



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**DEDUCCIÓN DE LA CARGA TOPOLÓGICA DEL SKYRMIÓN EN
CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
SAÚL SÁNCHEZ RESÉNDIZ

DIRECTOR DE INVESTIGACIÓN
Dr. VÍCTOR M. ROMERO ROCHÍN
Inv. Tit. "C" T.C., IF-UNAM

COMITÉ TUTORAL
Dra. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
Inv. Tit. "C" T.C., IF-UNAM

Dra. JORGE AMÍN SEMAN HARUTINIAN
Inv. Asoc. "C" T.C. IF-UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Condensados de Bose-Einstein.	7
1.2. La ecuación de Gross-Pitaevskii.	8
1.3. Solitones en la teoría de Skyrme.	10
1.4. La carga topológica del Skyrmion.	11
2. La ecuación de Gross-Pitaevskii	13
2.1. Interacciones spinoriales: interacción hiperfina.	13
2.2. El hamiltoniano de un gas atómico débilmente interactuante. . .	18
2.3. La descripción en segunda cuantización.	19
2.4. El hamiltoniano en términos de los operadores de campo.	23
2.5. Aproximaciones de campo medio y de contacto.	24
2.6. Sistemas bidimensionales de pseudo-spín $\frac{1}{2}$	26
3. Vórtices cuánticos y Skyrmiones	29
3.1. Vórtices cuánticos.	29
3.2. Skyrmiones en condensados de Bose-Einstein spinoriales.	35
4. Aspectos de Topología y Geometría Diferencial	40
4.1. Elementos de topología.	40
4.2. Elementos de Geometría Diferencial	45
4.2.1. Teoría de curvas en el espacio.	46
4.2.2. Teoría de curvas en superficies.	48
4.2.3. Curvatura sobre superficies.	52
4.3. La conexión entre la Geometría y la Topología.	53
5. La carga topológica del Skyrmión	57
5.1. Cálculo de la carga del Skyrmión.	57
5.2. Consecuencias.	77
6. Conclusiones	90

Dedicatoria.

Quiero dedicarle este trabajo a mamá y a papá. Me siento tan feliz porque siempre han estado para mí.

También quisiera dedicarle este trabajo a quién soportó mis pláticas sin sentido y la frustración de la tesis: a Fanny. Recuerda que los infinitos pueden estar en 4.3 V y yo te amo 4.3 V.

Agradecimientos

Para el Dr. Víctor Romero Rochín. Gracias por darme la oportunidad de trabajar con usted, por las enseñanzas que he tenido en estos dos años de la maestría, la paciencia que me ha tenido y las pláticas tan agradables. Sinceramente, no creo poder sintetizar en un solo párrafo todo lo que he crecido, ni mucho menos atisbar lo que creceré gracias a la guía que me ha brindado y que sé que me brindará.

Para la Dra. Rosario Paredes Gutiérrez. Gracias por darme la oportunidad de formar parte del grupo de investigación los de gases atómicos ultrafríos; ciertamente muy pocas personas han confiado en mí y usted no dudó ni un segundo en mis capacidades. Muchísimas gracias.

Para el Dr. Jorge Amin Seman Harutinian. Le agradezco por las clases que preparó para el curso de Temas Selectos de Física Atómica y Molecular, el material me sirvió para introducirme a la ecuación de Gross-Pitaevskii y se ha vuelto un valioso material de consulta.

A la Dra. Rocío Jáuregui Renaud. Valoro mucho sus comentarios que hizo con respecto a este trabajo, particularmente usted me sembró la semilla acerca de las superficies de Riemann. Me sorprendió mucho cuando lo comentó, porque anteriormente había graficado la superficie de Riemann de una solución numérica pero no creí que fuera relevante.

Al Dr. Leonardo Patiño Jaidair. Creo que aunque solo nos hemos visto unas cuantas horas por zoom, definitivamente gracias a usted tuve la directriz para plantear el problema ya que nos otorgó la pista más valiosa: el teorema de Gauss-Bonnet.

Al Dr. Yuri Bonder Grimberg. Le agradezco por los dos cursos de Geometría Diferencial y Topología para Físicos ya que me ayudaron a comprender cómo se relaciona el vector normal a una superficie con el teorema de Gauss-Bonnet. Dos cursos divertidos, útiles y personalizados ¿que más puede pedir un estudiante?

Al Dr. Santiago Caballero Banitez. Gracias por ayudarme a clarificar el trabajo y sobre todo la discusión que tuvimos por zoom. Tuve una gran retroalimentación, que se ven reflejados en este trabajo.

Al Dr. Blas Rodríguez Lara. Le agradezco mucho su crítica y correcciones en este trabajo; sobre todo agradezco por brindarme su tiempo para escucharme y así poder exponerle el tema. Puedo decir que el presente trabajo mejoró mucho en calidad por sus sugerencias.

Mi reconocimiento al programa de Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM

por el apoyo otorgado a lo largo de mi preparación, investigación y conclusión del proyecto. Al IF-UNAM por el soporte académico, técnico y administrativo a lo largo de mis estudios de maestría. Agradezco a CONACYT por la beca para poder enfocarme en la maestría y al proyecto UNAM PAPIIT No. IN108620 por el apoyo económico durante la elaboración de esta tesis.

Resumen

El objetivo general de esta tesis es la de proponer una solución a la problemática de la arbitrariedad de la carga del Skyrmión dentro del contexto de la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP) de pseudo-spín $\frac{1}{2}$. Es decir, para cada solución estacionaria a la ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ existe un campo de Skyrme, asociado a esta solución, definido en cada punto del plano y que posee un invariante topológico. En la conjetura que aquí se propone, se muestra que es necesario introducir términos de frontera a la carga usual del Skyrmión para poder asociar siempre a este campo un invariante topológico que sea igual a un entero; los términos de frontera se dedujeron utilizando el teorema de Gauss-Bonnet y de propiedades locales del campo de Skyrme. Además, para poder corroborar que la suma de la carga usual del Skyrmión junto con los términos de frontera pueden tomar solo valores enteros, fue necesario observar que existen superficies de Riemann asociadas al campo de Skyrme y cuyos invariantes de Euler-Poincaré de todas las superficies están íntimamente relacionados con esta corrección de la carga usual del Skyrmión. La conjetura que se propuso, surge con el objetivo de dar las condiciones suficientes para poder definir una carga asociada al campo de Skyrme y responder de manera definitiva si la carga del Skyrmión puede tomar valores arbitrarios. La manera en cómo se propuso la conjetura fue en un contexto muy general, pensando más allá de la ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ y, por ello, las conclusiones que se puedan obtener se podrían usar en otro contexto de la física siempre y cuando se encuentren Skyrmiones.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Condensados de Bose-Einstein.

En la década de 1920, el físico indio Satyendra Nath Bose se encontraba realizando estudios teóricos en torno a la cuantización de la luz (cuantos o fotones). Gran parte de sus estudios se enfocaron en replantear y resolver el problema del cuerpo negro utilizando fundamentalmente que la luz era un gas de partículas idénticas y, para lograrlo, desarrolló cálculos estadísticos sobre los cuantos de luz o fotones mediante los cuales determinó lo que actualmente se conoce como la estadística de Bose (-Einstein); la cuál se suele aplicar a únicamente partículas que tienen una función de onda simétrica. En aquellos tiempos, la comunidad científica no creía en la teoría de Bose debido a su carencia de fama como investigador. Por ello, Bose decidió enviar sus resultados e investigaciones a Albert Einstein quien se interesó en las conclusiones obtenidas por Bose y decidió continuar con el trabajo él mismo [1]. Utilizando los resultados obtenidos por Bose, Einstein predijo, en el segundo de dos artículos, a lo que actualmente conocemos como condensación de Bose-Einstein (BEC por sus siglas en inglés) donde hacía una generalización del tratamiento estadístico que Bose aplicaba a los fotones pero ahora pensándolas como partículas masivas [2]. Teniendo la senda marcada por Bose, Einstein encontró que debajo de la temperatura crítica los “fotones masivos”, conocidos actualmente como bosones, se condensan en el estado de menor energía del sistema. Sin embargo, esta predicción no fue valorada ni siquiera por el mismo Einstein pues dijo en una carta a Ehrenfest “...la teoría es muy bonita, pero ¿hay algo de verdad en ella?” [3]. Había en ese entonces argumentos a favor y en contra en torno a los BEC en donde se discutía si realmente la teoría era consistente. Pero realmente, la verdadera incognita era si la condensación de esos gases cuánticos pudieran existir. En ese entonces las limitaciones experimentales orillaron a pensar que el hipotético condensado era simplemente una curiosidad exótica sin trascendencia en la física. No obstante, al pasar un tiempo, algunos físicos comenzaron a interpretar los resultados y ha apreciar su importancia [4, 5, 6].

La Mecánica Cuántica se desarrolló en el siglo XX, con nuevas teorías e interpretaciones, y a la par iban apareciendo nuevos descubrimientos experimentales que confirmaban o falseaban ciertas hipótesis. Este proceso se daba lugar de manera paralela en la que la tecnología iba mejorando. En el caso de los BEC, el principal impedimento técnico para su realización experimental era el enfriamiento de una muestra de átomos a bajas temperaturas. Inicialmente, este experimento fue inalcanzable, pero a medida que se iban diseñando nuevas técnicas de enfriamiento, la expectación e inquietud por obtener estos condensados iba creciendo y muchos grupos de investigadores afrontaban este reto con intención de ser los primeros en conseguirlo.

El estudio de los condensados de Bose-Einstein como un fenómeno universal inició su protagonismo a partir de la recopilación de los conocimientos tanto teóricos como experimentales en la primera conferencia internacional de los BEC en Italia en el año de 1993 (organizada por D. Snoke, A. Griffin, S. Stringari y A. Mysyrowicz) cuyo éxito se vio reflejado en la publicación “*Bose-Einstein Condensation*” [7] que examinó la física del condensado hasta ese momento. Posteriormente en 1995 se dió lugar a la segunda Conferencia Internacional sobre los BEC en Francia (organizada por J. T. M. Walraven, J. Treiner y M. W. Reynolds) en la que Eric Cornell y Carl Wieman anunciaron haber logrado obtener la condensación de Bose-Einstein de átomos ultrafríos de ^{87}Rb en una trampa armónica. Este trabajo inició un crecimiento acelerado de nuevas investigaciones en el campo de los átomos ultrafríos que ha continuado hasta nuestros días llevando a muchos científicos a enfocarse a esta área de la física. La ecuación que describe a este tipo de condensados resulta ser la ecuación de Gross-Pitaevskii, por ello en los siguientes párrafos ahondaremos este tema.

1.2. La ecuación de Gross-Pitaevskii.

Los gases atómicos ultrafríos, como se mencionó en el párrafo anterior, se han convertido en un hito en la física debido al gran avance experimental que se ha logrado desde los finales del siglo XX; particularmente, los fenómenos observados en tales sistemas son importantes porque son evidencia de las propiedades cuánticas en fenómenos macroscópicos [8, 9]. Bajar la temperatura a un sistema termodinámico es de interés en muchas disciplinas por la observación de los nuevos comportamientos de la materia al lograr tales temperaturas.

Como lo podemos revisar en la historia, en el siglo XIX se pudieron desarrollar los primeros refrigeradores y esto dió lugar a presenciar transiciones de fase nunca antes observadas [10]. Las fases usuales de la materia corresponden al sólido, líquido y gas; la explicación de estos fenómenos fue de gran interés en el siglo XIX. Esto dió lugar a pensar que las transiciones se podrían presentar en distintos compuestos y, por ello, motivaría a preguntarse si existía la posibilidad de que un gas común pudiera alcanzar su fase líquida (licuefacción) [11]. El desarrollo tecnológico para la licuefacción de gases se podría decir que inició con el oxígeno, puesto que en 1877 se logró por primera vez obtener oxígeno líquido [12]. Posteriormente, en 1883 se produjo nitrógeno en su fase líquida y

en 1898 se alcanzó por primera vez la licuefacción del hidrógeno a 20 K [13]. Las técnicas desarrolladas para licuar los gases, dieron lugar a una competencia para alcanzar temperaturas cercanas a la del cero absoluto, y uno de los grandes avances a dicha competencia fue cuando Kamerlingh Onnes logró alcanzar la licuefacción del helio a 4.2 K en 1908 [14].

Al licuar el helio y disminuir aun más su temperatura, se apreció características muy singulares que no todos los sistemas mostraban. Estas características eran la ausencia de viscosidad y alta conductividad del fluido. Estas propiedades eran inexplicables para la física de esos tiempos propiciando así el desarrollo de teorías que pudieran dar fundamento a las observaciones experimentales. Los primeros modelos fueron fenomenológicos y desarrollados principalmente por Landau y Tisza [15, 16]. Ambos propusieron el modelo de dos fluidos, el cuál consiste en suponer que el helio-II tiene dos líquidos (los cuales se podrían pensar como sus componentes) y que se mueven uno con respecto al otro ignorando su interacción por fricción. Estas componentes del fluido poseen características distintas; por ejemplo, una de las componentes se mueve sin viscosidad, mientras que la otra es un líquido con viscosidad. Esta descripción permitió explicar comportamientos dinámicos del helio-II y también su alta conductividad. Sin embargo, esta teoría estaba sustentada en una interpretación de la fenomenología y, por lo tanto, era importante iniciar la búsqueda de una teoría más fundamental.

La teoría desarrollada por Bogoliubov y los estudios de Penrose y Onsager [17, 18, 19] justificaron los desarrollos teóricos tanto de Landau como de Tisza. Bogoliubov, Penrose y Onsager partieron de una teoría de primeros principios (Teoría Cuántica de Campos) y de esta manera dedujeron las características de un sistema en fase superfluida. La descripción que realizaron estos científicos consistía en pensar que el sistema tenía una fracción macroscópica de partículas en su estado base y, también, que el sistema poseía interacciones internas. Estas hipótesis obligaron a que la descripción de un superfluido se encontrara en el contexto de la ecuación de Gross-Pitaevskii [20] la cuál ha dado una descripción satisfactoria de la condensación de Bose-Einstein (BEC) y también del estado superfluido.

Los gases atómicos ultrafríos toman el protagonismo a partir de la condensación de los átomos alcalinos (^{87}Rb , ^7Li y ^{23}Na) mediante el uso de las trampas magneto-ópticas [21, 22, 23, 24]. Esto fue así porque, debido a los estados internos hiperfinos de los gases atómicos alcalinos, por primera vez se comprobó la existencia de los BEC spinoriales para gases de bosones. Los desarrollos experimentales posteriores también demostraron que en estos gases se podían generar vórtices cuantizados [14, 25] y, de esta manera, evidenciar que el fenómeno de superfluidez formaba parte de sus propiedades. Estos hallazgos dieron pie a profundizar el conocimiento de estos fenómenos debido al control sobre los parámetros de estos sistemas. La relevancia del estudio de los átomos alcalinos en este contexto se debe al conocimiento de sus espectros de absorción y emisión, las susceptibilidades y su interacción interna a bajas temperaturas; lo cuál, permitió el desarrollo de técnicas ópticas más especializadas para lograr el enfriamiento y confinamiento de los tan singulares gases.

Los BEC presentan distintas y variadas características que no es posible cubrir la demanda a tales descripciones utilizando solo los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica, por ello muchos conceptos de las matemáticas como la Topología llegan a esta área para darle riqueza a la descripción teórica; tal es el caso de los Skyrmiones. Los Skyrmiones son un tipo de defectos topológicos que han sido de interés para los físicos desde los años 60 y que ha resurgido en la actualidad en los BEC spinoriales. Por esto, a continuación daremos un breve resumen de la aparición de los Skyrmiones en la física.

1.3. Solitones en la teoría de Skyrme.

Históricamente, uno de los primeros modelos de campo para describir a la nucleones fue la revolucionaria teoría de Skyrme [26, 27], formulada en 1961 como un modelo topológico. La novedad del enfoque, que es sin duda un hito en el desarrollo de la física teórica moderna, fue que Skyrme sugirió considerar a los bariones como solitones e identificar al número de bariones uno a uno con la carga topológica de la configuración del campo. En este contexto, los piones corresponden a las fluctuaciones linealizadas del campo bariónico, mientras que los fermiones, como los quarks, no aparecen como campos físicos fundamentales.

El lenguaje matemático de la Topología no era común en la comunidad física y el modelo de Skyrme fue borrado en la física de partículas elementales por la llegada de los quarks y el modelo estandar. Sin embargo, en años subsecuentes la teoría de Skyrme resurge tal y como lo notó Witten [28] en la teoría quirral correspondiente $SU(2) \times SU(2)$. En esta teoría el campo medio de piones toma la forma del modelo de Skyrme y los quarks no son grados de libertad propios; están fuertemente delimitados por el campo medio quirral y los bariones vuelven a emerger como soluciones de solitones del modelo efectivo. Además, se demostró que el modelo de Skyrme, complementado por el término de Wess-Zumino, reproduce correctamente el número cuántico de bariones [29]. Esta observación atrajo mucha atención, y desde la década de 1980 el modelo de Skyrme ha tenido el estatus de una aproximación apropiada de la teoría efectiva de QCD de baja energía. Lo más destacado de la idea original y atrevida de Skyrme es que es un concepto que en cierta medida parecería omnipresente en varias ramas de la física; tales son los ejemplos de la física nuclear y de partículas, en la física de la materia condensada y la teoría de cuerdas [30]. Sin embargo, hasta el 2006, se creía que los skyrmiones eran partículas exóticas que no estaban en equilibrio y que no podían formarse espontáneamente sin un fuerte campo externo. Christian Pfeleiderer y su grupo demostraron que esta suposición era incorrecta pues proporcionaron la primera evidencia de la existencia del Skyrmión [31, 32, 33]. La presencia de los Skyrmiones en los BEC surge a partir de propuestas a experimentos en donde la textura de spin tiene el comportamiento de Skyrmiion, no obstante, a pesar de que se tiene confirmada ya la existencia de Skyrmiones en los BEC, se han presentado visicitudes en torno a la carga topológica de estos defectos. A continuación, en la siguiente sección explicaremos en qué consiste tales visicitudes y cómo en esta tesis se atacó esta problemática y así

darle solución.

1.4. La carga topológica del Skyrmion.

La ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ posee texturas de spín asociadas a las soluciones estacionarias y éstas tienen el mismo comportamiento que un campo de Skyrme: normalizadas en todo el plano y continuamente diferenciables. De acuerdo con los estudios teóricos y numéricos realizados por Zamora-Zamora y Romero-Rochín [33, 34] al introducir un campo magnético en el BEC spinorial que se anule en su interior, además de producirse vórtices cuánticos, dichos autores hallaron que se producían Skyrmiones que parecían tener cargas arbitrarias. Tal arbitrariedad de la carga topológica del Skyrmión implicaría la existencia de nuevos tipos de Skyrmiones además del *Skyrmión* original [26, 27] y el *Baby Skyrmión* [35]; lo cual tal evidencia pondría en aparente contradicción con las teorías desarrolladas en torno a los Skyrmiones [36] y, en general, la de los defectos topológicos [37, 38, 39, 40]. Sin embargo, como se verá, no existe tal discrepancia.

Para lograr el objetivo general de esta tesis, fue necesario hacer una revisión de la Teoría Cuántica de muchos cuerpos y también una revisión de herramientas matemáticas como Geometría Diferencial y Topología General. Por esto, este trabajo se escribió de manera tal que esté dividido en los elementos necesarios para desarrollar y solucionar la problemática que se ha planteado en el primer párrafo de esta sección y que a continuación se describirá. En el capítulo dos se desarrolla la herramienta teórica para construir el concepto del Skyrmión en los BEC spinoriales: la ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$. Para ello se hace una introducción en torno a los gases atómicos débilmente interactuantes, se desarrolla lo necesario en torno a la interacción hiperfina, se propone el hamiltoniano que modela a los gases débilmente interactuantes en primera cuantización, se introduce los operadores de ascenso y descenso para reformular el problema de muchos cuerpos en segunda cuantización y así finalmente deducir la ecuación GP. En el tercer capítulo, se introduce al lector en el contexto de los vórtices cuánticos y los Skyrmiones. Primero se ahonda lo necesario entorno a los vórtices cuánticos producidos por campos magnéticos en la ecuación bidimensional de GP y de pseudo-spín $\frac{1}{2}$, en donde se obtiene soluciones semi-analíticas y con ello se extrae el comportamiento, de manera cualitativa, de las soluciones estacionarias. En el resto del tercer capítulo, se estudia cómo surge el campo de Skyrme a partir de la textura de spín obtenida de las soluciones estacionarias en la sección anterior y con ello se plantea el problema de la arbitrariedad de la carga en el Skyrmión para las soluciones obtenidas. En el cuarto capítulo, se estudia los temas que se volvieron necesarios entorno a la Topología y Geometría Diferencial para poder resolver el problema de la carga del Skyrmión. Por un lado, en la primera parte del capítulo cuatro, se hace una compilación de elementos de la Topología General: se toca solo definiciones y proposiciones necesarias. Por otra parte, en las secciones subsecuentes se aborda los temas entorno a la Geometría Diferencial de superficies en donde se hizo

particular énfasis en el teorema de Gauss-Bonnet para superficies con frontera. Posteriormente, una vez teniendo el contexto de los gases atómicos ultrafríos y el de la Topología en Geometría Diferencial, en el capítulo cinco se propone la conjetura que permite redefinir la carga del Skyrmión y a su vez se hace su correspondiente justificación para que de esta manera, se analicen las consecuencias de esa conjetura en la segunda parte de este capítulo. Finalmente, en el último capítulo, se exponen las conclusiones obtenidas a partir de la conjetura y se plantean algunas perspectivas a futuro para darle continuidad al estudio de los defectos topológicos en los condensados de Bose-Einstein spinoriales.

Capítulo 2

La ecuación de Gross-Pitaevskii

En las siguientes secciones se harán desarrollos en torno a los gases atómicos ultrafríos, en donde se hará el enfoque en los gases bósónicos. Gran parte de las deducciones realizadas fueron tomadas del libro “Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases” [15] y de “Notes on many body theory of Bose and Fermi gases at low temperatures” [41].

2.1. Interacciones spinoriales: interacción hiperfina.

Para describir un gas atómico débilmente interactuante se tiene que considerar las interacciones spinoriales, las cuales son un término que permite clasificar a los átomos (bosones o fermiones) y también es un término que nos da el comportamiento del sistema al introducir campos magnéticos. Denotemos al spín total del átomo como:

$$F = I + J = I + (L + S) \tag{2.1.1}$$

en donde I es el spín total nuclear, J el momento total electrónico, L es el momento angular electrónico total y S es el spín total electrónico. Si bien es un hecho de que se puede hacer una descripción general de las interacciones spinoriales, nosotros estaremos enfocados únicamente a los átomos alcalinos.

Por un lado, el estado base de la estructura electrónica de cada átomo de un metal alcalino es simple: todos los electrones ocupan capas cerradas excepto uno y este último se encuentra en un orbital s de la capa más externa [42]. Una particularidad de las propiedades de los átomos (en general para cualquier átomo) es que el spín nuclear se acopla al spín electrónico mediante la interacción hiperfina [15]. En la ausencia de un campo magnético externo, los niveles

atómicos se desdoblán debido a esta interacción:

$$\hat{H}_{hf} = A\hat{I} \cdot \hat{J}$$

en donde A , es la diferencia de energía entre los estado hiperfinos en ausencia de campo magnético y por lo tanto tiene unidades de energía. Debido a que los electrones más externos de cada átomo alcalino se encuentran en un orbital s , estos electrones no tienen momento angular orbital ($L = 0$) y, por lo tanto, no hay campo magnético generado por la nube electrónica debido al movimiento angular orbital; consecuentemente a esto, el acoplamiento surge únicamente debido al campo magnético generado por el espín del electrón.

Por otro lado, si se introduce un campo magnético al átomo entonces se tiene que sumar a la interacción hiperfina de las energías de Zeeman que surgen de la interacción de los momentos magnéticos nucleares y electrónicos con el campo magnético, que en este caso solo se considerará los terminos lineales de Zeeman [43, 44].

Tomando en cuenta todas estas consideraciones, el hamiltoniano de la interacción hiperfina con un campo magnético externo \vec{B} tiene que ser:

$$\hat{H}_{spin} = A\hat{I} \cdot \hat{J} + D\hat{J} \cdot \vec{B} + C\hat{I} \cdot \vec{B}, \quad (2.1.2)$$

en donde $D = g_J \frac{e\hbar}{2m_e}$ y $C = -g_I \frac{e\hbar}{2m_p}$ siendo e la carga del electrón, m_e y m_p las masas del electrón y el protón, respectivamente; \hbar la constante de Planck, g_I y g_J son los factores de Landé nuclear y electrónico, respectivamente. Ahora, si elegimos el sistema de referencia de tal forma que localmente el campo magnético está dirigido a lo largo del eje z entonces este hamiltoniano resulta ser:

$$\hat{H}_{spin} = A(I_x \cdot J_x + I_y \cdot J_y + I_z \cdot J_z) + DJ_z \cdot |\vec{B}| + CI_z \cdot |\vec{B}|. \quad (2.1.3)$$

Reescribamos este hamiltoniano utilizando la definición de los operadores de ascenso y descenso:

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}, I_x = \frac{I_+ + I_-}{2}, \quad (2.1.4)$$

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}, I_y = \frac{I_+ - I_-}{2i}, \quad (2.1.5)$$

y a partir de los cuales se puede deducir que:

$$4(I_x \cdot J_x + I_y \cdot J_y) = 2(I_+ J_- + I_- J_+). \quad (2.1.6)$$

Utilizando esta última igualdad, se puede reestructurar el hamiltoniano de la siguiente forma:

$$\hat{H}_{spin} = AI_z \cdot J_z + \frac{A}{2}(I_+ J_- + I_- J_+) + DJ_z \cdot |\vec{B}| + CI_z \cdot |\vec{B}|. \quad (2.1.7)$$

Este hamiltoniano tiene varios niveles de energía, sin embargo, por simplicidad, supongamos que estamos describiendo un sistema tal que $S = \frac{1}{2}$ e $I = \frac{3}{2}$. Definamos para $m_F = 1$

$$\left| I = \frac{3}{2}, m_I = \frac{1}{2} \right\rangle \left| J = \frac{1}{2}, m_J = \frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle_{m_F=1}, \quad (2.1.8)$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |-\rangle_{m_F=1} \quad (2.1.9)$$

y para $m_F = 0$:

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle_{m_F=0} \quad (2.1.10)$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |-\rangle_{m_F=0} \quad (2.1.11)$$

en donde podemos definir las acciones de los operadores de escalera:

$$J_{\pm} |m_J\rangle = \sqrt{(J \mp m_J)(J \pm m_J + 1)} |m_J \pm 1\rangle_{m_F}$$

y

$$I_{\pm} |m_I\rangle = \sqrt{(I \mp m_I)(I \pm m_I + 1)} |m_I \pm 1\rangle_{m_F}.$$

Si nosotros calculamos:

$$\hat{H}_{spin} |\pm\rangle = \left(AI_z \cdot J_z + DJ_z \cdot |\vec{B}| + CI_z \cdot |\vec{B}| \right) |\pm\rangle_F + \frac{A}{2} (I_+ J_- + I_- J_+) |\pm\rangle_{m_F} \quad (2.1.12)$$

de acuerdo con [45] se obtiene

$$\frac{A}{2} (I_+ J_- + I_- J_+) |\pm\rangle_F = \frac{A}{2} \sqrt{(I + m_F + \frac{1}{2})(I - m_F + \frac{1}{2})} |\mp\rangle_{m_F} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned} \left(AI_z \cdot J_z + CJ_z \cdot |\vec{B}| + DI_z \cdot |\vec{B}| \right) |\pm\rangle_{m_F} &= \\ &= \frac{A(\pm\frac{1}{2})(m_F \mp \frac{1}{2})}{\left(+D|\vec{B}|(\pm\frac{1}{2}) + C|\vec{B}|(m_F \mp \frac{1}{2}) \right)} |\pm\rangle_{m_F} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

y por lo tanto la representación matricial del hamiltoniano, en la base definida para estos estados, tiene que ser:

$$\hat{H} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} m_F(\frac{2DB}{A} + 1) - \frac{1}{2} + |B|(\frac{C-D}{A}) & \sqrt{(I + \frac{1}{2})^2 - m_F^2} \\ \sqrt{(I + \frac{1}{2})^2 - m_F^2} & m_F(\frac{2DB}{A} + 1) - \frac{1}{2} - |B|(\frac{C-D}{A}) \end{pmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Esta matriz tiene eigenvalores [45]:

$$E_{\pm}(m_F) = -\frac{A}{4} + C|\vec{B}|m_F \pm \frac{A}{2}\left(I + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{2xm_F}{\left(I + \frac{1}{2}\right)} + x^2}, \quad (2.1.16)$$

en donde $x = \frac{|\vec{B}|(D-C)}{A\left(I + \frac{1}{2}\right)}$.

Si pedimos que $|\vec{B}| \ll 1$, implica que $x \ll 1$ y por consiguiente tenemos

$$E_{\pm}(m_F) \approx \frac{A}{2} \left[-\frac{1}{2} \pm \left(I + \frac{1}{2}\right) \right] + g_F \mu_F |\vec{B}| m_F, \quad (2.1.17)$$

siendo

$$g_F = \frac{C}{\mu_B} \pm \frac{C-D}{2\left(I + \frac{1}{2}\right)\mu_B}. \quad (2.1.18)$$

Con base en estas consideraciones, si al sistema se le introduce un campo magnético no tan intenso, una buena aproximación de la interacción spinorial estaría descrita por:

$$\hat{H}_{spin} = g_F \mu_F \vec{B} \cdot \vec{F} \quad (2.1.19)$$

el cuál es el hamiltoniano general para el acoplamiento de estados hiperfinos atómicos con las matrices de espín asociadas a $F = 2, 1$ y válido para campos magnéticos pequeños.

Ahora, si tenemos un sistema cuyo spín interatómico es $I = \frac{1}{2}$ y $J = \frac{1}{2}$, una base que puede describir al sistema es:

$$\left| I = \frac{1}{2}, m_I = \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, m_J = \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (2.1.20)$$

en donde por simplicidad se ha ignorado las etiquetas I, J, m_I y m_J . Utilizando esta base se puede definir los estados:

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \quad (2.1.21)$$

$$|b\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.1.22)$$

$$|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \quad (2.1.23)$$

y

$$|d\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Además, nótese que si reescribimos el hamiltoniano spinorial

$$\hat{H}_{spin} = (AI_z \cdot J_z + DBJ_z + CBI_z) + \frac{A}{2}(I_+J_- + I_-J_+) \quad (2.1.24)$$

y lo diagonalizamos utilizando únicamente los estados $|a\rangle$ y $|c\rangle$, entonces se obtiene:

$$H_{ac} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}A & \frac{(C-D)}{2}B \\ \frac{(C-D)}{2}B & \frac{A}{4} \end{pmatrix}. \quad (2.1.25)$$

Por consiguiente, las energías propias, de este pedazo de hamiltoniano spinorial, deben ser iguales a:

$$E = \frac{-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + 4\left(\frac{(C-D)^2}{4}B^2 + \frac{3}{16}A^2\right)}}{2} = A \left(-\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{(D-C)^2}{a^2}B^2} \right). \quad (2.1.26)$$

Por otra parte, las energías propias de los estados $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ y $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ son:

$$\hat{H}_{spin} \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \left(\frac{A}{4} \pm \frac{D+C}{2}B \right) \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (2.1.27)$$

Recordemos que se hizo la aproximación de la interacción hiperfina:

$$\hat{H}_{spin} \approx g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} \quad (2.1.28)$$

y los estados (2.1.21) y (2.1.23) pueden ser descritos con la base de \vec{F} como

$$|c\rangle = |F = 1, m_F = 0\rangle \quad (2.1.29)$$

y

$$|a\rangle = |F = 0, m_F = 0\rangle, \quad (2.1.30)$$

entonces las energías calculadas en (2.1.26) y (2.1.27), tienen que ser las energías propias asociadas al hamiltoniano aproximado cuya base es:

$$|a\rangle, |c\rangle, |b\rangle, |d\rangle. \quad (2.1.31)$$

Observando las energías en este sistema de $F = 1$, podemos notar por la figura 2.1.1, que la brecha energética $\Delta E_{c,d}$ entre los estados $|c\rangle$ y $|d\rangle$ es muchísimo más pequeña que las brechas energéticas $\Delta E_{c,b}$ y $\Delta E_{c,a}$. Debido a esto, uno puede pensar que las excitaciones del sistema debido a las colisiones no son tan energéticas para realizar alguna de las transiciones $\Delta E_{c,-}$ ó $\Delta E_{c,a}$ y por consiguiente es plausible pensar que el sistema se puede polarizar y así se podría sustraer únicamente dos componentes de espín y estudiar un sistema con tales características.

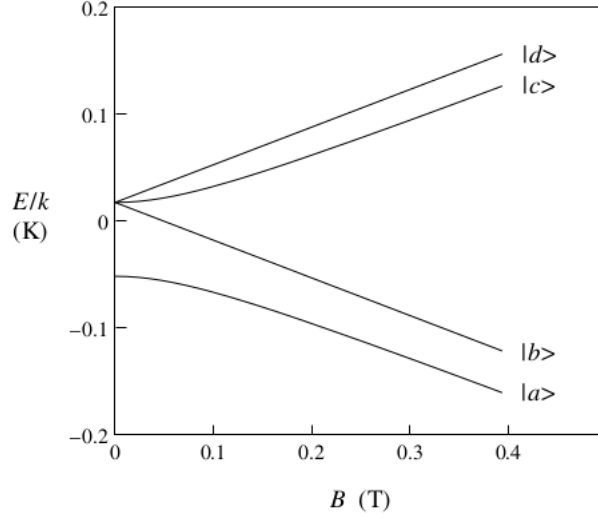


Figura 2.1.1: Energías del multiplete del estado base de un átomo de hidrógeno en función del campo magnético [14].

2.2. El hamiltoniano de un gas atómico débilmente interactuante.

Como se mencionó al principio de este capítulo, es de vital interés conocer los términos del hamiltoniano que intervienen para describir una gas atómico ultrafrío que iremos describiendo a continuación.

El primer término es el cinético. Este término siempre aparece en la descripción de cualquier gas:

$$\hat{T}_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \quad (2.2.1)$$

en donde m es la masa del átomo y \vec{p}_i es el momento lineal de la i -ésima partícula. El segundo término corresponde al potencial que atrapa al gas, este potencial modela las paredes que almacenan al gas y, en la práctica, en átomos alcalinos ultrafríos, está modelado por un potencial armónico debido a que el gas es atrapado por una trampa magneto óptica generado por un sistema de láseres [cita]. En general, a este potencial simplemente lo denotaremos así:

$$V_{tr}(\vec{r}_i) \quad (2.2.2)$$

en donde \vec{r}_i son las coordenadas de cada átomo. El tercer término corresponde al potencial de colisiones interatómicas y, desde punto de vista general, supondremos que las colisiones se dan en pares y posee simetría esférica:

$$U_B(r_{ij}) \equiv U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \quad (2.2.3)$$

Finalmente, el cuarto término corresponde al de la interacción hiperfina que discutimos en la sección anterior:

$$g_F \mu_B \vec{B} \cdot \vec{F}. \quad (2.2.4)$$

Con base en esto, el hamiltoniano de un gas atómico débilmente interactuante con un campo magnético externo resulta ser igual a:

$$\hat{H} = \sum_i^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_i^N (V_{tr}(\vec{r}_i) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{F}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \sum_{j \neq i}^N U_B(r_{ij}). \quad (2.2.5)$$

Este hamiltoniano es en la práctica poco factible de resolver tanto teórica como computacionalmente, por lo que el objetivo en las siguientes secciones será replantear el problema utilizando la formulación de la mecánica cuántica de la segunda cuantización.

2.3. La descripción en segunda cuantización.

Sabemos que si queremos obtener toda la física de un gas atómico débilmente interactuante, se tiene que resolver la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (2.3.1)$$

siendo $|\Psi(t)\rangle$ la función de onda asociada al sistema y \hat{H} el hamiltoniano descrito por la ecuación 2.2.5. En general, esta función de onda siempre se puede desarrollar en términos de una base

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\{m\}} C_{\{m\}}(t) |\{m\}\rangle \quad (2.3.2)$$

en donde $|\{m\}\rangle$ es una base completa del espacio de Hilbert de un sistema de N partículas que por ser una base satisface:

$$\langle \{m\} | \{n\} \rangle = \delta_{m,n} \quad (2.3.3)$$

$$|\{n\}\rangle \langle \{m\}| = \hat{1} \quad (2.3.4)$$

Particularmente, nos va interesar usar la base del producto de N funciones de onda de una partícula que están en una caja de volumen V . Sea $|\vec{k}, m\rangle$ la base del momento \vec{p} y la proyección S_z de espín de una partícula

$$\vec{p} |\vec{k}, m\rangle = \hbar \vec{k} |\vec{k}, m\rangle \quad (2.3.5)$$

$$S_z \left| \vec{k}, m \right\rangle = \hbar m \left| \vec{k}, m \right\rangle \quad (2.3.6)$$

en donde $m = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$ y

$$\phi_{\vec{k}, m}(\vec{r}, \chi) \equiv \langle \vec{r}, \chi | \left| \vec{k}, m \right\rangle = \langle \vec{r} | \left| \vec{k} \right\rangle \langle \chi | m \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \chi_m \quad (2.3.7)$$

con

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z) \quad (2.3.8)$$

siendo $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La cantidad χ_m es la proyección del estado $|m\rangle$ sobre una base $|\chi\rangle$. Por simplicidad escribamos $k \equiv (\vec{k}, m)$ para especificar los cuatro momentos cuánticos de una partícula en una caja y $r \equiv (\vec{r}, \chi)$ para referirnos a las coordenadas espaciales y spinoriales.

Observemos que la función de onda:

$$\Phi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \phi_{k_1}(r_1) \phi_{k_2}(r_2) \dots \phi_{k_N}(r_N) \quad (2.3.9)$$

es una función propia de la suma de todos los operadores i de la ecuación 2.2.1, ya que

$$\sum_i \hat{T}_i \Phi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_i \frac{\hbar^2 \vec{k}_i^2}{2m} \Phi(r_1, r_2, \dots, r_N). \quad (2.3.10)$$

Como estamos describiendo a bosones, la función de onda que describe a las partículas tiene que ser una función simétrica:

$$\Psi_{k_1, k_2, \dots, k_N}(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sqrt{\frac{n_{k_1}! n_{k_2}! \dots n_{k_N}!}{N!}} \sum_{perm} \phi_{k_1}(r_1) \dots \phi_{k_N}(r_N) \quad (2.3.11)$$

en donde \sum_{perm} es la suma sobre todas las permutaciones de los diferentes valores de $k_1, k_2, \dots; n_{k_j}$ es el número de veces que el valor k_j aparece y $\sqrt{\frac{n_{k_1}! n_{k_2}! \dots n_{k_N}!}{N!}}$ es el factor de normalización. Como la función de onda describe partículas bosónicas, el número de partículas que pueden estar en un estado no tienen ninguna restricción, Sin embargo debido a que es un gas con N partículas, la suma de los n_{k_j} se restringen de la siguiente forma:

$$\sum_k n_k = N \quad (2.3.12)$$

donde k toma todos los valores posibles que puede tomar los diferentes estados. Además el término

$$\frac{N!}{n_{k_1}!n_{k_2}!\dots n_{k_N}!}$$

no es más que las combinaciones de N partículas en los k_1, \dots, k_N estados.

Esta base será de gran utilidad para reformular el problema 2.3.1 y para lograrlo será necesario desarrollar el concepto de los estados de ocupación. Supongamos que tenemos la base de un gas ideal en una caja. Utilizaremos esta base para describir los estados energéticos del sistema, por lo tanto si nosotros tenemos un sistema de N partículas, nos preguntamos cuántas partículas tienen momento k (lo denotaremos simplemente como n_k). A este número se le conoce como el número de ocupación del estado k .

Para continuar con la descripción del sistema, definamos a los estados de Fock. Primero, escojamos un orden para todos los estados de una partícula: $k_0, k_1, k_2, \dots, k_\infty$ de tal forma que representen el estado base, el primer estado excitado, el segundo estado excitado y así respectivamente; una vez realizado esto construyamos al estado de Fock

$$|n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle = |n_{k_0}\rangle \otimes |n_{k_1}\rangle \otimes |n_{k_2}\rangle \cdots \otimes |n_{k_\infty}\rangle \quad (2.3.13)$$

en donde se entiende como el estado k_i con n_{k_i} partículas. Debido a que el gas que estamos describiendo son bosones el número de partículas n_{k_i} que se encuentran en el estado k_i puede ser únicamente valores enteros que van de $0, 1, 2, \dots, \infty$. Además este conjunto de estados satisface la ortogonalidad y la condición de completéz:

$$\langle n'_{k_0}, n'_{k_1}, \dots, n'_{k_\infty} | n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty} \rangle = \prod_{n=0}^{\infty} \delta_{n'_{k_n}, n_{k_n}} \quad (2.3.14)$$

$$\sum_{n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}} |n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle \langle n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}| = \hat{1} \quad (2.3.15)$$

Esto indica que los estados de Fock son también una base y el espacio generado por la combinación lineal de los estados de Fock es un espacio vectorial conocido como el espacio de Fock. Debido a la existencia de un espacio de Hilbert generado por el número de partículas $|n_k\rangle$, con momento k , se puede definir los operadores de creación y aniquilación para partículas bosónicas \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger , que poseen las siguiente reglas de conmutación:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k, k'}, \quad (2.3.16)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (2.3.17)$$

y también poseen las siguientes propiedades:

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \quad (2.3.18)$$

$$\hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle \quad (2.3.19)$$

y

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle \quad (2.3.20)$$

La base de los números de ocupación es una excelente base para la describir a las funciones simétricas que describen a los bosones ya que la función de onda en 2.3.11 se puede interpretar como amplitud de probabilidad de encontrar N partículas con coordenadas (espaciales y spinoriales) r_1, \dots, r_N dado que n_{k_i} partículas están en el estado k_i con la restricción de $\sum_k n_k = N$. Esto último nos permite reescribir la función de onda como

$$\Phi_{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_\infty}}(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sqrt{\frac{n_{k_1}! n_{k_2}! \dots n_{k_\infty}!}{N!}} \sum \phi_{k_1}(r_1) \phi_{k_2}(r_2) \dots \phi_{k_N}(r_N) \quad (2.3.21)$$

entonces utilizando este hecho, se puede hacer un desarrollo como 2.3.2 de la función de onda

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}} C(n_{k_0}, \dots, n_{k_\infty}; t) |n_{k_0}, \dots, n_{k_\infty}\rangle \quad (2.3.22)$$

en donde

$$\langle r_1, r_2, \dots, r_N | |\Psi(t)\rangle = \sum_{n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}} C(n_{k_0}, \dots, n_{k_\infty}; t) \Phi_{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_\infty}}(r_1, r_2, \dots, r_N) \quad (2.3.23)$$

Por consiguiente, si se calcula:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (2.3.24)$$

el hamiltoniano adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{k_i, k_j} \langle k_i | \frac{\vec{p}_T^2}{2m} + V_{tram}(r) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{F}_i | k_j \rangle \hat{a}_{k_i}^\dagger \hat{a}_{k_j} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k_i, k_j, k_m, k_p} \langle k_i, k_j | \hat{U}_B | k_m, k_p \rangle \hat{a}_{k_i}^\dagger \hat{a}_{k_j}^\dagger \hat{a}_{k_m} \hat{a}_{k_p} \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

en donde

$$\langle k | \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{tram}(r) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} | k' \rangle = \quad (2.3.26)$$

$$\int dr \phi_{k'}(r) \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{tram}(r) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} \right) \phi_k(r)$$

y

$$\langle k_i, k_j | \hat{U}_B | k_m, k_p \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \sum_{j \neq i}^N \int dr \int dr' \phi_{k_i}^*(r) \phi_{k_j}^*(r') U(r_{ij}) \phi_{k_m}(r) \phi_{k_p}(r') \quad (2.3.27)$$

Cuando el hamiltoniano del sistema se puede escribir como en la ecuación 2.3.25 se dice que sea replanteado el problema en la formulación de la segunda cuantización.

2.4. El hamiltoniano en términos de los operadores de campo.

Muchas veces es conveniente tomar una combinación lineal de los operadores de ascenso y descenso debido al alcance teórico que puede permitir hacer ese desarrollo; a esta combinación lineal se le conoce como los operadores de campo:

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_F \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_{-F} \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

los cuales satisfacen

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\nu(r) &= \sum_j \phi_{\vec{k}_j, \nu}(r) \hat{a}_{\vec{k}_j, \nu} \\ \hat{\Psi}_\nu^\dagger(r) &= \sum_j \phi_{\vec{k}_j, \nu}^*(r) \hat{a}_{\vec{k}_j, \nu}^\dagger \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

y a su vez cumplen las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}_\alpha(r), \hat{\Psi}_\beta(r')] &= 0 \\ [\hat{\Psi}_\alpha^\dagger(r), \hat{\Psi}_\beta^\dagger(r')] &= 0 \\ [\hat{\Psi}_\nu(r), \hat{\Psi}_\nu^\dagger(r')] &= \delta(|r - r'|) \delta_{\alpha, \beta}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Además, con estos operadores de campo, el hamiltoniano 2.3.25 puede describirse de una manera alternativa:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int dr \hat{\Psi}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{tr}(\vec{r}) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} \right) \hat{\Psi} \\ &+ \frac{1}{2} \int dr \int dr' \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}^\dagger(r') U_B \hat{\Psi}(r') \hat{\Psi}(r) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

que en efecto es equivalente, ya que si sustituimos la definición de los operadores de campos se obtiene, por una parte:

$$\begin{aligned}
& \int dr \hat{\Psi}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{tr}(\vec{r}) \right) \hat{\Psi} + \\
& + \int dr \hat{\Psi}^\dagger \left(g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} \right) \hat{\Psi} = \sum_k \sum_{k'} \langle k | \frac{p^2}{2m} + V_{tr}(\vec{r}_i) | k' \rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_k \sum_{k'} \langle k | g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} | k' \rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int dr \int dr' \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}^\dagger(r') U_B \hat{\Psi}(r') \hat{\Psi}(r) \\
& \qquad \qquad \qquad =
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \langle k_1, k_2 | \hat{U}_B | k_3, k_4 \rangle \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3} \hat{a}_{k_4}.$$

Ahora, si sumamos estas dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
\hat{H} & = \sum_k \sum_{k'} \langle k | \frac{p^2}{2m} + V_{tr} + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} | k' \rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \\
& + \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \sum_{k_4} \langle k_1, k_2 | \hat{U}_B | k_3, k_4 \rangle \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3} \hat{a}_{k_4}.
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Para poder determinar la evolución temporal del operador $\hat{\Psi}(r)$, simplemente se tiene que utilizar la ecuación de Heisenberg para la evolución del campo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(r, t) = \left[\hat{\Psi}(r, t), \hat{H}(t) \right] \tag{2.4.8}$$

y por lo tanto la dinámica del operador de campo está dada por la ecuación:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(r, t) & = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{tr}(\vec{r}) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} \right) \hat{\Psi}(r, t) \\
& + \int dr' \hat{\Psi}^\dagger(r', t) U_B(r, r') \hat{\Psi}(r, t) \hat{\Psi}(r', t).
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

2.5. Aproximaciones de campo medio y de contacto.

Por un lado, para describir un gas atómico a bajas temperaturas, uno puede suponer que las funciones de onda de una partícula más relevantes son aquellas que tienen un momento k muy pequeño; lo cual indica que su dinámica es muy lenta desde un punto de vista microscópico. En otras palabras, las partículas que constituyen al gas atómico a bajas temperaturas tienen longitudes de onda del

orden de $V^{\frac{1}{3}}$ en donde V es el tamaño (volumen) del sistema. Dentro de estas suposiciones uno puede aproximar al potencial interatómico $U_B(r_{ij})$ mediante un potencial de contacto:

$$U_B(r_i, r_j) = U_0 \delta(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (2.5.1)$$

en donde $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$, siendo a la longitud de dispersión de una onda s la cuál es proporcional al alcance efectivo del potencial interatómico [41, 45].

Dentro del contexto de la teoría de la dispersión, la aproximación de contacto se traduce a que en la colisión se cumpla

$$|k|a \ll 1 \quad (2.5.2)$$

lo cuál implica que

$$-ka = \tan \delta_0 \approx \sin \delta_0 \approx \delta_0 \quad (2.5.3)$$

y a su vez se obtiene

$$\psi_{sc}(r) \approx -\frac{a}{r} e^{-ik(r-a)} \quad (2.5.4)$$

en donde ψ_{sc} es la función de onda que describe la dispersión después de que dos partículas colisionen y δ_0 es el corrimiento de fase de la onda s . La función de onda de dispersión es una onda esférica que para grandes valores de r parecería que es emitida desde un centro a $r = a$; siendo esta la razón por la cuál se dice que la onda tiene un corrimiento. Además, si $a > 0$, esta parece que ha sido dispersada a un punto al cuál es más cerca que el punto de observación. En resumen, se puede sintetizar la región de validez de la aproximación de contacto de la siguiente forma

$$a \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \ll \lambda_T = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}. \quad (2.5.5)$$

Si utilizamos la condición (2.5.1) en la ecuación (2.4.9), se obtiene que:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{tr}(\vec{r}) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F} \right) \hat{\Psi}(r, t) + U_0 \hat{\Psi}^\dagger(r, t) \hat{\Psi}(r, t) \hat{\Psi}(r, t). \quad (2.5.6)$$

Por otra parte, al considerar que el fluido se encuentra en el cero absoluto $T = 0$, se espera que la mayor parte del fluido esté en el estado base del condensado de partículas no interactuantes. Nosotros no sabemos si hay partículas en algún estado excitado, sin embargo la aproximación aquí es que todas las partículas tengan momento k_0 . Es decir:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\nu(r, t) &\approx \phi_{\vec{k}_0, \nu}(r, t) \hat{a}_{\vec{k}_0, \nu} \\ \hat{\Psi}_\nu^\dagger(r, t) &\approx \phi_{\vec{k}_0, \nu}^*(r, t) \hat{a}_{\vec{k}_0, \nu} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Por consiguiente, para cada elemento de la base de Fock se obtiene que:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_\nu(r, t) |n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle &\approx \phi_{\vec{k}_0, \nu}^-(r, t) \sqrt{n_{k_0}} |n_{k_0} - 1, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle \\ \hat{\Psi}_\nu^\dagger(r, t) |n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle &\approx \phi_{\vec{k}_0, \nu}^*(r, t) \sqrt{n_{k_0} + 1} |n_{k_0} + 1, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle\end{aligned}\quad (2.5.8)$$

Sin embargo, debido a que se está suponiendo que todas las partículas se encuentran en el estado base, se hace la aproximación $n_{k_0} \approx N$ y también a que N es una cantidad macroscópica. Por lo cuál, los operadores de campo tienen que ser diagonalizables con la base de los estados de ocupación ya que los cambios $n_{k_0} \pm 1$ son despreciables, es decir:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_\nu(r, t) |n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle &\approx \phi_{\vec{k}_0, \nu}^-(r, t) \sqrt{n_{k_0}} |n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle \\ \hat{\Psi}_\nu^\dagger(r, t) |n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle &\approx \phi_{\vec{k}_0, \nu}^*(r, t) \sqrt{n_{k_0}} |n_{k_0}, n_{k_1}, \dots, n_{k_\infty}\rangle.\end{aligned}\quad (2.5.9)$$

Por lo cuál, si se hace la identificación:

$$\Phi_\nu(r, t) \equiv \sqrt{n_0} \phi_{\vec{k}_0, \nu}^-(r, t) \quad (2.5.10)$$

el lado derecho de la ecuación (2.4.6) se convierte

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{tr}(r) + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F}\right) \Phi(r, t) + U_0 \Phi^\dagger(r, t) \Phi(r, t) \Phi(r, t) \quad (2.5.11)$$

obteniendo así la ecuación de GP que describe la dinámica de un gas débilmente interactuante

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{tr} + g_F \mu_B \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{F}\right) \Phi(r, t) + U_0 \Phi^\dagger(r, t) \Phi(r, t) \Phi(r, t) \quad (2.5.12)$$

en donde Φ es un spinor con F componentes.

2.6. Sistemas bidimensionales de pseudo-spín $\frac{1}{2}$.

A causa del gran control experimental que se ha tenido sobre los gases atómicos ultrafríos [7], se ha logrado tener diferentes arreglos configuracionales de estos sistemas. En particular, el gran control sobre los átomos ultrafríos abre la puerta para estudiar sistemas nuevos; por ejemplo el spín puede ser utilizado en el estudio de sistemas magnéticos en configuraciones difícilmente observadas. Prueba de esto es que si se aprovecha los distintos grados de libertad del sistema, entonces es posible observar la aparición de nuevas fases de la materia. Un caso particular que utilizaremos en este trabajo corresponde a sistemas

condensados para los cuales dos estados atómicos hiperfinos son acoplados mediante interacciones con campos externos; a estos sistemas se les conocen como sistemas de pseudo-spín [46]. Esto es posible gracias a que en la estructura del hamiltoniano prevalece la estructura de los sistemas spinoriales, posibilitando así a describir el sistema con una ecuación de Gross-Pitaevskii cuyo spinor solo tenga dos componentes:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (2.6.1)$$

Tal y como se vió al final de la sección 2.1, un gas de bosones débilmente interactuante se puede polarizar en dos componentes debido a que las energías de las colisiones interatómicas es muchísimo más pequeña que la energía que se necesita para poder lograr la transición a alguna de las otras componentes de spín. De esta manera, la ecuación de un gas débilmente interactuante a temperatura $T = 0$ que tenga un spinor con únicamente dos componentes de spín, se le llama: la ecuación GP de pseudo-spin $\frac{1}{2}$.

En general, los gases atómicos ultrafríos tienen la peculiaridad de que, debido a tanto las interacciones atómicas y su confinamiento espacial en trampas inhomogéneas, éstas se pueden manipular de tal forma que se puede tener el control sobre la dimensión del sistema y, por tanto, dar lugar a sistemas con dimensiones 1, 2 y 3. En esos regímenes de muy bajas tanto temperaturas como densidades tal y como se vió en la ecuación (2.5.5), el campo medio de la ecuación GP provee un esquema óptimo para describir a aquellos gases confinados en una trampa homogénea con distintas dimensionalidades, y uno puede escribir las correspondientes ecuaciones para describir a esos sistemas. A causa de que todos los condensados producidos en laboratorio son sistemas tridimensionales, la reducción de la dimensionalidad se puede alcanzar mediante el cambio de la geometría espacial del lugar en donde los átomos se encuentran confinados. Normalmente, para reducir la dimensión del gas se asume que la trampa inhomogénea es un oscilador armónico anisotrópico con frecuencias tridimensionales ω_x, ω_y y ω_z ,

$$V_{trampa} = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.6.2)$$

entonces, si una de esas frecuencias se vuelve muy grande, entonces el movimiento de los átomos solo ocurre en las restantes. Así, una simple consideración de la dinámica en esas coordenadas reduce la dimensionalidad de la ecuación despreciando los demás grados de libertad [47].

Este conjunto de aseveraciones permiten describir al BEC spinorial como si fuera un sistema bidimensional con dos componentes spinoriales y, en consecuencia, obteniendo así la versión más sencilla para describir un BEC spinorial:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_\nu(x, y, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2}(m\omega_x^2 x^2 + m\omega_y^2 y^2) \right) \Phi_\nu(x, y, t) + \quad (2.6.3)$$

$$+ g_F \mu_B \vec{B}(x, y, t) \cdot \vec{\sigma}^{\alpha\nu} \Phi_\nu(x, y, t) + U_0 |\Phi|^2 \Phi_\nu(x, y, t)$$

en donde $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}$ y $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli.

Hasta este punto hemos abordado la teoría suficiente para poder enunciar las ecuaciones spinoriales de Gross-Pitaevskii de pseudo-spín $\frac{1}{2}$, las cuales serán nuestra herramienta de trabajo para la comprensión de los vórtices cuánticos y Skyrmiones en los condensados de Bose-Einstein spinoriales el cual profundizaremos en su justa medida en la siguiente sección.

Capítulo 3

Vórtices cuánticos y Skyrmiones

3.1. Vórtices cuánticos.

Se ha demostrado que cuando un condensado de Bose-Einstein fluye, su función de onda toma la forma de una onda viajera coherente y la velocidad del fluido \vec{v}_s se relaciona con la \vec{k} de la función de onda. A causa de que la función de onda tiene que ser univaluada, cuando la función del condensado tiene una geometría toroidal entonces la integral de \vec{k} debe ser tal que se ajuste a esta forma toroidal [48]. Puede mostrarse dos consecuencias de tal condición: primero, que el flujo del condensado debe ser irrotacional (salvo ciertos puntos muy específicos) y, segundo, que cuando el condensado fluye y la función de densidad tiene geometría toroidal (o cualquier otra geometría que sea múltiplemente conexa) solo ciertas velocidades del fluido están permitidas, las cuales corresponden a una cuantización de la circulación hidrodinámica [49, 50, 51]

$$C = \oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} \quad (3.1.1)$$

en donde C conocida como circulación es la integral del línea de la velocidad del fluido. Esta última condición es equivalente a pedir que cada átomo en el condensado debe tener el mismo momento angular y que este momento angular esté cuantizado en unidades de \hbar .

La formación de vórtices, a causa de campos magnéticos, en condensados de Bose-Einstein spinoriales sucede de manera análoga que la formación de vórtices en superconductores. Los vórtices, en un superconductor tipo II, aparecen en puntos espaciales donde el sistema permite que el campo magnético penetre [35]. En aquellos vórtices la densidad es cero y la corriente del superconductor circula en torno a estos y así cancela el campo en el bulto. Las diferencias entre la formación de vórtices en superconductores y en un BEC spinorial se pueden resumir en dos: la primera es que la función de onda tiene componentes

spinoriales y la segunda es que los campos magnéticos que se encuentran en el sistema no son uniformes. Para ilustrar dichas diferencias, tomemos la ecuación de GP bidimensional de pseudo-spin $\frac{1}{2}$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\nu(x, y, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}(m\omega_x^2x^2 + m\omega_y^2y^2)\right)\Phi_\nu(x, y, t) + g_F\mu_B\vec{B}(x, y, t) \cdot \vec{\sigma}^{\alpha\mu}\Phi_\mu(x, y, t) + U_0|\Phi|^2\Phi_\nu(x, y, t) \quad (3.1.2)$$

con $\nu = +, -$. Si nosotros introducimos un campo magnético de la forma:

$$\vec{B} = B_0(r^p \cos p\varphi \hat{e}_x - r^p \sin p\varphi \hat{e}_y + z_0 \hat{e}_z) \quad (3.1.3)$$

en donde $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $p \in \mathbb{N}$, entonces, el término hiperfino es:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = B_0\sigma_x r^p \cos p\varphi - B_0\sigma_y r^p \sin p\varphi + B_0\sigma_z z_0 \quad (3.1.4)$$

en donde las matrices de Pauli son:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Por lo cuál, si desarrollamos el término hiperfino se obtiene:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Phi = B_0 \begin{pmatrix} -\Phi_- r^p (\cos p\varphi - i \sin p\varphi) + z_0 \Phi_+ \\ -\Phi_+ r^p (\cos p\varphi + i \sin p\varphi) - z_0 \Phi_- \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

y por lo tanto la ecuación GP se puede ver, para cada una de las componentes del spin, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{m}{2}(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2) + U_0|\Phi|^2 + g_B\mu_B B_0 z_0\right)\Phi_+ \\ - g_B\mu_B B_0 r^p e^{-ip\varphi}\Phi_- &= i\frac{\partial\Phi_+}{\partial t} \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2) + U_0|\Phi|^2 - g_B\mu_B B_0 z_0\right)\Phi_- \\ - g_B\mu_B B_0 r^p e^{ip\varphi}\Phi_+ &= i\frac{\partial\Phi_-}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

De aquí se puede deducir la ecuación GP estacionaria a partir del cambio de variable

$$\Phi(x, y, t) = \Psi(x, y)e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}} \quad (3.1.8)$$

quedando de esta manera la ecuación estacionaria:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m}{2} (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2) + U_0 |\Phi|^2 + g_B \mu_B B_0 z_0 \right) \Phi_+ \\
& \quad - g_B \mu_B B_0 r^p e^{-ip\varphi} \Phi_- = \mu \Phi_+ \\
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2) + U_0 |\Phi|^2 - g_B \mu_B B_0 z_0 \right) \Phi_- \\
& \quad - g_B \mu_B B_0 r^p e^{ip\varphi} \Phi_+ = \mu \Phi_-.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Si se propone una solución de la forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} f_+(r) e^{i\zeta_+ \varphi} \\ f_-(r) e^{i\zeta_- \varphi} \end{pmatrix} \tag{3.1.10}$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{\zeta_+^2}{r^2} \right) + \frac{m}{2} (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2) + U_0 (f_+^2 + f_-^2) + g_B \mu_B B_0 z_0 - \mu \right) f_+ \\
& \quad - g_B \mu_B B_0 r^p e^{-ip\varphi} e^{i(\zeta_- - \zeta_+) \varphi} f_- = 0 \\
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{\zeta_-^2}{r^2} \right) + \frac{m}{2} (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2) + U_0 (f_+^2 + f_-^2) - g_B \mu_B B_0 z_0 - \mu \right) f_- \\
& \quad - g_B \mu_B B_0 r^p e^{ip\varphi} e^{i(\zeta_+ - \zeta_-) \varphi} f_+ = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Si $\delta = p + \zeta_+ - \zeta_-$ entonces se propone que las funciones f_α sean:

$$\begin{aligned}
f_+ &= R_+ e^{i\frac{\delta}{2} \varphi} \\
f_- &= R_- e^{-i\frac{\delta}{2} \varphi}.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

por lo que si sustituimos se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{\zeta_+^2}{r^2} \right) + \frac{m}{2} (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2) + U_0 (R_+^2 + R_-^2) + g_B \mu_B B_0 z - \frac{\mu}{\hbar} \right) R_+ \\
& \quad - g_B \mu_B B_0 r^p R_- = 0 \\
& \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{\zeta_-^2}{r^2} \right) + \frac{m}{2} (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2) + U_0 (R_+^2 + R_-^2) - g_B \mu_B B_0 z - \frac{\mu}{\hbar} \right) R_- \\
& \quad - g_B \mu_B B_0 r^p R_+ = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Para buscar la solución de Thomas-Fermi [53], se desprecia a la energía cinética y en consecuencia:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m}{2}(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2) + U_0(R_+^2 + R_-^2) + g_B\mu_B B_0 z - \frac{\mu}{\hbar}\right)R_+ &= g_B\mu_B B_0 r^p R_- \\
\left(\frac{m}{2}(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2) + U_0(R_+^2 + R_-^2) - g_B\mu_B B_0 z - \frac{\mu}{\hbar}\right)R_- &= g_B\mu_B B_0 r^p R_+.
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

por lo que si se hace las adecuadas sustituciones, se obtiene finalmente que:

$$R_+^2 + R_-^2 = \frac{1}{U_0} \left(\sqrt{(g_B\mu_B B_0 r^p)^2 + (g_B\mu_B B_0 z)^2} + \frac{\mu}{\hbar} - \frac{m}{2}(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2) \right). \tag{3.1.15}$$

Si definimos la densidad del gas como

$$\rho(r) = R_+^2 + R_-^2 \tag{3.1.16}$$

entonces notemos que las soluciones para $z = 0$ son tales que:

$$\rho(r) = \frac{1}{U_0} \left(g_B\mu_B B_0 r^p + \frac{\mu}{\hbar} - \frac{m}{2}(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2) \right). \tag{3.1.17}$$

Además, cerca del origen, el término dominante es la de la energía cinética. Por lo que cerca del origen se tiene que cumplir la condición:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_\alpha}{dr} \right) - \frac{\zeta_\alpha^2}{r^2} R_\alpha \approx 0 \tag{3.1.18}$$

y, por lo tanto, en lugares cercanos a donde el campo magnético se anula se puede aproximar la función radial de cada componente de la función de onda como:

$$R_\alpha = A_\alpha r^{\zeta_\alpha} \tag{3.1.19}$$

mostrando así que la densidad del condensado tiene que ser igual a cero en esos puntos. Pero no solo eso, si $\zeta_\alpha \neq 0$, y ζ_α solo puede tomar valores enteros y en consecuencia la función de onda posee un vórtice de tamaño $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\mu}}$, conocido como el tamaño usual de los vórtices Gross-Pitaevskii. Decimos que la velocidad del condensado está dada por

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{M} \zeta_\alpha \vec{\nabla} \varphi \tag{3.1.20}$$

esta definición surge al considerar la parte imaginaria de la ecuación de Gross-Pitaevskii; al separar la ecuación en la parte real y imaginaria, la primera corresponde a la ecuación de un fluido incomprensible, mientras que la parte imaginaria corresponde a la ecuación de continuidad. Con base en esto, se puede calcular entonces la circulación alrededor del vórtice la cuál es:

$$C_\alpha = \oint \vec{v}_s \cdot d\vec{r} = 2\pi \frac{\hbar}{M} \zeta_\alpha \tag{3.1.21}$$

y debido a que ζ_α solo puede tomar valores enteros, se corrobora de esta manera que esta cantidad está cuantizada. La existencia de estos vórtices cuantizados se debe a la introducción de un campo magnético no uniforme que se anula en el punto donde se forma el vórtice. Es interesante contrastar la manera en cómo aparecen los vórtices introduciendo campos magnéticos en comparación con los que aparecen al rotar el superfluido. Supongamos ahora que tenemos un BEC que se encuentra rotando. En el sistema de referencia que está rotando, la ecuación de GP escalar y estacionara tiene que ser igual a:

$$0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2}(m\omega_x^2 x^2 + m\omega_y^2 y^2) + (\Omega \cdot \vec{L}) + U_0 |\Phi|^2 - \mu \right) \Phi \quad (3.1.22)$$

en donde $\Omega \cdot \vec{L}$ es un término que aparece por considerar un sistema de referencia no inercial. Por lo tanto, a causa de la identidad:

$$(\Omega \cdot \vec{L})\Phi = \frac{\hbar}{i} (\Omega \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Phi$$

se puede notar que el término que genera la rotación es equivalente a introducir un vector potencial $\vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ que corresponde a un “campo magnético” axial uniforme $\vec{B} = \vec{\Omega}$. Concluyendo así que el acoplamiento entre el campo magnético, introducido al fluido, y el spín es la razón por la cuál se forman los vórtices; esto sucede así debido a la analogía que hay en el acoplamiento entre la velocidad angular (que se le suministra al condensado) con el momento angular siendo este acoplamiento el responsable de generar la red Abrikosov [52].

La ecuación (3.1.2) se puede resolver utilizando métodos numéricos y para lograrlo se usa el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{x_i}{l_0} \\ \tau &= \frac{t}{T} \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

en donde $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $T = \frac{1}{\omega}$, $\epsilon = \hbar\omega$ y $\omega = \omega_x$. Teniendo esto en cuenta la ecuación bidimensional GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ se escribe de manera adimensional de la siguiente forma:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi = \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{2} (\gamma_x x^2 + \gamma_y y^2) \right) \Phi + \kappa \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \Phi + g |\Phi|^2 \Phi \quad (3.1.24)$$

en donde

$$\begin{aligned} g &\equiv \frac{U_0}{l_0^3 \hbar \omega} \\ \kappa &\equiv \frac{g_F \mu_B}{\hbar \omega} \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

El método que se utiliza para resolver la ecuación (3.1.24) se encuentra en [33]. De acuerdo con Zamora & Romero [34], no solamente se puede obtener vórtices

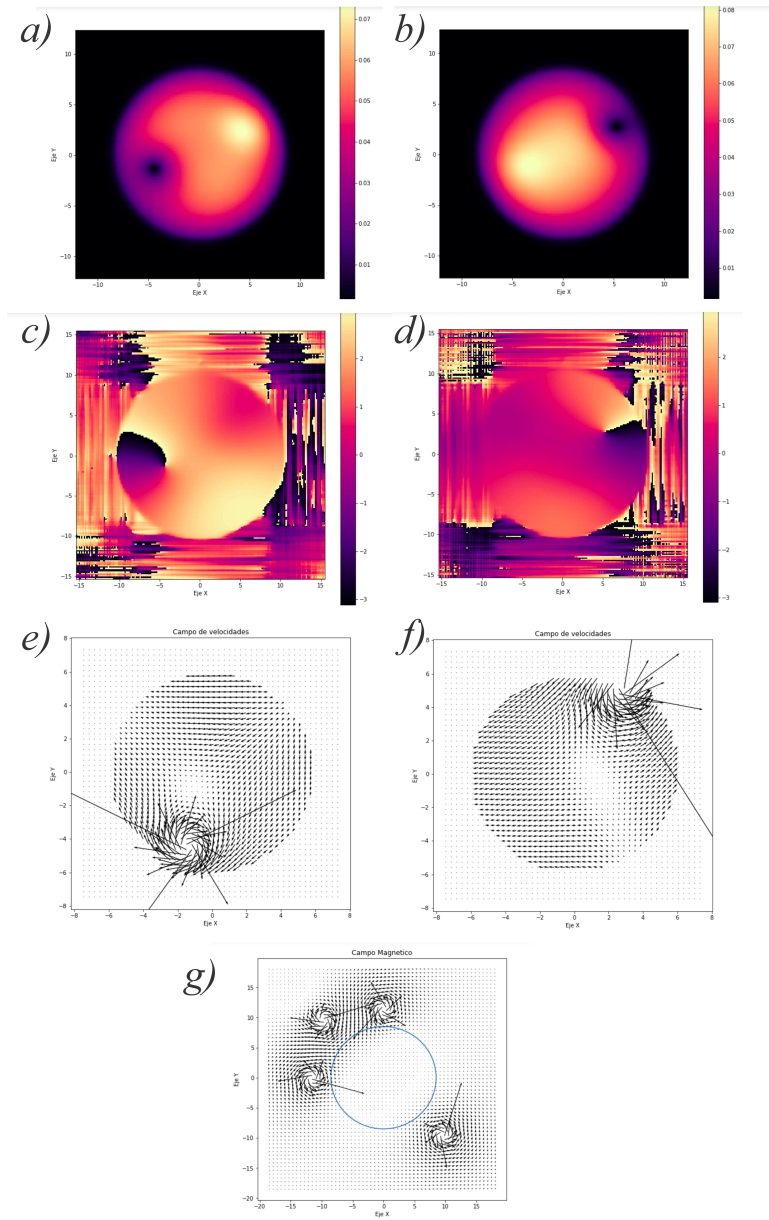


Figura 3.1.1: Vórtices que son solución a la ecuación bidimensional de Gross-Pitaevskii y de pseudo-spín $\frac{1}{2}$. En *a)* y *b)* se muestran las componentes de spín que son soluciones a la ecuación GP adimensional. En *c)* y *d)* se muestran las fases de cada una de las componentes. En *e)* y *f)* se muestran los campos de velocidades obtenidos de las dos distintas componentes. Finalmente, en *g)* se muestra el campo magnético que generó los vórtices.

utilizando el campo magnético (3.1.3) si no también se puede utilizar campo magnéticos de la forma:

$$\vec{B} = \sum_n I_n \frac{(x - x_n)\hat{y} - (y - y_n)\hat{x}}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}. \quad (3.1.26)$$

Particularmente cuando se tiene un sistema cuyo campo magnético es:

$$\begin{aligned} x_1 &= -y_2 = -11,5 \\ y_1 &= x_2 = 0,0 \\ x_3 &= -y_3 = 9,6 \\ -x_4 &= y_4 = 9,6 \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = -I_4 = 3,0 \quad (3.1.28)$$

y a su vez el sistema tiene los parámetros fijos con valores numéricos (adimensionales)

$$\begin{aligned} g &= 4000 \\ \gamma_x &= \gamma_y = 1 \\ \kappa &= 1 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

y con un factor de amortiguamiento inicial de $\alpha = 200$ [54] entonces las soluciones se ven tal y como se ilustran en la figura 3.1.1. La solución numérica posee vórtices que tienen circulaciones opuestas (+1 y -1) para cada componente del spinor.

3.2. Skyrmiones en condensados de Bose-Einstein spinoriales.

Algunas veces las ideas científicas caen en el olvido conforme los científicos cambian de enfoque en sus investigaciones, sin embargo esas ideas tienen una belleza matemática que orilla a revivirlas una y otra vez. Tal es el caso de la historia del Skyrmión: un concepto que ha tenido muchas transformaciones. La primera vez que se formuló fue a finales de 1950 y a principios de 1960 por el físico británico Tony Hilton Royle Skyrme [26, 27, 55].

Si podemos imaginar una esfera que tiene vectores apuntando, en conjunto, a su centro y además somos capaces de transportar esos vectores uno a uno sobre el plano euclidiano \mathbb{R}^2 manteniendo sus orientaciones fijas, entonces se puede ver como la configuración de esos vectores se tuerce en el espacio; a esta configuración es lo que llamamos Skyrmión. Skyrme encontró que estos objetos matemáticos podrían explicar cómo las partículas subatómicas tales como neutrones y protones existen como identidades discretas emergiendo desde un campo nuclear continuo. En el modelo de Skyrme se explicó el comportamiento de estas partículas, como si fueran una torsión geométrica estable en un fondo plano; como si fueran remolinos en el agua. Aunque fue una solución genial y virtuosa, posteriormente fue pasando al olvido debido a que llegó una gran idea

en la física de partículas en la década de los sesentas: los quarks. A pesar de ello el formalismo desarrollado por Skyrme apareció en otros contextos de la física como es el caso del efecto Hall cuántico [56] y en los gases atómicos ultrafríos [57].

Cuando se hace la descripción de un BEC spinorial bidimensional de pseudo-spin $\frac{1}{2}$ con un campo magnético que se anula en algún punto del plano, se generan, además de vórtices cuánticos, Skyrmiones magnéticos. Si tomamos una de las soluciones estacionarias encontradas en la sección anterior, se puede calcular el campo de Skyrme asociado al BEC-spinorial:

$$f_\alpha = \frac{\phi^\dagger \sigma_\alpha \phi}{\phi^\dagger \phi} \quad (3.2.1)$$

que de manera explícita es:

$$\phi^\dagger \sigma_x \phi = \begin{pmatrix} \phi_+^* & \phi_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \phi_+^* \phi_- + \phi_-^* \phi_+, \quad (3.2.2)$$

$$\phi^\dagger \sigma_y \phi = \begin{pmatrix} \phi_+^* & \phi_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = i(\phi_-^* \phi_+ - \phi_+^* \phi_-) \quad (3.2.3)$$

y

$$\phi^\dagger \sigma_z \phi = \begin{pmatrix} \phi_+^* & \phi_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = |\phi_+|^2 - |\phi_-|^2. \quad (3.2.4)$$

Utilizando estas igualdades, se puede deducir que:

$$1 = \sum_\alpha \frac{(\phi^\dagger \sigma_\alpha \phi)^2}{\phi^\dagger \phi} \quad (3.2.5)$$

y, por consiguiente, se observa que el campo \vec{f} se encuentra normalizado en cada punto del espacio. Por la manera en que se obtuvo la solución estacionaria para el campo magnético (3.1.3) las componentes del Skyrmión tienen que ser:

$$\begin{aligned} f_x &= 2 \frac{R_+ R_-}{R_+^2 + R_-^2} \cos(p\varphi) \\ f_y &= 2 \frac{R_+ R_-}{R_+^2 + R_-^2} \sin(p\varphi) \\ f_z &= \frac{R_+^2 - R_-^2}{R_+^2 + R_-^2}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Lo que significa que, en este caso particular, la componente z del campo de Skyrme no depende de φ (que en general no necesariamente es así)

$$\vec{f} = f_\rho(r) \hat{\rho} + f_z(r) \hat{z} \quad (3.2.7)$$

con

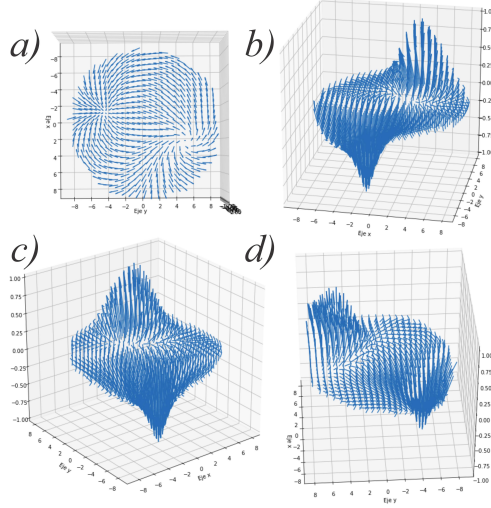


Figura 3.2.1: En esta figura se muestra el Skyrmi3n asociado a la soluci3n num3rica con el sistema descrito por las condiciones (3.1.27), (3.1.28) y (3.1.29). C3mo se muestra en las distintas perspectivas, el Skyrmi3n asociado a este sistema tiene que poseer carga total igual a cero. Esto 3ltimo se puede comprobar si se si se implementa la f3rmula (3.2.9) en el m3todo num3rico [15].

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \hat{\rho} &= \hat{x} \cos p\varphi + \hat{y} \sin p\varphi \\
 \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \sin \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 f_\rho^2(r) + f_z^2(r) &= 1 \\
 f_z(0) &= 1
 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

entonces si calculamos la carga del Skyrmi3n, 3sta tiene que ser [37]:

$$Q_{Sky} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} dx dy \tag{3.2.9}$$

Por ello, veamos primero que:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \tag{3.2.10}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \tag{3.2.11}$$

y por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \quad (3.2.12)$$

Luego, calculando explícitamente el producto cruz

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial r} \hat{\rho} + \frac{\partial f_z}{\partial r} \hat{z} \right) \times f_\rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = -f_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial r} (\hat{\rho} \times \hat{\varphi}) + f_\rho \frac{\partial f_z}{\partial r} (\hat{z} \times \hat{\varphi}) \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} = f_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial r} \hat{z} - f_\rho \frac{\partial f_z}{\partial r} \hat{\rho} \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \frac{f_\rho}{r} \frac{\partial f_\rho}{\partial r} \hat{z} - \frac{f_\rho}{r} \frac{\partial f_z}{\partial r} \hat{\rho} \quad (3.2.15)$$

y obteniendo la derivada parcial con respecto a r a la condición de normalización en cada punto del espacio, tenemos que:

$$f_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial r} = -f_z \frac{\partial f_z}{\partial r} \quad (3.2.16)$$

por lo tanto:

$$\frac{f_z}{r} \frac{\partial f_z}{\partial r} \hat{z} + \frac{f_\rho}{r} \frac{\partial f_z}{\partial r} \hat{\rho} = -\frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial r} (f_\rho \hat{\rho} + f_z \hat{z}) \quad (3.2.17)$$

$$\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial r} \quad (3.2.18)$$

de tal forma que la carga del Skyrmión para este caso particular es

$$Q_{Sky} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty -\frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial r} r dr d\varphi = \frac{1}{2} (f_z(0) - f_z(\infty)). \quad (3.2.19)$$

Ahora, si la condición de frontera en el infinito es:

$$f_z(\infty) = -1 \quad (3.2.20)$$

se obtiene el bien conocido Skyrmión y si

$$f_z(\infty) = 0 \quad (3.2.21)$$

se obtiene el conocido Baby Skyrmión. Sin embargo, los Skyrmiones obtenidos de la ecuación de Gross-Pitaevskii de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ para campos magnéticos como los de la ecuación (3.1.3) con $z_0 \neq 0$ tienen una condición de frontera en el infinito que se alinea al campo [34] y, por consiguiente, la carga definida en (3.2.9) es igual al valor de la componente z del campo de Skyrme en el infinito:

$$-1 < f_z(\infty) < 1 \quad (3.2.22)$$

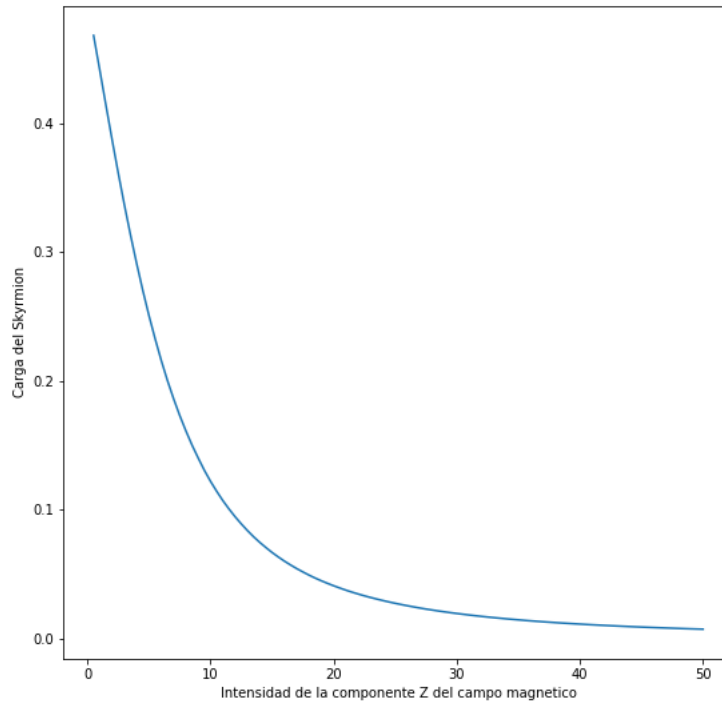


Figura 3.2.2: Gráfica de la carga del Skyrmión en función de la intensidad de la componente z_0 del campo magnético (unidades adimensionales).

indicando así que se puede producir Skyrmiones de carga arbitraria. En la figura 3.2.2, se muestra la gráfica de la carga del Skyrmión en función de la intensidad de la componente z del campo magnético. Esto representa un problema en la teoría de los defectos topológicos porque indicaría que la clase de homotopía de orden 2 asociado a *la variedad de los estados internos* no es isomorfo a los números enteros [39]. Esta discrepancia en los resultados usuales de los Skyrmiones se debe a que el campo ahora tiene condiciones de frontera que no convergen a un punto. **Esto motiva a preguntarnos, si la carga del Skyrmión dada en la ecuación (3.2.9) está bien definida y a su vez determinar bajo qué condiciones la carga del skyrmión es igual a un número entero. Éste será el objetivo general de esta tesis y para poder alcanzarlo será necesario tener a la mano herramientas de Topología y Geometría Diferencial que serán desarrolladas a continuación.**

Capítulo 4

Aspectos de Topología y Geometría Diferencial

4.1. Elementos de topología.

La topología es una rama de la matemáticas muy general sin embargo en este capítulo solo nos enfocaremos en desarrollar la topología del espacio \mathbb{R}^n y la de todos sus subconjuntos; particularmente, solo se abordará la topología de los subconjuntos de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^3 . Las definiciones, teoremas y proposiciones que se enuncien en esta sección se basan principalmente en dos libros: *General Topology* [58] y *Elementos de Topología General* [59]. Como solo nos enfocaremos en las topologías inducidas por las métricas empezaremos desarrollando un poco la teoría de espacios métricos y para ello debemos saber qué es una métrica en el contexto de esta teoría.

Definición 4.1.1. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$, entonces se dice que la función d es una métrica sobre M si se satisface la siguientes propiedades:

$$d(x, y) : M \times M \longrightarrow [0, \infty) \quad (4.1.1)$$

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$ (simétrica)
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ y $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{y}$ (positiva definida)
3. Si \vec{x}, \vec{y} y $\vec{z} \in M$ entonces $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ (desigualdad del triángulo)

Al par ordenado (M, d) se le conoce como el espacio métrico.

Un ejemplo de espacio métrico es el espacio euclidiano:

$$(\mathbb{R}^n, d(\cdot, \cdot)), \quad (4.1.2)$$

en donde $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ y x_i, y_i son las componentes de la coordenadas euclidianas de los vectores \vec{x} y \vec{y} , respectivamente. Esta función cumple las tres propiedades elementales de un espacio métrico.

A partir de la métrica se puede definir un objeto que se conoce como las bolas abiertas. Dado un espacio métrico cualquiera (M, d) siempre se puede definir el siguiente conjunto:

$$B_\epsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} \in M : d(\vec{x}, \vec{y}) < \epsilon\}, \quad (4.1.3)$$

en donde $\epsilon > 0$.

A este conjunto se le conoce como “bola abierta” de radio ϵ centrada en \vec{x} . A partir de este concepto, definimos a los conjuntos abiertos.

Definición 4.1.2. Sea (M, d) un espacio métrico cualquiera. Entonces un conjunto $A \subseteq M$ se dice que es abierto si $\forall \vec{x} \in A, \exists \epsilon > 0$ tal que:

$$B_\epsilon(\vec{x}) \subseteq A. \quad (4.1.4)$$

Con base a esta definición, veamos que se cumple la siguiente proposición:

Proposición 4.1.3. Sea (M, d) un espacio métrico cualquiera y definimos la colección $\tau = \{A \subset M : A \text{ es un conjunto abierto}\}$ entonces la siguiente afirmación es cierta:

- $\emptyset \in \tau$ y $M \in \tau$
- Si $A \in \tau$ y $B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$
- Si $\mathcal{C} \subset \tau$ es una subcolección de conjuntos abiertos entonces $\cup_{A \in \mathcal{C}} A \in \tau$

La proposición 4.1.3 depende totalmente de la colección $\tau = \{A \subset M : A \text{ es un subconjunto abierto}\}$, por lo que esta colección es de suma importancia y se le conoce como *la topología inducida por el espacio métrico*.

En general si un subconjunto M de \mathbb{R}^n tiene una colección de subconjuntos de M , digamos τ , que cumple las tres propiedades de la proposición 1.3. entonces τ es un topología. Es muy importante hacer énfasis, que los espacios métricos tienen siempre una topología asociada, sin embargo, una topología no necesariamente tiene una métrica que la induzca.

Definición 4.1.4. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y d una métrica al espacio \mathbb{R}^n .

- $\tau_d = \{A \subseteq M : A \text{ es un subconjunto abierto}\}$ es la topología inducida por la métrica d .
- M es un conjunto cerrado si $\mathbb{R}^n/M \in \tau_d$, es decir, el complemento de M es un conjunto abierto.
- Definimos la frontera de M como $\partial M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0 B_\epsilon(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset\}$
- Definimos los puntos de acumulación de M como $M' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0 B_\epsilon(\vec{x}) \setminus \{\vec{x}\} \cap M \neq \emptyset\}$
- M es un conjunto acotado si existe $\epsilon > 0$ y un $\vec{y} \in M$ tal que $M \subseteq B_\epsilon(\vec{y})$
- La topología heredada por \mathbb{R}^n sobre M es $\tau_d \cap M = \{A \cap M : \text{donde } A \in \tau_d\}$ donde τ_d es la topología inducida por la métrica d .

Con base en todo lo anterior, se puede definir conexidad, compacidad y los espacios Lindelöf de la siguiente manera.

Definición 4.1.5. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, d una métrica del espacio \mathbb{R}^n y sea $\tau_d \cap M = \{A \cap M : \text{donde } A \in \tau_d\}$ la topología heredada sobre M donde τ_d es la topología inducida por la métrica d . Definimos el conjunto $AC(M) = \{B \in \tau_d \cap M : B \setminus \mathbb{R}^n \in \tau_d \cap M\}$ como la colección de conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo. A partir de esto, se puede decir que M es conexo si:

$$|AC(M)| = 2 \quad (4.1.5)$$

en donde las barras alrededor del conjunto $AC(M)$ significa cardinalidad.

Definición 4.1.6. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, d una métrica del espacio \mathbb{R}^n . Sea $\mathcal{C} \subseteq \tau_d$ tal que

$$M = \cup_{w \in \mathcal{C}} M \cap w \quad (4.1.6)$$

- M es un espacio Lindelöf si existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $M = \cup_{w \in \mathcal{A}} M \cap w$ y $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$
- M es compacto si existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $M = \cup_{w \in \mathcal{A}} M \cap w$ y $|\mathcal{A}| < \aleph_0$
- M es separable si existe $D \subseteq M$ tal que $D \cup D' = M$ y $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$

en donde \aleph_0 es la cardinalidad de los números naturales.

Se tiene que admitir que la definición 4.1.5 es muy abstracta por lo que muchas veces no dá la intuición de lo que es la conexidad, pero básicamente la conexidad te dice cuándo algo está hecho de una sola pieza. Por otro lado, las definiciones 4.1.6 también poseen el defecto de ser muy abstractas, por ello a continuación enunciaremos teoremas, sin demostración. que nos ayudarán a caracterizar a los conjuntos que poseen estas propiedades.

Teorema (Heine-Borel). Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, d una métrica del espacio \mathbb{R}^n . El conjunto M es un conjunto compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Teorema (Lindelöf-Separable). Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, d una métrica del espacio \mathbb{R}^n . El conjunto M es un espacio Lindelöf si y sólo si es separable.

Estos teoremas son muy practicos ya que permiten tener una intuición de cómo se deben de ver los conjuntos Lindelöf y compactos. Por ejemplo, por un lado, si nosotros introducimos la topología usual a \mathbb{R}^n entonces los conjuntos compactos son aquellos conjuntos que podemos encerrar en una bola y la frontera pertenece al conjunto. Por otro lado, si seguimos usando la topología inducida por la métrica euclidiana, los espacios Lindelöf son todos aquellos conjuntos cuya intersección con \mathbb{Q}^n es no vacía.

Es importante saber que la definición formal de continuidad entre espacios métricos está dada por el siguiente “poema”:

- Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función, entonces f es continua en $x_0 \in X$ si $\forall \epsilon > 0$ se tiene que $\exists z \in X$ y $\exists \delta > 0$ tal que si $d_X(x, z) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(z)) < \epsilon$. Además, la función f es continua en X si f es continua para todos los elementos de (X, d_X) .

En general, el concepto de continuidad no necesita a los espacios métricos para definirse por lo que una versión distinta de continuidad se puede enunciar en términos de bolas abiertas de la siguiente manera:

- f es continua en $x_0 \in X$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall z \in B_\delta(\vec{x}_0)$ entonces $f(\vec{z}) \in B_\epsilon(f(\vec{x}_0))$.

Esta definición en términos de bolas será motivo para enunciar la siguiente proposición.

Proposición 4.1.7. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. f es continua
2. Si $A \in \tau_{d_Y}$ entonces $f^{-1}[A] = \{x \in X : f(x) \in A\} \in \tau_{d_X}$

DEMOSTRACIÓN:

Primero demostremos la ida. Para ello tomemos un conjunto abierto $A \in \tau_{d_Y}$ y tomemos un elemento $\vec{x}_0 \in f^{-1}[A]$, por lo tanto como A es un conjunto abierto $\exists \epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(\vec{x}_0)) \subseteq A$. Por continuidad existe $\delta > 0$ de tal forma que $\forall z \in B_\delta(\vec{x}_0)$ se cumple que $f(\vec{z}) \in B_\epsilon(f(\vec{x}_0))$. Luego, por construcción $B_\delta(\vec{x}_0) \subseteq f^{-1}[A]$. Por lo tanto, debido a la forma arbitraria en que se escogió \vec{x}_0 se concluye que el conjunto $f^{-1}[A]$ es abierto.

Ahora demostraremos el regreso. Para ello tomemos un elemento \vec{x}_0 y escojamos un $\epsilon > 0$ entonces construyamos $B_\epsilon(f(\vec{x}_0))$. Es fácil notar que la bola abierta $B_\epsilon(f(\vec{x}_0))$ es un conjunto abierto y por lo tanto, por hipótesis $f^{-1}[B_\epsilon(f(\vec{x}_0))]$ es un conjunto abierto. Luego como $f^{-1}[B_\epsilon(f(\vec{x}_0))]$ es abierto entonces se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\vec{x}_0) \subseteq f^{-1}[B_\epsilon(f(\vec{x}_0))]$. Por lo tanto si $\epsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall \vec{z} \in B_\delta(\vec{x}_0)$ sucede entonces que $f(\vec{z}) \in B_\epsilon(f(\vec{x}_0))$. Es decir f es continua en \vec{x}_0 y como \vec{x}_0 fue escogido de manera arbitraria entonces se tiene que f es continua. Con esto la proposición queda demostrada.

■_{4,1,7}

En topología general las funciones continuas son las herramientas básicas para caracterizar a las topologías, particularmente cuando tenemos funciones que son continuas, invertibles y su inversa también es continua entonces se dice que la función es un *homeomorfismo*. En general, cuando se tiene dos espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y) , y estos espacios topológicos tienen un homeomorfismo que los relaciona entonces se dice que *los espacios topológicos son homeomorfos* y se denota este hecho simplemente así $X \cong Y$.

Si bien es cierto que los *homeomorfismos* son importantes para clasificar los espacios topológicos, existen otras propiedades muy importantes que permiten también hacer una clasificación de ellos.

Definición 4.1.8. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, d una métrica del espacio \mathbb{R}^n y además M cumple las siguientes propiedades:

1. Si $\vec{x}, \vec{y} \in M$ entonces existe una función continua $\vec{\alpha} : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\vec{\alpha}(0) = \vec{x}$ y $\vec{\alpha}(1) = \vec{y}$

2. Si $\vec{p} \in M$ y $\vec{\alpha} : [0, 1] \rightarrow M$ es una función continua tal que $\vec{\alpha}(1) = \vec{\alpha}(0) = \vec{p}$, entonces existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $H(s, 0) = \vec{\alpha}(s)$ y $H(s, 1) = \vec{p}$.

entonces se dice que M es simplemente conexo.

Con base a esta última definición enunciaremos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.9. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, d una métrica del espacio \mathbb{R}^n . Si M es simplemente conexo, entonces M es un conjunto conexo.

Supongamos que M no es conexo. Esto significa que la cardinalidad del conjunto $AC(M)$ es mayor estricto que dos. De antemano sabemos que $M, \emptyset \in AC(M)$ por lo tanto supongamos que $G \in AC(M) \setminus \{M, \emptyset\}$. Luego, sucede entonces que:

$$G \cup G \setminus M = M \quad (4.1.7)$$

entonces tomamos un punto $\vec{x} \in G$ y otro en $\vec{y} \in G \setminus M$. Como M es simplemente conexo, se tiene entonces que existe una función $\vec{\alpha} : [0, 1] \rightarrow M$ continua tal que $\vec{\alpha}(0) = \vec{x}$ y $\vec{\alpha}(1) = \vec{y}$.

Luego por la proposición 4.1.7. se sabe que los conjuntos

$$A = \{s \in [0, 1] : \vec{\alpha}(s) \in G\} \quad (4.1.8)$$

$$B = \{s \in [0, 1] : \vec{\alpha}(s) \in G \cap M^c\} \quad (4.1.9)$$

son conjuntos abiertos no vacíos y además $A \cap [0, 1]^c = B$ por lo tanto resulta entonces que

$$A \in AC([0, 1]). \quad (4.1.10)$$

Pero no solo eso, sabemos de antemano que $[0, 1] \in AC([0, 1])$ y $\emptyset \in AC([0, 1])$. Por lo tanto, se puede concluir que la cardinalidad de $AC([0, 1])$ es mayor estricto que dos lo cual nos está diciendo que el conjunto $[0, 1]$ no es conexo. Esto último es una contradicción ya que todos los intervalos son conjuntos conexos. La contradicción surgió de haber supuesto que el conjunto M no es conexo y por lo tanto se tiene que M tiene que ser conexo.

■_{4.1,9}

Es importante hacer notar que la proposición 4.1.9 solo dependió del primer punto de la definición 4.1.8. La propiedad 1 caracteriza a los conjuntos conocidos como “conexos por trayectorias” y por lo tanto los conjuntos que son simplemente conexos son un caso particular de estos. En general la proposición 4.1.9 es cierta si solo le pedimos al conjunto que sea conexo por trayectorias. Cabe mencionar que la recíproca de esta proposición no es cierta porque existen conjuntos que son conexos pero que no son conexos por trayectorias.

En general un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no necesariamente es conexo, sin embargo si el conjunto es no vacío éste tiene por lo menos un subconjunto que es conexo (por ejemplo el conjunto que posee un elemento que está en A) por lo cual se puede construir la siguiente relación \sim : $x \sim y$ si existe un subconjunto conexo

B tal que $x, y \in B$. Resulta que esta relación es una relación de equivalencia y por tanto genera clases de equivalencia:

$$[x] = \{y \in A : y \sim x\}. \quad (4.1.11)$$

A esta clase de equivalencia para esta relación se le conoce como *una componente conexa del conjunto* A puesto que en efecto es un conjunto conexo y esto lo demostraremos a continuación.

Proposición 4.1.10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y \sim la relación anteriormente definida. Si A_r es una de las clases de equivalencia inducidas por la relación \sim entonces A_r es un conjunto conexo.

Supongamos que A_r es inconexo, esto significa que si definimos $\tau_d \cap A_r = \{A_r \cap B : B \in \tau_d\}$ entonces existe un elemento $C \in \tau_d \cap A_r$ tal que $C^c \in \tau_d \cap A_r$, $C \neq A_r$ y $C \neq \emptyset$. Además, claramente $A_r = C \cup C^c (= [A_r \cap B_C] \cup [A_r \cap B_C^c] = A_r \cap [B_C \cup B_C^c] = A_r \cap \mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, si tomamos un elemento $x \in C$ y $y \in C^c$ entonces existe un conjunto conexo, digamos D tal que $x, y \in D$; es importante notar que $D \subseteq A_r$ pues si tomamos un elemento arbitrario $z \in D$, entonces $z \sim x$ porque D es conexo y por tanto $z \in [x] = D$. Además, también se puede notar que $D = [D \cap C] \cup [D \cap C^c] (= D \cap [C \cup C^c] = D \cap A_r)$, en donde claramente $D \cap C \neq \emptyset$ porque por lo menos x está ahí y $D \cap C \neq D$ por que $y \notin D \cap C$. No solo podemos afirmar lo anterior, si no que también podemos asegurar que $D \cap C \in \tau_d \cap D$; efectivamente, como $C = A_r \cap B_C$ se tiene que $D \cap C = D \cap A_r \cap B = D \cap B$. Pero esto último estaría contradiciendo el hecho de que D es conexo. La contradicción surgió de haber supuesto que A_r es inconexo y por tanto para evitar esta contradicción tenemos que asegurar siempre que A_r es conexo.

■_{4.1.10}

La topología general es una disciplina muy amplia y muchos de las proposiciones anteriores se pueden generalizar a espacios más abstractos, pero para este trabajo es suficiente con tener al alcance de la mano los teoremas y definiciones anteriormente descritos.

4.2. Elementos de Geometría Diferencial

La Geometría Diferencial es una disciplina muy útil en la física actual debido a que gran parte de la herramienta utilizada para describir a los sistemas físicos se deriva de esta rama de las matemáticas. En general, el desarrollo de la teoría depende mucho del cálculo diferencial e integral de varias variables e incluso se puede generalizar para espacios que cumplen ciertas condiciones topológicas. En este caso, el enfoque será el de la geometría diferencial básica y para desarrollar los temas será suficiente con el conocimiento básico del cálculo vectorial. Esta sección estará dividido en dos partes: la primera de ellas abordará las curvas en el espacio tridimensional y la segunda, estará dedicada a estudiar las curvas en una superficie y su curvatura; la finalidad de la primera parte es la de entender los elementos básicos de las curvas mientras que el objetivo de la segunda sección es la de comprender la curvatura geodésica y la curvatura gaussiana. Para el

desarrollo de estos temas se seguirá el libro “Geometry from a differentiable viewpoint” [60].

4.2.1. Teoría de curvas en el espacio.

Para poder hablar de curvas en el espacio tridimensional, primero tenemos que desarrollar el concepto de curva.

Definición 4.2.1. Una curva en el espacio tridimensional se define como una función $\vec{\alpha}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es continua en todo el intervalo y diferenciable en $[a, b] \setminus Q$ donde Q es una cantidad finita de puntos.

Notemos que una curva se puede expresar en su componentes x, y, z de la siguiente manera:

$$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (4.2.1)$$

y la derivada de esta curva es $\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$.

Tenemos que hacer ver que hacemos un abuso del lenguaje al decir que la función sea diferenciable, pues en estas notas (en realidad en la mayoría de los libros de Geometría diferencial) se está haciendo la suposición de que la función tiene derivadas de todos los ordenes. Aunque son detalles que se pueden omitir, siempre es sano tener un acuerdo a la hora de establecer las definiciones.

A partir de esto, se puede hacer la aproximación de la longitud de la curva. Para ello, supongamos que tenemos una curva tal que sea diferenciable en todos sus puntos. Además, notemos que dada una partición del intervalo $[a, b]$ digamos $P = \{a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tales que $a_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$ se puede definir la siguiente longitud (la cual depende de que tan fina se la partición):

$$l_P = \sum_{i=0}^{n-1} \|\vec{\alpha}(a_{j+1}) - \vec{\alpha}(a_j)\|. \quad (4.2.2)$$

Veamos que esta longitud también se puede expresar como:

$$l_P = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \frac{\vec{\alpha}(a_{j+1}) - \vec{\alpha}(a_j)}{a_{j+1} - a_j} \right\| (a_{j+1} - a_j) \quad (4.2.3)$$

por lo que si obtenemos el límite cuando n tiende a infinito, entonces se tiene una expresión en terminos de una integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \frac{\vec{\alpha}(a_{j+1}) - \vec{\alpha}(a_j)}{a_{j+1} - a_j} \right\| (a_{j+1} - a_j) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt \quad (4.2.4)$$

por lo tanto la longitud de una curva que es diferenciable en todos sus puntos queda bien definida por el número:

$$l = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt. \quad (4.2.5)$$

Con base en esto, se puede dar una definición de la longitud de arco de una curva.

Definición 4.2.2. Dada una curva en el espacio tridimensional $\vec{\alpha}(t)$ definida en el intervalo $[a, b]$ tal que no es diferenciable en los puntos $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ se define la longitud de arco como las siguientes sumas de integrales:

$$l = \int_a^{t_0} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \int_{t_n}^b \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt \quad (4.2.6)$$

de la misma manera también se puede definir el arco recorrido hasta el punto $\vec{\alpha}(\tau)$ donde $a_j \leq \tau \leq a_{j+1}$ de la siguiente manera:

$$l(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \dots + \int_{t_j}^{\tau} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt. \quad (4.2.7)$$

Con base en esta definición, se puede notar que dada una curva, el arco recorrido hasta el punto $\vec{\alpha}(\tau)$ es una función:

$$l(\tau) : [a, b] \longrightarrow [0, \infty) \quad (4.2.8)$$

creciente. Esto nos garantiza que la función debe ser inyectiva en el intervalo que está definida, por lo que debe existir una función inversa

$$t(\tau) : [0, L] \longrightarrow [a, b] \quad (4.2.9)$$

donde $L = l(b)$. A partir de esto, se puede dar la siguiente definición:

Definición 4.2.3. Dada una curva en el espacio tridimensional $\vec{\alpha}(t)$ definida en el intervalo $[a, b]$ se define la parametrización de arco de la curva como la función:

$$\vec{\alpha}(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.2.10)$$

en donde

$$s : [0, L] \longrightarrow [a, b] \quad (4.2.11)$$

está definida de la siguiente manera:

$$s = l(\tau_s) \quad (4.2.12)$$

Con éstas definiciones se puede obtener las siguiente conclusión:

Afirmación 4.2.4. Si una curva es parametrizada por longitud de arco, entonces derivada del vector es un vector unitario.

EFFECTIVAMENTE:

Dada una curva $\vec{\alpha}(s)$ parametrizada por longitud de arco, resulta que su derivada es:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \frac{d\vec{\alpha}}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{d\tau}} \frac{d\vec{\alpha}}{d\tau} \quad (4.2.13)$$

pero se tiene que:

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt + \dots + \int_{t_j}^{\tau} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) \right\| dt \right) \quad (4.2.14)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{d\tau}(\tau) \right\| \quad (4.2.15)$$

por lo tanto, al obtener la magnitud de $\frac{d\vec{\alpha}}{ds}$ entonces se tiene que:

$$\left\| \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \right\| = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{\alpha}}{d\tau}(\tau) \right\|} \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{d\tau} \right\| = 1 \quad (4.2.16)$$

quedando así justificada la demostración.

■_{4.2.4}

Con todos los ingredientes de este pequeño compendio de conceptos se puede dar la definición del aparato de Ferret-Serret.

Definición 4.2.5. Dada una curva parametrizada por longitud de arco, definimos los vectores $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{ds}$, $\vec{N}(s) = \frac{1}{\|\vec{T}'(s)\|} \vec{T}'(s)$ y $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ como los vectores tangente, normal y binormal, respectivamente. A su vez definimos las funciones $\kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|$ y $\tau(s) = \|\vec{B}'(s)\|$ como la curvatura y la torción de la curva, respectivamente.

A continuación empezaremos a estudiar las curvas sobre una superficie con el objetivo de definir la curvatura geodésica y posteriormente la curvatura gaussiana.

4.2.2. Teoría de curvas en superficies.

Para hablar de curvas en superficies, es necesario poder definir lo que es una superficie. Por ello, damos la siguiente definición del objeto en el que se estará estudiando.

Definición 4.2.8. Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^3 , entonces S es una superficie regular si para cada punto, \vec{p} sobre S , hay un conjunto abierto V de \mathbb{R}^3 y una función $\vec{x} : (U \subset \mathbb{R}^2) \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, donde U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , que satisfacen las siguientes condiciones:

- \vec{x} es diferenciable, es decir, si expresamos esta función en sus coordenadas $\vec{x}(\sigma_1, \sigma_2) = (x_1(\sigma_1, \sigma_2), x_2(\sigma_1, \sigma_2), x_3(\sigma_1, \sigma_2))$ entonces las funciones σ_i tiene derivadas de todos los ordenes
- \vec{x} es un homeomorfismo, es decir, \vec{x} es inyectiva y sobreyectiva en el conjunto $V \cap S$ y tiene una inversa $\vec{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que es continua
- La matriz Jacobiana:

$$J(\vec{x})(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1}(\sigma_1, \sigma_2) & \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_1}(\sigma_1, \sigma_2) & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \frac{\partial x_3}{\partial \sigma_1}(\sigma_1, \sigma_2) & \frac{\partial x_3}{\partial \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2) \end{pmatrix} \quad (4.2.17)$$

tiene rango 2. Esto significa que, para cada valor de $(\sigma_1, \sigma_2) \in U$, $J(\vec{x})(\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es un mapeo lineal, es inyectiva o equivalentemente $\ker(J(\vec{x})(\sigma_1, \sigma_2)) = \{\vec{0}\}$. Esta condición sobre \vec{x} es llamada regularidad, además la función $\vec{x} : U \rightarrow S$ se le conoce como carta coordenada.

A partir de esta definición se puede hablar de la orientación de la superficie y para ello daremos la siguiente definición:

Definición 4.2.9. Dada una superficie regular, decimos que es orientable si hay una colección de cartas coordenadas $A = \{x_\alpha : (U \subset \mathbb{R}^2) \rightarrow S\}$ tales que cubren a S es decir, $S = \cup_{x_\alpha \in A} x_\alpha(U_{x_\alpha})$ y si $\vec{p} \in S$ se encuentra en el traslape de dos cartas coordenadas $\vec{p} \in x_\alpha(U_{x_\alpha}) \cap x_\beta(U_{x_\beta})$ entonces el Jacobiano $J(x_\alpha^{-1} \circ x_\beta) \forall \alpha, \beta$ en el punto \vec{p} tiene determinante positivo.

Con base en esto se puede definir el vector normal a la superficie y este vector normal está completamente bien definido.

Definición 4.2.10. Dada una superficie S orientable y un punto $\vec{p} \in S$, entonces se define el vector normal a la superficie como el vector unitario

$$\vec{n}(\vec{p}) = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p})}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p}) \right\|}. \quad (4.2.18)$$

Es importante mencionar que el vector normal a la superficie depende siempre de una posición sobre la superficie, mientras que el vector normal a una curva depende de un parámetro escalar. Además, gracias a la definición de la orientabilidad, el vector $\vec{n}(\vec{p})$ está bien definido.

Con base en estas definiciones, se puede definir una curva sobre una superficie como la función

$$\vec{x}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) : [a, b] \rightarrow S \quad (4.2.19)$$

en donde \vec{x} es una carta coordenada sobre la superficie y

$$(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (4.2.20)$$

Veamos que la longitud de arco de esta curva es:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{x}(\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau))}{d\tau} \right\| d\tau \quad (4.2.21)$$

es fácil notar que s es una función creciente y diferenciable, por lo cuál tiene que ser inyectiva y su inversa $t(s)$ tiene que existir. En consecuencia, si tenemos una curva

$$\vec{\alpha}(t) \quad (4.2.22)$$

la parametrización por longitud de arco de esta curva sería:

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{\alpha}(t(s))$$

en este caso estamos definiendo $\vec{x}(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = \vec{\alpha}(t)$.

Definición 4.2.11. Dada una superficie regular y orientable S , definimos una curva sobre la superficie y parametrizada por longitud de arco como la función:

$$\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) : [0, L] \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.2.23)$$

donde

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{x}(\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau))}{d\tau} \right\| d\tau \quad (4.2.24)$$

en general denotaremos a una parametrización por longitud de arco como $\vec{x}(u(s), v(s))$.

Recordemos que el vector tangencial de una curva en el espacio \mathbb{R}^3 está definido como

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{x}}{ds}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \quad (4.2.25)$$

mientras que:

$$\kappa(s)\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \quad (4.2.26)$$

Veamos que en general siempre se puede definir una base ortonormal de la siguiente manera:

$$[\vec{T}(s), \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \times \vec{T}(s), \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)))] \quad (4.2.27)$$

en donde $n(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)))$ denota el vector normal a la superficie en el punto $\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))$ el cuál satisface

$$\vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \right\|}. \quad (4.2.28)$$

La ecuación (4.2.29) en efecto tiene que ser una base ortonormal ya que

$$\vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \times \vec{T}(s) \perp \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \quad (4.2.29)$$

$$\vec{n}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \times \vec{T}(s) \perp \vec{T}(s) \quad (4.2.30)$$

además vemos que

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{x}}{ds}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{ds} \quad (4.2.31)$$

y por lo tanto se tiene que

$$\vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \cdot T(s) = \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds} + \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{ds} = 0 \quad (4.2.32)$$

Como se cumple que los vectores en (4.2.29) es una base ortonormal, se tiene que:

$$\vec{T}'(s) = a_T \vec{T}(s) + a_{n \times T} \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \times \vec{T}(s) + a_n \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \quad (4.2.33)$$

y entonces tenemos que:

$$a_n = \vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \cdot \vec{T}'(s) \quad (4.2.34)$$

$$a_{n \times T} = (\vec{n}(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \times T(s)) \cdot T'(s) \quad (4.2.35)$$

$$a_T = 0 \quad (4.2.36)$$

Además, por la definición de curvatura de una curva, la ecuación (4.2.35), y la ortonormalidad, se tiene que:

$$\kappa^2(s) = (a_n)^2 + (a_{n \times T})^2 \quad (4.2.37)$$

Con base en estas observaciones enunciamos la siguiente definición.

Definición 4.2.12. Dada una superficie regular y orientable S y una curva sobre la superficie $\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))$ parametrizada por longitud de arco, definimos las curvaturas normal y geodésica como:

$$\kappa_n(s) = N(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \cdot \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \quad (4.2.38)$$

y

$$\kappa_g(s) = (N(\vec{x}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \times \frac{d\vec{x}}{ds}(\sigma_1(s), \sigma_2(s))) \cdot \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s)) \quad (4.2.39)$$

respectivamente. Además, dada la curvatura de la curva se tiene que satisfacer la siguiente igualdad:

$$\kappa^2(s) = \kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s) \quad (4.2.40)$$

En resumen, las curvas tienen asociada de manera natural una curvatura y esta curvatura se puede descomponer en dos partes: una curvatura normal y una curvatura geodésica.

4.2.3. Curvatura sobre superficies.

La curvatura en superficies es muy importante ya que nos permite hacer una clasificación de éstas y así saber la equivalencia entre superficies para poder obtener características en términos de superficies que ya se conocían. Para poder hacer un estudio pleno de las superficies siempre es importante definir la primera y la segunda forma fundamental como se muestra a continuación.

Definición 4.2.14. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y orientable. En esta superficie seleccionamos $\vec{x}(\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una carta coordenada y la evaluamos en un punto \vec{p} .

Por un lado a la matriz

$$I_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p}) \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p}) & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (4.2.41)$$

se le conoce como la primera forma fundamental. Por otro lado, si tenemos el vector normal a la superficie $\vec{n}(\vec{p}) = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p})}{\|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1}(\vec{p}) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}(\vec{p})\|}$ entonces se tiene que la segunda forma fundamental tiene que ser:

$$II_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{n}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \sigma_1^2}(\vec{p}) & \vec{n}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}(\vec{p}) \\ \vec{n}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}(\vec{p}) & \vec{n}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \sigma_2^2}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (4.2.42)$$

Además, definimos el tensor de curvatura como:

$$\overleftarrow{\kappa}(\vec{p}) = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad (4.2.43)$$

y consecuentemente definimos la curvatura gaussiana como

$$K(\vec{p}) = \det \overleftarrow{\kappa} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (4.2.44)$$

La definición 4.2.14. en realidad tiene una construcción y, por lo tanto, una explicación del por qué las definiciones son así. Sin embargo, no profundizaremos en este tema, ya que nos enfocaremos únicamente en enunciar el teorema de Gauss-Bonnet no sin antes definir los ángulos exteriores. Para terminar esta sección enunciamos sin demostración la siguiente proposición.

Proposición 4.2.15.

Sea una superficie S orientable con carta coordenada, supongamos $\vec{x}(\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$. Si su vector normal en un punto \vec{p} es $\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}}{|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}|}$ entonces la curvatura gaussiana se relaciona con este vector de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial \sigma_1} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial \sigma_2} = K \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}. \quad (4.2.45)$$

La demostración de esta proposición se puede encontrar en mismo libro de McCleary [60] o también la puede encontrar en “The Geometry of Physics: an introduction” [61].

4.3. La conexión entre la Geometría y la Topología.

La Topología y la Geometría son ramas de las matemáticas que están ligadas en varias maneras y a veces entablan una conexión tan fuerte que hay ciertas proposiciones en la Geometría que solo serían verdaderas si en la Topología lo son. Ejemplo de esto es el teorema de Gauss-Bonnet. Actualmente se puede decir que el teorema de Gauss-Bonnet es un teorema de dualidad, ya que ciertas propiedades geométricas implican propiedades topológicas y viceversa. Por lo tanto, enunciar este teorema y entenderlo es algo sumamente importante por sus implicaciones y, por su puesto, por sus posibles aplicaciones. Esta sección se basó utilizando el libro de John McCleary [60] sin embargo se utilizaron algunas ideas tomadas de la tesis “*El teorema de Gauss-Bonnet en variedades suaves*” [62].

Antes de abordar el teorema de Gauss-Bonnet, daremos una serie de definiciones.

Definición 4.3.1.

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y orientable. También definamos una curva parametrizada por longitud de arco $\vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u(s), v(s)) : [0, L] \rightarrow M$ en donde \vec{x} es una carta coordenada de M . Sean $\vec{\alpha}(s_1), \vec{\alpha}(s_2), \dots, \vec{\alpha}(s_n)$ los puntos en donde la función no es diferenciable, y definamos las siguientes funciones:

$$\vec{\alpha}_0(s) = \vec{\alpha}(s) : [0, s_1] \rightarrow M \quad (4.3.1)$$

$$\vec{\alpha}_{n+1}(s) = \vec{\alpha}(s) : [s_n, L] \rightarrow M \quad (4.3.2)$$

$$\vec{\alpha}_i(s) = \vec{\alpha}(s) : [s_{i-1}, s_i] \rightarrow M \quad (4.3.3)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

entonces definamos los ángulos exteriores como:

$$\cos \epsilon_i = \frac{d\vec{\alpha}_{j-1}(s_j)}{ds} \cdot \frac{d\vec{\alpha}_j(s_j)}{ds}. \quad (4.3.4)$$

Una vez que tenemos esta última definición podemos enunciar el tan ansiado teorema.

Teorema 4.3.2. (Gauss-Bonnet) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular y orientable, entonces si $R \subseteq S$ es una región simplemente conexa, compacta y su frontera está acotada por una curva cerrada $\vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u(s), v(s)) : [0, L] \rightarrow M$ cuyos puntos en donde no es diferenciable son $\vec{\alpha}(s_1), \vec{\alpha}(s_2), \dots, \vec{\alpha}(s_n)$ y sus ángulos exteriores de la curva son $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ entonces

$$2\pi = \int \int_R K(\vec{p}) dudv + \int_{\vec{\alpha}(s)} \kappa_g(s) ds + \sum_{i=1}^n \epsilon_i. \quad (4.3.5)$$

El lado derecho de esta ecuación nos da propiedades puramente geométricas mientras que el lado izquierdo aparece de manera implícita una propiedad topológica. Por ello, para poder hacer ver claro esa propiedad topológica, necesitamos dar una serie de definiciones importantes.

Definición 4.3.3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, orientable y compacta. El conjunto $\Delta \subset S$ es un triángulo si existe una carta coordenada $\vec{x} : T \rightarrow \Delta$ que es biyectiva y en donde $T \subset \mathbb{R}^2$ es un triángulo en el plano euclidiano orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj.

También decimos que S posee una triangulación

$$\mathcal{P} = \{\Delta_i \subset S : i = 1, \dots, m\} \quad (4.3.6)$$

si cumple las siguientes dos propiedades:

- $S = \cup_{i=1}^m \Delta_i$
- $\Delta_i \cap \Delta_j$ es igual vacío, igual a un vértice o bien igual a una curva para $i \neq j$.

Definición 4.3.4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, orientable, compacta y posee una triangulación \mathcal{P} . Al número total de vértices de la triangulación lo denotaremos como V , el número total de aristas lo denotaremos como A y el número total de caras lo denotaremos como C . De manera abstracta estos mismos números los definiremos así:

$$V = |\{\Delta_i \cap \Delta_j : |\Delta_i \cap \Delta_j| = 1\}| \quad (4.3.7)$$

$$A = |\{\Delta_i \cap \Delta_j : |\Delta_i \cap \Delta_j| > 1 \wedge \iint_{\Delta_i \cap \Delta_j} dA = 0\}| \quad (4.3.8)$$

$$C = |\mathcal{P}| \quad (4.3.9)$$

entonces con base esto definimos la característica de Euler-Poincaré de la superficie S y triangulación \mathcal{P} como:

$$\chi_{\mathcal{P}}(S) = V - A + C. \quad (4.3.10)$$

A partir de estas definiciones enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.5. (Gauss-Bonnet para superficies compactas sin frontera) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, orientable, compacta, sin frontera y con triangulación \mathcal{P} , entonces se satisface la siguiente igualdad.

$$2\pi\chi_{\mathcal{P}}(S) = \iint_S K dA \quad (4.3.11)$$

DEMOSTRACIÓN:

De la definición de la triangulación, cada triángulo contribuye con tres aristas y cada arista es compartida con dos triángulos. Por lo tanto $3C = 2A$. Si

aplicamos a cada triángulo el teorema de Gauss-Bonnet entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$\iint_S K dA = \sum_{i=1}^C \iint_{\Delta_i} K dA = 2\pi C - \sum_{i=1}^C \iint_{\partial\Delta_i} \kappa_g(s) ds - \sum_{i=1}^C \epsilon_{1i} + \epsilon_{2i} + \epsilon_{3i} \quad (4.3.12)$$

Luego la suma $\sum_{i=1}^C \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g(s) ds$ debe anularse debido a que los Δ_i están todos orientados en el mismo sentido y las curvas adyacentes se anulan. Además se tiene que los ángulos exteriores se relacionan con los ángulos interiores I_{jk} de la siguiente forma: $\sum_{i=1}^C \epsilon_{1i} + \epsilon_{2i} + \epsilon_{3i} = \sum_{i=1}^C 3\pi - (I_{1i} + I_{2i} + I_{3i})$.

Por lo tanto

$$\iint_S K dA = -\pi C + \sum_{i=1}^C I_{1i} + I_{2i} + I_{3i} \quad (4.3.13)$$

Ahora si nosotros sumamos todos los ángulos interiores, entonces esta suma debe de ser proporcional 2π por el número de vértices, por lo tanto se tiene que:

$$\sum_{i=1}^C I_{1i} + I_{2i} + I_{3i} = 2\pi V \quad (4.3.14)$$

consecuentemente se sigue que:

$$\iint_S K dA = -\pi C + 2\pi V \quad (4.3.15)$$

pero como $3C = 2A$ entonces se tiene que $\pi(3C - 2A) = 0$ y de esta manera se puede concluir que:

$$\iint_S K dA = -\pi C + 2\pi V + \pi(3C - 2A) = 2\pi(V - A + C) = 2\pi\chi_P(S) \quad (4.3.16)$$

■_{4,3,5}

Corolario 4.3.6. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, orientable, compacta y sin frontera. Si \mathcal{P} y \mathcal{P}' son dos triangulaciones de S entonces

$$\chi_P(S) = \chi_{P'}(S). \quad (4.3.17)$$

Para concluir vamos a enunciar la generalización del teorema 4.3.2.

Teorema 4.3.7. (Gauss-Bonnet generalizado) Sea $R \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular y orientable, entonces si R es conexa y su frontera se puede parametrizar con una curva cerrada $\vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u(s), v(s)) : [0, L] \rightarrow M$ cuyos puntos en donde no es diferenciable son $\vec{\alpha}(s_1), \vec{\alpha}(s_2), \dots, \vec{\alpha}(s_n)$ y sus ángulos exteriores de la curva son $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ entonces

$$2\pi\chi(R) = \iint_R K(\vec{p}) du dv + \int_{\vec{\alpha}(s)} \kappa_g(s) ds + \sum_{i=1}^n \epsilon_i. \quad (4.3.18)$$

*CAPÍTULO 4. ASPECTOS DE TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA DIFERENCIAL*56

Como habíamos mencionado, el teorema de Gauss-Bonnet es un teorema de dualidad ya que relaciona una propiedad puramente topológica, que es la característica de Euler-Poincaré, con propiedades puramente geométricas como es la curvatura. La ecuación (4.3.18) nos dice que la curvatura total de una superficie siempre estará determinada por la característica de Euler.

Hasta este punto se ha profundizado lo necesario en el contexto de Topología y Geometría Diferencial para poder resolver por qué al aplicar la fórmula de la carga del Skyrmión tiene valores no enteros y este será finalmente el objetivo del siguiente capítulo.

Capítulo 5

La carga topológica del Skyrmión

5.1. Cálculo de la carga del Skyrmión.

Cuando hay un campo de Skyrme como el obtenido a través de las soluciones estacionarias de la ecuación de Gross-Pitaevskii bidimensional y de pseudo-spin $\frac{1}{2}$, éste puede tomar distintas configuraciones sobre el plano en el que está definido. Por ejemplo, el campo de Skyrme puede ser constante:

$$\vec{f}(x, y) = \hat{z}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.1.1)$$

En este caso, el campo \vec{f} está funcionando como un vector normal al plano y, por lo tanto, este vector normal nos puede brindar información acerca de la curvatura del plano.

Ahora, supongamos que al plano lo transformamos de cierta manera tal que éste se curve. Esto conlleva a que el vector normal a la superficie cambie en dirección o en sentido pero no en magnitud (vease la figura 5.1.1). Si utilizamos nuestro pensamiento abstracto, los puntos sobre el plano transformado no cambian de coordenadas y en realidad lo único que cambió fue la dirección del campo normal. Por ello, al momento de definir el campo de Skyrme en todo el plano, se puede pensar que estamos induciendo una topología $\tau_{\vec{f}}$ sobre \mathbb{R}^2 tal que el nuevo espacio topológico tiene una curvatura no trivial. Supongamos inicialmente que existe esa topología $\tau_{\vec{f}}$. Si utilizamos este supuesto entonces definamos al espacio topológico (ó superficie):

$$M_{\vec{f}}^2 \equiv (\mathbb{R}^2, \tau_{\vec{f}}). \quad (5.1.2)$$

Es claro que el proceso de asignar un vector normal unitario en cada punto del plano no puede definir una única superficie que tenga ese campo normal. Un ejemplo de esto es la esfera. Uno puede definir esferas de distintos radios que son distintas entre sí, sin embargo cada una de estas esferas tienen el mismo

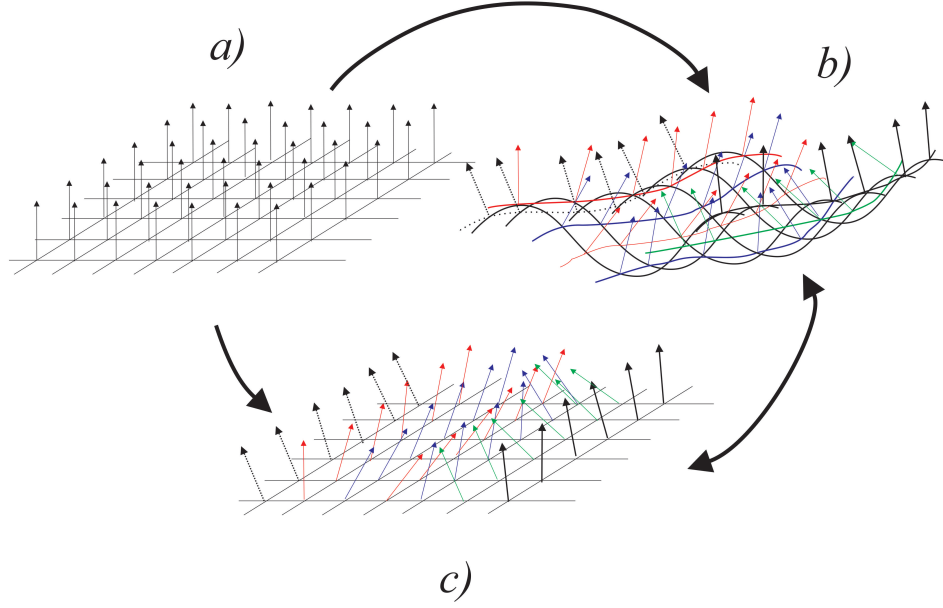


Figura 5.1.1: Deformar el plano *a)* como en el inciso *b)* sería equivalente a solo modificar la dirección y/o al campo tal como se ilustra en el inciso *c)*.

vector normal. A pesar de esta problemática, las superficies tienen que ser equivalentes bajo ciertos tipos de transformaciones y por ello el símbolo $M_{\vec{f}}^2$ estaría representando a todas las superficies que tienen como vector normal el campo \vec{f} .

El objetivo que nos planteamos a continuación es de dar las condiciones suficientes para construir $M_{\vec{f}}^2$ y calcular su característica de Euler-Poincaré utilizando únicamente la información del campo \vec{f} y así posteriormente definir la carga del Skyrmión en términos de ese valor.

Conjetura.

Supongamos que $\vec{f}(\rho, \varphi) = (f_1(\rho, \varphi), f_2(\rho, \varphi), f_3(\rho, \varphi))$ es una función continua en donde $\rho^2 = x^2 + y^2$ y $\cos \varphi = \frac{x^2}{|x|\rho}$, tal que:

1. Tiene parciales continuas excepto en $N \subset \mathbb{R}^2$ donde $\iint_N dx dy = 0$.
2. El campo tiene norma uno en todo el espacio: $\vec{f} \cdot \vec{f} = 1, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$.
3. La frontera

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{f}(t) = \vec{f}_\infty(t) = \hat{x} \sin \theta(t) \cos \varphi(t) + \hat{y} \sin \theta(t) \sin \varphi(t) + \hat{z} \cos \theta(t) = \vec{\alpha}(t) \quad (5.1.3)$$

es una curva suave a pedazos y con φ_n los puntos donde la derivada es discontinua de forma tal que:

$$\cos \epsilon_n = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}|_{\varphi_n+\delta}}{\|\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}|_{\varphi_n+\delta}\|} \cdot \frac{\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}|_{\varphi_n-\delta}}{\|\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}|_{\varphi_n-\delta}\|}, \quad (5.1.4)$$

donde ϵ_n son los ángulos exteriores de la curva medidos en el sentido antihorario.

En consecuencia, si $\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} \neq \vec{0}$ para algún punto en $\mathbb{R}^2 \setminus N$ entonces existe un espacio topológico $M_{\vec{f}}^2$ (como se definió en 5.1.2) cuya característica de Euler-Poincaré es:

$$2\pi\chi(M_{\vec{f}}^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} dx dy + \oint \frac{\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds})}{\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}} ds + \sum_n \epsilon_n. \quad (5.1.5)$$

Demostración:

La prueba que ofreceremos estará dividida en cinco partes. La primera de ellas consistirá en construir regiones conexas en donde el campo de Skyrme es localmente inyectivo. La segunda parte consistirá en dar una partición para cada componente conexa, de forma tal que el campo de Skyrme, visto como un mapeo del plano a la esfera, sea inyectivo en cada elemento de la partición. En la tercera parte, se aplicará el teorema de Gauss-Bonnet a cada elemento de la partición anteriormente mencionada. En la cuarta parte de la prueba, construiremos una métrica sobre cada componente conexa de manera tal que nos genere un espacio topológico que sea localmente igual a la esfera pero que tenga propiedades que nos ayuden a construir a $M_{\vec{f}}^2$. Finalmente, en la quinta parte se procederá a obtener la característica de Euler-Poincaré de este espacio topológico.

Construcción de las componentes conexas.

Por hipótesis, pedimos que $N \subset \mathbb{R}^2$ sea tal que $\iint_N dx dy = 0$ y este satisface que las parciales de \vec{f} son continuas en todo $E^2 = \mathbb{R}^2 \setminus N$. Debido a que el campo \vec{f} está normalizado en todo el espacio, podemos usar la proyección estereográfica para saber en qué regiones el campo de Skyrme es localmente inyectivo. Los mapeos que funcionan como cartas coordenadas sobre la esfera son [63]:

$$\vec{S}_S(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, -\frac{y}{1-z} \right), \quad (5.1.6)$$

para el hemisferio sur, y

$$\vec{S}_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \quad (5.1.7)$$

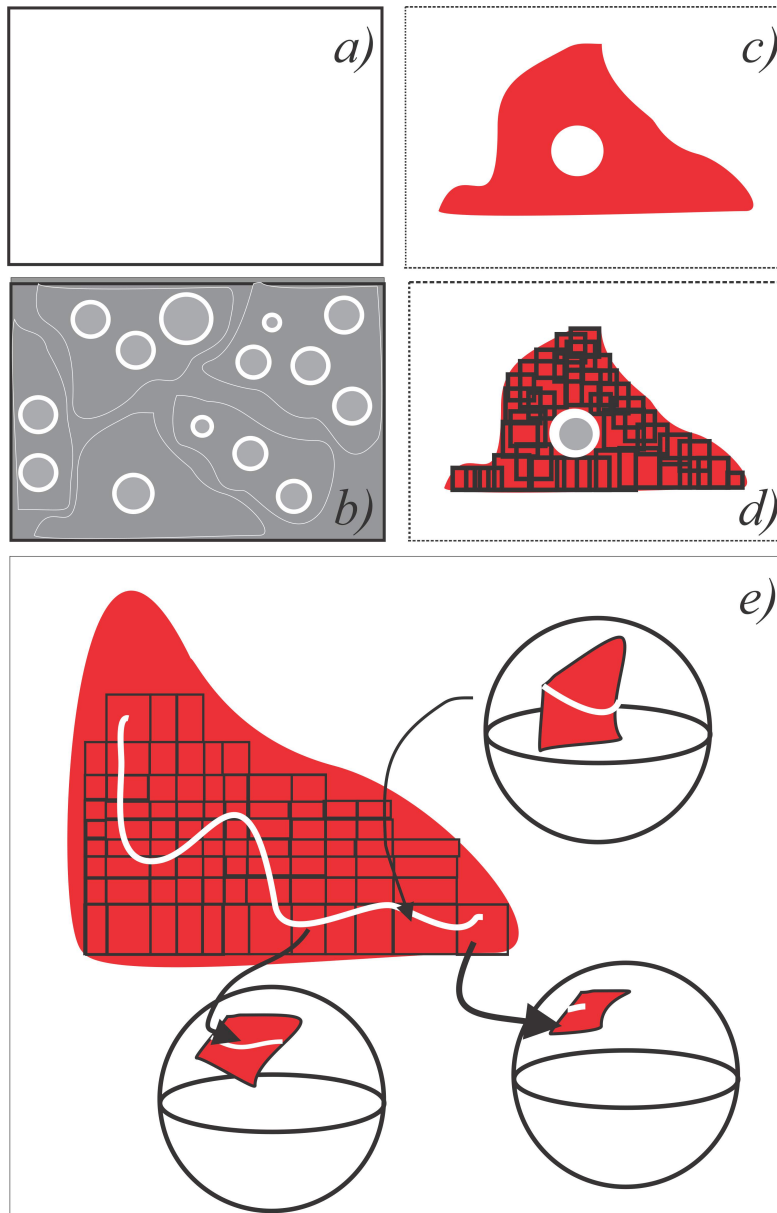


Figura 5.1.2: En el inciso *a)* se muestra el plano en donde se encuentra el Skyrmion. En *b)* se muestran las regiones en color gris que representan los puntos en donde el producto cruz de las parciales es distinta de cero. Mientras que las de color blanco son aquellas regiones en donde el producto cruz de las parciales es igual a cero. En *c)* se muestra una sola componente conexas tomada de las regiones de color gris. En *d)* se ejemplifica que las componentes conexas se pueden particionar y finalmente en *e)* se ilustra que en cada elemento de partición se aplica el teorema de Gauss-Bonnet y se induce una forma de medir longitudes de curva usando la métrica de la esfera.

para el hemisferio norte. Utilizando esto, definamos para cada punto $\vec{x} \in E^2$ la siguiente función:

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{cases} St_N(\vec{f}(\vec{x})) & \text{si } f_3(\vec{x}) \geq 0 \\ St_S(\vec{f}(\vec{x})) & \text{si } f_3(\vec{x}) < 0 \end{cases} \quad (5.1.8)$$

Nos interesa saber el valor del jacobiano, de la función \vec{g} , en cada punto del plano. Por ello, procederemos a calcularlo.

Si calculamos la derivada de \vec{g} veamos que:

$$D(\vec{g})|_{\vec{x}} = \frac{1}{(1 \pm f_3)^2} \begin{pmatrix} (1 \pm f_3) \frac{\partial f_1}{\partial x} \mp f_1 \frac{\partial f_3}{\partial x} & (1 \pm f_3) \frac{\partial f_1}{\partial y} \mp f_1 \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ (1 \pm f_3) \frac{\partial f_2}{\partial x} \mp f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x} & (1 \pm f_3) \frac{\partial f_2}{\partial y} \mp f_2 \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.1.9)$$

posteriormente, calculamos el determinante de la derivada:

$$\det(D(\vec{g})|_{\vec{x}}) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{(1 \pm f_3)^2} \pm \frac{f_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}}{(1 \pm f_3)^3} \quad (5.1.10)$$

que si utilizamos la identidad

$$f_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} \quad (5.1.11)$$

se tiene entonces

$$\det(D(\vec{g})|_{\vec{x}}) = \frac{(\vec{f} \pm \hat{z}) \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}}{(1 \pm f_3)^3}. \quad (5.1.12)$$

Debido a que el campo \vec{f} está normalizado en todo punto, se sigue entonces que:

$$\vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} = 0 \quad \vec{f} \cdot \partial_y \vec{f} = 0. \quad (5.1.13)$$

Lo que indica que el campo \vec{f} tiene que ser paralelo a $\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}$ y entonces tiene que existir un constante $c_0 \in \{-1, 1\}$ tal que

$$c_0 \vec{f} \|\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}\| = \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}, \quad (5.1.14)$$

por lo tanto:

$$\det(D(\vec{g})|_{\vec{x}}) = \mp c_0 \|\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}\| \frac{(\vec{f} \pm \hat{z}) \cdot \vec{f}}{(1 \pm f_3)^3} = \mp c_0 \|\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}\| \frac{1 \pm f_z}{(1 \pm f_3)^3} \quad (5.1.15)$$

que si observamos $c_0 \|\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}\| = \vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}$ se obtiene

$$\det(D(\vec{g})|_{\vec{x}}) = \mp \frac{\vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}}{(1 \pm f_z)^2}. \quad (5.1.16)$$

Utilizando este resultado, supongamos primero que

$$\det(D(\vec{g})|_{\vec{x}}) = 0, \forall \vec{x} \in E^2 \quad (5.1.17)$$

entonces

$$\|\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}\| = 0, \forall \vec{x} \in E^2. \quad (5.1.18)$$

Por lo tanto, se cumple

$$0 = \iint dx dy \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \oint \frac{\vec{f}_\infty \cdot (\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \times \frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2})}{\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}} ds \quad (5.1.19)$$

Sin embargo, nosotros por hipótesis supusimos que $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \neq \vec{0}$ para algún E^2 . Por lo cuál, necesariamente

$$\exists \vec{x}_0 \in E^2 \quad | \quad \det(D(\vec{g})|_{\vec{x}_0}) \neq 0. \quad (5.1.20)$$

Por continuidad, tanto de las derivadas parciales de \vec{f} así como de la proyección estereográfica, existe un disco de radio $\epsilon_{\vec{x}_0}$

$$\mathcal{B}_{\epsilon_{\vec{x}_0}}(\vec{x}_0) = \{\vec{y} \in E^2 : \|\vec{x}_0 - \vec{y}\| < \epsilon_{\vec{x}_0}\} \quad (5.1.21)$$

tal que

$$\det(D(\vec{g})|_{\vec{z}}) \neq 0, \quad \forall \vec{z} \in \mathcal{B}_{\epsilon_{\vec{x}_0}}(\vec{x}_0). \quad (5.1.22)$$

Por lo tanto, el conjunto:

$$\mathcal{R} = \{\vec{z} \in E^2 : \det(D(\vec{g})|_{\vec{z}}) \neq 0\} \quad (5.1.23)$$

es un conjunto no vacío y abierto en la topología euclidiana (gracias a la continuidad de las parciales). El conjunto \mathcal{R} tiene componentes conexas (vea la ecuación 4.1.12 y la definición 4.1.10), que también son conjuntos abiertos en la topología euclidiana. Debido a que las componentes conexas son conjuntos abiertos, estos conjuntos necesariamente tienen que ser arconexos [64]. Además, debido a que las componentes conexas también son ajenas dos a dos y debido a que el espacio topológico E^2 es separable (vea el tercer punto de la definición 4.1.6) entonces, a lo más, existe una cantidad numerable de componentes conexas de \mathcal{R} a las cuales denotaremos como:

$$R_1, R_2, R_3, R_4, \dots \quad (5.1.24)$$

Estas componentes conexas pueden representarse como lqs figuras de color gris que se muestran en la figura 5.1.2 b). Entonces a continuación tomaremos una de las componentes conexas de manera arbitraria y la “cuadricularemos” en regiones que tengan un comportamiento ideal para poder aplicar el teorema de Gauss-Bonnet.

Cuadrículando las componentes conexas.

Seleccionemos de manera arbitraria una de las componentes conexas de la región \mathcal{R} , a la cual la denotaremos como R_i . Esta componente podría estar representado como lo que se muestra en la figura 5.1.2 c). Dado que R_i es un conjunto abierto (de la topología euclidiana) y debido a la manera en cómo se construyeron las componentes conexas, para cada $\vec{x} \in R_i$ existe un $\epsilon_{\vec{x}} > 0$ tal que $\mathcal{B}_{\epsilon_{\vec{x}}}(\vec{x}) \subseteq R_i$ pero no solo eso, si no que gracias el teorema de la función inversa [65] y la biyectividad de la proyección estereográfica, existe un $\eta_{\vec{x}} > 0$ tal que \vec{f} es inyectiva en $\mathcal{B}_{\eta_{\vec{x}}}(\vec{x})$.

Con base en lo anterior, definimos $\delta_{\vec{x}} = \min\{\epsilon_{\vec{x}}, \eta_{\vec{x}}\}$ y por lo tanto tendremos una cubierta abierta de todo R_i ; es decir:

$$R_i = \cup_{\vec{x} \in R_i} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}}}(\vec{x}) \quad (5.1.25)$$

como $R_i \subseteq \mathbb{R}^2$ es un subconjunto del plano y es conjunto abierto, entonces R_i es separable y, además, esto implica que el espacio es Lindelöf. Esto último significa que existen $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots$ en \mathbb{R}^2 tales que:

$$R_i = \cup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_j}}(\vec{x}_j). \quad (5.1.26)$$

Aunque típicamente las bolas abiertas euclidianas en \mathbb{R}^2 son círculos, en general pueden tomar otra forma. Por ejemplo, pueden ser rectángulos tal y como se muestra en la figura 5.1.2 d). Con base en (5.1.26) esto definamos

$$C_1^i = \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_1}}(\vec{x}_1) \quad (5.1.27)$$

y para $n > 1$

$$C_n^i = \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_n}}(\vec{x}_n) - \cup_{j=1}^{n-1} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_j}}(\vec{x}_j). \quad (5.1.28)$$

Por un lado, veamos que si tomamos un elemento $\vec{x} \in R_i$, entonces significa que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\vec{x} \in \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_m}}(\vec{x}_m), \quad (5.1.29)$$

posteriormente escojamos el $m_0 \in \mathbb{N}$ más pequeño que satisfaga la ecuación 5.1.29. Esto significa entonces que

$$\vec{x} \in \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_{m_0}}}(\vec{x}) - \cup_{j=1}^{m_0-1} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_j}}(\vec{x}_j) = C_{m_0}^i \quad (5.1.30)$$

y con esto se puede deducir que:

$$R_i \subseteq \cup_{k \in \mathbb{N}} C_k^i. \quad (5.1.31)$$

Luego notemos que

$$C_n^i \subseteq \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_n}}(\vec{x}_n) \subseteq R_i \quad (5.1.32)$$

y por lo tanto concluimos

$$R_i = \cup_{k \in \mathbb{N}} C_k^i. \quad (5.1.33)$$

Por otro lado, supongamos que $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m < n$. Entonces

$$\begin{aligned} C_m^i \cap C_n^i &= (\mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_m}}(\vec{x}) - \cup_{j=1}^{m-1} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_j}}(\vec{x}_j)) \cap (\mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_n}}(\vec{x}) - \cup_{j=1}^{n-1} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_j}}(\vec{x}_j)) \\ &= \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_m}}(\vec{x}) \cap \left(\cap_{j=1}^{m-1} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_j}}(\vec{x}_j) \right) \cap \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_n}}(\vec{x}) \cap \left(\cap_{j=1}^{n-1} \mathcal{B}_{\delta_{\vec{x}_j}}(\vec{x}_j) \right) \\ &= \emptyset. \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

Con base a estas conclusiones, definamos:

$$C_k^i = C_k^i \cup \partial C_k^i \quad (5.1.35)$$

y con base en las anteriores descripciones es claro que las siguientes igualdades son ciertas

$$R_i = \cup_{k \in \mathbb{N}} C_k^i \quad (5.1.36)$$

$$\text{int}(C_n^i) \cap \text{int}(C_m^i) = \emptyset \quad (5.1.37)$$

esta última para $n \neq m$.

A partir de todo esto, se puede concluir que los conjuntos C_m^i (con $m \in \mathbb{N}$) son cerrados y acotados, sus interiores son ajenos dos a dos, el campo \vec{f} es inyectiva en cada uno de ellos y la unión de todos estos elementos es igual a la componente conexa R_i . Por simplicidad a estos conjuntos los denotaremos C_j^i y en la siguiente sección utilizaremos estos conjuntos para aplicar a cada uno de ellos el teorema de Gauss-Bonnet.

Aplicando el Teorema de Gauss-Bonnet.

Resumiendo lo anterior, para cada componente conexa R_i existe una colección numerable de conjuntos C_j^i que son cerrados y acotados y en donde el campo \vec{f} es inyectivo en cada uno ellos; además, los interiores de cada conjunto son ajenos dos a dos ($\text{int}C_j^i \cap \text{int}C_m^i = \emptyset$ para $m \neq n$) y la componente conexa es igual a la unión de todos ellos

$$R_i = \cup_j C_j^i. \quad (5.1.38)$$

Tomemos un elemento de la colección C_j^i de manera arbitraria. Nuestro objetivo será aplicar el teorema de Gauss-Bonnet a cada uno de estos conjuntos y posteriormente sumar las características de Euler. Por ello, se tiene que calcular la curvatura gaussiana, la curvatura geodésica y los ángulos exteriores de la frontera.

En general, si $\vec{w}(x, y) : C_j^i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva y sus derivadas son continuas, entonces \vec{w} es una carta coordenada. Si tomamos un punto \vec{p} en C_j^i ,

entonces el vector normal a la superficie parametrizada por \vec{w} en el punto $\vec{w}(\vec{p})$ tiene que ser:

$$\vec{n}(\vec{p}) = \frac{\frac{\partial \vec{w}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{w}}{\partial y}|_{\vec{p}}}{\left\| \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{w}}{\partial y}|_{\vec{p}} \right\|}, \quad (5.1.39)$$

además, se sabe que el vector normal se relaciona con $K(\vec{p})$, la curvatura gaussiana, (proposición 4.2.15) mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y}|_{\vec{p}} = K(\vec{p}) \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{w}}{\partial y}|_{\vec{p}} \quad (5.1.40)$$

Entonces, por un lado, debido a la construcción de C_j^i , \vec{f} es inyectiva en este conjunto. Si además consideramos que el campo de Skyrme tiene parciales continuas entonces \vec{f} es una carta coordenada. Con base en lo anterior, las ecuaciones (5.1.39) y (5.1.40) se transforman en:

$$\vec{n}(\vec{p}) = \frac{\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}|_{\vec{p}}}{\left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}|_{\vec{p}} \right\|} \quad (5.1.41)$$

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y}|_{\vec{p}} = K(\vec{p}) \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}|_{\vec{p}} \quad (5.1.42)$$

ahora, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por el vector normal, se tiene que

$$\vec{n}(\vec{p}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y}|_{\vec{p}} \right) = K(\vec{p}) \vec{n}(\vec{p}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}|_{\vec{p}} \right) = K(\vec{p}) \left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}|_{\vec{p}} \right\| \quad (5.1.43)$$

y a partir de esta ecuación se prosigue a realizar la integral sobre C_j^i :

$$\iint_{C_j^i} \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} dx dy = \iint_{C_j^i} K \left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}|_{\vec{p}} \right\| dx dy. \quad (5.1.44)$$

Como \vec{f} es inyectiva y es diferenciable, entonces $\left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}|_{\vec{p}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}|_{\vec{p}} \right\| dx dy = dA$ en donde dA es el diferencial de área de la superficie (de la esfera S^2) y, por lo tanto, tenemos que la integral de la curvatura gaussiana tiene que ser:

$$\iint_{\vec{f}(C_j^i)} K dA = \iint_{C_j^i} \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} dx dy \quad (5.1.45)$$

Por hipótesis, \vec{f} está normalizada en todo el espacio, particularmente tiene que estar normalizada en C_j^i

$$\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x}) = 1 \quad \forall \vec{x} \in C_j^i \quad (5.1.46)$$

Si recordamos la ecuación (5.1.13) y utilizamos la definición del vector normal, implica que existe un constante $e_{i,j} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$e_{i,j} \vec{f} = \vec{n}, \forall \vec{x} \in C_j^i \quad (5.1.47)$$

y dado que \vec{f} y \vec{n} están normalizados, se tiene entonces que:

$$e_{i,j} = \pm 1 \quad (5.1.48)$$

El signo de la ecuación (5.1.48) depende de la orientación que le estemos dotando a la superficie (en este caso el pedazo de esfera que es imagen de C_j^i bajo \vec{f}); por lo tanto nosotros introducimos una orientación a C_j^i de forma tal que el vector \vec{f} es el vector normal a la superficie; es decir $e_{i,j} = 1 \forall i, j \in \mathbb{N}$. Por lo que si sustituimos la ecuación (5.1.47) en (5.1.45) con una orientación tal que $e_{i,j} = 1$, entonces obtenemos:

$$\iint_{C_j^i} K dA = \iint_{C_j^i} \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} dx dy = \iint_{C_j^i} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy \quad (5.1.49)$$

y así hemos expresado la curvatura gaussiana en términos de \vec{f} .

Ahora supongamos que hemos parametrizado la frontera de C_j^i [66] mediante la curva $\vec{\gamma}_{i,j}(t) : [0, 1] \rightarrow \partial C_j^i \subseteq \mathbb{R}^2$ (que en general es suave a pedazos), por consiguiente si utilizamos el hecho de que \vec{f} es un encaje entonces la curvatura geodésica de la frontera tiene que ser igual a:

$$k_g(s) = \vec{n} \cdot \left[\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(s))}{ds} \times \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(s))}{ds^2} \right] \quad (5.1.50)$$

en donde $\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(s))$ es una curva que está parametrizada por longitud de arco $s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d}{dt} \vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(\tau)) \right\| d\tau$. Por lo tanto, tenemos que las derivadas son:

$$\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(s))}{ds} = \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (5.1.51)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(s))}{ds^2} &= \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{ds dt} \frac{dt}{ds} + \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \\ &= \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt^2} \left[\frac{dt}{ds} \right]^2 + \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

Si calculamos el producto cruz entre (5.1.51) y (5.1.52) se obtiene:

$$\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(s))}{ds} \times \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(s))}{ds^2} = \left[\frac{dt}{ds} \right]^2 \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt^2} \frac{dt}{ds} \quad (5.1.53)$$

por lo que se puede decir que la curvatura geodésica se puede expresar de la siguiente forma:

$$k_g(s) = \left[\frac{dt}{ds} \right]^2 \vec{n} \cdot \left[\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt^2} \right] \frac{dt}{ds} \quad (5.1.54)$$

y entonces si obtenemos la integral de línea de la curvatura geodésica se tiene que:

$$\oint_{\partial C_j^i} k_g(s) ds = \oint_{\partial C_j^i} \left[\frac{dt}{ds} \right]^2 \vec{n} \cdot \left[\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt^2} \right] \frac{dt}{ds} ds. \quad (5.1.55)$$

A la ecuación (5.1.55) se le hace el cambio de variable $\frac{dt}{ds} ds = dt$ y se sustituye la ecuación (5.1.47) con la orientación acordada ($e_{i,j} = 1$) y sabiendo que

$$\left[\frac{dt}{ds} \right]^2 = \left(\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \right)^{-1} \quad (5.1.56)$$

se puede concluir que la integral de línea de la curvatura geodésica tiene que ser:

$$\oint_{\partial C_j^i} \frac{\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t)) \cdot \left[\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt}} dt. \quad (5.1.57)$$

Finalmente, si $\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))$ no tiene derivadas continuas en $\phi_{i,j,k} \in (0, 1)$ y aplicamos el teorema de Gauss-Bonnet a la imagen de C_j^i bajo \vec{f} , que la nombraremos como $D_j^i (\subseteq S^2)$, entonces la característica de Euler-Poincaré es:

$$2\pi\chi(D_j^i) = \iint_{C_j^i} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy \quad (5.1.58)$$

$$\oint_{\partial C_j^i} \frac{\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t)) \cdot \left[\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt}} dt + \sum_{k=1}^{l_j} \eta_{i,j,k}$$

en donde

$$\cos \eta_{i,j,k} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \Big|_{\phi_{i,j,k} + \delta}}{\left\| \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t))}{dt} \Big|_{\phi_{i,j,k} + \delta} \right\|} \cdot \frac{\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t-\delta))}{dt} \Big|_{\phi_{i,j,k} - \delta}}{\left\| \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}_{i,j}(t-\delta))}{dt} \Big|_{\phi_{i,j,k} - \delta} \right\|}. \quad (5.1.59)$$

Por lo que si hacemos la suma sobre todos los $j \in \mathbb{N}$ se obtiene entonces que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (2\pi\chi(D_j^i) - \sum_{k=1}^{l_j} \eta_{i,j,k}) = \iint_{R_i} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \sum_{j=1}^{\infty} \oint_{\partial C_j^i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \quad (5.1.60)$$

La serie del lado izquierdo de la ecuación (5.1.60) converge porque el lado derecho converge, sin embargo no se sabe que naturaleza tiene el lado izquierdo. En otras palabras, queremos saber a que cantidad converge el lado izquierdo y por ello desarrollaremos la siguiente sección.

La métrica inducida sobre cada componente conexa.

Si nosotros observamos la solución estacionaria de la ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$, a la cuál se le introdujo un campo magnético cuadrupolar

$$\vec{B} = ((x-1)^2 - (y-1)^2)\hat{x} + 2(x-1)(y-1)\hat{y}$$

(vea las soluciones que se ilustran en la figura 5.1.3 *e*) y *f*); aquí se muestra las dos componentes del spinor), se puede probar que, para este caso, solo existe una única componente conexa R_1 en la cual la textura de spín \vec{f} es localmente inyectiva (en la figura 5.1.3 *d*) se muestra la fase de la componente *f*); si se utiliza la simetría azimutal en torno al vórtice y la fase de la componente *f*) se puede demostrar que el plano siempre se puede partir en dos regiones en donde el campo \vec{f} es inyectivo de manera independiente). Para el caso mostrado en las figuras 5.1.3 *g*), *h*) e *i*) se cumple que $\vec{f}(1,1) = -1$, por lo cual si se propone obtener la gráfica

$$\left\{ \left(\frac{f_x(x,y)}{1-f_z(x,y)}, \frac{f_y(x,y)}{1-f_z(x,y)}, x \right) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

resulta ser una superficie de Riemann (las figuras 5.1.3 *a*), *b*) y *c*) ilustran los diferentes perfiles de la superficie de Riemann asociada al campo de Skyrme mostrado en las figuras 5.1.3 *g*), *h*) e *i*) que provienen de una solución estacionaria de la ecuación GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ con un campo magnético cuadrupolar). Esto nos motiva a pensar que cada componente conexa debe tener una superficie de Riemann, por ello planeamos utilizar el campo de Skyrme para obtener toda la caracterización de esta superficie mediante la construcción de la métrica; esta es la razón del nombre de esta sección y a continuación desarrollaremos las técnicas usuales para construir la métrica de una superficie de Riemann.

Seleccionemos una curva $\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C_i^j$. Entonces se puede dibujar una curva sobre la esfera utilizando el campo \vec{f} , la cuál es $\vec{f}(\vec{\gamma}(t))$. Si nosotros queremos medir la longitud de esta última, primero se debe calcular:

$$ds^2 = d\vec{f} \cdot d\vec{f} = df_1^2 + df_2^2 + df_3^2 \quad (5.1.61)$$

observe que se puede hacer las siguientes manipulaciones matemáticas:

$$df_1^2 + df_2^2 + df_3^2 = \frac{f_1^2 df_1^2 + f_2^2 df_2^2 + f_3^2 df_3^2 + f_1^2 df_2^2 - f_3^2 df_3^2}{1-f_3^2} + (d \arccos f_3)^2 \quad (5.1.62)$$

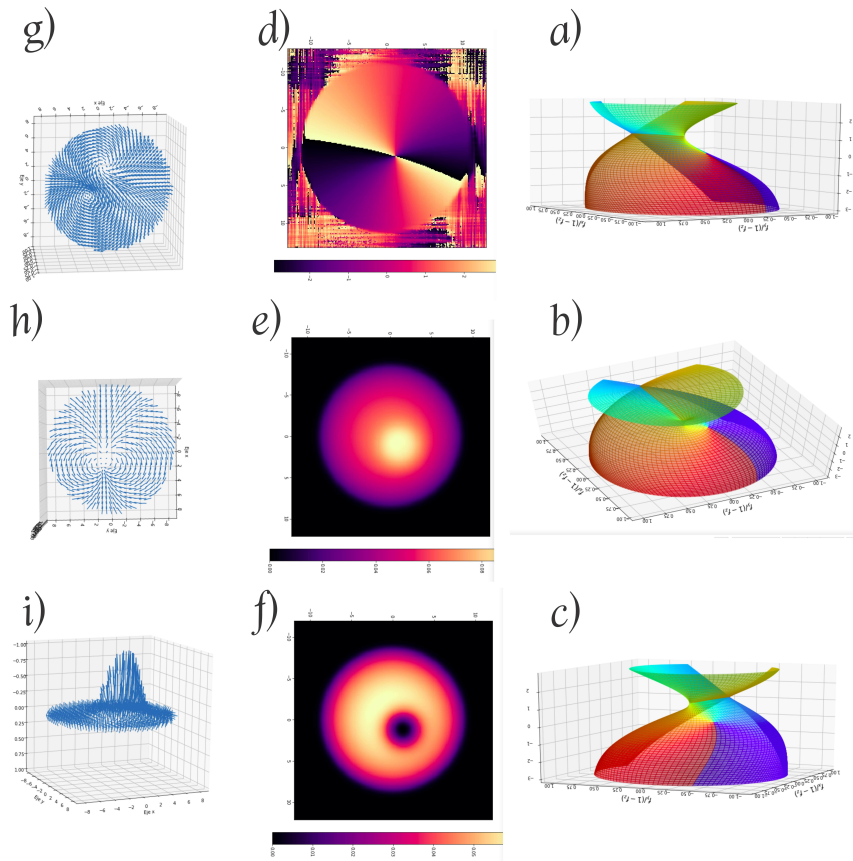


Figura 5.1.3: En las figuras *a)*, *b)* y *c)* se muestran diferentes perfiles de la superficie de Riemann asociada a un Skyrmión que es solución a la ecuación GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$. En las figuras *e)* y *f)* se muestran las soluciones numéricas (estacionaria) de la ecuación GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ con un campo magnético cuadrupolar. Mientras que en *d)* se muestra la fase de la componente del spinor *f)*. En las figuras *g)*, *h)* e *i)* se ilustra distintos perfiles del campo de Skyrme asociado a las soluciones estacionarias *e)* y *f)*.

Si utilizamos la identidad:

$$\frac{f_1^2 df_1^2 + f_2^2 df_2^2 + f_2^2 df_1^2 + f_1^2 df_2^2 - f_3^2 df_3^2}{1 - f_3^2} = \frac{(f_2 df_1 - f_1 df_2)^2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (5.1.63)$$

se deduce entonces que:

$$df_1^2 + df_2^2 + df_3^2 = (1 - f_3^2) \left[\left(\frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{f_1^2 + f_2^2} \right)^2 + \frac{(d \arccos f_3)^2}{(1 - f_3^2)} \right] \quad (5.1.64)$$

y utilizando la siguiente identidad [67]:

$$\left(d \frac{1}{2} \ln \frac{1 - f_3}{1 + f_3} \right)^2 = \frac{(d \arccos f_3)^2}{(1 - f_3^2)} \quad (5.1.65)$$

se puede demostrar que:

$$df_1^2 + df_2^2 + df_3^2 = (1 - f_3^2) \left[(d \arctan \frac{f_2}{f_1})^2 + \left(d \frac{1}{2} \ln \frac{1 - f_3}{1 + f_3} \right)^2 \right]. \quad (5.1.66)$$

Por lo tanto, se define las coordenadas isoterma [67, 68, 69, 70] como:

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \equiv \left(\arctan \frac{f_2}{f_1}, \frac{1}{2} \ln \frac{1 - f_3}{1 + f_3} \right) \quad (5.1.67)$$

y con esto el elemento diferencial de longitud se transforma en [67, 68]:

$$df_1^2 + df_2^2 + df_3^2 = \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2} [d\mathcal{X}^2 + d\mathcal{Y}^2] \quad (5.1.68)$$

con

$$f_3 = \frac{1 - e^{2\mathcal{Y}}}{1 + e^{2\mathcal{Y}}}. \quad (5.1.69)$$

Esta métrica, hace que localmente se obtenga un elemento diferencial de curvatura [70]:

$$KdA = \left[-\frac{1}{2\lambda} (\partial_{\mathcal{X}}^2 + \partial_{\mathcal{Y}}^2) \ln \lambda \right] \lambda d\mathcal{X} \wedge d\mathcal{Y} \quad (5.1.70)$$

que para nuestro caso particular es

$$\lambda(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \equiv \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2}. \quad (5.1.71)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{Y}} \ln \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2} &= 2 - \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{1 + e^{2\mathcal{Y}}} \\ \partial_{\mathcal{Y}}^2 \ln \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2} &= -\frac{8e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2}, \end{aligned} \quad (5.1.72)$$

y por consiguiente

$$KdA = \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2} d\mathcal{X} \wedge d\mathcal{Y}. \quad (5.1.73)$$

Regresando de nueva cuenta al estudio de la longitud de la curva, para $\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C_j^i \subseteq \mathbb{R}^2$ su longitud tiene que ser igual

$$\mathcal{L}_j^i[\vec{\gamma}] \equiv \int_{G(\vec{f}(\vec{\gamma}))} \sqrt{\frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2} [d\mathcal{X}^2 + d\mathcal{Y}^2]}, \quad (5.1.74)$$

en donde

$$G : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ G(\vec{f}(x, y)) = \left(\arctan \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}, \frac{1}{2} \ln \frac{1 - f_3(x, y)}{1 + f_3(x, y)} \right) \quad (5.1.75)$$

En general, si nosotros tenemos una curva $\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow R_i \subseteq \mathbb{R}^2$, suave a pedazos, en la componente (arco-) conexas R_i , entonces existe una cantidad a lo más numerable de conjuntos $C_{k_1}^i, C_{k_2}^i, C_{k_3}^i, \dots, C_{k_n}^i, \dots$ tales que tienen un segmento de la curva. Esto induce una partición sobre el intervalo $[0, 1]$ de tal forma que existe valores $t_{k_j} \in [0, 1]$ en donde las curvas

$$\vec{\gamma}_{k_j} : [t_{k_j}, t_{k_{j+1}}] \rightarrow C_{k_j}^i \quad (5.1.76)$$

satisfacen la igualdad

$$\vec{\gamma}_{k_j}(t) = \vec{\gamma}(t), \forall t \in [t_{k_j}, t_{k_{j+1}}]. \quad (5.1.77)$$

Claramente, esta curva siempre se puede reparametrizar, esto significa que existe una función biyectiva $h_{k_j} : [0, 1] \rightarrow [t_{k_j}, t_{k_{j+1}}]$ tal que:

$$\vec{\gamma}_{k_j} \circ h_{k_j} : [0, 1] \rightarrow C_j^i \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (5.1.78)$$

Con base en todo lo anterior, podemos definir una longitud para cualquier curva sobre la componente conexas:

$$\mathcal{L}^i[\vec{\gamma}] \equiv \sum_j \mathcal{L}_j^i[\vec{\gamma}_{k_j} \circ h_{k_j}]. \quad (5.1.79)$$

Para ejemplificar esta longitud, se puede ver en la figura 5.1.2 e) que hay una curva en la componente conexas y que en cada cuadrado que interseca a la curva, se lleva (a ese pedazo de curva) a la esfera y es ahí en donde se mide la longitud. Esto se hace para cada cuadrado y al final se suma todas las longitudes.

La longitud mostrada en la ecuación 5.1.79 es de tal importancia, ya que permite dotar de una nueva topología, distinta a la usual, a la componente conexas. Para ello definamos la siguiente función:

$$d_{\vec{f}}^i(\vec{x}, \vec{y}) : R_i \times R_i \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (5.1.80)$$

$$d_{\vec{f}}^i(\vec{x}, \vec{y}) = \inf\{\mathcal{L}^i[\vec{\gamma}] : \vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow R_i \subseteq \mathbb{R}^2, \vec{\gamma}(0) = \vec{x}, \vec{\gamma}(1) = \vec{y}\} \quad (5.1.81)$$

en donde $\vec{\gamma}$ es una curva suave a pedazos. Una consecuencia de esta definición es que para los puntos $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R_i \subseteq \mathbb{R}^2$ se tiene que cumplir las siguientes tres propiedades [38]:

$$\begin{aligned} d_{\vec{f}}^i(\vec{x}, \vec{y}) &= d_{\vec{f}}^i(\vec{y}, \vec{x}) \\ d_{\vec{f}}^i(\vec{x}, \vec{y}) = 0 &\iff \vec{x} = \vec{y} \\ d_{\vec{f}}^i(\vec{x}, \vec{z}) &\leq d_{\vec{f}}^i(\vec{x}, \vec{y}) + d_{\vec{f}}^i(\vec{y}, \vec{z}) \end{aligned} \quad (5.1.82)$$

justificando así que R_i es un espacio métrico. Todos los espacios métricos inducen una topología (primer punto de la definición 4.1.4) y en nuestro caso, no necesariamente tiene que ser la misma que la heredada por el plano (dos topologías τ_1 y τ_2 sobre un espacio X se dicen equivalentes si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y $\tau_2 \subseteq \tau_1$). Denotemos simplemente al espacio topológico inducido por la métrica $d_{\vec{f}}^i$ como:

$$\kappa_i \equiv (R_i, \tau_{d_{\vec{f}}^i}) \quad (5.1.83)$$

en donde $\tau_{d_{\vec{f}}^i}$ se refiere a la topología inducida por la métrica $d_{\vec{f}}^i$. Particularmente, se puede heredar esta topología a los elementos de la partición C_j^i , a los cuales simplemente los denotaremos como:

$$\Gamma_{i,j} \equiv (C_j^i, \tau_{d_{\vec{f}}^i} \cap C_j^i) \quad (5.1.84)$$

en donde $\tau_{d_{\vec{f}}^i} \cap C_j^i$ se refiere a la topología heredada por $\tau_{d_{\vec{f}}^i}$ (recordemos el sexto punto de la definición 4.1.4).

Con base en lo anterior, la métrica (5.1.68) y elemento diferencial de curvatura (5.1.70) se pueden extender de manera global, utilizando coordenadas (x, y) para todo $\bar{\kappa}_i = \kappa_i \cup \partial\kappa_i$. Por lo cuál, el espacio topológico $\bar{\kappa}_i$ es una superficie de Riemann con métrica y elemento diferencial de curvatura:

$$\begin{aligned} a) \quad ds^2 &= \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1+e^{2\mathcal{Y}})^2} [d\mathcal{X}^2 + d\mathcal{Y}^2] \\ b) \quad \Omega dA &= \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1+e^{2\mathcal{Y}})^2} d\mathcal{X} \wedge d\mathcal{Y} \end{aligned} \quad (5.1.85)$$

en donde las coordenadas locales \mathcal{X} y \mathcal{Y} están en función de las coordenadas globales (x, y) . A partir de esto, se puede aplicar el teorema de Gauss-Bonnet a todo $\bar{\kappa}_i$; es decir si Ω es la curvatura gaussiana, ω_g es la curvatura geodésica y $\eta_{i,p}$ son los ángulos exteriores de la frontera $\partial\bar{\kappa}_i$ entonces la característica de Euler-Poincaré para esta superficie de Riemann tiene que ser:

$$2\pi\chi(\bar{\kappa}_i) = \iint_{\bar{\kappa}_i} \Omega dA + \oint_{\partial\bar{\kappa}_i} \omega_g dt + \sum_{p=1}^{p_i} \eta_{i,p} \quad (5.1.86)$$

Note que si la curva $G(\vec{\gamma})$ parametriza $\partial\bar{\kappa}_i$ entonces

$$\frac{d}{dt}G(\vec{f}(\vec{\gamma})) = (\partial_x \mathcal{X}, \partial_x \mathcal{Y}) \frac{d\gamma_x}{dt} + (\partial_y \mathcal{X}, \partial_y \mathcal{Y}) \frac{d\gamma_y}{dt} \quad (5.1.87)$$

$$n_\kappa(t) = \left[-(\partial_x \mathcal{X}, \partial_x \mathcal{Y}) \frac{d\gamma_y}{dt} + (\partial_y \mathcal{X}, \partial_y \mathcal{Y}) \frac{d\gamma_x}{dt} \right] \quad (5.1.88)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\frac{dG(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|} = \frac{\frac{d^2G(t)}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} - \frac{dG(t)}{dt} \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \quad (5.1.89)$$

$$\omega_g = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\frac{dG(t)}{dt}}{\left\| \frac{dG(t)}{dt} \right\|}, \frac{n_\kappa(t)}{\frac{ds}{dt}} \right\rangle = \frac{4e^{2\mathcal{Y}(t)}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}(t)})^2} \frac{\frac{d^2G(t)}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} \cdot n_\kappa(t) \quad (5.1.90)$$

$$\omega_g = \frac{4e^{2\mathcal{Y}(t)}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}(t)})^2} \frac{\frac{d^2G(t)}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} \cdot n_\kappa(t) \quad (5.1.91)$$

por lo tanto, la característica de Euler Poincaré tiene que ser:

$$2\pi\chi(\bar{\kappa}_i) = \iint_{\bar{\kappa}_i} \frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2} d\mathcal{X} \wedge d\mathcal{Y} + \oint_{\partial\bar{\kappa}_i} \frac{4e^{2\mathcal{Y}(t)}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}(t)})^2} \frac{\frac{d^2G(t)}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} \cdot n_\kappa(t) dt + \sum_{p=1}^{p_i} \eta_{i,p} \quad (5.1.92)$$

en donde:

$$\cos \eta_{i,p} = \left\langle \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{dG(t)}{dt} \Big|_{t_{i,p-\delta}}}{\sqrt{\left\langle \frac{dG(t)}{dt} \Big|_{t_{i,p-\delta}}, \frac{dG(t)}{dt} \Big|_{t_{i,p-\delta}} \right\rangle}}, \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{dG(t)}{dt} \Big|_{t_{i,p+\delta}}}{\sqrt{\left\langle \frac{dG(t)}{dt} \Big|_{t_{i,p+\delta}}, \frac{dG(t)}{dt} \Big|_{t_{i,p+\delta}} \right\rangle}} \right\rangle \quad (5.1.93)$$

De aquí se puede deducir que [37, 38]:

$$\frac{4e^{2\mathcal{Y}}}{(1 + e^{2\mathcal{Y}})^2} d\mathcal{X} \wedge d\mathcal{Y} = (1 - f_3^2) \frac{\vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}}{1 - f_3^2} dx \wedge dy \quad (5.1.94)$$

donde

$$DG = \begin{pmatrix} \frac{f_2 \partial_x f_1 - f_1 \partial_x f_2}{f_1^2 + f_2^2} & \frac{f_2 \partial_y f_1 - f_1 \partial_y f_2}{f_1^2 + f_2^2} \\ -\frac{\partial_x f_3}{1 - f_3^2} & -\frac{\partial_y f_3}{1 - f_3^2} \end{pmatrix} \quad (5.1.95)$$

y por lo tanto:

$$\det DG = \frac{\vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}}{1 - f_3^2} \quad (5.1.96)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^-}, \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^+} \right\rangle &= \frac{4e^{2\gamma}}{(1+e^{2\gamma})^2} \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^-} \cdot \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^+} \\
&= \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^-} \cdot \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^+}
\end{aligned} \tag{5.1.97}$$

$$\sqrt{\left\langle \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}-\delta}, \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}-\delta} \right\rangle} = \left\| \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^-} \right\| \tag{5.1.98}$$

$$\sqrt{\left\langle \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}+\delta}, \frac{dG(\vec{f}(\vec{\gamma}(t)))}{dt} \Big|_{t_{i,p}+\delta} \right\rangle} = \left\| \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}^+} \right\| \tag{5.1.99}$$

Luego, como G es localmente inyectiva, localmente difeomorfa, preserva la métrica (es una isometría) y a que la curvatura geodésica es una propiedad intrínseca se deduce que [60, 70]:

$$\oint_{\partial \bar{\kappa}_i} \omega_g dt = \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \tag{5.1.100}$$

y entonces:

$$2\pi\chi(\bar{\kappa}_i) = \iint_{R_i} \vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} dx dy + \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt + \sum_{p=1}^{p_i} \eta_{i,p} \tag{5.1.101}$$

en donde

$$\cos \eta_{i,p} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}-\delta} \cdot \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}+\delta}}{\left\| \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}-\delta} \right\| \left\| \frac{d\vec{f}(\vec{\gamma}(t))}{dt} \Big|_{t_{i,p}+\delta} \right\|} \tag{5.1.102}$$

además, si sustituimos (60) y $\bar{\kappa}_i = \overline{\cup_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_{i,j}}$ se concluye entonces que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} (2\pi\chi(\Gamma_{i,j}) - \sum_{k=1}^{l_j} \eta_{i,j,k}) + \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} + \\
&+ \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt - \sum_{j=1}^{\infty} \oint_{\partial C_j^i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt = 2\pi\chi(\bar{\kappa}_i) \\
&= 2\pi\chi(\overline{\cup_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_{i,j}})
\end{aligned} \tag{5.1.103}$$

Con base en esto simplemente construyamos:

$$M_{\vec{f}}^2 = \cup_i \bar{\kappa}_i \quad (5.1.104)$$

el cuál es un espacio que es el inducido por el campo de Skyrme. La última incognita a resolver es determinar la característica de Euler-Poincaré del espacio $M_{\vec{f}}^2$ en términos del campo de Skyrme y este será el objetivo de la siguiente sección.

Cálculo de $\chi(M_{\vec{f}}^2)$ en términos del campo de Skyrme.

Para lo que resta, veamos que:

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_i \chi(\bar{\kappa}_i) &= \sum_i \iint_{R_i} \vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} dx dy \\ &\quad + \sum_i \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt + \sum_i \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \quad (5.1.105) \\ &\quad + \sum_i \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \\ &\quad + \sum_i \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} \end{aligned}$$

Ahora, definamos R_0 igual al complemento de \mathcal{R} . De la misma forma que se dedujo la igualdad de la ecuación (5.1.19), como $\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} = \vec{0}$ en $R_0 \setminus N$ y $\iint_N dx dy = 0$ entonces:

$$\iint_{int(R_0)} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \oint_{\partial int(R_0)} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt = 0 \quad (5.1.106)$$

(puede ver un ejemplo de tal condición en la figura 5.1.4) y por consiguiente:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathcal{R}} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \\
& + \sum_i \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \\
& + \sum_i \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} = \iint_{\mathcal{R}} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \iint_{\text{int}(R_0)} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy \\
& + \sum_i \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt + \oint_{\partial \text{int}(R_0)} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \\
& + \sum_i \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} \\
& = \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy \\
& + \sum_i \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt + \oint_{\partial \text{int}(R_0)} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \\
& + \sum_i \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} \tag{5.1.107}
\end{aligned}$$

Teniendo todo esto en cuenta, se puede deducir fácilmente que:

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_i \chi(\bar{\kappa}_i) - \sum_i \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} & = \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \sum_i \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \\
& + \oint_{\partial \text{int}(R_0)} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \tag{5.1.108}
\end{aligned}$$

y si utilizamos la generalización de (5.1.103); es decir:

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_i \chi(\bar{\kappa}_i) - \sum_i \sum_p^{p_i} \eta_{i,p} & = 2\pi \chi(M_{\vec{f}}^2) - \sum_n \epsilon_n - \oint \frac{\vec{f}_{\infty} \cdot \left(\frac{d\vec{f}_{\infty}}{ds} \times \frac{d^2 \vec{f}_{\infty}}{ds^2} \right)}{\frac{d\vec{f}_{\infty}}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_{\infty}}{ds}} ds \\
& + \sum_i \oint_{\partial R_i} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt + \oint_{\partial \text{int}(R_0)} \frac{\vec{f} \cdot \left[\frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} \right]}{\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}} dt \tag{5.1.109}
\end{aligned}$$

en donde se ha identificado ϵ_n como los ángulos exteriores en aquellos puntos $\varphi_n \in [0, 2\pi)$ donde la curva es discontinua

$$\cos \epsilon_n = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{d\vec{f}_{\infty}}{dt} |_{\varphi_n + \delta}}{\left\| \frac{d\vec{f}_{\infty}}{dt} |_{\varphi_n + \delta} \right\|} \cdot \frac{\frac{d\vec{f}_{\infty}}{dt} |_{\varphi_n - \delta}}{\left\| \frac{d\vec{f}_{\infty}}{dt} |_{\varphi_n - \delta} \right\|},$$

entonces se deduce que:

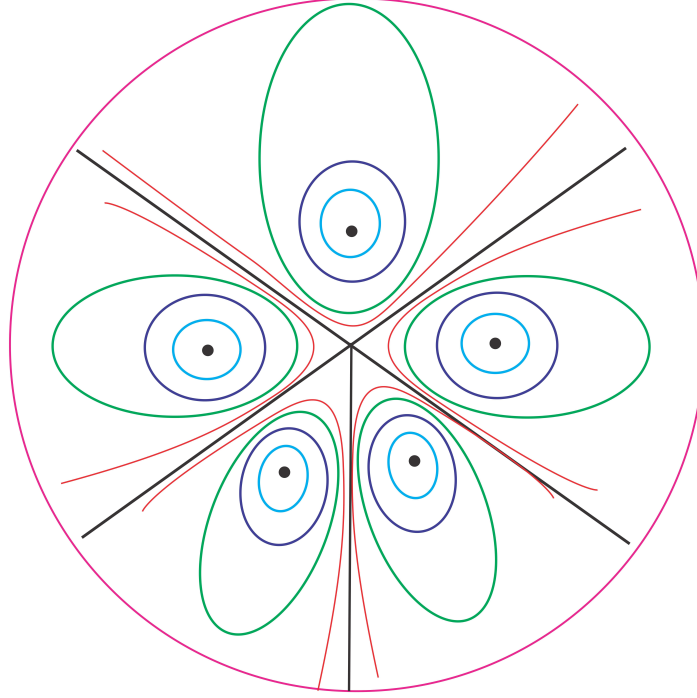


Figura 5.1.4: Las líneas del mismo color van a caer a una misma línea sobre la esfera. Tanto las líneas de color negro que dividen el espacio en 5 como los puntos de color negro pertenecen al conjunto R_0 . En este caso $\iint_{R_0} dx dy = 0$ y por tanto la fórmula (5.1.106), se tiene que cumplir.

$$2\pi\chi(M_{\vec{f}}^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \oint \frac{\vec{f}_\infty \cdot \left(\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \times \frac{d^2\vec{f}_\infty}{ds^2} \right)}{\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}} ds + \sum_n \epsilon_n \quad (5.1.110)$$

■ *Conjetura*

5.2. Consecuencias.

Es interesante notar que las integrales y la suma de la ecuación (5.1.108) son iguales a una cantidad topológica que está multiplicada por un factor de 2π y no por un factor de 4π . Esto se debe a que la definición convencional de la carga del Skyrmión partió de la definición de un invariante topológico conocido como el grado del mapeo o mejor conocido como *el grado de Brouwer* [37, 38, 61] y que tal definición solo funcionaba para superficies cerradas ó, dentro del contexto de

los Skyrmiones, que la frontera del campo \vec{f} sea igual a un punto. La conjetura propuesta en la sección anterior nos motiva a redefinir la carga del Skyrmión cambiando por completo la definición original; esto lo proponemos así porque el origen de la igualdad (5.1.110) está intrínsecamente relacionada al teorema de Gauss-Bonnet:

$$Q_{Sky} \equiv \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds})}{\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_n \epsilon_n. \quad (5.2.1)$$

Esta nueva definición generaliza a la anterior puesto que si la condición de frontera del campo de Skyrme en el infinito es igual a un punto entonces la integral de línea y los ángulos exteriores son nulos y por lo tanto:

$$Q_{Sky} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy. \quad (5.2.2)$$

Se sabe, por la teoría de homotopías [39, 40] que el integrando en (5.2.2), cuando el campo de Skyrme en el infinito es un punto, tiene que ser un múltiplo de 4π , por lo que esta nueva definición permite inferir que la carga del Skyrmión tiene que ser un número par, siempre. Lo cuál tiene sentido, ya que si hay un Skyrmión \vec{f} que solo tiene un punto en donde $\vec{f}(0) = \hat{z}$, además en el infinito $\vec{f}(\infty) = -\hat{z}$ y, a su vez, este mapeo es uno a uno (inyectivo) entonces su carga tiene que ser:

$$Q_{Sky} = 2 \quad (5.2.3)$$

lo que significa que la superficie abstracta que se construyó en (5.1.104), en este caso, tiene que ser homeomorfa a la de la esfera.

Una de las incógnitas que no hemos resuelto aun, pero que ya tenemos la herramienta para resolver, es ¿cuál es la carga topológica de un Skyrmión que es una solución de la ecuación GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ con una campo magnético de la forma:

$$\vec{B} = B_0(r^p \cos p\varphi \hat{e}_x - r^p \sin p\varphi \hat{e}_y + z_0 \hat{e}_z) \quad (5.2.4)$$

con $z_0 \neq 0$? Para resolverlo, recordemos que la condición de frontera en el infinito es igual a:

$$\vec{f}_\infty = \hat{x} f_\rho(\infty) \cos p\varphi + \hat{y} f_\rho(\infty) \sin p\varphi + \hat{z} f_z(\infty) \quad (5.2.5)$$

por lo que si definimos

$$\cos \theta = f_z(\infty) \quad (5.2.6)$$

entonces

$$\frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} = p(-\hat{x} f_\rho(\infty) \sin p\varphi + \hat{y} f_\rho(\infty) \cos p\varphi) = p f_\rho(\infty) \hat{\varphi} \quad (5.2.7)$$

$$\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{d\varphi^2} = -p^2 f_\rho(\infty) \hat{\rho} \quad (5.2.8)$$

y así se obtiene:

$$\frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \times \frac{d^2 \vec{f}_\infty}{d\varphi^2} = p^2 f_\rho^2(\infty). \quad (5.2.9)$$

Por lo tanto:

$$\vec{f}_\infty \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \times \frac{d^2 \vec{f}_\infty}{d\varphi^2} = p^3 f_z(\infty) f_\rho^2(\infty) \quad (5.2.10)$$

y en consecuencia:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds})}{\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}} ds = 2\pi p f_z(\infty) \quad (5.2.11)$$

Por lo, utilizando el resultado obtenido en (3.2.22), se calcula que:

$$\begin{aligned} Q_{Sky} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds})}{\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}} ds \\ &= p(f_z(0) - f_z(\infty)) + p f_z(\infty) \\ &= p f_z(0) \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

demostrando así que la carga del Skyrmión es independiente de los valores de la intensidad del campo magnético de la componente z_0 y que la carga tiene que ser necesariamente un número entero.

La pregunta natural que nos podemos plantear es: ¿qué valores puede tomar la carga del Skyrmión inducido por un campo magnético, que se anula en el BEC spinorial? Para contestar esta pregunta hagamos la siguiente deducción.

Supongamos que tenemos Φ la solución estacionaria de la ecuación de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ la cual tiene un campo magnético tal que en $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N \in \mathbb{R}^2$ $\vec{B}(\vec{x}_i) = \vec{0}$. Por consiguiente, de acuerdo a lo observado en las soluciones numéricas [34, 35] el Skyrmión magnético, se cumple que:

$$|f_z(\vec{x}_m)| = 1 \quad (5.2.13)$$

Con base en esto, hacemos una partición del espacio por N regiones simplemente conexas que nombraremos A_m tales que son ajenos dos a dos, la unión es igual a todo el plano y

$$\vec{x}_m \in A_m \quad \forall m = 1, \dots, N. \quad (5.2.14)$$

Recordando lo demostrado en la conjetura, para cada A_m existe un espacio topológico M_m^2 inducido por \vec{f} tal que:

$$2\pi\chi(M_m^2) = \iint_{A_m} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \oint_{\partial A_m} \frac{\frac{d^2 \vec{f}}{ds^2} \cdot (\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{ds})}{\frac{d\vec{f}}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}}{ds}} ds + \sum_{n_m} \epsilon_{n_m} \quad (5.2.15)$$

en donde ϵ_{n_m} son los ángulos exteriores de la curva $\vec{\gamma}_m$ que parametriza la frontera $\partial A_m \subseteq \mathbb{R}^2$. En efecto, si definimos el conjunto:

$$M_m^2 \equiv A_m \cap M_{\vec{f}}^2 \quad (5.2.16)$$

este tiene que ser un espacio topológico. Recordemos que por la manera en cómo se definió $M_{\vec{f}}^2$, existen conjuntos abiertos y simplemente conexos R_i tales que al inducirles una topología $\tau_{\vec{f}}^i$ se construyen conjuntos κ_i que son ajenos dos a dos y su unión es tal que:

$$M_{\vec{f}}^2 = \cup_i \kappa_i \quad (5.2.17)$$

subsecuentemente se infiere que:

$$\chi(M_m^2) = \sum_i \chi(M_m^2 \cap \kappa_i). \quad (5.2.18)$$

De esta igualdad se deduce inmediatamente

$$2\pi\chi(M_m^2 \cap \kappa_i) = \iint_{A_m \cap R_i} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \oint_{\partial(A_m \cap R_i)} \frac{\frac{d^2 \vec{f}}{ds^2} \cdot (\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{ds})}{\frac{d\vec{f}}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}}{ds}} ds + \sum_{n_{m,i}} \eta_{n_{m,i}} \quad (5.2.19)$$

en donde $\eta_{n_{m,i}}$ son los ángulos exteriores de la $\vec{\gamma}_{m,i}$ que parametriza a la frontera $\partial(A_m \cap R_i)$ y por lo tanto se deduce la fórmula (5.2.15) si se suma todas las integrales. De acuerdo al Teorema de Poincaré-Hopf [61, 71, 72] si nosotros tomamos una curva cerrada $\vec{\alpha}_m$ alrededor del punto \vec{x}_m y que este se encuentre dentro de A_m de forma tal que $\vec{\gamma}_m \neq \vec{\alpha}_m$ entonces

$$\chi(M_m^2) = \begin{cases} \text{Index}(\vec{f}(\vec{\alpha}_m)) & \text{si } \partial M_m^2 \neq \emptyset \\ 2 * \text{Index}(\vec{f}(\vec{\alpha}_m)) & \text{si } \partial M_m^2 = \emptyset \end{cases} \quad (5.2.20)$$

que para este caso particular:

$$\text{Index}(\vec{f}(\vec{\alpha}_m)) = \frac{1}{4\pi} \oint \oint \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} \quad (5.2.21)$$

en donde:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (0, 0, t) \\ \vec{r}_2 &= (f_1(\vec{\alpha}_m(s)), f_2(\vec{\alpha}_m(s)), f_3(\vec{\alpha}_m(s))) \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = f_2 df_1 - f_1 df_2 \quad (5.2.23)$$

$$\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3 = (f_1^2 + f_2^2 + (f_3 - t)^2)^{\frac{3}{2}} \quad (5.2.24)$$

por lo tanto tenemos

$$\oint \oint \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} = \frac{1}{4\pi} \oint (f_2 df_1 - f_1 df_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(f_1^2 + f_2^2 + (f_3 - t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.2.25)$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(f_1^2 + f_2^2 + (f_3 - t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (5.2.26)$$

y, por consiguiente, se tiene que:

$$\text{Index}(\vec{f}(\vec{\alpha}_m)) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (5.2.27)$$

La ecuación del lado derecho de (5.2.21) no es más que el número de enlace de dos curvas, y este siempre va ser un número entero, por lo tanto:

$$\sum_{m=1}^N \chi(M_m^2) = \sum_{m=1}^N \text{Index}(\vec{f}(\vec{\alpha}_m)) \quad (5.2.28)$$

la cantidad del lado derecho es un entero porque es la suma de números enteros y por lo tanto la carga del Skyrmión

$$Q_{Sky} = \chi(\cup_{m=1}^N M_m^2) = \sum_{m=1}^N \text{Index}(\vec{f}(\vec{\alpha}_m)) \quad (5.2.29)$$

necesariamente tiene que ser un número entero.

Lo que se puede notar de la deducción anterior es que para calcular la carga del Skyrmión en cada región que contenía los puntos en donde $|f_z| = 1$ se tuvo que construir una curva que tuviera el punto, sin embargo dicha curva no depende del punto. Para mostrar tal independencia veamos lo siguiente.

Supongamos que la conjetura es cierta y que Φ es una solución de la ecuación de GP bidimensional y de pseudo-spin $\frac{1}{2}$ y esta ecuación tiene un campo magnético \vec{B} que genera un Skyrmión magnético \vec{f} . Por lo tanto, si nosotros suponemos que las parciales de \vec{f} son continuas, en todo el plano, entonces se puede deducir que la carga del Skyrmión existe (que puede ser igual a cero) y es un número entero.

Efectivamente, como \vec{f} cumple la conjetura, entonces la carga del Skyrmión existe (la cuál puede incluso ser igual a cero), particularmente si \vec{f} es el mapeo constante entonces simplemente la carga es igual a cero. Ahora, supongamos lo contrario; es decir, \vec{f} no es el mapeo constante. Ahora si el producto cruz de las parciales $\partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f}$ es igual a cero para todo el punto en el plano, entonces la carga del Skyrmión tiene que ser igual a cero. Por otra parte, supongamos que

existe un punto \vec{x}_0 tal que el producto cruz de las parciales es distinto de cero. Una vez tomado este punto $\vec{v} = \vec{f}(\vec{x}_0)$, resulta entonces que el conjunto:

$$\vec{f}^{-1}(\{+\vec{v}, -\vec{v}\}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{v}| = 1\} \quad (5.2.30)$$

es no vacío y el número de preimágenes tiene que ser igual a una cantidad a lo más numerable [48]. A estos puntos simplemente los etiquetaremos como \vec{x}_m . Sabemos que existe una rotación R_θ tal que:

$$R_\theta \vec{v} = \hat{z} \quad (5.2.31)$$

y veamos que:

$$R_\theta \vec{f} \cdot \frac{\partial R_\theta \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial R_\theta \vec{f}}{\partial y} = \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \quad (5.2.32)$$

$$\frac{\frac{d^2 R_\theta \vec{f}}{ds^2} \cdot (R_\theta \vec{f} \times \frac{dR_\theta \vec{f}}{ds})}{\frac{dR_\theta \vec{f}}{ds} \cdot \frac{dR_\theta \vec{f}}{ds}} = \frac{\frac{d^2 \vec{f}}{ds^2} \cdot (\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{ds})}{\frac{d\vec{f}}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}}{ds}}. \quad (5.2.33)$$

Estas últimas igualdades suceden debido a que las rotaciones preservan tanto el triple producto escalar así como el producto punto. Luego, si volvemos a usar esta propiedad

$$R_\theta \vec{f}(\vec{x}_m) \cdot R_\theta \vec{v} = \vec{f}(\vec{x}_m) \cdot \vec{v} \quad (5.2.34)$$

y si definimos

$$\vec{f}_\theta \equiv R_\theta \vec{f} \quad (5.2.35)$$

entonces

$$|f_{\theta,z}(\vec{x}_m)| = 1 \quad (5.2.36)$$

por lo cuál el campo \vec{f}_θ cumple la condición (5.2.13) del párrafo anterior y todo lo necesario para deducir las correspondientes consecuencias.

Esta última deducción nos indica solo las condiciones necesarias, en el Skyrmión magnético, para que exista una carga (que puede ser cero) y si se puede definir una carga al campo esta tiene que ser igual a cero. Esto último implica que si un campo de Skyrme está apuntando en dirección \hat{z} , no necesariamente tiene que contribuir a la carga. Para ejemplificar esto hagamos el siguiente ejercicio.

Vamos a proponer un Skyrmión muy singular. Sea

$$f_z(\rho, \varphi) = 1 + \frac{(e^{-\rho} - 1)}{3} \left(\cos\left(\frac{1}{\rho}\right) + 2 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \quad (5.2.37)$$

y definimos

$$f_\rho(\rho, \varphi) = \sqrt{1 - f_z^2(\rho, \varphi)} \quad (5.2.38)$$

Entonces, el campo de Skyrme con el que estamos trabajando tiene que ser:

$$\vec{f} = f_\rho(\rho, \varphi)\hat{\rho} + f_z(\rho, \varphi)\hat{z} \quad (5.2.39)$$

Este campo es continuo en todos sus puntos, es derivable en todos lados, excepto en el origen. Además tiene un número infinito de defectos topológicos ya que:

$$f_z\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}, \pi\right) = 1, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (5.2.40)$$

La condición de frontera es:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f_z(\rho, \varphi) = \frac{\sin(\varphi/2)}{3} \quad (5.2.41)$$

En general, se puede construir una colección de funciones continuas para $t \in [0, 1]$

$$f_z(\rho, \varphi, t) = 1 + \frac{(e^{-\rho} - 1)}{3} \left(\cos\left(\frac{1}{\rho}\right) + 2 - t \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \quad (5.2.42)$$

$$f_\rho(\rho, \varphi, t) = \sqrt{1 - f_z^2(\rho, \varphi, t)} \quad (5.2.43)$$

$$\vec{f}(\rho, \varphi, t) = f_\rho(\rho, \varphi, t)\hat{\rho} + f_z(\rho, \varphi, t)\hat{z}. \quad (5.2.44)$$

Veamos que

$$\iint \vec{f} \cdot \partial_x \vec{f} \times \partial_y \vec{f} dx dy = \int \int \vec{f} \cdot \partial_\rho \vec{f} \times \partial_\varphi \vec{f} d\rho d\varphi \quad (5.2.45)$$

y por lo tanto:

$$\partial_\rho \vec{f} = \partial_\rho f_\rho \hat{\rho} + \partial_\rho f_z \hat{z} \quad (5.2.46)$$

$$\partial_\varphi \vec{f} = \partial_\varphi f_\rho \hat{\rho} + f_\rho \hat{\varphi} + \partial_\varphi f_z \hat{z} \quad (5.2.47)$$

De aquí se sigue entonces:

$$\partial_\rho \vec{f} \times \partial_\varphi \vec{f} = f_\rho \partial_\rho f_\rho \hat{\rho} \times \hat{\varphi} + \partial_\rho f_\rho \partial_\varphi f_z \hat{\rho} \times \hat{z} + \partial_\rho f_z \partial_\varphi f_\rho \hat{z} \times \hat{\rho} + f_\rho \partial_\rho f_z \hat{z} \times \hat{\varphi}$$

$$\vec{f} \cdot \partial_\rho \vec{f} \times \partial_\varphi \vec{f} = f_\rho^2 \partial_\rho f_z \hat{\rho} \cdot (\hat{z} \times \hat{\varphi}) + f_z f_\rho \partial_\rho f_\rho \hat{z} \cdot (\hat{\rho} \times \hat{\varphi})$$

$$\vec{f} \cdot \partial_\rho \vec{f} \times \partial_\varphi \vec{f} = [f_z f_\rho \partial_\rho f_\rho - f_\rho^2 \partial_\rho f_z] \hat{z} \cdot (\hat{\rho} \times \hat{\varphi})$$

$$f_z f_\rho \partial_\rho f_\rho - f_\rho^2 \partial_\rho f_z = f_z \frac{1}{2} \partial_\rho f_\rho^2 - f_\rho^2 \partial_\rho f_z = -f_z \frac{1}{2} \partial_\rho f_z^2 - \partial_\rho f_z + f_z^2 \partial_\rho f_z = -\partial_\rho f_z$$

$$\iint \vec{f} \cdot \partial_\rho \vec{f} \times \partial_\varphi \vec{f} d\rho d\varphi = \iint -\partial_\rho f_z d\rho d\varphi = -\int_0^{2\pi} f_z(\infty, \varphi) - f_z(0, \varphi) d\varphi = 2\pi - \int_0^{2\pi} t \frac{\sin(\varphi/2)}{3} d\varphi$$

$$\iint \vec{f} \cdot \partial_\rho \vec{f} \times \partial_\varphi \vec{f} d\rho d\varphi = 2\pi + \frac{2}{3}(\cos(\pi) - \cos(0)) = 2\pi - t \frac{4}{3}$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\frac{d}{ds} \vec{f}_\infty(\varphi) = \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}, \quad (5.2.48)$$

en donde el punto significa la derivada con respecto a la variable s . Posteriormente, calculamos el vector aceleración:

$$\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} = \ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} \dot{\theta} + (\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\phi} + \dot{\phi} \sin \theta \dot{\hat{\phi}}. \quad (5.2.49)$$

Una vez hecho esto, procedemos a calcular:

$$\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds} = \dot{\theta} \hat{r} \times \hat{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{r} \times \hat{\phi} = \dot{\theta} \hat{\phi} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta} \quad (5.2.50)$$

y por último hacemos el producto interior

$$\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}) = (\ddot{\theta} \hat{\theta} + (\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\phi} + \dot{\theta} \dot{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \dot{\hat{\phi}}) \cdot (\dot{\theta} \hat{\phi} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta}) \quad (5.2.51)$$

$$\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}) = (\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \cdot \dot{\theta} - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta + (\dot{\theta}^2 \dot{\hat{\phi}} - (\dot{\phi} \sin \theta)^2 \dot{\hat{\theta}}). \quad (5.2.52)$$

Pero sabemos que:

$$-\dot{\hat{\phi}} \cdot \hat{\theta} = \dot{\hat{\theta}} \cdot \hat{\phi} = \cos \theta \dot{\phi} \quad (5.2.53)$$

Por consiguiente, podemos decir entonces que:

$$\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}) = (\dot{\theta} \ddot{\phi} - \dot{\theta} \dot{\phi}) \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta}^2 \cos \theta - (\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2) \cos \theta \dot{\phi} \quad (5.2.54)$$

y así entonces calculamos que:

$$\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}) = \dot{\phi}^3 \left(\frac{\dot{\theta} \ddot{\phi} - \dot{\theta} \dot{\phi}}{\dot{\phi}^3} \right) \sin \theta + \dot{\phi}^3 \left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\phi}} \right)^2 \cos \theta - (\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2) \cos \theta \dot{\phi}. \quad (5.2.55)$$

Subsecuentemente, obtenemos que:

$$\frac{\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds})}{(\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2)} = \dot{\phi}^3 \frac{(\frac{\dot{\theta}\ddot{\phi} - \dot{\theta}\dot{\phi}}{\dot{\phi}^3}) \sin \theta + (\frac{\dot{\theta}}{\dot{\phi}})^2 \cos \theta}{(\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2)} - \cos \theta \dot{\phi}. \quad (5.2.56)$$

Es fácil ver que

$$(\dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2) = \frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}. \quad (5.2.57)$$

Por lo tanto, para nuestro caso:

$$\frac{\vec{f}_\infty \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \times \frac{d^2 \vec{f}_\infty}{d\varphi^2}}{\frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi}} = \frac{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 \cos \theta - \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \sin \theta}{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 + \sin^2 \theta} - \cos \theta, \quad (5.2.58)$$

en donde sea ha hecho $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$ por que estamos suponiendo que $\phi = \varphi$ y $s = \varphi$.
Luego

$$\begin{aligned} \oint \frac{\vec{f}_\infty \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \times \frac{d^2 \vec{f}_\infty}{d\varphi^2}}{\frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi}} d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 \cos \theta - \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \sin \theta}{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 + \sin^2 \theta} d\varphi - t \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi/2)}{3} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 \cos \theta - \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \sin \theta}{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 + \operatorname{sen}^2 \theta} d\varphi + t \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 \cos \theta - \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \sin \theta}{(\frac{d\theta}{d\varphi})^2 + \sin^2 \theta} d\varphi + t \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (5.2.59)$$

Por otro lado, como

$$\vec{f}_\infty(\varphi) = (\sin \theta(\varphi) \cos \varphi, \sin \theta(\varphi) \sin \varphi, \cos \theta(\varphi)) \quad (5.2.60)$$

entonces se puede deducir que:

$$\frac{\frac{d\vec{f}}{d\varphi}}{\|\frac{d\vec{f}}{d\varphi}\|} = \frac{\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin \theta \hat{\varphi}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta}} \quad (5.2.61)$$

el cuál es un vector normalizado:

$$\frac{\frac{d\vec{f}}{d\varphi}}{\|\frac{d\vec{f}}{d\varphi}\|} = \cos \alpha \hat{\theta} + \sin \alpha \hat{\varphi} \quad (5.2.62)$$

siendo:

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta}} = \sin \alpha. \quad (5.2.63)$$

Partiendo de esto se hace la siguiente deducción

$$\frac{\frac{d^2 \vec{f}}{d\varphi^2}}{\left\| \frac{d\vec{f}}{d\varphi} \right\|} - \frac{\frac{d\vec{f}}{d\varphi}}{\left\| \frac{d\vec{f}}{d\varphi} \right\|^2} \frac{ds}{d\varphi} = -\frac{d\alpha}{d\varphi} \sin \alpha \hat{\theta} + \cos \alpha \dot{\hat{\theta}} - \frac{d\alpha}{d\varphi} \cos \alpha \hat{\varphi} + \sin \alpha \dot{\hat{\varphi}} \quad (5.2.64)$$

$$\frac{\frac{d\vec{f}}{d\varphi}}{\left\| \frac{d\vec{f}}{d\varphi} \right\|} \times \vec{f} = \cos \alpha \hat{\theta} \times \hat{r} + \sin \alpha \hat{\varphi} \times \hat{r} = -\cos \alpha \hat{\varphi} + \sin \alpha \hat{\theta} \quad (5.2.65)$$

$$\frac{d^2 \vec{f}}{d\varphi^2} \cdot \left(\frac{\frac{d\vec{f}}{d\varphi} \times \vec{f}}{\frac{d\vec{f}}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\varphi}} \right) = -\frac{d\alpha}{d\varphi} \cos^2 \alpha - \frac{d\alpha}{d\varphi} \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \dot{\hat{\theta}} \cdot \hat{\varphi} + \sin^2 \alpha \dot{\hat{\varphi}} \cdot \hat{\theta} \quad (5.2.66)$$

$$-\dot{\hat{\varphi}} \cdot \hat{\theta} = \dot{\hat{\theta}} \cdot \hat{\varphi} = \dot{\phi} \cos \theta \quad (5.2.67)$$

$$\frac{d^2 \vec{f}}{d\varphi^2} \cdot \left(\frac{\frac{d\vec{f}}{d\varphi} \times \vec{f}}{\frac{d\vec{f}}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\varphi}} \right) = -\frac{d\alpha}{d\varphi} - \cos \theta \quad (5.2.68)$$

$$\oint \frac{\vec{f}_\infty \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \times \frac{d^2 \vec{f}_\infty}{d\varphi^2}}{\frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi}} d\varphi = \oint \left(-\frac{d\alpha}{d\varphi} \right) d\varphi - \oint \cos \theta d\varphi \quad (5.2.69)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \cos \theta - \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \sin \theta}{\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + \sin \theta} d\varphi = \oint \left(-\frac{d\alpha}{d\varphi} \right) d\varphi = \alpha(0) - \alpha(2\pi) \quad (5.2.70)$$

y si utilizamos (5.2.63) se obtiene:

$$\sin \alpha(0) = \frac{\sin \theta|_{\varphi=0}}{\sqrt{\dot{\theta}^2|_{\varphi=0} + \sin^2 \theta|_{\varphi=0}}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\theta}^2|_{\varphi=0} + 1}} \quad (5.2.71)$$

$$\sin \alpha(2\pi) = \frac{\sin \theta|_{\varphi=2\pi}}{\sqrt{\dot{\theta}^2|_{\varphi=2\pi} + \sin^2 \theta|_{\varphi=2\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\theta}^2|_{\varphi=2\pi} + 1}} \quad (5.2.72)$$

que si observamos que

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\varphi} = -\frac{\frac{df_z(\varphi)}{d\varphi}}{f_\rho(\varphi)} \quad (5.2.73)$$

entonces se obtiene:

$$\dot{\theta}^2|_{\varphi=2\pi} = \dot{\theta}^2|_{\varphi=0} = \frac{1}{36}$$

por lo tanto

$$\alpha(0) - \alpha(2\pi) = 0 \quad (5.2.74)$$

y en consecuencia:

$$\oint \frac{\vec{f}_\infty \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \times \frac{d^2\vec{f}_\infty}{d\varphi^2}}{\frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi}} d\varphi = t \frac{4}{3} \quad (5.2.75)$$

$$\iint \vec{f} \cdot \partial_\rho \vec{f} \times \partial_\varphi \vec{f} d\rho d\varphi + \oint \frac{\vec{f}_\infty \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \times \frac{d^2\vec{f}_\infty}{d\varphi^2}}{\frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{d\varphi}} d\varphi = 2\pi - t \frac{4}{3} + t \frac{4}{3} = 2\pi. \quad (5.2.76)$$

Con base en este ejercicio y de la inferencia del párrafo anterior, se puede deducir que a lo que llamamos Skyrmión tiene que ser todo el campo y no debemos referirnos a éste (al Skyrmión) como si fuera únicamente un punto (o varios puntos) de este campo. Este ejemplo puede parecer un poco complicado, sin embargo vamos a hacer la siguiente comparativa. Supongamos que tenemos una solución de la ecuación bidimensional GP de pseudo spín $\frac{1}{2}$ de tal forma que, el campo de Skyrme tiene componentes como la ecuación (3.2.6) y tiene un vórtice cuántico en el origen de tal forma que se circulación $2\pi\hbar/M$. En este caso particular, resulta que el campo de Skyrme tiene simetría azimutal y por tanto sería suficiente con observar el comportamiento de la componente z , es decir la gráfica de la función $f_z(\rho)$. Por un lado, de acuerdo con Zamora-Zamora y Romero-Rochín [34] el perfil de la función se ve como está representado en la figura 5.2.1 y, por otra parte, el perfil de la componente z del Skyrmión muy singular se ve tal como se ilustra en la figura 5.2.2. Observemos que existe una transformación continua que lleve un perfil a la otra (figura 5.2.3). En efecto, veamos que:

$$H_z(\rho, \varphi, s, t) = 1 + \frac{(f_z(\rho) - 1)}{3} \left(\cos\left(\frac{1}{\rho(\tan(\frac{\pi}{2}s) + 1)}\right) + 2 - t \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \quad (5.2.77)$$

es una función continua en todo punto en $[0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, 1] \times [0, 1]$. Más aun, como \vec{f} es el campo de Skyrme asociado a la solución de la ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ la función es diferenciable en casi todos sus puntos excepto aquellos cuando $\rho = 0$ y $s \neq 1$. Con base en esto, se tiene que notar

$$H_z(\rho, \varphi, 1, 0) = f_z(\rho) \quad (5.2.78)$$

y también que:

$$H_z(\rho, \varphi, 0, 1) = 1 + \frac{(f_z(\rho) - 1)}{3} \left(\cos\left(\frac{1}{\rho}\right) + 2 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right). \quad (5.2.79)$$

Por lo tanto, el Skyrmión muy singular descrito en la ecuación (5.2.37) es

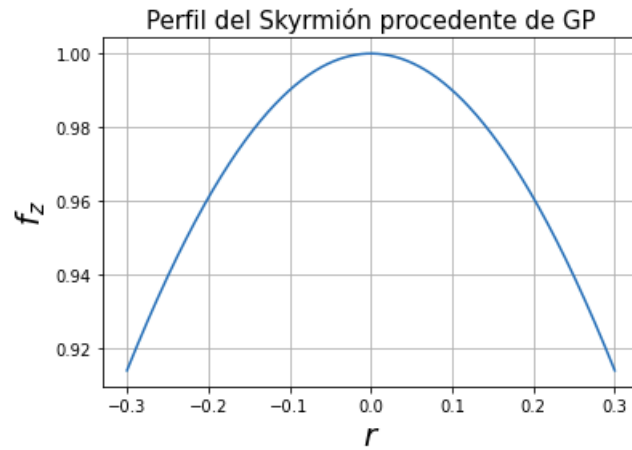


Figura 5.2.1: Perfil de una solución procedente de la ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$

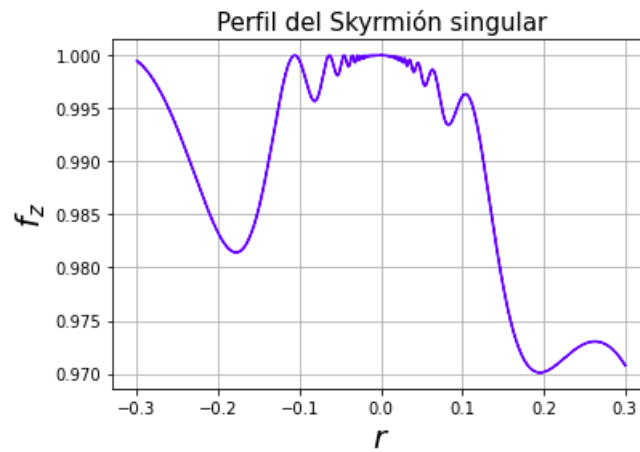


Figura 5.2.2: Perfil del Skyrmión muy singular.

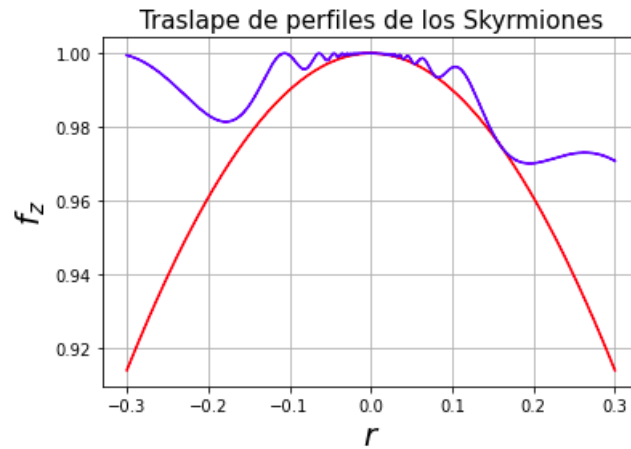


Figura 5.2.3: Traslape de perfiles de los Skyrmiones.

un caso particular de (5.2.79) y, no solo eso, si nosotros calculamos la carga del Skyrmión utilizando (5.2.79) se puede seguir exactamente los mismos pasos para el Skyrmión muy singular y en consecuencia la carga es igual a uno. A partir de esto se puede inferir que si la conjetura es cierta entonces si definimos la carga del Skyrmión como en (5.2.1) entonces puede ser un buen candidato a ser un invariante topológico pues la función H_z podría ser la homotopía entre el campo de Skyrme (5.2.78) y el Skyrmión muy singular (5.2.79).

Capítulo 6

Conclusiones

Después de investigar las condiciones suficientes para la existencia de un Skyrmión magnético asociado a la función de onda de un condensado de Bose-Einstein que es solución a la ecuación de GP bidimensional y de pseudo-spin $\frac{1}{2}$ y después de llevar a cabo la investigación del origen del Skyrmión, de su definición y, posteriormente, un análisis de la interpretación geométrica del campo de Skyrme; se infiere que la definición de la carga dada en términos del *grado de Brouwer* no es la adecuada para describir a todos los Skyrmiones en la física y se propone en este trabajo que la carga debe ser igual a:

$$Q_{Sky} \equiv \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\frac{d^2 \vec{f}_\infty}{ds^2} \cdot (\vec{f}_\infty \times \frac{d\vec{f}_\infty}{ds})}{\frac{d\vec{f}_\infty}{ds} \cdot \frac{d\vec{f}_\infty}{ds}} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_n \epsilon_n \quad (6.0.1)$$

en donde \vec{f}_∞ es la condición de frontera del campo de Skyrme y ϵ_n son los ángulos exteriores en los puntos de \vec{f}_∞ cuya derivada no es continua. Más aun, se propuso una probable justificación de la igualdad (6.0.1) utilizando herramientas de topología general y geometría diferencial. En la conjetura propuesta en este trabajo se dan las condiciones suficientes para que exista una cantidad topológica, asociada al campo de Skyrme, que sea proporcional a las integrales del lado derecho. La cantidad topológica a la cuál es proporcional la carga del Skyrmión, de una campo de Skyrme, es la característica de Euler-Poincaré, ya que para deducir la ecuación (6.0.1) se utilizó fundamentalmente el teorema de Gauss-Bonnet; el cual relaciona la curvatura de una superficie con la característica de Euler-Poincaré.

Algo que se pudo analizar en los campos de Skyrme con frontera abierta fue que aquellos puntos que bajo el mapeo de Skyrme van a caer al polo norte (o sur) de la esfera S^2 no necesariamente contribuyen a la carga sino más bien el campo de Skyrme contribuye a la carga si hay un área de la esfera que es cubierta por el mapeo y, por ello, aquellos mapeos cuya imagen sea igual a un punto, o líneas, su carga va a ser igual a cero. Además, esto demuestra que el campo de Skyrme no es únicamente el punto en donde se encuentra localizado

el defecto sino más bien, se le debe llamar Skyrmión a todo el campo.

Es un hecho que la veracidad de la conjetura dependerá del criterio de la comunidad científica y, más aun, dependerá de los posibles experimentos en gases atómicos ultrafríos que puedan corroborarla o refutarla, por lo que siempre se debe de ser cauteloso en las conclusiones que se obtengan. Sin embargo, teniendo en cuenta esta responsabilidad, a continuación se enunciará un par de inferencias que se pueden hacer a partir de la conjetura.

Si la conjetura es cierta, el Skyrmión original que desarrolló Tony H. R. Skyrme no tiene carga 1 sino carga 2 y esta corrección se debe a que se está reinterpretando a la carga del Skyrmión como la característica de Euler-Poincaré y por lo tanto correspondería a la de una esfera. Mientras que para el *Baby Skyrmión* su carga tendrá que ser 1 y no un $\frac{1}{2}$, ya que el campo de Skyrme en esta situación cubre un hemisferio de la esfera S^2 y su característica de Euler-Poincaré corresponde a la unidad.

Si la conjetura es cierta, los campos de Skyrme magnéticos asociados a las funciones de onda de los condensados de Bose-Einstein que son solución a la ecuación de Gross-Pitaevskii de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ tienen que tener un carga asociada igual a un número entero. Esto último es equivalente a decir, en términos de la topología algebraica, que existe un morfismo entre los números enteros y las clases de homotopías (regulares y con fronteras abiertas) de orden dos; pero no solo eso, también se podría decir que si existiese una operación de grupo sobre esta colección de clases entonces (6.0.1) sería el isomorfismo de estos grupos.

Si la conjetura es cierta, se podría tener argumentos para proponer una nueva interpretación, por lo menos geométrica, de la física que hay de tras de la textura de spín. Esto es así porque la deducción matemática propuesta para demostrar la conjetura nos orilla a pensar que los espacios topológicos κ deben tener una representación real o por lo menos geométrica. Esta manera de pensar podría volverse razonable si se usa el mapeo $\Phi(x, y) = (\frac{f_1(x, y)}{1+f_z(x, y)}, \frac{f_2(x, y)}{1+f_z(x, y)}, x)$ para Skyrmiones de carga p y de forma tal que tengan un vector (del campo) en el origen apuntando en dirección positiva del eje \hat{z} . Si se grafica ese mapeo, la gráfica resultante es una superficie Riemann en donde el número de ramas de esta superficie es igual a la carga del Skyrmión (en general será proporcional). A partir de las soluciones de la ecuación de GP bidimensional y de pseudo spín $\frac{1}{2}$ se pueden dibujar dichas superficies. Para el caso de un Skyrmión de carga p solo hay una única componente conexa κ , por lo que se podría interpretar al Skyrmión magnetico, ó textura de spín, del condensado de Bose-Einstein como una superficie bidimensional generada por la red spinorial del gas que al interactuar con un campo magnético se curva y la curvatura promedio de esa red spinorial es proporcional al orden del multipolo que genera al campo magnético.

Hasta este punto, el análisis que se hizo entorno a los Skyrmiones obtenidos a partir de las soluciones estacionarias de la ecuación bidimensional GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ fue para sistemas que se encuentran en estados estáticos. Sin embargo, si nosotros introducimos la variable temporal al sistema, el problema se puede volver aun más interesante. De acuerdo con Wilczek [36], cuando a un Skyrmión bidimensional se le introduce la variable temporal aparecen nuevos de-

fectos topológicos. Estos nuevos defectos topológicos se pueden considerar como una cuasipartícula y si se requiere determinar la estadística de esta cuasipartícula resulta que no sigue las estadísticas usuales; es decir, no son ni fermiones ni bosones. A estos defectos topológicos se les conocen como *anyons* o vulgarmente traducidos como *cualquierones* y poseen la propiedad de que si se tiene un sistema con dos de estas cuasi-partículas entonces al intercambiarlas (las partículas) su función de onda adquiere una fase distinta a π ó a 0. Aunque teóricamente se ha estudiado a profundidad este tipo de cuasipartículas, hasta donde se tiene conocimiento, no se ha encontrado un estudio de los *anyons* en condensados de Bose-Einstein spinoriales. Con base a las conclusiones obtenidas hasta este punto entorno a los Skyrmiones, es natural hacernos la pregunta: ¿si hacemos que la ecuación bidimensional de GP de pseudo-spín $\frac{1}{2}$ evolucione en el tiempo, entonces bajo qué condiciones un sistema con esta naturaleza puede tener un *anyon*? Esta pregunta puede parecer un poco inofensiva, sin embargo, en la realidad, es una pregunta muy compleja y cualquier intento de poder contestarla se sale de nuestras posibilidades, si consideramos únicamente las conclusiones aquí logradas. A pesar de ello, esto motiva a hacer un estudio en torno a los *anyons* en condensados de Bose-Einstein como trabajo a futuro, lo cual representa un proyecto fascinante y revolucionario cuyas posibles conclusiones tendrían un alcance importantísimo en la física actual.

Bibliografía

- [1] Proukakis, N. P., Snoke, D. W., & Littlewood, P. B. (2017) *“Universal themes of Bose-Einstein condensation”* Cambridge university press.
- [2] Einstein, A. (1925) *“Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. II.”* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Bericht 1, 3–14.
- [3] Einstein, A. (1924) Letter to Ehrenfest (Dec.). *“Quoted in Abraham Pais, Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein”*. Oxford: Oxford University Press, 2005, p. 432.
- [4] Kahn, B., and Uhlenbeck, G. E. (1937) *“On the theory of condensation”*. Physica, 4, 1155.
- [5] London, F. (1938) *“On the Bose-Einstein condensation”*. Phys. Rev., 54, 947.
- [6] London, F. (1938) *“The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy”*. Nature, 141, 643
- [7] Griffin, A., Snoke, D. W., and Stringari, S. (1995) *“Bose-Einstein Condensation”*. Cambridge University Press.
- [8] L. Landau. (1941) *“Theory of the superfluidity of helium ii”*. Phys. Rev., 60:356–358, 28, 29, 121
- [9] F. Annett. (2004) *“Superconductivity, Superfluids, and Condensates”* Oxford Master Series in Condensed Matter Physics. Oxford University Press, USA 28
- [10] Briley, G. C. (2004) *“A history of refrigeration”*. Ashrae Journal, 46, S31-S34.
- [11] Bosma, P., & Nagelvoort, R. K. (2009). *“Liquefaction technology; developments through history. In Proceedings of the 1st annual gas processing symposium”* Elsevier. pp. 19-31
- [12] Kubbingas, H. (2010) *“A tribute to Wróblewski and Olszewski”*. Europhysics News Vol. 41, No. 4, pp. 21-25.

- [13] Gavroglu, K. (1994) “*On Some Myths Regarding the Liquefaction of Hydrogen and Helium*”. European Journal of Physics 15:9–15.
- [14] H. K. Onnes. (1913) “*Investigations into the properties of substances at low temperatures, which have led, amongst other things, to the preparation of liquid helium*”. Nobel Lectures, Physics 1901-1921.
- [15] C. J. Pethick and H. Smith. (2008) “*Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*”. Cambridge University Press, 2nd edition.
- [16] L. Tisza. (1938) “*Transport phenomena in helium II*”. Nature, 141:913.
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. (1991) “*Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*”. Pergamon Press, 3rd edition.
- [18] N. N. Bogoliubov. (1947) “*On the theory of superfluidity*”. J. Phys. USSR, 11:23–32, 1, 32
- [19] O. Penrose and L. Onsager. (1956) “*Bose–Einstein condensation and liquid helium*”. Phys. Rev., 104:576–584.
- [20] E. P. Gross. (1961) “*Structure of a quantized vortex in boson systems*”. II Nuovo Cimento (1955-1965), 20(3):454–477, 40
- [21] Stamper-Kurn, D. M., Andrews, M. R., Chikkatur, A. P., Inouye, S., Miesner, H.-J., Stenger, J., & Ketterle, W. (1998) “*Optical Confinement of a Bose–Einstein Condensate*”. Physical Review Letters, 80(10), 2027–2030.
- [22] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. (1995) “*Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor*”. Science, 269(5221):198–201.
- [23] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet. (1995) “*Evidence of Bose–Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions*”. Phys. Rev. Lett., 75:1687–1690.
- [24] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. (1995) “*Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms*”. Phys. Rev. Lett., 75:3969–3973.
- [25] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. (1999) “*Vortices in a Bose–Einstein condensate*”. Phys. Rev. Lett., 83:2498–2501.
- [26] Skyrme, T. H. R. (1962) “*A unified field theory of mesons and baryons*”. Nuclear Physics, 31, 556-569.
- [27] Skyrme, T. H. R. (1961) “*A non-linear field theory*”. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 260(1300):127–138, 4, 73

- [28] E. Witten, (1979) “*Baryons in the $1/n$ expansion*”. Nucl. Phys. B 160, 57
- [29] E. Witten, (1983) “*Global aspects of current algebra*”. Nucl. Phys. B 223, 422
- [30] Brown, G. E., & Rho, M. (2010) “*The multifaceted skyrmion*”. World Scientific.
- [31] Felser, C. (2013) “*Skyrmions*”. Angewandte Chemie International Edition, 52(6), 1631–1634.
- [32] Roessler, U. K., Bogdanov, A. N., & Pfleiderer, C. (2006) “*Spontaneous skyrmion ground states in magnetic metals*”. Nature, 442(7104), 797-801.
- [33] Neubauer, A., Pfleiderer, C., Binz, B., Rosch, A., Ritz, R., Niklowitz, P. G., & Böni, P. (2009) “*Topological Hall effect in the A phase of MnSi*”. Physical review letters, 102(18), 186602.
- [34] Zamora-Zamora, R., & Romero-Rochín, V. (2018) “*Skyrmions with arbitrary topological charges in spinor Bose–Einstein condensates*”. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 51(4), 045301.
- [35] Zamora-Zamora, R., Lozada-Hidalgo, M., Caballero-Benitez, S. F., & Romero-Rochin, V. (2012) “*Vortices on demand in multicomponent Bose–Einstein condensates*”. Physical Review A, 86(5), 053624.
- [36] Wilczek, F., & Zee, A. (1983) “*Linking Numbers, Spin, and Statistics of Solitons*”. Physical Review Letters, 51(25), 2250–2252.
- [37] Manton, N., & Sutcliffe, P. (2004) “*Topological solitons*”. Cambridge University Press.
- [38] Shnir, Y. M. (2018) “*Topological and non-topological solitons in scalar field theories*”. Cambridge University Press.
- [39] Mermin, N. D. (1979) “*The topological theory of defects in ordered media*”. Reviews of Modern Physics, 51(3), 591.
- [40] Ueda, M. (2014) “*Topological aspects in spinor Bose–Einstein condensates*”. Reports on Progress in Physics, 77(12), 122401.
- [41] Romero-Rochín. (2011) “*Notes on many body theory of Bose and Fermi gases at low temperatures*”. Notas. Instituto de Física de la UNAM.
- [42] Chang, R. (2006) “*Principios esenciales de química general*”, Raymond Chang. Mc-Graw Hill. Madrid. ES.
- [43] Meggers, W. F., & Scribner, B. F. (1912) “*Multiplets and terms in the first two spectra of columbium*”. In Proc. Roy. Irish Acad. Dublin (Vol. 30, p. 42).

- [44] De La Peña, L. (2014) Introducción a la mecánica cuántica. Fondo de Cultura económica.
- [45] Zamora-Zamora (2018) “*Excitaciones cuánticas macroscópicas en condensados de Bose-Einstein: vórtices, Skyrmiones y turbulencia*”. Tesis profesional. Doctorado en Física. Instituto de Física de la UNAM.
- [46] Santamore, D. H., & Timmermans, E. (2011) “*Pseudospin and spin-spin interactions in ultracold alkali atoms*”. New Journal of Physics, 13(2), 023043.
- [47] Zamora-Zamora, R., Domínguez-Castro, G. A., Trallero-Giner, C., Paredes, R., & Romero-Rochín, V. (2019) “*Validity of Gross-Pitaevskii solutions of harmonically confined BEC gases in reduced dimensions*”. Journal of Physics Communications, 3(8), 085003.
- [48] Abrikosov, A. A. (1957) On the magnetic properties of superconductors of the second group. Sov. Phys. JETP, 5, 1174-1182.
- [49] Vinen, W. F. (1990) “*Fifty years of superfluid helium. In Advances in Cryogenic Engineering*” (pp. 1-14). Springer, Boston, MA.
- [50] Feynman, R. P. (1955) “*Chapter II Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium*”. Progress in Low Temperature Physics, 17–53.
- [51] P. Feynman, (1955) “*Progress in Low Temperature Physics*”, C. J. Gorter, ed., North Holland Publ. Co., Amsterdam , Vol. I, p. 317.
- [52] Onsager, L. (1949) “*Statistical hydrodynamics*”. Il Nuovo Cimento, 6(2), 279-287.
- [53] Fetter, A. L., & Walecka, J. D. (2012) “*Quantum theory of many-particle systems*”. Courier Corporation.
- [54] W. Bao, D. Jaksch, and P. A. Markowich. (2003) “*Numerical solution of the gross-pitaevskii equation for Bose-Einstein condensation*”. Journal of Computational Physics, 187(1):318–342.
- [55] Skyrme, R. (2010). “*Skyrmión makeover*”. Nature, 465, 846.
- [56] Sondhi, S. L., Karlhede, A., Kivelson, S. A., & Rezayi, E. H. (1993). “*Skyrmióms and the crossover from the integer to fractional quantum Hall effect at small Zeeman energies*”. Physical Review B, 47(24), 16419–16426.
- [57] Marzlin, K.-P., Zhang, W., & Sanders, B. C. (2000) “*Creation of skyrmions in a spinor Bose-Einstein condensate*”. Physical Review A, 62(1).
- [58] Willard, S. (2004) “*General Topology*”, Dover Publications Inc.
- [59] Tamariz-Mascarúa, A. & Casarrubias-Segura, F. (2015) “*Elementos de Topología General*”. Instituto de Matemáticas de la UNAM

- [60] McCleary, J. (1997). *“Geometry from a differentiable viewpoint”*. Cambridge University Press.
- [61] Frankel, T. (2011). *“The geometry of physics: an introduction”*. Cambridge university press.
- [62] Romero-Germán, O. H., (2011) *“El teorema de Gauss-Bonnet en variedades suaves”* Tesis profesional. Maestría en Matemáticas. Departamento de Matemáticas UAM-I.
- [63] Marsden J. E. , Hoffman M. J., (2012), *“Análisis Básico de Variable Compleja”*, Editorial Trillas
- [64] Paez. J. (2017) *“Cálculo diferencial de varias variables”*. Prensa Facultad de Ciencias UNAM.
- [65] Spivak M. (1995) *“Calculus on Manifolds: A modern approach to classical theorems of advanced calculus”*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [66] Jordan C., (1887), *“Cours d’analyse”*, 587-594
- [67] M. Nakahara. (2003) *“Geometry, topology, and physics. Graduate student series in physics”*. Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia.
- [68] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., & Novikov, S. P. (2000) *“Geometría moderna: métodos y aplicaciones. Geometría de las superficies, de los grupos de transformaciones y de los campos”*. URSS.
- [69] Dubrovin B. A., Fomenko A. I., Nóvikov S. P., (2000) *“Métodos y aplicaciones: Geometría Moderna. Geometría y Topología de las variedades 2”*, Editorial URSS
- [70] Rost, J. (2002) *“Compact Riemann surfaces: an introduction to contemporary mathematics”*. Springer Science & Business Media.
- [71] Do Carmo, M. P. (2016) *“Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition”*. Courier Dover Publications.
- [72] Palmas-Velasco O. & Sánchez-Morgado H. (2007) *“Geometría Riemanniana”*, Prensa Facultad de Ciencias UNAM,