



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SOLUCIONES AL PROBLEMA DE LA PALABRA
PARA GRUPOS TRENZAS VÍA
DIAGRAMAS DE CURVAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

ROEL ÁNGEL MÚGICA RODRÍGUEZ



DIRECTOR DE TESIS:

DR. VINICIO ANTONIO GÓMEZ GUTIÉRREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a
mis padres y
hermanos*

Índice general

Introducción	1
1. Grupo de trenzas	2
1.1. Diferentes definiciones del grupo de trenzas \mathbb{B}_n .	2
1.1.1. Trenzas geométricas y sus proyecciones.	2
1.1.2. Trenzas de Artin.	4
1.1.3. Trenzas como el grupo modular de \mathbb{D}_n .	5
1.2. Equivalencia de definiciones.	8
1.2.1. Trenzas de Artin y $Mod(\mathbb{D}_n)$.	9
2. El problema de la palabra para \mathbb{B}_n.	11
2.1. Soluciones clásicas al problema de la palabra para \mathbb{B}_n .	11
2.1.1. Trenzas peinadas.	11
2.1.2. Algoritmo de Dehornoy.	12
2.2. Diagramas de curvas.	13
3. Solución al problema de la palabra vía diagramas de curvas de tipo E_1.	17
3.1. Definiciones y notación.	17
3.2. Diagramas reducidos.	18
3.3. Sucesiones de corte.	21
3.4. Orden y formas canónicas por la izquierda en \mathbb{B}_n .	23
3.5. Ejemplo.	29
4. Solución al problema de la palabra vía diagramas de curvas de tipo E_2.	32
4.1. Definiciones y notación.	32
4.2. Movimientos semicirculares.	34
4.3. Algoritmos de relajación.	35
4.4. Ejemplo	39
5. Solución al problema de la palabra vía diagramas de curvas de tipo E_3.	41
5.1. Proceso de deshacer cruces.	41
5.2. Relación entre CD_n y $CD(E_3)$.	45
5.3. $CD(E_3)$ y automorfismos de F_n .	48
5.4. Ejemplo.	52

6. Grupos de trenzas virtuales y el problema de la palabra.	53
6.1. Trenzas virtuales.	54
6.2. Idea intuitiva de los diagramas de curvas virtuales.	55
6.3. Acción de $\mathbb{V}\mathbb{B}_n$ sobre VCD_n	57
6.3.1. Propiedades de la acción.	62
6.4. La acción es libre.	64
6.4.1. Primera propiedad.	65
6.4.2. Segunda propiedad.	66
6.4.3. Tercera propiedad.	69
6.5. VCD_n y automorfismos de F_{n+1}	70
A. Grupos y relaciones.	74
A.1. Grupos.	74
A.2. Relaciones.	75

Introducción

La teoría de trenzas fue introducida en 1925 por E. Artin en su artículo *Theorie der Zöpfe* [2]. Originalmente se introdujo para encontrar invariantes topológicos de la teoría de nudos mediante los teoremas de Alexander y de Markov [21], pero hoy en día existen aplicaciones de la teoría trenzas en varias ramas de la matemática como en topología, combinatoria, teoría de singularidades, sistemas dinámicos, álgebra de operadores, criptografía por mencionar algunas. Con ello se han encontrado diferentes definiciones y equivalencias de lo que es una trenza, como se verá en el capítulo 1. En particular usaremos la definición del grupo modular del disco con n perforaciones.

El problema de la palabra para los grupos de trenzas, tiene una historia amplia con múltiples soluciones, entre las más conocidas están las soluciones de Artin [3] y de Dehornoy [8]. En el capítulo 2 se introducirán objetos combinatorios llamados **diagramas de curvas**, las cuales son familias de curvas sobre el disco con perforaciones que “codifican” la información de las trenzas, es decir, bajo una cierta acción de grupo, una trenza deforma dicha familia de curvas y dependiendo de cómo lo hace podemos obtener información de ella, por ejemplo si la trenza es trivial o no.

En la tesis trabajaremos con tres tipos de diagramas de curvas, llamados de tipo E_1 , E_2 y E_3 , donde se estudiarán por separado en los capítulos 3, 4 y 5, respectivamente. Es importante remarcar que aunque la finalidad es encontrar una solución al problema de la palabra, algunos diagramas de curvas nos permiten decir más sobre el grupo de trenzas, en particular en el capítulo 3 se encuentra un orden para el grupo de trenzas. En el capítulo 5, se introduce un nuevo tipo de diagrama obtenido de “deshacer cruces”, los cuales coincidirán con los diagramas de curvas de tipo E_3 , esto dará pie a encontrar una solución al problema de la palabra de una forma aún más combinatoria que no dependa explícitamente de la noción del grupo modular del disco con n perforaciones.

Por último, en el capítulo 7 se usará la idea de “deshacer cruces” para extender la solución del problema de la palabra a los grupos de trenzas virtuales, objetos matemáticos introducidos por S. Kamada en [14] que nacen como un análogo del caso clásico para encontrar invariantes de nudos virtuales introducidos por L. Kauffman [16] como extensión de la teoría clásica de nudos.

Nota: Se le recomienda al lector que no esté familiarizado con los conceptos de homotopía, isotopía e isotopía relativa entre espacios topológicos, consultar primero [17], [1] o [13].

Capítulo 1

Grupo de trenzas

En este capítulo introduciremos varias definiciones del grupo de trenzas y como estas se relacionan entre sí. El hecho de tener múltiples formas de pensar al grupo de trenzas nos permite obtener diferentes propiedades de este de manera más sencilla. Por ejemplo, usando la definición por generadores y relaciones (presentación de Artin) nos permite de forma sencilla describir explícitamente una trenza y además facilita saber si una función entre el grupo de trenzas y otro grupo es un homomorfismo.

En esta tesis, la definición principal será la del grupo modular del disco con n perforaciones, ya que dará pie a la construcción de los objetos claves “diagramas de curvas” y de la acción del grupo de trenzas sobre estos. No obstante, los diagramas regulares nos permitirán extender la idea de diagramas de curvas a una generalización del grupo de trenzas (grupo de trenzas virtuales), por lo que toda definición tiene un papel importante en la tesis.

1.1. Diferentes definiciones del grupo de trenzas \mathbb{B}_n .

1.1.1. Trenzas geométricas y sus proyecciones.

Definición 1.1.1. Sea $d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ una curva simple (no se interseca a sí misma) tal que $d(0) \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ y $d(1) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Decimos que d es **monótona** si para toda $t \in [0, 1]$ se cumple $|E_t \cap d| = 1$, donde E_t es el plano de nivel $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$.

Definición 1.1.2. Para $n > 0$ fijo, sean $A_i = (0, i, 1) \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$, $B_i = (0, i, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\{d_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ curvas monótonas, disjuntas dos a dos y que unen un A_i con un B_j . Definimos una **trenza geométrica** β con n cuerdas como la terna $(\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{d_i\}_{i=1}^n)$ y denotamos al conjunto de trenzas geométricas como $\overline{\mathbb{B}}_n$. Por simplicidad de notación, sólo se denotara como (A_i, B_i, d_i) omitiendo los corchetes.

Definición 1.1.3. Sean $\beta = (A_i, B_i, d_i)$, $\beta' = (A'_i, B'_i, d'_i) \in \overline{\mathbb{B}}_n$, definimos la **concatenación** $\beta\beta'$ como el proceso de encimar la trenza β sobre β' tal que B_i coincida con A'_i , así $d_i \cup d'_i$ son curvas monótonas que unen A_i a algún B'_j , luego se reescala tal que $d_i \cup d'_i \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$.

En $\overline{\mathbb{B}}_n$ se puede definir una relación de equivalencia, sean $\beta_1, \beta_2 \in \overline{\mathbb{B}}_n$, decimos que $\beta \approx \beta'$ si y sólo si existe una isotopía H de $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ a sí mismo tal que $H(-, 0) = id$ y $H(\beta, 1) = \beta'$.

Proposición 1.1.4. El conjunto de clases de equivalencia $\overline{\mathbb{B}}_n := \overline{B}_n / \approx$ con producto la concatenación de trenzas geométricas forma un grupo con neutro $[I_n]_{\approx}$ la unión de segmentos de recta entre A_i y B_i . A este se le llamará **grupo de trenzas geométricas**. En [3], [15] o [19] se puede consultar la prueba.

Definición 1.1.5. Sea $\beta \in \overline{B}_n$, decimos que $p : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ tal que $(x, y, t) \mapsto (x, t)$ es una **proyección regular de β** si se satisface:

- $p(\beta)$ tiene un número finito de puntos de intersección.
- Si P es un punto de intersección en $p(\beta)$, entonces $p^{-1}(P) \cap \beta$ tiene exactamente dos puntos.
- Las curvas que forman un punto de intersección en $p(\beta)$ lo hacen de manera transversal, es decir, como en el caso a) y no como en los casos c) y d) de la figura 1.1. En este caso P se llama un **punto doble**.

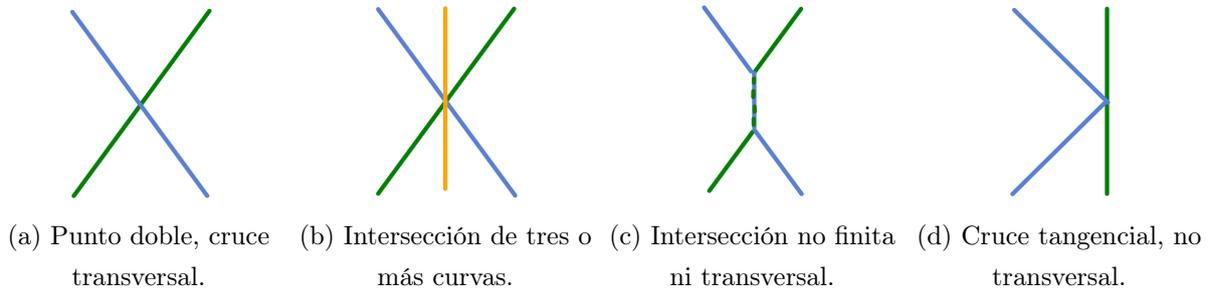


Figura 1.1: Formas de intersección entre las curvas de una trenza geométrica bajo una proyección.

Nota 1.1.6. Para cada trenza geométrica β , siempre existe un representante β' de $[\beta]_{\approx}$ que tiene una proyección regular p , ya que bajo isotopía se puede modificar β para evitar los casos b), c) y d) de la figura 1.1.

Si d_i y d_j son cuerdas tal que $p(d_i)$ se interseca con $p(d_j)$ en un punto doble P , si $x_1 \in p^{-1}(P) \cap d_i$ y $x_2 \in p^{-1}(P) \cap d_j$ son los únicos puntos en sus respectivas intersecciones, se puede saber que cuerda está por arriba de la otra simplemente si $x_1 < x_2$ o viceversa donde $<$ es el orden heredado del eje y ($p^{-1}(P)$ es una traslación del eje y). Así hay dos formas de representar un cruce en $p(\beta)$, como se muestra en la figura 1.2.

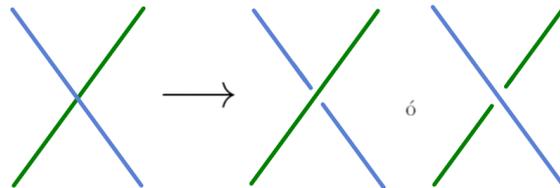


Figura 1.2: Representaciones de un punto doble en una proyección regular.

Definición 1.1.7. Sean $\beta \in \overline{B}_n$ y p proyección regular de β . Decimos que $\hat{\beta} := p(\beta)$ es un **diagrama regular de β** si cada punto doble se cambia por un cruce de la figura 1.2 según sea el caso. Al conjunto de diagramas regulares de n cuerdas lo denotamos como \hat{B}_n .

Definición 1.1.8. Definimos a los **movimientos de trenzas** como las equivalencias entre diagramas regulares mostradas en la figura 1.3.

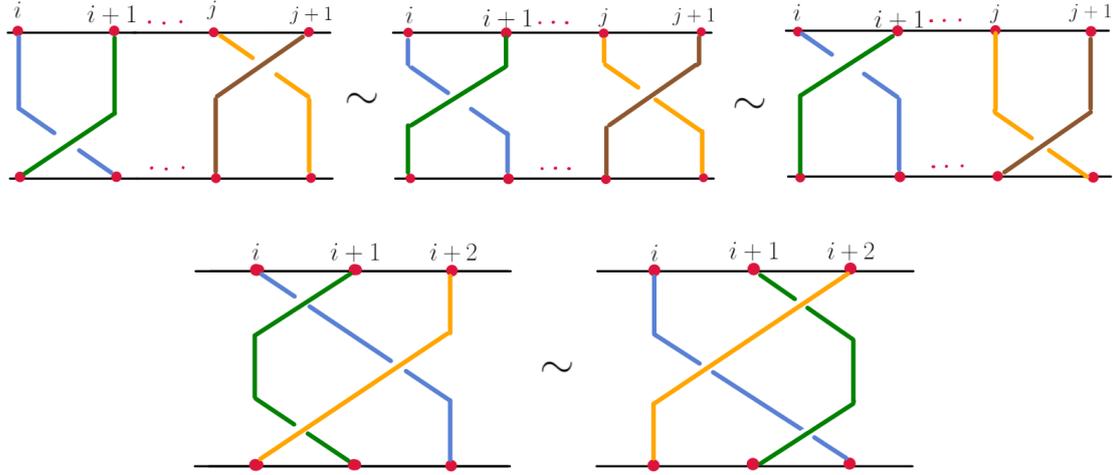


Figura 1.3: Movimientos de trenzas

Los movimientos de trenzas generan una relación de equivalencia \sim , tal que dos diagramas regulares son equivalentes si y sólo si se puede llevar uno al otro mediante una cantidad finita de movimientos de trenzas.

Proposición 1.1.9. El conjunto de clases laterales $\widehat{\mathbb{B}}_n := \widehat{B}_n / \sim$ con producto la concatenación, forma un grupo con neutro $[I_n]_{\sim}$ unión de segmentos de recta que unen $(i, 1)$ con $(i, 0)$. A este grupo se le llamará **grupo de diagramas regulares**. En [19] se puede consultar la prueba.

1.1.2. Trenzas de Artin.

Definición 1.1.10 (Presentación de Artin). Se define el **grupo de trenzas algebraicas o de Artin**, como el grupo que admite la siguiente presentación:

$$\mathbb{B}_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2 \end{array} \right. \right\rangle.$$

A las relaciones se les llamarán **relaciones de trenzas**.

Nota 1.1.11. Note que $\beta, \beta' \in \mathbb{B}_n$ son iguales si existe una sucesión finita:

$$\beta = \beta_1 \rightarrow \beta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_k = \beta'$$

donde para toda $j \in \{1, \dots, k-1\}$ se tiene que β_j es igual a β_{j+1} salvo que se agrega o se reduce una subpalabra de la forma uRu^{-1} con $u \in \mathbb{B}_n$ y R una relación de trenza.

Con esta descripción del grupo de trenzas de Artin, podemos fácilmente dar homomorfismos entre \mathbb{B}_n a \mathbb{Z} y S_n (el grupo simétrico de n elementos), que nos servirán para identificar si dos trenzas son iguales o no.

Proposición 1.1.12. La función $\xi : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\sigma_i \mapsto 1$ para toda i , induce un homomorfismo. Aún más, si $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ con $\varepsilon_j = \pm 1$ entonces $\xi(\beta) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j$. A $\xi(\beta)$ se le conoce como el **exponente** de β .

Demostración. Es claro que ξ satisface las relaciones de trenza, solo falta verificar que $\xi(\beta) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j$ es el homomorfismo inducido. Como $\xi(\sigma_i) = 1$ para toda i , basta con probar que está bien definida.

Si β, β' equivalentes en \mathbb{B} , por la nota 1.1.11 se tiene que $\xi(\beta) = \xi(\beta')$ ya que las subpalabras uRu^{-1} tienen exponente cero, por lo tanto ξ está bien definida. \square

Proposición 1.1.13. *La función $\pi : \mathbb{B}_n \rightarrow S_n$ tal que $\sigma_i \mapsto (i \ i + 1)$ induce un homomorfismo. Si β es una trenza entonces decimos que $\pi(\beta)$ es la **permutación asociada a β** .*

Demostración. Se sigue del hecho que S_n admite una presentación con las mismas relaciones (proposición A.1.6 del Apéndice A), por lo tanto π satisface las relaciones de trenza. \square

Definición 1.1.14. *El núcleo de π es un subgrupo de \mathbb{B}_n llamado el **grupo de trenzas puras** y se denotará por $\mathbb{PB}_n := \ker(\pi)$.*

Ejemplo 1.1.15. *Si $\beta = \sigma_1^{-1} \sigma_2^k \sigma_1$, se tiene que $\xi(\beta) = k$, por lo tanto β no puede ser la identidad si $k \neq 0$.*

Luego $\pi(\beta) = 1$ si k par y $\pi(\beta) = (1 \ 3)$ si k impar, por lo que solo podemos asegurar que β no puede ser la trenza identidad cuando k es impar.

1.1.3. Trenzas como el grupo modular de \mathbb{D}_n .

Para $n > 0$ fijo, por simplicidad en toda la tesis consideraremos a $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ el disco que contiene por diámetro al intervalo $[0, n + 1] \subset \mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{n+1}{2}| \leq \frac{n+1}{2}\}$. Si $Q := \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{D}$, definimos al disco con n perforaciones como $\mathbb{D}_n := \mathbb{D} \setminus Q$.

Definición 1.1.16. *Definimos a $\text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ como el conjunto de homeomorfismos entre \mathbb{D} a sí mismo tal que $f|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}$ y $f(Q) = Q$.*

Nota 1.1.17. *Nótese que al ser \mathbb{D}_n una superficie conexa con frontera no vacía, tenemos que todo homomorfismo que fija la frontera debe preservar la orientación de \mathbb{D}_n .*

El conjunto $\text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ admite una relación de equivalencia \sim tal que $f, g \in \text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ están relacionados si y sólo si f y g son isotópicos relativos en (\mathbb{D}, Q) .

Proposición 1.1.18. *El conjunto de clases $\text{Mod}(\mathbb{D}_n) := \text{Homeo}(\mathbb{D}, Q) / \sim$ con producto la composición de funciones $[f][g] = [g \circ f]$, forma un grupo con neutro $[id]$. Este grupo es llamado el **grupo modular de \mathbb{D}_n** . Demostración en [15].*

Para entender mejor el grupo modular de \mathbb{D}_n , estudiaremos las propiedades de una familia de funciones en particular de $\text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ llamadas medios giros de Dehn.

Medios giros de Dehn.

Las siguientes definiciones y propiedades se obtuvieron de [15].

Definición 1.1.19. *Un **arco generador** α de \mathbb{D}_n es una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ simple (no se interseca a sí misma) tal que $\alpha([0, 1]) \cap Q = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$ con $\alpha(0), \alpha(1)$ distintos y $\alpha([0, 1]) \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$. Según sea el caso, se hará un abuso de notación refiriéndose a α como su imagen $\alpha([0, 1])$.*

Definición 1.1.20. Dado un arco generador α de \mathbb{D}_n , decimos que $U_\alpha \subset \mathbb{D}$ es una **vecindad regular** de α si es un abierto simplemente conexo tal que $\alpha \subset U_\alpha$, $U_\alpha \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$ y $U_\alpha \cap Q = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$.

Definición 1.1.21. En $B(0,1) \subset \mathbb{C}$ bola abierta con centro en 0 y de radio 1, definimos el **medio giro de Dehn elemental** $\rho_\pi : B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ de la siguiente forma:

$$\rho_\pi(z) = \begin{cases} -z & \text{si } z \in B(0, \frac{1}{2}) \\ \exp(2\pi i|z|)z & \text{si } z \in B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Intuitivamente la función ρ_π consiste en rotar por $-\pi$ a la bola $B(0, \frac{1}{2})$ e ir rotando gradualmente los círculos intermedios entre $B(0, \frac{1}{2})$ y $B(0,1)$ un ángulo entre $-\pi$ a 0. Véase la figura 1.4.

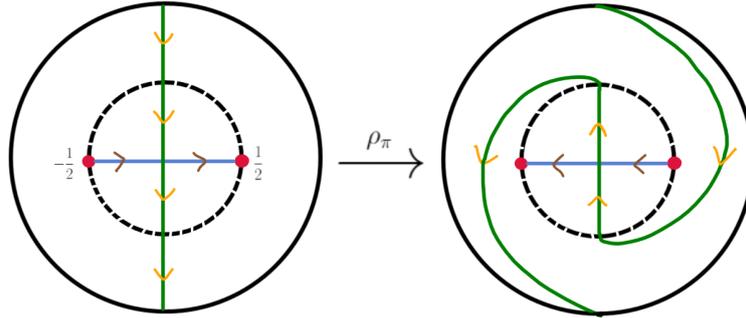


Figura 1.4: Medio giro de Dehn elemental actuando sobre un arco transversal al segmento $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Proposición 1.1.22. El medio giro de Dehn elemental ρ_π es un homeomorfismo.

Demostración. Es claro que la inversa ρ_π^{-1} , se define como ρ_π pero rotando por π en lugar de $-\pi$, así se tiene que ρ_π como ρ_π^{-1} son continuas ya que las funciones $-id$, \exp y $|\cdot|$ son continuas en \mathbb{C} y las imágenes de $f(z) = -z$ y $\exp(\pm 2\pi i|z|)z$ coinciden en la circunferencia de radio $1/2$. \square

Definición 1.1.23 (Medios giros de Dehn). Sea α un arco generador de \mathbb{D}_n y U_α una vecindad regular de α , definimos un **medio giro de Dehn sobre α** como $\tau_\alpha : \mathbb{D}_n \rightarrow \mathbb{D}_n$ de la siguiente manera:

$$\tau_\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{D}_n \setminus U_\alpha \\ (\psi^{-1} \circ \rho_\pi \circ \psi)(x) & \text{si } x \in U_\alpha. \end{cases}$$

donde $\psi : U_\alpha \rightarrow B(0,1) \subset \mathbb{C}$ homeomorfismo que preserva la orientación y lleva U_α en la bola unitaria, tal que $\psi(\alpha) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, dicho homeomorfismo siempre existe ya que U_α es simplemente conexo en \mathbb{C} . En la figura 1.5 se representa como τ_α modifica un arco transversal a la curva α . Estas funciones también son llamadas **semigiros o torceduras de Dehn**.

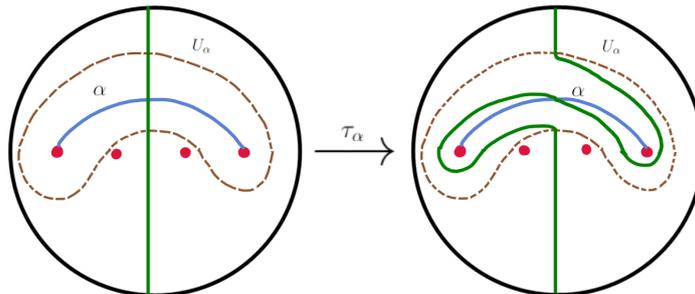


Figura 1.5: Medio giro de Dehn τ_α actuando sobre un arco transversal al arco generador α .

Propiedades de los medios giros de Dehn.

1. Si τ_α y τ'_α son dos medios giros de Dehn para un mismo arco generador α pero con vecindades regulares U_α, U'_α distintas, entonces $\tau_\alpha \sim \tau'_\alpha$:

Dado que U_α, U'_α son homeomorfos (por ser simplemente conexos en \mathbb{C}) podemos dar una isotopía H en \mathbb{D}_n que lleva U_α a U'_α tal que en cada tiempo t se cumpla que $\alpha \subset H(U_\alpha, t)$ y fuera de $H(U_\alpha, t)$ se queda fijo. Por lo tanto, $H : \tau_\alpha \sim \tau'_\alpha$. Ver figura 1.6.

2. Si α, α' son arcos generadores isotópicos relativos en (\mathbb{D}, Q) , entonces $\tau_\alpha \sim \tau_{\alpha'}$:

Dado que α y α' son isotópicas relativas a (\mathbb{D}, Q) tienen los mismos extremos $p, q \in Q$ y existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ isotopía tal que $H(x, 0) = \alpha(x)$, $H(x, 1) = \alpha'(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ y para todo tiempo t , $H([0, 1], t)$ es un arco generador con extremos en p y q . Así $h_t = \tau_{H([0, 1], t)}$, es una isotopía entre τ_α y $\tau_{\alpha'}$. Ver figura 1.7.

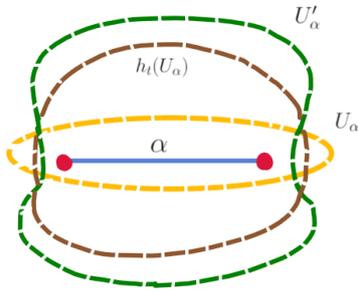


Figura 1.6: Isotopía entre vecindades regulares.

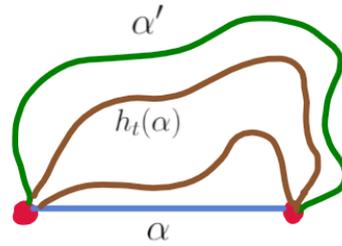


Figura 1.7: Isotopía entre arcos generadores.

3. $\tau_\alpha|_{\partial\mathbb{D}} = id$: Dado que $U_\alpha \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$ y por la definición de τ_α .
4. $\tau_\alpha(Q) = Q$: Por las condiciones que le pedimos a ψ se tiene que $\psi(\alpha(0)) = \frac{-1}{2}$ y $\psi(\alpha(1)) = \frac{1}{2}$ y al aplicar ρ_π se tiene $(\rho_\pi \circ \psi)(\alpha(0)) = \frac{1}{2}$ y $(\rho_\pi \circ \psi)(\alpha(1)) = \frac{-1}{2}$. Por lo que al regresar a \mathbb{D}_n sólo cambió la orientación de la curva α , es decir, tiene los puntos extremos permutados.
5. $\tau_\alpha \sim \tau'_\alpha$ si y sólo si $\alpha \sim \alpha'$:

Como $\tau_\alpha \sim \tau'_\alpha$ permutan los mismos puntos marcados $p, q \in Q$, se tiene que sus arcos generadores tienen los mismos extremos. Luego sus vecindades regulares deben ser isotópicas y por lo tanto $\alpha \sim \alpha'$. El inciso 2 completa la prueba.

6. τ_α es homeomorfismo: Basta con notar que τ_α^{-1} tiene la misma descripción que τ_α salvo que consideramos ρ_π^{-1} en lugar de ρ_π . Por último τ_α y τ_α^{-1} son continuas ya que id, ψ, ρ_π y ρ_π^{-1} son continuas.

7. τ_α es un elemento de $Homeo(\mathbb{D}, Q)$: Consecuencia directa de los incisos 3, 4 y 6.

8. Para $f \in Homeo(\mathbb{D}, Q)$ y α un arco generador, entonces $f \circ \alpha$ es un arco generador y además $\tau_{f \circ \alpha} \sim f \circ \tau_\alpha \circ f^{-1}$:

Como $f(Q) = Q$ se tiene $f(\alpha(0)), f(\alpha(1)) \in Q$, dado que f deja invariante a $\partial\mathbb{D}$ se sigue que $f(\alpha([0, 1])) \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$, es decir, $f \circ \alpha$ es un arco generador.

Sea U_α una vecindad regular de α . Notemos que $U_{f \circ \alpha} = f(U_\alpha)$ es una vecindad regular de $f \circ \alpha$, por lo que $x \in U_{f \circ \alpha}$ si y sólo si $f^{-1}(x) \in U_\alpha$.

Si $x \notin U_{f \circ \alpha}$, $(f \circ \tau_\alpha \circ f^{-1})(x) = (f \circ \tau_\alpha)(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$. Luego si $x \in U_{f \circ \alpha}$, se tiene

$$(f \circ \tau_\alpha \circ f^{-1})(x) = (f \circ \tau_\alpha)(f^{-1}(x)) = (f \circ \psi^{-1} \circ \rho_\pi \circ \psi \circ f^{-1})(x) = ((\psi \circ f^{-1})^{-1} \circ \rho_\pi \circ (\psi \circ f^{-1}))(x).$$

donde $(\psi \circ f^{-1})$ es claramente un homeomorfismo que preserva la orientación que lleva $U_{f \circ \alpha}$ a la bola unitaria $B(0, 1) \subset \mathbb{C}$. Por lo tanto, $\tau_{f \circ \alpha} = f \circ \tau_\alpha \circ f^{-1}$ si $U_{f \circ \alpha} = f(U_\alpha)$, para otra elección de $U_{f \circ \alpha}$ se tiene que $\tau_{f \circ \alpha} \sim f \circ \tau_\alpha \circ f^{-1}$, por el inciso 1.

9. $\tau_\alpha \not\sim id$ para cualquier α arco generador:

Notemos que para todo arco transversal γ que interseca en un único punto a α , satisface que $\tau_\alpha(\gamma)$ no es isotópico relativo a γ en \mathbb{D}_n , ver figura 1.5, por lo tanto, $\tau_\alpha \not\sim id$.

Nota 1.1.24. Hay otras definiciones equivalentes al grupo de trenzas, como subgrupo del grupo de automorfismos del grupo libre con n generadores (hablaremos de esta definición en la sección 5.3) o como el grupo fundamental del espacio de configuraciones con n puntos marcados, que aunque no haremos referencia en esta tesis, es usada en demostraciones de teoremas que se citarán. Se pueden consultar la mayoría de las definiciones y equivalencias en [12].

1.2. Equivalencia de definiciones.

Las definiciones de grupos de trenzas antes descritas resultan ser equivalentes, es decir, los grupos \mathbb{B}_n , $\overline{\mathbb{B}}_n$, $\widehat{\mathbb{B}}_n$ y $Mod(\mathbb{D}_n)$ son isomorfos.

Presentación de Artin y trenzas geométricas.

Para probar que \mathbb{B}_n es isomorfo a $\widehat{\mathbb{B}}_n$ introducimos la noción de bloques y la concatenación de ellos.

Definición 1.2.1. Definimos un **bloque** asociado a σ_i o σ_i^{-1} a los diagramas regulares ilustrados de la figura 1.8.

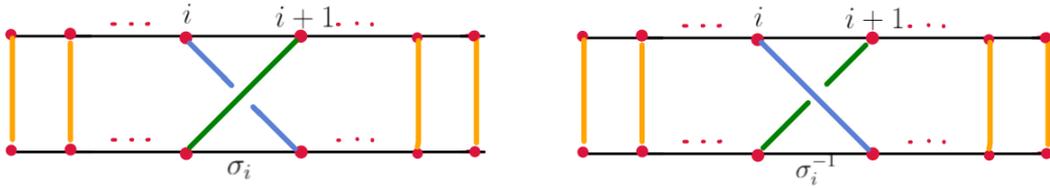


Figura 1.8: Bloques asociados a σ_i y σ_i^{-1} respectivamente.

Proposición 1.2.2. Todo diagrama regular se descompone como la concatenación de bloques σ_i o σ_i^{-1} .

Demostración. Se sigue del hecho que todo diagrama regular se puede deformar de tal forma que un cruce no esté al mismo nivel que otro, por ejemplo, ver la figura 1.9. \square

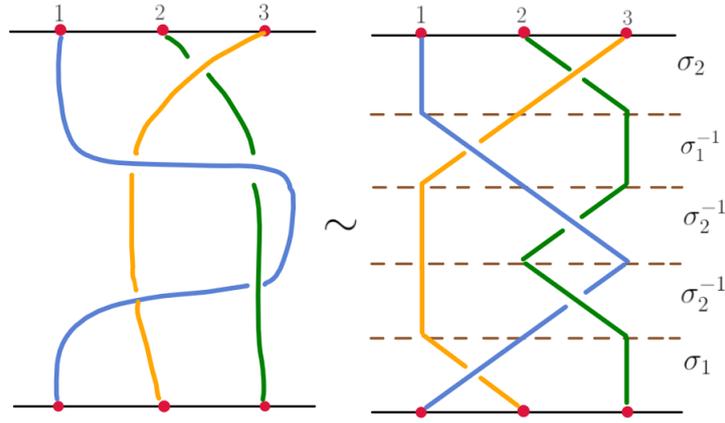


Figura 1.9: El diagrama regular de la izquierda es equivalente a la concatenación de bloques.

Teorema 1.2.3. *Para todo $n > 0$ existe un isomorfismo entre \mathbb{B}_n y $\widehat{\mathbb{B}}_n$.*

Demostración. Si a σ_i se le asocia el bloque correspondiente de la figura 1.9. Claramente los movimientos de trenzas satisfacen las relaciones de trenzas, i.e, existe un homomorfismo y por la proposición 1.2.2 es biyectivo. \square

Teorema 1.2.4. *Para toda $n > 0$ existe un isomorfismo entre $\overline{\mathbb{B}}_n$ y $\widehat{\mathbb{B}}_n$.*

Demostración. Del hecho que todo diagrama regular es la proyección regular de una trenza geométrica se obtiene de inmediato que p es una función biyectiva entre $\overline{\mathbb{B}}_n$ y $\widehat{\mathbb{B}}_n$, por lo que queda probar que sea homomorfismo, dicho resultado se puede consultar en [3] o en [19]. \square

Corolario 1.2.5. *Para todo $n > 0$, $\overline{\mathbb{B}}_n \cong \widehat{\mathbb{B}}_n \cong \mathbb{B}_n$.*

Nota 1.2.6. *A lo largo de la tesis se usará \mathbb{B}_n especialmente refiriéndose a las trenzas de Artin. Cuando hagamos mención explícita de una trenza geométrica o un diagrama regular se indicará.*

1.2.1. Trenzas de Artin y $Mod(\mathbb{D}_n)$.

Consideremos los siguientes arcos generadores $\alpha_i(t) = i + t$ para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, es decir, $\alpha_i([0, 1]) = [i, i+1] \subset \mathbb{D}$ y consideremos $\tau_i := \tau_{\alpha_i}$ los medios giros de Dehn asociados a cada α_i .

Teorema 1.2.7. *Los medios giros $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ satisfacen lo siguiente: $\tau_i \circ \tau_j \sim \tau_j \circ \tau_i$ si $|i-j| \geq 2$ y $\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \sim \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}$.*

Demostración. Primero notemos que al ser α_i un segmento de recta, podemos expresar τ_i de una forma más simple. Tomando $U_i = B(i + \frac{1}{2}, 1)$, la bola abierta con centro en $i + \frac{1}{2}$ y radio 1, es una vecindad regular de α_i y así ψ solo es la traslación $z \mapsto z - (i + \frac{1}{2})$.

Si $|i-j| \geq 2$, entonces U_i, U_j vecindades regulares de α_i, α_j son ajenas, por lo que τ_i deja invariante a U_j y viceversa. Por lo tanto, $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$ y $\tau_i \circ \tau_j \sim \tau_j \circ \tau_i$ para otras vecindades regulares distintas a las bolas unitarias.

Primero veamos que $\tau_i \circ \alpha_{i+1} \sim \tau_{i+1}^{-1} \circ \alpha_i$, lo cual se aprecia en la figura 1.10. Por lo tanto, por el inciso 2 de las propiedades de los medios giros de Dehn, se tiene $\tau_{\tau_i \circ \alpha_{i+1}} \sim \tau_{\tau_{i+1}^{-1} \circ \alpha_i}$.

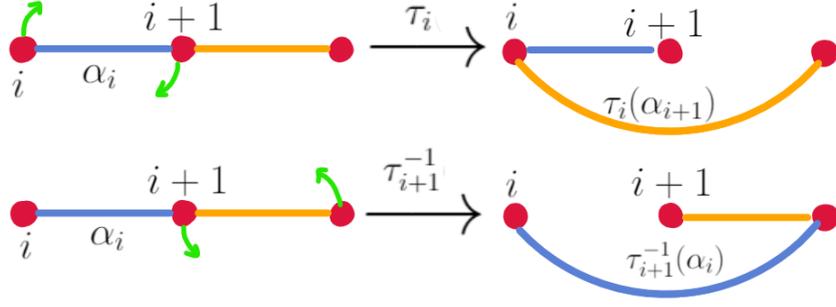


Figura 1.10: Los arcos $\tau_i(\alpha_{i+1})$ y $\tau_{i+1}^{-1}(\alpha_i)$ son isotópicos.

Usando el inciso 8 de las propiedades, para $f = \tau_i$ y $f = \tau_{i+1}^{-1}$ se obtienen las siguientes expresiones:

$$\tau_{\tau_i \circ \alpha_{i+1}} \sim \tau_i^{-1} \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \text{ y } \tau_{\tau_{i+1}^{-1} \circ \alpha_i} \sim \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}^{-1}.$$

Luego $\tau_i^{-1} \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \sim \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}^{-1}$ o lo que es lo mismo $\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \sim \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}$. \square

Corolario 1.2.8. La función $\Phi : \mathbb{B}_n \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{D}_n)$ tal que $\sigma_i \mapsto [\tau_i]$ es un homomorfismo.

Demostración. Sólo notemos que $[\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i] = [\tau_i][\tau_{i+1}][\tau_i] = [\tau_{i+1}][\tau_i][\tau_{i+1}] = [\tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}]$ y $[\tau_i \circ \tau_j] = [\tau_j][\tau_i] = [\tau_i][\tau_j] = [\tau_j \circ \tau_i]$ si $|i - j| \geq 2$. \square

Teorema 1.2.9. La función $\Phi : \mathbb{B}_n \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{D}_n)$ tal que $\sigma_i \mapsto [\tau_i]$ es un isomorfismo.

El corolario anterior nos dice que Φ es un homomorfismo, el inciso 5 de las propiedades de medios giros de Dehn nos asegura la inyectividad. Para la suprayectividad, es necesario demostrar que todo homeomorfismo en $\text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ es isotópico a la composición de medios giros de Dehn, una labor nada sencilla, la demostración de ello se puede encontrar en [15] o en [5].

Nota 1.2.10. Si $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \in \mathbb{B}_n$ entonces su imagen bajo Φ es $[\tau_{i_k}^{\varepsilon_k} \circ \tau_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}} \circ \dots \circ \tau_{i_1}^{\varepsilon_1}]$, note que el orden en el cual se realiza el producto en \mathbb{B}_n es de izquierda a derecha mientras que en el de $\text{Mod}(\mathbb{D}_n)$ es de derecha a izquierda.

En particular, si $\beta = \sigma_i \sigma_j$, se tiene que $\Phi(\beta) = \Phi(\sigma_i \sigma_j) = \Phi(\sigma_i) \Phi(\sigma_j) = [\tau_i][\tau_j] = [\tau_j \circ \tau_i]$.

Capítulo 2

El problema de la palabra para \mathbb{B}_n .

Si G es un grupo con S conjunto de generadores, el problema de la palabra consiste en determinar cuándo dos palabras a, b en términos de S y S^{-1} representan el mismo elemento en G . Se dice que G tiene solución al problema de la palabra si existe un método o algoritmo que termina en tiempo finito tal que responda dicha cuestión. El problema de la palabra es equivalente al problema de determinar cuándo un elemento es la identidad del grupo ($a = b$ si y sólo si $ab^{-1} = 1$).

Hay dos ejemplos clásicos de grupos con solución al problema de la palabra que nos servirán a lo largo de la tesis.

Ejemplo 2.0.1. Si F_n es el grupo libre con $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ generadores. Una palabra de F_n se dice *reducida* si no contiene subpalabras de la forma $x_i x_i^{-1}$ ni $x_i^{-1} x_i$ (*reducciones triviales*), dado que F_n no tiene más relaciones, se sigue que $a = b$ si y sólo si tienen la misma palabra reducida.

Ejemplo 2.0.2. Sea S_n el grupo simétrico de n elementos, en [22] se muestra que toda permutación tiene una descomposición única (salvo orden) en ciclos disjuntos de longitud máxima, así $a = b$ si y sólo si tienen la misma descomposición en ciclos disjuntos de longitud máxima.

2.1. Soluciones clásicas al problema de la palabra para \mathbb{B}_n .

2.1.1. Trenzas peinadas.

Ésta es la primera solución al problema de la palabra conocida para \mathbb{B}_n dada por Artin en [3], la demostración se puede consultar en éste o en los libros [19], [15] para una notación más moderna.

Definición 2.1.1. Definimos el encaje canónico $\iota : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n+1}$, si al pensar a β como una trenza geométrica, simplemente se agrega un segmento de recta d_{n+1} que une A_{n+1} con B_{n+1} .

Definición 2.1.2. Para $n > 1$ fijo, definimos a $f_n : \mathbb{PB}_n \rightarrow \mathbb{PB}_{n-1}$, pensando β como una trenza geométrica, como eliminar la última cuerda d_n de β , a f_n se le conoce como *el homomorfismo de olvido u olvidadizo*.

Proposición 2.1.3. Tanto ι y f_n son homomorfismos, además $f_{n+1} \circ \iota|_{\mathbb{PB}_n} = id_{\mathbb{PB}_n}$, por lo tanto ι es inyectiva y f_n suprayectiva.

Definición 2.1.4. A las trenzas en el núcleo de f_n se le llaman **trenzas peinadas** y denotamos por $U_n := \ker(f_n)$.

Dado que $f_n \circ \iota = id_{\mathbb{PB}_n}$ entonces f_n tiene una sección, por lo tanto $\mathbb{PB}_n \simeq \mathbb{PB}_{n-1} \rtimes U_n$. Así toda trenza $\beta \in \mathbb{PB}_n$ puede ser expandida únicamente en la forma $\beta = \iota(\beta')\beta_n$ con $\beta' \in \mathbb{PB}_{n-1}$ y $\beta_n \in U_n$. Aplicando reiteradamente para \mathbb{PB}_i se obtiene $\beta = \beta_2\beta_3 \dots \beta_n$ donde $\beta_i \in U_i \subset \mathbb{PB}_i \subset \mathbb{PB}_n$.

Proposición 2.1.5. Para toda $i > 1$, $U_i \simeq F_{i-1}$, el grupo libre con $(i - 1)$ generadores.

Por el ejemplo 2.0.1 la descomposición $\beta = \beta_2\beta_3 \dots \beta_n$ es única.

Algoritmo de Artin:

- Si $\beta \in \mathbb{B}_n$ no es una trenza pura, entonces $\beta \neq 1$.
- Si $\beta \in \mathbb{PB}_n$ encontrar su descomposición $\beta = \beta_2\beta_3 \dots \beta_n$.
- $\beta = 1$ si y sólo si $\beta_i = 1$ para toda i .

2.1.2. Algoritmo de Dehornoy.

El algoritmo de Dehornoy explicado en [8], obtuvo gran popularidad debido a lo fácil que es computarizar el algoritmo, aunque tiene complejidad exponencial. Una mejora del algoritmo se puede encontrar en [9].

Definición 2.1.6. Sea w una palabra con letras $\sigma_j^{\pm 1}$, decimos que es **σ -reducida** si siempre que las letras σ_i y σ_i^{-1} están en w , éstas están separadas por al menos una letra $\sigma_j^{\pm 1}$ con $j < i$.

Ejemplo 2.1.7. Para $w_1 = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}$ y $w_2 = \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2$, se tiene que w_1 no es σ -reducida pero w_2 si lo es.

Proposición 2.1.8. Si w es una palabra en generadores $\sigma_j^{\pm 1}$, admite una descomposición de la forma $w = w_0\sigma_1^\varepsilon w_1\sigma_i^{-\varepsilon} w_2$ donde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, w_0 es σ -reducida, w_1 no tiene letras $\sigma_j^{\pm 1}$ con $j < i$ y w_2 es cualquier palabra.

Algoritmo de Dehornoy: Sea f el morfismo tal que $\sigma_1 \mapsto 1$ y $\sigma_i^{\pm 1} \mapsto \sigma_{i-1}^{\pm 1}$, si $w = w_0\sigma_1^\varepsilon w_1\sigma_i^{-\varepsilon} w_2$ definimos a $R : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$ como sigue:

$$R(w) = w_0\sigma_{i+1}^{-\varepsilon}\sigma_{i+2}^{-\varepsilon} \dots \sigma_{j-1}^{-\varepsilon} f(w_1)\sigma_{j-1}^\varepsilon \dots \sigma_{i+2}^\varepsilon\sigma_{i+1}^\varepsilon w_2$$

Donde j es el entero más pequeño donde ni σ_j ni σ_j^{-1} son letras de w_1 . Si $j = i + 1$, la parte del producto se considera la palabra 1. En la figura 2.1 se muestra como actúa R en una trenza.

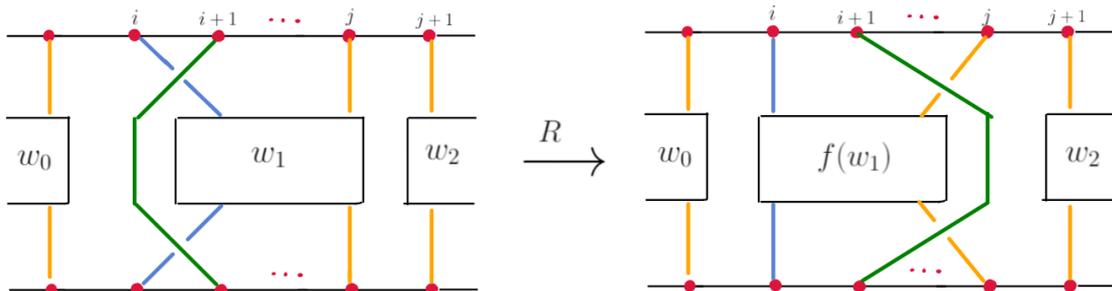


Figura 2.1: Representación diagramática de la función R .

El algoritmo consiste en iterar la función R hasta obtener una palabra σ -reducida, si la trenza resultante no es la trenza identidad entonces $w \neq 1$.

2.2. Diagramas de curvas.

Sea $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \in \mathbb{B}_n$, a partir de ahora haremos un abuso de notación donde para elegir un homeomorfismo en la clase $\Phi(\beta) \in Mod(\mathbb{D}_n)$, escribiremos solamente $\varphi \in \beta \in Mod(\mathbb{D}_n)$ en lugar de $\varphi \in \Phi(\beta) = [\tau_{i_k}^{\varepsilon_k} \circ \tau_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}} \circ \dots \circ \tau_{i_1}^{\varepsilon_1}] \in Mod(\mathbb{D}_n)$, esto con la finalidad de tener todos los resultados en términos de los generadores de Artin σ_i con $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Definición 2.2.1. Sea E una familia de curvas y arcos simples sobre \mathbb{D}_n , denotamos por $cD(E)$ al conjunto $\{\varphi(E) \mid \varphi \in Homeo(\mathbb{D}, Q)\}$, es decir, a la imagen de E bajo todos los homeomorfismos de $Homeo(\mathbb{D}, Q)$.

Definición 2.2.2. Sean $D_1, D_2 \in cD(E)$, definimos una relación de equivalencia \sim en $cD(E)$ tal que, $D_1 \sim D_2$ si y sólo si D_1 y D_2 son isotópicos relativos en (\mathbb{D}, Q) .

Al cociente de $cD(E)$ por la relación \sim se denotará por $CD(E) := cD(E) / \sim$. A los elementos de $CD(E)$ se les llamarán **diagramas de curvas de tipo E** .

Proposición 2.2.3. La función $\cdot : CD(E) \times \mathbb{B}_n \rightarrow CD(E)$ tal que $[D] \cdot \beta = [\varphi(D)]$ con $\varphi \in \beta$ y $D \in [D]$ es una acción por la derecha de \mathbb{B}_n sobre $CD(E)$.

Demostración. Verifiquemos que la función está bien definida, para ello notemos que una isotopía entre funciones inducen una isotopía entre los diagramas y viceversa, es decir:

- Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \beta$, entonces $\varphi_1(D) \sim \varphi_2(D)$ con $D \in [D]$.
- Si $D_1, D_2 \in [D]$, entonces $\varphi(D_1) \sim \varphi(D_2)$ con $\varphi \in \beta$.

Luego \cdot es una acción, es claro que $[D] \cdot 1 = [id(D)] = [D]$ y para toda $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{B}_n$ y $[D] \in CD(E)$, se tiene:

$$\begin{aligned} (([D] \cdot \beta_1) \cdot \beta_2) &= [\varphi_1(D)] \cdot \beta_2 \text{ con } \varphi_1 \in \beta_1 \\ &= [\varphi_2(\varphi_1(D))] \text{ con } \varphi_2 \in \beta_2 \\ &= [(\varphi_2 \circ \varphi_1)(D)] \text{ con } \varphi_2 \circ \varphi_1 \in \beta_1 \beta_2 \\ &= [D] \cdot (\beta_1 \beta_2) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.4. La acción por la derecha de \mathbb{B}_n sobre $CD(E)$ tal que $[D] \cdot \beta = [\varphi(D)]$ con $\varphi \in \beta$ y $D \in [D]$ es transitiva, en particular para todo $[D] \in CD(E)$ existe $\beta \in \mathbb{B}_n$ tal que $[D] = [E] \cdot \beta$.

Demostración. Sea $D \in [D] \in CD(E)$, entonces existe $\beta \in \mathbb{B}_n$ tal que $D = \varphi(E)$ con $\varphi \in \beta$ y así $[D] = [\varphi(E)] = [E] \cdot \beta$. Por lo tanto la acción es transitiva. □

Para el objetivo de la tesis, ocupamos familias de curvas E de \mathbb{D}_n tal que la acción \cdot sea libre, esto ya que si $[D] \cdot \beta_1 = [D] \cdot \beta_2$ para algun $[D] \in CD(E)$, entonces por ser la acción libre se tendría que $\beta_1 = \beta_2$ en \mathbb{B}_n , es decir, el problema de la palabra se reduce a comparar diagramas de curvas.

Nota 2.2.5. Para nuestro caso, probar que la acción es libre es equivalente a mostrar que la trenza trivial es la única que deja fijo al diagrama $[E]$. Ya que por la transitividad de la acción se tiene:

$$[D] \cdot \beta_1 = [D] \cdot \beta_2 \Leftrightarrow [D] \cdot (\beta_1 \beta_2^{-1}) = [D] \Leftrightarrow [E] \cdot (\gamma \beta_1 \beta_2^{-1} \gamma^{-1}) = [E] \Leftrightarrow \gamma \beta_1 \beta_2^{-1} \gamma^{-1} = 1 \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2.$$

Ejemplo 2.2.6. Para la familia de curvas E que se muestra en la figura 2.2, se puede observar que $[E] \cdot 1 = [E] \cdot (\sigma_1^{-1} \sigma_2^k \sigma_1)$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, es decir, la acción no es libre ya que $1 \neq \sigma_1^{-1} \sigma_2^k \sigma_1$ si $k \neq 0$ (ejemplo 1.1.15).

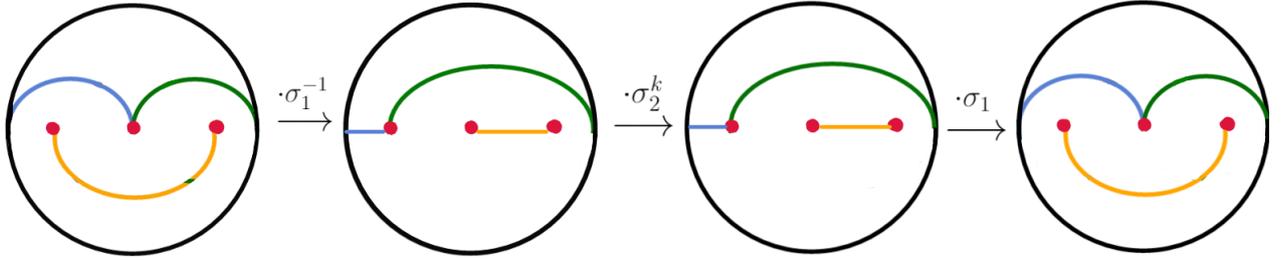


Figura 2.2: La trenza $\sigma_1^{-1} \sigma_2^k \sigma_1$ deja fijo al diagrama $[E]$ para toda $k \in \mathbb{Z}$, sin ser esta la trenza trivial.

Las familias de curvas con las que vamos a trabajar en esta tesis son E_1 , E_2 y E_3 que se muestran en la figura 2.3.

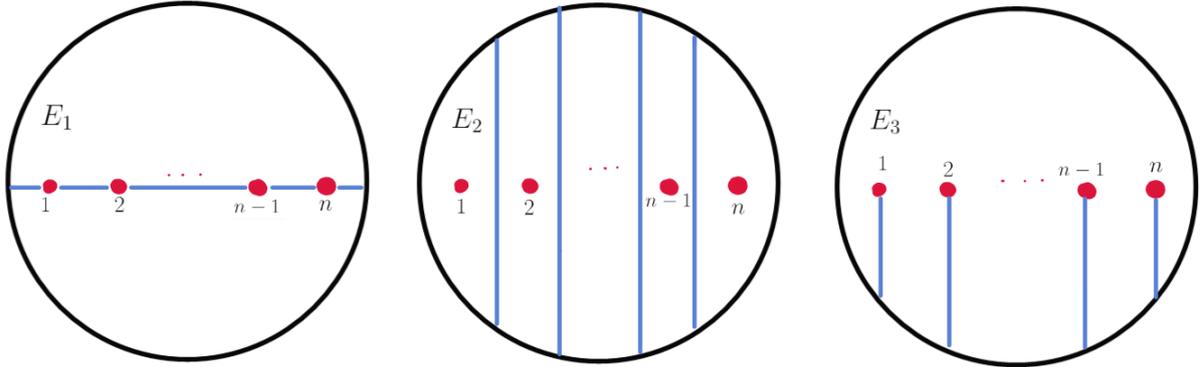


Figura 2.3: Familias de curvas donde la acción por la derecha \cdot es libre.

Proposición 2.2.7. Los diagramas de curvas de tipo E_j con $j \in \{1, 2, 3\}$ son tales que la acción de \mathbb{B}_n sobre $CD(E_j)$ es libre.

Demostración. **Diagrama de curvas de tipo E_1 :** Notemos varias cosas sobre las curvas de E_1 :

- E_1 separa a \mathbb{D}_n en dos componentes conexas, llamadas componente superior y componente inferior denotadas por \mathbb{D}_n^\wedge y \mathbb{D}_n^\vee respectivamente.
- A las curvas de E_1 , se les puede enumerar de e_1 hasta e_{n+1} y además dar una orientación coherente tal que el recorrido empiece en 0 y termine en $n+1$ (de izquierda a derecha), ver figura 2.4.
- Para una curva e_i y vecindad regular U_{e_i} de e_i , denotamos por $U_{e_i}^\wedge := (U_{e_i} \setminus E_1) \cap \mathbb{D}_n^\wedge$ y por $U_{e_i}^\vee := (U_{e_i} \setminus E_1) \cap \mathbb{D}_n^\vee$. Observemos que $U_{e_i}^\wedge$ y $U_{e_j}^\vee$ son ajenos para cualesquiera i, j .

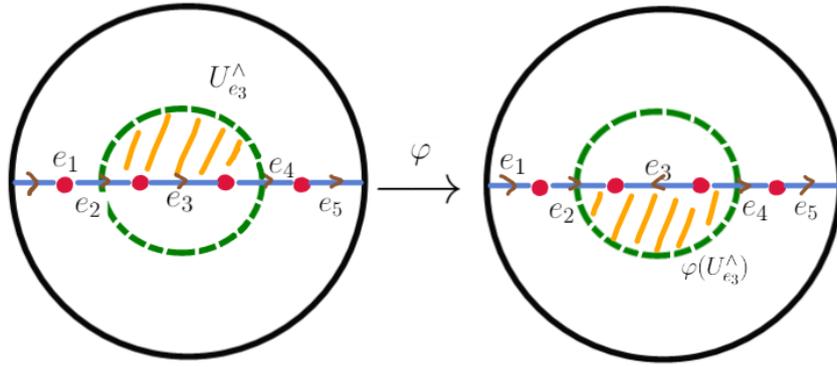


Figura 2.4: El diagrama E_1 bajo un homeomorfismo φ que cambia la orientación de una curva e_i .

Demostremos por contradicción. Supongamos que existe $\varphi \in \text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ tal que $\varphi \not\sim id$, pero $E_1 \sim \varphi(E_1)$. Como $E_1 \sim \varphi(E_1)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi(E_1)$ se ve idéntico a E_1 , pero como $\varphi \not\sim id$ deben existir curvas $\varphi(e_i)$ en $\varphi(E_1)$ que cambiaron de orientación con respecto a E_1 , de lo contrario $\varphi = id$, ver figura 2.4. Dichas $\varphi(e_i)$ no pueden ser $\varphi(e_1)$ ni $\varphi(e_{n+1})$ ya que $\varphi|_{\partial\mathbb{D}} = id$. Ahora si $i \in \{2, \dots, n\}$ es tal $\varphi(e_i)$ cambio de orientación, mostraremos que $\varphi(e_{i-1})$ y $\varphi(e_{i+1})$ con $i-1 \neq 1$ e $i+1 \neq n+1$ deben cambiar de orientación también.

Dado que $\varphi \in \text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ preserva orientación de \mathbb{D}_n , cambiar de orientación a e_i se puede entender como una rotación local por un ángulo π o $-\pi$ (medio giro de Dehn elemental) compuesta con una traslación si $e_i \neq \varphi(e_i)$. En particular si consideramos $U_{e_j} = B(j + \frac{1}{2}, 1)$ para todo $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, φ satisface que $\varphi(U_{e_i}^w) = U_{\varphi(e_i)}^v = U_{e_k}^v$ para alguna $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ y si $\varphi(e_{i+1})$ no cambiara de orientación se tendría $\varphi(U_{e_{i+1}}^v) = U_{\varphi(e_{i+1})}^v = U_{e_m}^v$ con $m = k - 1$ ó $m = k + 1$.

Luego $\varphi(U_{e_i}^w) \cap \varphi(U_{e_{i+1}}^v) \neq \emptyset$ implica que en $\varphi^{-1}(\varphi(E_1)) = E_1$, $U_{e_i}^w \cap U_{e_{i+1}}^v \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Análogo para el caso $\varphi(e_{i-1})$. Por lo tanto, φ cambia de orientación a todas las e_i salvo a e_1 y e_{n+1} , así φ se puede pensar como una rotación local (un medio giro de Dehn) con centro en $\frac{n+1}{2}$ y por un ángulo $(2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ver la figura 2.5. Pero claramente dichos diagramas no son isotópicos a E_1 ya que $\varphi(e_1)$ y $\varphi(e_{n+1})$ no tienen los mismos puntos finales que e_1 y e_{n+1} , es decir, no existe dicha φ .

Por lo tanto si $E_1 \sim \varphi(E_1)$ entonces $\varphi \sim id$, o lo que es lo mismo, la acción \cdot de \mathbb{B}_n sobre $CD(E_1)$ es libre.

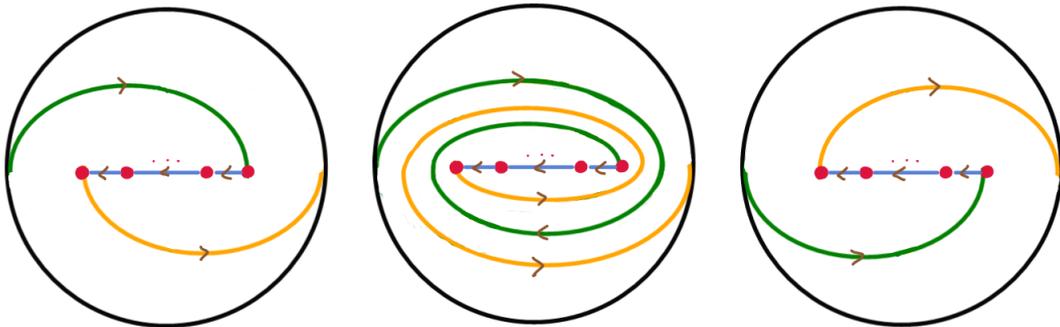


Figura 2.5: Diagramas tales que e_i con $i \in \{2, \dots, n\}$ cambian de orientación, pero e_1 y e_{n+1} no.

Diagrama de curva de tipo E_2 : Similar a E_1 , notemos que E_2 separa a \mathbb{D}_n en n componentes conexas llamadas franjas donde cada una contiene exactamente un punto de Q .

A las franjas las denotamos por R_i , donde $i \in R_i$ y a las curvas de E_2 las enumeramos de e_1 a e_{n-1} como se muestra en el lado izquierdo de la figura 2.6.

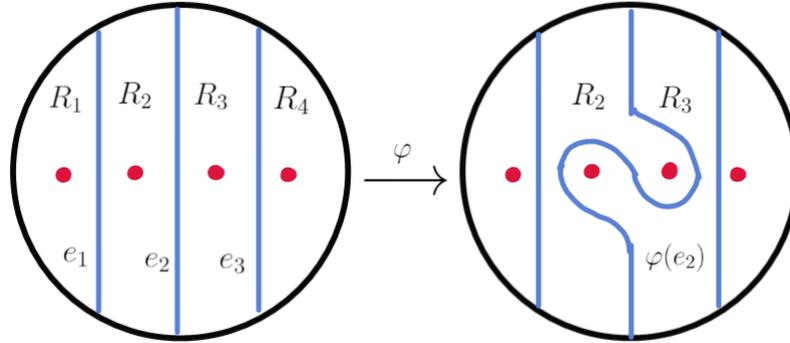


Figura 2.6: El diagrama E_2 bajo un homomorfismo φ no trivial.

Nuevamente por contradicción, supongamos que existe $\varphi \in \text{Homeo}(\mathbb{D}, Q)$ tal que $\varphi \neq id$ pero $E_2 \sim \varphi(E_2)$. Como $E_2 \sim \varphi(E_2)$ solo hay dos posibles casos para dicha φ :

- φ permuta las franjas, i.e. , $\varphi(R_i) = R_k$ con $k \neq i$: Lo cual no es posible ya que φ fija a $\partial\mathbb{D}$.
- Existe $k \in Q$ tal que $k \in R_i$ con $k \neq i$: Esto solo es posible si $\varphi(e_i) \neq e_i$ ó $\varphi(e_k) \neq e_k$, ver figura 2.6, por lo tanto $E_2 \not\sim \varphi(E_2)$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto no existe dicha φ y la acción \cdot de \mathbb{B}_n sobre $CD(E_2)$ es libre.

Diagrama de curva de tipo E_3 : A diferencia de lo hecho para E_1 y E_2 , la familia de curvas E_3 tiene una relación explícita con los diagramas regulares de trenza. Esta relación es el proceso de eliminación de cruces de un diagrama regular de una trenza. Ver figura 2.7.

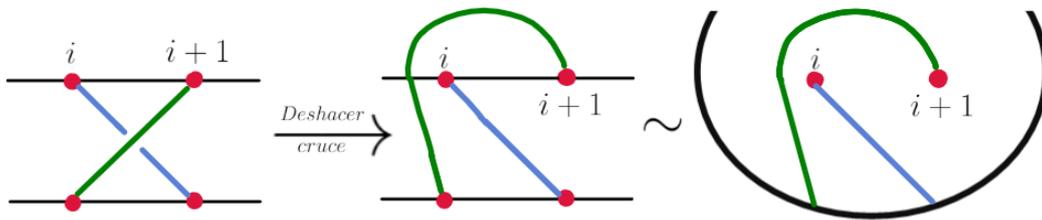


Figura 2.7: Proceso de deshacer cruces y su relación con los diagramas de $CD(E_3)$.

Como esta relación es parte importante del capítulo 6, se demostrará que la acción es libre hasta éste. Por el momento sólo notemos que si damos por hecho esto, existe una biyección $CD(E_3)$ con \mathbb{B}_n y la acción de \mathbb{B}_n sobre el mismo tal que $\beta \cdot \delta = \beta\delta$ sera equivalente a la acción \cdot de \mathbb{B}_n sobre $CD(E_3)$, por lo tanto dicha acción es libre. \square

Así para E_j con $j \in \{1, 2, 3\}$, se cumple que $[E_j] \cdot \beta_1 = [E_j] \cdot \beta_2$ si y sólo si $\beta_1 = \beta_2$ en \mathbb{B}_n , así el objetivo de los siguientes capítulos será encontrar un algoritmo o método para verificar cuando dos diagramas son equivalentes.

Capítulo 3

Solución al problema de la palabra vía diagramas de curvas de tipo E_1 .

En este capítulo usaremos fuertemente el hecho de que E_1 separa al disco \mathbb{D}_n en dos componentes conexas para encontrar un buen representante (*diagramas reducidos*) de cada clase $[D] \in CD(E_1)$ y así poder comparar fácilmente si dos diagramas de curvas son iguales o no. Luego con dichos diagramas reducidos, obtendremos más propiedades del grupo de trenzas, como ser ordenable y que toda trenza admite una forma normal relacionada con el orden dado.

3.1. Definiciones y notación.

Este capítulo está basado en el artículo *Ordering the braid groups* [10].

Para encontrar un algoritmo que determine cuando dos diagramas $D_1, D_2 \in cD(E_1)$ están en la misma clase de equivalencia. Para ello introducimos nueva notación y definiciones.

Definición 3.1.1. Decimos que $\Gamma \in cD(E_1)$ es un diagrama de $\gamma \in \mathbb{B}_n$ si $\Gamma = \varphi(E_1)$ con $\varphi \in \gamma$ pensando a $\gamma \in Mod(\mathbb{D}_n)$. Notemos que E_1 es un diagrama de $1 \in \mathbb{B}_n$.

Definición 3.1.2. Recordemos que las curvas de E_1 se pueden enumerar de e_1 a e_{n+1} y E_1 separa a \mathbb{D}_n en dos componentes conexas \mathbb{D}_n^\wedge y \mathbb{D}_n^\vee . Si Γ es un diagrama de γ , con $\Gamma = \varphi(E_1)$ y $\varphi \in \gamma$, definimos la ***i -ésima curva de Γ*** como $\Gamma_i := \varphi(e_i)$ y a las ***componentes superior e inferior de Γ*** como $\Gamma^\wedge := \varphi(\mathbb{D}_n^\wedge)$, $\Gamma^\vee := \varphi(\mathbb{D}_n^\vee)$ respectivamente.

Definición 3.1.3. Decimos que un diagrama Γ de $\gamma \in \mathbb{B}_n$ está ***orientado*** si las curvas de Γ tienen una orientación coherente que empieza en 0 y termina en $n + 1$.

Definición 3.1.4. Sean Γ y Δ dos diagramas de $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$ respectivamente. Si encimamos un diagrama sobre el otro, definimos lo siguiente:

1. Γ_i, Δ_j se ***intersecan transversalmente*** si en cada intersección de las curvas Γ_i y Δ_j localmente se ven como en la figura 3.1.
2. Γ_i, Δ_j se llaman ***curvas paralelas*** si son isotópicas relativas en (\mathbb{D}, Q) , ver figura 3.1.
3. Γ_i, Δ_j se llaman ***curvas coincidentes*** si $\Gamma_i = \Delta_j$.

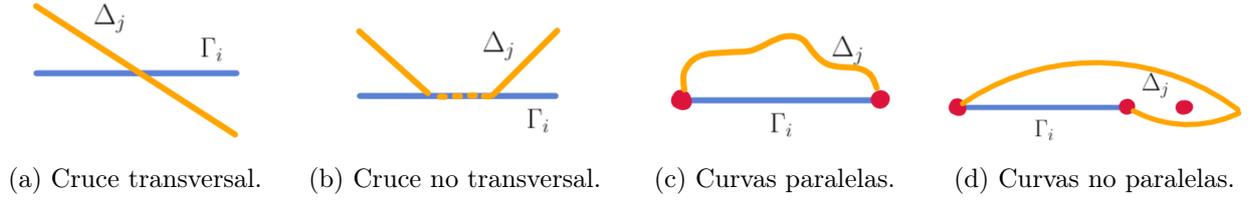


Figura 3.1: Formas en que dos curvas que se intersecan, pueden interactuar.

Por último, si Γ es un diagrama de γ , para cualquier $\beta \in \mathbb{B}_n$ denotamos por $\Gamma \cdot \beta$ o $\beta(\Gamma)$ (haciendo alusión a un $\varphi \in \beta$) a un representante de la clase de $[\Gamma] \cdot \beta = [\varphi(\Gamma)]$ con $\varphi \in \beta$. En la figura 3.2 se observan representantes de $[E_1]$, $[E_1] \cdot \sigma_2$ y $[E_1] \cdot (\sigma_2\sigma_1^{-1})$.

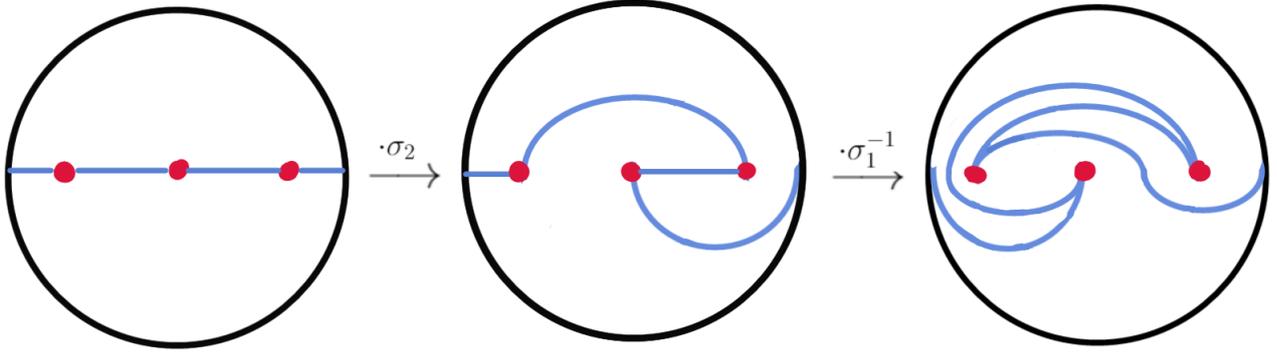


Figura 3.2: Como $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ actúa en E_1 y representantes de $[E_1] \cdot \sigma_2$ y $[E_1] \cdot (\sigma_2\sigma_1^{-1})$.

3.2. Diagramas reducidos.

Definición 3.2.1. Sean Γ, Δ dos diagramas de $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$ respectivamente, definimos el **índice de intersección** entre Γ y Δ como:

$$Ind(\Gamma, \Delta) = n + 1 + \#(\text{intersecciones transversales}) - \#(\text{curvas coincidentes})$$

Ejemplo 3.2.2. De la figura 3.2, si $\Gamma = E_1 \cdot \sigma_2$ y $\Delta = E_2 \cdot \sigma_2\sigma_1^{-1}$ se tiene:

$$Ind(E_1, \Gamma) = 3 + 1 + 0 - 2 = 2, \quad Ind(E_1, \Delta) = 3 + 1 + 2 - 0 = 6 \quad \text{y} \quad Ind(\Gamma, \Delta) = 3 + 1 + 2 - 1 = 5.$$

Nota 3.2.3. Es claro que $Ind(\Gamma, \Delta) = Ind(\Delta, \Gamma)$ y además $Ind(\Gamma, \Delta) = 0$ si y sólo si $\Delta = \Gamma$.

Definición 3.2.4. Sea Γ un diagrama de γ fijo y Δ, Δ' dos diagramas de δ . Se dice que Δ y Δ' son equivalentes con respecto a Γ si existe $\varphi \in [id] \in Mod(\mathbb{D}_n)$ tal que $\Delta' = \varphi(\Delta)$, φ deja fijo las curvas coincidentes con Γ y si H es la isotopía entre id y φ , $H(\cdot, t)$ mantiene los diagramas transversales para todo $t \in [0, 1]$, en otras palabras, la isotopía H deja fijo a Γ en todo tiempo t .

Ejemplo 3.2.5. Sean Δ, Δ' los diagramas de la figura 3.3, se puede observar que Δ y Δ' son diagramas de σ_1^{-1} y además $Ind(E_1, \Delta) = Ind(E_1, \Delta')$, pero Δ y Δ' no son equivalentes respecto a E_1 , ya que la isotopía no puede mantener a las curvas coincidentes.

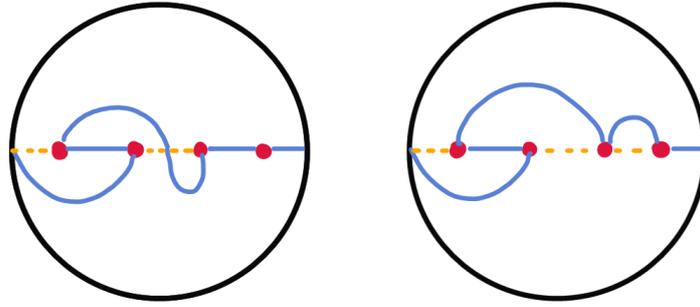


Figura 3.3: Dos diagramas de σ_1^{-1} tales que no son equivalentes respecto a E_1 .

Definición 3.2.6. Sean Γ, Δ dos diagramas de $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$ respectivamente, decimos que Γ y Δ contienen un **bígono** si al sobreponer un diagrama sobre el otro existen Γ_i y Δ_j tales que forman uno de los tres casos en la figura 3.4.

Definición 3.2.7. Decimos que Γ y Δ son **reducidos** o Γ es **reducido** respecto a Δ si se intersecan de manera transversal y Γ, Δ no contienen ningún bígono. Si $\Delta = E_1$, simplemente diremos que Γ es reducido.

Proposición 3.2.8. Para todo par de diagramas Γ, Δ de $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$, existe Δ' diagrama de δ tal que Γ y Δ' son reducidos.

Demostración. Si Γ y Δ no son reducidos, entonces existen Γ_i y Δ_j que forman un bígono D . Sea $\varphi \in [id]$ tal que lleva a Δ_j a una curva que deshaga el bígono como se muestra en la figura 3.4. Es claro que $\Delta' = \varphi(\Delta) \sim \Delta$ y por elección de φ , Γ y Δ' no contienen a D . Aplicando este algoritmo a cada bígono contenido en Γ y Δ , se obtiene lo deseado. \square

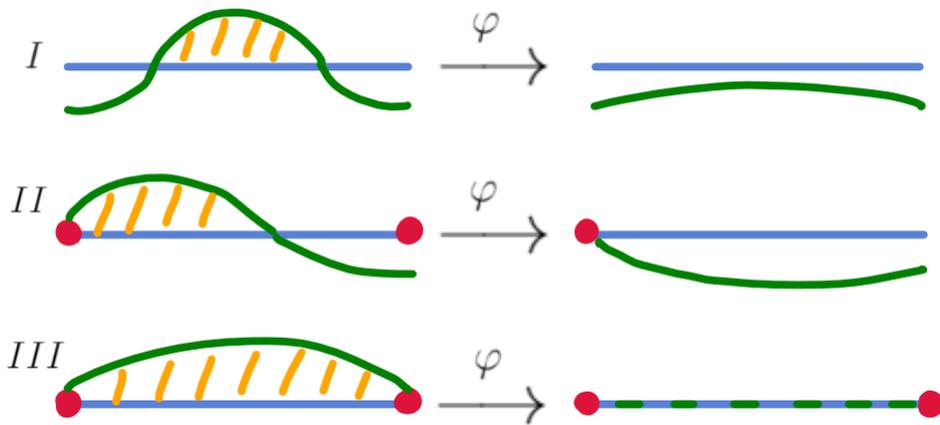


Figura 3.4: Tipos de bigonos y sus movimientos de reducción que los eliminan.

A dichos φ se les llamarán **movimientos de reducción** de tipo I, II o III dependiendo del tipo de bígono.

Nota 3.2.9. Sean Γ y Δ diagramas transversales. Si la curva Δ_i es en sí misma reducida con respecto a Γ (no forma un bígono), entonces se puede reducir Δ con respecto a Γ por una isotopía que deja fijo a Δ_i , ya que los movimientos de reducción sólo modifican a las curvas que forman un bígono.

Lema 3.2.10 (Lema de triple reducción). Sean Γ, Δ y Σ diagramas de $\gamma, \delta, \sigma \in \mathbb{B}_n$ respectivamente, tales que Γ y Σ, Δ y Σ reducidos. Entonces existe $\Delta \sim \Delta'$ tal que Γ, Δ' y Σ son reducidos dos a dos y Δ', Δ son equivalentes respecto a Σ .

Demostración. Supongamos Γ y Δ son no reducidos, entonces existen Γ_i, Δ_j que forman un bígono. Si ninguna curva Σ_k interseca a dicho bígono entonces con los movimientos de reducción de tipo I, II o III se obtiene el Δ' deseado. Ahora, si existe un Σ_k que interseca al bígono, ésta lo hace como se muestra en la figura 3.5, de otra forma (las curvas punteadas) Γ y Σ o Δ y Σ contendrían un bígono y no serían reducidos.

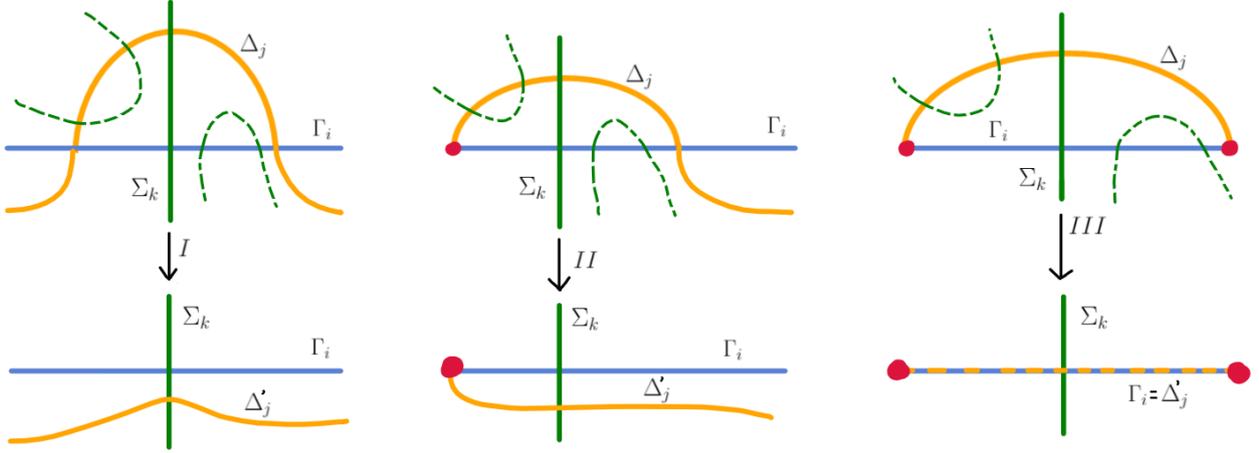


Figura 3.5: Movimientos de reducción aplicado a Δ_j , para hacer Γ, Δ y Σ reducidos dos a dos.

Ahora es claro que podemos aplicar los movimientos de reducción de tipo I, II o III a Δ , además dichos movimientos fijan las curvas coincidentes con Σ y mantiene los diagramas transversales, i.e., Δ y Δ' equivalentes respecto a Σ . \square

Lema 3.2.11. Si Γ, Δ son diagramas de $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$ reducidos y además $\Gamma \sim \Delta$, entonces $\Gamma = \Delta$.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que Γ_1, Δ_1 no son curvas coincidentes, notemos que no existe Δ_i con $i \neq 1$ tal que se interseca con Γ_1 , esto ya que se formarían bígono o $\Delta_i \not\sim \Gamma_j$ para toda j , lo cual no es posible por ser diagramas isotópicos. Luego Γ_1 y Δ_1 serían curvas paralelas y contendrían un bígono, lo cual no es posible por ser reducidos. Por lo tanto Γ_1, Δ_1 son curvas coincidentes y aplicando el mismo argumento para toda i se tiene $\Gamma = \Delta$. \square

Proposición 3.2.12. Si Δ, Δ' son dos diagramas de $\delta \in \mathbb{B}_n$ tales que Δ y Γ, Δ' y Γ son reducidos, entonces Δ y Δ' son equivalentes respecto a Γ .

Demostración. Por el lema de triple intersección existe $\Delta'' \in [\Delta]$ tal que Δ y Δ'' equivalentes respecto a Γ y Δ'', Δ' y Γ reducidos dos a dos. Luego por el lema 3.2.11 $\Delta'' = \Delta'$. \square

Usando la proposición 3.2.12 se tiene que reduciendo un diagrama Δ con respecto a otro Γ , se puede llevar Δ a una única forma estándar respecto a Γ . Esto resuelve el problema de identificar cuando dos diagramas son isotópicos, es decir, $\Delta \sim \Delta'$ si su forma estándar respecto Γ coincide. En particular, a lo largo de la sección consideraremos a Γ como E_1 .

3.3. Sucesiones de corte.

Los diagramas reducidos respecto a E_1 , se pueden expresar de forma única y fácil a través del siguiente objeto combinatorio.

Definición 3.3.1. Una *sucesión de corte* χ es una palabra finita formada por las letras $0, \dots, n, \underline{0}, \dots, \underline{n+1}, \uparrow$ y \downarrow que cumplen:

- χ empieza con $\underline{0}$ y termina con $\underline{n+1}$.
- Cada letra de $\underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{n+1}$ debe aparecer una única vez en χ .
- En la palabra χ números y flechas se alternan, con la única excepción $\underline{i} \underline{i+1}$ o $\underline{i+1} \underline{i}$.

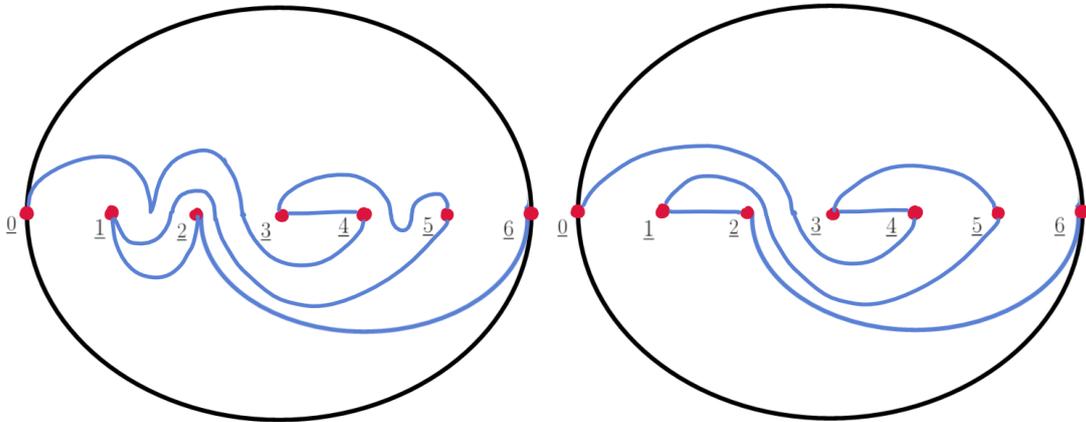
Si Γ es un diagrama orientado de γ , entonces toda subcurva de $\alpha \in \Gamma_i$ puede ser un segmento de recta, una curva contenida en \mathbb{D}_n^\wedge o una curva contenida en \mathbb{D}_n^\vee . Y luego por isotopía estos dos últimos tipos de curvas pueden pensarse como semicircunferencias superiores o inferiores. Con esto en mente, podemos asociarle una sucesión de corte χ a Γ como sigue:

1. Las letras $\underline{0}, \dots, \underline{n+1}$ se pensarán como las perforaciones de \mathbb{D}_n junto con los puntos extremos 0 y $n+1$ en $\partial\mathbb{D}$.
2. Las letras $0, \dots, n$ están asociadas a las curvas e_i de E_1 , donde a i se le asocia la curva e_{i+1} .
3. Los símbolos \uparrow o \downarrow indicarán si una subcurva de Γ_i es una semicircunferencia superior o inferior, respectivamente.
4. Recorriendo Γ con su orientación, escribimos \underline{i} si la curva cruza por la perforación i , se escribe i si la curva cruza por e_{i+1} y \uparrow o \downarrow cada que una subcurva sea semicircunferencia superior o inferior.

Ejemplo 3.3.2. Primero notemos que la sucesión de corte asociada a E_1 es $\underline{0} \underline{1} \dots \underline{n} \underline{n+1}$.

Ahora consideremos los diagramas de la figura 3.6, los cuales tienen por sucesión de corte

$\underline{0} \uparrow \underline{1} \uparrow \underline{2} \downarrow \underline{4} \underline{3} \uparrow \underline{4} \downarrow \underline{4} \uparrow \underline{5} \downarrow \underline{2} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{1} \downarrow \underline{2} \downarrow \underline{6}$ y $\underline{0} \uparrow \underline{2} \downarrow \underline{4} \underline{3} \uparrow \underline{5} \downarrow \underline{2} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{2} \downarrow \underline{6}$, respectivamente.



(a) $\underline{0} \uparrow \underline{1} \uparrow \underline{2} \downarrow \underline{4} \underline{3} \uparrow \underline{4} \downarrow \underline{4} \uparrow \underline{5} \downarrow \underline{2} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{1} \downarrow \underline{2} \downarrow \underline{6}$

(b) $\underline{0} \uparrow \underline{2} \downarrow \underline{4} \underline{3} \uparrow \underline{5} \downarrow \underline{2} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{2} \downarrow \underline{6}$

Figura 3.6: Sucesiones de corte para dos diagramas isotópicos.

Definición 3.3.3. Definimos una **reducción** de una sucesión de corte χ al remplazar una subpalabra por una con menos letras, de acuerdo a las siguientes reglas (el símbolo \updownarrow denota a \uparrow o \downarrow).

- $\underline{i} \updownarrow i \rightarrow \underline{i}$, $\underline{i+1} \updownarrow i \rightarrow \underline{i+1}$, $i \updownarrow \underline{i} \rightarrow \underline{i}$ y $i \updownarrow \underline{i+1} \rightarrow \underline{i+1}$.
- $\downarrow i \downarrow \rightarrow \downarrow$ y $\uparrow i \uparrow \rightarrow \uparrow$.
- $i \updownarrow i \rightarrow i$.
- $\underline{i} \updownarrow \underline{i+1} \rightarrow \underline{i} \underline{i+1}$ y $\underline{i+1} \updownarrow \underline{i} \rightarrow \underline{i+1} \underline{i}$.

Una sucesión de corte que no admite reducciones se llamara **reducida**.

Nota 3.3.4. Note que si Γ es un diagrama de γ y χ su sucesión de corte asociada, las reducciones eliminan b́igonos en Γ . Observe el ejemplo 3.3.2 donde el segundo diagrama es un diagrama reducido del primero y se puede llevar la sucesión de corte asociada al primer diagrama a la del segundo mediante reducciones.

Proposición 3.3.5. Toda trenza γ tiene asociada una única sucesión de corte reducida.

Demostración. Sea χ una sucesión de corte de un diagrama Γ de γ , de la nota 3.3.4 χ' sucesión reducida de χ tiene asociado un diagrama reducido Γ' . A su vez tomamos χ'' sucesión de corte asociada a Γ'' diagrama reducido de γ . De la proposición 3.2.12 se deduce que Γ' es equivalente a Γ'' respecto a E_1 , por lo tanto χ' y χ'' representan diagramas equivalentes respecto a E_1 , i.e., $\chi' = \chi''$. \square

Ahora veamos como podemos encontrar la sucesión de corte asociada a una trenza β .

Algoritmo 1: Sea β una trenza y χ su sucesión de corte reducida asociada. Entonces la sucesión de corte de $\beta\sigma_i$ puede ser obtenida aplicando **simultáneamente** los siguientes reemplazos:

1. $\underline{i} \rightarrow \underline{i+1}$ y $\underline{i+1} \rightarrow \underline{i}$.
2. $\downarrow (\underline{i}) \rightarrow \downarrow i - 1 \uparrow (\underline{i+1})$ y $(\underline{i}) \downarrow \rightarrow (\underline{i+1}) \uparrow i - 1 \downarrow$.
3. $\underline{i-1} (\underline{i}) \rightarrow \underline{i-1} \uparrow (\underline{i+1})$ y $(\underline{i}) \underline{i-1} \rightarrow (\underline{i+1}) \underline{i-1}$.
4. $\uparrow (\underline{i}) \rightarrow (\underline{i+1})$ y $(\underline{i}) \uparrow \rightarrow (\underline{i+1}) \uparrow$.
5. $\downarrow (\underline{i+1}) \rightarrow \downarrow (\underline{i})$ y $(\underline{i+1}) \downarrow \rightarrow (\underline{i}) \downarrow$.
6. $\underline{i+2} (\underline{i+1}) \rightarrow \underline{i+2} \downarrow (\underline{i})$ y $(\underline{i+1}) \underline{i+2} \rightarrow (\underline{i}) \downarrow \underline{i+2}$.
7. $\uparrow (\underline{i+1}) \rightarrow \uparrow i + 1 \downarrow (\underline{i})$ y $(\underline{i+1}) \uparrow \rightarrow (\underline{i}) \downarrow i + 1 \uparrow$.
8. $\downarrow i \uparrow \rightarrow \downarrow i - 1 \uparrow i \downarrow i + 1 \uparrow$ y $\uparrow i \downarrow \rightarrow \uparrow i + 1 \downarrow i \rightarrow i - 1 \downarrow$.

En los reemplazos de 2 al 7, el reemplazo 1 esta siendo aplicado, y su aplicación está siendo notado por paréntesis. Para σ_i^{-1} son los mismos reemplazos pero intercambiando \uparrow por \downarrow y viceversa. Los reemplazos se interpretan fácilmente si se dibuja la curva implicada en un diagrama D de β . Ver figura 3.7 para entender los reemplazos 2 y 8.

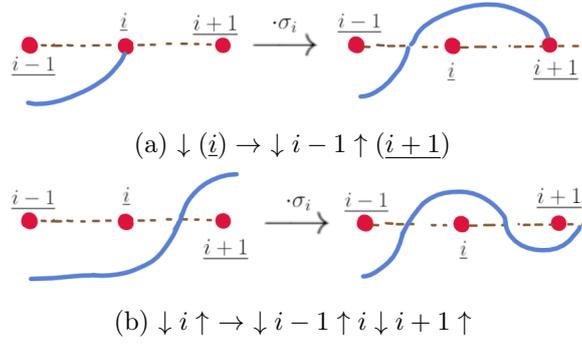


Figura 3.7: Interpretación de los movimientos 2 y 8 de reducción, respectivamente.

Por lo tanto, si se empieza con la sucesión de corte $\underline{0} \dots \underline{n+1}$ asociada a E_1 , aplicando el algoritmo anterior y reduciendo la sucesión de corte resultante, se obtiene la sucesión de corte reducida de cualquier trenza. Así $\beta = 1$ si y sólo si su sucesión de corte reducida χ es la sucesión $\underline{0} \underline{1} \dots \underline{n} \underline{n+1}$, es decir, esta forma nos da una solución al problema de la palabra.

3.4. Orden y formas canónicas por la izquierda en \mathbb{B}_n .

Aunque con lo anterior ya tenemos dos criterios de como identificar cuándo dos diagramas pertenecen a la misma clase de equivalencia y por lo tanto cuando dos trenzas son la misma, podemos usar el hecho de que E_1 separa a \mathbb{D}_n en dos componentes conexas y dar una forma canónica a las trenzas. Para ello le daremos un orden a \mathbb{B}_n .

Sean Γ y Δ diagramas de $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$ reducidos, consideramos a Δ orientado. Construimos un orden en \mathbb{B}_n de la siguiente manera:

- Si todas las curvas de Δ coinciden con las de Γ entonces $\delta = \gamma$.
- Si Δ_j es la primera curva que no coincide con Γ_j , entonces Δ_j y Γ_j tienen el mismo punto inicial y Δ_j corta primero (en sentido de la orientación de Δ_j) a Γ^\wedge o a Γ^\vee . En el primer caso decimos $\delta > \gamma$ y en el segundo $\delta < \gamma$.

Ejemplo 3.4.1. Considerando los diagramas de $1, \sigma_2$ y $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ de la figura 3.2, los cuales son reducidos dos a dos. Comparando a pares se observa que $\sigma_2\sigma_1^{-1} < 1 < \sigma_2$. Ver figura 3.8.

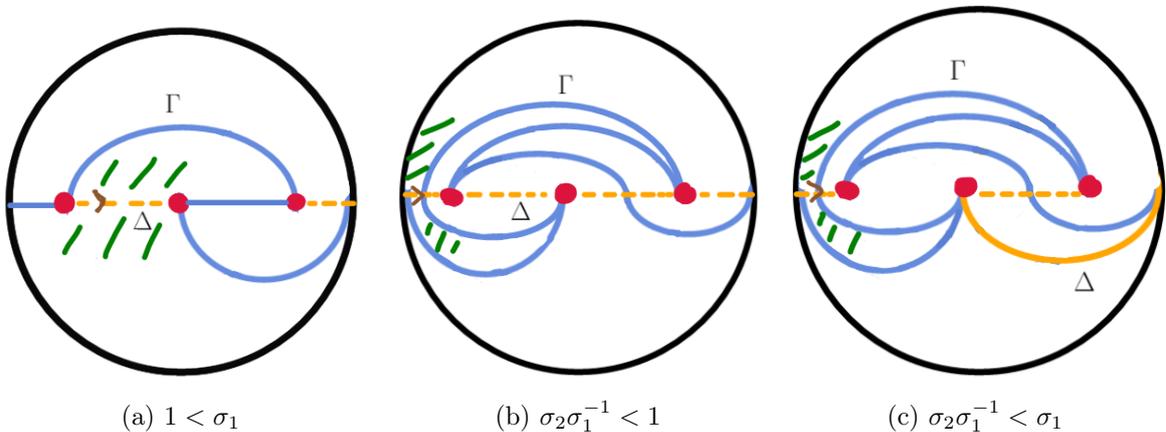


Figura 3.8: Comparación de las trenzas $1, \sigma_1$ y $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ dos a dos.

Proposición 3.4.2. *La relación \leq como antes descrita, es un orden de \mathbb{B}_n .*

Demostración. Por la proposición 3.2.8 para toda $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$ podemos construir diagramas Γ, Δ reducidos. La reflexividad y antisimetría de la relación se verifica de inmediato.

Ahora veamos que la relación es transitiva, es decir, si $\gamma, \delta, \sigma \in \mathbb{B}_n$ tal que $\gamma \leq \delta \leq \sigma$ entonces $\gamma \leq \sigma$. Por el lema de triple reducción (lema 3.2.10) podemos encontrar diagramas Γ, Δ y Σ de γ, δ, σ respectivamente, tales que son reducidos dos a dos. El resultado se sigue del hecho que como Γ_i corta primero a Δ^\vee y Δ_j corta primero a Σ^\vee entonces Γ_j corta primero a Σ^\vee . Por lo tanto $\gamma \leq \sigma$. \square

Proposición 3.4.3. *La relación \leq es invariante por la derecha.*

Demostración. Sean $\gamma, \delta \in \mathbb{B}_n$ tales que $\gamma < \delta$ y Γ, Δ diagramas reducidos de γ y δ . Para cualquier $\sigma \in \mathbb{B}_n$, existe $\varphi \in [\sigma]$ tal que $\varphi(\Gamma)$ y $\varphi(\Delta)$ son diagramas reducidos de $\gamma\sigma$ y $\delta\sigma$. Por último $\varphi(\Gamma)_i$ corta primero a $\varphi(\Delta)^\vee$ por ser φ una isotopía que fija la frontera, i.e., $\gamma\sigma < \delta\sigma$. \square

Corolario 3.4.4. *El grupo \mathbb{B}_n es libre de torsión.*

Demostración. Si $\beta \in \mathbb{B}_n$ es mayor a 1, entonces $1 < \beta < \beta^2 < \dots < \beta^k < \dots$, por lo tanto el orden de β no es finito. Análogo si $\beta < 1$. \square

Definición 3.4.5. *Sea $\gamma \in \mathbb{B}_n$, decimos que γ es **positiva** si $\gamma > 1$ y **negativa** si $\gamma < 1$. Si además Γ es un diagrama de γ tal que la i -ésima curva de Γ es la primera que no coincide con E_1 , decimos que γ es (**geoméricamente**) **i -positiva** o **i -negativa**.*

*Además si γ es i -positiva o i -negativa, se dice que γ es **j -neutra** para cada $j < i$.*

Nota 3.4.6. *Note que teniendo un diagrama orientado reducido Γ de una trenza γ , es fácil saber si es i -positiva o i -negativa. Solo se observa Γ_i la primera curva que no coincide con E_1 y si el segmento inicial de Γ_i está contenido en \mathbb{D}_n^\wedge (va hacia arriba) es i -positiva y si está contenido en \mathbb{D}_n^\vee (va hacia abajo) es i -negativa.*

Proposición 3.4.7. *Si χ es la sucesión de corte reducida asociada a γ . Se tiene que γ es positiva si y sólo si la primera flecha que aparece en χ es \uparrow . También γ es negativa si y sólo si la primera flecha que aparece en χ es \downarrow .*

Demostración. La demostración es directa de la nota 3.4.6 \square

En [7] Dehornoy prueba que el grupo de trenzas es ordenable, y aún más da una forma normal para cada trenza. Tales resultados se resumen en la siguiente definición y teorema.

Definición 3.4.8. *Una trenza $\beta \in \mathbb{B}_n$, se dice **σ_i -positiva** si admite una descomposición de la forma $\beta = \beta_0\sigma_i\beta_1\sigma_i\dots\sigma_i\beta_k$ donde β_i son palabras formadas por las letras $\sigma_{i+1}^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$. Y β es **σ_i -negativa** si β^{-1} es σ_i -positiva. Además si β es σ_i -positiva o σ_i -negativa con $i > 1$, se dice que β es **σ_j -neutra** para cada $j < i$.*

*Decimos que β es **σ -positiva** o **σ -negativa** si es σ_i -positiva o σ_i -negativa para alguna i .*

Teorema 3.4.9 (Teorema de Dehornoy). *Toda trenza no trivial o es σ -positiva, o es σ -negativa.*

Ahora veamos como los conceptos de σ_i -positiva y geoméricamente i -positiva, son equivalentes.

Proposición 3.4.10. *Una trenza σ_i -positiva es geoméricamente i -positiva.*

Demostración. Sea $\gamma = \beta\sigma_i\beta'$ con β, β' palabras formadas por las letras $\sigma_{i+1}^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, es claro que γ es σ_i -positiva. Consideremos Γ diagrama reducido de γ . Por como son β, β' se tiene Γ_i es la primera curva de Γ que no coincide con E_1 . Y σ_i hace que Γ_i corte primero a E_1^\wedge , es decir, γ es geoméricamente i -positiva. Luego toda trenza σ_i -positiva es el producto de trenzas de la forma $\beta\sigma_i\beta'$.

Por último falta mostrar que el producto de trenzas geoméricamente i -positivas es i -positiva. Para ello si γ y δ son i -positivas, entonces $\gamma\delta$ tiene un diagrama $\delta(\Gamma)$ reducido respecto a E_1 cuyas primeras $i - 1$ curvas coinciden con E_1 y $1 < \gamma\delta$. \square

Para probar que toda trenza geoméricamente i -positiva es σ_i -positiva es necesario introducir varias definiciones primero.

Definición 3.4.11. *Sea Γ un diagrama reducido de γ , definimos un **arco útil** b de Γ como un segmento de alguna curva Γ_i que satisface las siguientes condiciones:*

- *b empieza en un punto de e_1 (puede ser el punto 0), y termina en una perforación de \mathbb{D}_n . Podemos orientar el segmento en este sentido.*
- *El interior de b no interseca e_1 , i.e., salvo el punto inicial de b , el segmento b no vuelve a cruzar a e_1 .*
- *El segmento b corta primero a \mathbb{D}_n^\wedge , i.e., la primera parte del segmento esta contenida en \mathbb{D}_n^\wedge .*

*Además si Γ contiene varios arcos útiles, llamamos **arco útil más a la izquierda** a aquel que su único punto de intersección con e_1 esté más cercano (con el orden de \mathbb{R}) al 0.*

Proposición 3.4.12. *Si $\gamma \in \mathbb{B}_n$ es geoméricamente 1-positivo y Γ diagrama reducido de γ . Entonces Γ contiene un arco útil.*

Demostración. De manera exhaustiva veamos todos los casos posibles en que Γ_1 puede interactuar con e_1 . El primer caso es cuando Γ_1 no cruza a e_1 salvo en su punto inicial, en este caso Γ_1 es en sí un arco útil. Ver caso a) en figura 3.9.

Para otros casos consideremos la curva cerrada en \mathbb{D} tal que empieza en 0, sigue a Γ_1 hasta la primera intersección con e_1 y luego un segmento de línea hasta 0 de nuevo. Ésta curva cerrada acota un disco S en \mathbb{D} , y puede ser de tres maneras: Γ_1 interseca a e_1 por arriba, en 1 o por abajo. Como se muestra en la figura 3.9.

Para los casos b) y c), se tiene que el disco S encierra mínimo una perforación de \mathbb{D}_n ya que Γ es reducido (de forma contraria S sería un bígono). Luego existe Γ_i que tiene un punto extremo a esta perforación, Γ_i debe intersecar a e_1 o se intersecaría con Γ_1 , por lo tanto $\Gamma_i \cap S$ es un arco útil de Γ .

Para el último caso d), construiremos la siguiente sucesión de símbolos $+$ y $-$. Recorremos las curvas de Γ empezando por 0, escribimos el símbolo $+$ si se cruza a e_1 por abajo y $-$ si se cruza por arriba o en 1. Si el recorrido empieza por $+$, la sucesión debe tener un $-$ ya que la curva no está contenida en S . Por ello en la sucesión aparece un $+ -$ lo cual representa un segmento de curva que junto a un segmento de e_1 acotan un disco S' . Ver inciso d) de la figura 3.9.

Como Γ es reducido entonces S' contiene una perforación en su frontera (distinto de 1) o en su interior. Si la perforación está en su frontera, una parte del segmento de curva formado por $+ -$ es un arco útil. Si la perforación está en el interior se reduce a los casos b) o c). \square

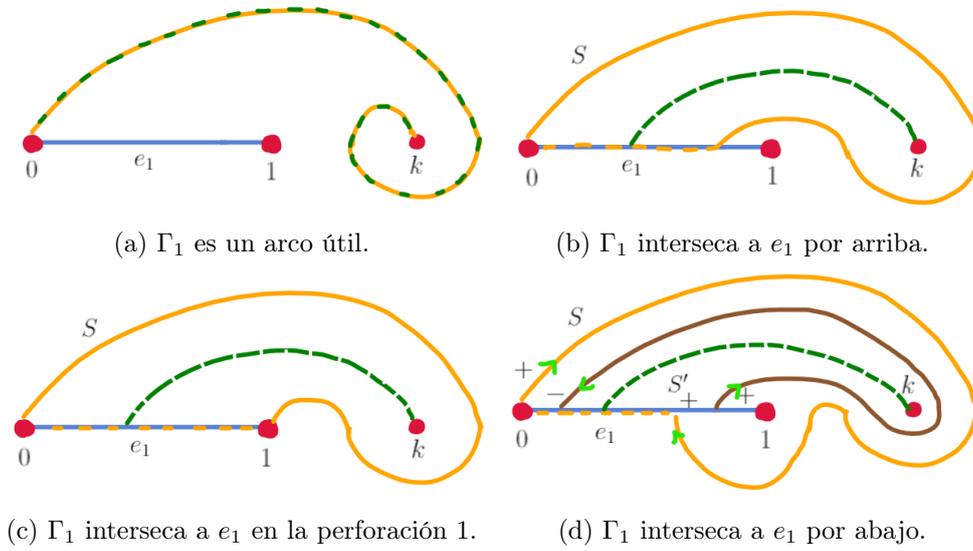


Figura 3.9: Formas en que Γ_1 puede intersecar a e_1 .

Definición 3.4.13. Sea γ geométricamente 1-positiva, Γ un diagrama reducido de γ y b un arco útil de Γ con extremos $x \in e_1$ y una perforación k . Decimos que $\beta \in \mathbb{B}_n$ es un **deslizamiento sobre b** , si $\beta(\Gamma)$ es el diagrama resultante de desplazar la perforación k sobre b hasta x y reetiquetar las perforaciones como $k \mapsto 1$, $j \mapsto j+1$ con $j \in \{1, \dots, k-1\}$ y fija las demás. Si $x = 0$ entonces se agrega un segmento de recta que separe a 0 y x , i.e., $\beta(\Gamma_1) \sim e_1$.

Ejemplo 3.4.14. En la figura 3.10, se muestran dos desplazamientos sobre arcos útiles.

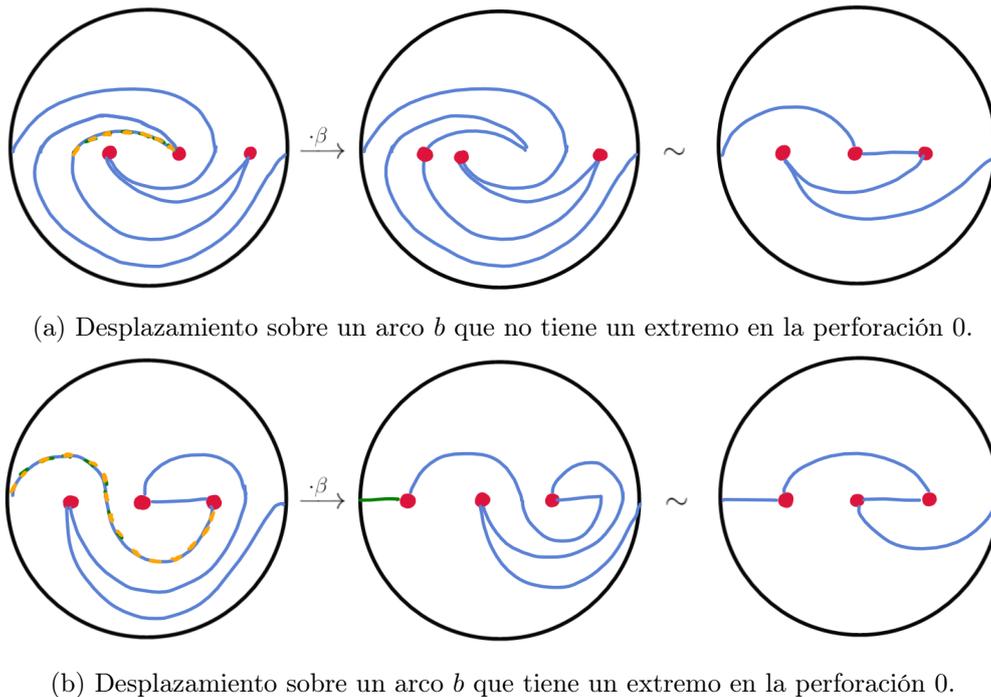


Figura 3.10: Dos desplazamientos sobre arcos útiles b .

Proposición 3.4.15. *Sea γ una trenza geoméricamente 1-positiva, b un arco útil más a la izquierda y β un deslizamiento sobre b . Entonces $\gamma\beta$ es 1-positiva o 1-neutra, pero no 1-negativa y además β es negativa.*

Demostración. Sea b un arco útil más a la izquierda de γ con extremos $x \in e_1$ y k una perforación. Hay dos casos, si x es 0 o un punto interior de e_1 . Si $x = 0$ por definición de deslizamiento sobre un arco útil se tiene que $\beta(\Gamma_1) \sim e_1$, es decir, $\beta(\Gamma)$ es 1-neutra.

Si $x \in \text{int}(e_1)$ se debe verificar que $\beta(\Gamma)$ reducido (sin bígonos) es 1-positivo. Para ello construiremos un diagrama Δ de β^{-1} tal que Δ_1 empieza en 0, sigue por e_1 hasta x_0 un punto cercano a x ($x_0 = x - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$) y sigue paralelamente al arco b hasta k . Ver figura 3.11. Note que en efecto puede existir un diagrama Δ de β^{-1} con dicha Δ_1 , ya que deslizar sobre b lleva Δ_1 a e_1 por ser paralela a b_1 .

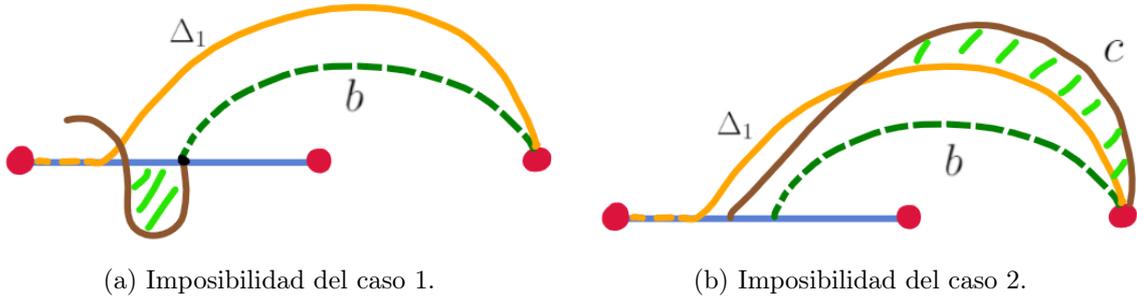


Figura 3.11: Posibles bígonos de Γ con Δ_1 .

Ahora veamos los posibles casos de reducciones de Γ respecto a Δ_1 .

1. Supongamos que Γ tiene un bígono de tipo II cuya frontera contiene al arco b , entonces cortando la banda delimitada por Δ_1 , b y e_1 , habría un bígono de tipo I entre Γ y E_1 , lo cual es una contradicción por ser Γ reducido. Ver inciso a) de la figura 3.11.
2. Supongamos que Γ tiene un bígono de tipo II cuya frontera contiene un segmento final de la curva Δ_1 y otro segmento de una curva c de Γ distinto a b . Entonces c debe ser un arco útil que está más a la izquierda que b , lo cual no es posible por ser b el arco útil más a la izquierda. Ver inciso b) de la figura 3.11.
3. Cualquier bígono de tipo I con respecto a Δ_1 sería un bígono de tipo I respecto a E_1 , lo cual no es posible.

Por la nota 3.2.9 se puede reducir Δ con respecto a Γ tal que Δ_1 queda fija. Como β^{-1} es 1-positiva (revisar nota 3.4.6) y $\beta^{-1} < \gamma$ (Δ corta primero a Γ^\vee), se tiene que β 1-negativa y $\gamma\beta$ es 1-positiva. \square

Definición 3.4.16. *Sea Γ un diagrama reducido de $\gamma \in \mathbb{B}_n$. Si Γ_i es la primera curva que no coincide con E_1 y m es el número de intersecciones transversales de Γ con la i -ésima curva de E_1 . Definimos la **complejidad de γ** como el par ordenado $c(\gamma) := (i, m)$.*

Le damos un orden a las complejidades con el orden lexicográfico donde la primera coordenada se ordena al revés, es decir, $(i, m) > (j, n)$ si $i < j$ y $(i, m) > (i, n)$ si y sólo si $m > n$. Por definición la complejidad de E_1 será $(n, 0)$.

Ejemplo 3.4.17. Usando los diagramas de σ_2 y $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ de la figura 3.2, se tiene que $c(\sigma_2) = (2, 0)$ y $c(\sigma_2\sigma_1^{-1}) = (1, 1)$, por lo que $c(\sigma_2) < c(\sigma_2\sigma_1^{-1})$.

Proposición 3.4.18. Sea $\gamma \in \mathbb{B}_n$ una trenza geoméricamente i -positiva, entonces existe β palabra formada por los generadores $\sigma_i\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1}$ y sus inversos tal que satisface:

- β contiene σ_i^{-1} una única vez.
- β no tiene la letra σ_i .
- $\gamma\beta$ es geoméricamente i -positiva o i -neutra.
- $c(\gamma\beta) < c(\gamma)$.

Demostración. Empecemos con $i = 1$. Sea γ una trenza geoméricamente 1-positiva y Γ diagrama reducido de γ . Por la proposición 3.4.12 existe un arco útil más a la izquierda b y con él una trenza $\beta \in \mathbb{B}_n$ deslizamiento sobre b .

Luego $c(\gamma\beta) < c(\gamma)$ ya que al deslizar Γ sobre b se deshace mínimo una intersección de Γ con E_1 (un extremo del arco b). Y por la proposición 3.4.15 entonces $\gamma\beta$ es 1-positiva o 1-neutra.

Ahora sólo falta probar que β no contiene por letra σ_1 y contiene σ_1^{-1} una única vez. Para ello notemos que podemos escribir de forma explícita a β en término de los generadores σ_j y sus inversos. Sea k perforación extremo de b , procedemos de la siguiente manera:

- Escribimos σ_k si k debe permutar con $k + 1$ y el segmento final de b está contenido en \mathbb{D}_n^\wedge . O si k debe permutar con $k - 1$ y el segmento final de b está contenido en \mathbb{D}_n^\vee .
- Escribimos σ_k^{-1} si k debe permutar con $k + 1$ y el segmento final de b está contenido en \mathbb{D}_n^\vee . O si k debe permutar con $k - 1$ y el segmento final de b está contenido en \mathbb{D}_n^\wedge .

Se hace lo anterior para $\sigma_k^{\pm 1}(k)$ extremo de $\sigma_k^{\pm 1}(b)$, hasta que $k \mapsto 1$. Ver figura 3.12. Con esto en mente es claro que en la última interacción se tiene por letra a σ_1^{-1} ya que el arco útil b tiene su segmento inicial contenido en \mathbb{D}_n^\wedge y como $k \mapsto 1$ ya no puede haber una letra σ_1 u otra σ_1^{-1} .

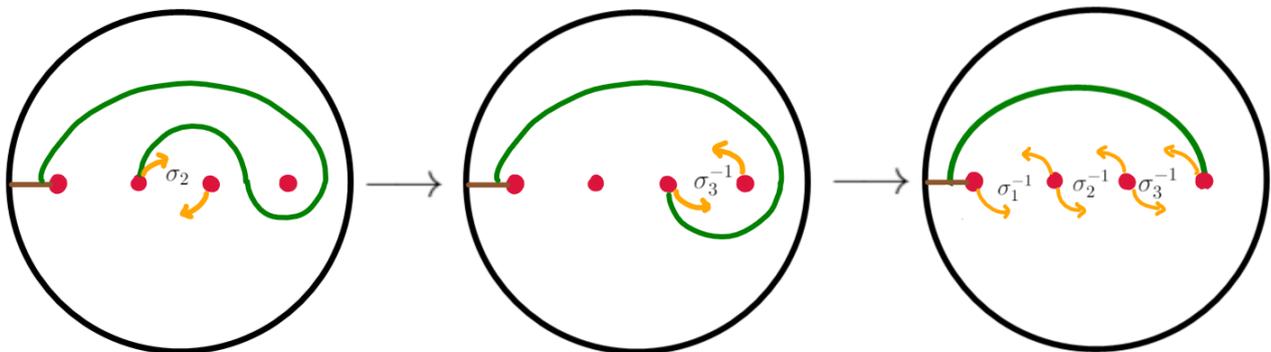


Figura 3.12: Escribir un deslizamiento sobre un arco útil de forma explícita.

Para el caso $i \neq 1$ se tiene que las curvas Γ_j coinciden con e_j con $j \in \{1, \dots, i - 1\}$, por lo que la unión de las curvas Γ_j se puede considerar como un sola curva. Y así el mismo argumento funciona cambiando 1 por i . □

Teorema 3.4.19 (Forma canónica por la izquierda). *Sea γ una trenza i -positiva. Entonces existe una forma canónica en palabras σ_i -positivas, es decir, $\gamma = \beta_0 \sigma_i \beta_1 \sigma_1 \dots \sigma_i \beta_k$ donde β_i son palabras formadas por las letras $\sigma_{i+1}^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.*

Demostración. Demostremos por inducción sobre la complejidad de γ .

- $(n-1, 0)$ es la complejidad más pequeña sin que la trenza asociada sea la trivial. La única trenza γ positiva con complejidad $(n-1, 0)$ es σ_{n-1} . Así γ es una trenza geoméricamente $(n-1)$ -positiva y claramente es σ_{n-1} -positiva.
- Supongamos que se satisface para toda trenza i -positiva γ tal que $c(\gamma) < (k, m)$.
- Si $c(\gamma) = (k, m)$, por la proposición 3.4.18 existe β σ_i -negativo tal que $\gamma' = \gamma\beta$ tiene menor complejidad que γ y además es σ_i -positiva o σ_i -neutra (σ_j -positiva o σ_j -neutra con $j > i$), por lo tanto se le puede aplicar la hipótesis de inducción y tiene una forma canónica. Por lo tanto $\gamma = \gamma'\beta^{-1}$ es una forma canónica para γ .

□

Nota 3.4.20. *Todo lo hecho para trenzas i -positivas, se puede hacer para trenzas i -negativas. Ya sea haciendo lo mismo para su inverso, o haciendo proposiciones y teoremas análogos cambiando la definición de arco útil. Dicho cambio sería que el segmento inicial de un arco útil corta primero a \mathbb{D}_n^\vee en lugar de \mathbb{D}_n^\wedge .*

3.5. Ejemplo.

Para enfatizar las ideas vistas en el capítulo, calcularemos el diagrama regular, la sucesión de corte reducida y la forma canónica por la izquierda para la trenza $\gamma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$.

Diagrama reducido: Para encontrar el diagrama reducido de γ , realicemos la acción de la trenza γ sobre $[E_1]$, aplicando un generador a la vez y teniendo cuidado de no formar bígonos con E_1 . En la figura 3.13 se muestran diagramas reducidos de $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2$ y $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2^{-1}$, al actuar σ_1^{-1} sobre el diagrama reducido de $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2^{-1}$ obtenemos el diagrama reducido de γ , mostrado en la figura 3.14.

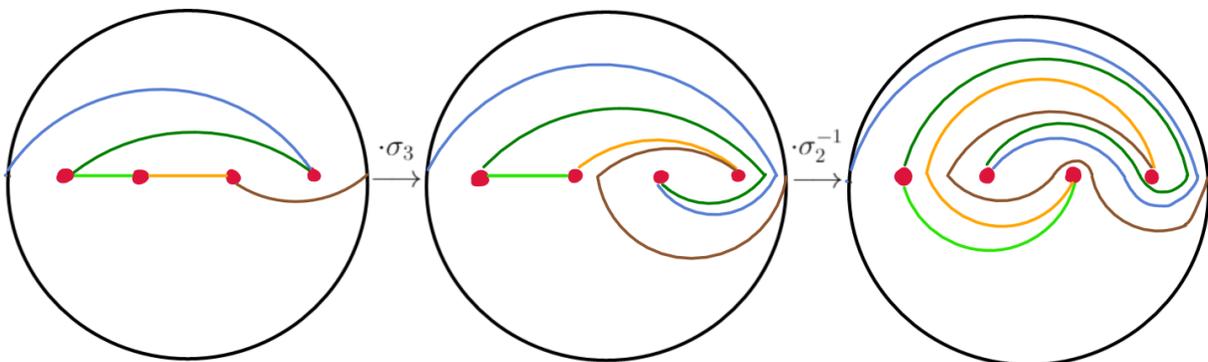


Figura 3.13: Diagramas reducidos de $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2$ y $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2^{-1}$.

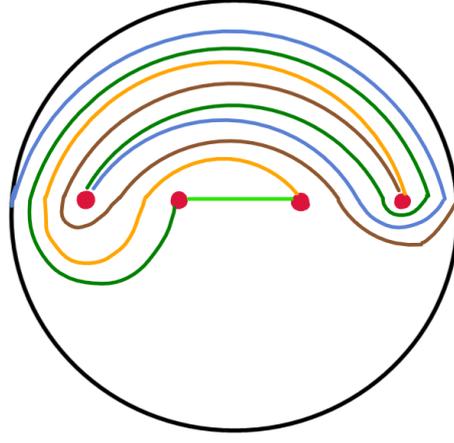


Figura 3.14: Diagramas reducido de $\gamma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$.

Sucesión de corte: Nuevamente para calcular la sucesión de corte de γ , lo haremos generador por generador. El símbolo \sim representará que la sucesión se redujo mediante movimientos de reducción, los números sobre las flechas representan los reemplazos hechos al aplicar un generador indicados en el algoritmo 1 y si tienen un apóstrofo representan los reemplazos por generadores negativos. Recordemos que se empieza por la sucesión $\underline{0} \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{4} \underline{5}$ asociada a E_1 .

$$\begin{aligned}
\underline{0} \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{4} \underline{5} &\xrightarrow[\sigma_1]{3,4} \underline{0} \uparrow \underline{2} \underline{1} \downarrow \underline{3} \underline{4} \underline{5} \xrightarrow[\sigma_2]{4,3,5,6} \underline{0} \uparrow \underline{3} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{2} \downarrow \underline{4} \underline{5} \sim \underline{0} \uparrow \underline{3} \uparrow \underline{1} \underline{2} \downarrow \underline{4} \underline{5} \xrightarrow[\sigma_3]{4,4,5,6} \underline{0} \uparrow \underline{4} \uparrow \underline{1} \underline{2} \downarrow \underline{3} \downarrow \underline{5} \\
&\sim \underline{0} \uparrow \underline{4} \uparrow \underline{1} \underline{2} \underline{3} \downarrow \underline{5} \xrightarrow[\sigma_3]{7,7,3,2} \underline{0} \uparrow \underline{4} \downarrow \underline{3} \downarrow \underline{4} \uparrow \underline{1} \underline{2} \uparrow \underline{4} \uparrow \underline{2} \downarrow \underline{5} \\
&\xrightarrow[\sigma_2^{-1}]{7',7',3',2',8'} \underline{0} \uparrow \underline{4} \downarrow \underline{3} \uparrow \underline{2} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{4} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{3} \downarrow \underline{1} \uparrow \underline{4} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{2} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{5} \\
&\xrightarrow[\sigma_1^{-1}]{5',5',2',4',8',8'} \underline{0} \uparrow \underline{4} \downarrow \underline{3} \uparrow \underline{1} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{4} \uparrow \underline{0} \downarrow \underline{2} \downarrow \underline{3} \downarrow \underline{2} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{0} \uparrow \underline{4} \uparrow \underline{0} \downarrow \underline{1} \uparrow \underline{2} \downarrow \underline{2} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{5} \\
&\sim \underline{0} \uparrow \underline{4} \downarrow \underline{3} \uparrow \underline{1} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{4} \uparrow \underline{0} \downarrow \underline{2} \underline{3} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{0} \uparrow \underline{4} \uparrow \underline{0} \downarrow \underline{1} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{5}
\end{aligned}$$

Así la sucesión de corte de γ es $\chi(\gamma) = \underline{0} \uparrow \underline{4} \downarrow \underline{3} \uparrow \underline{1} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{4} \uparrow \underline{0} \downarrow \underline{2} \underline{3} \uparrow \underline{1} \downarrow \underline{0} \uparrow \underline{4} \uparrow \underline{0} \downarrow \underline{1} \uparrow \underline{3} \downarrow \underline{5}$, fácilmente se puede verificar que esta sucesión de corte en efecto corresponde al diagrama reducido de la figura 3.14. Además las sucesiones de corte reducidas encontradas en el proceso, corresponden a los diagramas reducidos de la figura 3.13.

Forma canónica por la izquierda: Antes de calcular la forma canónica por la izquierda de γ , notemos que tanto del diagrama reducido o de la sucesión de corte asociada se tiene que γ es una trenza 1-positiva, así podemos proceder como sigue:

Empezamos del diagrama reducido Γ de γ de la figura 3.14, identificamos el arco útil más a la izquierda, que en la figura 3.15 está representado por un segmento de curva punteado, realizamos el desplazamiento β a través de este y reducimos el diagrama $\beta(\Gamma)$ tal como se muestra en la figura 3.15. Del procedimiento dado en la demostración de la proposición 3.4.18, se tiene que $\beta = \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$.

Como el diagrama reducido después de realizar el deslizamiento no es fácil de identificar de que trenza se obtiene, usamos el hecho de que sigue siendo 1-positivo y volvemos a aplicar el mismo procedimiento, es decir, identificar su arco útil mas a la izquierda, desplazar y reducir.

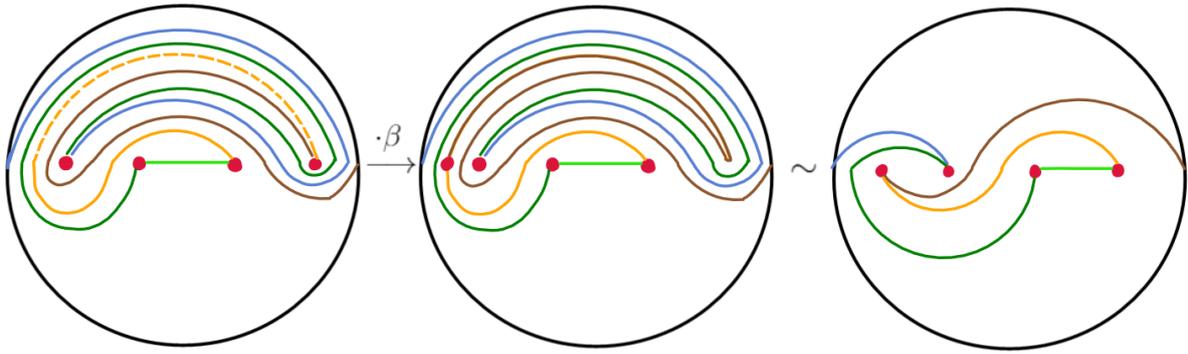


Figura 3.15: Identificar el arco útil más a la izquierda, desplazar a través de este y reducir el diagrama.

Con lo anterior se obtiene otro desplazamiento β' que de forma explícita es σ_1^{-1} , ver figura 3.16. El diagrama resultante es 2-negativo y técnicamente no tiene un arco útil, pero del segmento punteado mostrado en la figura 3.16 se deduce que desplazar a través de él se obtiene el diagrama E_1 . Dicho desplazamiento es $\beta'' = \sigma_2\sigma_3$.

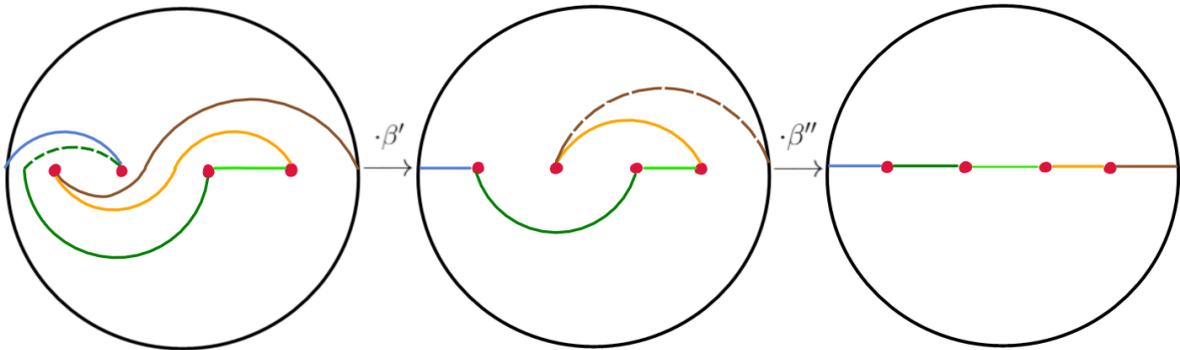


Figura 3.16: Desplazar a través de arcos hasta llegar al diagrama E_1 .

Juntando toda la información tenemos que $\gamma\beta\beta'\beta'' = 1$, por lo tanto $\gamma = \beta''^{-1}\beta'^{-1}\beta^{-1}$ y así se tiene que γ tiene forma canónica por la izquierda $\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3$.

Capítulo 4

Solución al problema de la palabra vía diagramas de curvas de tipo E_2 .

En esta ocasión, lo esencial al desarrollar un algoritmo para determinar cuando dos diagramas están en la misma clase de equivalencia en $CD(E_2)$ y encontrar una forma normal de una trenza, será el hecho de que la familia de curvas E_2 divide a \mathbb{D}_n en n componentes conexas, donde cada una contiene únicamente una perforación.

Cabe recalcar que habrá una gran similitud entre lo hecho en el capítulo anterior y este, la noción de diagramas reducidos es prácticamente igual, los arcos útiles y desplazamientos entre ellos tendrán su análogo (arcos asociados a movimientos semicirculares y movimientos semicirculares). Pero aún así tendrá sus diferencias, como el hecho de tener clasificados todos los posibles movimientos semicirculares.

4.1. Definiciones y notación.

Este capítulo está basado en el artículo *An algorithm for the word problem in braid groups*[23]. El diagrama E_2 dado en la sección 2.2 es fácil de describir y es útil para visualizar las franjas en las cuales se divide el disco \mathbb{D}_n , y con ello probar que la acción es libre. Sin embargo, para fines de demostrar la proposición 4.3.7 ocuparemos una variante de dicha familia de curvas.

Ésta familia consistirá de $n - 1$ arcos con extremos en $\partial\mathbb{D}$, donde uno de ellos está en \mathbb{D}_n^\wedge y el otro en \mathbb{D}_n^\vee . Si se traza un segmento de recta ν perpendicular al eje real a través del punto 1, todos los extremos de los arcos están contenidos en la componente izquierda de $\mathbb{D}_n \setminus \nu$. Ver figura 4.1.

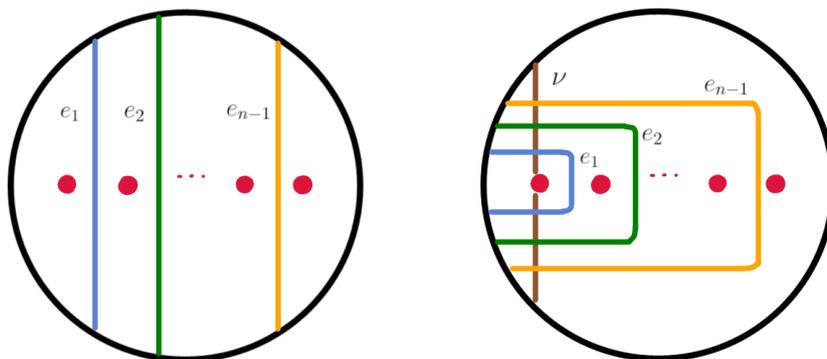


Figura 4.1: Familia de curvas E_2 .

Dado que dichas curvas dividen a \mathbb{D}_n en n componentes conexas y cada perforación está en una única de éstas, entonces el argumento dado en la sección 2.2 sigue siendo válido y la acción de \mathbb{B}_n sigue siendo libre. Así esta nueva familia de curvas será E_2 .

Definición 4.1.1. Decimos que $\Gamma \in cD(E_2)$ es un **diagrama de** $\gamma \in \mathbb{B}_n$ si $\Gamma = \varphi(E_2)$ con $\varphi \in \gamma$. Nótese que E_2 es un diagrama de $1 \in \mathbb{B}_n$.

A las curvas de E_2 las podemos enumerar desde e_1 hasta e_{n-1} . Definimos la *i*-ésima curva de Γ como $\Gamma_i = \varphi(e_i)$.

Al igual que con la familia de curvas E_1 , denotaremos por $\Gamma \cdot \beta$ o $\beta(\Gamma)$ a un representante de la clase $[\Gamma] \cdot \beta = [\varphi(\Gamma)]$ con $\varphi \in \beta$. Con $n = 4$, en la figura 4.2 se muestran representantes de $[E_2]$, $[E_2] \cdot \sigma_2$, y $[E_2] \cdot (\sigma_2 \sigma_1^{-1})$.

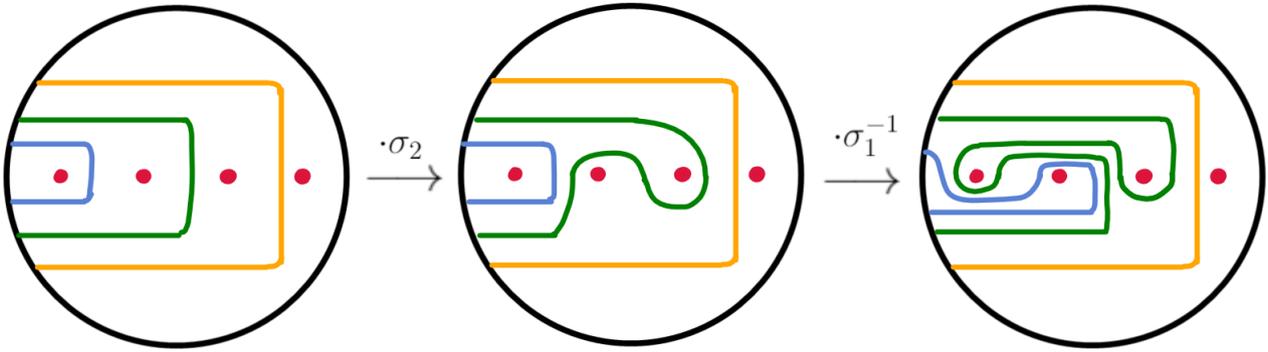


Figura 4.2: Como $\sigma_2 \sigma_1^{-1}$ actúa en E_2 y representantes de $[E_2]$, $[E_2] \cdot \sigma_2$ y $[E_2] \cdot \sigma_2 \sigma_1^{-1}$.

Durante el capítulo usaremos continuamente a E_1 , por lo que reetiquetaremos sus curvas por e'_i con $i \in \{1, \dots, n+1\}$ para evitar confusión con las curvas de E_2 .

Definición 4.1.2. Decimos que Γ un diagrama de γ contiene un **bígono** si al sobreponer E_1 se forma un bígono del tipo I en sentido de la definición 3.2.6. Se dice que Γ es **reducido** si no contiene ningún bígono con E_1 e interseca a E_1 de forma transversal.

De manera similar a lo hecho en la sección 3.2, para todo Γ diagrama de γ se puede llevar a un diagrama reducido Γ' mediante movimientos de reducción y dicho diagrama es único salvo isotopías que fijen a E_1 y en todo tiempo t mantenga transversales a Γ' y E_1 .

Definición 4.1.3. Sea $\gamma \in \mathbb{B}_n$, definimos la **complejidad** de γ y de un diagrama Γ de γ como:

$$c_2(\gamma) = c_2(\Gamma) = |\Gamma' \cap E_1| \text{ donde } \Gamma' \text{ es un diagrama reducido de } \gamma.$$

Ejemplo 4.1.4. Los diagramas de la figura 4.2 son reducidos y sus complejidades son $c_2(E_2) = 3$, $c_2(E_2 \cdot \sigma_2) = 5$ y $c_2(E_2 \cdot (\sigma_2 \sigma_1^{-1})) = 9$.

Ejemplo 4.1.5. Para $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $c_2(E_2) = n - 1$, ya que coincide con el número de curvas de E_2 . Además para todo $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ se tiene $c_2(E_2 \cdot \sigma_i^k) = 2|k| + (n-1)$, se sigue del hecho que cada e_j con $j \neq i$ interseca solo una vez a E_1 y al aplicar σ_i a e_i genera 2 nuevas intersecciones.

4.2. Movimientos semicirculares.

Definición 4.2.1. Decimos que una trenza en \mathbb{B}_n es un **movimiento semicircular** si es de la forma $\sigma_i^\varepsilon \sigma_{i+1}^\varepsilon \dots \sigma_j^\varepsilon$ con $i \leq j$ o $\sigma_i^\varepsilon \sigma_{i-1}^\varepsilon \dots \sigma_j^\varepsilon$ con $i \geq j$ y $\varepsilon = \pm 1$. Podemos clasificarlos en cuatro tipos:

- Movimiento semicircular **positivo ascendente** si $\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_j$ con $i \leq j$.
- Movimiento semicircular **negativo ascendente** si $\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_j^{-1}$ con $i \leq j$.
- Movimiento semicircular **positivo descendente** si $\sigma_i \sigma_{i-1} \dots \sigma_j$ con $i \geq j$.
- Movimiento semicircular **negativo descendente** si $\sigma_i^{-1} \sigma_{i-1}^{-1} \dots \sigma_j^{-1}$ con $i \geq j$.

Los generadores σ_i y sus inversos son simultáneamente ascendentes y descendentes.

Para entender la razón de su nombre, veamos como actúan sobre E_1 . En la figura 4.3 se tiene un ejemplo de como actúan varios movimientos semicirculares en E_1 con $n = 4$.

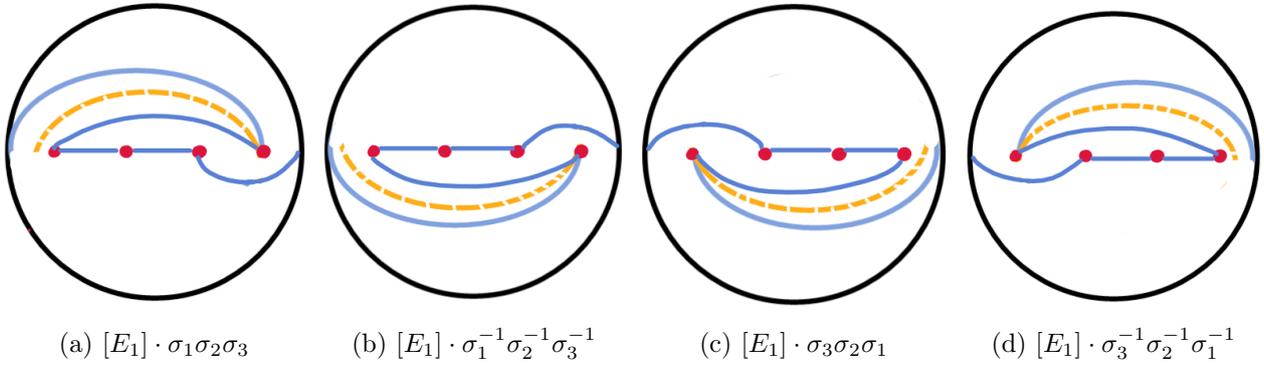


Figura 4.3: Movimientos semicirculares actuando sobre $[E_1]$.

En caso general, la acción de un movimiento semicircular sobre E_1 se puede interpretar geométricamente como:

- Positivo ascendente: Lleva el punto i al punto $j + 1$ trazando un arco semicircular contenido en \mathbb{D}^\wedge (por arriba) y $k \mapsto k - 1$ para todo $k \in \{i + 1, \dots, j + 1\}$.
- Negativo ascendente: Lleva el punto i al punto $j + 1$ trazando un arco semicircular contenido en \mathbb{D}^\vee (por abajo) y $k \mapsto k - 1$ para todo $k \in \{i + 1, \dots, j + 1\}$.
- Positivo descendente: Lleva el punto $i + 1$ al punto j trazando un arco semicircular contenido en \mathbb{D}^\vee (por abajo) y $k \mapsto k + 1$ para todo $k \in \{j, \dots, i\}$.
- Negativo descendente: Lleva el punto $i + 1$ al punto j trazando un arco semicircular contenido en \mathbb{D}^\wedge (por arriba) y $k \mapsto k + 1$ para todo $k \in \{j, \dots, i\}$.

Entonces cada movimiento semicircular distinto a los generadores y sus inversos, está determinado por un arco semicircular de \mathbb{D} donde un extremo es una perforación i y el otro está sobre una curva e'_k con k diferente a i e $i + 1$. En la figura 4.3 dichos arcos están representados por las líneas punteadas.

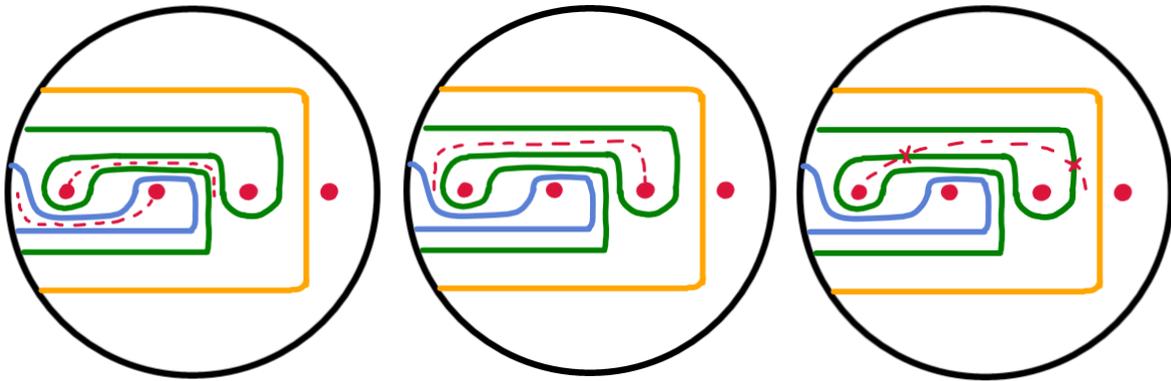
Si el movimiento semicircular es σ_i o su inverso, al ser movimientos ascendentes y descendentes simultáneamente, tienen dos arcos semicirculares. Para σ_i se tiene un arco con extremos en $i + 1$ y un

punto de e'_i por arriba y el otro tiene extremos en i y un punto de e'_{i+2} . Similarmente ocurre para sus inversos.

Si β es un movimiento semicircular y b el arco semicircular determinado por β . Denotamos por $\text{int}(b)$ al arco b menos sus puntos extremos.

Definición 4.2.2. Sea Γ un diagrama de γ . Decimos que β un movimiento semicircular es **ajeno** a Γ , si al trazar el arco semicircular b asociado a β^{-1} en el diagrama Γ se tiene $b \cap \Gamma = \emptyset$.

Ejemplo 4.2.3. Para el diagrama $\Gamma = E_2 \cdot (\sigma_2 \sigma_1^{-1})$ de la figura 4.2. Notemos que los movimientos semicirculares de la figura 4.3 no son ajenos a $E_2 \cdot (\sigma_2 \sigma_1^{-1})$, ya que el arco b asociado a cada movimiento siempre interseca a Γ_3 . En la figura 4.4 se muestra como σ_1 y $\sigma_1 \sigma_2$ son ajenos a Γ , mientras que $\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$ no es ajeno a Γ .



(a) El movimiento σ_1 es ajeno al diagrama. (b) El movimiento $\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$ es ajeno al diagrama. (c) El movimiento $\sigma_1 \sigma_2$ no es ajeno al diagrama.

Figura 4.4: Ejemplos de arcos semicirculares ajenos o no al diagrama $E_2 \cdot (\sigma_2 \sigma_1^{-1})$.

4.3. Algoritmos de relajación.

Algoritmo de relajación estándar: Sea $\gamma \in \mathbb{B}_n$, procedemos de la siguiente manera:

1. Construimos un diagrama D de γ .
2. Para todo movimiento semicircular β de \mathbb{B}_n que sea ajeno a D , se calcula la complejidad de $\beta(D)$.
3. De todos los movimientos β del paso 2, se escoge β' tal que $c_2(\beta'(D))$ sea la mínima. En caso de haber más de un movimiento semicircular con dicha propiedad, se elije el menor, en sentido del orden descrito en la sección 4.3. Se anota el movimiento β' y se reasigna $D := \beta'(D)$.
4. Si D es un diagrama de $1 \in \mathbb{B}_n$, termina. En caso contrario regresamos al paso 2.

En resumen, estamos desenredando el diagrama D de γ a través de acciones de movimientos semicirculares, de tal forma que en cada iteración la complejidad decrezca. En términos de trenzas, se esta encontrando una factorización de γ^{-1} en términos de movimientos semicirculares. La demostración de que dicho algoritmo termina se hará en paralelo con su versión σ_1 -consistente.

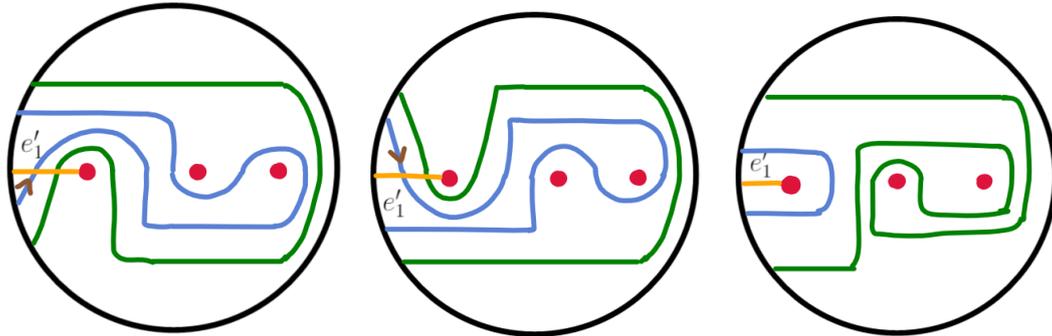
Antes de hablar de la versión σ_1 -consistente del algoritmo de relajación, recordemos que una trenza es σ_1 -consistente si es σ_1 -positiva, σ_1 -negativa o σ_1 -neutra (revisar definición 3.4.8). Veamos que a través de un diagrama reducido Γ de γ , se puede identificar fácilmente si es σ_1 -positiva, σ_1 -negativa o σ_1 -neutra. Se hará un abuso de notación diciendo que Γ un diagrama reducido de γ es σ_1 -positivo, σ_1 -negativo o σ_1 -neutro si γ lo es.

Proposición 4.3.1. *Sea Γ un diagrama reducido de γ , entonces se cumple lo siguiente:*

- γ es σ_1 -positiva si al orientar Γ_1 de abajo hacia arriba la primera intersección de Γ_1 con E_1 está sobre e'_1 .
- γ es σ_1 -negativa si al orientar Γ_1 de arriba hacia abajo la primera intersección de Γ_1 con E_1 está sobre e'_1 .
- γ es σ_1 -neutra si Γ_1 no interseca a e'_1 , o equivalentemente $e_1 \sim \Gamma_1$.

Demostración. El resultado es inmediato del hecho que la acción de $\sigma_i^{\pm 1}$ con $i \neq 1$ sobre E_2 , tiene un diagrama reducido D donde la primera curva de D es idéntica a e_1 . □

Ejemplo 4.3.2. *En la figura 4.5 se puede observar como $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$ es σ_1 -positiva, $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$ es σ_1 -negativa y σ_2^2 es σ_1 -neutra.*



(a) $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$ es σ_1 -positiva. (b) $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$ es σ_1 -negativa. (c) σ_2^2 es σ_1 -neutra.

Figura 4.5: Ejemplos de trenzas σ_1 -positivas, σ_1 -negativas y σ_1 -neutras.

Algoritmo de relajación versión σ_1 -consistente: Sea $\gamma \in \mathbb{B}_n$ una trenza σ_1 -positiva. Si γ es σ_1 -negativa aplicamos el algoritmo para γ^{-1} .

1. Construimos un diagrama reducido D de γ .
2. Para todo movimiento semicircular β de \mathbb{B}_n que sea ajeno a D , no contiene ninguna letra σ_1 y $\beta(D)$ no es σ_1 -negativa. Se calcula la complejidad de $\beta(D)$.

Dichos movimientos semicirculares existirán por la proposición 4.3.7.

3. De todos los movimientos β del paso 2, se escoge β' tal que $c_2(\beta'(D))$ sea la mínima. Se anota el movimiento β' y se reasigna $D := \beta'(D)$ con D diagrama reducido.
4. Si $D = E_2$, termina. En caso contrario volver al paso 2.

Si γ es σ_1 -neutra y no es la identidad, existe $i \neq 1$ tal que γ es σ_i -positiva o σ_i -negativa. Así Γ diagrama reducido de γ satisface que $\Gamma_j = e_j$ para toda $j < i$. Por lo tanto, la cerradura de la componente de $\mathbb{D}_n \setminus \Gamma_{i-1}$ que contiene a las perforaciones i hasta n puede pensarse como un disco con $n - (i - 1)$ perforaciones y así existe un diagrama reducido Δ de una trenza $\delta \in \mathbb{B}_{n-(i-1)}$ tal que $\Delta_j \sim \Gamma_{i+j-1}$ (pensando Γ_k encajado en $\mathbb{D}_{n-(i-1)}$), la cual será σ_1 -positiva o σ_1 -negativa dependiendo de γ . Ver figura 4.6. Sobre este diagrama se puede aplicar el algoritmo a partir del paso 2.

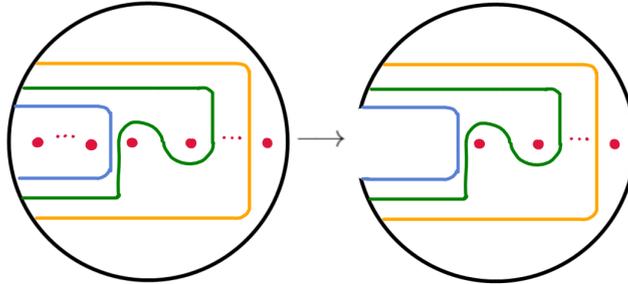
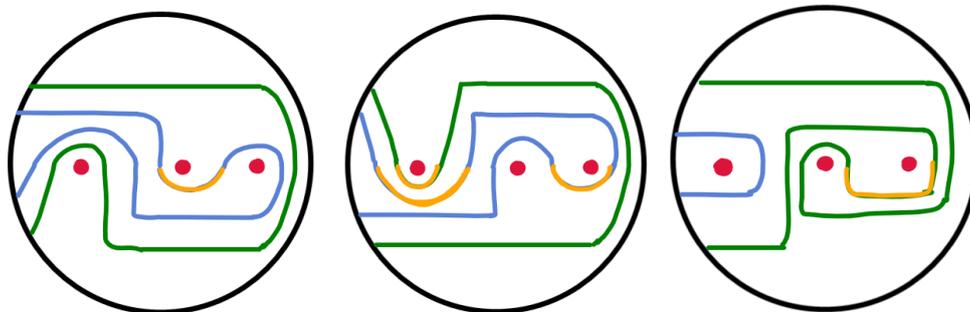


Figura 4.6: Proceso de cortar por Γ_{i-1} y obtener un disco con $n - (i - 1)$ perforaciones.

Nota 4.3.3. En particular si se desea encontrar explícitamente la trenza δ , consideremos el homomorfismo $\psi : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n-(i-1)}$ tal que $\sigma_j \mapsto 1$ si $j < i$ y $\sigma_j \mapsto \sigma_{j-(i-1)}$ si $j \geq i$. Si γ es σ_i -positiva con una descomposición $\beta_0 \sigma_i \beta_1 \dots \sigma_i \beta_k$, entonces $\delta = \beta'_0 \sigma_1 \beta'_1 \sigma_1 \dots \sigma_1 \beta'_k$ con $\beta'_j = \psi(\beta_j)$.

Definición 4.3.4. Sea Γ un diagrama reducido de γ , decimos que la perforación i está siendo **empujada hacia arriba** por Γ si una de las componentes conexas de $\Gamma \cap \mathbb{D}_n^v$ es un arco con extremos en e'_i y e'_{i+1} . A dichos arcos se les llamarán **arcos con forma de U** de i . Decimos que α_0 es el arco con forma de U **más cercano** a i si al trazar un rayo vertical que emana de i en dirección hacia abajo se interseca primero con α_0 .

Ejemplo 4.3.5. Usando los diagramas de la figura 4.5. Podemos observar que: la perforación 2 está siendo empujada hacia arriba por $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}(E_2)$; la perforación 1 y 3 están siendo empujadas hacia arriba por $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1(E_2)$ (note que la perforación 1 tiene dos arcos con forma de U); la perforación 3 está siendo empujada hacia arriba por $\sigma_2^2(E_2)$, ver figura 4.7.



- (a) La perforación 2 está siendo empujada hacia arriba por $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}$.
 (b) Las perforaciones 1 y 2 están siendo empujadas hacia arriba por $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1$.
 (c) La perforación 3 está siendo empujada hacia arriba por σ_2^2 .

Figura 4.7: Ejemplos de perforaciones siendo empujadas hacia arriba por un diagrama.

Proposición 4.3.6. *Sea γ una trenza σ_1 -positiva y Γ un diagrama reducido de ésta. Entonces existe una perforación i distinta de 1 tal que i está siendo empujada hacia arriba por Γ .*

Demostración. Recordamos que E_2 se eligió de tal forma que para ν recta perpendicular al eje real que pasa por 1, entonces todos los extremos de las curvas e_i están contenidas en la componente izquierda de $\mathbb{D}_n \setminus \nu$. Denotamos por $\mathbb{D}_n^>$ a la componente de $\mathbb{D}_n \setminus \nu$ que contiene a las perforaciones i con $i \in \{2, \dots, n\}$ unión ν y por $\nu^\wedge = \nu \cap \mathbb{D}_n^\wedge$.

Como Γ es σ_1 -positivo entonces existen curvas Γ_i que al orientarlas de abajo hacia arriba su primera intersección con E_1 es en e'_1 (Γ_1 es un ejemplo de ellas), por lo tanto la primera intersección x_0 de Γ_i con ν está en ν^\wedge y por construcción su última intersección x_1 con ν también está en ν^\wedge . Más aún $x_0 < x_1$ con el orden heredado del eje imaginario.

Luego Γ_i interseca a E_1 y podemos concluir que una componente de $\Gamma_i \cap \mathbb{D}_n^\vee$ tiene extremos en e_k y en e_m con $1 < k < m$. Pero m debe ser $k + 1$, de caso contrario existiría una componente conexa (franja) de $\mathbb{D}_n \setminus \Gamma$ determinada por Γ_i, Γ_{i+1} o por Γ_{i-1}, Γ_i que tendría más de una perforación, lo cual no es posible. Por lo tanto, la perforación $k \neq 1$ está siendo empujada por arriba por Γ . \square

Proposición 4.3.7. *Sea Γ un diagrama reducido de $\gamma \in \mathbb{B}_n$ no trivial y σ_1 -positiva, entonces existe un movimiento semicircular β tal que el arco semicircular asociado a β^{-1} está contenido en \mathbb{D}_n^\wedge , $\beta(\Gamma)$ es σ_1 -positivo o σ_1 -neutro y además $c_2(\beta(\Gamma)) < c_2(\Gamma)$.*

Demostración. Por la proposición 4.3.7 sabemos que existe al menos una perforación k distinta de 1 tal que está siendo empujada hacia arriba por Γ . Veamos que podemos construir un arco semicircular b de \mathbb{D}_n tal que $k \in b$ y $\text{int}(b) \subset (\mathbb{D}_n^\wedge \cap \Gamma)$.

Consideramos α_0 el arco en forma de U más cercano a k , y Γ_i la curva de Γ tal que $\alpha_0 \subset \Gamma_i$. Así $\mathbb{D}_n^\wedge \cap \Gamma_i$ tiene dos arcos c_1 y c_2 donde uno de sus extremos coinciden con los extremos de α_0 . El otro extremo de c_1 puede o no estar sobre $\partial\mathbb{D}$, pero el de c_2 debe estar sobre una curva $e'_j \in E_1$.

Tomando b un arco paralelo a c_2 tal que un extremo sea k y el otro esté sobre e'_j diferente al extremo de c_2 . Ver figura 4.8. Claramente b es un arco semicircular contenido en \mathbb{D}_n^\wedge y tiene asociado un movimiento semicircular β^{-1} .

Ahora veamos que dicho β decrece la complejidad. Sea $D = \beta(\Gamma)$ reducido, como β mueve la perforación k a la curva e'_j , ésta es dividida en dos curvas mientras que e'_k, e'_{k+1} se unen, es decir, con movimientos de reducción se deshacen todos los arcos con forma de U de k y decrece la complejidad en $2m$ con m la cantidad de arcos en forma de U de k en Γ . Ver figura 4.8. Por lo tanto $c_2(\beta(\Gamma)) < c_2(\Gamma)$.

Por último, para mostrar que $\beta(\Gamma)$ no es σ_1 -negativa. Primero notemos que si un extremo de b no está sobre e'_1 el diagrama $\beta(\Gamma)$ sigue siendo σ_1 -positivo o σ_1 -neutro. En caso de que un extremo esté en e'_1 , el caso se reduce a un desplazamiento por un arco útil, así por la proposición 3.4.18 $\beta(\Gamma')$ es σ_1 -positivo o σ_1 -neutro y en conclusión $\beta(\Gamma)$ no es σ_1 -negativo. \square

Ahora si podemos demostrar que el algoritmo de relajación versión σ_1 -consistente termina y dado que la versión estándar incluye todos los movimientos semicircular ajenos, entonces el algoritmo de relajación estándar termina si el algoritmo de relajación σ_1 -consistente termina.

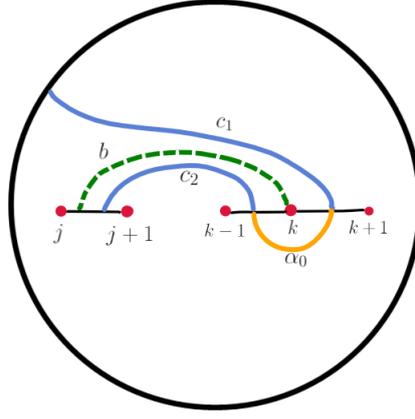


Figura 4.8: Existencia de un arco semicircular contenido en \mathbb{D}_n^\wedge en un diagrama σ_1 -positivo.

Teorema 4.3.8. *Para toda trenza $\gamma \in \mathbb{B}_n$ el algoritmo de relajación versión σ_1 -consistente termina.*

Demostración. Sea Γ un diagrama reducido de γ , la complejidad de γ es finita.

- Si γ es σ_1 -positiva, por la proposición 4.3.7 existe un movimiento semicircular β que satisface las condiciones del paso 2 del algoritmo de reducción versión σ_1 -consistente de tal forma que $c_2(\beta(\Gamma)) < c_2(\Gamma)$ y $\beta(\Gamma)$ es σ_1 -positivo o σ_1 -neutro. Si $\beta(\Gamma)$ es σ_1 -positivo seguimos encontrando movimientos semicirculares que decrecen la complejidad, por lo que en algún momento se vuelve σ_1 -neutro o es la identidad.
- Si γ es σ_1 -negativa se hace lo anterior con γ^{-1} .
- Si Γ es σ_1 -neutro y no es la identidad, existe $i \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que Γ es σ_i -positivo o σ_i -negativo. Al aplicarle el proceso de cortar sobre Γ_{i-1} se obtiene un diagrama σ_1 -positivo o σ_1 -negativo de $\psi(\Gamma)$ (donde ψ es el homomorfismo descrito en la nota 4.3.3).

□

4.4. Ejemplo

Nuevamente para enfatizar las ideas, apliquemos el algoritmo de relajación versión σ_1 -consistente a la trenza $\gamma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$. Empezamos encontrando un diagrama reducido Γ de γ , en la figura 4.9 se muestra dicho diagrama, es fácil ver que sólo tiene dos arcos semicirculares contenidos en \mathbb{D}_n^\wedge ajenos al diagrama, estos tienen asociados a los movimientos semicirculares $\beta^{-1} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ y $\delta^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$.

Notemos que al aplicar el movimiento β se deshacen seis arcos en forma de U que están empujando a la perforación 4, mientras que al aplicar δ se deshacen cinco arcos en forma de U que están empujando a la perforación 1. Por lo tanto, β reduce más la complejidad que δ .

Sea $D = \beta(\Gamma)$ reducido, se tiene un diagrama como en la figura 4.10, en este caso tiene un único arco semicircular contenido en \mathbb{D}_n^\wedge asociado al movimiento semicircular $\beta'^{-1} = \sigma_1$, observe que como es un generador tiene otro arco contenido en \mathbb{D}_n^\vee que también es ajeno a D . Cosa contraria al movimiento semicircular σ_3 que uno de sus arcos (el superior) si es ajeno a D pero el inferior no.

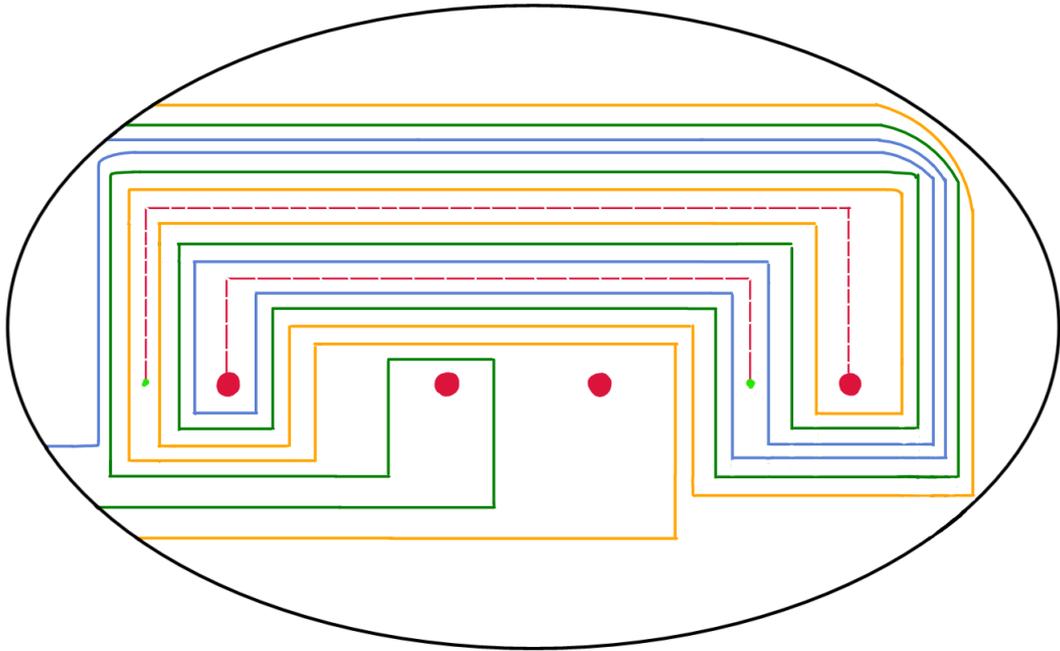


Figura 4.9: Diagrama reducido de $E_2 \cdot \gamma$ y sus dos únicos arcos ajenos contenidos en \mathbb{D}_n^\wedge .

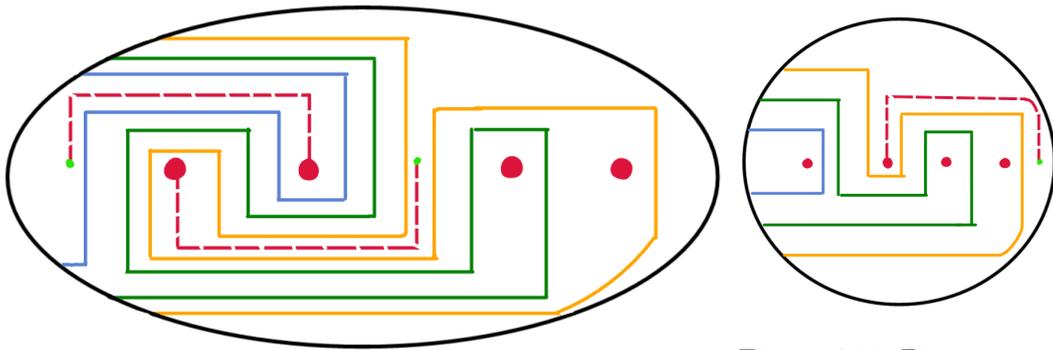


Figura 4.10: Diagrama reducido de $\gamma\beta$.

Figura 4.11: Diagrama reducido de $\gamma\beta\beta'$.

Así para $D' = \beta'(D)$, encontramos un diagrama reducido como se muestra en la figura 4.11 y tiene un único arco semicircular contenido en \mathbb{D}_n^\wedge asociado a $\beta''^{-1} = \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$. Observemos que al realizar $\beta''(D)$ se obtiene un diagrama equivalente a E_2 , por lo que hemos terminado. Por lo tanto $\gamma \cdot \beta \cdot \beta' \cdot \beta'' = 1$ y se tiene $\gamma = (\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}) \cdot (\sigma_1) \cdot (\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3$, lo cual coincide con la forma canónica por la izquierda encontrada en el ejercicio del capítulo 3.

Capítulo 5

Solución al problema de la palabra vía diagramas de curvas de tipo E_3 .

A diferencia de los dos capítulos anteriores, en este se introducirá un nuevo tipo de diagramas obtenidos de diagramas regulares de trenzas y no mediante el grupo $Mod(\mathbb{D}_n)$ como se definieron los diagramas de curvas, junto a una noción de equivalencia y una acción de \mathbb{B}_n sobre estos.

Resultará que estos diagramas y los diagramas de curvas de tipo E_3 están relacionados de una forma estrecha (son equivalentes), con ello tendremos una forma menos topológica de describir los diagramas de curvas y así poder extender esta noción de diagramas de curvas al grupo de trenzas virtuales $\mathbb{V}\mathbb{B}_n$ (capítulo 6) aún sin tener una superficie S donde $Mod(S) \cong \mathbb{V}\mathbb{B}_n$.

5.1. Proceso de deshacer cruces.

Este capítulo está basado en el artículo *On Recognition of Braids* [11], complementado por [19].

Nota 5.1.1. *En esta sección usaremos de forma explícita el eje imaginario de \mathbb{C} , dado que i se ha usado para denotar a las perforaciones de \mathbb{D}_n , para continuar con la misma notación se escribirá un número imaginario como $a + b\sqrt{-1}$ en lugar de $a + ib$.*

Recordemos que a toda trenza geométrica $\beta = (A_i, B_i, d_i) \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ se le puede asociar un diagrama regular D en $\mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \simeq \overline{\mathbb{H}^2}$, donde $\overline{\mathbb{H}^2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$ **semiplano superior cerrado**. Así D puede verse encajado en $\overline{\mathbb{H}^2}$ tal que los puntos marcados A_i y B_i estén sobre las líneas determinadas por $\text{Im}(z) = 1$ y $\text{Im}(z) = 0$, respectivamente, y aún más $A_i = i + \sqrt{-1}$ y $B_i = i$. A la línea determinada por $\text{Im}(z) = 1$ se le denotará por L_1 y a la determinada por $\text{Im}(z) = 0$ se le denotará por L_0 . Además si los A_i no se piensan como puntos marcados sino como perforaciones de $\overline{\mathbb{H}^2}$, bajo el mismo argumento se tiene $D \subset \mathbb{H}_n := \overline{\mathbb{H}^2} \setminus \{1 + \sqrt{-1}, \dots, n + \sqrt{-1}\}$.

Por último, recordemos que todo diagrama regular puede ser construido mediante la concatenación de bloques (diagramas regulares asociados a σ_i y σ_i^{-1}). Y si β tiene una descomposición en $\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ con $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ entonces el diagrama regular construido por bloques es único si no se aplican los movimientos de trenzas.

Nota 5.1.2. Nótese que aunque para cada diagrama existe una única descomposición en bloques, esto no significa que para cada trenza exista un único diagrama regular construido por bloques, por ejemplo, las trenzas β y $\beta\sigma_1\sigma_1^{-1}$ claramente son iguales pero sus diagramas regulares construidos por bloques no.

Proceso de deshacer cruces por arriba: Sea D el diagrama regular de $\beta \in \mathbb{B}_n$, procedemos a deshacer los cruces de la siguiente manera:

1. Los bloques asociados a σ_i y σ_i^{-1} se deshacen como se muestra en la figura 5.1

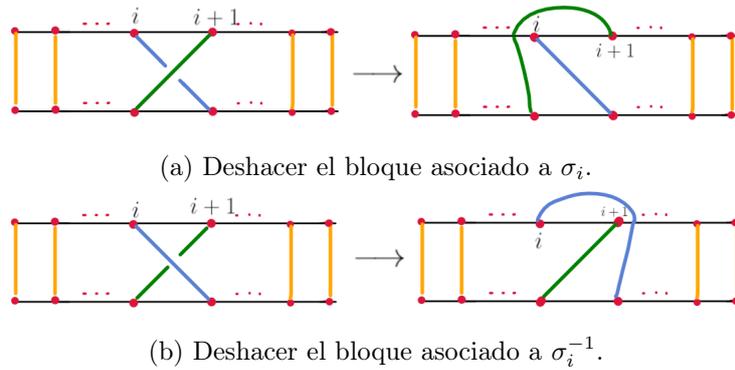


Figura 5.1: Deshacer los cruces de los bloques asociados a σ_i y σ_i^{-1} .

2. Si $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ y D su diagrama regular, se empieza deshaciendo el primer cruce de arriba hacia abajo como en el paso 1, es decir, se empieza con $\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}$.
3. Para deshacer el segundo cruce $\sigma_{i_2}^{\varepsilon_2}$ (y después los siguientes), sean d_{i_2} y d_{i_2+1} las cuerdas que se cruzan, de acuerdo a ε_{i_2} una cuerda cruza por arriba a la otra, deslizamos hacia arriba ésta sobre la otra cuerda hasta llegar a su extremo.
4. Se repite el paso 3 hasta que se deshagan todos los cruces de D .
5. Todas las cuerdas que se intersecan con L_1 deben hacerlo de forma transversal.

Ejemplo 5.1.3. En la figura 5.2 se muestra el diagrama regular asociado a $\sigma_1\sigma_2^{-2}$ y como se le aplica el proceso de deshacer cruces.

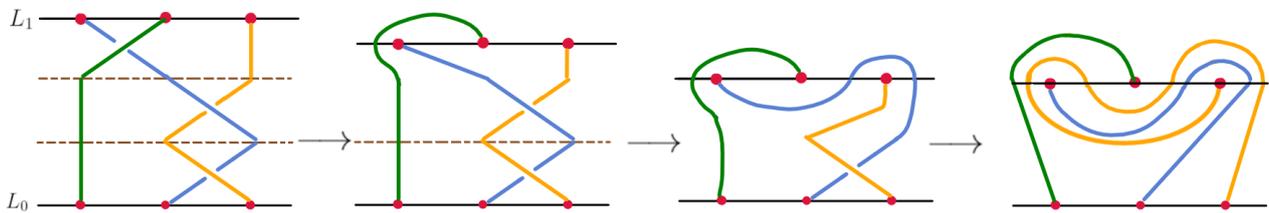


Figura 5.2: Ejemplo de como deshacer los cruces del diagrama regular asociado a $\sigma_1\sigma_2^{-2}$.

Definición 5.1.4. Denotaremos por cD_n al conjunto de diagramas obtenidos al deshacer diagramas regulares de \mathbb{B}_n .

Se define una relación de equivalencia sobre cD_n tal que $D_1, D_2 \in cD_n$ están relacionados si y sólo si existe un homeomorfismo φ de \mathbb{H}_n a si mismo tal que fije a L_0 , a las perforaciones ($\varphi \in [id] \in \text{Mod}(\mathbb{H}_n)$) y $\varphi(D_1) = D_2$. Denotamos por $CD_n := cD_n / \sim$ a las clases de equivalencia.

Definición 5.1.5. Sea $D \in cD_n$ y D' diagrama regular de una trenza β . Definimos el **pegado de D' a D por arriba** si se reescalan ambos diagramas de tal forma que las de D perforaciones estén sobre la recta determinada por $\text{Im}(z) = \frac{1}{2}$ y se concatena D a D' de tal forma que toda curva de D pase por arriba de las curvas de D' .

Definimos de forma análoga al **pegado de D' a D por abajo** donde lo único que cambia es que se concatena D' a D . En la figura 5.3 se muestran los pegados entre el bloque asociado a σ_1 con el diagrama de la figura 5.2 por arriba (inciso a) y por abajo (inciso b).

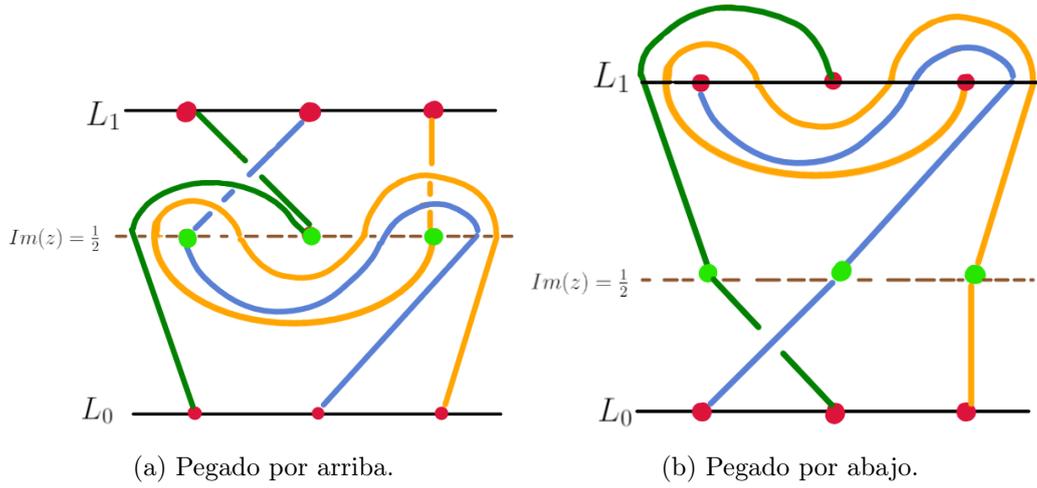


Figura 5.3: Pegado entre el bloque asociado a σ_i y un diagrama deshecho de $\sigma_1\sigma_2^{-2}$.

Ahora podemos definir dos acciones de \mathbb{B}_n sobre CD_n una por la izquierda y la otra por la derecha.

Sea $D \in [D] \in CD_n$, $\gamma \in \mathbb{B}_n$ y Γ diagrama regular asociado a γ , definimos a $\gamma * [D] := [D']$ donde D' es el diagrama resultante de deshacer los cruces del pegado de Γ con D por arriba. Y de forma similar definimos $[D] * \beta := [D']$ donde D' es el diagrama resultante de deshacer los cruces del pegado de Γ con D por abajo.

Proposición 5.1.6. Las funciones $*$: $\mathbb{B}_n \times CD_n \rightarrow CD_n$ y $*$: $CD_n \times \mathbb{B}_n \rightarrow CD_n$ como se definieron antes son en efecto acciones de grupos.

Demostración. Demostraremos solo el caso de la acción por la izquierda, el caso de la acción por la derecha es análogo.

El diagrama regular de $1 \in \mathbb{B}_n$ es el diagrama formado por los segmentos de rectas paralelas que unen a i con $i + \sqrt{-1}$, lo denotamos por I_n . Al pegar I_n con cualquier diagrama $D \in cD_n$ por arriba y deshacer los cruces se queda el mismo diagrama D , es decir, $1 * [D] = [D]$.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{B}_n$, $D \in [D] \in CD_n$ y Γ_1, Γ_2 diagramas regulares asociados a γ_1 y γ_2 respectivamente. Tenemos que $\gamma_1 * (\gamma_2 * [D]) = (\gamma_1\gamma_2) * [D]$, esto se sigue directo del hecho que si Γ es un diagrama regular asociado a $\gamma_1\gamma_2$ éste es equivalente a concatenar Γ_2 a Γ_1 .

Ahora sólo falta probar que está bien definida la acción, para esto se debe verificar que para toda relación R de \mathbb{B}_n se satisface $R * [D] = [D]$. Para el caso de $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ con $|i - j| \geq 2$ se cumple del hecho que las cuerdas que mueve σ_i no afectan a las cuerdas que afecta σ_j y viceversa. Para la relación $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ se demuestra en la figura 5.4 donde D es cualquier diagrama y los arcos superiores representan las curvas que se intersecarían al pegar un diagrama regular por arriba. \square

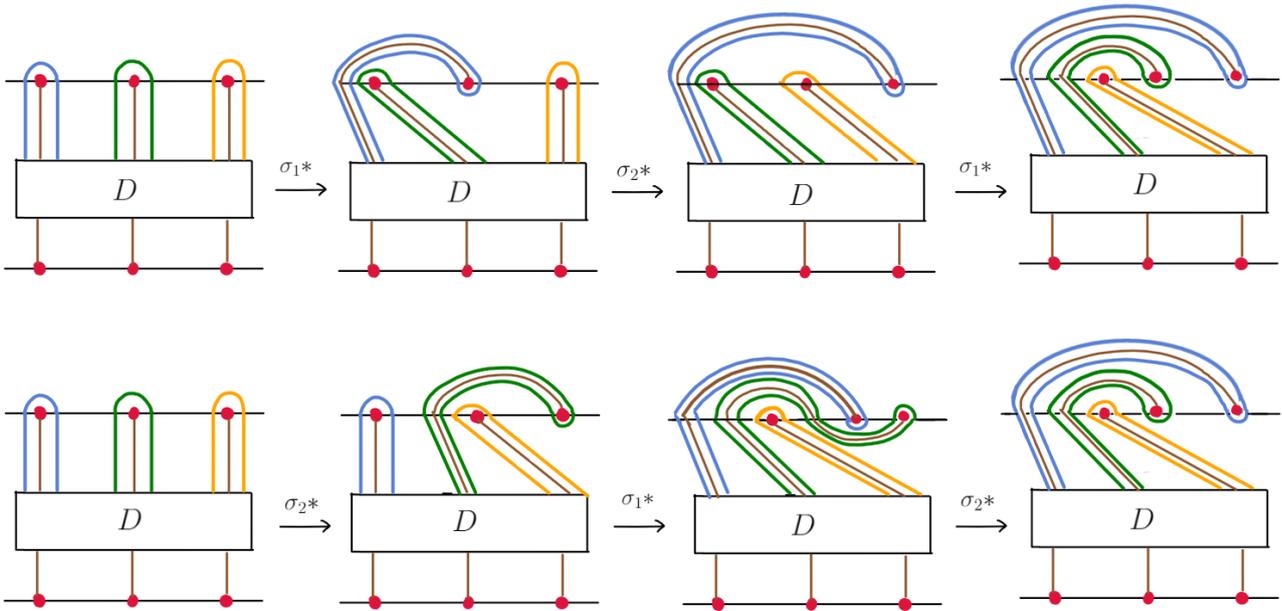


Figura 5.4: Prueba de que $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i * [D] = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} * [D]$.

Ejemplo 5.1.7. Si $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-2}$ y $[I_n] \in CD_n$ con I_n diagrama identidad, en la figura 5.5 se muestra a $\beta * [I_n]$. Note que el diagrama resultante es equivalente al diagrama de la figura 5.2.

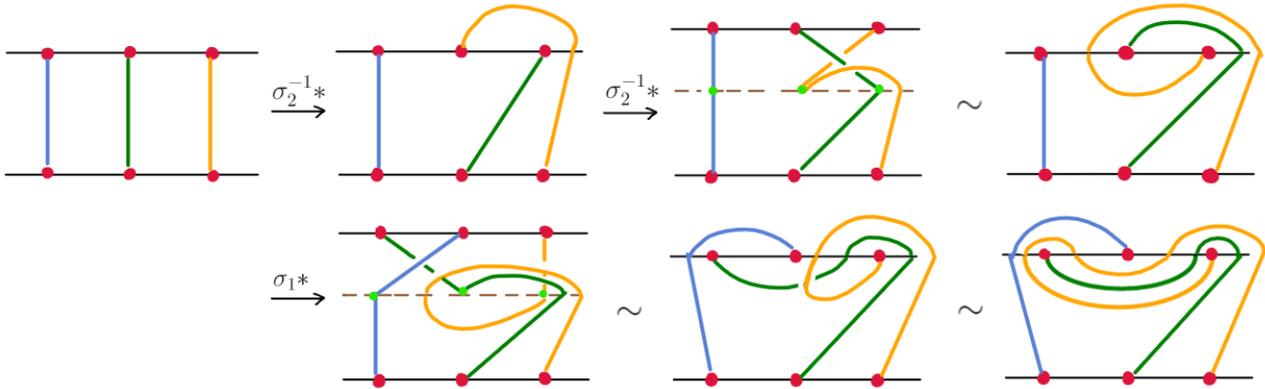


Figura 5.5: Acción de $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ sobre $[I_n]$.

Proposición 5.1.8. Para toda trenza $\beta \in \mathbb{B}_n$ se satisface que $\beta * [I_n] = [I_n] * \beta$.

Demostración. Sea D un diagrama regular de β , por ser $*$ una acción, concatenar D a I_n ($\beta \cdot 1$) y deshacer cruces está en la misma clase que concatenar I_n a D ($1 \cdot \beta$) y deshacer cruces, es decir, $\beta * [I_n] = [I_n] * \beta$. \square

Proposición 5.1.9. La acción $*$, tanto por la izquierda o derecha, es transitiva. En particular, para todo $D \in cD_n$ existe $\beta \in \mathbb{B}_n$ tal que $[D] = \beta * [I_n] = [I_n] * \beta$.

Demostración. Se sigue de inmediato de la proposición 5.1.8, ya que D se obtiene de deshacer un diagrama regular de una trenza β , por lo que $D \in \beta * [I_n]$. \square

Teorema 5.1.10. *La acción $*$, tanto por la izquierda como por la derecha, es libre.*

Demostración. Sean $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{B}_n$ tal que $\beta_1 * [D] = \beta_2 * [D]$, por la proposición 5.1.9 basta con verificar sólo el caso $\beta_1 * [I_n] = \beta_2 * [I_n]$. Sean D_1, D_2 diagramas regulares de β_1 y β_2 , de las equivalencias de definiciones de trenzas (sección 1.2) D_1 y D_2 son diagramas regulares de la misma trenza β si y sólo si se puede llevar un diagrama al otro mediante movimientos de trenzas, luego el proceso de deshacer cruces preserva las relaciones de trenzas que son equivalentes a los movimientos de trenzas. Por lo tanto, si D'_1 y D'_2 son los diagramas obtenidos al deshacer los cruces de D_1 y D_2 , respectivamente, $\beta_1 * [I_n] = [D'_1] = [D'_2] = \beta_2 * [I_n]$ si y sólo si $\beta_1 = \beta_2$. \square

Definición 5.1.11. *Decimos que $D \in [D] \in CD_n$ es **reducido** si no forma b́igonos de tipo I ni II (en sentido de la definici3n 3.2.6) con la ĺnea L_1 .*

Nota 5.1.12. *Nuevamente un diagrama reducido es ́nico salvo isotopías relativas en \mathbb{H}_n . El teorema anterior nos da otra soluci3n al problema de la palabra de \mathbb{B}_n , $\beta_1 = \beta_2$ si y sólo si $\beta_1 * [I_n] = \beta_2 * [I_n]$, o equivalentemente si $D_1 \in \beta_1 * [I_n]$, $D_2 \in \beta_2 * [I_n]$ diagramas reducidos, entonces $D_1 \sim D_2$.*

N3tese que la soluci3n se obtuvo de una forma meramente combinatoria, el factor topol3gico (isotopías de \mathbb{H}_n) se traduce en solo justificar porque “no importa como se dibujan” los diagramas obtenidos al deshacer diagramas regulares. Esto ser3 de gran importancia en el capítulo 7.

5.2. Relaci3n entre CD_n y $CD(E_3)$.

Para encontrar alguna similitud entre CD_n y $CD(E_3)$, primero encontremos una forma de relacionar las isotopías de \mathbb{H}_n y \mathbb{D}_n .

Proposici3n 5.2.1. *El disco unitario \mathbb{D}^2 es una compactificaci3n por un punto de $\overline{\mathbb{H}^2}$ y adem3s $\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\} \simeq \overline{\mathbb{H}^2}$.*

Demostraci3n. Usando la proyecci3n estereogr3fica $q : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se demuestra que S^2 es una compactificaci3n por un punto de \mathbb{C} y por lo tanto $q|_{S^2 \setminus \{N\}} : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ homeomorfismo donde N es el polo norte [17].

Así podemos encajar a $\overline{\mathbb{H}^2}$ y \mathbb{D}^2 en S^2 mediante los mapeos $q|_{S^2 \setminus \{N\}}^{-1}$ y $\iota : \mathbb{D}^2 \hookrightarrow S^2$ tal que $(x, z) \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$. Se tiene que $q|_{S^2 \setminus \{N\}}^{-1}(\overline{\mathbb{H}^2}) \subset \iota(\mathbb{D}^2)$, $\iota(\mathbb{D}^2) \setminus q|_{S^2 \setminus \{N\}}^{-1}(\overline{\mathbb{H}^2}) = \{N\}$ y $\iota(\mathbb{D}^2)$ cerrado en S^2 , es decir, \mathbb{D}^2 es la compactificaci3n por un punto de $\overline{\mathbb{H}^2}$ y $\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\} \simeq \overline{\mathbb{H}^2}$. \square

Proposici3n 5.2.2. *$Homeo(\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}) \simeq Homeo(\mathbb{D}^2)$ y $Mod(\mathbb{D}^2) \simeq Mod(\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}) \simeq Mod(\overline{\mathbb{H}^2})$.*

Demostraci3n. Sea $\Phi : Homeo(\mathbb{D}^2) \rightarrow Homeo(\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\})$ tal que $\varphi \mapsto \varphi|_{\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}}$.

Dado que $\varphi(x) = \varphi|_{\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}}(x)$ para todo $x \neq \sqrt{-1}$ se verifica claramente que

$$(\psi \circ \varphi)|_{\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}} = \psi|_{\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}} \circ \varphi|_{\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}},$$

es decir, Φ es homomorfismo.

Si $f \in \ker(\Phi)$ entonces f fija a todo punto de $\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}$, pero f fija a $\sqrt{-1}$ en \mathbb{D}^2 por definici3n. Por lo tanto, f fija a todos los puntos de \mathbb{D}^2 y por unicidad del neutro, $f = id_{\mathbb{D}^2}$, es decir, Φ inyectivo.

Si $\varphi \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\})$ entonces es un homomorfismo en sí mismo que fija a $\partial(\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\})$ por lo que al extender φ a $\varphi' : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ definiendo $\varphi'(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$ y $\varphi = \varphi'|_{\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}}$, se tiene que $\varphi' \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^2)$, ya que es un homeomorfismo que fija a $\partial\mathbb{D}^2$, es decir, Φ es suprayectivo. Por lo tanto $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}) \simeq \text{Homeo}(\mathbb{D}^2)$.

Por último al hacer el cociente bajo isotopías se obtiene el mismo grupo, ya que si H isotopía de \mathbb{D}^2 , entonces $H|_{\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}}$ es una isotopía en $\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}$. De manera similar si H isotopía de $\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}$ se extiende a una isotopía de \mathbb{D}^2 solo definiendo $H(\sqrt{-1}, t) = \sqrt{-1}$ para toda t . Por lo tanto $\text{Mod}(\mathbb{D}^2) \simeq \text{Mod}(\mathbb{D}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}) \simeq \text{Mod}(\mathbb{H}^2)$. \square

Corolario 5.2.3. *Para toda $n \geq 0$ se tiene que $\text{Mod}(\mathbb{D}_n) \simeq \text{Mod}(\mathbb{H}_n)$.*

Sea $n \geq 0$ fijo, recordemos que $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ es el disco que contiene el intervalo $[0, n+1]$ (homeomorfo a \mathbb{D}^2), $\mathbb{D}_n = \mathbb{D} \setminus \{1, \dots, n\}$ y $\mathbb{H}_n = \mathbb{D} \setminus \{1 + \sqrt{-1}, \dots, n + \sqrt{-1}\}$.

Sea N el punto más alto (la imagen de $\sqrt{-1}$ en \mathbb{D}) de \mathbb{D}_n , por la proposición 5.2.2 y nuevamente usando argumentos de extender y restringir funciones se tiene $\text{Mod}(\mathbb{D}_n) \simeq \text{Mod}(\mathbb{D}_n \setminus \{N\})$ y por la proposición 5.2.1 $\text{Mod}(\mathbb{D}_n) \simeq \text{Mod}(\mathbb{D}_n \setminus \{N\}) \simeq \text{Mod}(\mathbb{H}_n)$.

Proposición 5.2.4. *Para toda $n \geq 0$ existe $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{N\}$ homeomorfismo tal que $f(I_n) = E_3$.*

Demostración. Sea $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{N\}$ homeomorfismo, para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ definimos a s_i a los segmentos de recta en \mathbb{H}^2 tal que unen $i + \sqrt{-1}$ con $(i+1) + \sqrt{-1}$ y s'_i segmentos de recta de \mathbb{H}^2 tal que unen i con $(i+1)$.

Existen $\varphi \in \text{Homeo}(\mathbb{D})$ y $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ homeomorfismo que fija la orientación (no necesariamente fija $\partial\mathbb{D}$) tales que $\psi \circ \varphi \circ g$ manda el diagrama I_n en E_3 . Prosigamos como sigue:

Si $s = \bigcup s_i$, entonces φ es el homeomorfismo que lleva $g(s)$ al intervalo $[1, n]$, luego consideramos U una vecindad regular del intervalo $[1, n]$ y ψ es un homeomorfismo que rota a $\mathbb{D}^2 \setminus U$ hasta que cada $g(s'_i)$ sea una proyección hacia la semicircunferencia inferior de $[i, i+1]$.

Por último, si s''_i son los segmentos de recta en \mathbb{H}^2 que unen a i con $i + \sqrt{-1}$, entonces $\psi \circ \varphi \circ g(s''_i)$ son curvas tal que unen los extremos de $\psi \circ g(s'_i)$ con i y $i+1$, así mediante una $h \in \text{Homeo}(\mathbb{H}_n)$ se pueden enderezar las curvas a segmentos de rectas. Por lo tanto $f = h \circ \psi \circ \varphi \circ g$ lleva I_n a E_3 . \square

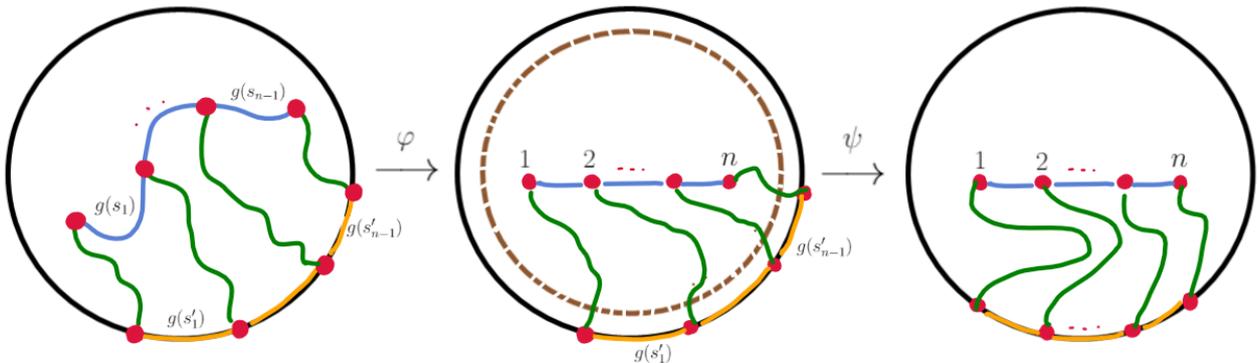


Figura 5.6: Proceso para llevar I_n a E_3 .

Nota 5.2.5. *Dado que $\text{Mod}(\mathbb{D}_n)$ está generado por los σ_i , por el corolario 5.2.3 tenemos que $\text{Mod}(\mathbb{H}_n)$ está generado por $[f^{-1} \circ \sigma_i \circ f]$ con f el homeomorfismo descrito en proposición 5.2.4. Por lo tanto σ_i denotarán tanto a los generadores de $\text{Mod}(\mathbb{D}_n)$ como de $\text{Mod}(\mathbb{H}_n)$.*

Proposición 5.2.6. Si $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \in \mathbb{B}_n$, entonces la función $\beta \mapsto \bar{\beta}$ tal que invierte el orden en que aparecen los generadores, es decir, $\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \mapsto \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \sigma_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}} \dots \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}$ es un automorfismo de \mathbb{B}_n .

Demostración. Es directo del hecho que $\sigma_i \mapsto \sigma_i$ para toda i (es biyectiva) y que las relaciones de \mathbb{B}_n son simétricas. \square

Teorema 5.2.7. Para toda trenza $\beta \in \mathbb{B}_n$, $f(\beta * [I_n]) = [E_3] \cdot \bar{\beta}$ donde f es el homomorfismo de la proposición 5.2.4, en particular $f(CD_n) = CD(E_3)$.

Demostración. De la proposición 5.2.4 podemos definir otra acción de \mathbb{B}_n por la derecha en CD_n tal que $[I_n] \cdot \beta = f^{-1}([E_3] \cdot \beta)$ y por la nota 5.2.5 dicha acción es equivalente a hacer medios giros de Dehn sobre los segmentos de recta $i + \sqrt{-1}$ y $(i + 1) + \sqrt{-1}$. Por lo tanto el problema es equivalente a mostrar que \cdot y $*$ tienen las mismas órbitas.

Para lo cual basta comprobar que para cada σ_i y sus inversos se cumple que $[I_n] \cdot \sigma_i^{\pm 1} = \sigma_i^{\pm 1} * [I_n]$ y si $[I_n] \cdot (\sigma_i \sigma_j)$ es igual a $(\sigma_i \sigma_j) * [I_n]$ o $(\sigma_j \sigma_i) * [I_n]$ con $|i - j| < 2$. Lo primero se verifica en la figura 5.7 para σ_i (para σ_i^{-1} es similar), luego en la figura 5.8 se verifica que $[I_n] \cdot (\sigma_i \sigma_j) = (\sigma_j \sigma_i) * [I_n]$ para el caso $i = j - 1$ (el caso $i = j + 1$ es similar). Por lo tanto, $[I_n] \cdot \beta = \bar{\beta} * [I_n]$ y ya que invertir el orden de los generadores es un automorfismo se sigue que \cdot y $*$ tienen las mismas órbitas. \square

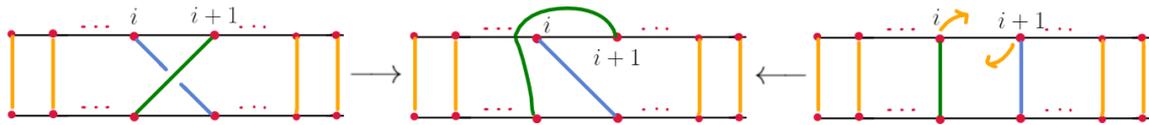


Figura 5.7: Prueba de que $\sigma_i * [I_n] = [I_n] \cdot \sigma_i$.

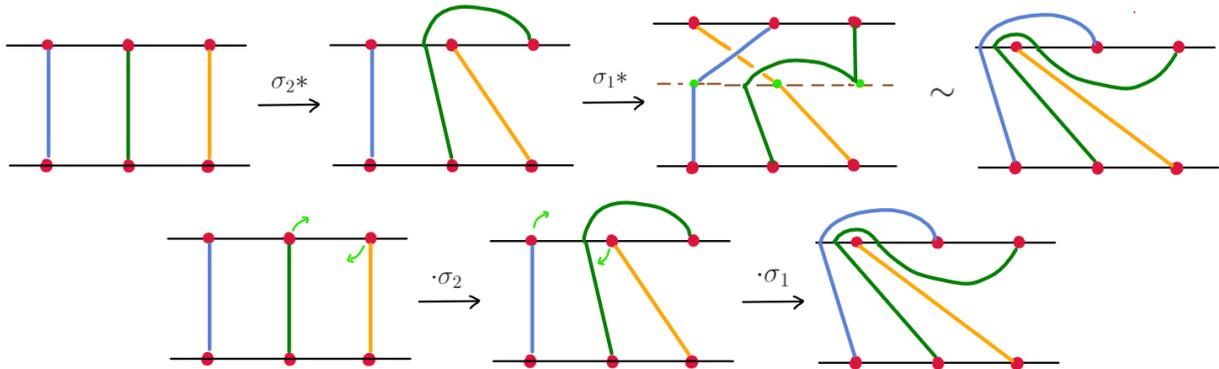


Figura 5.8: Prueba de que $\sigma_i \sigma_{i+1} * [I_n] = [I_n] \cdot \sigma_{i+1} \sigma_i$.

Ejemplo 5.2.8. En la figura 5.9 se muestra una representante de $[I_n] \cdot (\sigma_2^{-2} \sigma_1)$, note que es equivalente al diagrama obtenido en la figura 5.5.

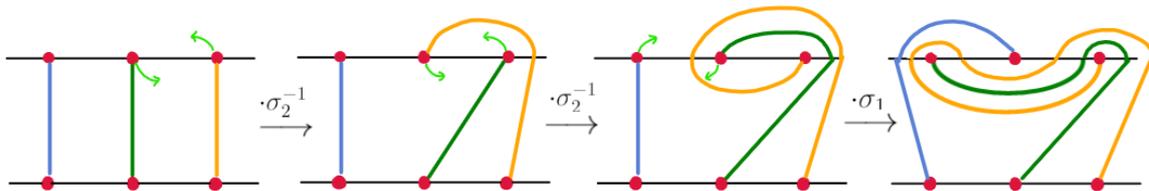


Figura 5.9: Acción mediante medios giros de Dehn de $\sigma_2^{-2} \sigma_1$ sobre $[I_n]$.

Corolario 5.2.9. *La acción \cdot de \mathbb{B}_n sobre $CD(E_3)$ es libre.*

Demostración. \cdot es libre ya que $*$ lo es. Esto termina la prueba pendiente de la proposición 3.1.6. \square

5.3. $CD(E_3)$ y automorfismos de F_n .

Hay una forma de interpretar los diagramas de curvas de $CD(E_3)$ como automorfismos del grupo libre con n generadores F_n . Para ello ocupamos los siguientes resultados.

Teorema 5.3.1. *El grupo fundamental del disco con n perforaciones es isomorfo a un grupo libre con n generadores, i.e., $\pi_1(\mathbb{D}_n) \simeq F_n$.*

La demostración se puede consultar en [17], donde los n generadores t_i se ilustran en la figura 5.10.

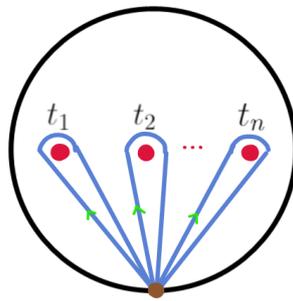


Figura 5.10: Lazos generadores de $\pi_1(\mathbb{D}_n)$.

Introducimos la siguiente notación, denotamos por e_i a las curvas de E_3 y por i' al extremo de e_i que está sobre $\partial\mathbb{D}$, ver figura 5.11. Y para cada $\beta \in \mathbb{B}_n$ denotamos por $\beta(e_i) := [\varphi(e_i)]$ con $\varphi \in \beta$.

Proposición 5.3.2. *Para toda $n > 1$ y $\beta \in \mathbb{B}_n$, $\beta(e_i)$ se puede considerar como un lazo de \mathbb{D}_n .*

Demostración. Sea $n > 1$ fijo, para cada perforación i centramos un círculo c_i de radio $\frac{1}{n+1}$.

Ahora consideremos $\lambda : \mathbb{D}_n \rightarrow \mathbb{D}'_n$ tal que $\lambda(\mathbb{D}_n)$ es el disco que tiene por diámetro el intervalo $[\frac{1}{n}, n+1 - \frac{1}{n}]$ (λ es una homotecia compuesta con una traslación), en \mathbb{D}'_n denotamos por P al punto más bajo del disco.

Unimos P a cada $\lambda(i')$ con un segmento de recta e'_i , definimos t_i al lazo que empieza en P , sigue e'_i , continua por $\lambda(e_i)$ hasta intersectarse con $\lambda(c_i)$, recorre el círculo una vez en sentido a las manecillas del reloj y regresa a P por $\lambda(e_i)$ y e'_i . Ver figura 5.11.

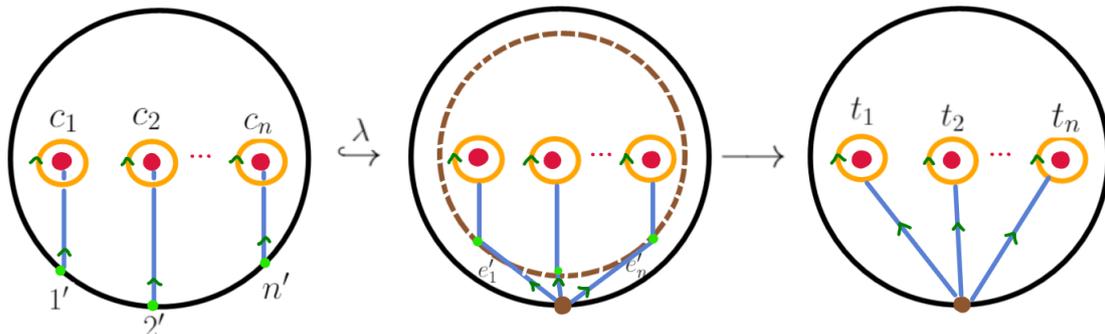


Figura 5.11: Forma de pensar una curva de E_3 como un lazo generador de $\pi_1(\mathbb{D}_n)$.

Note que cada t_i es homotópico a los generadores de la figura 5.10. Luego para $\beta \in \mathbb{B}_n$, podemos definir $\beta(t_i)$ como se definió t_i pero cambiando que recorre a $\lambda(e_i)$ por $\lambda(\varphi(e_i))$ con $\varphi \in \beta$ y se obtiene un lazo de \mathbb{D}_n . Así el mapeo $\beta(e_i) \mapsto \beta(t_i)$ nos permite pensar a $\beta(e_i)$ como un lazo en \mathbb{D}_n . \square

Como cada curva $\beta(e_j)$ es un lazo en \mathbb{D}_n y $\pi_1(\mathbb{D}_n, P) \cong F_n$, entonces existe una descomposición única de $\beta(e_j)$ en términos de los generadores t_j , dicha descomposición se puede obtener con el siguiente algoritmo.

Sea $\beta \in \mathbb{B}_n$, por simplicidad de dibujo pensemos $\beta * [I_n]$ en lugar de $[E_3] \cdot \bar{\beta}$ que por lo hecho en la sección 5.2 y en especial el teorema 5.2.7 es equivalente.

- En \mathbb{H}_n trazamos la línea L_2 determinada por $Im(z) = 2$, también para cada i trazamos ν_i segmento de recta entre $i + \sqrt{-1}$ y $i + 2\sqrt{-1}$.
- Escogemos $D \in \beta * [I_n] \in CD_n$ diagrama reducido tal que D no interseca a L_2 , si interseca a alguna ν_i lo hace de forma transversal y no forma bígono de tipo I ni II con ningún segmento ν_i .
- Se orienta cada curva de D de abajo hacia arriba.
- Para la i -ésima curva d_i de D , construimos una palabra en términos de t_j donde el orden en que aparecen las letras depende de la orientación de d_i como sigue:
 - Si d_i atraviesa a ν_j de izquierda a derecha se escribe t_j .
 - Si d_i atraviesa a ν_j de derecha a izquierda t_j^{-1} .
 - Cuando llegue a una perforación j se escribe t_j .
 - Una vez llega a una perforación se regresa por el mismo camino en sentido contrario.

Sea S_i la palabra formada por los pasos 1 y 2 hasta antes de que la curva llegue a una perforación, la perforación a la que llega d_i claramente es $\pi(\beta)(i)$ con $\pi(\beta)$ la permutación asociada a β , y en el paso 4 la palabra formada es S_i^{-1} . Así d_i describe una palabra de la forma $S_i t_{\pi(\beta)(i)} S_i^{-1}$.

Proposición 5.3.3. *Para cada i , la palabra $S_i t_{\pi(\beta)(i)} S_i^{-1}$ obtenida del algoritmo anterior coincide con la descomposición única de $\beta(e_i)$ en generadores t_j .*

Demostración. El anotar t_j o t_j^{-1} significa que el lazo generador correspondiente rodea a la perforación j en un sentido u otro. Al escoger un diagrama que no forma bígono de tipo I con los segmentos ν_i , se asegura que no hay subpalabras de la forma $t_j t_j^{-1}$ ni $t_j^{-1} t_j$, y dado que tampoco se forman bígono de tipo II , se asegura que el lazo generador haga toda su trayectoria, ver figura 5.12. Por lo tanto, $S_i t_{\pi(\beta)(i)} S_i^{-1}$ es la descomposición única en generadores t_j . \square

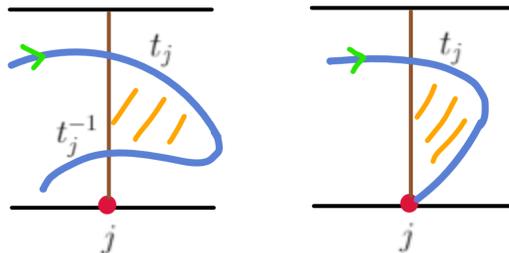


Figura 5.12: Prohibir generar bígono de tipo I y II , excluye las reducciones triviales y lazos incompletos.

Definición 5.3.4. Sean $\beta \in \mathbb{B}_n$ y para cada i , $S_i t_{\pi(\beta)(i)} S_i^{-1}$ las palabras formadas por el algoritmo anterior. Definimos las **coordenadas de la trenza** β como $\omega(\beta) := (S_1 t_{\pi(\beta)(1)}, S_2 t_{\pi(\beta)(2)}, \dots, S_n t_{\pi(\beta)(n)})$.

Ejemplo 5.3.5. Para $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-2}$ la figura 5.13 se tiene que $\omega(\sigma_1 \sigma_2^{-2}) = (t_1 t_2, t_3^{-1} t_1, t_3^{-1} t_1^{-1} t_3)$.

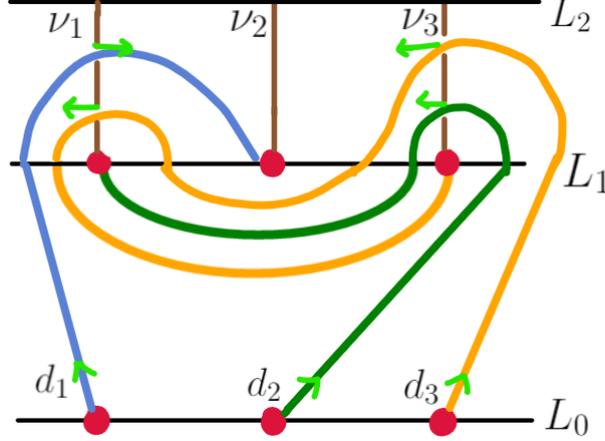


Figura 5.13: Algoritmo aplicado a diagrama reducido de $\sigma_1 \sigma_2^{-2}$.

Proposición 5.3.6. Para toda trenza β , las coordenadas de la trenza $\omega(\beta)$ son únicas, es decir, no depende del diagrama D escogido.

Demostración. Sean D y D' diagramas de $\beta * [I_n]$, cada uno tiene como coordenadas de trenzas a:

$$\omega(\beta) = (S_1 t_{\pi(\beta)(1)}, S_2 t_{\pi(\beta)(2)}, \dots, S_n t_{\pi(\beta)(n)}) \text{ y } \omega(\beta)' = (S'_1 t_{\pi(\beta)(1)}, S'_2 t_{\pi(\beta)(2)}, \dots, S'_n t_{\pi(\beta)(n)}).$$

Como D y D' son isotópicos en particular cada d_i isotópica a d'_i , es decir, $S_i t_{\pi(\beta)(i)} = S'_i t_{\pi(\beta)(i)}$, por lo tanto $S_i = S'_i$ para toda i . \square

Para probar que las coordenadas de trenzas nos dan otra solución al problema de la palabra, es decir, $\omega(\beta) = \omega(\beta')$ si y sólo si $\beta = \beta'$. Usaremos el siguiente homomorfismo sobre $Aut(F_n)$.

Proposición 5.3.7. Si F_n es el grupo libre con n generadores, la función $\phi : \mathbb{B}_n \rightarrow Aut(F_n)$ tal que

$$\phi(\sigma_i) = \begin{cases} x_k \mapsto x_k \text{ si } k \neq i, i+1 \\ x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} \mapsto x_i \end{cases} \quad \phi(\sigma_i^{-1}) = \begin{cases} x_k \mapsto x_k \text{ si } k \neq i, i+1 \\ x_i \mapsto x_{i+1} \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} \end{cases}$$

es un homomorfismo.

Demostración. Para comprobar que es homomorfismo basta con verificar que se satisfacen las relaciones de trenzas, es decir, $\phi(\sigma_i \sigma_j) = \phi(\sigma_j \sigma_i)$ para $|i - j| \geq 2$ y $\phi(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) = \phi(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})$. La relación $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ se satisface del hecho que $\phi(\sigma_i)$ deja fijo a los generadores que mueve $\phi(\sigma_j)$ y viceversa. Para la relación $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ denotemos por $s_i := \phi(\sigma_i)$, calculando se obtiene:

$$\phi(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{s_i} x_k \xrightarrow{s_{i+1}} x_k \xrightarrow{s_i} x_k & \text{si } k \neq i, i+1, i+2. \\ x_i \xrightarrow{s_i} x_i x_{i+1} x_i^{-1} \xrightarrow{s_{i+1}} x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} \xrightarrow{s_i} x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} \xrightarrow{s_i} x_i \xrightarrow{s_{i+1}} x_i \xrightarrow{s_i} x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+2} \xrightarrow{s_i} x_{i+2} \xrightarrow{s_{i+1}} x_{i+1} \xrightarrow{s_i} x_i. \end{cases}$$

$$\phi(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{s_{i+1}} x_k \xrightarrow{s_i} x_k \xrightarrow{s_{i+1}} x_k & \text{si } k \neq i, i+1, i+2. \\ x_i \xrightarrow{s_{i+1}} x_i \xrightarrow{s_i} x_i x_{i+1} x_i^{-1} \xrightarrow{s_{i+1}} x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} \xrightarrow{s_{i+1}} x_{i+1} x_{i+2} x_{i+1}^{-1} \xrightarrow{s_i} x_i x_{i+2} x_i^{-1} \xrightarrow{s_{i+1}} x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+2} \xrightarrow{s_{i+1}} x_{i+1} \xrightarrow{s_i} x_i \xrightarrow{s_{i+1}} x_i \end{cases}$$

□

Nota 5.3.8. Para $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$, el homomorfismo $\phi(\beta)$ actúa sobre los x_i de derecha a izquierda, es decir,

$$\phi(\beta)(x_j) = \phi(\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k})(x_j) = \phi(\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}})(\phi(\sigma_{i_k}^{\varepsilon_k})(x_j))$$

Teorema 5.3.9. Para toda $n \geq 0$, ϕ es inyectiva y además para toda $\beta \in \mathbb{B}_n$ se satisface que:

- $\phi(\beta)(x_k) = U_k x_{\pi(\beta)(k)} U_k^{-1}$ donde U_k es una palabra en generadores x_i y $\pi(\beta)$ es la permutación asociada a β .
- $\phi(\beta)(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$

Para cada $\beta \in \mathbb{B}_n$ denotamos por $\bar{\omega}(\beta) := (U_1 x_{\pi(\beta)(1)}, \dots, U_n x_{\pi(\beta)(n)})$.

Éste es un resultado clásico descrito en [3], se puede revisar su demostración también en [5] o [15].

Ejemplo 5.3.10. Para $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-2}$ se tiene $\bar{\omega}(\beta) = (x_1 x_2, x_3^{-1} x_1, x_3^{-1} x_1^{-1} x_3)$, note que si $t_i = x_i$ entonces coincide con $\omega(\beta)$ del ejemplo 5.3.5.

$$\phi(\sigma_1 \sigma_2^{-2}) : \begin{cases} x_1 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_1 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_1 \xrightarrow{s_1} x_1 x_2 x_1^{-1} \\ x_2 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_3 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_3^{-1} x_2 x_3 \xrightarrow{s_1} x_3^{-1} x_1 x_3 \\ x_3 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_3^{-1} x_2 x_3 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_3^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 x_3 \xrightarrow{s_1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1 x_3 \end{cases}$$

Proposición 5.3.11. Para toda trenza $\beta \in \mathbb{B}_n$ se tiene $\omega(\beta) = \bar{\omega}(\beta)$ haciendo $t_i = x_i$.

Demostración. Igualar $t_i = x_i$ quiere decir tomar como generadores a los lazos de la figura 5.10, así el problema es equivalente a que β y $\phi(\beta)$ actúen de igual forma sobre los lazos t_i . Además sólo es necesario verificar para los generadores σ_i .

Es claro que tanto σ_i como $\phi(\sigma_i)$ actúan de igual forma para los lazos t_j con $j \neq i$. Así que veamos que lazo representa $\phi(t_i) = t_i t_{i+1} t_i^{-1}$ en \mathbb{D}_n , el lazo $t_i t_{i+1}$ es homotópico al lazo que encierra a las perforaciones i y $i+1$, y al componerlo con t_i^{-1} se obtiene un lazo homotópico a $\sigma_i(e_{i+1})$. Ver figura 5.14.

Por lo tanto para toda i , $U_i t_{\pi(\beta)(i)} U_i^{-1}$ y $S_i t_{\pi(\beta)(i)} S_i^{-1}$ son palabra en generadores t_i de $\beta(e_i)$, pero por el mismo razonamiento de la proposición 5.3.6 se tiene $U_i = S_i$ para toda i . □

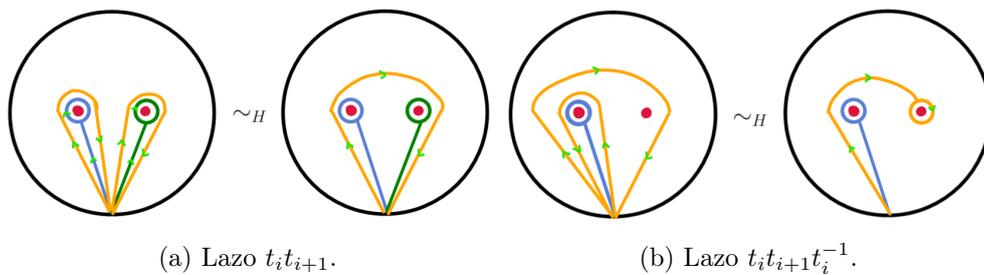


Figura 5.14: σ_i^* y $\phi(\sigma_i)$ actúan de la misma manera sobre t_i .

Proposición 5.3.12. Sean $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{B}_n$, $\omega(\beta_1) = \omega(\beta_2)$ si y sólo si $\beta_1 = \beta_2$, es decir, una solución al problema de la palabra.

Demostración. Es una consecuencia directa de la inyectividad de ϕ . □

5.4. Ejemplo.

Usando el mismo ejemplo $\gamma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$ de las dos secciones pasadas. Calculamos un diagrama regular de γ como se muestra en la figura 5.15 y a partir de este es fácil ver que las coordenadas de trenzas de γ son $\omega(\gamma) = (t_1 t_4 t_1, t_1 t_4 t_1^{-1} t_4^{-1} t_2, t_1 t_4 t_1^{-1} t_1^{-1} t_3, t_1 t_4)$.

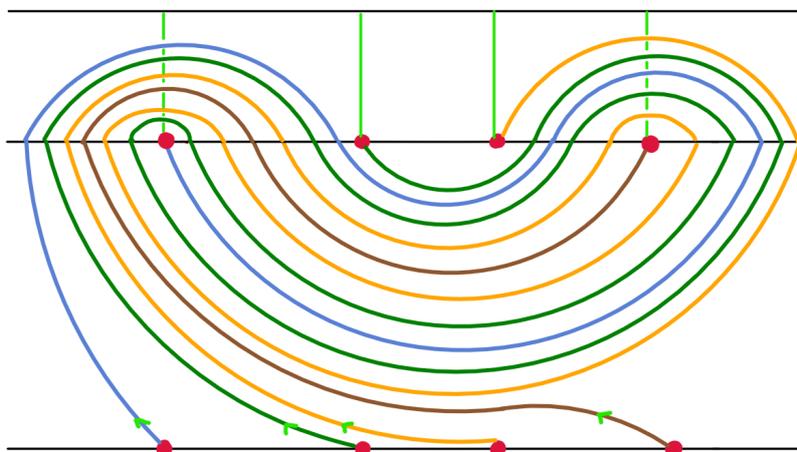


Figura 5.15: Diagrama reducido de γ .

Como verificación de lo hecho en los ejemplos de las dos secciones pasadas, si $\gamma' = \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3$ calculemos sus coordenadas de trenzas mediante el homomorfismo ϕ . Así si $s_1 = \phi(\sigma_1)$ y $g = \phi(\sigma_2 \sigma_3)$ se tiene que:

$$\phi(\gamma) : \begin{cases} x_1 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{s_1^2} x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \xrightarrow{g^{-1}} x_1 x_4 x_1 x_4^{-1} x_1^{-1} \\ x_2 \xrightarrow{g} x_2 x_3 x_2^{-1} \xrightarrow{s_1^2} x_1 x_2 x_1^{-1} x_3 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \xrightarrow{g^{-1}} x_1 x_4 x_1^{-1} x_4^{-1} x_2 x_4 x_1 x_4^{-1} x_1^{-1} \\ x_3 \xrightarrow{g} x_2 x_4 x_2^{-1} \xrightarrow{s_1^2} x_1 x_2 x_1^{-1} x_4 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \xrightarrow{g^{-1}} x_1 x_4 x_1^{-1} x_4^{-1} x_3 x_4 x_1 x_4^{-1} x_1^{-1} \\ x_4 \xrightarrow{g} x_2 \xrightarrow{s_1^2} x_1 x_2 x_1^{-1} \xrightarrow{g^{-1}} x_1 x_4 x_1^{-1}. \end{cases}$$

Por lo tanto $\omega(\gamma') = (x_1 x_4 x_1, x_1 x_4 x_1^{-1} x_4^{-1} x_2, x_1 x_4 x_1^{-1} x_1^{-1} x_3, x_1 x_4)$, por lo que si $x_i = t_i$ se tiene $\omega(\gamma) = \omega(\gamma')$, es decir, $\gamma = \gamma'$.

Capítulo 6

Grupos de trenzas virtuales y el problema de la palabra.

La teoría de nudos virtuales fue introducida por L. Kauffman en [16], como una extensión a la teoría clásica de nudos. Hay múltiples definiciones de nudos y enlaces virtuales descritos en [18], pero para el objetivo de la tesis utilizaremos la definición por diagramas regulares de nudos virtuales.

Un diagrama regular de un nudos virtuales, se comportan igual que en el caso clásico, con la excepción de un nuevo tipo de cruce llamado **cruce virtual**, representado generalmente por un círculo, estos cruces se relacionan con los clásicos mediante los **movimientos de Reidemeister generalizados** descritos en la figura 6.1.

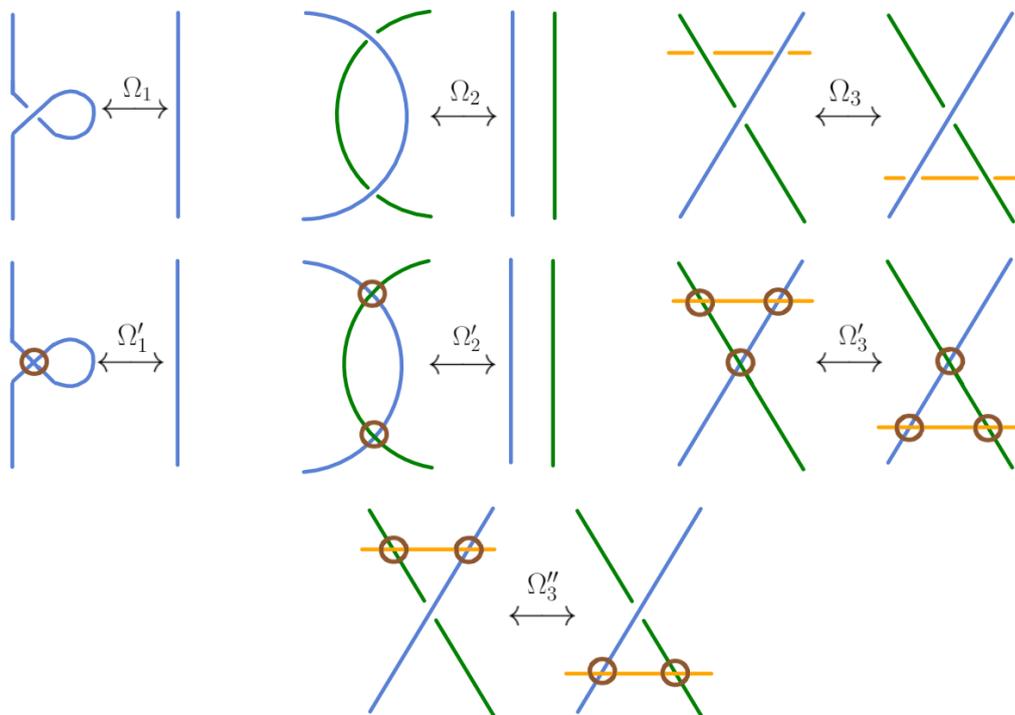


Figura 6.1: Movimientos de Reidemeister generalizados

Al igual que en caso clásico, se obtuvo una teoría de trenzas virtuales introducida por S. Kamada en [14] para encontrar invariantes topológicos de los nudos virtuales mediante teoremas análogos a los teoremas de Alexander y Markov del caso clásico [18].

6.1. Trenzas virtuales.

Definición 6.1.1. Definimos al **grupo de trenzas virtuales** \mathbb{VB}_n como el grupo de trenzas clásicas \mathbb{B}_n agregando un nuevo tipo de cruce llamado **cruce virtual**, estos se relacionan con ellos mismos y con los cruces clásicos mediante los movimientos de Reidemeister generalizados descritos en la figura 6.1.

De forma geométrica se puede representar a los cruces virtuales como el cruce en la figura 6.2, y las relaciones como en la figura 6.3.

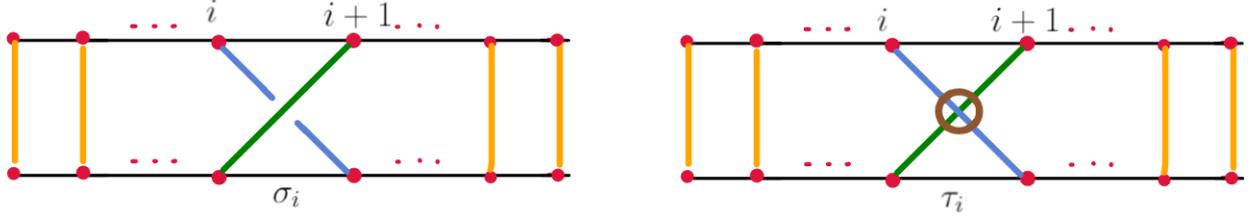


Figura 6.2: Cruce clásico y cruce virtual.

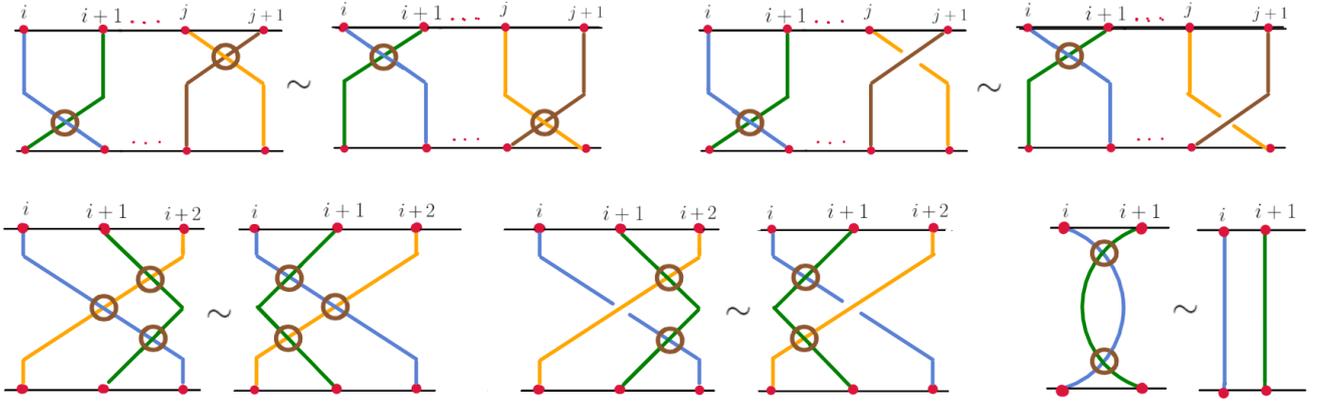


Figura 6.3: Relaciones extras de trenzas.

Así el grupo de trenzas virtuales tiene la siguiente presentación.

$$\mathbb{VB}_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \tau_i^2 = 1 & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \tau_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1}, \tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \end{array} \right. \right\rangle$$

Nota 6.1.2. Notemos que el subgrupo de \mathbb{VB}_n generado por los τ_i con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ es isomorfo al grupo simétrico S_n , ya que admiten la misma presentación.

A la representación geométrica de los generadores de \mathbb{VB}_n de la figura 6.2 las llamaremos **bloques** asociados a σ_i y τ_i , respectivamente. De manera similar a las trenzas clásicas, toda trenza virtual se puede representar como la concatenación de bloques, a esta representación se le llamará **diagrama virtual regular**. Además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que el diagrama está contenido en el semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{H}^2}$ (o en \mathbb{H}_n) y que los puntos marcados están sobre las rectas L_0 y L_1 (recordemos que L_0 es la recta determinada por $Im(z) = 0$ y L_1 por $Im(z) = 1$).

Ejemplo 6.1.3. En la figura 6.4 se muestran diagramas virtuales regulares asociado a las trenzas $\tau_2\sigma_1\sigma_2$ y $\sigma_1\sigma_2\tau_1$.

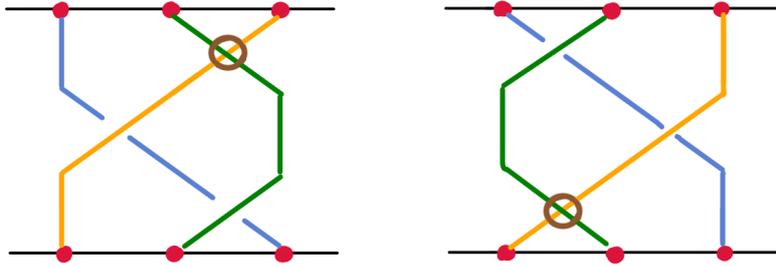


Figura 6.4: Diagramas virtuales regulares de las trenzas $\tau_2\sigma_1\sigma_2$ y $\sigma_1\sigma_2\tau_1$, respectivamente.

Proposición 6.1.4. Existe un homomorfismo $\pi : \mathbb{VB}_n \rightarrow S_n$ tal que $\sigma_i \mapsto (i \ i + 1)$ y $\tau_i \mapsto (i \ i + 1)$. A la imagen de $\pi(\beta)$ se le llamará **permutación asociada a la trenza virtual** β .

Demostración. Para los generadores clásicos ya teníamos dicho homomorfismo y por la nota 6.1.2 se verifica que π satisface todas las relaciones de trenzas virtuales. \square

Proposición 6.1.5. Existe un homomorfismo $\kappa : \mathbb{VB}_n \rightarrow S_n$ tal que $\sigma_i \mapsto 1$ y $\tau_i \mapsto (i \ i + 1)$.

Demostración. Análogo a la proposición 6.1.4. \square

El grupo de trenzas virtuales \mathbb{VB}_n tiene solución al problema de la palabra, una solución puede ser encontrada en “A simple solution to the word problem for virtual braid group” [4] donde mediante técnicas de teoría geométrica de grupos aplicadas al núcleo del homomorfismo κ descrito en la proposición anterior, se obtiene una forma normal para cada trenza en el núcleo de κ .

6.2. Idea intuitiva de los diagramas de curvas virtuales.

Lo que sigue del capítulo esta basado en *Virtual braids and virtual curve diagrams* [6].

De forma análoga al proceso de deshacer cruces de la sección 5.1, lo haremos para diagramas virtuales regulares de trenzas virtuales.

Sea $\beta \in \mathbb{VB}_n$, construimos un diagrama virtual regular de β y procedemos a deshacer los cruces de arriba hacia abajo de la siguiente manera:

1. Si tenemos un cruce virtual, solamente se borra el círculo alrededor de él. Además si él mismo o con otro cruce virtual forman un bígono, entonces se elimina el bígono aplicando los movimientos de Reidemeister generalizados Ω'_1 u Ω'_2 .
2. Si al deshacer un cruce clásico la cuerda correspondiente no cruza ningún cruce virtual, se hace de la misma forma que en la sección 5.1.
3. Si al deshacer un cruce clásico la cuerda correspondiente atraviesa un cruce virtual, se procede como se ilustra en la figura 6.5.

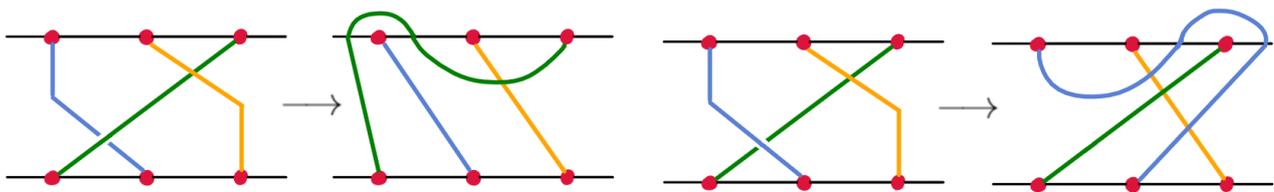


Figura 6.5: Deshacer un cruce clásico cuando un cruce virtual está involucrado.

4. Las cuerdas atraviesan transversalmente a la línea L_1 .
5. Ningún cruce virtual puede atravesar la recta L_1 .

Definición 6.2.1. Al movimiento que prohíbe el inciso 5 del procedimiento de deshacer cruces se le llamará **movimiento prohibido** y se le denotará por F .

Ejemplo 6.2.2. En la figura 6.6 se muestra como se deshacen los cruces de un diagrama virtual regular de la trenza virtual $\tau_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\tau_2\tau_1$.

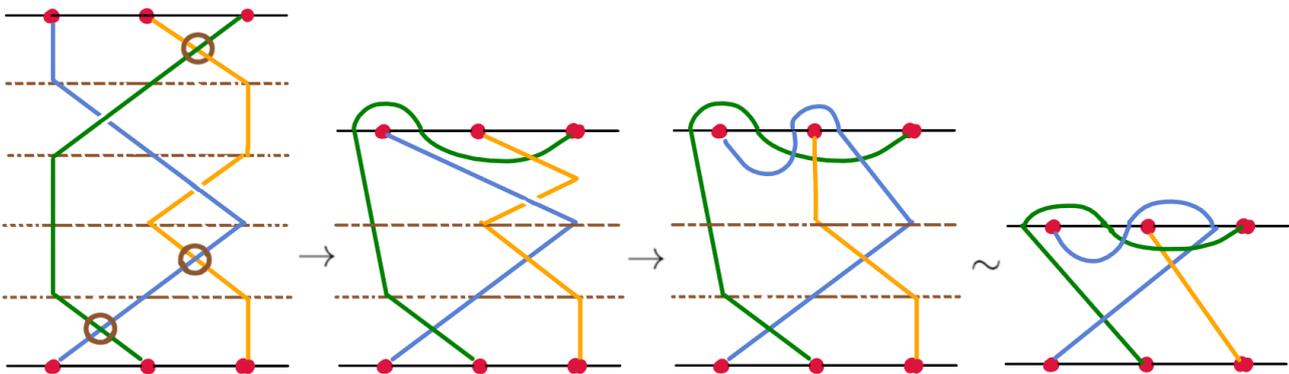


Figura 6.6: Deshacer los cruces del diagrama regular virtual de la trenza $\tau_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\tau_2\tau_1$.

Definición 6.2.3. Denotamos por \overline{vCD}_n a los diagramas obtenidos al deshacer los cruces de todos los diagramas virtuales regulares.

Definición 6.2.4. A los movimientos U, T como se muestra en la figura 6.7 se llamarán **movimientos de simplificación** de \overline{vCD}_n . Note que dichos movimientos eliminan bígono de tipo I y II con respecto a L_1 .

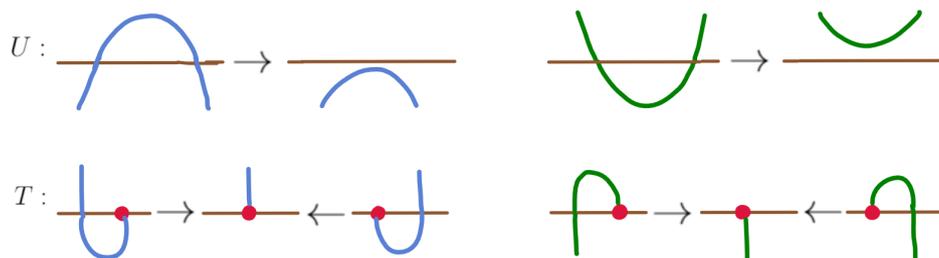


Figura 6.7: Movimientos de simplificación (eliminación de bígono).

Definición 6.2.5. Decimos que $D \in \overline{vCD}_n$, es un **diagrama simplificado** si D no admite movimientos de simplificación U ni T .

Los movimientos U y T inducen una relación de equivalencia en \overline{vCD}_n , donde $D, D' \in \overline{vCD}_n$ son equivalentes si y sólo si se puede llevar un diagrama a otro mediante movimientos de simplificación U , T y de sus inversos. Denotamos a la clase de equivalencia de D como $[D]_S$.

Definición 6.2.6. Denotamos por $\overline{VCD}_n := \overline{vCD}_n / \sim$, con \sim la relación antes descrita y se llamará el conjunto de **diagramas de curvas virtuales**.

Hasta ahora hemos procedido de manera análoga a lo hecho en la sección 5.1, donde se están definiendo los diagramas virtuales a partir de deshacer cruces de diagramas regulares virtuales, y los movimientos de simplificación U y T están haciendo la labor de las isotopías relativas de \mathbb{H}_n .

Desafortunadamente por el movimiento prohibido F , no podemos usar todas las isotopías de \mathbb{H}_n , ya que al permitirlo los diagramas obtenidos no nos servirían para resolver el problema de la palabra en \mathbb{VB}_n . El siguiente ejemplo muestra el porqué.

Ejemplo 6.2.7. Las trenzas $\tau_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\tau_1 \in \mathbb{VB}_n$ tienen diagramas equivalentes si se permite el movimiento F , pero no son equivalentes como trenzas virtuales. Deshaciendo los cruces de los diagramas virtuales regulares de la figura 6.4, obtenemos los diagramas de la figura 6.8 y se observa que son diagramas equivalentes si se permite el movimiento F .

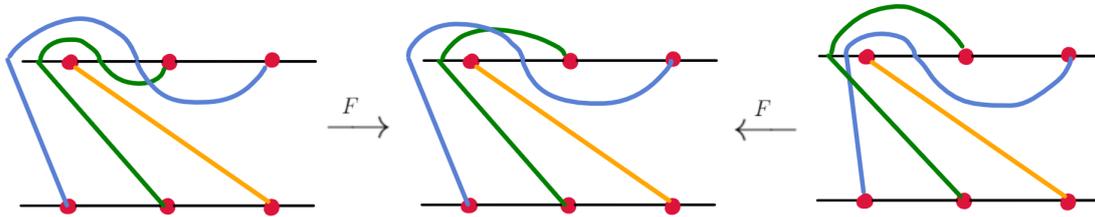


Figura 6.8: Permitir el movimiento F , genera diagramas equivalentes de trenzas distintas.

Para ver que $\tau_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\tau_1$ no son equivalentes en \mathbb{VB}_n , usemos el homomorfismo κ . Se tiene que $\kappa(\tau_2\sigma_1\sigma_2) = (2\ 3) \neq (1\ 2) = \kappa(\sigma_1\sigma_2\tau_1)$, por lo tanto $\tau_2\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_1\sigma_2\tau_1$.

6.3. Acción de \mathbb{VB}_n sobre VCD_n .

Muchos de los razonamientos sobre cómo actuará el grupo \mathbb{VB}_n sobre los diagramas de curvas virtuales, serán con base en sus “arcos por arriba” (se definirán a continuación). Para hablar de forma precisa sobre ellos, se formalizará la definición de diagramas de curvas virtuales a una más abstracta que será equivalente a la obtenida ⁰cruces.

Definición 6.3.1. Definimos un **diagrama virtual** D con n curvas como la terna $(P, <_P, <_C)$ donde:

1. P es un conjunto de puntos.
2. El par $(P, <_P)$ es un conjunto parcialmente ordenado isomorfo a dos cadenas disjuntas A y B .
Donde los elementos de A son llamados **puntos superiores** y los de B son **puntos base**.

3. El par $(P, <_C)$ es un conjunto parcialmente ordenado isomorfo a $n = |B|$ cadenas disjuntas a pares llamadas **curvas o cuerdas**. Toda curva tiene por mínimo un punto base de B y por máximo un punto superior de A . A los n puntos máximos de las n curvas se les llamarán **puntos terminales** y los denotaremos por $Q = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ donde $t_i <_P t_{i+1}$.

4. Si una curva se ve como $a_0 <_C a_1 <_C \dots <_C a_k$, con a_0 punto base y a_k punto terminal, al par (a_i, a_{i+1}) se le llamara **arco**. A los arcos (a_0, a_1) y (a_{k-1}, a_k) serán llamados **arco base y arco terminal** respectivamente. Para $r \geq 1$, a los arcos de la forma (a_{2r-1}, a_{2r}) serán llamados **arcos por arriba** y a (a_{2r}, a_{2r+1}) **arcos por abajo**.

Para cualesquiera dos arcos por arriba (x, y) y (z, w) (pueden ser de diferentes curvas) **no** se debe satisfacer:

$$\min_P\{x, y\} <_P \min_P\{z, w\} <_P \max_P\{x, y\} <_P \max_P\{z, w\}$$

Al conjunto de diagramas virtuales se denotará por vCD_n .

Nota 6.3.2. Aunque la definición anterior es muy abstracta, podemos visualizar geoméricamente un diagrama virtual encajado en \mathbb{H}_n como sigue:

- Las cadenas A y B del inciso 2, se pueden colocar sobre las rectas L_1 y L_0 , tal que el orden $<_P$ coincida con el orden de L_0 y L_1 .
- A los arcos de una curva $a_0 <_C a_1 <_C \dots <_C a_k$ se pueden representar como: el arco base (a_0, a_1) es un segmento de recta que une a los puntos a_0 y a_1 , a los arcos por arriba y por abajo como semicircunferencias superiores o inferiores, respectivamente, que unen a_i con a_{i+1} .
- La elección de como encajar las cadenas A y B sobre las rectas L_1 y L_0 esta sujeta a que no haya tres o más representaciones geométricas de curvas que se intersecan en un punto.

Ejemplo 6.3.3. En la figura 6.9, se representa una visualización geométrica de $(P, <_P, <_C)$ con $P = \{a_0, a_1, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3\}$ donde la cadena A es $c_3 <_P b_1 <_P a_1 <_P b_2 <_P c_1 <_P b_3 <_P c_2$ y la cadena B es $a_0 <_P b_0 <_P c_0$. Las curvas en $(P, <_C)$ son $a_0 <_C a_1$, $b_0 <_C b_1 <_C b_2 <_C b_3$ y $c_0 <_C c_1 <_C c_2 <_C c_3$.

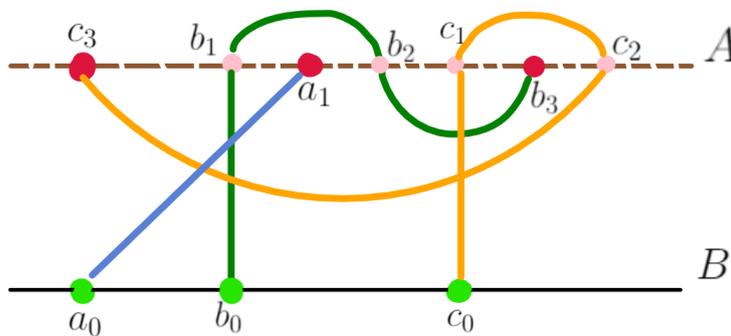


Figura 6.9: Ejemplo de como se visualiza geoméricamente un diagrama virtual $(P, <_P, <_C)$.

Bajo esta visualización, el inciso 4 de la definición se interpreta como la ausencia de intersecciones entre curvas encima de la línea L_1 , es decir, es equivalente a prohibir el movimiento F . Ver figura 6.10.

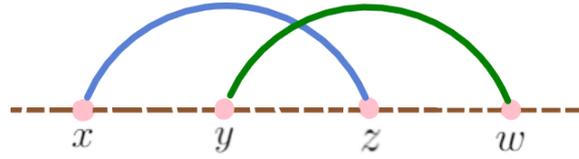


Figura 6.10: Movimiento prohibido F es equivalente a la condición 4.

Nota 6.3.4. De ahora en adelante pensar en un diagrama virtual como una terna $(P, <_P, <_C)$ o como su visualización geométrica sera indistinto.

Ejemplo 6.3.5. El diagrama virtual identidad I_n , se puede describir como:

$P = \{b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n\}$, $a_1 <_P a_2 <_P \dots <_P a_n$, $b_1 <_P b_2 <_P \dots <_P b_n$ las cadenas A y B respectivamente. Y por $b_i <_C a_i$ las n cadenas de $(P, <_C)$. Se visualiza geométricamente como en la figura 6.11.

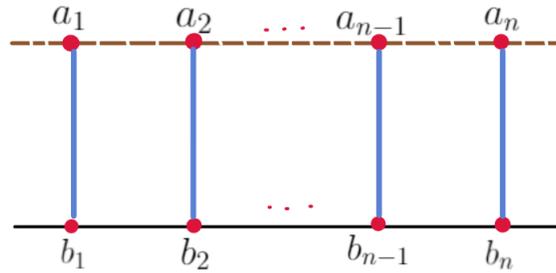


Figura 6.11: Visualización geométrica del diagrama virtual identidad.

Definición 6.3.6. Sean $D = (P, <_P, <_C)$, $D' = (P', <_{P'}, <_{C'})$ dos diagramas virtuales, definimos los siguientes movimientos:

- D y D' están relacionados por una reetiquetación si existe una biyección entre los conjuntos P y P' tal que induce un isomorfismo de orden entre $(P, <_P)$ y $(P', <_{P'})$.
- D y D' están relacionados por un movimiento de tipo U , si existe una curva en D que contiene tres arcos que no son base consecutivos (a, b) , (b, c) y (c, d) tal que no existe x punto superior tal que $b <_C x <_C c$, i.e, b y c adyacentes. Así $P' = P \setminus \{b, c\}$ y los órdenes $<_{P'}$, $<_{C'}$ son las restricciones de $<_P$ y $<_C$ al conjunto P' .
- D y D' están relacionados por un movimiento de tipo T , si existe una curva en D que contiene un arco terminal (a, b) tal que a y b son adyacentes. Así $P' = P \setminus \{b\}$ y los órdenes $<_{P'}$, $<_{C'}$ son las restricciones de $<_P$ y $<_C$ al conjunto P' .

Las reetiquetaciones y los movimientos de tipo U y T inducen una relación de equivalencia sobre vCD_n . Nuevamente decimos que un diagrama virtual D es simplificado si no admite ningún movimiento de tipo U ni T .

Definición 6.3.7. Decimos que $D \sim D'$ si se relacionan mediante una sucesión finita de reetiquetaciones y movimientos de tipo U y T . Denotamos por $VCD_n := vCD_n / \sim$ y se llamará el conjunto de **diagramas de curvas virtuales**. A las clases de equivalencia se denotarán por $[D]_S$.

Proposición 6.3.8. Para toda n se cumple que $\overline{vCD_n} \subset vCD_n$ y $\overline{VCD_n} \subset VCD_n$

Demostración. De la nota 6.3.2 es claro que un diagrama virtual $D \in \overline{vCD_n}$ puede pensarse como una terna $D = (P, <_P, <_C)$. El conjunto P son los puntos de intersección de D con las líneas L_0 y L_1 , el orden $<_P$ es el inducido por las rectas L_0 y L_1 (pensando a las rectas homeomorfas a \mathbb{R}), y por último si a_0 y a_r son los extremos de una cuerda y a_0 está sobre la recta L_0 , orientando la cuerda de a_0 hacia a_r se induce una cadena (curva) y haciendo lo mismo para toda cuerda de D se tiene el orden $<_C$. Por lo tanto $\overline{vCD_n} \subset vCD_n$.

Además los movimientos de tipo U y T coinciden con los descritos en la definición 6.2.4, y el inciso 4 de la definición 6.3.1 es equivalente al movimiento prohibido F . Por lo tanto $\overline{VCD_n} \subset VCD_n$. \square

Definición 6.3.9. Definimos la función $\cdot : \mathbb{V}\mathbb{B}_n \times VCD_n \rightarrow VCD_n$ tal que $\beta \cdot [D]_S = [D']_S$ donde si D es un diagrama simplificado, entonces D' es el diagrama virtual resultante de encimar por detrás un diagrama virtual regular de β sobre D y aplicar el proceso de deshacer diagramas virtuales.

Ejemplo 6.3.10. En la figura 6.12 se ilustra la acción de la trenza $\tau_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\tau_2\tau_1$ sobre el diagrama identidad I_n . Note que el diagrama resultante coincide con el diagrama obtenido en la figura 6.6.

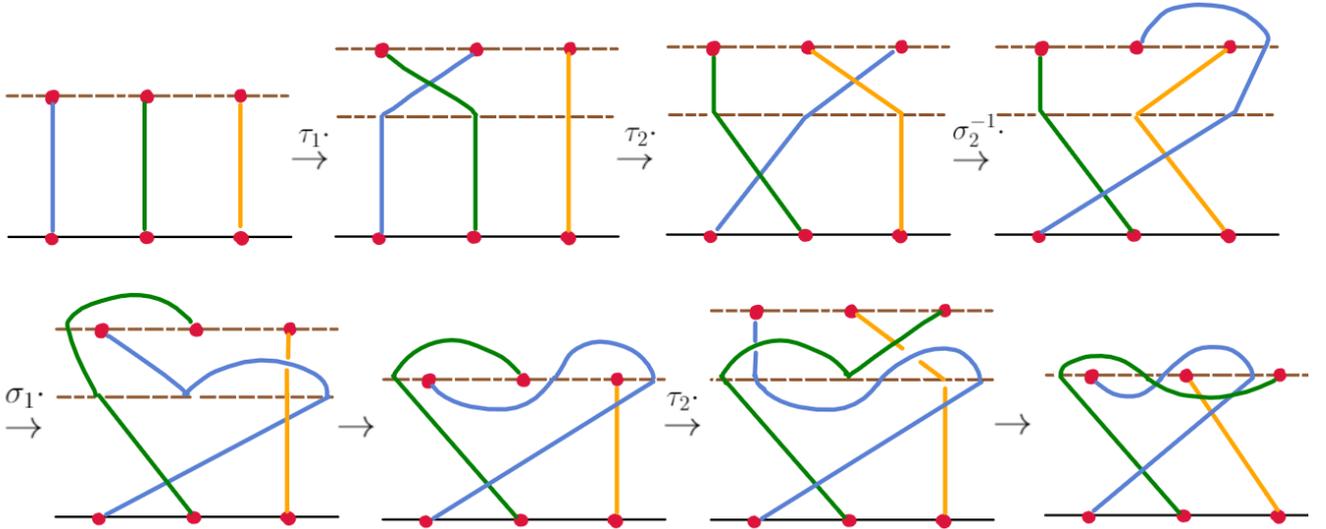


Figura 6.12: Acción de la trenzas $\tau_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\tau_2\tau_1$ sobre $[I_n]$.

Proposición 6.3.11. La función \cdot de la definición anterior es una acción por la izquierda de $\mathbb{V}\mathbb{B}_n$ sobre VCD_n .

Demostración. Las propiedades $1 \cdot [D]_S = [D]_S$ y $(\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot [D]_S)) = (\beta_1\beta_2) \cdot [D]_S$ para todo $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{V}\mathbb{B}_n$ y $[D]_S \in VCD_n$ es análogo a lo hecho en la sección 5.1.

Para mostrar que la acción está bien definida, se debe verificar que para toda relación R del grupo de las trenzas virtuales satisface $R \cdot [D]_S = [D]_S$ para todo $[D]_S \in VCD_n$. Para las relaciones de trenzas clásicas la demostración es análogo a lo hecho en la sección 5.1, para las relaciones $\sigma_i\tau_j = \tau_j\sigma_i$ y $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ con $|i - j| \geq 2$ se satisface del hecho que los arcos que afecta un generador no modifica a los arcos que cambia el otro y para $\tau_i^2 = 1$ se tiene debido al movimiento Ω'_2 .

Por último, para las relaciones $\tau_i\sigma_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}$ y $\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}$ se demuestran en la figura 6.13 y figura 6.14, respectivamente.

\square

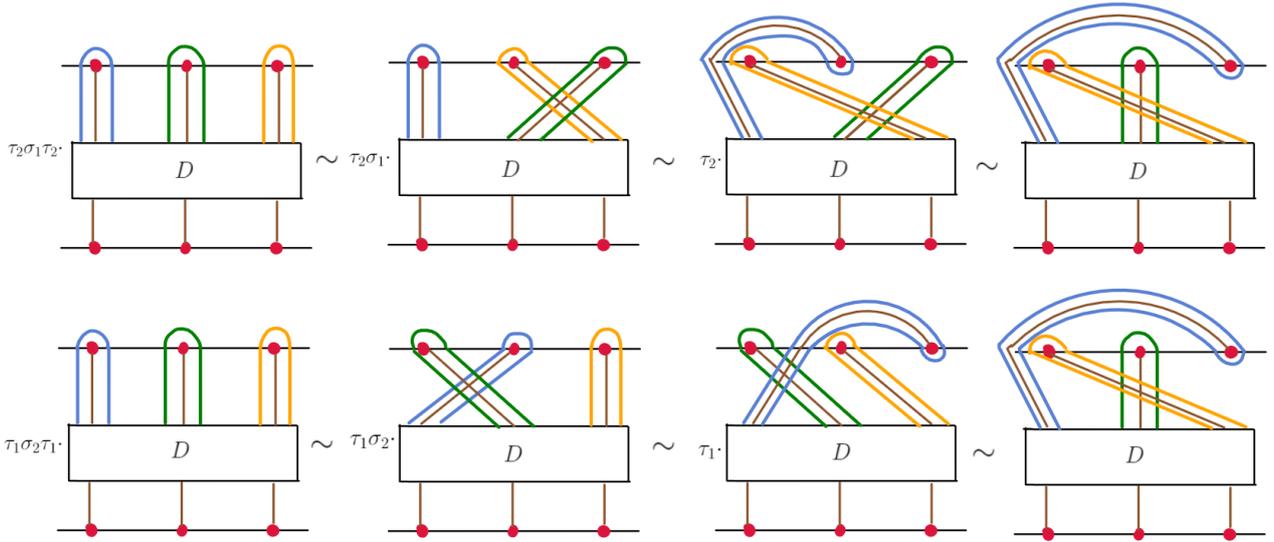


Figura 6.13: $\tau_i \sigma_{i+1} \tau_i \cdot [D] = \tau_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} \cdot [D]$.

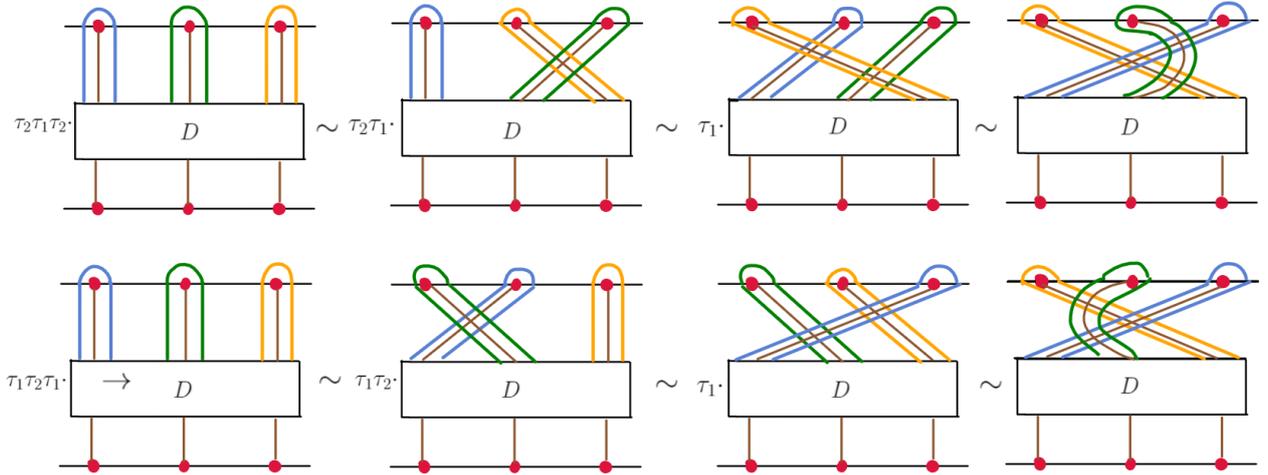


Figura 6.14: $\tau_i \tau_{i+1} \tau_i \cdot [D] = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} \cdot [D]$.

Proposición 6.3.12. Sea $\beta \in \mathbb{VB}_n$ y $D \in \overline{VCD}_n$ diagrama obtenido al deshacer un diagrama virtual regular de β . Entonces la acción es transitiva, en particular $[D]_S = \beta \cdot [I]_S$.

Demostración. La prueba es análoga a la proposición 5.1.10, donde definimos la acción \cdot por la derecha agregando el bloque correspondiente pero debajo del diagrama, y de igual manera que en la caso clásico $\beta \cdot [I_n] = [I_n] \cdot \beta$ para toda $\beta \in \mathbb{VB}_n$. \square

Nota 6.3.13. Dado que en la próxima sección se introducirá una relación de equivalencia sobre VCD_n , para evitar una sobre notación del tipo $[[D]_S]$, de ahora en adelante se hará un abuso de notación escribiendo $D \in VCD_n$ diagrama simplificado en lugar de $D \in [D]_S \in VCD_n$ diagrama simplificado y escribiremos $D = \beta \cdot D'$ en lugar de $[D]_S = \beta \cdot [D']_S$.

Para trabajar con la acción sin recurrir explícitamente a encimar diagramas y deshacer los cruces, estudiaremos como actúan sobre los arcos superiores y arcos terminales.

6.3.1. Propiedades de la acción.

Definición 6.3.14. Sea $D \in VCD$ un diagrama simplificado, si (a, b) es un arco por arriba o por abajo de D tal que $a <_P c <_P b$ ó $b <_P c <_P a$, entonces diremos que el arco (a, b) **encierra** a c .

Además si $t_1 <_P t_2 <_P \dots <_P t_n$ son los puntos terminales de D , decimos que D tiene un arco de tipo $(i, i+1)$ si existe un arco por arriba (a, t_{i+1}) que encierra a t_i y tiene un arco de tipo $(i+1, i)$ si existe un arco por arriba (t_i, b) que encierra a t_{i+1} . Ver la figura 6.15.



Figura 6.15: Ejemplo de arcos de tipo $(i, i+1)$ y $(i+1, i)$.

Los siguientes resultados servirán para ilustrar como se comporta la acción sobre arcos que encierran a puntos terminales.

Proposición 6.3.15. σ_i actúa sobre un diagrama D de forma análoga a realizar un medio giro de Dehn sobre el segmento de recta que une a t_i con t_{i+1} .

Demostración. Si se toma una vecindad regular U del segmento de recta que une t_i con t_{i+1} que no contenga ningún cruce virtual, de la sección 5.2 sabemos que es equivalente colocar un bloque σ_i sobre el diagrama y deshacer los cruces, que aplicar un homomorfismo $\varphi \in \sigma_i \in Mod(H_n)$ que cambie sólo dentro de la vecindad U y en el complemento sea como la identidad. \square

Nota 6.3.16. Recordemos que el subgrupo $\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ de $\mathbb{V}\mathbb{B}_n$ es isomorfo al grupo simétrico S_n ($\tau_i \mapsto (i \ i+1)$), por lo que una palabra compuesta de sólo generadores τ_i se llamará una **permutación** y denotaremos por $[\beta]$ a la clase lateral por la izquierda $S_n \beta \subset \mathbb{V}\mathbb{B}_n$.

Definición 6.3.17. Sea $\pi \in S_n$ una permutación y $i, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $i+k \leq n$, decimos que π **traslada** el intervalo $[i, i+k]$ al intervalo $[\pi(i), \pi(i)+k]$ si $\pi(i+j) = \pi(i) + j$ para toda $j \in \{1, \dots, k\}$. No hay condición alguna en lo que ocurre fuera del intervalo.

Note que si $i+k \neq n$ el ciclo $(i \ i+1 \ \dots \ i+k \ i+k+1)$ satisface dicha condición. Y si $i \neq 1$ el ciclo $(i+k \ i+k-1 \ \dots \ i \ i-1)$ satisface dicha condición.

Proposición 6.3.18. Sea $D \in VCD_n$ un diagrama simplificado y $\pi \in S_n$ una permutación que traslada el intervalo $[i, i+k]$ al intervalo $[\pi(i), \pi(i)+k]$. La región superior de D ($Im(z) \geq 1$) determinada entre los puntos terminales t_i y t_{i+k} , denotada por R , coincide con la región superior de $\pi \cdot D$ determinada entre los puntos terminales $t_{\pi(i)}$ y $t_{\pi(i)+k}$ denotada por $\pi \cdot R$.

Demostración. Sea π una permutación que traslada el intervalo $[i, i+k]$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que π es la identidad fuera del intervalo $[i, i+k+1]$ ó $[i-1, i+k]$, según corresponda en cada caso.

Para visualizar como π actúa sobre D , supongamos que D tiene arcos por arriba (a, c_j) y (a, t_j) , con $a <_P t_i$ y $t_j <_P c_j <_P t_{j+1}$. Tenemos dos casos:

- Caso 1:** Si $\pi(i) > i$, se tiene que $i + k \neq n$ y por lo tanto nos basta ver cuando π es el ciclo $(i \ i + 1 \ \dots \ i + k \ i + k + 1)$, ya que para $\pi(i) \neq i + 1$ solamente es aplicar el mismo argumento iteradamente.

Dado que π admite una descomposición en transposiciones como sigue:

$$\pi = (i + k + 1 \ i + k)(i + k \ i + k - 1) \cdots (i + 1 \ i)$$

(recordemos que el producto de permutaciones se esta pensando de izquierda a derecha), así $\pi = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{i+k}$. Aunque en la figura 6.16 se hace el caso particular $k = 2$, se ejemplifica que localmente ocurre lo mismo para k en general. Note que un arco (a, t_j) pasa a ser un arco (a, t_{j+1}) y un arco (a, c_j) a un arco (a, c_{j+1}) , es decir, la región R coincide con la región $\pi \cdot R$.

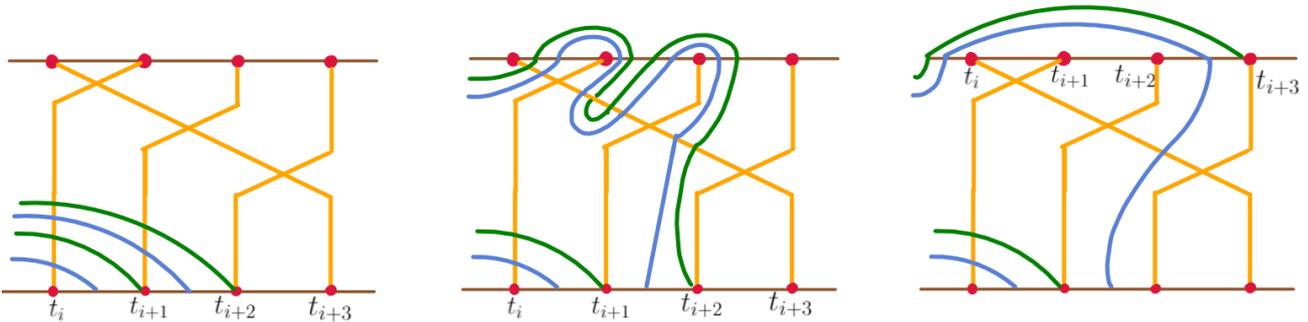


Figura 6.16: Como π actúa en un diagrama D si π traslada un intervalo por 1.

- Caso 2:** Si $\pi(i) < i$, se tiene que $i \neq 1$ y por lo tanto nos basta ver cuando π es el ciclo $(i + k \ i + k - 1 \ \dots \ i - 1)$, ya que para $\pi(i) \neq i - 1$ solamente es aplicar el mismo argumento iteradamente.

Dado que π admite una descomposición en transposiciones como sigue:

$$\pi = (i - 1 \ i)(i \ i + 1) \cdots (i + k - 1 \ i + k)$$

Así $\pi = \tau_{i+k} \tau_{i+k-1} \cdots \tau_{i-1}$. Nuevamente en la figura 6.17 se hace el caso particular $k = 2$, pero se ejemplifica que localmente ocurre lo mismo para k en general. Note que un arco (a, t_j) pasa a ser un arco (a, t_{j-1}) y un arco (a, c_j) a un arco (a, c_{j-1}) , la región R coincide con la región $\pi \cdot R$.

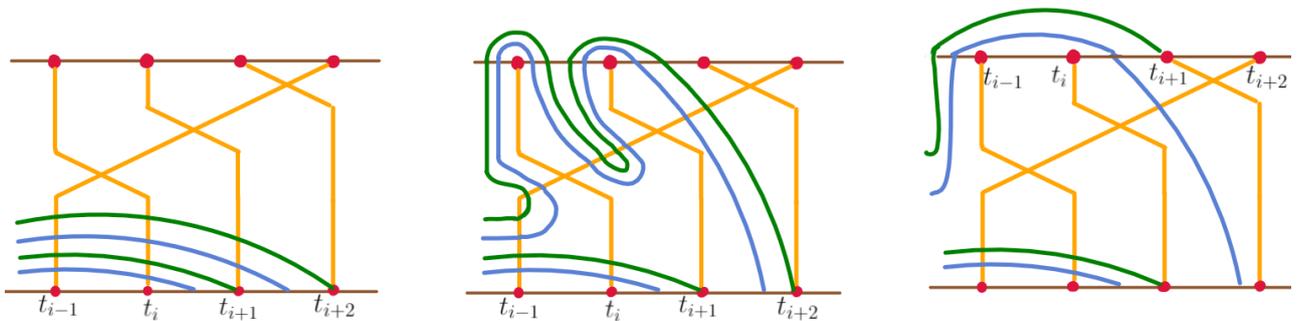


Figura 6.17: Como π actúa en un diagrama D si π traslada un intervalo por -1 .

□

Con esta idea, ya podemos interpretar como actúan las permutaciones sobre arcos por arriba de un diagrama simplificado D . Recordando que toda permutación admite una descomposición única salvo orden en ciclos disjuntos de longitud máxima (ejemplo 2.0.2), por lo tanto, toda permutación admite una descomposición en permutaciones que trasladan intervalos.

El siguiente ejemplo nos da una idea de cómo actúa una permutación que traslada dos intervalos consecutivos a la vez.

Ejemplo 6.3.19. Sean D un diagrama simplificado, $\pi \in S_n$ y $i \leq j < k - 1$, supongamos que π manda el intervalo $[i, j]$ a $[\pi(i), \pi(j)]$ y el intervalo $[j + 1, k - 1]$ a $[\pi(j + 1), \pi(k - 1)]$.

Si D tiene un arco por arriba (a, t_k) con $a <_P t_i$, en la figura 6.18 se muestra la imagen del arco si $\pi(k - 1) < \pi(i)$ y $\pi(j) < \pi(k)$. En la figura 6.19 se muestra la imagen del arco si $\pi(k) < \pi(k - 1) < \pi(i)$.

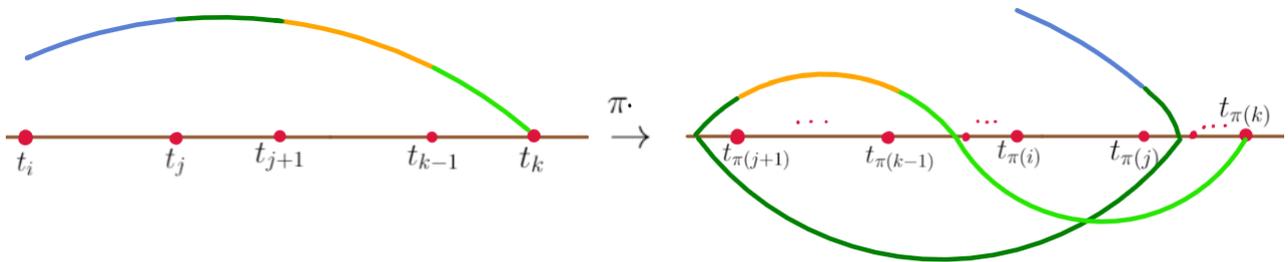


Figura 6.18: $\pi(k - 1) < \pi(i)$ y $\pi(j) < \pi(k)$

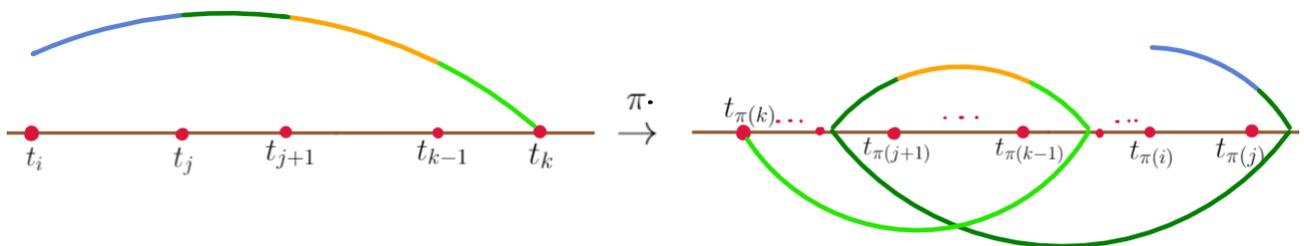


Figura 6.19: $\pi(k) < \pi(k - 1) < \pi(i)$

6.4. La acción es libre.

Para probar que la acción \cdot de $\mathbb{V}\mathbb{B}_n$ sobre VCD_n es libre, es necesario introducir dos relaciones sobre VCD_n .

Definición 6.4.1. Definimos la relación \rightarrow en VCD_n , tal que $D \rightarrow D'$ si se cumple uno de los siguientes:

- Si $D \in VCD_n$ es un diagrama simplificado que contiene un arco del tipo $(i, i + 1)$ entonces $D \rightarrow \sigma_i^{-1} \cdot D = D'$.
- Si $D \in VCD_n$ es un diagrama simplificado que contiene un arco del tipo $(i + 1, i)$ entonces $D \rightarrow \sigma_i \cdot D = D'$.

A la relación \rightarrow se le llamará de **reducción**. Además, si se tiene una sucesión finita de la forma $D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_k$ la denotaremos por $D_1 \Rightarrow D_k$.

Definición 6.4.2. Sean $D, D' \in VCD_n$ diagramas simplificados, se define la relación \leftrightarrow en VCD_n como sigue: $D \leftrightarrow D'$ si y sólo si $D' = \pi \cdot D$ para algún $\pi \in S_n$.

A la relación \leftrightarrow se le llamara de **reacomodo**. La relación \leftrightarrow es una relación de equivalencia y se denota por $[D]$ a las clases de equivalencia.

Definición 6.4.3. Extendemos la relación \rightarrow a dos conjuntos de la siguiente manera.

- Sea $\mathcal{P}' := \{(\beta, D) \mid \beta \in \mathbb{V}\mathbb{B}_n, D \in VCD_n\}$, extendemos \rightarrow a \mathcal{P}' de la siguiente manera:

$$(\beta, D) \rightarrow (\sigma_i^{\pm 1} \beta, \sigma_i^{\pm 1} \cdot D) \text{ si } D \rightarrow \sigma_i^{\pm 1} \cdot D.$$

- Sea $\mathcal{P} := \{([\beta], [D]) \mid \beta \in \mathbb{V}\mathbb{B}_n, D \in VCD_n\}$, extendemos \rightarrow a \mathcal{P} de la siguiente manera:

$$(\mathfrak{d}_1, \mathcal{D}_1) \rightarrow (\mathfrak{d}_2, \mathcal{D}_2) \text{ si existen } \beta_1 \in \mathfrak{d}_1, \beta_2 \in \mathfrak{d}_2, D_1 \in \mathcal{D}_1 \text{ y } D_2 \in \mathcal{D}_2 \text{ tal que } (\beta_1, D_1) \rightarrow (\beta_2, D_2).$$

Similar que en VCD_n , si $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{P}'$ (o en \mathcal{P}), la sucesión finita $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_k$ la denotaremos por $X_1 \Rightarrow X_k$.

Teorema 6.4.4. La relación \rightarrow sobre \mathcal{P} satisface las siguientes propiedades:

1. No existe una sucesión infinita del tipo $(\mathfrak{d}_1, \mathcal{D}_1) \rightarrow (\mathfrak{d}_2, \mathcal{D}_2) \rightarrow (\mathfrak{d}_3, \mathcal{D}_3) \rightarrow \dots$.
2. Si $(\mathfrak{d}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathfrak{e}, \mathcal{E})$ y $(\mathfrak{d}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathfrak{f}, \mathcal{F})$ entonces existe $(\mathfrak{g}, \mathcal{G})$ tal que $(\mathfrak{e}, \mathcal{E}) \Rightarrow (\mathfrak{g}, \mathcal{G})$ y $(\mathfrak{f}, \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathfrak{g}, \mathcal{G})$.
3. El conjunto $\{([\beta], [D]) \in \mathcal{P} \mid \beta \cdot I_n = D\}$ es una componente conexa en $(\mathcal{P}, \rightarrow)$, es decir, para todo $(\mathfrak{d}, \mathcal{D}), (\mathfrak{f}, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}$ entonces $(\mathfrak{d}, \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathfrak{f}, \mathcal{F})$ ó $(\mathfrak{d}, \mathcal{D}) \Leftarrow (\mathfrak{f}, \mathcal{F})$.

Debido a lo extenso de la demostración, se demostrará cada propiedad por separado.

6.4.1. Primera propiedad.

Definición 6.4.5. Sea $D \in VCD_n$ un diagrama simplificado, para cada i denotamos por $o_i(D)$ al número de arcos en D que encierran por arriba a t_i . Definimos la **complejidad virtual** de D como:

$$c_v(D) = \sum_{i=1}^n o_i(D).$$

Proposición 6.4.6. Sean $D, D', D'' \in VCD_n$ diagramas simplificados tales que $D \rightarrow D'$ y $D \leftrightarrow D''$, entonces $c_v(D) > c_v(D')$ y $c_v(D) = c_v(D'')$.

Demostración. Como $D \rightarrow D'$ y $D \leftrightarrow D''$, entonces $D' = \sigma_i^{-1} \cdot D$ o $D' = \sigma_i \cdot D$ y $D'' = \pi \cdot D$ para algún $\pi \in S_n$.

- Dado que $D \rightarrow D'$ entonces D tiene un arco de tipo $(i, i+1)$ o un $(i+1, i)$ arco, según sea el caso. La acción por σ_i^{-1} o por σ_i sobre los arcos de D que encierran a t_i o t_{i+1} se visualiza como en la figura 6.20. Por lo tanto $c_v(D) = c_v(D') + 1$, i.e. $c_v(D) > c_v(D')$.

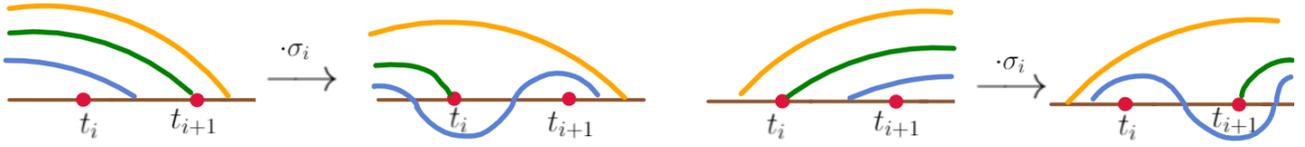


Figura 6.20: Las reducciones decrecen la complejidad virtual en 1.

- De la proposición 6.3.18 y del ejemplo 6.3.19, se tiene que π no agrega arcos por arriba, sólo los traslada. Aunque nuestra descripción no asegura que el diagrama dibujado sea simplificado, podemos asegurar que $c_v(D) \geq c_v(\pi \cdot D)$. Aplicando el mismo argumento, se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$c_v(D) \geq c_v(\pi \cdot D) = c_v(D'') \geq c_v(\pi^2 \cdot D) \geq \dots \geq c_v(\pi^k \cdot D) = c_v(D)$$

con k el orden de π . Por lo tanto $c_v(D) = c_v(D'')$.

□

Demostración de 1): Dado que para cualquier diagrama D simplificado la complejidad de D es finita, se tiene que en (VCD_n, \rightarrow) no existe una sucesión infinita del tipo $D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow \dots$ ya que por la proposición 6.4.6, la complejidad decrece y debe ser mayor o igual a cero. Además como las permutaciones no modifican la complejidad, podemos extender el mismo argumento para $(\mathcal{P}', \rightarrow)$ y $(\mathcal{P}, \rightarrow)$.

6.4.2. Segunda propiedad.

Proposición 6.4.7. *Sea D un diagrama simplificado, existe un único $\beta \in \mathbb{B}_n \subset \mathbb{V}\mathbb{B}_n$ tal que $\beta^{-1} \cdot D$ no contiene arcos terminales por arriba.*

Demostración. En el diagrama D trazamos una línea L_{z_0} determinada por $Im(z) = z_0$ con algún $z_0 \in (0, 1)$ tal que todos los cruces virtuales de D estén contenidos en la región acotada por las rectas L_0 y L_{z_0} y la recta L_{z_0} no genera bígono con D .

Sea D' la sección del diagrama D que toma sólo en cuenta los segmentos de curvas terminales de D contenidos en la región $Im(z) > z_0$, dicho D' se puede pensar como un diagrama de curva de CD_n de la sección 5.1, ya que no contiene ningún cruce virtual por construcción. Ver figura 6.21.

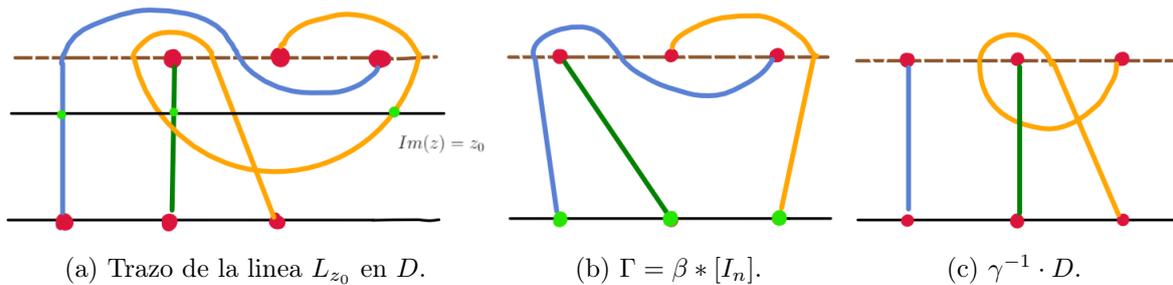


Figura 6.21: Trenza clásica superior asociada a un diagrama.

Por lo tanto existe $\beta \in \mathbb{B}_n$ tal que $D' \in \beta * [I_n]$. Así β^{-1} es tal que $\beta^{-1} * D' = I_n$, por lo que $\beta^{-1} \cdot D$ lleva todo arco terminal a un segmento de recta que une un punto terminal con un punto sobre la línea L_{z_0} , es decir, en $\beta^{-1} \cdot D$ no hay arcos terminales por arriba. \square

Definición 6.4.8. Sea $D \in VCD_n$ diagrama simplificado, a la trenza $\beta \in \mathbb{B}_n \subset \mathbb{V}\mathbb{B}_n$ encontrada en la demostración de la proposición 6.4.7 se le llamará **trenza clásica superior de D** y se denotará por $t(D) := \beta$.

Proposición 6.4.9. Sea $D \in VCD_n$ un diagrama simplificado tal que $D \rightarrow E$ y $D \rightarrow F$, entonces existe $G \in VCD_n$ tal que $E \Rightarrow G$ y $F \Rightarrow G$.

Demostración. Consideremos las trenzas clásicas superiores de D , E y F . Como $D \rightarrow E$ y $D \rightarrow F$ entonces $t(E) = \sigma_i^{\pm 1} \cdot t(D)$ y $t(F) = \sigma_j^{\pm 1} \cdot t(D)$. Por la proposición 6.4.7 podemos reducir un diagrama asociado a $t(E)$ y $t(F)$ al diagrama identidad. Por lo tanto, si $G = t(D)^{-1} \cdot D$ se tiene que $E \Rightarrow G$ y $F \Rightarrow G$. \square

Definición 6.4.10. Sea $D \in VCD_n$ un diagrama simplificado, decimos que una permutación $\pi \in S_n$ deja **intacto** un arco de tipo $(i, i+1)$ de D si el arco $(\pi(i), \pi(i+1))$ es de tipo $(j, j+1)$ en $\pi \cdot D$. De forma análoga se define para un arco de tipo $(i+1, i)$. En ambos casos π debe satisfacer que $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$.

Ejemplo 6.4.11. En la figura 6.22 se ilustra cuando π deja intacto a un arco de tipo $(i, i+1)$, i.e., si $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$, cuando $\pi(i+1) > \pi(i) + 1$ y cuando $\pi(i+1) < \pi(i) + 1$.

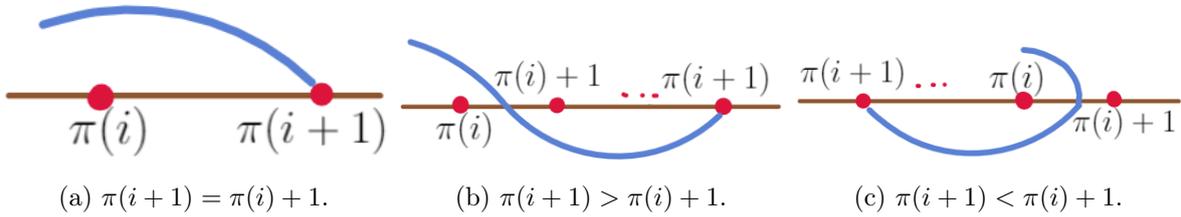


Figura 6.22: Todas las forman en que una permutación actúa sobre un arco de tipo $(i, i+1)$.

Nota 6.4.12. Si $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$, entonces $\pi \sigma_i^{\pm 1} = \sigma_{\pi(i)}^{\pm 1} \pi$, ya que π traslada el intervalo $[i, i+1]$ a $[\pi(i), \pi(i+1)]$.

Proposición 6.4.13. Sean D un diagrama simplificado y $\pi \in S_n$ una permutación, supongamos que D tiene un arco de tipo $(i, i+1)$ y $\pi \cdot D$ tiene un arco de tipo $(j, j+1)$ o $(j+1, j)$. Entonces existe una permutación $\gamma \in S_n$ que deja intactos ambos arcos en $\gamma \cdot D$.

Demostración. El enunciado es equivalente a encontrar una permutación $\gamma \in S_n$ con la propiedad que $\gamma(i+1) = \gamma(i) + 1$ y $\gamma \pi^{-1}(j+1) = \gamma \pi^{-1}(j) + 1$. Es claro que si π deja intacto al arco $(i, i+1)$ entonces $\gamma = \pi$ funciona.

Si π no deja intacto al arco $(i, i+1)$ entonces $\pi(i+1) < \pi(i) + 1$ o $\pi(i+1) > \pi(i) + 1$. Veamos que hay condiciones sobre i y j que implican la no existencia de dicha permutación γ , pero a su vez tales condiciones no permiten que existan diagramas virtuales que las cumplan.

1. Si $\pi(i+1) > \pi(i) + 1$ y $\pi(i) = j$. La figura 6.23 muestra como se vería el arco $(j, j+1)$ en $\pi \cdot D$ y como no es posible que exista un arco terminal de tipo $(i, i+1)$ en $\pi^{-1}\pi \cdot D = D$ sin que haya un cruce virtual arriba de la línea $Im(z) = 1$.

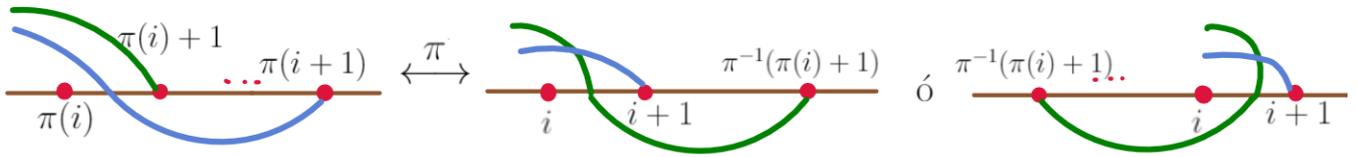


Figura 6.23: Imposibilidad del caso $\pi(i+1) > \pi(i) + 1$ y $\pi(i) = j$.

2. Si $\pi(i+1) > \pi(i) + 1$ y $\pi(i+1) = j+1$. La figura 6.24 muestra como se vería el arco $(j+1, j)$ en $\pi \cdot D$ y como no es posible que exista un arco terminal de tipo $(i, i+1)$ en $\pi^{-1}\pi \cdot D = D$ sin que haya un cruce virtual arriba de la línea $Im(z) = 1$.

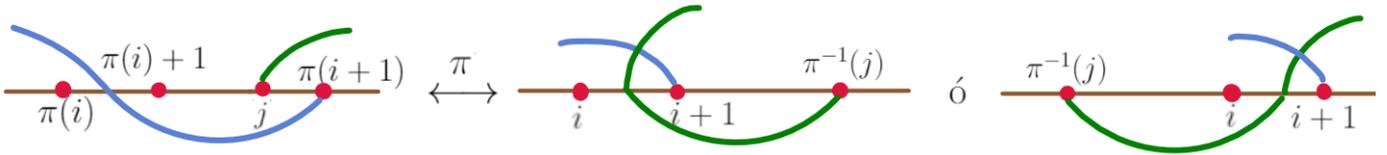


Figura 6.24: Imposibilidad del caso $\pi(i+1) > \pi(i) + 1$ y $\pi(i+1) = j+1$.

3. Si $\pi(i+1) < \pi(i) + 1$ y $\pi(i) = j$. Análogo al inciso 1, pero se toma como referencia al diagrama *c* de la figura 6.22.
4. Si $\pi(i+1) < \pi(i) + 1$ y $\pi(i+1) = j+1$. Análogo al inciso 2, pero se toma como referencia al diagrama *c* de la figura 6.22.
5. Si $\pi(i+1) < \pi(i) + 1$ y $\pi(i+1) = \pi(i) - 1 = j$. De la figura 6.25 se aprecia que en la configuración ni siquiera se permite la existencia de un arco de tipo $(j, j+1)$ en $\pi \cdot D$.

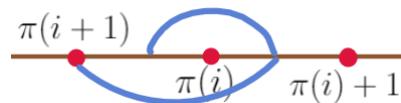


Figura 6.25: Imposibilidad del caso $\pi(i+1) < \pi(i) + 1$ y $\pi(i+1) = \pi(i) - 1 = j$.

6. Si $\pi(i+1) < \pi(i) + 1$ y $\pi(i+1) = \pi(i) - 1 = j-1$. Análogo al inciso 5.

Los casos anteriores no son posibles ya que los intervalos $[i, i+1]$ y $[\pi^{-1}(j), \pi^{-1}(j+1)]$ tienen un extremo común y cualquier permutación que modifique un intervalo modifica el otro. Por lo tanto si $[i, i+1]$ y $[\pi^{-1}(j), \pi^{-1}(j+1)]$ son intervalos disjuntos, entonces cualquier permutación γ que deja intactos a ambos intervalos y su imagen los mantiene disjuntos satisface que $\gamma(i+1) = \gamma(i) + 1$ y $\gamma\pi^{-1}(j+1) = \gamma\pi^{-1}(j) + 1$. \square

Demostración de 2): Sea $(\mathfrak{d}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathfrak{e}, \mathcal{E})$ y $(\mathfrak{d}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathfrak{f}, \mathcal{F})$. Supongamos que existen $\beta \in \mathfrak{d}$, $D \in \mathcal{D}$ y $\pi \in S_n$ tal que D tiene un arco de tipo $(i, i+1)$ y $\pi \cdot D$ tiene un arco de tipo $(j, j+1)$ o $(j+1, j)$. Sea $E = \sigma_i^{-1} \cdot D \in \mathcal{E}$ y $F = \sigma_j^{\pm 1} \cdot (\pi \cdot D) \in \mathcal{F}$.

Por la proposición 6.4.13 existe $\gamma \in S_n$ que deja intactos al arco $(i, i+1)$ en D y al arco $(j, j+1)$ o $(j+1, j)$ en $\pi \cdot D$, y por la nota 6.4.12, se tiene:

$$\gamma \sigma_i^{-1} = \sigma_{\gamma(i)} \gamma \quad \text{y} \quad \gamma \pi^{-1} \sigma_j^{\pm 1} = \sigma_{\gamma \pi^{-1}(j)} \gamma \pi^{-1}.$$

Por último, de la proposición 6.4.9 tenemos que $\gamma \cdot E \Rightarrow G$ y $\gamma \pi^{-1} \cdot F \Rightarrow G$ con $G = t(\gamma \cdot D)^{-1} \cdot (\gamma \cdot D)$, ver figura 6.26. Por lo tanto $(\mathfrak{e}, \mathcal{E}) \Rightarrow (\mathfrak{g}, \mathcal{G})$ y $(\mathfrak{f}, \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathfrak{g}, \mathcal{G})$ con $\mathfrak{g} = [\gamma \beta]$ y $\mathcal{G} = [G]$.

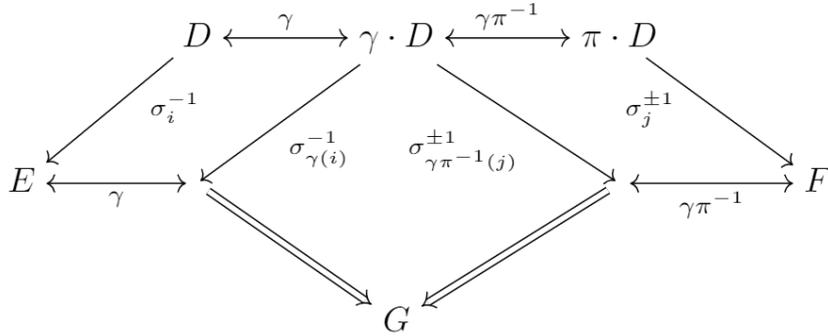


Figura 6.26: Diagrama conmutativo

6.4.3. Tercera propiedad.

Proposición 6.4.14. Sea D un diagrama simplificado y fijamos $i \neq n$. Si D no tiene un arco de tipo $(i+1, i)$ entonces $\sigma_i \cdot D$ tiene un arco de tipo $(i, i+1)$. De igual manera, si D no tiene un arco de tipo $(i, i+1)$ entonces $\sigma_i^{-1} \cdot D$ tiene un arco de tipo $(i+1, i)$.

Demostración. Basta con notar que los casos descritos en la figura 6.27 son todos los posibles tal que D no tiene un arco de tipo $(i+1, i)$, y que al aplicar σ_i se forma un arco de tipo $(i, i+1)$. El caso para σ_i^{-1} es análogo. \square

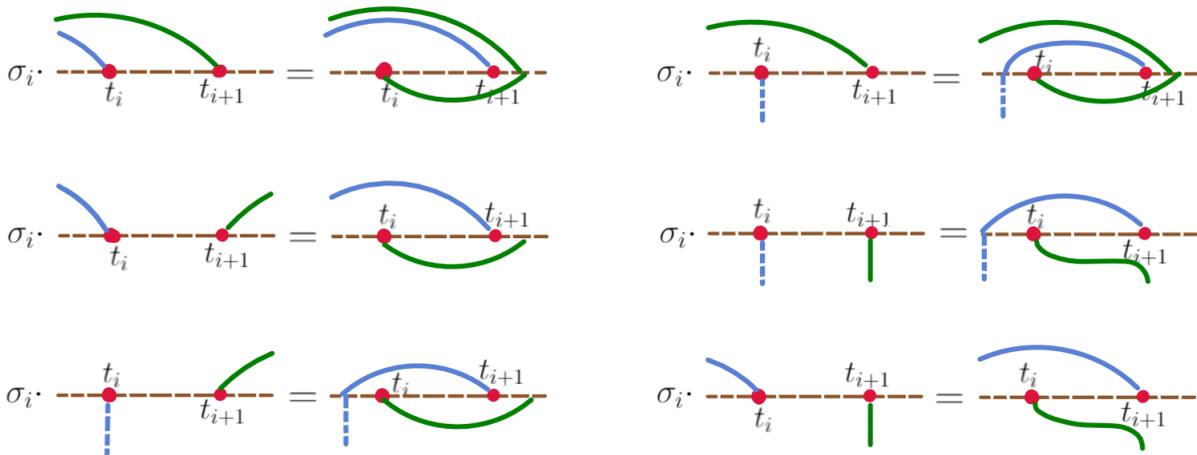


Figura 6.27: Todas las posibles configuraciones donde un diagrama D no tiene un arco de tipo $(i+1, i)$ y como la acción de σ_i actúa sobre estas.

Demostración de 3): La proposición 6.4.14 se puede interpretar como, todo diagrama D se reduce o es la reducción de otro, i.e., $D \rightarrow \sigma_i^{\pm 1} \cdot D$ o $\sigma_i^{\pm 1} \cdot D \rightarrow D$ para algún i .

Si $D = \beta \cdot I_n$ con $\beta \in \mathbb{VB}_n$, entonces existe una cadena finita de diagramas de la forma

$$I_n = D_1, D_2, \dots, D_r = D, \text{ donde } D_k \leftrightarrow D_{k+1}, D_k \rightarrow D_{k+1} \text{ o } D_{k+1} \rightarrow D_k.$$

Por lo tanto $\{([\beta], [D]) \in \mathcal{P} \mid \beta \cdot I_n = D\}$ es una componente conexa en $(\mathcal{P}, \rightarrow)$.

Lema 6.4.15 (Lema Diamante). *Si P es un conjunto y \rightarrow una relación sobre él tal que:*

1. *No contiene sucesiones infinitas del tipo $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$.*
2. *Si $a \rightarrow b$ y $a \rightarrow c$ entonces existe $d \in P$ tal que $b \Rightarrow d$ y $c \Rightarrow d$.*
3. *\rightarrow es conexa, es decir, para todo $a, b \in P$ entonces $a \Rightarrow b$ o $b \Rightarrow a$.*

Entonces existe un único $m \in P$ tal que para todo $a \in P$ se tiene $a \Rightarrow m$.

Demostración. El lema diamante o también llamado lema de Newman, es demostrado en [20]. □

Teorema 6.4.16. *Sea $\beta \in \mathbb{VB}_n$ tal que $\beta \cdot I_n = I_n$, entonces $\beta = 1$.*

Demostración. El teorema 6.4.4 nos dice que $(\{([\beta], [D]) \in \mathcal{P} \mid \beta \cdot I = D\}, \rightarrow)$ satisface las hipótesis del lema diamante, por lo tanto existe un único elemento mínimo que claramente es $([1], [I_n])$. Por contradicción supongamos que existe $\beta \in \mathbb{VB}_n$ distinto a la trenza trivial tal que $\beta \cdot I_n = I_n$.

Notemos que β no es una permutación ya que $\pi \cdot I \neq I$ si $\pi \neq 1$. Entonces $([\beta], [\beta \cdot I_n]) = ([\beta], [I_n])$ sería un elemento mínimo distinto a $([1], [I_n])$, lo cual contradice el lema diamante. □

Corolario 6.4.17. *Sea $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{VB}_n$ tales que $\beta_1 \cdot I_n = \beta_2 \cdot I_n$, entonces $\beta_1 = \beta_2$, es decir, una solución al problema de la palabra para \mathbb{VB}_n .*

6.5. VCD_n y automorfismos de F_{n+1} .

Debido a que aún teniendo un diagrama simplificado para una trenza virtual es difícil saber si el diagrama no es equivalente con I_n debido a los cruces virtuales, seguiremos con el paralelismo de los diagramas CD_n , y le asociaremos unas coordenadas de trenza virtuales como sigue:

Sea $\beta \in \mathbb{VB}_n$ una trenza virtual y $D \in \beta \cdot I_n$ un diagrama. Orientamos cada curva d_i del punto base al punto terminal y escribimos una palabra en letras q, x_1, x_2, \dots, x_n como sigue:

1. Si d_i se cruza con otra curva d_j (puede ser ella misma) escribimos q si d_j cruza a d_i de derecha a izquierda y q^{-1} si lo hace de izquierda a derecha.
2. Si d_i tiene un arco por arriba (a, b) orientado de a a b que encierra a un punto terminal t_j , se escribe x_j si $a <_P b$ y se escribe x_j^{-1} si $b <_P a$.
3. Cuando d_i llegue al punto terminal t_j , se escribe x_j
4. Una vez llega a una perforación se regresa por el mismo camino en sentido contrario.

Para cada d_i se obtiene una palabra del tipo $S_i t_{\pi(\beta)(i)} S_i^{-1}$, así las **coordenadas de la trenza virtual** β se denotarán por $\omega_v(\beta) := (S_1 x_{\pi(\beta)(1)}, S_2 x_{\pi(\beta)(2)}, \dots, S_n x_{\pi(\beta)(n)})$.

Nota 6.5.1. Si β es una trenza clásica (no tiene generadores τ_i), se obtiene las mismas coordenadas de trenza descrita en la sección 5.3.

Ejemplo 6.5.2. Para $\beta = \tau_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \tau_2 \tau_1$ y el diagrama virtual de la figura 6.12 tenemos que $\omega_v(\beta)$ es igual a $(q x_2^{-1} q x_1, q^{-1} x_1 q x_3, q^{-2} x_2)$.

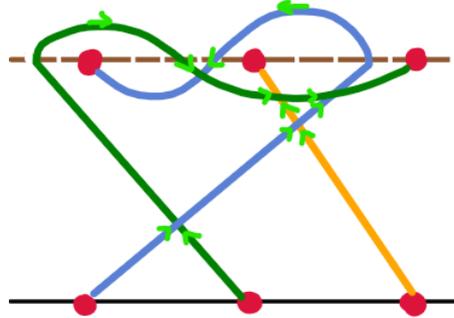


Figura 6.28: Diagrama simplificado de $\tau_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \tau_2 \tau_1$, orientando sus curvas de abajo hacia arriba.

Proposición 6.5.3. Si $\beta \in \mathbb{VB}_n$ y $D, D' \in \beta \cdot I_n$, entonces las coordenadas de trenza virtual de β calculadas con D y D' coinciden.

Demostración. Se sigue del hecho que los movimientos de simplificación U y T no modifican el cálculo de $\omega_v(\beta)$. \square

Análogo a lo hecho en la sección 5.3, podemos dar una representación de \mathbb{VB}_n en los automorfismos del grupo libre con $n + 1$ generadores, donde al restringirse a generadores clásicos se obtiene el mismo homomorfismo de la proposición 5.3.7.

Proposición 6.5.4. Si F_{n+1} es el grupo libre con generadores $\{x_1, x_2, \dots, x_n, q\}$, la función definida en generadores $\psi : \mathbb{VB}_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n+1})$ tal que $\psi(\sigma_i)(q) = \psi(\tau_i)(q) = q$ para toda i y

$$\psi(\sigma_i) = \begin{cases} x_k \mapsto x_k & \text{si } k \neq i, i+1 \\ x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} \mapsto x_i \end{cases} \quad \psi(\tau_i) = \begin{cases} x_k \mapsto x_k & \text{si } k \neq i, i+1 \\ x_i \mapsto q x_{i+1} q^{-1} \\ x_{i+1} \mapsto q^{-1} x_i q \end{cases}$$

es un homomorfismo.

Demostración. Notemos que $\psi(\sigma_i)$ coincide con el homomorfismo descrita en la proposición 5.3.7, con la única diferencia que está definida para q , pero como $\psi(\sigma_i)(q) = q$ para toda i se siguen satisfaciendo todas las relaciones de trenzas clásicas.

Para las relaciones $\tau_i^2 = 1$, $\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$ y $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ con $|i - j| \geq 2$ se satisfacen del hecho que para toda i , $\psi(\tau_i)$ se comporta como la transposición $(x_i \ x_{i+1})$ y por la nota 6.1.2 el subgrupo generado por los τ_i es isomorfo al grupo simétrico.

Así solo quedan las relaciones mixtas, para el caso $\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i$ con $|i - j| \geq 2$ se cumple del hecho que $\psi(\sigma_i)$ deja fijos a x_j y x_{j+1} , mientras que $\psi(\tau_j)$ deja fijos a x_i y x_{i+1} . Por último, para $\tau_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1}$ denotemos por $s_i := \psi(\sigma_i)$ y $r_i := \psi(\tau_i)$, así se tiene:

$$\psi(\tau_i \sigma_{i+1} \tau_i) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{r_i} x_k \xrightarrow{s_{i+1}} x_k \xrightarrow{r_i} x_k & \text{si } k \neq i, i+1, i+2. \\ x_i \xrightarrow{r_i} qx_{i+1}q^{-1} \xrightarrow{s_{i+1}} qx_{i+1}x_{i+2}x_{i+1}^{-1}q^{-1} \xrightarrow{r_i} x_iqx_{i+2}q^{-1}x_i^{-1} \\ x_{i+1} \xrightarrow{r_i} q^{-1}x_iq \xrightarrow{s_{i+1}} q^{-1}x_iq \xrightarrow{r_i} x_{i+1} \\ x_{i+2} \xrightarrow{r_i} x_{i+2} \xrightarrow{s_{i+1}} x_{i+1} \xrightarrow{r_i} q^{-1}x_iq \end{cases}$$

$$\psi(\tau_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1}) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{r_{i+1}} x_k \xrightarrow{s_i} x_k \xrightarrow{r_{i+1}} x_k & \text{si } k \neq i, i+1, i+2. \\ x_i \xrightarrow{r_{i+1}} x_i \xrightarrow{s_i} x_ix_{i+1}x_i^{-1} \xrightarrow{r_{i+1}} x_iqx_{i+2}q^{-1}x_i^{-1} \\ x_{i+1} \xrightarrow{r_{i+1}} qx_{i+2}q^{-1} \xrightarrow{s_i} qx_{i+2}q^{-1} \xrightarrow{r_{i+1}} x_{i+1} \\ x_{i+2} \xrightarrow{r_{i+1}} q^{-1}x_{i+1}q \xrightarrow{s_i} q^{-1}x_iq \xrightarrow{r_{i+1}} q^{-1}x_iq \end{cases}$$

Por lo tanto sus imágenes coinciden y ψ es un homomorfismo. \square

Proposición 6.5.5. Sea $\beta \in \mathbb{VB}_n$, para toda k se tiene que $\psi(\beta)(x_k) = U_k x_{\pi(\beta)(k)} U_k^{-1}$ donde U_k es una palabra con letras x_i y q , $\pi(\beta)$ la permutación asociada a la trenza virtual. Denotamos por $\bar{\omega}_v(\beta)$ a las coordenadas $(U_1 x_{\pi(\beta)(1)}, U_1 x_{\pi(\beta)(1)}, \dots, U_n x_{\pi(\beta)(n)})$.

Demostración. La demostración se puede consultar en [18]. \square

Ejemplo 6.5.6. Para $\beta = \tau_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \tau_2 \tau_1$ tenemos que $\bar{\omega}_v(\beta) = (qx_2^{-1}qx_1, q^{-1}x_1qx_3, q^{-2}x_2)$. Note que coincide con $\omega_v(\beta)$ del ejemplo 6.5.2.

$$\begin{cases} x_1 \xrightarrow{r_1} qx_2q^{-1} \xrightarrow{r_2} q^2x_3q^{-2} \xrightarrow{s_2^{-1}} q^2x_3^{-1}x_2x_3q^{-2} \xrightarrow{s_1} q^2x_3^{-1}x_1x_3q^{-2} \xrightarrow{r_2} qx_2^{-1}qx_1q^{-1}x_2q^{-1} \\ x_2 \xrightarrow{r_1} q^{-1}x_1q \xrightarrow{r_2} q^{-1}x_1q \xrightarrow{s_2^{-1}} q^{-1}x_1q \xrightarrow{s_1} q^{-1}x_1x_2x_1^{-1}q \xrightarrow{r_2} q^{-1}x_1qx_3q^{-1}x_1^{-1}q \\ x_3 \xrightarrow{r_1} x_3 \xrightarrow{r_2} q^{-1}x_2q \xrightarrow{s_2^{-1}} q^{-1}x_3q \xrightarrow{s_1} q^{-1}x_3q \xrightarrow{r_2} q^{-2}x_2q^2 \end{cases}$$

Proposición 6.5.7. Para toda $\beta \in \mathbb{VB}_n$, se cumple que $\omega_v(\beta) = \bar{\omega}_v(\beta)$.

Demostración. De la nota 6.5.1 y del hecho que $\psi(\sigma_i)$ restringido a los generadores x_i coincide con el homomorfismo descrito en la sección 6.3, la proposición 5.3.11 nos dice que la igualdad se mantiene para los generadores clásicos. Así solo falta verificar que ocurre para los generadores virtuales.

Pero en la figura 6.29 se muestra que si una curva d_i con coordenada x_i es afectada por τ_i , su imagen interseca primero con la imagen de d_{i+1} , llega a la perforación $i+1$ y de regreso se interseca con d_{i+1} en dirección contraria, es decir, la coordenada de $d_i \cdot \tau_i$ es igual a qx_iq^{-1} . Por lo que coincide con la imagen de ψ . Análogo para la curva d_{i+1} . Por lo tanto, $\psi(\tau_i)$ actúa de la misma manera que τ_i en el diagrama de curvas, es decir, $\omega_v(\beta) = \bar{\omega}_v(\beta)$. \square

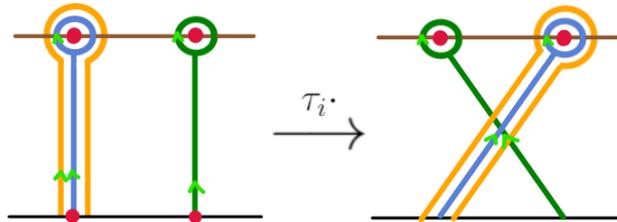


Figura 6.29: $\psi(\tau_i)$ actúa de la misma manera que τ_i en el diagramas de curvas.

Proposición 6.5.8. Para $n \geq 4$, ψ no es inyectiva.

Demostración. Para $n = 4$, sea $\beta = (\tau_3\sigma_2\tau_1\sigma_2^{-1})^3$, se tiene un diagrama virtual como en la figura 6.30, y sus coordenadas de trenza virtual son $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \omega_v(1)$. Pero usando el homomorfismo κ de la proposición 6.1.5 se tiene $\kappa(\beta) = (3\ 4)(1\ 2)$, por lo tanto $\beta \neq 1$. \square

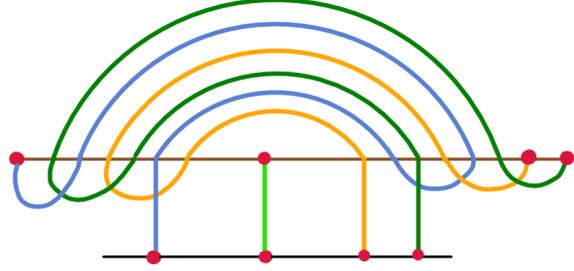


Figura 6.30: Diagrama simplificado de $(\tau_3\sigma_2\tau_1\sigma_2^{-1})^3$.

Solo para ejemplificar la proposición 6.5.7, calculemos $g = \psi(\tau_3\sigma_2\tau_1\sigma_2^{-1})$.

$$g = \begin{cases} x_1 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_1 \xrightarrow{r_1} qx_2q^{-1} \xrightarrow{s_2} qx_2x_3x_2^{-1}q^{-1} \xrightarrow{r_3} qx_2qx_4q^{-1}x_2^{-1}q^{-1} \\ x_2 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_3 \xrightarrow{r_1} x_3 \xrightarrow{s_2} x_2 \xrightarrow{r_3} x_2 \\ x_3 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_3^{-1}x_2x_3 \xrightarrow{r_1} x_3^{-1}q^{-1}x_1qx_3 \xrightarrow{s_2} x_2^{-1}q^{-1}x_1qx_2 \xrightarrow{r_3} x_2^{-1}q^{-1}x_1qx_2 \\ x_4 \xrightarrow{s_2^{-1}} x_4 \xrightarrow{r_1} x_4 \xrightarrow{s_2} x_4 \xrightarrow{r_3} q^{-1}x_3q \end{cases} .$$

Así $\psi(\beta) = g^3$, no es difícil convencerse de que en efecto $g^3(x_i) = x_i$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Corolario 6.5.9. Tenemos que ω es un invariante no completo de las trenzas virtuales, es decir, si $\omega(\beta) \neq \omega(\beta')$ entonces $\beta \neq \beta'$. Por lo tanto es una solución parcial al problema de la palabra.

Ejemplo 6.5.10. Para trenza virtual $\gamma = \tau_1\sigma_1\sigma_2\tau_2\sigma_3^2\tau_2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\tau_1$, notemos que tanto $\pi(\gamma)$ y $\kappa(\gamma)$ son la permutación trivial, es decir, los homomorfismos π y κ no detectan si γ es la trenza trivial o no.

$\gamma \cdot I_n$ tiene un diagrama simplificado como en la figura 6.31, donde calculando sus coordenadas de trenzas virtuales se tiene $\omega_v(\gamma) = (q^3x_2^{-1}q^{-1}x_2q^{-2}x_1, qx_2, x_2q^{-1}x_3qx_2^{-1}x_4x_2q^{-1}x_3, x_2q^{-1}x_3qx_2^{-1}x_4)$, Por lo tanto, $\gamma \neq 1$.

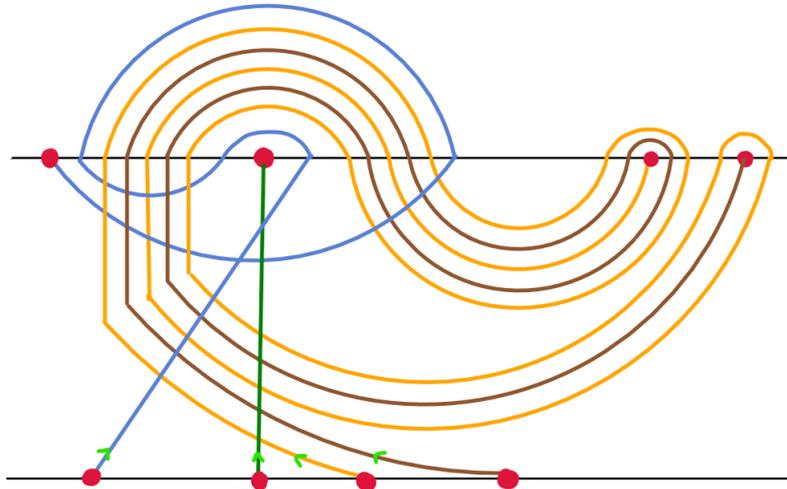


Figura 6.31: Diagrama simplificado de $\tau_1\sigma_1\sigma_2\tau_2\sigma_3^2\tau_2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\tau_1$.

Apéndice A

Grupos y relaciones.

A.1. Grupos.

Se pueden consultar las definiciones con más detalle y demostraciones de las proposiciones en [22].

Definición A.1.1. Sea S un conjunto, denotamos por $S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$ y por 1 a la palabra vacía.

Una **palabra** w en S es una sucesión finita $w = x_1 x_2 \cdots x_k$ donde $x_i \in S \cup S^{-1} \cup \{1\}$.

Una **subpalabra** de w es el elemento 1 o $x_i x_{i+1} \cdots x_j$. Se dice que w es una **palabra reducida** si no contiene subpalabras de la forma $x_i x_i^{-1}$ ó $x_i^{-1} x_i$.

Definición A.1.2. Sea S un conjunto, llamamos $F(S)$ el **grupo libre generado por S** si $F(S)$ es el conjunto de todas las palabras reducidas con letras en S y por producto la concatenación de palabras seguida de reducciones.

Definición A.1.3. Sea S un conjunto y R una familia de palabras de S , decimos que un grupo G tiene generadores S y relaciones R si $G \simeq F(S) / \langle R \rangle^N$, donde $\langle R \rangle^N$ es el subgrupo normal de $F(S)$ generado por R . En este caso se dice que G **admite una presentación** $\langle S \mid R \rangle$.

Proposición A.1.4. Sea $G = \langle S \mid R \rangle$ con $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $R = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ y H un grupo, decimos que $f : G \rightarrow H$ definida en sus generadores $x_i \mapsto y_i$ induce un único homomorfismo si $R_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = 1_H$ para toda $j \in \{1, \dots, m\}$. Es decir, las imágenes de las relaciones son relaciones. En este caso decimos que f **preserva las relaciones de G** .

Nota A.1.5. Recordemos algunas definiciones y propiedades de S_n , el grupo simétrico o grupo de permutaciones de n elementos.

1. Un **k -ciclo** de S_n es de la forma $(i_1 i_2 \dots i_k)$ con $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Un 2-ciclo se llama una **transposición** y $(i_1 i_2) = (i_2 i_1)$.
2. El producto de permutaciones se hace de izquierda a derecha
3. $(i_1 i_2 \dots i_k)$ y $(j_1 j_2 \dots j_m)$ son **disjuntos** si $i_r \neq j_s$ para toda r, s . Además si son disjuntos su producto conmuta.
4. Toda permutación admite una descomposición única (salvo orden) en ciclos disjuntos.

5. Todo ciclo $(i_1 i_2 \dots i_k)$ admite una descomposición en transposiciones, por ejemplo

$$(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_1 i_2)(i_1 i_3) \dots (i_1 i_k)$$

6. Toda transposición $(j_1 j_2)$ admite una descomposición en transposiciones de la forma $(i i + 1)$.

Si $j_1 < j_2$ entonces

$$(j_1 j_2) = (j_1 j_1 + 1)(j_1 + 1 j_1 + 2) \dots (j_2 - 1 j_2)(j_2 - 1 j_2 - 2) \dots (j_1 + 1 j_1)$$

Ejemplo A.1.6. El grupo simétrico S_n admite la presentación:

$$\left\langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i^2 = 1 \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \\ s_i s_j = s_j s_i \quad |i - j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

Demostración. Sea G el grupo con dicha presentación, definamos $f : G \rightarrow S_n$ tal que $s_i \mapsto (i i + 1)$.

Es claro que $(i i + 1)^2 = 1$, $(i i + 1)(j j + 1) = (j j + 1)(i i + 1)$ si $|i - j| \geq 2$ y

$$(i i + 1)(i + 1 i + 2)(i i + 1) = (i i + 2) = (i + 1 i + 2)(i i + 1)(i + 1 i + 2).$$

Por lo tanto, por la Propiedad A.1.4 f induce un homomorfismo y por la propiedades 4, 5 y 6 de la nota A.1.5 tenemos que es un isomorfismo. \square

Definición A.1.7. Sea X un conjunto y G un grupo, decimos que una función $\cdot : G \times X \rightarrow X$ tal que $(g, x) \mapsto g \cdot x$ es una **acción por la izquierda** si satisface:

- Para todo $x \in X$, se tiene $1 \cdot x = x$.
- Para todo $g, h \in G$ y $x \in X$, se tiene $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Si $\cdot : X \times G \rightarrow X$ tal que $(x, g) \mapsto x \cdot g$, se llamará una **acción por la derecha**. En cualquier caso se dirá que G **actúa en X** .

Definición A.1.8. Una acción se dice **transitiva** si para todo $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

Definición A.1.9. Una acción se dice **libre** si siempre que $g \cdot x = x$ para algún $x \in X$ entonces $g = 1$, equivalentemente, si $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$ para todo $x \in X$ entonces $g_1 = g_2$.

A.2. Relaciones.

Definición A.2.1. Sea P un conjunto y \leq un relación, decimos que \leq es un **orden parcial** si \leq es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Al par (P, \leq) es llamado un conjunto parcialmente ordenado.

Definición A.2.2. Si (P, \leq) conjunto parcialmente ordenado, decimos que $a, b \in P$ son un **mínimo** y un **máximo**, respectivamente, si no existen $c, d \in P \setminus \{a, b\}$ tal que $c \leq a$ y $b \leq d$.

Definición A.2.3. Sean $(P, <_P)$ y $(Q, <_Q)$ dos conjuntos parcialmente ordenados, decimos que una dunción $f : P \rightarrow Q$ es un isomorfismo de orden entre $(P, <_P)$ y $(Q, <_Q)$ si f es biyectiva y para todo $a, b \in P$, $a <_P b$ si y sólo si $f(a) <_Q f(b)$.

Definición A.2.4. Un conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) es un **orden total** o simplemente un **orden** si para todo $a, b \in P$ se tiene $a \leq b$, $b \leq a$ ó $a = b$.

Definición A.2.5. Si (P, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que $U \subset P$ es una **cadena** si $(U, \leq|_U)$ es un orden total.

Bibliografía

- [1] M. A. Armstrong, *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics (1st ed.). Springer.(1983).
- [2] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*. Hamburg Abh, 4 (1925) pp 47-72.
- [3] E. Artin, *Theory of Braids*. Annals of Mathematics, 48(1) (1947).
- [4] P. Bellingeri, B.A. Cisneros de la Cruz & L. Paris, *A simple solution to the word problem for virtual braid groups*. Pacific Journal of Mathematics, V.283, No. 2, (2016) pp 271-287.
- [5] J. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. Annals of Math. Studies 82. Princeton University Press, Princeton (1975).
- [6] O. Chterental, *Virtual braids and virtual curve diagrams*. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 24(13), (2015), <https://doi.org/10.1142/s0218216515410011> .
- [7] P. Dehornoy, *Braids and Self-Distributivity*. Progress in Mathematics 192 (2012).
- [8] P. Dehornoy, *From large cardinals to braids via distributive algebra*. J. Knot Theory and its Ramifications, 4 (1995), pp 33-79.
- [9] P. Dehornoy, *A Fast Method for Comparing Braids*. Advances in Mathematics 125, (1997), pp 200–235. <https://doi.org/10.1006/aima.1997.1605>.
- [10] R. Fenn, M. Greene, D. Rolfsen, C. Rourke & B. Wiest, *Ordering the braid groups*. Pacific Journal of Mathematics, 191, 1999, pp 49–74. <https://doi.org/10.2140/pjm.1999.191.49> .
- [11] A. A. Gaifullin & V. O. Manturov, *On the recognition of braids*. J. Knot Theory Ramifications 11 (2002).
- [12] J. González Meneses, *Basic results on braid groups*, Annales Mathématiques Blaise Pascal. 18(1) (2011) pp 15-59.
- [13] M. W. Hirsch, *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics 33. Springer.(1976).
- [14] S. Kamada, *Braid presentation of virtual knots and welded knots*, Osaka J. Math. 44(2) (2007) pp.441-458.
- [15] C. Kassel, V. Turaev & O. Dodane, *Braid Groups*. Graduate Texts in Mathematics 247. Springer (1999).
- [16] L. Kauffman, *Virtual knot theory*. European J. Combin., V.20 (1999) pp. 663-690.

- [17] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 202. Springer (2011).
- [18] V. O. Manturov & D. P. Ilyutko, *Virtual Knots: The State of the Art*. World Scientific Publishing Company (2012).
- [19] K. Murasugi & B. Kurpita, *A Study of Braids Mathematics and Its Applications*, 484. Springer (1999).
- [20] M. H. A. Newman , *On Theories with a Combinatorial Definition of "Equivalence."*. The Annals of Mathematics 43 (1942). <https://doi.org/10.2307/1968867> .
- [21] V. V. Prasolov, & A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*. Amer Mathematical Society (1996).
- [22] J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 148, 4th ed. Springer, (1994).
- [23] B. Wiest, *An algorithm for the word problem in braid groups*, preprint (2002). <https://arxiv.org/abs/math/0211169> .