UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Problemas de final abierto como estrategia de enseñanza para la resolución de sistemas de ecuaciones, en educación media superior

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en docencia para la educación media superior

PRESENTA:

Lizette Harumi Paulín Zavala

Tutor principal:

Dra. Verónica del Carmen Quijada Monroy (FES Acatlán)

Comité tutor:

Dra. María del Carmen González Videgaray (FES Acatlán)

Dr. Víctor Manuel Ulloa Arellano (FES Acatlán)

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México, noviembre de 2021

Agradecimientos

A mis padres, por todo su amor, apoyo y comprensión. A mi hermana, que siempre estuvo conmigo. Sin ellos no hubiera sido posible construir este trabajo.

A los profesores Omar Anguiano, Blanca, Virginia López y Francisco Mendoza, por su apoyo y ánimo.

A mis maestros, Asela y Sergio, por sus grandes enseñanzas.

Al CCH Naucalpan y a la UNAM, por la oportunidad para seguir superándome.

A todos los alumnos que participaron en esta investigación, por su paciencia.

Y a mis asesores, por su tiempo y sus recomendaciones.

Integración del sínodo:

Dra. Verónica del Carmen Quijada Monroy (tutora)

Dra. María del Carmen González Videgaray

Dr. Víctor Manuel Ulloa Arellano

Mtra. Luz Arely Carrillo Olivera

Contenido

Índice de Tablas

Índice de Gráficas

Índice de Figuras

Resumen

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han representado un reto, tanto en México como en el mundo, que puede enfrentarse a través del Enfoque de final abierto, el cual es una estrategia japonesa basada en la aplicación de problemas de final abierto (PFA) en las aulas. Dichos problemas son aquellos que tienen más de una solución correcta y cuentan con la ventaja de que permiten a los alumnos responder de acuerdo con su nivel de conocimientos, mientras son guiados por el profesor y apoyados por sus compañeros.

La metodología comparte ideas con el modelo educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades, institución en la que se realizó un estudio. Este consistió en aplicar una estrategia basada en PFA a un grupo de alumnos en la asignatura de Matemáticas I, con el objetivo de identificar si la estrategia permite que los estudiantes desarrollen los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, mediante el método gráfico.

Para ello, se realizó una revisión de literatura con el fin de conocer las características de la metodología, desarrollar la estrategia y aplicarla en el aula. Así, se generaron tres PFA, presentados a los alumnos en hojas de trabajo y se recopilaron datos derivados de sus respuestas, la observación durante las sesiones y dos pruebas, una diagnóstica y una final, a los que se aplicaron diversos análisis.

Mediante los resultados obtenidos, se comprobó la eficacia de la propuesta en cuanto a que los alumnos mejoraron sus conocimientos y habilidades para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas.

Abstract

The teaching and learning of mathematics have represented a challenge, in both Mexico and the world, which can be faced trough the Open-ended Approach, which is a Japanese strategy based on the application of *open-ended problems* (PFA for its acronym in Spanish) in classrooms. These problems have more than one correct solution and have the advantage of allowing students to answer according to their level of knowledge, while being guided by their teacher and supported by their classmates.

The methodology shares ideas with the educational model of the Colegio de Ciencias y Humanidades, institution that carried out a study which consisted of applying a strategy based on PFA to a group of students in the subject of Mathematics I, with the aim of identifying whether the strategy allows students to develop the mathematical knowledge and necessary skills to solve first degree systems of equations with two unknowns, using the graphical method.

For this, a literature review was carried out to know the characteristics of the methodology, develop the strategy and apply it in the classroom. Thus, three PFA were generated, presented to the students in worksheets to collect the data derived from their answers, the observation during sessions and two tests, diagnostic and final, to which various analyzes were applied.

Through the obtained results, the effectiveness of the proposal was verified in that the students improved their knowledge and skills to solve systems of linear equations with two equations and two unknowns.

Introducción

Las matemáticas han tenido una historia de rechazo por parte de varios alumnos en las escuelas y por muchos fuera de ella, opinión que puede encontrarse al conversar con cualquier persona. Los estudiantes pueden considerar a las matemáticas algo difícil, aburrido o hasta temible, lo cual ha llevado, según Barajas (2019), a que sea una de las materias más reprobadas por los alumnos. Por lo tanto, es una asignatura donde se detectan muchos fallos en el aprendizaje de los contenidos, éstos no se dan, o permanecen sin enlazarse con lo previo que ya conocen los estudiantes.

La forma de enseñar y de aprender, entonces, tiene un papel fundamental en esta situación y ha sido estudiada, generando diversas teorías, metodologías y estrategias de enseñanza que pretenden lograr un mejor aprendizaje en el alumno.

Entre ellas, Fonseca y Alfaro (2010) comentan que “la resolución de problemas se ha considerado como una importante estrategia para la enseñanza de las Matemáticas en estudiantes de Educación Media en diferentes partes del mundo” (p. 176). El resolver problemas ha sido un medio histórico para generar conocimiento y que, considerando como objetivo el aprendizaje del alumno y no solo la memorización, puede propiciar habilidades como la reflexión, el análisis y el establecer conexiones entre conceptos.

Además, en los Programas de Estudio Actualizados del Área de Matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades, se establece que “la columna vertebral de la metodología didáctica es la resolución de problemas” (Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades [ENCCH], 2016, p. 6); lo cual, según el mismo Programa, implica que se fomente la reflexión y el trabajo conjunto entre alumnos y entre el profesor y los estudiantes.

Por esta razón, el presente trabajo explora una forma particular de resolución de problemas como estrategia de aprendizaje, a partir de una estrategia desarrollada y aplicada por la profesora y autora de este trabajo, dentro de los principios que propone el modelo educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH): aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser (Dirección General de Información y Relaciones [DGIR], 1971).

Considerando lo anterior, es posible y hasta necesario, resolver problemas en el aula. Para ello, es importante tener claro lo que es un problema, antes de seleccionarlo y evaluar los alcances que tiene en cuanto a conceptos que involucra y habilidades cognitivas necesarias para resolverlo. Un problema será definido, entonces, como una situación para la que no se tiene un camino o un algoritmo inmediato con el cual resolverla, sino que requiere de reflexionar y conjuntar conocimientos previos para hallar una solución que la satisfaga (Kabiri y Smith, 2006; Krulik y Rudnick, 1987, como se citó en Villarreal, 2010; Mihajlović y Dejić, 2015; Nohda, 1986; Viseu y Oliveira, 2012), lo que se profundiza en la sección 2.2.1.

Existen diversos problemas en matemáticas útiles para lograr los objetivos planteados por el CCH, por ejemplo: los que llevan a una solución única; los que requieren de investigaciones extensas sobre los contextos y contenidos matemáticos involucrados; los proyectos; los problemas abiertos, donde existen diversos caminos soluciones o formas de extender el problema para enriquecer su aporte, entre otros.

Todos cuentan con ventajas y desventajas, sin embargo, en este trabajo se utilizan los problemas de final abierto, abreviados más adelante como PFA (aquellos que tienen múltiples soluciones correctas); esta selección se debe a que han demostrado en diversos estudios, reseñados en la sección 2.5, que permiten que los alumnos hagan aportes a la clase desde su propio nivel de conocimiento, generando al menos una respuesta que puede ser discutida y puesta a prueba dentro de un ambiente de cooperación grupal, por lo que resultan particularmente favorecedoras al trabajo en equipo, mismo que también es objetivo en los Programas de estudio del área de matemáticas del CCH.

Otra razón para emplear estos problemas es la poca investigación reportada en México, a pesar de las ventajas enumeradas en investigaciones japonesas, estadounidenses, de Finlandia, entre otras (por ejemplo, Nohda, 1986; Becker y Shimada, 1997; Pehkonen, 1997, 1999, 2007; Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous y Font, 2005; Kabiri y Smith, 2006; Hino, 2007; Klavir y Hershkovitz, 2008; Munroe, 2015; Ninomiya y Pusri, 2015).

Así, en este trabajo, se establece, en el primer capítulo, un marco contextual más detallado en torno al objeto de estudio, indicando las características de la institución donde se aplicará la estrategia de enseñanza propuesta, los objetivos a alcanzar y las razones para hacerlo; además de una justificación basada en lo anterior y en los resultados reportados en diversas evaluaciones del aprendizaje en Matemáticas.

Cabe destacar que esta investigación se tiene como objetivo general identificar si mediante una estrategia basada en la resolución de problemas de final abierto los alumnos de la asignatura de Matemáticas I del Colegio de Ciencias y Humanidades desarrollan los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, mediante el método gráfico.

En el segundo capítulo se describe, en primer lugar, la teoría matemática referente a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones. En segundo lugar, se desarrolla el marco teórico que sustenta la estrategia referente a PFA, comenzando por revisar la generalidad de la resolución de problemas, la resolución estructurada de problemas y el estudio de lecciones, metodologías que apoyan y sostienen el uso de problemas de final abierto en las aulas.

Además, se revisa el llamado enfoque abierto, que es la generalización del enfoque de final abierto empleado en esta investigación. Igualmente, el capítulo presenta las características tanto del enfoque de final abierto como los PFA, incluyendo una propuesta para evaluarlos y una revisión de estudios referentes al tema.

El tercer capítulo se centra en las características de la estrategia de enseñanza que se aplica en el aula. Comienza con una breve revisión de la investigación en educación y luego aborda la forma de investigación para el enfoque de final abierto que han manejado otros autores. Para continuar, se establecen las características que debe abarcar una lección dentro del enfoque de final abierto.

Estas características abarcan todo el proceso, desde la planeación de la estrategia y selección de problemas, pasando por su aplicación, y recomendaciones sobre cómo llevar a cabo la evaluación.

Este capítulo finaliza concretando las especificaciones sobre cómo se llevó a cabo la investigación, particularmente para la recopilación y análisis de datos, además del desarrollo general de la estrategia de enseñanza-aprendizaje y características del grupo de alumnos con el que se trabajó.

En el cuarto capítulo se presentan y analizan los resultados, en cuanto al desarrollo de las sesiones en general, las soluciones propuestas por los alumnos a los problemas de final abierto y los resultados obtenidos para las pruebas diagnóstica y final, además del cuestionario de opinión aplicado a los alumnos después de finalizar la aplicación de la estrategia. También en este capítulo se realiza una breve reflexión sobre los problemas empleados y la forma en que fue dirigida la clase.

Finalmente, el trabajo cierra al proporcionar conclusiones y recomendaciones que consideran el análisis del capítulo cuatro.

Capítulo 1 Marco Contextual

En este capítulo se expone el contexto que rodea la presente investigación, comenzando por algunas características de la educación en México y posteriormente del Colegio de Ciencias y Humanidades, que respaldan y justifican el planteamiento del problema y los objetivos que se enumeran en la segunda mitad del capítulo.

1.1 Matemáticas en el nivel medio superior

El Sistema Educativo Nacional en México tiene como misión "ofrecer instrucción a la población en las diversas modalidades, tipos educativos, niveles y formas de servicio que lo constituyen" (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2009, p. 35) y para ello, se estructura en los subsistemas escolarizado y no escolarizado. El primero ofrece tres niveles educativos: básico, medio superior y superior.

Según el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2009), al nivel medio superior asisten principalmente alumnos entre 15 y 18 años y existen varios modelos educativos que ofrecen elementos continuar en la educación superior (modelos educativos general o tecnológico) o capacitación para integrarse al mercado laboral mediante estudios de carácter profesional técnico.

El bachillerato general ofrece una "educación de carácter general en diversas áreas, materias y disciplinas, a las cuales se da igual importancia en el plan de estudios: español, matemáticas, ciencias sociales, ciencias naturales, disciplinas filosóficas y artísticas, etcétera" (Bazán, 2005, p. 57). Dentro de este modelo de nivel medio superior, se encuentra la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (ENCCH), perteneciente a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

El modelo educativo del Colegio tiene como máximas el "aprender a aprender", "aprender a hacer" y "aprender a ser", que buscan, en pocas palabras, alumnos autónomos que cuenten con conocimientos y metodologías base que les permitan seguir aprendiendo por su propia cuenta, comprendiendo la teoría y aplicando en la práctica, que realicen actividad receptiva y creadora, y adquieran capacidad auto informativa, además de valores humanos, cívicos y éticos (DGIR, 1971; Dirección General del CCH, 2006; ENCCH, 2018).

Para lograr lo anterior, el plan de estudios busca hacer énfasis en las llamadas materias básicas, es decir, las "que le permitan [al alumno] tener la vivencia y experiencia del método experimental, del método histórico, de las matemáticas, del español, de una lengua extranjera, de una forma de expresión plástica" (DGIR, 1971, p. 7).

Así, las matemáticas son consideradas una ciencia básica y necesaria para cumplir con los objetivos del Colegio. Se las concibe como una disciplina que aporta conocimientos, habilidades y destrezas, tales como el razonamiento, las cuales a su vez son importantes, hasta indispensables, para el desenvolvimiento pleno de las personas en la sociedad.

Sin embargo, las matemáticas han mostrado ser una materia que implica muchos problemas para varios alumnos que la cursan, tanto para ser acreditada como, de forma más grave e importante, aprendida. Para visualizar el grado de aprendizaje de los estudiantes en ciertas áreas, incluyendo matemáticas, se han creado diversas evaluaciones a nivel nacional e internacional que dan prueba de la dificultad mencionada.

Ejemplos de instituciones que realizan dichas evaluaciones, son el INEE a nivel nacional, o la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), a nivel internacional.

El INEE aplica desde el 2015 el Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes (Planea), el cual "incluye un conjunto de pruebas del aprendizaje basadas en tres modalidades distintas de evaluación: Evaluación del Logro referida al Sistema Educativo Nacional (ELSEN), Evaluación del Logro referida a los Centros Escolares (ELCE) y Evaluación Diagnóstica Censal (EDC)" (Dirección General de Difusión y Fomento de la Cultura de la Evaluación [DGDFCE], 2015b, p. 2).

Dado que el presente trabajo hace referencia al nivel bachillerato, se revisa a continuación la ELSEN, ya que uno de los niveles donde se aplica es el último grado del nivel medio superior. Los resultados de esta prueba se reportan de forma estatal y nacional, y fue llevada a cabo por primera vez en 2017, edición que revisa en los siguientes párrafos.

Unos de los aspectos que evalúa Planea son los aprendizajes clave en el campo de matemáticas, considerando que este campo "promueve las habilidades para la solución de problemas, la formulación de argumentos para explicar sus resultados y el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones" (DGDFCE, 2015c, p. 4), utilizando para esto el razonamiento más que la memorización.

Respecto a la prueba realizada en 2017, se describen cuatro niveles de aprendizaje de los estudiantes, a saber:

Nivel IV Dominan las reglas para transformar y operar con el lenguaje matemático […]; expresan en lenguaje matemático las relaciones que existen entre dos variables de una situación o fenómeno; y determinan algunas de sus características […]

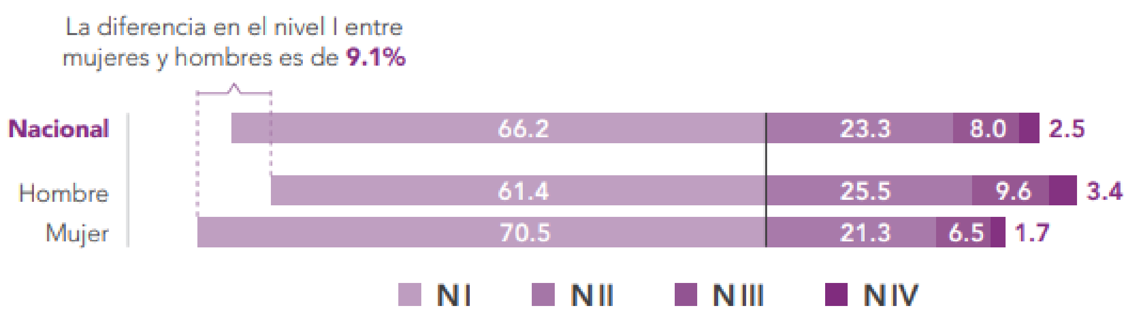
Nivel III Emplean el lenguaje matemático para resolver problemas que requieren del cálculo de valores desconocidos, y para analizar situaciones de proporcionalidad.

Nivel II Expresan en lenguaje matemático situaciones donde se desconoce un valor o las relaciones de proporcionalidad entre dos variables, y resuelven problemas que implican proporciones entre cantidades […]

Nivel I Tienen dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinen incógnitas o variables (representadas con letras), así como para establecer y analizar relaciones entre dos variables. (INEE, 2017, p. 7)

Con base en lo anterior, el INEE reporta que, en Matemáticas, el 66% de los estudiantes se localiza en el nivel I; el 23% en el nivel II; 8% en el nivel III y solamente 2.5% en el nivel IV (INEE, 2017, p. 7), resultados que se muestran en la Figura 1.

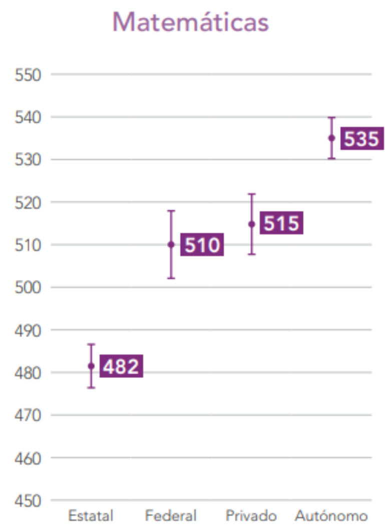
Figura 1. *Porcentaje de estudiantes en cada nivel de logro, por sexo, matemáticas.*



Nota: Tomado de “Planea Resultados nacionales 2017” (p. 16), por INEE, 2017, SEP (http://www.planea.sep.gob.mx/)

Respecto a los resultados en la prueba, cabe que destacar que las puntuaciones de los estudiantes oscilan entre 200 y 800 puntos, y la forma de bachillerato según su control administrativo con puntuación promedio más alta (de 535) es la autónoma, es decir, la que incluye escuelas asociadas con las universidades públicas autónomas (ver Figura 2).

Figura 2. *Puntaje promedio de los estudiantes, por el tipo de control administrativo.*



Nota: Tomado de "Planea Resultados nacionales 2017" (p. 8), por INEE, 2017, SEP (http://www.planea.sep.gob.mx/)

Por otra parte, la OCDE aplica el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés). Consiste en una encuesta que se realiza cada tres años, que "evalúa hasta qué punto [los alumnos] han adquirido los conocimientos y habilidades esenciales para la participación plena en la sociedad" (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2019, p. 1), enfocándose en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias; aplicándose a estudiantes de alrededor de 15 años, edad en la que terminan su enseñanza obligatoria.

La prueba se centra en revisar "el dominio de los procesos, el entendimiento de los conceptos y la habilidad de actuar o funcionar en varias situaciones" (OECD, 2019, p. 1), por lo que no está ligada a los planes de estudio de los países. Cada prueba hace énfasis en una de las tres áreas planteadas, siendo la de lectura para la prueba más reciente, de 2018. Esto significa que hay una mayor cantidad de reactivos dedicados a dicha área.

En cuanto a matemáticas, en la prueba PISA se evalúa la competencia matemática, que, según se menciona en el documento de la OCDE (s. f., p. 12), "implica la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y poder usar e involucrarse con las matemáticas", además de "la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana" (p. 12). Para medirlo, se establecieron niveles de competencia, que se definen a continuación.

Nivel 6 (más de 668 puntos). Los estudiantes […] son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información. Demuestran pensamiento razonamiento matemático avanzado […]

Nivel 5 (de 607 a 668 puntos) […] pueden desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas […], seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relacionados con estos modelos […], trabajar de manera estratégica […]

Nivel 4 (de 545 a 606 puntos). Los estudiantes [trabajan] efectivamente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones […], usar habilidades bien desarrolladas y razonar flexiblemente con cierta comprensión en estos contextos […], construir y comunicar explicaciones y argumentos.

Nivel 3 (de 483 a 544 puntos). [Los alumnos pueden] ejecutar procedimientos descritos claramente, […] seleccionar y aplicar estrategias simples de solución de problemas […], interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, así como razonar directamente a partir de ellas. Pueden generar comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones.

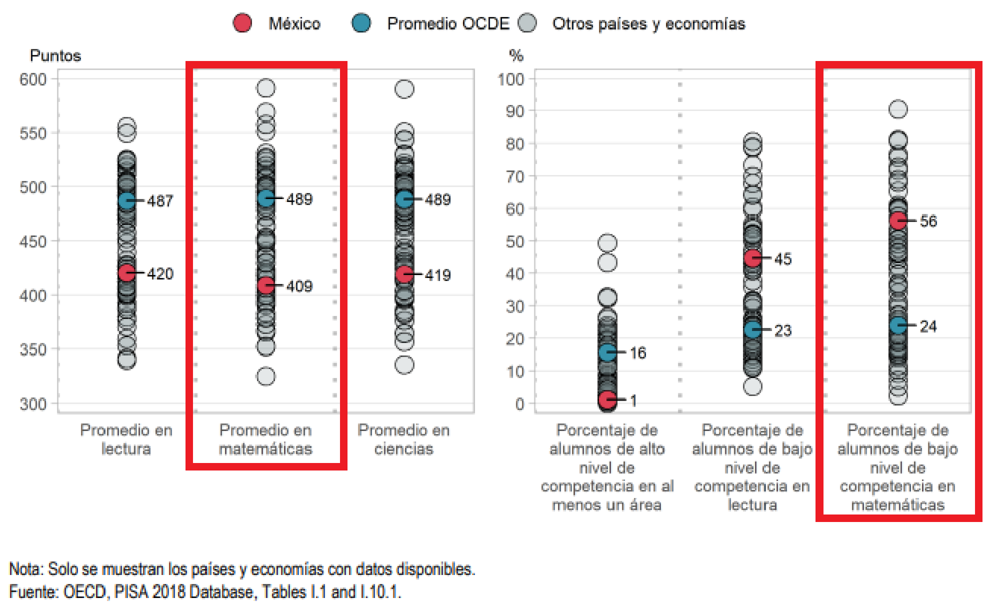
Nivel 2 (de 421 a 482 puntos). […] pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren únicamente de inferencias directas […], extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo tipo de representación. Pueden emplear algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos básicos […]

Nivel 1 (de 358 a 420 puntos). Los estudiantes [contestan] preguntas que impliquen contextos familiares [con] toda la información relevante y las preguntas […] claramente definidas […]; [pueden] identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios […], llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo.

Por debajo del nivel 1 (menos de 358 puntos). […] estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA. (OCDE, s. f., p. 15-16).

Los resultados para México, obtenidos en la prueba del 2018, indican que los alumnos obtuvieron puntajes menores al promedio de la OCDE. Además, “[alrededor] del 44% de los estudiantes […] alcanzó el nivel 2 o superior en matemáticas [pudiendo] interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo se puede representar matemáticamente una situación” (OECD, 2019, p. 3). Mientras que alrededor “del 1% de los estudiantes obtuvo un nivel de competencia 5 o superior en matemáticas” (OECD, 2019, p. 3). Esta situación puede observarse en la Figura 3.

Figura 3. *Desempeño en lectura, matemáticas y ciencias en PISA 2018.*



Nota: Adaptada de Programa para la Evalación Internacional de alumnos (PISA) PISA 2018-Resultados (p. 3), por OECD, 2019, OECD PISA (*https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf)*

Con los resultados anteriormente mencionados, puede notarse que más de la mitad de los estudiantes evaluados mostró tener problemas con su aprendizaje y habilidades en matemáticas, localizándose en los niveles inferiores de los estándares manejados, lo cual habla de un grave problema con respecto a la enseñanza y aprendizaje de esta ciencia.

Esto implica que hay que continuar investigando con el fin de proponer mejores estrategias para lograr que los alumnos logren un aprendizaje verdadero de la materia y no solo se pretenda la memorización de contenidos. Una propuesta para ello se encuentra en el modelo del Colegio de Ciencias y Humanidades.

1.2 Contexto institucional: Colegio de Ciencias y Humanidades

La institución en la que se realizó este estudio fue el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), fundado en 1971 como una propuesta para responder a las necesidades sociales de esa época y con un modelo educativo innovador que pretendía, entre otras cosas, combatir el llamado “enciclopedismo”, donde el énfasis se hace en la memorización y en la adquisición masiva de conocimientos (DGIR, 1971).

Para lograr esto, los conocimientos adquiridos por los alumnos deben permitirles “buscar por sí mismos, encontrar por sí mismos y vivir, o experimentar en primera persona la experiencia de la investigación, del análisis y del descubrimiento científico” (Flores, 1971, p. 32). Se dijo que, al finalizar su formación, el alumno debería saber aprender, estudiar e informarse por su cuenta, puesto que “lo importante no es tanto tener información sino saber cómo encontrarla, cómo manejarla, cómo servirse de ella para crear nuevos conocimientos” (Flores, 1971, p. 32). Todo lo cual se resume en tres principios que a la fecha siguen vigentes: aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser (DGIR, 1971).

La metodología de enseñanza planteada da énfasis al ejercicio y práctica de conocimientos teóricos, donde el papel del profesor y su actitud se modifican, para convertirlo en guía y compañero de los alumnos, al tiempo que los estudiantes participan de forma más activa en el proceso de aprendizaje, es decir, se vuelven menos pasivos (DGIR, 1971).

Flores (1971), comentó que, para seleccionar las materias básicas a impartir en el Colegio, se consideró que los conocimientos y la formación integral de los alumnos debían concretarse en cuatro líneas fundamentales de conocimiento y enseñanza. Con base en esto, se propone una división del conocimiento por áreas, caracterizadas por un lenguaje o un método básico, a saber, Matemáticas, el método científico experimental, el método histórico-social y el dominio de la expresión hablada y escrita del español.

En cuanto a matemáticas, el mismo autor justifica su inclusión por su función de organizar formalmente el pensamiento. Su característica es un lenguaje propio y culto, que constituye un elemento indispensable para comprender, estudiar, modelar y hacer predicciones sobre el entorno físico y social, que además contribuye a la formación intelectual del individuo (Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades [DGCCH], 2006).

Para abundar más sobre la concepción del Colegio en torno a las matemáticas, el documento Orientación y Sentido de las Áreas, elaborado en 2006 por la Dirección General del CCH, las define como

> un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurado que […] estudia las características y las relaciones cuantitativas y cualitativas de objetos abstractos que surgen de analizar situaciones concretas, mediante procesos y razonamientos cada vez más depurados. Para trabajar con ellos, se utilizan diversos lenguajes, sujetos a reglas específicas, que contribuyen a dotar al conocimiento matemático de sus cualidades de generalidad y abstracción. (DGCCH, 2006, p. 18).

Sin embargo, para que las matemáticas contribuyan como se pretende al perfil de un egresado del Colegio, se requiere modificar la enseñanza tradicional para que la materia promueva en los alumnos la formación de estructuras del pensamiento que permitan la comprensión de relaciones, formas y objetos matemáticos; además de capacidades para resolver problemas y argumentar sus afirmaciones, lo cual se resume en la generación de un pensamiento matemático (DGCCH, 2006).

Así que, como método de enseñanza para el área de matemáticas, en los Programas de Estudio Actualizados se establece que “la columna vertebral de la metodología didáctica es la resolución de problemas” (ENCCH, 2016, p. 6). Lo que implica que tanto los métodos como los conceptos deben surgir a partir de esta actividad, misma que puede aportar actitudes positivas hacia el trabajo en equipo, resaltar la importancia de la comunicación entre pares y con el profesor, y fomentar la solidaridad.

Además, la resolución de problemas se contempla en el perfil del egresado propuesto por el Colegio: desde que el alumno cuente con diversas estrategias para resolverlos y representarlos, hasta que pueda reflexionar sobre su proceso de resolución y solución, además de utilizar la actividad como un generador de conocimientos.

Dado lo anterior, dentro del Colegio, la resolución de problemas para el área de matemáticas se plantea desde dos vertientes: como una habilidad que debe desarrollarse en los alumnos; y como medio para presentar y hacer surgir en el alumno una serie de conceptos y métodos “como necesidad en la etapa de comprensión de situaciones problemáticas o como generalización de la resolución y la solución de éstas” (ENCCH, 2018a, p. 6), por lo que las matemáticas, también se consideran la herramienta o el medio para generar conocimientos.

Ambas vertientes se unen una con la otra, y al respecto se sugiere:

> Introducir el estudio de contenidos [matemáticos] mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no conlleven de inicio fuertes dificultades operatorias,

> de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar. (DGCCH, 2006, p. 20).

Dada la relevancia que tiene la resolución de problemas en la formación de los alumnos, bajo las características ya mencionadas, esta forma de enseñanza-aprendizaje se detalla un poco más en los Programas de estudios del CCH referentes a la materia, comentando que "muchos [alumnos] abordan esta actividad en forma caótica y con descuido, por lo que el resolver problemas aparte de ser una metodología didáctica, debe ser contemplado como objeto de aprendizaje" (ENCCH, 2018a, p. 6).

Entonces, es necesario apoyarse de la teoría referente a la resolución de problemas, donde uno de los autores representantes, mencionado por los Programas de Estudios, es George Polya, cuyas ideas, de forma muy general, implican dividir la resolución de un problema en cuatro etapas: Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Además, Polya sugiere guiar a los alumnos con preguntas para apoyar hilos de pensamiento que lleven a la resolución del problema y con heurísticas (estrategias) útiles que tienen el mismo objetivo (1989).

Así, la resolución de problemas puede llevarse al mismo tiempo como medio y fin del aprendizaje, introduciendo con ella estrategias y metodologías que llevan a explorar conceptos y procedimientos propios de las matemáticas o ejercitarse en la resolución de un problema, a la vez que se practica la aplicación de contenido matemático, buscando que los alumnos sean capaces de resolver problemas de manera independiente.

La propuesta de emplear esta metodología se justifica en que el resolver problemas, bien seleccionados, puede llevar a despertar el interés en las matemáticas, fomentar el diálogo y el trabajo en equipo, y lograr el desarrollo de habilidades matemáticas como son la estimación, la generalización, el formalizar "material matemático", tener reversibilidad de pensamiento, y visualización espacial (DGCCH, 2006).

1.3 Planteamiento del problema

Se ha enfatizado que la metodología de enseñanza propuesta por el CCH para Matemáticas es la resolución de problemas, dada la multiplicidad de ventajas que provee para la formación del alumno en la asignatura y en el fomento de valores como solidaridad y trabajo en equipo, y para la generación de conocimiento. Sin embargo, para lograr esto, el Colegio indica que debe haber una buena selección de problemas a utilizar en el aula.

En particular, un tipo de problemas que pueden emplearse son los llamados problemas de final abierto (PFA), los cuales se caracterizan por tener más de una solución correcta. Sin embargo, al realizar una revisión de literatura, puede encontrase poca información sobre la efectividad del uso de este tipo de problemas en las clases de matemáticas, en particular en el nivel medio superior del sistema educativo de México.

Por tanto, es pertinente realizar investigación para utilizar esta estrategia que ha resultado muy útil en otros países, por ejemplo, en las investigaciones reportadas por Zaslavsky (1995), Pehkonen (1997), Nohda (2000), e Inprashita (2006), en términos de comprensión y demostración de conocimientos matemáticos, además del fomento de habilidades como la creatividad y las relativas a la comunicación.

Por otra parte, el tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones es parte de la temática de estudio para el CCH como la última unidad para Matemáticas I (ENCCH, 2016), y tiene aplicaciones en semestres posteriores y en algunas carreras del nivel superior. Además, se consideró en este trabajo que los PFA permiten abordar la dificultad de los alumnos referente a la representación gráfica de los sistemas, como se detalla en la sección 1.3.3 Justificación.

Por tanto, considerando la importancia de la temática y las dificultades relacionadas con la representación gráfica de los sistemas de ecuaciones, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

> ¿A través de una estrategia basada en la resolución de problemas de final abierto es posible que alumnos de la asignatura de Matemáticas I en el Colegio de Ciencias y Humanidades desarrollen los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, mediante el método gráfico?

Para especificar los “conocimientos matemáticos y habilidades necesarias”, se toma en cuenta que, según el Programa de Estudios de Matemáticas (ENCCH, 2016) para el tema de sistemas de ecuaciones lineales, los alumnos deben tener conocimiento sobre que las soluciones de una ecuación lineal con dos variables son infinitas y que, en su representación gráfica, siguen un patrón geométrico definido, además de resolver sistemas de ecuaciones a partir de sus gráficas, considerando cada ecuación por separado.

Por otra parte, para poder resolver un sistema de ecuaciones en forma gráfica, Ángel (1992), al desarrollar el tema, menciona en primer lugar la definición de sistema de ecuaciones lineales (o ecuaciones simultáneas) y su solución; en segundo lugar, y específicamente para la solución gráfica, maneja la construcción de la gráfica y el identificar puntos de intersección o la ausencia de estos, para determinar la solución del sistema.

Considerando lo dicho en los párrafos anteriores, para que el alumno pueda resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones, requiere conocer:

- La representación gráfica de una ecuación con dos variables.
- Lo que es un sistema de ecuaciones
- El punto de intersección entre dos rectas y su significado como solución simultánea al sistema que puede representar.

Además de las habilidades:

- Reconocer un sistema de ecuaciones, en diferentes representaciones (en específico gráfica y algebraica).
- Identificar el punto de intersección entre dos rectas.

1.3.1 Objetivos

La pregunta de investigación antes mencionada implica los objetivos siguientes:

General: Identificar si mediante una estrategia basada en la resolución de problemas de final abierto los alumnos de la asignatura de Matemáticas I del Colegio de Ciencias y Humanidades desarrollan los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, mediante el método gráfico.

Específicos:

1. Elaborar una estrategia basada en el uso de problemas de final abierto, de corte puramente matemático, para la enseñanza del tema de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, en la materia de Matemáticas I del Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Naucalpan, mediante el método gráfico.

2. Aplicar en el aula la estrategia en un ambiente que procure la autonomía, el trabajo en equipo y el trabajo grupal.
3. Recopilar, a través de la observación y el registro de resultados, el proceso de aplicación de la estrategia.
4. Analizar los resultados en el aprendizaje, en términos de conocimientos matemáticos, habilidades y comprensión.

Para esto, con fundamento en Sawada (1997) y Mahlobo (2007), se entiende como “comprensión” el hecho de que el alumno resuelva sistemas de ecuaciones a partir de notar que la solución tiene un significado dentro de las representaciones gráfica y algebraica de dicho sistema, es decir, que haga conexiones coherentes con otros conceptos, y no aplique solamente un algoritmo fijo que haya memorizado.

1.3.2 Hipótesis

Una estrategia basada en la resolución de problemas de final abierto promueve que alumnos de la asignatura de Matemáticas I en el Colegio de Ciencias y Humanidades desarrollen los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas a partir de su representación gráfica.

1.3.3 Justificación

Se ha mencionado que los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones forman parte de la temática de estudio para el CCH como la última unidad para Matemáticas I (ENCCH, 2016). Sin embargo, se retoma como herramienta de apoyo para resolver problemas en otros semestres. Por ejemplo, dentro de la temática de ángulos (materia Matemáticas II, semestre 2), cálculo de áreas de triángulos sobre el plano cartesiano (materia Matemáticas III, semestre 3), determinar elementos de funciones (materia Matemáticas IV, cuarto semestre). Además de tener aplicaciones dentro del Cálculo, la Física (por ejemplo, en problemas de distancias y velocidades), y la Química (por ejemplo, al calcular cantidades de sustancias para obtener ciertas concentraciones de estas), entre otras.

También se encuentra utilidad al tema en el nivel superior, particularmente en carreras como ingeniería, en materias, por ejemplo, relacionadas con álgebra lineal o aplicadas a electricidad o computación. Smith, Charles, Dossey, Keedy y Bittinger (1992) comentan que "muchos problemas se pueden resolver traduciéndolos en un sistema de ecuaciones" (p. 374); mientras que Swokowski (1983) afirma que "en las aplicaciones modernas de las matemáticas, los sistemas de ecuaciones más comunes son aquellos en los que todas las ecuaciones son lineales" (p. 378).

Con lo anterior puede notarse el valor de una buena enseñanza y aprendizaje del tema, dentro del cual se encuentran algunas dificultades a considerar. Entre ellas, Segura de Herrero (2004), aludiendo a (Panizza et al., 1995), comenta que los alumnos no verifican la solución obtenida, evidenciando que "hay una desarticulación entre el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución" (p. 52). Segura de Herrero (2004) también menciona que hay un énfasis en lo algorítmico, dejando de lado el poder transitar entre representaciones, pese a que esto sea "necesario para acceder a un objeto matemático" (p. 52), en este caso los sistemas de ecuaciones.

En particular, Soto (2012) señala, con base en varios autores y entre otras dificultades, la existente para considerar propiedades que condicionan la cantidad de soluciones existente para un sistema de ecuaciones, para transitar entre representaciones gráfica y algebraica de los sistemas y para considerar lo que ocurre en la parte geométrica, ya sea en cuanto a sistemas sin solución o para interpretar el cruce con los ejes cartesianos como la solución.

Por otra parte, se ha planteado en diversos trabajos la necesidad de enfocarse en los aprendizajes de los alumnos, pues para ellos es más útil comprender que aprender de memoria procesos que probablemente no volverán a aplicar tal cual se los enseñaron, sino que requerirán de habilidades para enfrentarse a problemas en otros contextos (García, Sempere, Marco de la Calle y De la Sen, 2011; Martínez, 2008; Shepard y Brennan, 2006).

En particular, el Colegio de Ciencias y Humanidades pretende "combatir el vicio ... llamado enciclopedismo" (DGIR, 1971, p. 7), de modo que el alumno sepa aprender e informarse por su cuenta y que conozca "los métodos y técnicas necesarios y el hábito de aplicarlos a problemas concretos y de adquirir nuevos conocimientos" (DGIR, 1971, p. 4).

Para lograr este propósito, se propone que "la metodología de enseñanza [haga] énfasis en el ejercicio y práctica de los conocimientos teóricos impartidos" (DGIR, 1971), lo cual se aterriza a la enseñanza de las matemáticas como el empleo de resolución de problemas en el aula, como principal herramienta didáctica, como medio y fin del aprendizaje y como "actividad fundamental para lograr un ser analítico, lógico y crítico" (ENCCH, 2016, p.5)

La resolución de problemas como metodología didáctica consiste en el empleo de secuencias problemáticas que hayan sido seleccionadas de modo que despierten el interés de los estudiantes y hagan que los conceptos y métodos surjan en el alumno "como necesidad en la etapa de comprensión de situaciones problemáticas o como generalización de la resolución y la solución de éstas" (ENCCH, 2016, p.6).

Entonces, si bien existen varios tipos de problemas que pueden emplearse en las aulas, como proyectos, problemas con solución única o problemas abiertos, por mencionar algunos; para el presente trabajo se eligen los de final abierto, por ser una herramienta muy útil para conseguir aprendizajes en matemáticas, según autores como Pehkonen (1999).

Además, compartir las diversas soluciones a este tipo de problemas resulta muy importante para realizar un análisis de la situación y concluir en torno a conceptos o procesos implicados. Los PFA fomentan también el trabajo en equipo, la creatividad, entre otras habilidades (Ochoviet y Scorza, 2017), y sus características coinciden con lo que el CCH pretende lograr con sus alumnos.

Por otra parte, la búsqueda de mejores métodos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas se ve justificada por los bajos resultados que los alumnos han obtenido en pruebas como Planea y PISA, mencionadas con anterioridad, lo cual también se refleja en instituciones como el CCH.

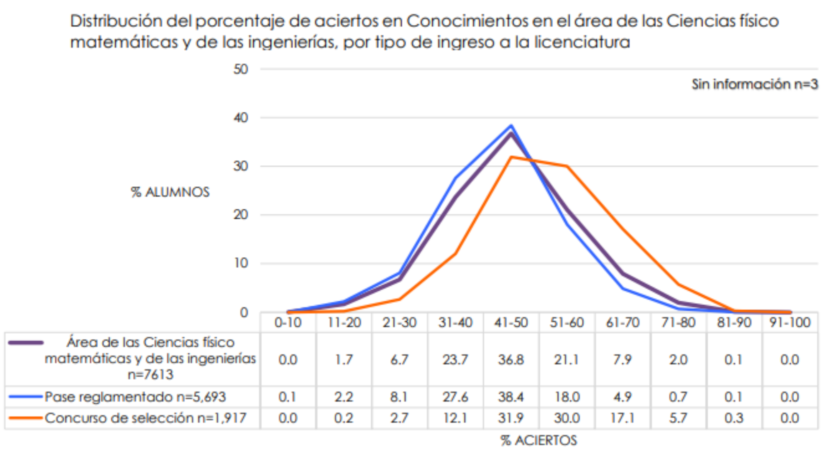
Dentro del Colegio, las matemáticas son una materia generalmente considerada difícil. Uno de los instrumentos que evalúa esto es el Examen Diagnóstico Académico (EDA), que busca evaluar el logro de los aprendizajes que los alumnos hayan alcanzado y se aplica a una muestra representativa de alumnos al final de cada semestre. Entre los resultados que pueden apreciarse gracias a esta prueba, reportados en el Informe de trabajo 2018-2019 del Dr. Benjamín Barajas Sánchez, director general del CCH en ese momento (Barajas, 2019, p. 50-52), se encuentra un análisis referente a la dificultad de las asignaturas, que se calcula, para cada ítem en la prueba, dividiendo el número de alumnos que respondió de forma correcta, entre el total que presentó la prueba.

Según este criterio, las materias de matemáticas que se imparten en el Colegio son consideradas difíciles o muy cercanas a esto, ya que se reporta que, con excepción de Matemáticas I, impartida en primer semestre, el promedio de aciertos es inferior al 50%.

Por ejemplo, para matemáticas II (impartida en segundo semestre) el promedio fue de 31.1%; para Matemáticas III de 37.6% y para Matemáticas IV de 41.6%.

Además, el mismo informe menciona que entre las asignaturas de mayor índice de reprobación se encuentran las matemáticas (Barajas, 2019). Finalmente, la UNAM aplica también un examen diagnóstico de conocimientos a los alumnos al ingresar a la licenciatura, y los resultados que muestra, referentes a las matemáticas, indican que entre el 30 y 40% de los alumnos respondieron entre el 31 y el 40% de los ítems y que alrededor del 70% de ellos obtuvo menos de la mitad de los ciertos (Ver Figura 4).

Figura 4. *Distribución de porcentaje de aciertos que incluye el área de matemáticas.*



	0-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
Área de las Ciencias físico matemáticas y de las ingenierías n=7613	0.0	1.7	6.7	23.7	36.8	21.1	7.9	2.0	0.1	0.0
Pase reglamentado n=5,693	0.1	2.2	8.1	27.6	38.4	18.0	4.9	0.7	0.1	0.0
Concurso de selección n=1,917	0.0	0.2	2.7	12.1	31.9	30.0	17.1	5.7	0.3	0.0

Nota: Tomado de Exámenes para el diagnóstico de conocimientos. Resultados de los alumnos que ingresan al nivel licenciatura, 2020 (p. 54), por Sánchez, Martínez, Buzo, Goytia, Hernández, García, y Manzano, 2020, UNAM.

Estos datos muestran que la enseñanza de las matemáticas en el CCH requiere de un mayor esfuerzo para lograr mejores resultados en las evaluaciones, que se reflejen en el desempeño de los alumnos en niveles educativos superiores y en su vida cotidiana y profesional.

Considerando todo lo anterior, es importante revisar las características particulares de los problemas de final abierto que los hacen adecuados para promover y mejorar el aprendizaje, en particular para los sistemas de ecuaciones lineales, revisión que se realiza en el siguiente capítulo.

Capítulo 2 Marco Teórico

Los sistemas de ecuaciones son un tema dentro de las matemáticas que puede abordarse desde una perspectiva algebraica y gráfica, relacionando ambas para tener un panorama más completo del concepto.

Por tanto, en este capítulo se desarrolla brevemente el tema de sistemas de ecuaciones desde la perspectiva matemática, para después abordar los conceptos mencionados en torno a los problemas de final abierto, todo encaminado a lograr una óptima lección basada en dichos problemas, que contribuya al aprendizaje de los alumnos.

Por su parte, los problemas de final abierto se encuentran dentro de un marco teórico amplio, que se desarrolla a continuación. Inicia con la resolución de problemas en general, se justifica históricamente y se apoya en métodos como la resolución estructurada de problemas y el estudio de lecciones. Además, requiere que tanto al alumno como el profesor desempeñen un papel particular, que exista un diseño cuidadoso del problema y de la estrategia didáctica, y una forma de evaluación basada en la observación y escucha de las participaciones de los estudiantes, entre otros.

2.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Se ha mencionado ya que la temática a cubrir con los problemas de final abierto son los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones, por lo que antes de abordar lo que son los PFA y la metodología que los rodea, se presenta brevemente su fundamento matemático.

En primer lugar, hay que mencionar que una ecuación es “un enunciado donde se muestra que dos expresiones algebraicas son iguales” (Ángel, 1992, pág. 67). Por ejemplo,

$$x + 3 = 0,\ x^2 - 5 = 4x,\ (x^2 - 9)\sqrt[3]{x + 1} = 0,$$

se denominan ecuaciones en x, donde x es una variable (Swokowski, 1983, pág. 52).

Las ecuaciones son útiles para formular y resolver innumerables situaciones, por lo que el concepto va de la mano con conocer la forma de resolverlas. La solución o raíz de una ecuación es el valor, o valores, que al ser sustituidos en la ecuación producen un enunciado verdadero; en otras palabras, es el valor que satisface la ecuación (Swokowski, 1983).

En particular para lo que se aborda en este trabajo, “una ecuación lineal en una variable es una ecuación de la forma

$$ax + b = c$$

para a, b, c números reales y $a \neq 0$” (Ángel, 1992, pág. 67).

Aquí destaca que “x” está elevada exactamente al exponente 1 y está siendo multiplicada por un valor constante. Además, es posible tener ecuaciones en más de una variable, por ejemplo, “una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ (o, equivalentemente, $ax + by = -c$) se llama ecuación lineal en x e y” (Swokowski, 1983, pág. 377).

En segundo lugar, cuando se requiere encontrar una solución común a dos o más ecuaciones, se dice que se tiene un sistema de ecuaciones. Si estas son lineales, entonces reciben el nombre de ecuaciones lineales simultáneas o sistema de ecuaciones lineales (Ángel, 1992; Smith, Charles, Dossey, Keedy, y Bittinger, 1992). Aunque “podemos considerar sistemas de *cualquier* número de ecuaciones en *cualquier* número de variables” (Swokowski, 1983, pág. 375).

Cabe notar que los autores utilizan de manera indistinta las palabras “incógnita” y “variable”, Lehmann (1986, p. 67) comenta que “un símbolo que puede representar diferentes valores se llama una *variable*”, mientras que Drooyan y Wooton (1991, p. 15), añaden que “a veces también se denominan *incógnitas* a estos símbolos”**.**

En este trabajo se consideran únicamente los sistemas con dos ecuaciones y dos variables, dándose preferencia a la palabra “incógnita” para hacer referencia a las literales cuyo valor va a determinarse en las ecuaciones.

Si las incógnitas son x e y, entonces el sistema tendrá la forma

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = a \\ b_1x + b_2y = b \end{cases}$$

Donde los coeficientes son números reales (Swokowski, 1983).

La solución a un sistema de ecuaciones va a ser el conjunto de números que satisfagan al mismo tiempo a todas las ecuaciones que forman parte del sistema. Para el caso que se maneja, su solución será “una pareja ordenada que hace que ambas ecuaciones sean verdaderas” (Smith et al, 1992, p. 368).

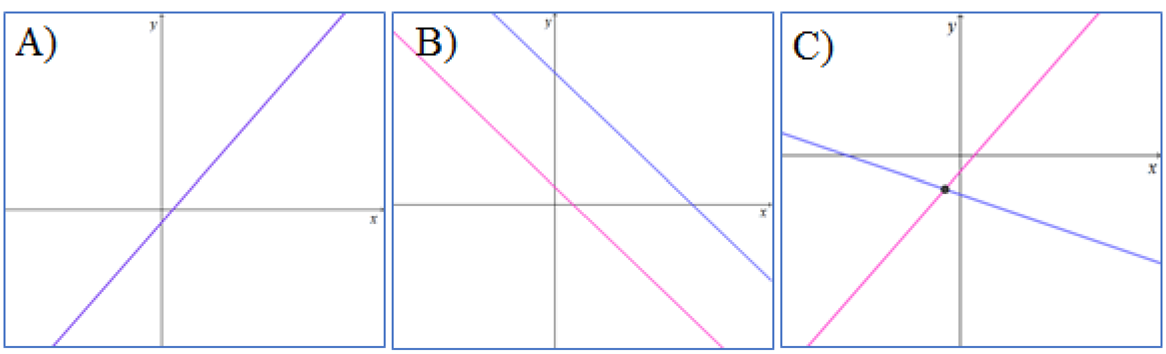
Entonces, el resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas (2x2) significa determinar ese par ordenado (a, b). Si se tiene un sistema en x y en y, al sustituir a y b respectivamente por x y por y, se obtendrán dos enunciados verdaderos (Swokowski, 1983). Y dos sistemas con las mismas incógnitas serán equivalentes si sus soluciones son exactamente las mismas (Swokowski, 1983).

Una manera de resolver un sistema de ecuaciones es a partir del trazo de las gráficas de las ecuaciones. Para ello, hay que mencionar que "la gráfica de una ecuación en x e y consiste en todos los puntos de un plano coordenado que son soluciones de dicha ecuación" (Swokowski, 1983, pág. 371). Así, la solución al sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas es el punto o puntos de intersección, es decir, donde las gráficas se cortan (Smith et al, 1992; Swokowski, 1983).

En particular, la gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas es una línea recta (Swokowski, 1983). Por tanto, se pueden tener tres situaciones al trazar la gráfica en el caso de tener dos ecuaciones (considerando que están en x y en y):

A) Las rectas coinciden en todos sus puntos (es la misma recta, ver Figura 5A).
B) Las rectas son paralelas (ver Figura 5B).
C) Las rectas se cortan en un punto (ver Figura 5C).

Figura 5. *Posibles situaciones al trazar la gráfica de dos rectas*



Dado que la solución a un sistema de ecuaciones lineales 2x2 está dada por el punto de intersección, Swokowski (1983) menciona que los tres casos anteriores pueden interpretarse, respectivamente, según el siguiente teorema:

"Dado un sistema de ecuaciones en dos variables, uno y solo uno de los siguientes enunciados es verdadero:

(I) El sistema tiene un número infinito de soluciones.
(II) El sistema no tiene soluciones.

(III) El sistema tiene exactamente una solución.” (p. 382)

Cuando el sistema tiene solución, es consistente, pero cuando hay una infinidad de soluciones, se añade que las ecuaciones del sistema son dependientes; mientras que cuando no existe solución, el sistema es inconsistente (Ángel, 1992; Swokowski, 1983).

Cabe mencionar que el tipo de sistema de ecuaciones que se tiene puede determinarse al escribir las ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = mx + b; donde\ m, b \in \mathbb{R}, m \neq 0$$

para luego hacer una comparación entre los valores de las pendientes (m) y las ordenadas al origen (b) (Ángel, 1992).

Cuando las pendientes son iguales, pero las ordenadas al origen distintas, el sistema es inconsistente; en cambio, si el valor de la ordenada al origen es el mismo, las ecuaciones del sistema son dependientes; en el caso de que las pendientes sean distintas, se tiene el caso de un sistema consistente (Ángel, 1992).

Finalmente, hay que resaltar que, al hacer un análisis gráfico de un sistema de ecuaciones, no siempre se tendrán las soluciones exactas (Ángel, 1992; Smith et al, 1992; Swokowski, 1983). Si los valores de las incógnitas no son enteros, o las ecuaciones son complicadas, puede darse una respuesta aproximada, cuya exactitud dependerá “del cuidado con que [se] trace [la] gráfica y la escala utilizada” (Ángel, 1992, pág. 341).

Por tanto, cuando se requiera de una respuesta más precisa, lo que debe hacerse es no limitarse a una solución a partir de gráficas, sino recurrir a algún método algebraico para resolver (Ángel, 1992).

Por otra parte, este tema puede abordarse en el aula a partir de la resolución de problemas, lo cual se retoma en los siguientes apartados.

2.2 Resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje

Actualmente, la resolución de problemas es un tema recurrente cuando se habla de educación matemática. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), en sus Estándares, afirma que así “como ha aumentado drásticamente el nivel de los conocimientos matemáticos que necesita un ciudadano inteligente, también han crecido el de pensamiento matemático y el de resolución de problemas requeridos en el trabajo" (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, p. 4).

Además, el uso de problemas en las aulas está justificado en estudios y teoría que afirman que promueve habilidades útiles para la vida escolar y cotidiana. Varios autores han escrito al respecto. Por ejemplo, Pehkonen (1999), comenta que la enseñanza de las matemáticas en cada nivel debe contener dos componentes en proporciones adecuadas (quizás, en dos a uno), que son: habilidades de cálculo, hasta automatizar; y habilidades para la resolución de problemas, de manera que cada alumno reúna sus propias experiencias. Por su parte, Silver et al (2005), afirman que los problemas son fundamentales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y constituyen la base de la actividad intelectual en el aula.

Sin embargo, esta justificación puede retomarse desde una perspectiva más general, dependiendo quién sea el centro de la educación. Una forma de impartir clases es mediante lecciones tipo conferencia, donde los estudiantes escuchan pasivamente a los maestros, tratando de absorber o reproducir el conocimiento presentado por el profesor, situación que provoca que las oportunidades de los alumnos para comprender los conceptos y procedimientos matemáticos no se maximicen (Takahashi, 2006; Munroe, 2015). Esta metodología se considera "centrada en el profesor".

Como contraparte, la metodología "centrada en el estudiante" es la más adecuada para desarrollar pensadores críticos, aprendices autosuficientes y solucionadores de problemas (Munroe, 2015), habilidades todas necesarias para la vida en la actualidad.

La pedagogía centrada en el estudiante tiene sus orígenes en la teoría del desarrollo constructivista (de Piaget) y se caracteriza por buscar que los estudiantes sean participantes activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde cada alumno controla el ritmo y, en algunos casos, el contenido de su aprendizaje (Munroe, 2015).

Esta metodología se ha visto como un medio para desarrollar en los estudiantes habilidades de pensamiento de orden superior, que es uno de los objetivos de la educación matemática (Munroe, 2015; Pehkonen, 1997). En ella, los estudiantes deben participar activamente y realizar actividades matemáticas (Takahashi, 2006), entre la cuales se cuenta la resolución de problemas, lo cual, a su vez, es una buena forma de fomentar la comunicación matemática (Viseu y Oliveira, 2012).

Esto se ve reforzado en el informe *Pisa 2012 Result: Ready to learn. Students' engagement, drive and self-beliefs*, donde se distinguen cuatro categorías en las estrategias de los maestros para fomentar el aprendizaje de los estudiantes: uso de estrategias de activación cognitiva, instrucción dirigida por el maestro, orientación del estudiante y uso de la evaluación formativa (Asami, 2015).

Dentro de las estrategias de activación cognitiva se caracterizan ocho situaciones: el profesor hace preguntas para que los estudiantes reflexionen; presenta problemas que requieren pensar durante un tiempo prolongado; pide a los alumnos que decidan sobre los procedimientos; presenta problemas en diferentes contextos; ayuda a los estudiantes a aprender de los errores; pide a los estudiantes que expliquen cómo resolvieron un problema; presenta problemas que requieren aplicar lo aprendido en nuevos contextos; y presenta problemas que pueden resolverse de diferentes formas (Asami, 2015).

Por su parte, la NCTM, en uno de sus Estándares, recomienda que, a través de la resolución de problemas en matemáticas, los estudiantes adquieran formas de pensar, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza (NCTM, 2000, p. 52, citado en Kabiri y Smith, 2006).

Los Estándares también mencionan que cuando “los alumnos trabajan con ahínco para resolver un problema complicado o para entender un concepto complejo, experimentan un especial sentimiento de logro, lo que conduce a una buena disposición para continuar y ampliar su compromiso con las matemáticas” (NCTM, 2000, p. 22). Además, la NCTM añade que, mediante la resolución de problemas, pueden desarrollarse la fluidez en los procedimientos y la comprensión conceptual.

En Japón, por ejemplo, Hino (2007) menciona que la resolución de problemas proporciona información sobre el uso que hace el estudiante de sus conocimientos y habilidades, sobre sus puntos de vista y formas de pensar matemáticos; además de que examinar los procesos de resolución permite evaluar el pensamiento y la actitud de los estudiantes.

En las lecciones de matemáticas impartidas en este país, se busca que las clases estén centradas en el estudiante, los profesores parecen tener un papel menos activo y los problemas empleados son bastante exigentes, tanto desde el punto de vista procedimental como conceptual (Stigler y Hielbert, 1999, p. 27, como se citó en Takahashi, 2006).

Dadas estas características, y que el “sistema educativo japonés se ha caracterizado por los altos resultados de sus educandos y educadores en la resolución de problemas en pruebas internacionales estandarizadas, tales como PISA y TIMSS; así como por sus novedosos métodos educativos” (Fonseca y Alfaro, 2010, p. 181), en este trabajo se consideró pertinente utilizar el enfoque de final abierto que se describe detalladamente más adelante.

Por otra parte, “desde la antigüedad, los problemas matemáticos han tenido su lugar de privilegio dentro del currículo matemático” (Stanic y Kilpatrick, 1988, como se cita en Fonseca y Alfaro, 2010, p. 178). En las escuelas, el centro ya no son los procedimientos y el cálculo, sino el análisis, es decir, se ha trasladado “el foco desde el aprendizaje de contenidos hacia el desarrollo de competencias matemáticas, tales como: razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, usar lenguaje disciplinar” (OECD, 2000, como se citó en Martínez, Araya, y Berger, 2017, p. 986-987).

Según Wilson, Fernandez, y Hadaway (1993), el arte de la resolución de problemas es el corazón de las matemáticas, muchas de sus aplicaciones y su construcción a lo largo de la historia, han sido producto del planteamiento y resolución de problemas, provenientes tanto del mundo real, como de los retos impuestos por la propia matemática.

Según De Faria (2008),

> a partir de la década de los 60 la resolución de problemas ha recibido un enorme impulso, especialmente en la educación matemática. En el documento Agenda para la acción (1980) del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM), la resolución de problemas fue colocada como el foco de la educación matemática para la década de los 80. (p. 32).

Además, esta tarea se ha considerado en varios países “como una parte importante en la educación matemática” (Fonseca y Alfaro, 2010, p. 176), ya que se ha buscado un acercamiento a matemáticas que sean realmente útiles a los estudiantes y que además los ayuden a comprender lo que es esta ciencia y cómo se construye, aportando conocimientos interconectados, tanto dentro de ella como en relación con otras disciplinas y la vida diaria.

Actualmente se sabe que la resolución de problemas es una herramienta muy poderosa y versátil para lograr diversos objetivos dentro del aprendizaje de las matemáticas. Es poderosa en el sentido de que “integra objetivos interdisciplinarios dentro de las propias Matemáticas, por ejemplo, geometría, álgebra y funciones; así como multidisciplinarios, por ejemplo, Matemáticas, Ciencias e Historia [...], potencia los aprendizajes activos y colaborativos dentro de los énfasis curriculares modernos” (Fonseca y Alfaro, 2010, p. 176)

Por su parte y con base en varios autores, Villarreal (2010) comenta que

> trabajar en resolución de problemas permite: una aproximación al conocimiento de manera general e interrelacionada; adquirir la habilidad y conocimientos para comprender un problema [...]; detectar errores y situaciones anómalas y [aprender] de ellos; discernir [...] datos relevantes de aquellos que no aportan información; buscar estrategias heurísticas [...], tratando en forma sistemática de optimizar sus resultados; aprender procedimientos y algoritmos e implementarlos cuando corresponda; adquirir estrategias para enfrentar y resolver dificultades que emergen en la solución de problemas; adquirir habilidades y conocimientos para realizar investigaciones y hacer búsquedas de información; analizar las soluciones encontradas [...]; tener una capacidad de autoevaluar su trabajo y el de sus compañeros; poder discutir respecto a lo aprendido y como lo han aprendido. (p. 120)

Por su parte, Mahlobo (2007) afirma que cuando un estudiante aprende mediante un enfoque basado en problemas, donde se realiza trabajo en grupo, hay una "comprensión profunda" de las matemáticas, en lugar de confiarse solo en la memorización o aplicación de reglas predeterminadas, ya que la tarea se presta a que se observen múltiples perspectivas e interpretaciones de un mismo objeto o situación. Otra ventaja del trabajo en grupo es que aumenta la capacidad de los alumnos para trabajar de esta forma y de compartir y discutir ideas (Villarreal, 2010).

Sin embargo, "muy pocos utilizan resolución de problemas como estrategia didáctica o medio para la enseñanza de contenidos matemáticos" (Schroeder y Lester, 1989, como se citó en Fonseca y Alfaro, 2010, p. 178). A pesar de que puede ser empleada como método de instrucción, para introducir conceptos, o como el objeto de instrucción (Wilson et al., 1993), donde la meta es que los alumnos utilicen habilidades y conocimientos para resolver problemas. Por ello, es importante reconocer qué significado tienen los conceptos de "problema" y "resolución de problemas".

En este trabajo, se aborda la resolución de problemas buscando que los estudiantes participen activamente, como menciona Takahashi (2006), además de que adquieran formas de pensar, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza, que experimenten diversos enfoques para resolver problemas y respondan a los argumentos de los compañeros, según describe la NCTM (2000).

También se busca rescatar la construcción de las matemáticas a partir de retos impuestos por ella misma (Wilson et al., 1993), es decir, con problemas de corte matemático. Esto con la finalidad de que el alumno gane confianza en sus propios conocimientos y habilidades referentes a matemáticas, además de que aumente su capacidad de compartir y discutir ideas trabajando en equipo (Villarreal, 2010).

2.2.1 Definición de problema matemático

Muchos autores han definido lo que es un problema, aunque en general coinciden con el hecho de que, para considerarlo como tal, resolverlo debe requerir más que utilizar conceptos o fórmulas almacenados en la memoria.

Nohda (1986), menciona que un problema ocurre cuando los estudiantes se enfrentan a una tarea, generalmente asignada por el profesor, y no existe una forma prescrita de resolverlo, visión que comparten Mihajlović y Dejić (2015). No se considera un problema cuando los estudiantes pueden resolverlo inmediatamente.

Para Mayer (1986, p. 19, como se citó en Villarreal, 2010, p. 115), "[…] un problema debería consistir en tres ideas: 1) el problema está actualmente en un estado, pero 2) se desea que esté en otro estado, 3) no hay una vía directa y obvia para realizar el cambio". Además, se caracteriza por proporcionar datos, es decir, condiciones, objetos, trozos de información, etc.; objetivos, que son el estado deseado o terminal del problema; obstáculos; y no se tiene la respuesta ni es inmediatamente obvia (Villarreal, 2010, p. 115).

Krulik y Rudnick (1987, como se citó en Villarreal, 2010, p. 116) contrastan entre problema y ejercicio: "Ejercicio, corresponde a una acción, la que de manera reiterada se practica para reforzar una habilidad o algoritmo previamente aprendido"; mientras que un problema requiere de pensar "para lograr una síntesis de conocimientos previamente aprendidos para resolverlos".

Foong (2000), afirma que es esencial distinguir entre un problema y un ejercicio. Los ejercicios están diseñados con un enfoque limitado a algunas habilidades, conceptos y procedimientos específicos que se han cubierto durante las clases, es decir, constituyen el aspecto "mecánico" de aprender y practicar procedimientos y fórmulas matemáticas.

Reitman, citado por Wilson et al. (1993), definió un problema como una situación en la que se ha dado la descripción de algo, pero aún no se tiene algún objeto que satisfaga esa descripción, e implica que una persona que acepta realizar esta búsqueda y llegar a la meta, no cuenta con un medio inmediato para alcanzarla.

Kabiri y Smith (2006), establecen que un problema matemático implica una situación para la cual la solución no es inmediatamente obvia. Hacen distinción entre problemas tradicionales y abiertos, donde los problemas tradicionales proporcionan un conjunto de restricciones o condiciones, y requieren la aplicación de estrategias para obtener un resultado deseado; mientras que en un problema abierto es posible más de una respuesta.

De Faria (2008) comenta que, según el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA) de la OCDE, las características de un problema son:

> - Una situación contextualizada, ubicada en la realidad, que podría ocurrir en la vida del estudiante o bien una situación que el estudiante pueda identificar como importante para la sociedad. [...]
> - Una situación que no puede ser resuelta mediante aplicaciones de procedimientos rutinarios que el estudiante haya estudiado o bien practicado en el aula y que [lo] invite [...] a moverse entre distintas representaciones y a exhibir cierto grado de flexibilidad en la forma en que accede, administra y evalúa la información [...]
> - [Una situación que] requiere conexiones entre contenidos de diversas áreas". (p. 36-37)

Villarreal (2010, p. 116) define que un problema tiene dos atributos críticos: que la situación final planteada no se conoce, y que cuenta con un valor, ya sea social, cultural o intelectual.

Para Viseu y Oliveira (2012), los problemas tienen un mayor nivel de dificultad ya que traducen situaciones no rutinarias para las que los estudiantes no tienen un proceso de solución inmediato y que pueden ser resueltas por diversos métodos.

En este trabajo se considera que un problema es una situación para la que no se tiene un camino o un algoritmo inmediato con el cual resolverla (Kabiri y Smith, 2006; Mihajlović y Dejić, 2015; Nohda, 1986; Viseu y Oliveira, 2012), sino que requiere de reflexionar y conjuntar conocimientos previos para hallar una solución que la satisfaga (Krulik y Rudnick, 1987, como se citó en Villarreal, 2010). Cabe mencionar que su resolución se encuentra dentro de un campo de estudio propio.

2.2.2 Definición de resolución de problemas

La resolución de problemas es una actividad fundamental del ser humano (Polya, 1989, p. 187), que se realiza en todo momento; desde determinar la mejor ruta para llegar a tiempo a la escuela o al trabajo, hasta buscar cura para diversas enfermedades.

Consiste en utilizar información para generar representaciones de los problemas, para planificar e intentar terminar la tarea (Stiff, Johnson, y Johnson, 1993). Dentro de este proceso, debe enfatizarse su naturaleza cíclica y dinámica (Wilson et al., 1993), es decir, no se trata de un proceso lineal, sino que requiere volver sobre los pasos, probar caminos distintos y comprobar la respuesta todo el tiempo.

La habilidad de resolver problemas es una meta de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Bien diseñados y con guía pertinente del profesor, promueven la comprensión de los conceptos y la transferencia de éstos a otros contextos, inclusive fuera del ámbito escolar. Cabe aclarar que Bransford, Brown, y Cocking (2000) definen a la transferencia como la capacidad de extender lo aprendido en un contexto a nuevos contextos.

Según Reitman (1965, como se citó en Klavir y Hershkovitz, 2008), una persona se involucra en la "resolución de problemas" cuando no tiene medios disponibles inmediatamente para alcanzar una solución y es relativo a cada persona, es decir, una situación particular puede representar un problema para una persona, mientras que para otra sí lo será porque no tiene conocimiento disponible en ese momento para resolverlo.

Polya (1989, p. 108) define que “resolver un problema, esencialmente es *encontrar la relación entre los datos y la incógnita*. Además, se debe [...] *utilizar todos los datos* y establecer la relación existente entre cada uno de ellos y la incógnita”.

Por su parte, Villarreal (2010, p. 118), define, a partir de varios autores, que el resolver un problema “es un proceso, donde se realizan determinadas actividades, tanto prácticas como intelectuales, donde los estudiantes deben sintetizar lo que han aprendido, para aplicarlo en nuevas y diferentes situaciones.”

Debido a que esta actividad tiene aplicación en la vida cotidiana y los requerimientos específicos para llevarla a cabo, es empleada en el aula de matemáticas como una estrategia de enseñanza-aprendizaje; puede convertirse en fuente de motivación, despertar el interés y la curiosidad en los estudiantes y es esencial para comprender y apreciar las matemáticas (Wilson et al., 1993).

El proceso de resolución de problemas se hace evidente cuando la enseñanza se ve como un proceso de interacción entre alumnos y también con el profesor, donde este trata de dar a los alumnos acceso al pensamiento matemático (Nohda, 1986).

Para la institución a la que se dedica este trabajo, el CCH, la resolución de problemas es considerada como un Eje Metodológico, que según la DGCCH (2006), consiste en una secuencia que involucra aprendizajes referentes a procedimientos, métodos, y también generalizaciones de conceptos. El mismo documento plantea que los conocimientos sean introducidos mediante problemas, y menciona que es una de las habilidades que el Colegio busca promover en sus alumnos.

Por su parte, los Programas de estudios de matemáticas marcan que “[la] columna vertebral de la metodología didáctica es la resolución de problemas” (ENCCH, 2016, p. 6), que los conceptos y métodos surgen de ella, y es una “actividad fundamental para lograr un ser analítico, lógico y crítico, donde se pone de manifiesto la comunicación y el diálogo en un ambiente de aprendizaje” (Escuela Nacional CCH, 2016, p. 5).

En este trabajo, se busca destacar de la resolución de problemas su carácter de proceso, donde interactúan el profesor y los alumnos (Nohda, 1986); además de que se considera que esta actividad busca encontrar la solución a un problema, es decir, la relación que existe entre los datos y la incógnita (Polya, 1989). Lo anterior de manera que los estudiantes no solamente sinteticen conocimientos ya adquiridos (Villarreal, 2010), sino que también sirva como introducción a conocimientos nuevos, como indica la ENCCH (2016).

Conociendo estos dos conceptos fundamentales, problema y resolución de problemas, es necesario revisar qué tipos de problemas existen y cuáles son mejores para promover el aprendizaje de los estudiantes.

2.2.3 Tipos de problemas

La clasificación de los problemas también ha tenido cobertura en investigaciones por parte de varios autores, aunque no es una tarea sencilla (Villarreal, 2010).

Por mencionar algunos, Polya (1989), indica que hay problemas por resolver y problemas por demostrar. Los problemas por resolver, o simplemente problemas, tienen como propósito “descubrir cierto objeto, la incógnita del problema” (Polya, 1989, p. 161); a su vez, “pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos; son problemas serios o simples acertijos” (Polya, 1989, p. 161) y sus incógnitas pueden ser diferentes objetos. En cuanto a problemas por demostrar, o teoremas, tienen como propósito “mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada” (Polya, 1989, p. 161).

Además, Polya también propone los problemas de rutina, cuya definición los hace similares a los ‘ejercicios’ mencionados anteriormente, y son aquellos que pueden resolverse “ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de algún viejo ejemplo” (Polya, 1989, p. 163) y considera que pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas, pero sin utilizarlos nunca como único tipo de problemas en las lecciones.

Como contraparte, menciona los problemas prácticos, cuyo contexto se halla en la realidad o la naturaleza. Requieren de conocimientos más específicos y tienen gran cantidad de datos y condiciones que no pueden tomarse en cuenta en su totalidad (Polya, 1989).

Por su parte, Jonassen y Kwon (2001), separan problemas bien y mal estructurados. Los primeros son los que se suelen enseñar a los alumnos en las escuelas, se caracterizan por tener un estado inicial definido, un estado objetivo conocido y un conjunto restringido de operadores lógicos; es decir, todos los elementos del problema son explícitos y conocidos; involucran un número limitado de reglas y principios organizados; poseen respuestas correctas y convergentes; favorecen un proceso de solución y el trabajo individual.

En cuanto a los problemas mal estructurados, o auténticos, estos autores comentan que suelen encontrarse en la vida cotidiana y profesional, generalmente son resueltos por grupos de personas. Se caracterizan por tener objetivos vagamente definidos o poco claros y limitaciones no declaradas; tener múltiples soluciones, rutas de solución o ninguna solución; tener múltiples criterios para evaluar soluciones y requerir que los alumnos expresen opiniones o creencias personales sobre el problema (Jonassen y Kwon, 2001).

Además, respecto a estos mismos tipos de problemas, Villarreal (2010, p. 123), añade que “los diseños instruccionales para los problemas bien estructurados, se arraigan en la teoría del procesamiento de información, mientras que [...] para los problemas mal estructurados, comparten necesariamente suposiciones del constructivismo y la cognición situada”.

Cabe resaltar que los problemas mal estructurados pueden tener soluciones o rutas de solución múltiples, lo cual se relaciona con la distinción que hace Shimada (1997), entre problemas tradicionales, “completos” o “cerrados” y, problemas “incompletos” o “abiertos”. Los primeros, a semejanza de los problemas bien estructurados, son los que tienden a utilizarse en la enseñanza de las matemáticas y su característica es que tienen predeterminada una y solo una respuesta correcta.

Los problemas abiertos están formulados para tener múltiples respuestas correctas, por ejemplo, cuando se les pide a los estudiantes que desarrollen diferentes métodos, formas o enfoques para obtener una respuesta a un problema dado en lugar de encontrar la respuesta como tal (Shimada, 1997).

Esta última clasificación, la formulada por Shimada (1997), es la que se retomará más adelante en este trabajo y que se encuentra contenida dentro del desarrollo del enfoque de final abierto.

2.3 El enfoque abierto en resolución de problemas

Se ha comentado anteriormente que la resolución de problemas es un recurso muy importante en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, llevarlo a cabo no resulta sencillo, por lo que los autores han desarrollado diversos enfoques o metodologías para aplicarlos en las aulas.

Dentro de ellas, una de las propuestas es el llamado “enfoque abierto”, cuyo objetivo es desarrollar habilidades de comunicación y resolución de problemas matemáticos en los alumnos, al tiempo que se les da la oportunidad de aprender a su manera y a su propio ritmo (Foong, 2000).

El enfoque abierto se basa en la tradición de la comunidad de educación matemática japonesa, cuyo espíritu básico es estar abierto tanto a los estudiantes como a las matemáticas (Nohda, 2000).

Se trata de un método flexible y centrado en el estudiante, en el cual se espera que los alumnos, trabajando individualmente o en grupos, apliquen su propia metodología para resolver problemas, los cuales están diseñados de manera que pueden tener más de una respuesta correcta o existe más de una forma de llegar a una solución, por lo que estudiantes en varios niveles de desarrollo cognitivo pueden trabajarlos (Munroe, 2015).

Nohda (2000), comenta que el objetivo del enfoque es que todos los estudiantes puedan aprender matemáticas en respuesta a su propio poder matemático y que es relevante, pues las situaciones problemáticas que los estudiantes enfrentan en la vida cotidiana pueden tener variedad de soluciones y métodos para resolverse.

El enfoque permite explorar la creatividad de los estudiantes, desarrolla en ellos diferentes niveles de entendimiento y moviliza e integra “un amplio rango de representaciones, heurísticas, resultados, procedimientos y principios durante la construcción de diferentes soluciones, [...] favoreciendo la integración de redes de conocimientos estructurados” (Barrera y Reyes, 2017, p. 111-112).

Además, el contar con diferentes soluciones puede facilitar la conexión de un problema con diferentes elementos de los conocimientos previos del estudiante, fortaleciendo así las relación de ideas (Silver et al., 2005); y, según Bingolbali (2011), como la construcción de conexiones entre conceptos matemáticos es un requisito previo para el aprendizaje conceptual, el uso de diferentes maneras de resolver problemas matemáticos es de importancia crucial para el aprendizaje conceptual y significativo de los estudiantes.

Los problemas abiertos evitan que se enfatice el pensamiento convergente en los estudiantes, donde se memorizan reglas y teoremas matemáticos, que luego se aplican a problemas sin permitir una participación activa en el aprendizaje (Kwon, Park, y Park, 2006).

Tienen como propósito desarrollar la capacidad de pensamiento de los estudiantes y ayudarlos a pensar desde diferentes puntos de vista e incluyen varios ejemplos de pensamiento y valor matemático, y pueden ampliarse (Sawada, 1997).

Además, ofrecen oportunidades a los estudiantes para involucrarse en situaciones que requieran formular hipótesis, explicar situaciones matemáticas, crear nuevos problemas relacionados y hacer generalizaciones, por lo que son educativas para los estudiantes y al mismo tiempo brindan información valiosa al profesor (Bingolbali, 2011).

Schoenfeld (1983, como se cita en Bingolbali, 2011) observó que cuando los estudiantes perciben que un problema se puede resolver de diferentes formas, aumenta su compromiso y los ayuda a no renunciar a trabajar en el problema. Bingolbali (2011), también menciona que Polya hizo comentarios similares y enfatizó que alentar a los estudiantes a llegar a resultados de manera diferente puede permitirles obtener soluciones más elegantes.

El enfoque abierto surgió durante los años 1970 y 1980 como un método para reformar la enseñanza de las matemáticas en las aulas japonesas y se ha extendido por todo el mundo, aceptándose que los problemas abiertos, manejados en este enfoque, constituyen una herramienta útil en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, de manera que enfaticen la comprensión y la creatividad (Pehkonen, 1999; Inprashita, 2006). Por su parte, Pehkonen (1999), afirma que es un método de enseñanza que surgió de la búsqueda de una nueva metodología que pudiera afrontar los desafíos planteados por el constructivismo.

A nivel internacional, alrededor del mismo año que en Japón, en Inglaterra, se hizo popular el uso de las investigaciones (un tipo de problema abierto) en la enseñanza de las matemáticas; en los Países Bajos se utilizaron situaciones de la vida real y llamaron a su método 'matemáticas realistas'; y en Noruega y Dinamarca, se adoptó la tarea abierta mediante el trabajo en proyectos (Foong, 2000).

En Estados Unidos, los Estándares de Currículo y Evaluación para Matemáticas Escolares del NCTM, 1989, mencionaron la importancia del uso de enfoques basados en procesos (Boaler, 1998); en China, se utiliza la enseñanza con variación, empleando un problema con múltiples soluciones, al que se le realizan cambios, o se emplean múltiples problemas con una solución, buscando métodos para resolver familias de problemas (Barrera y Reyes, 2017, p. 112).

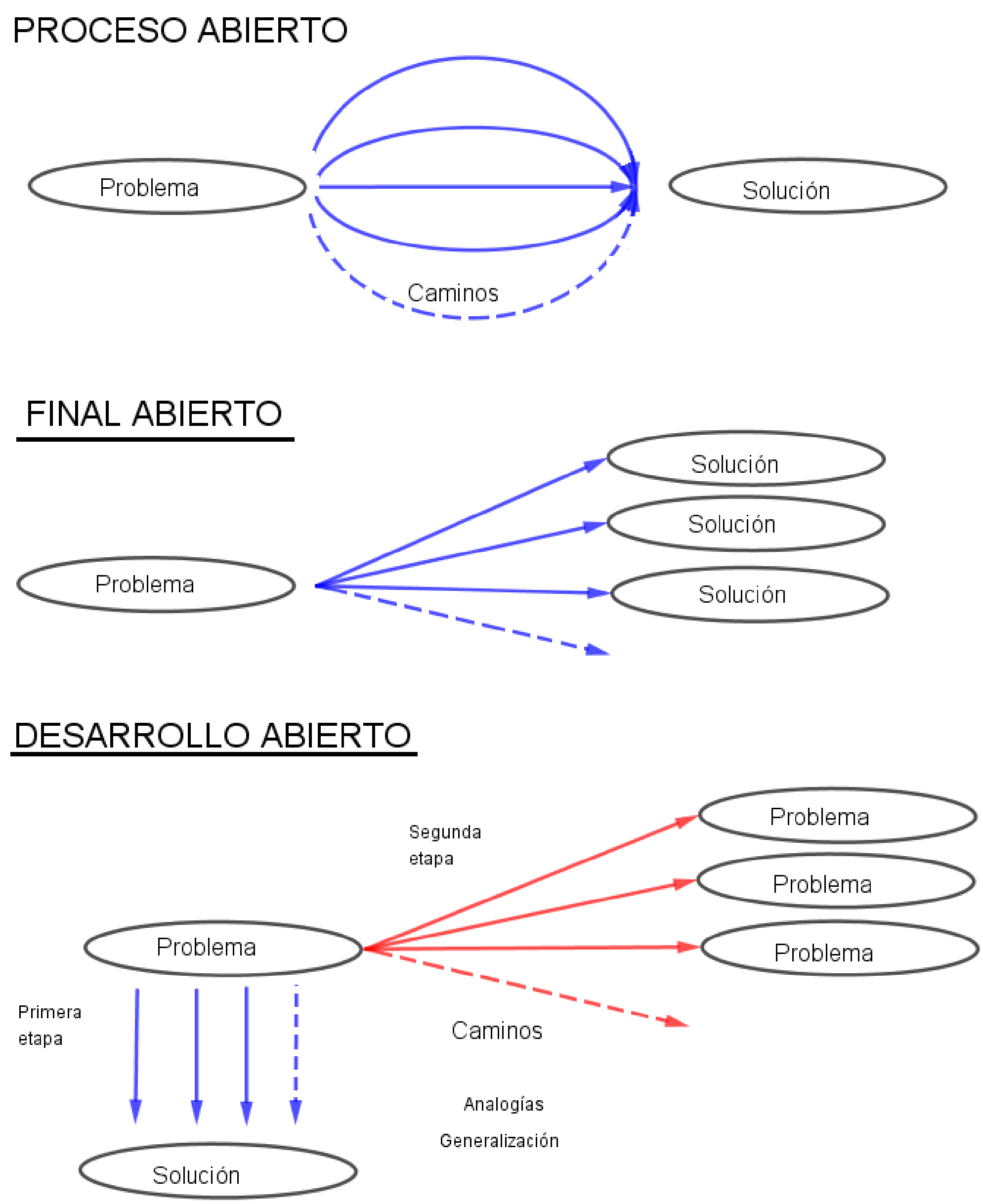
En Japón, se introdujo desde 2002 una política nacional para reducir el currículo en un 30% para utilizar el tiempo en problemas abiertos, actividades extraescolares y proyectos integrados que abarcan diferentes disciplinas; en Alemania, alrededor de una quinta parte del tiempo de enseñanza se deja sin contenido, para alentar a los maestros a usar actividades matemáticas; mientras que en Suecia, los problemas abiertos se han utilizado en la evaluación final de los estudiantes (Foong, 2000).

Cabe aclarar que, en ocasiones, la definición de “final abierto”, dentro del enfoque original propuesto por Shimada y colaboradores en la década de 1970 (open-ended), se amplía a otros problemas no rutinarios para incluir problemas donde diferentes estrategias conducen al resultado único correcto (Kabiri y Smith, 2006). La diferencia fue descrita por Nohda, quien generalizó el enfoque como “abierto” (open), considerando tres posibilidades de apertura de los problemas, como se detalla a continuación:

- **El proceso está abierto**. En este caso, el problema tiene múltiples formas correctas de ser resuelto. Todos los problemas matemáticos son inherentemente abiertos en este sentido.
- **Los productos finales están abiertos**. Se refiere a los problemas de final abierto descritos por Shimada y colaboradores (1977), con múltiples respuestas correctas.

- **Las formas de desarrollo son abiertas**. Se refiere a la posibilidad de desarrollar nuevos problemas cambiando las condiciones o atribuciones del problema original y tiene la ventaja de que los alumnos pueden disfrutar de desarrollar sus propios problemas (Nohda, 2000) (Ver **Figura *6***).

Figura 6. *Modos de apertura de problemas en el enfoque abierto.*



Nota: Adaptado de Classroom Assessment in Japanese Mathematics (p. 45) por Nagasaki y Becker, 1993.

Por su parte, Pehkonen (1997), hace una clasificación con base en si los problemas mantienen abierto su inicio o su meta, como se muestra en la Tabla 1:

Tabla 1. *Clasificación de los problemas según su situación inicial y de la meta.*

Situación de la meta / Situación inicial	CERRADA (es decir, exactamente explicada)	ABIERTA
CERRADA (es decir, exactamente explicada)	Problemas cerrados	Problemas de final abierto Investigaciones de situaciones de la vida real Campos problemáticos Variaciones del problema
ABIERTA	Situaciones de la vida real Variaciones de un problema	Situaciones de la vida real Variaciones de un problema Proyectos Planteamiento de problemas

Nota: Adaptada de Introduction to the concept "open-ended problem", p. 9, por Pehkonen, 1997.

Así, según Foong (2000), los problemas empleados en el enfoque abierto deben contar con tres características básicas:

- Dar a todos los estudiantes la oportunidad de demostrar algunos conocimientos matemáticos, habilidades y comprensión.
- Ser lo suficientemente ricos como para desafiar a los estudiantes a razonar y pensar, a ir más allá de lo que esperan que puedan hacer.
- Permitir la aplicación de una amplia gama de enfoques y estrategias de solución.

Internacionalmente se acepta que los PFA constituyen una herramienta útil en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, de una manera que enfatiza la comprensión y la creatividad (Pehkonen, 2007). Así que en este trabajo se considera el enfoque "open-ended", según la propuesta de Nohda (2000), es decir, donde el producto final (o respuesta) está abierto, el cual se sustenta en la llamada resolución estructurada de problemas.

2.3.1 Resolución estructurada de problemas

El enfoque abierto (y por lo tanto el enfoque de final abierto) se encuentra dentro de la estrategia japonesa conocida como "resolución estructurada de problemas" (structured problem solving) (Asami, 2015), que es un enfoque educativo donde se incluye una cantidad significativa de resolución de problemas en las lecciones (Takahashi, 2006).

Esta estrategia sienta las bases tanto de la validez del enfoque abierto, como de su metodología en el aula. Fue conocido en los Estados Unidos a través del estudio comparativo sobre resolución de problemas en los años 80 por Tatsuro Miwa y Jerry Becker, e influyó en el mundo a través del estudio de video TIMSS de los años 90 (Isoda, 2010).

La resolución estructurada de problemas está diseñada para crear interés y estimular la actividad matemática creativa en el aula a través del trabajo colaborativo de los estudiantes (Takahashi, 2006). Su objetivo es realizar una discusión en el aula sobre los métodos de solución dados por los estudiantes a los problemas propuestos en la clase. Shimizu (2003, como se cita en Asami, 2015) y Takahashi (2006) describen que el marco común de las lecciones de matemáticas japonesas con esta estrategia consiste en:

- Plantear un problema
- Trabajo de los estudiantes sobre el problema, individualmente o en grupos, utilizando sus propios conocimientos.
- Discusiones con toda la clase. Primero, a partir de aportaciones individuales y luego el maestro dirige una discusión para comparar los enfoques y soluciones.
- Resumen de la lección.
- Ejercicios o extensión. Son opcionales, según el tiempo disponible y la facilidad de los estudiantes para resolver el problema original.

La estrategia empezó a desarrollarse en las décadas de 1910 a 1920, cuando se introdujo en Japón la reforma educativa centrada en el aprendizaje e iniciativa espontáneos de los niños, que fue iniciada por John Dewey y Edward Lee Thorndike (Asami, 2015).

Según Isoda (2006), varios educadores comenzaron a criticar el carácter de las tareas matemáticas presentadas en los libros de texto para la escuela primaria, argumentando que carecían de vínculos suficientes con la vida cotidiana de los alumnos, por lo que propusieron sus propios métodos de enseñanza. Entre las propuestas, se encontró una para mejorar el aprendizaje entre pares, que permitió a los alumnos proponer sus propias preguntas de estudio, discutirlas e investigar una pregunta seleccionada, lo cual sentó las bases para métodos de enseñanza enfocados en resolución de problemas, hoy reconocidos como modelos de enseñanza constructivista (Isoda, 2006).

Después de la Segunda Guerra Mundial, las matemáticas se ubicaron como una herramienta para resolver los problemas relacionados con la vida cotidiana de los estudiantes y, para la década de 1950, el objetivo educativo de comprender los conceptos matemáticos llevó a describir la resolución de problemas como un método eficaz para fomentar la capacidad de pensamiento lógico de los estudiantes (Asami, 2015).

En esa misma década, se propuso un proceso de resolución de problemas con base en ocho pasos: Problema principal; Entender la pregunta; Aclarar qué hechos se proporcionan en el problema; Considerar qué es necesario aclarar; Considerar qué tipo de operaciones se necesitan; Asumir una conclusión; Calcular para obtener una conclusión; y Evaluar la conclusión (Asami, 2015)

Por otra parte, el autor Heichi Kikuchi describió, en la década de 1970, el proceso de resolución de problemas a partir de siete pasos generales, en los que se observa influencia del método de Polya, cuyas ideas llegaron a Japón en 1954: Proponer subproblemas; Observar cada subproblema; Clasificar factores; Plantear hipótesis; Examinar los métodos; Probar los métodos; y Desarrollar métodos mejores a través de la evaluación (Asami, 2015).

Sin embargo, a pesar de la tradición de emplear problemas como estrategia de enseñanza, la investigación al respecto se intensificó hasta 1980, debido al impacto que tuvo en los educadores japoneses la primera recomendación de "Una agenda para la acción" del NCTM, donde se declaraba que la resolución de problemas debería ser el enfoque de las matemáticas escolares (Hino, 2007).

Entre 1971 y 1976, investigadores japoneses realizaron varios proyectos de investigación en torno a métodos para evaluar las habilidades de pensamiento de orden superior en la educación matemática. En su primera etapa, el estudio se centró en fundamentar la eficacia de los problemas de final abierto como método para evaluar habilidades de pensamiento de orden superior. Gracias a esto, los investigadores notaron que las lecciones llevadas a cabo con base en la resolución de PFA tenían un gran potencial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje (Becker y Shimada, 1997).

Estos estudios, realizados por cuatro investigadores Shigeru Shimada, Toshio Sawada, Yoshihiko Hashimoto y Kenichi Shibuya, dieron como resultado el libro editado por Shimada: “The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics”, cuyo título en japonés es “Sansuu, suugakuka no open–end approach” (Asami, 2015). Este libro fue traducido al inglés en 1997 y publicado por NCTM (Nohda, 2000), gracias a la investigación conjunta entre Estados Unidos y Japón sobre educación matemática, dando lugar a que el enfoque de enseñanza abierta se convirtiera en un foco de colaboración entre ambos países (Becker y Shimada, 1997).

Cabe mencionar que Shigueru Shimada había participado anteriormente en otros proyectos educativos: después de 1943, los libros de texto de matemáticas de secundaria de Japón integraron diferentes materias matemáticas en una sola y él fue un autor, dándoles un enfoque en resolución de problemas de final abierto; a finales de la década de 1960, desarrolló el proyecto de investigación de evaluación con problemas abiertos y para la siguiente década el proyecto se había expandido a estudios de lecciones para desarrollar nuevos enfoques de enseñanza que Nobuhiko Nohda integró como el método de enseñanza de "Enfoque abierto" (Isoda, 2006), que se mencionó anteriormente.

Además, según Hino (2007), se han realizado investigaciones sobre resolución de problemas matemáticos en Japón, en colaboración con investigadores de otros países, como Estados Unidos, Francia y China. Una de ellas, en conjunto con Estados Unidos entre 1988 y 1990, mostró diferencias entre los dos países, por ejemplo, en que los estudiantes japoneses usaban la multiplicación, la división y las expresiones matemáticas con más frecuencia que sus contrapartes estadounidenses.

Además, este mismo autor agrega que se observó, en ambos países, que los docentes dieron tiempo a los estudiantes para que pensaran soluciones libremente por sí mismos y en grupos, pero los maestros japoneses compararon y refinaron las soluciones de los estudiantes y proporcionaron un resumen al final de la lección.

Continuando con sus ideas, Hino (2007) comenta que los estudios sobre el enfoque abierto han continuado, dando a lugar a trabajos como el de Nohda, quien amplió la noción de “apertura”. Asimismo, añade que, después de 1980, continuó el interés en fomentar el pensamiento matemático, considerando que el proceso de resolución de problemas sería una excelente manera de utilizar y reconocer el pensamiento matemático, se intentó que los estudiantes crearan ideas y conocimientos matemáticos por sí mismos, mediante el proceso de resolución de problemas, tendencia que sigue vigente.

Actualmente, hay problemas abiertos en los libros de texto japoneses de todos los niveles, aunque en poca cantidad, y el enfoque de resolución de problemas es una forma importante de enseñar matemáticas (Isoda, 2006). Muchos de estos problemas se utilizan para actividades introductorias y de enriquecimiento, con el objetivo de despertar el interés de los estudiantes y fomentar sus puntos de vista y pensamiento matemáticos (Hino, 2007).

Para este trabajo, se toma en cuenta el marco de las lecciones japonesas que describen Shimizu (2003, como se cita en Asami, 2015) y Takahashi (2006): Plantear un problema, trabajar sobre él de forma individual y en equipos para luego discutir con todo el grupo sobre las soluciones, resumir la clase y proponer ejercicios relacionados. Además del aporte de Becker y Shimada en su libro de 1997.

Finalmente, una característica que hay que resaltar de Japón es la tradición de investigación basada en la práctica por parte de los profesores, estudios que tienen como objetivo el desarrollo de materiales didácticos y la mejora de la organización eficaz de las lecciones (Hino, 2007). Esta tradición es un método llamado “Estudio de lección” (jugyou-kenkyu en japonés, lesson study en inglés), que fue diseñado para facilitar el desarrollo de lecciones de alta calidad (Thinwiangthong, Inprashita, y Loipha, 2012).

Si bien el estudio de lecciones no pudo llevarse a cabo en la presente investigación, se considera un elemento importante dentro del enfoque de final abierto, por lo que se describe brevemente a continuación.

2.3.2 Estudio de lecciones

Los “estudios de lecciones” comenzaron a fines del siglo XIX, con el fin de incentivar la propuesta de nuevos métodos y currículos de enseñanza (Isoda, 2006). Se trata de un proceso cíclico de mejora de la enseñanza a largo plazo, que suele ser implementado por grupos de profesores que planifican, observan y discuten, de forma colaborativa, las instrucciones de las lecciones con el objetivo de determinar cómo aprenden mejor los estudiantes (Lewis, 2002, citado por Thinwiangthong et al., 2012; Asami, 2015).

Hino (2007) la considera como el impulso para mejorar las clases que incluyen resolución de problemas en Japón. Las teorías de los enfoques de enseñanza y las teorías de las materias o el plan de estudios han sido el producto del estudio de lecciones, por tanto, desarrolladas por profesores con el apoyo de investigadores o supervisores (Isoda, 2010).

A la actualidad, ha sido estudiado y aplicado en el desarrollo profesional de la enseñanza en muchos países del mundo, y está siendo reconocido como la técnica más eficiente para mejorar y desarrollar la enseñanza de las matemáticas (Thinwiangthong et al., 2012).

Según Thinwiangthong et al. (2012) y Asami (2015) la técnica consta de 8 pasos:

1) Identificación de problemas;
2) Planificación de clases entre profesores e investigadores, donde se organiza la tarea, se seleccionan materiales y se vincula la información en un plan de lección;
3) Implementación de clases, por parte de uno de los profesores del equipo. El resto observa, a veces invitando a profesores universitarios y supervisores de la junta de educación;

4) Evaluación de clase y revisión de resultados;
5) Reconsideración de clase, que consiste en discutir y evaluar la lección;
6) Implementación de clase basada en reconsideraciones;
7) Evaluación y revisión; y
8) Compartir los resultados.

Casi todos los estudios de lecciones en matemáticas se llevan a cabo con una base en la resolución estructurada de problemas y con frecuencia se realizan utilizando el “método de enfoque abierto” (Asami, 2015).

Como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo, si bien no fue posible trabajar mediante la metodología del estudio de lecciones, ya que no se formó equipo con otros profesores, se consideró importante señalarla para futuras investigaciones que involucren el enfoque de final abierto, dado que, como menciona Asami (2015), suele acompañar frecuentemente la enseñanza dentro del enfoque abierto.

2.4 Enfoque de final abierto

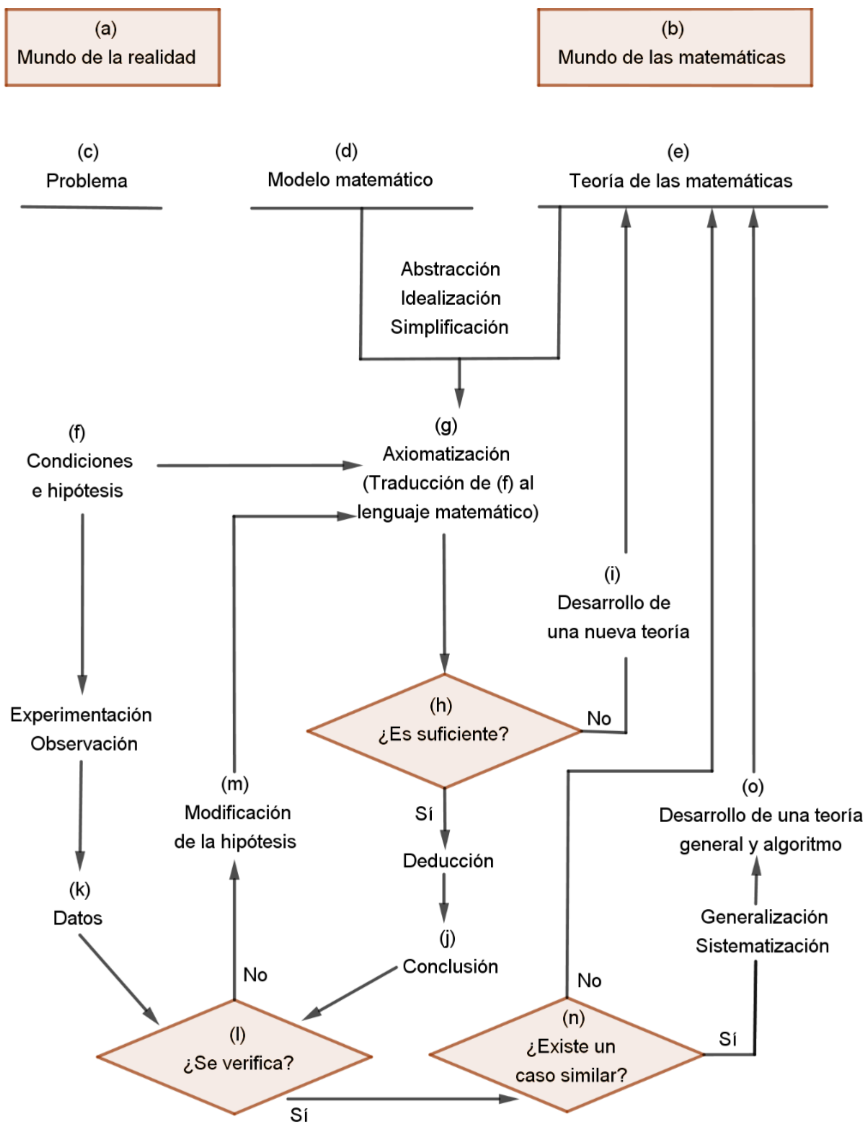
El enfoque de final abierto tuvo como punto de partida el proyecto de investigación sobre evaluación, como ya se ha mencionado. Sawada (1997), comenta que una prueba de lápiz y papel que emplea problemas cerrados solo permite una evaluación que verifica el rendimiento de los estudiantes en términos de sus conocimientos, habilidades o capacidades para identificar y aplicar conceptos, principios o leyes; ya que cuando el análisis de una situación problemática da como resultado una solución única, puede suceder que la situación involucre lo que los estudiantes ya han aprendido o que deje muy poco espacio para su forma preferida de pensar (Shimada, 1997).

Por su parte, Shimada (1997), propuso que el enfoque es válido con base en un modelo de actividades matemáticas que realizan los estudiantes y se describe un poco más abajo. Según su aporte, hay áreas del pensamiento estrechamente relacionadas con las matemáticas, como comprender o construir una teoría matemática, resolver un problema matemático o aplicando las matemáticas.

El equipo de investigación que trabajó con este autor agrupó las áreas del pensamiento mencionadas y las llamó "actividades matemáticas". El modelo derivado de esto, ilustrado en la Figura 7, refleja un proceso histórico a través del cual los seres humanos han desarrollado las matemáticas actuales, así como un proceso de desarrollo del aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante (Shimada, 1997).

Una parte del proceso ilustrado en la Figura 7, se utiliza durante las clases, según la forma en que estas se lleven a cabo (Shimada, 1997). Los problemas de final abierto propuestos en el libro traducido por Becker y Shimada en 1997, involucran los procesos de (f) a (g) o de (n) a (o) (ver Figura 7): partir de condiciones e hipótesis a axiomatizar o traducir al lenguaje matemático; o partir de plantearse la pregunta de si hay casos similares al trabajado, para generalizar y sistematizar hasta llegar al desarrollo de un teoría general y algoritmos.

Figura 7. *Modelo de actividades matemáticas*



Nota: Adaptado de The Open-Ended Approach (p. 4), por Shimada, 1997, NCTM.

La importancia de los PFA está en el hecho de que rompen el estereotipo de que cada problema tiene una solución correcta, con lo que permiten a los estudiantes trabajar simultáneamente en el mismo problema en varios niveles y se pueden utilizar para aprender varias estrategias de resolución de problemas (Klavir y Hershkovitz, 2008).

El hecho de permitir varios niveles favorece el poder brindar apoyo a todos los estudiantes, proporciona oportunidades para que los alumnos trabajen y hablen matemáticas en un grupo cooperativo (Foong, 2000) y al mismo tiempo se favorece una construcción del conocimiento individual, valorado por las ideas constructivistas (Bingolbali, 2011).

Al mismo tiempo, los problemas abiertos sirven como herramienta para producir un cambio fundamental en la estructura de clases, pueden cambiar el discurso en las aulas, mejorar la calidad de las lecciones de matemáticas y contribuir al aprendizaje conceptual de los estudiantes (Nohda, 2000; Bingolbali, 2011).

Por último, cabe volver a enfatizar que los PFA son útiles para realizar evaluaciones. Según (Mahlobo, 2007) para medir qué tan bien se desempeña un estudiante, los maestros deben poder examinar el proceso de aprendizaje, no solo el producto final, lo cual requiere de una forma de enseñanza, aprendizaje y evaluación basada en preguntas y tareas abiertas.

En el caso de este trabajo se busca llegar con los alumnos a una generalización, además de un algoritmo (ver Figura 7, proceso de *n* a *o*) (Shimada, 1997) con relación a los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, buscando la ventaja de mejorar las clases de matemáticas y su aprendizaje, como mencionan Nohda (2000) y Bingolbali (2011),

2.4.1 Características de los problemas de final abierto

Como se mencionó anteriormente, un problema abierto (o en general una tarea abierta) es aquel donde su punto de partida o su meta no está bien definida (Pehkonen, 1997; Mihajlović y Dejić, 2015). Por esto, también se les llama problemas incompletos o mal estructurados, aunque algunos educadores matemáticos usan la palabra "exploratorio (exploratory)" como sinónimo de "abierto", para evitar confusiones con los problemas matemáticos no resueltos (Pehkonen, 1997).

Este tipo de problemas se plantean en una lección socio-constructivista, donde lo que gobierna la intervención del maestro es la ruta de solución del alumno (Mahlobo, 2007). Se caracterizan por formularse de manera que permiten múltiples respuestas correctas, que pueden ser evaluadas por los estudiantes “como parte del proceso de resolución de problemas [y] son diseñados con la finalidad de servir como medio de partida para el desarrollo y descubrimiento de nuevos aprendizajes” (Fonseca y Alfaro, 2010, p. 182)

La anterior definición puede ser más clara al mencionar el opuesto, es decir, los problemas cerrados. En ellos, tanto la situación inicial como la meta se explican exactamente y son los que suelen usarse en las matemáticas escolares (Pehkonen, 1997).

Los PFA se emplean dentro del enfoque del mismo nombre, el cual es un método de enseñanza en el que las actividades están abiertas a diversas formas de resolución de problemas y tiene como objetivo producir actividades matemáticas creativas que estimulen la curiosidad y la cooperación de los estudiantes al abordar los problemas (Nohda, 1986; Kwon et al., 2006). Las múltiples respuestas de los problemas proporcionan experiencia para encontrar algo nuevo en el proceso, utilizando como medio la combinación de los conocimientos, habilidades o formas de pensamiento propios de los estudiantes (Becker y Shimada, 1997; Ninomiya y Pusri, 2015).

Hoy en día se acepta que los PFA son una herramienta útil en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, de una manera que enfatiza la comprensión y el pensamiento matemático creativo, ofrecen a los estudiantes la oportunidad de investigar con sus propias estrategias (Nohda, 1986; Pehkonen, 1999, 2007; Mihajlović y Dejić, 2015). Gracias a sus características, estos problemas pueden emplearse en todos los niveles educativos, inclusive en la formación de profesores (Pehkonen, 1999; Mihajlović y Dejić, 2015).

Según Pehkonen (1997), algunos problemas de este tipo son las investigaciones (donde se proporciona el punto de partida), el planteamiento de problemas, situaciones de la vida real (en la vida cotidiana), proyectos, campos de problemas (que son colecciones de problemas conectados contextualmente), problemas sin preguntas y variaciones de problemas (método "qué pasaría si").

Otro aspecto que resaltar de los PFA es que los autores los clasifican de diferentes formas. Probablemente la primera clasificación fue la propuesta por Sawada (1997), en tres tipos:

- *Tipo 1. Encontrar relaciones.* Se pide a los estudiantes que encuentren reglas o relaciones matemáticas para un conjunto de objetos o listas de números, entre otros.
- *Tipo 2. Clasificación.* Se pide a los estudiantes que clasifiquen según diferentes características, lo que puede llevarlos a formular algunos conceptos matemáticos.

- *Tipo 3. Medición.* Se pide a los estudiantes que asignen una medida numérica a un determinado fenómeno, esperando que apliquen el conocimiento y las habilidades matemáticas que han aprendido previamente (Sawada, 1997).

Por su parte, en 2006, Kwon et al., propusieron que los tipos de PFA son los siguientes: superación de fijaciones, respuestas múltiples, estrategias múltiples, investigación de estrategias, planteamiento de problemas, tareas de indagación activa y pensamiento lógico. En el presente trabajo, los problemas planteados son de respuestas múltiples.

Todos estos problemas cumplen con diversas características enlistadas por los autores. Según Nohda (1995, como se citó en Kwon et al., 2006), en primer lugar, deben adaptarse a todos los estudiantes mediante el uso de temas familiares e interesantes para ellos, para que puedan ver la necesidad de resolver los problemas, sientan que pueden hacerlo y el logro después de resolverlos; en segundo lugar, los problemas deben ser adecuados para utilizar y desarrollar el pensamiento matemático, poder generalizarse en nuevos problemas y permitir diversas soluciones a diferentes niveles e incluir expresiones matemáticas.

Además, deben involucrar ideas matemáticas, requieren de reconocimiento del problema, prueba y perseverancia; deben tener soluciones divergentes, pueden servir para evaluar a los estudiantes; todos los alumnos deben poder resolverlos, con lo que son involucrados; y deben proporcionar a los estudiantes experiencia para encontrar algo nuevo en el proceso (Kwon et al., 2006; Mihajlović y Dejić, 2015; Nohda, 1986; Sullivan, 2003).

Fonseca y Alfaro (2010, p. 182), añaden que "[estos] problemas se caracterizan por sus ricos contextos sociales que permiten enlazar los contenidos matemáticos con otras disciplinas y con la vida cotidiana del estudiante", aunque también se trabajan problemas de contexto puramente matemático, como los que se manejan en el presente trabajo.

Una buena pregunta abierta es lo suficientemente difícil como para desafiar a los estudiantes de alto rendimiento, pero al mismo tiempo es lo suficientemente simple para que el miembro más lento de la clase pueda encontrar al menos una solución (Nohda, 1995; Yee, 2002; Kabiri y Smith, 2003 como se citó en Munroe, 2015); da la oportunidad para que los estudiantes trabajen en colaboración, ya que al aprovechar las experiencias de los demás y hablar sobre la tarea del problema, se involucran en reflexionar, conjeturar y justificar (Chan Chun, 2005).

Al utilizarse dentro de la estrategia de enseñanza, Nohda (1986, 2000) y Mihajlović y Dejić (2015) comentan que es necesario asumir tres principios:

- El primero se relaciona con la autonomía de los alumnos, cada estudiante debe tener la libertad individual de progresar en la resolución de problemas de acuerdo con sus propias habilidades e intereses y elegir sus estrategias;
- el segundo se refiere a no olvidar la naturaleza evolutiva e integral del conocimiento matemático, que es teórico y sistemático;
- el tercero se relaciona con la rápida decisión de los maestros en clase, su papel es importante para que se generen las ideas, y deben tener en cuenta que otros estudiantes también pueden comprenderlas, por lo que todos los alumnos merecen la oportunidad de participar.

También es importante considerar el tiempo, esencial para un desarrollo exitoso de las clases, ya que es indispensable que se cuente con "tiempo suficiente para que [los alumnos] investiguen sobre la naturaleza del problema propuesto; generen y propongan múltiples soluciones; discutan y critiquen los diferentes modelos propuestos; evalúen y comparen otros modelos; y reflexionen sobre lo aprendido" (Fonseca y Alfaro, 2010, p. 188), además de que "es importante que después de cada sección [se trabaje] en problemas relacionados que permitan la internalización y extensión de los conceptos aprendidos" (p. 188).

La utilidad de este enfoque radica en que contribuye a impulsar el pensamiento divergente y la creatividad matemática, como ya se ha mencionado anteriormente: los estudiantes pueden proponer muchas ideas libremente (fluidez), realizar otros intentos para idear nuevas estrategias para abordar el problema (flexibilidad) y pensar en ideas muy inteligentes e inesperadas (originalidad) (Kwon et al., 2006; Mihajlović y Dejić, 2015).

El uso de este enfoque implica cambios en las aulas tradicionales, como pasar de una dirección exclusiva del maestro a la participación activa de los alumnos, integrar los temas y problemas, emplear matemáticas con contextos de la vida real, además de matemáticas formales, y realizar, además de individual, un trabajo en equipo y grupal (Foong, 2000).

2.4.2 Ventajas

El aprendizaje a través del enfoque abierto es significativamente mejor que el aprendizaje a través de la forma convencional (Fatah, Suryadi, Sabandar, y Turmudi, 2016). Por definición, los PFA implican ventajas como promover la creatividad. Sin embargo, hay otras más, respaldadas por diversos estudios, referentes tanto a la naturaleza de este tipo de problemas, como a la metodología de su aplicación en las aulas.

Sawada (1997), enlista cinco de estas ventajas respecto a lo que realizan los estudiantes:

1. Participan más activamente en la lección y expresan sus ideas con más frecuencia.
2. Tienen más oportunidades para hacer un uso integral de sus conocimientos y habilidades matemáticas.
3. Incluso los de bajo rendimiento pueden responder al problema de alguna manera significativa por sí mismos.
4. Están intrínsecamente motivados.
5. Obtienen experiencias ricas al descubrir y recibir la aprobación de sus compañeros.

Derivadas de ellas, también se sabe que el uso de este tipo de problemas en el aula hace que la educación matemática se acerque más a las matemáticas reales, dado que la investigación en esta ciencia es una confrontación diaria con problemas abiertos; promueve la confianza de los estudiantes en su propia capacidad; permiten el aprendizaje de conocimiento conceptual y procedimental; hacen posible que, mientras los estudiantes más rápidos buscan más soluciones, los más lentos tengan tiempo de reflexionar y encontrar su propia solución, es decir, cada estudiante puede trabajar dentro de su propio alcance y rango de habilidades (Kwon et al., 2006; Pehkonen, 1999; Scorza, 2017; Wu, 1994).

Silver et al. (2005), mencionan que hay beneficios cognitivos, pedagógicos y afectivos. Entre los primeros, resaltan la mejora en estrategias y representaciones de los estudiantes, que los ayuda a ser más flexibles cuando resuelven problemas, les permiten enriquecer y aumentar su conocimiento matemático al favorecer la creación de conexiones y reorganización de este conocimiento (Zaslavsky, 1995; Klavir y Hershkovitz, 2008; Ochoviet y Scorza, 2017); además, “ayudan a mejorar el discurso matemático y a lograr elaborar argumentos convincentes” (Scorza, 2017, p. 75).

Entre los beneficios pedagógicos, Silver et al. (2005) comentan que les ofrece a los profesores acceso al pensamiento de sus alumnos, a sus dificultades y sus conceptos erróneos; puede permitirles dirigir el contenido matemático y gestionar la discusión; da la oportunidad de que el maestro influya en el orden en que las ideas se discuten, mejorando las posibilidades de alcanzar sus objetivos matemáticos (Silver et al., 2005).

Pehkonen (1999), resalta los beneficios de la parte afectiva de los alumnos. En sus estudios, notó que los estudiantes se mostraron ansiosos por encontrar más soluciones y buscar principios generales de resolución, prefiriendo la enseñanza abierta sobre la tradicional, en buena parte por la libertad que se les concedió, preferencia que también notó

Inprashita (2006), en su propio estudio; mientras que Klavir y Hershkovitz (2008), comentaron que los maestros que participaron en su estudio informaron que los estudiantes disfrutaron resolviendo el problema de final abierto con el que trabajaron.

Ninomiya y Pusri (2015), afirmaron que los problemas proporcionan a los alumnos tareas agradables y desafiantes que promueven el gusto por resolver los problemas porque tienen la oportunidad de encontrar su propia manera de pensar, motivando el aprendizaje y, al relacionarse con la vida real, puede animarlos a vivir con curiosidad, incluso en el aula de matemáticas, como corroboraron Kwon et al. (2006), al notar un aumento en la cantidad de preguntas y participaciones al usar el enfoque de final abierto en sus clases.

Por su parte, Bingolbali (2011), comentó que las diferentes soluciones cambiaron la atmósfera del aula y eso, a su vez, permitió a los estudiantes expresar libremente sus propias soluciones. Así, los problemas ayudan a que este ambiente sea de “mutua colaboración y gran involucramiento” (Scorza, 2017, p. 75)

Mahlobo (2007), cita a Mewborn, Lawrence y Leatham (2005, p. 416), para comentar una mejora en la autoconfianza y autoestima de los estudiantes y su disposición para compartir su pensamiento con los demás, mostrándose orgullosos y satisfechos al poder explicar y justificar lo que están haciendo.

Además, los alumnos pueden retroalimentar las ideas propias y de los compañeros (Fonseca y Alfaro, 2010; Fatah et al., 2016), lo cual los lleva a sentirse más dueños de su aprendizaje. Incluso los errores cometidos pueden emplearse como una forma de promover el aprendizaje (Silver et al., 2005; Kwon et al., 2006).

Todos pueden mostrar sus capacidades y su nivel activo de conocimiento matemático, es decir, el conocimiento que pueden obtener cuando no están dirigidos a utilizar un tema matemático específico; además de demostrar capacidades creativas que estimulan su imaginación y les permiten encontrar más y más soluciones (Klavir y Hershkovitz, 2008).

Una vez resuelto el problema, también pueden notarse actividades positivas. La discusión en el aula permite que los estudiantes, al explicar las razones de sus soluciones, tengan la oportunidad para que el maestro corrija términos o los dirija a un nivel más alto de precisión en su lenguaje matemático (Klavir y Hershkovitz, 2008).

Para el profesor, permite evaluar de manera formativa a los estudiantes, facilitando la valoración del pensamiento de orden superior de los estudiantes y la obtención de información muy precisa sobre qué tan bien se entiende lo aprendido (Kwon et al., 2006). Además, la formulación de soluciones permite y discutir y elevar el nivel de la discusión en el espíritu de la Zona de Desarrollo Próximo propuesta por Vygotsky (1978) (Klavir y Hershkovitz, 2008), que se menciona más adelante.

Klavir y Hershkovitz (2008), añaden que emplear dimensiones como la fluidez, la flexibilidad y la originalidad también puede servir a los maestros como un medio de evaluación, particularmente sobre el nivel de creatividad de sus estudiantes, de su conocimiento matemático activo, y su forma de pensar en clase.

También para el profesor, los PFA significan aprendizaje, al preparar una lista de posibles soluciones a un problema en particular y sus implicaciones matemáticas, obligándolo a revisar sus propios conocimientos, al hacerlo pensar y modificar su estrategia de enseñanza, y al llevar a cabo la revisión de las soluciones inesperadas de los estudiantes (Kabiri y Smith, 2006; Scorza, 2017, p. 75).

Otro aspecto que los PFA afectan positivamente, son las creencias del profesor, ayudándole a tener una visión más flexible de las matemáticas; a desarrollar la capacidad de aceptar errores propios y de los alumnos; a ver la importancia de ceder el rol protagónico a los estudiantes, a cambiar sus expectativas sobre las capacidades de los alumnos a unas más altas y creer que ellos pueden enseñarse entre sí (Martínez et al., 2017).

Finalmente, los problemas de final abierto “promueven el trabajo en grupo, la discusión y contraposición de ideas y argumentos” (Scorza, 2017, p. 78) y esa discusión destaca el potencial de liderazgo entre algunos estudiantes (Chan Chun, 2005), además de fomentar el compañerismo.

2.4.3 Desventajas

Los problemas de final abierto, y el enfoque que los utiliza, también tienen ciertas desventajas que se centran en las dificultades que puede experimentar el profesor durante el proceso de aplicarlos, pero también hay varias relacionadas con el desempeño de los alumnos. Al respecto, Sawada (1997), enlista los siguientes:

- Es difícil crear o preparar situaciones de problemas matemáticos significativos.
- Algunos estudiantes con mayor capacidad pueden experimentar ansiedad por sus respuestas.

- Es difícil para los profesores plantear problemas con éxito. A veces, los alumnos tienen dificultades para comprender cómo responder y dan respuestas que no son matemáticamente significativas.
- Los estudiantes pueden sentir que su aprendizaje es insatisfactorio debido a su dificultad para resumir claramente.

Por su parte, Wu, en su artículo de 1994, hace una crítica respecto al riesgo de desinformar a los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, es decir, que no se explique la solución general o algunas metodologías y conceptos involucrados, principalmente cuando éstos corresponden un nivel educativo superior al que se está trabajando.

El mismo autor comenta que existe el riesgo de los alumnos se queden solo con la parte de experimentación o de prueba y error al resolver los problemas, ya que, si bien esto es parte integral de hacer matemáticas y ha permitido descubrimientos significativos, esta ciencia también se ocupa de la explicación racional de dichos descubrimientos, por lo que la experimentación debe tratarse solamente como un primer paso hacia la comprensión completa de una situación dentro de un marco matemático.

Si los estudiantes se acostumbran a usar aseveraciones no probadas para resolver problemas, pronto no podrán distinguir entre adivinar algo y probarlo, y eso puede ser peor que no saber cómo resolver el problema, es decir, tiende a olvidarse el aspecto técnico de las matemáticas (Wu, 1994).

Uno de los ejemplos con los que Wu ilustra su postura, consiste en plantear una situación donde se proporciona cierto perímetro para construir un corral y se pregunta respecto a su área, cuál será la mayor posible y su forma. El autor comenta que la solución requiere de conocer la llamada desigualdad isoperimétrica, misma que regularmente no será explicada por los profesores, ya sea por no dominar el tema o ser demasiado complejo para los alumnos con los que esté tratando, además de que debe tenerse cuidado con las conjeturas de los alumnos respecto al área máxima y su justificación.

Para salvar esta dificultad, el mismo Wu (1994) propone mencionar qué es la desigualdad y comentar en clase que su prueba será accesible para ellos cuando hayan aprendido más matemáticas, lo cual es válido ya que la enseñanza de las matemáticas no necesita ser lineal; o modificar el problema de modo que se minimicen los conceptos “arriesgados”, por ejemplo, acotando la forma a un rectángulo.

Bosch, Gascón y Rodríguez (2007, como se cita en Asami, 2015) también discuten este riesgo, que aparece cuando las actividades abiertas se introducen sin conexión con un contenido o disciplina, por lo que se pueden crear organizaciones matemáticas no conectadas.

Con respecto a los problemas en sí, como menciona Sawada (1997), construir un buen problema abierto no es fácil, es difícil organizar muchos conceptos matemáticos en una situación problemática, que sea significativa e interesante para motivar a los estudiantes a resolverla (De Faria, 2008; Mihajlović y Dejić, 2015); aunque ya se cuenta con algunas sugerencias que pueden ayudar a salvar esta desventaja (Inprashita, 2006).

Por otra parte, dentro de las desventajas que involucran al maestro, Pehkonen (1999) comenta que, si la enseñanza abierta no concuerda con la visión de la enseñanza de un maestro, su uso no será realmente efectivo.

Puede ocurrir que un profesor sienta el desorden común durante las discusiones como una amenaza con la que no puede lidiar (Pehkonen, 1999), que tenga dudas sobre su capacidad para controlar las discusiones en clase y guiar a los alumnos a desarrollar un pensamiento de orden superior (Silver et al., 2005; Ninomiya y Pusri, 2015; Martínez et al., 2017).

También es posible que el docente no pueda apartarse de la tendencia a aceptar solo la solución estándar, considerando que una solución debería tomar poco tiempo, ser práctica y emplear reglas de procedimiento. Esto parece ser característica en profesores de varios países (Bingolbali, 2011). En pocas palabras, requieren de un cambio en el profesor que no es un problema fácil de realizar (Pehkonen, 1999).

Otro posible obstáculo es en cuanto al conocimiento de los maestros, por ejemplo, muchos no conocen el significado de “tarea abierta” (Pehkonen, 1999). En este sentido, la preparación antes de aplicar el problema debe ser bien elaborada. Requiere preparar respuestas esperadas de acuerdo con la capacidad de los estudiantes y también sugerencias relacionadas con sus conocimientos previos, para apoyar a aquellos que no puedan pensar en alguna idea; (Ninomiya y Pusri, 2015; Martínez et al., 2017).

Respecto a la evaluación, principalmente los maestros que no están abiertos a múltiples soluciones no suelen poseer herramientas para evaluar y promover niveles superiores de resolución de problemas, inclusive pueden surgir dificultades matemáticas (Klavir y Hershkovitz, 2008; Bingolbali, 2011).

Sobre los alumnos, Inprashita (2006), identificó, algunas implicaciones negativas que los alumnos mencionaron en entrevistas, como la sensación de no usar su máxima capacidad, pérdida de confianza a causa del rechazo del grupo, que un compañero o el maestro dominaron el aporte de ideas, o sintieron tensión, ansiedad o aburrimiento.

Algunos profesores que apoyaron el estudio de Silver et al. (2005), expresaron preocupación acerca de la posibilidad de confundir a los estudiantes con soluciones múltiples o los efectos negativos que pudieran tener las respuestas erróneas en el plano afectivo, especialmente en los alumnos más lentos o los de mayor capacidad.

También las creencias de los alumnos pueden ser obstáculo, dado que la mayoría de las preguntas y tareas matemáticas que se trabajan en las escuelas tienen una sola respuesta, y esto puede disuadir a los estudiantes de utilizar e investigar varias ideas (Mihajlović y Dejić, 2015), o quizá se sientan satisfechos con una sola respuesta (Sullivan, 1992).

El dominio de enfoques tradicionales en la enseñanza puede provocar que sea muy difícil involucrar a muchos estudiantes en discusiones matemáticas, evitar que se comuniquen entre sí sin limitarse a exponer sus ideas o que los alumnos más comunicativos dominen la discusión (Chan Chun, 2005; Viseu y Oliveira, 2012).

Chan Chun (2005), comenta en su estudio que cuando aplicó problemas de final abierto, los alumnos continuamente buscaron la presencia del maestro para aclarar pensamientos, determinar si estaban en buen camino y obteniendo las "respuestas correctas"; y el profesor tenía que ser paciente y evitar la tentación de darles las soluciones.

Sullivan (2003), citando a varios autores, menciona una preocupación relacionada con la accesibilidad de las preguntas para los alumnos en general, algunos pueden estar en desventaja, ya que hay aspectos de los procesos en el aula asociados con los enfoques abiertos que, en la práctica, tienen el efecto de perjudicar el aprendizaje, por ejemplo, en el hecho de que los profesores no discutan el propósito del trabajo en parejas o equipos.

En la aplicación como tal del enfoque, Foong (2000) comenta que, en Singapur, a principios de los 90, cuando se inició el enfoque en la resolución de problemas no rutinarios en el plan de estudios, los profesores se quejaron de la falta de recursos o tiempo para extender los ejercicios de los libros de texto a la resolución de problemas y el pensamiento matemático, pero el mismo autor comenta que no cree que exista tal escasez de materiales.

En su estudio, Silver et al. (2005), también hicieron notar también la limitación del tiempo para explorar, compartir y discutir varias soluciones diferentes, para resumir los resultados de la clase y la dificultad que implica esta acción (Hino, 2007; Mihajlović y Dejić, 2015). Además, hay cierta desventaja en cuanto al tiempo que se requiere invertir para la planificación (Ochoviet y Scorza, 2017), para cubrir los programas de estudios, y convencer a los estudiantes de las habilidades que se ganan al trabajar bajo el enfoque abierto (Nagasaki y Becker, 1993; Chan Chun, 2005).

Estos mismos autores, Nagasaki y Becker (1993), comentaron que un área de preocupación en su estudio fue el error de los estudiantes. En específico, respecto a posibles consecuencias negativas de exponer las soluciones de los estudiantes, especialmente de "baja capacidad".

Asami (2015) menciona que algunos educadores japoneses advierten que utilizar la resolución estructurada de problemas (recordando que este es el marco donde se encuentra el enfoque abierto) puede convertirse en una formalidad donde se sigue un patrón en el que no se emplean discusiones activas de toda la clase, sino, por ejemplo, solamente entre el profesor y uno o dos alumnos; la discusión se centra principalmente en métodos de solución diferentes y no se convierte en una discusión más matemática, o algunos estudiantes se limitan a esperar la conclusión y resumen al final de la clase.

La anterior puede parecer una larga lista de desventajas y dificultades implicadas dentro del enfoque abierto, muchas realmente complicadas de salvar por caer dentro de los sistemas de creencias tanto de los alumnos como de los profesores, pero los estudios siguen dando más peso a las ventajas y concluyen que es una metodología efectiva.

Por citar dos ejemplos solamente, tanto Boaler (1998), como Sullivan (2003), después de realizar estudios comparativos entre este enfoque y uno tradicional, concluyeron que los estudiantes con los que se adoptaron enfoques abiertos obtuvieron calificaciones significativamente más altas en sus evaluaciones.

Las objeciones respecto a las posibles conductas de los alumnos pueden disminuirse con una preparación más amplia por parte del maestro y que este considere la ardua preparación como una inversión de tiempo, esto incluye vigilar la redacción de los problemas (Sullivan y Clarke, 1992) y organizar de antemano preguntas y comentarios que favorezcan la participación activa de los estudiantes.

Martínez et al. (2017) identificaron en su proyecto algunos factores útiles para facilitar el cambio a un enfoque abierto en la enseñanza. Su larga duración permitió que sucedieran cambios y éstos fueran valorados; además, los problemas se aplicaron con baja frecuencia, una vez al mes; y se realizaron reuniones mensuales entre profesores e investigadores, generando una comunidad de aprendizaje.

En relación con los anterior, Asami (2015), cita a Nohda (1991, p. 34) para comentar que, dado lo difícil que es aplicar el enfoque en cada lección, los japoneses emplean esta forma de enseñanza una vez al mes como regla, con lo cual puede establecerse un balance con lo que los planes de estudios proponen.

El prepararse como profesor para llevar a cabo este enfoque es una tarea difícil, pero posible, y, como Munroe (2015) bien afirma, no se espera que los maestros sean omniscientes, de modo que siempre habrá situaciones inesperadas que no deben ser intimidantes, sino tomadas como retos de enseñanza.

Al respecto, para este trabajo se presta especial atención al manejo de las discusiones en el aula, de forma que el posible desorden generado por ellas (Silver et al., 2005; Ninomiya y Pusri, 2015; Martínez et al., 2017; Pehkonen, 1999), conduzca a generar aprendizaje; además de rescatar el error como algo que también permite aprender (Nagasaki y Becker, 1993), y buscar que al menos la mayor parte de los alumnos se sienta satisfecha con su aprendizaje (esto, en relación a los dos últimos puntos mencionados por Sawada, 1997).

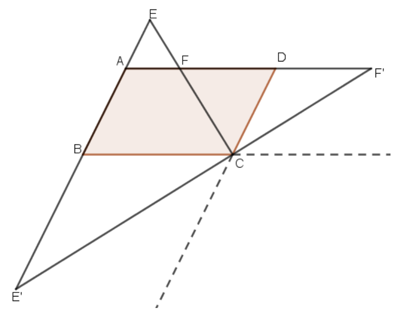
2.4.4 Formular PFA

Ya se ha mencionado que es difícil crear PFA, por lo que a continuación se enlistan algunas recomendaciones de los autores para formularlos. Sawada (1997), comparte las siguientes pautas, derivadas a partir de repetidas pruebas y errores:

1. Preparar una situación física que involucre cantidades variables en las que se puedan observar relaciones matemáticas.
2. Cambiar la prueba de un teorema de geometría "si P, entonces Q", a un problema del tipo "si P, ¿qué tipo de relación puede encontrar entre los elementos de una figura?" Pueden especificarse varios elementos. Por ejemplo:

   Considere la siguiente prueba de geometría:

Figura 8. *Ejemplo de una forma abierta para demostrar un teorema.*



Demuestre: Si la figura ABCD es un paralelogramo y el rayo CE es la bisectriz del ángulo BCD, entonces AE = |AD–AB|

Nota: Adaptada de The Open-Ended Approach (p. 29), por Sawada, 1997, NCTM

Este problema se puede modificar al siguiente de final abierto: Si la figura ABCD es un paralelogramo, el rayo CE es la bisectriz del ángulo BCD y E'F' es la bisectriz de los ángulos exteriores del paralelogramo ABCD en C, entonces, ¿qué relaciones se pueden encontrar entre los segmentos, ángulos y triángulos?

3. Mostrar a los estudiantes figuras geométricas que se relacionen con un teorema de geometría. Luego, solicitar que dibujen otras figuras como las dadas y luego conjeturen un teorema sugerido por las figuras.
4. Mostrar a los estudiantes una secuencia o una tabla numérica, para luego pedirles que descubran algunas reglas matemáticas.
5. Mostrar a los estudiantes varios casos concretos en diferentes categorías. Señalar uno como ejemplo y solicitarles que enumeren otros que tengan las mismas características. Múltiples métodos de enumeración pueden basarse en una multitud de formas de caracterizar los ejemplos.
6. Mostrar a los alumnos un grupo de ejercicios o problemas similares. Luego, solicitar que los resuelvan y encuentren tantas propiedades comunes como sea posible entre al menos dos de ellos. Por ejemplo, a partir de las representaciones gráficas o algebraicas de funciones, solicitar tantas propiedades como sea posible que tengan en común dos o más de las funciones. Este ejemplo se deriva de ejercicios cerrados con preguntas como "¿Cuál es una función creciente?" "¿Cuál es una función cuyo dominio es un subconjunto propio de números reales?", entre otras.
7. Mostrar a los estudiantes varias situaciones cuasi-matemáticas en las que se pueda observar una cierta diferencia y pedir que busquen métodos para medirla.

8. Mostrar a los estudiantes un ejemplo concreto para el cual existe una estructura algebraica (por ejemplo, estructuras de grupo) y los datos numéricos se recopilan fácilmente. Luego, pedirles que encuentren reglas matemáticas que parezcan ser ciertas.

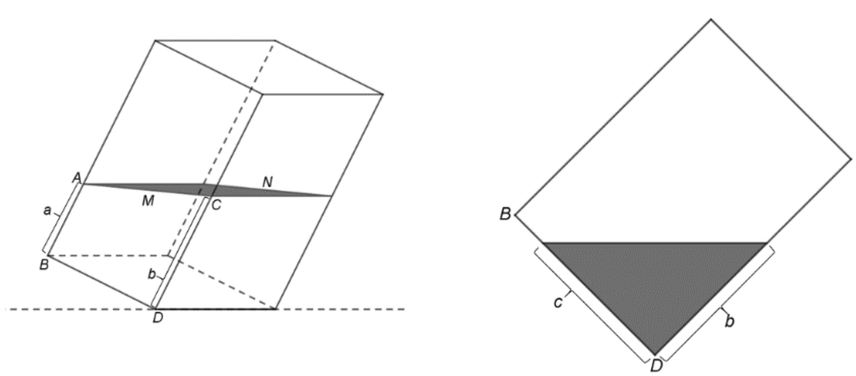
Además, Sawada (1997), relaciona estas estrategias con los tres tipos de problemas de final abierto mencionados por él mismo (ver sección 2.4.1), de la siguiente manera: si se desea un problema de tipo 1 (encontrar relaciones), deben elegirse las estrategias 1, 2, 3, 4 y 8; para un problema de tipo 2 (clasificación), elegir las estrategias 5 y 6; para un problema de tipo 3 (medición), elegir la estrategia 7.

Otros autores también proponen modificar las tareas estándar o rutinarias (con una sola respuesta) o inclusive las preguntas regulares en el aula (Munroe, 2015), realizando modificaciones a los enunciados, que “pueden ser pueden ser omitir un dato, re-redactar la consigna, pedir dar un ejemplo, etc.” (Scorza, 2017, p. 77) para convertirlas en problemas de final abierto, y aplica a varias tareas estándar (Zaslavsky, 1995). Esta estrategia fue la que se empleó para generar los problemas para la presente investigación.

A continuación, se recopilan algunos ejemplos:

- Problema del frasco de agua: Un frasco transparente en forma de prisma rectangular recto está parcialmente lleno de agua. Cuando se inclina, con un borde de su base fijo, las caras del prisma y la superficie del agua forman diversas figuras geométricas (ver Figura 9). Las formas y tamaños pueden variar según el grado de inclinación. Intente descubrir tantas relaciones (reglas) invariantes con respecto a estas formas y tamaños como sea posible. Anote todos sus hallazgos (Hashimoto, 1997).

Figura 9. *Representación del problema del frasco de agua.*



Nota: Adaptada de The Open-Ended Approach (p. 10), por Hashimoto, 1997, NCTM

- Encuentre tantos patrones numéricos como sea posible en la siguiente tabla.

Tabla 2. *Patrones numéricos.*

1	2	3	4	5	6	7
6	9	12	15	18	21	24
27	23	45	54	63	72	81
108	135	162	189	216	243	270

Nota: Tomada de The Open-Ended Approach (p. 30), por Sawada, 1997, NCTM

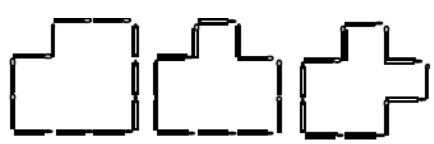
Esta tabla fue producida por la fórmula

$$f(m,n) + f(m,n+1) + f(m,n+2) = f(m+1,n); f(1,n) = n$$

donde $f(m,n)$ es un término en la m-ésima fina y la n-ésima columna.

- Encontrar propiedades comunes: A partir de diversas representaciones de varias funciones, elegir aquellas que compartan características comunes, indicar cuáles son y explicar su decisión (Sawada, 1997).
- Polígonos con cerillos. Campo de problemas (problemas relacionados entre sí), que requiere como material doce cerillos (o palitos de cóctel, etc.), donde la situación de partida es: Con doce cerillos se puede hacer un cuadrado de área 9 u^2. A partir de ella, se desarrollan las preguntas A) ¿Puedes usar doce cerillos para hacer un polígono con un área de 5u^2? B) ¿Cuántos polígonos diferentes de 5u^2 puedes hacer con doce cerillos? C) ¿Es posible usar doce cerillos para hacer un polígono de 6u^2 (o 7, 8 u^2)? (Ver Figura 10) D) ¿Es posible usar doce cerillos para hacer un polígono de 1 u^2 (o 2, 3, 4 u^2)? ¿Cómo sería? E) Usando doce cerillos, ¿es posible hacer un polígono cuya área sea mayor que 9 u^2? (Pehkonen, 1999)

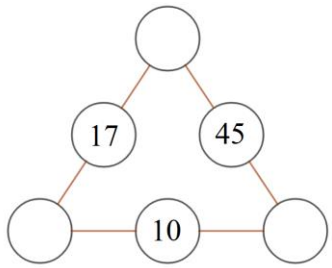
Figura 10. *Polígonos de área 8, 7, 6u^2, respectivamente.*



Nota: Tomada de Open-Ended Problems: A method for an educational change (p. 57), por Pehkonen, 1999, Proceedings of International Symposium on Elementary Maths Teaching.

- Triángulo numérico: A partir de un triángulo donde las esquinas están en blanco y se fijan números en los lados, como en la Figura 11, se puede construir un campo de problemas con la pregunta: ¿Qué números deben colocarse en los círculos en blanco para que la suma de los tres números en cada lado sea igual? Variando, por ejemplo, el tipo de números que se pueden incluir en los espacios en blanco, o estableciendo sumas fijas específicas para los lados (Pehkonen, 1999).

Figura 11. *Ejemplo de triángulo numérico.*



Nota: Adaptada de Open-Ended Problems: A method for an educational change (p. 58), por Pehkonen, 1999, Proceedings of International Symposium on Elementary Maths Teaching

- ¿Cuál de los siguientes números 15, 20, 23, 25, no pertenece al conjunto? Explicar por qué (Klavir y Hershkovitz, 2008). Kwon et al. (2006) propusieron un problema similar, empleando la secuencia 1, 2, 4, 6, 8, 12.
- A partir de un menú con diferentes platos, por ejemplo, guarniciones, principales y postres: Randy tiene $80.00 para gastar en su restaurante favorito. Quiere pedir un plato principal, dos guarniciones y un postre. Él sabe que gastará $20.50 en videojuegos mientras espera su orden. Encuentra tres comidas diferentes que Randy podría elegir. Muestra tus cálculos y explica cómo pensaste sobre el problema (Kabiri y Smith, 2006).
- Se ha pedido diseñar un acuario en forma de prisma rectangular para el salón de visitas de la escuela. Debido al tipo de peces que se compran, la tienda de mascotas recomienda que el acuario debe contener 24 pies cúbicos de agua. Encontrar tantas dimensiones diferentes para el acuario como sea posible. Luego, decidir qué acuario es recomendable para el salón y explicar el porqué de esa elección (Kabiri y Smith, 2006).
- ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de un rectángulo con exactamente la mitad del área de otro rectángulo cuyas dimensiones son 4cm por 6cm? Explique su respuesta (Bingolbali, 2011)
- El volumen de una forma es 216 unidades cúbicas, ¿cuál puede ser? (Boaler, 1998). Para evitar dificultades como las que menciona Wu (1994), sería conveniente acotar la forma a un prisma rectangular, por ejemplo, y modificar a una pirámide.

- Encuentre la ecuación de una recta que tenga dos puntos de intersección con la parábola $y = x^2 + 4x + 5$ (Scorza, 2017, p. 75)
- Completa los dos últimos términos para que la siguiente fracción algebraica pueda simplificarse: $\frac{x^2-5x-?}{x^2-3x-?}$ (Scorza, 2017, p. 77).
- Determina una ecuación para una recta que pase por el punto (3,1) (Scorza, 2017, p. 77).
- Dos quintos (2/5) de los alumnos de una escuela juegan baloncesto. ¿Cuántos alumnos podría haber en la escuela y cuántos podrían jugar al baloncesto? (Sullivan y Clarke, 1992).
- ¿Cómo podrías sumar 355 + 727 en una calculadora si los botones 5 y 7 están rotos? (Sullivan y Clarke, 1992).

2.4.5 Rol del alumno

Dentro del enfoque abierto, tanto el profesor como los estudiantes deben estar activos, durante una parte considerable del tiempo de clase, participando en un discurso matemático interactivo (Asami, 2015).

De acuerdo con lo anterior, se espera que los estudiantes se sirvan de recurso entre ellos mismos para trabajar en problemas matemáticos, colaborar para desarrollar soluciones y compartir sus estrategias, además de proporcionar explicaciones verbales de sus ideas (Nagasaki y Becker, 1993; Silver et al., 2005). También deben abordar problemas complejos, hacer conjeturas, presentar sus diversas ideas y profundizar su comprensión de las ideas matemáticas (Asami, 2015).

Además, por ser un enfoque centrado en la resolución de problemas, hay que considerar las características que debería reunir el estudiante cuando trabaja resolviendo problemas. Al respecto, Villarreal (2010), con base en varios autores, recopila la siguiente lista, de la cual se muestran solamente algunos puntos, según la cual el estudiante debe:

- Adquirir conocimientos, habilidades y competencias del tema abordado, sobre resolución de problemas y el trabajo individual y/o colaborativo.
- “[Construir], desarrollar, refinar o transformar sus formas de comprender la forma de resolver problemas, realizando consultas relevantes y respondiéndola con diferentes medios” (p. 157).

- Establecer un plan de trabajo para resolver el problema, comprenderlo, formular preguntas adecuadas para ello y definir el problema con claridad y precisión.
- Involucrarse de forma activa en el proceso de solución del problema.
- Mantenerse motivado durante todo el proceso.
- Desarrollar habilidades para ser autodirigido, es decir, realizar un aprendizaje autorregulado, responsable e interesado.
- Efectuar autoevaluaciones constantemente.
- Resolver el problema, formulando hipótesis o planes estratégicos de solución y aplicarlos para posteriormente evaluarlos, seleccionando lo más adecuado con base en criterios científicos y éticos.
- Buscar, representar y describir “cambios o formas de variación (incluyendo invariantes) entre los objetos o atributos asociados al problema, que les permitan identificar patrones, conjeturas o relaciones” (p. 157).
- Efectuar una reflexión sobre lo que se aprendió, tanto en el trabajo individual como con el grupo o equipo, si se trabajó de esta forma.
- Compartir los conocimientos, habilidades, información y recursos obtenidos durante el proceso con el resto de los estudiantes.

Por otra parte, como el enfoque abierto implica el trabajo en equipo y/o grupal además del individual, es importante que los estudiantes realicen lo siguiente, considerando la forma en que los estudiantes japoneses se conducen durante sus clases (Asami, 2015):

- Compartan el razonamiento de sus compañeros de clase.
- Participen activa y responsablemente en el aprendizaje mutuo.
- Se capaciten para escuchar a los demás con atención.

Villarreal (2010) indica que los estudiantes también deben:

- Formar los grupos de trabajo.
- Definir la participación de cada integrante.
- Evaluar el trabajo de su grupo.
- Administrar, de forma justificada, su tiempo individual y de trabajo en equipo.

El mismo autor indica que, para lograr todo esto, “el alumno necesitará una preparación en relación a la forma de actuar, incluyendo los nuevos papeles, expectativas y responsabilidades que requerirán” (Villarreal, 2010, p. 155) y apoyo para comprender que las acciones enumeradas anteriormente favorecen y enriquecen tanto su propio aprendizaje, como el de sus compañeros (Viseu y Oliveira, 2012).

Aunque los deberes anteriores son importantes, para este trabajo se busca resaltar que los alumnos colaboren para desarrollar soluciones, reflexionen y compartan estrategias, soluciones y aprendizajes con sus compañeros (Asami, 2015; Nagasaki y Becker, 1993; Silver et al., 2005; Villarreal, 2010), participando de forma activa y escuchando las ideas de los demás (Asami, 2015). Todo esto para que los estudiantes, según Villarreal (2010), adquieran habilidades y competencias del tema de sistemas de ecuaciones lineales; de resolución de problemas, especialmente para comprender el problema, elaborar un plan de resolución, e involucrarse en él de forma activa; y para el trabajo individual y colaborativo.

2.4.6 Rol del profesor

Como se mencionó antes, el uso de un enfoque abierto requiere un cambio en el rol del maestro, que ya no sea solo un transmisor de conocimientos, sino un guía y facilitador del aprendizaje, así como un planificador de situaciones de aprendizaje (Pehkonen, 1999; Munroe, 2015), por lo que el maestro juega un papel importante en la lección con la resolución de problemas (Hino, 2007) y tiene que tomar en cuenta que debe:

- Manejar el "tiempo de espera" para extraer la variedad de pensamiento de los estudiantes (Nagasaki y Becker, 1993), después de presentar el problema o hacer una pregunta.
- Respetar las diferentes formas en que los estudiantes piensan sobre el tema o problema matemático en una lección y confiar en los estudiantes como una "fuente de información" durante la lección (Nagasaki y Becker, 1993).
- Ayudar a los estudiantes a ser conscientes de que las relaciones lógicas también forman parte del problema. Por ejemplo, transformar la pregunta ¿por qué? en un problema, puede proporcionar una situación natural que requiere una demostración lógica por parte de los estudiantes (Hashimoto, 1997).
- Asignar y administrar el tiempo con cuidado, ya que es probable que los estudiantes generen muchas respuestas, tanto esperadas como inesperadas, y todas deben discutirse y resumirse (Hashimoto, 1997).
- Garantizar la máxima oportunidad y el mejor ambiente de aprendizaje en cualquier tipo de actividades educativas como sea posible (Nohda, 2000).

- Tratar de entender tantas ideas de los estudiantes como sea posible (Nohda, 2000).
- Escuchar la discusión de diferentes grupos, cuestionando sus suposiciones, teniendo en cuenta que, si no hay apoyo y aliento, el proceso de resolución de problemas podría convertirse en una experiencia frustrante (Chan Chun, 2005).
- Guiar el desarrollo matemático de los estudiantes al discernir y hacer explícitas las ideas matemáticas clave en las diferentes estrategias de solución mostradas por los estudiantes (Silver et al., 2005).
- Decidir qué soluciones considerar y alentar la revisión de aquellas que merecen más consulta (Silver et al., 2005).
- Ser paciente y evitar la tentación de guiar a los alumnos durante todo el proceso, ser consciente de las respuestas que se les proporcionan para ayudarles a construir conocimiento cuestionando supuestos (Chan Chun, 2005).
- Notar y aceptar que enseñar matemáticas no significa solo centrarse en la cobertura del contenido, sino que es más importante enfatizar los procesos de aprendizaje de los estudiantes, las ideas originales y también las actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas que satisfacen la competencia de cada uno (Inprashita, 2006).
- Facilitar y guiar la discusión matemática después de que cada estudiante encuentre una solución (Takahashi, 2006; Munroe, 2015). Esta discusión a menudo se llama Neriage en japonés, lo que implica 'pulir ideas' (Takahashi, 2006).
- Resumir la lección recapitulando las fortalezas y debilidades de cada método presentado, reuniendo enfoques e ideas diferentes para ver conexiones (Munroe, 2015; Nagasaki y Becker, 1993; Takahashi, 2006).
- Planificar la discusión como parte del plan de lección, para anticipar la variedad de métodos de solución que se pueden aportar, incluyendo los métodos más eficientes y los causados por malentendidos de los estudiantes (Takahashi, 2006).
- Preguntarse si el problema asignado es suficiente para despertar interés en los estudiantes, cómo manejar las diferentes soluciones, qué tanta oportunidad dar para que todos se involucren en la resolución y reflexionen (Hino, 2007).
- Manejar de manera total "todas las posibles soluciones y métodos de solución del problema planteado" (Fonseca y Alfaro, 2010, p. 183).
- Seleccionar a los estudiantes que presenten sus respuestas matemáticas durante la fase de discusión y su secuencia (Viseu y Oliveira, 2012).
- Saber escuchar a sus estudiantes para animarlos a discutir las actividades del aula, y recopilar información sobre su forma de pensar (Viseu y Oliveira, 2012).

- Ayudar a los estudiantes a “preguntarse a sí mismos” (Ninomiya y Pusri, 2015).
- Alentar a los estudiantes a escribir predicciones y conjeturas relacionadas al problema (Ninomiya y Pusri, 2015).
- Circular en el aula durante el trabajo individual y/o en equipo, para monitorear las diferentes interpretaciones de los estudiantes antes de unirse a la discusión de toda la clase, es una buena técnica pedagógica (Asami, 2015).

Además, es recomendable que el profesor:

- Participe en la discusión como un miembro común del grupo (Zaslavsky, 1995) o del equipo.
- Use preguntas de la forma "¿qué pasaría si...?" y anime a los estudiantes a hacer lo mismo (Chan Chun, 2005).
- Pida a los estudiantes que reflexionen sobre lo que han aprendido durante la lección (Takahashi, 2006).
- Escriba las ideas y preguntas importantes o que desea enfatizar (Ninomiya y Pusri, 2015).
- Repita las respuestas de los alumnos para permitir que todos las comprendan a fondo (Ninomiya y Pusri, 2015).

Finalmente, hay que llamar la atención sobre no malinterpretar el papel del profesor como una solicitud para permitir que los estudiantes controlen las clases, ni concluir que el profesor nunca debe decirle nada directamente a los estudiantes (Silver et al., 2005), sino trabajar con ellos.

Cabe resaltar nuevamente que en este enfoque no se espera que los maestros sean omniscientes (Munroe, 2015), siempre habrá situaciones imprevistas, pero sí que se prepare correctamente para aplicar el problema en clase.

Para el presente trabajo, se buscó enfatizar aquellas acciones que, según se interpretó con base en características del enfoque de final abierto, son guías principales para llevar a cabo una estrategia dentro de este enfoque:

a) Manejo adecuado del tiempo (Hashimoto, 1997; Nagasaki y Becker, 1993).
b) Escuchar y participar en las discusiones en grupos pequeños (Chan Chun, 2005; Hashimoto, 1997).

c) Buscar equilibrio entre guiar y proporcionar respuestas directas, según sea necesario, prestando atención al ritmo del estudiante; tanto durante las discusiones en equipos como grupales (Chan Chun, 2005; Takahashi, 2006; Munroe, 2015).
d) Preparar y seleccionar posibles soluciones a los problemas, que permitan discusiones matemáticas ricas, y finalizar con un resumen que permita sintetizar lo discutido en clase (Munroe, 2015; Nagasaki y Becker, 1993; Silver et al., 2005; Takahashi, 2006).

2.5 Estudios sobre el enfoque de final abierto

Al hacer una revisión de la literatura, puede observarse que existen muchas investigaciones respecto a los problemas de final abierto, y aún más para el enfoque abierto, lo cual destaca su importancia. Algunos de estos estudios se resumen a continuación, según autores y zonas geográficas. Cabe notar que muchos se realizaron en Estados Unidos, pero la diversidad de países muestra que el enfoque abierto ya se ha extendido a nivel mundial.

Sullivan y Clarke (1992), Australia y Malasia. Algunos alumnos resolvieron cuatro tareas abiertas, con el fin de investigar la calidad de sus respuestas en diferentes condiciones de agrupación y escolaridad, con diferentes tipos de dirección por parte del maestro. Como resultados, las respuestas por nivel no parecieron ser influenciadas por trabajar de forma individual o con un compañero; en general los alumnos dieron una solución, algunos comentando que podrían haber dado más, pero estaban satisfechos con una o pensaron que eso era lo requerido. También concluyen que este tipo de pregunta tiene potencial para ser útil en las aulas, aunque es necesario seguir investigando.

Wu (1994), Estados Unidos. A través de tres ejemplos, habla del peligro de perder la formalidad matemática al no dar soluciones “completas” a ciertos PFA para los cuales es posible escribir una generalización o demostrar las soluciones, especialmente cuando se pide a los alumnos que únicamente exploren las soluciones mediante prueba y error, sin dar formalismo a los conceptos o sin explicar que, aunque este es un método efectivo, las matemáticas requieren de razonamiento lógico y demostraciones precisas.

Zaslavsky (1995), Estados Unidos. En un curso dirigido a profesores, tanto ellos como el instructor reflexionaron sobre procesos y soluciones que encontraron a problemas de final abierto. La reflexión implicó el análisis de la tarea, en términos de su naturaleza y matemática que requirió; de los docentes como aprendices, en términos de procesos e interacciones de aprendizaje individual y grupal; del instructor como maestro, en términos de su rol en la creación de la situación de aprendizaje; de los docentes como docentes, en cuanto a la posible implementación de situaciones e ideas similares en sus aulas. Propone una modificación a una tarea cerrada y revisa, además de las soluciones propuestas, formas de ampliar el problema y posibles aportes al aprendizaje y la enseñanza.

Pehkonen (1997), Finlandia. Recopilación de artículos de diferentes países, Finlandia, Taiwán, Reino Unido, Australia y Japón, relacionados con la teoría y práctica utilizando problemas de final abierto en las aulas de matemáticas.

Boaler (1998), Reino Unido. El autor comparó enfoques alternativos de enseñanza matemática; en una escuela se utilizó un enfoque tradicional siguiendo un libro de texto y en otra un enfoque abierto. Los estudiantes que siguieron un enfoque tradicional desarrollaron conocimiento de procedimientos, limitados a situaciones familiares. Los que aprendieron en un entorno abierto y basado en proyectos desarrollaron una comprensión conceptual que les proporcionó ventajas en una variedad de evaluaciones y situaciones. Realizó un análisis estadístico muy completo para procesar sus resultados.

Pehkonen (1999), Finlandia. Llevó a cabo un proyecto con alumnos de 13 a 15 años, centrado en el uso de campos de problemas, además de la enseñanza convencional de matemáticas. Consistió en comparar un grupo experimental y un grupo control, respecto a las percepciones y concepciones de alumnos y profesores sobre el uso de campos de problemas. Los alumnos los consideraron una forma interesante de aprender matemáticas y a la mayoría les gustó mucho, se sintieron motivados y activados durante las clases. En cuanto a los profesores, tuvieron problemas para adaptarse a la estrategia de enseñanza, aunque consideraron que el enfoque es prometedor.

Foong (2000), Singapur. A partir del cambio en la forma de educar en ese país, hace una revisión en el tiempo de cómo se han introducido los PFA en el mundo, enlista características y ventajas, lo que se puede lograr en los alumnos y lo que puede ver en ellos el profesor.

Sullivan (2003), Australia. El autor hace una revisión sobre las implicaciones de utilizar tareas matemáticas abiertas, argumentando que, si los enfoques abiertos van acompañados de apoyos pedagógicos apropiados, los estudiantes desfavorecidos también pueden aprender productivamente de su exploración de tales tareas. Recopiló diferentes datos, observaciones en las aulas, discusiones con los profesores y entrevistas al inicio y final del estudio, observaciones de alumnos seleccionados, encuestas a los maestros y un instrumento de planificación. Gracias a estos datos, concluyó que los enfoques abiertos son factibles y pueden abordar las necesidades de los alumnos desfavorecidos.

Chan Chun (2005), Singapur. El autor analizó el uso de tareas de problemas matemáticos contextuales abiertos, donde participaron estudiantes de 6º de Primaria. Describe el trabajo en el aula, compartiendo las implicaciones positivas y las dificultades encontradas. Además, realizó una evaluación de las soluciones con base en el enfoque que usó el alumno al resolver, su procesamiento, su explicación y calidad general, aunque no profundiza en ella.

Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous, y Font Strawhun (2005), Estados Unidos. Realizaron un proyecto en dos fases, aunque se centran en la fase 1, llevada a cabo entre 2002 y 2004. Varios maestros utilizaron el enfoque abierto (con problemas con múltiples formas de resolver) en sus clases y se reunieron una vez al mes para comentar los resultados, tratando de llevar a cabo estudio de lecciones. Examinaron problemas y preocupaciones que son posibles obstáculos para el uso de PFA en el aula de matemáticas. Consideraron cómo los maestros pueden superar esos obstáculos, y también sus logros.

Inprashita (2006), Tailandia. El proyecto se llevó a cabo en el año académico 2002 en 7 escuelas al noreste de Tailandia, con el fin de investigar los cambios en la visión de los estudiantes de docencia cuando utilizan el método de enseñanza de Enfoque Abierto. Con la guía del investigador, construyeron planes de lección con problemas abiertos, utilizando estudio de lecciones. Aplicaron los planes en su práctica docente, detectando en general respuestas positivas por parte de sus alumnos y pocas negativas, además de un cambio en los profesores respecto a su paradigma sobre la enseñanza y el aprendizaje, considerándolo después una unificación de su forma de vida y su aprendizaje.

Kabiri y Smith (2006), Estados Unidos. Tomaron cinco problemas tradicionales de un libro de texto, los adaptaron para que fueran abiertos y solicitaron a algunos estudiantes de séptimo grado (12 años) que los resolvieran. Su marco de referencia fueron los Estándares del NCTM, por lo que describen cómo los problemas propuestos cumplen con dichos Estándares, además de presentar el problema original y el contraste con el de final abierto, resaltando ventajas, formas en que los estudiantes los trabajaron y sus respuestas.

Kwon, Park, y Park (2006), Corea. El propósito de este estudio fue desarrollar un programa para ayudar a cultivar el pensamiento divergente (y creativo) en matemáticas basado en problemas abiertos e investigar las consecuencias cognitivas. Para ello, se utilizó una prueba previa y una posterior para medir principalmente las habilidades de pensamiento divergentes a través de problemas abiertos, en grupos de control y de prueba. Participaron estudiantes de séptimo grado en 13 clases en cinco escuelas intermedias en Seúl, Corea, en 2003. Los resultados muestran mejorías superiores para los que trabajaron con PFA en cuanto a pensamiento divergente y creativo, con base en un análisis estadístico de las pruebas realizadas.

Hino (2007), Japón. Realizó una revisión histórica sobre cómo se lleva a cabo la resolución de problemas en Japón (resolución estructurada de problemas), tanto a nivel de investigaciones como dentro del plan de estudios y en las aulas. Dedica un apartado particular para los problemas de final abierto, por considerarse muy útiles para desarrollar y evaluar el pensamiento de orden superior.

Mahlobo, 2007, Sudáfrica. Su estudio, para una tesis doctoral, tuvo como objetivo determinar el impacto de un enfoque abierto en el aprendizaje de las matemáticas en las clases de matemáticas del grado 11 en una escuela experimental. Contó con dos grupos experimentales, uno supervisado y el otro no, y un grupo de control. Se aplicó una prueba previa en ambas escuelas para establecer y comparar sus conocimientos previos, en los que no hubo diferencias significativas entre los alumnos. Luego de la intervención en el aula, se realizó una prueba posterior. En general, reporta mejores resultados con el uso de PFA, aunque no es el informe completo de su estudio. Cabe mencionar que su introducción habla del plan de estudios de Sudáfrica para justificar el uso de los problemas, pero no especifica de dónde eran los alumnos con los que trabajó.

Klavir y Hershkovitz (2008), Estados Unidos. A partir de un PFA aplicado a alumnos de quinto grado (10-11 años), analizaron y clasificaron las respuestas de varios estudiantes, para después proponer una forma de evaluarlas, con base en la fluidez, flexibilidad, elaboración y originalidad de las respuestas. Describen la metodología que emplearon para la clasificación y la evaluación de las respuestas de los estudiantes, con el fin de proporcionar una herramienta para quienes deseen emplear problemas de final abierto. Además, obtuvieron conclusiones sobre los conocimientos y habilidades de los alumnos.

Fonseca y Alfaro (2010), Costa Rica. El objetivo fue buscar elementos teóricos que “deben estar presentes en la construcción de propuestas de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas mediante la resolución de problemas en los cursos de formación de docentes en esta disciplina” (p. 177). Los autores realizan una revisión del trabajo de Lesh y colegas

(Model-eliciting activities, alrededor del año 2003) en resolución de problemas, el enfoque de final abierto de los japoneses y la experiencia del Seminario de Resolución de Problemas, de 2007, en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.

Bingolbali (2011), Turquía. El autor explora en qué medida los profesores están abiertos a diferentes soluciones en problemas matemáticos y cómo evalúan (califican) estas soluciones. Aplicó dos cuestionarios a aproximadamente 500 maestros, mostrando tres soluciones diferentes de alumnos a los profesores para que las evaluaran y justificaran sus juicios, asignando una calificación. Concluyó que no hay aprecio por parte de los maestros a las múltiples soluciones, tienen dificultades para calificarlas y prefieren concentrarse en la practicidad y en la respuesta más corta.

Thinwiangthong, Inprashita, y Loipha (2012), Tailandia. El objetivo fue analizar y desarrollar la Comunicación Matemática en Grupos Pequeños como Proceso de Aprendizaje Matemático, de estudiantes de séptimo grado de 2008 a 2010, mediante la adaptación del Estudio de lección y el Enfoque abierto. Participaron ocho estudiantes de séptimo grado (de entre 12 y 13 años), y los datos se recopilaron mediante grabaciones de video y audio en el aula, entrevistas (en video) a los estudiantes y al maestro.

Viseu y Oliveira (2012), Portugal. Se usaron problemas con múltiples formas de resolver para estudiar las formas de comunicación en un aula de séptimo año. Se implementaron dos tareas, una exploratoria y una investigación, para las cuales se observaron las formas en que los alumnos y el profesor se comunicaban entre ellos y comunicaban sus hallazgos y trabajos, concluyendo que este tipo de tareas son efectivas para mejorar la comunicación matemática, pero es necesario que el profesor lleve un buen manejo de las clases.

Mihajlović y Dejić (2015), Serbia. Partiendo de la afirmación de que la mayoría de los maestros de primaria en Serbia (que enseñan en los grados 1° a 4°) no están capacitados para usar y crear PFA, los autores proponen algunos problemas de este tipo y explican qué soluciones posibles pueden dar los alumnos, cuál es el objetivo del problema y analizan algunas posibilidades de utilizarlos en la enseñanza, como herramientas para fomentar la creatividad y mejorar el pensamiento matemático. Se encontró que, aunque la mayoría de los docentes a los que entrevistaron (94,82%) habían respondido que usaban más o menos PFA en su trabajo docente, solo el 14% había dado un ejemplo correcto de tales problemas.

Munroe (2015), Japón. El propósito de este estudio fue presentar y discutir un marco para el uso de problemas abiertos en las clases de matemáticas, como lo practican dos maestros expertos en Japón, por lo que describe la metodología que usan los profesores en el aula para llevar el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir de este tipo de problemas.

Ninomiya y Pusri (2015), Japón. El objetivo del estudio fue crear un plan de lección con un problema abierto utilizando el método jigsaw, experimentar el plan en la escuela secundaria en Japón, y comparar el resultado esperado y empírico en el experimento de clase. Utilizaron el problema del vaso de agua propuesto por Hashimoto (1997), contrastando las respuestas de los alumnos dirigidos por un maestro japonés y un investigador. Evaluaron con base en la flexibilidad, fluidez y originalidad. Encontraron que los alumnos se sentían bien con el trabajo y fueron participativos, pero había algo de desorden en el aula, limitante de tiempo, y algunos a aspectos que corregir respecto a la organización de la clase.

Fatah, Suryadi, Sabandar, y Turmudi (2016), Indonesia. Su estudio tuvo como objetivo examinar el uso de un enfoque abierto para cultivar la capacidad de pensamiento creativo matemático (MCTA) y la autoestima (SE). Participó un grupo control y uno experimental; los datos fueron recopilados mediante una prueba y analizados mediante estadística, concluyendo que el enfoque abierto es eficaz para cultivar la MCTA de los estudiantes y mejora su autoestima, pero es importante tener en cuenta la forma en que los profesores ayudan a los estudiantes a resolver los problemas.

Barrera y Reyes (2017), México. Trabajo realizado con profesores, empleando “tareas de múltiples soluciones (TMS)”, que, por la descripción de los autores, son problemas abiertos en la forma de resolver. Los profesores participantes resolvieron una tarea aritmética durante un seminario de resolución de problemas y analizaron sus soluciones, con la finalidad de “identificar los elementos [...] que puede aportar el uso de las TMS durante la formación y actualización de los docentes de matemáticas, particularmente en [...] la construcción de conexiones entre ideas o conceptos disciplinares y didácticos” (Barrera y Reyes, 2017, p. 112).

Martínez, Araya, y Berger (2017), Chile. Estudio bilateral Chile-Finlandia, en el que se implementa la resolución de PFA en el aula y se describe el proceso de cambio en las creencias sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los profesores, a partir de su propia perspectiva, y los factores que afectan ese cambio. Se realizó a nivel primaria con estudiantes de 9 a 11 años, y consistió en aplicar resolución de PFA una vez al mes. Para recopilar datos, se realizaron entrevistas y registros escritos, videos y fotos. También se describió brevemente qué pasó con los alumnos durante la aplicación.

Scorza (2017), Uruguay. Realiza una revisión del artículo de (Zaslavsky, 1995) y propone algunos problemas de final abierto.

Ochoviet y Scorza (2017), Uruguay. Estudio que gira en torno a lo que piensan los profesores sobre la aplicación de problemas de final abierto, dirigido principalmente a formadores de profesores, con base en el artículo de Zaslavsky de 1995.

2.6 Enfoques pedagógicos

Si bien en este trabajo se pretende presentar solamente el enfoque abierto, cabe resaltar que tiene relación con diversas teorías cognitivas. Davis et al. (1990, como se citó en Pehkonen, 1999) afirman que el enfoque es una respuesta a la búsqueda de un nuevo método de enseñanza que pueda afrontar los desafíos planteados por el constructivismo, ya que el trabajo activo de los alumnos en clase es compatible con la comprensión constructivista del aprendizaje, el cual enfatiza que cada individuo tiene una forma característica de reconstruir y percibir el mundo que lo rodea, es decir, que los individuos "construyen" su propia comprensión del mundo como un producto de sus interacciones con su entorno (Pehkonen, 1999; Munroe, 2015).

Pehkonen (1999), comenta además que un planteamiento del constructivismo es que el conocimiento de una persona se formará y cambiará a través de sus acciones y este aprendizaje ocurre en el mejor de los casos en entornos de aprendizaje abiertos, por ejemplo, al utilizar investigaciones y proyectos.

Munroe (2015) cita a autores como Piaget (1948/1973) y Fosnot y Perry (2005), quienes justifican el uso del enfoque abierto y de la resolución de problemas en general, por sus relaciones con el constructivismo como base para el trabajo en el aula. En primer lugar, es un enfoque donde el centro es el alumno, ya que en lugar de darles a los estudiantes un método prescrito de interpretación y cálculo, se les recomienda que apliquen su experiencia para resolver problemas de una manera única y diferente. La educación centrada en el alumno tiene sus orígenes en la teoría del desarrollo constructivista.

Por otra parte, el libro de Becker y Shimada de 1997 “Open-ended approach”, está basado en la filosofía de que cada estudiante puede aprender matemáticas tomando como punto de partida su propia experiencia, estilo de aprendizaje y etapa de desarrollo cognitivo (Munroe, 2015).

En el método de enfoque abierto, se requiere que las enseñanzas estén abiertas a la mente del estudiante (Nohda, 2000) y se considera fundamental el empleo de conocimientos previos, que permite el desarrollo simultáneo de diferentes tipos de conocimientos y hacer un nuevo uso de ellos, integrándolos (Klavir y Hershkovitz, 2008); siendo estas, ideas compartidas con el constructivismo.

Por otra parte, Nohda (2000) propone también una relación de la idea de "trayectoria de aprendizaje" propuesta por M. Simon en 1995, ya que se procura que las lecciones estén organizadas aprovechando los pensamientos de los estudiantes y se espera que ellos los utilicen a través de la resolución de problemas (Takahashi, 2006).

Pehkonen (1999), menciona que hay estudios psicológicos que muestran que el aprendizaje está fuertemente conectado con la situación, y que el aprendizaje de hechos y procedimientos ocurre a través de diferentes mecanismos, por lo que en la instrucción se deben ofrecer a los alumnos diferentes métodos para aprender el conocimiento conceptual (como hechos) y el conocimiento procedimental (como el uso de hechos), lo cual incluye la resolución de problemas y se vuelve más rico empleando los de final abierto.

Dentro de la investigación sobre resolución de problemas y pensamiento matemático de los estudiantes en Japón, puede notarse interés en las características de las matemáticas mientras los alumnos resuelven problemas matemáticos; y estos estudios muchas veces se realizaron con enfoques de la psicología cognitiva y proporcionaron descripciones detalladas de los procesos de pensamiento reales de los estudiantes (Hino, 2007).

Klavir y Hershkovitz (2008), citan a Mumford et al. (1994, 1997), quienes sostienen que tareas que fomenten la creatividad, como los PFA, pueden constituir un medio para ampliar, reorganizar y procesar el conocimiento previo; además, señalan que pueden contribuir al aprendizaje por al menos tres razones, a saber:

1. La construcción creativa obliga a los alumnos a activar repetidamente su conocimiento previo y construir a partir de él partes relevantes para la tarea.
2. Cuando los alumnos intentan formular suposiciones y verificarlas, desempeñan un papel activo en la construcción y el procesamiento de sus conocimientos.
3. La actividad de los estudiantes al evaluar la veracidad de sus suposiciones les ayuda a reorganizar sus conocimientos y desarrollar un plan general de acción para resolver problemas.

Otro concepto tomado en cuenta dentro del enfoque abierto es el de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), propuesta por Vygotsky en 1978, la cual se usa para explicar la diferencia entre lo que los estudiantes pueden hacer solos y lo que pueden hacer con la ayuda de otros (Munroe, 2015).

Específicamente, la ZDP, según Bransford et al. (2000), es la distancia que existe entre el nivel de desarrollo real, que está determinado por los problemas que un alumno puede resolver de manera independiente, y lo que puede hacer con la ayuda de un contexto apoyo que incluye la ayuda de otros, ya sea expertos o compañeros más capaces; estos dos límites no permanecen constates, sino que cambian constantemente conforme aumenta la competencia independiente del estudiante, de modo que lo que en el presente puede realizarse con ayuda, más adelante podrá hacerse de forma independiente.

Justamente, al aplicar el enfoque de final abierto, y como ya se ha mencionado, se trabaja en lo que cada alumno puede lograr por sí mismo, lo que permite a los maestros determinar el nivel de conocimiento activo de los estudiantes y, gracias a ello, aludir a su ZDP para elevar el nivel de la discusión siguiendo las ideas con diferentes niveles de dificultad. Y cabe mencionar que, debido a esto, la capacidad de los profesores para obtener información de los estudiantes y ayudarlos a comunicar sus ideas se vuelve muy valiosa (Klavir y Hershkovitz, 2008; Munroe, 2015).

También hay cierta relación entre el enfoque abierto y algunas metas y prioridades establecidas en “Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989) (Estándares curriculares y de evaluación para matemáticas escolares) del NCTM (Nagasaki y Becker, 1993).

Esta relación también está presente con los Estándares del 2000, por ejemplo, cuando recomiendan que los estudiantes tengan “acceso a una educación matemática atractiva y de calidad, […] [y que sean] flexibles y hábiles resolutores de problemas” (NCTM, 2000, p. 1) o que todos los alumnos, considerando sus diferencias, reciban la misma oportunidad y el apoyo para aprender matemáticas (NCTM, 2000).

En cuanto a la resolución de problemas como estrategia de enseñanza, Hino (2007), comenta que los educadores japoneses procuraron desarrollar formas de hacer que los estudiantes descubrieran nuevas ideas y construyeran conocimiento por sí mismos en su aprendizaje y desarrollaron diferentes enfoques y propuestas con referencia a obras como las de Polya y Poincaré.

Al respecto, Takahashi (2006), también afirma que los maestros, investigadores y administradores japoneses trabajaron en colaboración, mediante el Estudio de lecciones, para desarrollar la instrucción matemática refiriéndose a la obra de Polya de 1945, en particular a las cuatro fases del trabajo de resolución de problemas; y también hubo influencia de estudios estadounidenses sobre resolución de problemas matemáticos, centrados en la enseñanza de habilidades de pensamiento matemático.

Finalmente, hay relación con el Conocimiento Pedagógico del Contenido de Shulman, según el cual el maestro debería poder entender las matemáticas, entender cómo piensan los alumnos y conocer las diferentes maneras de desarrollar aún más el pensamiento de los alumnos para ayudarlos a superar sus dificultades (Munroe, 2015), características que se enfatizan en el rol que el profesor debe ejercer al enseñar mediante el enfoque abierto.

2.7 Evaluación

La evaluación dentro del enfoque de final abierto tiene un papel fundamental, desde el hecho de que el profesor tiene que evaluar continuamente su planeación y desempeño en el aula, las discusiones, respuestas y soluciones de los estudiantes para poder conducir con éxito las clases y lograr aprendizajes en los alumnos.

Sin embargo, hay que tomar en cuenta que no todas las tareas abiertas de resolución de problemas deben evaluarse formalmente, sino que la forma en que se haga depende del tipo de información que necesite el profesor (Chan Chun, 2005), es decir, la evaluación es fundamentalmente formativa.

Dentro del enfoque, la evaluación se centra en "cómo piensa cada alumno de acuerdo con su forma natural de pensamiento o de su capacidad", lo cual representa información concreta sobre el progreso de los estudiantes en el aprendizaje, incluyendo formas correctas e incorrectas de pensamiento de los estudiantes (Nagasaki y Becker, 1993).

El trabajo en general al aplicar el enfoque puede evaluarse, según Chan Chun (2005), haciendo observaciones de los comportamientos matemáticos y las expresiones del pensamiento de los estudiantes, mediante entrevistas, o sentándose con los equipos para escuchar su discusión y desafiar sus suposiciones haciéndoles preguntas; mientras que las soluciones se pueden analizar mediante la construcción de rúbricas simples con criterios predeterminados. Y, después de la lección, las hojas de trabajo de los estudiantes pueden ser recopiladas y analizadas como otra fuente de información (Nagasaki y Becker, 1993).

Nagasaki y Becker (1993) mencionan que hay dos tipos de observaciones, las del trabajo de los estudiantes en el problema mientras el profesor camina por el salón y observaciones hechas durante las discusiones con los estudiantes; ambas permiten ajustar la enseñanza para hacer frente, por ejemplo, a los siguientes aspectos:

- Ver qué tan bien entienden su tarea los estudiantes.
- Seleccionar qué respuestas se presentarán a toda la clase.
- Mejorar la calidad de la discusión.
- Prestar atención a las necesidades individuales de los estudiantes.

Estos mismos autores proponen una evaluación durante y después de las lecciones. La primera involucra la observación, con el objetivo principal de evaluar la instrucción, y abarca lo siguiente:

a) *Evaluación de la formación de conceptos en toda la clase*: Las diferentes formas de pensar de los estudiantes pueden usarse para formar un concepto desde diferentes puntos de vista, para lo cual el maestro debe clasificarlas después de que los alumnos las exhiban, además de que puede verse el desarrollo cognitivo al observar los hallazgos individuales.

b) *Evaluación de la formación de conceptos individuales*: Se debe prestar atención a estudiantes individuales, al hacerlo, es importante que los maestros intenten anticipar todas sus formas posibles de pensamiento y consideren los métodos que pueden usar.

c) Evaluación durante la discusión: Durante la discusión después de resolver, los estudiantes pueden ver que existen diferentes opiniones entre ellos y reconocer conceptos más profundamente. Por ello, no hay que olvidar que las preguntas y observaciones del maestro fomentan la discusión y deben ir acordes con el trabajo de los estudiantes

En cuanto a la evaluación después de las lecciones, Nagasaki y Becker (1993) enfatizan que debe haber coherencia con la evaluación durante la lección y debe realizarse de acuerdo con las formas de pensamiento matemático de los estudiantes, que se encuentran en sus hojas de trabajo.

Por su parte, Sawada (1997), propuso tres etapas en la evaluación, y pueden relacionarse, si así se requiere, con una puntuación e inclusive con una calificación. La primera es previa a la clase e implica construir una lista de posibles respuestas y clasificarlas; la segunda consiste en clasificar las respuestas dadas por los alumnos; y la tercera evaluarlas como tal, con base en cuatro criterios, como la fluidez, que se mencionan más adelante.

En los siguientes párrafos se explican las tres etapas y criterios para la evaluación, mismas que en estudios relacionados con los problemas de final abierto, parecen seguir vigentes, con pocas modificaciones según Nagasaki y Becker (1993); Nohda (2000); Kwon et al. (2006); Klavir y Hershkovitz (2008); y Bingolbali (2011).

Primera etapa

Dado que habrá diferentes respuestas de los estudiantes, puede ser difícil para el maestro evaluarlas y hacer un buen uso de todas ellas durante la clase (Sawada, 1997; Bingolbali, 2011). Por ello, debe construirse previamente una tabla de respuestas esperadas, que deben clasificarse y ordenarse de acuerdo con sus características matemáticas.

Segunda etapa

Las respuestas dadas por los estudiantes deben verificarse y clasificarse según la tabla elaborada en la primera etapa, de preferencia en un formato creado con tal fin.

Klavir y Hershkovitz (2008), proponen que antes de hacer la clasificación como tal, se separen las respuestas de la siguiente manera para facilitar su análisis:

- Soluciones correctas: Son matemáticamente correctas y cumplen con las condiciones de la tarea.
- Soluciones incorrectas: Son matemáticamente incorrectas, por ejemplo, "El número 15 es un número par".
- Soluciones inapropiadas: No cumplen con las condiciones de la tarea.
- Soluciones ininteligibles: Debidas, principalmente, a escritura a mano ilegible.

Estos mismos autores, trabajaron con el problema: ¿Cuál de los siguientes números 15, 20, 23, 25, no pertenece? Explicar por qué. Por lo que formularon una clasificación en cinco categorías según el tipo de conocimiento matemático, para las respuestas correctas:

1. Explicaciones icónicas: Referentes a propiedades externas del número. Por ejemplo, para el número 15: "Todos comienzan con 2 y este comienza con 1"
2. Razones basadas en una propiedad matemática: Emplean propiedades matemáticas del número, como las propiedades multiplicativas, o las propiedades pares e impares. Por ejemplo, "20 es el único número que se puede dividir por 2".

3. Razones basadas en una manipulación matemática aplicada a los números: Soluciones donde el estudiante inició operaciones matemáticas. Por ejemplo, “15 es el único número que, cuando restemos 5, nos quedaremos con 10”
4. Razones basadas en una combinación de propiedades y/o manipulaciones: Por ejemplo, un alumno explicó que el 20 no pertenecía por ser el único que se puede dividir en exactamente dos decenas.
5. Otras razones: Explicaciones que no pueden atribuirse a las otras categorías, es decir, que no fueron ni matemáticas ni icónicas. Por ejemplo, 23 no pertenece porque "es el único para el que no puedo encontrar un ejercicio (operación)".

Tercera etapa

El rendimiento de los estudiantes se evalúa de acuerdo con los siguientes criterios, y puede hacerse de forma individual para cada alumno o para el equipo, según se requiera.

- *Fluidez: ¿cuántas soluciones puede producir cada estudiante?*

Si la respuesta es correcta, puede otorgarse un punto, y el total se denomina "número total de respuestas". Este número puede considerarse como una indicación de la fluidez del pensamiento matemático de los estudiantes. Klavir y Hershkovitz (2008), la definen como la capacidad de una persona para extraer una gran cantidad de soluciones que cumplen con las limitaciones de la tarea, y puede evaluar la cantidad de conocimiento activo y disponible de los estudiantes con referencia a una tarea matemática dada.

- *Flexibilidad: ¿cuántas ideas matemáticas diferentes descubren los estudiantes?*

Si las soluciones correctas tienen la misma idea matemática, pueden incluirse en una misma categoría. El número de estas categorías se denomina "número de respuestas positivas" y puede considerarse como una indicación de la flexibilidad o alcance del pensamiento matemático de los estudiantes. En otras palabras, es la capacidad para cambiar de una forma de pensar a otra; puede revisar la capacidad de los estudiantes de pasar de un estado de pensamiento a otro al resolver problemas y refleja su flexibilidad para utilizar un principio matemático diferente cada vez (Klavir y Hershkovitz, 2008).

- *Originalidad: ¿hasta qué punto son originales las ideas de los estudiantes?*

Hace referencia a una idea única o perspicaz. Klavir y Hershkovitz (2008), la definen como la capacidad para abordar un problema de una manera nueva y única, y extraer soluciones inesperadas y poco convencionales. Este criterio examina la creatividad desde la perspectiva de identificar lo que es único en la solución de un estudiante, en comparación con las soluciones comunes y prevalecientes entre sus compañeros; además, puede servir como criterio para evaluar el pensamiento matemático original de los estudiantes.

Entre las respuestas esperadas, pueden existir varios niveles de importancia matemática, y el profesor debe dar una puntuación alta a una idea con una alta calidad de pensamiento matemático. El número total de estos puntos se denomina "el número ponderado de respuestas positivas" (Sawada, 1997).

Puede notarse que los dos primeros criterios son métodos para evaluar cuantitativamente, mientras que el tercero es un método de evaluación de la calidad. Similar a este último, se considera un criterio más, la *elegancia*, en el que, sin embargo, Sawada (1997) no profundiza mucho, y menciona que puede resultar difícil utilizarlo objetivamente.

- *Elegancia*

El grado de elegancia en la expresión de ideas se refiere a la forma en que los alumnos expresan sus respuestas. Algunos escriben sus soluciones de manera ambigua, mientras que otros lo hacen de una manera simple, clara y elegante, por ejemplo, expresar relaciones matemáticas mediante expresiones algebraicas sería mejor que usar oraciones ordinarias.

Klavir y Hershkovitz (2008), emplean en su estudio, además de la fluidez, flexibilidad y originalidad, la *elaboración*, que explican como la capacidad para elaborar la idea dada, agregarle detalles, desarrollarla por medio de una combinación de ideas adicionales y/o refinarla; puede indicar la complejidad del pensamiento matemático: las soluciones más complejas reflejan más capacidad para integrar piezas de conocimiento matemático. Cabe mencionar que los autores emplean estos criterios para evaluar la creatividad según Guilford, 1967, a quien ellos citan, y los adaptan para evaluar problemas de final abierto.

Por otra parte, se ha mencionado que el pensamiento de orden superior juega un papel importante al aplicar problemas de final abierto y, de hecho, su evaluación marcó el origen del enfoque de final abierto. Según Foong (2000), para evaluar si este pensamiento está ocurriendo en un aula de matemáticas, hay tres características que se pueden observar:

- Se escucha a los alumnos explicar, conjeturar, describir patrones o comunicar sus ideas (hay enseñanza directa de estrategias específicas de resolución de problemas y razonamiento).

- Se escucha a los maestros preguntar a los alumnos por qué, qué y cómo: preguntas que exigen respuestas de más de una palabra (el maestro hace hincapié en el significado y la comprensión).
- Se observa a los estudiantes elegir opciones sobre qué procedimiento utilizar o cómo integrar el conocimiento en tareas nuevas y no rutinarias, monitorear el progreso y evaluar la solución (existe un ambiente en el aula que fomenta la autonomía, la persistencia y el pensamiento independiente de los estudiantes).

En el presente trabajo se decidió retomar la propuesta de evaluación descrita por Sawada (1997), complementándola con la de Klavir y Hershkovitz (2008), ya que implica tener un preparación antes de aplicar la estrategia que permite anticipar las respuestas de los alumnos y tener ideas para guiar la discusión en clase, pero también permite realizar una revisión más detallada posteriormente. El desarrollo del método de evaluación, así como de la propuesta de aplicación en clase se detalla en el Capítulo 3.

Por otra parte, se ha comentado que la disposición y la actitud de los estudiantes ante los PFA y hacia las matemáticas, es una componente dentro del enfoque de final abierto (Kwon et al., 2006; Mewborn, Lawrence y Leatham, 2005, p. 416, citado por Mahlobo, 2007; Mihajlović y Dejić, 2015; Ninomiya y Pusri, 2015; Pehkonen, 1999). En la presente investigación, este elemento influye directamente en el logro del objetivo específico de aplicar la estrategia en un ambiente que procure la autonomía, el trabajo en equipo y el trabajo grupal.

Tomando en cuenta lo anterior, se consideró pertinente elaborar un cuestionario tipo Likert para identificar, en la medida de lo posible, la actitud de los estudiantes frente a algunos aspectos relacionados con la realización de la estrategia planteada en este trabajo. Por tanto, a continuación se describen algunos aspectos básicos a tomar en cuenta.

2.8 Cuestionario de opinión tipo Likert

Para definir la escala Likert y comentar sus características, es importante comenzar por definir que, según Elejabarrieta e Iñiguez (2010), una “actitud constituye una predisposición organizada, para, pensar, sentir, percibir, y, comportarse ante un objeto” (p. 1); por tanto, los autores añaden que implica tres dimensiones: la cognitiva (que incluye las creencias), afectiva (referente a qué tanto agrada el objeto) y comportamental (que se refiere al comportamiento hacia el objeto).

Elejabarrieta e Iñiguez (2010) también indican que las actitudes son medibles, especialmente en su componente afectivo, y esta acción se define como: hacer un ordenamiento de todos los individuos según sean más o menos favorables a un cierto objeto.

Para realizar la medición existen diferentes métodos, entre los que destaca la escala de Likert. El método fue desarrollado en 1932 por Rensis Likert, pero sigue vigente y es bastante empleado en investigaciones, especialmente de tipo social (Fabila, Minami e Izquierdo, 2012), ya que cuenta con ventajas a su favor, como su facilidad de elaboración, que es barata y sencilla de responder (Cañadas y Sánchez, 1998; Elejabarrieta e Iñiguez, 2010; Fabila et al., 2012); si se compara con otros cuestionarios, proporciona una menor ambigüedad en las respuestas y estas van más enfocadas al objetivo que se tiene en la investigación; además de que permite obtener gran cantidad de información en un tiempo reducido (Cañadas y Sánchez, 1998).

Se trata de un instrumento psicométrico (Matas, 2018), un cuestionario de tipo escala sociométrica, donde "las [respuestas] a las preguntas tienen asignado un valor numérico, lo que permite codificar la información recabada y cuantificar o medir las respuestas obtenidas" (Fabila et al., 2012, p. 33).

La escala cuenta con "un conjunto específico de categorías o cuantificadores lingüísticos, en su mayoría, de frecuencia (*siempre, a veces, nunca,* etc.) o de cantidad (*todo, algo, nada,* etc.)" (Cañadas y Sánchez, 1998, p. 623).

Consta de varios ítems en los cuales la persona señala qué tan de acuerdo o en desacuerdo está respecto a lo que indica el ítem, que se relaciona con una puntuación fija, y la puntuación total se obtiene, según Fabila et al. (2012), a partir de la "suma algebraica de las puntuaciones a todos los ítems" (p. 33); cabe especificar que los ítems son enunciados o proposiciones donde se expresa una idea positiva o negativa referente a un fenómeno (Elejabarrieta e Iñiguez, 2010; Fabila et al., 2012).

De acuerdo con Fabila et al. (2012), debido a la asignación similar de puntos en los ítems, se tiene que alguien con una actitud favorable hacia un objeto, estará de acuerdo con la mayoría de los ítems favorables a dicho objeto, y en desacuerdo con los no favorables; similar a lo que pasaría con una actitud desfavorable, o una ambivalente, donde hay respuestas favorables y desfavorables.

La graduación con la que se presentan los ítems, es decir, el valor numérico que se asigna a la escala que va de ‘totalmente en desacuerdo’ a ‘totalmente de acuerdo’, puede tener de tres a siete valores, iniciando desde uno o cero puntos (Fabila et al., 2012), donde el estándar es de cinco categorías (Elejabarrieta e Iñiguez, 2010).

Fabila et al. (2012), recomiendan que para elegir cuántas categorías son convenientes, hay que tomar en cuenta la capacidad de discriminación que tienen los sujetos a quienes se aplicará el cuestionario, si es alta, puede incluirse un mayor número de opciones de respuesta; además, comentan que, usualmente, las puntuaciones más altas se asignan a actitudes muy favorables, aunque hay que considerar que si el ítem es desfavorable en su planteamiento, es mejor invertir la escala; y que no es recomendable agrupar los ítems ni que sigan una secuencia.

También hay que considerar si se desea un número par o impar de opciones. En el caso de una cantidad impar, implica que se permite una categoría neutra; mientras que, al tener una cantidad par, se elimina esta categoría, forzando a que la persona se pronuncie de una manera favorable o desfavorable, por lo que también se le conoce como escala de opción forzada (Fabila et al., 2012).

Al respecto, Matas (2018), comenta que hay un debate, ya que existen estudios que apoyan tanto la presencia como la exclusión de la categoría neutra. En el presente trabajo sí se consideró la categoría neutra, para que los estudiantes tuvieran libertad para no inclinarse a favor o en contra de los ítems.

A continuación, se especifica la metodología seguida para la aplicación de la estrategia basada en problemas de final abierto, que incluye su diseño, desarrollo, evaluación y formas de recopilación de datos.

Capítulo 3 Marco Metodológico

En este capítulo se aborda la forma en que se aplica el enfoque de final abierto en esta investigación, y que se divide en tres partes fundamentales: la investigación, el desarrollo de la estrategia en el aula, y la aplicación específica para la investigación.

La primera engloba lo que es la investigación en educación y la forma en que han sido conducidos algunos estudios anteriores que involucran problemas de final abierto. El desarrollo de la estrategia plantea recomendaciones prácticas y etapas guía para llevar a cabo la planeación y aplicación de una estrategia de enseñanza-aprendizaje dentro del enfoque de final abierto en el aula. Finalmente, en la parte tres se concretiza lo aplicado en el aula.

3.1 Generalidades de la investigación en la educación

La educación ha formado, probablemente desde el inicio de la humanidad, parte fundamental de la sociedad, pues permite el traspaso de conocimientos y habilidades de diversa índole. Rugarcía (1989) bien menciona que, de forma intuitiva, la educación es la llave de todas las cosas y debería tener como componentes valores, capacidades o habilidades y conocimientos.

Por otra parte, “la inquietud por explicar y comprender el sentido de la realidad y el mundo que nos rodea es una actividad … constante a lo largo de la historia” (Bisquerra, 2009), por lo que la investigación, que es una “actividad encaminada a la adquisición o descubrimiento de nuevos conocimientos” (Albert, 2007, p. xii), se encuentra presente en el tiempo y las culturas, aunque en diferentes formas y niveles de desarrollo.

Siendo estos dos elementos tan importantes para la humanidad, la conjunción de ambos, la investigación en educación, es a su vez un ingrediente para el desarrollo de la sociedad.

Según Albert (2007), la investigación en educación “como disciplina de base empírica aparece a finales del siglo XIX, que es cuando en Pedagogía se adopta el método experimental” (p. xi) y lo que la caracteriza son los fenómenos que estudia, es decir, los fenómenos educativos, que usualmente no pueden repetirse; además de que no es posible “alcanzar la misma precisión y exactitud que en las ciencias naturales” (p. 22), dado que en ellas participan personas, complejas al involucrar cada una sentimientos, creencias, conocimientos, valores, entre otras muchas componentes que influyen en lo que realiza dentro y fuera de la actividad educativa. Variables todas estas que el investigador elige cómo considerar o no en su trabajo.

Debido a esto, han surgido diversos paradigmas de la investigación educativa, que responden a las posturas adoptadas hacia “cuestiones básicas relacionadas con el objeto de conocimiento o la realidad que se desea estudiar” (Albert, 2007, p. 23). Dos que se han enfrentado son el paradigma positivista y el paradigma interpretativo, asociados respectivamente con lo cuantitativo y lo cualitativo.

Según la autora antes mencionada, el paradigma positivista se vincula con las ideas del positivismo, entre las que destacan: la independencia entre el observador y lo observado, la existencia de leyes que explican los fenómenos, por lo que el conocimiento es objetivo y válido siempre; para los fenómenos sociales se presta “escasa atención a los estados subjetivos de los individuos” (p. 38). Por lo tanto, intenta que los experimentos sean repetibles y los resultados generalizables, que se puedan comprobar, y emplea la estadística para el análisis de los datos, ya que utiliza una medición numérica de éstos.

Por su parte, el paradigma interpretativo “se centra en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social” (Albert, 2007, p. 25). Emplea la observación sin influir en los acontecimientos, es descriptivo, no generalizable, y muchas veces utiliza datos sin medición numérica; además de que las preguntas de investigación pueden surgir a medida que se realiza la investigación y se recogen y analizan datos, por lo que no necesariamente se comprueba una hipótesis.

La presente investigación emplea principalmente las ideas del paradigma interpretativo (Albert, 2007), dado que está dentro de la vida social e implica la participación de personas, aunque también se emplean mediciones numéricas para apoyar el análisis, característica del paradigma positivista (Albert, 2007), pero sin pretender llegar a una generalización. Esta metodología es consistente con las investigaciones sobre PFA, según se comenta a continuación.

3.1.1 Investigación sobre problemas de final abierto

Por otra parte, las investigaciones en torno a los PFA que se han llevado a cabo han sido principalmente con el fin de revisar cómo se afecta la enseñanza a partir de ellos, como en el presente trabajo, por lo que muchos autores tendieron a seguir una metodología de investigación similar entre ellos, con las siguientes características generales:

- Trabajo con grupo control y de prueba. El grupo de prueba o experimental recibe instrucción mediante el enfoque de final abierto y el grupo control mediante un enfoque tradicional o habitual (Shimada, 1997; Pehkonen, 1999; Kwon et al., 2006).
- Aplicación de los problemas de final abierto con baja frecuencia. Por ejemplo, Pehkonen (1999), reservó dos o tres clases al mes para trabajar con campos de problemas, usando un cuestionario para cada uno.
- Estudios de larga duración (por lo menos tres meses, hasta años) (Shimada, 1997; Pehkonen, 1999).
- Pruebas o test antes y después de aplicar la estrategia. Los resultados de la prueba previa se utilizan, según el estudio, para determinar los conocimientos previos de los alumnos o también como un punto de comparación explícito con lo que los alumnos aprendieron o las habilidades que desarrollaron durante el estudio (Fatah et al., 2016; Kwon et al., 2006; Shimada, 1997). En algunas ocasiones también se aplicaron cuestionarios y entrevistas relacionados con las concepciones de profesores y alumnos respecto a la enseñanza de las matemáticas, tanto al principio como al final del experimento (Pehkonen, 1999).
- Variadas formas de recopilar información. Como cuestionarios, entrevistas, evaluaciones durante el desarrollo del experimento (en algunos casos) (Boaler, 1998; Pehkonen, 1999; Munroe, 2015; Shimada, 1997), hojas de trabajo de los estudiantes y registro en video de las clases (Ninomiya y Pusri, 2015); transcripciones de sesiones grabadas en video, reflexiones posteriores a las sesiones y transcripciones de entrevistas con participantes individuales (Silver et al., 2005; Munroe, 2015), grabaciones de audio (Thinwiangthong et al., 2012), documentación de antecedentes (Boaler, 1998), y notas de campo.
- Observación como herramienta fundamental. Ya sea directa del investigador o profesor participante, durante la aplicación de los problemas en el aula, o analizando desde una grabación de video de la clase, centrándose en las respuestas proporcionadas por los alumnos, en la actitud con la que se enfrentaron a los problemas, en el desarrollo de la clase o en lo realizado por el profesor.

Algunos otros estudios, como el de Mahlobo (2007), emplearon también el enfoque cuantitativo, al hacer comparaciones entre resultados medidos de forma numérica de al menos un grupo control y un grupo experimental; o entre una prueba inicial y una prueba final, calculando correlaciones en el análisis de datos.

En esta misma línea, Kwon et al. (2006) especifican que sus pruebas antes y después fueron relativas a la fluidez, flexibilidad y originalidad de los estudiantes, y que contaron con cuatro preguntas descriptivas abiertas. Para el análisis, utilizaron puntuaciones sobre estos mismos aspectos, y se revisaron respuestas posibles para producir una tabla de calificación estándar. La comparación entre la prueba inicial y final se realizó mediante un análisis de covarianza. Contaron con grupos de tratamiento, incorporando problemas abiertos; y clases de comparación, impartidas con métodos de instrucción tradicionales de un libro de texto.

Sobre este mismo proyecto, cabe mencionar también que constó de veinte sesiones, donde se emplearon hojas de trabajo para los estudiantes, compuestas de muchos tipos de problemas abiertos, diseñadas para poder observar su fluidez y originalidad y emplearse dentro de una clase de 45 minutos. Además, hubo una clase cada semana que consistía en aprendizaje individual y aprendizaje cooperativo en grupos pequeños.

Algunas otras metodologías que se siguieron, diferentes dado que el objetivo fue totalmente distinto, son, por ejemplo, la de Klavir y Hershkovitz (2008), quienes se centraron en analizar las respuestas de los alumnos a un PFA, comparando y clasificando sus soluciones; Ninomiya y Pusri (2015) contaron con dos grupos a los les impartieron clases maestros diferentes con la misma metodología del enfoque abierto, por lo que compararon los resultados obtenidos por ambas clases y contrastaron resultados esperados contra resultados empíricos, con lo que pudieron proponer mejoras a su trabajo en el aula.

En su estudio, Munroe (2015) observó a dos maestros japoneses expertos utilizando el método de enfoque abierto para enseñar matemáticas, que trabajaron con 176 estudiantes. Además de un cuestionario sobre los puntos de vista de los estudiantes hacia el final de cada semestre que se trabajó en el estudio. Destaca también el comentario del autor sobre que los estudiantes fueron puntuales, cooperativos y preparados para cada lección.

Finalmente, en la investigación realizada por Thinwiangthong et al. (2012), se utilizó tanto el estudio de lecciones como el enfoque abierto. Primero, se realizó trabajo colaborativo entre investigadores y docentes para diseñar los problemas de final abierto y el plan de lección, de lo cual se hizo registro mediante grabaciones de audio.

El siguiente paso en el mencionado estudio consistió en implementar el plan de clase, y el desarrollo de esta fue observado por los miembros del equipo de estudio, que elaboraron notas de campo y también grabaron video. Para terminar, los integrantes discutieron los resultados de la enseñanza en diferentes aspectos, como las respuestas de los estudiantes o las ideas matemáticas, con el fin de mejorar las lecciones, y también se grabó en audio la conversación de los miembros del equipo de investigación.

En el presente trabajo, se siguió una metodología combinada de los autores antes mencionados, considerando la disponibilidad de elementos que intervinieron en la realización del trabajo, como el grupo de alumnos y el tiempo disponible:

a) Prueba o test antes y después de aplicar la estrategia, con el fin de compararlas (Fatah et al., 2016; Kwon et al., 2006; Shimada, 1997).
b) Diferentes formas de recopilar información, además de las pruebas inicial y final, un cuestionario, evaluación formativa (continua) durante la aplicación de la estrategia (Shimada, 1997; Pehkonen, 1999; Boaler, 1998; Munroe, 2015), hojas de trabajo, grabación en video de las clases (Ninomiya y Pusri, 2015); algunas grabaciones de audio (Thinwiangthong et al., 2012); notas de sobre las clases y la observación como herramienta fundamental.
c) Un análisis de las respuestas de los alumnos con base en las ideas de evaluación de Klavir y Hershkovitz (2008).

En cuanto a la aplicación de la estrategia basada en problemas de final abierto, se planeó para aplicarse en ocho sesiones, trabajando con un solo grupo.

3.2 Diseño de la estrategia

Como se ha mencionado anteriormente, el plan de lección o estrategia didáctica es uno de los pasos más importantes al aplicar el enfoque abierto, ya que de él depende que el problema empleado sea realmente útil y que el profesor pueda guiar tanto el momento de la resolución, como la discusión posterior. Por tanto, algunos autores proporcionan consejos a tomarse en cuenta para la elaboración del plan.

Sawada (1997), enlista una serie de preguntas cuya respuesta debe tenerse clara al planear una clase basada en problemas de final abierto. Menciona dos aspectos principales: determinar si el problema es apropiado y desarrollar el plan de lección.

En cuanto al problema, Sawada (1997) formula las siguientes preguntas, que ayudan a determinar si es apropiado:

- ¿El problema es rico en contenido matemático y valioso matemáticamente?
- ¿El nivel matemático del problema es apropiado para los estudiantes?

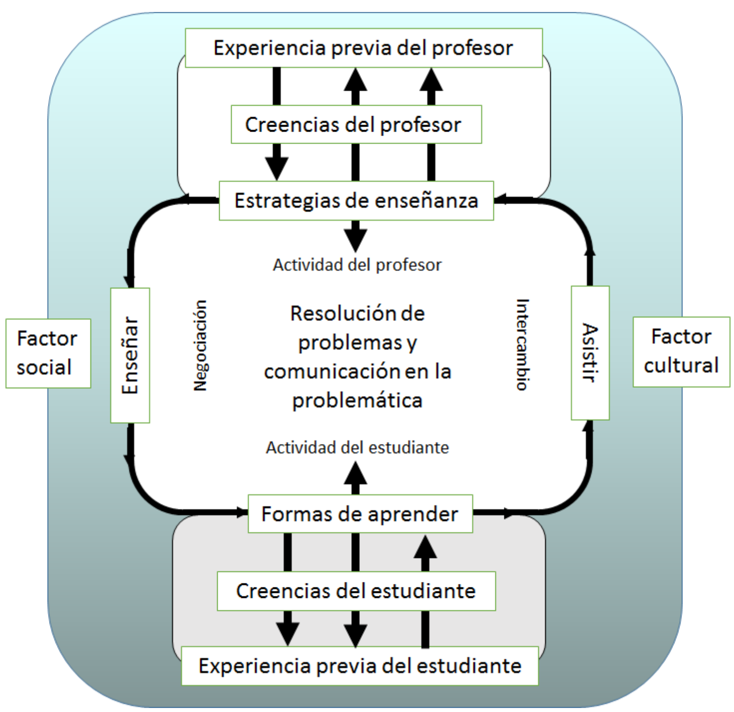
- ¿El problema incluye algunas características matemáticas que conducen a un mayor desarrollo matemático?

Ya que el problema debe promover diferentes puntos de vista, también debe ser rico en cuanto a contenido matemático, de forma que todos los alumnos utilicen sus conocimientos y habilidades matemáticas previas; debe tener un nivel de dificultad adecuado, que permita relacionar las soluciones de los alumnos con conceptos matemáticos superiores y se desarrolle un nivel superior de pensamiento matemático. Además, el problema debe ser concreto y familiar para los estudiantes, incluir aspectos que despierten su curiosidad intelectual y ser lo suficientemente atractivo para mantener su interés.

Sobre el plan de lección, Nagasaki y Becker (1993) comentan que en Japón los maestros desarrollan un plan de lección de manera cooperativa, por lo que es recomendable trabajar de esta manera.

Por su parte, Nohda (2000) comenta que una situación de enseñanza mediante problemas en la clase japonesa contiene importantes ideas matemáticas que se presentan a los estudiantes, y ellos cuestionan la situación de manera colaborativa para llegar a soluciones. Las características de esta situación se ilustran en la Figura 12.

Figura 12. *Enseñanza japonesa de resolución de problemas matemáticos*



Nota: Adaptado de “Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics” (p. 46), por Nohda (2000), Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Para desarrollar un buen plan de lección, Sawada (1997), propone tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Hacer una lista con las respuestas esperadas de los estudiantes al problema.
- Tener el propósito de usar el problema claramente.
- Diseñar un método para plantear el problema de modo que los estudiantes puedan comprender fácilmente su significado o lo que se espera de ellos.
- Hacer que el problema sea lo más atractivo posible.
- Dejar suficiente tiempo para explorar el problema por completo.

La lista de posibles respuestas debe incluir tantas como sea posible y de la forma en que las redactarían los estudiantes, incluyendo más respuestas de nivel superior de las que se pueden esperar para el nivel de los estudiantes, además de intentar anticipar las estrategias y los errores que los estudiantes probablemente mostrarán (Silver et al., 2005).

Después, las respuestas deben reorganizarse y agruparse según los puntos de vista involucrados y, para cada uno, resumirse en una propuesta general. Además, cada respuesta debe tener claro su valor matemático intrínseco o una dirección para un mayor desarrollo y el maestro debe comprender el papel del problema en todo el plan de la lección, ya sea como un tema independiente, como introducción a un nuevo concepto o como resumen del aprendizaje, siendo estos dos últimos donde los PFA parecen resultar más eficaces, requisito que Hino (2007), enfatiza en su estudio.

Esto ayudará a que, durante el desarrollo de la clase, y junto con un buen conocimiento matemático, el profesor pueda comprender rápidamente el enfoque representado en el trabajo escrito de un estudiante y discernir el valor matemático de las estrategias particulares, representaciones y otras ideas matemáticas en el trabajo del alumno para poder elegir qué soluciones serán mostradas (aunque deberían revisarse todas) y en qué orden (Silver et al., 2005).

Por otra parte, debe tomarse en cuenta que a veces se requiere más tiempo del esperado para plantear un problema, hacer que los estudiantes lo resuelvan, discutir los enfoques y soluciones y resumir lo aprendido. Dentro de estas actividades, debe dedicarse especialmente tiempo suficiente para la discusión, la cual es uno de los aspectos cruciales del uso de problemas de final abierto.

Como recomendación, Sawada (1997) comenta que pueden emplearse dos períodos de clase para un problema de final abierto, en el primero, los estudiantes pueden trabajar individualmente o en grupos para resolver el problema y resumir sus hallazgos; y en el segundo, se puede realizar la discusión entre toda la clase, y que el profesor proporcione las observaciones finales.

Sin embargo, Pehkonen (1999), comenta que, en su experiencia, para el campo de problemas de formar figuras con cerillos, pueden emplearse unos 30 minutos para, al parecer, la etapa de búsqueda de soluciones.

El mismo Pehkonen (1999), añade que podría dedicarse una etapa para comparar las diferentes soluciones encontradas por los alumnos, buscando la mayor cantidad de soluciones posibles de la totalidad que existen, es decir, buscar las soluciones más complicadas que probablemente los estudiantes no encontrarán solos.

3.2.1 Metodología en el aula

Una vez que se ha realizado la planeación, para llevar a cabo una estrategia basada en problemas de final abierto en el aula, hay que tomar en cuenta tres características generales que tienen las clases de matemáticas en Japón, según Takahashi (2006):

- Actividades y problemas cuidadosamente seleccionados, y su cohesión
- Discusión extensa (Neriage, en japonés)
- Énfasis en la práctica de pizarrón (Bansho, en japonés).

Cabe mencionar que para el año 2000, muchas escuelas en Japón contaban con 40 estudiantes y un profesor por aula (Nohda, 2000). Nagasaki y Becker (1993), también mencionan esta característica para los grupos de estudiantes en los niveles de secundaria y primaria, agregando que se sientan en una configuración de niño-niña en escritorios con bancos (a veces en filas de escritorios individuales) y que los alumnos, especialmente en las escuelas primarias, son bastante disciplinados, atentos durante la clase y también algo formales, en comparación con los grupos en los Estados Unidos.

Características generales de las clases de matemáticas, según Takahashi (2006)

Actividades y problemas cuidadosamente seleccionados, y su cohesión. Las clases japonesas están diseñadas para resolver un solo problema, para lograr un solo objetivo en un tema, razón por la cual el problema debe ser elegido con cuidado; muy pocas veces una lección incluye dos o más actividades de resolución de problemas, aunque los profesores pueden dar a los estudiantes problemas o ejercicios extendidos después de la resolución de un problema principal (Takahashi, 2006). Además, hay una “relación explícita entre los temas tratados en la lección o en otras lecciones (mayor coherencia e integración cognoscitivas)” (De Faria, 2008, p. 38).

Discusión extensa. Llevar a cabo una discusión con toda la clase se considera una parte crucial de la enseñanza de las matemáticas mediante la resolución de problemas (Asami, 2015). Como esta actividad compara y sintetiza varios métodos de solución diferentes, exige que los estudiantes aclaren la idea detrás de cada método y justifiquen su idoneidad, además de examinar sus limitaciones. Tiene la finalidad de revisar, comparar y extender los conocimientos e ideas (Fonseca y Alfaro, 2010).

Para facilitarla, los profesores japoneses utilizan la pizarra como una ayuda visual para que los estudiantes participen en la discusión (Takahashi, 2006), guían a los alumnos en la búsqueda de nuevos conocimientos, siempre basándose en resultados e ideas que los estudiantes hayan proporcionado (Fonseca y Alfaro, 2010), para lo cual pueden utilizarse preguntas como "¿Quién lo hizo de otra manera?" o "¿Quién tiene una explicación diferente?" (Munroe, 2015).

Énfasis en la práctica de pizarrón (Bansho). Bansho es un término especial que se utiliza para discutir cuestiones relacionadas con la habilidad de utilizar el pizarrón, y es recomendable incluir en la planeación de una lección un apartado sobre cómo va a utilizarse; Yoshida (2005, como se cita en Takahashi, 2006) resume las formas en que los profesores japoneses lo utilizan en los siguientes puntos:

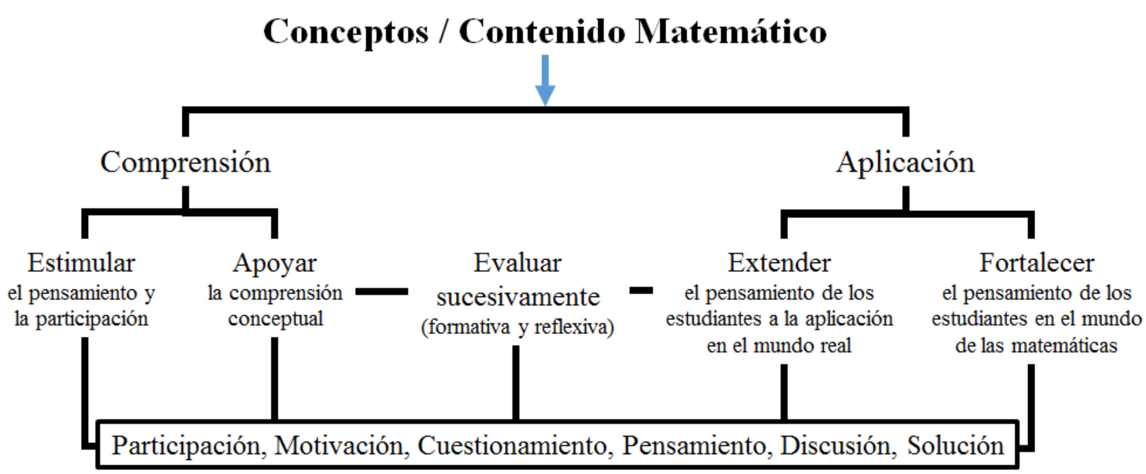
- Mantener un registro de la lección.
- Ayudar a los estudiantes a recordar lo que deben hacer y pensar.
- Ayudar a los alumnos a ver la conexión entre las diferentes partes de la lección y su progresión.
- Comparar, contrastar y discutir ideas que presenten los estudiantes.
- Ayudar a organizar el pensamiento de los alumnos y descubrir nuevas ideas.
- Fomentar las habilidades de los estudiantes para tomar notas modelando una buena organización.

Por su parte, Munroe (2015), comenta que los profesores japoneses utilizan el pizarrón para registrar toda la lección, en él se resume la discusión y las actividades dentro de la lección, y ellos indican a los estudiantes donde escribir, además de que, en las clases que observó, nunca fue borrado, por lo que se pueden utilizar tableros móviles (o cualquier otro medio similar) a fin de incluir por escrito todo lo necesario.

Además, el maestro debe tener cuidado de no imponer una orientación particular a todos los estudiantes adoptando las opiniones de estudiantes particulares y recordar que este estilo de enseñanza consiste en una combinación de trabajo individual y discusión por parte de toda la clase, por lo que es fundamental pasar del aprendizaje individual al aprendizaje en grupo (Sawada, 1997).

En su trabajo, Munroe (2015), resume estas recomendaciones y forma de trabajo en un marco de referencia que denomina marco del enfoque abierto (open approach framework), que se ilustra en la Figura 13.

Figura 13. *Marco de referencia del enfoque abierto.*



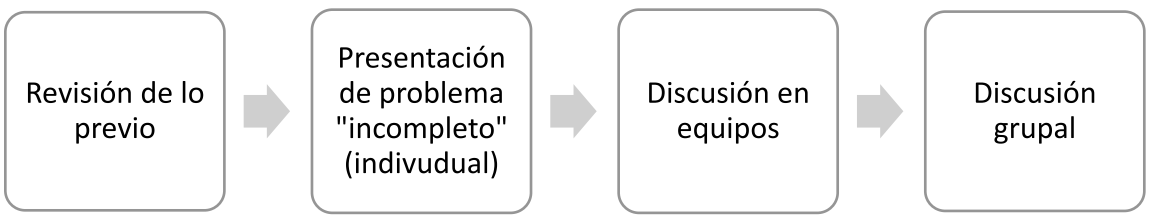
Nota: Adaptado de “The Open-Ended Approach Framework” (p. 99), por Munroe, 2015, European Journal of Educational Research, 4(3).

A continuación, se desglosan las etapas principales en que se agrupa el trabajo en el aula que se ha descrito hasta ahora.

3.2.2 Etapas

En cuanto al desarrollo de la clase como tal, se enfatizan la discusión y la comunicación matemáticas (Thinwiangthong et al., 2012). Generalmente (ver Figura 14), se incluye alguna revisión sobre lo visto en clases previas; luego se presenta un problema “incompleto”, en el que los estudiantes trabajan individualmente, utilizando sus propios conocimientos matemáticos; después se lleva a cabo una discusión en equipos; a continuación, el maestro dirige a los estudiantes a una discusión con toda la clase para comparar enfoques y soluciones individuales (Shimada, 1997; Takahashi, 2006). Cabe mencionar que, en los estudios de lecciones, casi todas las clases se llevan a cabo con este estilo (Hino, 2007).

Figura 14. *Desarrollo general de una clase, resolución estructurada de problemas.*



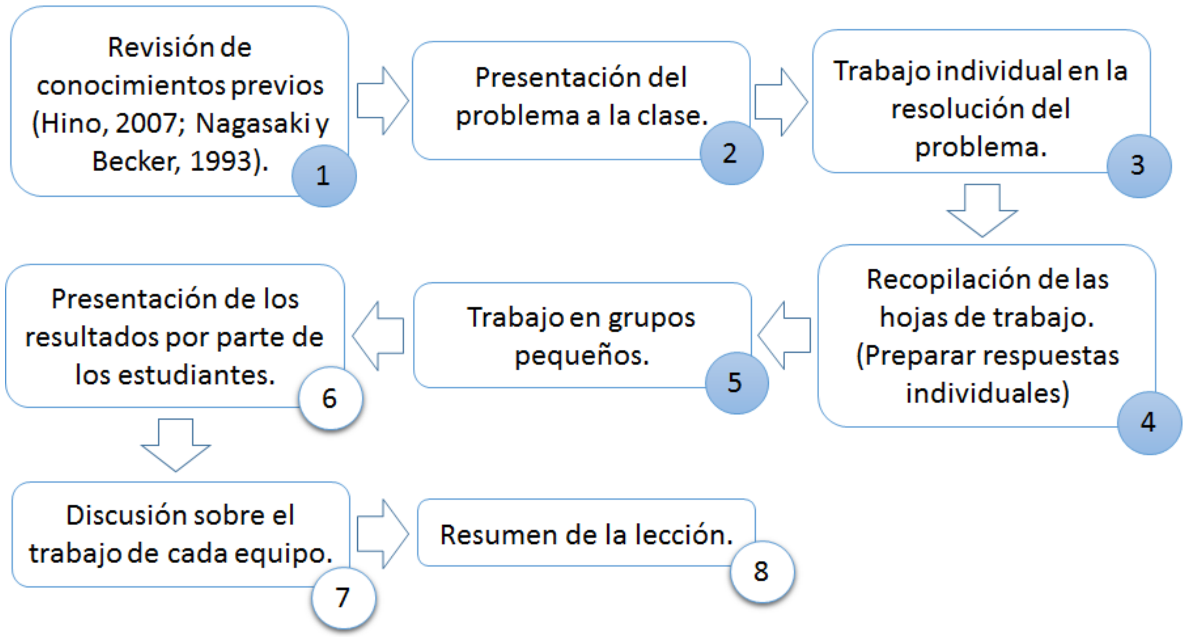
Nota: Elaboración propia, basado en Sawada (1997) y Takahashi (2006).

El orden anterior no pretende convertirse en un instructivo, sino en una guía de la estructura general que puede tener una clase basada en el enfoque de final abierto. Es especialmente importante recordar esto, para evitar caer en el seguimiento de un patrón, como se comentó anteriormente, según Asami (2015), y que se pierda la discusión matemática.

A continuación, se especifican un poco más las etapas mencionadas, de nuevo enfatizando que solo se trata de una guía, con base principalmente en el trabajo de Hashimoto (1997) y la descripción de Munroe (2015), quien analizó y describió las clases de dos profesores japoneses, entre otros autores.

Hashimoto (1997), propone el desarrollo de un problema en dos sesiones de 40 minutos, tiempo determinado empíricamente, por lo que considera que los puntos de 1 al 5 que se enumeran en la Figura 15 (y se detallan más adelante), pueden llevarse a cabo en uno de los periodos, y el resto en el otro.

Figura 15. *Etapas en una clase basada en el enfoque de final abierto.*



Nota: Elaboración propia, con base en Hashimoto (1997) y Munroe (2015).

Si bien este es un plan de lección, los autores comentan que existen muchas otras formas de organizarla. En la práctica, cada profesor deberá tener en cuenta sus propias condiciones en el aula y sus objetivos de enseñanza, por lo que su metodología depende de los problemas y los procedimientos para resolverlos (Nohda, 1986).

Por ejemplo, Pehkonen (1999), quien utiliza campos de problemas, comentó que trabajó con un mismo campo a lo largo seis lecciones diferentes, pero tratándolo solo como una parte de la clase; mientras que Hino (2007), después del resumen, pidió a los alumnos que resolvieran un problema similar al ya trabajado y escribieran un comentario sobre su aprendizaje de la lección de ese día; también puede continuarse la actividad formulando problemas relacionados más avanzados (Nohda, 2000).

Por su parte, Chan Chun (2005) llevó a cabo la actividad de resolución de problemas a lo largo de tres días, en donde el maestro proporcionó instrucciones con respecto a lo que se esperaba de las tareas problemáticas y los roles de los alumnos en la discusión, además de dedicar tiempo a explicar las situaciones problemáticas a tratar y las palabras difíciles.

Nagasaki y Becker (1993) expresan el desarrollo de la clase en cinco fases, bastante similares a las de Hashimoto: presentación del problema en el pizarrón; entendimiento del problema, en relación a lo que se espera de los estudiantes; resolución del problema por parte de los estudiantes, de forma individual y/o en grupos pequeños, en una hoja de trabajo con el problema escrito en ella, mientras el profesor se mueve entre los estudiantes, observando su trabajo y seleccionando los enfoques o respuestas que se discutirán con toda la clase; comparación y discusión de enfoques o respuestas, que se escriben en el pizarrón, y es guiado por el profesor; y finalmente resumen de la lección.

Etapas en una clase basada en el enfoque de final abierto (ver Figura 15):

1. *Revisión de conocimientos previos*

La revisión de la lección anterior y de los conocimientos previos, es importante especialmente para traer a la memoria de los estudiantes conocimientos y habilidades que necesitarán en la resolución del problema, y es considerada por Hino (2007) como parte del patrón japonés de enseñar una lección.

2. *Presentación del problema a la clase*

Pueden emplearse diferentes recursos, como modelos de cartón o representaciones físicas del problema, para apoyar la compresión de los alumnos. Es recomendable hacer preguntas a los alumnos como "¿Qué propiedades (relaciones, reglas, métodos, etc.) puedes encontrar?" (Sawada, 1997).

Sin embargo, debe tomarse en cuenta que la pregunta anterior puede resultar confusa para algunos estudiantes cuando se empieza a utilizar este enfoque, ya que probablemente no estarán familiarizados con el uso de los términos *propiedad, relación, regla, método*, etc., en matemáticas y, por lo tanto, no pueden comprender lo que se espera que hagan (Sawada, 1997).

En este sentido, para ayudar a los estudiantes, se puede repetir la pregunta varias veces y proyectar o escribir el problema, para que la mente de los alumnos se mantenga centrada en él (Ninomiya y Pusri, 2015); también se pueden agregar más datos para generalizar, por ejemplo, introduciendo variedad en la situación del problema o mostrando datos concretos (ejemplos) que los que se dan en el enunciado del problema; o proporcionar ejemplos que no restrinjan la forma de pensar de los estudiantes sobre el problema (Sawada, 1997).

Es conveniente alentar a los alumnos a pensar sobre el texto y el contexto de la pregunta y pedirles que lean y vuelvan a leer la declaración del problema, para luego resaltar palabras o frases difíciles de entender y discutirlos abiertamente; finalizando con dos o tres estudiantes que reformulen el problema con sus propias palabras; además de ayudar a los estudiantes a enfocarse en la información necesaria y en usar modelos (Munroe, 2015), lo cual será útil especialmente en la discusión grupal.

Cuando se utiliza un campo de problemas, debe asignarse gradualmente a los alumnos y la continuación debe estar relacionada con sus soluciones, recordando que el papel de los problemas más fáciles es el de reforzar la persistencia de los alumnos en la resolución de estos (Pehkonen, 1999).

3. *Trabajo individual en la resolución del problema*

Cada estudiante debe contar con una hoja de trabajo donde escribir sus ideas (Hashimoto, 1997). El maestro debe caminar observando la actividad de los estudiantes, tanto para recopilar información como para brindar orientación si es necesario. Se debe dar suficiente tiempo a los estudiantes para completar su trabajo (Sawada, 1997). Puede resultar útil buscar formas de estimular a los alumnos para que den múltiples respuestas sin exigirlas necesariamente en el formato de la pregunta (Sullivan y Clarke, 1992).

Principalmente cuando se realiza trabajo individual y luego de todo el grupo, debe alentarse a los alumnos a pedir ayuda cuando lo necesiten, especialmente a sus compañeros; y es conveniente interrogar a los estudiantes, para asegurarse de que comprendan completamente la ruta de la solución elegida (Munroe, 2015).

Si algún alumno no logra avanzar en la resolución, el profesor puede recordarle problemas aprendidos previamente con conceptos similares, mediante preguntas como “¿has hecho algo similar a lo que estás tratando de hacer ahora?”, aunque también puede facilitarse una discusión abierta sobre las diversas formas en que se podría resolver el problema antes de darle a la clase la oportunidad de resolverlo, lo cual proporciona sugerencias a los estudiantes más lentos obligar a utilizar algún enfoque establecido (Munroe, 2015). Y para alentarlos a dar más información o pensar más profundamente sobre un concepto pueden utilizarse palabras como "así que...", "entonces..." y "por lo tanto..." (Munroe, 2015).

4. Recopilar las hojas de trabajo

Puede realizarse en este momento o al final de la lección. Son útiles para evaluar el aprendizaje individual y grupal. Sin embargo, debe observarse el trabajo, como se mencionó en la etapa anterior, e identificar a aquellos estudiantes que no comprenden el problema y dar más ejemplos o sugerencias para estimularlos a pensar de manera relevante sobre el problema (Sawada, 1997); además de clasificar las respuestas según los criterios que se establecieron en la planeación (Silver et al., 2005).

5. Trabajo en grupos pequeños

Durante el trabajo en equipos, que pueden ser de cuatro estudiantes, los alumnos discuten y un representante escribe los resultados, y, si es posible, el proceso por el cual el grupo llegó al resultado; también pueden proporcionarse hojas de trabajo. Si no se ha planteado desde el principio que habría soluciones múltiples, como en el estudio de Klavir y Hershkovitz (2008), puede que los estudiantes noten que hay más de una solución cuando trabajen con sus compañeros y descubran que sus soluciones son diferentes a las suyas.

Un consejo que el profesor puede dar es comentar a los estudiantes que "han encontrado un buen punto, pero ¿no es posible decirlo de otra manera? Piensen un poco más" (Hashimoto, 1997); además, debe animarlos a buscar, dibujar, etc., pistas para que descubran ciertas cosas.

Dependiendo del avance que el profesor observe durante esta etapa, puede decidir qué abordar en la discusión posterior, por ejemplo, si se va a llegar hasta explicaciones lógicas; y es similar cuando se trabaja con campos de problemas, ya que el aspecto más importante es el uso del propio poder creativo de los alumnos (Pehkonen, 1999).

6. Presentación de los resultados por parte de los estudiantes

En esta etapa se puede preguntar a los alumnos si lo que comentan está bien y por qué. Si hay conceptos de un nivel muy superior o que caigan fuera del objetivo, pueden “reservarse para una discusión posterior” (Hashimoto, 1997), aunque comentando que el concepto se revisará en cursos posteriores y dejando a los estudiantes la elección de seguir explorando por ese camino o no (Munroe, 2015).

Además, es recomendable repetir lo que dijo un estudiante si se considera necesario para que los alumnos comprendan las ideas más a fondo (Ninomiya y Pusri, 2015). El orden de presentación es elegido por el profesor, puede ser siguiendo un orden establecido por la clasificación de las respuestas (Silver et al., 2005) o de forma voluntaria, y cada explicación puede ir seguida de un breve comentario del profesor (Hino, 2007). No hay que olvidar que es más importante cómo los estudiantes entienden el uso funcional de los conceptos y sus procesos de solución, en lugar de la velocidad para obtener la respuesta (Munroe, 2015).

El maestro o los estudiantes, según se considere pertinente, deben escribir su trabajo individual o grupal en la pizarra para que todos lo vean; sin embargo, es conveniente seleccionar algunas declaraciones para escribirlas y estas deben subyacer a un concepto o hecho, por ejemplo, "cero veces un número igual a cero" (Munroe, 2015).

Según Munroe (2015), en esta etapa, o durante la discusión grupal, puede solicitarse a un alumno que vuelva a explicar su método o el de un compañero, lo cual es una forma de obtener información de los estudiantes y permitir su participación en la lección, además de que permite confirmar que se entendió lo dicho y elaborar o reformular la explicación.

Si no es posible que todos los equipos presenten, algunos pueden hacerlo de forma breve, limitando tanto la presentación como la discusión a hallazgos a los que otros grupos no se han referido (Hashimoto, 1997). La variable tiempo también es importante para que los estudiantes puedan presentar sus ideas y criticar las presentadas por otros, es decir, para que puedan ser reflexivos y críticos (Munroe, 2015).

7. Discusión sobre el trabajo de cada equipo

Para esta etapa es importante que los estudiantes estén activos, hagan preguntas y conjeturas, presenten sus diversas ideas, profundicen su comprensión de las ideas matemáticas (Asami, 2015), y den respuestas, por lo que el profesor debe tener un plan referente a los puntos a tratar, con base en las respuestas de los alumnos, que favorezca estas participaciones, proporcionando retroalimentación continua y animando a los estudiantes a evaluar su propio aprendizaje (Munroe, 2015).

Para Munroe (2015), una característica de los profesores japoneses es que rara vez responden las preguntas que hace un estudiante, sino que las pasan a la clase y permiten a los estudiantes dar sus respuestas, y añade que es importante darles tiempo para pensar antes de responder, lo cual es un aspecto importante en el desarrollo de la autoconfianza y las habilidades de pensamiento crítico.

Durante la discusión, el profesor debe considerar todas las propuestas de los estudiantes, alentarlos a confirmar si su trabajo es consistente y si se puede reducir a una sola propuesta junto con otros alumnos. Inclusive, cuando algunas proposiciones son erróneas o incompletas, deben considerarse de manera positiva y presentarse a la clase, modificando con base en los comentarios de otros estudiantes (Sawada, 1997; Munroe, 2015).

El profesor también debe estimular y monitorear los niveles de compromiso de los estudiantes, además de alentar, facilitar y reconocer los comentarios de los estudiantes, promover las generalizaciones y que los alumnos analicen conceptos (Munroe, 2015).

Para realizar lo anterior, algunas estrategias útiles, mencionadas por Munroe (2015), son: invitar a diferentes estudiantes a compartir sus soluciones a una pregunta; pedirle a un alumno que repita las explicaciones dadas por sus compañeros; y solicitar a un estudiante que muestre una solución en el pizarrón y que otro la explique. También puede ser útil permitir que los alumnos se llamen entre sí para dar soluciones y preguntarles si tienen preguntas para el alumno que haya presentado su respuesta (Munroe, 2015).

Por otra parte, no necesariamente se debe presentar una sola discusión extensa, sino que el profesor puede iniciarla cuando los estudiantes tengan opiniones opuestas, para poder discutir una premisa matemática y en situaciones donde algunos estudiantes tengan dificultades para entender; mediante la formulación de una pregunta que resalte el conflicto, concepto o error que desea que la clase discuta (Munroe, 2015).

Al generar conclusiones, es pertinente es conveniente animar a los estudiantes a usar términos y símbolos matemáticos, y repetir constantemente conceptos, axiomas matemáticos o leyes obtenidas de la explicación de los estudiantes durante la discusión, ya que esta práctica promueve la memoria del concepto, mientras que la discusión proporciona una comprensión profunda del mismo (Munroe, 2015).

Además, Munroe (2015) también comenta que el profesor debe resaltar la necesidad de crear un equilibrio entre defender las opiniones propias con argumentos convincentes y renunciar a su posición cuando la evidencia está en contra de ellos. Según este autor, puede pedirse a los estudiantes que usen hechos previamente establecidos como razones para sus argumentos, por ejemplo, mediante afirmaciones como: "Ya sabemos que...", "Se demostró que..." o "Porque sabemos que... podemos determinar...".

8. *Resumen de la lección*

Puede realizarse desde el desarrollo de la discusión. El profesor debe concentrarse en un punto de vista y llegar a una conclusión, incorporando y modificando las respuestas de los alumnos, al tiempo que integra y facilita la transición a la siguiente lección (Sawada, 1997), es decir, debe hacer un resumen del contenido de la lección de ese día (Hino, 2007).

Sin embargo, es importante alentar a los estudiantes a escribir su propio resumen, lo cual puede hacerse después de dar una síntesis verbal de las discusiones, pidiendo a los alumnos que escribir un resumen donde reflexionen sobre lo que aprendieron, con libertad para elegir qué reflexionar y qué escribir (Munroe, 2015).

Por otra parte, y con base en la comparación que hicieron entre la clase impartida por un investigador y un profesor japonés, Ninomiya y Pusri (2015) hicieron las siguientes recomendaciones para mejorar la calidad de las lecciones por parte del profesor, que debe:

- Familiarizarse con los estudiantes y mejorar la habilidad de comunicación.
- Crear preguntas y problemas a partir de las ideas de los estudiantes.
- Explicar de manera clara y sencilla (cuando se requiera).
- Reiterar lo que los estudiantes tienen que hacer y escribirlo en el pizarrón.
- Especificar claramente el tiempo para cada actividad.
- Repetir las respuestas y las conclusiones en voz alta.

También resulta conveniente escribir los nombres de los estudiantes al lado de su solución, según Munroe (2015), para dar un sentido de propiedad y reconocimiento, lo cual sirve para aumentar la autoestima del estudiante y organizar la discusión.

En cuanto a la evaluación, esta debe ser constante, manteniendo altas expectativas para todos los estudiantes. En este punto, cabe resaltar que la filosofía japonesa promueve la idea de que, independientemente de la tarea, con trabajo duro, cada uno puede tener éxito (Stevenson y Stigler, 1994, como se citó en Munroe, 2015).

El ambiente en el aula debe tener una atmósfera amigable donde los estudiantes puedan compartir sus opiniones sin ser ridiculizados. Munroe (2015) observó las clases donde los estudiantes trabajaron en equipo para aprender, se animaron entre ellos y el profesor los instó a ayudar a quienes mostraron falta de comprensión. Además, los errores fueron vistos simplemente como un signo de ignorancia más que de retraso; todos éstos son factores que subrayan los requisitos para una aplicación exitosa del enfoque abierto (Munroe, 2015).

3.3 Metodología empleada

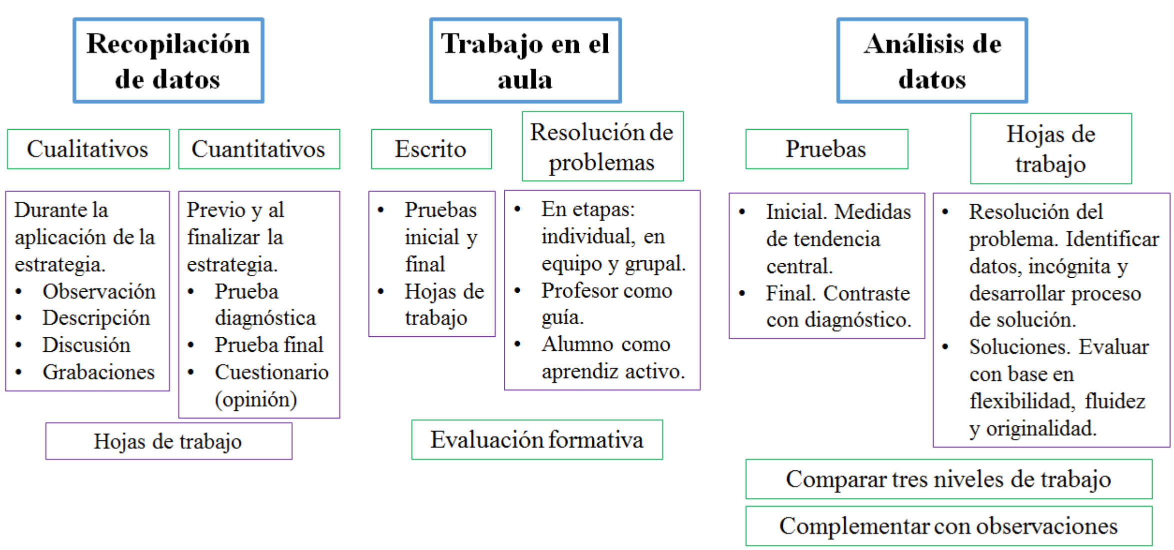
Concretando lo expuesto en este capítulo, la presente investigación tiene un enfoque mixto (ver sección 3.1), que retoma ideas tanto del enfoque cuantitativo como del cualitativo, según Albert (2007). Dadas las condiciones en las que se realiza el trabajo en el aula, no es posible trabajar con grupos control y experimental, ni obtener una muestra representativa que permita la aplicación de estadística para comprobar hipótesis o realizar correlaciones confiables, tampoco pretende aislarse una variable ni tener un control estricto durante el experimento.

Por el contrario, desea observarse la interacción de los alumnos con los PFA, influyendo solo en lo requerido por el enfoque. Sin embargo, sí se propuso un análisis previo y uno posterior a la aplicación de la estrategia, con el fin de valorar los resultados obtenidos derivados de la misma.

La metodología general empleada para la aplicación de la estrategia basada en la resolución de PFA, cuyo objetivo es identificar si mediante ella los alumnos de la asignatura de Matemáticas I del CCH desarrollan los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se puede dividir en los siguientes puntos (ver Figura 16):

- Recopilación de datos, antes, durante y después de la aplicación de la estrategia.
- Trabajo en el aula (aplicación de la estrategia).
- Análisis de datos.

Figura 16. Metodología general empleada en la presente investigación



3.3.1 Recopilación de datos

Se mencionó ya que la investigación tiene una parte cualitativa. Así que se utilizan instrumentos que recogen datos que corresponden a este enfoque. Según lo mencionado por Albert (2007), los datos que se recogen aquí son principalmente palabras o acciones, que requieren del empleo de estrategias de recogida de información de tipo interactivo. En este caso, instrumentos que:

- permitan enfatizar aspectos de la resolución de problemas mediante cuestionarios, mismos que permitirán que el alumno refleje lo que está comprendiendo del tema;
- destaquen el avance de los alumnos, observado por el profesor, a partir de tareas que realicen, mediante descripciones en diarios de clase y grabaciones en video.

Sin embargo, también se plantea el uso de mediciones numéricas para registrar los conocimientos matemáticos y la comprensión de estos que los alumnos logren a lo largo del experimento, mediante la aplicación de pruebas de evaluación.

Lo que desea observarse en esta investigación es *la utilidad que tienen los problemas de final abierto al aplicarse en el aula, específicamente cuando son utilizados como estrategia de enseñanza-aprendizaje dentro del tema de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2*, lo cual lleva a que las observaciones y registro de datos están centrados en lo siguiente:

-La forma en que los alumnos se enfrentan al problema, utilizando como base las preguntas orientadoras empleadas por Polya (1989), útiles para guiar a los alumnos sin alejarse de lo requerido por el enfoque abierto y consistentes con las ideas de Munroe (2015). Con esto, se pretende visualizar el posible desarrollo de la habilidad para resolver problemas, que está implícita en la estrategia empleada.

-El aprendizaje logrado en cuando a habilidades y comprensión del concepto de resolución de sistemas de ecuaciones, utilizando el método gráfico. Cabe recordar que el término comprensión se utiliza en el sentido de realizar conexiones coherentes entre conceptos, según muestra Sawada (1997) mediante ejemplos.

Por otra parte, se ha comentado la conveniencia de considerar la disposición y la actitud de los estudiantes ante los PFA y hacia las matemáticas (ver sección 2.7 Evaluación), lo cual se realiza a través de un cuestionario tipo Likert, que se describe a continuación.

3.3.2 Cuestionario de opinión

Se ha hablado ya de la escala la escala Likert, útil como herramienta para medir actitudes (Elejabarrieta e Iñiguez, 2010). Para el presente trabajo, se elaboró un cuestionario basado en esta escala (ver Anexo 3 Instrumentos de evaluación), cuyos objetivos fueron:

a) Identificar la opinión de los alumnos con relación a los PFA respecto a las dimensiones: utilidad, interés, ventajas o desventajas en comparación con el uso de problemas con una sola solución.
b) Identificar la opinión de los alumnos respecto a la forma de trabajo: individual, en equipo y grupal.

Todo esto con el fin de observar la influencia que tuvieron, por separado, el uso de problemas de final abierto y la forma de trabajo, sobre el aprendizaje de los alumnos.

3.3.3 Trabajo en el aula

En cuanto a la aplicación en el aula, se retoman los puntos siguientes, con las modificaciones necesarias para trabajar con un solo grupo de alumnos, en lugar de contar con grupo control y experimental:

- El empleo de un pre-test (prueba previa) y un pos-test (evaluación final) (Fatah et al., 2016; Kwon et al., 2006; Shimada, 1997), donde el primero tiene la función de establecer cuál es el conocimiento previo de los alumnos en cuanto al tema (prueba diagnóstica), respecto a la algoritmia relacionada y del tema en sí. El pos-test tiene la finalidad de indagar sobre la comprensión de los alumnos lograda al aplicar la estrategia.
- Uso de hojas de trabajo (Ninomiya y Pusri, 2015), que incluyen los PFA a resolver y donde los alumnos puedan registrar sus soluciones y progresos.
- Trabajo en tres etapas: individual, en grupos pequeños (tres a cuatro alumnos) y de forma grupal (Hashimoto, 1997).
- Rol del profesor como guía y del alumno como aprendiz activo (Asami Johansson, 2015).
- Análisis de las respuestas de los alumnos, suficiente durante las clases para poder guiar la clase y profunda después para realizar los ajustes necesarios (Nagasaki y Becker, 1993).

- Evaluación formativa, es decir, observación continua, realización de preguntas para indagar sobre el pensamiento de los alumnos y análisis de esta información para tomar medidas pertinentes (Nagasaki y Becker, 1993).

3.3.4 Análisis de datos

Se obtendrán conclusiones de los registros por escrito de la siguiente manera, incluyendo transcripciones de los audios y videos:

- En las primeras etapas de la resolución de problemas, se evalúa que los alumnos identifiquen correctamente datos e incógnita de cada problema, además de que desarrollen un proceso de resolución (Polya, 1989). Esto último se realiza tomando como referencia la solución elaborada previamente por el profesor (ver Anexo 4 Soluciones a los problemas).
- Las soluciones propuestas por los estudiantes se evalúan con base en un esquema similar al propuesto por Klavir y Hershkovitz (2008), tomando en cuenta las soluciones propuestas por todo el grupo.
- Las conclusiones se analizan comparando lo obtenido en los tres niveles de trabajo (individual, en equipo y grupal) (Hashimoto, 1997), tomando en cuenta la forma en que los estudiantes argumentan o no sus soluciones y el avance en la calidad de las respuestas al complementarse con las ideas de sus compañeros. Además, se considerará qué tan cercana fue la conclusión al objetivo que se pretendía lograr con cada problema.
- Las observaciones realizadas por el profesor son complemento de los puntos anteriores (Albert, 2007), para tomar en cuenta la habilidad de los alumnos de comunicarse de forma oral y escrita. Además, proporcionan información sobre la manera en que el profesor condujo la clase dentro del enfoque abierto, lo cual es importante porque influye directamente en los resultados finales.
- La prueba diagnóstica se analiza bajo medidas de tendencia central y sus resultados se emplean como base para modificar la estrategia buscando que los conocimientos previos sean suficientes para que todos los alumnos desarrollen en tema.
- La prueba final se compara en contraste directo de sus reactivos con los de la prueba diagnóstica (Fatah et al., 2016; Kwon et al., 2006; Shimada, 1997), ya que se establecen ítems similares en ambas pruebas.

3.3.5 Población

La investigación se realiza con un grupo de segundo semestre (edades entre 14 y 15 años), del turno matutino del Colegio de Ciencia y Humanidades, plantel Naucalpan, que en lista constaba de 24 alumnos, 13 de los cuales son hombres y el resto mujeres. La elección del grupo fue determinada únicamente por su disponibilidad.

Durante el primer semestre se trabajó con este grupo la resolución de problemas, con base en la teoría planteada por Polya, es decir, guiándolos con base en las preguntas propuestas por el autor. Se resolvieron problemas tanto dentro del aula como fuera de ella, pero siempre se solicitó a los estudiantes que elaboraran listas de los datos y la incógnita (o incógnitas) dados por el problema, y que describieran su estrategia para resolverlo (Polya, 1989). Además, se enfatizó la importancia del procedimiento, al principio incluso por encima de la solución correcta, para que los alumnos adquirieran más seguridad al realizar la tarea.

Por lo tanto, los alumnos contaban con cierta experiencia respecto a la forma en que se aborda la resolución de problemas en este trabajo; además, se les planteó uno de los problemas de final abierto utilizados por Pehkonen (1999), aunque solo con el fin de que notaran que existen problemas con más de una solución correcta.

3.3.6 Estrategia en el aula

La estrategia diseñada (ver Anexo 1 Estrategia didáctica) consta de tres problemas matemáticos de final abierto, es decir, se encuentran dentro del contexto puramente matemático (ver Figura 17). Se basó principalmente en las ideas planteadas por Asami (2015), Munroe (2015) y Shimada (1997), dentro de las etapas propuestas por Hashimoto (1997) (ver Figura 15).

El primer problema está centrado en la resolución de ecuaciones, el segundo en el trazado de gráficas para resolver ecuaciones y el tercero, además de englobar lo anterior, es el que pretende llevar a los alumnos a la comprensión de la resolución de sistemas de ecuaciones utilizando gráficas. Se planeaba abordar cada uno en una clase de dos horas, mientras que el tercero requeriría de cinco horas para su aplicación en clase.

La metodología de trabajo en el aula consiste en las siguientes etapas generales para los tres problemas (ver Figura 17):

1. Breves comentarios sobre las sesiones anteriores, de forma grupal.

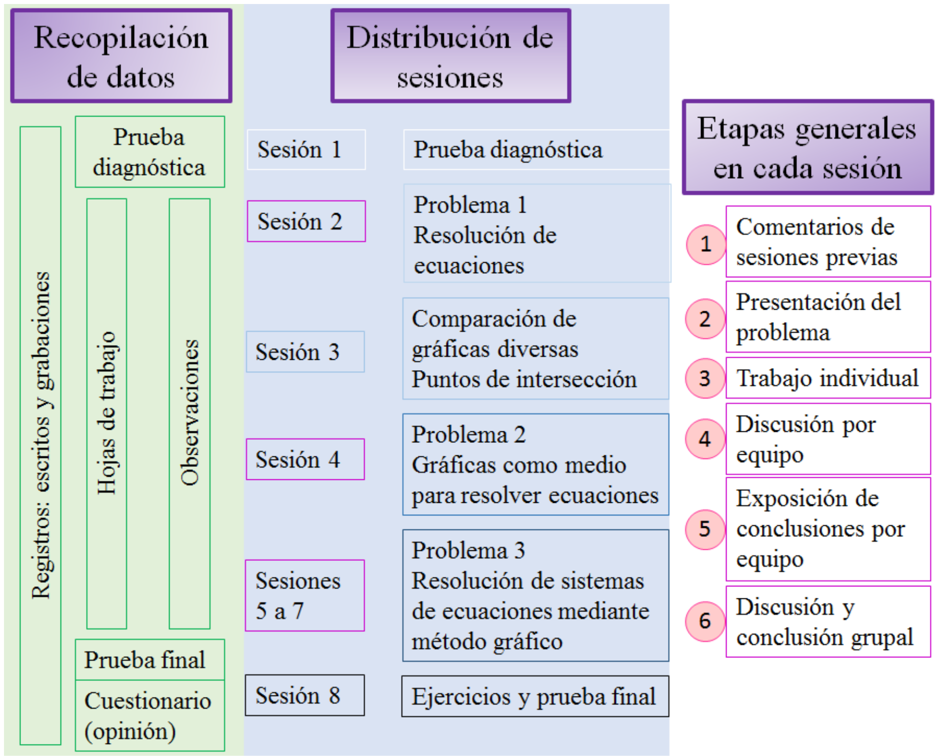
2. Presentación del problema. Entregado por escrito a los estudiantes (ver Anexo 2 Hojas de trabajo y ejercicios), en un instrumento que incluye preguntas que los guían según las dos primeras etapas de resolución comentadas por Polya (1989): comprender el problema y concebir un plan, de modo que se facilite el continuar con el proceso. Se comenta en forma grupal, el profesor pide aleatoriamente que dos o tres alumnos expliquen con sus palabras la situación planteada por el problema, para que quede claro para todos.
3. Cada alumno trabaja en forma individual en la resolución del problema, hasta lograr al menos una solución. El profesor apoya con preguntas generales si algún alumno así lo requiere.
4. Los alumnos comentan, organizados en equipos de tres o cuatro personas, la o las soluciones a las que llegaron, buscando validarlas y complementar sus respuestas, para finalmente elaborar conclusiones.
5. Un representante de cada equipo expone ante el grupo las conclusiones a las que llegaron y se discute su validez.
6. Con base en lo propuesto por los equipos, se llega a una conclusión general que, además de rescatar las soluciones y los errores más representativos, expresa el concepto que buscaba estudiarse. El profesor ayuda a llevarlo a la formalidad matemática mediante la generalización, si es posible.

La recopilación de datos se realizará de la siguiente manera (ver Figura 17):

- Mediante una prueba diagnóstica, realizada de forma escrita e individual.
- Para las etapas dos a cuatro, antes mencionadas, se cuenta con el instrumento que presenta el problema (ver Anexo 2 Hojas de trabajo y ejercicios), donde los alumnos plasmarán por escrito su proceso individual para resolver el problema y las conclusiones a las que se llegue durante el trabajo en equipo. Además, el profesor cuenta con la observación y registro en un diario de clase, algunos audios que registrarán la discusión de cada equipo y un video de la clase en general.
- Se recopilarán datos mediante una prueba final, o post-test, también realizado de forma escrita e individual y que cuenta con reactivos similares a los de la prueba diagnóstica, de manera que permite la comparación del antes y después de la aplicación de la estrategia.

- Se utiliza, además, un cuestionario que recopila la opinión general de los alumnos respecto a la forma de trabajo, separada en dos partes: el problema de final abierto en sí y las tres etapas de trabajo, individual, en equipos y grupal.

Figura 17. Estrategia en el aula



La estrategia descrita tiene fundamento en la literatura revisada, y su planteamiento responde a los objetivos de elaborar una estrategia basada en el uso de PFA para la enseñanza del tema de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas; aplicarla en el aula en un ambiente que procure la autonomía, el trabajo en equipo y el trabajo grupal y recopilar, a través de la observación y el registro de resultados, el proceso de aplicación de dicha estrategia. Todo esto encaminado a identificar, a través de ella, si los alumnos de la asignatura de Matemáticas I del CCH desarrollan los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de los sistemas de ecuaciones mencionados, mediante el método gráfico.

Capítulo 4 Aplicación y Análisis de Resultados

A continuación, se describen los resultados obtenidos, tanto para las pruebas inicial y final como para la aplicación de los problemas y el cuestionario de opinión, incluyendo observaciones que se realizaron durante el desarrollo de las clases. Se continúa con un análisis de dichos resultados, con la finalidad de comprobar si el objetivo de esta investigación, *identificar si mediante una estrategia basada en la resolución de problemas de final abierto los alumnos desarrollan los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, mediante el método gráfico*, se cumplió.

4.1 Presentación de datos

Los resultados obtenidos se dividen en dos partes, la primera correspondiente a observaciones realizadas durante la aplicación de la estrategia; la segunda corresponde con las evidencias recopiladas mediante los instrumentos de trabajo y de evaluación.

4.1.1 Observaciones del desarrollo de las sesiones

Se tenía planeado aplicar la estrategia en 14 horas, repartidas en 8 sesiones, seis de dos horas y dos de una (ver Anexo 1 Estrategia didáctica). Sin embargo, la suspensión de clases en el CCH durante la aplicación de la estrategia provocó un reajuste a la organización de las sesiones, de modo que se emplearon 17 horas en total, repartidas en siete sesiones de dos horas y tres de una hora.

A continuación, se describe de forma general lo acontecido durante las clases, con un apartado donde se resaltan puntos observados al finalizar la resolución de cada problema involucrado en la estrategia.

4.1.1.1 Sesión 1

Prueba diagnóstica (martes 28 de enero, 2 horas)

Esta sesión de dos horas se dedicó a la resolución de la prueba diagnóstica. Los alumnos terminaron de resolver en diferentes tiempos y se retiraron conforme terminaron.

4.1.1.2 Sesión 2

Revisión de prueba diagnóstica y resolución del Problema 1 (jueves 30 de enero, 2 horas)

Para iniciar, se saludó a los alumnos, quienes en respuesta a una pregunta comentaron que estaban cansados por haber tenido mucha tarea. Alrededor de seis estudiantes llegaron mientras se daban las instrucciones para, revisar la prueba diagnóstica.

Para realizar dicha revisión, se escribieron en el pizarrón los ejercicios por pares y según el orden de la prueba, para luego pedir a algún alumno voluntario que escribiera su solución como recordaba haberla hecho en la prueba y luego la explicara a sus compañeros.

Después de la primera exposición, se preguntó a los alumnos si tenían alguna duda, respondieron de forma negativa, excepto uno que no quiso expresar cuáles eran sus dudas comentando que no entendía del todo, así que él y otro estudiante realizaron juntos el segundo ejercicio (resolución de una ecuación).

Al preguntar al grupo si estaban de acuerdo con la respuesta, varios respondieron que no y uno señaló el error, luego otro escribió su propuesta sin borrar la anterior y la explicó. Esta situación se aprovechó para enfatizar que los errores nos sirven para aprender.

Para todos los ejercicios, se manejó que quien estaba explicando al frente “se vuelve el maestro”, por lo que las dudas se dirigen a él y él debe explicar hacia los demás alumnos, aunque muchas veces la atención se dirigía, de ambas partes, al docente del grupo.

Se observó que los alumnos conversaban mientras esperaban a que alguno de sus compañeros escribiera en el pizarrón, pero guardaban silencio cuando la explicación comenzaba y también durante ella. Además, hubo apoyo cuando alguno no lograba explicar completamente su trabajo, por parte de varios estudiantes que permanecían sentados.

Sin embargo, también hubo momentos, al finalizar las explicaciones, en que los alumnos comentaban en voz alta alguna pregunta o comentario referente al ejercicio, aunque no dirigido a la persona al frente, sino explicándose entre ellos.

Dado que los ejercicios se referían a conocimientos previos, se les preguntó a los alumnos en general si recordaban ciertos temas revisados con anterioridad. En estos casos, respondieron que no recordaban, aunque al avanzar en la explicación (por parte del profesor) muchos comenzaban a dar resultados o pasos a seguir sin que se les interrogara.

Al terminar con el ejercicio 1, se dieron unos minutos para que los alumnos tomaran notas, luego se les preguntó si se podía borrar el pizarrón, a lo que respondieron que no y se dio un poco más de tiempo antes de limpiar la primera mitad del pizarrón para anotar la siguiente pregunta. En este lapso, el profesor paseó entre los alumnos y unos cuantos de ellos expresaron algunas preguntas sobre los ejercicios recién explicados, a los que se respondió con explicaciones directas.

Para el siguiente ejercicio, que implicaba trazar gráficas de funciones lineales, se dibujó un plano cartesiano con la gráfica de una recta y se dio la instrucción de poner atención y luego tomar apuntes. Se le preguntó al grupo qué era lo que había en el pizarrón, respondieron correctamente, por lo que se continuó con la pregunta sobre cómo trazar la representación gráfica de una función lineal, dada la representación algebraica.

Un alumno propuso basarse en la razón de cambio y la ordenada al origen, otro en la construcción de una tabla. Como no hubo acuerdo, se revisaron ambas propuestas. La explicación fue dirigía por el profesor, haciendo preguntas a los alumnos sobre los resultados de las operaciones, sobre las que comentaron que les parecían difíciles por involucrar una fracción.

Para trazar la gráfica, se les preguntó a los alumnos cuántos puntos necesitaban, respondieron que dos, así que se dibujó la recta, aunque hubo confusión por parte de tres estudiantes sobre el orden de las coordenadas, es decir, pretendieron marcar la primera coordenada en el eje de las ordenadas.

Luego se explicó la primera propuesta, aunque al comentar sobre la ordenada al origen, un alumno comentó que era el punto medio de la recta y otro contradijo argumentando que “la gráfica es infinita”. Sin embargo, la conclusión a la discusión se dejó pendiente para sesiones futuras.

Se escribió el último ejercicio a revisar en la otra mitad del pizarrón, y mientras los alumnos platicaron sobre temas varios, aunque no relacionados con matemáticas. Cuando se les comentó que era la última pare de la revisión, algunos comentaron que si después de eso se terminaba la clase.

Para resolver este ejercicio no hubo voluntarios para explicar, por lo que se preguntó directamente a un alumno al azar, quien explicó un procedimiento correcto para resolver el ejercicio, mismo que se escribió en el pizarrón. Cabe mencionar que al escribir en el pizarrón mientras se resolvía un ejercicio, el profesor miraba parcialmente a los alumnos y a lo que estaba escribiendo y preguntaba, quizá demasiado continuamente, si había dudas.

Al terminar, nuevamente se dieron unos minutos para tomar notas, mientras el profesor repartió la hoja de trabajo correspondiente al Problema 1 alumno por alumno. Para este momento habían trascurrido cuarenta minutos de la clase.

Al recibir la hoja, algunos alumnos preguntaron si se trataba de otro examen y dos preguntaron si sería de tarea, su actitud parecía mostrar cansancio y no mucha disposición para continuar trabajando.

Se les dijo a los alumnos que tenían que responden la primera parte indicada en su hoja, con pluma, y para ello tenían quince minutos. Durante el trabajo los alumnos permanecieron en silencio, y cuando empezaron a murmurar, antes de pasados diez minutos, el profesor comenzó a preguntar, de manera personal, si ya habían terminado. Pronto todos los alumnos comentaron que sí y se les pidió que formaran equipos, de tres o cuatro personas, según el lugar en que estaban sentados.

La discusión por equipos también fue breve, todos comentaron desde el principio que tenían muchas respuestas. Pronto los estudiantes comenzaron a platicar de temas no relacionados con lo que se estaba tratando en el momento, por lo que el profesor les pidió a los equipos que escribieran su respuesta en el pizarrón.

En la primera propuesta escribieron, para obtener 13 mediante una suma, $10 + 3$; también propusieron menos un millón más un millón trece. Un representante del tercer equipo propuso $14 - 1$, pero uno de sus compañeros dijo que estaba mal, mientras otro alumno sugería escribir $-1 + 4$, pero finalmente escribió $12 + 1$. Dos equipos propusieron “$x + y$” y el último equipo “$x + x + 1$”.

Para la discusión en grupo, se pidió en primer lugar que indicaran si consideraban que las respuestas en el pizarrón eran correctas. Estuvieron de acuerdo con las operaciones aritméticas, también comentaron que “tiene sentido”, refiriéndose a escribir la respuesta como la suma $x + y$, aunque se desarrolló una breve discusión sobre si $x + x + 1$ era válido, los cinco equipos que no propusieron la operación comentaron que no, argumentando que había tres números.

Así que el equipo cambió su propuesta a $x + (x + 1)$, que el grupo ya consideró correcta, y también a $x + x$, lo que promovió otra discusión sobre si los dos números podían ser iguales. Para aclarar este punto, el profesor preguntó si era posible utilizar 6.5, a lo que todos concordaron que sí. En estas discusiones hubo un poco de desorden, ya que varios alumnos comentaban entre ellos sus argumentos a favor o en contra de las propuestas, pero no con el resto del grupo.

Dado que la discusión no continuaba en la dirección deseada (a más formas de representar los resultados) se les preguntó a los alumnos si podía construir una tabla con sus resultados. Respondieron que sí, pero que no iban a acabar. Hubo algunas risas.

Así, el profesor escribió la tabla utilizando los valores escritos en el pizarrón y algunos otros que propusieron los alumnos al momento. Se les preguntó si podían relacionarlo con algún otro tema revisado con anterioridad y dos alumnos respondieron que era como una función.

Considerando este comentario, se le preguntó al grupo si podían construir entonces una gráfica, a lo que respondieron afirmativamente y uno comentó que podía utilizar la expresión $x + y = 13$. El profesor añadió un breve comentario acerca de que se utilizaría la metodología para trazar gráficas de funciones, a pesar de que trabajaba con ecuaciones de dos variables, ya que esto permitiría analizar la situación planteada por el problema.

Entonces se dio la instrucción de construir dicha gráfica y algunos se quejaron de tener que incluir un millón, pero se les preguntó si era necesario considerar todos los valores indicados en la tabla, a lo que respondieron que no, uno comentó que podían utilizar los que quisieran, y empezaron a trabajar. A quienes lo desearan, se les dio una hoja de cuadro.

El profesor paseó entre los alumnos y, al notar que estaban terminando, se les dio la indicación de resolver la segunda parte del problema, de forma individual, y que luego compartieran sus resultados con el equipo.

Durante el trabajo siguiente, los alumnos comentan mucho entre sí, no necesariamente del problema. Cuando ya todos los equipos comentaron que terminaron, se propusieron respuestas. En un equipo comentaron que el resultado iba a ser “una cuadrática”, en otros tres propusieron $x - y$, para una resta que resulte 13. Además, aportaron soluciones como

$-3-10$. Nuevamente, los alumnos estuvieron de acuerdo en que las propuestas eran correctas y se les preguntó si podían trazar una gráfica.

Dado que la respuesta fue afirmativa, la siguiente actividad fue trazar dicha gráfica en el mismo plano cartesiano que la primera parte del problema. Mientras paseaba por el salón, algunos alumnos preguntaron al profesor si su gráfica o sus soluciones estaba bien.

Otro alumno, mientras revisaba su gráfica, comentó, solamente al profesor, que entonces al tomar un punto de la gráfica tendría una solución a la operación. Sin embargo, no pudo comentarse más debido a que se había terminado el tiempo y se dio como indicación al grupo que enlistaran las semejanzas y diferencias que recordaran entre la parte 1 y la parte 2 del problema, para luego entregar sus hojas de trabajo y dar por finalizada la sesión.

4.1.1.3 Sesión 3

Revisión del Problema 1 (martes 4 de febrero)

Nota: Tuvo que adaptarse la estrategia, dado que la sesión 3 estaba planeada para una hora, pero debido a un paro de labores en el CCH, tuvo que desarrollarse en dos horas.

Para iniciar, se pidió que un estudiante voluntario recordara lo visto la clase pasada. No hubo voluntarios, así que se eligió un alumno al azar y otros lo apoyaron con ideas para completar el resumen. Se requirieron alrededor de veinte minutos para que los alumnos recordaran qué era lo que se había trabajado anteriormente.

A continuación, se les pidió a todos los alumnos que se acomodaran según los equipos forados la clase anterior. Mientras, el profesor dibujó un plano cartesiano en el pizarrón y repartió los trabajos referentes al Problema 1.

Se solicitó a un alumno voluntario que dibujara las gráficas trabajadas, pero nuevamente se tuvo que elegir al azar, aunque más tarde un alumno complementó la respuesta de forma voluntaria. Terminado esto, el segundo alumno explicó su respuesta y se procedió a revisar.

Para la primera gráfica no hubo desacuerdos, aunque un alumno comentó que “signos iguales se suman”. Sin embargo, para la segunda parte del problema hubo que recordar qué se pedía, antes de empezar a revisar valores particulares tomados de la gráfica.

Los estudiantes comentaron que la respuesta debía incluir un número positivo y uno negativo, después agregaron que el positivo debía “ser el mayor”. Esto no les permitió llegar a una respuesta completamente satisfactoria para ellos, por lo que algunos comenzaron a dar muestras de cansancio y hastío.

Al buscar más ejemplos, se llegó a discutir sobre que para la primera parte del Problema 1 no era correcto utilizar, por ejemplo, $14+(-1)$, por que al simplificar la operación “se obtiene una resta”. Pero sí es válido $-1+14$. Otro alumno argumentó que “signos iguales se suman y signos diferentes se restan”.

Al retomar la gráfica, se les preguntó si esta representaba la situación del problema, fue acuerdo que sí, pero al preguntárseles qué pasaba con la sección de la gráfica que tenía parte en números negativos, no supieron qué contestar.

El debate no generó nuevas ideas, por lo que el profesor mostró más ejemplos basados en las gráficas, utilizando números enteros positivos, luego con parte decimal diferente de cero y con negativos. Varios alumnos se mostraron convencidos con ejemplos, pero al proponer otros se volvía al punto de partida. Así que el profesor explicó y concluyó sobre los aciertos en lo escrito en el pizarrón y sobre sumar y restar números negativos. Aunque no todos los estudiantes parecieron conformes, ninguno lo expresó ni preguntó algo adicional.

Luego, un alumno, al comparar su trabajo el equipo, notó que sus gráficas para la segunda parte eran diferentes, pero por más que intentó rectificar cuál era la correcta, llegó a que ambas lo eran (las propuestas eran $x-y=13$, y $y-x=13$, aunque la comparación fue solamente entre las gráficas). Informó de esto al profesor de manera personal, pero se planteó la pregunta al grupo poco después: ¿Cuál de las dos respuestas es la correcta?

Como no se llegó a un acuerdo, se preguntó a un alumno si recordaba su comentario en referencia a tomar un punto cualquiera de la gráfica y que esto iba a dar una solución. No lo recordaba, así que el profesor repitió el comentario y consultó con el grupo. Un estudiante más estuvo de acuerdo y propuso comprobar con las coordenadas (12.5, 5.5).

Considerando lo anterior, se pidió a los estudiantes que comprobaran algunos puntos y alguien más sugirió que otra manera de comprobar era “despejando y”. Esto llevó a otro conflicto, puesto que cuatro alumnos se confundieron al obtener “$-y$”, considerando que su despeje estaba terminado. Un alumno fue quien explicó finalmente el proceso.

Se intercambiaron otros ejemplos, pero el grupo siguió sin inclinarse por alguna solución y ya no aportaron ideas nuevas, además de mostrar cansancio. Entonces, considerando que quedaba poco tiempo para finalizar la sesión, el profesor explicó la situación.

Continuando con la conclusión, se preguntó a los alumnos sobre las semejanzas y diferencias entre las dos partes del problema. Se coincidió en que ambas podían representarse como funciones y que sus gráficas eran rectas. También se mencionó que una similitud era el punto en que se cortaban dichas gráficas y que la diferencia era que una parte involucraba una suma y la otra una resta.

Sobre el Problema 1

Todos los estudiantes identificaron correctamente tanto datos como incógnita del problema, pero algunos omitieron la descripción de su estrategia o proceso. Además:

- Los alumnos no requirieron apoyo por parte del profesor, más que para señalar que había muchas respuestas y preguntar si eso era correcto.
- Se propuso la forma algebraica general: $x + y = 13$, sin especificar qué números podían sustituir, por lo que puede concluirse que los alumnos están familiarizados con generalizaciones simples.
- En general, los alumnos propusieron números naturales. Aunque un equipo propuso inicialmente $14 - 1$, pero al escuchar que era una resta lo borró, no sin que antes otro alumno sugiriera escribir $-1 + 14$, "para que fuera suma". Esto implica que algunos estudiantes cuentan con una visión más amplia de la operación suma, aunque no necesariamente completa.
- Hubo muchos desacuerdos sobre tratar a $a + (-b)$ como suma y $a - (-b)$ como resta. Al final, por tiempo, el profesor tuvo que explicar la situación, aunque no todos los alumnos parecieron quedar convencidos.
- Como no se propuso otra forma de representar, el profesor sugirió usar una tabla y un alumno aclaró que no podían poner todas las respuestas.
- Con ayuda de preguntas, quizá demasiado enfocadas al fin deseado, se llegó a que, como tenían una tabla, podían escribir una función, que era una función lineal y podían trazar su gráfica.
- Se dio demasiado tiempo para resolver, en todos los niveles, lo cual provocó que la discusión grupal fuera menos extensa e insuficiente en algunos puntos, como el referente a sumar y restar números negativos.

- Los alumnos siguieron buscando la aprobación del profesor para validar respuestas, a pesar de que se les mostró, a través de preguntas, cómo podían comprobar sus resultados ellos mismos, no aceptaron los argumentos de sus compañeros.
- Hubo mucho desorden, especialmente cuando algún alumno explicaba en el pizarrón, aunque los comentarios entre los alumnos eran sobre lo que se estaba revisando. Esto impidió que se compartieran todas las ideas valiosas.
- Un alumno propuso que "un punto de la recta nos da otros dos números que podemos sumar para que dé 13", sin embargo, sus compañeros no quedaron convencidos de tal afirmación o no la entendieron. Cuando la discusión sobre este aspecto fue retomada, algunos alumnos le dieron la razón, pero nadie agregó ninguna opinión fundamentada.
- A mitad de la discusión referente a la segunda parte del Problema 1, algunos alumnos comentaron, más para sí mismos, que ya estaban hartos y cansados; cuando se les presentaba algún contraejemplo para algo que daban por hecho, algunos se enojaban y dejaban de participar, esperando a que se diera la respuesta.
- Los alumnos argumentaron, casi siempre, sus respuestas, sin necesidad de pedírselo directamente.
- Se le dificultó a los alumnos integrar ideas, aunque ellos mismos las hubieran propuesto. Por ejemplo, en el caso de proponer $14 - 1$ y $-1 + 14$ como iguales, muchos no estuvieron convencidos de que fueran soluciones a los problemas.

En conclusión, se logró el objetivo de que los alumnos notaran que una situación problemática puede tener más de una solución, se compartieron y analizaron soluciones, dando lugar a discusiones bastante ricas en torno, principalmente, a sumas y restas de números negativos, cómo trazar la gráfica de una función lineal y qué pasaba al despejar "*y*" de la ecuación propuesta.

Sin embargo, el profesor mantuvo un papel más orientado a dispensador de conocimiento, ya que los alumnos no aceptaron que ellos mismos o sus compañeros podían validar las respuestas propias y de los otros. Además, fue difícil guiar a los estudiantes hacia las diversas formas de representar las soluciones que obtuvieron para el problema, ya que tuvieron que emplearse preguntas demasiado directas como "¿de qué manera podrían construir una tabla con estos resultados?". Lo anterior debido a que no hubo sugerencias por parte de los alumnos que permitieran seguir ese camino en la discusión.

Asimismo, después de representar ambas partes del problema mediante tablas y gráficas, fue posible conjuntar las dos en una nueva situación que las involucraba a ambas, aunque no se logró un consenso sobre las formas de encontrar esa solución y su relación con el punto de intersección en la representación gráfica.

4.1.1.4 Sesión 4

Trabajo con gráficas (11 de febrero)

Nota: Los días jueves y viernes nuevamente hubo un paro de labores en el CCH, por lo que tuvo que hacerse una recapitulación de lo visto en sesiones anteriores, más larga de lo que se tenía planeado, y reajustar nuevamente los tiempos.

Para iniciar, se realizó un repaso de lo revisado anteriormente, con los alumnos aportando diferentes ideas, aunque el profesor tuvo que apoyarlos en recordar las conclusiones.

Después, el profesor repartió las gráficas y tablas que habrían de emplearse, dando la indicación de formar parejas de trabajo con quien estuvieran sentados y realizar comparaciones entre pares de gráficas (construidos por ellos como eligieran) y sus tablas correspondientes, con el fin de identificar puntos de intersección entre ellas.

Los alumnos trabajaron, platicando en voz no demasiado alta y por alrededor de media hora, mientras el profesor paseaba entre las parejas observando y respondiendo algunas dudas. Un alumno comentó que un par de gráficas parecían coincidir en un punto, pero este no estaba escrito en las tablas correspondientes, el profesor le indicó que pensara en la respuesta y en unos minutos se discutiría con el grupo.

Para comentar los resultados obtenidos, dos parejas dibujaron en el pizarrón bosquejos de las gráficas elegidas sobre un mismo plano cartesiano, remarcando los puntos de intersección e indicando sus coordenadas.

Hubo acuerdo sobre la validez de las respuestas, y el profesor preguntó si podría haber cero puntos de intersección o más de uno. Respondieron afirmativamente a ambas preguntas y un alumno propuso que podía haber dos puntos en cierto par de gráficas, aunque no se alcanzara a ver en el fragmento de la gráfica que recibieron.

También los alumnos coincidieron esto, uno argumentó que para saber las coordenadas podían hacer más grande su gráfica, otro que podían utilizar sus tablas.

Entonces el profesor les comentó directamente el hallazgo del alumno referente a que un aparente punto de intersección no se encontraba en las tablas y dicho estudiante terminó de explicar la situación. Los alumnos comprobaron por sí mismos lo comentado, desorganizándose un poco la clase mientras comentaban entre ellos que, efectivamente si "comparaban bien derechito no coincidía".

Cuando se restableció el orden, un alumno comentó que había otra intersección en (0, 0), con la cual todos concordaron, pero que el otro punto no era "exacto". Se discutió un poco al respecto, llegándose a la conclusión de que "las gráficas son engañosas y la tabla también pueden ayudar".

A continuación, el profesor resumió todo lo visto, recalcando que se trabajaron pares de ecuaciones o funciones y que cada par podía considerarse un sistema de ecuaciones. Luego preguntó cómo podrían definir un sistema de ecuaciones con base en lo que se había trabajado hasta el momento, enlistando algunas características.

Los alumnos comentaron lo siguiente: Tiene dos ecuaciones e incógnitas, se puede graficar, se representa con literales, pueden ponerlo en una tabla, tiene que estar igualada con un número. Hubo mucha reticencia por parte de los alumnos para dar ideas, así que el profesor les indició que las pusieran por escrito y redactaran una definición a partir de ellas.

Luego de unos minutos de trabajo en el que se escucharon varios murmullos, se indicó a algunos alumnos, el primero al azar, los siguientes voluntarios, que leyeran sus definiciones. El primero aportó que había varias formas de resolverlos, pero las ecuaciones debían estar alineadas y otro alumno complementó esto debía hacerse según términos semejantes. Los siguientes retomaron las ideas escritas anteriormente en el pizarrón.

Así que se les preguntó si necesariamente debían tener dos ecuaciones, las respuestas fueron variadas, así que se les proporcionó un ejemplo de un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas, que ellos señalaron como sistema, pero dos estudiantes comentaron que no podían trazar gráfica, se dejó pendiente la explicación en ese momento.

Otro alumno sugirió que es un conjunto de ecuaciones. Así que se utilizó como analogía para sistema los sistemas del cuerpo respiratorio, nervioso y digestivo, con lo que el mismo alumno reafirmó que, como varias cosas componen a los sistemas mencionados, entonces también en los sistemas de ecuaciones podría haber varias, o más de una.

A modo de conclusión, se escribió una definición de sistema de ecuaciones combinando las ideas en las que todos concordaban, para que luego el profesor explicara qué sucede con las gráficas para sistemas con más ecuaciones e incógnitas. Con esto se dio por concluida la sesión.

4.1.1.5 Sesión 5

Resolución del Problema 2 (13 de febrero, 2 horas)

Se comenzó solicitando a un alumno, elegido al azar, que resumiera lo visto en clases anteriores. Luego, el profesor repartió las hojas de trabajo correspondientes al Problema 2 y se dio la instrucción de trabajar de forma individual. A pesar de esto, los alumnos conversaron bastante, no necesariamente sobre la actividad que estaban realizando.

Hubo varias dudas en cuanto a cómo podían resolver y qué era lo que les pedía el problema exactamente. El profesor respondió con base en preguntas como ¿qué dice el enunciado del problema? ¿Qué datos tienes? ¿Recuerdas haber resuelto algo parecido? Y cuando el alumno no lograba dar respuesta, se aludía a ejemplos más específicos revisados anteriormente, en especial a la comparación de graficas que se realizó la sesión anterior.

Cuando subió el volumen de la conversación, se le preguntó al grupo si habían terminado, como la respuesta fue afirmativa, se dio la instrucción de formar equipos para discutir sus resultados y se les entregó una hoja de trabajo para que escribieran sus conclusiones. En las pláticas por equipo, se mencionaron nuevamente algunas de las dudas planteadas individualmente y algunos pidieron al profesor que les indicara si su propuesta era correcta.

Cuando terminaron, se realizó la discusión grupal, solicitando a todos los equipos que dibujaran su conclusión en el pizarrón. Una de las propuestas fue plantear dos rectas paralelas y otra una curva. Varios alumnos comentaron que la curva era incorrecta, ya que no era una recta, por lo que se revisó cada componente del enunciado del problema para comprobar si las soluciones propuestas correspondían con lo solicitado.

En primer lugar, se discutió sobre si el problema indicaba el tipo de función o de gráfica que había que dar como respuesta. En segundo lugar, se hizo notar la solicitud de que la gráfica trazada intersecara dos veces a la recta dato y se revisó cada propuesta en el pizarrón.

Varios alumnos participaron en esta actividad, señalando si la propuesta era correcta o no y por qué. Con esto se aclararon dudas y se indicaron errores en las respuestas.

Para finalizar la sesión, se le preguntó al grupo si consideraban que las respuestas correctas que se escribieron en el pizarrón eran sistemas de ecuaciones. Las respuestas fueron variadas, así que se retomaron las ideas propuestas la clase anterior y se analizó si las gráficas cumplían con ellas.

4.1.1.6 Sesión 6

Revisión del Problema 2 (14 de febrero, 1 hora)

Se inició recapitulando lo visto en sesiones anteriores, para lo cual dos alumnos elegidos al azar (no hubo voluntarios), comentaron ideas y actividades realizadas anteriormente.

Otro alumno mencionó tener duda sobre el Problema 2, referente a si una parábola era una respuesta correcta. Dibujó la propuesta en el pizarrón y se comentó en torno a ella, partiendo de recordar qué características se enlistaron referentes a los sistemas.

Después otro alumno propuso como ejemplo de un sistema una sola ecuación, por lo que se preguntó al grupo la diferencia entre un sistema de ecuaciones y una ecuación, para lo cual nuevamente se retomaron las características ya escritas en el pizarrón y algunas ideas sobre ecuaciones, resaltando que debía “estar igualada a algo” y que para ambos conceptos “se tenían incógnitas”.

Luego, el profesor repartió la hoja de trabajo para el Problema 3, incisos A y B, para que los alumnos trabajaran de forma individual y luego en equipo. Hubo pláticas, no siempre referentes a lo que se estaba trabajando. El tiempo de la sesión terminó con esta actividad.

Sobre el Problema 2

Antes de resolver este problema, se realizó la actividad con las gráficas y tablas mostradas en el Anexo 2 Hojas de trabajo y ejercicios, en la cual:

- Los alumnos mostraron entusiasmo, al menos al principio, al manipular gráficas, comparándolas para determinar puntos de intersección (se utilizó papel transparente para que pudieran encimarlas), dejando un poco de lado las tablas.
- Hubo mucho intercambio de opiniones entre las parejas de alumnos que trabajaron juntos como se les indicó, sin embargo, cuando no pudieron responder alguna duda

inmediatamente, buscaron conversar con alguna otra pareja en lugar de especular o comentar más entre ellos.

- Se obtuvo como conclusión que las tablas también eran útiles para determinar los puntos de intersección, ya que contenían algunos valores exactos; y que no siempre el punto de intersección era único.
- La discusión en torno a las gráficas fue relativamente corta, ya que prácticamente todos los alumnos estaban convencidos de las coordenadas que obtuvieron y de que podía haber varios puntos de intersección.
- Todas las preguntas realizadas por los alumnos se les devolvieron a ellos para que las comentaran y de esta forma se discutió sobre su respuesta, aunque no hubo muchas participaciones, ya que quedaban convencidos con la primera o segunda explicación dada por sus compañeros.
- Los estudiantes proporcionaron una definición intuitiva de lo que es un sistema de ecuaciones. Aunque, en la discusión al respecto, se mostraron poco participativos.

En cuanto al Problema 2, cabe mencionar que se actualizó la redacción de un ítem (como se muestra en el Anexo 2 Hojas de trabajo y ejercicios y en el Anexo 4 Soluciones a los problemas) debido a una imprecisión en su redacción, con relación a un concepto. Sin embargo, se decidió continuar con su análisis debido a que las respuestas de los alumnos y la posterior discusión en torno al Problema reflejaron lo que se deseaba con su aplicación.

Al respecto, se realizaron las siguientes observaciones:

- Prácticamente todos los alumnos identificaron datos e incógnita del problema, pero pocos escribieron alguna estrategia o procedimiento sobre cómo podían resolver.
- Pocos alumnos tomaron en cuenta el trabajo realizado con las gráficas, por lo que muchos no consideraron la posibilidad de usar soluciones que no fueran rectas.
- Se reiteró la idea de que puede haber más de un punto de intersección, pero no se logró relacionar completamente con la solución al problema.
- Los alumnos prefirieron utilizar números enteros, incluso al estimar las coordenadas del punto de intersección.
- Después de que un alumno propusiera como solución una curva, otros se mostraron de acuerdo y marcaron otras respuestas en sus hojas de trabajo.

- En la discusión se llegó a que cualquier recta puede intersecar a otra siempre y cuando no sea paralela a la primera y que, si se trazaba una recta sobre la primera, sí podía considerarse que había intersección entre ambas.

Para el trabajo con gráficas, se logró concluir, de forma unánime, que podía haber diferentes cantidades de puntos de intersección, desde cero hasta tres, dejando abierta la idea de que podría haber más. Sobre el punto de intersección, se llegó a que es un punto común a ambas gráficas y que podía encontrarse a partir de la gráfica o de la tabla, siendo esta última las más confiable entre ambas opciones; pero no logró concluirse que es solución simultánea a dos ecuaciones, si bien esta idea sí fue expresada por un alumno.

En cuanto al Problema 2, pocos alumnos aplicaron las conclusiones de la sesión anterior respecto al punto de intersección, lo cual dio pie a una discusión en torno a las rectas paralelas, como representación de un sistema de ecuaciones sin solución.

4.1.1.7 Sesión 7

Resolución del Problema 3, incisos A y B (18 de febrero, 2 horas)

Se inició recordando lo visto la sesión anterior, por parte de un alumno voluntario. Luego, se repartieron las hojas de trabajo utilizadas la sesión anterior y se dio la indicación de reunirse con sus equipos de la clase anterior y que compartieran sus respuestas para la parte A del Problema 3.

Para ello, dos representantes de un equipo bosquejaron sus gráficas, comentando que había muchas opciones o muchas respuestas, y enfatizando que solamente habían puesto una de ejemplo. Dos quipos más también colocaron sus respuestas.

En la discusión posterior destacó primero que ningún equipo escribió las coordenadas de los puntos de intersección y que había muchas respuestas, algunos afirmaron que infinitas. Después, se analizó una propuesta en la que la recta solución coincidía con la recta dato: algunos alumnos comentaron que no era correcto, pero otros argumentaron que cumplía con intersecar y que el problema no decía cuántas veces, así que no estaba mal.

En cuanto a la parte B, también se compartieron algunas respuestas y se coincidió en que era similar a la parte A, con muchas respuestas posibles y lo único que cambiaba era “el punto de partida”.

Para la siguiente parte de la sesión, el profesor entregó a los alumnos los siguientes incisos del Problema 3 y se dio la indicación de trabajar de forma individual los incisos C, D y E, para enseguida comentarlos con el equipo.

Hubo dudas sobre cómo plantear las ecuaciones de las rectas propuestas en las sesiones anteriores, que el profesor respondió directamente, varias veces acompañando a los alumnos en el proceso. Con esta actividad se terminó el tiempo y se dio la indicación de trabajar de forma individual y como tarea, los últimos dos incisos del Problema 3.

4.1.1.8 Sesión 8

Resolución del Problema 3, incisos C a G (20 de febrero, 2 horas)

Un alumno, elegido al azar, inició la sesión enlistando ideas sobre lo visto anteriormente, recordando que, la sesión anterior, se resolvieron en equipo los incisos C, D y E, por lo que el profesor pidió a dos equipos voluntarios que escribieran sus respuestas en el pizarrón para el inciso C y las ecuaciones correspondientes, según el inciso D.

Del primer equipo pasaron dos representantes, uno escribió en el pizarrón y el otro explicó su respuesta, indicando que podían tener varias soluciones y por lo tanto “varias intersecciones” y daban dos como ejemplo. El segundo equipo comentó algo similar y el grupo estuvo de acuerdo con que las soluciones eran correctas, solamente se corrigió que las rectas debían ser infinitas y no solamente “unir los dos puntos”.

A continuación, se discutió en torno a los incisos D y E, para lo cual se solicitó a otros equipos que compartieran parejas de ecuaciones que hubieran planteado. Como ningún alumno quería participar, se eligieron representantes al azar de todos los equipos.

Para revisar sus respuestas, se preguntó al grupo directamente cómo podrían estar seguros de que fueran correctas y un alumno propuso que podían sustituir valores de sus gráficas. Por tanto, se dio la indicación de que cada equipo realizara dicha comprobación.

Muchos alumnos comentaron que tenían dudas, así que el grupo apoyó para escribir todo en la forma $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R}, m \neq 0)$, y sustituir un punto para cada una. Los estudiantes se notaban apáticos y pocos participaban, a veces comenzaba a platicar entre ellos y había que llamarlos al orden.

La discusión posterior incluyó la propuesta $y = mx + b = 0$, donde al principio se argumentaba que es la forma de una ecuación. Además, se solicitó a los alumnos que hicieran observaciones en cuando a similitudes y diferencias entre los pares de ecuaciones.

Relacionando las ideas con el inciso E del problema, se propuso también que: las rectas deben ser perpendiculares para cruzarse (más tarde se aclaró el significado de "perpendicular" por parte del profesor); el punto donde se cruzan las rectas es el punto medio; solamente existe un punto donde pueden cruzar las rectas; en este punto las coordenadas son las mismas para ambas rectas.

Se retomó brevemente la discusión sobre si las rectas cruzan en el punto medio, pero no pudo continuarse dado que se repitieron las mismas ideas que la vez anterior y solo involucró a tres estudiantes.

Se observó que los alumnos tenían claro cuál era el punto de intersección, pero el profesor tuvo que realizar un resumen de todo lo visto hasta el momento, remarcando conclusiones de las sesiones, para que finalmente un alumno propusiera que el punto de intersección es una solución común; el profesor nuevamente intervino para remarcar el comentario.

Para la segunda parte de la sesión, que duró alrededor de cuarenta minutos, se dio un tiempo de descanso mientras el profesor borraba el pizarrón, antes de dar la indicación de comentar en equipo los incisos F y G del problema.

En esta ocasión, se observó que los alumnos se mantuvieron tranquilos y trabajando en silencio o hablando en voz baja, algunos bostezaron.

El grupo terminó el trabajo rápidamente y dos alumnos, representando equipos diferentes, expusieron sus conclusiones. Para un sistema sin solución, la propuesta fueron dos rectas paralelas, para un sistema con infinitas soluciones, se propuso "una parábola".

Todos coincidieron en que las repuestas eran correctas, por lo que el profesor pidió que se leyera nuevamente el enunciado para la última parte del Problema 3. Al terminar la lectura, un alumno mencionó que se solicitaba una recta, por lo que la propuesta de la parábola era incorrecta y poco después otro estudiante comentó que debía ser "la misma recta".

Se realizó una breve discusión en torno a esta última propuesta, ya que otro equipo comentó que las rectas debían ser perpendiculares. El profesor escribió la propuesta y un alumno dijo que podían "despejar la *y*" para comparar las ecuaciones, al hacer esto, pudo notarse que en la propuesta de las rectas perpendiculares se había omitido un signo negativo, por lo que esta respuesta no era correcta. Con estas conclusiones finalizó la sesión.

4.1.1.9 Sesión 9

Resumen de ideas y conceptos (21 de febrero, 1 hora)

Se eligió a un alumno al azar para retomar las ideas de la sesión anterior y luego el profesor escribió en el pizarrón los pares de ecuaciones propuestos en dicha sesión, para que los estudiantes los observaran y comentaran semejanzas y diferencias entre ellos, además de agregar algunas otras propuestas escritas en las hojas de trabajo que habían entregado.

Se escribieron en el pizarrón las semejanzas y diferencias entre los pares de ecuaciones comentadas por los estudiantes. Reunida esta información, se preguntó al grupo: ¿cuál es la solución al sistema que plantearon en cada inciso del Problema 3?

Dado que los alumnos no respondieron, el profesor apoyó enlistando las conclusiones obtenidas con cada uno de los problemas resueltos y dio tiempo a los alumnos para que meditaran la respuesta. Se realizó también la pregunta ¿cuál y qué es la solución a un sistema de ecuaciones?

Se hicieron sugerencias repitiendo ideas anteriores, por ejemplo, que “es la solución que tienen en común ambas rectas”. Al no obtener otros comentarios, el profesor preguntó directamente si el punto de intersección entre cada par de rectas es la solución, los alumnos contestaron afirmativamente, aunque no comentaron nada más.

A continuación, el profesor retomó las últimas soluciones y la lista de semejanzas y diferencias para dar una explicación sobre los sistemas de ecuaciones con diferentes cantidades de soluciones. Finalizó la sesión con un ejercicio referente a la resolución de sistemas de ecuaciones y determinar la cantidad de soluciones.

4.1.1.10 Sesión 10

Aplicación de prueba final (25 de febrero)

Se aplicó la prueba final, en una hora, la primera mitad de la clase.

Para el Problema 3

Al empezar a resolver este problema, en la parte A y B, los alumnos identificaron correctamente la incógnita y la mayoría de los datos proporcionados, ya que hubo alumnos que omitieron la recta dato en la parte B. Nuevamente, hubo pocas o muy pobres descripciones de los procedimientos o estrategias seguidos.

Solo un alumno continuó escribiendo estos tres elementos para las partes posteriores del problema, los demás los omitieron a pesar de que era algo que se solicitaba explícitamente en las instrucciones de sus hojas de trabajo.

Cuando se resolvió este problema, los alumnos ya estaban familiarizados con la dinámica de trabajo. Sin embargo, esto trajo la desventaja de que hubo mucho más intercambio de ideas en la etapa del trabajo individual y muchas respuestas escritas en las hojas de trabajo fueron parecidas entre sí.

También se notó que algunos alumnos ya iban predispuestos a encontrar más de una solución; al hablar con ellos mientras trabajaban, mencionaban que había muchas respuestas, pero colocaron, como ejemplo, solamente la que más les gustó; por mencionar una, en la parte C, fue prácticamente unánime la opinión de que había varias intersecciones posibles y, por tanto, muchos puntos solución. Además:

- Se continuaron utilizando, en general, intersecciones en valores enteros.
- El grupo siguió sin aceptar completamente el evaluar las respuestas de sus compañeros, esperando a que el profesor diera también su opinión.
- Casi no se expresaron dudas para discutirlas con el grupo, a pesar de que la existencia de estas se reflejaba al hacer una pregunta directa a algún alumno.
- En general, se consideraba que, para tener una ecuación, debía tenerse una expresión igualada a cero, por lo que hubo una discusión en torno a este punto.
- Nuevamente surgió la inquietud sobre cuál era el punto medio de una recta. Un argumento al respecto fue que “no se sabe dónde empieza y donde termina la recta”. No se llegó a una conclusión grupal debido a falta de tiempo y participación.
- El profesor tuvo que recordar que se trabajaba con sistemas de ecuaciones expresados en forma gráfica, para que un alumno aportara que el punto de intersección era un resultado del sistema.

- Nuevamente, los alumnos no lograron enlazar todas las ideas, especialmente las analizadas en los problemas anteriores, por ejemplo, retomar que cada punto de la gráfica aporta una solución a una ecuación de dos variables.

Sobre las dos últimas partes del problema, debido al tiempo disponible, tuvieron que dejarse como tarea individual, para luego comentarse durante las sesiones. Destaca que:

- El grupo estuvo de acuerdo con la conclusión de que, para un sistema sin solución, donde no hay intersección, las rectas deben ser paralelas.
- En cuanto a las ecuaciones, los alumnos notaron que la razón de cambio en rectas paralelas es la misma y que cambia la ordenada al origen (al acomodar las ecuaciones en la forma $y = mx + b$, con m la razón de cambio y b la ordenada al origen); además de enfatizar que “la *y* está despejada” y que “las dos pasan sobre el eje *y*”.
- Para los sistemas con infinitas soluciones, se llegó a la conclusión de que se trabajaba con la misma recta, pero hubo discrepancia respecto a las características de la ecuación debido a errores al trabajar con números negativos.
- El ambiente durante las discusiones se mantuvo con cierto desorden, donde algunos alumnos comentaban con quien tenían más cerca sus respuestas a las preguntas realizadas por el profesor.

En las primeras partes de este problema, los alumnos propusieron varias soluciones correctas y quedaron satisfechos con ellas. Sin embargo, las dificultades para plantear ecuaciones se sumaron a que los alumnos ya no recordaban o no consideraron pertinente utilizar las conclusiones obtenidas en sesiones anteriores, con lo que fue muy difícil llegar a caracterizar los sistemas de ecuaciones y muchas veces el profesor tuvo que emplear preguntas guía demasiado directas para que el pensamiento de los alumnos se enfocara en el tema y decidieran participar.

Sin embargo, al analizar el problema 3 en lo referente a sistemas de ecuaciones incompatible y compatible indeterminado, muchos alumnos notaron que necesitaban rectas paralelas y rectas iguales, respectivamente, para cumplir con las condiciones del problema. Cuando estas ideas fueron compartidas al grupo, se concluyó que, efectivamente, eran correctas, por lo que pudo realizarse un resumen sobre los tipos de sistemas de ecuaciones, donde los alumnos aportaron la mayor parte de la síntesis de conceptos.

En general, aunque se obtuvieron conclusiones acertadas y valiosas en todas las sesiones, los alumnos, a nivel grupo, no lograron integrar todos los conceptos ideas, las reconocían en lo particular, pero no lograron utilizarlas posteriormente. Recordar las ideas previas al inicio de las sesiones no fue suficiente para lograr la integración. Por ejemplo, los alumnos no relacionaron el punto de intersección con la solución al sistema de ecuaciones en su forma gráfica ni algebraica, sino que tendieron a verlos como dos cosas diferentes.

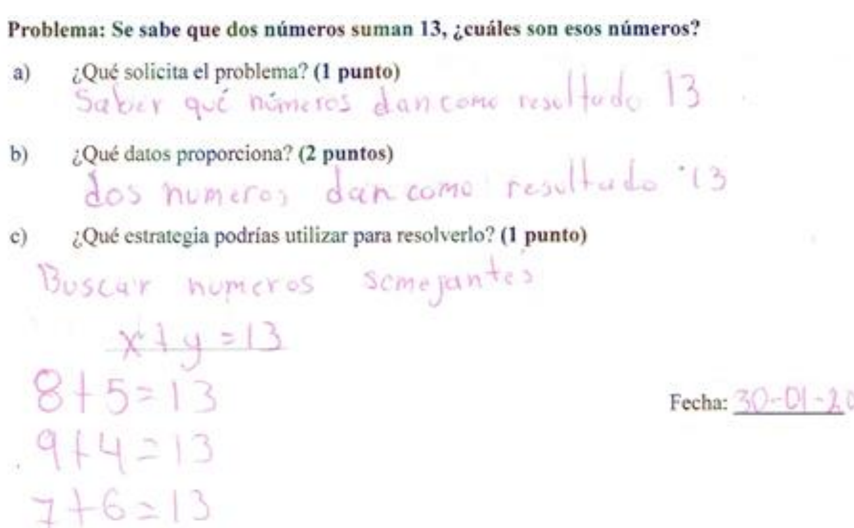
4.1.1.10.1 Soluciones propuestas a los problemas

Problema 1

Dada la concepción sobre “problema” que se toma en cuenta para este trabajo (ver sección 2.2.1 Definición de problema matemático), el denominado “Problema 1”, que se ocupó como introducción al tema, no fue tal, ya que no requirió de una reflexión fuera de lo rutinario para los alumnos, y varios lo expresaron así, comentando que la respuesta era algo “obvio” o “muy fácil”.

Sin embargo, algunos alumnos buscaron, además de la primera solución en la que pensaron, otras que “se salieran de lo común”, es decir, que no emplearan números enteros pequeños. Siete alumnos (29.2%) propusieron una ecuación que les representara todas las soluciones posibles, además de presentar ejemplos particulares (ver Figura 18). Dos alumnos más incluyeron la suma con números negativos (siguiendo el orden $-a+b$, con $a, b \in$ N) y uno más propuso una suma con decimales.

Figura 18. *Respuesta al Problema 1a. Propuesta de generalización.*



Problema: Se sabe que dos números suman 13, ¿cuáles son esos números?

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**
Saber qué números dan como resultado 13

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**
dos numeros dan como resultado 13

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**
Buscar numeros semejantes

$x+y=13$

$8+5=13$

$9+4=13$

$7+6=13$

Fecha: 30-01-20

Según la clasificación que se propuso para las respuestas de los alumnos y que se detalla en el Anexo 4 Soluciones a los problemas, se obtuvieron los resultados resumidos en la Tabla 3 y la Gráfica 1.

Tabla 3. *Clasificación de respuestas para el Problema 1, primera parte.*

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES
Números naturales	17 alumnos (70.8%) propusieron entre uno y doce ejemplos sumando números naturales, ninguno utilizó el cero. De los cuales, ocho propusieron únicamente respuestas de este tipo.
Números enteros negativos	Cinco alumnos (20.8%) propusieron entre uno y cuatro ejemplos, todos colocando el número negativo en primer lugar. Todos dieron, además, al menos una respuesta en otra categoría.
Números reales no enteros	Solo un alumno propuso siete ejemplos con números decimales (ver Figura 19), aunque todos con parte decimal 5, (por ejemplo 12.5+0.5). Fue el único con propuestas en todas las categorías.
Representaciones generales	Ocho alumnos (33.3%) plantearon la ecuación $x + y = 13$, argumentando que podían usar cualquier par de números que cumplieran con la suma. Uno de ellos lo propuso como $a + b = 13$ Un estudiante más indicó que podía elegir cualquier número y luego plantear una ecuación de la forma: $7 + x = 13$, para determinar el otro número (x).
	Tres alumnos (12.5%) comentaron que podían dar cualquier par de números que cumplieran la condición, sin plantear ecuaciones. Se consideran aquí por haber podido “ver” la generalización, aunque no la escribieran en lenguaje algebraico.

Gráfica 1. *Clasificación de respuestas para el Problema 1 (primera parte)*

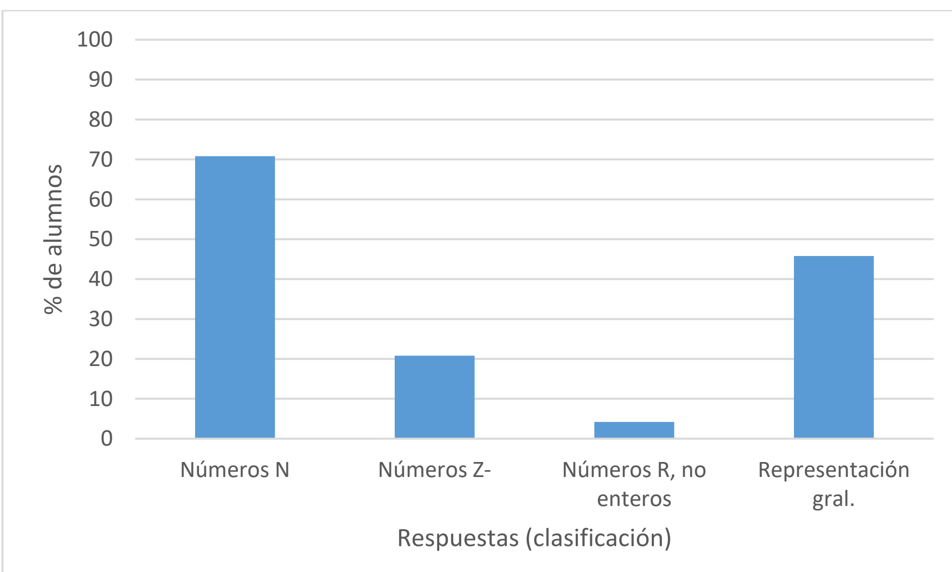
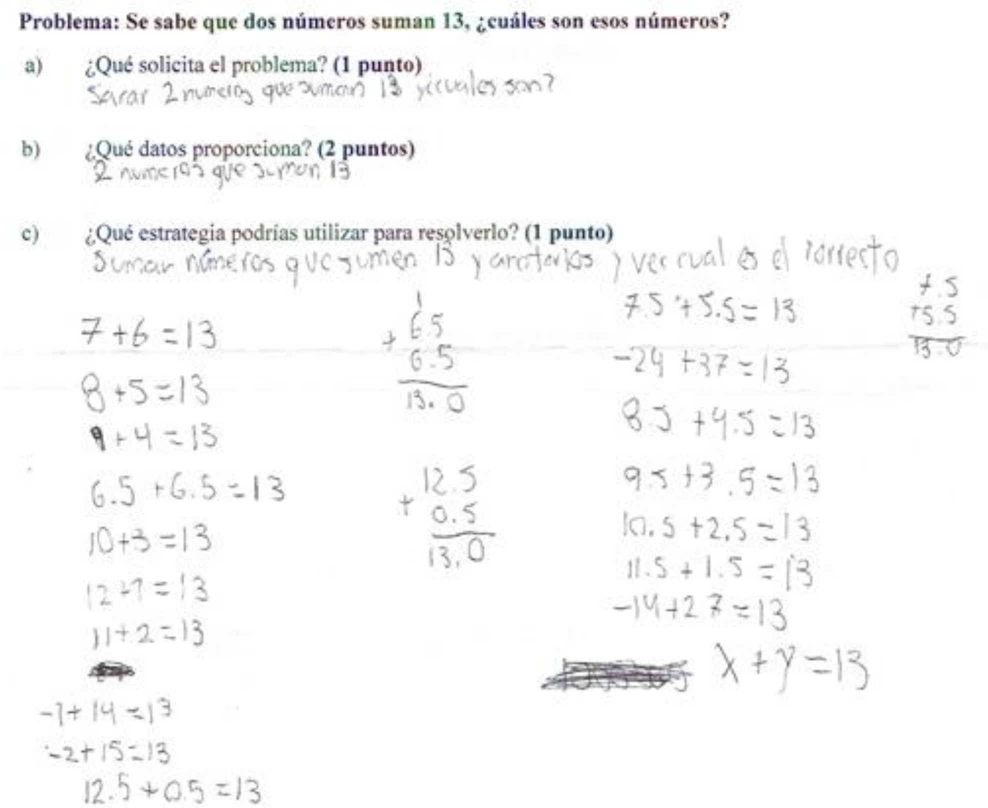


Figura 19. *Propuesta de solución al Problema 1a, incluyendo números decimales.*



Problema: Se sabe que dos números suman 13, ¿cuáles son esos números?

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**
Sacar 2 numeros que suman 13 y cuales son?

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**
2 numeros que suman 13

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**
Sumar números que sumen 13 y anotarlos y ver cual es el correcto

7 + 6 = 13
8 + 5 = 13
9 + 4 = 13
6.5 + 6.5 = 13
10 + 3 = 13
12 + 1 = 13
11 + 2 = 13
-1 + 14 = 13
-2 + 15 = 13
12.5 + 0.5 = 13

6.5 + 6.5 = 13.0
12.5 + 0.5 = 13.0

7.5 + 5.5 = 13
-24 + 37 = 13
8.5 + 4.5 = 13
9.5 + 3.5 = 13
10.5 + 2.5 = 13
11.5 + 1.5 = 13
-14 + 27 = 13
x + y = 13

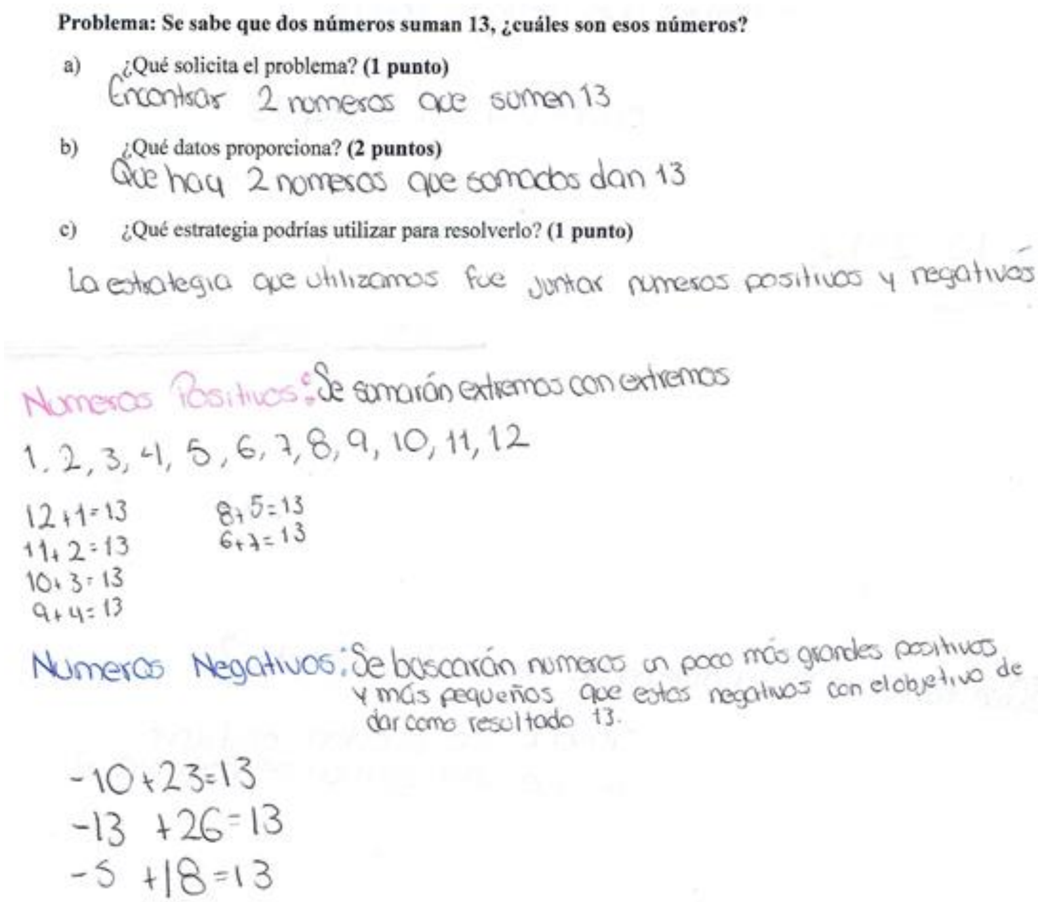
7.5 + 5.5 = 13.0

Adicionalmente, se observó que 6 alumnos (25%) no proporcionaron más de una respuesta.

En cuanto a las conclusiones por equipo, que en total fueron seis, se tiene que:

- Tres equipos proporcionaron una representación algebraica general y ejemplos en números naturales.
- Un equipo mostró ejemplos con números naturales y enteros negativos (ver Figura 20).
- Un equipo dio respuestas en todas las categorías (en el cual estuvo el alumno con esta misma característica).
- Un equipo solo dio respuestas con números naturales.

Figura 20. *Respuestas por equipo al Problema 1a, incluyendo números negativos*


Problema: Se sabe que dos números suman 13, ¿cuáles son esos números?

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**

Encontrar 2 numeros que sumen 13

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**

Que hay 2 numeros que sumados dan 13

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**

La estrategia que utilizamos fue juntar numeros positivos y negativos

Numeros Positivos: Se sumarán extremos con extremos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

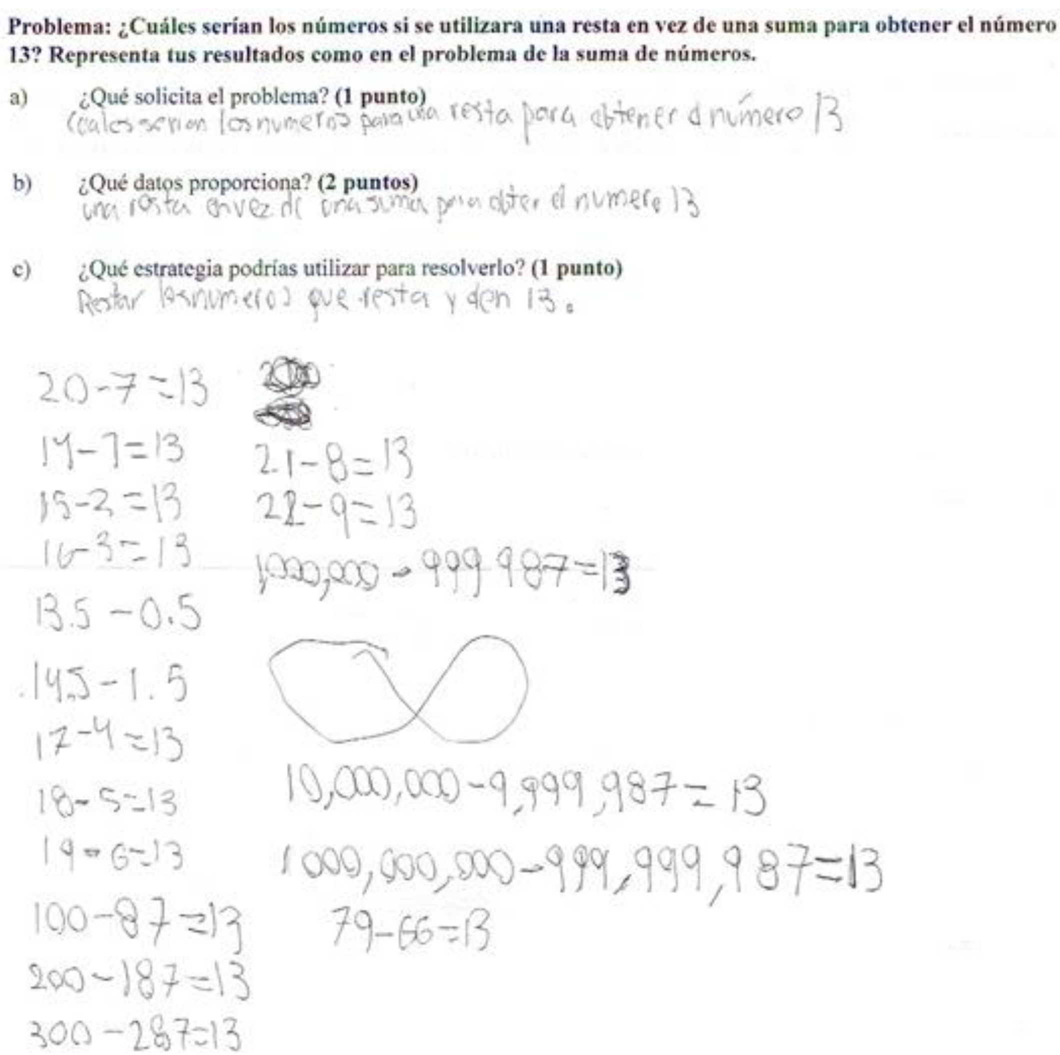
12+1=13
11+2=13
10+3=13
9+4=13
8+5=13
6+7=13

Numeros Negativos: Se buscarán numeros un poco más grandes positivos y más pequeños que estos negativos con el objetivo de dar como resultado 13.

-10+23=13
-13+26=13
-5+18=13

Para la segunda parte de este problema, los alumnos presentaron menos variedad de respuestas. Un alumno propuso 18 restas diferentes, 16 con números naturales y dos incluyendo decimales (ver Figura 21). Nueve más (37.5%) propusieron soluciones con números enteros y una solución general.

Figura 21. *Propuesta de solución para el problema 1b.*



Problema: ¿Cuáles serían los números si se utilizara una resta en vez de una suma para obtener el número 13? Representa tus resultados como en el problema de la suma de números.

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**
Cuales serian los numeros para una resta para obtener el número 13

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**
una resta envez de una suma para obter el numero 13

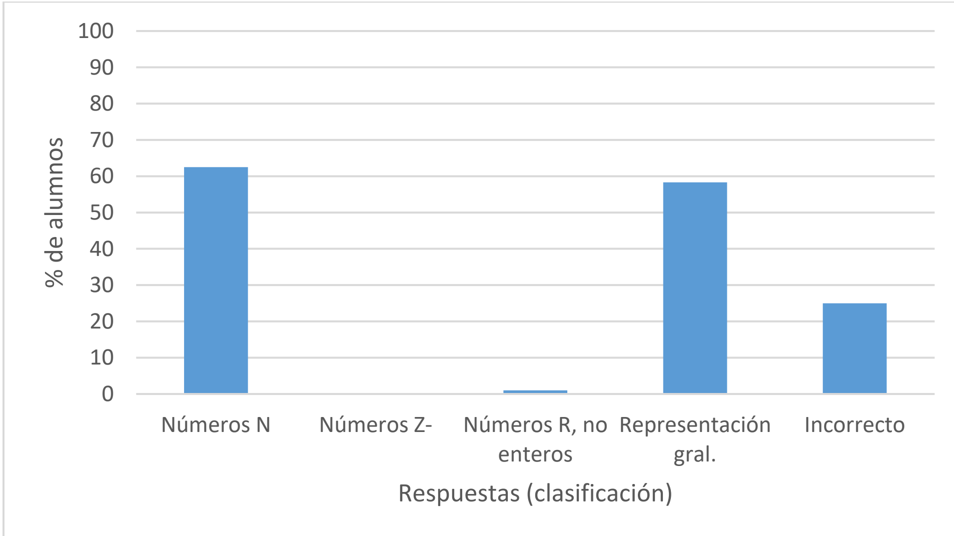
c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**
Restar los numeros que resta y den 13.

20-7=13
14-1=13
15-2=13
16-3=13
13.5-0.5
14.5-1.5
17-4=13
18-5=13
19-6=13
100-87=13
200-187=13
300-287=13
21-8=13
22-9=13
1,000,000-999,987=13
10,000,000-9,999,987=13
1,000,000,000-999,999,987=13
79-66=13

Seis alumnos (25%) plantearon mal su respuesta, al escribir de forma incorrecta su ecuación representativa; aunque uno de ellos expresó que dicha ecuación era la misma que para la parte A del problema, pero sin especificar la necesidad de un número negativo, dando como ejemplo $-12+26$.

Tres alumnos (12.5%), proporcionaron solamente restas con números naturales, y los demás (20.8%) únicamente una solución general. De entre todos los alumnos que indicaron una solución general, tres de ellos no escribieron una ecuación, sino que lo mencionaron en sus escritos. Estos resultados se resumen en la Gráfica 2.

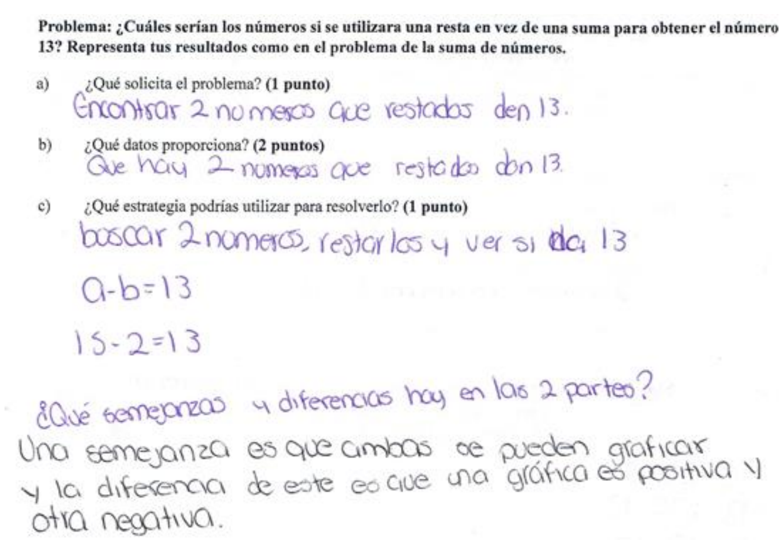
Gráfica 2. Clasificación de respuestas al Problema 1 (segunda parte)



En cuanto al trabajo en grupos pequeños, se observó que la mitad de los equipos proporcionó tanto ejemplos con números naturales como una representación general. Dos solo aportaron su representación general y uno solo operaciones con números naturales.

La representación general que utilizaron tres equipos fue $x - y = 13$; mientras que de los otros dos uno escribió $y - x = 13$, y el otro $a - b = 13$ (ver Figura 22), lo cual condujo a una discusión en torno a cómo trazar sus gráficas a partir de estas ecuaciones y porqué al obtener su punto de intersección con lo establecido en la parte A del problema, había dos respuestas diferentes (ver Figura 23).

Figura 22. *Conclusión por equipo, para el Problema 1b.*



Problema: ¿Cuáles serían los números si se utilizara una resta en vez de una suma para obtener el número 13? Representa tus resultados como en el problema de la suma de números.

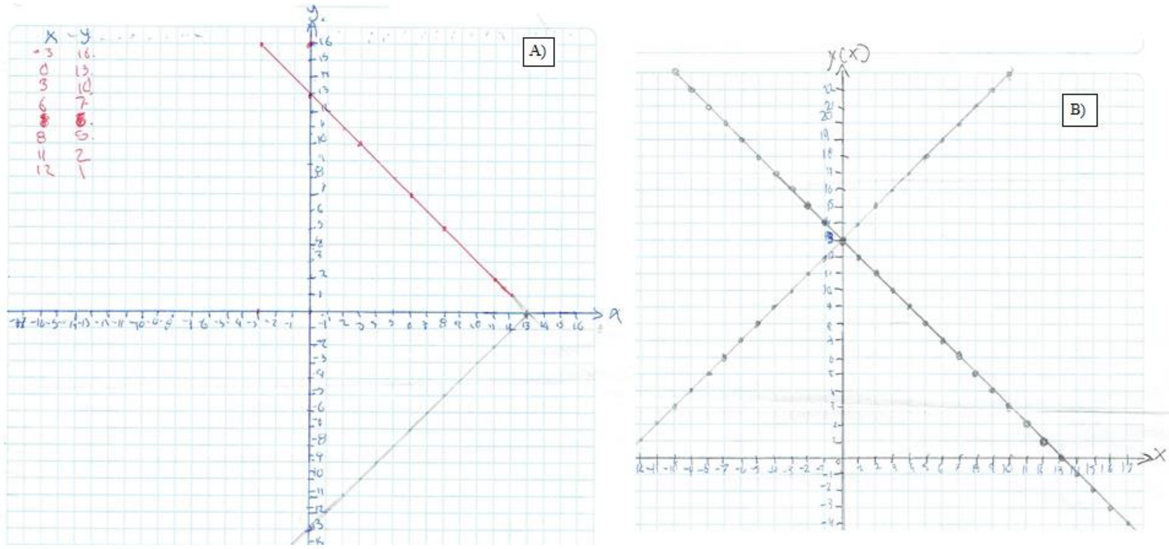
a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**
Encontrar 2 numeros que restados den 13.

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**
Que hay 2 numeros que restados dan 13.

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**
buscar 2 numeros, restarlos y ver si da 13
a-b=13
15-2=13

¿Qué semejanzas y diferencias hay en las 2 partes?
Una semejanza es que ambas se pueden graficar y la diferencia de este es que una gráfica es positiva y otra negativa.

Figura 23. *Propuestas para representar el Problema 1 en un mismo plano cartesiano.*
A) Con $x - y = 13$*; B) Con* $y - x = 13$*.*



Problema 2

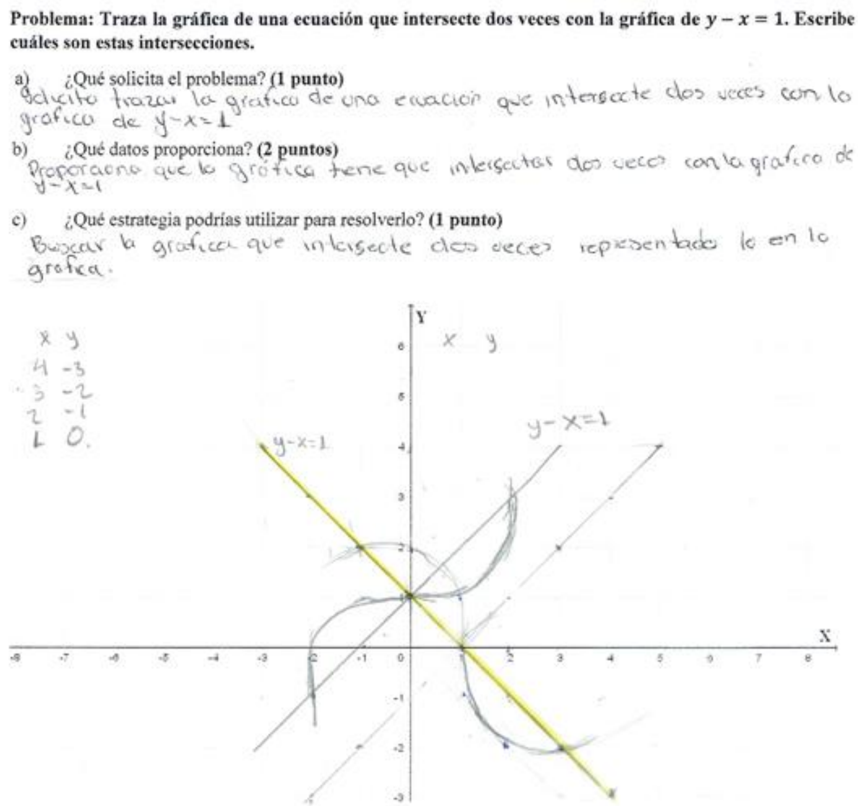
El objetivo principal de este problema fue desarrollar el concepto general de sistema de ecuaciones, a partir de la representación gráfica, y fue resuelto después de trabajar con diversas gráficas y tablas, identificando sus puntos de intersección.

Sobre la actividad con gráficas, se observó que la mayoría de los alumnos dejaron de lado las tablas y prefirieron manipular las gráficas. Al preguntarles sobre la cantidad de puntos de intersección que encontraron, los alumnos comentaron que podía haber más de uno.

Un alumno aportó que las tablas también eran útiles para encontrar los puntos de intersección. Siguiendo esta idea, se llegó a la conclusión de que en las tablas se podían localizar y comprobar las coordenadas de los puntos, y que “las gráficas son engañosas” pues los puntos pueden estar muy cerca de los números enteros y por el trazo no notarse el valor exacto de las coordenadas.

Para el Problema 2, cuatro alumnos (16.7%) obtuvieron una solución correcta; seis más (25%) plantearon correctamente su solución, pero trazaron mal su gráfica dato (ver Figura 24). Nueve alumnos propusieron como resultado dos rectas paralelas (ver Figura 25).

Figura 24. *Propuesta de solución para el Problema 2.*



Problema: Traza la gráfica de una ecuación que intersecte dos veces con la gráfica de $y - x = 1$. Escribe cuáles son estas intersecciones.

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**

Solicita trazar la grafica de una ecuacion que intersecte dos veces con la grafica de y-x=1

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**

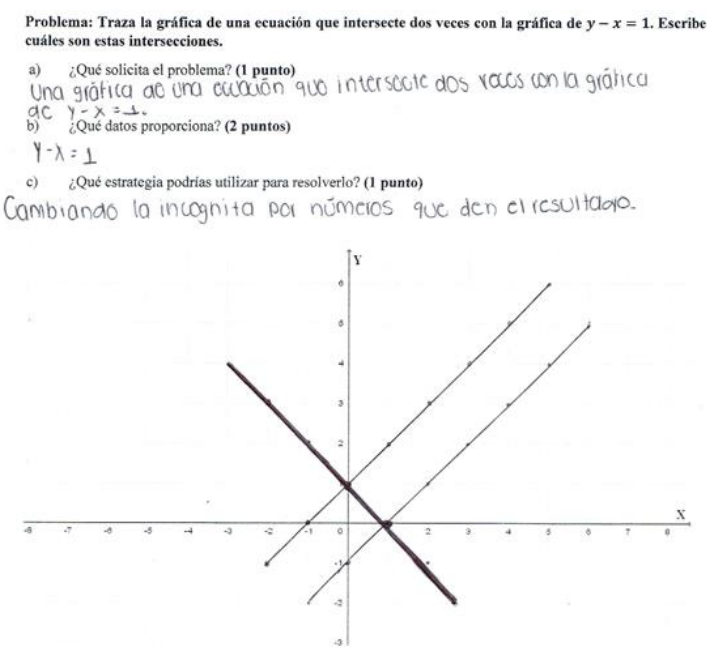
Proporciona que la gráfica tiene que intersectar dos veces con la gráfica de y-x=1

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**

Buscar la grafica que intersecte dos veces representando lo en la grafica.

Nota: La recta dato está remarcada con amarillo y fue posteriormente corregida por el alumno.

Figura 25. *Propuesta de solución errónea para el Problema 2.*



Problema: Traza la gráfica de una ecuación que intersecte dos veces con la gráfica de $y - x = 1$. Escribe cuáles son estas intersecciones.

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**

Una gráfica de una ecuación que intersecte dos veces con la gráfica de y-x=1.

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**

Y-X=1

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**

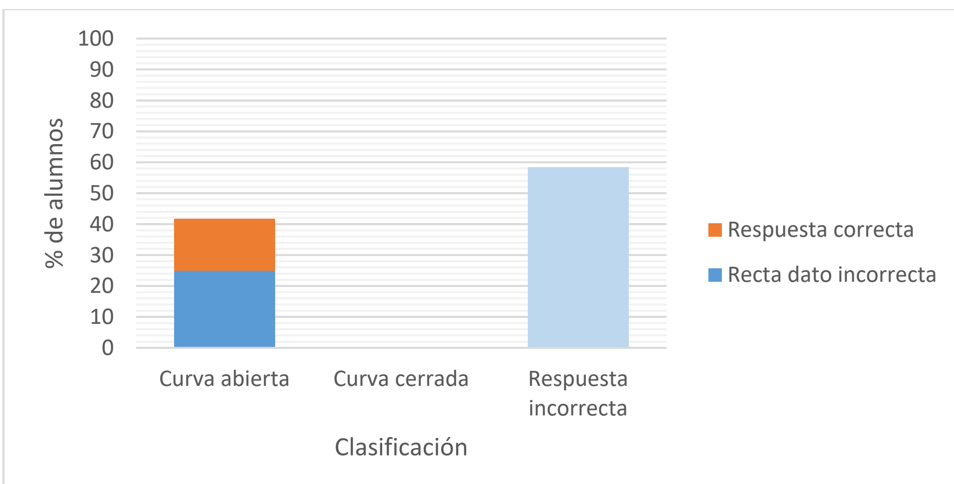
Cambiando la incognita por números que den el resultado.

Según la clasificación para las respuestas de los alumnos (detallada en el Anexo 4 Soluciones a los problemas), se obtuvieron los siguientes resultados (ver Tabla 4 y Gráfica 3). Cabe mencionar que se incluyen los alumnos cuya gráfica dato fue mal trazada, ya que se consideró que cumplen con trazar una curva que interseca dos o más veces a una recta, que es lo que solicitaba el problema. Los porcentajes son relativos al total de alumnos.

Tabla 4. *Clasificación de respuestas para el Problema 2.*

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES
Formas geométricas definidas.	Alumnos con respuesta correcta: 4 (16.7%) propusieron curvas semejantes a parábolas. Alumnos con gráfica dato incorrecta: Seis alumnos se encuentran en esta categoría, tres de ellos (25%) presentaron curvas semejantes a parábolas; los otros tres trazaron curvas semejantes a funciones polinomiales.
Formas indefinidas.	Ningún alumno presentó alguna respuesta de este tipo.
Respuestas incorrectas.	Catorce alumnos (58.3%) no propusieron una respuesta correcta, de ellos, nueve alumnos presentaron dos rectas paralelas.

Gráfica 3. *Clasificación de respuestas para el Problema 2*

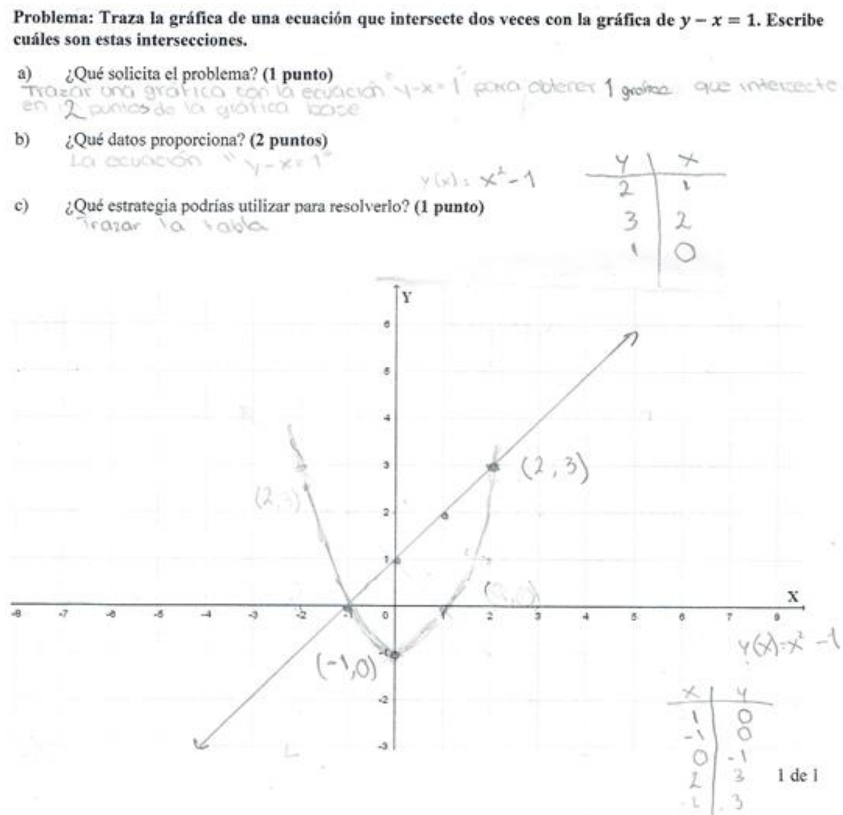


Nota: Fuente Tabla 4.

En cuanto al trabajo en equipo, dos concluyeron que para resolver había que usar una gráfica que no fuera una línea recta, por ejemplo, utilizando una parábola (ver Figura 26). Uno proporcionó los puntos de intersección, indicando que eran valores aproximados.

De los equipos restantes, en dos se marcó mal la recta dato, pero bosquejaron curvas que intersecaban más de una vez. En los otros dos la respuesta fueron dos rectas paralelas, a pesar de que en ambos equipos hubo un alumno que esbozó una solución correcta.

Figura 26. *Conclusión por equipo para el Problema 2.*



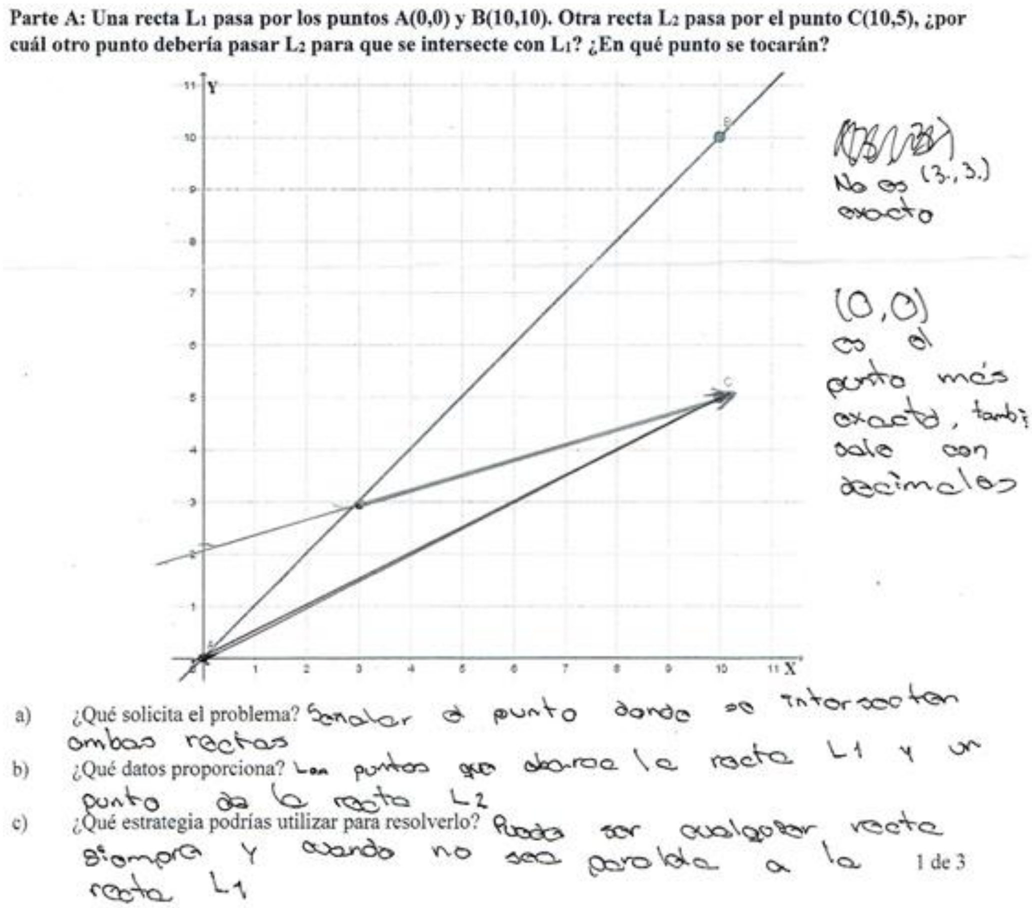
Problema 3

Con este problema se pretendía cubrir el aprendizaje y el tema en sí sobre sistemas de ecuaciones de orden dos por dos, ya que los anteriores fueron para introducir conceptos de manera general.

La parte A fue respondida de forma incorrecta por seis estudiantes (25%), tres de los cuales solamente marcaron un punto, pero sin proporcionar la respuesta como tal. Dos más dibujaron curvas, y el restante comentó que la única recta que interseca es la misma que se proporciona como dato.

En cuanto a las respuestas correctas, se proporcionaron máximo diez, aunque de un mismo tipo según la clasificación mostrada en el Anexo 4 Soluciones a los problemas; mientras que la mayor diversidad de respuestas fue de dos. Cabe mencionar que un alumno comentó que la respuesta “puede ser cualquier recta siempre y cuando no sea paralela a la recta L_1”, e incluyó dos ejemplos, donde también especificó que las coordenadas del punto de intersección no eran exactas debido a los decimales (ver Figura 26).

Figura 27. *Propuesta de soluciones al Problema 3a.*

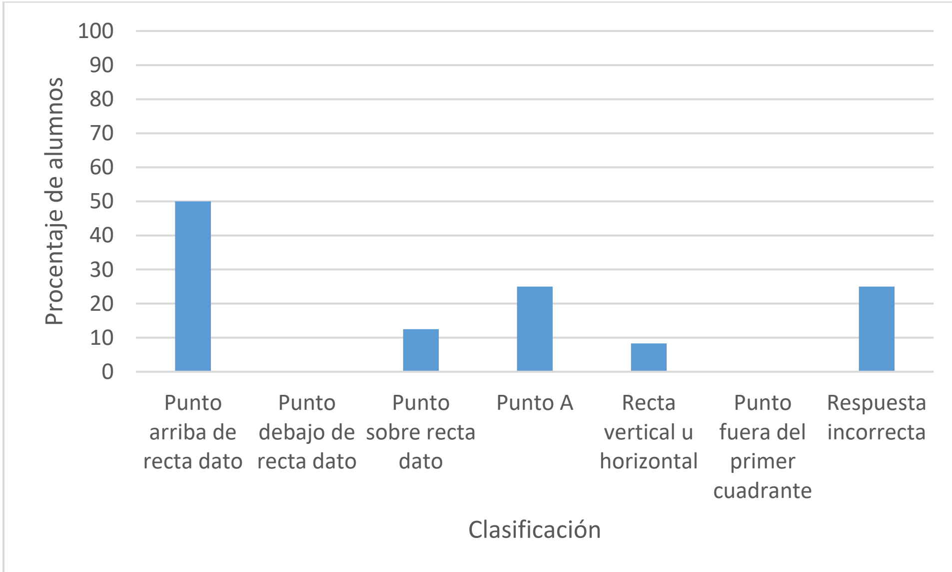


Doce alumnos (50%) proporcionaron al menos una respuesta colocando el segundo punto de la recta solución arriba de la recta dato; tres más (12.5%), lo colocaron coincidente con la recta dato (es decir, marcaron directamente su punto de intersección); seis estudiantes (25%) utilizaron el punto A; y dos propusieron una recta horizontal (ver Gráfica 4).

Cabe mencionar que siete alumnos (29.2%) no mostraron el punto de intersección, y otros forzaron que la coordenada estuviera dada en enteros, remarcando mucho su recta o pasando por alto las fracciones de unidad.

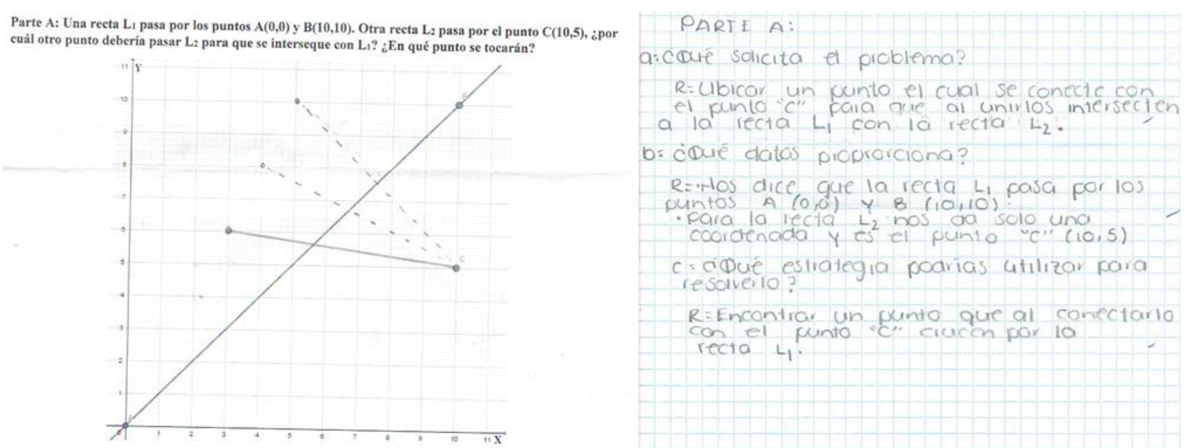
Los resultados se resumen en la Gráfica 4.

Gráfica 4. Clasificación de respuestas para el Problema 3A



Dos equipos concluyeron que la solución era colocar su segundo punto arriba de la recta dato, y uno de ellos reportó tres soluciones diferentes; otro más colocó el punto sobre la recta dato; y los tres restantes utilizaron el punto A, aunque dos de ellos no indicaron el punto de intersección (ver Figura 28).

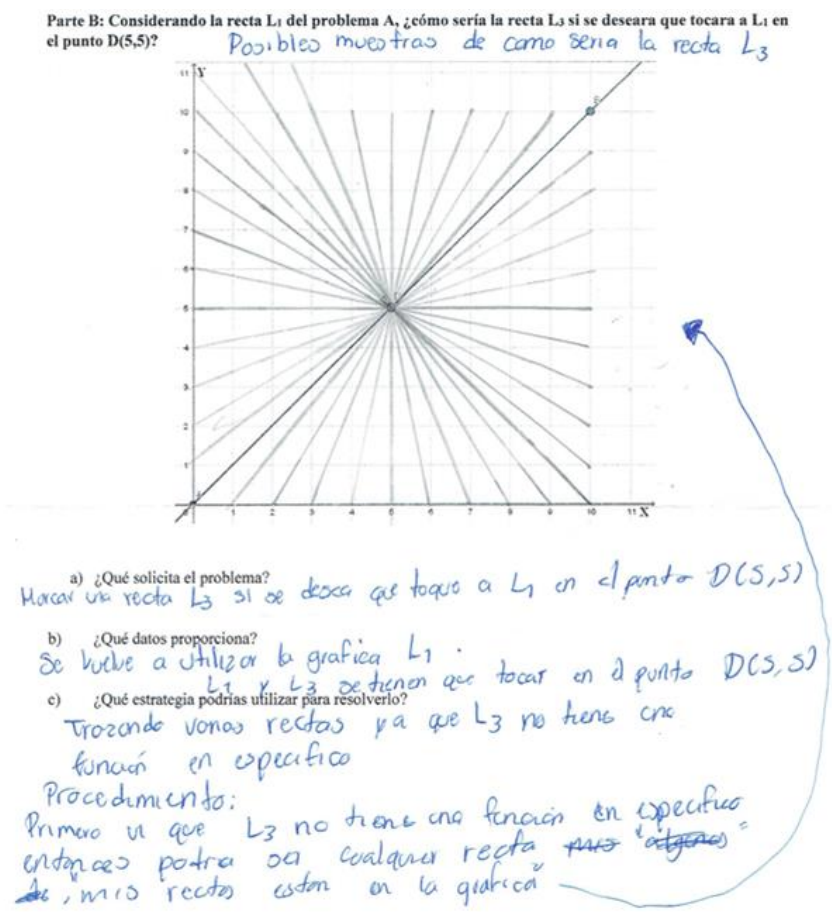
Figura 28. *Solución propuesta por un equipo al Problema 3a.*



En cuanto a la parte B, el máximo de respuestas diferentes fue quince, repartidas entre los tres tipos mostrados en la clasificación detallada en el Anexo 4 Soluciones a los problemas y fueron propuestas por un alumno que también indicó que solo colocaba una muestra de las respuestas posibles (ver Figura 29); uno más comentó que la recta solución puede "pasar por donde sea", refiriéndose a que podía utilizar cualquier punto sobre el plano cartesiano para trazar su respuesta (explicación obtenida al interrogar al alumno).

Cuatro estudiantes más (16.7%) también propusieron varias respuestas, tres de ellos unieron el punto D con algún otro propuesto por ellos, pasando por alto el hecho de que sus trazos solo eran segmentos de recta.

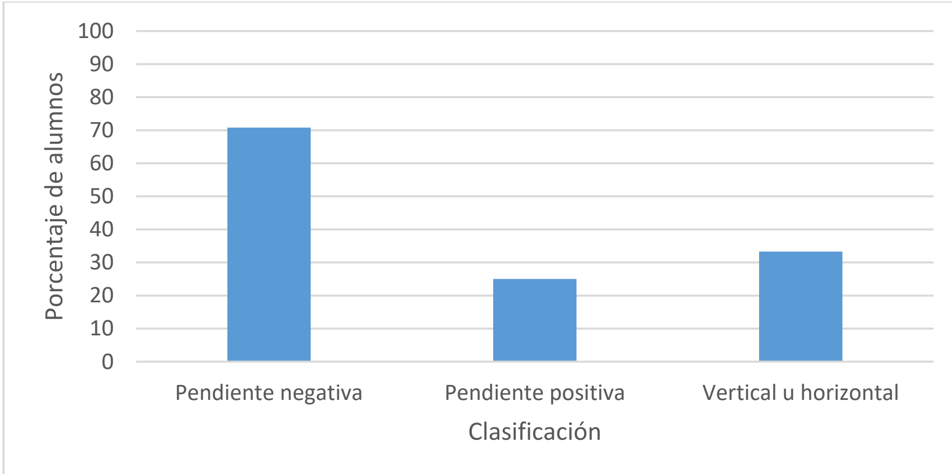
Figura 29. *Propuesta de soluciones para el Problema 3b.*



Un alumno más propuso que la recta L_3 podía ser igual a L_1, ya que también pasaba por el punto D, independientemente de que también pasara sobre todos los demás puntos. Su respuesta no había sido considerada dentro de la clasificación propuesta, pero fue comentada brevemente con el grupo, como introducción a las partes F y G del problema, relacionadas con sistemas con infinidad de soluciones.

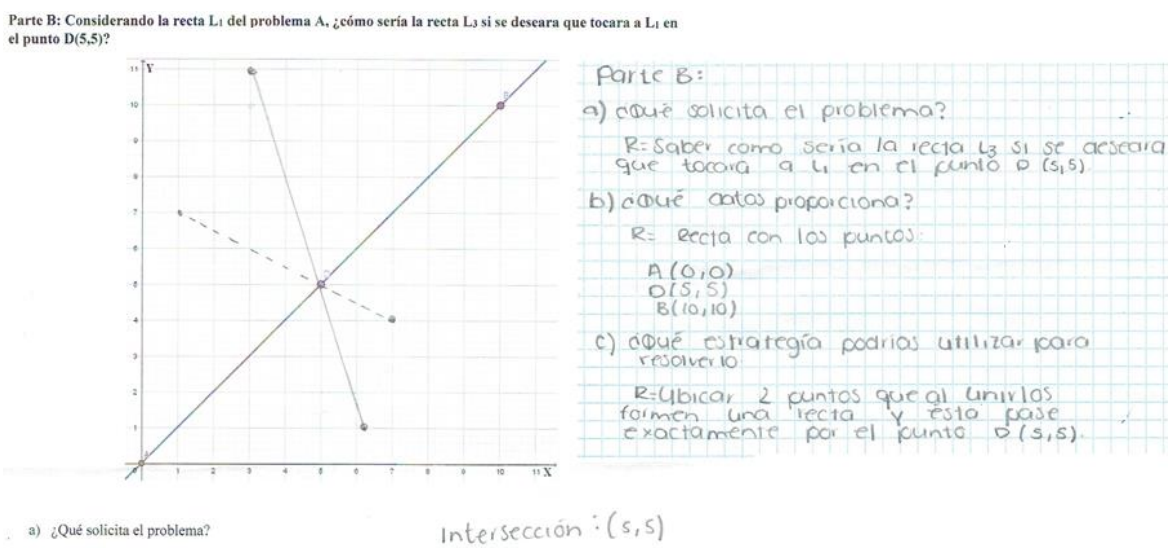
Diecisiete estudiantes (70.8%) presentaron al menos una solución con una recta de pendiente negativa; seis más (25%) trazaron al menos una recta con pendiente positiva; y ocho (33.3%) una recta horizontal o vertical. Estos resultados se resumen en la Gráfica 5.

Gráfica 5. *Clasificación de respuestas para el Problema 3B*



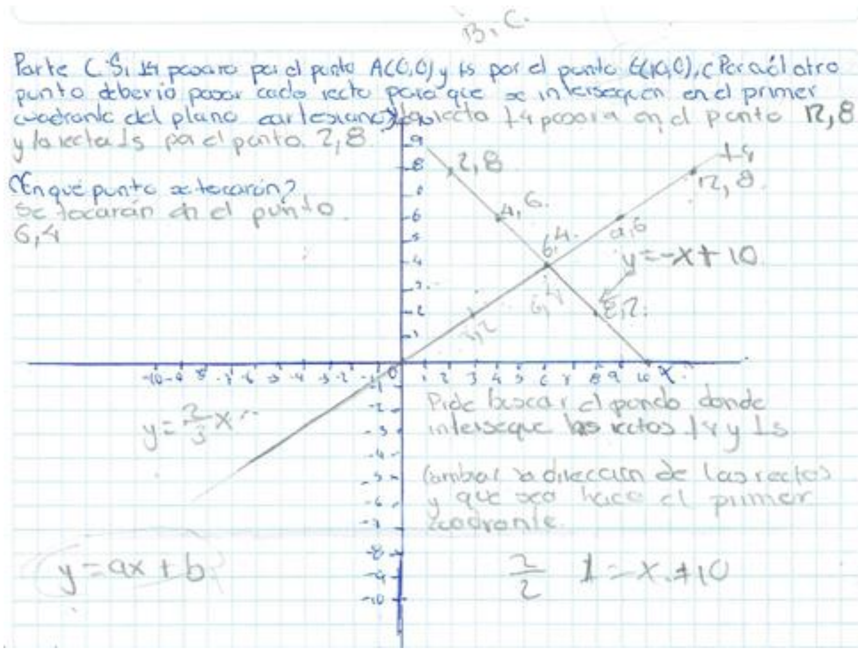
En este caso, cinco equipos presentaron como conclusión al menos una recta con pendiente negativa (ver Figura 30), uno de ellos mostró soluciones en las tres categorías, y fue aquel donde se encontraba el alumno cuyas respuestas tenían esta misma característica; otro de estos equipos mencionó que podían trazar cualquier recta, pero que no podía ser paralela a L_1. Un tercer equipo propuso una recta con pendiente positiva.

Figura 30. *Conclusión de un equipo para el Problema 3.*



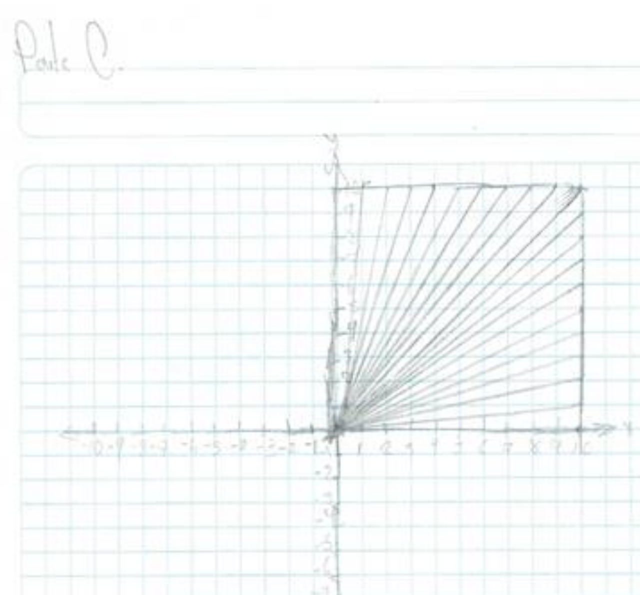
Para la parte C del problema, todos los alumnos hicieron propuestas solamente dentro de una categoría de las indicadas en el Anexo 4 Soluciones a los problemas (ver Figura 31), y cuatro de ellos dieron más de una respuesta, dos de los cuales comentaron que había infinitas soluciones. Cabe mencionar que uno de estos alumnos permaneció constantemente proponiendo la existencia de muchas o infinitas soluciones.

Figura 31. *Propuesta de solución para el Problema 3c*



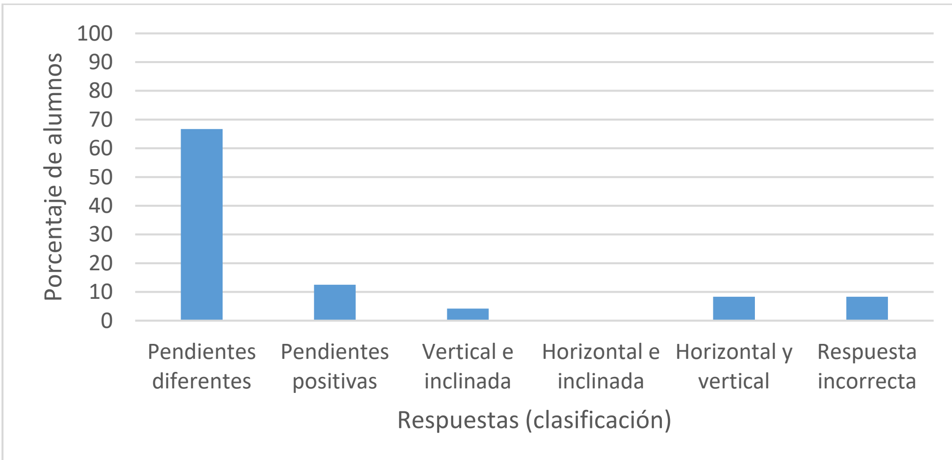
Dos alumnos respondieron de forma incorrecta. Uno de ellos trazó muchas rectas que pasaban por el origen (ver Figura 32), presentándolo como el punto de intersección; mientras que el otro trazó únicamente una recta y marcó un punto sobre ella. También un equipo concluyó en una respuesta errónea, trazando rectas que cambiaban de dirección, es decir, comenzaban con una pendiente positiva y en cierto punto la cambiaban para que llegara hasta el punto dato y viceversa.

Figura 32. *Propuesta errónea de solución para el Problema 3c.*



Sobre las respuestas, 16 alumnos (66.7%), trazaron rectas con pendientes diferentes; tres (12.5%) utilizaron dos rectas de pendiente positiva; uno utilizó una recta vertical, y mencionó que había muchas respuestas; los otros dos estudiantes (8.3%) unieron los dos puntos dato y argumentaron que había dos rectas superpuestas, por lo que se intersecaban en todos sus puntos. Estos resultados se resumen en la Gráfica 6:

Gráfica 6. *Clasificación de respuestas para el Problema 3C*



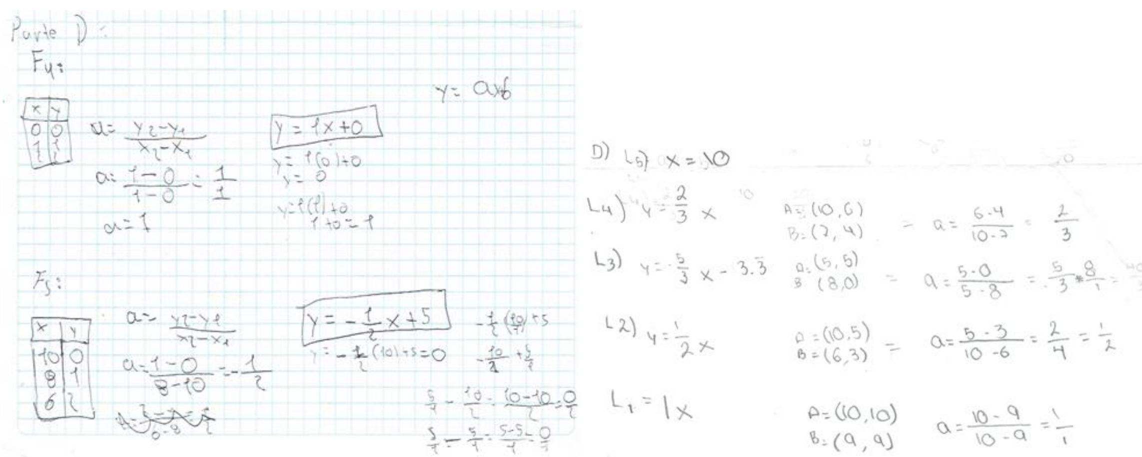
Los seis equipos presentaron respuestas con rectas de pendiente diferente (ver Figura 33), uno de ellos proporcionó tres respuestas y otro agregó que podía haber varias respuestas, acotando que la ordenada al origen de las rectas debía ser positiva.

Figura 33. *Conclusión de un equipo para el Problema 3c.*

En la parte D, que consistía en formular ecuaciones, hubo muchas dudas por parte de los alumnos, y fueron pocos los estudiantes que las plantearon correctamente (ver Figura 34), inclusive al trabajar en equipo. Solamente cuatro alumnos (16.7%) proporcionaron acertadamente sus ecuaciones, y de ellos, dos no completaron el trabajo.

En cuanto a las respuestas correctas, hubo cinco alumnos (20.8%) que plantearon al menos una ecuación correspondiente a una recta de pendiente negativa; seis (25%) con pendiente positiva; y uno para una recta vertical (ver Gráfica 7), categorías que se detallan en el Anexo 4 Soluciones a los problemas.

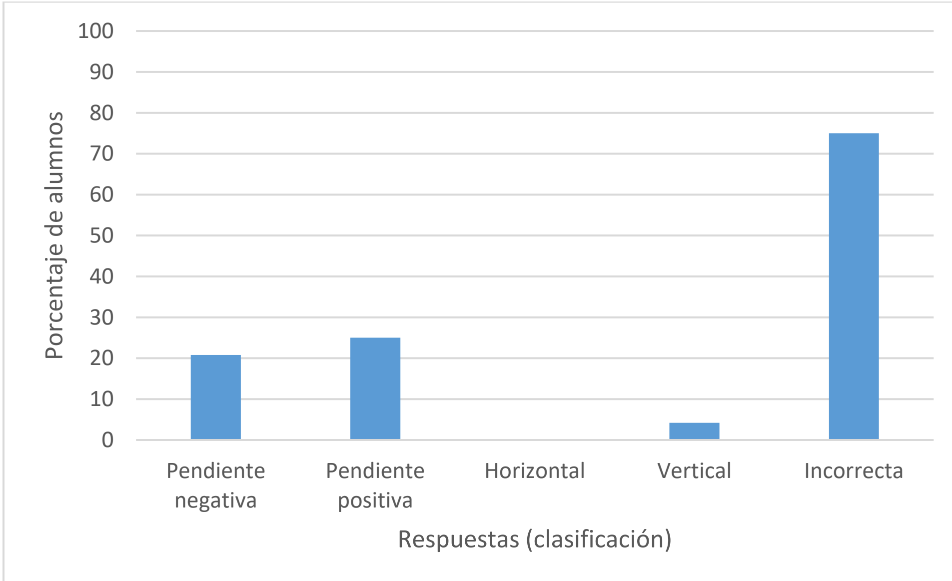
Figura 34. *Algunas ecuaciones para el Problema 3 D, de dos alumnos diferentes.*



De los 18 alumnos (75%) que propusieron al menos una respuesta errónea, 4 plantearon una función general ($f(x) = mx + b$); 10 tuvieron dificultades al calcular la ordenada al origen; uno propuso ecuaciones con una incógnita; otro confundió los valores de la pendiente y la ordenada al origen; y los dos restantes tuvieron errores al operar con signos negativos.

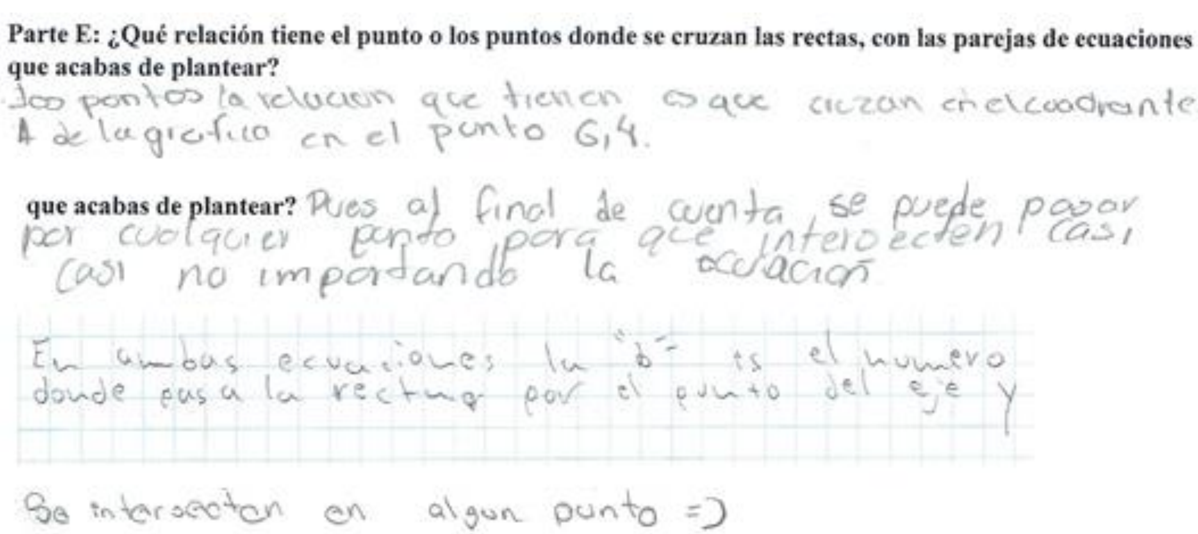
Respecto a los equipos, 4 presentaron al menos dos ecuaciones correctas, aunque ninguno completó las requeridas. Los errores ocurrieron al estimar coordenadas o la ordenada al origen en la gráfica, y al operar con números negativos. En cuanto a los equipos que no presentaron ninguna respuesta correcta, uno solo planteó que todas sus ecuaciones tenían la forma $f(x) = x + c$; y el otro únicamente calculó de forma correcta los valores de las pendientes.

Gráfica 7. *Clasificación de respuestas para el Problema 3D*



En cuanto a la parte E, ("¿Qué relación tiene el punto o los puntos donde se cruzan las rectas, con las parejas de ecuaciones que acabas de plantear?"), cinco alumnos (16.7%) expresaron una idea referente a que el punto de intersección es la solución a las dos ecuaciones. Cuatro más indicaron que el punto (o las coordenadas) se localizaban en el primer cuadrante; dos alumnos comentaron que los puntos de las gráficas pueden encontrarse en la ecuación; y el resto proporcionó respuestas diversas, alejadas del concepto sobre el que se pretendía reflexionar con esta pregunta, por ejemplo, comentando que pueden expresarse como funciones o que hay una intersección (ver Figura 35).

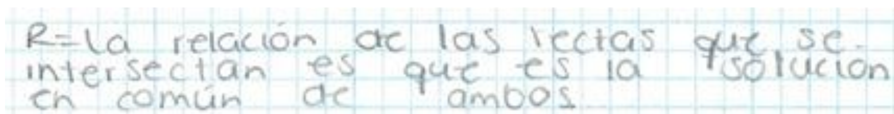
Figura 35. *Algunas respuestas a la parte E del Problema 3.*



Las respuestas en equipo fueron similares y se enlistan a continuación:

- “Son puntos de la ecuación”
- “Tienen un punto en común al trazar una tabla”
- “La relación de las rectas que se intersecan es que es la solución en común de ambos” (ver Figura 36).
- “Se puede pasar por cualquier punto para que intersecten, casi no importando la ecuación”
- “La ecuación es la función lineal”
- “Los puntos, números que se ponen en la recta, van de lleno con la ecuación”

Figura 36. *Respuesta de un equipo a la parte E del problema 3.*



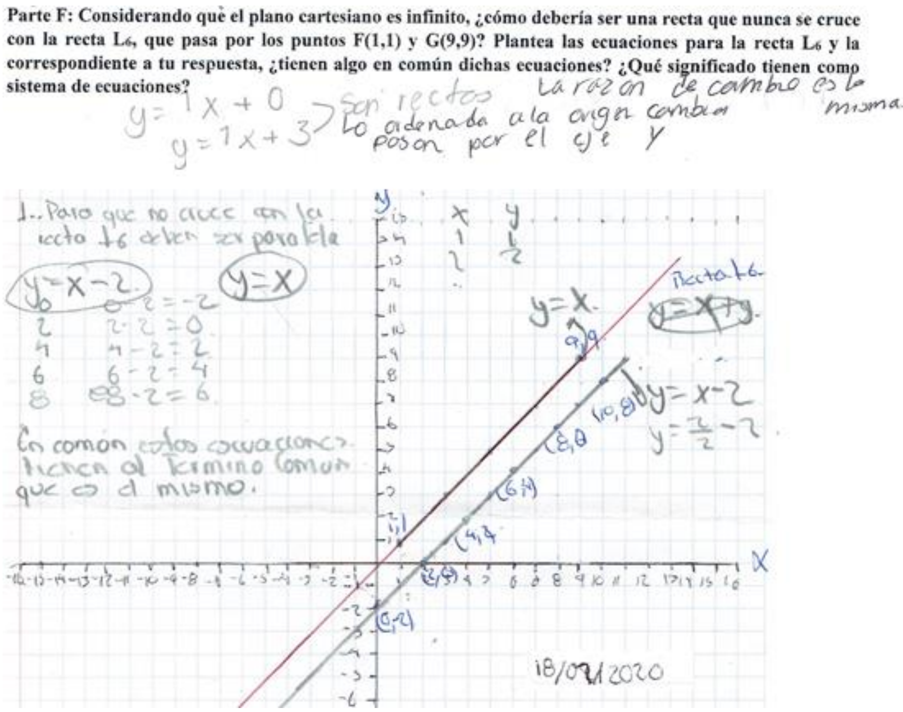
Adicionalmente, se observó que los alumnos tuvieron dificultades para expresar sus ideas en esta pregunta, por lo que se complementaron sus respuestas durante las exposiciones de los equipos, donde los alumnos expresaron, en su mayoría, que los puntos de la gráfica correspondían con lo que podían calcular con las ecuaciones; pero se emplearon preguntas guía para poder llegar a la conclusión deseada en torno al punto de intersección.

Sobre la parte F, diez alumnos (41.6%) propusieron una recta paralela (ver Figura 37, parte inferior), que era la solución correcta; cinco (20.8%) bosquejaron varias respuestas sin dejar marcada una particular, trabajando con prueba y error; uno propuso que debía ser la misma recta; dos mostraron curvas; y el resto rectas con pendientes similares a la de la recta dato que no se intersecaban en la sección del plano cartesiano con la que trabajaron.

Entre los que plantearon rectas como solución, hubo siete alumnos (29.2%) que continuaron con problemas para escribir sus ecuaciones, especialmente para obtener la ordenada al origen.

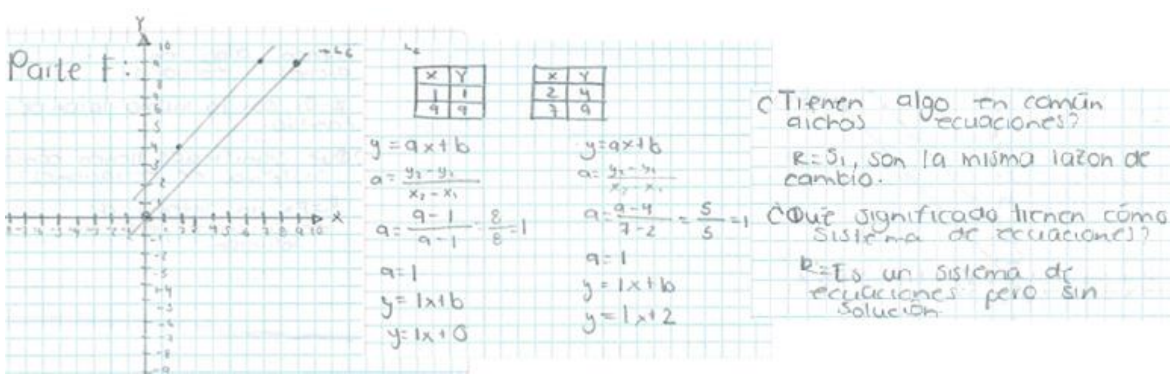
Nueve alumnos (37.5%) comentaron que no sabían qué había en común entre las ecuaciones o no respondieron la pregunta; tres estudiantes respondieron que la razón de cambio era la misma (ver Figura 37, parte superior) y que las rectas eran paralelas; uno de ellos agregó que era un sistema de ecuaciones, pero sin solución.

Figura 37. *Propuesta de solución para el Problema 3F*



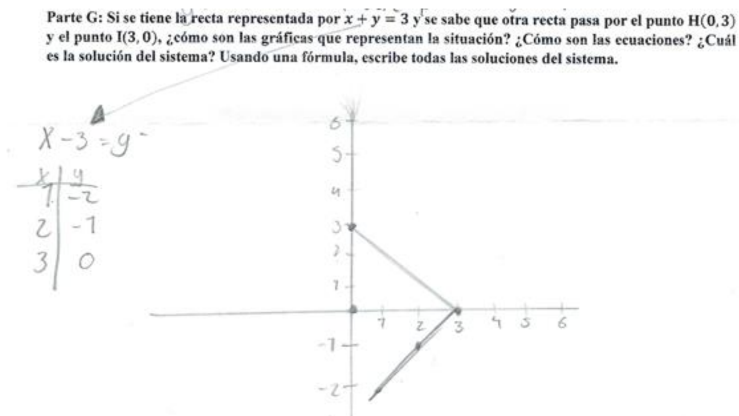
Sin embargo, en el trabajo por equipo, cinco dieron una respuesta gráfica correcta y plantearon las ecuaciones correspondientes (ver Figura 38). Cuatro de ellos concluyeron que tenían rectas paralelas, con la misma razón de cambio. En cuanto al equipo que obtuvo una respuesta errónea, planteó funciones cuadráticas y no concluyó al final de su trabajo.

Figura 38. *Conclusión de un equipo para el Problema 3F.*



Finalmente, en la parte G, nueve alumnos respondieron de forma correcta, aunque solo tres plantearon sus ecuaciones y concluyeron que estaban trabajando con la misma recta; uno de ellos añadió que el sistema tenía muchas soluciones. Sobre las respuestas incorrectas, el error más común fue trazar mal la gráfica, invirtiendo el signo de la pendiente, de modo que el sistema parecía tener solución única (ver Figura 39).

Figura 39. *Propuesta de solución, errónea, para el Problema 3G.*



Tres de los equipos concluyeron que trabajaban con la misma recta; dos no obtuvieron conclusión, aunque mostraron su resultado completo; y el tercero dejó su respuesta incompleta, aunque representando la misma recta y con la misma ecuación (errónea).

4.1.2 Prueba diagnóstica

En función de la estrategia cuyas características fueron descritas en el Capítulo 3 y que, en su versión en extenso, con formatos y planificación, se encuentra en el Anexo 1 Estrategia didáctica, se construyó un instrumento de evaluación diagnóstica, que constó de ocho ítems, un total de 18 subítems (ver Anexo 3 Instrumentos de evaluación).

Su finalidad fue identificar los conocimientos previos con que contaban los alumnos y se consideraron necesarios para llevar a cabo la estrategia. Dichos conocimientos se determinaron con base en:

- Los Programas de Estudio, Área de Matemáticas, para Matemáticas I del CCH.
- Libros de matemáticas referentes a álgebra básica.
- Análisis de la temática y la estrategia de enseñanza propuesta para sistemas de ecuaciones lineares con dos incógnitas, en su resolución gráfica.

Los Programas de Estudio contemplan como aprendizajes previos a la temática de sistemas de ecuaciones (Unidad 4), conocimientos divididos en tres Unidades:

Unidad 1. Que el alumno comprenda el significado de los números reales, que use simbolizaciones y opere con números racionales, que opere con potencias y radicales de la misma base; que traduzca relaciones contextuales y resuelva problemas aritméticos; que reconozca y modeles patrones numéricos y geométricos.

Unidad 2. Que el estudiante identifique situaciones donde haya variación entre dos magnitudes, variables dependiente e independiente; que identifique una variación lineal, en sus diversas representaciones (gráfica, algebraica, verbal y tabular), además de su razón de cambio; que identifique valores pertenecientes a una función lineal y pueda modelarla y extraer información de sus diversas representaciones.

Unidad 3. Que el alumno comprenda el concepto de “ecuación” dentro de la resolución de problemas y lo exprese mediante lenguaje algebraico; además de utilizar propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones.

Por otra parte, diversos libros de álgebra contemplan los siguientes temas antes de abordar el de sistemas de ecuaciones; cabe destacar que todos los autores coinciden en dedicar tiempo a la resolución de problemas relacionados con cada temática particular:

- Smith, Charles, Dossey, Keedy, y Bittinger (1992) cubren los temas de introducción al álgebra, incluyendo propiedades de las operaciones; números enteros y racionales; ecuaciones, propiedades de las igualdades, resolución de ecuaciones, proporciones; desigualdades y sus propiedades; exponentes, operaciones con polinomios, factorización; gráficas de parejas ordenadas y de ecuaciones, en particular ecuaciones lineales, rectas paralelas y perpendiculares, determinar la ecuación de una recta.
- Swokowski (1983) desarrolla los temas referentes a lenguaje algebraico, números reales, recta coordenada o real, exponentes, radicales, polinomios, factorización, expresiones fraccionarias; ecuaciones y desigualdades, énfasis en ecuaciones lineales y cuadráticas; funciones, sistemas coordenados de dos dimensiones, graficas, funciones lineales y de diversos tipos, y trigonometría.
- Por su parte, Ángel (1992) describe los números reales, operaciones, exponentes, términos semejantes, resolución de ecuaciones lineales con una variable, razones y proporciones, desigualdades en una variable, problemas, fórmulas, polinomios, operaciones con polinomios, factorización, expresiones y ecuaciones racionales, sistema de coordenadas, formas de la ecuación lineal, gráficas de ecuaciones lineales y gráficas de desigualdades lineales.
- Finalmente, Lehman (1986), cubre la temática referente a álgebra, operaciones algebraicas, factorización, función, constante, variable, sistema de coordenadas, ecuación, función lineal, ecuación lineal o de primer grado con una incógnita, ecuación lineal con dos variables o incógnitas, ecuaciones equivalentes.

Por otra parte, durante el desarrollo del tema de sistemas de ecuaciones lineales, los autores aluden a los siguientes conceptos antecedentes:

- Smith, Charles, Dossey, Keedy, y Bittinger (1992) mencionan ecuaciones, sistemas coordenados, solución de una ecuación, variables, ecuaciones lineales, pendiente y ordenada al origen, punto de intersección entre dos rectas.
- Swokowski (1983) utiliza los conceptos de gráfica, ecuaciones, variables, punto donde se cortan rectas, tabla, solución de una ecuación, despejes, ecuación lineal, coeficientes y números reales.
- Ángel (1992) emplea parejas ordenadas, ecuaciones lineales, solución de una ecuación, sustituir valores en una ecuación, gráfica, línea recta, gráfica de una recta, graficar una ecuación, punto de intersección.
- Lehman (1986) menciona ecuaciones lineales con dos variables, gráfica, solución, incógnita o variable; gráfica de una ecuación lineal, recta; punto de intersección y coordenadas.

Al contrastar estas listas de temas entre sí y relacionarlas con lo dicho en los Programas de Estudio, puede notarse que hay coincidencia en cuanto a los temas de: operaciones aritméticas y algebraicas, lenguaje algebraico, concepto de ecuación, gráfica de una ecuación en dos variables o incógnitas, recta, solución a una ecuación (que incluye el proceso de despejar, de encontrar ecuaciones equivalentes).

De la lista anterior, los autores retoman especialmente la resolución de ecuaciones y la gráfica de una ecuación en dos variables, enfatizando que se trata de una recta. Por tanto, se consideran éstos como antecedentes inmediatos, necesarios para abordar el tema de sistemas de ecuaciones y la estrategia planteada en el presente trabajo.

Cabe aclarar que, según los Programas de Estudios, no se toca directamente el tema de "ecuaciones en dos variables" durante el curso de Matemáticas I, pero sí se indica el estudio de funciones lineales, por lo que este antecedente se evalúa con relación a las funciones lineales y sus gráficas.

Por otra parte, también se desea indagar lo que los alumnos saben sobre el tema, es decir, se busca preguntar sobre lo necesario para abordar la estrategia y sobre qué tanto saben los estudiantes sobre la temática, en específico sobre la resolución de un sistema.

Entonces, con la prueba de diagnóstica se pretendía evaluar lo siguiente:

a) Solución de ecuaciones con una incógnita.
b) Representación gráfica y algebraica para funciones lineales.
c) Solución de sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2
d) Resolución de problemas planteando una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Las dos primeras categorías engloban los antecedentes que se consideraron inmediatos. Se incluyeron en la prueba con el fin de ubicar conocimientos y deficiencias en lo que los alumnos sabían, en cuanto a los algoritmos relacionados, y a partir de los resultados buscar que las herramientas con que contaban los estudiantes fueran más homogéneas.

La tercera categoría tiene la finalidad de indagar si los alumnos conocen alguna o algunas formas de resolver sistemas de ecuaciones, sin importar que sean algebraicas o gráfica, además de buscar una comparación directa con la evaluación final, para poder notar diferencias entre sus conocimientos del tema antes y después de trabajar con la estrategia.

Finalmente, se incluyeron problemas, similares a los que los alumnos pudieron haber resuelto con anterioridad, en decir, de final cerrado, que tenían la posibilidad de resolverse planteando una ecuación o un sistema de ecuaciones, para verificar si tenían alguna experiencia al respecto.

La distribución de los ítems según el conocimiento a evaluar se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 5. *Distribución de ítems, según las categorías enunciadas anteriormente.*

Categoría	Conocimiento	Ítem
1. Ecuaciones con una incógnita	Solución (algoritmo para despejar)	1
	Ecuación equivalente	2
	Problema	8a
2. Representación de funciones lineales	Representación gráfica	3
	Puntos pertenecientes a una función	4
	Representación algebraica	5
3. Sistemas de ecuaciones 2x2	Solución	7
	Solución (metodología para resolver)	6
	Problema	8b

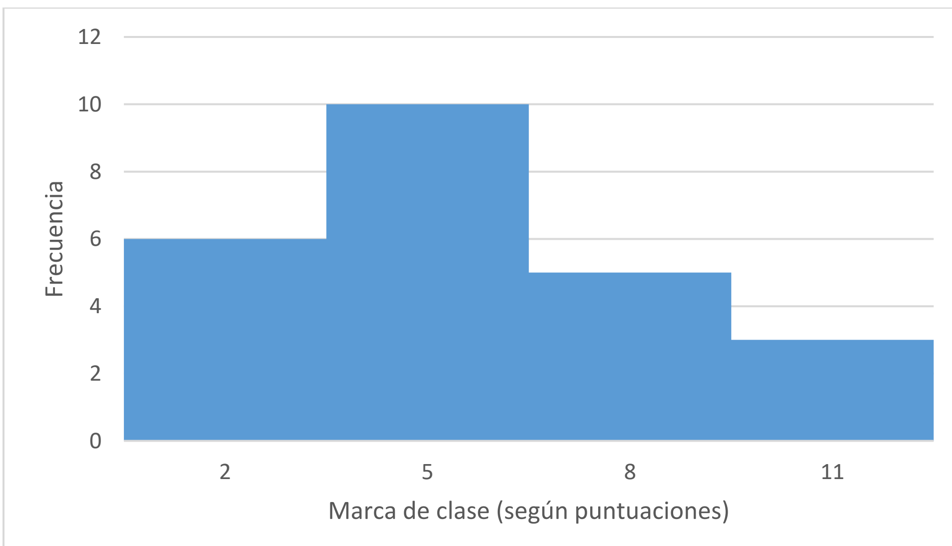
Resultados de la prueba

La prueba se aplicó en una sesión de dos horas, tiempo suficiente para que todos los alumnos terminaran, sin embargo, hubo diez alumnos (41.7%) que no respondieron las preguntas referentes a sistemas porque “no podían”, “no se acordaban” o simplemente dejando en blanco. Todo el grupo presentó esta prueba, a saber, 24 alumnos.

Considerando solamente el resultado final proporcionado por los alumnos, es decir, sin tomar en cuenta su procedimiento para llegar al resultado, la media de aciertos para el grupo fue de 6 puntos, lo mismo que la moda, con una desviación estándar de 2.8.

Los resultados se muestran en la Gráfica 8, donde se considera cantidad de aciertos, con un máximo de 18, y donde destaca que diez alumnos obtuvieron entre cuatro y siete puntos; y que nadie obtuvo más de doce. Estas medidas se calcularon considerando que se trabaja con una población y no una muestra.

Gráfica 8. *Distribución de frecuencias. Aciertos en prueba diagnóstica*



Cabe mencionar que la prueba impresa se entregó a los alumnos con una imprecisión conceptual en la pregunta 5 (ya modificada en el Anexo 3 Instrumentos de evaluación). Sin embargo, la información proporcionada por este ítem se consideró dentro del análisis por haber sido aclarada verbalmente al aplicar la prueba y mostrar resultados que se reafirmaron al realizar en clase la revisión de la prueba.

Sin embargo, al analizar en conjunto los procesos y operaciones realizadas por los 24 alumnos que presentaron la prueba, también se pudo observar que:

1. Un error cometido por seis alumnos, 25%, fue al trabajar con signos, especialmente con multiplicaciones, pero solo en algunas operaciones, lo que indica que, a pesar de sus errores, conocen las leyes de los signos.
2. Hay confusión al sumar o restar términos semejantes cuando los coeficientes son unidades, por ejemplo, "$1 - x$" fue interpretada por tres alumnos (12.5%) como una resta de números iguales, donde el resultado es cero.
3. Se dificulta considerar puntos en el plano cartesiano como parte de una función lineal, tanto en la representación gráfica como en la algebraica.
4. La forma en que los alumnos pasan de la representación algebraica de una función lineal a la gráfica es mediante la construcción de una tabla.
5. Para todo el grupo fue imposible escribir la representación algebraica de una función lineal con pendiente negativa. Quienes determinaron los valores constantes en la forma $f(x) = ax + b$ (a y b, razón de cambio y ordenada al origen, respectivamente) no incluyeron el signo de forma correcta.

Después de aplicar la prueba diagnóstica, se continuó con las actividades académicas, realizando ejercicios relacionados con la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita y la representación gráfica de funciones lineales, con el fin de homogeneizar al grupo en cuanto a estos conocimientos, de manera previa a la aplicación de la estrategia que se describe en el Anexo 1 Estrategia didáctica.

De forma más detallada, se observó también lo siguiente:

Categoría 1. Solución de ecuaciones con una incógnita.

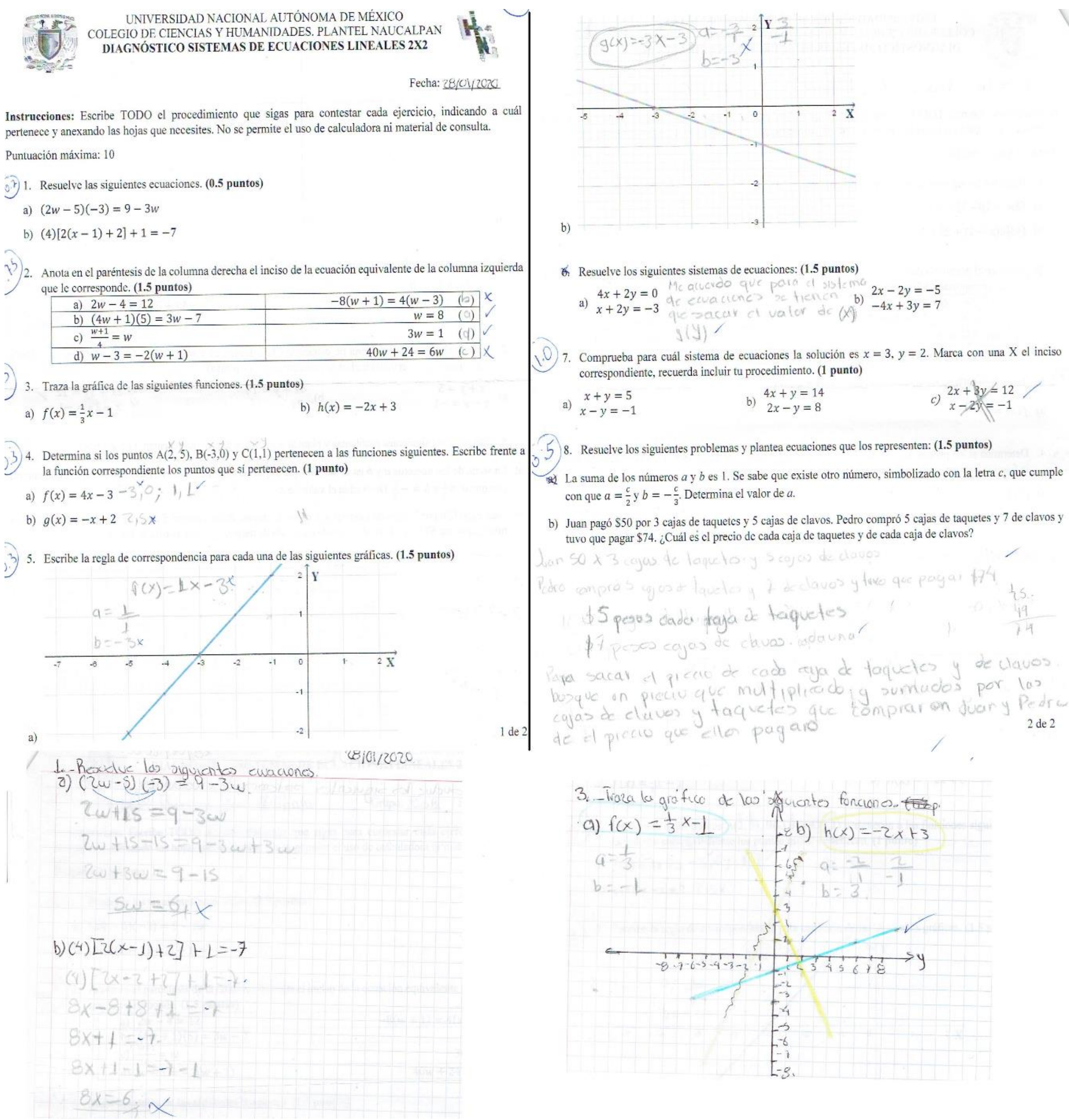
Los alumnos tienen dificultades para realizar despejes. En la misma proporción (3 o 4 alumnos), cometieron los siguientes errores: No tomar en cuenta signos negativos, no aplicar correctamente la propiedad distributiva, sumar términos no semejantes, no reconocer que expresiones como $-3(x)$ son multiplicaciones (ver Figura 40).

Con lo que sí cuentan diez (41.7%) alumnos es el algoritmo para resolver las ecuaciones, es decir, mueven los números y términos de un lado a otro de la ecuación correctamente.

En cuanto a identificar ecuaciones equivalentes, 7 alumnos (29.2%) utilizaron como metodología resolver al menos una de las ecuaciones planteadas, mientras que el resto no escribió procedimiento. Para los incisos b) y c), 20 alumnos respondieron de forma correcta; para a) y d), contestaron bien 11 y 7 alumnos, respectivamente. Se observa que los incisos tienen en común que una de las ecuaciones equivalentes es relativamente más fácil de resolver, por lo que puede concluirse que cuando una de las ecuaciones es más corta, como $3w = 1$, fue más fácil a los estudiantes encontrar la ecuación equivalente.

Considerando ambos ítems, se concluye que los alumnos tienen noción sobre cómo resolver ecuaciones lineales con una incógnita y saben que las ecuaciones equivalentes tienen la misma solución, pero algunos tienen dificultades para utilizar el algoritmo para despejar (ver Figura 40).

Figura 40. *Respuestas de un alumno a la prueba diagnóstica.*



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. PLANTEL NAUCALPAN
DIAGNÓSTICO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2

Fecha: 28/01/2020

Instrucciones: Escribe TODO el procedimiento que sigas para contestar cada ejercicio, indicando a cuál pertenece y anexando las hojas que necesites. No se permite el uso de calculadora ni material de consulta.

Puntuación máxima: 10

1. Resuelve las siguientes ecuaciones. **(0.5 puntos)**
   a) $(2w-5)(-3) = 9-3w$
   b) $(4)[2(x-1)+2]+1=-7$

2. Anota en el paréntesis de la columna derecha el inciso de la ecuación equivalente de la columna izquierda que le corresponde. **(1.5 puntos)**

a) $2w-4=12$	$-8(w+1)=4(w-3)$ (b)
b) $(4w+1)(5)=3w-7$	$w=8$ (a)
c) $\frac{w+1}{4}=w$	$3w=1$ (d)
d) $w-3=-2(w+1)$	$40w+24=6w$ (c)

3. Traza la gráfica de las siguientes funciones. **(1.5 puntos)**
   a) $f(x)=\frac{1}{3}x-1$
   b) $h(x)=-2x+3$

4. Determina si los puntos A(2, 5), B(-3,0) y C(1,1) pertenecen a las funciones siguientes. Escribe frente a la función correspondiente los puntos que sí pertenecen. **(1 punto)**
   a) $f(x)=4x-3$ -3, 0; 1, 1
   b) $g(x)=-x+2$ 2, 5

5. Escribe la regla de correspondencia para cada una de las siguientes gráficas. **(1.5 puntos)**

a) f(x) = 1x − 3x
a = 1/1
b = −3x

b) g(x) = −3x − 3
a = −3/−1
b = −3

1 de 2

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones: **(1.5 puntos)**
   a) $4x+2y=0$, $x+2y=-3$
   Me acuerdo que para el sistema de ecuaciones se tienen que sacar el valor de (x) y (y)
   b) $2x-2y=-5$, $-4x+3y=7$

7. Comprueba para cuál sistema de ecuaciones la solución es $x=3$, $y=2$. Marca con una X el inciso correspondiente, recuerda incluir tu procedimiento. **(1 punto)**
   a) $x+y=5$, $x-y=-1$
   b) $4x+y=14$, $2x-y=8$
   c) $2x+3y=12$, $x-2y=-1$

8. Resuelve los siguientes problemas y plantea ecuaciones que los representen: **(1.5 puntos)**
   a) La suma de los números a y b es 1. Se sabe que existe otro número, simbolizado con la letra c, que cumple con que $a=\frac{c}{2}$ y $b=-\frac{c}{3}$. Determina el valor de a.
   b) Juan pagó $50 por 3 cajas de taquetes y 5 cajas de clavos. Pedro compró 5 cajas de taquetes y 7 de clavos y tuvo que pagar $74. ¿Cuál es el precio de cada caja de taquetes y de cada caja de clavos?

Juan 50 x 3 cajas de taquetes y 5 cajas de clavos
Pedro compró 5 cajas de taquetes y 7 de clavos y tuvo que pagar $74
$5 pesos cada caja de taquetes
$7 pesos cajas de clavos cada una
Para sacar el precio de cada caja de taquetes y de clavos busque un precio que multiplicado y sumados por las cajas de clavos y taquetes que compraron Juan y Pedro de el precio que ellos pagaron

2 de 2

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones
a) (2w − 5)(−3) = 9 − 3w
2w + 15 = 9 − 3w
2w + 15 − 15 = 9 − 3w + 3w
2w + 3w = 9 − 15
5w = 6

b) (4)[2(x − 1) + 2] + 1 = −7
(4)[2x − 2 + 2] + 1 = −7
8x − 8 + 8 + 1 = −7
8x + 1 = −7
8x + 1 − 1 = −7 − 1
8x = 6

3.- Traza la gráfica de las siguientes funciones.
a) f(x) = 1/3 x − 1
a = 1/3
b = −1
b) h(x) = −2x + 3
a = −2/1
b = 3

Dadas estas deficiencias, en la primera sesión se realizaron ejercicios para resolver ecuaciones sencillas como $3x + 4 = 5$, invitando a resolver en el pizarrón a aquellos alumnos que cometieron más errores en la prueba diagnóstica. Además, se dejaron como tarea para casa algunos ejercicios similares más.

Categoría 2. Representación gráfica y algebraica para funciones lineales.

Para trazar gráficas, la mayoría de los alumnos (14 de ellos, 58.3%) recurren a la construcción de una tabla, mientras que tres (8.3%) utilizan los valores de la pendiente y la ordenada al origen. Una cantidad similar de alumnos recurren también a las tablas para identificar si un punto pertenece a una gráfica, por lo que puede concluirse que la relación entre representaciones de una función que tienen más clara es la existente entre tabla y gráfica, además de que saben construir tablas a partir de la representación algebraica.

En cuanto a la obtención de la representación algebraica a partir de la gráfica, ocho alumnos (33.3%) realizan el cálculo de la pendiente, aunque de ellos, solo seis identifican correctamente las coordenadas de puntos. Por tanto, el grupo en general no cuenta con el conocimiento para transitar de la representación gráfica a la algebraica de una función lineal, pero sí de la algebraica a la gráfica, utilizando una tabla como auxiliar.

Dadas las deficiencias mencionadas en cuanto a la representación de funciones lineales, durante la primera sesión y la aplicación del Problema 1 se realizaron ejercicios y se comentó con el grupo sobre estos conceptos.

Categoría 3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2

En cuanto a la resolución de sistemas de ecuaciones:

- Más de la mitad del grupo (14 alumnos, 58.3%) identifican que para resolver sistemas de ecuaciones existen varios métodos y que la forma de comprobar una solución es sustituyendo los valores de las incógnitas en las ecuaciones.
- La metodología que emplearon para resolver fue: tres alumnos con el método de suma y resta, cuatro resolvieron por tanteo, dos realizaron despejes de alguna incógnita, pero no continuaron el proceso, uno trabajó con el método de sustitución y dos incluyeron respuestas sin procedimiento.

Resolución de problemas planteando una ecuación o un sistema de ecuaciones. (Incluido en las categorías 2 y 3)

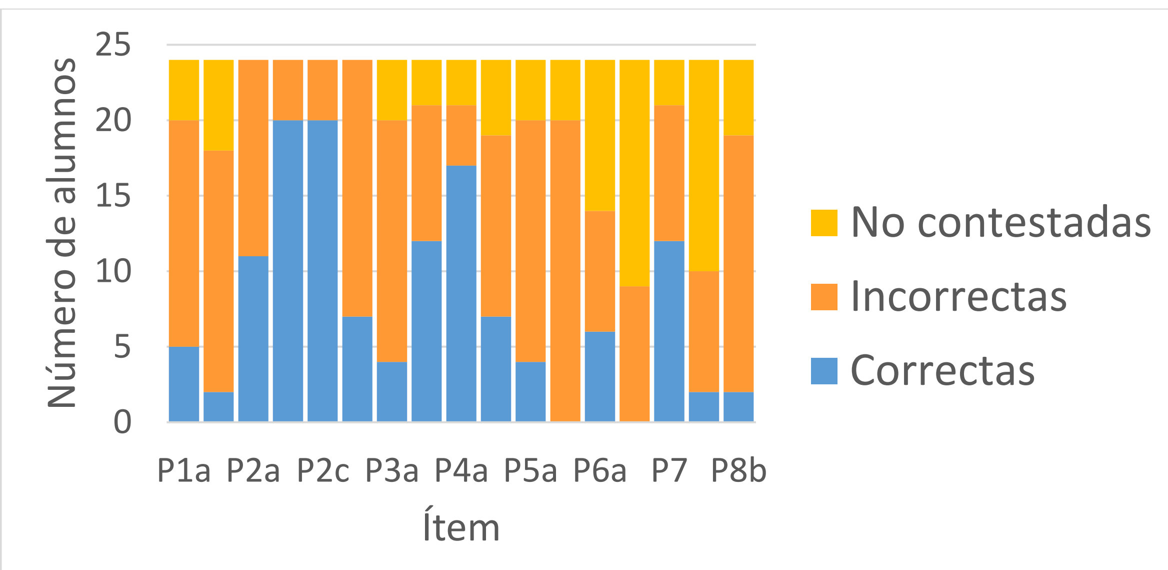
Sobre la resolución de los problemas, se esperaba que, dada la forma de trabajo empleada el semestre anterior con el grupo, los alumnos siguieran la metodología de identificar datos e incógnita, para luego pensar una estrategia e intentar resolver. Pero solamente dos alumnos (8.3%) iniciaron su proceso identificando datos, los demás inmediatamente hicieron operaciones, ya fueran algebraicas o aritméticas (para resolver por tanteo).

Por otra parte, aunque no era necesario resolver de esta forma, el primer problema se prestaba para formular una ecuación con una incógnita y el segundo, un sistema de ecuaciones de orden 2x2 y se solicitó a los alumnos que las plantearan.

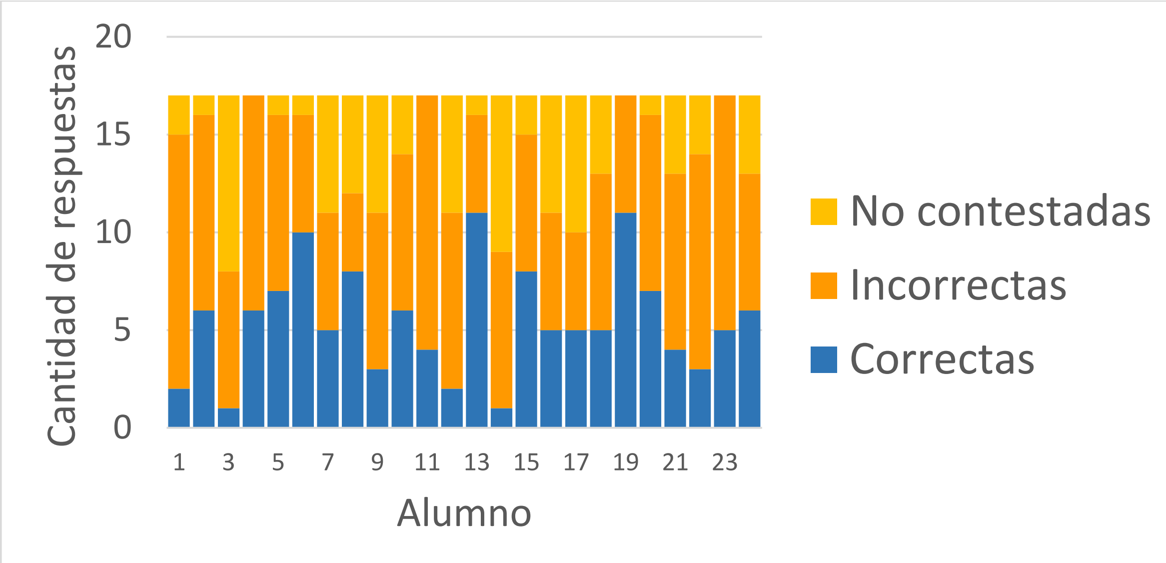
El primer problema fue el que más se dificultó, solo 9 alumnos intentaron resolver (contra 18 que intentaron resolver el segundo) y dos alumnos plantearon una ecuación. Para el segundo, si bien solo dos alumnos llegaron al resultado correcto, fueron cinco los que plantearon un sistema de ecuaciones que representara la situación.

Los resultados anteriores se resumen en las siguientes gráficas. La Gráfica 9 muestra la cantidad de alumnos que resolvieron cada ítem, correcta, incorrectamente o que no respondieron. Por su parte, en la Gráfica 10, se muestra la cantidad de respuestas que tuvo cada alumno, en las categorías de correcta, incorrecta o no contestada.

Gráfica 9. *Respuestas por ítem*



Gráfica 10. *Respuestas por alumno*



4.1.3 Prueba final

La prueba final constó de cinco ítems, dando un total de siete subítems y su extenso se encuentra en el Anexo 3 Instrumentos de evaluación. Se aplicó en poco más de una hora (70 minutos) a 23 de los alumnos, tiempo que resultó suficiente para que todos terminaran, incluso con cinco minutos de sobra para el último que entregó su trabajo.

Se pretendían evaluar las siguientes categorías:

a) Solución de un sistema de ecuaciones, con dos ecuaciones y dos incógnitas.
b) Comprensión del concepto de sistema de ecuaciones, a partir de la formulación de sistemas; es decir, que los alumnos notaran que puede formularse más de una ecuación para ciertas situaciones, empleando las mismas incógnitas.

El conocimiento o habilidad que pretendía evaluar cada ítem se resume en la Tabla 6:

Tabla 6. *Categorías a evaluar con la prueba final*

Categoría	Conocimiento	Ítem
Solución de un sistema	Metodología.	1
	Solución.	2, 5
Comprensión del concepto de sistema de ecuaciones	Interpretar la solución como el punto común a las dos ecuaciones.	3, 4, 5

La primera categoría busca evaluar la resolución correcta de un sistema de ecuaciones interpretando los valores de las incógnitas como solución simultánea a ambas ecuaciones, ya sea en la representación gráfica o algebraica. Es decir, evaluar el conocimiento referente al punto de intersección entre dos rectas y su significado como solución simultánea al sistema que puede representar, junto con la habilidad para reconocer un sistema expresado en forma gráfica o algebraica e identifica el punto de intersección entre dos rectas.

La segunda categoría tenía la intención de evaluar la comprensión de los alumnos sobre el tema, ya que para resolver los ítems formulados se requería conocer el concepto (conocimiento sobre lo que es un sistema de ecuaciones) e interpretar la solución como un todo para formular sistemas de ecuaciones con ciertas características. Con esto se evaluaba también el conocimiento de los alumnos respecto a la representación gráfica de una ecuación con dos variables y el referente al punto de intersección entre dos rectas, además de la habilidad para reconocer un sistema de ecuaciones.

Resultados de la prueba

Para poder comparar resultados, se repitieron dos ítems de la prueba diagnóstica, además de ejercicios con múltiples soluciones posibles que permitieran a los alumnos continuar con esta línea de trabajo y que mostraran su comprensión del tema a través de soluciones diversas.

Esta vez todos los alumnos resolvieron los sistemas con métodos algebraicos o tanteo, observándose de nuevo que el error más común fue con los signos, además de la suma de términos semejantes.

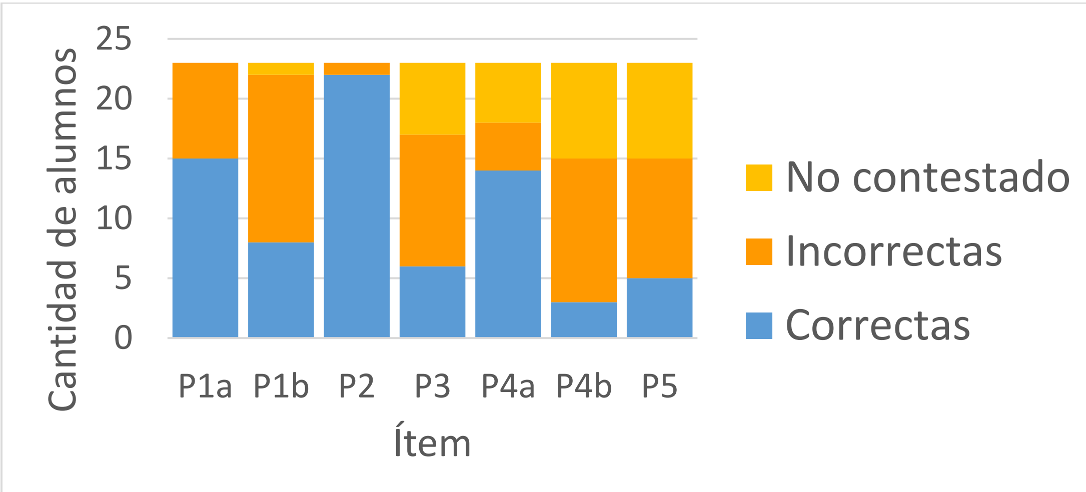
Los ítems con menos respuestas correctas fueron el 1b (categoría 1, metodología para resolver), 4b y 5 (categoría 2), con solo 8 (33.3%), 3 (12.5%) y 5 (20.8%) estudiantes, respectivamente, que resolvieron de forma correcta.

Para el resto de los ítems se tiene que: en la categoría 1, el primer inciso (1a) fue bien resuelto por 15 alumnos (62.5%) y el ejercicio 2 por 22 estudiantes (91.7%); mientras que para la categoría 2, el ítem 3 fue bien resuelto por 12 alumnos (50%) y el ítem 4a por 14 estudiantes (58.3%), como se observa en la Tabla 7 y la Gráfica 11. Cabe mencionar que los porcentajes se calcularon con relación al total de los estudiantes que participaron en el desarrollo de la estrategia (24 alumnos).

Tabla 7. *Cantidad de alumnos que respondieron correctamente la prueba, por ítem.*

Número de ítem	P1a	P1b	P2	P3	P4a	P4b	P5
Número de alumnos que resolvieron correctamente	15	8	22	12	14	3	5

Gráfica 11. *Respuestas por ítem*



En cuanto a las categorías a evaluar, se tiene lo siguiente (ver Gráfica 12). Cabe recordar que la evaluación final solo fue presentada por 23 alumnos; pero los porcentajes se calcularon con base en el total de alumnos, que fue de 24.

a) Solución de un sistema

Para resolver los sistemas, los alumnos utilizaron métodos algebraicos, principalmente el de suma y resta (ver Figura 41). El primer ejercicio fue bien resuelto por 15 alumnos (62.5%), mientras que el segundo solamente por ocho (33.3%). Al indagar por qué este sistema fue resuelto correctamente por menos alumnos, se observó que los errores fueron similares a los que se cometieron en el primer inciso de esta prueba y también en la prueba diagnóstica: al sumar y multiplicar con números negativos.

Por otro lado, las metodologías empleadas por los alumnos fueron similares, la diferencia es que el inciso b) tiene un resultado fraccionario para una de las incógnitas, por lo que se podría especular que es una razón para la cantidad de errores, pero no es suficiente prueba.

Para el ítem 2, se observó que 17 estudiantes (70.8%) hicieron la comprobación de la solución de un sistema sustituyendo los valores de las incógnitas y tres resolvieron el sistema. Si bien no puede establecerse una comparación con los resultados del diagnóstico porque en él los alumnos no justificaron su respuesta, resalta el hecho de que sigue habiendo estudiantes que prefieren resolver el sistema en lugar de comprobar mediante una sustitución. Cabe mencionar que el alumno que tuvo una respuesta errónea optó por resolver el sistema y lo hizo de forma correcta, pero señaló una respuesta errónea.

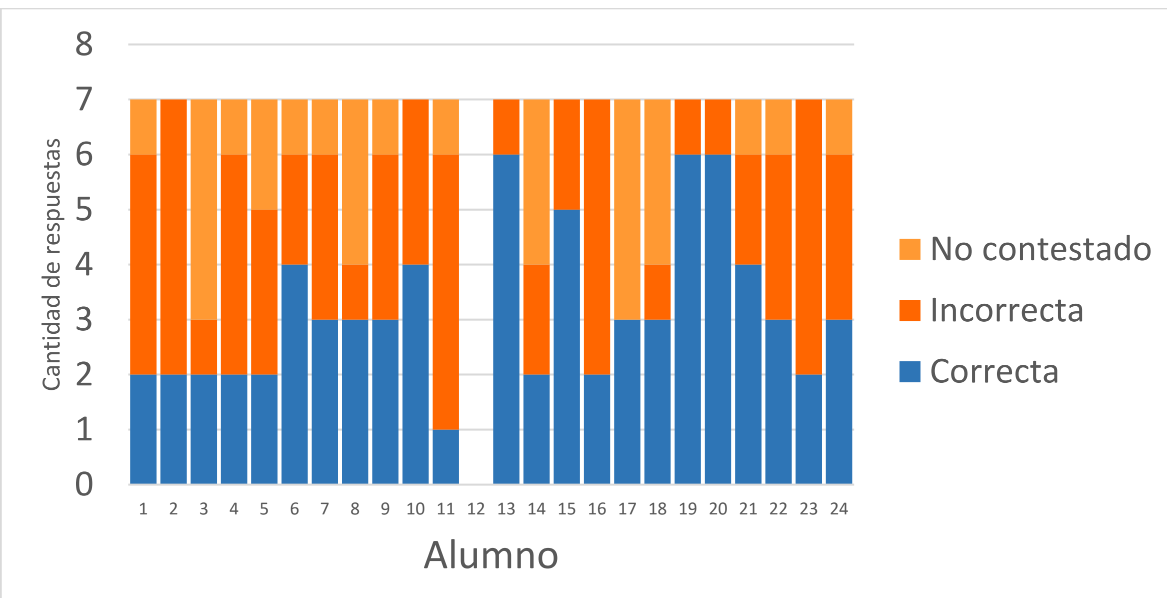
b) Comprensión del concepto de sistema de ecuaciones, formulando sistemas.

En este caso se observó que varios alumnos (6, es decir, 25%) aún no asimilan del todo que un sistema de ecuaciones debe constar de al menos dos ecuaciones (ver Figura 41), ya que plantearon solamente una ecuación con dos incógnitas y la presentaron como sistema en al menos uno de los dos últimos ítems; uno de ellos representó bien de forma algebraica, pero en forma gráfica solo trazó una recta. También aquí hubo preferencia por la representación algebraica.

En el ítem 3, además de los seis que respondieron correctamente, otros seis alumnos diferentes respondieron trazando una de las gráficas que cumplen con lo solicitado.

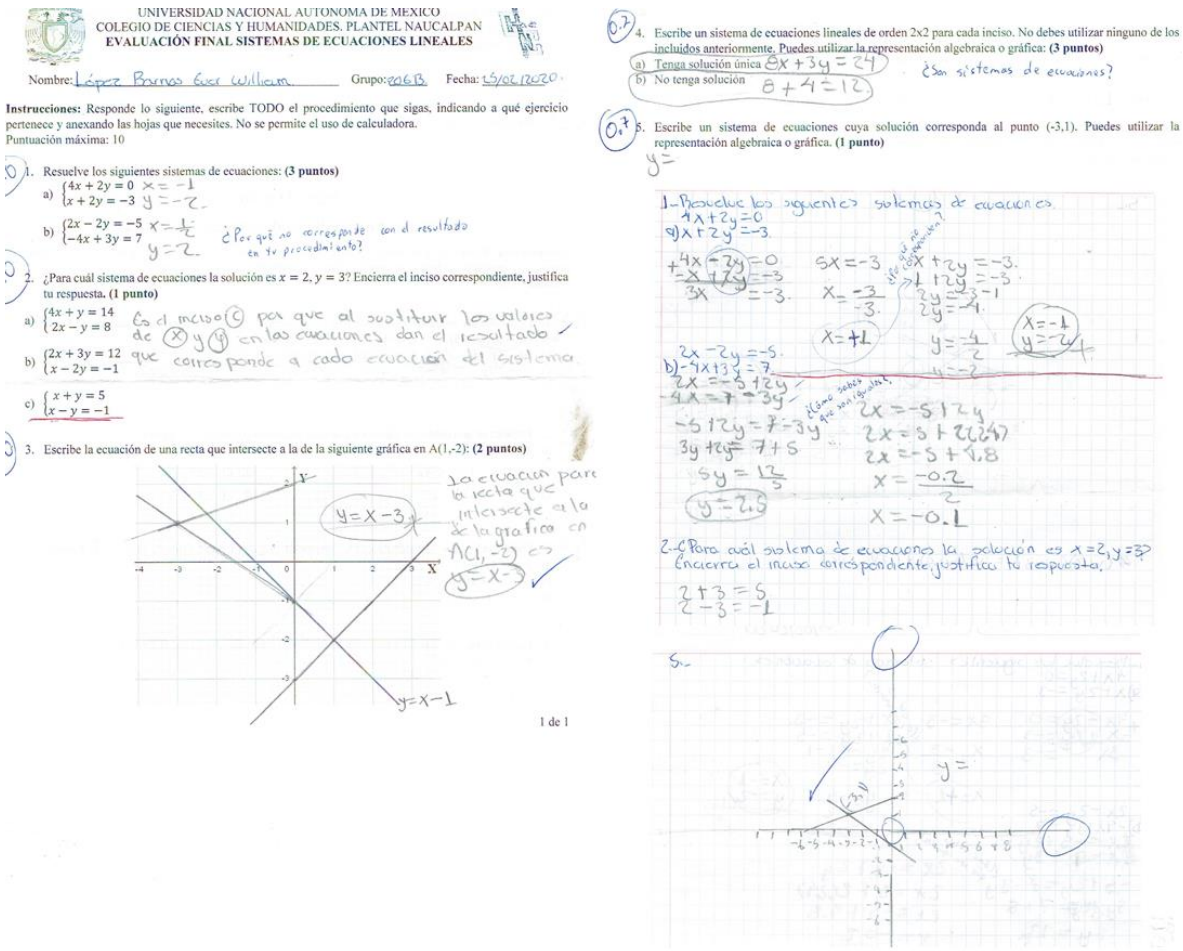
También para los ítems 4 y 5 hubo seis alumnos que emplearon la representación gráfica para responder.

Gráfica 12. *Respuestas por alumno*



Nota: Un alumno no participó en esta prueba, el localizado en la posición 12.

Figura 41. *Solución de un alumno a la prueba final.*



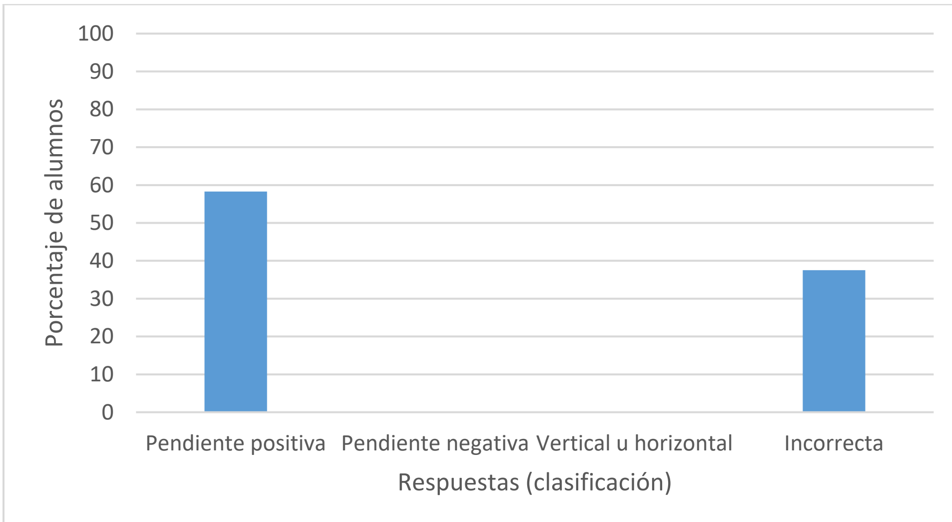
Nota: Se muestran las respuestas del mismo estudiante presentado en la Figura 40.

En general, se observa que el objetivo de este trabajo se logró parcialmente, ya que los alumnos no tomaron en cuenta la representación gráfica que se estuvo trabajando y, en las respuestas, algunos estudiantes mostraron que aún no tienen claro el concepto de sistema al plantearlo como una sola ecuación de dos incógnitas.

Sobre los ítems de final abierto, en general hubo muchos errores y alumnos que dejaron las preguntas sin responder. Para la pregunta 3, fueron catorce (58.3%) los alumnos que propusieron una solución gráfica correcta, de los cuales siete escribieron la ecuación correspondiente como se solicitaba, y todos propusieron rectas con pendiente positiva.

En cuanto a las respuestas incorrectas, fueron nueve alumnos (37.5%) en esta situación, tres de ellos interpretaron la coordenada dato como dos puntos separados, que marcaban la intersección de la recta solución con los ejes; dos más cometieron error en operaciones con números negativos y resto solo realizó operaciones similares a las empleadas para calcular la pendiente y la ordenada al origen, aunque sustituyendo y operando de forma incorrecta (ver Gráfica 13).

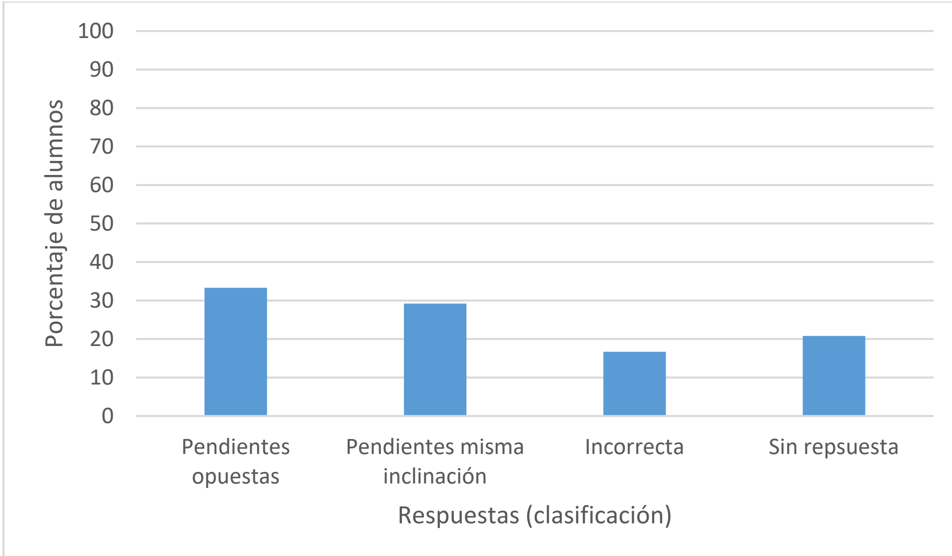
Gráfica 13. *Clasificación de respuestas para la evaluación final, ítem 3*



Para el inciso a) del ítem 4, un alumno propuso una solución, expresada de forma algebraica y gráfica; otro más planteó dos soluciones diferentes, una con rectas de pendientes opuestas y una con pendientes del mismo signo. Del total, ocho alumnos (33.3%) propusieron ecuaciones de rectas de pendientes opuestas; siete con pendientes del mismo signo (29.2%); cinco alumnos (20.8%) no respondieron la pregunta; y cuatro (16.7%) respondieron de forma incorrecta (ver Gráfica 14)

Sobre las respuestas erróneas, uno utilizó funciones cuadráticas, con intersección en el vértice de la parábola; otro marcó varios puntos no colineales, sin explicar por qué los eligió, y los unió con segmentos de recta; los dos restantes plantearon únicamente una ecuación de dos variables.

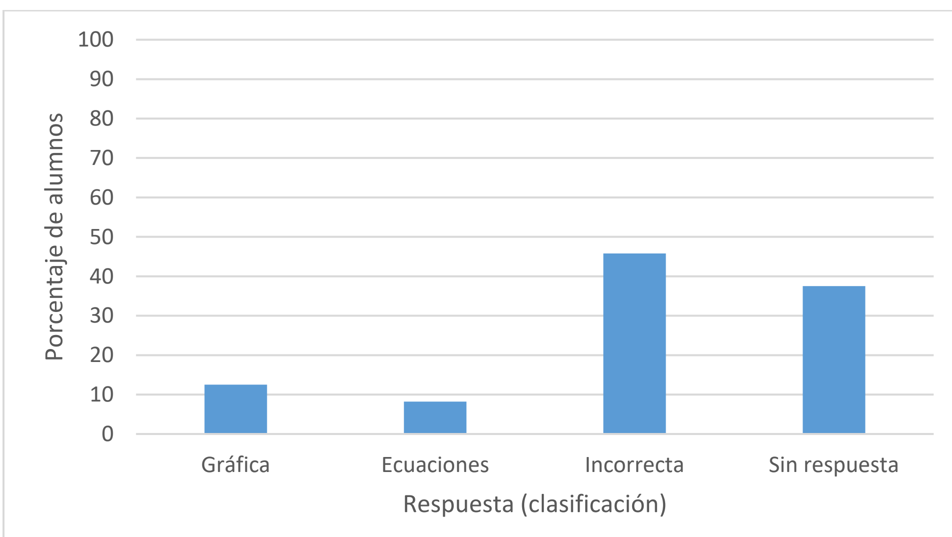
Gráfica 14. *Clasificación de respuestas para la evaluación final, ítem 4a*



Para el inciso b) de este ítem, tres alumnos (12.5%) propusieron una respuesta correcta. De ellos, dos la representaron de forma gráfica y algebraica. Once alumnos (45.8%) respondieron de forma errónea y nueve (37.5%) no intentaron resolver (ver Gráfica 15).

Sobre las respuestas incorrectas, dos alumnos intentaron resolver por tanteo, 6 propusieron sistemas con solución única o con infinitas respuestas, uno planteó una sola ecuación con dos incógnitas y otro con una, el restante solo escribió una operación aritmética.

Gráfica 15. *Clasificación de respuestas para la evaluación final, ítem 4b*



También para la pregunta 5 los alumnos tuvieron dificultades, ya que un total de cinco alumnos (20.8%) proporcionaron una sola respuesta correcta. Cuatro de ellos (16.7%)

proporcionaron sistemas donde las rectas tenían pendientes opuestas, dos en representación gráfica y dos en algebraica; y uno propuso ecuaciones donde las rectas tenían pendientes del mismo signo.

Ocho alumnos (33.3%) dejaron el ítem sin resolver y diez (41.7%) lo hicieron de forma incorrecta. Entre los errores, cuatro alumnos propusieron una sola ecuación, otro interpretó las coordenadas del punto de intersección como el miembro derecho de la igualdad en sus ecuaciones, y uno más usó las coordenadas del punto como coeficientes de las incógnitas.

4.1.4 Cuestionario de opinión

Como algunos alumnos comentaron durante las sesiones que no les gustaba el trabajo o que les daba flojera; en general, que no estaban muy conformes con algunos aspectos de las clases, y considerando los comentarios de los autores referentes a la actitud y sentir de los alumnos en el enfoque de final abierto (Kwon et al., 2006; Lawrence y Leatham, 2005, p. 416, como se cita en Mahlobo, 2007; Mewborn, Mihajlović y Dejić, 2015; Ninomiya y Pusri, 2015; Pehkonen, 1999), se aplicó el cuestionario de opinión que se muestra en el Anexo 3 Instrumentos de evaluación, a 23 de los 24 estudiantes que participaron en el desarrollo de la estrategia. Los porcentajes se calcularon para el total de los alumnos.

Consta de dos partes, la primera de 25 ítems redactados como interrogación, en cuatro categorías referentes a las percepciones de los alumnos sobre qué tan útiles consideraron los PFA, qué tan útiles fueron, qué tanto aprendieron y qué les pareció la forma de trabajo (en los niveles individual, en equipo y grupal). Además, se incluyó una pregunta referente a la suspensión de labores en el CCH que ocurrió durante la aplicación de la estrategia.

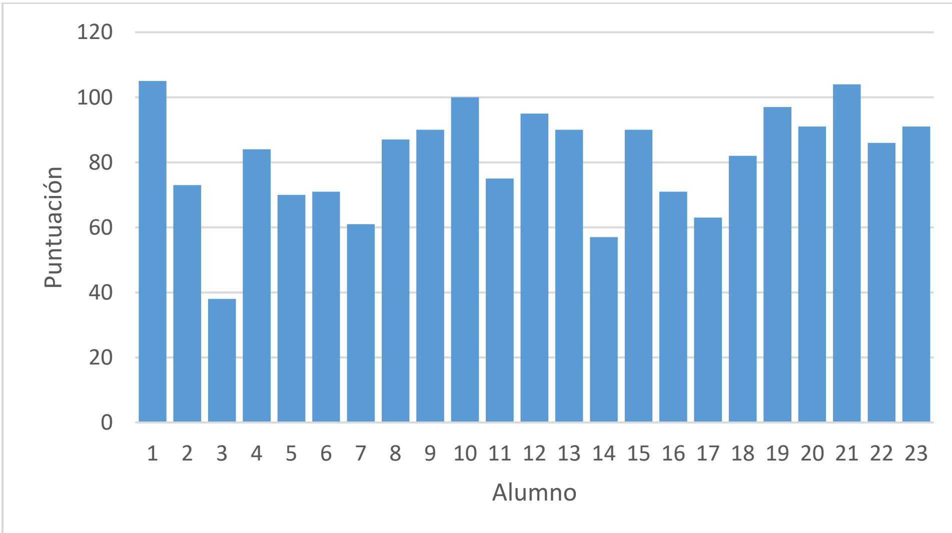
La segunda parte, está constituida por ocho preguntas abiertas con relación a las mismas categorías que la primera parte, con la finalidad de que los alumnos expliquen las razones por las que consideraron útiles y/o interesantes los PFA, porqué les gustó o no trabajar en tres niveles y qué aprendieron.

Tuvo un total 125 puntos disponibles. Sin embargo, se cuentan 120 puntos en los resultados, ya que la pregunta referente a la suspensión de labores sigue una dirección diferente al resto de los ítems y no se tomó en cuenta para el conteo.

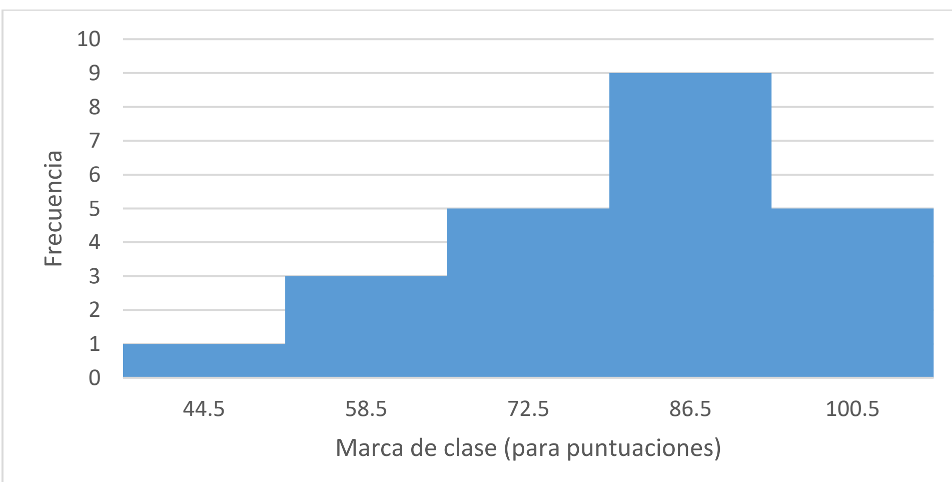
La puntuación máxima fue de 105 puntos, mientras que la mínima fue de 38 (ver Gráfica 16). La distribución general de puntuaciones fue la siguiente (ver Gráfica 17): un alumno

(4.2%) obtuvo entre 38 y 51 puntos; tres alumnos (12.5%) de 52 a 65 puntos; cinco alumnos (20.8%) con puntaje de 66 a 79; 9 alumnos (37.5%) con puntos de 80 a 93 y cinco con 94 puntos o más. La media de las puntuaciones (para los datos agrupados) fue de 81; la mediana y la moda de 86.5; con una desviación estándar de 12.8.

Gráfica 16. *Puntuación por alumno. Cuestionario de opinión*



Gráfica 17. *Distribución de frecuencias*

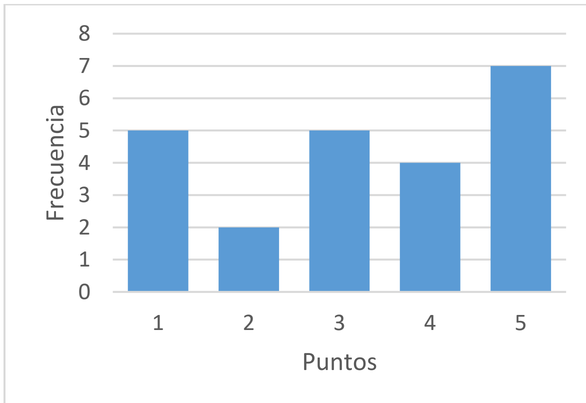


Finalmente, y antes de pasar al análisis de estos datos, cabe mencionar que once alumnos (45.8%) consideraron que el paro de labores que interrumpió la aplicación de la estrategia les afectó de forma considerable en su trabajo (puntuaciones de 4 y 5), cinco (20.8%)

respondieron que no les afectó (puntuación de 1), y el resto (29.2%) que les afectó poco (puntuaciones 2 y 3). (Ver Gráfica 18).

Respecto a esta cuestión, se observó que, al retomar la estrategia, los alumnos tuvieron dificultades para recordar lo que se había trabajado anteriormente y la revisión de las sesiones previas tuvo que ser más extensa y con mucha participación del profesor.

Gráfica 18. *Opinión de los alumnos respecto al paro de labores*



4.2 Análisis

Conociendo los datos anteriores, es posible realizar algunas evaluaciones con respecto al trabajo de los alumnos y su desempeño durante la aplicación de la estrategia.

4.2.1 Fluidez, flexibilidad y originalidad

El siguiente análisis es requerido en esta investigación ya que forma parte de la metodología del enfoque abierto y permitió realizar una revisión de las respuestas de los alumnos, observándose, como se describe a continuación, que los alumnos comenzaron apegándose a costumbres como la de utilizar solamente números enteros positivos y dar una respuesta, pero se notó un cambio hacia el final de la aplicación de la estrategia, al proporcionar más variedad en sus respuestas; además de evaluar los problemas empleados en cuanto a su capacidad de promover ideas más fluidas, flexibles y originales.

Adaptando la propuesta de Klavir y Hershkovitz (2008), se evaluaron las respuestas individuales de los alumnos, bajo los siguientes criterios:

Fluidez: cantidad de respuestas correctas proporcionadas por los alumnos. Se otorga un punto por cada una.

Flexibilidad: los conceptos matemáticos ligados a las soluciones de los problemas son similares, por lo que no se prestaban a un cambio de pensamiento como tal. Sin embargo, sí se consideraron tres categorías diferentes como una “pseudo-flexibilidad”, la primera, son las respuestas inmediatas o comunes, consideradas por la mayoría de los alumnos, donde no entran en juego muchos conceptos; por ejemplo, resolver empleando números enteros o trazar gráficas de rectas con pendiente positiva.

La segunda, se refiere a respuestas donde se involucran algunos conceptos más como el uso de números racionales o negativos, que no son tan intuitivas y es menos frecuente que se presenten como una primera opción de respuesta. Mientras que la tercera corresponde con una generalización de la solución.

La puntuación máxima es de tres, acorde con las categorías antes mencionadas.

Originalidad: Se consideraron respuestas únicas, que ningún otro alumno las propuso o solo unos pocos las expresaron. Se otorgó un punto por cada respuesta original.

En cuanto a la elegancia, se decidió no considerarla, dado que es criterio con mayor grado de subjetividad, además de que, al enfatizar la representación gráfica, se limitaba un poco a los alumnos de expresar de diferentes maneras las respuestas.

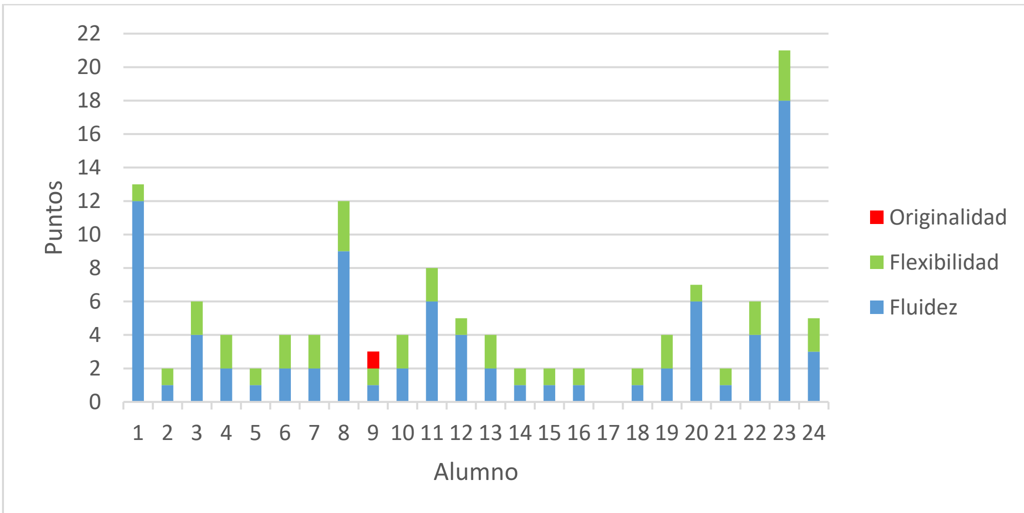
Cabe mencionar que para esta evaluación solamente se consideraron las repuestas a problemas de final abierto, por lo que se omiten las partes D, E y G del Problema 3. Además, hay que señalar que los huecos en las gráficas siguientes implican respuestas incorrectas, que no se incluyen para evaluarse bajo los criterios antes mencionados.

Para el problema 1, en la parte A, los resultados de esta evaluación se muestran en la Gráfica 19. Destacan tres alumnos que proporcionaron nueve o más respuestas, y un alumno que propuso una operación con números del orden de millones, por lo que recibió un punto por originalidad de su propuesta.

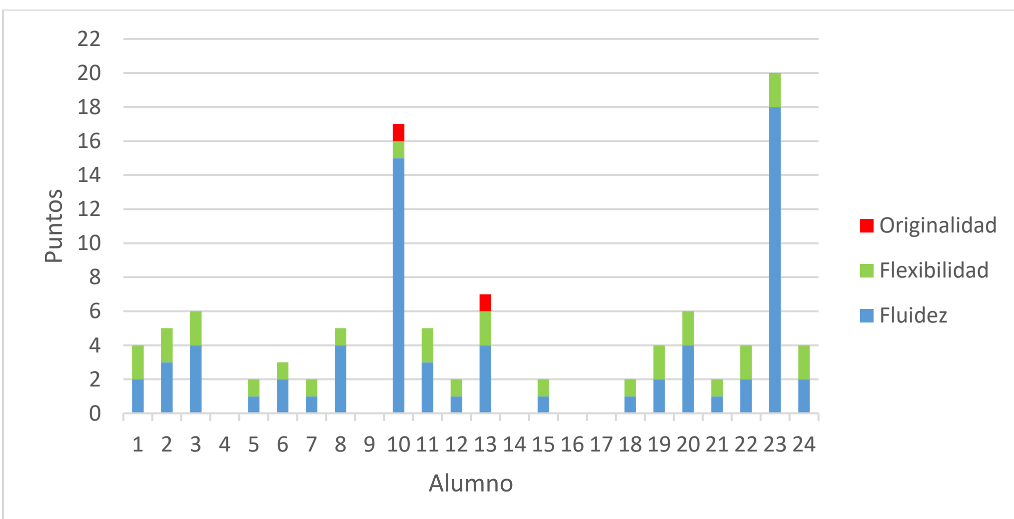
Puede observarse que tanto la fluidez como la flexibilidad tendieron a ser bajas para muchos alumnos: 8 de ellos (33.3%) obtuvieron un punto en fluidez, y 11 (45.8%) un punto en flexibilidad. Además, solamente dos estudiantes mostraron más apertura a presentar soluciones con diferentes tipos de números.

Puede concluirse que los estudiantes están acostumbrados a utilizar principalmente números de un solo tipo (enteros positivos), por lo que explorar con otros números es considerado poco importante o difícil, lo cual coincide con las observaciones realizadas durante las clases. Sin embargo, también influye el hecho de que fue el primer problema de final abierto presentado a los alumnos y, aunque algunos expresaron que había muchas soluciones, optaron, quizá por costumbre, solamente presentar una respuesta.

Gráfica 19. *Evaluación individual de respuestas. Problema 1A*



Gráfica 20. *Evaluación individual de respuestas. Problema 1B*



Al explorar los puntos logrados por los alumnos en el problema 1B (ver Gráfica 20), puede apreciarse que aumentó un poco la fluidez en las respuestas, ya que esta vez fueron seis alumnos los que presentaron una sola repuesta (dos menos que en la primera parte). Sin embargo, esta vez hubo menos flexibilidad al ocupar distintos tipos de números.

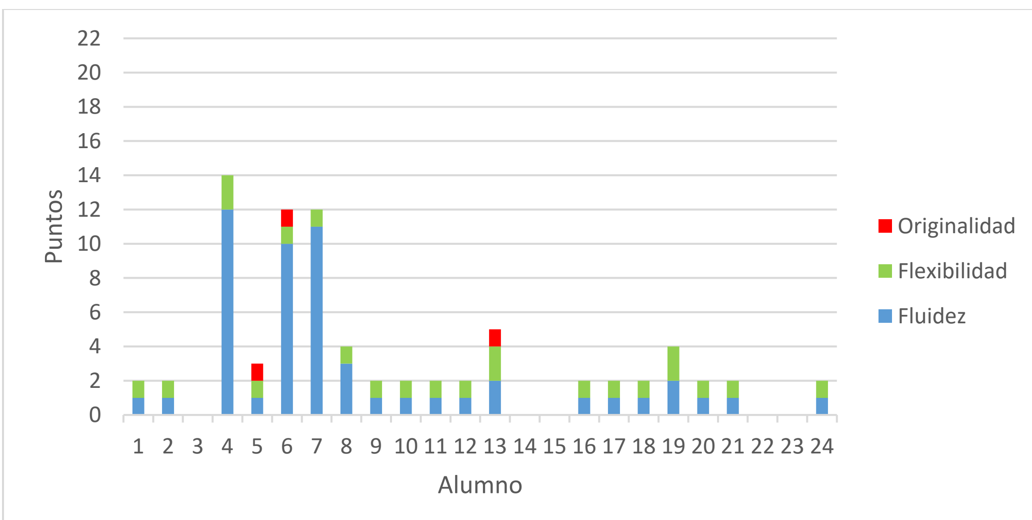
A partir de esto, puede notarse que los alumnos comenzaron a aceptar que había diferentes respuestas, aunque una vez más se reafirma el hecho de que tienden a trabajar únicamente con números enteros positivos y tienen conflicto con los enteros negativos y racionales.

Para el problema 2, ya se mencionó que solo cuatro alumnos obtuvieron una respuesta correcta, y todos ellos hicieron una sola propuesta, por lo que el puntaje total para ellos es de dos, el primero por la solución el segundo por una forma de pensamiento. Esto indica una disminución en cuanto a su fluidez y flexibilidad con respecto al Problema 1.

Al trabajar con el Problema 3, se hizo evidente que unos pocos alumnos ya habían aceptado la presencia de múltiples respuestas y las proponían, mostrando una fluidez mayor al indicar más ejemplos de respuestas, incluyendo algunas que se consideraron originales por lo acertado de las reflexiones incluidas por los alumnos y que indicaron un pensamiento un poco más profundo que el realizado anteriormente. Sin embargo, la flexibilidad se mantuvo en la mayoría con un punto.

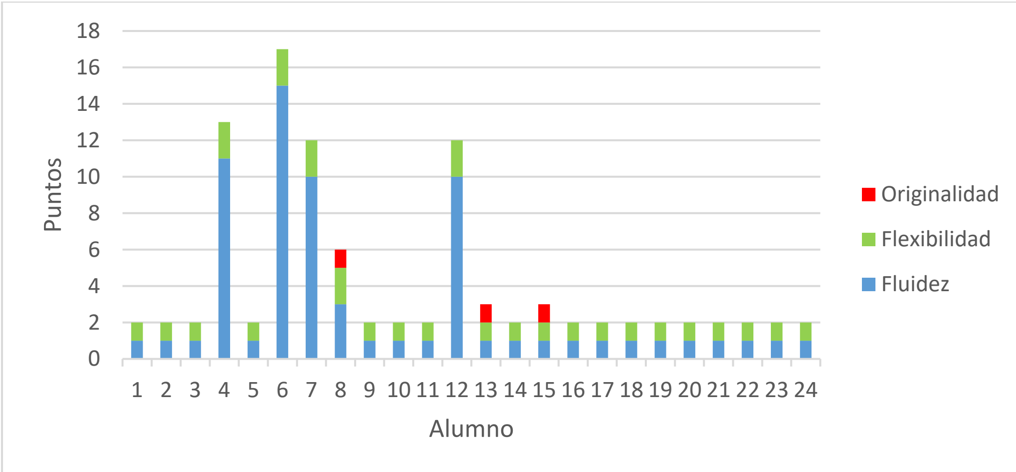
En la Gráfica 21, se muestra que a tres alumnos se les otorgó un punto por originalidad, ya que, además de sus respuestas, proporcionaron una respuesta más general.

Gráfica 21. *Evaluación individual de respuestas. Problema 3A*

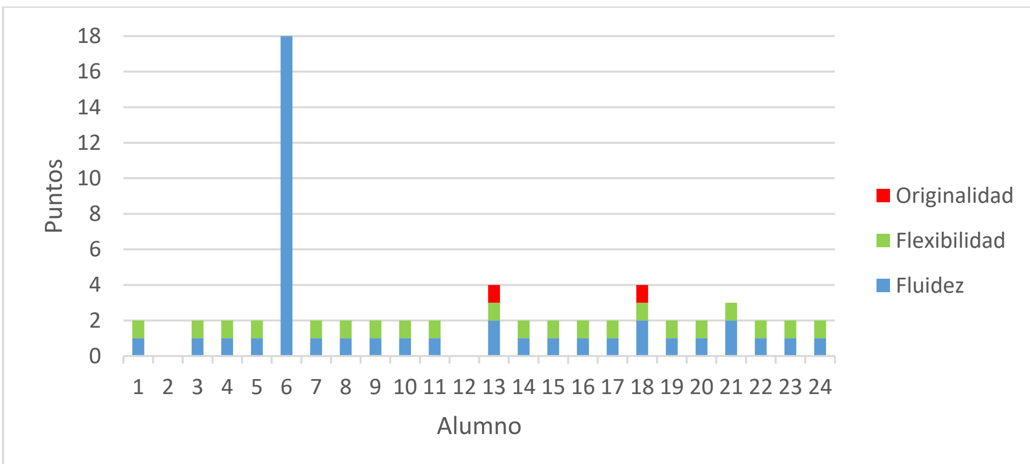


En cuanto a la parte B del tercer problema (Gráfica 22), cabe destacar que cuatro alumnos (posiciones 4, 6, 7 y 8 en la gráfica), se mantuvieron constantes en cuanto a proporcionar varias respuestas, al menos en las partes A y B del problema. Sin embargo, este avance se pierde para la parte C (Gráfica 23) y F del problema 3; y más aún en la prueba final.

Gráfica 22. *Evaluación individual de respuestas. Problema 3B*



Gráfica 23. *Evaluación individual de respuestas. Problema 3C*



En la parte F las respuestas correctas fueron únicas en todos los casos, por lo que la puntuación fue de dos, un punto por una respuesta y un punto por flexibilidad.

En cuanto a las preguntas de final abierto incluidas en la prueba final, los alumnos que respondieron de forma correcta lo hicieron proponiendo una sola respuesta. Dos alumnos en la pregunta 4a proporcionaron dos respuestas, y uno más en la pregunta 4b. Por tanto, la evaluación bajo estos criterios fue la misma para todos, salvo las tres excepciones comentadas, que obtuvieron un punto más tanto en fluidez como en flexibilidad.

De aquí puede concluirse que los problemas no fueron adecuados para mejorar la fluidez y flexibilidad de los alumnos, ya que, considerando aumentos y disminuciones ligeras en estas mediciones, no hubo cambios notorios a lo largo de la aplicación de la estrategia; además de que tampoco se fomentaron las respuestas originales.

4.2.2 Reflexión sobre la metodología

Dada la influencia de la metodología en los resultados al utilizar PFA, a continuación se realiza una reflexión en cuanto a este componente.

Sobre el pensamiento de orden superior que también se ve involucrado en el enfoque abierto, se fomentaron las tres características comentadas por Foong (2000), ya que se invitó a los alumnos, en todas las sesiones, a explicar sus ideas y participar en las discusiones, a través de preguntas centradas en el por qué, el qué y el cómo. Además, se realizaron observaciones continuas sobre el avance de los estudiantes.

Sobre la formación de conceptos en toda la clase (Nagasaki y Becker, 1993), pudo observarse que alrededor de siete alumnos tendían a acaparar las participaciones, por lo que fue necesario pedirles que esperaran antes de proporcionar sus respuestas; sin embargo, sus aportes fueron muy importantes para llegar a conclusiones sobre los conceptos, procedimientos y soluciones, de modo que el grupo lograra comprenderlos y justificarlos, al menos durante la sesión en que se habló de ellos.

En el trabajo individual, trató de prestarse especial atención a los alumnos que se sabía que eran más tímidos y/o más lentos para responder, sin embargo, no fue suficiente para que todos lograran formar conceptos individuales como el de sistema de ecuaciones o punto de intersección. Los alumnos se mostraban de acuerdo en las discusiones grupales, pero no aplicaron las conclusiones a sus trabajos individuales.

Sin embargo, todos los estudiantes notaron que había diferentes opiniones y respuestas; no estuvieron siempre dispuestos a compartirlos, pero al exponerlos a la clase, solían dar su opinión y argumentarla, algunos más extensamente que otros, por lo menos comentando "la maestra había dicho…".

Por tanto, hubo cierto avance en la formación de conceptos grupales, que no lograron llevarse en su totalidad al trabajo individual, pero fueron notorios en las aportaciones orales que los alumnos hicieron a la clase.

Por otra parte, el ambiente en el aula tendió muchas veces al desorden, donde los alumnos expresaban sus opiniones solo a los compañeros más cercanos, además de que muy pocos trabajaron de manera autónoma; en cambio, buscaron siempre comentar las respuestas, reflexionando muy poco para sí mismos. Tampoco se logró fomentar la persistencia, los alumnos buscaron obtener rápidamente las respuestas y algunos se molestaban cuando el profesor les pedía que expresaran su opinión o conjetura sobre las respuestas o las dudas, con lo que muchas veces solo prestaron atención a la conclusión.

El análisis de los problemas, con base en las preguntas propuestas por Sawada (1997), se realizó antes de aplicarse en clase, considerándose que implicaban contenido matemático pertinente, tanto dentro del campo matemático, como para los alumnos. Además, de que las posibles respuestas podían llevar a generar ideas e interrogantes que permitieran desarrollar conocimientos y habilidades.

Después de aplicar la estrategia, pudo notarse que, efectivamente, los problemas fomentaron discusiones muy ricas en torno a diversos conceptos, si bien no siempre relacionados con la temática planeada (por ejemplo, en torno al punto medio de una recta), donde los alumnos, además de dar su opinión, la justificaban, a veces con argumentos expresados en un lenguaje coloquial, a veces en lenguaje matemático.

Sin embargo, el nivel de complejidad del Problema 1 mostró no ser apropiado, ya que muchos alumnos comentaron que fue demasiado fácil; mientras que el Problema 2 también requiere una reformulación debido a que pocos alumnos pudieron resolverlo.

Todas estas observaciones y reflexiones apuntan a que el avance que tuvieron los alumnos respecto a la comprensión de la temática de sistemas de ecuaciones fue poco, aunque ninguno tuvo algún retroceso ni se mantuvo exactamente igual en cuanto a conocimiento comparado con su desempeño al inicio de la aplicación de la estrategia. Esto se complementa al comparar y analizar las pruebas inicial y final.

4.2.3 Comparación entre pruebas inicial y final

La comparación entre las pruebas de evaluación inicial (diagnóstica) y final, se realizó principalmente a partir de los ítems correspondientes de ambas pruebas. Los ítems 1 y 2 de la prueba final corresponden respectivamente con los ítems 6 y 7 de la prueba diagnóstica. Al comparar las respuestas de ambas pruebas (Tabla 8), puede notarse que:

- 9 de los estudiantes mejoraron (37.5%). Se considera mejora ya que respondieron correctamente al menos dos de las preguntas, que en el diagnóstico fueron erróneas.
- 6 alumnos (25%) que ya conocían el tema permanecieron igual. Es decir, respondieron bien en la prueba diagnóstica y en la final.

- 5 estudiantes (20.8%) que no conocían el tema no mejoraron. Se consideró en esta categoría a quienes tuvieron al menos dos respuestas erróneas en el diagnóstico y lo repitieron en la prueba final
- 3 alumnos (12.5%) obtuvieron un acierto menos en la prueba final en comparación con la inicial, lo cual podría identificarse como un retroceso. Sin embargo, al revisar los procedimientos de estos alumnos, pudo verse que el error cometido fue al realizar un despeje o utilizar mal un signo, no por desconocer cómo resolver los sistemas de ecuaciones.

Tabla 8. *Comparación de aciertos y errores entre la prueba diagnóstica (D) y final (F)*

ÍTEMS
D-prueba diagnóstica;
F-prueba final
Dif-diferencia entre el resultado inicial y final

Alumno	D6a	F1a	Dif	D6b	F1b	Dif	D7	F2	Dif
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	1	0
3	0	1	1	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1
5	1	0	-1	0	0	0	1	1	0
6	1	1	0	0	0	0	1	1	0
7	1	1	0	0	0	0	0	1	1
8	0	1	1	0	1	1	0	1	1
9	0	1	1	0	0	0	0	1	1
10	0	1	1	0	0	0	1	1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	1	1
12	0	1	1	0	1	1	0	1	1
13	0	1	1	0	0	0	0	1	1
14	0	1	1	0	1	1	0	1	1
15	1	0	-1	0	0	0	0	1	1
16	0	1	1	0	1	1	1	1	0
17	1	1	0	0	1	1	1	1	0
18	0	1	1	0	1	1	1	0	-1
19	1	1	0	0	1	1	1	1	0
20	0	1	1	0	1	1	1	1	0
21	0	1	1	0	0	0	1	1	0
22	0	0	0	0	0	0	1	1	0
23	0	1	1	0	1	1	1	1	0

Avance de los alumnos	
9 (37.5%)	Mejoraron
6 (25%)	Permanecieron
5 (20.8%)	No avanzaron
3 (12.5%)	Retroceso

Nota: Los porcentajes se calcularon con base en los 24 alumnos que componen el grupo, no solo para los 23 que presentaron la prueba.

Respecto a los alumnos que desde el diagnóstico mostraron conocer poco del tema (aquellos que respondieron de forma errónea dos o los tres incisos de la prueba diagnóstica referentes a sistemas de ecuaciones, el 83% de los alumnos), se observó mejoría en sus procesos para resolver en cuanto a que proporcionaron los valores de las dos incógnitas, justificados con algún proceso algebraico o comprobación que no mostraron en la prueba diagnóstica.

Sin embargo, los ejercicios de final abierto, donde los alumnos debían plantear una ecuación que completara un sistema de ecuaciones o el sistema completo (ítems 4 y 5), se observó que:

a) Seis alumnos (25%) plantearon una sola ecuación en lugar de un sistema.
b) Cinco alumnos (20.8%) no intentaron resolverlos.
c) Cuatro alumnos (16.7%) no intentaron plantear un sistema a partir de la solución, se limitaron a trazar la gráfica y/o a obtener la ecuación de una recta que pasara por el punto solución.

4.2.4 Cuestionario de opinión

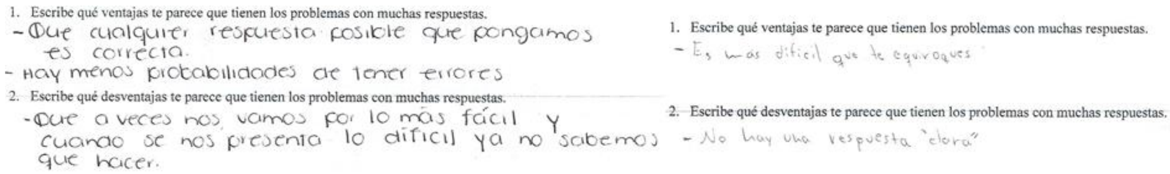
El último aspecto que se evaluó fue el referente a la opinión de los alumnos respecto a algunos componentes de la estrategia aplicada.

Según el puntaje obtenido por los alumnos, en general consideraron que la estrategia representó para ellos un buen trabajo, útil y que les permitió aprender. Sin embargo, esto fue diverso para las categorías asignadas.

En cuanto a la utilidad de los problemas, 14 alumnos (58.3%) consideraron que el resolver PFA sí les fue útil para aprender sobre sistemas de ecuaciones (proporcionaron 4 o 5 puntos), mientras que 10 alumnos (41.7%) consideraron que tener múltiples respuestas les fue poco o nada útil en general (ver Gráfica 24).

Por tanto, su posición puede considerarse hacia la neutralidad, aunque entre sus comentarios destacan que les fue más sencillo encontrar una respuesta y más difícil tener errores (ver Figura 42), pero al mismo tiempo, “tener muchas soluciones es confuso”. Sobre esto, cinco alumnos en particular comentaron que al trabajar no supieron qué respuesta escoger o que no entendieron todas las soluciones.

Figura 42. *Algunas respuestas respecto a la utilidad de los PFA.*



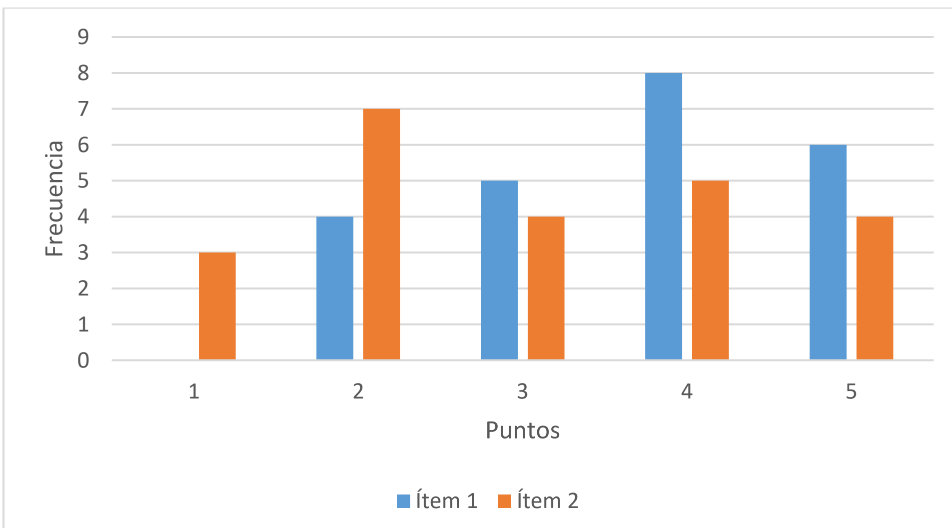
1. Escribe qué ventajas te parece que tienen los problemas con muchas respuestas.
- Que cualquier respuesta posible que pongamos es correcta.
- Hay menos probabilidades de tener errores
2. Escribe qué desventajas te parece que tienen los problemas con muchas respuestas.
- Que a veces nos vamos por lo más fácil y cuando se nos presenta lo difícil ya no sabemos que hacer.

1. Escribe qué ventajas te parece que tienen los problemas con muchas respuestas.
- Es más difícil que te equivoques
2. Escribe qué desventajas te parece que tienen los problemas con muchas respuestas.
- No hay una respuesta "clara"

Cabe señalar que esta categoría del cuestionario de opinión se analizó por pregunta, ya que la puntuación máxima era de 10 y realizar un análisis estadístico no tenía mucho sentido.

Por otra parte, dentro del marco de ventajas que promueven los PFA, dos alumnos comentaron que no encontraron ninguna desventaja, sino que les pareció más rico ver más opciones, además de uno que encontró como ventaja el poder socializar más.

Gráfica 24. *Frecuencia de respuestas. Utilidad*

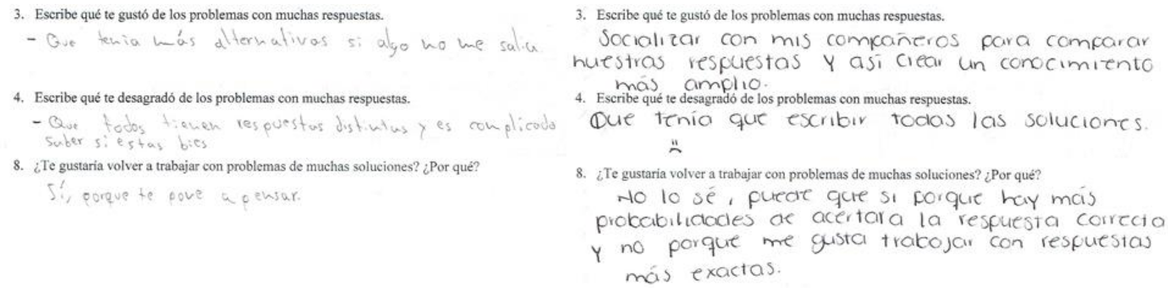


Sobre el interés que los problemas despertaron, la puntuación máxima posible en la categoría era de 25. En este caso, la media fue de 16.3, la mediana de 16.8 y la moda de 17.5, con una desviación estándar de 3.7 (ver Gráfica 25).

Cabe señalar que, en una posición totalmente neutra, se habrían tenido 15 puntos y los datos aquí se localizaron un poco por encima de este valor, lo mismo que las medidas de tendencia central comentadas en el párrafo anterior; por lo que puede concluirse que la postura general de los alumnos tendió a ser neutra a un poco a favor, sin sentir particular interés por los problemas de final abierto. Aunque hay que destacar que 15 alumnos (62.5%) superaron esta puntuación.

En sus comentarios relacionados con los ítems de esta categoría, tres alumnos comentaron que no les gustaría volver a trabajar con problemas de este tipo, siete que tal vez, y el resto (54.2%) que sí les gustaría (ver Figura 43).

Figura 43. *Algunos comentarios respecto al interés que despertaron los PFA.*


3. Escribe qué te gustó de los problemas con muchas respuestas.
- Que tenía más alternativas si algo no me salía

4. Escribe qué te desagradó de los problemas con muchas respuestas.
- Que todos tienen respuestas distintas y es complicado saber si estás bien

8. ¿Te gustaría volver a trabajar con problemas de muchas soluciones? ¿Por qué?
Sí, porque te pone a pensar.

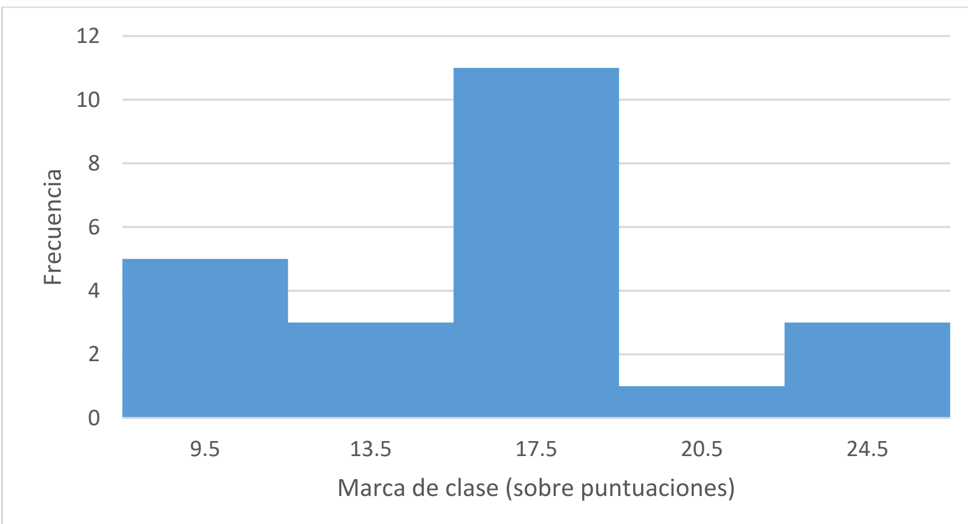
3. Escribe qué te gustó de los problemas con muchas respuestas.
Socializar con mis compañeros para comparar nuestras respuestas y así crear un conocimiento más amplio.

4. Escribe qué te desagradó de los problemas con muchas respuestas.
Que tenía que escribir todas las soluciones.

8. ¿Te gustaría volver a trabajar con problemas de muchas soluciones? ¿Por qué?
No lo sé, puede que sí porque hay más probabilidades de acertar a la respuesta correcta y no porque me gusta trabajar con respuestas más exactas.

En conclusión, en el grupo se consideraron un poco interesantes los PFA, aunque enfatizando la confusión que les provoca la multiplicidad de respuestas.

Gráfica 25. *Distribución de frecuencias. Interés*

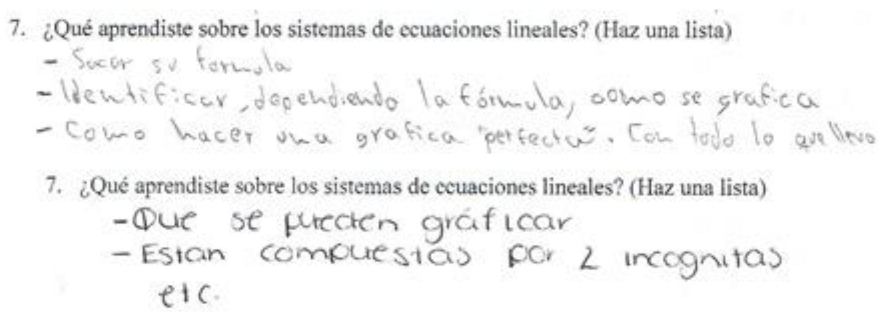


Sobre el aprendizaje, la categoría tenía un puntaje máximo de 45, aunque el máximo real fue de 38. En este caso, la media y la mediana tuvieron un valor de 30.5, hubo dos modas en 17.5 y 20.5, respectivamente; con una desviación estándar de 4.4 (ver Gráfica 26).

Nuevamente considerando una posición totalmente neutra, es decir, 27 puntos, puede notarse que la mayoría de los alumnos se situaron en sobre este valor (18 estudiantes, 75%). Con lo que puede concluirse que los alumnos percibieron que sí aprendieron algo, aunque en general consideraron que poco.

Lo anterior se corrobora en las anotaciones de los alumnos, donde lo que predominantemente comentaron que aprendieron fue relacionado al tema, no del tema directamente: representaciones de las funciones (gráfica, tabla y representación algebraica) y diferentes métodos o procedimientos para resolver; seguido de unos pocos alumnos que comentaron que aprendieron a encontrar más de una solución a los problemas (ver Figura 44). Solamente dos comentaron explícitamente que aprendieron sobre características de los sistemas de ecuaciones. Esto coincide parcialmente con lo que los alumnos demostraron en la prueba final.

Figura 44. *Algunas respuestas respecto al aprendizaje después de trabajar con PFA.*


7. ¿Qué aprendiste sobre los sistemas de ecuaciones lineales? (Haz una lista)

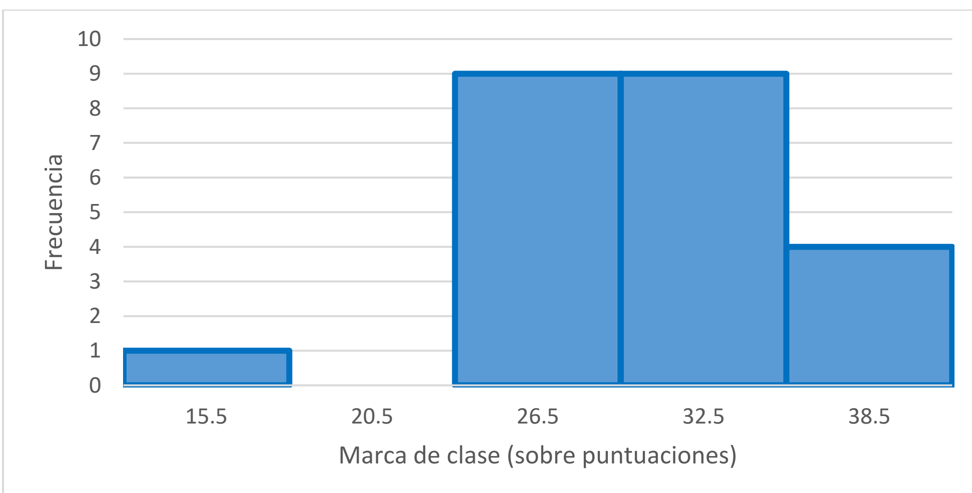
- Sacar su formula
- Identificar, dependiendo la fórmula, como se grafica
- Como hacer una grafica "perfecta". Con todo lo que lleva.

7. ¿Qué aprendiste sobre los sistemas de ecuaciones lineales? (Haz una lista)

- Que se pueden graficar
- Estan compuestas por 2 incognitas

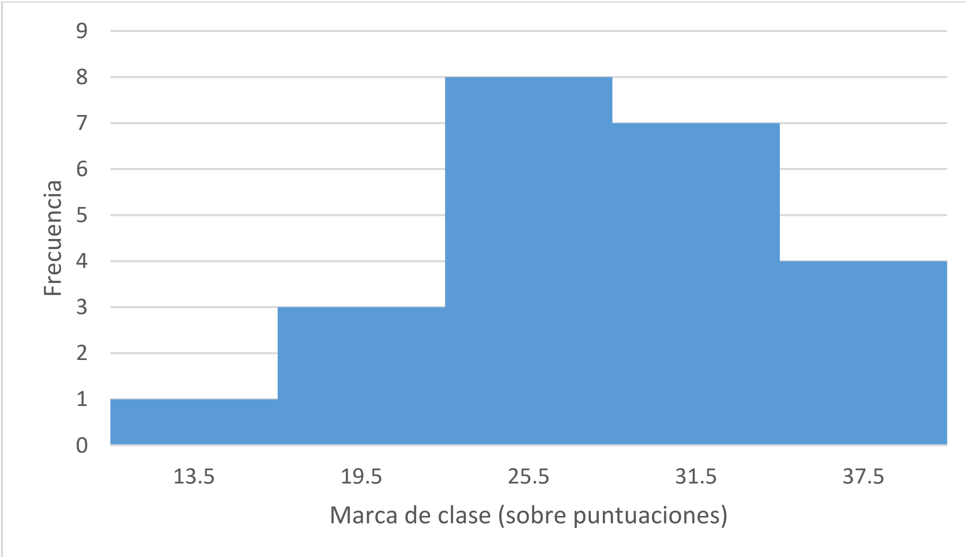
etc.

Gráfica 26. *Distribución de frecuencias. Aprendizaje*



Sobre la forma de trabajo, la media de las puntuaciones fue de 28, lo mismo que la mediana, la moda fue de 25.5, aunque también hubo muchas puntuaciones en torno a 31.5 puntos; con una desviación estándar de 5.3 (ver Gráfica 27). En este caso, la puntuación máxima posible era de 40, mientras que la real fue de 38.

Gráfica 27. *Distribución de frecuencias. Forma de trabajo*

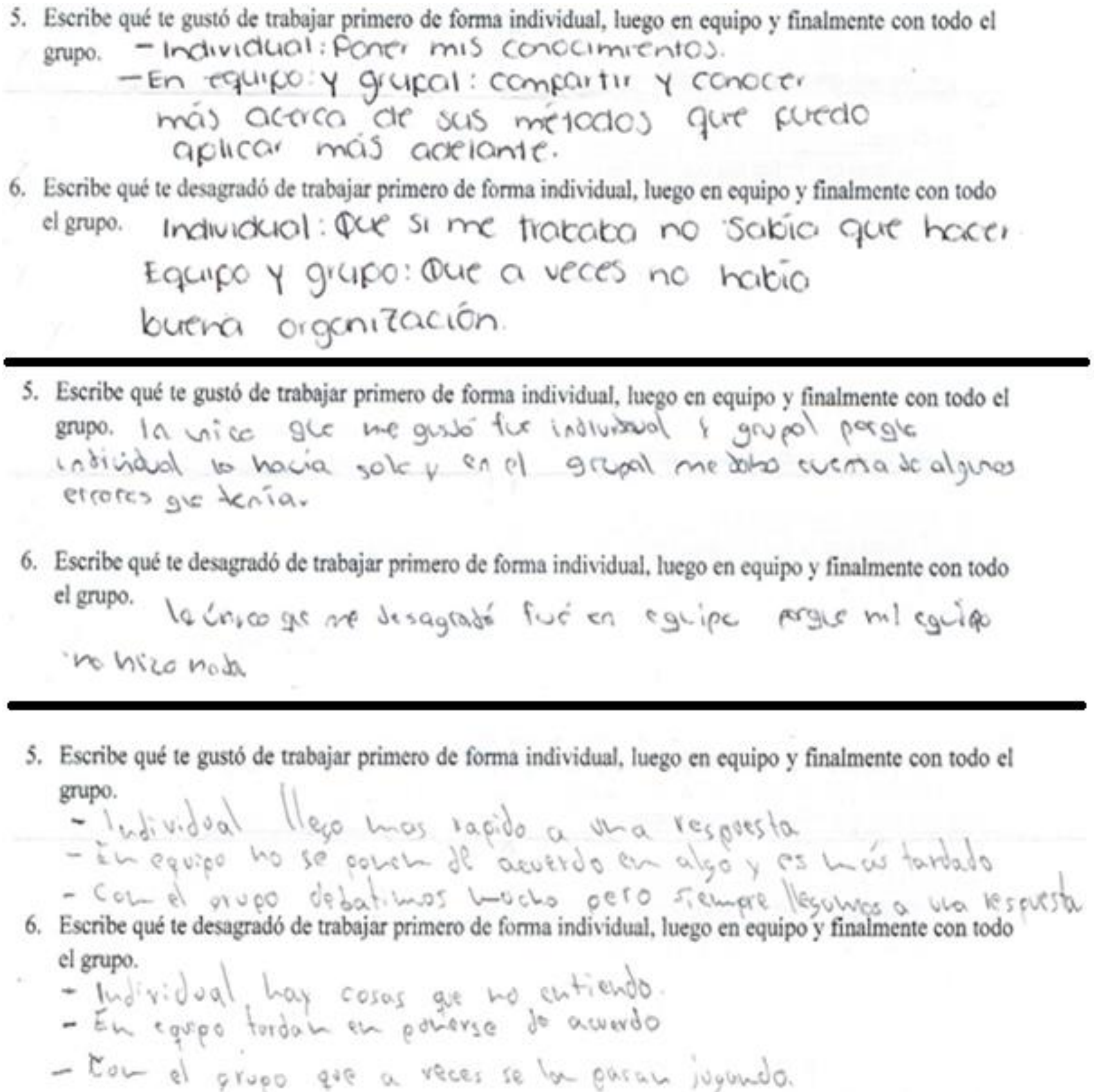


La puntuación para una neutralidad completa era de 24, y puede observarse que la mayoría de los alumnos obtuvieron puntuaciones mayores o iguales a este valor (18 estudiantes, 75%), por lo que la postura de los alumnos fue, en general de neutral a buena con respecto a la forma de trabajo.

Esto se vio reflejado en los comentarios escritos de los estudiantes, que en forma general escribieron que:

- En el trabajo individual podían trabajar a su ritmo y sin presiones, pero a veces les quedaban dudas.
- En el trabajo en equipo era bueno compartir ideas y resolver dudas al platicar con otros, aunque no siempre se ponían de acuerdo y algunos compañeros no trabajaban correctamente.
- En el trabajo grupal, hubo opiniones más encontradas, algunos comentaron que era bueno porque servía para seguir resolviendo dudas, que todos entendieran y dieran su opinión, mientras otros comentaron que era confuso y aún más difícil ponerse de acuerdo que durante el trabajo en equipo. Coincidieron en que el trabajo era lento y había desorden, además de algunos estudiantes que no aportaban a la clase.

Figura 45. *Algunas opiniones de los alumnos respecto a la forma de trabajo.*



5. Escribe qué te gustó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo. – Individual: Poner mis conocimientos.
–En equipo y grupal: compartir y conocer más acerca de sus métodos que puedo aplicar más adelante.

6. Escribe qué te desagradó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo. Individual: Que si me trababa no sabía que hacer
Equipo y grupo: Que a veces no habia buena organización.

5. Escribe qué te gustó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo. la unica que me gustó fue individual y grupal porque individual lo hacia solo y en el grupal me daba cuenta de algunos errores que tenía.

6. Escribe qué te desagradó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo. lo único que me desagradó fué en equipo porque mi equipo no hizo nada

5. Escribe qué te gustó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo.
- Individual llego mas rapido a una respuesta
- En equipo no se ponen de acuerdo en algo y es más tardado
- Con el grupo debatimos mucho pero siempre llegamos a una respuesta

6. Escribe qué te desagradó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo.
- Individual hay cosas que no entiendo.
- En equipo tardan en ponerse de acuerdo
- Con el grupo que a veces se la pasan jugando.

Cabe agregar, que el paro de labores en el CCH sí afectó a los alumnos en mayor o menor medida, según su propia percepción, y esto se vio reflejado en la pérdida de ideas que se habían comentado antes de esta pausa en el trabajo y que no pudieron retomarse más adelante.

Esto y el conjunto de lo analizado hasta ahora se resume en el siguiente apartado.

Conclusiones y Recomendaciones

A continuación, se expresan las conclusiones con respecto a los objetivos y la hipótesis planteada, además de recomendaciones para futuras investigaciones del tema.

Conclusiones

Tomando en cuenta las observaciones realizadas durante la aplicación de la estrategia basada en problemas de final abierto, las respuestas y participaciones de los alumnos durante la misma, y los resultados obtenidos mediante los instrumentos de evaluación, en cuanto a los conocimientos y habilidades requeridos para resolver sistemas de ecuaciones (ver sección 1.3) pudo notarse que:

- Durante las sesiones, los alumnos lograron representar una ecuación con dos variables en su forma gráfica y tabular. Sin embargo, requirieron el apoyo del profesor para representarla en forma algebraica.
- Con la ayuda del profesor, los estudiantes formularon una definición de sistema de ecuaciones con base en características observadas a partir de los problemas aplicados en la estrategia, a saber, que incluye un conjunto de ecuaciones, que puede representarse de varias maneras, que puede tener dos o más incógnitas y que hay varias formas de resolverlos (ver 4.1.1.4 Sesión 4); además, durante las sesiones los alumnos propusieron la idea de que una misma solución satisface a las dos ecuaciones y puede “verse” con el punto de intersección.
- Los estudiantes reconocieron que, al menos al utilizar rectas (ecuaciones lineales), trabajaron con sistemas de ecuaciones.
- Se identificó el punto de intersección entre pares de gráficas en general y para dos rectas en particular, reconociendo que no siempre se tiene exactitud en esta representación.
- Los objetivos de los Problemas de Final Abierto empleados se lograron durante las sesiones (ver sección 4.1.1): para el Problema 1, los alumnos notaron que había más de una solución para la situación planteada y pudieron representarla de diferentes maneras, además de enlazar las dos partes de dicho problema para tratarlas como dos casos de la misma situación que podían compartir un resultado.

Para el trabajo con gráficas y el Problema 2, los alumnos concluyeron que podían tener cero, uno o más puntos de intersección entre pares de gráficas diversas, mismos que podían determinar de manera más confiable en datos de tablas, y especularon sobre que el punto de intersección representa una solución común si se habla de sistemas de ecuaciones. Además, lograron determinar una definición intuitiva de sistema de ecuaciones.

Para el Problema 3, los estudiantes reforzaron sus ideas en torno al punto de intersección y su definición de sistema de ecuaciones, además de realizar observaciones sobre la representación algebraica de los sistemas y concluir sobre las características gráficas y algebraicas de sistemas con cero una o infinitas soluciones.

En relación con los objetivos particulares, la investigación teórica referente a los PFA dirige hacia el enfoque de final abierto, metodología de enseñanza que conlleva características específicas y bajo las cuales fue posible elaborar una estrategia de enseñanza-aprendizaje, en la cual se cubrieron los puntos señalados en los capítulos 3 y 4 del presente trabajo (primer objetivo particular).

Para la selección de los problemas, y principalmente bajo los criterios expresados por Sawada (1997), se realizó un análisis previo, con el que se llegó a la conclusión de que los problemas empleados respondían a las características de un buen problema de final abierto. Sin embargo, durante y después de la aplicación, se notó que el primer problema, si bien fue una buena aproximación al tema y a la metodología para los alumnos, no tuvo el nivel suficiente para ser considerado problema.

En este mismo sentido, el Problema 2 requiere una modificación en su planteamiento, de modo que sea más claro para los estudiantes y pueda llevarlos a desarrollar nuevos conocimientos.

En cuanto a la planeación, se destaca que incluyó los tres niveles de trabajo y/o discusión propuestos reiteradamente por los autores (Sawada, 1997; Shimada, 1997; Takahashi, 2006; Hino, 2007; entre otros): individual, en grupos pequeños y grupal; además de apartados para revisar conocimientos previos (Nagasaki y Becker, 1993; Hino, 2007), observación y evaluación continua, y la elaboración y clasificación de las posibles respuestas de los alumnos.

Sin embargo, durante la aplicación en el aula se hicieron presentes algunas de las desventajas comentadas por diversos investigadores respecto al enfoque de final abierto, que después de identificarse se enfrentaron para disminuir su impacto, mediante ajuste en el discurso del profesor, particularmente invitando a los alumnos más callados a participar, enfatizando la importancia de aprender del error y ajustando las preguntas guía.

Entre estas desventajas, varios alumnos comentaron que se sintieron un poco confundidos con respecto a la multiplicidad de respuestas (Silver et al., 2005), según explicaron en el cuestionario de opinión; algunos estudiantes se mostraron poco dispuestos a aceptar los argumentos y respuestas de sus compañeros, y la mayoría se sintió satisfecho proponiendo solo una respuesta (Sullivan, 1992).

Lo anterior lleva a que los roles, tanto del profesor como del alumno, no fueron asumidos completamente. Los alumnos no siempre procuraron desarrollarse hacia un aprendizaje autodirigido ni mostraron reflexiones en cuanto a su propio trabajo y el de sus compañeros (Villarreal, 2010) a menos que se les diera una indicación explícita; algunos de ellos tampoco participaron de manera activa ni escucharon con atención a los demás alumnos (Asami, 2015), aunque esto mejoró conforme avanzaba el trabajo, para finalmente lograr la mayor participación de los estudiantes que se mencionó anteriormente.

En cuanto a su rol, el profesor no cumplió completamente con el requisito de asignar y administrar el tiempo con cuidado (Nagasaki y Becker, 1993), ya que muchas veces se asignó demasiado a la resolución individual y a la discusión en equipos, dejando muy poco espacio para la discusión grupal. Esto fue ajustado mediante algunas exposiciones por parte del docente, que formaron parte de los cierres o resúmenes de ciertas sesiones.

Se tuvo en todo momento la intención de fomentar un ambiente que procurara la autonomía, el trabajo en equipo y el trabajo grupal, lo cual se logró en varias de las sesiones; aunque se presentó la dificultad de no poder guiar en todo momento a los estudiantes de forma pertinente para que desarrollaran más sus habilidades y conocimientos, por lo que en ocasiones se llegó a forzar un poco el pensamiento natural de los alumnos para regresarlos hacia el objetivo principal del trabajo.

Como consecuencia, el ambiente en el aula llegó a tornarse caótico en algunas clases, con participaciones aisladas y a veces con poco debate directo, aunque generalmente se logró recuperar una mejor discusión después de algunos minutos.

Sin embargo, también hubo varios estudiantes que mostraron un progreso en cuanto a su forma de comunicar sus ideas matemáticas y hubo aportes valiosos que fueron considerados dentro de las conclusiones a las que se llegaba con el grupo. Estos resultados fueron similares a los reportados por Ninomiya y Pusri (2015), quienes también comentaron sobre que hubo algo de desorden en el aula, junto con participaciones valiosas y cierto bienestar por parte de los alumnos en cuanto al trabajo con múltiples respuestas. Es decir, se considera que, de manera general, se cumplió con el segundo objetivo particular: *Aplicar en el aula la estrategia en un ambiente que procure la autonomía, el trabajo en equipo y el trabajo grupal.*

En cuanto a la recopilación de datos, *a través de la observación y el registro de resultados, el proceso de aplicación de la estrategia* (tercer objetivo particular) se cumplió, aunque representó un trabajo arduo, que, sin embargo, aportó gran cantidad y diversidad de información:

- Se logró que más alumnos participaran durante las discusiones grupales, característica que mencionan Kabiri y Smith (2006) sobre los problemas de final abierto (PFA), comparado con la cantidad de alumnos que hacían comentarios o respondían antes de que se llevara a cabo la estrategia; y que dichas participaciones fueran más allá de expresar una opinión, ya que también las justificaron.
- Los estudiantes expresaron que fue agradable el hecho de que pudieran encontrar su propia solución (Kabiri y Smith, 2006; Ninomiya y Pusri, 2015), comentando que fue “más fácil evitar errores”.
- El 37.5% de los estudiantes mejoraron sus conocimientos y habilidades respecto a sistemas de ecuaciones, según comparación directa entre las pruebas inicial y final (ver Tabla 8).
- Se lograron conexiones entre los temas discutidos, aunque no hubo mucha comprensión del tema en general, bajo la definición que se comentó en la sección 1.3.1 Objetivos. Por ejemplo, los alumnos, en general, no lograron establecer una relación entre el punto de intersección entre dos gráficas y la solución a un sistema de ecuaciones, en su forma gráfica ni algebraica (ver 4.1.1 Observaciones del desarrollo de las sesiones).
- Los aprendizajes enlistados por los alumnos fueron relacionados con el tema, no del tema en sí, por ejemplo, que lograron un mejor manejo del plano cartesiano.

Por otra parte, se han mencionado ya algunos detalles en cuanto al desarrollo de las sesiones, que impidieron un mejor logro de aprendizajes, sin embargo, hay que enfatizar:

- El factor tiempo. En primer lugar y como ya se mencionó, no se proporcionó tiempo suficiente durante el desarrollo de las lecciones para discutir y criticar las opciones propuestas por los alumnos, lo cual probablemente fue factor para una baja internalización de los conceptos revisados (Fonseca y Alfaro, 2010).
    - La intervención en el aula tuvo una duración de ocho sesiones, relativamente continuas respecto a las fechas, en las que se esperaba que los alumnos conocieran los PFA, los aceptaran y aprendieran a manejar múltiples soluciones, dentro de una forma de trabajo a la que no estaban tan acostumbrados. Fue poco tiempo en comparación con las investigaciones reportadas en diversos estudios, donde se ocuparon intervalos de tiempo desde meses hasta años (Shimada, 1997; Pehkonen, 1999). Martínez et al. (2017) mencionan que los cambios ocurridos en los alumnos, y su valoración, fueron permitidos por la larga duración de su proyecto.
    - A pesar de lo anterior, los alumnos consideraron provechoso el tiempo que trabajaron de forma individual y en grupos pequeños, con los que lograron resolver la mayoría de sus dudas.
- La cantidad de problemas. Se presentaron tres problemas de final abierto a los alumnos, suficientes para la temática abordada, aunque muy pocos si se consideran dentro de la metodología del enfoque de final abierto (y dentro de la resolución estructurada de problemas), que implica una cantidad significativa de resolución de problemas en las lecciones (Takahashi, 2006).
- La influencia de la enseñanza tradicional. Como mencionan Chan Chun (2005) y Viseu y Oliveira (2012), el que los alumnos estuvieran más acostumbrados a un enfoque tradicional de enseñanza-aprendizaje, dificultó la integración de todos los alumnos a las discusiones y evitar que se comunicaran entre ellos de forma inoportuna, pero al mismo tiempo los ayudó a conocer y apreciar otra forma de trabajar.
- El aspecto afectivo y las actitudes de los alumnos. Se coincidió con el estudio de Inprashita (2006), en el sentido de que se percibió, a través de comentarios y actitudes de los alumnos, además de lo escrito en el cuestionario de opinión, que algunos alumnos sintieron tensión, ansiedad o aburrimiento.

- Se coincidió también con los resultados de Chan Chun (2005), referentes a que los alumnos buscaron la intervención del profesor para determinar si “iban bien” o si su respuesta era correcta, a lo cual se trató de responder devolviendo las preguntas, aunque algunos alumnos no respondían.
- Se evitó parcialmente que el desarrollo de las sesiones adquiriera un carácter de patrón a seguir, varias veces la discusión tendió a centrarse en soluciones específicas y hubo que dirigir a los estudiantes con preguntas algo más directas de vuelta a una discusión en torno a conceptos. Además, algunos estudiantes optaron por dejar de participar para solamente esperar la conclusión y el resumen, como también menciona Asami (2015).

- Diferencias culturales con alumnos en otros estudios. Existen diferencias en cuanto al comportamiento de los estudiantes, con respecto a los alumnos con los que trabajaron en estudios japoneses, principalmente. Munroe (2015), comenta que los participantes fueron puntuales, cooperativos y preparados para cada lección; mientras que Nagasaki y Becker (1993) mencionan que hay disciplina y atención. Dichas características no fueron observadas en todos los alumnos, dicha formalidad no parece formar parte de la generalidad de los estudiantes con los que se trabajó, que, aunque entusiastas y trabajadores, no siempre cooperaron, ni se prepararon para la lección, ni se mantuvieron atentos a toda la clase.
    - Otra diferencia cultural que representa una desventaja para la aplicación del enfoque es mencionada por Munroe (2015), con respecto a la actitud positiva y perseverante al enfrentarse al problema y aceptar el error. Varios alumnos vieron el equivocarse como una acción mala que había que evitar a toda costa, a pesar de que ellos mismos comentaran que puede aprenderse de los errores.
    - Hubo poca disposición para pedir ayuda a sus pares y a realizar más de un intento para resolver los problemas y sus dudas, con la excepción del trabajo comparando gráficas (ver 4.1.1 Observaciones del desarrollo de las sesiones).

      Este punto es particularmente importante, ya que el mismo Munroe (2015), resalta que estos factores son requisitos para una aplicación exitosa del enfoque abierto; lo cual pudo notarse en el ejercicio antes mencionado de la comparación de gráficas, cuando la discusión matemática se tornó más rica y fue posible obtener conclusiones certeras con las que la mayoría de los alumnos se mostró convencido.

- Situaciones no previstas. El flujo de trabajo se vio afectado por dos paros de labores en el CCH, el primero de 48 horas (afectando una sesión de una hora), el segundo de 72 horas (afectando dos sesiones, una de dos horas y otra de una). Esto implicó la pérdida de ideas que iban a retomarse a la sesión siguiente, y la reorganización de los tiempos indicados en la estrategia.

A pesar de las dificultades observadas, cabe recalcar que durante las sesiones se observó que la mayoría de los alumnos proporcionaron conclusiones valiosas en relación al objetivo general de este trabajo y que casi el 40% de los estudiantes mostró, según la prueba final, haber obtenido conocimientos y habilidades para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, a partir del estudio del método gráfico; por tanto, los problemas de final abierto son útiles para desarrollar los conocimientos y habilidades antes mencionados, en consecuencia, no se rechaza la hipótesis.

Recomendaciones

El enfoque de final abierto tiene un amplio sustento teórico y práctico, gracias a las propuestas e investigaciones de múltiples autores, como se detalló en las secciones correspondientes; las ventajas que este enfoque presenta, compensan el trabajo requerido para aplicarlo en el aula; por lo que se recomienda seguir trabajando con PFA, comenzando con problemas ya probados por otros autores para realizar una adaptación del método para los estudiantes mexicanos, y en particular del CCH, de forma que se pueda obtener más experiencia tanto por parte del profesor como para los estudiantes, y así apartarse de costumbres fomentadas por la enseñanza tradicional, como el aprendizaje pasivo.

Asimismo, dado que el presente trabajo se encuentra dentro de un enfoque mixto de investigación, es decir, implica el paradigma interpretativo (Albert, 2007), que es descriptivo y no generalizable; se recomienda realizar una investigación más extensa en cuanto a tiempo y participantes, que abarque también más elementos cuantitativos.

Lo anterior con la finalidad de que los alumnos con que se trabaje sean una muestra representativa y puedan realizarse más pruebas de evaluación cuyos resultados se procesen mediante estadística, y sea un poco más factible extrapolarlos a una comunidad más grande de estudiantes.

Aunado a esto, se considera recomendable realizar una investigación más extensa, tanto teórica como práctica, referente a las capacidades que el profesor necesita para guiar una estrategia dentro del enfoque de final abierto.

También se sugiere conformar un grupo de trabajo para llevar a cabo una metodología similar a la del estudio de lecciones, donde se cuente con la participación de varios profesores, con el objetivo de reunir una mayor cantidad de experiencia docente que permita una mejor guía durante la aplicación de la estrategia, lo cual puede compensar las desventajas del método, como las dudas respecto a cómo conducirse ante situaciones imprevistas (por ejemplo, ¿de qué manera respetar el flujo de pensamiento de los estudiantes y al mismo tiempo guiarlos hacia un objetivo específico?).

Por otra parte, se recomienda, para investigaciones similares a la presente:

- Realizar proyectos más largos en cuanto a tiempo, para que los alumnos puedan acostumbrarse a la forma de trabajo, de preferencia desde el inicio del curso.
- Proporcionar a los alumnos, de forma más explícita, los objetivos y beneficios que conlleva la forma de trabajo en tres niveles (individual, en equipo y grupal) y el proponer y conocer diversas formas de resolver los problemas.
- Insistir frecuentemente en la importancia de la reflexión individual y grupal; además de la naturalidad del error y el valor del respeto hacia las opiniones diferentes.
- Establecer un control más estricto del tiempo a dedicar en la resolución del problema, con el fin de que la mayor parte de la lección consista en una discusión matemática.
- Indagar sobre las razones que llevaron a los alumnos a preferir el método algebraico en ejercicios como los primeros que realizaron en la prueba final y a disminuir la comprensión que mostraron durante las sesiones.
- Realizar una revisión más exhaustiva, de preferencia con un grupo de trabajo, de los problemas a utilizar en el desarrollo de las sesiones con el fin de que sean lo más adecuados posible para desarrollar los conocimientos y habilidades deseadas.

Referencias

Albert Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa. Claves teóricas.* Madrid: Mc Graw Hill.

Alfaro Carvajal, C., & Barrantes Campos , H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 83-98.

Ángel, A. R. (1992). *Álgebra intermedia* (Segunda ed.). (F. León Hernández, Trad.) México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

Asami Johansson, Y. (2015). *Designing Mathematics Lessons Using Japanese Problem Solving Oriented Lesson Structure A Swedish case study [Diseño de lecciones de matemáticas utilizando la estructura japonesa de lecciones orientada a la resolución de problemas Un estudio de caso sueco].* Linköping, Suecia: Department of Mathematics Linköping University.

Ayllón, M. F., Gómez, I. A., & Ballesta Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y representaciones*, 169-218.

Barajas Sánchez, B. (2019). *Informe de trabajo 2018-2019.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Barrera Mora, F., & Reyes Rodríguez, A. V. (2017). Tareas con diversas soluciones: estructura conceptual en profesores de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 110-122.

Bazán Linares, M. G. (2005). Las recomendaciones de la OCDE respecto a la "pertinencia" del sistema educativo superior mexicano y sus repercusiones en la incorporación de la Formación para el Trabajo en el Mapa Curricular del Bachillerato General de la SEP (1997-2004). *Tesina que para obtener el título de Licenciada en Relaciones Internacionales*. Universidad Nacional Autónoma de México. Facutad de Ciencias Políticas y Sociales.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics [El enfoque de final abierto: una nueva propuesta para la enseñanza* *de las matemáticas].* Reston, Virginia: Mathematics National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Bingolbali, E. (2011). Multiple Solutions to Problems in Mathematics Teaching: Do Teachers Really Value Them? [Múltiples soluciones a problemas en la enseñanza de las matemáticas: ¿los docentes realmente las valoran?]. *Australian Journal of Teacher Education*, 18-31.

Bisquerra Alzina, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* Madrid: La Muralla S. A.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings [Matemáticas abiertas y cerradas: experiencias y entendimientos de los estudiantes]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41-62.

Boggino, N. (2004). *El constructivismo en el aula.* Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How people learn. Brain, mind experience and school [Cómo aprende la gente. Cerebro, experiencia mental y escuela].* Washington, D. C.: National Academy Press.

Cañadas Osinski, I., & Sánchez Bruno, A. (1998). Categorías de respuesta en escalas tipo Likert. *Psicothema, 10*(3), 623-631.

Chan Chun, M. E. (2005). *Using Open-Ended Mathematics Problems A Classroom Experience (Primary) [Uso de problemas matemáticos de final abierto Una experiencia en el aula (primaria)].* Obtenido de National Institute of Education Digital Repository: https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/213/1/2005u5.pdf

De Faria Campos, E. (2008). Algunas reflexiones sobre resolución de problemas en matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32-39.

Díaz Rojas, P. A., & Leyva Sánchez, E. (2013). Metodología para determinar la calidad de los instrumentos de evaluación. *Educación médica superior*, 269-286.

Dirección General de Difusión y Fomento de la Cultura de la Evaluación. (2015a). *PlaneaFasciculo_1.pdf.* Recuperado el Agosto de 2020, de Educación. Secretaría de Educación Pública: http://www.planea.sep.gob.mx/

Dirección General de Difusión y Fomento de la Cultura de la Evaluación. (2015b). *PlaneaFasciculo_2.pdf.* Recuperado el Agosto de 2020, de Educación. Secretaría de eEducación Pública: http://www.planea.sep.gob.mx/

Dirección General de Difusión y Fomento de la Cultura de la Evaluación. (2015c). *PlaneaFasciculo_3.pdf.* Recuperado el Agosto de 2020, de Educación. Secretaría de Educación Pública: http://www.planea.sep.gob.mx/

Dirección General de Información y Relaciones. (1 de Febrero de 1971). Se creo el Colegio de Ciencias y Humanidades. *Gaceta UNAM*, págs. 1-8.

Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades. (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizados.* D. F.

Drooyan, I., & Wooton, W. (1991). *Elementos de álgebra para bachillerato.* (J. H. Pérez Castellanos, Trad.) México: Editorial Limusa.

Elejabarrieta, F., & Iñiguez, L. (2010). Construcción de escalas de actitud tipo Thurst y Likert. *La sociología en sus escenarios*(17). Obtenido de https://revistas.udea.edu.co/index.php/ceo/article/view/6820

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio. Área de Matemáticas. Matemáticas I-IV.* México.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2018a). *Plan de Estudios*. Obtenido de Universidad Nacional Autónoma de México. Colegio de Ciencias y Humanidades: https://www.cch.unam.mx/plandeestudios

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2018b). Obtenido de Universidad nacional Autónoma de México. Colegio de Ciencias y Humanidades: https://www.cch.unam.mx/

Fabila Echauri, A. M., Minami, H., & Izquierdo Sandoval, M. J. (2012). La Escala de Likert en la evaluación docente: acercamiento a sus características y principios metodológicos. *Perspectivas docentes*(50), 31-40.

Fatah, A., Suryadi, D., Sabandar, J., & Turmudi, T. (2016). Enfoque abierto: un esfuerzo para cultivar la habilidad de pensamiento creativo matemático y la autoestima de los estudiantes en matemáticas. *Journal on Mathematics Education, 7*(1), 9-18. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/310781177_Open-ended_approach_An_effort_in_cultivating_students'_mathematical_creative_thinking_ability_and_self-esteem_in_mathematics

Flores Olea, V. (17 de Marzo de 1971). El CCH, una institución universitaria que exigen la sociedad moderna y el desarrollo social. *Revista Siempre*, 30-37.

Fonseca Castro, J., & Alfaro Carvajal, C. (2010). Resolución de problemas como estrategia metodológica en la formación de docentes de matemáticas: una propuesta. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*(6), 175-191.

Foong, P. (2000). Open-ended problems for higher-order thinking in mathematics [Problemas de final abierto para el pensamiento de orden superior en matemáticas]. *Teaching and Learning*, 49-57.

García Irles, M., Sempere Ortells, J., Marco de la Calle, F., & De la Sen Fernández, M. (2011). La rúbrica de evaluación como herramienta de evaluación formativa y sumativa. *IX Jornades de Xarxes d'Investigació en Docència Universitària: disseny de bones pràctiques docents en el context actual.* Alicante: Universidad de Alicante.

Gobran, A. (1990). *Álgebra Elemental.* (E. Ojeda, Trad.) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gortari, E. d. (1978). *El método de las ciencias nociones elementales.* tratados y manuales grijalbo.

Hashimoto, Y. (1997). An example of lesson development [Un ejemplo de desarrollo de lecciones]. En J. P. Becker, & S. Shimada, *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics* (págs. 10-22). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan [Hacia el aula centrada en problemas: tendencias en la resolución de problemas matemáticos en Japón]. *ZDM Mathematics Education, 39*, 503-514. doi:10.1007/s11858-007-0052-1

Inprashita, M. (2006). Open-ended approach and teacher education [Enfoque de final abierto y formación del profesorado]. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 169-177.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2009). Panorama Educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. México.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2017). *Planea Resultados nacionales 2017.* Recuperado el Agosto de 2020, de Educación. Secretaría de Educación Pública: http://www.planea.sep.gob.mx/

Isoda, M. (2006). A Brief History of Mathematics Lesson Study in Japan [Una breve historia del estudio de la lección de matemáticas en Japón]. En M. Isoda, M. Stephens, Ohara, & T. Miyakawa, *Japanese Lesson Study in Mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement* (págs. 8-15). Singapur: World Scientific.

Isoda, M. (2010). Lesson Study: Problem Solving Approaches in Mathematics Education as a Japanese Experience [Estudio de la lección: Enfoques de resolución de problemas en la educación matemática como una experiencia japonesa]. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8*, 17-27. doi:https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.003

Jonassen, D., & Kwon, H. (2001). Communication Patterns in Computer Mediated Versus Face-to-Face Group Problem Solving [Patrones de comunicación en la resolución de problemas grupal mediada por computadora versus cara a cara]. *Educational Technology: Research and Development, 49*(1), 35-51. Obtenido de https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1007/BF02504505

Kabiri, M. S., & Smith, N. (2006). Turning traditional problems into open-ended problems [Convertir los problemas tradicionales en problemas de final abierto]. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 186-192.

Klavir, R., & Hershkovitz, S. (2008). Teaching and Evaluating 'Open-Ended' Problems [Enseñar y evaluar problemas 'de final abierto']. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 20*(5), 23.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach [Cultivar el pensamiento divergente en matemáticas a través de un enfoque de final abierto]. *Asia Pacific Education Review, 7*(1), 51-61. Obtenido de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ752327.pdf

Lehmann, C. H. (1986). *Álgebra.* (T. De Hoyos, Trad.) México: Editorial Limusa.

Mahlobo, R. K. (2007). Open-ended approach to teaching and learning of high school mathematics [Enfoque de final abierto para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria]. South Africa: Vaal University of Technology.

Martínez Rojas, J. G. (2008). Las rúbricas en la evaluación escolar: su construcción y su uso. *Avances en medición*, 129-138.

Martínez, V., Araya, P., & Berger, B. (2017). Descripción del cambio del profesor de matemática desde su propia perspectiva a partir de una experiencia en torno a resolución de problemas de final abierto. *Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 984-1004. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291253784008

Matas, A. (2018). Diseño del formato de escalas tipo Likert: un estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20*(1), 38-47.

Mihajlović, A., & Dejić, M. (2015). Using open-ended problems and problem posing activities in elementary mathematics classroom [Uso de problemas de final abierto y actividades de planteamiento de problemas en el aula de matemáticas de primaria]. *The 9th International MCG Conference*, (págs. 34-40). Sinaia, Rumania.

Morales Bueno, P., & Landa Fitzgerald, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria, 13*, 145-157.

Munroe, L. (2015). The Open-Ended Approach Framework [El marco del enfoque de final abierto]. *European Journal of Educational Research, 4*(3), 97-104.

Nagasaki, E., & Becker, J. (1993). *Classroom Assessment in Japanese Mathematics [Evaluación en el aula de matemáticas japonesa].*

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la educación matemática.* (M. Fernández Reyes, Trad.) Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ninomiya, H., & Pusri, P. (2015). The Study of Open-ended Approach in Mathematics Teaching Using Jigsaw Method: A Case Study of the Water Beaker Problem [El estudio del enfoque de final abierto en la enseñanza de las matemáticas utilizando el método de rompecabezas: un estudio de caso del vaso de agua]. *Faculty of Education, Saitama University*, 11-22.

Nohda, N. (1986). A study of "open-approach" method in school mathematics [Un estudio del método de "enfoque abierto" en las matemáticas escolares]. *Tsukoba J. of Educ. Study in Math*(5), 119-131.

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics [Enseñanza por método de enfoque abierto en matemáticas japonesas]. *Conference of the International*, (págs. 39-53). Hiroshima.

Ochoviet, C., & Scorza, V. (2017). El desarrollo profesional del formador de profesores: Un proyecto de intervención utilizando como herramienta las tareas de final abierto. *Actas del 7º Congreso Uruguayo de Educación Matemática*, (págs. 483-489). Montevideo.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (s.f.). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve.* Obtenido de OECD PISA Publicaciones en español: https://www.oecd.org/pisa/publicacionesdepisaenespaol.htm

Organization for Economic Co-operation and Development. (2019). *Programa para la Evalación Internacional de alumnos (PISA) PISA 2018-Resultados.* Obtenido de OECD PISA: https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem" [Introducción al concepto de "problema de final abierto"]. En E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (págs. 7-11). Finlandia: Editorial Board.

Pehkonen, E. (1999). Open-Ended Problems: A method for an educational change [Problemas de final abierto: un método para un cambio educativo]. *Proceedings of International Symposium on Elementary Maths Teaching*, 56-62.

Pehkonen, E. (2007). Problem solving in mathematics education in Finland [Resolución de problemas en la educación matemática en Finlandia]. *Journal of Education*. Obtenido de https://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ALL/Papers/PEHKON.pdf

Pérez Ariza, K., Álvarez García, E., & Breña Rivero, C. (2016). Reflexiones sobre el concepto de problema matemático. *Revista bases de la ciencia*, 25-34.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* (J. Zugazagoitia, Trad.) México: Editorial Trillas.

Rugarcía, A. (1989). El eslabón perdido en la educación universitaria. *DIDAC*, 3-8.

Sánchez Mendiola, M., Martínez González, A., Buzo Casanova, E. R., Goytia Rodríguez, K., Hernández Flores, M. D., García Minjares, M., & Manzano Patiño, A. P. (2020). *Exámenes para el diagnóstico de conocimientos. Resultados de los alumnos que ingresan al nivel licenciatura, 2020.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Sawada, T. (1997). Developing lesson plans [Desarrollar planes de lecciones]. En J. P. Becker, & S. Shimada, *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics* (págs. 23-35). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Scorza, V. (2017). Las tareas de final abierto: su potencial para la enseñanza de la matemática. *Actas del 7º Congreso Uruguayo de Educación Matemática*, (págs. 73-79). Montevideo.

Shepard, L. A., & Brennan, R. (2006). La evaluación en el aula. En L. A. Shepard, & R. Brennan, *Educational measurement* (M. Domís, Trad., Cuarta ed., págs. 623-646). D. F.: Instituto Nacional para la Evaluación del Educación.

Shimada, S. (1997). The significance of an open-ended approach [La importancia de un enfoque de final abierto]. En J. Becker, & S. Shimada, *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics* (págs. 1-9). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom [Pasar de la retórica a la praxis: problemas que enfrentan los maestros al hacer que los estudiantes consideren múltiples soluciones a problemas en el aula de matemáticas]. *Journal of Mathematical Behavior*, 287-301.

Smith, S., Charles, R., Dossey, J., Keedy, M., & Bittinger, M. (1992). *Álgebra.* (C. H. García, Trad.) Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.

Soto López, C. (2012). *Conocimiento del contenido y de estudiantes que posee el profesor de bachillerato en el contexto del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales.* (Tesis de maestría), Distrito Federal: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Obtenido de https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/974

Stiff, L. V., Johnson, J. L., & Johnson, M. R. (1993). Cognitive Issues in mathematics Education [Problemas cognitivos en la educación matemática]. En P. S. Wilson, *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (págs. 3-20). Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Sullivan, P. (2003). The Potential of Open-Ended Mathematics Tasks for Overcoming Barriers to Learning [El potencial de las tareas de matemáticas de final abiertos para superar las barreras al aprendizaje]. *Mathematics education research : innovation, networking, opportunity : proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 813-816.

Sullivan, P., & Clarke, D. (1992). Problem solving with conventional mathematics content: Responses of pupils to open mathematical tasks [Resolución de problemas con contenido matemático convencional: respuestas de los alumnos a tareas matemáticas abiertas]. *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), 42-60.

Swokowski, E. W. (1983). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* (B. Balmaceda Pérez, C. Muñoz Abogado, L. Quintero de Pinto, & S. Vargas Galindo, Trads.) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Takahashi, A. (2006). Characteristics of japanese mathematics lessons [Características de las lecciones de matemáticas japonesas]. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 25*, 37-44.

Thinwiangthong, S., Inprashita, M., & Loipha, S. (2012). Adaptation of Lesson Study and Open Approach for Sustainable Development of Students' Mathematical Learning Process [Adaptación del estudio de lecciones y enfoque abierto para el desarrollo sostenible del proceso de aprendizaje matemático de los estudiantes]. *Scientific Research*, 906-911.

Villarreal Farah, G. (2010). *Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática en el nivel de secundaria (Tesis doctoral).* España: Universitat de Barcelona.

Viseu, F., & Oliveira, I. (2012). Open-ended Tasks in the Promotion of Classroom Communication in Mathematics [Tareas de final abierto en la promoción de la comunicación en el aula en matemáticas]. *International Electronic Journal of Elementary Education, 4*(2), 287-300.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving [Resolución de problemas matemáticos]. En P. S. Wilson, *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (págs. 57-78). Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Wu, H. (1994). The Role of Open-ended Problems in Mathematics Education [El papel de los problemas de final abierto en la educación matemática]. *The Journal of Mathematical Behavior*, 115-128.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers´ professional development [Las tareas de final abierto como detonante del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas]. *For the Learning of Mathematics*, 15-20.

Anexos

Anexo 1 Estrategia didáctica

En este apartado se incluye la planeación detallada de la estrategia que se aplicó entre enero y febrero de 2020, con base en los elementos presentados en los Capítulos 2 y 3. Se incluyen las actividades a realizar en cada una de las sesiones.

Planeación didáctica

1. Presentación

Profesor:	Lizette Harumi Paulín Zavala
Institución:	CCH Naucalpan
Asignatura/semestre:	Matemáticas I, primer semestre
Unidad	4 Sistemas de ecuaciones lineales
Tema:	Solución gráfica para sistemas de 2x2
Sesiones:	Ocho sesiones (14 horas): Dos de dos horas, una de una hora, dos de dos horas, una de una hora y finalmente dos de dos horas.
Conocimientos previos:	Conceptos de ecuación y función lineal, representación gráfica y algebraica de funciones lineales, incógnita, variable, igualdad, coordenadas de puntos, concepto y cálculo de la razón de cambio y la ordenada al origen de una recta. Además, conocer el proceso para despejar y trazar gráficas de funciones lineales.

2. Metas y objetivos

Del plan de estudios

Objetivo de la unidad:	Al finalizar, el alumno: Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de tales situaciones.
Aprendizajes:	Ante un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables, el alumno comprende que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición Grafica las soluciones a un problema con dos variables e identifica el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las soluciones y su utilidad. El alumno resuelve gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.
Esperados	
Objetivos:	Que el alumno desarrolle los conocimientos matemáticos y las habilidades necesarias para la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas mediante su representación gráfica.

3. Procedimientos

Sesión		Tarea	Objetivo	Tiempo estimado
1		Prueba diagnóstica	Determinar con qué conocimientos previos cuentan los alumnos.	**120** min.
2	Introducción	Resolución de dudas sobre el examen diagnóstico	Reforzar y aclarar los conocimientos previos de los alumnos, necesarios para el tema.	30 min.
	Desarrollo	Resolución el Problema 1 de forma individual.	Notar que una situación problemática puede tener más de una solución.	15 min.
		Comentar la solución al Problema 1 en equipos	Compartir soluciones y sintetizarlas para luego expresar de forma algebraica una situación que involucra dos variables.	15 min.
		Comentar en forma grupal la solución al Problema 1	Reunir y validar conclusiones de equipos. Representar en forma gráfica una situación que involucra dos variables.	20 min.
		Resolver segunda parte del Problema 1	Relacionar dos ecuaciones con dos variables que representan dos casos de una misma situación.	20 min.
	Cierre	Conclusiones en plenaria.	Sintetizar los conocimientos adquiridos durante la sesión para reafirmarlos e identificar dudas.	20 min.
3	Introducción	Repaso y dudas de la sesión anterior.	Recuperar las conclusiones de la sesión anterior.	10 min.
	Desarrollo	Comparar gráficas	Observar que pueden existir cero, uno o más puntos de intersección entre pares de gráficas.	20 min.
		Comentar en forma grupal observaciones sobre las gráficas.	Conjeturar sobre el significado del punto de intersección, buscando concluir que es solución simultánea a dos ecuaciones.	20 min.
	Cierre	Conclusiones en plenaria	Recopilar los comentarios sobre la tarea para dar una conclusión.	10 min.
4	Introducción	Recuperar ideas de las sesiones pasadas.	Recordar las conclusiones obtenidas anteriormente.	10 min.
	Desarrollo	Resolución del Problema 2 de forma individual	Utilizar las conclusiones de la sesión anterior en un ejemplo más específico.	15 min.
		Comentar la solución al Problema 2 por equipos.	Comparar soluciones para determinar cuáles son correctas y sintetizar observaciones.	20 min.
		Discutir solución en forma grupal	Compartir soluciones de los equipos para validarlas y concluir sobre la solución al Problema 2	25 min.

		Responder un cuestionario en torno al concepto de ecuación.	Reforzar algunos conocimientos previos requeridos para el tema.	20 min.
	Cierre	Comentar respuestas al cuestionario en forma grupal	Comparar las respuestas de los alumnos y concluir sobre su validez.	20 min.
		Resolver un ejercicio sobre planteamiento de ecuaciones	Comentar sobre dudas que persistan, a partir de la resolución del ejercicio.	10 min.
5	Introducción	Recuperar ideas de las sesiones pasadas.	Recordar las conclusiones obtenidas anteriormente.	10 min.
	Desarrollo	Resolver parte A del Problema 3, de forma individual.	Indagar sobre el punto de intersección entre dos rectas.	20 min.
		Comentar soluciones al Problema 3A en equipos	Comparar soluciones y discutir sobre las diferencias entre ellas.	15 min.
		Presentación de conclusiones	Validar las soluciones propuestas por los equipos.	10 min.
		Resolver parte B del Problema 3, de forma individual.	Indagar sobre el punto de intersección entre dos rectas.	20 min.
		Comentar soluciones al Problema 3B en equipos	Comparar soluciones.	15 min.
		Presentación de soluciones al Problema 3B	Validar las soluciones y comentar sobre las diferencias y similitudes entre ellas, haciendo conjeturas sobre ellas.	15 min.
	Cierre	Recopilar conclusiones de la sesión.	Resumir lo visto en la lección.	15 min.
6	Introducción	Recuperar ideas de las sesiones pasadas.	Recordar las conclusiones obtenidas anteriormente.	5 min.
	Desarrollo	Resolver parte C del Problema 3	Plantear sistemas de ecuaciones en su representación gráfica.	15 min.
		Comentar soluciones por equipo	Validar y comentar las soluciones individuales para redactar una conclusión.	15 min.
		Resolver parte D del Problema 3	Escribir la representación algebraica a las soluciones propuestas anteriormente.	15 min.
	Cierre	Plenaria sobre soluciones a los problemas resueltos.	Concluir sobre lo visto durante la sesión.	10 min.

7	Introducción	Revisión de conclusiones de sesiones anteriores.	Recuperar ideas y conceptos de sesiones pasadas.	5 min.
		Resolución de la parte E del Problema 3.	Reflexionar sobre el punto de intersección entre dos gráficas, en relación con su representación algebraica, hacer conjeturas sobre su significado.	5 min.
	Desarrollo	Discusión en plenaria respecto a la solución de la parte E del Problema 3.	Concluir respecto al punto de intersección como solución a un sistema de ecuaciones, sin importar su representación.	10 min.
		Resolución de la parte F del problema 3, de forma individual.	Hacer conjeturas sobre el comportamiento de las gráficas cuando se tiene un sistema de ecuaciones sin solución.	20 min.
		Comentar soluciones al Problema 3F en equipo.	Comparar las soluciones propuestas y concluir al respecto.	15 min.
		Resolución de la parte F del problema 3, de forma individual.	Determinar el comportamiento de las gráficas cuando se tiene un sistema de ecuaciones sin solución.	15 min.
		Resolución de la parte G del problema 3, de forma individual.	Determinar el comportamiento de las gráficas cuando se tiene un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones.	15 min.
		Comentar soluciones al Problema 3G en equipo.	Comparar las soluciones propuestas y concluir al respecto.	20 min.
	Cierre	Plenaria sobre las soluciones a los Problemas 3F y 3G.	Concluir sobre los sistemas de ecuaciones lineales sin solución y con infinitas soluciones, en sus representaciones gráfica y algebraica.	15 min.
8	Introducción	Recuperar ideas de las sesiones pasadas.	Recordar las conclusiones y conceptos revisados anteriormente.	10 min.
	Desarrollo	Ejercicio sobre cantidad de soluciones a un sistema de ecuaciones.	Identificar la cantidad de soluciones que tiene un sistema de ecuaciones, a partir de su representación gráfica o algebraica.	20 min.
	Cierre	Plenaria sobre el ejercicio y conclusiones.	Verificar las soluciones al ejercicio anterior y resumir lo visto en las sesiones	20 min.
		Evaluación final	Determinar los conocimientos y habilidades adquiridos	70 min.

4. Materiales y recursos didácticos

- Pizarrón
- Plumones
- Hojas de trabajo

Secuencia didáctica

Sesión		Actividades
1		**1.1** Se llevará a cabo una prueba diagnóstica escrita.
2	Introducción (30 min)	**1.1** El profesor dirigirá la resolución de dudas sobre la prueba diagnóstica, guiando a los alumnos mediante preguntas para que ellos mismos recuerden, selecciones y resuelvan correctamente ejercicios de la prueba.
	Desarrollo (70 min)	**2.1** Cada alumno recibirá el Problema 1 en un ahoja de trabajo y resolverá la primera parte de este. Se espera que identifique, por lo menos, que tiene "muchas" soluciones. Preguntas guía: ¿es la única solución posible? ¿Por qué eliges esa solución? ¿De qué otra manera podrías resolver? **2.2** Los alumnos formarán equipos de 4 personas, para comentar qué soluciones determinaron para la primera parte del Problema 1. Se espera que comiencen a buscar formas de representar todas las soluciones que propongan, como tablas, gráficas o expresiones algebraicas. Preguntas guía: ¿Cómo escribirían todas las soluciones? ¿Cómo incluirían otras soluciones que se les ocurran? **2.3** Al azar, un representante de cada equipo escribirá en el pizarrón la conclusión a la que llegaron. Después, se solicitará al grupo que indique cuál es la solución correcta y porqué. Una vez se llegue a un consenso, se utilizarán las preguntas necesarias para llegar a una representación gráfica de las soluciones: ¿Cómo podrían representar todas sus soluciones (de todo el grupo)? ¿Cómo podrían reescribir de otra forma la lista de soluciones? ¿Cómo utilizarían una tabla? ¿Cómo utilizarían una gráfica? **2.4** De forma individual (5 minutos), luego en equipo, los alumnos resolverán la segunda parte del Problema 1. Luego, se les solicitará que respondan: ¿Puedes representarlo de manera similar a la primera parte? De ser así, construye una tabla y/o traza una gráfica sobre el mismo plano cartesiano que utilizaste. ¿Qué semejanzas y diferencias observas entre las dos partes del Problema 1? Se espera que entre las semejanzas se sugiera el punto de intersección entre ambas gráficas.
	Cierre (20 min)	**3.1** Un representante de cada equipo escribirá en el pizarrón sus conclusiones, para comentar de manera grupal sobre el significado de cada punto de las gráficas y cada fila de las tablas, en particular sobre el punto de intersección. Preguntas guía: ¿qué relación hay entre los números en la tabla y la gráfica? ¿Dónde se representan los números de la tabla (sus soluciones) en la gráfica? ¿Dónde se localiza el punto de intersección en la gráfica? ¿Dónde en las tablas?

	Introducción (10 min)	**1.1** Se solicitará a un alumno, voluntario, que mencione las ideas más importantes de la sesión anterior. Otros estudiantes pueden apoyarlo.
3	Desarrollo (40 min)	**2.1** Cada alumno recibirá un juego de tablas y gráficas en papel transparente (ver Gráficas y tablas (sesión 4)), con la instrucción de compararlas por pares, como ellos deseen, y determinar aproximadamente las coordenadas de los puntos de intersección. El trabajo será en parejas. Se espera que observen que no siempre hay un punto de intersección único. Preguntas guía: ¿Qué característica tiene un punto de intersección? En las gráficas ¿cómo sabes que el punto señalado es una intersección? ¿Por qué lo afirmas? ¿Es el único punto? En las tablas, ¿cómo se representa un punto de una gráfica en una tabla? ¿Cómo representas la tabla en una gráfica? ¿Cómo sabes que el par ordenado señalado pertenece a una intersección? ¿Por qué los otros no los son? ¿Es el único punto de intersección? **2.2** Algunos alumnos compartirán sus respuestas, justificándolas. Primero las relacionadas con las gráficas, para conducir la discusión al hecho de que no necesariamente hay un solo punto de intersección. Preguntas guía: ¿Solo existe esa respuesta? ¿Todos tienen la misma solución? ¿Cuántos puntos de intersección hay?
	Cierre (10 min)	**3.1** Se pedirá a un alumno que mencione los puntos más importantes de la sesión. El profesor destacará que puede haber más de un punto de intersección, pero depende de la forma de la gráfica.
	Introducción (10 min)	**1.1** Se solicitará a un alumno que, de forma voluntaria, comente las ideas que considera principales de las sesiones anteriores. Otros alumnos pueden apoyarlo.
4	Desarrollo (80 min)	**2.1** Cada alumno recibirá la hoja de trabajo del Problema 2 y la indicación de trabajar solamente con la parte A. Preguntas guía: ¿Cómo es la gráfica que se solicita? ¿Qué forma tiene? ¿Una gráfica de la misma forma puede intersecar dos veces a la que tienes? ¿Qué otras formas podrías utilizar? ¿Es la única respuesta posible? ¿Qué característica(s) debe(n) tener las gráficas solución? **2.2** En equipos de 4 personas, los alumnos discutirán y compararán sus soluciones, escribiendo las conclusiones a las que lleguen en una hoja de trabajo similar a la que recibieron en la actividad anterior. Preguntas guía: ¿qué similitudes y diferencias tienen sus soluciones? ¿Todas son válidas? ¿Por qué? ¿Hay más soluciones? ¿Qué característica(s) debe cumplir su respuesta para ser correcta? **2.3** Un representante de cada equipo dibujará un bosquejo de su solución en el pizarrón. Se discutirá cuáles son correctas y cuáles no. Además de preguntar cómo se puede lograr un solo o más de dos puntos de intersección. Preguntas guía: ¿por qué la respuesta es correcta/ incorrecta? ¿Qué forma tienen las gráficas que dibujaron? ¿Qué forma tendría una gráfica que interseque una cantidad diferente de veces? **2.4** Se planteará a los alumnos las siguientes preguntas, para que las comenten primero en equipos cuatro personas y posteriormente en plenaria para generar conclusiones. La finalidad es recordar el concepto de ecuación.

		• ¿Qué características tiene la expresión $-2x + y = 1$? • Da ejemplos de ecuaciones y de expresiones algebraicas (contraejemplos de ecuaciones). • Traza la gráfica de la ecuación $-2x + y = 1$. • ¿Qué puedes decir acerca de las coordenadas de un punto de la gráfica? Preguntas guía: ¿Qué tiene o qué no tiene la expresión mostrada? ¿Te recuerda a algún concepto que hayas vistos antes? ¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una expresión algebraica? ¿Qué conclusiones se obtuvieron al resolver y comentar el Problema 1?
	Cierre (30 min)	**3.1** Para cada pregunta, algunos alumnos compartirán su respuesta y se discutirá si es válida y si puede complementarse. Preguntas guía: ¿son las únicas características? ¿Recuerdan algún concepto relacionado? ¿Por qué esa respuesta puede o no ser una ecuación (o una expresión algebraica)? ¿Qué tienen en común las ecuaciones que plantearon? ¿Qué tienen en común las expresiones algebraicas? Este punto en particular, ¿dónde se observa en la gráfica (o la tabla)? **3.2** El profesor ayudará a realizar un resumen de las preguntas sobre ecuación, solicitando que algunos alumnos aporten una conclusión, para corregirla o complementarla de ser necesario. Finalmente, un alumno voluntario recordará las conclusiones obtenidas de la primera parte de la sesión.
	Introducción (10 min)	**1.1** Se solicitará a los alumnos que aporten ideas sobre las sesiones anteriores, a manera de lluvia de ideas.
5	Desarrollo (35 min)	**2.1** Cada alumno recibirá una hoja de trabajo con el Problema 3, con la instrucción de trabajar el inciso A y especificándose que cada parte de dicho problema se irá resolviendo conforme se indique. Preguntas guía: ¿Puedes localizar todos los datos en la representación que se te proporciona? ¿Qué más necesitas para trazar la recta que se te solicita? ¿Qué opciones tienes para colocar el punto? ¿Por qué es correcta tu solución? ¿Es la única posible? ¿Cómo puedes identificar la intersección? **2.2** En equipos de cuatro alumnos, compartirán sus soluciones e impresiones. Escribirán sus conclusiones en una hoja de trabajo similar a la que utilizaron individualmente. Preguntas guía: ¿Por qué es correcta/ incorrecta esa solución? ¿Qué diferencias hay entre sus propuestas? ¿Pueden escribir una solución que represente a todas las que propusieron? ¿Hay algún caso que no sea solución, cuál? **2.3** Un integrante de cada equipo hará en el pizarrón un bosquejo de su solución propuesta, explicando brevemente su conclusión y la razón por la que eligieron dicha respuesta. Los demás le indicarán si es correcta o no y porqué. **2.4** Se trabajará sobre la parte B del Problema 3 en el espacio correspondiente de la hoja de trabajo y de manera individual. Preguntas guía: ¿Puedes localizar todos los datos en tu hoja de trabajo? ¿Qué diferencias y/o similitudes hay con otros problemas que hayas resuelto?

		2.5 Con los mismos equipos con los que trabajaron anteriormente, los alumnos comentarán sus respuestas, escribiendo sus conclusiones. Preguntas guía: ¿En qué se parecen o diferencian sus respuestas? ¿Cómo saben que son o no correctas? ¿Hay alguna similitud con la parte A del problema? ¿Qué pueden concluir sobre sus soluciones? **2.6** Los alumnos compartirán algunas soluciones con el grupo y comentarán porqué son o no correctas, además de algunas semejanzas y diferencias con la solución de la parte A del problema.
	Cierre 15 min	**3.1** En plenaria, se comentará lo que los alumnos necesitaron para dar una respuesta correcta, en cuanto a la localización del segundo punto en el caso de la parte A y las características de la recta en la parte B.
	Introducción (10 min)	**1.1** Se pedirá a un alumno que comente brevemente las ideas principales que recuerde de sesiones anteriores.
6	Desarrollo (40 min)	**2.1** Los alumnos recibirán las hojas de trabajo con el Problema 3, del cual trabajarán la parte C en forma individual. Preguntas guía: ¿Con qué datos cuentas? ¿Qué pide el problema? ¿Has resuelto algún problema similar? ¿Cómo eliges tu primer punto (correspondiente a la recta L_4)? ¿Cómo influye en la elección de tu segundo punto? ¿Puedes proponer más soluciones? **2.2** En los equipos con los que ya habían trabajado, los alumnos compartirán sus soluciones y escribirán una conclusión en la hoja de trabajo correspondiente. Preguntas guía: ¿Cómo saben que la respuesta es correcta o no? ¿Pueden comprobarlo? ¿Cómo podrían escribir todas las soluciones que se les ocurran? **2.3** Los alumnos resolverán la parte D del Problema 3, primero individualmente y luego escribiendo conclusiones en equipo. Preguntas guía: ¿Qué se necesita para escribir una ecuación asociada a una recta? ¿Puedes usar una función o algo similar? ¿Qué variables tienes? ¿Cómo puedes calcular la pendiente? ¿Cómo puedes calcular la ordenada al origen de la recta? ¿Necesitas algún otro dato? ¿Cómo puedes comprobar que la expresión que propones es correcta?
	Cierre (10 min)	**3.1** En plenaria, se resumirán las ideas y conclusiones obtenidas durante la sesión.
	Introducción (10 min)	**1.1** Un alumno voluntario compartirá las ideas que considere principales de las sesiones anteriores. **1.2** Se resolverá la parte E del Problema 3 de forma individual, escribiendo la respuesta en la hoja de trabajo correspondiente.
7	Desarrollo (95 min)	**2.1** Se realizará una discusión en plenaria sobre el punto de intersección de dos gráficas en su representación algebraica, con base en sus respuestas a la parte E del Problema 3. Se espera que los alumnos comenten que, al sustituir el valor de las coordenadas correspondientes en ambas ecuaciones, se obtiene un resultado válido y surja idea de sistema de ecuaciones

		Preguntas guía: ¿Cómo se representó/ identificó el punto de intersección en una tabla y en una gráfica? ¿Cómo obtienen una tabla a partir de la representación algebraica? ¿Has revisado anteriormente pares de ecuaciones con un punto en común? De ser necesario, el profesor recalcará que se ha estado trabajando con sistemas de ecuaciones lineales. **2.2** Se resolverá, de forma individual, la parte E del Problema 3. Preguntas guía: ¿cómo puedes representar tus datos? ¿Cómo sería útil lo que has resuelto hasta ahora? Piensa en dos rectas cualesquiera, ¿cómo puedes colocarlas de modo que nunca se crucen? ¿Es la única solución? ¿Qué similitudes y diferencias hay entre las ecuaciones que planteaste? **2.3** Los alumnos compararán, con el mismo equipo con el que han trabajado, sus propuestas de solución, discutiendo sobre si son correctas o no y por qué. Preguntas guía: El problema menciona que el plano es infinito, ¿qué significa eso? ¿Las rectas que proponen pueden prolongarse más? ¿Por qué? ¿Qué pasará si prolongan sus rectas? En las respuestas correctas, ¿qué similitudes y diferencias hay entre las ecuaciones? Recordando que tienen un sistema de ecuaciones, ¿qué pasa con el punto de intersección en un caso como este? **2.4** En plenaria, se presentarán las conclusiones de los equipos y su justificación, con el fin de llegar a que la solución es una recta paralela, en cuanto a la representación gráfica, y que en la representación algebraica esto se observa en la razón de cambio. Preguntas guía: ¿Qué similitudes y diferencias entre los pares de ecuaciones se repiten en todas las soluciones **2.5** Se resolverá, de manera individual, la última parte del Problema 3 (parte G). Las respuestas se escribirán, como todas las anteriores, en la hoja de trabajo correspondiente. Preguntas guía: ¿De qué manera puedes representar la situación? ¿Qué observas en la representación gráfica? ¿Qué ocurre con las ecuaciones, hay semejanzas y/o diferencias? ¿Cómo escribirías un número, ecuación, expresión algebraica, tabla, etc., que te sirva para escribir todas las soluciones a este sistema? **2.6** Los alumnos comentarán, por equipos, las soluciones a las que llegaron, escribiendo sus conclusiones en la hoja de trabajo correspondiente. Preguntas guía: ¿Por qué consideran que la respuesta es correcta? ¿Hay más soluciones diferentes? ¿Por qué piensan que tienen (o no) un sistema de ecuaciones?
	Cierre (15 min)	**3.1** En discusión con todo el grupo, se resumirán las conclusiones obtenidas durante la sesión, enfatizando el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y sus características.
8	Introducción (10 min)	**1.1** Mediante lluvia de ideas, se enlistarán las ideas y conceptos que los alumnos propongan, de lo visto a lo largo de todas las sesiones.

Desarrollo (20 min)	**2.1** Cada alumno recibirá una hoja de trabajo con cinco sistemas de ecuaciones, dos en su representación gráfica y tres en algebraica, con la instrucción de indicar cuántas soluciones tiene cada sistema y cuáles son. Se resolverá de forma individual. Preguntas guía: ¿Qué características de los sistemas te sirven para resolver? ¿Cómo compruebas tu resultado?
Cierre (20 min)	**3.1** Se comentará de forma grupal las soluciones al ejercicio anterior, justificando la respuesta. **3.2** Con base en las respuestas al ejercicio y las ideas reunidas al inicio, se comentarán dudas y reafirmarán ideas que así lo requieran.
(70 min)	Evaluación final, escrita e individual.

Anexo 2 Hojas de trabajo y ejercicios

En este apartado se muestran las hojas de trabajo que se entregaron a los alumnos con los problemas de final abierto a trabajar durante el desarrollo de la estrategia, además de las gráficas y tablas mencionadas en la cuarta sesión para complementar el trabajo. Finalmente, se muestran los ejercicios que también se entregaron a los alumnos, correspondientes a la octava sesión.

Problemas

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. PLANTEL NAUCALPAN
PROBLEMA 1

Nombre: ______________________________________ Grupo: ______ Fecha: __________

Instrucciones: Responde detalladamente a las preguntas relacionadas con el siguiente problema, después resuélvelo, escribe con tinta TODO el procedimiento que sigas, no importa que te equivoques, solo señala el error y continúa. Dicho procedimiento tiene un valor de 4 puntos y el resultado, de 2 puntos. Puntuación máxima: 10

Problema: Se sabe que dos números suman 13, ¿cuáles son esos números?

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**

1 de 2

Segunda parte

Nota: Espera instrucciones antes de continuar. El puntaje es el mismo que para el problema anterior.

Problema: ¿Cuáles serían los números si se utilizara una resta en vez de una suma para obtener el número 13? Representa tus resultados como en el problema de la suma de números.

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. PLANTEL NAUCALPAN
PROBLEMA 2

Nombre: ____ Grupo: ______ Fecha: __________

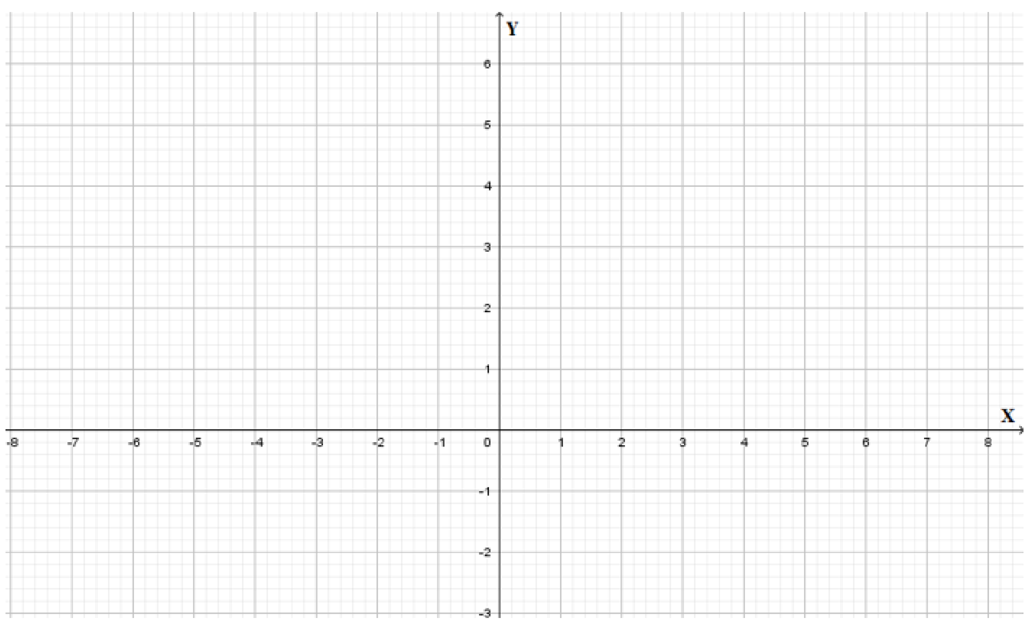
Instrucciones: Responde detalladamente a las preguntas relacionadas con el siguiente problema, después resuélvelo, escribiendo TODO el procedimiento que sigas utilizando tinta, no importa que te equivoques, sólo señala el error y continúa. Dicho procedimiento tiene un valor de 4 puntos y el resultado, de 2 puntos. Puntuación máxima: 10

Problema: Bosqueja una gráfica que interseque dos veces con la gráfica de $y - x = 1$. Escribe cuáles son estas intersecciones.

a) ¿Qué solicita el problema? **(1 punto)**

b) ¿Qué datos proporciona? **(2 puntos)**

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo? **(1 punto)**



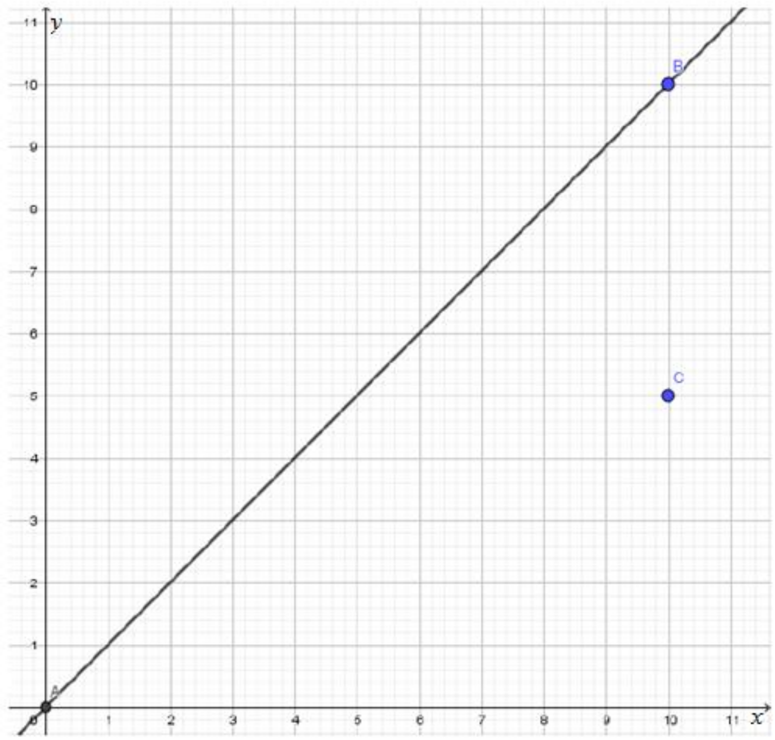
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. PLANTEL NAUCALPAN
PROBLEMA 3

Nombre: ____ Grupo: ______ Fecha: __________

Instrucciones: Responde detalladamente a las preguntas relacionadas con el siguiente problema, después resuelve cada parte esperando indicaciones de tu profesor, escribiendo TODO el procedimiento que sigas utilizando tinta, no importa que te equivoques, sólo señala el error y continúa.

Puntuación: Para cada parte del problema, la puntuación máxima es de 10, donde 1 punto corresponde a la pregunta a), 2 puntos a la pregunta b) y un punto a la pregunta c); el procedimiento seguido tiene un valor de 4 puntos y el resultado final de 2 puntos.

Parte A: Una recta L_1 pasa por los puntos A(0,0) y B(10,10). Otra recta L_2 pasa por el punto C(10,5), ¿por cuál otro punto debería pasar L_2 para que se interseque con L_1? ¿En qué punto se tocarán?

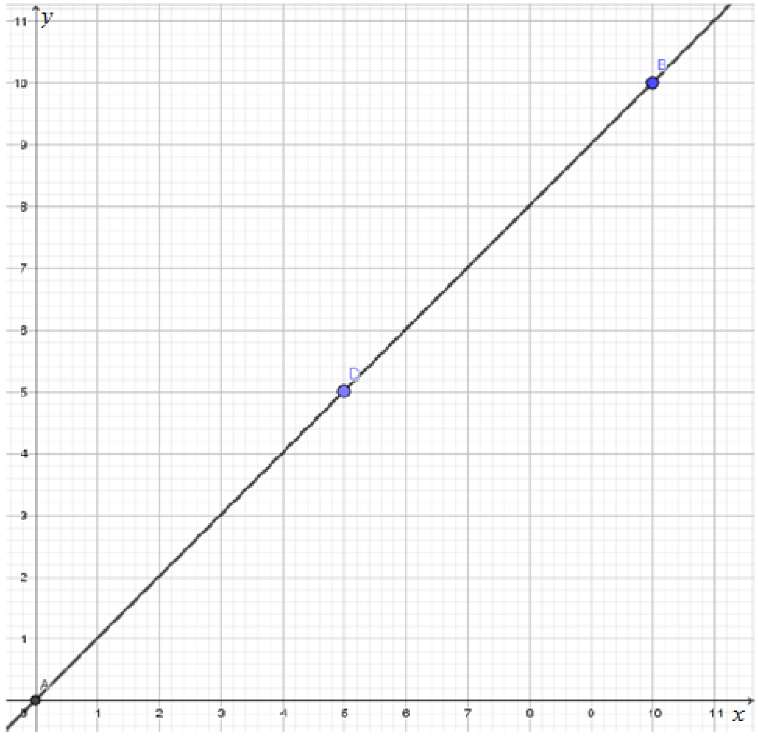


a) ¿Qué solicita el problema?

b) ¿Qué datos proporciona?

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo?

Parte B: Considerando la recta L_1 del problema A, ¿cómo sería la recta L_3 si se deseara que tocara a L_1 en el punto D(5,5)?



a) ¿Qué solicita el problema?

b) ¿Qué datos proporciona?

c) ¿Qué estrategia podrías utilizar para resolverlo?

Parte C: Si L_4 pasara por el punto A(0,0) y L_5 por el punto E(10,0), ¿por cuál otro punto debería pasar cada recta para que se intersequen en el primer cuadrante del plano cartesiano? ¿En qué punto se tocarán?

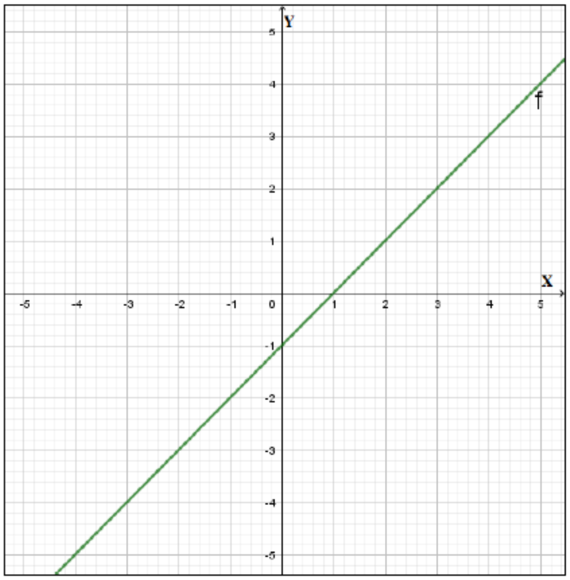
Parte D: Hasta el momento se han utilizado gráficas para resolver, sin embargo, cada recta tiene asociada una ecuación. Escribe las ecuaciones referidas a todas las rectas utilizadas en los incisos anteriores.

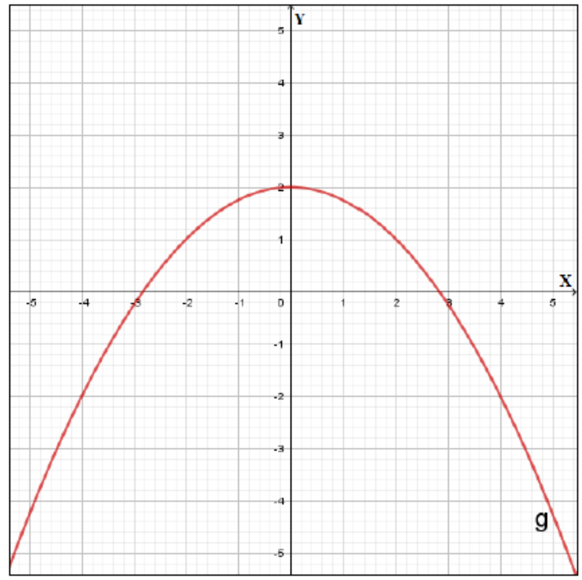
Parte E: ¿Qué relación tiene el punto o los puntos donde se cruzan las rectas, con las parejas de ecuaciones que acabas de plantear?

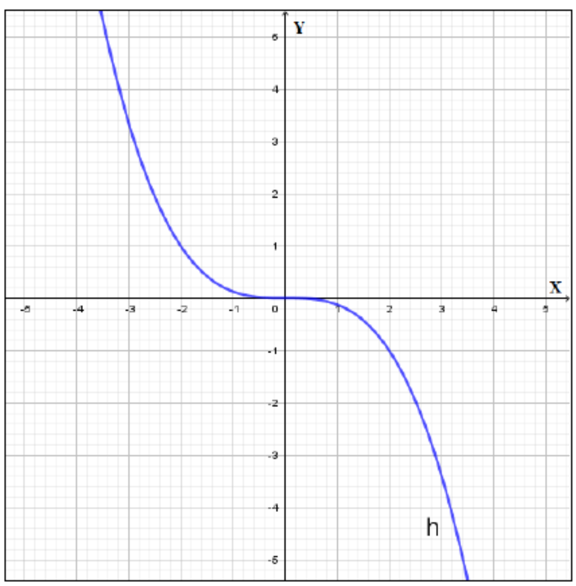
Parte F: Considerando que el plano cartesiano es infinito, ¿cómo debería ser una recta que nunca se cruce con la recta L_6, que pasa por los puntos F(1,1) y G(9,9)? Plantea las ecuaciones para la recta L_6 y la correspondiente a tu respuesta, ¿tienen algo en común dichas ecuaciones? ¿Qué significado tienen como sistema de ecuaciones?

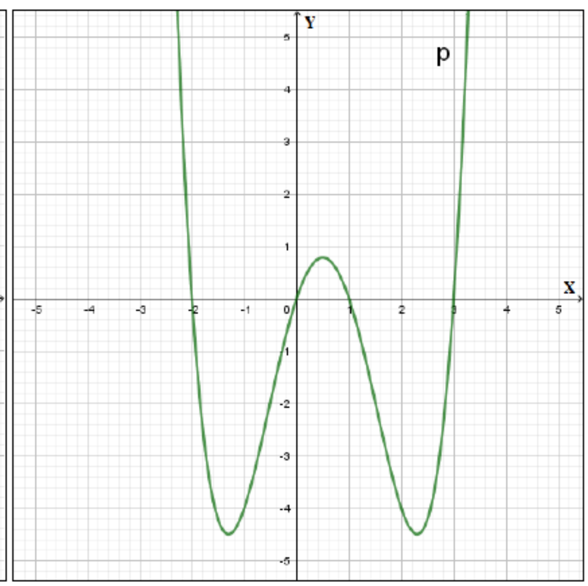
Parte G: Si se tiene la recta representada por $x + y = 3$ y se sabe que otra recta pasa por el punto H$(0, 3)$ y el punto I$(3, 0)$, ¿cómo son las gráficas que representan la situación? ¿Cómo son las ecuaciones? ¿Cuál es la solución del sistema?

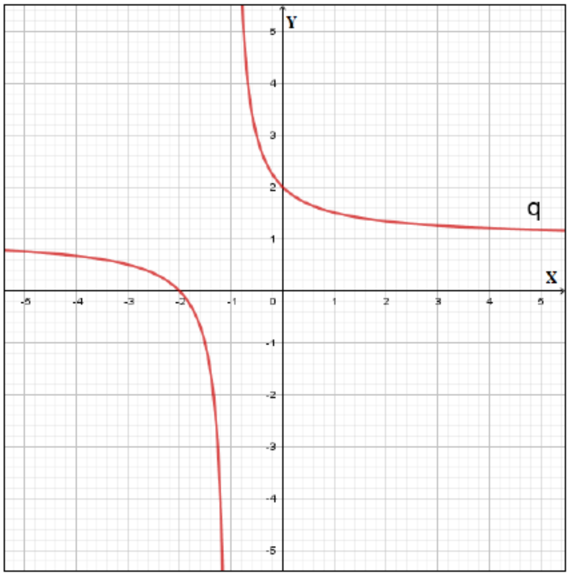
Gráficas y tablas (sesión 4)

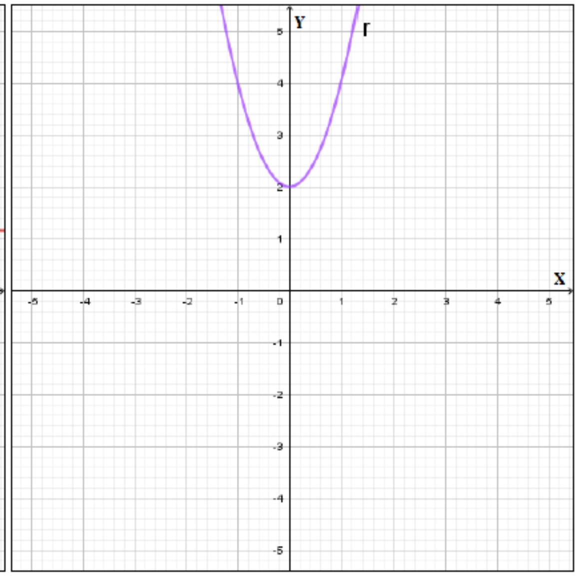








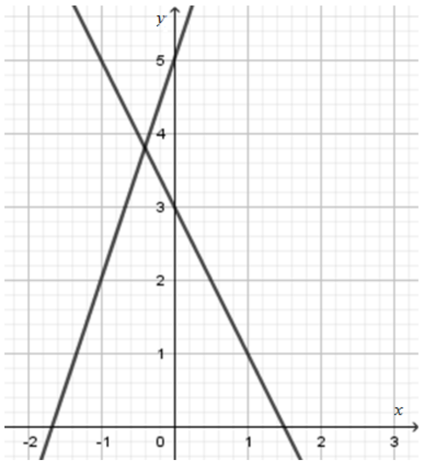


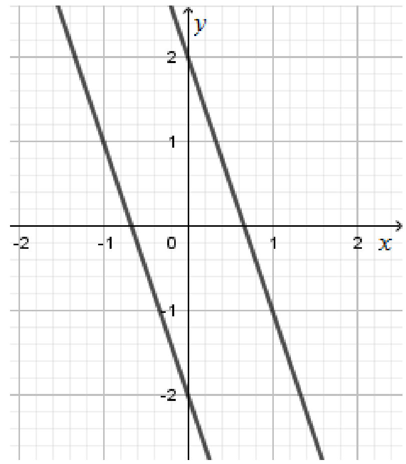


x	f(x)	x	g(x)	x	h(x)	x	p(x)	x	q(x)	x	r(x)
-5	-6	-5	-4.25	-5	15.625	-5	360	-5	0.75	-5	52
-4	-5	-4	-2	-4	8	-4	140	-4	0.666	-4	34
-3	-4	-3	-0.25	-3	3.375	-3	36	-3	0.5	-3	20
-2	-3	-2	1	-2	1	-2	0	-2	0	-2	10
-1	-2	-1	1.75	-1	0.125	-1	-4	-1		-1	4
0	-1	0	2	0	0	0	0	0	2	0	2
1	0	1	1.75	1	-0.125	1	0	1	1.5	1	4
2	1	2	1	2	-1	2	-4	2	1.333	2	10
3	2	3	-0.25	3	-3.375	3	0	3	1.25	3	20
4	3	4	-2	4	-8	4	36	4	1.2	4	34
5	4	5	-4.25	5	-15.625	5	140	5	1.166	5	52

Ejercicio (sesión 8)

*Indica la cantidad de soluciones que tiene cada uno de los siguientes sistemas, justificando su respuesta:

a) 

b) 

c) $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 6x + 9y &= 3 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 2x - 4y &= 1 \end{aligned}$$

*Al terminar, resuelve los sistemas.

Anexo 3 Instrumentos de evaluación

Como se menciona en el título de este apartado, se incluyen los tres instrumentos de evaluación empelados en esta investigación, a saber, la prueba diagnóstica, la prueba final y el cuestionario de opinión.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. PLANTEL NAUCALPAN
DIAGNÓSTICO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2

Nombre: ____ Grupo: ______ Fecha: __________

Instrucciones: Escribe TODO el procedimiento que sigas para contestar cada ejercicio, indicando a cuál pertenece y anexando las hojas que necesites. No se permite el uso de calculadora ni material de consulta.

Puntuación máxima: 10

1. Resuelve las siguientes ecuaciones. **(0.5 puntos)**

a) $(2w-5)(-3)=9-3w$

b) $(4)[2(x-1)+2]+1=-7$

2. Anota en el paréntesis de la columna derecha el inciso de la ecuación equivalente de la columna izquierda que le corresponde. **(1.5 puntos)**

a) $2w-4=12$	$-8(w+1)=4(w-3)$ ( )
b) $(4w+1)(5)=3w-7$	$w=8$ ( )
c) $\frac{w+1}{4}=w$	$3w=1$ ( )
d) $w-3=-2(w+1)$	$40w+24=6w$ ( )

3. Traza la gráfica de las siguientes funciones. **(1.5 puntos)**

a) $f(x)=\frac{1}{3}x-1$

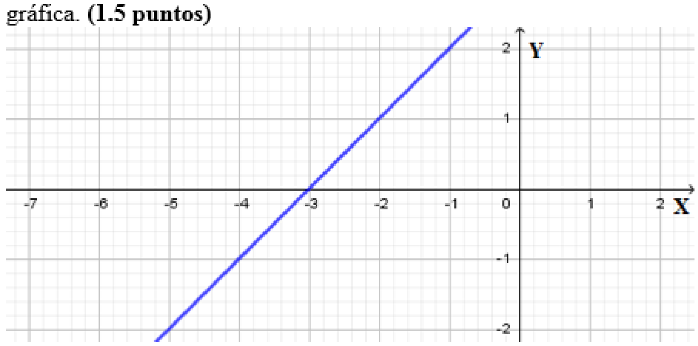
b) $h(x)=-2x+3$

4. Determina si los puntos A(2, 5), B(-3,0) y C(1,1) pertenecen a las funciones siguientes. Escribe frente a la función correspondiente los puntos que sí pertenecen. **(1 punto)**

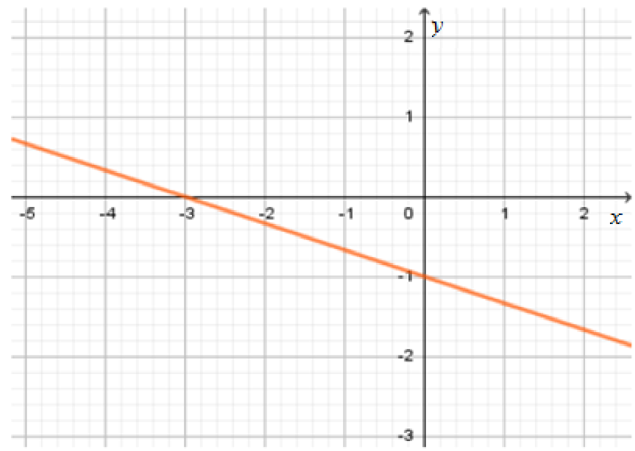
a) $f(x)=4x-3$

b) $g(x)=-x+2$

5. Escribe la regla de correspondencia para cada una de las siguientes funciones, representadas de forma gráfica. **(1.5 puntos)**

a) 

1 de 2



b)

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones: **(1.5 puntos)**

a) $\begin{aligned} 4x + 2y &= 0 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x - 2y &= -5 \\ -4x + 3y &= 7 \end{aligned}$

7. Comprueba para cuál sistema de ecuaciones la solución es $x = 3$, $y = 2$. Marca con una X el inciso correspondiente, recuerda incluir tu procedimiento. **(1 punto)**

a) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4x + y &= 14 \\ 2x - y &= 8 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$

8. Resuelve los siguientes problemas y plantea ecuaciones que los representen: **(1.5 puntos)**

a) La suma de los números a y b es 1. Se sabe que existe otro número, simbolizado con la letra c, que cumple con que $a = \frac{c}{2}$ y $b = -\frac{c}{3}$. Determina el valor de a.

b) Juan pagó $50 por 3 cajas de taquetes y 5 cajas de clavos. Pedro compró 5 cajas de taquetes y 7 de clavos y tuvo que pagar $74. ¿Cuál es el precio de cada caja de taquetes y de cada caja de clavos?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. PLANTEL NAUCALPAN
EVALUACIÓN FINAL SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Nombre: ____ Grupo: ______ Fecha: __________

Instrucciones: Responde lo siguiente, escribe TODO el procedimiento que sigas, indicando a qué ejercicio pertenece y anexando las hojas que necesites. No se permite el uso de calculadora.
Puntuación máxima: 10

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones: **(3 puntos)**

   a) $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 2x - 2y = -5 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases}$

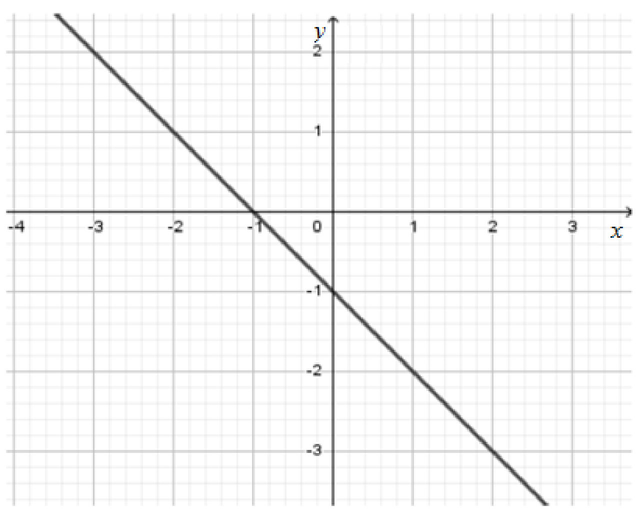
2. ¿Para cuál sistema de ecuaciones la solución es $x = 2$, $y = 3$? Encierra el inciso correspondiente, justifica tu respuesta. **(1 punto)**

a) $\begin{cases} 4x + y = 14 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$

3. Escribe la ecuación de una recta que intersecte a la de la siguiente gráfica en A(1,-2): **(2 puntos)**



4. Escribe un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 para cada inciso. No debes utilizar ninguno de los incluidos anteriormente. Puedes utilizar la representación algebraica o gráfica: **(3 puntos)**

a) Tenga solución única

b) No tenga solución

5. Escribe un sistema de ecuaciones cuya solución corresponda al punto (-3,1). Puedes utilizar la representación algebraica o gráfica. **(1 punto)**

CUESTIONARIO DE OPINIÓN SOBRE LOS PROBLEMAS DE FINAL ABIERTO

Parte 1. Para cada pregunta, marca con una X la puntuación que más se ajuste a tu opinión, donde 1 corresponde con "Nada" y 5 corresponde con "Mucho".

Pregunta	1	2	3	4	5
Sobre la utilidad de los problemas					
1. ¿Consideras que te fue útil resolver problemas con muchas soluciones para aprender sobre sistemas de ecuaciones?					
2. ¿Te parece que es útil tener muchas respuestas a una misma cuestión?					
Sobre el interés que despertaron					
3. ¿Te pareció novedoso que hubieran muchas respuestas?					
4. ¿Consideras que fue interesante ver las propuestas de solución de tus compañeros?					
5. ¿Te gustó trabajar con situaciones que tenían muchas respuestas?					
6. ¿Qué tan bien te sentiste durante el trabajo con los problemas de muchas soluciones?					
7. ¿Qué tan bien te sentiste al finalizar el estudio del tema?					
Sobre el aprendizaje					
8. ¿Consideras que ahora sabes más sobre los sistemas de ecuaciones?					
9. ¿Consideras que ahora tienes más ideas sobre cómo resolver sistemas de ecuaciones?					
10. ¿Consideras que fue más sencillo para ti trabajar con un problema de muchas soluciones que con uno que sólo tenga una respuesta?					
11. ¿Pudiste obtener alguna o algunas conclusiones sobre sistemas de ecuaciones a partir de las diferentes respuestas a los problemas?					
12. ¿Consideras que te fue útil conocer las respuestas de tus compañeros?					
13. ¿Pudiste valorar si tu respuesta fue correcta?					
14. ¿Pudiste pensar en más de una solución?					
15. ¿Qué tan bien te sentiste en general respecto a lo que aprendiste sobre sistemas de ecuaciones durante la resolución de los problemas?					
16. ¿Consideras que de ahora en adelante buscarás más de una solución para los problemas matemáticos que resuelvas?					
17. ¿Qué tanto crees que te afectó el paro de labores en el CCH durante los trabajos con problemas de muchas soluciones?					
Sobre la forma de trabajo					
18. ¿Consideras que te fue útil trabajar de forma individual para aprender sobre sistemas de ecuaciones?					
19. ¿Te gustó trabajar de forma individual?					
20. ¿Consideras que te fue útil trabajar en equipo para aprender sobre sistemas de ecuaciones?					
21. ¿Te gustó trabajar en equipo?					
22. ¿Consideras que te fue útil trabajar con todo el grupo para aprender sobre sistemas de ecuaciones?					
23. ¿Te gustó comentar con todo el grupo?					
24. ¿Consideras que fue útil trabajar de las tres formas: individual, en equipo y grupal, en una misma actividad para aprender sobre sistemas de ecuaciones?					
25. ¿Te gustó trabajar de estas tres formas en la misma actividad?					

1 de 2

Parte 2. Responde las siguientes preguntas, según tu opinión.

1. Escribe qué ventajas te parece que tienen los problemas con muchas respuestas.

2. Escribe qué desventajas te parece que tienen los problemas con muchas respuestas.

3. Escribe qué te gustó de los problemas con muchas respuestas.

4. Escribe qué te desagradó de los problemas con muchas respuestas.

5. Escribe qué te gustó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo.

6. Escribe qué te desagradó de trabajar primero de forma individual, luego en equipo y finalmente con todo el grupo.

7. ¿Qué aprendiste sobre los sistemas de ecuaciones lineales? (Haz una lista)

8. ¿Te gustaría volver a trabajar con problemas de muchas soluciones? ¿Por qué?

Anexo 4 Soluciones a los problemas

A continuación, se muestran las posibles soluciones correctas que tienen los problemas empleados. Además, se incluye un concepto matemático asociado a cada respuesta, útil para el desarrollo del tema de sistemas de ecuaciones, o para asociar y profundizar otros conceptos y/o habilidades; y la clasificación para las respuestas dadas por los alumnos.

Problema 1

Primera parte: **Se sabe que dos números suman 13, ¿cuáles son esos números?**

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES	CONCEPTO MATEMÁTICO ASOCIADO
Números naturales. Solo se consideran sumas evidentes. También se contempla el uso del cero en esta categoría.	$a + b = 13;$ $a, b \in Z; 0 \leq a, b \leq 13$ Por ejemplo: $3 + 10;\ 6 + 7;\ 4 + 9;\ 13 + 0$	Suma de números enteros
Números enteros negativos. Hay conocimiento más amplio sobre la operación suma	$a + b = 13;\ a, b \in Z$ Por ejemplo: $-1 + 14;\ -8 + 21;\ 20 + (-7)$	Expresión de la resta como suma: $a + (-b)$; suma de números con diferentes signos.
Números reales no enteros. La suma puede realizarse con cualquier número real.	$a + b = 13; a, b \in Q$ Por ejemplo: $\frac{19}{2} + \frac{7}{2}; 12.5 + 0.5$	Suma o resta de números racionales, expresados en la forma $\frac{p}{q}; q \neq 0$, o como números con decimales
Representaciones generales	$a + b = 13; a, b \in R$, representados en forma algebraica $a + b = 13; a, b \in R$, representados en forma gráfica	Ecuación lineal con dos variables Representación gráfica de una ecuación lineal con dos variables

Segunda parte: **¿Cuáles serían los números si se utilizara una resta en vez de una suma para obtener el número 13? Represente tus resultados como en el problema de la suma de números.**

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES	CONCEPTO MATEMÁTICO ASOCIADO
Números naturales. Se incluye el cero.	$a - b = 13;$ $a, b \in Z; a, b > 0; a > b$ Por ejemplo: $14 - 1;\ 20 - 7;\ 50 - 37$	Resta de números enteros, con resultado positivo
Números enteros negativos.	$a - b = 13;\ a, b \in Z$ Por ejemplo: $10 - (-3);\ -1 - (-14); 5 - (-8)$	Resta de números enteros cualesquiera. Leyes de los signos.
Números reales no enteros.	$a - b = 13; a, b \in Q$ $\frac{40}{3} - \frac{1}{3};\ 17.5 - 4.5$	Resta de números racionales, expresados en la forma $\frac{p}{q}; q \neq 0$, o como números con decimales. Leyes de los signos en caso de utilizarse números negativos.
Representaciones generales. Se notó que hay formas de expresar todas las soluciones posibles.	$a - b = 13; a, b \in R$, representados en forma algebraica. $a - b = 13; a, b \in R$, representados en gráficas.	Ecuación lineal con dos variables Representación gráfica de una ecuación lineal con dos variables

Posibles errores y dificultades:

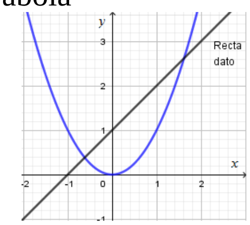
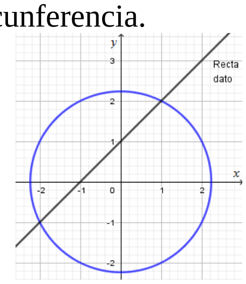
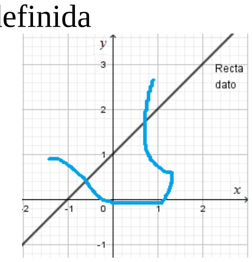
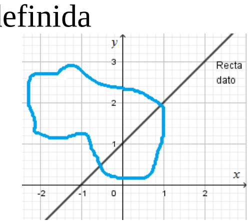
- Limitarse a números enteros
- Manejar números negativos

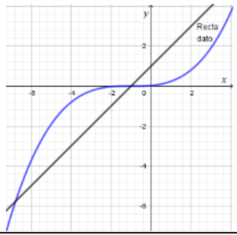
Observaciones

Este problema permite indagar en el manejo de los números por parte de los alumnos y su concepción sobre la operación suma, además de introducir la posibilidad de muchas respuestas a una misma situación y la posibilidad de expresarlas en forma general (en este caso, en forma algebraica).

Problema 2

Bosqueja una gráfica que interseque dos veces con la gráfica de $y - x = 1$. Escribe cuáles son estas intersecciones.

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES	CONCEPTO MATEMÁTICO ASOCIADO
Con formas geométricas regulares. Se conocen curvas como las cónicas, y que estas pueden intersecar más de una vez a una recta.	Curva abierta de forma definida, por ejemplo, una parábola 	Bosquejo de gráficas de curvas abiertas con ecuación “sencilla” asociada (no se considera la ecuación). La manera en que se puede obtener la doble intersección solicitada por el problema es mediante una curva.
	Curva cerrada de forma definida, por ejemplo, una circunferencia. 	Bosquejo de gráficas de curvas cerradas, con una ecuación “sencilla” asociada. Se necesita de una curva para poder resolver, pero esta puede ser cerrada
Con formas irregulares. Se sabe que para lograr la doble intersección se necesita una forma diferente a la recta, pero no se asocia con curvas conocidas, como las cónicas.	Curva abierta de forma indefinida 	Bosquejo de gráficas de curvas abiertas. No es necesario que la forma sea reconocible.
	Curva cerrada de forma indefinida 	Bosquejo de gráficas de curvas cerradas. No es necesario que la forma sea reconocible.

Curvas con más de dos intersecciones con la recta. No se toma en cuenta o no se conoce que las curvas pueden ser infinitas y, por tanto, implicar más de dos intersecciones.	Curva que, aparentemente, interseque más de dos veces. 	Bosquejo de gráficas de curvas, en general. Se abre la posibilidad de que existan más de dos intersecciones.
	Intersecciones: Estimadas a partir de las gráficas, puede ser en números enteros exclusivamente o reales	Punto de intersección. Determinación de coordenadas (con valores estimados). Escritura de coordenadas.

Posibles errores y dificultades:

- Utilizar gráficas separadas, es decir, dos curvas o dos rectas que intersequen una vez cada una.

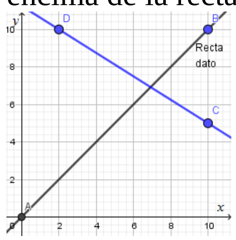
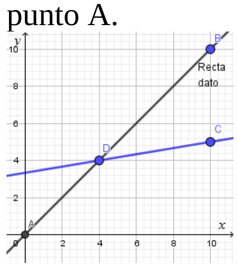
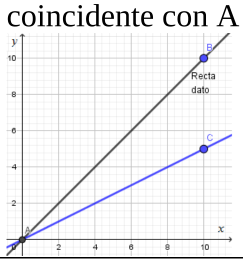
Observaciones

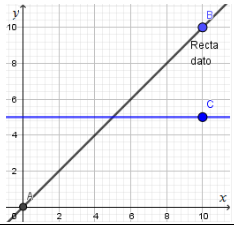
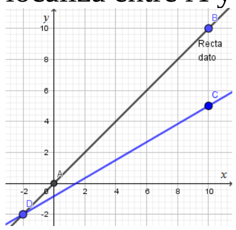
Con este problema se puede generalizar la situación del problema 1, en el sentido de que no solamente las rectas pueden intersecarse, sino que existe una amplia variedad de gráficas y no necesariamente existe un punto de intersección único.

Problema 3

Parte A: **Una recta L_1 pasa por los puntos A(0,0) y B(10,10). Otra recta L_2 pasa por el punto C(10,5), ¿por cuál otro punto debería pasar L_2 para que se interseque con L_1? ¿En qué punto se tocarán?**

Nota: en todas las gráficas, L_1 es la recta en negro y L_2 es la recta en azul

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES	CONCEPTO MATEMÁTICO ASOCIADO
Punto solución fuera de la recta dato. Se toma un punto aleatorio en el plano. (Puede que no se considere al punto de intersección como determinante de la recta.)	Segundo punto para L_2 por encima de la recta dato 	Gráfica de rectas (generalmente con pendiente negativa)
	Segundo punto para L_2 por debajo de la recta dato 	Gráfica de rectas (generalmente con pendiente negativa)
Punto sobre la recta dato. Se considera directamente que un punto sobre la recta dato también puede ser parte de otra recta.	Segundo punto para L_2 sobre la recta dato, excluyendo al punto A. 	Punto de intersección como elemento para determinar una recta.
	Segundo punto para L_2 coincidente con A 	Gráfica de recta con pendiente positiva.

Rectas vertical y horizontal. Se contempla un caso más específico de recta.	Recta L_2 vertical u horizontal. 	Rectas verticales y horizontales en el plano cartesiano.
Punto de intersección fuera del primer cuadrante del plano cartesiano. Hay una concepción más marcada del carácter infinito tanto de las rectas como del plano.	Punto de intersección no se localiza entre A y B 	La localización del punto de intersección depende de las rectas que se utilicen, por lo que puede ser cualquiera en el plano.
	Intersecciones: Estimadas según su gráfica, pueden ser en números enteros exclusivamente o reales	Estimación de coordenadas de punto de intersección. Escritura de coordenadas

Posibles errores y dificultades:

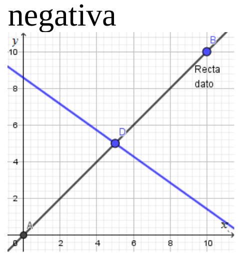
- Trazar solamente segmentos de recta.

Observaciones

Dado que en la hoja de trabajo solo se proporciona el cuadrante I del pleno cartesiano, se limitan un poco las posibilidades de solución, con el fin de disminuir las dificultades adicionales que pueda provocar el uso de números negativos.

Parte B: **Considerando la recta L_1 del problema A, ¿cómo sería la recta L_3 si se deseara que tocara a L_1 en el punto D(5,5)?**

Nota: en todas las gráficas, L_1 es la recta en negro y L_3 es la recta en azul

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES	CONCEPTO MATEMÁTICO ASOCIADO
Recta con pendiente contraria a la recta dato. Se percibe más directamente una recta inclinada "hacia el lado contrario" a la recta dato.	Recta con pendiente negativa 	Gráfica de rectas con pendiente negativa
Recta con pendiente del mismo signo a la recta dato. Se nota que existen rectas que también intersecan a pesar de tener "la misma dirección de inclinación" que la recta dato.	Recta con pendiente positiva 	Gráfica de rectas con pendiente positiva
Recta vertical y horizontal. Se consideran los casos específicos de una recta horizontal o vertical.	Recta vertical y horizontal	Gráfica de rectas verticales u horizontales

Posibles errores y dificultades:

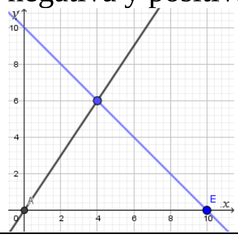
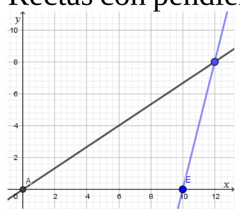
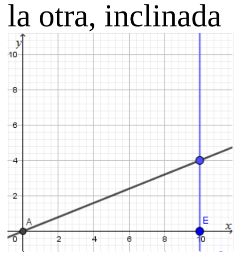
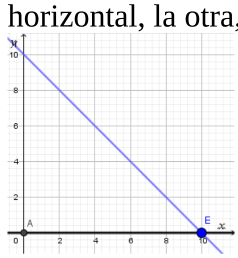
- Trazar rectas que intersequen en puntos diferentes al solicitado.

Observaciones

Similar a la parte A de este problema, le limita el plano cartesiano en la hoja de trabajo para disminuir dificultades asociadas al uso de números negativos.

Parte C: **Si L_4 pasara por el punto A(0,0) y L_5 por el punto E(10,0), ¿por cuál otro punto debería pasar cada recta para que se intersequen en el primer cuadrante del plano cartesiano? ¿En qué punto se tocarán?**

Nota: en todas las gráficas, L_4 es la recta en negro y L_5 es la recta en azul

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES	CONCEPTO MATEMÁTICO ASOCIADO
Rectas con pendientes de diferente signo. Se conciben principalmente las rectas cuyas pendientes tienen diferente signo.	Rectas con pendiente negativa y positiva 	Gráfica de rectas con pendiente diferente
Rectas con pendiente positiva. Puede verse que, si ambas rectas tienen pendiente positiva, también hay un punto de intersección que cumple con la situación del problema.	Rectas con pendiente positiva 	Gráfica de rectas con pendiente positiva
Uso de rectas verticales, horizontales o ambas. Se contempla el uso de rectas no inclinadas.	Una de las rectas es vertical, la otra, inclinada 	Gráfica de rectas verticales
	Una de las rectas es horizontal, la otra, inclinada 	Gráfica de rectas horizontales. Rectas coincidentes con los ejes
	Una recta es horizontal, la otra, vertical.	Gráfica de rectas verticales y horizontales. Rectas coincidentes con los ejes
	Intersecciones: Estimadas a partir de las gráficas propuestas, pueden ser en números enteros exclusivamente o reales	Punto de intersección. Coordenadas de un punto.

Posibles errores y dificultades:

- Interpretar los dos puntos dato como pertenecientes a una misma recta y que la segunda no pase por ninguno de estos dos puntos.
- Trazar la gráfica de recta que une a ambos puntos y no explicar que puede tratarse de dos rectas (el caso de soluciones infinitas.
- Trazar dos rectas paralelas.

Observaciones

Se ha aumentado, en esta parte del problema, el grado de libertad para construir un sistema de ecuaciones en su representación gráfica, nuevamente limitando el uso de números negativos

Parte D: **Hasta el momento se han utilizado gráficas para resolver, sin embargo, cada recta tiene asociada una ecuación. Escribe las ecuaciones referidas a todas las rectas utilizadas en los incisos anteriores.**

En este caso, el problema no es de final abierto, pero si necesario para vincular las representaciones gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones trabajados.

Las soluciones dependen de las respuestas anteriormente presentadas por los alumnos, por lo que podrían clasificarse de la siguiente manera:

CLASIFICACIÓN	SOLUCIONES	CONCEPTO MATEMÁTICO ASOCIADO
Rectas con pendiente negativa	Rectas con pendiente negativa, es decir, de la forma $y = -ax + b; a \in R^{+}, b \in R$	Ecuación de rectas con pendiente negativa
Rectas con pendiente positiva	Rectas con pendiente negativa, es decir, de la forma $y = ax + b; a \in R^{+}, b \in R$	Ecuación de rectas con pendiente positiva
Rectas horizontales	Rectas horizontales	Ecuación de una recta horizontal
Rectas verticales	Rectas verticales	Ecuación de una recta vertical

Posibles errores y dificultades:

- Identificar puntos pertenecientes a la recta.
- Cálculo de la pendiente.
- Identificación de la ordenada al origen.
- Plantear ecuaciones de la forma $y = ax + b$, donde todos los coeficientes sean diferentes de cero, para rectas verticales u horizontales.

(En general, errores en antecedentes)

Observaciones

Se presentaron las soluciones en la forma pendiente-ordenada al origen (Ángel, 1992), por conveniencia, aunque no se descarta que los alumnos presenten sus ecuaciones en alguna otra forma, particularmente la forma estándar: $ax + by = c; a, b, c\ R; a, b\ no\ son\ a\ la\ vez\ cero$ (Ángel, 1992), a la que se buscará llegar más adelante.

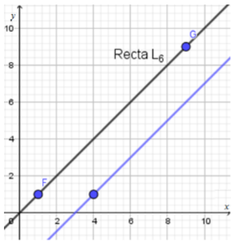
Parte E: **¿Qué relación tiene el punto o los puntos donde se cruzan las rectas, con las parejas de ecuaciones que acabas de plantear?**

Pregunta cerrada, en la cual se espera que los alumnos identifiquen el punto de intersección como la solución a un sistema de ecuaciones formado por la pareja de ecuaciones que se estén trabajando. También es posible que comenten que, al evaluar en el valor de las coordenadas del punto, las ecuaciones se cumplen/ son correctas/ son válidas.

Otras ideas, incorrectas o no relacionadas con lo que se busca, pueden ser:

- Sirvió para determinar la ecuación
- El punto pertenece a una de las rectas
- No hay relación.

Parte F: **Considerando que el plano cartesiano es infinito, ¿cómo debería ser una recta que nunca se cruce con la recta L_6, que pasa por los puntos F(1,1) y G(9,9)? Plantea las ecuaciones para la recta L_6 y la correspondiente a tu respuesta, ¿tienen algo en común dichas ecuaciones? ¿Qué significado tienen como sistema de ecuaciones?**



Cualquier recta paralela a L_6, por encima o por debajo de ella, que no coincida con la misma recta. En su representación algebraica, su forma es $y = x + b; b \in R; b \neq 0$

En este caso, aunque hay múltiples soluciones posibles, todas son del mismo tipo.

Se espera que los alumnos identifiquen, respecto a las ecuaciones:

- La pendiente en ambas rectas es igual.
- Para cada ecuación, los coeficientes tienen el mismo valor absoluto. Si la ecuación está en su forma estándar, $ax + by = c$, se tiene que $a = -b; a, b \in R; a, b \neq 0$

En cuanto a su significado como sistema, se espera que los alumnos comenten que se trata de un sistema sin solución ya que las rectas no se intersecan en ningún lugar.

Sobre los posibles errores, puede ocurrir que se construya una recta que interseque fuera de la sección mostrada del plano cartesiano.

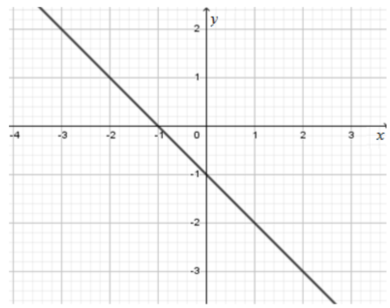
Parte G: **Si se tiene la recta representada por $x + y = 3$ y se sabe que otra recta pasa por el punto H$(0, 3)$ y el punto I$(3, 0)$, ¿cómo son las gráficas que representan la situación? ¿Cómo son las ecuaciones? ¿Cuál es la solución del sistema? Usando una fórmula, escribe todas las soluciones del sistema.**

Esta pregunta tampoco es de final abierto, pero sirve para complementar las ideas desarrolladas anteriormente. En este caso, ambas rectas presentadas son iguales, por lo que se espera que los alumnos mencionen este caso y, para la representación algebraica, algo similar o que son ecuaciones equivalentes o múltiplos una de la otra (por ejemplo, teniendo $x + y = 3; 2x + 2y = 6$).

En cuanto a la solución del sistema, es posible que los alumnos comenten, erróneamente, que no hay solución o que no hay sistema; pero se espera que concluyan que, dado que las recta coinciden en todos sus puntos, entonces todos esos puntos son soluciones y, por lo tanto, las soluciones son infinitas.

Para generalizar, se tiene que las soluciones al sistema son: $(x, y), donde\ x \in R$; $\{y | y = 3 - x; x \in R\}$ aunque no se espera que los alumnos utilicen esta simbología.

3. Escribe la ecuación de una recta que intersecte a la de la siguiente gráfica en $A(1,-2)$ (3 puntos)



Soluciones:

- Todas las rectas cuya representación algebraica tiene la forma

$$y = ax + b; con\ a = \frac{n+2}{m-1}, b = -2 - a$$

Y que pasan por el punto A y el punto B con coordenadas $B(m,n); m \neq 1$.

En este caso, el concepto matemático con el que se relaciona es la ecuación de la recta que pasa por un punto específico.

- La recta $x = 1$

Donde el concepto relacionado es la ecuación de una recta vertical. Se considera aparte por no ser una función, concepto que los alumnos tienen como antecedente, según el plan de estudios del CCH para Matemáticas I (Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, 2016).

Clasificación de respuestas: Similar a la de la parte B del Problema 3

4. Escribe un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 para cada inciso. No debes utilizar ninguno de los incluidos anteriormente. Puedes utilizar la representación algebraica o gráfica: (3 puntos)

a) Tenga solución única

b) No tenga solución

Para el inciso a): cualquier par de rectas que no sean paralelas; cuyo valor de la pendiente sea diferente; donde las ecuaciones no sean proporcionales; donde los coeficientes de las incógnitas no sean proporcionales con su correspondiente en la otra ecuación.

Clasificación de soluciones:

- Rectas con inclinaciones opuestas
    - Representación gráfica
    - Representación algebraica
- Rectas con pendiente del mismo signo
    - Representación gráfica
    - Representación algebraica

Para el inciso b): cualquier par de rectas paralelas; con misma pendiente pero diferente ordenada al origen; donde los coeficientes de las incógnitas sean correspondientemente proporcionales, pero no así el término independiente.

- Representación gráfica
- Representación algebraica

5. **Escribe un sistema de ecuaciones cuya solución corresponda al punto $(-3, 1)$. Puedes utilizar la representación algebraica o gráfica. (1 punto)**

Cualquier par de rectas que pasen por el punto dado, cuya pendiente sea diferente; donde los coeficientes de las incógnitas no sean proporcionales correspondientemente. Considerando un punto cualquiera para cada recta, éstos no deben ser colineales con el punto dato.

Clasificación de respuestas: Similar a la del ítem 4.