campo a tercer orden, consideramos un menisco positivo \mathcal{L}_3 , cuyos parámetros están dados en la Tabla 4.3, y que formará un doblete separado con la lente \mathcal{L}_1 .

Para satisfacer la condición de Petzval para lentes simples, dada en la ec. (4.37), las lentes deben ser colocadas a una distancia L_{cp} , definida en la ec. (4.38). A esta distancia, se cumple que la

Lente simple \mathcal{L}_3				
R_1 [mm]	R_2 [mm]	t_2 [mm]	D [mm]	f [mm]
-12	-6	2	10	20.929
k_1	k_2	n_o	n_l	n_i
0	0	1	1.515	1
L_{cp} [mm]	s'_i [mm]	λ_1 [mm $^{-1}$]	λ_2 [mm $^{-1}$]	Λ_2 [mm $^{-1}$]
53.362	104.292	-0.154	-0.105	0.038

Tabla 4.3: Prámetros de la lente simple \mathcal{L}_3

suma de los coeficientes de curvatura introducida individualmente por cada una de las lentes es igual a cero, es decir, $\Lambda_1 = -\Lambda_2 = 0.038$. De lo anterior, la superficie de Petzval formada por el doblete corresponde a un plano dado por la expresión

$$z = 104.292, \quad (4.42)$$

que coincide con la ubicación de la imagen paraxial formada por el doblete separado.

Finalmente, la Figura 4.12 (b) muestra el trazo de rayos para la formación de imagen a través del doblete formado por \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_3 , y la Figura 4.12 (c) muestra una comparación entre las superficies de Petzval formadas por ambos dobletes y el plano de enfocamiento paraxial.

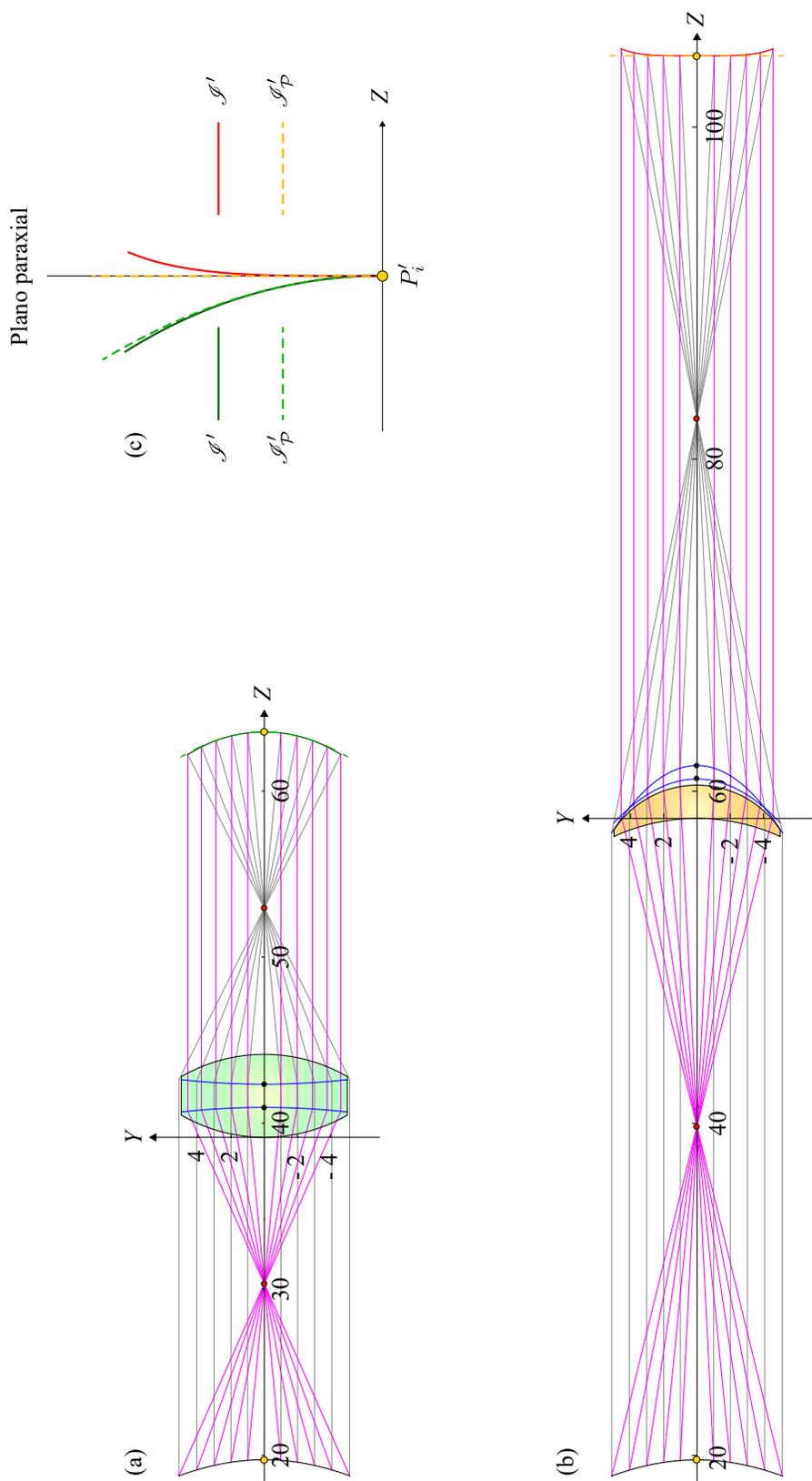


Figura 4.12: Trazo de rayos para la formación de imagen a través de dobletes separados. (a) Doblete formado por una lente biconvexa cónica y una lente equiconvexa. (b) Doblete formado por una lente biconvexa cónica y un menisco positivo. (c) Comparación de las superficies de Petzval formadas por los dobletes separados con el plano de enfocamiento paraxial.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

En este trabajo, obtuvimos la ecuación de rayo refractado para una lente simple en forma paramétrica, considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico, utilizando la técnica del trazo exacto de rayos. Partiendo de la ecuación de rayo refractado, obtuvimos la ecuación de la superficie cáustica por refracción en función de la posición de la fuente puntual, el ángulo de emisión y todos los parámetros de diseño de la lente simple, es decir, radios de curvatura, espesor, constantes de conicidad e índices de refracción.

Mediante la realización de una aproximación polinomial por series de Taylor a tercer orden de la superficie cáustica por refracción, recuperamos la ecuación de Gauss para la formación de imagen establecida por la teoría paraxial. Además, obtuvimos el coeficiente de aberración esférica a tercer orden introducida por la lente simple para el caso de una fuente puntual colocada a lo largo del eje óptico, en función de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción. Adicionalmente, discutimos las características y propiedades de una lente simple libre de aberración esférica.

Mediante el principio de Huygens, hemos obtenido las ecuaciones exactas del frente de onda refractado de fase cero producido por una lente simple sobre la que incide un frente de onda esférico proveniente de una fuente puntual colocada en una posición arbitraria a lo largo del eje óptico, dada en función de la posición de la fuente puntual, el ángulo de emisión y todos los parámetros de diseño de la lente simple. Además, utilizando el concepto de curvas paralelas, obtuvimos las ecuaciones exactas que describen al frente de onda refractado y propagado al exterior de la lente simple a distancias arbitrarias. De forma alternativa, utilizando la ecuación exacta de la superficie cáustica por refracción, obtuvimos el frente de onda refractado por la lente simple mediante el cálculo de la involuta.

Obtuvimos una aproximación parabólica al frente de onda refractado y propagado por una lente simple mediante una serie de Taylor a segundo orden de las ecuaciones exactas del frente de onda. Además, utilizando la técnica del cálculo de la involuta, hemos obtenido una aproximación al frente de onda refractado por la lente simple, utilizando la aproximación por series de Taylor a tercer orden de la superficie cáustica por refracción.

Calculando el límite cuando la posición de la fuente puntual tiende a infinito en la ecuación de rayo refractado por una lente simple, recuperamos las ecuaciones exactas de las superficies

principales y mediante el cálculo de una serie de Taylor a segundo orden, obtuvimos una aproximación parabólica que sustituye a los planos principales establecidos en la teoría paraxial. Partiendo del concepto de parábolas principales, realizamos un trazo de rayos para la formación de imagen a través de una lente simple de un objeto plano y ortogonal al eje óptico, colocado en una posición arbitraria a lo largo de dicho eje, con lo que obtuvimos una superficie curva sobre la que se ubica la imagen formada por la lente simple y que denominamos superficie de Petzval. Propusimos una forma de cuantificar la curvatura de campo introducida por una lente simple en función de las propiedades de curvatura de las parábolas principales y las propiedades focales de la lente bajo estudio, al realizar una aproximación por series de Taylor a segundo orden de la superficie de Petzval.

Estudiamos la formación de la superficie de Petzval y la curvatura de campo introducida por un doblete separado, conformado por lentes simples, y hemos propuesto una forma de cuantificar la curvatura de campo introducida por un sistema de N lentes simples. Además, hemos propuesto una condición de Petzval generalizada para lentes simples con la que es posible corregir la curvatura de campo a tercer orden.

Como trabajo a futuro, se propone el diseñar pruebas ópticas, tanto deflectométricas como interferométricas, con las que se pueda cuantificar las aberraciones introducidas por lente simples, conociendo de manera exacta la forma de la superficie cáustica por refracción y del frente de onda refractado y propagado a distancias arbitrarias.

Proponemos la compensación experimental de la curvatura de campo introducida por una lente simple mediante la implementación de espejos parabólicos o mediante objetos que puedan adoptar un perfil parabólico que produzca una imagen plana. Además, proponemos el uso de dobletes separados que permitan corregir la curvatura de campo con el fin de mejorar los resultados obtenidos mediante pruebas ópticas que dependan del uso de objetos y sensores planos.

Bibliografía

- [1] D. Tentori, “Homogeneity testing of optical glass by holographic interferometry,” *Appl. Opt.*, **30**, No.7, pp. 752-755, (1991).
- [2] D. Tentori, “High-precision refractometry by hologram interferometry,” *Opt. Eng.*, **31**, No. 4, pp. 805-808, (1992).
- [3] D. Tentori, J. Camacho, C. López-Famoso, “High accuracy refractometry using reflectometry: practical limitations,” *Opt. Comm.*, **103**, No. 1, pp. 15-21, (1993).
- [4] A. J. Werner, “Methods in High Precision Refractometry of Optical Glasses,” *Appl. Opt.*, **7**, No. 5, pp. 837-843, (1968).
- [5] R. Díaz-Uribe and M. Campos-García, “Null-screen testing of fast convex aspheric surfaces,” *Appl. Opt.*, **39**, pp. 2670-2677, (2000).
- [6] M. Avendaño-Alejo and R. Díaz-Uribe, “Testing a fast off-axis parabolic mirror using tilted null-screens,” *Appl. Opt.*, **45**, pp. 2607-2614, (2006).
- [7] J. Del Olmo-Márquez, D. Castán-Ricaño, M. Avendaño-Alejo and R. Díaz-Uribe, “Designing null phase screens to test a fast plano-convex aspheric lens,” *Proc. SPIE* **9575**, 95751G, (2015).
- [8] O. N. Stavroudis, “Caustic as an Expression of the Image Errors of a Lens,” *Proceeding of the IODC*, **22**, G. W. Forbes, OSA, pp. 87-91, (1994).
- [9] M. Avendaño-Alejo, et. al., “Caustic caused by multiple reflections on a circular surface,” *Am. J. Phys.*, **78**, pp. 1195-1198, (2010).
- [10] D. L. Shealy and D. G. Burkhard, “Flux density for ray propagation in discrete index media expressed in terms of the intrinsic geometry of the deflecting surface,” *Opt. Acta* **20**, 287-301, (1973).
- [11] D. G. Burkhard and D. L. Shealy, “Flux density for ray propagation in geometrical optics,” *J. Opt. Soc. Am.* **63**, 299-304, (1973).
- [12] M. Avendaño-Alejo, E. Román-Hernández, L. Castañeda, and V. I. Moreno-Oliva, “Analytic conic constants to reduce the spherical aberration of a single lens used in collimated light,” *Appl. Opt.* **56**, No. 22, 6244–6254 (2017).

-
- [13] M. Avendaño-Alejo, M. C. López-Bautista, L. Castañeda, and S. Maca-Garcia, “Huygens principle: exact and approximate wavefronts propagated through conic lenses,” *Appl. Opt.*, **58**, No. 4, 939–947 (2019).
- [14] M. Avendaño-Alejo, E. Román-Hernández, G. Castillo-Santiago, J. Del Olmo-Márquez, and L. Castañeda, “Sagittal and tangential foci produced by tilted plane wavefronts refracted through simple lenses,” *Appl. Opt.* **58**, 5959-5967, (2019).
- [15] O. Ponce-Hernández, M. Avendaño-Alejo and L. Castañeda, “Caustic surface produced by a simple lens considering a point source placed at arbitrary position along the optical axis,” *Proc. of SPIE*, **11495** , Art. No. 114950A, (2020).
- [16] G. Castillo-Santiago, M. Avendaño-Alejo, R. Díaz-Uribe and L. Castañeda, “Analytic aspheric coefficients to reduce the spherical aberration of lens elements used in collimated light,” *Appl. Opt.*, **53**, No. 22, pp. 4939-4946, (2014).
- [17] F. A. Jenkins and H. E. White, “Fundamentals of Optics,” Mc. Graw-Hill, Part I, pp. 1-190, (1976).
- [18] E. Hecht, “Optics,” 4 th Ed., Pearson Adisson Weasley, Chap. 5 and 6 , pp. 149-280, San Francisco, (2002).
- [19] D. Reshidko and J. Sasian, “Optical analysis of miniature lenses with curved imaging surfaces,” *Appl. Opt.*, **54**, No. 28, pp. 216-223, (2015).
- [20] V. N. Mahajan, “Optical Imaging and Aberrations, Part I,” SPIE Press, pp. 14-15, (1998).
- [21] J. Stoker, “Differential Geometry”, Wiley-Interscience, pp. 44-57, (1969).
- [22] O. Ponce-Hernández, M. Avendaño-Alejo, E. Román-Hernández and I. Moreno-Oliva, “Caustic surface produced by a plane wavefront refracted through positive bi-conic lenses,” *Proc. of SPIE*, **9947** , Art. No. 994707, (2016).
- [23] O. Ponce-Hernández, “Diseño y evaluación de lentes cónicas de Fresnel”, Cap. 2, pp. 12-39 (Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2018).
- [24] W. T. Welford, “Aberrations of the Symmetrical Optical System,” Academic, Chap.7-9, pp. 91-191, (1974).
- [25] M. Avendaño-Alejo, “Caustics in a meridional plane produced by plano-convex aspheric lenses,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **30**, No. 3, pp. 501-508, (2013).
- [26] O. N. Stavroudis, “The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics,” 1 st Ed., Academic Press, Chap. VI, pp. 97-103, (1972).
- [27] R. G. González-Acuña and H. A. Chaparro-Romo, “General formula for bi-aspheric singlet lens design free of spherical aberration,” *Appl. Opt.* **57**, No. 31, pp. 9341-9345 (2018).
- [28] S. Cornbleet, “Microwave and Optical Ray Geometry”, Wiley London, chap. 2, pp. 11-35 (1984)

- [29] M. Avendaño-Alejo, D. González-Ultera and L. Castañeda, “Caustics in a meridional plane produced by plano-convex conic lenses,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **28**, No. 12, pp. 2619-2628 (2011).
- [30] M. Avendaño-Alejo, “Caustic surface of a plane wavefront refracted by a smooth arbitrary surface,” *Proc. SPIE* 9192 9192 (2014).
- [31] D. L. Shealy and J. A. Hoffnagle, “Wavefront and caustics of a plane wave refracted by an arbitrary surface,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**, No. 9, pp. 2370–2382 (2008).
- [32] M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and I. Moreno, “Exact wavefronts and caustic surfaces produced by planar ripple lenses,” *Opt. Express*, **23**, No. 17, pp. 21,637–21,649 (2015).
- [33] M. Avendaño-Alejo, O. N. Stavroudis, and A. R. B. y Goitia, “Huygens’s principle and rays in uniaxial anisotropic media. I. Crystal axis normal to refracting surface,” *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, No. 8, 1668–1673 (2002).
- [34] M. Avendaño-Alejo and O. N. Stavroudis, “Huygen’s principle and rays in uniaxial anisotropic media. II. Crystal axis orientation arbitrary,” *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, No. 8, 1674–1679 (2002).
- [35] E. P. Lane, “Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces,” The University of Chicago Press, Cap.6, pp. 187-211, Chicago-Illinois, (1940).
- [36] A. Gray, “Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica,” 2nd ed., Boca Raton, Cap. 5, pp. 115-117, Florida: CRC Press, (1997).
- [37] M. Born and E. Wolf, “Principles of optics,” Cambridge University Press, 7th(expanded) edition, pp.139-141, United Kingdom, (1999).
- [38] A. Bóna, M. A. Slawinski, “Wavefronts and Rays as Characteristics and Asymptotic,” World Scientific, chap. 5, pp. 177-202, United Kingdom, (2011).
- [39] Lawrence, J. D., “A Catalog of Special Plane Curves,” New York: Dover, pp. 40-42, (1972)
- [40] J. Sasián, “Field Curvature Aberration,” *Proc. of SPIE* **9293** , Art. No. 929322, (2014).
- [41] “<https://www.eckop.com/resources/optics/aberrations/>”
- [42] “<https://www.handprint.com/ASTRO/ae4.html>”