Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Un Acercamiento Riguroso a la Integral de Trayectoria de Feynman para Teoría Cuántica de Campos No-Relativista

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

presenta:

Fedro Guillén Garza Ramos

Tutor:

Dr. Miguel Arturo Ballesteros Montero

Ciudad Universitaria, CDMX 2021

Índice

Introducción **3**

1 Notación y Resultados Básicos **9**
1.1 Conceptos Básicos del Cálculo de Varias Variables y Análisis 9
1.2 Conceptos Básicos del Análisis Funcional y Teoría de la Medida 13
1.3 Transformada de Fourier, Espacios de Sobolev y Distribuciones Temperadas 23

2 Herramientas Matemáticas Preliminares y Derivación Heurística del Modelo **28**
2.1 Construcción del Modelo: Regularización del Lagrangiano de las Ecuaciones de Maxwell-Lorentz para Partículas Puntuales 28
2.2 Integrales Oscilatorias 36
2.3 Operadores Pseudo-Diferenciales 42
2.4 Espacios de Sobolev con Peso 54

3 El Operador Fundamental (La Integral de Trayectoria sobre Segmentos de Recta) **59**
3.1 Definición y Propiedades Básicas del Operador Fundamental 59
3.2 Continuidad del Operador Fundamental 74

4 El Operador Fundamental y la Ecuación de Schrödinger **85**

5 Construcción de la Integral de Trayectoria y su Convergencia **92**
5.1 La Integral sobre Trayectorias Poligonales 92
5.2 Convergencia de la Integral de Trayectoria 95

6 El Potencial de Coulomb y la Regularización **102**

7 Los Operadores de Creación y Aniquilación y los Estados de N-Fotones **110**

Apendices **113**

A Distribuciones Periódicas **113**

B Teorema de la Función Inversa Global de Hadamard **117**

C Integral de Riemann para Funciones Valuadas en espacios de Banach **119**

D El Teorema de Compacidad de Kolmogorov-Riesz **121**

Referencias Bibliográficas **123**

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica de la UNAM IN101621. Agradezco el apoyo del proyecto por el FORDECYT-PRONACES, PRONACES 429825/2020

Agradezco a la máxima casa de estudios de México, la Universidad Nacional Autónoma de México, por la gran formación académica y humana que me dio. Agradezco la oferta educativa, cultural y deportiva que brinda la UNAM a toda la comunidad universitaria que hacen a esta institución un núcleo para el desarrollo del conocimiento.

Introducción

La teoría de campos cuánticos es un marco teórico, matemático y conceptual, utilizado típicamente para la descripción física de partículas microscópicas y las fuerzas asociadas a estas. Entre estas destaca la electrodinámica cuántica, que describe como la luz interactúa con la materia (cfr. [54, 55]). La teoría ha sido altamente celebrada puesto que ha permitido dar predicciones cuantitativas que han sido empíricamente verificadas a un alto grado de precisión [16]. Sin embargo, si se considera la electrodinámica cuántica (y la teoría de campos cuánticos en general) como una teoría matemática, esta carece de una estructura rigurosa lo que ha disparado muchas lineas de investigación en donde se ha intentado dotar la teoría de campos cuánticos de una estructura matemática bien definida. (cfr.[52]). Varios de los problemas son consecuencia de que la teoría está plagada de objetos matemáticos que solo están dados formalmente y carecen de definiciones rigurosas. Uno de estos objetos es la integral de trayectoria, introducida por Richard P. Feynman en 1948 para dar una formulación alternativa a la mecánica cuántica, que consecuentemente utilizó en su formulación de la electrodinámica cuántica [11, 12]. Este trabajo de tesis está basado en el artículo *On The Feynman Path Integral for Nonrelativistic Quantum Electrodynamics* por Wataru Ichinose [28], en el cuál se propone una construcción matemáticamente rigurosa de la integral de trayectoria de Feynman para modelos de la electrodinámica cuántica en el límite de bajas energías, llamado electrodinámica cuántica no-relativista (NRQED). En el artículo se considera el acercamiento dado por "cortes temporales", en el cuál se regularizan los elementos del dominio del Lagrangiano, que en este contexto significará restringir el Lagrangiano a trayectorias poligonales de n puntos (cfr.[13]). El objetivo de este trabajo es desarrollar las ideas expuesta en este artículo de investigación de tal manera que sea accesible a un estudiante de la licenciatura en matemáticas o física interesado.
La mecánica cuántica es un paradigma físico que describe las leyes dinámicas que rigen a los objetos microscópicos. Difiere substancialmente de la física clásica puesto que la teoría no es determinista. Esto significa que uno no puede predecir el estado de un sistema físico conociendo su estado en algún instante, y solo se puede asociar probabilidades a un conjunto de estados posibles. A los sistemas cuántico se las asocia un espacio de Hilbert, en donde los elementos de norma 1 representan los estados físicos posibles. La evolución temporal está dictada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = H\psi(t,x), \tag{0.1}$$

donde H es un operador no acotado (no necesariamente acotado) y autoadjunto llamado el operador Hamiltoniano, y $\hbar$ es la constante de Planck. Este operador está relacionado con la función Hamiltoniana de la mecánica clásica en donde si $H(q,p)$ es el Hamiltoniano clásico reemplazamos $p \to -i\hbar\nabla$ y las componentes que dependen de q se transforman en operadores de multiplicación (cfr. [47]). En su libro seminal [9], Paul Dirac expuso mucha de la teoría matemática, notación y herramientas usadas en la formulación moderna de la teoría cuántica. Su presentación y notación sigue siendo preferida por muchos autores modernos, pero era conocido incluso por el mismo Dirac que, en términos de rigor matemático, su libro dejaba mucho que desear (ver [9] cap. III.15). Pocos años después, John V. Neumann publicó un tratado sobre los fundamentos matemáticos de le mecánica cuántica [38], en donde logró justificar gran parte de la teoría de la mecánica cuántica usando análisis funcional y teoría de operadores. Así disparando varias áreas de investigación en física matemática. Aun con la ayuda de estos fundamentos, la teoría cuántica que presentó Dirac no quedo totalmente justificada. Por una parte Neumann no trató de dar una justificación rigurosa al uso de distribuciones como la delta de Dirac y al uso de vectores o "kets" generalizados de forma directa. Esta parte solo quedó justificada con la aplicación de la teoría de distribuciones de L. Schwartz en espacios de Hilbert desarrollada por Gelfand y Vilenkin [18]. Otros ejemplos son algunas técnicas que intentan relacionar la física clásica con la cuántica. En particular, Dirac dio una peculiar correspondencia al considerar dar soluciones aproximadas a la ecuación de Schrödinger cuando "$\hbar$ es pequeño". Esta correspondencia estaba ilustrada en la aparición de objetos clásicos como, la acción, en estas soluciones y también como es que el principio de Hamilton está presente en la dinámica cuántica (cfr [9] p. 125). Feynman exploró y refinó esta correspondencia substancialmente lo que lo llevó a dar con una nueva formulación de la mecánica cuántica al introducir una integral funcional ahora llamada la integral de trayectoria de Feynman. La prescripción dada por Feynman se resume en la siguiente expresión formal

$$\langle x_1, t_1 | x_0, t_0 \rangle = \int e^{i/\hbar S[x_1, t_1, x_0 t_0]} Dx(t). \tag{0.2}$$

El término de la izquierda de esta igualdad representa el propagador del sistema cuántico o la función de Green de la ecuación de Schrödinger para un Hamiltoniano en particular, mientras que el término de la derecha es una "integral" respecto a una "medida" $Dx(t)$, definida en el espacio de banach $C_{x_0}^{x_1}[t_0, t_1]$ de trayectorias continuas tal que en t_i toman el valor fijo x_i; es decir una integral sobre el espacio de trayectorias [11, 12]. Feynman dio algunas definiciones operacionales de la integral como un límite de integrales en subespacios de dimensión finita dados por trayectorias poligonales, pero consideraba que en el límite uno podía definir una integral en el sentido dado por la teoría de la medida pero no dio demostración de esta afirmación(cfr[12] p. 34).

Un primer acercamiento al problema de dar una definición matemáticamente rigurosa de esta integral, fue el de utilizar la medida de Weiner sacada de la teoría de procesos estocásticos donde un problema similar se había resuelto para la ecuación de calor. Gel'fand y Yaglom en [19] propusieron definir la integral como un límite de integrales de Weiner con variancia compleja σ tal que $Re(\sigma) > 0$. R. Cameron demostró en [7] que esta construcción no es valida sino es que también se asume $Im(\sigma) = 0$, por lo que no se podía considerar un límite de integrales cuando $\sigma \to i$. Este resultado negativo mostró que el tratamiento matemático de la integral de trayectoria es un problema altamente no trivial. Esto ha resultado en una gran pluralidad de acercamientos al problema en cuestión. En [37] Nelson expuso simultáneamente una definición secuencial basándose en una generalización de la formula del producto de Lie y una continuación analítica de las formulas dadas por la medida de Weiner para masa compleja; el beneficio principal es que la definición es aplicable para un gran rango de potenciales. En [29] Ito consideró dar una representación en términos de medidas complejas generalizadas en espacios de Hilbert donde se lograron considerar potenciales que son la transformada de Fourier de una medida compleja acotada, y polinomios de grado 1 y 2. Albeverio, Krohn y Mazzuchi extendieron esta definición para el caso del oscilador anarmónico y el campo escalar libre bosónico; este acercamiento tiene el beneficio de poder considerar la expansión semiclásica usando el método de fase estacionaria (cfr. [2]). En [25] Hida definió la integral de Feynman usando cálculo de ruido blanco que luego fue utilizado en [1] por Albeverio, Hahn y Sengupta para definir la integral de Feynman para teorías topológicas de Chern-Simons en 3 dimensiones. Fujiwara Kumano-go, Tsuchida e Ichinose desarollaron el método de cortes de tiempo, el cuál será utilizado en este texto. El método de cortes de tiempo está inspirado en la prescripción de Feynman en la cuál considera la integral como el límite de integrales sobre espacios de curvas poligonales. En esta dirección se tienen resultados para la ecuación de Schrödinger magnética dependiente del tiempo con cotas de crecimiento sobre los potenciales. Estos sistemas consideran un conjunto de cargas no-relativistas que interactúan con unos potenciales externos, pero no se considera como es que estos campos son generados [13, 14, 15, 27]. Ichinose, en el artículo del cuál está basado este trabajo de tesis, parcialmente generaliza estos resultados al considerar los campos generados por las partículas del sistema.

El método de cortes de tiempo se puede entender como una adaptación de la integral de Riemann en donde aproximamos el dominio de la acción (el espacio de trayectorias continuas) por trayectorias poligonal y usamos estas para definir una sucesión cuyo límite definimos como la integral de trayectoria sobre todo el espacio. Dada una partición arbitraria $\{t_0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = t_1\}$ y puntos arbitrarios $x_0 = y_0, y_1 \ldots, y_n = x_1$, tomamos una trayectoria poligonal $\gamma(t)$ definida como la unión del conjunto de rectas que unen x_i con x_{i+1} parametrizados en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Esto da una representación en $\mathbb{R}^n$ del espacio de trayectorias poligonales de n puntos. Entonces al evaluar la acción en estas trayectorias poligonales y dejar variar sus vértices de forma arbitraria, esto nos da una función $e^{i/\hbar S(\gamma)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Entonces se define la integral de trayectoria sobre el espacio de poligonales de n puntos como la integral oscilatorio (ver el capítulo 2.2 de este texto, [13] Cap. 3 y [35] Cap. 1.6)

$$K_n(x_0, t_0, x_1, t_1) = C_n \mathrm{Os} \int \cdots \int e^{i/\hbar S(\gamma)} dx_1 \ldots dx_{n-1}, \tag{0.3}$$

con C_n una constante de normalización. En [13] Fujiwara da condiciones generales para las cuales los K_n convergen al propagador de la ecuación de Schrödinger para Hamiltonianos de la forma $H(q,p) = p^2/2m + V(q)$ y en [15] se extiende a la ecuación de Schrödinger magnética. Cabe destacar que en estos casos también se utilizan trayectorias clásicas poligonales, esto es, la unión de las soluciones a las ecuaciones de Hamilton con condiciones $\gamma(t_i) = x_i, \gamma(t_{i+1}) = x_{i+1}$. Sin embargo nos se considerará este caso en el texto.

En los artículos [26, 27, 28], Ichinose da una estrategia simplificada en donde en lugar de tratar de obtener el propagador de la ecuación, define la integral como una sucesión de operadores integrales de la forma

$$C_n(t_0, t) = C_n \int \cdots \int e^{i/\hbar S(\gamma)} f(x_0) dx_0 dx_1 \ldots dx_{n-1}, \tag{0.4}$$

donde integramos la variable inicial también y lo vemos como un operador integral aplicado a funciones f. Puesto que el espacio de Hilbert en donde actúa el operador son las funciones cuadrado integrable, no es evidente que esta integral está bien definida y se tendrá que definir fuertemente como un límite de integrales convergentes definiendo primero el operador en un subespacio denso. Ya que se tiene una sucesión de operadores bien definidos, se puede demostrar que estos convergen fuertemente al operador de evolución temporal de la teoría cuántica, es decir, que (0.4) converge a la solución de la ecuación de Schrödinger a tiempo t_1 si en t_0 esta era igual a $f(x_0)$. Adaptar estos argumentos a teoría de campos tiene otro grado de dificultad puesto que la acción clásica no es un funcional sobre trayectorias posibles, si no, sobre campos posibles con condiciones de frontera apropiadas (cfr. [12] cap. 9). Esto hace que los grados de libertad cuantizables se vuelvan un continuo, por lo que no es claro como aplicar muchas de las técnicas expuestas previamente. Ichinose trata este problema poniendo "cortes" a la teoría clásica que regularizan los campos a una precisión arbitraria. Primero un corte infrarrojo en el cuál se considera dotar a los campos de condiciones de frontera periódicas y así poderlos representar como series de Fourier, y luego un corte ultravioleta en donde se considera despreciar los términos de la serie de número de onda "grande", o de forma más precisa, se toma la suma sobre una retícula finita pero de tamaño arbitrario. Esta técnica difiere de las regularizaciones dadas por las Teorías de Campos en el Retículo en donde es el espacio de configuraciones el que se reemplaza por una retícula periódica de espaciado arbitrario (cfr. [36]). El modelo es formalmente equivalente al modelo de Pauil-Fierz para el caso de partículas cargadas sin espín (cfr. [3] Cap. 14). Con esto se quiere decir que se espera que al remover los cortes se recupere el modelo de Pauli-Fierz, pero no existe demostración de esto. Sin embargo si se va a considerar en este trabajo el límite distribucional del potencial de coulomb regularizado y se van a dar formulas explicitas del estado de vacío y los estados excitados del campo cuantiado(ver 6,7). Usando estas técnicas es como se va a definir el modelo que se va a utilizar y el resultado principal que obtenemos es demostrar la convergencia de la integral de trayectoria sobre trayectorias poligonales a soluciones de la ecuación de Schrödinger al hacer tender la norma de la partición a 0.

Organización del Texto

Este trabajo de tesis está basado en el artículo [28], por lo que tiene una estructura similar en el desarrollo lógico de la teoría. Sin embargo, se adaptó la estructura para facilitar la lectura para personas no especializadas. Salvo el primer capítulo, el texto es en general auto-contenido. Los primeros 4 capítulos siguen una estructura lineal, pero los últimos dos capítulos solo dependen lógicamente del primero y el segundo.

En el primer capítulo 1 se presenta la notación que se va a utilizar y muchos de los resultados previos que se enunciaran, la gran mayoría, sin demostración. Muchos son resultados populares de alguna área de análisis o de cálculo por lo que su demostración se puede encontrar en la extensa literatura del área. Primero vamos establecer la notación de multi-índices que ayudará a simplificar muchas expresiones encontradas en calculo de varias variables y ecuaciones diferenciales. También se introducen espacios de funciones que resultaran básicos en el desarrollo del texto. Luego se presentan definiciones básicas de teoría de la medida y análisis funcional además de algunos teoremas y construcciones que serán utilizados al menos una vez a lo largo del trabajo.

En el segundo capítulo 2 primero se dará una derivación heurística de la función Lagrangiano para la teoría electromagnética clásica regularizada para un conjunto de cargas puntuales y los campos que estas producen. Se formula la teoría clásica en términos del potencial electromagnético y estos se expresan en series de Fourier. Se toma la norma de Coulomb y se traduce esto a una relación algebraica sobre los coeficientes de Fourier. Esto permite expresar el Lagrangiano de una forma particular que separe los términos asociados a la energía de las cargas, la interacción de las cargas con los campos y la energía almacenada en los propios campos. También se introducen varios conceptos y construcciones matemáticas que resultarán fundamentales en la definición rigurosa de la integral de trayectoria. Se introducen las integrales oscilatorias y se dan condiciones suficientes para su convergencia. Luego se expone la teoría de operadores pseudo-diferenciales como una extensión de los operadores diferenciales lineales usuales explotando la transformada de Fourier. Finalmente se considera una extensión de los espacios de Sobolev usuales llamados espacios de Sobolev con peso. Finalmente, se define la cuantización del Hamiltoniano clásico asociado a la teoría como un operador no acotado con estos espacios como dominio.

En el tercer capítulo 3 se define la integral de Feynman restringida al espacio de segmentos de recta, como un operador sobre el espacio Schwartz. Usando representaciones del operador como una integral oscilatoria se demuestra que el operador es fuertemente continuo con respecto a los parámetros temporales. Se dan representaciones explícitas de la acción evaluada en segmentos de recta arbitrarios y se dan condiciones de crecimiento sobre los potenciales para dar condiciones de invertibilidad de la diferencia de la acción evaluada en dos segmentos. Apoyándose de esto y de varios lemas importantes sobre la continuidad de operadores en espacios de Sobolev con peso, se demuestra que el operador fundamental es continuo en estos si el intervalo temporal es suficientemente pequeño. Usando la densidad de la clase de Schwartz, esto permite extender los operadores a estos espacios.

En el cuarto capítulo 4 se da una formula explicita del residuo que se obtiene al aplicar la ecuación de Shrödinger al Operador fundamental evaluado en una función de Schwartz. Este residuo se representa como un operador integral y se dan cotas independiente de los parámetros temporales. Luego se da una representación de este como una integral para funciones valuadas en espacios de Banach.

En el quinto capítulo 5 se construye la integral de Feynman sobre trayectorias poligonales como la composición del operador fundamental en distintos segmentos de la partición. Primero se demuestra para particiones suficientemente finas la integral de Feynman es equicontinua respecto a

los parámetros temporales. Luego de demostrar unos resultados de compacidad en el contexto de espacios de Sobolev con peso, se demuestra la convergencia de la integral de trayectoria respecto al filtro de particiones usando el teorema de Arzela-Ascoli, y la unicidad de las soluciones a la ecuación de Shrödinger.
En el sexto capítulo 6 se demuestra que si se toma el límite de forma apropiada, se recupera el potencial de Coulomb de su versión regularizada dad en el capítulo 1. El límite se entiende en el sentido distribucional. Y en el séptimo 7 se dan explícitamente el estado de vacío y los estados excitados del Hamiltoniano asociado al campo cuantizado.

1. Notación y Resultados Básicos

En esta sección se definirán los principales objetos matemáticos que serán utilizados y se enunciaran algunos teoremas clásicos que serán aplicados extensamente en este trabajo. Puesto que muchos de estos resultados son conocidos y están presentados en la extensa literatura que hay de análisis matemático, se omitirán sus demostraciones. Fuera de esto, el trabajo será en general auto contenido asumiendo conocimientos esperados de un estudiante de licenciatura en matemáticas o de áreas afines interesado.

1.1. Conceptos Básicos del Cálculo de Varias Variables y Análisis

Primero, de forma estándar tomamos $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ como los conjuntos de números naturales, naturales con el 0, enteros no-negativos, racionales, reales y complejos respectivamente. Para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son espacios vectoriales con producto escalar o interno dado por $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$, y $z \cdot w = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w}_i$ para $z, w \in \mathbb{C}^n$. Y estos definen la norma (y por lo tanto métrica y topología) estándar en estos espacios como $\|x-y\| = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$. Definimos el "producto interno japonés" como $\langle x \rangle = \sqrt{1+\|x\|^2}$, puntualizando que no es un producto interno. Si consideramos $\langle \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ esta función tiene algunas propiedades que serán de mucha utilidad. Es fácil de ver que para todo $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\langle \cdot \rangle^s$ es una función infinitamente diferenciable que nunca se anula con orden de crecimiento de $\|x\|^s$ en infinito. También si tomamos $s > n$ como

$$\frac{1}{\sqrt{1+\|x\|^2}^{s}} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_i^2}^{s/n}},$$

es claro que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-s}\, dx < \infty. \tag{1.1}$$

También notamos que

$$0 \leq (2\|x\| - \|y\|)^2 = 4\|x\|^2 - 4\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \leq 4\|x\|^2 + 4x\cdot y + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x+y\|^2) - \|y\|^2$$

$$\leftrightarrow 1 + \|y\|^2 \leq 1 + 2(\|x\|^2 + \|x+y\|^2) \leftrightarrow 1 \leq \frac{1+2(\|x\|^2+\|x+y\|^2)}{1+\|y\|^2},$$

Como la primera desigualdad se cumple trivialmente tenemos que

$$1 \leq \frac{1+2(\|x\|^2+\|x+y\|^2)+1+2\|x+y\|^2\|x\|^2}{1+\|y\|^2} = \frac{2(1+\|x+y\|^2)(1+\|x\|^2)}{1+\|y\|^2},$$

de esto último se sigue que

$$\langle x+y \rangle^{-1} \leq \sqrt{2}\, \langle x \rangle\, (\langle y \rangle^{-1}). \tag{1.2}$$

Dada una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ diferenciable y $x \in \mathbb{R}^k$ con $k \leq n$ usamos de forma intercambiable la siguiente notación para el gradiente con respecto a k variables

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f,$$

si $k = n$ tomamos $\nabla_x = \nabla$ y $\partial_x = \partial$. Ahora, vamos a definir espacios de multi-índices, utilizados principalmente para facilitar el cálculo de varias variables

Definición 1.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo un multi-índice de orden n es cualquier elemento $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Para multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ definimos*

- *Suma*

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n). \tag{1.3}$$

- *Orden parcial*

$$\alpha \geq \beta \leftrightarrow \alpha_i \geq \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.4}$$

  por lo tanto en el caso de que $\alpha \geq \beta, \alpha - \beta$ tiene sentido componente por componente y así es como se define.

- *Valor absoluto*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.5}$$

- *Factorial*

$$\alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!. \tag{1.6}$$

- *Coeficiente Binomial, con $\alpha \geq \beta$*

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}. \tag{1.7}$$

- *Coeficiente Multinomial*

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}. \tag{1.8}$$

- *Para $z \in \mathbb{C}^n$, Potencia*

$$z^\alpha = \prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i}. \tag{1.9}$$

- *Derivadas Parciales*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{1.10}$$

Con esta notación muchas formulas clásicas se pueden escribir de manera más compacta y/o generalizada. Por ejemplo

$$\textit{Teorema Multinomial} \qquad (x_1 + \cdots + x_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha. \tag{1.11}$$

$$\textit{Regla de Leibniz} \qquad D^\alpha fg = \sum_{\alpha' \leq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} D^{\alpha'} f D^{\alpha-\alpha'} g. \tag{1.12}$$

$$\textit{Teorema de Taylor} \qquad f(x+y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} y^\alpha + \sum_{\alpha=k+1} R_\alpha(x,y) y^\alpha, \lim_{x \to 0} R_\alpha(x,y) = 0. \tag{1.13}$$

$$R_\alpha(x,y) = \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} D^\alpha f(x+ty) dt. \tag{1.14}$$

Para una demostración de las últimas dos identidades ver [39] Cap. 1.1. Las siguientes definiciones y propiedades relacionadas con espacios métricos se pueden ver en [43] Cap. 9 y 10, y [44] Cap. 2.

Definición 1.2. *Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ una función que le llamamos métrica tal que para cualquier $x, y, z \in X$*

1. $d(x, y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

En un espacio métrico decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x_0) < \epsilon$. Sea (Y, d') otro espacio métrico, decimos que una función $f : X \to Y$ es continua si para toda sucesión $\{x_n\} \subset X$ convergente se cumple $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Definición 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que una sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Y decimos que el espacio (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Definición 1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que $U \subseteq X$ es un subconjunto abierto si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$, donde $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < \epsilon\}$. Decimos que un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si $X \setminus A$ es abierto. Sea $Y \subseteq X$ definimos $Int(Y) = \{y \in Y \mid \exists r > 0;\ B(y, r) \subseteq Y\}$ y $Y^{cl} = \{y \in X \mid \forall U$ abierto si $y \in U$ entonces $U \cap Y \neq \emptyset\}$ que son abiertos y cerrados respectivamente. Decimos que $K \subseteq X$ es compacto si para toda familia $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de abiertos tal que $K \subseteq \bigcup \mathscr{U}$ existe $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{U}$ finito tal que $K \subseteq \bigcup \mathscr{W}$. Una vecindad de un punto $x \in X$ es un abierto U tal que $x \in U$.*

Enunciamos las siguiente propiedades básicas topológicas sobre espacios métricos

Proposición 1.5. *Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos*

- *Para todo $x \in X$ y $r > 0, B(x, r)$ es una vecindad de x*
- *La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, y la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto*

- *La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, y la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.*

- *Una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si para todo conjunto $U, (A) \subseteq Y$ abierto (cerrado), $f^{-1}(U), (f^{-1}(A))$ es abierto (cerrado) en X. Si f es una función continua y $K \subseteq X$ es compacto $f(K)$ es compacto.*

- *Sea $A \subseteq X$, decimos que $x \in X$ es un punto límite de A si existe una sucesión $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. El conjunto A es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos límites. La frontera de un conjunto A es el conjunto de todos sus puntos límites y la denotamos por ∂A*

- *Sean $U, A \subseteq X$, U es abierto si y solo si $U = Int(U)$ y A es cerrado si y solo si $A = A^{cl}$*

- *Un conjunto $K \subseteq X$ es compacto si y solo si toda sucesión contenida en K tiene una subsucesión convergente.*

- *Decimos que un conjunto $K \subseteq X$ es totalmente acotado si para todo $r > 0$ existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. En un espacio métrico un conjunto es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado. Si $X = R^n$, entonces K es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Tomamos la siguiente notación estándar (cfr. [35] Cap. 1):
Si X, Y son dos espacios métricos $C(X, Y)$ se define como el espacio de funciones $f : X \to Y$ continuas entre estos espacios. Cuando solo se escribe $C(X)$ siempre se va a asumir que $Y = \mathbb{C}$. Para $k \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ un subconjunto abierto, definimos $C^k(\Omega)$ como el conjunto de funciones continuamente diferenciables de orden k, esto es, que para todo multi-índice α de orden k, $D^\alpha f$ existe y es continua. $C^0(\Omega) := C(\Omega)$ y $C^\infty := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.

Definición 1.6. *Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, una familia de funciones $\mathscr{F} \subseteq C(X, Y)$ es equicontinua en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para todo $f \in \mathscr{F}$ si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

Si suponemos que X es compacto $C(X, Y)$ se le puede dotar de una métrica, para $f, g \in C(X, Y)$

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x)). \tag{1.15}$$

Teorema 1.7 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, X compacto y Y completo. Una familia $\mathscr{F} \subset C(X, Y)$ es relativamente compacta si y solo si $\mathscr{F}$ es equicontinua y puntualmente, relativamente compacta. Esto último significa que para cada $x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathscr{F}\}$ es relativamente compacto en Y.*

Para una demostración general ver [31] Cap. 7 Teo. 18. Para una función $f : X \to \mathbb{C}$ definimos $\mathrm{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}^{cl}$ y $C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty \mid \mathrm{supp}(f) \text{ es compacto}\}$

Definición 1.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo multi-índice α y $k \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_{\alpha,k}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$*

$$|D^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha,k}}{\left(\sqrt{1 + \|x\|^2}\right)^k} = C_{\alpha,k} \langle x \rangle^{-k}. \tag{1.16}$$

Un ejemplo instrumental de una función en este espacio esta dado por

$$f(x) = p(x)e^{-\|x\|^2}, \tag{1.17}$$

donde p es un polinomio arbitrario. También, notamos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Conceptos Básicos del Análisis Funcional y Teoría de la Medida

Primero se revisarán algunas nociones básicas de teoría de la medida. Como referencias se recomiendan [21, 46, 23].

Definición 1.9. *Un espacio medible es un par (X, Σ) con X un conjunto, y $\Sigma \subset \mathscr{P}(X)$ una sigma-álgebra de conjuntos, esto es*

1. $X \in \Sigma$.
2. *Si $A \in \Sigma$ entonces $X \setminus A \in \Sigma$.*
3. *Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$ entonces $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$.*

Un espacio de medida es una triada (X, Σ, μ), con X un conjunto, Σ una sigma-álgebra y $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ una función que le llamamos la medida que cumple

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$ son disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

Decimos que una función entre dos espacios medibles $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$, $f : X_1 \to X_2$ es medible si para todo $B \in \Sigma_2$ se tiene que $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$. Decimos que una propiedad de una función medible f se cumple casi donde sea (c.d.s.) si esta se cumple para todo $x \in X$ salvo en un conjunto de medida 0.

Estas construcciones permiten dar una extensión de la teoría de integración usual de cálculo a través de la integral de Lebesgue

Teorema 1.10 (Integral de Lebesgue)**.** *Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) existe una operación sobre funciones $f : X \to \mathbb{R}$ medibles y no negativas que devuelve un número no negativo, que denotamos por $\int_X f d\mu$ que cumple*

1. *Para $A \in \Sigma$ se cumple $\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$*
2. *Esta operación es lineal $\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$*
3. *Si $A \in \Sigma$ se cumple que $\int_A f d\mu_A = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu := \int_A f d\mu$ donde la integral de la izquierda es tomada sobre el espacio de medida restringido a A.*
4. *Si $A, B \in \Sigma$ se cumple que $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu - \int_{A \cap B} f d\mu$*
5. *Si $f \leq g$ entonces $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$*

6. *Si f es integrable* $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$

Decimos que la función es Lebesgue integrable si $\int_X f d\mu < \infty$

En resumen, la construcción se hace tomando la propiedad 1 como definición, extendiendo por linealidad a combinaciones lineales de funciones características sobre particiones de X y demostrando que estas funciones aproximan puntualmente a las funciones medibles. Ya con esta construcción, es fácil extender todavía más está integral. Si tomamos una función medible $f : X \to \mathbb{R}$, decimos que es Lebesgue integrable si $f^+ := \max\{f, 0\}$ y $f^- := \max\{-f, 0\}$ son Lebesgue integrables y

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu. \tag{1.18}$$

Esto es equivalente a que $|f|$ sea Lebesgue integrable. Ahora si tomamos funciones medibles $f : X \to \mathbb{C}$ decimos que es Lebesgue integrable si su parte real e imaginaria son Lebesgue integrable, y definimos su integral como

$$\int_X f d\mu = \int_X Ref d\mu + i \int_X Imf d\mu. \tag{1.19}$$

Una de las principales ventajas de esta formulación es que esta integral se comporta mucho mejor al intercambiar límites.

Teorema 1.11 (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue)**.** *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : X \to \mathbb{C}$ que convergen puntualmente a una función medible f c.d.s. Si existe una función g Lebesgue integrable tal que $|f_n| \leq g$ c.d.s. para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \tag{1.20}$$

En la demostración de este teorema es típico primero demostrar un lema que resulta ser muy útil por si solo.

Lema 1.12 (Lema de Fatou)**.** *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no-negativas entonces*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{1.21}$$

Usando el teorema de convergencia dominada es posible generalizar una formula muy útil del calculo multi-variable

Teorema 1.13 (Regla Integral de Leibniz)**.** *Sea (X, Σ, μ) un espacio medible, $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y $f : U \times X \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *$f(x, \cdot)$ es integrable para cada $x \in U$ fija.*

2. *$f(\cdot, y)$ es diferenciable para cada $y \in X$ fija.*

3. *Existe $h : U \times X \to \mathbb{R}$ tal que para $x \in U$ fija, $h(x, \cdot)$ es integrable y para $y \in X$ fija la función es continua, y además para todo $(x, y) \in U \times X$ se tiene que $|\partial_x f(x, y)| \leq |h(x, y)|$.*

Entonces la función

$$g(x) = \int_X f(x,\cdot)d\mu, \tag{1.22}$$

es diferenciable y

$$\frac{dg}{dx}(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)d\mu. \tag{1.23}$$

Demostración. Sea $x \in U$ y $\{x_n\}$ una sucesión de números reales que converge a 0 y tal que $x_n \neq 0$. Como converge se sigue que $\{x + x_n\}$ es un conjunto acotado y por lo tanto existe una vecindad compacta $[a, b]$ de x tal que $\{x+x_n\} \subseteq [a, b]$, entonces del teorema del valor medio existen $\xi_n \in [a, b]$ tal que

$$\left|\frac{f(x + x_n, y) - f(x, y)}{x_n}\right| = |\partial_x f(\xi_n, y)| \leq |h(\xi_n, y)| \leq \max_{x\in[a,b]} |h(x, y)|,$$

entonces como la sucesión definida por la parte izquierda de la desigualdad anterior converge puntualmente a $|\partial_x f(x, y)|$, por el teorema de convergencia dominada podemos intercambiar el límite con la integral y obtenemos 1.23 □

Para una demostración más general ver también[6]. Es posible construir de espacios de medida dados, espacios más grandes tomando el producto cartesiano.

Definición 1.14. *Dados dos espacios de medida $(X, \Sigma_1, \mu_1), (Y, \Sigma_2, \mu_2)$, si tomamos el espacio medible $(X \times Y, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2)$, donde $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ es la sigma álgebra generada por elementos de la forma $A \times B$ con $A \in \Sigma_1$,$B \in \Sigma_2$, una medida producto $\mu_1\mu_2$ es cualquier medida en este espacio que cumpla*

$$\mu_1\mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_1(B). \tag{1.24}$$

En el caso de que los espacios sean sigma-finitos se puede demostrar que hay una única medida producto.

Esta construcción permite una generalización del teorema de Fubini para integrales iteradas.

Teorema 1.15 (Teorema de Fubini)**.** *Sean $(X, \Sigma_1, \mu_1), (Y, \Sigma_2, \mu_2)$ espacios de medidas sigma-finitas, y tomemos $X \times Y$ con la medida producto, entonces si $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ es integrable entonces*

$$\int_{X\times Y} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu_1\right) d\mu_2 = \int_X \left(\int_Y f_x d\mu_2\right) d\mu_1, \tag{1.25}$$

donde $f^y(x) = f(x, y)$ y $f_x(y) = f(x, y)$ para $y \in Y$ y $x \in X$ fijos respectivamente.

Finalmente mencionamos la medida estándar que se construye sobre $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades.

Teorema 1.16 (Medida de Lebesgue)**.** *Existe sobre $\mathbb{R}^n$ un espacio de medida $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^{cl}, \lambda\right)$ sigma-finita, donde la sigma álgebra contiene a la topología usual de $\mathbb{R}^n$ y cumple*

- *Si $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un rectángulo arbitrario, este es medible y*

$$\lambda((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

- *Si T es una transformación lineal y $A \in \mathcal{B}^{cl}$ entonces $\lambda(T(A)) = |det(T)|\lambda(A)$.*
- *Si $A \in \mathcal{B}^{cl}$ es un conjunto acotado $\lambda(A) < \infty$.*
- *Si $f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{C}$ es Riemann integrable, también es Lebesgue integrable y*

$$\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f(x)dx = \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f d\lambda.$$

Para ilustrar la utilidad de estas herramientas se va a demostrar una formula de cálculo que va a ser importante a lo largo del texto.

Lema 1.17 (Formula de Integración por Partes)**.** *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ tal que para toda α multi-índice con $|\alpha| \leq k$ $D^\alpha g$ es de crecimiento a lo más polinomial, entonces para toda α multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)D^\alpha g(x) = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f(x))g(x)dx. \tag{1.26}$$

Demostración. Se va a demostrar por inducción sobre k. Supongamos que $k = 0$, si $\alpha = 0$ se sigue la identidad trivialmente. Ahora supongamos que es cierto para k y sea α tal que $|\alpha| = k+1$, entonces existe algún $i = 1, \ldots, n$ tal que $D^\alpha = \partial_{x_i} D^{\alpha'}$ con $|\alpha'| = k + 1$ y tomamos la función $\mathbf{G}(x) = D^{\alpha'}g(x)\hat{e}_i$. También consideramos la sucesión de conjuntos $\{B(0,k)\}_{k=1}^\infty$ entonces del teorema de la divergencia se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{B(0,k)} f(x)D^\alpha g(x)dx = \int_{B(0,k)} f(x)\nabla\cdot\mathbf{G}(x)dx &= \int_{\partial B(0,k)} f\mathbf{G}\cdot\hat{n}dS - \int_{B(0,k)} \nabla f(x)\cdot\mathbf{G}(x)dx \\ &= \int_{\partial B(0,k)} f\mathbf{G}\cdot\hat{n}dS - \int_{B(0,k)} \left(\partial_{x_i} f(x)\right) D^{\alpha'} g(x)dx.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Por hipótesis para $N = n+1$ existe una constante $C_{\alpha',N} > 0$ tal que

$$|fD^{\alpha'}g(x)| \leq C_{\alpha',N}\left\langle x\right\rangle^{-N},$$

entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B(0,k)} f\mathbf{G}\cdot\hat{n}dS\right| \leq \int_{\partial B(0,k)} |fD^{\alpha'}g|\hat{n}_i dS \leq \int_{\partial B(0,k)} \frac{C_{\alpha',N}}{\left(\sqrt{1+\|x\|^2}\right)^N}\hat{n}_i dS \\ = C'_{\alpha',N}\frac{k^{n-1}}{\left(\sqrt{1+k^2}\right)^N} \\ \leq C'_{\alpha',N}\frac{1}{1+k^2},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\partial B(0,k)} f\mathbf{G}\cdot\hat{n}dS = 0.$$

Y si consideramos la sucesión de funciones $\chi_{B(0,k)}\left(D^{\alpha'}g\right)\partial_{x_i}f$ que claramente converge puntualmente a $\left(D^{\alpha'}g\right)\partial_{x_i}f$ pero también $\left|\chi_{B(0,k)}\left(D^{\alpha'}g\right)\partial_{x_i}f\right| \leq \left(D^{\alpha'}g\right)\partial_{x_i}f$ se sigue del teorema de convergencia dominada (Teo. 1.11) que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B(0,k)}\partial_{x_i}f(x)D^{\alpha'}g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_i}f(x)D^{\alpha'}g(x)dx.$$

Y de la misma manera, tomando $\chi_{B(0,k)}\left(D^{\alpha}g\right)f$, se obtiene que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B(0,k)}f(x)D^{\alpha}g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}f(x)D^{\alpha}g(x)dx.$$

Reuniendo todo obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)D^{\alpha}g(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\left(\partial_{x_i}f(x)\right)D^{\alpha'}g(x)dx = (-1)^{|\alpha'|+1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(D^{\alpha}f(x)\right)g(x)dx,$$

donde en la última igualdad se usó la hipótesis de inducción. Y está igualdad es lo que se quería demostrar. $\square$

También las siguientes definiciones son estándar de un curso de análisis funcional introductorio. Se recomiendan las siguientes referencias [45, 8, 40].

Definición 1.18. *Un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, con un producto interno, esto es, con una función $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}} : \mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathbb{F}$ que cumple:*

1. *Linealidad en la primera entrada. Esto es para $a\in\mathbb{F}$ y $x,y,z\in\mathscr{H}$*

$$(ax+y,z)_{\mathscr{H}} = a\,(x,z)_{\mathscr{H}} + (y,z)_{\mathscr{H}}\,.$$

2. *Hermítica*

$$(x,y)_{\mathscr{H}} = \overline{(y,x)_{\mathscr{H}}}.$$

3. *Positiva definida. Si $x\neq 0$*

$$(x,x)_{\mathscr{H}} > 0.$$

Y además, es completo respecto a la norma $\|x\|_{\mathscr{H}} = \sqrt{(x,x)_{\mathscr{H}}}$.

Los espacios de Hilbert son fundamentales, pues en la teoría moderna de la mecánica cuántica un postulado importante es que todo sistema físico le corresponde un espacio de Hilbert de estados. Este producto interno es una forma bilineal continua. Esto se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\,(x,y)_{\mathscr{H}}\,| \leq \|x\|_{\mathscr{H}}\|y\|_{\mathscr{H}}. \tag{1.28}$$

Denotamos por $\mathscr{H}^*$ el espacio dual de un espacio de Hilbert dado $\mathscr{H}$. El producto interno da un isomorfismo canónico entre estos.

Teorema 1.19 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Para todo $f\in\mathscr{H}^*$ existe un único $y\in\mathscr{H}$, tal que*

$$f(x) = (x,y)_{\mathscr{H}} \quad \forall x\in\mathscr{H}. \tag{1.29}$$

El producto interno permite generalizar la noción de ortogonalidad entre vectores.

Definición 1.20. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert decimos que $A \subset \mathscr{H}$ es un conjunto ortogonal si para cualesquiera $x, y \in A$ tal que $x \neq y$ se cumple $(x, y)_{\mathscr{H}} = 0$. Una base ortonormal es un conjunto A ortogonal tal que $Span(A)^{cl} = \mathscr{H}$ y todos los elementos son de norma 1.*

Hay una caracterización topológica de los espacios de Hilbert dada en términos de la cardinalidad de una (y por lo tanto todas) base ortonormal

Proposición 1.21. *Un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es separable si y solo si tiene una base ortonormal a lo más numerable.*

Puesto que solo consideraremos espacios de Hilbert separables, se puede asumir la existencia de una base ortonormal a lo más numerable. Muchas de las propiedades útiles de las bases ortonormales se puede derivar de la siguiente desigualdad.

Proposición 1.22 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal, entonces para todo $x \in \mathscr{H}$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_i)_{\mathscr{H}}|^2 \leq \|x\|_{\mathscr{H}}^2. \tag{1.30}$$

Apoyándose de esta desigualdad se pueden dar caracterizaciones de bases ortonormales en términos de muchas formulas útiles.

Proposición 1.23. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, y $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ un conjunto ortonormal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- *$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base ortonormal.*
- *Si $h \in \mathscr{H}$ es tal que $h \neq e_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y $\{h\} \cup \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal entonces $h = 0$.*
- *Si $h \in \mathscr{H}$ entonces*

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} (h, e_i)_{\mathscr{H}} e_i. \tag{1.31}$$

- *Si $g, h \in \mathscr{H}$ entonces*

$$(h, g)_{\mathscr{H}} = \sum_{i=1}^{\infty} (h, e_i)_{\mathscr{H}} (e_i, g)_{\mathscr{H}}. \tag{1.32}$$

- *Si $h \in \mathscr{H}$ entonces*

$$\|h\|_{\mathscr{H}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(h, e_i)_{\mathscr{H}}|^2. \qquad \textit{Identidad de Paserval} \tag{1.33}$$

Corolario 1.23.1. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, y $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ una base ortonormal entonces para todo $x \in \mathscr{H}$, $\sum_i (x, e_i)_{\mathscr{H}} e_i$ converge incondicionalmente. Esto es, para cualquier permutación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se cumple que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_{\sigma(i)}) e_{\sigma(i)}. \tag{1.34}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_{\sigma(i)})_{\mathscr{H}} e_{\sigma(i)} \right\|_{\mathscr{H}}^{2} = \|x\|_{\mathscr{H}}^{2} - \sum_{i=1}^{n} \left|(x, e_{\sigma(i)})_{\mathscr{H}}\right|^{2}, \tag{1.35}$$

pero por 1.33, como $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)_{\mathscr{H}}|^2$ converge absolutamente a $\|x\|_{\mathscr{H}}^2$, también lo hace incondicionalmente. Por lo tanto se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_{\sigma(i)})_{\mathscr{H}} e_{\sigma(i)} \right\|_{\mathscr{H}}^{2} = 0. \tag{1.36}$$

Como σ fue arbitrario, esto termina la demostración. $\square$

Muchos ejemplos de espacios de Hilbert se pueden construir usando teoría de la medida.

Definición 1.24. *Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), definimos $\mathscr{L}^2(X)$ como el conjunto de funciones $f : X \to \mathbb{C}$ medibles tal que*

$$\int_X |f|^2 d\mu < \infty. \tag{1.37}$$

Definimos la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathscr{L}^2(X)$ como:

$$f \sim g \leftrightarrow f = g \ c.d.s. \tag{1.38}$$

Entonces definimos:

$$L^2(X) = \mathscr{L}^2(X)/\sim . \tag{1.39}$$

Si aquí tomamos el producto interno

$$([f], [g])_{L^2} = \int_X f\overline{g} d\mu, \tag{1.40}$$

entonces $L^2(X)$ es un espacio de Hilbert.

En lo que resta del texto solo se va a diferenciar un elemento de $[f] \in L^2(X)$ de sus representantes si es necesario, pero en general se omitirá esta distinción. La teoría de espacios de Hilbert permite dar representaciones rigurosas de las series de Fourier si se considera convergencia en la norma L^2.

Teorema 1.25. *Para $i = 1, \ldots, n$ sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$ tales que $a_i < b_i$, y sea*

$$V = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \tag{1.41}$$

$$|V| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n), \tag{1.42}$$

entonces, el conjunto de funciones

$$\frac{1}{|V|} e^{ik\cdot x}, \qquad k := \left(\frac{2\pi}{b_1 - a_1} s_1, \ldots, \frac{2\pi}{b_n - a_n} s_n \right) \ s_i \in \mathbb{Z}, \tag{1.43}$$

es una base ortonormal de $L^2(V)$.

Definición 1.26. *Un espacio de Banach X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ normado, esto es, con una función $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}$ que cumple:*

1. Para $x \in X$

$$\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0. \tag{1.44}$$

2. Sea $a \in \mathbb{K}$ y $x \in X$ entonces

$$\|ax\| = |a|\|x\|. \tag{1.45}$$

3. Sean $x, y \in X$ entonces

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{1.46}$$

Y además es completo.

Los espacios de Banach surgen en el estudio de ciertos espacios de funciones, en particular los de operadores acotados entre espacios vectoriales. Notamos que todo espacio de Hilbert es también de Banach. Brevemente recordamos que un mapeo lineal entre dos espacios vectoriales normados $T : X \to Y$ es acotado si existe una constante $C \geq 0$ tal que para toda $x \in X$ se cumple

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \tag{1.47}$$

y esta condición es equivalente a que el operador sea continuo. Si $B(X, Y)$ es el espacio de mapeos lineales acotados, este se le puede dotar de una norma

$$\begin{aligned} \|T\|_{OP} &= \text{ínf}\{C \geq 0 \ : \ \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \forall x \in X\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y \ : \ \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y \ : \ \|x\|_X = 1\}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Y en el caso que Y sea de Banach, también lo es $B(X, Y)$. Por definición se cumple

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{OP}\|x\|_X, \tag{1.49}$$

para toda $x \in X$. Si Z es otro espacio de Banach y $G \in B(Y, Z)$, entonces también se sigue de inmediato de la definición que

$$\|GT\|_{OP} \leq \|G\|_{OP}\|T\|_{OP}. \tag{1.50}$$

Hay otras topologías útiles que se pueden usar en estos espacios.

Definición 1.27. *Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto de operadores en un espacio de Banach X, decimos que estos convergen fuertemente a un operador T si para toda $x \in X$ se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = T. \tag{1.51}$$

Decimos que converge débilmente si para todo funcional lineal $f \in B^*(X)$ y $x \in X$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n x) = f(Tx). \tag{1.52}$$

Definición 1.28. *Sean X, Y espacios de Banach, un operador $T : X \to Y$ es compacto si $T(B(0, 1))$ es relativamente compacto en Y*

Proposición 1.29. *Sean X, Y espacios de Banach, un operador $T : X \to Y$ es compacto si y solo si:*

1. *Para cualquier conjunto $A \subset X$ acotado $T(A)$ es relativamente compacto en Y.*
2. *Para cualquier conjunto $A \subset X$ acotado $T(A)$ es totalmente acotado en Y.*
3. *Para cualquier sucesión $\{x_n\} \subset X$ acotada, $\{T(x_n)\}$ tiene una subsucesión convergente en Y.*

Presentamos un teorema básico, pero que resultará fundamental para definir varios operadores.

Teorema 1.30 (BLT)**.** *Sea X un espacio vectorial normado, Y un espacio de Banach, $A \subseteq X$ un subespacio vectorial y $T : A \to Y$ un mapeo lineal acotado, entonces existe un único mapeo lineal acotado $\tilde{T} : A^{cl} \to Y$ tal que $\tilde{T} \restriction_A = T$*

Usando teoría de la medida, también es posible encontrar muchos ejemplos de espacios de Banach.

Definición 1.31. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$ definimos para $f : X \to \mathbb{C}$ medible*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \; p < \infty \qquad \|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{a > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}. \quad (1.53)$$

Entonces definimos el espacio $L^p(X)$ como el cociente sobre el espacio de funciones f, tal que $\|f\|_{L^p}$ es finito, identificando funciones que son iguales c.d.s.. $\|\cdot\|_{L^p}$ es una norma que hace a estos espacios de Banach. Si $p = 2$, recuperamos la definición 1.24.

Usando el teorema de convergencia dominada uno puede dar una herramienta muy útil para demostrar convergencia en la norma L^p

Teorema 1.32. *Teorema de Convergencia dominada en L^p Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty)$ y sea $\{f_n\} \subset L^p(X)$ una sucesión que converge puntualmente a una función medible f y supongamos que existe una función $g \in L^1(X)$ tal que*

$$|f_n|^P \leq g \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.54}$$

entonces $\{f_n\}$ converge en la norma L^p a f.

Demostración. Puesto que $f_n \to f$ puntualmente por 1.54 se sigue que $|f|^p \leq g$. Usando esto, notamos que

$$|f_n - f|^p \leq 2^p \left(\text{máx}\, |f_n|, |f| \right)^p \leq 2^p g, \tag{1.55}$$

y como $|f_n - f|^p \to 0$ puntualmente, se sigue de 1.11 que $\|f_n - f\| \to 0$. $\square$

Estos espacios, incluso en el caso de la medida de Lebesgue, pueden contener elementos muy patológicos, sin embargo es posible aproximar estas funciones por funciones mucho mejor comportadas.

Proposición 1.33. *Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por*

$$\phi(x) = \begin{cases} Ce^{1/(\|x\|^2 - 1)} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}, \tag{1.56}$$

con C definida de tal manera que $\int \phi(x)dx = 1$ y $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Si para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ tomamos

$$f_\epsilon(x) = f \star \phi_\epsilon(x) = \int f(y)\phi_\epsilon(x - y)dy, \tag{1.57}$$

entonces:

1. $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. $f_\epsilon \to f$ *casi donde sea cuando* $\epsilon \to 0$.

3. *Si* $f \in C(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $f_\epsilon \to f$ *uniformemente en subconjuntos compactos.*

4. $f_\epsilon \to f$ *en* $L^P(\mathbb{R}^n)$.

Corolario 1.33.1. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y sea la sucesión $\{f_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \|x\| \leq n \\ 0, & \|x\| > n \end{cases}. \tag{1.58}$$

Es claro del teorema de convergencia dominada en L^p 1.32 que $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$, entonces las funciones de soporte compacto son densas en $L^p(\Omega)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ del teorema anterior, usando la misma notación, tomamos $f_{n,\epsilon} \in C_0^\infty$. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo, por lo anterior sabemos que existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_k} - f\|_{L^P} < 1/2k$ y también existe un $\epsilon_k > 0$ tal que $\|f_{n_k,\epsilon_k} - f_{n_k}\|_{L^P} < 1/2k$. Si consideramos la sucesión $\{f_{n_k,\epsilon_k}\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty$ y tomamos $\epsilon' > 0$, y $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \epsilon'$, tenemos que

$$\|f_{n_k,\epsilon_k} - f\|_{L^P} \leq \|f_{n_k,\epsilon_k} - f_{n_k}\|_{L^P} + \|f_{n_k} - f\|_{L^P} < 1/k < \epsilon'.$$

Por lo que la sucesión converge a f en L^P y con esto se termina la demostración. □

Las siguientes definiciones son necesarias para poder definir espacios de distribuciones (o funciones generalizadas).

Definición 1.34. *Un espacio de Frechet es un espacio vectorial topológico* (V, τ) *tal que*

1. *La topología* τ *es al menos Hausdorff (Esto es para cada dos puntos distintos existen vecindades de estos que son disjuntas)*

2. *Existe una familia a lo más numerable de seminormas,* $p_n : V \to \mathbb{R}$ *(solo se les pide subaditividad y homogeneidad) tal que*

$$p_1(x) \leq p_2(x) \leq p_3(x) \ldots \tag{1.59}$$

   Y la topología es generada por esta familia en el sentido de que $U \subseteq V$ *es abierto si y solo si para toda* $x \in U$*, existe* $K \geq 0$ *y* $\epsilon > 0$ *tal que* $\{y \in V \mid p_n(y - x) < \epsilon, n \leq K\} \subseteq U$.

3. *Definimos la función,*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x, y)}{1 + p_n(x, y)}, \tag{1.60}$$

   que se puede demostrar que es una métrica. Con respecto a esta métrica se requiere que el espacio sea completo. Una caracterización de convergencia con respecto a esta métrica es la siguiente. Una sucesión $\{x_n\} \subset V$ *converge con respecto a la métrica* d *si y solo si existe un* $x \in V$ *tal que* $p_j(x_n - x)$ *converge a 0 cuando* $n \to \infty$ *para toda* $j \in \mathbb{N}$.

Notamos que todo espacio de Banach (y por lo tanto todo espacio de Hilbert) es un espacio de Frechet. Un ejemplo importante es:

Definición 1.35. *En el espacio de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, para* $k, N \in \mathbb{N}$ *definimos las normas* $\|\cdot\|_{k,N}$ *como*

$$\|f\|_{k,N} = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^N |D^\alpha f|. \tag{1.61}$$

Con estas, el espacio se vuelve se Frechet.

Muchas operaciones son continuas al tomar esta topología.

Proposición 1.36. *Sea* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *y* g *una función suave tal que esta y sus derivadas son de crecimiento a lo más polinomial, entonces las siguientes operaciones son continuas:*

$$:\phi(x) \to \tilde{\phi}(x) = \phi(-x). \qquad \textit{(reflexiónes)} \tag{1.62}$$

$$\phi \to \overline{\phi}. \qquad \textit{(conjugación compleja)} \tag{1.63}$$

$$\phi(x) \to \tau_{x_0}\phi(x) = \phi(x + x_0). \qquad \textit{(traslaciones)} \tag{1.64}$$

$$\phi \to D^\alpha\phi. \qquad \textit{(derivadas)} \tag{1.65}$$

$$\phi \to g\phi. \qquad \textit{(multiplicación)} \tag{1.66}$$

1.3. Transformada de Fourier, Espacios de Sobolev y Distribuciones Temperadas

También las siguientes definiciones y teoremas son estándar. Se recomiendan las siguientes notas auto contenidas para revisar la teoría de espacios de Sobolev y la transformada de Fourier [32, 50, 42]. Para referencias más estándar ver [40, 41, 10, 45].

Definición 1.37. *Definimos la transformada de Fourier* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *como*

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(x)dx. \tag{1.67}$$

Que está bien definida puesto que

$$|\mathcal{F}(f)(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx. \tag{1.68}$$

Y la transformad inversa $\mathcal{F}^* : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *como*

$$\mathcal{F}^*(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot x} f(y)dy. \tag{1.69}$$

Puesto que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier está definido en este subespacio. De la regla integral de Leibniz 1.13 es claro que la transformada de Fourier de una función de Schwartz es al menos suave, pero se puede ver que es aún más regular.

Teorema 1.38. *Sea* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *y* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *entonces:*

1. $\mathcal{F}$ *es un mapeo lineal continuo de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *a* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Para todo* α *multi-índice*

$$D^\alpha\mathcal{F}(\phi) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\phi), \quad (ix)^\alpha\mathcal{F}(\phi) = \mathcal{F}(D^\alpha\phi). \tag{1.70}$$

3. Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\tau_{x_0} f) = e^{ix_0 \cdot x} \mathcal{F}(\phi), \tag{1.71}$$

con $\tau_{x_0}\phi(x) = \phi(x + x_0)$.

4. Para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{F}(\lambda_a f) = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}(\lambda_{1/a} f), \tag{1.72}$$

con $\lambda_a f(x) = f(ax)$.

5. Si definimos

$$f \star \phi(x) = \int f(y)\phi(x - y)dy, \tag{1.73}$$

como en (1.57)entonces

$$\mathcal{F}(f \star \phi) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(\phi) \qquad \textit{Teorema de la Convolución.} \tag{1.74}$$

6.

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^*(\phi)) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(\phi)) = \phi. \tag{1.75}$$

Teorema 1.39 (Plancherel)**.** *La transformamada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo con la inversa dada por $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y cumple que*

$$(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))_{L^2} = (2\pi)^n (f, g)_{L^2}. \tag{1.76}$$

Por lo tanto existe una exstensión única a un operador $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

Salvo que sea necesario no se va a distinguir entre $\mathcal{F}$ y $\tilde{\mathcal{F}}$. Ahora vamos a recordar el concepto de la derivada débil, primero definimos para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \;:\; f\restriction_K \in L^1(\Omega)\ \forall K \text{compacto}\}. \tag{1.77}$$

Muchos resultados dependerán del siguiente resultado

Lema 1.40 (Lema fundamental del cálculo de variaciones)**.** *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ cumple que*

$$\int_\Omega f\phi dx = 0, \tag{1.78}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $f = 0$ c.d.s.

Definición 1.41. *Derivada Débil Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α multi-índice. Entonces decimos que $h^\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada débil α-esima, si es que existe, de f si*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega h^\alpha(x) D^\alpha \phi(x)dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.79}$$

Denotamos formalmente $h^\alpha = D^\alpha f$.

La derivada débil, si existe, es única debido al lema 1.40. Notamos que en el caso que la derivada clásica exista, coincide con la derivada dedil usando el lema 1.17. Las derivadas débiles cumplen muchas de las propiedades que la derivada usual cumple.

Proposición 1.42. *Sean α y β multi-índices, entonces la derivada débil (asumiendo que existe) cumple las siguientes propiedades:*

1. *Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces $D^\alpha(af + bg) = aD^\alpha f + bD^\alpha g$.*
2. *$D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f)$.*
3. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces*
$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = (ix)^\alpha \mathcal{F}(f). \tag{1.80}$$
4. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $x^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces*
$$(-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f) = D^\alpha \mathcal{F}(f). \tag{1.81}$$

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y , entonces
$$D^\alpha f\phi = \sum_{\alpha' \leq \alpha} D^{\alpha'} f D^{\alpha-\alpha'}\phi \tag{1.82}$$

Con esto podemos definir los espacios de Sobolev clásicos.

Definición 1.43. *Para $p \in [0, \infty]$, $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto definimos*
$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq k\}, \tag{1.83}$$
como el espacio de Sobolev k, p, en este podemos definir una norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ dada por
$$\|f\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|^p_{L^P}\right)^{1/p}, \tag{1.84}$$
$$\|f\|_{W^{k,\infty}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty}. \tag{1.85}$$

En el caso de $p = 2$ este es un espacio de Hilbert con el producto interno
$$(f, g)_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2}, \tag{1.86}$$
y lo denotamos por $H^k(\Omega)$. Por el teorema de Plancherel 1.39 y por 1.80 es posible definir $H^k(\Omega)$ como
$$H^k(\Omega) = \left\{f \in L^2(\Omega) \mid x^\alpha \mathcal{F}(f) \in L^2(\Omega)\ \forall\ |\alpha| \leq k\right\} \tag{1.87}$$

También es posible aproximar funciones en estos espacios respecto a la norma de Sobolev. Esto es, una función en estos espacios junto con sus derivadas se pueden aproximar uniformemente por funciones suaves de soporte compacto y las derivadas de estas en la norma L^p.

Proposición 1.44. *Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ como en 1.33 y $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Si para $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ tomamos*

$$f_\epsilon(x) = f \star \phi_\epsilon(x) = \int f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy \tag{1.88}$$

Entonces

1. *Para α multi-índice $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha f) \star \phi_\epsilon$*
2. *$f_\epsilon \to f$ en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$*

Corolario 1.44.1. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$*

Demostración. La demostración es idéntica a la demostración del corolario 1.33.1 cambiando la norma L^P por la norma de Sobolev. □

La discusión anterior se complica substancialmente para dominios Ω acotados ya que el corolario anterior no se generaliza. Es decir, la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ respecto a (1.84) está estrictamente contenida en $W^{k,p}(\Omega)$. Esto está íntegramente relacionado a una ambigüedad generada por como se fijan los valores de la función en la frontera de Ω. El tratamiento riguroso de este problema es delicado y se sale de los propósitos de este texto, y por lo tanto vamos a restringir la discusión solamente al siguiente caso (c.f.r ver [10] cap. 5.5).

Definición 1.45. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$, como*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \tag{1.89}$$

la cerradura tomada respecto a la norma (1.84)

Teorema 1.46. *Sea $V = (a_1, b_1) \times (a_n, b_n)$ y sea $f \in H_0^2(V)$, entonces si su serie de Fourier está dada por*

$$f(x) = \frac{1}{|V|}\sum_k f_k e^{ik\cdot x} \tag{1.90}$$

entonces para α un multi-índice tal que $|\alpha| \leq 2$

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{|V|}\sum_k f_k (ik)^\alpha e^{ik\cdot x} \tag{1.91}$$

Demostración. Primero, recordamos que tanto f como su derivadas débiles tienen representación como serie de Fourier por el teorema 1.25. Entonces al menos sabemos que la derivada débil se puede representar como

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{|V|}\sum_k \left(D^\alpha f_k\right) e^{ik\cdot x}, \tag{1.92}$$

con

$$D^\alpha f_k = \left(D^\alpha f(x), e^{ik\cdot x}\right)_{L^2}. \tag{1.93}$$

Por definición de $H_0^2(V)$ existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(V)$ que converge a f en la norma de $H^2(V)$, por lo que en particular $D^\alpha\phi_n \to D^\alpha f$ en L^2 y por lo tanto

$$D^\alpha f_k = \lim_{n\to\infty}\left(D^\alpha\phi_n(x), e^{ik\cdot x}\right)_{L^2} \tag{1.94}$$

pero como las $\phi_n's$ son C^∞ la derivada débil coincide con la derivada usual y podemos usar la formula de integración por partes (1.17) para obtener

$$\begin{aligned}
D^\alpha f_k = \lim_{n\to\infty} \int D^\alpha \phi_n(x) e^{-ik\cdot x} dx &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int \phi_n(x) D^\alpha e^{-ik\cdot x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} (-ik)^\alpha \int \phi_n(x) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (ik)^\alpha \left(\phi_n(x), e^{k\cdot x}\right) \\
&= (ik)^\alpha f_k, \qquad (1.95)
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. □

Definición 1.47. *Una distribución temperada es un funcional lineal continuo $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, o un elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Decimos que una sucesión de distribuciones $\{T_k\}$ converge a una distribución T si esta converge puntualmente a T.*

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de crecimiento a lo más polinomial, si definimos

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad (1.96)$$

esta define una distribución y se cumple que si $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ es otra función de crecimiento polinomial, $T_f = T_g$ si y solo si $f = g$ salvo en un conjunto de medida 0 (esto se sigue del lema 1.40) . Entonces esto nos permite sin ambigüedad denotar a la distribución T_f con la función f. Otra distribución importante es la delta de Dirac

$$\delta(\phi) = \phi(0) \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad (1.97)$$

sin embargo, es conocido que esta no puede ser representada por una T_f. Para distribuciones T y T_f establecemos la siguiente notación

$$T(\phi) = (T, \phi)\,, \qquad (1.98)$$

$$T_f(\phi) = (f, \phi)\,. \qquad (1.99)$$

Ahora dado A un operador lineal continuo sobre $\mathcal{S}$, definimos el operador transpuesto A^t sobre el espacio de distribuciones como

$$\left(A^t(T), \phi\right) = (T, A\phi)\,. \qquad (1.100)$$

De esta manera podemos extender muchas operaciones como

- La derivada distribucional $D^\alpha T$

$$(D^\alpha T, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (T, D^\alpha \phi) \qquad (1.101)$$

- La transformada de Fourier $\mathcal{F}T$

$$(\mathcal{F}T, \phi) = (T, \mathcal{F}\phi) \qquad (1.102)$$

- Sea $g \in C^\infty$ tal que la función y sus derivadas son de crecimiento a lo más polinomial la multiplicación gT se define como

$$(gT, \phi) = (T, g\phi) \qquad (1.103)$$

2. Herramientas Matemáticas Preliminares y Derivación Heurística del Modelo

En este capítulo se van a considerar ciertos preliminares que serán necesarios para el desarrollo riguroso de la integral. Se presenta una derivación semí-rigurosa del Lagrangiano clásico que va a aparecer en la integral de trayectoria y algunas herramientas matemáticas no tan conocidas. Sobre estas últimas solo se va a desarrollar lo necesario para entender las definiciones y teoremas utilizados y recomendamos consultar las referencias citadas para una presentación más completa.

2.1. Construcción del Modelo: Regularización del Lagrangiano de las Ecuaciones de Maxwell-Lorentz para Partículas Puntuales

Empezamos con la construcción de una función Lagrangiana que corresponde a la teoría electromagnética clásica. Está nos permitirá definir un funcional sobre posibles configuraciones clásicas que luego surgirá en la definición de la integral de trayectoria. Empezamos con las ecuaciones de Maxwell que dictan como es que cargas y corrientes eléctricas generan campos electromagnéticos (c.f.r.[30, 51, 49]).

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t,x) = 4\pi\rho(t,x) \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t,x) = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t,x) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(t,x)}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(t,x) = \frac{1}{c}\left(4\pi\mathbf{J}(t,x) + \frac{\partial \mathbf{E}(t,x)}{\partial t}\right) \tag{2.4}$$

Para campos vectoriales $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Las funciones ρ y $\mathbf{J}$, representan la densidad de carga y corriente respectivamente. Se considerara el caso de n partículas cargadas, que cada una se representa por una curva en $x^j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$. Las partículas puntuales tienen densidades singulares, por lo que es necesario representarlas como distribuciones temperadas:

$$\rho(t,x) = \sum_{j=1}^{n} e_j \delta(x - x^j(t)) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{J}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} e_j \dot{x}^j(t) \delta(x - x^j(t)) \tag{2.6}$$

La ecuación (2.2)) implica en ciertos casos la existencia de un potencial vectorial $\mathbf{A}(t,x)$, tal que

$$\nabla \times \mathbf{A}(t,x) = \mathbf{B}(t,x) \tag{2.7}$$

Reemplazando en (2.3), y despejando llegamos a la ecuación

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}(t,x) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(t,x)\right) = 0 \tag{2.8}$$

Y de la misma manera, esta ecuación implica en algunos casos la existencia de un escalar potencial $\phi(t,x)$, tal que

$$-\nabla\phi(t,x) = \mathbf{E}(t,x) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(t,x) \tag{2.9}$$

Como queremos construir un Lagrangiano clásico, es prudente tomar la definición usual en donde $\mathcal{L} = T - V$ la diferencia entre energía cinética y potencial del sistema. La energía cinética está dada de manera usual por la velocidad de las partículas y la potencial tiene dos términos dados por la interacción entre los campos y las partículas y la energía almacenada en los campos en sí:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\{x^j\}, \{\dot{x^j}\}, \phi, D\phi, \mathbf{A}, D\mathbf{A}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2}\left\|\dot{x}^j\right\|^2 - \int \left(\rho\phi - \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A} - \frac{1}{8\pi}(\|\mathbf{E}\|^2 - \|\mathbf{B}\|^2)\right) dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{2}\left\|\dot{x}^j\right\|^2 - e_j\phi(t, x^j(t)) + \frac{e_j}{c}\dot{x(t)}\cdot\mathbf{A}(t, x^j(t))\right) \\ &+ \frac{1}{8\pi}\int \left(\left\|-\nabla\phi(t,x) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(t,x)\right\|^2 - \|\nabla\times\mathbf{A}\|^2\right) dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

(ver [51] ec. 13.7). Este Lagrangiano depende de forma funcional tanto de las trayectorias y de los potenciales. Se puede demostrar que al aplicar formalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto a las trayectorias y respecto a los campos, se recupera la expresión para la fuerza de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell que faltan respectivamente. Sin embargo el procedimiento anterior sufre de varios problemas si es que se quiere justificar de forma rigurosa. Uno de estos se debe a divergencias que hacen que el último término de (2.10) no esté bien definido. Si consideramos el caso electroestástico de una partícula cargada, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \frac{e}{r^2}\hat{r} \\ \mathbf{B}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Si integramos en coordenadas polares, puesto que la norma al cuadrado del campo es de orden r^{-4} la singularidad no es integrable. Esta divergencia ocurre debido a la naturaleza de una partícula puntual. Esto se debe a que en general los campos solo puedan ser distribuciones temperadas debido a que las densidades están dadas por deltas de Dirac. Una forma de tratar de resolver estos problemas es remplazando las densidades por una sucesión de funciones más regulares que convergen a las densidades originales, y tomar el límite al final si es posible. Sin embargo este proceso de regularización no resuelve el problema de que la teoría "completa" sigue estando mal definida, por lo que propiamente son un conjunto de modelos que, en dado caso, se tendría que demostrar a parte si es posible tomar el límite y dar con una teoría bien definida.
También, vamos a considerar otro tipo de regularización, que hasta ahora son necesarios para definir la integral de trayectoria usando el método de cortes de Tiempo. Esto consiste en restringir el espacio físico a una caja de volumen arbitrario en lugar de todo $\mathbb{R}^3$, Esto es para $L_1, L_2, L_3 > 0$, tomamos

$$V = \left[-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}\right] \times \left[-\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}\right] \times \left[-\frac{L_3}{2}, \frac{L_3}{2}\right] \tag{2.11}$$

Y definamos

$$|V| := L_1 L_2 L_3, \tag{2.12}$$

$$k := \left(\frac{2\pi}{L_1}s_1, \frac{2\pi}{L_2}s_2, \frac{2\pi}{L_3}s_3\right) \; s_i \in \mathbb{Z} \tag{2.13}$$

Ahora, para regularizar las densidades consideramos una sucesión $\{\psi_k\} \subseteq C_p^\infty(V)$ tal que $\psi_k \to \delta$ como distribución periódica (ver apéndice A). Con esto definimos una sucesión de densidades regularizadas

$$\rho_n(t,x) = \sum_{j=1}^{n} e_j \psi_n(x - x^j(t)), \tag{2.14}$$

$$\mathbf{J}_n(t,x) = \sum_{j=1}^{n} e_j \dot{x}^j(t) \psi_n(x - x^j(t)). \tag{2.15}$$

También, se pedirá que $\phi \in H_0^2(V)$, $\mathbf{A} \in H_0^2(V) \oplus H_0^2(V) \oplus H_0^2(V)$. Esto nos permite expandir a los campos en series de Fourier como:

$$\phi(t,x) = \frac{1}{|V|} \sum_k \phi_k(t) e^{ik\cdot x} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{A}(x,t) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|} \sum_k \hat{e_1} a(t)_{1k} e^{ik\cdot x} + \hat{e_2} a(t)_{2k} e^{ik\cdot x} + \hat{e_3} a(t)_{3k} e^{ik\cdot x} \tag{2.17}$$

Con $\hat{e_i}$ la base canónica en $\mathbb{R}^3$. Vamos a considerar desde este momento a los campos evaluados en $t = 0$. Tomamos la norma de Coulomb sobre el potencial magnético (c.f.r. [51] cap 13.1).

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0, \tag{2.18}$$

entonces por el teorema 1.46, esto se expresa en la serie de Fourier como

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|} \sum_{k\neq 0} k_1 a_{1k} e^{ik\cdot x} + k_2 a_{2k} e^{ik\cdot x} + k_3 a_{3k} e^{ik\cdot x} = 0, \tag{2.19}$$

lo que implica que $k \cdot \left(\hat{e_1} a(t)_{1k} e^{k\cdot x} + \hat{e_2} a(t)_{2k} e^{k\cdot x} + \hat{e_3} a(t)_{3k} e^{k\cdot x}\right) = 0$ para toda k. Para cada $k \neq 0$ tomamos dos vectores ortonormales usando el proceso Gramm Schmidt $\vec{e_i}(k)$, $i = 1, 2$. Y de esta construcción se puede pedir que se cumpla $\vec{e_i}\ (-k) = -\vec{e_i}(k)$. De esta manera podemos expresar (2.16), (2.17) como:

$$\phi(x) = \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{k \\ k_1 \geq 0}} \phi_k e^{ik\cdot x} + \phi_{-k} e^{-ik\cdot x}, \tag{2.20}$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|} \sum_{\substack{k \\ k_1 \geq 0}} \vec{e}_1(k)(a_{1k} e^{ik\cdot x} - a_{1-k} e^{-ik\cdot x}) + \vec{e}_2(k)(a_{2k} e^{ik\cdot x} - a_{2-k} e^{-ik\cdot x}). \tag{2.21}$$

Solo hay que notar que $\{e^{-ik\cdot x}/|V|\vec{e}_1(k)\} \cup \{e^{-ik\cdot x}/|V|\vec{e}_2(k)\} \cup \{e^{-ik\cdot x}/|V|k/\|k\|\}$ es una base ortonormal de $L^2(V) \oplus L^2(V) \oplus L^2(V)$. Se usó la misma notación para los coeficientes de Fourier en las distintas bases por simplicidad pero hay que precisar que en general son distintos. Expresamos los coeficientes de Fourier como:

$$a_{lk} = \frac{a_{lk}^1 - i a_{lk}^2}{\sqrt{2}} \qquad (l = 1, 2), \tag{2.22}$$

$$\phi_k = \phi_k^1 - i\phi_k^2, \tag{2.23}$$

con $a^i_{lk}, \phi^i_k \in \mathbb{R}$. Reemplazando lo anterior en las series (2.20), (2.21)

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|} \sum_{\substack{k \\ k_1 \geq 0 \\ l \in \{1,2\}}} \frac{\vec{e_l}(k)}{\sqrt{2}} (a^1_{lk} - a^1_{l-k}) cos(k \cdot x) + (a^2_{lk} + a^2_{l-k}) sen(k \cdot x) \tag{2.24}$$

$$+ i[(a^1_{lk} + a^1_{l-k}) sen(k \cdot x) - (a^2_{lk} - a^2_{l-k}) cos(k \cdot x)] \tag{2.25}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{k \\ k_1 \geq 0}} (\phi^1_k + \phi^1_{-k}) cos(k \cdot x) + (\phi^2_k - \phi^2_{-k}) sen(k \cdot x)$$

$$+ i[(\phi^1_k - \phi^1_{-k}) sen(k \cdot x) - (\phi^2_k + \phi^2_{-k}) cos(k \cdot x) \tag{2.26}$$

Puesto que estos campos son entes físicos medibles, tenemos que imponer que sean reales, lo que implica que cada sumando tiene que ser real. Como el seno y coseno son linealmente independientes, esto nos da las relaciones

$$a^1_{l-k} = -a^1_{lk}, \quad a^2_{l-k} = a^2_{lk}, \quad \phi^1_{-k} = \phi^1_k, \quad \phi^2_{-k} = -\phi^2_k, \tag{2.27}$$

por lo tanto, podemos reescribir (2.25), (2.26) como

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|} \sum_{\substack{k \\ l \in \{1,2\}}} \frac{1}{\sqrt{2}} (a^1_{lk} cos(k \cdot x) + a^2_{lk} sen(k \cdot x)) \vec{e_l}(k). \tag{2.28}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{|V|} \sum_k (\phi^1_k cos(k \cdot x) + \phi^2_k sen(k \cdot x)), \tag{2.29}$$

Ahora nos enfocamos en la expresión

$$\frac{1}{8\pi} \int_V \left(\left\| -\nabla \phi(t,x) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t,x) \right\|^2 - \| \nabla \times \mathbf{A}(t,x) \|^2 \right) dx.$$

Primero, de (2.16), (2.17) y (2.19) y del teorema 1.46, tenemos que

$$\nabla \phi(x) = \frac{1}{|V|} \sum_k \phi_k e^{ik \cdot x} ik, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|} \sum_k \vec{e_1}(k) \dot{a}_{1k} e^{ik \cdot x} + \vec{e_2}(k) \dot{a}_{2k} e^{ik \cdot x}, \tag{2.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(x) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|} \sum_k ik \times (\vec{e_1}(k) a_{1k} + \vec{e_2}(k) a_{2k}) e^{ik \cdot x}, \tag{2.32}$$

donde la derivada de los coeficientes también se evalúa en $t = 0$. Aplicando la identidad de Paserval (1.33) a funciones en el espacio de funciones cuadrado integrable vectoriales en $L^2(V) \oplus L^2(V) \oplus$

$L^2(V)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\int_V \left\| -\nabla\phi(t,x) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(t,x)\right\|^2 - \|\nabla\times\mathbf{A}(t,x)\|^2 dx &= \frac{1}{8\pi|V|}\sum_k |\phi_k|^2\|k\|^2 + \frac{1}{2|V|}\sum_{\substack{k\\ l\in\{1,2\}}} |\dot{a}_{lk}|^2 \\ &\quad - \frac{c^2}{2|V|}\sum_{\substack{k\\ l,\in\{1,2\}}} \|k\times\vec{e_l}(k)\dot{a}_{lk}\|^2 \\ &= \frac{1}{8\pi|V|}\sum_{\substack{k\\ i\in\{1,2\}}} |\phi_k^i|^2\|k\|^2 + \frac{1}{4|V|}\sum_{\substack{k\neq 0\\ i,l\in\{1,2\}}} |\dot{a}_{lk}^i|^2 \\ &\quad - \frac{c^2}{4|V|}\sum_{\substack{k\\ i,l\in\{1,2\}}} |a_{lk}^i|^2\|k\|^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, si tomamos las expansiones de Fourier de las funciones de prueba

$$\psi_n(x^j) = \frac{1}{|V|}\sum_k \psi_{n,k}e^{-ik\cdot x^j}, \tag{2.33}$$

y definimos

$$\rho_{n,k} = \sum_{j=1}^n e_j\psi_{n,k}e^{-ik\cdot x^j} \tag{2.34}$$

$$\rho_{n,k} = \rho_{n,k}^1 - i\rho_{n,k}^2, \tag{2.35}$$

recordando (2.14), y puesto que las densidades también son reales se tienen que cumplir las relaciones (2.27) tenemos que

$$\rho_n(x) = \frac{1}{|V|}\sum_k\sum_{j=1}^n e_j\psi_{n,k}e^{-ik\cdot x^j}e^{ik\cdot x} = \frac{1}{|V|}\sum_k \rho_{n,k}e^{ik\cdot x} = \frac{1}{|V|}\sum_k(\rho_{n,k}^1 cos(k\cdot x) + \rho_{n,k}^2 sen(k\cdot x)).$$

Por lo tanto usando la identidad de Paserval (1.33) de nuevo, tenemos que

$$\int \rho_n(x)\phi(x)dx = \frac{1}{|V|}\sum_{\substack{k\\ i\in\{1,2\}}} \phi_k^i\rho_{n,k}^i.$$

Entonces podemos definir un Lagrangiano regularizado usando (2.10) como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\{x^j\},\{\dot{x^j}\},\{a_{lk}\},\{\phi_{lk}\},\{\dot{a_{lk}}\}\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2}\left\|\dot{x}^j\right\|^2 + \frac{1}{8\pi|V|}\sum_{\substack{k\\ i\in\{1,2\}}} \|k\|^2|\phi_k^i|^2 - 8\pi\phi(t)_k^i\rho_k^i(\vec{x}) \\ &\quad + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^n e_j\int \dot{x}^j\cdot\mathbf{A}(x)\psi_n(x-x^j)dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\\ i,l\in\{1,2\}}} \frac{|\dot{a}_{lk}^i|^2}{2|V|} - \frac{c^2\|k\|^2(a_{lk}^i)^2}{2|V|}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

De la representación de Fourier tenemos que

$$-\nabla^2\phi = \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{|V|}\sum_k \|k\|^2\phi_k e^{ik\cdot x}. \tag{2.37}$$

Entonces usando (2.1) y la unicidad de la representación de Fourier, llegamos a la ecuación

$$\|k\|^2\phi_k^i = 4\pi\rho_{n,k}^i, \tag{2.38}$$

en particular, para $k=0$ se cumple la siguiente relación

$$0 = \psi_{n,0}\sum_{j=1} e_j. \tag{2.39}$$

Como la ψ_n converge a la delta de Dirac no puede ser que $\psi_{n,0}=0$ para una infinidad de estos por lo tanto la carga total del sistema tiene que ser 0. Existe entonces una constricción física sobre la carga total del sistema. Reemplazando en (2.36)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\left(\|k\|^2|\phi_k^i|^2 - 8\pi\phi_k^i\rho_{n,k}^i(\vec{x})\right) &= \frac{-16\pi^2}{\|k\|^2}\left((\rho_{n,k}^1)^2 + (\rho_{n,k}^2)^2\right)\\
&= \frac{-16\pi^2}{\|k\|^2}\rho_{n,k}\overline{\rho_{n,k}}\\
&= \frac{-16\pi^2}{\|k\|^2}|\psi_{n,k}|^2\left(\sum_{i\neq j} e_ie_je^{ik\cdot x^i}e^{-ik\cdot x^j} + \sum_{j=1}^{n} e_j^2\right)\\
&= \frac{-16\pi^2}{\|k\|^2}|\psi_{n,k}|^2\left(\sum_{i\neq j} e_ie_jcos(k\cdot(x^i - x^j)) + \sum_{j=1}^{n} e_j^2\right),
\end{aligned} \tag{2.40}$$

lo que nos deja con

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\{x^j\},\{\dot{x^j}\},\{a_{lk}\},\{\phi_{lk}\},\{\dot{a_{lk}}\}\right) &= \sum_{j=1}\frac{m_j}{2}|\dot{x}^j|^2 - \frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\neq 0}\frac{|\psi_{n,k}|^2}{\|k\|^2}\left(\sum_{i\neq j} e_ie_jcos(k\cdot(x^i - x^j)) + \sum_{j=1}^{n} e_j^2\right)\\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\int \dot{x}^j\cdot\mathbf{A}(x)\psi_n(x - x^j)dx\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\neq 0\\ i,l\in\{1,2\}}}\frac{|\dot{a}_{lk}^i|^2}{2|V|} - \frac{c^2\|k\|^2(a_{lk}^i)^2}{2|V|}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Hacemos un corte ultravioleta que significa tomar la suma sobre k dentro de una retícula finita. Esto es dados tres enteros positivos M_1, M_2, M_3 tales que $M_i \leq M_{i+1}$,tomamos

$$\Lambda_j := \left\{k = \left(\frac{2\pi}{L_1}s_1, \frac{2\pi}{L_2}s_2, \frac{2\pi}{L_3}s_3\right); \|s\|^2 \neq 0, \|s\|_\infty \leq M_j\right\}. \tag{2.42}$$

Y separamos estas retículas tomando $\Lambda_j' = \{k\in\Lambda_j; s_3>0\}\cup\{k\in\Lambda_j; s_3=0, s_1, s_2\geq 0\}\cup\{k\in\Lambda_j; s_3=0, s_1<0, s_2>0\}$ De tal manera que se cumple que

$$\Lambda_j = \Lambda_j'\cup(-\Lambda_j'), \qquad \Lambda_j'\cap(-\Lambda_j') = \emptyset.$$

Definimos $a_{\Lambda'_j} := \{a^i_{lk}\}_{k\in\Lambda'_j,i,l}$ y notamos que por (2.27) estos valores son suficientes para determinar los valores en la retícula completa. Definimos N_i como la cardinalidad de Λ'_i, esto es

$$N_i := |\Lambda'_i|. \tag{2.43}$$

De esta forma escribimos el potencial magnético con corte ultravioleta como:

$$\mathbf{A}(x,\{a_{\Lambda'_2}\}) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|}\sum_{\substack{k\in\Lambda_2\\ l\in\{1,2\}}}\frac{1}{\sqrt{2}}(a^1_{lk}cos(k\cdot x) + a^2_{lk}sen(k\cdot x))\vec{e}_l(k). \tag{2.44}$$

Notamos que el Lagrangiano no está únicamente determinado por el sistema físico que representa. Esto resulta de que dos Lagrangianos distintos pueden de forma efectiva definir la misma acción o tener las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange. Se puede verificar esto fácilmente notando que se le puede sumar una constante arbitraria al Lagrangiano, sin cambiar las ecuaciones de movimiento. Por lo tanto, podemos re-definir el Lagrangiano regularizado como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(x,\dot{x},\{a_{lk}\},\{\dot{a_{lk}}\}\right) = &\sum_{j=1}\frac{m_j}{2}\left\|\dot{x}^j\right\|^2 - \frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\sum_{i\neq j}\frac{|\psi_{n,k}|^2 e_i e_j cos(k\cdot(x^i-x^j))}{\|k\|^2}\\ &+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\int \dot{x}^j\cdot\mathbf{A}(x,\{a_{\Lambda_2}\})\psi_n(x-x^j)dx\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\substack{k\in\Lambda_3\\ i,l\in\{1,2\}}}\frac{|\dot{a}^i_{lk}|^2}{2|V|} - \frac{c^2\|k\|^2(a^i_{lk})^2}{2|V|} + \frac{\hbar c\|k\|}{2}.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Ahora, notamos que como $\psi_n \to \delta$ como distribución periódica, se tiene que $\psi_{n,k} \to 1$ para toda k. Y por el corte ultravioleta $\mathbf{A}$ es una combinación lineal finita funciones de prueba periódicas se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\int \dot{x}^j\cdot\mathbf{A}(x,\{a_{\Lambda_2}\})\psi_n(x-x^j)dx = \dot{x}^j\cdot\mathbf{A}(x^j,\{a_{\Lambda_2}\}),$$

Por lo que al tomar el límite llegamos al Lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(x,\dot{x},\{a_{lk}\},\{\dot{a_{lk}}\}\right) = &\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{2}\left\|\dot{x}^j\right\|^2 - \frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j cos(k\cdot(x^i-x^j))}{\|k\|^2}\\ &+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\dot{x}^j\cdot\mathbf{A}(x^j,\{a_{\Lambda_2}\}) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\in\Lambda_3\\ i,l\in\{1,2\}}}\frac{|\dot{a}^i_{lk}|^2}{2|V|} - \frac{c^2\|k\|^2(a^i_{lk})^2}{2|V|} + \frac{\hbar c\|k\|}{2}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Por el momento hemos considerado que $x\in V$ sin embargo la expresión anterior está bien definida en $x\in\mathbb{R}^{3n}$. Por comodidad y generalidad vamos a definir el Lagrangiano en todo el espacio, y se van a tratar las divergencias de manera más directa. Vamos a tomar funciones de corte $g\in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ y $\psi\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y tomamos

$$\widetilde{\mathbf{A}}(x,a_{\Lambda'_2}) = \frac{\sqrt{4\pi}c}{|V|}g(x)\sum_{\substack{k\in\Lambda_2\\ l\in\{1,2\}}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(a^1_{lk})cos(k\cdot x) + \psi(a^2_{lk})sen(k\cdot x))\vec{e}_l(k). \tag{2.47}$$

Se pedirá también que $\psi(-x) = -\psi(x)$. En el capítulo 3.1 se darán condiciones de crecimiento sobre estas funciones y sus derivadas. Con esto llegamos al Lagrangiano final

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}\left(x, \dot{x}, \{a_{lk}\}, \{\dot{a_{lk}}\}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2} \left\|\dot{x}^j\right\|^2 - \frac{2\pi}{|V|} \sum_{k\in\Lambda_1} \sum_{i\neq j} \frac{e_i e_j cos(k\cdot(x^i - x^j))}{\|k\|^2} \\ + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{n} e_j \dot{x}^j \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(x^j, \{a_{\Lambda_2}\}) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k\in\Lambda_3 \\ i,l\in\{1,2\}}} \frac{|\dot{a}^i_{lk}|^2}{2|V|} - \frac{c^2\|k\|^2 (a^i_{lk})^2}{2|V|} + \frac{\hbar c \|k\|}{2}. \quad (2.48)\end{aligned}$$

Es importante precisar que está derivación es heurística y meramente una motivación del modelo utilizado. Esto se debe a las hipótesis Ad-Hoc impuestas en los pasos intermedios y la falta de una teoría bien definida sin las regularizaciones. De manera precisa, se empieza con (2.48) como la función Lagrangiana que se utilizará para definir el modelo y cualquier relación a un modelo sin regularizar se tendría que hacer aposteriorí de ser posible. Por lo tanto la siguiente definición debería entenderse como el punto de partida del desarrollo riguroso de la teoría.

Definición 2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $V, |V|, k$ dados por (2.11), (2.12) y (2.13), sea $\Lambda_i, \Lambda_i', N_i$ dados por (2.42) y (2.43), también sea $\{k_j\}_{j=1}^{N_3}$ un ordenamientos de los elementos de Λ_3' (que induce un ordenamiento en Λ_2', Λ_1), y $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\psi(-x) = -\psi(x)$. Si tomamos $(x), (y) \in \mathbb{R}^{3n}$ y $(X), (Y) \in \mathbb{R}^{4N_3}$ entonces definimos la función Lagrangiana $\widetilde{\mathcal{L}} : \mathbb{R}^{6n+8N_3} \to \mathbb{R}$ como*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}\left(x, y, X, Y\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2} \left\|y^j\right\|^2 - \frac{4\pi}{|V|} \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{i\neq j} \frac{e_i e_j cos(k_l\cdot(x^i - x^j))}{\|k_l\|^2} \\ + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{n} e_j y^j \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X) + \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{N_3} \frac{Y_{i,j}^2}{2|V|} - \frac{c^2\|k_i\|^2 X_{i,j}^2}{2|V|} + \frac{\hbar c\|k_i\|}{2}, \quad (2.49)\end{aligned}$$

con

$$\widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X) = \frac{2\sqrt{2\pi}c}{|V|} g(x^j) \sum_{l=1}^{2} \sum_{i=1}^{N_2} (\psi(X_{i,l}) cos(k_i\cdot x^j) + \psi(X_{i,l+1}) sen(k_i \cdot x^j)) \vec{e}_l(k_i). \quad (2.50)$$

Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 < t_2$ y $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^{3n+4N_3}$ tomamos

$$H^2_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}\left([t_1, t_2]\right) = \left\{ \widetilde{\gamma} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^{3n+4N_3} \,\middle|\, \widetilde{\gamma}_i \in H^2((t_1, t_2))\ \forall i \ \wedge\ \widetilde{\gamma}(t_1) = \widetilde{X}, \widetilde{\gamma}(t_2) = \widetilde{Y} \right\}, \quad (2.51)$$

entonces definimos la acción asociada a este Lagrangiano como el funcional $S : H^2_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}\left([t_1, t_2]\right) \to \mathbb{R}$ dado por

$$S(\widetilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{\mathcal{L}}\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \Gamma(t), \dot{\Gamma}(t)\right) dt \qquad \widetilde{\gamma}(t) = \left(\gamma(t), \Gamma(t)\right). \quad (2.52)$$

Esta acción contiene toda la información sobre la dinámica clásica de nuestro modelo. El espacio dado por (2.51) sirve como un modelo para el espacio de trayectorias clásicas donde se pretende definir la integral de trayectoria.

2.2. Integrales Oscilatorias

Para continuar es necesario definir unos conceptos fundamentales que surgen en la definición de la integral de trayectoria en nuestro contexto. Primero, necesitamos extender la definición de integrales de la siguiente forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x,y)e^{i\nu\phi(x,y)}dy \tag{2.53}$$

Donde ϕ es una fase real y por lo tanto, $e^{i\nu\phi}$ no está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Esta última observación nos indica que para una gran clase de funciones, la integral no converge absolutamente. Por lo tanto tomamos la siguiente definición.

Definición 2.2. *Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tales que $n_1+n_2 > 0$ decimos que para funciones $a : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{C}$, $\phi : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}$ de Borel, la integral (2.43) es una integral oscilatoria si para cualquier familia de funciones $\{\chi_\epsilon\}_{\epsilon>0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_2})$ de Schwartz que cumplen:*

1. $\lim_{\epsilon\to 0} \chi_\epsilon = 1$ *Uniformemente en subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^N$,
2. $\lim_{\epsilon\to 0} D^\alpha\chi_\epsilon = 0$ *Uniformemente en* $\mathbb{R}^N$ *para* $|\alpha| > 0$,
3. *Existen constantes no negativas K_α para todo multi-índice α, $0 < \epsilon < 1$ y $0 \leq \sigma \leq |\alpha|$; tal que*

$$|D^\alpha\chi_\epsilon(x)| \leq \frac{K_\alpha}{\langle x\rangle^{|\alpha|-\sigma}},$$

se tiene que $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon(y)p(x,y)e^{i\nu\phi(x,y)}dy$ existe y es independiente de la familia elegida. Este se denota como

$$Os\int_{\mathbb{R}^N} a(x,y)e^{i\nu\phi(x,y)}dy \tag{2.54}$$

Ver [13] Cap. 3 y [35] Cap. 1.6. Vamos a dar un lema que nos dejará construir un gran número de familias de funciones de Schwartz que cumplen 1,2,3 en la definición 2.2.

Lema 2.3. *Sea $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi(0) = 1$ y tomamos $\chi_\epsilon(x) = \chi(\epsilon x)$, entonces la familia $\{\chi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ cumple las propiedades de la definición 2.1*

Demostración. Para la propiedad 1 sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto arbitrario, y $\epsilon' > 0$. Sabemos que por continuidad existe una $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $|\chi(x) - 1| < \epsilon'$. Pero también como K es compacto existe existe una $\epsilon^* > 0$ tal que $\epsilon^* K \subset B(0,\delta)$. Entonces si tomamos $\epsilon < \epsilon^*$ y $x \in K$ notamos que $\|\epsilon x\| < \delta$ por lo tanto $|\chi_\epsilon(x) - 1| = |\chi(\epsilon x) - 1| < \epsilon'$. Entonces la convergencia es uniforme en K.

Para la propiedad 2 y 3 de la regla de la cadena se sigue que $D^\alpha\chi_\epsilon(x) = \epsilon^{|\alpha|}D^\alpha\chi(\epsilon x)$ entonces tenemos para $0 < \epsilon < 1$

$$|D^\alpha\chi_\epsilon(x)| \leq \epsilon^{|\alpha|}|D^\alpha\chi(\epsilon x)| \leq \epsilon^{|\alpha|}K_{\alpha,0,\chi}$$
$$|D^\alpha\chi_\epsilon(x)| \leq \epsilon^{|\alpha|}\frac{K_{\alpha,|\alpha|,\chi}}{\langle\epsilon x\rangle^{|\alpha|}} \leq \epsilon^{|\alpha|}\frac{K_{\alpha,|\alpha|,\chi}}{\epsilon^{|\alpha|}\langle x\rangle^{|\alpha|}} \leq \frac{K_{\alpha,|\alpha|,\chi}}{\langle x\rangle^{|\alpha|-\sigma}}.$$

donde las $K_{\alpha,|\alpha|,\chi}$ son las constantes positivas que existen puesto que χ es de Schwartz. Tomando límite cuando $\epsilon \to 0$ en la primera igualdad, vemos que converge a 0 independiente de x por lo que lo hace uniformemente. La última desigualdad es lo que se quería demostrar. $\square$

Notamos que si $a(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ el limite existe y converge a la integral usual por el teorema 1.11. Sin embargo, el conjunto de símbolos a que se usará tendrá otro tipo de regularidad.

Definición 2.4. *Sea $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, y $m \in \mathbb{R}$, decimos que p pertenece al espacio de símbolo $p \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, si para cualquier pareja de multi-indices α, β, existe una constante positiva $C_{\alpha,\beta}$ tal que*

$$\left|D_x^\alpha D_y^\beta p(x,y)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \left(\langle x \rangle \langle y \rangle\right)^m. \tag{2.55}$$

Tomamos a

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2}). \tag{2.56}$$

Sean $f, g \in \mathcal{A}$, y $c \in \mathbb{C}$, por lo que existen $m_f, m_g \in \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{A}^{m_f}$ y $g \in \mathcal{A}^{m_g}$. Notamos entonces que

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha D_y^\beta (cf+g)(x,y)| &\leq |c| C_{\alpha,\beta}^f \left(\langle x \rangle \langle y \rangle\right)^{m_f} + C_{\alpha,\beta}^g \left(\langle x \rangle \langle y \rangle\right)^{m_g} \\ &\leq \text{máx}\{|c|C_{\alpha,\beta}^f, C_{\alpha,\beta}^g\} \left(\langle x \rangle \langle y \rangle\right)^{\text{máx}\{m_f,m_g\}}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\tag{2.58}$$

Usando la regla de Leibniz (1.12) tenemos que

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha D_y^\beta (fg)(x,y)| &= \left| \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} (D_x^{\alpha'} D_y^{\beta'} f(x,y))(D_x^{\alpha-\alpha'} D_y^{\beta-\beta'} g(x,y)) \right| \\ &\leq \left(\sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} C_{\alpha',\beta'}^f C_{\alpha-\alpha',\beta-\beta'}^g \right) \left(\langle x \rangle \langle y \rangle\right)^{m_f+m_g}, \end{aligned} \tag{2.59}$$

por lo que este espacio es un espacio vectorial y es cerrado bajo multiplicación puntual, y

$$cf + g \in \mathcal{A}^{\text{máx}\{m_f,m_g\}}(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) \qquad fg \in \mathcal{A}^{m_f+m_g}(\mathbb{R}^{n_1+n_2}). \tag{2.60}$$

En el caso de que $m_f = m_g = m$, esto también demuestra que A^m es un espacio vectorial, pero solo es un álgebra si $m = 0$. Tomamos la funciones $p_i^m(x,y) = ((x,y)_i)^m$ para $i = 1, .., n_1+n_2$ y $m \in \mathbb{N}_0$. Para cualquier multi-índice α tal que $\alpha_j \neq 0$ con $j \neq i$ o si $\alpha_i > m$ se tiene que $D^\alpha p_i^m = 0$. Ahora solo falta considerar $\partial_i^k p_i^m(x,y) = m * (m-1) \ldots (m-k+1)((x,y)_i)^{m-k}$ con $k \leq m$. Si $|(x,y)_i| \leq 1$ entonces es claro que

$$|((x,y))_i^{m-k}| \leq 1 \leq \left(\langle x \rangle \langle y \rangle\right)^m$$

Y si $|(x,y)_i| \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} |((x,y))_i^{m-k}|^2 \leq |((x,y))_i^{2m}| \leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\|y\|^2 + \|x\|^2\right)^k &= \left(\sqrt{1+||x||^2+||y||^2}\right)^{2m} \\ &\leq \left(\langle x \rangle \langle y \rangle\right)^{2m} \end{aligned}$$

Entonces $p_i^m \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Ahora, como un polinomio arbitrario en n_1+n_2 variables se puede escribir como $p(x,y) = \sum_\alpha c_\alpha (x,y)^\alpha = \sum_\alpha c_\alpha \prod_{i=1}^{n_1+n_2} p_i^{\alpha_i}(x,y)$ por lo que de lo anterior es claro que estos están en $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ (en particular las funciones constantes). Notamos también que si una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ cumple que para todo multi-índice α existe $p_\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ tal que $|D^\alpha f| \leq |p_\alpha|$ entonces se sigue de inmediato que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Con esto en mente, demostramos lo siguiente.

Proposición 2.5. *Sea $f \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ y $l \in \mathbb{N}_0$ definimos la norma*

$$\|f\|_{m,l} = \max_{|\alpha+\beta|\leq l} \sup\left|D_x^\alpha D_y^\beta f(x,y)\right| \left(\langle x\rangle \langle y\rangle\right)^{-m} \tag{2.61}$$

entonces $\mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ es un espacio de Frechet 1.34, con las normas (2.61).

Demostración. Que (2.61) es una norma para cada $l \in \mathbb{N}_0$ se sigue de las propiedades del supremo y de que $(\langle x\rangle \langle y\rangle)^{-m}$ es una función positiva. Solo falta demostrar que es completo, por lo que sea $\{f_n\} \subset \mathcal{A}^m$ una sucesión de Cauchy, esto significa que es de Cauchy con respecto a la norma $\|\cdot\|_{m,l}$ para toda $l \in \mathbb{N}_0$, pero esto significa que para cualesquiera α, β multi-índices, la sucesión de funciones $\left(D_x^\alpha D_y^\beta f_n(x,y)\right)(\langle x\rangle \langle y\rangle)^{-m}$ es uniformemente de Cauchy por lo que existe una función $g_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(D_x^\alpha D_y^\beta f_n(x,y)\right)(\langle x\rangle \langle y\rangle)^{-m} = g_{\alpha,\beta}(x,y),$$

uniformemente. Como $(\langle x\rangle \langle y\rangle)^{-m}$ es continua y positiva se sigue fácilmente que $D_x^\alpha D_y^\beta f_n(x,y)$ converge uniformemente a $g_{\alpha,\beta}(x,y)(\langle x\rangle \langle y\rangle)^m$ en subconjuntos compactos. Esto es, como la sucesión y la sucesión de las derivadas de f_n convergen uniformemente localmente, se sigue que al menos $f := g_{0,0}(\langle\cdot\rangle \langle\cdot\rangle)^m \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ y que $D_x^\alpha D_y^\beta f(x,y) = g_{\alpha,\beta}(x,y)(\langle x\rangle \langle y\rangle)^{-m}$, por lo que solo falta demostrar que $f \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Puesto que

$$\begin{aligned}\left|D_x^\alpha D_y^\beta f(x,y)\right| &\leq \left|D_x^\alpha D_y^\beta f_n(x,y) - D_x^\alpha D_y^\beta f(x,y)\right| + \left|D_x^\alpha D_y^\beta f_n(x,y)\right| \\ &\leq \left(\left|D_x^\alpha D_y^\beta f_n(x,y) - D_x^\alpha D_y^\beta f(x,y)\right|(\langle x\rangle \langle y\rangle)^{-m} + \|f_n\|_{m,|\alpha+\beta|}\right)(\langle x\rangle \langle y\rangle)^m \\ &\lim_{n\to\infty} \sup\|f_n\|_{m,|\alpha+\beta|}(\langle x\rangle \langle y\rangle)^m,\end{aligned}$$

puesto $\lim_{n\to\infty} \sup\|f_n\|_{m,|\alpha+\beta|} < \infty$ al ser la sucesión de Cauchy y por lo tanto acotada. Se sigue que $f \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ y como la sucesión de Cauchy es convergente se sigue que el espacio es completo lo que termina la demostración. □

Teorema 2.6. *Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$ tal que $n_2 \geq n_1$ y $p \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Si tomamos $(z,x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ con $x, y \in \mathbb{R}^{n_1}$ entonces la integral oscilatoria*

$$Os\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-ix\cdot y} p(z,x,y)dxdy, \tag{2.62}$$

existe como en la definición 2.2. Si tomamos la función $\tilde{p} : \mathbb{R}^{n_2-n_1} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\tilde{p}(z) = Os\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-ix\cdot y} p(z,x,y)dxdy, \tag{2.63}$$

se cumple que $\tilde{p} \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_2-n_1+0})$ y se tiene la siguiente representación

$$D^\gamma \tilde{p}(z) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-ix\cdot y} \langle x\rangle^{-2l} \langle \partial_y\rangle^{2l} \left(\langle y\rangle^{-2l} \langle \partial_x\rangle^{2l} D_z^\gamma p(z,x,y)\right) dxdy, \tag{2.64}$$

donde

$$\langle \partial\rangle^2 := \left(1 + \nabla^2\right), \tag{2.65}$$

y la integral de la derecha converge absolutamente para $l \in \mathbb{N}_0$ suficientemente grande. Finalmente para todo $l \in \mathbb{N}_0$ existen $l' \in \mathbb{N}_0$, $l' \geq l$ y $C_l \geq 0$ tales que

$$\|\tilde{p}\|_{m,l} \leq C_l \|p\|_{m,l'}, \tag{2.66}$$

Con las normas dadas por (2.61)

Nota. *Por formalidad, solo mencionamos que en el caso $n_1 = n_2$, en lugar de considerar la función $\tilde{p}$, se entiende que la integral oscilatoria*

$$Os \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-ix\cdot y} p(x,y) dxdy,$$

existe y es una constante en $\mathbb{C}$. Y también se cumple (2.64) tomando $\gamma = 0$.

Se va a demostrar antes un sencillo lema, pero que se será de mucha utilidad.

Lema 2.7. *Para todo α multi-índice y k entero podemos escribir*

$$D^\alpha \frac{1}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}} = \sum_{|\beta|\le|\alpha|} \frac{c_{k,\beta} x^\beta}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2+k_\beta}}, \tag{2.67}$$

con $c_{k,\beta} \in \mathbb{R}$ y $k_\beta \in \mathbb{N}$ tal que $2k_\beta - |\alpha| \ge |\beta|$ y $|\beta| \le k_\beta \le |\alpha|$. Y se cumple que

$$\left| D^\alpha \frac{1}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}} \right| \le \frac{C_{k,\alpha}}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}}. \tag{2.68}$$

Demostración. La demostración será por inducción sobre el orden de los multi-índices. Si $|\alpha| = 0$ la igualdad es trivial con $c_{k,0} = 1$ y $k_0 = 0$. Ahora supongamos que la igualdad se cumple para multi-índices de orden $|\alpha| = k$, entonces sea α mulit-índice tal que $|\alpha| = k+1$ entonces para algún $i = 1, \cdots, N$ podemos escribir $D^\alpha = \partial_{x_i} D^{\alpha'}$ con $|\alpha'| = k$ entonces aplicando la hipótesis de inducción tenemos que

$$D^\alpha \frac{1}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}} = \sum_{|\beta|\le|\alpha'|} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{c_{k,\beta} x^\beta}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2+k_\beta}} = \sum_{|\beta|\le|\alpha'|} \frac{c_{k,\beta}\beta_i x^{\beta-\hat{e}_i}\left(1+\|x\|^2\right)}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2+k_\beta+1}} - \frac{(k+2k_\beta)c_{k,\beta} x^{\beta+\hat{e}_i}}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2+k_\beta+1}},$$

de esto es claro como tomar las constantes (fijando las que faltan como 0) y queda demostrada la inducción. Ahora si suponemos que $|x^\beta| \le 1$ se cumple trivialmente que $|x^\beta| \le \left(1+\|x\|^2\right)^{k_\beta - |\alpha|/2}$ y $|x^\beta| > 1$

$$\begin{aligned}\left|x^\beta\right|^2 = \prod_{i=1}^n \left(x_i^2\right)^{\beta_i} \le \sum_{|\beta'|=|\beta|} \binom{|\beta|}{\beta} \prod_{i=1}^n \left(x_i^2\right)^{\beta_i'} = \|x\|^{2|\beta|} \le \|x\|^{2(2k_\beta-|\alpha|)} &\le \sum_{k=0}^{2k_\beta-|\alpha|} \binom{2k_\beta-|\alpha|}{k} \|x\|^{2k} \\ &= \left(1+\|x\|^2\right)^{2k_\beta-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Entonces de la desigualdad del triangulo se sigue que existe una constante $C_{k,\alpha}$ tal que

$$\left| D^\alpha \frac{1}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}} \right| \le \frac{C_{k,\alpha}}{\left(1+\|x\|^2\right)^{(k+|\alpha|)/2}} \le \frac{C_{k,\alpha}}{\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}} \tag{2.69}$$

□

Demostración Teorema 2.6. Calculando directamente se puede comprobar que

$$\langle y\rangle^{-2}\left(1+\nabla_x^2\right)e^{-ix\cdot y} = e^{-ix\cdot y}, \qquad \langle x\rangle^{-2}\left(1+\nabla_y^2\right)e^{-ix\cdot y} = e^{-ix\cdot y}. \tag{2.70}$$

Sea $\{\chi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una familia como en la definición2.2, entonces de (2.59), de la formula de integración por partes 1.17, y de la regla integral de Leibniz 1.13, tenemos que

$$\begin{aligned} D_z^\gamma \int e^{-ix\cdot y} p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)dxdy &= \int \left(\langle y\rangle^{-2l}\langle \partial_x\rangle^{2l} e^{-ix\cdot y}\right) D_z^\gamma p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)dxdy \\ &= \int e^{-ix\cdot y}\left(\langle y\rangle^{-2l}\langle \partial_x\rangle^{2l} D_z^\gamma p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)\right)dxdy \\ &= \int e^{-ix\cdot y}\langle x\rangle^{-2l}\langle \partial_y\rangle^{2l}\left(\langle y\rangle^{-2l}\langle \partial_x\rangle^{2l} D_z^\gamma p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)\right)dxdy. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Notamos que, como son operadores diferenciales con coeficientes constantes, podemos usar el teorema multinomial para escribir formalmente

$$\left(1+\nabla^2\right)^l = \sum_{|\alpha|=l}\binom{l}{\alpha} D^{2\alpha/\hat{e}_0}, \tag{2.72}$$

con $\alpha/\hat{e}_0$ es un multi-índice formado de quitar el primer termino del mutli-índice α. De forma más precisa, puesto que todos los operadores en la expresión $(1+\nabla^2)$ conmutan, el teorema multinomial es valido si se considera la composición como el producto y la igualdad se entiende como operadores que actúan en algún C^∞. Usando (2.72) y la regla del producto de Leibniz (1.12), tenemos que.

$$\begin{aligned} \langle \partial_y\rangle^{2l}\left(\langle y\rangle^{-2l}\langle \partial_x\rangle^{2l} D_z^\gamma p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)\right) &= \langle \partial_y\rangle^{2l}\left(\frac{\sum_{|\beta|=l}\binom{l}{\beta} D_x^{2\beta/\hat{e_0}} D_z^\gamma(p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y))}{\left(1+\|y\|^2\right)^l}\right) \\ &= \langle \partial_y\rangle^{2l}\left(\frac{\sum_{|\beta|=l}\binom{l}{\beta} D_x^{2\beta/\hat{e_0}} D_z^\gamma(p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y))}{\left(1+\|y\|^2\right)^l}\right) \\ &= \sum_{\substack{|\beta|=l\\|\alpha|=l}}\binom{l}{\alpha}\binom{l}{\beta} D_y^{2\alpha/\hat{e}_0}\left(\frac{D_x^{2\beta/\hat{e_0}} D_z^\gamma(p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y))}{\left(1+\|y\|^2\right)^l}\right) \\ &= \sum_{\substack{|\beta|=l\\|\alpha|=l\\ \alpha'\leq 2\alpha/\hat{e}_0}}\binom{l}{\alpha}\binom{l}{\beta}\binom{2\alpha/\hat{e}_0}{\alpha'} \\ &\times\left(D_y^{\alpha'}\langle y\rangle^{-2l}\right) D_y^{2\alpha/\hat{e}_0-\alpha'}(D_x^{2\beta/\hat{e}_0} D_z^\gamma(p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y))). \end{aligned} \tag{2.73}$$

De la propiedad 3 de la familia es claro que $\{\chi_\epsilon\}_{0<\epsilon<1}$ es un subconjunto acotado de $\mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{2n_1})$ y por lo tanto es un familia uniformemente acotada. De esto y de (2.59) se sigue $\{p\chi_\epsilon\}_{0<\epsilon<1}$ es un subconjunto acotado de $\mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Por lo tanto Usando esto y el lema 2.7, podemos encontrar $C_{l,\gamma}$ una constantes positivas independientes de ϵ tal que

$$\left|\langle \partial_y\rangle^{2l}\left(\langle y\rangle^{-2l}\langle \partial_x\rangle^{2l} D_z^\gamma p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)\right)\right| \leq C_{l,\gamma}\|p\|_{m,l'}\langle z\rangle^m\langle x\rangle^m\langle y\rangle^{m-2l},$$

con $l'\geq 2l+|\gamma|$. Por lo tanto

$$\left|e^{-ix\cdot y}\langle x\rangle^{-2l}\langle \partial_y\rangle^{2l}\left(\langle y\rangle^{-2l}\langle \partial_x\rangle^{2l} D_z^\gamma p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)\right)\right| \leq C_{l,\gamma}\|p\|_{m,l'}\langle z\rangle^m\left(\langle x\rangle\langle y\rangle\right)^{m-2l}. \tag{2.74}$$

La función $(\langle\cdot\rangle\langle\cdot\rangle)^{m-2l}$ de la desigualdad de la derecha está en $L^1(\mathbb{R}^{2n_1})$ por (1.1). Entonces del teorema de convergencia dominada 1.11 se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} D_z^\gamma \int e^{-ix\cdot y} p(z,x,y)\chi_\epsilon(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot y}\langle x\rangle^{-2l}\langle \partial_y\rangle^{2l}\Big(\langle y\rangle^{-2l}\langle\partial_x\rangle^{2l} D_z^\gamma p(z,x,y)\Big)dxdy\\ &= D_z^\gamma \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot y}\langle x\rangle^{-2l}\langle \partial_y\rangle^{2l}\Big(\langle y\rangle^{-2l}\langle\partial_x\rangle^{2l} p(z,x,y)\Big)dxdy,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de la regla integral de Leibniz 1.13. Para finalizar notamos que como l' en la desigualdad (2.74) depende a lo más de l y de el orden de γ que actúa solo sobre z, entonces (2.66) se sigue de aplicar esta desigualdad a la representación que acabamos de encontrar. □

Ahora vamos a calcular algunas integrales oscilatorias que resultaran útiles más adelante.

Proposición 2.8.

1. *Si* $a\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$

$$Os\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}a(y)dxdy = a(0). \tag{2.75}$$

2. *Sean* α,β *multi-índices*

$$Os\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}\frac{x^\alpha y^\beta}{\alpha!\beta!}dxdy = \begin{cases}0, & \textit{if}\ \alpha\neq\beta\\ \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}, & \textit{if}\ \alpha=\beta.\end{cases} \tag{2.76}$$

Demostración. Para 1, sea $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi(0)=1$ y tomamos $\chi_\epsilon(x)=\chi(\epsilon x)$ entonces por el lema 2.3 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Os}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}a(y)dxdy &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}a(y)\chi(\epsilon x)\chi(\epsilon y)dxdy\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix'\cdot y'}a(\epsilon y')\chi(x')\chi(\epsilon^2 y')dxdy\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int a(\epsilon y')\mathcal{F}\chi(y')\chi(\epsilon^2 y')dy,\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó el cambio de variable $x'=\epsilon x, y'=y/\epsilon$. Notamos que para $\epsilon<1$, de la propiedad 3 de la familia χ_ϵ

$$\left|a(\epsilon y')\mathcal{F}\chi(y')\chi(\epsilon^2 y')\right| \le C_0K_0|\mathcal{F}\chi(y')|\langle y'\rangle^{m_a}.$$

Como el término de la derecha es integrable puesto que $\mathcal{F}\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, entonces del teorema de convergencia dominada 1.11 y del teorema de Plancherel 1.39 se obtiene que

$$\mathrm{Os}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}a(y)dxdy = \frac{1}{(2\pi)^N}\int a(0)\mathcal{F}\chi(y')dy = a(0)\chi(0) = a(0).$$

Para 2 sea $\{\chi_\epsilon\}$ como en la definición 2.2 entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Os}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}\frac{x^\alpha y^\beta}{\alpha!\beta!}dxdy &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}\chi_\epsilon(x,y)\frac{x^\alpha y^\beta}{\alpha!\beta!}dxdy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int \left((iD_y)^\alpha e^{-ix\cdot y}\right)\chi_\epsilon(x,y)\frac{y^\beta}{\alpha!\beta!}dxdy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}(-iD_y)^\alpha\chi_\epsilon(x,y)\frac{y^\beta}{\alpha!\beta!}dxdy
\end{aligned}$$

Donde se integro por partes en la última igualdad. Por las propiedades 1 y 2 de la familia $\{\chi_\epsilon\}$ los términos que dependan de las derivadas de estas en el límite se anulan uniformemente entonces usando la regla de Leibniz tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Os}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}\frac{x^\alpha y^\beta}{\alpha!\beta!}dxdy &= \mathrm{Os}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}(-iD_y)^\alpha\frac{y^\beta}{\alpha!\beta!}dxdy \\
&= \mathrm{Os}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-ix\cdot y}(-i)^{|\alpha|}\binom{\beta}{\alpha}\frac{y^{\beta-\alpha}}{\beta!}dxdy
\end{aligned}$$

Por lo tanto 2 se sigue de aplicar 1 a esta integral. □

2.3. Operadores Pseudo-Diferenciales

Los operadores pseudo-diferenciales sirven como una forma de extender el estudio de operadores diferenciales, explotando la transformada de Fourier (c.f.r. [35, 39]). Para motivar un poco la teoría recordamos que si tomamos un operador diferencial lineal con coeficientes suficientemente suaves (e.g. actuando en algún $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$), como

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha u(x). \tag{2.77}$$

Si definimos el símbolo del operador P como

$$p(x,y) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(iy)^\alpha, \tag{2.78}$$

se sigue que podemos expresar el operador como

$$Pu(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot y}p(x,y)\mathcal{F}u(y)dy. \tag{2.79}$$

Entonces una forma de generalizar esto es remplazando el polinomio p por funciones suaves de crecimiento polinomial.

Definición 2.9. *Decimos que un operador $P:\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\to C^\infty(\mathbb{R}^N)$ es un operador pseudo-diferencial con símbolo $p(x,y)\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^{2N})$ si se puede representar como*

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{ix\cdot y}p(x,y)\mathcal{F}u(y)dy, \tag{2.80}$$

y lo denotamos por $P(x,\partial_x)$. Para un parámetro $\rho\in\mathbb{R}$ definimos

$$P(x,\rho\partial_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{ix\cdot y}p(x,\rho y)\mathcal{F}u(y)dy. \tag{2.81}$$

Que $Pu \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se sigue de la regla integral de Leibniz 1.13. Sin embargo el operador es mucho más regular.

Lema 2.10. *Si $P(x, \partial_x)$ es un operador pseudo-diferencial con símbolo $p \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^N)$, entonces $P(x, \partial_x)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*

Demostración. Sea α un multi-índice arbitrario y $Q, Q' \in \mathbb{N}$ tal que $m - 2Q = -Q'$ entonces por la regla integral y diferencial de Leibniz, y de la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}(2\pi)^N \langle x\rangle^{2Q} D_x^\alpha Pu(x) &= \langle x\rangle^{2Q} \int \left(D_x^\alpha e^{ix\cdot y} p(x,y)\right) \mathcal{F}u(y)dy \\ &= \sum_{\alpha' \leq \alpha} \int \binom{\alpha}{\alpha'} \left(\langle \partial_y\rangle^{2Q} e^{ix\cdot y}\right) \left(D_x^{\alpha-\alpha'} p(x,y)\right) (iy)^\alpha \mathcal{F}u(y)dy \\ &= \sum_{\alpha' \leq \alpha} \int \binom{\alpha}{\alpha'} e^{ix\cdot y} \langle \partial_y\rangle^{2Q} \left(\left(D_x^{\alpha-\alpha'} p(x,y)\right) (iy)^\alpha \mathcal{F}u(y)\right) dy, \end{aligned} \tag{2.82}$$

por lo que usando (2.72) tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\langle \partial_y\rangle^{2Q} \left(\left(D_x^{\alpha-\alpha'} p(x,y)\right) (iy)^\alpha \mathcal{F}u(y)\right)\right| &\leq \sum_{\substack{|\beta|=Q \\ \beta' \leq 2\beta/\hat{e}_0}} \binom{Q}{\beta} \left| D_y^{\beta'} \left(D_x^{\alpha-\alpha'} p(x,y)\right) D_y^{2\beta/\hat{e}_0 - \beta'} \left((iy)^\alpha \mathcal{F}u(y)\right)\right| \\ &\leq \sum_{\substack{|\beta|=Q \\ \beta' \leq 2\beta/\hat{e}_0}} \binom{Q}{\beta} C_{\beta', \alpha-\alpha'} K_{2\beta/\hat{e}_0 - \beta', m+N+1} \langle x\rangle^{m_p} \langle y\rangle^{-N-1}, \end{aligned} \tag{2.83}$$

Recordando que $\langle \cdot \rangle^{-N-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, juntando (2.82) y (2.83), se sigue que existe una constante $K_{Q',\alpha}$ tal que

$$\begin{aligned}&\left|\langle x\rangle^{2Q} D_x^\alpha Pu(x)\right| \leq k_{Q',\alpha} \langle x\rangle^m \\ &\leftrightarrow |D_x^\alpha Pu(x)| \leq k_{Q',\alpha} \langle x\rangle^{-Q'}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Por lo tanto Pu es de la clase de Schwartz. □

Uno de los principales beneficios de los operadores pseudo-diferenciales es que permiten traducir muchas operaciones y relaciones diferenciales a un calculo sobre los símbolos de estos a los cuales se les pueden dar fórmulas explicitas. En este cálculo simbólico existe una importante conexión entre estos operadores y las integrales oscilatorias como se ilustra en los siguientes lemas.

Lema 2.11. *Sean $q_1, q_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{2N})$ y sea $T \geq 0$. Si definimos*

$$q(\rho, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^N} Os \int\int e^{-iy'\cdot x'} q_1(x, y + \rho x') q_2(x + y', y) dy' dx', \tag{2.85}$$

entonces $\{q(\rho, x, y)\}_{0<\leq\rho\leq T}$ está acotado en $\mathcal{A}^{m_{q_1}+m_{q_2}}(\mathbb{R}^{2N})$ con respecto a las normas (2.61), y

$$Q(\rho, x, \rho\partial_X) = Q_1(x, \rho\partial_x) \circ Q_2(x, \rho\partial_x). \tag{2.86}$$

Demostración. Del teorema 2.6, es claro que $\{q(\rho,x,y)\}_{0<\leq\rho\leq T}\subset\mathcal{A}^{m_{q_1}+m_{q_2}}(\mathbb{R}^{2N})$ y que si tomamos $l\in\mathbb{N}$ tal que $0<2l-(m_{q_1}+m_{q_2})-N$ podemos expresar (2.85) como

$$D^{\gamma}_{(x,y)}q(\rho,x,y)=\int\int e^{-ix'\cdot y'}\left\langle x'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{y'}\right\rangle^{2l}\Big(\left\langle y'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{x'}\right\rangle^{2l}D^{\gamma}_{(x,y)}(q_1(x,y+\rho x')q_2(x+y',y))\Big)\,dx'dy', \tag{2.87}$$

usando (2.64) Entonces, usando (2.72) tenemos que

$$\begin{aligned}
&D^{\gamma}_{(x,y)}\left\langle x'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{y'}\right\rangle^{2l}\Big(\left\langle y'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{x'}\right\rangle^{2l}q_1(x,y+\rho x')q_2(x+y',y)\Big)\\
&=\left\langle x'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{y'}\right\rangle^{2l}\left(\left\langle y'\right\rangle^{2l}\left\langle\partial_{x'}\right\rangle^{-2l}\sum_{\gamma'\leq\gamma}\binom{\gamma}{\gamma'}D^{\gamma'}_{(x,y)}q_1(x,y+\rho x')\times D^{\gamma-\gamma'}_{(x,y)}q_2(x+y',y)\right)\\
&=\left\langle x'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{y'}\right\rangle^{2l}\left(\left\langle y'\right\rangle^{-2l}\sum_{\substack{\gamma'\leq\gamma\\|\beta|=l}}\rho^{2|\beta/\hat{e}_0|}\binom{l}{\beta}\binom{\gamma}{\gamma'}D^{\gamma'+2\beta/\hat{e}_0}_{(x,y)}q_1(x,y+\rho x')D^{\gamma-\gamma'}_{(x,y)}q_2(x+y',y)\right)\\
&=\left\langle x'\right\rangle^{-2l}\sum_{\substack{\gamma'\leq\gamma\\|\beta|=l\\|\alpha|=l\\\alpha'\leq\alpha}}\rho^{2|\beta/\hat{e}_0|}\binom{l}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{l}{\beta}\binom{\gamma}{\gamma'}D^{\alpha'}_{y'}\frac{1}{\left(1+\|y'\|^2\right)^{2l/2}}D^{\gamma'+2\beta/\hat{e}_0}_{(x,y)}q_1(x,y+\rho x')D^{\gamma+\alpha-\gamma'-\alpha'}_{(x,y)}q_2(x+y',y).
\end{aligned}$$

Entonces usando el lema 2.7, la desigualdad del triangulo y tomando máximos existe una constante $C_{l,\gamma}$ independiente de ρ tal que

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\gamma}_{(x,y)}e^{-ix'\cdot y'}\left\langle x'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{y'}\right\rangle^{2l}\Big(\left\langle y'\right\rangle^{-2l}\left\langle\partial_{x'}\right\rangle^{2l}q_1(x,y+\rho x')q_2(x+y',y)\Big)\right|\\
&\leq\frac{C_{l,\gamma}\left(\left\langle x\right\rangle\left\langle y+\rho x'\right\rangle\right)^{m_{q_1}}\left(\left\langle x+y'\right\rangle\left\langle y\right\rangle\right)^{m_{q_2}}}{\left(1+\|x'\|^2\right)^l\left(1+\|y\|^2\right)^l}\\
&\leq\frac{C_{l,\gamma}\left(\left\langle x\right\rangle 2\left\langle y\right\rangle\left\langle\rho x'\right\rangle\right)^{m_{q_1}}\left(2\left\langle x\right\rangle\left\langle y'\right\rangle\left\langle y\right\rangle\right)^{m_{q_2}}}{\left(1+\|x'\|^2\right)^l\left(1+\|y'\|^2\right)^l}\\
&\leq\frac{C_{l,\gamma}(2(1+T))^{m_{q_1}+m_{q_2}}\left(\left\langle x\right\rangle\left\langle y\right\rangle\right)^{m_{q_1}+m_{q_2}}\left\langle x'\right\rangle^{m_{q_1}}\left\langle y'\right\rangle^{m_{q_2}}}{\left(1+\|x'\|^2\right)^l\left(1+\|y'\|^2\right)^l}\\
&:=C'_{l,\gamma}\left(\left\langle x\right\rangle\left\langle y\right\rangle\right)^{m_{q_1}+m_{q_2}}\left\langle x'\right\rangle^{m_{q_1}-2l}\left\langle y'\right\rangle^{m_{q_2}-2l},
\end{aligned} \tag{2.88}$$

donde $C'_{l,\gamma}$ depende a lo más de T. Entonces, reemplazando en (2.87) nos queda que

$$|D^{\gamma}q(\rho,x,y)|\leq C'_{l,\gamma}\left(\left\langle x\right\rangle\left\langle y\right\rangle\right)^{m_{q_1}+m_{q_2}}\left(\int\left\langle x'\right\rangle^{m_{q_1}-2l}dx'\right)\left(\int\left\langle y'\right\rangle^{m_{q_2}-2l}dy'\right), \tag{2.89}$$

por lo que $\{q(\rho,x,y)\}_{0\leq\rho\leq T}$ está acotado en $\mathcal{A}^{m_{q_1}+m_{q_2}}(\mathbb{R}^{2N})$. Ahora, si tomamos $\{\chi_\epsilon\}$ como en el lema 2.3 y $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\begin{aligned}
Q(\rho,x,\rho\partial_x)f(x)&=\int e^{ix\cdot y}q(\rho,x,\rho y)\mathcal{F}f(y)dy\\
&=\int e^{ix\cdot y}\left(\lim_{\epsilon\to0}(2\pi)^{-N}\int\int e^{-iy'\cdot x'}\chi_\epsilon(x',y')q_1(x,\rho y+\rho x')q_2(x+y',\rho y)dy'dx'\right)\mathcal{F}f(y)dy\\
&:=\int e^{x\cdot y}\lim_{\epsilon\to0}q_\epsilon(\rho,x,\rho y)\mathcal{F}f(y)dy
\end{aligned}$$

Repitiendo los mismos argumentos con los cuales se obtuvo (2.89) pero para q_ϵ y recordando que de la propiedad 3 de la familia $\{\chi_\epsilon\}$ se sigue que esta es un subconjunto acotado de $\mathcal{A}^0$, existe una constante C_l^* independiente de ϵ y que a lo más depende de T, tal que

$$|q_\epsilon(\rho, x, \rho y)| \leq C_{l,0}^* \left(\langle x\rangle \langle y\rangle\right)^{m_{q_1}+m_{q_2}}$$

Y como $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ entonces para $N' \in \mathbb{N}$ tal que $0 < N' - m_{q_2} - N$

$$\begin{aligned} |q_\epsilon(\rho, x, \rho y)\mathcal{F}u(y)| &\leq C_{l,0}^* K_{0,N'} \left(\langle x\rangle \langle y\rangle\right)^{m_{q_1}+m_{q_2}} \langle y\rangle^{-N'} \\ &\leq C_{l,0}^* K_{0,N'} \langle x\rangle^{m_{q_1}+m_{q_2}} \langle y\rangle^{m_{q_2}-N'}. \end{aligned}$$

Entonces por el teorema de convergencia dominada 1.11 y por el teorema de Fubini 1.15, tenemos que

$$\begin{aligned} (2\pi)^{2N} Q(\rho, x, \rho\partial_x) f(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{ix\cdot y} q_\epsilon(\rho, x, \rho y)\mathcal{F}f(y)dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{i(x\cdot y - y'\cdot x')}\chi_\epsilon(x', y') q_1(x, \rho y + \rho x') q_2(x+y', \rho y)\mathcal{F}f(y)dy'dx'dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{i(x\cdot y-(u-x)\cdot x')}\chi_\epsilon(x', (u-x)) q_1(x, \rho y + \rho x') q_2(u, \rho y)\mathcal{F}f(y)dudx'dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{i(-w\cdot u + y\cdot u + w\cdot x)}\chi_\epsilon((w-y), (u-x)) q_1(x, \rho w) q_2(u, \rho y)\mathcal{F}f(y)dudwdy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{iw\cdot x} q_1(x, \rho w) \int e^{-iu\cdot w} \int e^{iy\cdot u}\chi_\epsilon((w-y), (u-x)) q_2(u, \rho y)\mathcal{F}f(y)dydudw \end{aligned} \tag{2.90}$$

Definimos

$$\begin{aligned} &p_\epsilon(x, y, w, u, \rho) := \chi(\epsilon(w-y), \epsilon(u-x)) q_2(u, \rho y)\mathcal{F}f(y), \\ &r_\epsilon(x, w, u, \rho) := \left(\mathcal{F}_y^{-1} p_\epsilon(x, \cdot, w, u, \rho)\right)(u), \\ &s_\epsilon(x, w, \rho) := \left(\mathcal{F}_u r_\epsilon(x, w, \cdot, \rho)\right)(w), \\ &t_\epsilon(x, w\rho) := q_1(x, \rho w) s_\epsilon(x, w, \rho). \end{aligned}$$

Integrando por partes respecto a la variable y (1.17) y usando la regla integral de Leibniz (1.13), se tiene que para todo α, β multi-índices

$$D_w^\alpha D_u^\beta r_\epsilon(x, w, u, \rho) = \sum_{\beta'\leq\beta} \binom{\beta}{\beta} \langle u\rangle^{-2l} \int e^{iy\cdot u}(iy)^{\beta'} \langle\partial_y\rangle^{2l} D_u^{\beta-\beta'} D_w^\alpha p_\epsilon(x, y, w, u, \rho)dy. \tag{2.91}$$

Por lo que podemos encontrar una constante $C_{\alpha,\beta,N'} \geq 0$ tal que

$$\left|D_w^\alpha D_u^\beta r_\epsilon(x, w, u, \rho)\right| \leq C_{\gamma,\beta,N'} \langle u\rangle^{-N'}. \tag{2.92}$$

Repitiendo el argumento con esta cota también se cumple que

$$|D_w^\gamma s_\epsilon(x, w, \rho)| \leq C'_{\gamma,N'} \langle w\rangle^{-N'}. \tag{2.93}$$

Por lo tanto reuniendo todo esto se sigue que existe una constante $K \geq 0$ independiente de ϵ y que dependa a lo más de T tal que

$$\left|e^{iw\cdot x} t_\epsilon(x, w\rho)\right| \leq K \langle x\rangle^m \langle w\rangle^{-(N+1)}. \tag{2.94}$$

Entonces si consideramos (2.90) como integrales iteradas en el orden $dy \to du \to dw$ usando (2.92,2.93,2.94) y el teorema de convergencia dominada 1.11 también de forma iterada para cada integral obtenemos

$$\begin{aligned}
Q(\rho, x, \rho\partial_x)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{iw\cdot x}q_1(x,\rho w)\int e^{-iu\cdot w}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{iy\cdot u}q_2(u,\rho y)\mathcal{F}f(y)dydudw \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{iw\cdot x}q_1(x,\rho w)\int e^{-iu\cdot w}\left(Q_2(u,\rho\partial_u)f\right)(u)dudw \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{iw\cdot x}q_1(x,\rho w)\left(\mathcal{F}\left(Q_2(u,\rho\partial_u)f\right)\right)(w)dw \\
&= Q_1(x,\rho\partial_x)\circ Q_2(x,\rho\partial_x)f(x), \qquad (2.95)
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. □

Lema 2.12. *Sea $q \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{2N})$ y sea*

$$q^*(x,y) = Os\frac{1}{(2\pi)^N}\int\int e^{-ix'\cdot y'}\overline{q(x+x',y+y')}dy'dx' \qquad (2.96)$$

Entonces para todo $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\left(Q(x,\partial_x)f,g\right)_{L^2} = \left(f,Q^*(x,\partial_x)g\right)_{L^2} \qquad (2.97)$$

con Q^* el operador pseudo-diferencial con símbolo q^*.

Demostración. Del teorema 2.6 se sigue $q^* \in \mathcal{A}^{m_q}$. Por definición, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(f,Q^*(x,\partial_x)g\right)_{L^2} &= \frac{1}{(2\pi)^N}\int f(x)\overline{\left(\int e^{ix\cdot y}q^*(x,y)\mathcal{F}g(y)dy\right)}dx \\
&= \int f(x)e^{-ix\cdot y}\overline{q^*(x,y)}\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(y)dydx.
\end{aligned}$$

Sea $\{\chi_\epsilon\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ una familia como en la definición 2.2 entonces por definición y por el teorema de convergencia dominada 1.11 tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(f,Q^*(x,\partial_x)g\right)_{L^2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{i(x'\cdot y'-x\cdot y)}q(x+x',y+y')f(x)\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(y)\chi_\epsilon(x',y')dy'dx'dydx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{i((x''-x)\cdot(y''-y)-x\cdot y)}q(x'',y'')f(x)\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(y)\chi_\epsilon(x''-x,y''-y)dy''dx''dydx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^N}\int\left(\int e^{-ix''\cdot y}\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(y)\left(\int e^{ix''\cdot y''}q(x'',y'')\right.\right. \\
&\quad\times\left.\left.\left(\int e^{-ix\cdot y''}\chi_\epsilon(x''-x,y''-y)f(x)dx\right)dy''\right)dy\right)dx''.
\end{aligned}$$

Si manteamos el orden de las integrales iteradas de podemos intercambiar el límite en la integral como se hizo para obtener (2.95) en el lema anterior. De esto y del teorema de Plancherel 1.39, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(f,Q^*(x,\partial_x)g\right)_{L^2} &= \int\overline{g(x'')}\left(\int e^{ix''\cdot y''}q(x'',y'')\mathcal{F}(f)(y'')dy''\right)dx'' \\
&= \left(Q(x,\partial_x)f,g\right)_{L^2}. \qquad (2.98)
\end{aligned}$$

□

Ahora se presentará un teorema clásico sobre la continuidad de estos operadores en L^2

Teorema 2.13 (Calderon-Vaillancourt). *Sea $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ un operador pseudo-diferencial, tal que su símbolo está en $p(x,y) \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{2N})$, con $m \leq 0$, entonces existe una $C > 0$ y $l \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que*

$$\|Pu\|_2 \leq C\|p\|_{m,l}\|u\|_2, \tag{2.99}$$

con $\|\cdot\|_2$ la norma en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y $\|\cdot\|_{m,l}$ la norma dada por (2.61).

Antes de demostrarlo vamos a considerar unos lemas generales pero que serán de gran utilidad.

Lema 2.14. *Existe un $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^N} \phi(x-z) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{2.100}$$

Demostración. Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi \geq 0$ y $\psi \restriction_{[0,1]} \equiv 1$ entonces notamos que la función

$$\Psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(x-z), \tag{2.101}$$

donde la suma está bien definida por la compacidad del soporte de ψ, cumple que $\psi \geq 1$ puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x - z \in [0,1]$. Entonces podemos definir

$$\phi_0 = \frac{\psi}{\Psi} \tag{2.102}$$

Y finalmente para $x \in \mathbb{R}^N$ definimos

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{N} \phi_0(x_i), \tag{2.103}$$

que cumple lo requerido verificando directamente. □

Lema 2.15 (Cotlar-Stein). *Sea $\{A_i\}$ un conjunto numerable de operadores acotados en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ tal que existe una constante $M \geq 0$*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\|A_j^* A_k\right\|_{OP}^{1/2} \leq M \qquad \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \|A_j A_k^*\|_{OP}^{1/2} \leq M \tag{2.104}$$

Entonces $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ converge fuertemente y $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right\|_{OP} \leq M$

Demostración. Primero, puesto que para un operador acotado arbitrario se cumple que $\|TT^*\|_{OP} = \|T^*T\|_{OP} = \|T\|_{OP}^2$, por inducción para m par y T auto adjunto $\|T^m\|_{OP} = \|T\|_{OP}^m$. Por lo tanto si tomamos $m \in \mathbb{N}$ par y $H = T^*T$ entonces

$$\|H^m\|_{OP} = \|H\|_{OP}^m = \|T\|_{OP}^{2m}. \tag{2.105}$$

Ahora sea

$$T = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} A_j^* A_k, \tag{2.106}$$

donde tomamos $\{\alpha_{j,k}\} \subset \mathbb{C}$ tales que $|\alpha_{j,k}| \leq 1$ y solo un número finito, digamos N de estos, son distintos de 0. Entonces para m par

$$(T^*T)^m = \sum \overline{\alpha_{j_2,j_1}} A_{j_1}^* A_{j_2} \alpha_{j_3,j_4} A_{j_3}^* A_{j_4} \cdots \alpha_{j_{4m-1},j_{4m}} A_{j_{4m-1}}^* A_{j_{4m}}. \tag{2.107}$$

Por la submultiplicidad de la norma de operador se sigue que

$$\begin{aligned}\left\|A_{j_1}^* A_{j_2} \cdots A_{j_{4m-1}}^* A_{j_{4m}}\right\|_{OP} \leq \text{mín}\Big(&\left\|A_{j_1}^* A_{j_2}\right\|_{OP} \cdots \left\|A_{j_{4m-1}}^* A_{j_{4m}}\right\|_{OP}, \\ &\left\|A_{j_1}^*\right\|_{OP} \|A_{j_{4m}}\|_{OP} \left\|A_{j_2} A_{j_3}^*\right\|_{OP} \cdots \left\|A_{k_{4m-2}} A_{j_{4m-1}}^*\right\|_{OP}\Big)\end{aligned} \tag{2.108}$$

Entonces usando que $\text{mín}(a,b) \leq \sqrt{ab}$ para todo $a, b \geq 0$ y de las hipótesis que $\|A_k\|_{OP} = \|A_k^*\|_{OP} \leq M$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|T^m\|_{OP} &\leq M \sum |\alpha_{j_1,j_2}| \left\|A_{j_1}^* A_{j_2}\right\|_{OP}^{1/2} \left\|A_{j_2} A_{j_3}^*\right\|_{OP}^{1/2} \cdots \left\|A_{k_{4m-1}}^* A_{j_{4m}}\right\|_{OP}^{1/2} \\ &\leq M \sum_{j_1} M^{4m-1} \\ &= NM^{4m}\end{aligned} \tag{2.109}$$

Por lo tanto de (2.105) se sigue $\|T\|_{OP} \leq N^{1/2m} M^2$, por lo que si hacemos tender m a infinito nos queda

$$\|T\|_{OP} \leq M^2. \tag{2.110}$$

Luego, por Cauchy-Schwartz

$$\left|\sum_{j,k} \alpha_{j,k} \left(A_j x, A_k x\right)_{\mathscr{H}}\right| = |(Tx, x)_{\mathscr{H}}| \leq M^2 \|x\|_{\mathscr{H}}^2. \tag{2.111}$$

Por lo tanto si tomamos $\alpha_{j,k} = \left(A_j x, A_k x\right)_{\mathscr{H}} / \left|\left(A_j x, A_k x\right)_{\mathscr{H}}\right|$ y reemplazando en la ecuación anterior tenemos

$$\sum_{j,k}^{N} \left|\left(A_j x, A_k x\right)_{\mathscr{H}}\right| \leq M^2 \|x\|_{\mathscr{H}}^2, \tag{2.112}$$

como N fue arbitraria, se sigue que

$$\sum_{j,k} \left|\left(A_j x, A_k x\right)_{\mathscr{H}}\right| \leq M^2 \|x\|_{\mathscr{H}}^2. \tag{2.113}$$

Ahora Y como para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left\|\sum_{i=m}^{n} A_i x\right\|_{\mathscr{H}}^2 \leq \sum_{i,j \geq m} \left|\left(A_i x, A_j, x\right)_{\mathscr{H}}\right|. \tag{2.114}$$

Entonces, como el término de la derecha en la desigualdad anterior es la cola de la sucesión convergente $\sum_{j,k} \left|\left(A_j x, A_k x\right)_{\mathscr{H}}\right|$, esta se va a 0 cuando n, m se va a infinito por lo que la sucesión de sumas parciales $\sum_{i=1}^{n} A_i x$ es de Cauchy y como el espacio de Hilbert la sucesión converge. La cota en la norma de operador se sigue de la desigualdad (2.113), lo que termina la demostración. □

Demostración del Teorema 2.10. Por simplicidad, también vamos a considerar a los operadores $P' := P \circ \mathcal{F}^{-1}$, que por el teorema de Plancherel 1.39, es suficiente demostrar que estos son acotados en L^2 para demostrar que P también lo es. Definimos $K : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{C}$ como

$$k(x, x') = e^{ix\cdot x'} p(x, x'), \tag{2.115}$$

y primero, supongamos que $m > N$, $p \in \mathcal{A}^{-m}(\mathbb{R}^{2N})$ y $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ entonces por definición

$$P'u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{ix\cdot x'} p(x, x')u(x')dx' = \int K(x', x)u(x')dx',$$

de (1.1) se sigue que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int |K(x', x)|dx' \leq \frac{\|p\|_{-m,0}}{(2\pi)^N} \int \langle x' \rangle^{-m} dx' < \infty \tag{2.116}$$

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^N} \int |K(x', x)|dx \leq \frac{\|p\|_{-m,0}}{(2\pi)^N} \int \langle x \rangle^{-m} dx < \infty \tag{2.117}$$

entonces

$$\begin{aligned} |P'u(x)| \leq \int |K(x', x)u(x')|dx' &= \int |K(x', x)|^{1/2} |K(x', x)|^{1/2} |u(x')|dx' \\ &\leq \left(\int |K(x', x)|dx' \right)^{1/2} \left(\int |K(x', x)||u(x')|^2 dx' \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se sigue de una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Entonces por el teorema de Fubini 1.15, se tiene que

$$\|P'u\|_{L^2}^2 \leq \left(\|p\|_{m,0}/(2\pi)^N \int \langle x' \rangle^{-m} dx' \right)^2 \|u\|_{L^2}^2, \tag{2.118}$$

de lo que se sigue que P' es acotado en L^2 y por lo ya discutido también P. Y por el teorema de Plancherel1.39 y la sub-multiplicidad de la norma operador se sigue que

$$\|Pu\|_{L^2} \leq \|p\|_{-m,0} \int \langle x' \rangle^{-m} dx' \|u\|_{L^2}, \tag{2.119}$$

por lo que tomando $l = 0$ y $C = \int \langle x' \rangle^{-m} dx'$ este caso queda demostrado. Ahora si tomamos $p \in \mathcal{A}^{-m/2}$ de los lemas 2.11 y 2.12 existe un $q \in \mathcal{A}^{-m}(\mathbb{R}^{2N})$ tal que $P^* \circ P = Q$ entonces por el caso que acabamos de demostrar y por (2.66)

$$\begin{aligned} \|Pu\|_{L^2}^2 = (Pu, Pu)_{L^2} = (u, P^*Pu)_{L^2} = (u, Qu)_{L^2} &\leq \|u\|_{L^2} \|Qu\|_{L^2} \\ &\leq C' \|q\|_{-m,0} \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq C' C_{0,q} \|p^* p\|_{-m,l'} \\ &\leq C' C_{0,q} C_{l_1,p^*} \|p\|_{-m/2,l}^2, \end{aligned} \tag{2.120}$$

entonces también en este caso se cumple el teorema. De la misma forma por inducción se puede demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ el caso $p \in \mathcal{A}^{-m/2^k}(\mathbb{R}^{2N})$. Si tomamos un $\epsilon > 0$ arbitrario y tomamos k tal que $-\epsilon \leq -m/2^k$ si $p \in \mathcal{A}^{-\epsilon}(\mathbb{R}^{2N}) \subseteq \mathcal{A}^{-m/2^k}(\mathbb{R}^{2N})$ se sigue del caso anterior. La demostración para $p \in \mathcal{A}^0$ resulta ser distinta. Ahora consideramos ϕ como en el lema 2.14, entonces se tiene que

$$p = \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}^N} \phi_{k_1,k_2} p := \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}^N} p_{k_1,k_2}, \tag{2.121}$$

con $\phi_{k_1,k_2}(x,y) = \phi(x-k_1, y-k_2)$. Notamos que $p_{k_1,k_2} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2N})$. Definimos para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^N$ el operador

$$U(k_1,k_2)u(x) = e^{ix\cdot k_2} u(x-k_1), \tag{2.122}$$

y es claro que es unitario como operador en L^2 y que su adjunto está dado por

$$U(k_1,k_2)^* = e^{-ik_1\cdot k_2} U(-k_1,k_2), \tag{2.123}$$

y que además se cumple

$$U(k_1,k_2)U(k_3,k_4) = e^{-ik_2\cdot k_4} U(k_1+k_3, k_2+k_4). \tag{2.124}$$

También, es fácil de verificar que si $\tau_{-k_1,-k_2}$ es el operador de traslación, entonces para cualquier $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ si $b_{k_1,k_2} = \tau_{-k_1,-k_2} b$

$$B_{k_1,k_2}, = U(k_1,k_2) B U(k_1,k_2)^* \tag{2.125}$$

en particular si tomamos $q_{k_1,k_2} := \phi \tau_{k_1,k_2} p$

$$P_{k_1,k_2} = U(k_1,k_2) Q_{k_1,k_2} U(k_1,k_2)^*. \tag{2.126}$$

Juntando todo esto tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| P_{k_1,k_2} P^*_{k_3,k_4} \right\|_{OP} &= \left\| U(k_1,k_2) Q_{k_1,k_2} U(k_1,k_2)^* U(k_3,k_4) Q^*_{k_3,k_4} U(k_3,k_4)^* \right\|_{OP} \\ &= \left\| Q_{k_1,k_2} U(k_3-k_1, k_4-k_2) Q^*_{k_3,k_4} U(k_3,k_4)^* U(k_1,k_2) \right\|_{OP} \\ &= \left\| Q_{k_1,k_2} U(k_3-k_1, k_4-k_2) Q^*_{k_3,k_4} U(k_3-k_1, k_4-k_2)^* \right\|_{OP} \end{aligned} \tag{2.127}$$

También, se sigue de la regla del producto de Leibniz y de que $\langle \cdot \rangle^N \phi$ es una función de prueba que para toda $N, l \in \mathbb{N}_0$, existe $C \geq 0$ tal que para todo $k_1 k_2 \in \mathbb{Z}^N$ se tiene que

$$\| q_{k_1,k_2} \|_{l,N} \leq C \|p\|_{0,l}. \tag{2.128}$$

Entonces, usando el lema 2.11, 2.12, (2.125) y (1.71) se tiene que si definimos

$$\begin{aligned} q_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int\int e^{-iy'\cdot x'} q_{k_1,k_2}(x, y+x') \tau_{k_1-k_3, k_2-k_4} q^*_{k_3,k_4}(x+y', y) dy' dx', \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int q_{k_1,k_2}(x, y+x') \left(\int e^{-iy'\cdot x'} \tau_{k_1-k_3,k_2-k_4} q^*_{k_3,k_4}(x+y', y) dy' \right) dx' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{i(k_1-k_3)\cdot x'} q_{k_1,k_2}(x, y+x') \mathcal{F}_1(\tau_{x,k_2-k_4} q^*_{k_3,k_4})(x', y) dx', \end{aligned} \tag{2.129}$$

donde $\mathcal{F}_1$ se refiere a la transformada de Fourier con respecto a la primera entrada, se sigue que

$$Q_{k_1,k_2} U(k_3-k_1, k_4-k_2) Q^*_{k_3,k_4} U(k_3-k_1, k_4-k_2)^* = Q_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}. \tag{2.130}$$

Por lo tanto de (2.127) se sigue que

$$\left\|P_{k_1,k_2}P^*_{k_3,k_4}\right\|_{OP} = \left\|Q_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}\right\|_{OP}. \tag{2.131}$$

De nuevo, consideramos el operador

$$Q'_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{ix\cdot y}q_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}(x,y)u(y)dy, \tag{2.132}$$

entonces tomamos $K_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}(x,y) = e^{ix\cdot y}q_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}(x,y)$. De nuevo por el lema 2.12

$$q^*_{k_3,k_4}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\int e^{-ix''\cdot y''}\overline{q_{k_3,k_4}(x+x'',y+y'')}dy''dx'', \tag{2.133}$$

notando que en este caso como $q_{k_1,k_2}, q_{k_3,k_4} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ estas integrales convergen absolutamente. Integrando por partes, y usando que estas son funciones de prueba, vemos que para $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $N_2 - N_1 < -N$ y α multi-índice existe una constante $C \geq 0$ y $l \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\begin{aligned}(2\pi)^N\left|D^\alpha q^*_{k_3,k_4}(x,y)\right| &\leq \int \|q_{k_3,k_4}\|_{l,N_2} C(\langle x''\rangle\langle y''\rangle)^{-N_1}\langle(x+x'',y+y'')\rangle^{-N_2}dy''dx'' \\ &\leq \|p\|_{0,l}\int(\langle x''\rangle\langle y''\rangle)^{N_2-N_1}\langle(x,y)\rangle^{-N_2}dy''dx'',\end{aligned} \tag{2.134}$$

recordando la definiciones de las normas del espacio de Schwartz (1.61) y la desigualdad (1.2). Por lo tanto repitiendo el argumento para la integral dada en (2.129) y usando la cota que acabamos de encontrar, para todo $N_2, N_3 \in \mathbb{N}_0$ tal que $N_2 - N_3 < -N$y α multi-índice, existe una constante $C > 0$ y $l \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\begin{aligned}(2\pi)^N\left|D^\alpha q_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}(x,y)\right| &\leq C'\|p\|^2_{0,l}\int\langle k_1-k_3\rangle^{-N_1}\langle(x,y+x')\rangle^{-N_2}\langle(x+x',y+k_2-k_4)\rangle^{-N_3}dx' \\ &\leq 2C'\|p\|^2_{0,l}\langle k_1-k_3\rangle^{-N_1}\int\langle(y,y+x')\rangle^{N_2-N_3}\langle x-y\rangle^{N_2}\langle(x-y,k_2-k_4)\rangle^{-N_3}dx' \\ &\leq 2C'\|p\|^2_{0,l}\langle k_1-k_3\rangle^{-N_1}\langle x-y\rangle^{N_2}\langle(x-y,k_2-k_4)\rangle^{-N_3}\int\langle y+x'\rangle^{N_2-N_3}dx' \\ &\leq 4C'\|p\|^2_{0,l}\langle k_1-k_3\rangle^{-N_1}\langle k_2-k_4\rangle^{-N_3}\int\langle x'\rangle^{N_2-N_3}dx'.\end{aligned} \tag{2.135}$$

Por lo tanto, de nuevo integrando por partes y usando la cota anterior,existe $l \in \mathbb{N}_0$ y $C \geq 0$ tal que

$$\int\left|K_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}(x,y)\right|dx \leq C\|p\|^2_{0,l}\langle k_1-k_3\rangle^{-(2N+2)}\langle k_2-k_4\rangle^{-(2N+2)}, \tag{2.136}$$

y de la misma forma

$$\int\left|K_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}(x,y)\right|dy \leq C\|p\|^2_{0,l}\langle k_1-k_3\rangle^{-(2N+2)}\langle k_2-k_4\rangle^{-(2N+2)}. \tag{2.137}$$

Por lo tanto al tener cotas como las de (2.116) consecuentemente se tiene de (2.118) que existe $K \geq 0$ tal que

$$\left\|Q'_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}\right\|_{OP} \leq K^2\|p\|^2_{0,l}\langle k_3-k_1\rangle^{-N_2}\langle k_4-k_2\rangle^{-N_2}. \tag{2.138}$$

Como el N_2 que tomamos fue arbitrario, fijamos uno tal que $N_2/2 > N$ entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{(k_3,k_4)\in\mathbb{N}^{2N}} \left\|Q'_{(k_1,k_2),(k_3,k_4)}\right\|_{OP}^{1/2} &\leq \sum_{(k_3,k_4)\in\mathbb{N}^{2N}} K\|p\|_{0,l} \langle k_3 - k_1\rangle^{-N_2/2} \langle k_4 - k_2\rangle^{-N_2/2} \\
&= K\|p\|_{0,l} \int_{\mathbb{R}^{+2N}} \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^N \lfloor x_i - k_{1_i}\rfloor^2}^{N_2/2} \sqrt{1+\sum_{i=1}^N \lfloor y_i - k_{2_i}\rfloor^2}^{N_2/2}} dxdy \\
&\leq K\|p\|_{0,l} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \langle x - k_1\rangle^{-N_2/2} \langle y - k_2\rangle^{-N_2/2} dxdy \\
&= K\|p\|_{0,l} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \langle x\rangle^{-N_2/2} \langle y\rangle^{-N_2/2} dxdy < \infty, \qquad (2.139)
\end{aligned}
$$

por lo tanto de (2.131) y del teorema de Plancherel 1.39,se cumple que

$$
\sup_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^{2N}} \sum_{(k_3,k_4)\in\mathbb{Z}^{2N}} \left\|P_{(k_1,k_2)}P^*_{(k_3,k_4)^*}\right\|_{OP}^{1/2} \leq 2^{2N} K\|p\|_{0,l}\|\mathcal{F}\|_{OP}^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \langle x\rangle^{-N_2/2} \langle y\rangle^{-N_2/2} dxdy. \qquad (2.140)
$$

De manera completamente analoga se obtiene

$$
\sup_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^{2N}} \sum_{(k_3,k_4)\in\mathbb{Z}^{2N}} \left\|P^*_{(k_1,k_2)}P_{(k_3,k_4)^*}\right\|_{OP}^{1/2} \leq 2^{2N} K\|p\|_{0,l}\|\mathcal{F}\|_{OP}^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \langle x\rangle^{-N_2/2} \langle y\rangle^{-N_2/2} dxdy. \qquad (2.141)
$$

Puesto que $\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^{2N}} P_{k_1,k_2}$ converge puntualmente a P usando (2.121) en $\mathcal{S}$ por el teorema de convergencia dominada, se sigue de esto y del lema 2.15 la demostración. □

Finalmente, vamos a dar una conexión importante entre operadores pseudo-diferenciales e integrales oscilatorias. Una conexión inmediata se puede dar es escribiendo de manera explicita la transformada de Fourier en la definición 2.9, lo que nos da

$$
\begin{aligned}
P(x,\partial_x)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int\int e^{i(x-x')\cdot y} p(x,y)u(x')dx'dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \mathrm{Os} \int\int e^{ix''\cdot y} p(x,y)u(x+x'')dx''dy \qquad (2.142)
\end{aligned}
$$

donde la primera integral se tiene que entender como una integral iterada pues en general no converge absolutamente en $\mathbb{R}^{2N}$, por lo que la integral oscilatoria da una representación útil. En particular, esta representación nos permitirá dar formulas para operadores pseudo diferenciales con un mayor número de variables independientes mixtas.

Definición 2.16. *Sea $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{4N})$ y supongamos que existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que para toda α multi-índice existe una constante $C_{\alpha,\beta} \geq 0$ tal que*

$$
|D_\alpha p(x,x',y,y')| \leq C_\alpha \langle x\rangle^m \langle y\rangle^m, \qquad (2.143)
$$

y $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definimos a el operador pseudo-diferencial de doble símbolo p, que denotamos por $P(x,\partial_x,y,\partial_y) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ como

$$
P(x,\partial_x,y,\partial_y)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} Os \int e^{-i(y\cdot z + y'\cdot z')} p(x,z,x+y,z')u(x+y+y')dydy'dzdz', \qquad (2.144)
$$

donde la integral oscilatoria existe por 2.6.

Se demostrará que en realidad esta solo es otra representación de un operador pseudo-diferencial como se definió en 2.9. Antes de esto se demostrará un lema para dar mayor flexibilidad a esta representación.

Lema 2.17. *La ecuación (2.144) se puede representar como*

$$P(x,\partial_x,y,\partial_y)u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{2N}}\int e^{i(x-y)\cdot x'+iy\cdot y'}p(x,x',y,y')\mathcal{F}u(y')dy'dydx', \tag{2.145}$$

donde está integral se entiende como una integral iterada en el orden $dy'\to dy\to dx'$.

Demostración. Sea $\{\chi_\epsilon\}$ como en el lema 2.3, entonces por definición

$$(2\pi)^{2N}P(x,\partial_x,y,\partial_y)u(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-i(y\cdot z+y'\cdot z')}\chi_\epsilon(y,y',z,z')p(x,z,x+y,z')u(x+y+y')dydy'dzdz'.$$

Si tomamos los siguientes cambios de variable $x'=x+y, x''=x+y+y'$, tenemos que

$$\begin{aligned}(2\pi)^{2N}P(x,\partial_x,y,\partial_y)u(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{ix\cdot z}\left\{\int e^{-x'\cdot z}\left[\int e^{x'\cdot z'}\left(\int e^{-x''\cdot z'}\chi_\epsilon(x'-x,x''-x',z,z')\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\times\, p(x,z,x',z')u(x'')dx''\right)dz'\right]dx'\right\}dz,\end{aligned}$$

entonces de la misma manera que se obtuvo (2.95), utilizando el teorema de convergencia dominada de manera iterada, podemos meter el límite a la integral de lo que se sigue el lema. □

Proposición 2.18. *Sea $p\in C^\infty(\mathbb{R}^{4N})$ que cumple (2.143), y sea*

$$\tilde{p}(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^N}Os\int\int e^{-iy'\cdot x'}p(x,y+x',x+y',y)dy'dx', \tag{2.146}$$

entonces

$$P(x,\partial_x,y,\partial_y)=\tilde{P}(x,\partial_x), \tag{2.147}$$

como en 2.9.

Demostración. Sea $\{\chi_{1,\epsilon}\}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^N),\{\chi_{2,\epsilon}\}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$, familias como en el lema 2.3, entonces si definimos

$$p_\epsilon(x,y,x',y')=\chi_2(\epsilon(y-y'),\epsilon(x'-x))\chi_1(\epsilon y)p(x,y,x',y'), \tag{2.148}$$

entonces por definición se tiene que

$$\begin{aligned}2\pi^N\tilde{P}(x,\partial_x)&=\int e^{ix\cdot y}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int\int e^{-ix'\cdot y'}p_\epsilon(x,y+x',x+y',y)dy'dx'\right)\mathcal{F}u(y)dy\\&=\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{ix\cdot y}\left(\int\int e^{-ix'\cdot y'}p_\epsilon(x,y+x',x+y',y)dy'dx'\right)\mathcal{F}u(y)dy\\&=\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{ix\cdot y}e^{-i(x'-y)\cdot(y'-x)}p_\epsilon(x,x',y',y)\mathcal{F}u(y)dydy'dx'\\&=\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{ix\cdot x'}\left[\int e^{-ix'\cdot y'}\left(\int e^{iy'\cdot y}p_\epsilon(x,x',y',y)\mathcal{F}u(y)dy\right)dy'\right]dx'\\&=\int e^{ix\cdot x'}\left[\int e^{-ix'\cdot y'}\left(\int e^{iy'\cdot y}p(x,x',y',y)\mathcal{F}u(y)dy\right)dy'\right]dx'\end{aligned} \tag{2.149}$$

donde para sacar el límite afuera y dentro de la integral se puede argumentar de la misma manera en la que se obtuvo (2.95). Por lo tanto la proposición se sigue del lema anterior 2.17. □

2.4. Espacios de Sobolev con Peso

Ahora introducimos el concepto de un espacio de Sobolev con peso (c.f.r.[34, 33]).

Definición 2.19. *Dados $a \in \mathbb{N}$ $1 \leq p < \infty$, un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y un conjunto de funciones medibles $\sigma = \{\sigma_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}; \sigma_\alpha \geq 0$ a.e., $|\alpha| \leq a\}$, definimos el espacio de Sobolev con peso $W^{a,p}(\Omega; \sigma)$ como*

$$W^{a,p}(\Omega;\sigma) = \left\{ f \in L^p(\Omega); ||f||_{a,p,\sigma} := \left(\sum_{|\alpha| \leq a} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \sigma_\alpha(x) dx \right)^{1/p} < \infty \right\}. \tag{2.150}$$

Este es un espacio vectorial normado con la norma $|| \cdot ||_{a,p,\rho}$ y generaliza a los espacios de Sobolev usuales tomando $\sigma_\alpha \equiv 1$. También notamos que si escribimos a la norma como

$$||f||_{a,p,\rho} = \left(\sum_{|\alpha| \leq a} \left(||D^\alpha f \sigma_\alpha^{1/p}||_p \right)^p \right)^{1/p},$$

y tomamos $\mathcal{P}(a) = \{\alpha; |\alpha| \leq a\}$ podemos ver esta norma como la norma p sobre el vector $(y_\alpha) = \left(||D^\alpha f \sigma_\alpha^{1/p}||_p \right) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{P}(a)|}$. Y por lo tanto es equivalente a la norma 1 dada por

$$||f||_{a,p,\sigma,1} = \sum_{|\alpha| \leq a} ||D^\alpha f \sigma_\alpha^{1/p}||_p, \tag{2.151}$$

y a cualquier otra norma $1 \geq q$. También notamos que si tomamos $p = 2$, entonces el espacio tiene un producto interno natural dado por

$$(f, g)_{W^{a,2}(\Omega;\sigma)} = \sum_{|\alpha| \leq a} \left(D^\alpha f \sigma_\alpha^{1/2}, D^\alpha g \sigma_\alpha^{1/2} \right)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.152}$$

Para propósitos del modelo, se define una clase muy particular

Definición 2.20. *Definimos el espacio de Sobolev con peso $B^a(\mathbb{R}^N)$, tomando $p = 2, \Omega = \mathbb{R}^N, \sigma_\alpha \equiv 0$ si $0 < |\alpha| < a, \sigma_0 = 1 + \sum_{|\alpha|=a} |x^{2\alpha}|, \sigma_\alpha(x) = 1$ si $|\alpha| = a$ en la definición 2.19. La norma definida en 2.19 es equivalente a*

$$||f||_{B^a} := ||f||_2 + \sum_{|\alpha|=a} \left(||x^\alpha f||_2 + ||D^\alpha f||_2 \right). \tag{2.153}$$

Pero usando el teorema de Plancharel 1.39 , y usando la identidad (1.70) esta norma es equivalente a

$$||f||_2 + \sum_{|\alpha|=a} \left(||x^\alpha f||_2 + ||x^\alpha \mathcal{F} f||_2 \right), \tag{2.154}$$

$$||f||_2 + \sum_{|\alpha|=a} \left(||D^\alpha \mathcal{F} f||_2 + ||D^\alpha f||_2 \right), \tag{2.155}$$

que denotaremos de forma intercambiable como $\|\cdot\|_{B^a}$.

Aunque en general no es cierto que $W^{a,p}(\Omega,\sigma)$ es de Banach (que es completo), se puede demostrar que B^a si lo es.

Teorema 2.21. *$B^a(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert*

Demostración. Que (2.152) es un producto interno se sigue fácilmente de que $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ lo es. Por lo que solo falta ver que es completo. Por ser una norma equivalente, podemos utilizar la convergencia respecto a (2.154) para comprobar que es completo. Esto es si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la norma (2.154), falta demostrar que existe $f \in B^a(\mathbb{R}^N)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Notamos que como $\{f_n\}$ es de Cauchy con respecto a esta norma, esto significa que también es de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_{L^2}$, y lo mismo para las sucesiones $\{x^\alpha f_n\}$ y $\{x^\alpha \mathcal{F}(f_n)\}$, entonces como $L^2(\mathbb{R}^N)$ es completo se sigue que existen $f, f_\alpha, f'_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n &= f,\\ \lim_{n\to\infty} x^\alpha f_n &= f_\alpha,\\ \lim_{n\to\infty} x^\alpha \mathcal{F} f_n &= f'_\alpha.\end{aligned}$$

Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, notamos que $x^\alpha\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ y que

$$(\psi, f_\alpha) = \lim_{n\to\infty} (\psi, x^\alpha f_n)_{L^2} = \lim_{n\to\infty} (\psi\overline{x^\alpha}, f_n)_{L^2} = (\psi\overline{x^\alpha}, f)_{L^2} = \int \overline{\psi}(x) x^\alpha f(x)dx. \tag{2.156}$$

Es decir Como distribuciones $T_{f_\alpha} = T_{x^\alpha f}$ por lo tanto $f_\alpha = x^\alpha f$ por el lema fundamental del cálculo de variaciones 1.40. El mismo argumento se puede repetir para f'_α y $x^\alpha \mathcal{F} f$ usando que la transformada de Fourier es continua. Entonces se tiene que $f \in B^a(\mathbb{R}^N)$ y que f_n converge a f en este espacio por lo que es completo. $\square$

En estos espacios también se cumple que las funciones de prueba (y por lo tanto las de Schwartz también) son densas. Antes de demostrar esto, primero se demostrará una extensión de la ecuación (2.157).

Lema 2.22. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ entonces $f \star g(x)$ definido por (1.73) converge para casi todo x, $f \star g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y*

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \tag{2.157}$$

Demostración. Primero notamos que como $|f(y)|, |g(x-y)|^2$ son integrables por hipótesis se tiene que

$$\int\int |f(y)g(x-y)^2| dxdy = \|f\|_1 \|g^2\|_1,$$

usando también que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. Por el teorema de Fubini, se tiene entonces que $\int |f(y)g(x-y)^2|dy$ existe casi donde sea, entonces de la desigualdad de Cauchy-Schwartz se sigue que

$$\begin{aligned}|f \star g(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)|dy &= \int |f(y)g(x-y)^2|^{1/2}|f(y)|^{1/2}dy\\ &\leq \left(\int |f(y)g(x-y)^2|dy\right)^{1/2} \|f\|_1^{1/2}.\end{aligned}$$

Se sigue de nuevo de la desigualdad de Cauchy-Schwartz que

$$\|f \star g(x)\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2. \tag{2.158}$$

Solo falta entonces demostrar (2.157). Sea $\{g_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ en L^2, entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(f \star g) - \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)\|_2 &\leq \|\mathcal{F}(f \star g) - \mathcal{F}(f \star g_n)\|_2 + \|\mathcal{F}(f \star g_n) - \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)\|_2 \\
&= \|\mathcal{F}(f \star g - f \star g_n)\|_2 + \|\mathcal{F}(f \star g_n) - \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)\|_2 \\
&\leq \|\mathcal{F}\|_{OP} \|f \star (g - g_n)\|_2 + \|\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g_n - g)\|_2 \\
&\leq \|\mathcal{F}\|_{OP} \left(\|f\|_1 \|g - g_n\|_2 + \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \|g_n - g\|_2\right),
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó (2.158) y el lema de Riemann-Lebesgue (c.f.r. [41] Teo. IX.7). Tomando $n \to \infty$ el término de la derecha tiende a 0 por lo que $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$, que es lo que se quería demostrar. □

Proposición 2.23. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $B^a(\mathbb{R}^N)$*

Demostración. Sea $f \in B^a(\mathbb{R}^N) \subseteq H^a(\mathbb{R}^N)$, definimos $f_\epsilon = f \star \phi_\epsilon$ como en 1.44, sabemos que para todo multi-índice tal que $|\alpha| \leq a$ se cumple que $D^\alpha f_\epsilon \to D^\alpha f$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Si demostramos que también $D^\alpha \mathcal{F} f_\epsilon \to D^\alpha \mathcal{F} f$ en L^2, se sigue de utilizar la norma (2.155) que converge en H^a. Usando (1.72),(1.82) y el lema anterior 2.22 tenemos que

$$D^\alpha \mathcal{F} f_\epsilon(x) = D^\alpha \mathcal{F}(f)(x)\mathcal{F}(\phi_\epsilon)(x) = \sum_{\alpha' \leq \alpha} D^{\alpha'} \mathcal{F}(f)(x) \epsilon^{|\alpha - \alpha'|} D^{\alpha - \alpha'} \mathcal{F}(\phi)(\epsilon x),$$

por lo que puntualmente se cumple

$$\lim_{\epsilon \to 0} D^\alpha \mathcal{F} f_\epsilon(x) = \left(D^\alpha \mathcal{F}(f)(x)\right) \mathcal{F}(\phi)(0) = \left(D^\alpha \mathcal{F}(f)(x)\right) \int \phi(y)dy = D^\alpha \mathcal{F}(f)(x).$$

Y para ϵ suficientemente chico ($\epsilon < 1$), tenemos que

$$|D^\alpha \mathcal{F} f_\epsilon(x)| \leq \sum_{\alpha' \leq \alpha} \left| D^{\alpha'} \mathcal{F}(f)(x) \right| \left\| D^{\alpha - \alpha'} \mathcal{F}(\phi) \right\|_\infty,$$

entonces del teorema de convergencia dominada en L^p(1.32) se sigue que $D^\alpha \mathcal{F} f_\epsilon \to D^\alpha \mathcal{F} f$ en L^2. Por lo que la demostración se sigue de adaptar los argumentos de la demostración del corolario 1.33.1 a la norma $\|\cdot\|_{B^a}$ □

Finalmente introducimos el Hamiltoniano del sistema clásico a través de la transformada de Legendre de (2.48) (c.f.r.[17, 4] cap. 4 y cap. 3-14 respectivamente) con el motivo de determinar el operador Hamiltoniano cuántico que rige la dinámica del sistema. Esto es, partiendo del Lagrangiano (2.48), definimos

$$p^j := \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^j} = m_j \dot{x}^j + \frac{e_j}{c} \widetilde{\mathbf{A}} \tag{2.159}$$

$$\pi^i_{l,k} := \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{a}^j_{l,k}} = \frac{\dot{a}^i_{l,k}}{|V|}, \tag{2.160}$$

y despejando $\dot{x^j}, \dot{a}^i_{l,k}$ en términos de las nuevas variables, el Hamiltoniano por definición es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x^j, p^j, \{a_{l,k}\}, \{\pi_{l,k}\}) &= \sum_{j=1}^{n} p^j \cdot \dot{x}^j + \sum_{\substack{k\in\Lambda_3' \\ i,l\in\{1,2\}}} \pi^i_{l,k}\dot{a}^i_{l,k} - \widetilde{\mathcal{L}}(x^j, p^j, \{a_{l,k}\}, \{\pi_{l,k}\}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2m_j}||p^j - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}||^2 + \frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\sum_{i\neq j}\frac{e_ie_jcos(k\cdot(x^i-x^j))}{\|k\|^2} \\ &+ \sum_{\substack{k\in\Lambda_3' \\ i,l\in\{1,2\}}} \frac{|V|(\pi^i_{k,l})^2}{2} + \frac{c^2\|k\|^2(a^i_{lk})^2}{2|V|} - \frac{\hbar c\|k\|}{2}. \end{aligned} \tag{2.161}$$

Con el Hamiltoniano, se puede motivar heurísticamente el operador que rige la dinámica cuántica del sistema a través de las reglas de cuantización canónica, donde se reemplaza los momentos canónicos (2.159, 2.160), con operadores diferenciales $p^j \to i\hbar\nabla_j, \pi^i_{k,l} \to i\hbar\partial_{i,l,k}$ (ver [9] Cap. 4) Lo que nos da el operador diferencial

$$\begin{aligned} H = &\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2m_j}\left\|\frac{\hbar}{i}\nabla_j - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}\right\|^2 + \frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\sum_{i\neq j}\frac{e_ie_jcos(k\cdot(x^i-x^j))}{|k|^2} \\ &+ \sum_{\substack{k\in\Lambda_3' \\ i,l\in\{1,2\}}} \frac{|V|}{2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial a^i_{l,k}}\right)^2 + \frac{c^2\|k\|^2(a^i_{lk})^2}{2|V|} - \frac{\hbar c\|k\|}{2} \end{aligned} \tag{2.162}$$

Donde si tomamos $N_3 := |\Lambda_3|$ entonces este operador está definido en $B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$, donde se entienden las derivadas como derivadas débiles. También notamos que este operador es un operador pseudo diferencial al verlo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$. Por simplicidad, en lo que resta del texto no vamos a diferenciar entre estas dos. Está prescripción aunque ha resultado muy efectiva en la construcción de la teoría cuántica a este nivel solo se puede entender como una relación formal puesto que en general no existe un mapeo que relacione funciones en el espacio fase de la mecánica clásica con operadores auto-adjuntos en un espacio de Hilbert de estados [22]. Por lo tanto, de manera rigurosa empezamos con (2.162) y luego demostraremos que la integral de trayectoria produce la misma evolución temporal.

Definición 2.24. *Tomando la misma notación que en la definición 2.1, sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \geq 2$ y supongamos que $\phi \in \mathcal{A}^a(\mathbb{R}), g \in \mathcal{A}^a(\mathbb{R}^3)$, entonces definimos el operador Hamiltoniano $H : B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3}) \to B^{a-2}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ como*

$$\begin{aligned} H = &\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2m_j}\left\|\frac{\hbar}{i}\nabla_j - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}\right\|^2 + \frac{4\pi}{|V|}\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{i\neq j}\frac{e_ie_jcos(k_l\cdot(x^i-x^j))}{\|k_l\|^2} \\ &+ \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{N_3}\frac{|V|}{2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial X_{i,j}}\right)^2 + \frac{c^2\|k\|^2X^2_{i,j}}{2|V|} - \frac{\hbar c\|k_i\|}{2}. \end{aligned} \tag{2.163}$$

La ecuación de Schrödinger asociada a este Hamiltoniano está dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\Psi(t), \tag{2.164}$$

para funciones $\Psi : [0,\infty) \to B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ *que son fuertemente diferenciables en* B^{a-2}. *Esto último significa que siguiente límite*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) := \lim_{h\to 0} \frac{\Psi(t+h)-\Psi(t)}{h} \tag{2.165}$$

existe para todo t *en la norma de* B^{a-2}.

3. El Operador Fundamental (La Integral de Trayectoria sobre Segmentos de Recta)

Construimos un operador que servirá como un elemento básico de la integral de Feynman completa. Demostraremos propiedades de continuidad que permitirán definir y de consistencia respecto al Hamiltoniano (2.163). Puesto que veremos a la integral de Feynman como un límite de integrales sobre espacios de poligonales, primero consideraremos la integral definida sobre segmentos de recta arbitrarios.

3.1. Definición y Propiedades Básicas del Operador Fundamental

Sean $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^{3n+4N_3}$ y $T \in \mathbb{R}^+$ arbitrarios que escribimos como $\widetilde{X} = (x, X), \widetilde{Y} = (y, Y)$ con $(x), (y) \in \mathbb{R}^{3n}$ y $(X), (Y) \in \mathbb{R}^{4N_3}$, y $0 \leq s \leq t \leq T$. Tomamos entonces la curva $\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}} : [s, t] \to \mathbb{R}^{3n+4N_3}$ definida como

$$\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}(\theta) = \widetilde{X} - \frac{t-\theta}{t-s}\left(\widetilde{X} - \widetilde{Y}\right) \tag{3.1}$$

Y definimos

$$V_{\Lambda_1}(x) := \frac{4\pi}{|V|}\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j cos(k_l \cdot (x^i - x^j))}{\|k_l\|^2} \tag{3.2}$$

$$V_{\Lambda_3}(X) := -\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{N_3} -\frac{c^2\|k_i\|^2 X^2_{i,j}}{2|V|} + \frac{\hbar c\|k_i\|}{2} \tag{3.3}$$

Entonces dado el Lagrangiano (2.49), la acción sobre estas trayectorias está dada por

$$\begin{aligned}
S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}) = \int_s^t \widetilde{\mathcal{L}} \circ \gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}(\theta) d\theta &= \int_s^t \sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{2}\left\|\frac{(x^j - y^j)}{t-s}\right\|^2 - V_{\Lambda_1}\left(x - \frac{t-\theta}{t-s}(x-y)\right) \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\frac{e_j(x^j - y^j)}{t-s}\cdot \widetilde{\mathbf{A}}(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}(\theta)) - V_{\Lambda_3}\left(X - \frac{t-\theta}{t-s}(X-Y)\right) \\
&+ \frac{1}{2|V|}\left\|\frac{(X-Y)}{t-s}\right\|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2(t-s)}\sum_{j=1}^{n} m_j||x^j - y^j||^2 - (t-s)\int_0^1 V_{\Lambda_1}(x - \theta(x-y))d\theta \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j(x^j - y^j)\cdot \int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}(x^j - \theta(x^j - y^j), X - \theta(X-Y))d\theta \\
&+ \frac{||X-Y||^2}{2|V|(t-s)} - (t-s)\int_0^1 V_{\Lambda_3}(X - \theta(X-Y))d\theta
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Donde se tomó en la última igualdad un cambio de variable $\theta = (t-\theta')/(t-s)$. Ahora procedemos a definir una clase de operadores que incluyen al operador fundamental.

Definición 3.1. *Sea $p \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{3n+4N_3+3n+4N_3})$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$, $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^{3n+4N_3}$, $T \in \mathbb{R}^+$ y $S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}})$ dado por (3.4). Definimos $P(t,s) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ para $0 \le s \le t \le T$ como*

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t-s)}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3/2}\int \exp(i\hbar^{-1}S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}))p'(\widetilde{X},\widetilde{Y})f(\widetilde{Y})d\widetilde{Y}, \quad s<t \tag{3.5}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi i\hbar|V|}\right)^{4N_3/2} Os\int \exp\left(i\hbar^{-1}S_0(\widetilde{Y})\right)p(\widetilde{X},\widetilde{Y})d\widetilde{Y}f(\widetilde{X}) \quad s=t, \tag{3.6}$$

donde $p'(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = p(\widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{t-s}})$ y $S_0(\widetilde{Y}) = \sum_{j=1}^{n}\frac{m_j||y^j||^2}{2} + \frac{||Y||^2}{2|V|}$. En el caso de que $p \equiv 1$, a este le llamaremos el operador fundamental (la integral de Feynman sobre segmentos de recta). y se denotará por $\mathcal{C}(t,s)$.

No es inmediato que esta clase de operadores está bien definida, puesto que para $t = s$ la integral oscilatoria no es evidente que exista en el sentido dado por la definición 2.2. Asumiendo que la integral oscilatoria está bien definida y no depende de la familia de reguladores que se usa, para el operador fundamental, si tomamos la clase de funciones $\{\chi_\epsilon\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ como $\chi_\epsilon(\widetilde{Y}) = e^{-\epsilon^2\|\widetilde{Y}\|^2}$ podemos escribir el operador para $s = t$ como

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(s,s)f &= \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi i\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\lim_{\epsilon\to 0}\int \exp\left(\sum_{i=1}^{3n}(-\epsilon^2+\frac{im_j}{\hbar 2})|y_i^j|^2 + (-\epsilon^2+\frac{i}{\hbar 2|V|})||Y||^2\right)d\widetilde{Y}f \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi i\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\lim_{\epsilon\to 0}\prod_{i=1}^{3n}\int e^{-(\epsilon^2-\frac{im_j}{\hbar 2})|y_i^j|^2}dy_i^j\prod_{j=1}^{4N_3}\int e^{-(\epsilon^2-\frac{i}{\hbar 2|V|})|Y_i^j|^2}dY_i^j f \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi i\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\lim_{\epsilon\to 0}\prod_{i=1}^{3n}\sqrt{\frac{\pi}{(\epsilon^2-\frac{im_j}{\hbar 2})}}\prod_{j=1}^{4N_3}\sqrt{\frac{\pi}{(\epsilon^2-\frac{i}{\hbar 2|V|})}}f \\
&= f.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Esto es, $\mathcal{C}(s,s)$ es la identidad. El siguiente teorema justificará la existencia de la integral oscilatoria al analizar como varían los operadores con respecto a los parámetros s, t.

Teorema 3.2. *Sea $p \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{3n+4N_3+3n+4N_3})$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$, $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^{3n+4N_3}$, $T \in \mathbb{R}^+$ y $S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}})$ dado por (3.4). Supongamos que para las funciones de corte g, ψ, dadas en la definición 2.1, cumplen además que $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3), \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Entonces $P(t,s)$ está bien definida para todo $0 \le s \le t \le T$ y si tomamos la función $P(\cdot,\cdot)f(\cdot) : \Delta_{0,T} \times \mathbb{R}^{3n+4N_3} \to \mathbb{C}$, donde $\Delta_{0,T} = \{(s,t) \in [0,T]^2 \mid s \le t\}$, se tiene que $D^\alpha_{\widetilde{X}}(P(t,s)f)(\widetilde{X})$ es continua tanto en s, t como en $\widetilde{X}$ para todo multi-índice α.*

Demostración. Si consideramos primero que $s < t$, introducimos el cambio de variable $\widetilde{W} = \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{t-s}}$ y tomamos $\rho = t - s$ entonces podemos escribir (3.5) como

$$(P(t,s)f)(\widetilde{X}) = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\text{Os}\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}))p(\widetilde{X},\widetilde{W})f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}, \tag{3.8}$$

donde $f'(\widetilde{W}) = f(\widetilde{X} - \sqrt{\rho}\widetilde{W})$, y

$$\begin{aligned}
\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2 - \rho\int_0^1 V_{\Lambda_1}(x-\theta\sqrt{\rho}w)d\theta \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\sqrt{\rho}w^j \cdot \int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}(x^j-\theta\sqrt{\rho}w^j, X-\theta\sqrt{\rho}W)d\theta \\
&+ \frac{||W||^2}{2|V|} - \rho\int_0^1 V_{\Lambda_3}(X-\theta\sqrt{\rho}W)d\theta
\end{aligned}$$

Si definimos

$$\begin{aligned}
\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}) &= -\rho\int_0^1 V_{\Lambda_1}(x-\theta\sqrt{\rho}w)d\theta \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\sqrt{\rho}w^j \cdot \int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}(x^j-\theta\sqrt{\rho}w^j, X-\theta\sqrt{\rho}W)d\theta \\
&- \rho\int_0^1 V_{\Lambda_3}(X-\theta\sqrt{\rho}W)d\theta,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

podemos redefinir $\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})$ como

$$\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2 + \frac{||W||^2}{2|V|} + \delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}) \tag{3.10}$$

Escribiendo el operador de esta manera es claro que la expresión es valida también para $t = s$ (en caso de que la integral oscilatoria esté bien definida). Calculando explícitamente, de (3.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho\int_0^1 V_{\Lambda_1}(x-\theta\sqrt{\rho}w)d\theta &= \frac{4\pi\rho}{|V|}\sum\frac{e_je_i}{||k_l||^2}\frac{\sin(k_l\cdot(x^i-x^j-\sqrt{\rho}(w^i-w^j)))-\sin(k_l\cdot(x^i-x^j))}{\sqrt{\rho}k\cdot(w^j-w^i)} \\
&= \frac{8\pi\rho}{|V|}\sum\frac{e_je_i}{||k_l||^2}\mathrm{sinc}(\sqrt{\rho}k_l\cdot(w^i-w^j)/2)\cos(k_l\cdot(x^i-x^j-\sqrt{\rho}(w^i-w^j)/2)),
\end{aligned}$$

con

$$sinc(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 1, \end{cases} \tag{3.11}$$

donde la última igualdad se da de la identidad $\sin(a-b) - \sin(a) = -2\sin(b/2)cos(a-b/2)$ que se puede verificar directamente de identidades trigonométricas básicas. La expansión en Taylor de la función

$$\mathrm{sinc}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k}$$

se sigue que

$$\frac{d^n\mathrm{sinc}}{dx^n}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n+1} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar}, \end{cases}$$

y fuera del 0 podemos calcular la derivada usando que $\frac{d^n \sin(x)}{dx^n} = \operatorname{Im}(i^n e^{ix})$, y $\frac{d^{n-k}1/x}{d^k x} = (-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\frac{\sin x}{x} &= \operatorname{Im}\left[\sum\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}\left(i^k \mathrm{e}^{ix}\right)\right]\\ &= \operatorname{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(-1)^n(-i)^k\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^{n-k+1}}\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que en cualquier vecindad fuera del 0 las derivadas de $\operatorname{sinc}(x)$ están acotadas y por lo anterior, está globalmente acotada. Como lo mismo se cumple para $\cos(x)$ se sigue que $\{\rho\int_0^1 V_{\Lambda_1}(x-\theta\sqrt{\rho}w)d\theta\}_{0\le\rho\le T} \subset \mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{3n+4N_3+3n+4N+3})$ y es un subconjunto acotado. Y de nuevo calculando explícitamente de (3.3), tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 V_{\Lambda 3}(X-\theta\sqrt{\rho}W) &= \sum\frac{c^2|k|^2}{2|V|}\int_0^1(X_{i,j}-\theta\sqrt{\rho}W_{i,j})^2 d\theta - \frac{\hbar c||k||}{2}\\ &= \sum\frac{c^2\|k\|^2((X_{i,j}-\sqrt{\rho}W_{i,j})^3-(X_{i,j})^3)}{2|V|(-\sqrt{\rho}W_{i,j}3)} - \frac{\hbar c||k||}{2}\\ &= \sum\frac{c^2|k|^2(\rho^{3/2}W_{i,j})^2 - 3\rho W_{i,j}X_{i,j} + 3\sqrt{\rho}(X_{i,j})^2}{2|V|\sqrt{\rho}} - \frac{\hbar c||k||}{2}\end{aligned}$$

Como es un polinomio de grado 2 se tiene que $\{\rho\int_0^1 V_{\Lambda_3}(X-\theta\sqrt{\rho}W)d\theta\}_{0\le\rho\le T} \subset \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^{3n+4N_3+3n+4N+3})$ y es un subconjunto acotado. Por las hipótesis puestas sobre las funciones de corte y como $\sin, \cos \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{3n+4N_3+3n+4N+3})$ se sigue que para $l = 1, 2$, $i = 1, \ldots, N_2$ y $j = 1, ..., n$ tenemos que $A_{l,i}(x^j - \theta\sqrt{\rho}w^j, X-\theta\sqrt{\rho}W) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{3n+4N_3+3n+4N_3})$. Sean α, β multi-índices entonces

$$\begin{aligned}\left|D^{\alpha}_{\widetilde{X}}D^{\beta}_{\widetilde{W}}\int_0^1 A_{l,i}(x^j-\theta\sqrt{\rho}w^j, X-\theta\sqrt{\rho}W)d\theta\right| &\le \int_0^1\left|D^{\alpha}_{\widetilde{X}}D^{\beta}_{\widetilde{W}}A_{l,i}(x^j-\theta\sqrt{\rho}w^j, X-\theta\sqrt{\rho}W)d\theta\right|\\ &\le C_{\alpha,\beta}\int_0^1\left(\langle\widetilde{X}\rangle\langle\theta\sqrt{\rho}\widetilde{W}\rangle\right)^{m_{A_{l,i}}}d\theta\\ &\le C_{\alpha,\beta}\int_0^1\left(\langle\widetilde{X}\rangle\langle\sqrt{T}\widetilde{W}\rangle\right)^{m_{A_{l,i}}}d\theta\\ &\le C'_{\alpha,\beta}\left(\langle\widetilde{X}\rangle\langle\widetilde{W}\rangle\right)^{m_{A_{l,i}}},\end{aligned}$$

con $C'_{\alpha,\beta}$ una constante positiva tal que $C_{\alpha,\beta}\left(\sqrt{1+T\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\right)^m \le C'_{\alpha,\beta}\left(\sqrt{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\right)^m$. Notamos que esta constante no depende de ρ y solo de T, pero en los términos anteriores, como ρ solo actúa multiplicando, también se pueden tomar las constates para que a lo más dependan de T. Juntando todo esto, se sigue que $\{\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})\}_{0\le t\le s\le T} \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^{3n+4N_3+3n+4N+3})$ es acotado (las cotas también dependen explícitamente de la retícula (2.42)).
Ahora definimos para $j = 0, 1, \ldots n$ los operadores diferenciales $L^j : C^\infty(\mathbb{R}^{3n+4N_3}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$

$$L^j = \frac{1}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\left(1/(n+1) - i\hbar m_j^{-1}w^j\cdot\frac{\partial}{\partial w^j}\right), \tag{3.12}$$

para $j = 1, ..., n$, y

$$L^0 = \frac{1}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\left(1/(n+1) - i\hbar|V|W\cdot\frac{\partial}{\partial W}\right), \tag{3.13}$$

y $\widetilde{L} = \sum_{j=0}^{n} L^j$. Calculando directamente es claro que $\widetilde{L}e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2+\frac{||W||^2}{2|V|}} = e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2+\frac{||W||^2}{2|V|}}$ También definimos $(L^j)^* := \frac{1}{(1+\|\widetilde{w}\|^2)n+1} + \frac{\partial}{\partial w^j}\cdot\left(\frac{i\hbar m_j^{-1}w^j}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\right)$ para $j = 1, ..., n$, $(L^0)^* := \frac{1}{(1+\|\widetilde{w}\|^2)n+1} + \frac{\partial}{\partial W}\cdot\left(\frac{i\hbar|V|W}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\right)$ y $\widetilde{L}^* = \sum_{j=0}^{n}(L^j)^*$. Tomemos una familia $\{\chi_\epsilon\}$ como en la definición 2.2 y α un multi-índice arbitrario, entonces por la formula de integración por partes (1.17), se tiene que para todo $l \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\int D^\alpha_{\widetilde{X}}\left(e^{i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})}p(\widetilde{X},\widetilde{W})\chi_\epsilon(\widetilde{W})f'(\widetilde{W})\right)d\widetilde{W} &= \int\left(\left(\widetilde{L}\right)^l e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2+\frac{||W||^2}{2|V|}}\right)D^\alpha_{\widetilde{X}}\left(e^{i\hbar^{-1}\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})}\right.\\ &\quad\left.\times p(\widetilde{X},\widetilde{W})\chi_\epsilon(\widetilde{W})f'(\widetilde{W})\right)d\widetilde{W}\\ &= \int e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2+\frac{||W||^2}{2|V|}}\left(\widetilde{L}^*\right)^l D^\alpha_{\widetilde{X}}\left(e^{i\hbar^{-1}\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})}\right.\\ &\quad\left.\times p(\widetilde{X},\widetilde{W})\chi_\epsilon(\widetilde{W})f'(\widetilde{W})\right)d\widetilde{W}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ahora, calculando explícitamente, tenemos que para $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$

$$\begin{aligned}(L^j)^*h(\widetilde{W}) &= \frac{h(\widetilde{W})}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2\right)n+1} + \frac{\partial}{\partial w^j}\cdot\left(\frac{w^j i\hbar m_j^{-1}h(\widetilde{W})}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\right)\\ &= \frac{h(\widetilde{W})}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2\right)n+1} + \frac{\partial}{\partial w^j}\left(\frac{i\hbar m_j^{-1}h(\widetilde{W})}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\right)\cdot w^j + \frac{\hbar m_j^{-1}h(\widetilde{W})}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\frac{\partial}{\partial w^j}\cdot w^j\\ &= \left(\frac{1}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2\right)n+1} + \frac{3i\hbar m_j^{-1}}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2} - \frac{i\hbar m_j^{-1}\|w^j\|^2}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2\right)^2}\right)h(\widetilde{W})\\ &\quad + \frac{i\hbar m^{-1}w^j}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\cdot\frac{\partial h(\widetilde{W})}{\partial w^j},\end{aligned}$$

y similarmente para $j = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}(L^0)^*h(\widetilde{W}) &= \left(\frac{1}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2\right)n+1} + \frac{4N_3 i\hbar|V|}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2} - \frac{2i\hbar|V|\|W\|^2}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2\right)^2}\right)h(\widetilde{W})\\ &\quad + \frac{i\hbar|V|W}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^2}\cdot\frac{\partial h(\widetilde{W})}{\partial W},\end{aligned}$$

por lo que podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}^{*}h(\widetilde{W}) &= \left(\frac{1+i\hbar(|V|+M^{-1})}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}} - \frac{2i\hbar(|V|\|W\|^{2}+\sum_{j=1}^{n} m_j^{-1}\|w^j\|^{2})}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}\right)^{2}}\right) h(\widetilde{W}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3n} \frac{i\hbar m_{\lceil i/3\rceil}^{-1}\widetilde{W}_i}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}} \frac{\partial h(\widetilde{W})}{\partial \widetilde{W}_i} + \sum_{i=3n+1}^{4N_3+3n} \frac{i\hbar|V|\widetilde{W}_i}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}} \frac{\partial h(\widetilde{W})}{\partial \widetilde{W}_i} && (3.15) \\
&= \left(b_0(\widetilde{W}) + \sum_{i=1} b_i(\widetilde{W}) \frac{\partial}{\partial \widetilde{W}_i}\right) h(\widetilde{W}), && (3.16)
\end{aligned}
$$

con $M^{-1} := \sum_{j=1}^{n} m_j^{-1}$ y

$$
b_i(\widetilde{W}) = \begin{cases} \frac{i\hbar m_{\lceil i/3\rceil}^{-1}\widetilde{W}_i}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}} & 1 \leq i \leq 3n \\ \frac{i\hbar|V|\widetilde{W}_i}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}} & 3n+1 \leq i \leq 3n+4N_3, \end{cases} \tag{3.17}
$$

$$
b_0(\widetilde{W}) = \left(\frac{1+i\hbar(|V|+M^{-1})}{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}} - \frac{2i\hbar(|V|\|W\|^{2}+\sum_{j=1}^{n} m_j^{-1}\|w^j\|^{2})}{\left(1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}\right)^{2}}\right). \tag{3.18}
$$

Si definimos $p_\alpha := D_{\widetilde{X}}^{\alpha}\left(e^{i\hbar^{-1}\delta} pf'\right)$, de la regla de la cadena y la regla de Leibniz es claro que

$$
p_\alpha = \sum_{\alpha' \leq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} P_{\alpha'}(\delta, \partial\delta) e^{i\hbar^{-1}\delta} D_{\widetilde{X}}^{\alpha-\alpha'}(pf'),
$$

con $P_{\alpha'}$ un polinomio que actúa sobre δ y sus derivadas de orden a lo más $|\alpha'|$. Para toda $N \in \mathbb{N}$. Del lema (2.7) se sigue que para todo multi-índice β e $i = 0, ..., 3n+4N_3$ existe $C_{\beta,i} \geq 0$ tal que

$$
\left|D^{\beta} b_i(\widetilde{W})\right| \leq \frac{C_{\alpha,i}}{\sqrt{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}}}.
$$

Vamos a demostrar que para todo $l \in \mathbb{N}$ existen funcione $b_{\beta,l} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ tal que

$$
\left(\widetilde{L}^{*}\right)^{l} = \sum_{|\beta| \leq l} b_{\beta,l}(\widetilde{W}) D_{\widetilde{W}}^{\beta},
$$

y que para todo γ multi-índice existe $C_{\gamma,\beta,l} \geq 0$ tal que

$$
\left|D^{\gamma} b_{\beta,l}(\widetilde{W})\right| \leq \frac{C_{\gamma,\beta,l}}{\left(\sqrt{1+\left\|\widetilde{W}\right\|^{2}}\right)^{l}}, \tag{3.19}
$$

haciendo inducción sobre l. Para $l=1$, es lo que se acaba de argumentar. Ahora supongamos que es cierto para $l \leq k$ entonces como

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{L}^t\right)^{k+1} &= \left(b_0(\widetilde{W}) + \sum_{i=1}^{3n+4N_3} b_i(\widetilde{W})\frac{\partial}{\partial \widetilde{W}_i}\right)\left(\sum_{|\beta|\leq k} b_{\beta,k}(\widetilde{W})D^{\beta}_{\widetilde{W}}\right)\\ &= \sum_{\substack{|\beta|\leq k\\ i}}\left(b_0 b_{\beta,k}(\widetilde{W}) + b_i\frac{\partial b_{\beta,k}}{\partial \widetilde{W}_i}(\widetilde{W})\right)D^{\beta}_{\widetilde{W}} + b_i b_{\beta,k}(\widetilde{W})D^{\beta+e_i}_{\widetilde{W}}\\ &= \sum_{|\beta|\leq k+1} b_{\beta,k+1}(\widetilde{W})D^{\beta}_{\widetilde{W}}.\end{aligned}$$

Vemos que todos las funciones $b_{\beta,l+1}$ son sumas de productos entre las funciones b_i y $b_{\beta,l}, \partial_i b_{\beta,l}$, por lo que aplicando la hipótesis de inducción es claro que también se cumple para $l=k+1$. Entonces se tiene que

$$\left|\left(\widetilde{L}^t\right)^l (D^{\alpha}_{\widetilde{X}} e^{i\hbar^{-1}\delta} p\chi_\epsilon)(\widetilde{W})\right| \leq \sum_{|\beta|\leq l} |b_{\beta,l}(\widetilde{W})| \left|\sum_{\beta'\leq\beta}\binom{\beta}{\beta'} D^{\beta'}_{\widetilde{W}} p_\alpha D^{\beta-\beta'}_{\widetilde{W}}\chi_\epsilon(\widetilde{X},\widetilde{W})\right|.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\left|D^{\beta'}_{\widetilde{W}} p_\alpha\right| &= \left|\sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha\\ \beta''\leq\beta'}}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta'}{\beta''} P_{\alpha',\beta'}(\delta,\partial\delta)e^{i\hbar^{-1}\delta} D^{\beta'-\beta''}_{\widetilde{W}} D^{\alpha-\alpha'}_{\widetilde{X}}(pf')\right|\\ &\leq \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha\\ \beta''\leq\beta'}}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta'}{\beta''}|P_{\alpha',\beta'}(\delta,\partial\delta)|\left|D^{\beta'-\beta''}_{\widetilde{W}} D^{\alpha-\alpha'}_{\widetilde{X}}(pf')\right|\\ &\leq \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha\\ \beta''\leq\beta'}}\binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta'}{\beta''} C^{P_{\alpha',\beta'}}_{0,0} C'_{\beta'-\beta'',\alpha-\alpha'} K'_{\alpha-\alpha',N}\left\langle\widetilde{X}\right\rangle^{(|\alpha'|+|\beta'|)m_\delta+m_p}\left\langle\widetilde{W}\right\rangle^{m_p}\left\langle\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right\rangle^{(|\alpha'|+|\beta'|)m_\delta}\left\langle\widetilde{X}-\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right\rangle^{-N}\\ &\leq C_{\alpha,\beta',N}\left\langle\widetilde{X}\right\rangle^{(|\alpha|+l)m_\delta+m_p}\left\langle\widetilde{W}\right\rangle^{m_p}\left\langle\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right\rangle^{(|\alpha|+l)m_\delta}\left\langle\widetilde{X}-\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right\rangle^{-N},\end{aligned}$$

donde la constante Se puede tomar independiente de t,s por lo que se argumentó inicialmente sobre la familia $\{\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})\}_{0\leq t\leq s\leq T}$. Se sigue de esto, las propiedad 3 de la familia $\{\chi_\epsilon\}$ dada en la definición 2.2 y de (3.23) que existe una constante $C'_{\alpha,l,N}\geq 0$ independiente de ϵ, t, s tal que

$$\left|\left(\widetilde{L}^t\right)^l (D^{\alpha}_{\widetilde{X}} e^{i\hbar^{-1}\delta} p\chi_\epsilon)(\widetilde{X},\widetilde{W})\right| \leq C'_{\alpha,l,N}\left\langle\widetilde{X}\right\rangle^{(|\alpha|+l)m_\delta+m_p}\left\langle\widetilde{W}\right\rangle^{m_p-l}\left\langle\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right\rangle^{(|\alpha|+l)m_\delta}\left\langle\widetilde{X}-\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right\rangle^{-N}.$$

Usando (1.2) tenemos que

$$\left|\left(\widetilde{L}^t\right)^l (D^{\alpha}_{\widetilde{X}} e^{i\hbar^{-1}\delta} p\chi_\epsilon)(\widetilde{X},\widetilde{W})\right| \leq \sqrt{2}C'_{\alpha,l,N}\left\langle\widetilde{X}\right\rangle^{(|\alpha|+l)m_\delta+m_p+N}\left\langle\widetilde{W}\right\rangle^{m_p-l}\left\langle\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right\rangle^{(|\alpha|+l)m_\delta-N}$$

Si tomamos $l=m_p+3n+4N_3+1$ y $N=(|\alpha|+l)m_\delta$ tenemos que

$$\left|\left(\widetilde{L}^t\right)^l (D^{\alpha}_{\widetilde{X}} e^{i\hbar^{-1}\delta} p\chi_\epsilon)(\widetilde{X},\widetilde{W})\right| \leq C_{\alpha,l,N}\left\langle\widetilde{X}\right\rangle^{(|\alpha|+l)m_\delta+m_p+N}\left\langle\widetilde{W}\right\rangle^{-3n+4N_3-1}$$

Notamos que para cada $\widetilde{X}$ fija la cota puesta es integrable por (1.1). Y como se tiene el siguiente limite puntal

$$\lim_{\epsilon\to 0} D^{\alpha}_{\widetilde{X}} e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2+\frac{||W||^2}{2|V|}} \left(\widetilde{L}^t\right)^l (e^{i\hbar^{-1}\delta} p\chi_\epsilon f')(\widetilde{X},\widetilde{W}) = D^{\alpha}_{\widetilde{X}} e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2+\frac{||W||^2}{2|V|}} \left(\widetilde{L}^t\right)^l (e^{i\hbar^{-1}\delta} pf')(\widetilde{X},\widetilde{W}),$$

por las propiedades de la familia $\{\chi_\epsilon\}$, entonces usando la regla integral de Leibniz 1.13 se sigue que

$$D^{\alpha}_{\widetilde{X}}\mathrm{Os}\int e^{i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})} p(\widetilde{X},\widetilde{W})f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}) = \int D^{\alpha}_{\widetilde{X}} e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j||w^j||^2+\frac{||W||^2}{2|V|}} \left(\widetilde{L}^t\right)^l (e^{i\hbar^{-1}\delta} pf')(\widetilde{X},\widetilde{W})d\widetilde{W} \tag{3.20}$$

Precisando que la integral de la derecha es la integral usual de Lebesgue. Y notamos que las cotas no dependen de t, s entonces la continuidad respecto a estas se sigue del teorema de convergencia dominada. $\square$

Lema 3.3. *Sean $T \in \mathbb{R}^+$ y $S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}})$ dado por (3.4), si $0 \leq s < t \leq T$ podemos escribir*

$$\begin{aligned}
S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{Y}}) - S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{X}}) = {} & \frac{1}{t-s}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j(x^j-y^j)\cdot\left(z^j - \frac{x^j+y^j}{2}\right) + \frac{(X-Y)}{|V|}\cdot\left(Z - \frac{X+Y}{2}\right)\right) \\
& + (t-s)\left((x-y)\cdot\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x}(\zeta(\sigma))d\sigma + (X-Y)\cdot\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X}(\zeta'(\sigma))d\sigma\right) \\
& + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j(x^j-y^j)\cdot\int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}(x^j-\theta(x^j-y^j), X-\theta(X-Y))d\theta \\
& + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l,m=1}^{3} e_j(x^j_m-y^j_m)(x^j_l-z^j_l)\int_{[0,1]^2}\sigma_1 B_{m,l}(\zeta^j(\sigma),\zeta'(\sigma))d\sigma \\
& + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3} e_j(x^j_m-y^j_m)(Z-X)\cdot\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X}(\zeta^j(\sigma),\zeta'(\sigma))d\sigma \\
& + (X-Y)\cdot\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3} e_j(x^j_m-z^j_m)\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial, X}(\zeta^j(\sigma),\zeta'(\sigma))d\sigma
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$, tomamos $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2)$,

$$\tau(\sigma) := t - \sigma_1(t-s) \tag{3.22}$$
$$\zeta(\sigma) := z + \sigma_1(x-z) + \sigma_1\sigma_2(y-x) \tag{3.23}$$
$$\zeta'(\sigma) := Z + \sigma_1(X-Z) + \sigma_1\sigma_2(Y-X) \tag{3.24}$$
$$\widetilde{\zeta}(\sigma) := \widetilde{Z} + \sigma_1(\widetilde{X}-\widetilde{Z}) + \sigma_1\sigma_2(\widetilde{Y}-\widetilde{X}), \tag{3.25}$$

y

$$B_{m,l}(x^j, X) = \frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x^j_m}(x^j, X) - \frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial x^j_l}(x^j, X). \tag{3.26}$$

Demostración. Para el primer termino de (3.21), solo hace falta notar que

$$\begin{aligned}
||z^j-y^j||^2 - ||z^j-x^j||^2 = ||y^j|| - 2z^j\cdot(y^j-x^j)] - ||x^j||^2 &= (y^j+x^j)\cdot(y^j-x^j) - 2z^j\cdot(y^j-x^j) \\
&= (x^j-y^j)\cdot(2z^j-(x^j+y^j)
\end{aligned}$$

Y exactamente de la misma forma

$$||Z-Y||^2 - ||Z-X||^2 = (X-Y)\cdot(2Z-(X+Y)$$

y se reemplaza en la expresión. Ahora si tomamos la siguiente forma diferencial (c.f.r. [44] Cap. 10)

$$A := (-V_{\Lambda_1} - V_{\Lambda_3})dx_0 + \sum_{j=1}^{n} e_j/c\widetilde{\mathbf{A}}^j \cdot dx^j, \tag{3.27}$$

sobre $\mathbb{R}^{3n+4N_3+1}$ y las curvas $\widetilde{\gamma}^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}} : [s,t] \to \mathbb{R}^{3n+4N_3+1}$, $\widetilde{\gamma}^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}(\theta) := (\theta, \gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}(\theta))$ y $\widetilde{\gamma}^{t,t}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}(\theta) := (t, \widetilde{X} + \theta(\widetilde{X}-\widetilde{Y}))(0 \le \theta \le 1)$, con $\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}$ dado por (3.25), notamos que

$$\int_s^t -V_{\Lambda_1}\left(x - \frac{t-\theta}{t-s}(x-y)\right) + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} \frac{e_j(x^j-y^j)}{t-s}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(\gamma(\theta)) - V_{\Lambda_3}\left(X - \frac{t-\theta}{t-s}(X-Y)\right)d\theta = \int_{\widetilde{\gamma}^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}} A.$$

Por lo tanto, se sigue del teorema de Stokes que

$$\int_{\widetilde{\gamma}^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{Y}}} A - \int_{\widetilde{\gamma}^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{X}}} A = \int_{\widetilde{\gamma}^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{Y}}} A + \int_{\widetilde{\gamma}^{s,t}_{\widetilde{X},\widetilde{Z}}} A = \int_{\Delta} dA - \int_{\widetilde{\gamma}^{t,t}_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}} A,$$

donde Δ es el área que encierra la curva cerrada simple $\widetilde{\gamma}^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{Y}} \cup \widetilde{\gamma}^{t,t}_{\widetilde{Y},\widetilde{X}} \cup \widetilde{\gamma}^{s,t}_{\widetilde{X},\widetilde{Z}}$. Puesto que

$$\begin{aligned}
dA = d(\sum_{i=0}^{3n} A_i dx_i) &= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3} d(e_j\widetilde{\mathbf{A}}_m(x^j,X)dx^j_m) - d(V_{\Lambda_1}(x)dx_0 + V_{\Lambda_3}(X)dx_0) \\
&= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=0}^{3n+4N_3} e_j\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial\widetilde{X}_l}(x^j,X)d\widetilde{X}_l\wedge dx^j_m - \sum_{l=0}^{3n+4N_3}\frac{\partial V_{\Lambda_1}(x)}{\partial\widetilde{X}_l}d\widetilde{X}_l\wedge dx_0 \\
&- \sum_{l=0}^{3n+4N_3}\frac{\partial V_{\Lambda_3}(X)}{\partial\widetilde{X}_l}d\widetilde{X}_l\wedge dx_0 \\
&= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} e_j\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial x^j_l}(x^j,X)dx^j_l\wedge dx^j_m - \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{4N_3} e_j\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(x^j,X)dx^j_m\wedge dX_l \\
&- \sum_{l=1}^{3n}\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x_l}(x)dx_l\wedge dx_0 - \sum_{l=1}^{4N_3}\frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X_l}(X)dX_l\wedge dx_0 \\
&= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\left(\sum_{1\le m<l\le 3} B_{m,l}(x^j,X)dx^j_m\wedge dx^j_l - \sum_{l=1}^{4N_3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(x^j,X)dx^j_m\wedge dX_l\right) \\
&- \sum_{l=1}^{3n}\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x_l}(x)dx_l\wedge dx_0 - \sum_{l=1}^{4N_3}\frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X_l}(X)dX_l\wedge dx_0,
\end{aligned}$$

y notando que podemos parametrizar la región Δ usando (3.22) y (3.25) como $\Delta^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{Y},\widetilde{X}}(\sigma) = (\tau(\sigma), \widetilde{\zeta}(\sigma))$ (es simplemente las posibles sumas convexas de los "vértices") entonces en esta parametrización se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_\Delta dA &= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \left(\sum_{1\le m<l\le 3} \int_\Delta B_{m,l}(x^j, X) dx_m^j \wedge dx_l^j - \sum_{l=1}^{4N_3}\sum_{m=1}^{3} \int_\Delta \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(x^j, X) dx_m^j \wedge dX_l \right) \\
&- \sum_{l=1}^{3n} \int_\Delta \frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x_l}(x) dx_l \wedge dx_0 - \sum_{l=1}^{4N_3} \int_\Delta \frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X_l}(X) dX_l \wedge dx_0 \\
&= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{1\le m<l\le 3} \int_0^1\int_0^1 B_{m,l}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma)) \left| \frac{\partial(\zeta_m^j, \zeta_l^j)}{\partial(\sigma_1\sigma_2)} \right| d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&- \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{l=1}^{4N_3}\sum_{m=1}^{3} \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(\zeta^j(\sigma), \sigma'(\sigma)) \left| \frac{\partial(\zeta_m^j, \zeta_l')}{\partial(\sigma_1\sigma_2)} \right| d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&- \sum_{l=1}^{3n} \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x_l}(\zeta(\sigma)) \left| \frac{\partial(\zeta_l, \tau)}{\partial(\sigma_1\sigma_2)} \right| d\sigma_1 d\sigma_2 - \sum_{l=1}^{4N_3} \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X_l}(\zeta'(\sigma)) \left| \frac{\partial(\zeta_l', \tau)}{\partial(\sigma_1\sigma_2)} \right| d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{1\le m<l\le 3} \int_0^1\int_0^1 B_{m,l}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma))\sigma_1((x_m^j - z_m^j)(y_l^j - x_l^j) - (y_m^j - x_m^j)(x_l^j - z_l^j)) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&- \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{l=1}^{4N_3}\sum_{m=1}^{3} \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma))\sigma_1((x_m^j - z_m^j)(Y_l - X_l) - (y_m^j - x_m^j)(X_l - Z_l)) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&- \sum_{l=1}^{3n} \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x_l}(\zeta(\sigma))\sigma_1(t-s)(y_l - x_l) d\sigma_1 d\sigma_2 - \sum_{l=1}^{4N_3} \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X_l}(\zeta'(\sigma))\sigma_1(t-s)(Y_l - X_l) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{1\le m<l\le 3} \int_0^1\int_0^1 B_{m,l}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma))\sigma_1((x_m^j - y_m^j)(x_l^j - z_l^j)) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{1\le m<l\le 3} \int_0^1\int_0^1 B_{l,m}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma))\sigma_1((x_m^j - y_m^j)(x_l^j - z_l^j) d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3} e_j(x_M^j - y_m^j) \sum_{l=1}^{4N_3}(Z_l - X_l) \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(\zeta^j(\sigma), \sigma'(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{l=1}^{4N_3}(X_l - Y_l)\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3} e_j(x_m^j - z_m^j) \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(\zeta^j(\sigma), \sigma'(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ (t-s)(x-y)\cdot \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x}(\zeta(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 + (t-s)(X-Y)\cdot \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X}(\zeta'(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m\neq l} e_j(x_m^j - y_m^j)(x_l^j - z_l^j) \int_0^1\int_0^1 B_{l,m}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3} e_j(x_M^j - y_m^j)(Z - X)\cdot \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(\zeta^j(\sigma), \sigma'(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ (X-Y)\cdot \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{3} e_j(x_m^j - z_m^j) \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_l}(\zeta^j(\sigma), \sigma'(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 \\
&+ (t-s)(x-y)\cdot \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x}(\zeta(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2 + (t-s)(X-Y)\cdot \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X}(\zeta'(\sigma))\sigma_1 d\sigma_1 d\sigma_2.
\end{aligned}
$$

Entonces si notamos que $B_{l,l} = 0$, solo faltaría obtener el tercer termino de (3.21). Pero este termino simplemente es

$$-\int_{\widetilde{\gamma}^{t,t}_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}} A = \int_{\widetilde{\gamma}^{t,t}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}} A,$$

con lo que termina la demostración. $\square$

Si definimos

$$\begin{aligned}\Phi^j_m(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = &\left(z^j_m - \frac{x^j_m + y^j_m}{2}\right) + \frac{(t-s)^2}{m_j}\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x^j_m}(\zeta(\sigma))d\sigma \\ &+ \frac{e_j(t-s)}{m_j c}\int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}_m(x^j - \theta(x^j-y^j), X - \theta(X-Y))d\theta \\ &+ \frac{e_j(t-s)}{m_j c}\sum_l^3 (x^j_l - z^j_l)\int_{[0,1]^2}\sigma_1 B_{m,l}(\zeta^j(\sigma),\zeta'(\sigma))d\sigma \\ &- \frac{e_j(t-s)}{m_j c}(X-Z)\cdot\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X}(\zeta^j(\sigma),\zeta'(\sigma))d\sigma,\end{aligned} \tag{3.28}$$

y

$$\begin{aligned}\Phi^0(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = &\left(Z - \frac{X+Y}{2}\right) + (t-s)^2|V|\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X}(\zeta'(\sigma))d\sigma \\ &+ \frac{(t-s)|V|}{c}\sum_{j=1}^n\sum_{m=1}^3 e_j(x^j_m - z^j_m)\int_{[0,1]^2}\sigma_1\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X}(\zeta^j(\sigma),\zeta'(\sigma))d\sigma,\end{aligned} \tag{3.29}$$

se sigue del lema anterior que podemos escribir (3.21) como

$$\begin{aligned}S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{Y}}) - S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{Z},\widetilde{X}}) = &\frac{1}{t-s}\sum_{j=1}^n m_j(x^j - y^j)\cdot\Phi^j(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) \\ &+ \frac{1}{(t-s)|V|}(X-Y)\cdot\Phi_0(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Esta representación será de utilidad cuando más adelante se demuestre la continuidad del operador fundamental respecto a las normas de B^a. Sin embargo para poder tener este control, es necesario poner hipótesis de crecimiento más finas sobre las funciones de corte que aparecen en (2.50). El siguiente lema ilustrará esto de forma más precisa.

Lema 3.4. *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y supongamos para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \geq 1$ existen $0 < \delta_\alpha$ $0 \leq C_\alpha$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ se cumple $|D^\alpha f(x)| \leq \frac{C_\alpha}{\left(\sqrt{1+\|x\|^2}\right)^{1+\delta_\alpha}}$ entonces*

1. *f está acotada*

2. *Se tiene que para cualquier trío de multi-índices α, β, γ tal que $|\alpha+\beta+\gamma| \geq 1$ existe $0 \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}$ tal que*

$$|x-z|\left|D^\alpha_x D^\beta_y D^\gamma_z \int_{[0,1]^2}\sigma_1 f(z + \sigma_1(x-z) + \sigma_1\sigma_2(y-x))d\sigma\right| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}$$

Demostración. Se sigue del teorema fundamental del cálculo que

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(0)| = \left|\int_0^1 \frac{df'}{d\theta}(\theta x)d\theta\right| \leq \int_0^1 \left|x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(\theta x)\right| d\theta &\leq \int_0^1 \sqrt{N}\|x\|\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\theta x)\right\|_\infty d\theta \\
&\leq \sqrt{N} C_{i_m}\int_0^1 \frac{||x||}{\left(\sqrt{1+\|\theta x\|^2}\right)^{1+\delta_{i_m}}}d\theta \\
&= \sqrt{N} C_{i_m}\int_0^{\|x\|} \frac{1}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^{1+\delta_{i_m}}}du \\
&\leq \sqrt{N} C_{i_m}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^{1+\delta_{i_m}}}du, \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

de lo que se sigue 1. Para 2

$$
\begin{aligned}
&|x-z|\left|D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma \int_{[0,1]^2} \sigma_1 f(z+\sigma_1(x-z)+\sigma_1\sigma_2(y-x))d\sigma\right| \\
&= |x-z|\left|\int_{[0,1]^2} \sigma_1(\sigma_1-\sigma_1\sigma_2)^{|\alpha|}(\sigma_1\sigma_2)^{|\beta|}(1-\sigma_1)^{|\gamma|}(D^{\alpha+\beta+\gamma}f)(z+\sigma_1(x-z)+\sigma_1\sigma_2(y-x))d\sigma\right| \\
&\leq |x-z|\int_{[0,1]^2} \frac{\sigma_1 C_{\alpha+\beta+\gamma}}{\left(\sqrt{1+\|z+\sigma_1(x-z)+\sigma_1\sigma_2(y-x)\|^2}\right)^{1+\delta_{\alpha+\beta+\gamma}}}d\sigma \\
&= \int_0^1 d\sigma_2' \int_{\sigma_2'}^1 \frac{C_{\alpha+\beta+\gamma}\|\xi\|}{\left(\sqrt{1+\|z+\sigma_1'\xi+\sigma_2'\eta\|^2}\right)^{1+\delta_{\alpha+\beta+\gamma}}}d\sigma_1' \\
&= C_{\alpha+\beta+\gamma}\int_0^1 d\sigma_2' \int_{\|\xi\|\sigma_2'}^{\|\xi\|} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\|z+\sigma_1''\Omega+\sigma_2'\eta\|^2}\right)^{1+\delta_{\alpha+\beta+\gamma}}}d\sigma_1'' \\
&= C_{\alpha+\beta+\gamma}\int_0^1 d\sigma_2' \int_{\|\xi\|\sigma_2'}^{\|\xi\|} \frac{1}{\left(\sqrt{1+|\sigma_1''+\Omega\cdot(z++\sigma_2'\eta)|^2}\right)^{1+\delta_{\alpha+\beta+\gamma}}}d\sigma_1' \\
&= C_{\alpha+\beta+\gamma}\int_0^1 d\sigma_2' \int_{\|\xi\|+\sigma_2'\Omega\cdot(z+\sigma_2'\eta)}^{\|\xi\|+\Omega\cdot(z+\sigma_2'\eta)} \frac{1}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^{1+\delta_{\alpha+\beta+\gamma}}}du \\
&\leq C_{\alpha+\beta+\gamma}\int_0^1 d\sigma_2' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^{1+\delta_{\alpha+\beta+\gamma}}}du \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

□

Con esto se puede demostrar lo siguiente

Proposición 3.5. *Supongamos que para las funciones de corte g, ψ en (2.50), se cumple que para todo $l = 1, 2, ...$ y α multi-índice existen $0 < \delta_l, \delta_\alpha$ y $0 \leq C_l, C_\alpha$ tal que*

$$\left|\frac{d\psi}{d\theta}(\theta)\right| \leq \frac{C_l}{\left(\sqrt{1+\theta^2}\right)^{1+\delta_l}}, \tag{3.33}$$

$$|D^\alpha g(x)| \leq \frac{C_\alpha}{\left(\sqrt{1+\|x\|^2}\right)^{1+\delta_l}}. \tag{3.34}$$

Y sea $\widetilde{\Phi} := (\Phi, \Phi^0) := (\Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^n, \Phi^0)$ como en (3.30) entonces:

1. *Existe una constante $0 < \rho^*$ tal que, para $0 \leq t - s \leq \rho^* \widetilde{X}, \widetilde{Y}$ fijas, $\widetilde{\Phi}$ es un difeomorfismo y su Jacobiano cumple $1/2 \leq \left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}\right|$,*

2. *Para todo multi-índice $1 \leq |\alpha|$ e $i = 1, ..., 3n + 4N_3$ existe $0 < C_{\alpha,i}$ tal que*

$$\left|D^\alpha \widetilde{\Phi}_i^{-1}\right| \leq C_{\alpha,i}, \tag{3.35}$$

para $0 \leq t - s \leq \rho*$.

Demostración. Primero, si definimos $\widetilde{W} = (\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z})$, de (3.28) y (3.29) se sigue que

$$(\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}})_{i,j}(t,s,\widetilde{W}) = \begin{cases} \delta_{i,j} + (t-s)^2|V| \int_{[0,1]^2} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \widetilde{Z}_j} \left(\frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X_i}(\zeta'(\sigma))\right) d\sigma & 3n < j \\ + \frac{(t-s)|V|}{c} \partial_{\widetilde{Z}_j} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^3 e_j(x_m^j - z_m^j) \int_{[0,1]^2} \sigma_1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_m}{\partial X_i}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma)) d\sigma & \\ & \\ \delta_{i,j} + \frac{(t-s)^2}{m_j} \int_{[0,1]^2} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \widetilde{Z}_j} \left(\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x^{\lceil j/3 \rceil}_{j-(3(\lceil j/m \rceil -1))}}(\zeta(\sigma)\right) d\sigma & j \leq 3n \\ + \frac{e_j(t-s)}{m_j c} \partial_{\widetilde{Z}_j} \int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}_{j-(3(\lceil j/m \rceil -1))}(x^j - \theta(x^j - y^j), X - \theta(X-Y)) d\theta & \\ + \frac{e_j(t-s)}{m_j c} \partial_{\widetilde{Z}_j} \sum_l^3 (x_l^{\lceil j/m \rceil} - z_l^{\lceil j/m \rceil}) \int_{[0,1]^2} \sigma_1 B_{j-(3(\lceil j/m \rceil -1)),l}(\zeta^j(\sigma), \zeta'(\sigma)) d\sigma & \\ - \frac{e_j(t-s)}{m_j c} \partial_{\widetilde{Z}_j} (X - Z) \cdot \int_{[0,1]^2} \sigma_1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_{j-(3(\lceil j/m \rceil -1))}}{\partial X}(\zeta^{\lceil j/3 \rceil}(\sigma), \zeta'(\sigma)) d\sigma & \end{cases} \tag{3.36}$$

Calculando explícitamente de (3.2, 3.3) y (3.23,3.24), podemos ver que existen constantes $0 \leq C_{\alpha,\beta,\gamma,1}, C_{\alpha,\beta,\gamma,3}$ que a lo más dependen de $k, |V|, T$, tal que para toda j, m, i

$$\left|\frac{(t-s)}{m_j} \int_{[0,1]^2} \sigma_1 D^\alpha_{\widetilde{X}} D^\beta_{\widetilde{Y}} D^\gamma_{\widetilde{Z}} \left(\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x^j_m}(\zeta(\sigma))\right) d\sigma\right| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma,1}, \tag{3.37}$$

$$\left|(t-s)|V| \int_{[0,1]^2} \sigma_1 D^\alpha_{\widetilde{X}} D^\beta_{\widetilde{Y}} D^\gamma_{\widetilde{Z}} \left(\frac{\partial V_{\Lambda_3}}{\partial X_i}(\zeta'(\sigma))\right) d\sigma\right| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma,3}. \tag{3.38}$$

Y de las hipótesis de las funciones de corte (3.33,3.34), aplicando el lema 3.4, se consiguen cotas similares para los demás términos que dependen del potencial magnético y de sus derivadas. Escribiendo el Jacobiano como

$$\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W}) = \mathbb{I}_{3n+4N_3} + (t-s)\mathbf{f}(t,s,\widetilde{W}), \tag{3.39}$$

de lo argumentado previamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{f}(t,s,\widetilde{W})\right\| &\leq \sqrt{3n+4N_3}\left\|\mathbf{f}(t,s,\widetilde{W})\right\|_\infty = \sqrt{3n+4N_3}\max_{i,j}|\mathbf{f}_{i,j}(t,s,\widetilde{W})|,\\ &\leq \sqrt{3n+4N_3}C_{0,0,e_j*} \qquad (3.40)\\ \left\|\mathbf{J}_{\widetilde{\phi}}(t,s,\widetilde{W})\right\| &\leq \|\mathbb{I}_{3n+4N_3}\| + \sqrt{3n+4N_3}C_{0,0,e_j*} = \sqrt{3n+4N_3}(1+C_{0,0,e_j*}), \qquad (3.41)\end{aligned}$$

donde $C_{0,0,e_j*}$ es el máximo de las constantes encontradas previamente para los multi-índices que aparecen en (3.36). Como no depende de $\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}$, esta cota es uniforme. Como la función determinante es continua, existe δ^* tal que si

$$\|\mathbb{I}_{3n+4N_3} - A\| < \delta^*$$

entonces

$$||\mathbb{I}_{3n+4N_3}| - |A|| = |1-|A|| < 1/2,$$

y tomamos $\rho^* < \frac{\delta^*}{\sqrt{3n+4N_3}C_{0,0,e_j*}}$, entonces para todo $t-s \leq \rho^*$ es claro que

$$\left\|\mathbb{I}_{3n+4N_3} - \mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W})\right\| = t-s\|\mathbf{f}\| < \delta^*, \qquad (3.42)$$

por lo tanto

$$\left|1-|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W})|\right| < 1/2, \qquad (3.43)$$

y de esto obtenemos la cota deseada para el determinante de la matriz Jacobiana. Y como es distinto de 0, vemos que el Jacobiano es globalmente invertible. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{J}^{-1}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W})\right\|_\infty \leq \left\|\mathbf{J}^{-1}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W})\right\| &= \frac{1}{\left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W})\right|}\left\|Adj(\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W}))\right\|\\ &\leq 2\sqrt{3n+4N_3}\max_{i,j}\left|M_{j,i}(t,s,\widetilde{W}).\right| \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Puesto que las menores $M_{j,i}$ están finalmente compuestas por polinomios de las entradas de $\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}$, están uniformemente acotados. Esto es si $t-s \leq \rho^*$, el Jacobiano es invertible globalmente, y su inversa está uniformemente acotada, por lo que se sigue del teorema de la función inversa de Hadamard (ver apéndice B), que $\widetilde{\Phi}$ es un difeomorfismo. La segunda parte se sigue del teorema de la función inversa, de la cota encontrada sobre el determinante y de la conocida identidad

$$\mathbf{J}^{-1}_{\widetilde{\Phi}} = \frac{1}{|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}|}\mathrm{Adj}\left(\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}\right),$$

esto pues la adjunta está formada por polinomios de las entradas de $\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}$ cuyas derivadas están acotados como ya se argumentó. $\square$

3.2. Continuidad del Operador Fundamental

Por el momento el operador Fundamental 3.1 está definido en el espacio de Schwartz, por lo que para extender esté operador a espacios más generales estudiaremos la continuidad del operador en distintas normas de espacios en donde las funciones de Schwartz son densas. Empezamos con un teorema sobre la continuidad de operadores pseudo-diferenciales en espacios de Sobolev con peso.

Teorema 3.6. *Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $T \in \mathbb{R}^+$ y sea $\{q_\rho\}_{0<\rho\leq T} \subset \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{2N})$ con $0 < \rho \leq T$ una familia acotada respecto a las normas (2.61) definimos el operador*

$$Q(\rho; x, \rho\partial_x)u(x) = \int e^{ix\cdot y} q(\rho; x, \rho y)\mathcal{F}u(y)dy, \tag{3.45}$$

entonces para cualquier $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq m$ se tiene que el operador es continuo visto como $Q(x, \rho\partial_x) : B^a(\mathbb{R}^N) \to B^{a-m_q}(\mathbb{R}^N)$ y está acotado de forma uniforme con respecto a ρ.

Se demostraran unos lemas de los cuales se sigue el teorema

Lema 3.7. *Sean $m, \in \mathbb{N}_0$, $x, y \in \mathbb{R}^N$ y tomemos*

$$\gamma_m(x, y) = \langle x\rangle^m + \langle y\rangle^m, \tag{3.46}$$

entonces existe una constante $\mu_m \geq 1$ tal que el operador pseudo-diferencia $\mu_m + \Gamma_m(x, \rho\partial_x)$: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ es invertible para todo $0 < \rho \leq T$ y de tal forma que la inversa es un operador pseudo-diferencial $H_m(\rho, x, \rho\partial_x) = (\mu_m + \Gamma_m(x, \rho\partial_x))^{-1}$ y el conjunto de símbolos $\{h_m(\rho, x, y)\}_{0<\rho\leq T}$ está acotado en $\mathcal{A}^{-m}(\mathbb{R}^{2N})$

Antes de demostrar recordamos un pequeño lema que será útil en demostrar la invertibilidad del operador pseudo-diferencial y dar una representación explicita de este.

Lema 3.8. *Sea X un espacio de Banach y T un operador acotado tal que $\|T\|_{OP} < 1$ entonces $\mathbb{I}_X - T$ es invertible y*

$$(\mathbb{I}_X - T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i, \tag{3.47}$$

donde la serie de la derecha converge en la norma de operador.

Demostración. Sean $n.m \in \mathbb{N}$ notamos que

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} T^i - \sum_{i=0}^{m} T^i\right\|_{OP} \leq \sum_{i=|n-m|+1}^{\text{máx}\{m,n\}} \|T^i\|_{OP} \leq \sum_{i=|n-m|+1}^{\text{máx}\, m,n} \|T\|_{OP}^i. \tag{3.48}$$

Como la serie $\sum_{i=0}^{\infty}\|T\|_{OP}^i$ es una serie geométrica convergente, puesto que $\|T\|_{OP} < 1$, es también de Cauchy y se sigue de la desigualdad anterior que también la serie de sumas parciales $\sum_{i=0}^{n} T^i$ en la norma de operador. Como $B(X)$ es de Banach, la serie es convergente. Notamos que

$$(\mathbb{I}_X - T)\left(\sum_{i=0}^{n} T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} T^i - T \circ \sum_{i=0}^{n} T^i = \sum_{i=0}^{n} T^i - \sum_{i=0}^{n} T^{i+1} = \mathbb{I}_X - T^{n+1}. \tag{3.49}$$

□

Ahora como $\lim_{n\to\infty}\|T\|_{OP}^{n+1}=0$, al ser el sumando de una serie geométrica convergente, se sigue de la desigualdad $\|T^i\|_{OP}\leq\|T\|_{OP}^i$ que

$$\lim_{n\to\infty} T^{n+1}=0, \tag{3.50}$$

entonces tomando el límite en (3.48), obtenemos el resultado deseado.

Demostración Lema 3.7. Primero, notamos que de exactamente la misma manera que se demostró el lema (2.7) se puede demostrar que para todo multi-índice $|\alpha|\geq 1$ podemos escribir

$$D_x^\alpha\gamma_m(x,y)=\sum_{|\beta|\leq\alpha} c_{m,\beta}\left(1+\|x\|^2\right)^{m/2-m_\beta}x^\beta \tag{3.51}$$

$$D_y^\alpha\gamma_m(x,y)=\sum_{|\beta|\leq\alpha} c_{m,\beta}\left(1+\|y\|^2\right)^{m/2-m_\beta}y^\beta, \tag{3.52}$$

con $c_{k,\beta}\in\mathbb{R}$ y $m_\beta\in\mathbb{N}$ tal que $2m_\beta-|\alpha|\geq|\beta|$ y $|\beta|\leq m_\beta\leq|\alpha|$. Y por lo tanto, tenemos que para todo multi-índice $|\alpha|\geq 1$, existe $C_{m,\alpha}$ tal que

$$|D_x^\alpha\gamma_m(x,y)|\leq C_{m,\alpha}\left(1+\|x\|^2\right)^{(m-|\alpha|)/2}\leq C_{m,\alpha}\left(\sqrt{1+\|x\|^2}\right)^{m-1} \tag{3.53}$$

$$\left|D_y^\alpha\gamma_m(x,y)\right|\leq C_{m,\alpha}\left(1+\|y\|^2\right)^{(m-|\alpha|)/2}\leq C_{m,\alpha}\left(\sqrt{1+\|y\|^2}\right)^{m-1}. \tag{3.54}$$

Para $\mu_m\geq 1$ definimos

$$p_{\mu_m}(x,y)=\frac{1}{\mu_m+\gamma_m(x,y)}, \tag{3.55}$$

y se sigue de la regla de la cadena que para todo multi-índice $|\alpha|>0$ existe $C'_{m,\alpha}$ tal que

$$|D_x^\alpha p_{\mu_m}(x,y)|\leq C'_{m,\alpha}\langle x\rangle^{m-1}p_{\mu_m}(x,y)^2 \tag{3.56}$$

$$\left|D_y^\alpha p_{\mu_m}(x,y)\right|\leq C'_{m,\alpha}\langle y\rangle^{m-1}p_{\mu_m}(x,y)^2. \tag{3.57}$$

Y sea

$$q_\mu(\rho,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^N}\mathrm{Os}\int\int e^{-iy'\cdot x'}p_{\mu_m}(x,y+\rho x')\left(\mu_m+\gamma_m(x+y',y)\right)dy'dx', \tag{3.58}$$

entonces del lema 2.11 se cumple

$$Q_\mu(\rho,x,\rho\partial_x)=P_{\mu_m}(x,\rho\partial_x)\circ\left(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x)\right).$$

Por la proposición 2.8 se sigue que

$$\frac{1}{(2\pi)^N}\mathrm{Os}\int\int e^{-iy'\cdot x'}p_{\mu_m}(x,y)\left(\mu_m+\gamma_m(x+y',y)\right)dx'dy'=1.$$

Usando esto, el teorema fundamental del cálculo, e "integrando por partes" dentro de la integral oscilatoria como se hizo en las demostraciones de 2.6, 2.8, se sigue que

$$\begin{aligned}
q_{\mu_m}(\rho,x,y) &= 1+\frac{1}{(2\pi)^N}\mathrm{Os}\int\int\int_0^1 e^{-iy'\cdot x'}\frac{d}{d\theta}p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')\left(\mu_m+\gamma_m(x+y',y)\right)d\theta dy'dx'\\
&= 1+\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^1\sum_{|\alpha|=1}\mathrm{Os}\int\int e^{-iy'\cdot x'}\rho x'^{\alpha}D_2^{\alpha}p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')\left(\mu_m+\gamma_m(x+y',y)\right)dy'dx'd\theta\\
&= 1+\frac{1}{(2\pi)^N}\rho\int_0^1\sum_{|\alpha|=1}\mathrm{Os}\int\int iD_{y'}^{\alpha}e^{-iy'\cdot x'}D_2^{\alpha}p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')\left(\mu_m+\gamma_m(x+y',y)\right)dy'dx'd\theta\\
&= 1+\frac{1}{(2\pi)^N}\rho\int_0^1\sum_{|\alpha|=1}\mathrm{Os}\int\int e^{-iy'\cdot x'}D_2^{\alpha}p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')iD_1^{\alpha}\gamma_m(x+y',y)dy'dx'd\theta,
\end{aligned}$$

donde $D_2^{\alpha}D_1^{\alpha}$ son derivadas parciales respecto a la primera y segunda entrada respectivamente. Si definimos

$$r_{\mu_m}(\rho,x,y):=-\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^1\sum_{|\alpha|=1}\mathrm{Os}\int\int e^{-iy'\cdot x'}D_2^{\alpha}p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')iD_1^{\alpha}\gamma_m(x+y',y)dy'dx'd\theta$$

Entonces de la misma manera en la que se obtuvo (2.73), de la regla de Leibniz y usando (3.53,3.56), tenemos que para todo multi-índice γ,γ' existe una constante C_γ independiente de ρ tal que

$$\begin{aligned}
\left|D_y^{\gamma'}D_x^{\gamma}r_{\mu_m}(\rho,x,y)\right| &\le C_\gamma\int_0^1\sum_{|\alpha'|=1}\sum_{\substack{|\alpha'|\le l\\|\beta'|=l}}\int\int\frac{\left|D_2^{\alpha+\alpha'+\gamma'}p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')\right|\left|D_1^{\alpha+\beta'+\gamma}\gamma_m(x+y',y)\right|}{\left(1+\|x'\|^2\right)^l\left(1+\|y'\|^2\right)^l}dy'dx'd\theta\\
&\le C'_{m,\gamma}\int_0^1\int\int\frac{\left(\sqrt{1+\|y+\theta\rho x'\|^2}\right)^{m-1}p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')^2\left(\sqrt{1+\|x+y'\|^2}\right)^{m-1}}{\left(1+\|x'\|^2\right)^l\left(1+\|y'\|^2\right)^l}dy'dx'd\theta\\
&\le C'_{m,\gamma}\int\int\frac{\left(\sqrt{1+\|y\|^2}\sqrt{1+\|Tx'\|^2}\right)^{m-1}p_{\mu_m}(x,y)^2\left(\sqrt{1+\|y'\|^2}\sqrt{1+\|x\|^2}\right)^{m-1}}{\left(1+\|x'\|^2\right)^l\left(1+\|y'\|^2\right)^l}dy'dx',
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se uso que $p_{\mu_m}(x,y+\theta\rho x')^2$ es decreciente y $\left(\sqrt{1+\|x\|^2+\|y+\theta\rho x'\|^2}\right)^{m-1}$ es creciente respecto a θ y usando que $\sqrt{1+\|x+y\|^2}\le\sqrt{2}\sqrt{1+\|x\|^2}\sqrt{1+\|y\|^2}$ para tomar cotas. Notamos que $C'_{m,\gamma}$ se puede tomar independiente de ρ (a lo más dependiente de T)

$$\begin{aligned}
\left|D_y^{\gamma'}D_x^{\gamma}r_{\mu_m}(\rho,x,y)\right| &\le C'_{m,\gamma}\int\int\frac{\langle x\rangle^{m-1}\langle y\rangle^{m-1}p_{\mu_m}(x,y)^2}{\left(\sqrt{1+\|x'\|^2}\right)^{2l-(m-1)}\left(\sqrt{1+\|y'\|^2}\right)^{2l-(m-1)}}dy'dx'\\
&\le C''_{m,\gamma}\frac{\langle x\rangle^{m-1}}{(\mu_m+\gamma_m(x,y))}\frac{\langle y\rangle^{m-1}}{(\mu_m+\gamma_m(x,y))}.
\end{aligned}$$

Directamente del criterio de la derivada se puede demostrar que

$$\frac{\langle x\rangle^{m-1}}{\mu_m+\gamma_m(x,y)} \leq \begin{cases} \frac{1}{\mu_m+\gamma_m(x,y)} & m=0,1 \\ \\ \frac{\gamma_m^{1-1/m}(x,y)}{\mu_m+\gamma_m(x,y)} & m>1 \end{cases} \tag{3.59}$$

Notamos que $r_{\mu_m},\ q_{\mu_m} = 1 - r_{\mu_m} \in \mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{2N})$. Entonces del teorema de Calderon-Vaillancourt 2.13, se sigue que $R_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x)$ y $Q_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x)$ se extienden a operadores acotados en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y existe $l_0 \in \mathbb{N}_0$ y por (3.67) μ_m suficientemente grande tal que $\|R_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x)\|_{OP} \leq C\|r_{\mu_m}\|_{0,l_0} < 1$ (independiente de ρ). Se sigue del lema anterior 3.8 que $1 - R_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x)$ tiene una inversa que se puede expresar como una serie de Neumann

$$Q^{-1}_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(R_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x)\right)^k. \tag{3.60}$$

Se sigue del lema 2.11 que si tomamos

$$\begin{aligned} r_{1,\mu_m}(\rho, x, y) &= r_{\mu_m}(\rho, x, \rho y) \\ r_{k+1,\mu_m}(\rho, x, y) &= \mathrm{Os}\int e^{-i\sum_{i=1}^{k} x_i\cdot y_i} \prod_{j=1}^{k+1} r_{\mu_m}(\rho, x+\overline{y}_{j-1}, y+\overline{x}_j)dy'dx', \end{aligned}$$

entonces

$$\left(R_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x)\right)^k u(y) = \int e^{ix\cdot y} r_{k,\mu_m}(\rho, x, \rho y)\mathcal{F}u(y)dy, \tag{3.61}$$

con $\overline{y_0} = 0, \overline{x_1} = \rho x_1$ y $\overline{y_j} = y_1 + \cdots + y_j, \overline{x_j} = x_j$ en cualquier otro caso. Sea γ un multi-índice, usando 2.6 y la regla de Leibniz, podemos ver que existen constantes $C_\gamma, C_1 > 0$ y $l \in \mathbb{N}_0$ tal que para toda $k > |\gamma|$

$$\begin{aligned} |D^\gamma r_{k+1,\mu_m}(\rho, x, \rho y)| &\leq C_\gamma (k+1)^{|\gamma|} C_1^k \|r_{\mu_m}\|_{0,l}^{|\gamma|} \|r_{\mu_m}\|_{0,l_0}^{k+1-|\gamma|} \\ &\leq C_\gamma \left((k+1)C_1\right)^k \|r_{\mu_m}\|_{0,l}^{|\gamma|} \|r_{\mu_m}\|_{0,l_0}^{k+1-|\gamma|}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Si tomamos $C' := C_1(C_{\mu_m})^{-1}$ y de tal forma que $C' < 1$ y μ_m suficientemente grande para que $\|r_{\mu_m}\|_{0,l_0} < (C_{\mu_m})^{-1}$ de la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} |D^\gamma r_{k,\mu_m}(\rho, x, \rho y)| &\leq C_\gamma (C'(k+1)^k (C_{\mu_m})^k \|r_{\mu_m}\|_{0,l}^{|\gamma|} \|r\|_{0,l_0}^{k-|\gamma|} \\ &= C_\gamma (C'(k+1)^k (C_{\mu_m}\|r_{\mu_m}\|_{0,l})^{|\gamma|} (C_{\mu_m}\|r_{\mu_m}\|_{0,l_0})^{k-|\gamma|} \\ &\leq C_\gamma (C_{\mu_m}\|r_{\mu_m}\|_{0,l})^{|\gamma|} (C'(k+1))^k, \end{aligned}$$

entonces se sigue de la prueba M de Weirestrass que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r_{k,\mu_m}(\rho, x, \rho y) := q^{-1}_{\mu_m}(\rho, x, \rho y)$ converge uniformemente y todas sus derivadas también, esto es, converge en $\mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{2N})$. Por lo que se sigue de la proposición 2.5 que $q^{-1}_{\mu_m} \in \mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{2N})$ y

$$Q^{-1}_{\mu_m}(\rho, x, \rho\partial_x)u(x) = \int e^{ix'\cdot y'} q^{-1}_{\mu_m}(\rho, x, \rho y)\mathcal{F}u(y)dy \qquad\qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

por lo que es un operador pseudo-diferencial y cumple que

$$\begin{aligned}Q_{\mu_m}^{-1}(\rho,x,\rho\partial_x)\circ Q_{\mu_m}(\rho,x,\rho\partial_x) &= Q_{\mu_m}^{-1}(\rho,x,\rho\partial_x)\circ P_{\mu_m}(x,\rho\partial_x)\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))\\ &= \mathbb{1}_{\mathcal{S}}.\end{aligned}$$

Esto último significa que $Q_{\mu_m}^{-1}(\rho,x,\rho\partial_x)\circ P_{\mu_m}(x,\rho\partial_x)$ es una inversa izquierda que por el lema 2.11 está uniformemente acotada $\mathcal{A}^{-m}(\mathbb{R}^{2N})$. Si repetimos el mismo argumento pero para

$$Q'_\mu(\rho,x,\rho\partial_x) = (\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))\circ P_{\mu_m}(x,\rho\partial_x),$$

podemos encontrar una inversa derecha con las mismas propiedades. □

Lema 3.9. *Usando la notación del lema anterior 3.7, si definimos el operador* $(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}$ *como*

$$D\left((\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}\right) = \left\{f\in L^2 \mid \gamma_m(x,\rho\ .\ )\mathcal{F}f\in L^2\,\forall x\in\mathbb{R}^N\right\} \tag{3.63}$$

$$(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}\,f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mu_m+\gamma_m(x,\rho\ .\ )\mathcal{F}f)(x), \tag{3.64}$$

se cumple que $f\in B^m(\mathbb{R}^N)$ *si y solo si* $(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}\,f\in L^2(\mathbb{R}^N)$ *y existe una constante* $C_m>0$ *independiente de* ρ *tal que*

$$C_m^{-1}\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}\,f\|_2 \le \|f\|_{B^m} \le C_m\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}\,f\|_2. \tag{3.65}$$

Demostración. Supongamos que $(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}\,f\in L^2(\mathbb{R}^N)$, si tomamos $g_\alpha(x)=x^\alpha$ para $|\alpha|=m$ se sigue del lema 2.11 y 3.7 que el conjunto de símbolos de $G_\alpha(x,\rho\partial_x)\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}$ y de $(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}$ están uniformemente acotados en $\mathcal{A}^0(\mathbb{R}^N)$ y por el teorema de Calderon-Vaillancourt 2.13, estos se puede extender a todo $L^2(\mathbb{R}^N)$ y la norma de operador está uniformemente acotada por alguna $C'_m\ge 0$. Como el operador $(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}$ coincide con $(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\begin{aligned}\|g_\alpha f\|_2+\|f\|_2 &= \left\|G_\alpha(x,\rho\partial_x)\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}f\right\|_2\\ &+\left\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}f\right\|_2\\ &\le \left\|G_\alpha(x,\rho\partial_x)\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}\right\|_{OP}\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}f\|_2\\ &+\left\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}\right\|_{OP}\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}f\|_2\\ &\le 2C'_m\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}f\|_2 \qquad f\in\mathcal{S},\end{aligned}$$

pero por la densidad de las funciones de Schwartz en L^2, se sigue que la desigualdad vale en general para $f\in D((\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}})$. Entonces por el teorema de Plancharel 1.39

$$\begin{aligned}\|g_\alpha\mathcal{F}f\|_2 &= \left\|G_\alpha(x,\rho\partial_x)\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}\mathcal{F}^{-1}\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}f\right\|_2\\ &\le \left\|G_\alpha(x,\rho\partial_x)\circ(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))^{-1}\right\|_{OP}\left\|\mathcal{F}^{-1}\right\|_{OP}\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}f\|_2\end{aligned}$$

entonces usando la representación de la norma de B^a dada por (2.154) podemos encontrar una C_m tal que se cumple la desigualdad de la derecha de (3.65) y por lo tanto la ida. Para el regreso, de nuevo sea $f\in S$ podemos tomar una C'_m

$$\begin{aligned}\|(\mu_m+\Gamma_m(x,\rho\partial_x))_{\text{máx}}\,f\|_2 &=\le \mu_m\|f\|_2+\|\Gamma_m(x,0)f\|_2+\|\Gamma_m(0,\rho\partial_x)f\|_2\\ &\le \mu_m\|f\|_2+\left\|\left(\sqrt{1+\|\cdot\|^2}\right)^m f\right\|_2+\left\|\mathcal{F}^{-1}\right\|_{OP}\left\|\left(\left(\sqrt{1+\|\cdot\|^2}\right)^m\mathcal{F}f\right)\right\|_2\\ &\le C'_m\left(\|f\|_2+\left\|\left(1+\sum_{|\alpha|=m}p_\alpha\right)f\right\|_2+\left\|\left(1+\sum_{|\alpha|=m}p_\alpha\right)\mathcal{F}f\right\|_2\right)\\ &\le C_m\|f\|_{B^m_\rho},\end{aligned}$$

lo que nos de la desigualdad de la izquierda de (3.65) y el regreso con lo que terminamos la demostración. $\square$

Demostración (Teorema 3.6). Tomamos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ entonces usando los lemas 3.7, 2.11 y (2.66) sabemos que $\{\left(\mu_{a-m_q}(x,\partial_x) + \Gamma_{a-m_q}(x,\rho\partial_x)\right) Q(\rho; x, \rho\partial_x) \left(\mu_a(x,\partial_x) + \Gamma_a(x,\rho\partial_x)\right)^{-1}\}_{0<\rho\leq T} \subset \mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{2N})$ es un conjunto acotado. Entonces se sigue del lema anterior 3.9 y del teorema de Calderon-Vaillancourt 2.13 que

$$\begin{aligned}
\|Q(x,\rho\partial_x)f\|_{B_\rho^{a-m_q}} &\leq C_{a-m}(\|(\mu_{a-m}(x,\partial_x) + \Gamma_{a-m}(x,\rho\partial_x))\, Q(x,\rho\partial_x) f\|_2 \\
&\leq C'_{a-m}\|(\mu_a(x,\partial_x) + \Gamma_a(x,\rho\partial_x))\, f\|_2 \\
&\leq C'_{a-m_q} C_a \|f\|_{B_\rho^a},
\end{aligned}$$

lo que muestra que el operador es acotado entre estos espacios. $\square$

Teorema 3.10. *Supongamos que para las funciones de corte g, ψ en (2.50), cumplen (3.33), (3.34), y sea ρ^* la constante determinada en la proposición 3.5 para toda $a = 0, 1, 2, ...$ existe una constante $K_a \geq 0$*

$$\|\mathcal{C}(t,s)f\|_{B^a} \leq e^{K_a(t-s)}\|f\|_{B^a} \tag{3.66}$$

Para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ y $0 \leq t-s \leq \rho^*$

Demostración. Como $C(s,s)$, es la identidad, la desigualdad se cumple con cualquier $K_a \geq 0$ trivialmente, por lo que podemos suponer $0 < t-s \leq \rho^*$. Tomemos una familia $\{\chi_\epsilon\}$ como en la definición 2.2, y directamente de la definición del operador fundamental 3.1, y usando el lema 2.12, la proposición 3.5 y la ecuación (3.30) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(t,s)^*\chi_\epsilon^2\mathcal{C}(t,s)f(\widetilde{X}) &= \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^3\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3}\int \exp(-i\hbar^{-1}S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Z}}))\chi_\epsilon(\widetilde{Z})^2 \\
&\times\left(\int \exp(i\hbar^{-1}S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}))f(\widetilde{Y})d\widetilde{Y}\right)d\widetilde{Z} \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^3\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3}\int f(\widetilde{Y}) \\
&\times\left(\int \chi_\epsilon(\widetilde{Z})^2\exp(i\hbar^{-1}S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}) - i\hbar^{-1}S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Z}}))d\widetilde{Z}\right)d\widetilde{Y} \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^3\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3}\int f(\widetilde{Y}) \\
&\times\left(\int \chi_\epsilon(\widetilde{Z})^2\exp(i\left(\sum_{j=1}^n(x^j-y^j)\cdot\frac{m_j\Phi^j(t,s,\widetilde{W})}{\hbar(t-s)} + (X-Y)\cdot\frac{\Phi^0(t,s,\widetilde{W})}{\hbar|V|(t-s)}\right))d\widetilde{Z}\right)d\widetilde{Y} \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^3\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3}\int f(\widetilde{Y}) \\
&\times\left(\int (\chi_\epsilon\circ\Phi^{-1})^2(t,s,\widetilde{W})e^{\left(i\left(\sum_{j=1}^n(x^j-y^j)\cdot\frac{m_jz^j}{\hbar(t-s)}+(X-Y)\cdot\frac{Z}{\hbar|V|(t-s)}\right)\right)}\left|\mathbf{J}^{-1}_{\widetilde{\Phi}}(t,s,\widetilde{W})\right|d\widetilde{Z}\right)d\widetilde{Y}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3n+4n_3} \int f(\widetilde{Y}) \left(\int (\chi_\epsilon \circ \Phi^{-1} \circ \widetilde{\Gamma}^{-1})^2 (t,s,\widetilde{W}) e^{(i(\widetilde{X}-\widetilde{Y})\cdot \widetilde{Z})} \right.$$
$$\left. \times \left| \mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}^{-1} \circ \widetilde{\Gamma}^{-1}(t,s,\widetilde{W}) \right| d\widetilde{Z} \right) d\widetilde{Y}, \tag{3.67}$$

donde en la penúltima igualdad se uso $\widetilde{\Phi}^{-1}$ para un primer cambio de variable y en la última se usó $\widetilde{\Gamma} := (\Gamma, \gamma^1, ..., \gamma^n)$ con $\Gamma(Z) := \frac{Z}{\hbar|V|(t-s)}$ y $\gamma^j(z^j) = \frac{m_j z^j}{\hbar(t-s)}$ para otro cambio de variable. Si definimos

$$h = \frac{1}{t-s}\left(\left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}^{-1}\right| - 1 \right) = \frac{\left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}^{-1}\right|}{t-s}(1 - \left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}\right|) \tag{3.68}$$
$$\leftrightarrow \left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}^{-1}\right| = 1 + (t-s)h, \tag{3.69}$$

notamos que como $1/\rho(\mathbb{I}_{3n+4N_3} - \mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}) = \mathbf{f}$, como en (3.39), si vemos a $\left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}\right|$ como una función en $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$, como sus derivadas parciales todas están acotadas por 3.5, esta función es globalmente Lipschitz continua, y por lo tanto existe una constante $C_0' \geq 0$ tal que

$$|h| \leq \frac{2}{\rho}\left|1 - \left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}\right|\right| \leq \frac{2C_0'}{\rho}\left\|\mathbb{I}_{3n+4N_3} - \mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}\right\| = 2C_0'\|\mathbf{f}\|, \tag{3.70}$$

por lo que h está uniformemente acotada. Y si tomamos α un multi-índice tal que $1 \leq |\alpha|$, notamos que

$$D^\alpha \left(\frac{1}{\rho}\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}\right)_{i,j} = D^\alpha f_{i,j}, \tag{3.71}$$

que está acotado uniformemente entonces apelando a la regla de la cadena y la regla de Leibniz, de (3.69) se sigue que $D^\alpha h$ también. Esto es $\{h\}_{0\geq\rho\geq T}$ es un subconjunto acotado de $\mathcal{A}^0\{\mathbb{R}^{9n+12N_3}\}$. Y por la proposición 3.5 y la regla de la cadena que la familia $\chi_\epsilon' = (\chi_\epsilon \circ \Phi^{-1} \circ \widetilde{\Gamma}^{-1})^2$ también es una familia como en la definición 2.2, por lo tanto

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3n+4N_3} \int f(\widetilde{Y}) \left(\int \chi_\epsilon'(\widetilde{W})^2 e^{i(\widetilde{X}-\widetilde{Y})\cdot\widetilde{Z}} d\widetilde{Z} \right) d\widetilde{Y} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3n+4N_3} \int\int f(\widetilde{Y})\chi_\epsilon'(\widetilde{W})^2 e^{i(\widetilde{X}-\widetilde{Y})\cdot\widetilde{Z}} d\widetilde{Y} d\widetilde{Z}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3n+4N_3} \int \mathcal{F}(f)(\widetilde{Z}) e^{i(\widetilde{X}\cdot\widetilde{Z})} d\widetilde{Z},$$
$$= f(\widetilde{X}) \tag{3.72}$$

y el otro término lo podemos poner como

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3n+4N_3} \mathrm{Os}\int e^{-i\widetilde{Y}\cdot\widetilde{Z}} h(t,s,\widetilde{X},\widetilde{X}+\widetilde{Y},\widetilde{Z}) f(\widetilde{X}+\widetilde{Y}) d\widetilde{Y} d\widetilde{Z} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{6n+8N_3} \mathrm{Os}\int e^{-i(\widetilde{Y}\cdot\widetilde{Z}+\widetilde{Y'}\cdot\widetilde{Z'})}$$
$$\times h(t,s,\widetilde{X},\widetilde{X}+\widetilde{Y},\widetilde{Z})$$
$$\times f(\widetilde{X}+\widetilde{Y}+\widetilde{Y}') d\widetilde{Y} d\widetilde{Z} d\widetilde{Y'} d\widetilde{Z'} \tag{3.73}$$

donde en última igualdad usamos 2.8. Notamos que esta expresión es un operador pseudo-diferencial de doble símbolo como en 2.16. Entonces usando la proposición 2.18 este último se puede expresar como un operador pseudo diferencial con símbolo

$$\tilde{h}(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \mathrm{Os}\frac{1}{(2\pi)^N}\int\int e^{i\widetilde{Y}\cdot\widetilde{X}} h(t,s,\widetilde{X}+\widetilde{Y}',\widetilde{Y}+\widetilde{X}') d\widetilde{X}' d\widetilde{Y}', \tag{3.74}$$

entonces de 2.66, el teorema de Calderon-Vaillancourt 2.13 y de (3.67) obtenemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} C(t,s)^*\chi_\epsilon^2 C(t,s) = 1 + (t-s)H \tag{3.75}$$

Con H la extensión del operador pseudo-diferencial con símbolo $\tilde{h}$ que está uniformemente acotado respecto a ρ. Y por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\|\chi_\epsilon C(t,s)f\|_{L^2}^2 = \lim_{\epsilon\to 0}(\chi_\epsilon C(t,s)f, \chi_\epsilon C(t,s)f)_{L^2} &= \left(\lim_{\epsilon\to 0} C(t,s)^*\chi_\epsilon^2 C(t,s)f, f\right)_{L^2}\\ &= (f,f)_{L^2} + ((t-s)Hf,f)_{L^2}\\ &\leq \|f\|_{L^2}^2 + 2(t-s)(\|Hf\|_{L^2}\|f\|_{L^2}\\ &\leq (1+2(t-s)\|H\|_{OP})\|f\|_{L^2}^2\\ &\leq e^{2\|H\|_{OP}(t-s)}\|f\|_{L^2}^2\\ &:= e^{2K_0(t-s)}\|f\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.76}$$

Por lo que la demostración para el caso $a=0$ se sigue de esta desigualdad anterior y el lema de Fatou. Ahora de la misma forma que obtuvimos (3.67), si tomamos $p \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^{6n+8N_3})$ entonces

$$\begin{aligned}P(t,s)^*\chi_\epsilon^2 P(t,s)f(\widetilde{X}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3n+4n_3}\int f(\widetilde{Y})\left(\int (\chi_\epsilon\circ\Phi^{-1}\circ\widetilde{\Gamma}^{-1})^2(t,s,\widetilde{W})e^{(i(\widetilde{X}-\widetilde{Y})\cdot\widetilde{Z})}\right.\\ \left.\times\, p_1\circ\Phi^{-1}\circ\widetilde{\Gamma}^{-1}(t,s,\widetilde{W})p_2\circ\Phi^{-1}\circ\widetilde{\Gamma}^{-1}(t,s,\widetilde{W})\left|\mathbf{J}_{\widetilde{\Phi}}^{-1}\circ\widetilde{\Gamma}^{-1}(t,s,\widetilde{W})\right|d\widetilde{Z}\right)d\widetilde{Y},\end{aligned} \tag{3.77}$$

con $p_1(\widetilde{Z},\widetilde{X}) = \overline{p(\widetilde{Z},(\widetilde{Z}-\widetilde{X}/\sqrt{\rho}))}$ y $p_2(\widetilde{Z},\widetilde{Y}) = p(\widetilde{Z},(\widetilde{Z}-\widetilde{Y}/\sqrt{\rho}))$. Por lo tanto argumentando como se hizo para obtener (3.75) entonces podemos encontrar una familia $\{q(t,s;\widetilde{X},\widetilde{Y})\}\subset\mathcal{A}^{2m}$ acotada tal que

$$\lim_{\epsilon\to 0} P(t,s)^*\chi_\epsilon^2 P(t,s)f(\widetilde{X}) = Q\left(t,s;\widetilde{X},\partial_{\widetilde{X}}\right)f. \tag{3.78}$$

Del lema 3.9 tomamos $\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})$ entonces del lemma 2.11 y del teorema 3.6 sabemos que $\left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})\right)^{-1}\circ Q(t,s,\widetilde{X},\partial_{\widetilde{X}}) : B^{m_p}(\mathbb{R}^{3n+4N_3}) \to L^2(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ es continua por lo que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|P(t,s)^*\chi_\epsilon^2 P(t,s)f\right\|_{L^2}^2 = \left(Q(t,s,\widetilde{X},\partial_{\widetilde{X}})f,f\right)_{L^2} \tag{3.79}$$

$$= \left(\left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})\right)^{-1}Q(t,s,\widetilde{X},\partial_{\widetilde{X}})f, \left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})^*\right)f\right)_{L^2} \tag{3.80}$$

$$= \left(\left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})\right)^{-1}Q(t,s,\widetilde{X},\partial_{\widetilde{X}})f, \left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})\right)f\right)_{L^2} \tag{3.81}$$

$$\leq \left\|\left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})\right)^{-1}Q(t,s,x,\partial_x)f\right\|\left\|\left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})\right)f\right\| \tag{3.82}$$

$$\leq \left\|\left(\mu_m + \Gamma_m(\widetilde{X},\rho\partial_{\widetilde{X}})\right)^{-1}Q(t,s,x,\partial_x)\right\|_{OP} C_m\|f\|_{B^m}^2, \tag{3.83}$$

donde en la tercera igualdad se usó el lema 2.12 y la identidad (3.75) al símbolo $\mu_m+\gamma_m$. Entonces se sigue que $P(t,s): B^m(\mathbb{R}^{3n+4N_3}) \to L^2(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ es un operador uniformemente acotado. Ahora, usando el teorema 3.2 si tomamos α un multi-índice demostraremos que para cualquier multi-índice β tal que $|\beta| \le |\alpha|$ existen $p_{\beta,\alpha}, p'_{\beta,\alpha} \in \mathcal{A}^{|\alpha|-|\beta|}(\mathbb{R}^{6n+8N_3})$

$$D^{\alpha}_{\widetilde{X}}\left(\mathcal{C}(t,s)f\right) - \mathcal{C}(t,s)(D^{\alpha}_{\widetilde{X}}f) = (t-s)\sum_{|\beta|\le|\alpha|} P_{\beta,\alpha}(t,s)(D^{\beta}_{\widetilde{X}}f) \tag{3.84}$$

$$\widetilde{X}^{\alpha}(\mathcal{C}(t,s)f) - \mathcal{C}(t,s)(\widetilde{X}^{\alpha}f) = (t-s)\sum_{|\beta|\le|\alpha|} P'_{\beta,\alpha}(t,s)(D^{\beta}_{\widetilde{X}}f). \tag{3.85}$$

Se procederá por inducción sobre $|\alpha|$. El caso $\alpha=0$ es trivial, entonces suponiendo que la hipótesis se cumple para $|\alpha|=K$, sea entonces α tal que $|\alpha|=K+1$. Entonces existe $i\in\{1,...3n+4N_3\}$ y α' multi-índice con $|\alpha'|=K$ tal que $D^{\alpha}_{\widetilde{X}} = \partial_{\widetilde{X}_i} D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}$, entonces por un lado por la hipótesis de inducción y usando la ecuación (3.8) y la regla integral de Leibniz 1.13, se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_{\widetilde{X}_i}\left((t-s)\sum_{|\beta|\le|\alpha'|} P_{\beta,\alpha'}(t,s)f\right) &= (t-s)\sum_{|\beta|\le|\alpha'|}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\\ &\times\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}))\left(\partial_{\widetilde{X}_i} i\hbar^{-1}\left(\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})\right)p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{W})D^{\beta}_{\widetilde{X}}f'(\widetilde{W})\right.\\ &\left.+\partial_{\widetilde{X}_i}p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{W})D^{\beta}_{\widetilde{X}}f'(\widetilde{W}) + p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{W})D^{\beta+e_i}_{\widetilde{X}}f'(\widetilde{W})\right)d\widetilde{W}\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\widetilde{X}_i}\mathcal{C}(t,s)(D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f) - \mathcal{C}(t,s)(D^{\alpha}_{\widetilde{X}}f) &= \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}))\\ &\times i\hbar^{-1}\left(\rho\int_0^1 \frac{\partial V'_{\Lambda_1}}{\partial \widetilde{X}_i}(\widetilde{X},\widetilde{W})d\theta\right.\\ &+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\sqrt{\rho}w^j\cdot\int_0^1 \frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}'}}{\partial\widetilde{X}_i}(\widetilde{X},\widetilde{W})d\theta\\ &\left.-\rho\int_0^1 \frac{\partial V'_{\Lambda_3}}{\partial\widetilde{X}_i}(\widetilde{X},\widetilde{Y})d\theta\right)D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f'(\widetilde{W})d\widetilde{W},\end{aligned} \tag{3.87}$$

entonces definimos

$$p^*_{\beta,\alpha}(\widetilde{X},\widetilde{W}) := \partial_{\widetilde{X}_i} i\hbar^{-1}\left(\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})\right)p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) + \partial_{\widetilde{X}_i}p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) \qquad |\beta|=0, |\alpha'| \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}p^*_{\beta,\alpha}(\widetilde{X},\widetilde{W}) &:= \partial_{\widetilde{X}_i} i\hbar^{-1}\left(\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})\right)p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\\ &+\partial_{\widetilde{X}_i}p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) + p_{\beta-e_i,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{W}) \qquad 0<|\beta|<|\alpha'|\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$p^*_{\beta,\alpha}(\widetilde{X},\widetilde{W}) := p_{\beta-e_i,\alpha'}(\widetilde{X},\widetilde{W}) \qquad |\beta|=|\alpha|, \tag{3.90}$$

por lo que podemos escribir (3.86) como

$$(t-s)\sum_{|\beta|\le|\alpha|} P^*_{\beta,\alpha}(t,s)(D^{\beta}_{\widetilde{X}}f). \tag{3.91}$$

Por las hipotesis de las funciones de corte y el lema 3.4 se tiene que para $i = 1, 2, 3$ se cumple que $\int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j - \theta\sqrt{\rho}w^j, X - \theta\sqrt{\rho}W)d\theta \in \mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{6n+8N_3})$ por lo que el término de δ que depende de estas integral esta en $\mathcal{A}^1$ pues el producto punto al desarrollarlo, muestra que el término es una suma se productos de polinomios de grado 1 y de estas integrales. También, como $\rho\int_0^1 V_{\Lambda_3}(X - \theta\sqrt{\rho}W)$ es un polinomio de grado 2, su derivada es un polinomio de grado 1 y este está en $\mathcal{A}^1$. Y finalmente, como $\rho\int_0^1 V_{\Lambda_1}(x - \theta\sqrt{\rho})$ está en $\mathcal{A}^0$, se sigue que $\partial_{\widetilde{X}_i} i\hbar^{-1}\left(\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})\right)p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ está en $\mathcal{A}^{(|\alpha'|-|\beta|)+1} = \mathcal{A}^{|\alpha|-|\beta|}$. Por lo tanto para todo multi-índice $|\beta| \le |\alpha|$ se tiene que $p^*_{\beta,\alpha} \in \mathcal{A}^{|\alpha|-\beta|}$. Por otro lado puesto que,

$$\begin{aligned}
\int e^{i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})}w^j \cdot \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}'_j}{\partial \widetilde{X}_i}(\widetilde{X}, \widetilde{W})d\theta D^{\alpha'}_{\widetilde{X}} f'(\widetilde{W})d\widetilde{W} &= \\
m_j^{-1}\int e^{i\hbar^{-1}\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})}\partial_{w_j} e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n m_j\|w_j\|^2 + \frac{\|W\|^2}{2|V|}} \cdot \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}'_j}{\partial \widetilde{X}_i}(\widetilde{X}, \widetilde{W})d\theta D^{\alpha'}_{\widetilde{X}} f'(\widetilde{W})d\widetilde{W} &= \\
m^{-1}\int e^{i\hbar^{-1}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n m_j\|w_j\|^2 + \frac{\|W\|^2}{2|V|}}\partial_{w_j} \cdot e^{i\hbar^{-1}\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})}\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}'_j}{\partial \widetilde{X}_i}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})d\theta D^{\alpha'}_{\widetilde{X}} f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}&.
\end{aligned}$$

Por regla de la cadena, la derivada con respecto a w_j saca un factor de $\sqrt{\rho}$ entonces de todos los términos se puede factorizar un termino ρ y por lo tanto podemos escribir (3.87) de la misma forma que (3.91) y como

$$\begin{aligned}
D^\alpha_{\widetilde{X}}(\mathcal{C}(t,s)f) - \mathcal{C}(t,s)(D^\alpha_{\widetilde{X}}f) = \partial_{\widetilde{X}_i}\left(D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}(\mathcal{C}(t,s)f) - \mathcal{C}(t,s)(D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f)\right) + \partial_{\widetilde{X}_i}\mathcal{C}(t,s)(D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f) \\
- \mathcal{C}(t,s)(D^\alpha_{\widetilde{X}}f),
\end{aligned}$$

se sigue el paso inductivo. Para (3.85), de la misma manera $\alpha = 0$ es trivial. Supongamos que la hipótesis se cumple para $|\alpha| = K$,sea entonces α tal que $|\alpha| = K + 1$. Entonces existe $i \in \{1, ...3n + 4N_3\}$ y α' multi-índice con $|\alpha'| = K$ tal que $\widetilde{X}^\alpha = \widetilde{X}_i\widetilde{X}^{\alpha'}$, entonces por un lado por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_i\left((t-s)\sum_{|\beta|\le|\alpha'|} P_{\beta,\alpha'}(t,s)f\right) = (t-s)\sum_{|\beta|\le|\alpha'|}\left(\prod_{j=1}^n\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2} \\
\times \int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}))\widetilde{X}_i p_{\beta,\alpha'}(\widetilde{X}, \widetilde{W})D^\beta_{\widetilde{X}} f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_i\mathcal{C}(t,s)(\widetilde{X}^{\alpha'}f) - \mathcal{C}(t,s)(\widetilde{X}^\alpha f) &= \left(\prod_{j=1}^n\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})) \\
&\times\left(\widetilde{X}_i\left(\widetilde{X} - \sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)^{\alpha'} - \left(\widetilde{X} - \sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)^{\alpha}\right) f'(\widetilde{W})d\widetilde{W} \\
&= \left(\prod_{j=1}^n\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})) \\
&\times\left(\widetilde{X}_i\left(\widetilde{X} - \sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)^{\alpha'} - \left(\widetilde{X} - \sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)_i\left(\widetilde{X} - \sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)^{\alpha'}\right) f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}
\end{aligned}$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}))$$
$$\times \sqrt{\rho}\widetilde{W}_i\left(\widetilde{X}-\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)^{\alpha'} f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}$$
$$= \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}))$$
$$\times \sqrt{\rho}\widetilde{W}_i\left(\widetilde{X}-\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)^{\alpha'} f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}$$
$$= \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|}\right)^{4N_3/2}\int \exp(i\hbar^{-1}\phi(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}}))$$
$$\times \left(\sum_{j=1}^{3n} m^{-1}_{\lceil j/3\rceil}\delta_{j,i} + |V|\sum_{j=n+1}^{3n+4N_3}\delta_{j,i}\right) e^{i\hbar^{-1}\delta(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{W}})}$$
$$\times \partial_{\widetilde{W}_i} e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\|w_j\|^2+\frac{\|W\|^2}{2|V|}}\sqrt{\rho}\left(\widetilde{X}-\sqrt{\rho}\widetilde{W}\right)^{\alpha'} f'(\widetilde{W})d\widetilde{W}, \qquad (3.92)$$

y como en el caso anterior, se sigue la hipótesis inductiva. Entonces tomando α multi-índice tal que $|\alpha| = a$, de (3.84) tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|D^{\alpha}_{\widetilde{X}}C(t,s)f\right\| &\leq \left\|C(t,s)D^{\alpha}_{\widetilde{X}}f\right\|_2 + (t-s)\sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|}\left\|P_{\alpha',\alpha}(t,s)(D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f)\right\|_2 \\ &\leq e^{K_0(t-s)}\left\|D^{\alpha}_{\widetilde{X}}f\right\|_2 + (t-s)C_\alpha\sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|}\left\|D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f\right\|_{B^{|\alpha|-|\alpha'|}}.\end{aligned}$$

Recordamos que podemos ver $D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}$ como un operador pseudo-diferencial con símbolo $(i\widetilde{X})^{\alpha'}$, entonces de los lemas (3.9) y (2.11) se sigue que el símbolo de

$$\left(\mu_{|\alpha|-|\alpha'|}(x,\partial_x)+\Gamma_{|\alpha|-|\alpha'|}(x,\rho\partial_x)\right)D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}\left(\mu_{|\alpha|}(x,\partial_x)+\Gamma_{|\alpha|}(x,\rho\partial_x)\right)^{-1},$$

esta en $\mathcal{A}^0(\mathbb{R}^{6n+8N_3})$ entonces del teorema 3.6 y del teorema de Calderon-Vaillancourt 2.13,

$$\begin{aligned}\left\|D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f\right\|_{B^{|\alpha|-|\alpha'|}} &\leq C_{|\alpha|-|\alpha'|}\left\|\left(\mu_{|\alpha|-|\alpha'|}+\Gamma_{|\alpha|-|\alpha'|}(x,\rho\partial_x)\right)D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}f\right\|_2 \\ &\leq C_{|\alpha|-|\alpha'|}\left\|\left(\mu_{|\alpha|-|\alpha'|}+\Gamma_{|\alpha|-|\alpha'|}(x,\rho\partial_x)\right)D^{\alpha'}_{\widetilde{X}}\left(\mu_{|\alpha|}+\Gamma_{|\alpha|}(x,\rho\partial_x)\right)^{-1}\left(\mu_{|\alpha|}+\Gamma_{|\alpha|}(x,\rho\partial_x)\right)f\right\|_2 \\ &\leq C'_{|\alpha|-|\alpha'|}\left\|\left(\mu_{|\alpha|}+\Gamma_{|\alpha|}(x,\rho\partial_x)\right)f\right\|_2 \\ &\leq C'_{|\alpha|-|\alpha'|}C_{|\alpha|}\|f\|_{B^{|\alpha|}},\end{aligned}$$

entonces

$$\left\|D^{\alpha}_{\widetilde{X}}C(t,s)f\right\|_2 \leq e^{K_0(t-s)}\left\|D^{\alpha}_{\widetilde{X}}f\right\|_2 + (t-s)C^*_{1,|\alpha|}\|f\|_{B^{|\alpha|}}. \qquad (3.93)$$

Y de la misma forma pero usando (3.85) tenemos que

$$\left\|\widetilde{X}^{\alpha}C(t,s)f\right\|_2 \leq e^{K_0(t-s)}\left\|\widetilde{X}^{\alpha}f\right\|_2 + (t-s)C^*_{2,|\alpha|}\|f\|_{B^{|\alpha|}}, \qquad (3.94)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\|C(t,s)f\|_{B^a} &\leq e^{K_0(t-s)}C^*_{3,|\alpha|}\|f\|_{B^a} + (t-s)(C^*_{1,a}+C^*_{2,a})\|f\|_{B^a} \\ &\leq e^{K_a(t-s)}\|f\|_{B^a}, \end{aligned} \qquad (3.95)$$

lo que termina la demostración. $\square$

Corolario 3.10.1. *Sea* $0 \leq t - s \leq \rho*$ *y* $p \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{6n+8N_3})$ *entonces* $P(t,s) : B^{m_p+a}(\mathbb{R}^{3n+4N_3}) \to B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ *es uniformemente acotado*

Demostración. Simplemente notamos que podemos generalizar (3.84) y (3.85) de tal forma que si tomamos mutli-índice α, para todo multi-índice $\beta \leq \alpha$ existen $p_{\beta,\alpha}, p'_{\beta,\alpha} \in \mathcal{A}^{m_p+|\alpha|-|\beta|}$ tal que

$$D^{\alpha}_{\widetilde{X}}(P(t,s)f) = \sum_{\beta\leq\alpha} P_{\beta,\alpha}(t,s)(D^{\beta}_{\widetilde{X}}f) \tag{3.96}$$

$$\widetilde{X}^{\alpha}(P(t,s)f) = \sum_{\beta\leq\alpha} P'_{\beta,\alpha}(t,s)(D^{\beta}_{\widetilde{X}}f) \tag{3.97}$$

y la demostración se sigue usando los mismos argumentos del teorema anterior. □

Corolario 3.10.2. *El operador* $H : B^{a+M} \to B^a$ *es un operador acotado para* $M \geq 2$ *y* $a = 0, 1, \ldots$

Corolario 3.10.3. *Los operadores* $\{C(t,s)\}_{0\leq t-s\leq\rho^*}$ *son fuertemente continuos en* $B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$

Demostración. Primero notamos que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ la continuidad fuerte se sigue fácilmente del teorema de convergencia dominada usando las cotas argumentadas en al final de la demostración del teorema 3.2. Ahora, sea $0 \leq t - s \leq \rho^*$ y $f \in B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$, por la forma en que se extiende el operador fundamental, si tomamos $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ en $B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ notamos que

$$\|C(t,s)(f - f_k)\|_{B^a_\hbar} \leq e^T \|f - f_k\|_{B^a},$$

entonces la demostración se sigue de un argumento de $\epsilon/3$ estándar. □

4. El Operador Fundamental y la Ecuación de Schrödinger

Vamos a considerar como es que el Hamiltoniano dado en la definición 2.24 actúa sobre el operador fundamental 3.1.

Teorema 4.1. *Supongamos que para las funciones de corte* g, ψ*, dadas en la definición 2.1, cumplen (3.33, 3.34), entonces existen* $M, M' \in \mathbb{N}_0$ *y familias* $\{r(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y})\}_{0\leq s\leq t\leq T} \subset \mathcal{A}^M(\mathbb{R}^{6n+8N_3})$*,* $\{r'(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y})\}_{0\leq s\leq t\leq T} \subset \mathcal{A}^{M'}(\mathbb{R}^{6n+8N_3})$ *acotadas tal que para* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right) C(t,s)f(\widetilde{X}) = \sqrt{t-s}R(t,s)f(\widetilde{X}) \tag{4.1}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}C(t,s)f(\widetilde{X}) - C(t,s)Hf(\widetilde{X}) = \sqrt{t-s}R'(t,s)f(\widetilde{X}), \tag{4.2}$$

con R, R' *dados por la definición 3.1.*

Demostración. Suponemos que $s < t$, calculando directamente de tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\hbar}{i}\partial_{x_i^j} - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}_i\right)^2 e^{i\hbar S} &= \left(-\hbar^2\partial^2_{x_i^j} - \hbar e_j(ic)^{-1}\partial_{x_i^j}\widetilde{\mathbf{A}}_i - \hbar e_j(ic)^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}_i\partial_{x_i^j} + \frac{e_j^2}{c^2}\widetilde{\mathbf{A}}_i^2\right)e^{i\hbar S}\\
&= \left(-\hbar^2\left(\hbar^{-2}e^{i\hbar S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}})}(\partial_{x_i^j}S)^2 + i\hbar^{-1}e^{i\hbar S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}})}\partial^2_{x_i^j}S\right)\right.\\
&\quad \left. - e_j\hbar(ic)^{-1}(\partial_{x_i^j}\widetilde{\mathbf{A}}_i)e^{i\hbar^{-1}S} - \frac{2e_j\hbar}{c}\widetilde{\mathbf{A}}_i e^{i\hbar^{-1}S}\partial_{x_i^j}S + \frac{e_j^2}{c^2}\widetilde{\mathbf{A}_i}^2 e^{i\hbar^{-1}S}\right)\\
&= e^{i\hbar^{-1}S}\left((\partial_{x_i^j}S)^2 - i\hbar\partial^2_{x_i^j}S + e_j i\hbar(c)^{-1}(\partial_{x_i^j}\widetilde{\mathbf{A}}_i) - \frac{2e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}_i\partial_{x_i^j}S + \frac{e_j^2}{c^2}\widetilde{\mathbf{A}}_i^2\right)\\
&= e^{i\hbar^{-1}S}\left(\left(\partial_{x_i^j}S - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}_i\right)^2 - i\hbar\partial^2_{x_i^j}S + \frac{i\hbar e_j}{c}\partial_{x_i^j}\widetilde{\mathbf{A}}_i\right), \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

también que

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial X_i^2}e^{i\hbar^{-1}S} = e^{i\hbar^{-1}S}\left((\partial_{X_i}S)^2 - i\hbar\partial^2_{X_i}S\right), \qquad (4.4)$$

y también que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{C}(t,s)f = -\frac{3n+4N_3}{2(t-s)}C^*_{t,s}\int e^{i\hbar^{-1}S}f(y)dy + C^*_{t,s}\int i\hbar^{-1}e^{i\hbar^{-1}S}\partial_t S f(y)dy. \qquad (4.5)$$

Por lo tanto directamente de la ecuación (2.163), tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)\mathcal{C}(t,s)f = &-\left(\prod_{j=1}^n\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t-s)}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3/2}\int e^{i\hbar^{-1}S}\\
&\times\left(r_1(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) + \frac{i\hbar}{2}r_2(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y})\right)f(\widetilde{Y})d\widetilde{Y}. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

con

$$r_1(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \partial_t S + \sum_{j=1}^n\frac{1}{2m_j}\left\|\partial_{x^j}S - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}\right\|^2 + V_{\Lambda_1}(x) + V_{\Lambda_3}(X) + \frac{|V|}{2}\|\partial_X S\|^2 \qquad (4.7)$$

$$r_2(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \frac{3n+4N_3}{t-s} - \sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{m_j}\Delta_x^j S - \frac{e_j}{cm_j}\partial_{x^j}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}\right) - |V|\Delta_X S. \qquad (4.8)$$

También, calculando directamente de (3.4), se sigue que

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i^j}S - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}_i = &\frac{m_j(x_i^j - y_i^j)}{\rho} + \frac{e_j}{c}\int_0^1(\widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j - \theta(x^j - y^j), X - \theta(X-Y)) - \widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j, X))d\theta\\
&+ \frac{e_j}{c}\sum_{l=1}^3(x_l^j - y_l^j)\int_0^1(1-\theta)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i}(x^j - \theta(x^j - y^j), X - \theta(X-Y))d\theta\\
&- \rho\int_0^1(1-\theta)\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x_i^j}(x - \theta(x-y))d\theta. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Definimos

$$
\begin{aligned}
q^j_{1,i}(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= \frac{e_j}{\rho c}\int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j-\theta\sqrt{\rho}y^j, X-\theta\sqrt{\rho}Y) - \widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j,X) + \frac{\sqrt{\rho}}{2}\sum_{m=1}^{3+4N_3}\widetilde{Y}^j_m \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial \widetilde{X}^j_m}(x^j,X)d\theta \\
&\quad + \frac{e_j\sqrt{\rho}}{c\rho}\sum_{l=1}^{3} y^j_l \int_0^1 (1-\theta)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i}(x^j-\theta\sqrt{\rho}y^j, X-\theta\sqrt{\rho}Y) - \frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i}(x^j,X)d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (1-\theta)\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x^j_i}(x-\theta\sqrt{\rho}y)d\theta \\
&= \frac{e_j}{\rho c}\int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j-\theta\sqrt{\rho}y^j, X-\theta\sqrt{\rho}Y) - \widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j,X) + \theta\sqrt{\rho}\sum_{m=1}^{3+4N_3}\widetilde{Y}^j_m \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial \widetilde{X}^j_m}(x^j,X)d\theta \\
&\quad + \frac{e_j\sqrt{\rho}}{c\rho}\sum_{l=1}^{3} y^j_l \int_0^1 (1-\theta)\left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i}(x^j-\theta\sqrt{\rho}y^j, X-\theta\sqrt{\rho}Y) - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i}(x^j,X)\right)d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (1-\theta)\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x^j_i}(x-\theta\sqrt{\rho}y)d\theta, \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

con $\widetilde{X}^j = (x^j, X)$ entonces usando la expansión de Taylor (1.13) tenemos que

$$
\begin{aligned}
q^j_{1,i}(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= \frac{e_j}{c}\int_0^1 \sum_{|\alpha|=2}\frac{D^\alpha \widetilde{\mathbf{A}}_i(x^j,X)}{\alpha!}\theta^2(\widetilde{Y}^j)^\alpha + h\left(\widetilde{X}^j, -\theta\sqrt{\rho}\widetilde{Y}^j\right)d\theta \\
&\quad + \frac{e_j}{c}\sum_{l=1}^{3} y^j_l \int_0^1 (1-\theta)\left(\sum_{m=1}^{3+4N_3}\frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial \widetilde{X}^j_m \partial x_i}(x^j,X)\theta\widetilde{Y}^j_m + f\left(\widetilde{X}^j, -\theta\sqrt{\rho}\widetilde{Y}^j\right)\right)d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (1-\theta)\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x^j_i}(x-\theta\sqrt{\rho}y)d\theta, \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

con h, f los residuos de la expansión. Se sigue de la forma integral de estos (1.14) y del lema 3.4 que existe $M_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\{q^j_{1,i}\}_{0\leq\rho\leq T} \subset \mathcal{A}^{M_1}(\mathbb{R}^{6n+4N_3})$ es acotado y notamos que

$$
\begin{aligned}
\partial_{x^j_i} S - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}_i &= \frac{m_j(x^j_i - y^j_i)}{\rho} - \frac{e_j}{2c}\sum_{m=1}^{3}(x^j_m - y^j_m)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial x^j_m}(x^j,X) - \frac{e_j}{2c}\sum_{m=1}^{4N_3}(X_m - Y_m)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial X_m}(x^j,X) \\
&\quad + \frac{e_j}{2c}\sum_{l=1}^{3}(x^j_l - y^j_l)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i}(x^j,X) + \rho q^j_{1,i}\left(t,s,\widetilde{X},\frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right). \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Similarmente, existe una familia $\{q_{2,i}\}_{0\leq\rho\leq T} \subset \mathcal{A}^{M_2}(\mathbb{R}^{6n+4N_3})$ acotada tal que

$$
\begin{aligned}
\partial_{X_i} S &= \frac{(X_i - Y_i)}{|V|\rho} + \frac{e_j}{c}\sum_{l=1}^{3}(x^j_l - y^j_l)\int_0^1 (1-\theta)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial X_i}(x^j - \theta(x^j - y^j), X - \theta(X-Y)) \\
&\quad - \rho\int_0^1 (1-\theta)\frac{\partial V_{\Lambda_1}}{\partial x^j_i}(x - \theta(x-y))d\theta \qquad (4.13) \\
&= \frac{(X_i - Y_i)}{|V|\rho} + \frac{1}{2c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{3} e_j(x^j_l - y^j_l)\frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial X_i}(x^j,X) + \rho q_{2,i}\left(t,s,\widetilde{X},\frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right) \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2m_j}\left\|\partial_{x^j}S-\frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}(x^j,X)\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2m_j}&\left(\frac{m_j^2\|x^j-y^j\|^2}{\rho^2}+\frac{e_j^2}{4c^2}\left\|\sum_{m=1}^{3}(x_m^j-y_m^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}}{\partial x_m^j}(x^j,X)\right\|^2\right.\\
&+\frac{e_j^2}{4c^2}\left\|\sum_{m=1}^{4N_3}(X_m-Y_m)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}}{\partial X_m}(x^j,X)\right\|^2+\frac{e_j^2}{4c^2}\left\|\sum_{l=1}^{3}(x_l^j-y_l^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x^j}(x^j,X)\right\|^2\\
&+\rho^2\left\|q_1^j\left(t,s,\widetilde{X},\frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right)\right\|^2-\frac{2m_je_j}{2\rho c}\sum_{m,i}(x_i^j-y_i^j)(x_m^j-y_m^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial x_m^j}(x^j,X)\\
&-\frac{2m_je_j}{2\rho c}\sum_{m,i}(x_i^j-y_i^j)(X_m-Y_m)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial X_m}(x^j,X)\\
&+\frac{2m_je_j}{2\rho c}\sum_{l,i}(x_i^j-y_i^j)(x_l^j-y_l^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i^j}(x^j,X)+2m_j(x^j-y^j)\cdot q_1^j\left(t,s,\widetilde{X},\frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right)\\
&+\frac{2e_j^2}{4c^2}\sum_{m_1,m_2,i}(x_{m_1}^j-y_{m_1}^j)(X_{m_2}-Y_{m_2})\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial x_{m_1}^j}(x^j,X)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial X_{m_2}}(x^j,X)\\
&-\frac{2e_j^2}{4c^2}\sum_{m,l,i}(x_m^j-y_m^j)(x_l^j-y_l^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial x_m^j}(x^j,X)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i^j}(x^j,X)\\
&-\frac{2\rho e_j}{2c}\sum_{m,i}(x_m^j-y_m^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}}{\partial x_m^j}(x^j,X)\cdot q_1^j\left(t,s,\widetilde{X},\frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right)\\
&-\frac{2e_j^2}{4c^2}\sum_{m,l,i}(X_{m_2}-Y_{m_2})(x_l^j-y_l^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial X_m}(x^j,X)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i^j}(x^j,X)\\
&-\frac{2\rho e_j}{2c}\sum_{m}(X_m-Y_m)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}}{\partial X_m}(x^j,X)\cdot q_1^j\left(t,s,\widetilde{X},\frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right)\\
&\left.+\frac{2\rho e_j}{2c}\sum_{m,i}(x_l^j-y_l^j)\frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x^j}(x^j,X)\cdot q_1^j\left(t,s,\widetilde{X},\frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j \|x^j - y^j\|^2}{2\rho^2} + \frac{e_j^2}{8m_jc^2} \left\| \sum_{m=1}^{3} (x_m^j - y_m^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial x_m^j}(x^j, X) \right\|^2 \\
&+ \frac{e_j^2}{8m_jc^2} \left\| \sum_{m=1}^{4N_3} (X_m - Y_m) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial X_m}(x^j, X) \right\|^2 + \frac{e_j^2}{8m_jc^2} \left\| \sum_{l=1}^{3} (x_l^j - y_l^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x^j}(x^j, X) \right\|^2 \\
&+ \frac{\rho^2}{2m_j} \left\| q_1^j \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right) \right\|^2 - \frac{e_j}{2\rho c} \sum_{m,i} (x_i^j - y_i^j)(X_m - Y_m) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial X_m}(x^j, X) \\
&+ (x^j - y^j) \cdot q_1^j \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right) \\
&+ \frac{2e_j^2}{8m_jc^2} \sum_{m_1, m_2, i} (x_{m_1}^j - y_{m_1}^j)(X_{m_2} - Y_{m_2}) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial x_{m_1}^j}(x^j, X) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial X_{m_2}}(x^j, X) \\
&- \frac{2e_j^2}{8m_jc^2} \sum_{m,l,i} (x_m^j - y_m^j)(x_l^j - y_l^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial x_m^j}(x^j, X) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i^j}(x^j, X) \\
&- \frac{\rho e_j}{2m_jc} \sum_{m,i} (x_m^j - y_m^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial x_m^j}(x^j, X) \cdot q_1^j \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right) \\
&- \frac{e_j^2}{4m_jc^2} \sum_{m,l,i} (X_{m_2} - Y_{m_2})(x_l^j - y_l^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_i}{\partial X_m}(x^j, X) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x_i^j}(x^j, X) \\
&- \frac{\rho e_j}{2m_jc} \sum_{m} (X_m - Y_m) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial X_m}(x^j, X) \cdot q_1^j \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right) \\
&+ \frac{\rho e_j}{2m_jc} \sum_{m,i} (x_l^j - y_l^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial x^j}(x^j, X) \cdot q_1^j \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right), \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

y también

$$
\begin{aligned}
\frac{|V|}{2} \|\partial_X S\|^2 &= \frac{\|X - Y\|^2}{2|V|\rho^2} + \frac{|V|}{8c^2} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{3} e_j (x_l^j - y_l^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial X_i}(x^j, X) \right\|^2 + \frac{|V|\rho^2}{2} \left\| q_2 \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right) \right\|^2 \\
&+ \frac{1}{2\rho c} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{3} \sum_{i=1}^{4N_3} e_j (X_i - Y_i)(x_l^j - y_l^j) \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}_l}{\partial X_i}(x^j, X) + (X - Y) \cdot q_2 \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right). \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Entonces cancelando, factorizando y re-definiendo, es posible encontrar una familia $\{q_3\}_{0 \leq \rho \leq T} \subset \mathcal{A}^{M_3}(\mathbb{R}^{6n+4N_3})$ acotada tal que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2m_j} \left\| \partial_{x^j} S - \frac{e_j}{c} \widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X) \right\|^2 + \frac{|V|}{2} \|\partial_X S\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j \|x^j - y^j\|^2}{2\rho^2} + \frac{\|X - Y\|^2}{2|V|\rho^2} \\
&+ \sqrt{\rho} q_3 \left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X} - \widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} \right) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Y como se acaba de argumentar, usando la expansión de Taylor podemos encontrar $\{q_4\}_{0 \leq \rho \leq T} \subset$

$\mathcal{A}^{M_4}(\mathbb{R}^{6n+4N_3})$ acotado tal que

$$\partial_t S = \frac{-1}{2\rho^2}\sum_{j=1}^{n} m_j||x^j - y^j||^2 - \int_0^1 V_{\Lambda_1}(x - \theta(x-y))d\theta + \frac{-||X-Y||^2}{2|V|\rho^2}$$
$$- \int_0^1 V_{\Lambda_3}(X - \theta(X-Y))d\theta \tag{4.18}$$
$$= \frac{-1}{2\rho^2}\sum_{j=1}^{n} m_j||x^j - y^j||^2 - \frac{||X-Y||^2}{2|V|\rho^2} - V_{\Lambda_1}(x) - V_{\Lambda_3}(X) + \sqrt{\rho}q_4\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right), \tag{4.19}$$

por lo tanto, reemplazando en (4.7), obtenemos

$$r_1(t, s, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \sqrt{\rho}\left(r_3\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right) + r_4\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right)\right) \tag{4.20}$$
$$= \sqrt{\rho}r_5\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right). \tag{4.21}$$

También tenemos que

$$\frac{1}{m_j}\Delta_{x^j}S = \frac{3}{\rho} - \frac{e_j}{2cm_j}\partial_{x^j}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X) + \frac{e_j}{2cm_j}\sum_{m,i=1}^{3}(x_m^j - y_m^j)\frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{A}}}{\partial x_i\partial x_m}(x^j, X)$$
$$- \frac{e_j}{2cm_j}\sum_{m=1}^{4N_3}\sum_{i=1}^{3}(X_m - Y_m)\frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{A}}}{\partial x_i\partial X_m}(x^j, X) + \frac{e_j}{2cm_j}\partial_{x^j}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X)$$
$$+ \frac{e_j}{2cm_j}\sum_{l=1}^{3}(x_l^j - y_l^j)\Delta_{x^j}\widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X) + \frac{e_j}{cm_j}\partial_{x^j}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X)$$
$$+ \rho\partial_{x^j}\cdot q_1^j\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{4.22}$$
$$:= \frac{3}{\rho} + \sqrt{\rho}q_6^j\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right) + \frac{e_j}{cm_j}\partial_{x^j}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(x^j, X), \tag{4.23}$$

y que

$$|V|\Delta_X S = \frac{4N_3}{\rho} + \frac{|V|}{2c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{3} e_j(x_l^j - y_l^j)\Delta_X\widetilde{\mathbf{A}}_l(x^j, X) + |V|\rho\partial_X\cdot q_2\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{4.24}$$
$$:= \frac{4N_3}{\rho} + \sqrt{\rho}q_7\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right), \tag{4.25}$$

reemplazando (4.8), obtenemos

$$r_2(t, s, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \sqrt{\rho}\left(q_6\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}} + q_7\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right)\right)\right) \tag{4.26}$$
$$= \sqrt{\rho}q_8\left(t, s, \widetilde{X}, \frac{\widetilde{X}-\widetilde{Y}}{\sqrt{\rho}}\right), \tag{4.27}$$

y de esto se sigue la primera parte del problema. Similarmente, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial s}C(t,s)f - C(t,s)Hf = -\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t-s)}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3/2}\int e^{i\hbar^{-1}S} \\
\times\left(r_1'(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) + \frac{i\hbar}{2}r_2'(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y})\right)f(\widetilde{Y})d\widetilde{Y},
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

con

$$
r_1'(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \partial_s S - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2m_j}\left\|\partial_{y^j}S + \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}\right\|^2 - V_{\Lambda_1}(y) - V_{\Lambda_3}(Y) - \frac{|V|}{2}\|\partial_Y S\|^2 \tag{4.29}
$$

$$
r_2'(t,s,\widetilde{X},\widetilde{Y}) := -\frac{3n+4N_3}{t-s} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{m_j}\Delta_y^j S + \frac{e_j}{cm_j}\partial_{y^j}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}\right) + |V|\Delta_X S, \tag{4.30}
$$

y de la misma manera demostramos la segunda parte. □

Ahora Notamos que para $f \in \mathcal{S}$ y $\widetilde{X} \in \mathbb{R}^{3n+4N_3}$, del teorema anterior, usando (4.1,4.2) se cumple que

$$
i\hbar\left(C(t_2,s) - C(t_1,s)\right)f(\widetilde{X}) = \int_{t_1}^{t_2}\left(HC(\theta,s)f(\widetilde{X}) + \sqrt{\theta - s}R(\theta,s)f(\widetilde{X})\right)d\theta \tag{4.31}
$$

$$
i\hbar\left(C(t,s_2) - C(t,s_1)\right)f(\widetilde{X}) = \int_{s_1}^{s_2}\left(C(t,\theta)Hf(\widetilde{X}) + \sqrt{t-\theta}R(t,\theta)f(\widetilde{X})\right)d\theta, \tag{4.32}
$$

lo que nos da la siguiente representación formal

$$
i\hbar\left(C(t_2,s) - C(t_1,s)\right)f = \int_{t_1}^{t_2}\left(HC(\theta,s)f + \sqrt{\theta - s}R(\theta,s)f\right)d\theta \tag{4.33}
$$

$$
i\hbar\left(C(t,s_2) - C(t,s_1)\right)f = \int_{s_1}^{s_2}\left(C(t,\theta)Hf + \sqrt{t-\theta}R(t,\theta)f\right)d\theta \tag{4.34}
$$

Sin embargo a continuación veremos que se le puede dar sentido riguroso a estas expresión como una integral de Riemann para funciones valuadas en espacios de Banach (ver apéndice C). Entonces se sigue de los corolarios 3.10.2, 3.10.3 que estas integrales están bien definidas como integrales de Riemann en los espacios de Banach $B^{a+M}, B^{a+M'}$, con $M, M' \in \mathbb{N}_0$ dados por el teorema anterior. Esta representación será de gran utilidad cuando se demuestre la convergencia de la integral de trayectoria en el capítulo que sigue.

5. Construcción de la Integral de Trayectoria y su Convergencia

El operador fundamental nos deja definir la integral de trayectoria para el conjunto de segmentos de recta parametrizados en $[0,T]$. Puesto que lo que se desea obtener es una integral sobre el espacio de trayectorias definidas en este intervalo, podemos primero extender la definición a un espacio de trayectorias poligonales y, recordando que toda curva continua y compacta se puede aproximar uniformemente por poligonales, en el límite esperaríamos obtener una integral sobre el espacio de trayectorias continuas. Sin embargo es importante mencionar que esta motivación es heurística puesto que la integral completa sobre el espacio de trayectorias solo se va a poder ver a través de este límite. Esto es se demostrará que en el límite obtenemos la solución a tiempo T de la ecuación de Schrödinger dado un perfil inicial $f \in B^a$.

5.1. La Integral sobre Trayectorias Poligonales

Dada una partición $\Delta_\nu = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, t_\nu = T\}$ del intervalo $[0,T]$ con $t_i < t_{i+1}$ y $|\Delta_\nu| = \max_{1\le i\le \nu}(t_i - t_{i-1})$, tomamos $\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_\nu$ arbitrarios y definimos $\gamma_{\Delta_\nu,i} : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^{3n+4N_3}$ como

$$\gamma_{\Delta_\nu,i}(\theta) = \widetilde{X}_{i+1} - \frac{t_{i+1}-\theta}{t_{i+1}-t_i}\left(\widetilde{X}_{i+1} - \widetilde{X}_i\right), \tag{5.1}$$

y tomamos

$$\gamma_{\Delta_\nu} := \bigcup_{i=0}^{\nu-1} \gamma_{\Delta_\nu,i}. \tag{5.2}$$

Entonces de (2.52), notamos que

$$S(\gamma_{\Delta_\nu}) = \int_0^T \widetilde{\mathcal{L}} \circ \gamma_{\Delta_\nu}(\theta)d\theta = \sum_{i=0}^{\nu-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \widetilde{\mathcal{L}} \circ \gamma_{\Delta_\nu,i}(\theta)d\theta. \tag{5.3}$$

Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ definimos

$$\begin{aligned}
C_{\Delta_\nu}(T,0) &:= \left\{\prod_{i=0}^{\nu-1}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t_{i+1}-t_i)}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t_{i+1}-t_i)}\right)^{4N_3/2}\right\} \\
&\quad \times \mathrm{Os}\int \dots \mathrm{Os}\int \exp(i\hbar^{-1}S(\gamma_{\Delta_\nu}))f(\widetilde{X}_0)d\widetilde{X}_0\dots d\widetilde{X}_{\nu-1} \qquad (5.4)\\
&= \left\{\prod_{i=0}^{\nu-1}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t_{i+1}-t_i)}\right)^{3/2}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t_{i+1}-t_i)}\right)^{4N_3/2}\right\} \\
&\quad \times \mathrm{Os}\int \exp(i\hbar^{-1}S(\gamma_{\Delta_\nu,\nu-1}))\mathrm{Os}\int \dots \mathrm{Os}\int \exp(i\hbar^{-1}S(\gamma_{\Delta_\nu,1})) \\
&\quad \times \mathrm{Os}\int \exp(i\hbar^{-1}S(\gamma_{\Delta_\nu,0}))f(\widetilde{X}_0)d\widetilde{X}_0\dots d\widetilde{X}_{\nu-1} \qquad (5.5)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} C(T,t_{\nu-1})\chi_\epsilon C(t_{\nu-1},t_{\nu-2})\chi_\epsilon \dots C(t_2,t_1)\chi_\epsilon C(t_1,0)\chi_\epsilon f \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Tomando χ_ϵ como en la definición 2.2. Tomando $\rho*$ del teorema 3.10 y de 2.23, podemos extender a este operador a B^a si tomamos $|\Delta_\nu| \le \rho^*$. Por las propiedades de esta familia es claro que se cumple

$$\sup_{0\leq\epsilon\leq 1}\|\chi_\epsilon f\|_{B^a}\leq C\|f\|_{B^a} \tag{5.7}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|(\chi_\epsilon-1)f\|_{B^a}=0, \tag{5.8}$$

entonces como el operador fundamental es acotado en B^a se sigue que

$$\begin{aligned}\|C(T,t_{\nu-1})\chi_\epsilon C(t_{\nu-1},t_{\nu-2})\chi_\epsilon\dots C(t_2,t_1)\chi_\epsilon C(t_1,0)\chi_\epsilon f-C(T,t_{\nu-1})\dots C(t_1,0)f\|_{B^a}=\\ \left\|\sum_{i=0}^{\nu-1}C(T,t_{\nu-1})\chi_\epsilon\dots C(t_{i+2},t_{i+1})(\chi_\epsilon-1)C(t_{i+1},t_i)\dots C(t_1,t_0)f\right\|_{B^a}\leq\\ \sum_{i=0}^{\nu-1}C^*\|(\chi_\epsilon-1)C(t_{i+1},t_i)\dots C(t_1,t_0)f\|_{B^a},\end{aligned}$$

con C^* independiente de ϵ por (5.7). Entonces de (5.8) se sigue que

$$C_{\Delta_\nu}(T,0)=C(T,t_{\nu-1})C(t_{\nu-1},t_{\nu-2})\dots C(t_2,t_1)C(t_1,0). \tag{5.9}$$

Si tomamos $0\leq s\leq t\leq T$, dada una partición $|\Delta_\nu|\leq\rho^*$ podemos encontrar j y l tal que $j\leq l$, $t_{j-1}\leq s\leq t_j$ y $t_{l-1}\leq t\leq t_l$. Entonces definimos en B^a

$$C_{\Delta_\nu}(t,s):=C(t,t_{l-1})C(t_{l-1},t_{l-2})\dots C(t_{j+1},t_j)C(t_j,s), \tag{5.10}$$

y del teorema 3.10 se sigue que

$$\|C_{\Delta_\nu}(t,s)f\|_{B^a}\leq e^{K_a(t-s)}\|f\|_{B^a}. \tag{5.11}$$

Proposición 5.1. *Sea Δ_ν una partición de $[0,T]$ tal que $|\Delta_\nu|\leq\rho^*$. Entonces existe un $M\geq 2$ tal que*

$$\|C_{\Delta_\nu}(t,s)f-C_{\Delta_\nu}(t',s')f\|_{B^a}\leq C_a(|t-t'|+|s-s'|)\|f\|_{B^{a+M}} \tag{5.12}$$

para $0\leq s\leq t\leq, 0\leq s'\leq t'\leq T$ y $a=0,1,2,\dots$

Demostración. Tomamos M como el máximo entre 2,m_r y $m_{r'}$ dados por el teorema 4.1. Consideramos primero el caso $s=s'$. Sin perdida de generalidad supongamos que $t'<t$. Sea $t_j\leq t\leq t_{j+1}$ y $t_k\leq t'\leq t_{k+1}$. Si suponemos que $j=k$ y $s\leq t_j$ entonces tenemos de la representación dada por la ecuación (4.33) como una integral sobre espacios de Banach (C) que para $f\in B^{a+M}$ se cumple que

$$\begin{aligned}i\hbar\left(C_{\Delta_\nu}(t,s)-C_{\Delta_\nu}(t',s')\right)f&=i\hbar\left(C(t,t_j)-C(t',t_j)\right)C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f\\&=\int_{t'}^{t}\left(HC(\theta,t_j)+\sqrt{\theta-t_j}R(\theta,t_j)\right)C_{\Delta_\nu}(t_j,s)fd\theta\\&=\int_{t'}^{t}\left(HC_{\Delta_\nu}(\theta,s)f+\sqrt{\theta-t_j}R(\theta,t_j)C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f\right)d\theta,\end{aligned} \tag{5.13}$$

entonces usando el inciso 5 de C.3 y los corolarios 3.10.2, 3.10.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\|i\hbar\left(C_{\Delta_\nu}(t,s)-C_{\Delta_\nu}(t',s')\right)f\|_{B^a}&\leq\int_{t'}^{t}\|HC_{\Delta_\nu}(\theta,s)f\|_{B^a}d\theta+\int_{t'}^{t}\sqrt{\Delta_\nu}\|R(\theta,t_j)C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f\|_{B^a}d\theta\\&=\int_{t'}^{t}Ce^{K_aT}\|f\|_{B^{a+M}}d\theta+\int_{t'}^{t}\sqrt{\Delta_\nu}C'\|C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f\|_{B^{a+M}}d\theta\\&=C^*(t-t')e^{K_{a+M}T}(1+\sqrt{\rho^*})\|f\|_{B^{a+M}},\end{aligned} \tag{5.14}$$

por lo que el teorema se cumple en este caso. Si $s > t_j$

$$\begin{aligned} i\hbar\left(C_{\Delta_\nu}(t,s) - C_{\Delta_\nu}(t',s')\right) f &= i\hbar\left(C(t,s) - C(t',s)\right) f \\ &= \int_{t'}^{t} \left(HC(\theta,s)f + \sqrt{\theta - t_j}R(\theta,t_j)C(t_j,s)f\right) d\theta, \end{aligned} \tag{5.15}$$

y obtenemos de la misma forma una desigualdad como la de 5.14. Si suponemos que $j > k$ y $s \leq t_k$, como se cumple que

$$\begin{aligned} C_{\Delta_\nu}(t,s) - C(t',s')_{\Delta_\nu} f &= \left(C_{\Delta_\nu}(t,s) - C_{\Delta_\nu}(t_j,s)\right) f + \sum_{l=1}^{j-k-1} (C_{\Delta_\nu}(t_{j-l+1},s) - C_{\Delta_\nu}(t_{j-l},s))f \\ &+ \left(C_{\Delta_\nu}(t_{k+1},s) - C_{\Delta_\nu}(t',s)\right) f \\ &= \left(C(t,t_j) - C(t_j,t_j)\right) C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f \\ &+ \sum_{l=1}^{j-k-1} (C(t_{j-l+1},t_{j-1}) - C(t_{j-l},t_{j-l}))C_{\Delta_\nu}(t_{j-1},s)f \\ &+ \left(C(t_{k+1},t_k) - C(t',t_k)\right) C_{\Delta_\nu}(t_k,s)f \\ &= \int_{t_j}^{t} \left(HC_{\Delta_\nu}(\theta,s)f + \sqrt{\theta - t_j}R(\theta,t_j)C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f\right) d\theta \\ &+ \sum_{l=1}^{j-k-1} \int_{t_j-l}^{t-j+1} \left(HC_{\Delta_\nu}(\theta,s)f + \sqrt{\theta - t_{j-l}}R(\theta,t_{j-l})C_{\Delta_\nu}(t_{j-l},s)f\right) d\theta \\ &+ \int_{t'}^{t_k+1} \left(HC_{\Delta_\nu}(\theta,s)f + \sqrt{\theta - t_k}R(\theta,t_k)C_{\Delta_\nu}(t_k,s)f\right) d\theta \\ &= \int_{t'}^{t} HC_{\Delta_\nu}(\theta,s)f d\theta + \int_{t_j}^{t} \sqrt{\theta - t_j}R(\theta,t_j)C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f d\theta \\ &+ \sum_{l=1}^{j-k-1} \int_{t_j-l}^{t-j+1} \sqrt{\theta - t_{j-l}}R(\theta,t_{j-l})C_{\Delta_\nu}(t_{j-l},s)f d\theta \\ &+ \int_{t'}^{t_k+1} \sqrt{\theta - t_k}R(\theta,t_k)C_{\Delta_\nu}(t_k,s)f d\theta \end{aligned} \tag{5.16}$$

entonces de la misma forma se cumple el teorema en este caso. Ahora si $s > t_k$ tenemos que

$$\begin{aligned} C_{\Delta_\nu}(t,s) - C(t',s')_{\Delta_\nu} f &= \left(C_{\Delta_\nu}(t,s) - C_{\Delta_\nu}(t_j,s)\right) f + \sum_{l=1}^{j-k-1} (C_{\Delta_\nu}(t_{j-l+1},s) - C_{\Delta_\nu}(t_{j-l},s))f \\ &+ \left(C_{\Delta_\nu}(t_{k+1},s) - C_{\Delta_\nu}(t',s)\right) f \\ &= \left(C(t,t_j) - C(t_j,t_j)\right) C_{\Delta_\nu}(t_j,s)f \\ &+ \sum_{l=1}^{j-k-1} (C(t_{j-l+1},t_{j-1}) - C(t_{j-l},t_{j-l}))C_{\Delta_\nu}(t_{j-1},s)f \\ &+ \left(C_{\Delta_\nu}(t_{k+1},t') - C_{\Delta_\nu}(t',t')\right) C(t',s)f \end{aligned}$$

y se procede como en el caso anterior. Ahora si suponemos que $t' = t$ el procedimiento es completamente análogo pero usando (4.34). Entonces para el caso general

$$\begin{aligned}\|C_{\Delta_\nu}(t,s)f - C_{\Delta_\nu}(t',s')f\|_{B^a} &\le \|C_{\Delta_\nu}(t,s)f - C_{\Delta_\nu}(t,s')f\|_{B^a} + \|C_{\Delta_\nu}(t,s')f - C_{\Delta_\nu}(t',s')f\|_{B^a} \\ &\le C_a(|t-t'| + |s-s'|)\|f\|_{B^{a+M}}\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

5.2. Convergencia de la Integral de Trayectoria

Se tienen todas las construcciones y los teoremas básicos para definir la integral de trayectoria y ver que cumple la ecuación de Shrödinger. Antes demostraremos unos lemas que permitirán establecer la unicidad de soluciones de la ecuación de Schrödinger (2.164). Para esto se va a usar una generalización de la derivada en espacios de Banach, llamada la derivada de Frechet. Para no perder el enfoque del texto referimos al lector interesado a revisar la definición como sus propiedades en [53] (Cap. 1.B). Brevemente mencionamos que la derivada de Frechet se generaliza de la definición de la derivada usual *mutatis mutandis* como la mejor aproximación lineal de una función en un punto. Las propiedades también son análogas y se cumple que es lineal y la regla de la cadena. La regla del producto se puede generalizar en espacios de Hilbert:

Lema 5.2. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ su producto interno, entonces este es diferenciable en el sentido de Frechet y*

$$D_{(x,y)}(\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}} = (\cdot, y)_{\mathscr{H}} + (x,\cdot)_{\mathscr{H}} \tag{5.17}$$

Demostración. Puesto que

$$|(x+h_1, y+h_2)_{\mathscr{H}} - (x,y)_{\mathscr{H}} - (h_1,y)_{\mathscr{H}} - (x,h_2)_{\mathscr{H}}| = |(h_1,h_2)_{\mathscr{H}}|$$

Se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz □

Lema 5.3. *Sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \ge 2$ y H como en la definición (2.24), entonces para toda $f \in B^a(\mathbb{R}^N)$ se tiene que*

$$(Hf, f)_{L^2} \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$

Demostración. Primero notamos que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible y $gf \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(gf, f)_{L^2} = \int \overline{gf}(x)f(x)dx = \int g(x)|f(x)|^2 dx \in \mathbb{R} \tag{5.19}$$

entonces se cumple para los términos del Hamiltoniano que son operadores de multiplicación pues son funciones reales. También si α es un multi-índice tal que $|\alpha|$ es par entonces

$$(D^\alpha f, f)_{L^2} = ((ix)^\alpha \mathcal{F}f, \mathcal{F}f)_{L^2}, \tag{5.20}$$

que es real por lo ya argumentado, por lo tanto los términos que dependen de segundas derivadas es real. Y de la misma manera se puede demostrar para los términos de la forma iD^α con $|\alpha|$ impar. □

Proposición 5.4. *Sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \ge 2$, $0 \ge t < T$ y $u, u' : [t_0, T] \to B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ funciones continuas que son fuertemente diferenciables en $B^{a-2}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$, cumplen que $u(t_0) = u'(t_0)$ y ambas satisfacen la ecuación de Schrödinger (2.164), entonces $u(t) = u'(t)$ para todo $t \in [t_0, T]$*

Demostración. Tomamos $u'' := u - u'$. Por el lema 5.2, podemos usar la regla de la cadena y tenemos que

$$\frac{d}{dt}(u''(t), u''(t))_{L^2} = 2Re\left(\left(\frac{du''}{dt}(t), u''(t)\right)_{L^2}\right) = -2\hbar^{-1}Re\left(i(Hu''(t), u''(t))_{L^2}\right),$$

y por el lema 5.3 $(Hu''(t), u''(t))_{L^2}$ es real y entonces

$$\frac{d}{dt}(u''(t), u''(t))_{L^2} = 0,$$

entonces al ser constante y como $u''(t_0) = 0$ tenemos que $(u''(t), u''(t))_{L^2} = 0$ para toda t entonces $u' = u$. $\square$

Lema 5.5. *(Criterio de Rellich) Sean $F, G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles y no negativas casi donde sea tales que $F(x), G(x) \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, entonces*

$$B_{F,G} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid \int |f(x)|^2 dx \leq 1, \int F(x)|f(x)|^2 dx \leq 1, \int G(x)|\mathcal{F}f(x)|^2 dx \leq 1 \right\}$$

Es un subconjunto compacto de $L^2(\mathbb{R}^N)$

Demostración. Esta demostración dependerá fuertemente del criterio de compacidad de Kolmogorov-Riesz, cuya demostración esta dada en el apéndice D. Se va a usar para demostrar que el conjunto es totalmente acotado. Entonces si también se demuestra que es un conjunto cerrado (puesto que L^2 es completo) se sigue de la caracterización clásica de conjuntos compactos para espacios métricos (ver 1.5). Demostraremos por lo tanto que $B_{F,G}$ es acotado y que cumple D.1, D.2. Para demostrar que es cerrado, sea $\{f_n\} \subset B_{F,G}$ una sucesión convergente que converge a $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Como converge en L^2 existe una sub-sucesión f_{n_k} que converge a f casi donde sea, entonces se sigue del lema de Fatou que

$$\int F(x)|f(x)|^2 dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int F(x)|f_{n_k}(x)|^2 dx \leq 1,$$

como la transformada de Fourier es continua en L^2 se tiene que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f_n = \mathcal{F}f$, entonces de la misma manera se puede demostrar que $\int G(x)|\mathcal{F}f(x)|^2 dx \leq 1$. Por lo tanto $f \in B_{F,G}$ y este es cerrado. Es claro que el conjunto es acotado, para la condición D.1, procedemos por contradicción. Por lo tanto supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $f_{n_k} \in B_{F,B}$ tal que

$$\int_{\|x\| \geq n} |f_{n_k}(x)|^2 dx \geq \epsilon^2,$$

sea $K \in \mathbb{N}$ tal que $K\epsilon^2 > 1$, por hipótesis existe $N_K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $\|x\| \geq N_K$ se tiene que $F(x) > K$, pero entonces

$$1 \geq \int F(x)|f_{n_{N_K}}(x)|^2 dx \geq \int_{\|x\| \geq N_K} F(x)|f_{n_{N_K}}(x)|^2 dx \geq \int_{\|x\| \geq N_K} K|f_{n_{N_K}}(x)|^2 dx \geq K\epsilon^2 > 1,$$

lo que es una contradicción. De la misma manera se puede demostrar para $\mathcal{F}f$, tomando G en lugar de F. Para la condición D.2, usando la propiedad de traslación de la transformada de Fourier (1.71) se tiene que

$$\begin{aligned}\int |f(x+y)-f(x)|^2 dx &= \int \left|e^{ix\cdot y}-1\right|^2 |\mathcal{F}f(x)|^2 dx\\ &\leq \int_{\|x\|<\delta} \left|e^{ix\cdot y}-1\right|^2 |\mathcal{F}f(x)|^2 dx + \int_{\|x\|\geq\delta} \left|e^{ix\cdot y}-1\right|^2 |\mathcal{F}f(x)|^2 dx\\ &\leq \sup_{\|x\|<\delta} \left|e^{ix\cdot y}-1\right|^2 \int_{\|x\|<\delta} |\mathcal{F}f(x)|^2 dx + 4\int_{\|x\|\geq\delta} |\mathcal{F}f(x)|^2 dx\\ &\leq \delta^2\|y\|^2 + 4\int_{\|x\|\geq\delta} |\mathcal{F}f(x)|^2 dx,\end{aligned}$$

como $\mathcal{F}f$ cumple la condición D.1 por lo que acabamos de argumentar, podemos tomar δ suficientemente grande e independiente de f tal que la integral de la derecha es menor a $\epsilon/2$, y ya con δ fija tomamos ρ suficientemente pequeño tal que si $\|y\| < \rho$ el primer término es menor a $\epsilon/2$, de lo que se sigue la última condición y el lema. $\square$

Teorema 5.6. *Sea $f \in B^a$, $T \in (0,\infty)$ y $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ entonces el límite de $C_\Delta(t,t_0)f$ definido por (5.10) cuando $|\Delta| \to 0$ (en el sentido de redes) existe el cuál llamamos la integral de trayectoria $u : [0,t] \times \mathbb{R}^{3n+4N_3} \to \mathbb{C}$*

$$u = \lim_{|\Delta|\to 0} C_{\Delta_\nu}(t,t_0)f, \tag{5.21}$$

que es fuertemente continua en B^a y si $a \geq 2$ es fuertemente continuamente diferenciable tal que esta satisface

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u(t) = Hu(t) \tag{5.22}$$

con $u(t_0) = f$

Demostración. Ahora notamos que por el lema 5.5, la bola unitaria en B^M es compacta como subconjunto de L^2, por lo que el encaje $B^M \hookrightarrow L^2$ es compacto. Y usando el Teorema 3.6 y el lema 3.9 se sigue que el encaje $B^{a+2M} \hookrightarrow B^{a+M}$ también lo es. Ahora, sea $\{\Delta_k\}_{k=0}^\infty$ una familia de particiones de $[0,T]$, tal que para toda $k, |\Delta_k| \leq \rho^*$ y $\lim_{k\to\infty}|\Delta_k| = 0$. Sea $f \in B^{a+2M}$ entonces si tomamos $\{C_{\Delta_k}(t,t_0)f\}_{k=0}^\infty \subset C\left([t_0,t], B_\hbar^{a+M}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})\right)$ se sigue de la proposición 5.1 que este conjunto es equicontinuo. De la desigualdad (5.11) también vemos que el conjunto es uniformemente acotado como funciones valuadas en B^{a+2M}, y como el encaje en B^{a+M} es compacto, se sigue que el conjunto original al menos es puntualmente, relativamente compacto. Esto significa que podemos usar el teorema de Arzela-Ascoli para encontrar una subsucesión $\{C_{\Delta_{k_j}}(t,t_0)f\}_{j=0}^\infty$ que converge uniformemente en $[t_0,T]$. Llamamos este límite $U(t,t_0)f$ Ahora como el límite de las particiones tiende a 0, para $t > t_0$ existe j^* tal que para todo $j \geq j^*$ $|\Delta_{k_j}| \leq \rho^*$, por lo que tenemos que

$$i\hbar\left(C_{\Delta_{k_j}}(t,t_0)f - f\right), \tag{5.23}$$

se puede representar como la ecuación (5.16), los últimos términos convergen a 0 porque están acotados uniformemente por algo de la forma $C\sqrt{|\Delta|_{k_j}}$, y por la convergencia uniforme podemos intercambiar el límite con la integral y tenemos que

$$i\hbar\left(U(t,t_0)f - f\right) = \int_{t_0}^t HU(\theta,t_0)fd\theta, \tag{5.24}$$

por lo que satisface la ecuación de Shrödinger como función continuamente diferenciable en B^a y continua en B^{a+M}. Ahora, notamos que para cualquier subsucesión de $\{C_{\Delta_k}(t,t_0)f\}_{k=0}^{\infty}$, si está converge tiene que converger a $U(t,t_0)f$ por el argumento de unicidad. Pero explotando Arzela-Ascoli, para cada subsucesión, podemos encontrar una sub-subseción que converge lo que es suficiente para ver que la sucesión converge original converge. Ahora si tomamos $f \in B^a$ arbitraria, se sigue de 2.23 que para $\epsilon > 0$ arbitrario existe $g \in B^{a+2M}$ tal que $\|g-f\|_{B^a} < \epsilon/(2e^{K_aT}$ entonces para particiones $|\Delta|, |\Delta'| \leq \rho^*$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|C_\Delta(t,t_0)f - C_{\Delta'}(t,t_0)f\|_{B^a} &\leq \|C_\Delta(t,t_0)(f-g)\|_{B^a} \\ &+ \|C_\Delta(t,t_0)g - C'_\Delta(t,t_0)g\|_{B^a} + \|C_{\Delta'}(t,t_0)(f-g)\|_{B^a} \\ &\leq \|C_\Delta(t,t_0)g - C'_\Delta(t,t_0)g\|_{B^a} + \epsilon,\end{aligned} \tag{5.25}$$

donde para la última desigualdad se usó (5.11). Por lo tanto

$$\lim_{\Delta,\Delta'\to 0} \|C_\Delta(t,t_0)f - C_{\Delta'}(t,t_0)f\|_{B^a} \leq \epsilon, \tag{5.26}$$

por lo que en este caso converge y llamemos el límite $W(t,t_0)f$. También se sigue de (5.11) que

$$\|W(t,t_0)f\|_{B^a} \leq e^{K_a(t-t_0)}\|f\|_{B^a}, \tag{5.27}$$

ahora si tomamos $a \geq 2$ y $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \subset B^{a+M}$ tal que $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ en B^a. Y como se argumentó para obtener (5.24) se cumple para toda j que

$$i\hbar\left(U(t,t_0)f_j - f_j\right) = \int_{t_0}^{t} HU(\theta,t_0)f_j d\theta, \tag{5.28}$$

como $a \geq 2$ entonces por la continuidad de los operadores en el límite se obtiene (5.24), tomando el límite en B^{a-2} de lo que se sigue la proposición. $\square$

Mencionamos que cuando impusimos (2.38) como constricción, redujimos los grados de libertad de la teoría que requerían de cuantización. Sin embargo, es posible re-formular la integral de trayectoria de tal forma que en esta los grados de libertad desaparezcan para obtener los mismos resultados. Para esto, consideramos un nuevo Lagrangiano empezando de (2.36) como

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}(x,\dot{x},\{a_{lk}\},\{\phi_{lk}\},\{\dot{a_{lk}}\}) &= \sum_{j=1} \frac{m_j}{2}|\dot{x}^j|^2 + \frac{1}{8\pi|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(|k|^2|\phi_k^i|^2 - 8\pi\phi(t)_k^i\rho_k^i(\vec{x})\right) + 16\pi^2\sum_{j=1}\frac{e_j^2}{|k|^2}\right) \\ &+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j\dot{x}^j\cdot\mathbf{A}(x^j,\{a_{\Lambda_2}\}) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\in\Lambda_3\\ i,l\in\{1,2\}}}\frac{|\dot{a}_{lk}^i|^2}{2|V|} - \frac{c^2|k|^2(a_{lk}^i)^2}{2|V|} + \frac{\hbar c|k|}{2}.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Ahora, para definir las trayectorias de tal forma que se cumplan las constricciones, tomamos $\vec{\xi_k} \in \mathbb{R}^2$ arbitrario para $k \in \Lambda_1'$,

$$\phi_{\vec{\xi}_k}^{t,s} := \vec{\xi_k} + \frac{4\pi\rho_k(\gamma_{x,y}^{t,s}(\theta))}{\|k\|^2}, \tag{5.30}$$

y usando (2.27) extendemos a $k \in \Lambda_1$. Y notamos que

$$\|k\|^2 \left\| \phi^{t,s}_{\vec{\xi}_k} \right\|^2 - 8\pi \rho_k(\gamma^{t,s}_{x,y}) = \|k\|^2 \|\xi\|^2_k - \frac{16\pi^2}{\|k\|^2} \left\| \rho_k(\gamma^{t,s}_{x.y}) \right\|^2, \tag{5.31}$$

entonces se sigue que podemos definir una acción nueva separando estos términos y usando (3.4) como

$$\widetilde{S}(\gamma^{t,s}_{x.y}, \phi^{t,s}_{\vec{\xi}_k}) = S(\gamma^{t,s}_{x.y}) + \frac{(t-s)}{4\pi|V|} \sum_{k \in \Lambda_1'} \|k\|^2 \left\| \vec{\xi}_k \right\|^2 \tag{5.32}$$

Tomamos $\{\chi_\epsilon\}$ como en la definición 2.2 y tomamos $\xi \in \mathbb{R}^{2|\Lambda_1'|}$, entonces para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ definimos $G_\epsilon(t,s)f$ como

$$G_\epsilon(t,s)f = \begin{cases} \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i \hbar (t-s)}\right)^{3/2}\right) \left(\frac{1}{2\pi\hbar |V|(t-s)}\right)^{4N_3/2} \left(\prod_{k\in\Lambda_1} \frac{\|k\|^2 (t-s)}{4i\pi^2\hbar|V|}\right) & \\ \times \int \exp(i\hbar^{-1} \widetilde{S}(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}, \phi^{t,s}_{\vec{\xi}_k})) \chi_\epsilon(\xi) f(\widetilde{Y}) d\widetilde{Y} d\xi & , \quad s < t \\ & \\ f & , \quad s = t \end{cases}$$

Teorema 5.7. *Sea $f \in B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$, entonces*

$$\lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon(t,s)f = C(t,s)f \tag{5.33}$$

en $B^a(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ para $0 \leq t-s \leq \rho^*$

Demostración. El caso $t = s$ se sigue trivialmente, entonces si $0 < t-s \leq \rho^*$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n+4N_3})$ entonces por definición se tiene que

$$\begin{aligned} G_\epsilon(t,s)f &= \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t-s)}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3/2}\right) \\ &\times \int \exp(i\hbar^{-1} S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}) f(\widetilde{Y}) d\widetilde{Y} \\ &\times \left(\prod_{k\in\Lambda_1} \frac{\|k\|^2(t-s)}{4i\pi^2\hbar|V|}\right) \int \exp\left(\frac{i(t-s)}{4\pi\hbar|V|} \sum_{k\in\Lambda_1'} \|k\|^2 \left\|\vec{\xi}_k\right\|^2\right) \chi_\epsilon(\xi) d\xi \\ &= \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t-s)}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3/2}\right) \\ &\times \int \exp(i\hbar^{-1} S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}) f(\widetilde{Y}) d\widetilde{Y} \\ &\times \left(\prod_{k\in\Lambda_1} \frac{\|k\|^2}{i\pi}\right) \int \exp\left(i \sum_{k\in\Lambda_1'} \|k\|^2 \|\vec{\eta}_k\|^2\right) \chi_\epsilon\left(\sqrt{4\pi|V|/(t-s)}\eta\right) d\eta \qquad (5.34) \\ &:= \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{2\pi i\hbar(t-s)}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2\pi\hbar|V|(t-s)}\right)^{4N_3/2}\right) \\ &\times \int \exp(i\hbar^{-1} S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}) p_\epsilon(t,s) f(\widetilde{Y}) d\widetilde{Y}, \qquad (5.35) \end{aligned}$$

notamos que $p_\epsilon(t,s)$ en el límite es una integral oscilatoria de una Gaussiana, entonces tomando una familia de Gaussiana apropiadas para χ_ϵ, podemos ver (como se demostró que $C(s,s)$ era la identidad) que

$$\lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon(t,s) = 1. \tag{5.36}$$

Y tomamos $q_\epsilon(t,s) = p_\epsilon(t,s) - 1$ entonces

$$\begin{aligned}\|G_\epsilon(t,s)f - C(t,s)f\|^2_{L^2} &= \|P_\epsilon(t,s)f - C(t,s)f\|^2_{L^2}\\ &= \left((P_\epsilon(t,s) - C(t,s))^* \left(P_\epsilon(t,s) - C(t,s)\right) f, f\right)_{L^2}\\ &= \left(Q_\epsilon(t,s)^* Q_\epsilon(t,s) f, f\right)_{L^2}, \end{aligned} \tag{5.37}$$

entonces podemos seguir como en la demostración del teorema 3.10. □

Como recuperamos el operador fundamental, vemos que esta forma de controlar los grados de libertad es equivalente.
Finalmente, vamos a considerar el sistema sujeto a campos electromagnéticos externos. Eso es, no vamos a considerar como es que estos campos son generados, solo que están presentes en el sistema e interactúan con las cargas. Esto es, se van a considerar $\phi_{\text{ex}}(t,x)$ $\mathbf{A}_{\text{ex}}(t,x)$, potenciales externos, posiblemente dependientes del tiempo tal que para todo multi-índice α se tiene que $D^\alpha_x \phi_{\text{ex}}(t,x)$ y $D^\alpha_x \mathbf{A}_{\text{ex}}(t,x^j)$ son continuas en $[0,T]\times\mathbb{R}^3$. Con esto redefinimos el Lagrangiano como

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_{\text{tot}}\left(x,\dot{x},\{a_{lk}\},\{\dot{a_{lk}}\}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2}\left\|\dot{x}^j\right\|^2 - \frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j cos(k\cdot(x^i - x^j))}{\|k\|^2} - \sum_{j=1}^{n} e_j\phi_{\text{ex}}(t,x^j)\\ + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j \dot{x}^j \cdot \left(\widetilde{\mathbf{A}}(x^j,\{a_{\Lambda_2}\}) + \widetilde{\mathbf{A}}_{\text{ex}}(t,x^j)\right)\\ + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\in\Lambda_3\\ i,l\in\{1,2\}}} \frac{|\dot{a}^i_{lk}|^2}{2|V|} - \frac{c^2\|k\|^2(a^i_{lk})^2}{2|V|} + \frac{\hbar c\|k\|}{2},\end{aligned} \tag{5.38}$$

y así redefinimos la acción y el Hamiltoniano. De forma más compacta definimos

$$V_{\Lambda_1,\text{tot}}(t,x) := \frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j \cos(k\cdot(x^i - x^j))}{\|k\|^2} + \sum_{j=1}^{n} e_j\phi_{\text{ex}}(t,x^j) \tag{5.39}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{\text{tot}}(t,x^j,X) = \widetilde{\mathbf{A}}(x^j,X) + \mathbf{A}_{\text{ex}}(t,x^j), \tag{5.40}$$

y así podemos escribir

$$
\begin{aligned}
S(\gamma^{t,s}_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}) &= \frac{1}{2(t-s)}\sum_{j=1}^{n} m_j||x^j - y^j||^2 - (t-s)\int_0^1 V_{\Lambda_1,\mathrm{tot}}(t-(t-s)\theta, x-\theta(x-y))d\theta \\
&+ \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} e_j(x^j - y^j)\cdot \int_0^1 \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{tot}}(t-(t-s)\theta, x^j - \theta(x^j-y^j), X-\theta(X-Y))d\theta \\
&+ \frac{||X-Y||^2}{2|V|(t-s)} - (t-s)\int_0^1 V_{\Lambda_3}(X-\theta(X-Y))d\theta \qquad (5.41)\\
H_{\mathrm{tot}}(t) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2m_j}\left\|\frac{\hbar}{i}\nabla_j - \frac{e_j}{c}\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{tot}}(t,x^j,X)\right\|^2 + V_{\Lambda_1,\mathrm{tot}}(t,x) \\
&+ \sum_{i=1}^{4N_3}\frac{|V|}{2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial X_i}\right)^2 + \frac{c^2\|k\|^2(X_i)^2}{2|V|} - \frac{\hbar c\|k\|}{2}. \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

Notamos que sin más hipótesis sobre los potenciales externos, no es claro que el operador fundamental o el Hamiltoniano estén bien definido en estos casos y que se puedan definir en B^a. Esto pues no se ha mencionado nada del crecimiento en infinito de los potenciales y por la dependencia temporal explicita de estos. Considerando esto, las hipótesis del siguiente teorema son naturales.

Teorema 5.8. *Además de las hipótesis necesarias para la demostración del teorema 5.6 supongamos que para todo multi-índice $\alpha \neq 0$, existen constantes $C_\alpha, \delta_\alpha > 0$ tal que*

$$
|D^\alpha_x E_{ex,i}(t,x)| \leq C_\alpha, \quad |D^\alpha_x B_{ex,j}(t,x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-(1+\delta_\alpha)} \qquad (5.43)
$$

$$
|D^\alpha_x A_{ex,i}(t,x)| \leq C_\alpha, \quad |D^\alpha_x \phi_{ex}(t,x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle \qquad (5.44)
$$

Para $i = 1,2,3$ y $(t,x) \in \mathbb{R}^3$. Entonces la integral de trayectoria respecto a la acción (5.41) está bien definida y converge a una solución de la ecuación de Shrödinger con Hamiltoniano (5.42).

Notamos que las cotas al ser uniformes con respecto a t y del mismo orden que los potenciales originales, se sigue que las construcciones y demostraciones usadas para construir la integral de Feynman sin los potenciales externos son idénticas reemplazando los potenciales con 5.39, o el Hamiltoniano dado en 2.24 con 5.42. Solo cabe mencionar que si consideramos (4.33) y (4.34), no es inmediato que las integrales estén bien definidas porque ahora el Hamiltoniano depende explícitamente del parámetro de integración. Solo falta notar que por el teorema 3.6, el conjunto $\{H(t)\}_{0\leq t\leq T}$ está uniformemente acotado respecto a su norma de operador por lo que $H(\theta)C(\theta,s)$ es un conjunto fuertemente continuo. Sin embargo de forma más general se puede demostrar que $\{H(t)\}_{0\leq t\leq T}$ es fuertemente continua y esto se sigue que la dependencia temporal solo está en los potenciales externos y estos son de crecimiento polinomial de grado a lo más 2, entonces la continuidad fuerte se sigue del teorema de convergencia dominada. Para más detalles ver [27].

6. El Potencial de Coulomb y la Regularización

Puesto que se han regularizado muchas de los objetos físicos definidos, es importante investigar si es posible recuperar los objetos completos en el "límite". En lo que sigue se demostrará que si hacemos tender el volumen de la caja V y la retícula Λ_1 a infinito, recuperaremos el potencial de Coulomb. Antes de demostrar eso unos lemas

Lema 6.1. *Sean $p \in \mathbb{R}^3$, entonces se cumple que*

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\|\cdot\|}\right)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\|p\|^2} \tag{6.1}$$

En $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$

Demostración. Primero mencionamos que en $\mathbb{R}^3$ como la singularidad de $1/\|x\|$ es integrable entonces $1/\|\cdot\| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y entonces define una distribución y entonces su transformada de Fourier está bien definida. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, y $f_\lambda(x) = e^{-\lambda\|x\|}$ entonces por un lado

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{F}\frac{f_\lambda}{2\|\cdot\|}, \phi\right)_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \left(\frac{f_\lambda}{2\|\cdot\|}, \mathcal{F}\phi\right)_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{e^{-\lambda\|p\|}}{2\|p\|}\left(\int e^{-ip\cdot x}\phi(x)dx\right)dp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int \frac{e^{-\lambda\|p\|-ip\cdot x}}{2\|p\|}\phi(x)dxdp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \phi(x)\int \frac{e^{-\lambda\|p\|-ip\cdot x}}{2\|p\|}dpdx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int \frac{\phi}{\|x\|^2+\lambda^2}dx,\end{aligned}$$

donde la última integral se puede hacer fácilmente en coordenadas esféricas. Puesto que

$$\left|\frac{\phi}{\|x\|^2+\lambda^2}\right| \leq \frac{|\phi|}{\|x\|^2},$$

entonces como $\lim_{\lambda\to} f_\lambda = 1$ en $\mathcal{S}'$ por el teorema de convergencia dominada, se sigue que

$$\left(\mathcal{F}\frac{1}{2\|\cdot\|}, \phi\right)_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \lim_{\lambda\to 0}\left(\mathcal{F}\frac{f_\lambda}{2\|\cdot\|}, \phi\right)_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\|\cdot\|^2}, \phi\right)_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}.$$

□

Lema 6.2. *Sea $N \in \mathbb{N}$ y k, m tal que $k + m = N$, y $\mathscr{A}^N_{k,m} = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \mid \exists g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k), h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) f = gh\}$, entonces* $\operatorname{span}(\mathscr{A}^N_{k,m})$ *es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*

Demostración. Primero consideramos $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Sea $k > 0$ entonces definimos

$$\phi_k(x) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int e^{-k^2\|x-y\|^2}\phi(y)dy, \tag{6.2}$$

puesto que ϕ es acotada entonces por el criterio M de Weierstrass, expandiendo la exponencial como serie de Taylor tenemos que

$$\phi_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int \frac{(-k^2\|x-y\|^2)^i}{i!}\phi(y)dy,$$

esto es ϕ_k es analítica para $k > 0$. Ahora, como (6.2) es una aproximación de la identidad esta converge a ϕ_k uniformemente. Y por la regla integral de Leibniz (la integral es sobre el soporte que es compacto), podemos repetir el argumento para las derivadas. Tomamos una enumeración de el conjunto de multi-índices $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ y para $k \in \mathbb{N}$ sabemos que existe una sucesión de polinomios $\{P_l^k\}$ tal que esta y sus derivadas convergen uniformemente a ϕ_k. Para $k \in \mathbb{N}$, sabemos que existe $l_k \in \mathbb{N}$ tal que si $i \leq k$ se cumple que $\left\|D^{\alpha_i}(P_{l_k}^k - \phi_k)\right\|_\infty < 1/2k$. Notamos entonces que esta sucesión de polinomios converge uniformemente en C^∞ a ϕ. Entonces sea $A \subset \mathbb{R}^k$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ compactos tal que $\mathrm{supp}\phi \subset A \times B$. Tomamos $\phi_A \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ y $\phi_B \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tales que $\phi_A = 1$ en A y $\phi_B = 1$ en B. Entonces factorizando el polinomio apropiadamente es claro que $P_{l_k}^k \phi_A \phi_B \subset \mathrm{span}(\mathscr{A}_{k,m}^N)$ y converge en C_c^∞ a ϕ y por lo tanto también en $\mathcal{S}$. Por la densidad de C_c^∞ en $\mathcal{S}$, se sigue el lema. $\square$

Nota. *Podemos escribir de forma compacta este resultado como*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^m). \tag{6.3}$$

Notamos también fácilmente que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{6.4}$$

Lema 6.3. *Sea* $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ *entonces tenemos que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i \neq j} e_j e_l \int \frac{cos(k \cdot (x^j - x^l))}{\|k^2\|} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k) dk = \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} \frac{e_j, e_l}{\|x^j - x^l\|}, \tag{6.5}$$

con el límite en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{3n})$.

Demostración. Primero, usando la transformada de Fourier inversa y el lema 6.1, tenemos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\|\cdot\|^2}\right)(x) = \frac{1}{2\|x\|} \tag{6.6}$$

Ahora si tomamos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ que se puede escribir como $f(x) = \prod_{i=1}^n g_i(x^i)$ con $g_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{i \neq j} \int \frac{e^{ik\cdot(x^j - x^l)}}{(2\pi)^2 \|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k), f' \right)_{S' \times S} &= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{l \neq j} \left(\int \frac{e^{ik\cdot(x^j - x^l)}}{(2\pi)^2 \|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k), \left(\prod_{i=1}^n g_i \right) \right)_{S' \times S} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{l \neq j} C_{l,j} \int \int \int \frac{e^{ik\cdot(x^j - x^l)}}{(2\pi)^2 \|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k) g_l(x^l) g_j(x^j) dV
\end{aligned}$$

Donde las $C_{l,j}$ son las integrales de las g_i que restan (usando Fubini). Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{e^{ik\cdot(x^j-x^l)}}{(2\pi)^2\|k\|^2}\chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k)g_l(x^l)g_j(x^j)dV &= \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k)g_j(x^j)}{(2\pi)^{1/2}\|k\|^2}\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ik\cdot(x^j-x^l)}g_l(x^l)dx^l\right)dkdx^j\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k)g_j(x^j)}{(2\pi)^{1/2}\|k\|^2}\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ik\cdot x^l}g_l(x^l+x^j)dx^l\right)dkdx^j\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k)g_j(x^j)}{(2\pi)^{1/2}\|k\|^2}\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ik\cdot x^l}g_{l,x^j}(x^l)dx^l\right)dkdx^j\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k)g_j(x^j)}{(2\pi)^{1/2}\|k\|^2}\mathcal{F}^{-1}(g_{l,x^j})(k)dkdx^j\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int g_j(x^j)\left(\frac{\chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon\cdot)}{(2\pi)^{1/2}\|\cdot\|^2},\mathcal{F}^{-1}(g_{l,x^j})\right)_{S'\times S}dx^j\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int g_j(x^j)\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon\cdot)}{(2\pi)^{1/2}\|\cdot\|^2}\right),g_{l,x^j}\right)_{S'\times S}dx^j\\
&= \int g_j(x^j)\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\|\cdot\|^2}\right),g_{l,x^j}\right)_{S'\times S}dx^j\\
&= \int g_j(x^j)\left(\frac{1}{2\|\cdot\|},g_{l,x^j}\right)_{S'\times S}dx^j\\
&= \int g_j(x^j)\left(\int\frac{g_l(x^l+x^j)}{2\|x^l\|}dx^l\right)dx^j\\
&= \int \frac{g_l(x^l)g_j(x^j)}{2\|x^l-x^j\|}dx^ldx^j,
\end{aligned}$$

por lo tanto el lema se sigue de un argumento de densidad usando el lema 6.2 y de tomar parte real e imaginaria en el límite y notar que como el límite es real la parte imaginaria es 0. $\square$

Lema 6.4. *Sea $c\geq 0$ una constante y $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}^3\setminus(\{0\}\cup\partial B(0,c))$ y supongamos que existe $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ tal que es no-creciente y acotada en $(0,\infty)$, que $r^2\phi(r)\in L^1([0,\infty))$ y que $|\Phi(x)|\leq\phi(\|x\|)$. Entonces $\sum_{k\neq 0}\Phi(k)$ con k como en (2.13) converge absolutamente y*

$$\lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty}\frac{(2\pi)^3}{|V|}\sum_{k\neq 0}\Phi(k)=\int\Phi(x)dx, \tag{6.7}$$

con L_j tendiendo a infinito pero con la constricción

$$\frac{1}{m_0}\leq\frac{L_i}{L_j}\leq m_0, \tag{6.8}$$

para alguna constante $m_0\geq 1$.

Demostración. Primero, definimos $s_i^*:=\operatorname{sgn}(s_i-1)\max(s_i-1,s_i)$ y también definimos la función escalonada $\Phi_L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ como

$$\Phi_L(x)=\begin{cases}\Phi\left(\frac{2\pi s_1^*}{L_1},\frac{2\pi s_2^*}{L_2},\frac{2\pi s_3^*}{L_3}\right), & x\in\left(\frac{2\pi s_1-1}{L_1},\frac{2\pi s_1}{L_1}\right)\times\left(\frac{2\pi s_2-1}{L_1}\,\frac{2\pi s_2}{L_2}\right)\times\left(\frac{2\pi s_3-1}{L_1},\frac{2\pi s_3}{L_3}\right)\\ & \cup\{(s_1^*,s_2^*,s_3^*)\}\ s_1,s_2,s_3\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ 0, & \text{En cualquier otro caso.}\end{cases} \tag{6.9}$$

Notamos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi_L(x)dx + \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0\\ s_1s_2s_3=0}} \Phi(k) = \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0} \Phi(k). \tag{6.10}$$

Ahora supongamos por un momento que $L_1 \leq L_2$. Como ϕ es no-creciente, y por (6.8) se tiene que si $s_1 \geq 2$ se cumple para toda $k \in \left(\frac{2\pi(s_1-2)}{L_1}, \frac{2\pi(s_1-1)}{L_1}\right] \times \left(0, \frac{2\pi}{L_2}\right] \times \left(0, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right]$ tenemos que

$$\phi\left(\left\|\left(\frac{2\pi s_1}{L_1}, 0, 0\right)\right\|\right) \leq \phi\left(\left\|\left(\frac{2\pi(s_1-1)}{L_1}, \frac{2\pi}{L_2}, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right)\right\|\right) \leq \phi(\|k\|),$$

para $s_1 \geq 2$ y $s_2 \geq 1$ para $k \in \left(\frac{2\pi(s_1-2)}{L_1}, \frac{2\pi(s_1-1)}{L_1}\right] \times \left(\frac{2\pi(s_2-1)}{L_2}, \frac{2\pi s_2}{L_2}\right] \times \left(0, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right]$

$$\phi\left(\left\|\left(\frac{2\pi s_1}{L_1}, \frac{2\pi s_2}{L_2}, 0\right)\right\|\right) \leq \phi\left(\left\|\left(\frac{2\pi(s_1-1)}{L_1}, \frac{2\pi s_2}{L_2}, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right)\right\|\right) \leq \phi(\|k\|),$$

para $s_1 \geq 2$ se cumple para toda $k \in \left(0, \frac{2\pi}{L_1}\right] \times \left(\frac{2\pi(s_2-2)}{L_2}, \frac{2\pi(s_2-1)}{L_2}\right] \times \left(0, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right]$ tenemos que

$$\phi\left(\left\|\left(\frac{2\pi}{L_1}, \frac{2\pi s_2}{L_2}, 0\right)\right\|\right) \leq \phi\left(\left\|\left(\frac{2\pi)}{L_1}, \frac{2\pi(s_2-1)}{L_2}, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right)\right\|\right) \leq \phi(\|k\|).$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0, s_3=0} |\Phi(k)| \leq \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0, s_3=0} \phi(\|k\|) &= \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1,s_2=0,\pm 1}} \phi(\|k\|) + \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1=0,|s_2|\geq 2}} \phi(\|k\|) \\
&+ \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_2=0,|s_1|\geq 2}} \phi(\|k\|) + \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ |s_2|\geq 1,|s_1|\geq 2}} \phi(\|k\|) \\
&+ \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ |s_2|\geq 2,|s_1|=1}} \phi(\|k\|) \\
&= \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1,s_2=0,\pm 1}} \phi(\|k\|) + \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1=0,|s_2|\geq 2}} \phi(\|k\|) \\
&+ 2\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_2=0,s_1\geq 2}} \phi(\|k\|) + 4\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_2\geq 1,s_1\geq 2}} \phi(\|k\|) \\
&+ 4\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_2\geq 2,s_1=1}} \phi(\|k\|)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1,s_2=0,\pm 1}} \phi(\|k\|) + \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1=0,|s_2|\geq 2}} \phi(\|k\|)\\
&+ 2 \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_2=0,s_1\geq 2}} \int_{\left(\frac{2\pi(s_1-2)}{L_1},\frac{2\pi(s_1-1)}{L_1}\right]\times\left(0,\frac{2\pi}{L_2}\right]\times\left(0,\frac{2\pi}{L_3}\right]} \phi(\|k\|)dx\\
&+ 4 \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_2\geq 1,s_1\geq 2}} \int_{\left(\frac{2\pi(s_1-2)}{L_1},\frac{2\pi(s_1-1)}{L_1}\right]\times\left(\frac{2\pi(s_2-1)}{L_2},\frac{2\pi s_2}{L_2}\right]\times\left(0,\frac{2\pi}{L_3}\right]} \phi(\|k\|)dx\\
&+ 4 \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_2\geq 2,s_1=1}} \int_{\left(0,\frac{2\pi}{L_1}\right]\times\left(\frac{2\pi(s_2-2)}{L_2},\frac{2\pi(s_2-1)}{L_2}\right]\times\left(0,\frac{2\pi}{L_3}\right]} \phi(\|k\|)dx\\
&\leq \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1,s_2=0,\pm 1}} \phi(\|k\|) + 2\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1=0,s_2\geq 2}} \phi(\|k\|)\\
&+ 10 m_0 \int_{0\leq x_3\leq (2\pi)/m_0L_3} \phi(\|x\|)dx.
\end{aligned}
$$

Ahora, como se cumple también que $L_2 \leq m_0L_1$ entonces si $s_2 \geq 2$ y si $k \in \left(0, \frac{2\pi}{m_0L_1}\right] \times \left(\frac{2\pi(s_2-2)}{L_2}, \frac{2\pi(s_2-1)}{L_2}\right] \times \left(0, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right]$

$$
\phi\left(\left\|\left(0, \frac{2\pi s_2}{L_2}, 0\right)\right\|\right) \leq \phi\left(\left\|\left(\frac{2\pi)}{m_0L_1}, \frac{2\pi(s_2-1)}{L_2}, \frac{2\pi}{m_0L_3}\right)\right\|\right) \leq \phi(\|k\|),
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
2\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1=0,s_2\geq 2}} \phi(\|k\|) &= 2m_0^2 \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1=0,|s_2|\geq 2}} \int_{\left(0,\frac{2\pi}{m_0L_1}\right]\times\left(\frac{2\pi(s_2-2)}{L_2},\frac{2\pi(s_2-1)}{L_2}\right]\times\left(0,\frac{2\pi}{m_0L_3}\right]} \phi(\|k\|)dx\\
&\leq 2m_0^2 \int_{0\leq x_1\leq (2\pi)/m_0L_1, 0\leq x_3\leq (2\pi)/m_0L_3} \phi(\|x\|)dx\\
&\leq 2m_0^2 \int_{0\leq x_3\leq (2\pi)/m_0L_3} \phi(\|x\|)dx,
\end{aligned}
$$

por lo tanto se sigue que

$$
\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0, s_3=0} |\Phi(k)| \leq \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{\substack{k\neq 0, s_3=0\\ s_1,s_2=0,\pm 1}} \phi(\|k\|) + 2m_0(5+m_0) \int \chi_{0\leq x_3\leq (2\pi)/m_0L_3}(x)\phi(\|x\|)dx. \tag{6.11}
$$

Notamos que aunque supusimos que $L_1 \leq L_2$ esto solo surgió en la forma de tomar la partición pero el lado derecho de la desigualdad anterior solo depende de una suma finita y una integral que depende de L_3 por lo tanto no se perdió generalidad. Y de forma completamente análoga obtenemos

$$\frac{(2\pi)^3}{|V|}\sum_{k\neq 0, s_2=0}|\Phi(k)| \leq \frac{(2\pi)^3}{|V|}\sum_{\substack{k\neq 0, s_2=0\\ s_1,s_3=0,\pm 1}}\phi(\|k\|)+2m_0(5+m_0)\int \chi_{0\leq x_3\leq (2\pi)/m_0L_2}(x)\phi(\|x\|)dx, \tag{6.12}$$

$$\frac{(2\pi)^3}{|V|}\sum_{k\neq 0, s_1=0}|\Phi(k)| \leq \frac{(2\pi)^3}{|V|}\sum_{\substack{k\neq 0, s_1=0\\ s_2,s_3=0,\pm 1}}\phi(\|k\|)+2m_0(5+m_0)\int \chi_{0\leq x_3\leq (2\pi)/m_0L_1}(x)\phi(\|x\|)dx. \tag{6.13}$$

Y como por hipótesis se cumple que

$$|\Phi_L(x)| \leq \phi(\|x\|), \tag{6.14}$$

integrando en coordenadas esféricas, podemos ver entonces que el lado izquierdo de (6.10) es finito y converge absolutamente. Y como $r^2\phi(r)$ esta acotado existe una constante C tal que

$$0 \leq \phi(\|k\|) \leq C\frac{1}{\|k\|^2},$$

entonces de esto de las desigualdades (6.11), (6.12), (6.13) y del teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty}\frac{(2\pi)^3}{|V|}\sum_{\substack{k\neq 0\\ s_1s_2s_3=0}}\Phi(k)=0.$$

Ahora es fácil de ver que en los puntos de continuidad Φ_L converge puntualmente a Φ y por hipótesis es continua casi donde sea, entonces de esto y de la desigualdad (6.14), el lema se sigue aplicando de nuevo el teorema de convergencia dominada. □

Teorema 6.5. *Bajo la condición (6.8) se cumple que*

$$\begin{aligned}\lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty}\lim_{N_1\to\infty}\frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\in\Lambda_1}\sum_{j\neq l}\frac{e_je_l cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2} &= \lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty}\lim_{N_1\to\infty}\frac{2\pi}{|V|}\sum_{k\neq 0}\sum_{j\neq l}\frac{e_je_l cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\neq l}\frac{e_je_l}{\|x^j-x^l\|},\end{aligned} \tag{6.15}$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{3n})$

Demostración. Sea $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$ entonces como

$$\begin{aligned}\int\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2}\phi(x)dx &= \int\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2})\phi(x)dx\\ &= \int\frac{(1-\Delta_x)\,cos(k\cdot(x^j-x^l))}{(1+\|k\|^2)\|k\|^2}\phi(x)dx\\ &= \int\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{(1+\|k\|^2)\|k\|^2}\left(1-\Delta_x\right)\phi(x)dx.\end{aligned}$$

Entonces si definimos

$$\Phi(k) = \int \frac{cos(k \cdot (x^j - x^l))}{(1+\|k\|^2)\|k\|^2} (1-\Delta_x)\, \phi(x) dx, \tag{6.16}$$

$$\phi(r) == \int \frac{|\,(1-\Delta_x)\, \phi(x)|}{(1+r^2)r^2} dx, \tag{6.17}$$

es claro $|\Phi(k)| \leq \phi(\|k\|)$ entonces del lema 6.4 se sigue

$$\lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0} \sum_{j\neq l} \frac{e_j e_l cos(k\cdot(x^j - x^l))}{\|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k), \phi \right)_{S'\times S} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty} \left(\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0} \sum_{j\neq l} \frac{e_j e_l cos(k\cdot(x^j - x^l))}{\|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k), \phi \right)_{S'\times S} =$$

$$\lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0} \sum_{j\neq l} \int \frac{e_j e_l cos(k\cdot(x^j - x^l))}{(1+\|k\|)^2\|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k)\, (1-\Delta_x)\, \phi(x) dx =$$

$$\sum_{j\neq l} \int \frac{e_j e_l cos(k\cdot(x^j - x^l))}{(1+\|k\|)^2\|k\|^2} (1-\Delta_x)\, \phi(x) dx dk$$

Y por otro lado de los lemas 6.4 y 6.3

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty} \left(\frac{(2\pi)^3}{|V|} \sum_{k\neq 0} \sum_{j\neq l} \frac{e_j e_l cos(k\cdot(x^j - x^l))}{\|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k), \phi \right)_{S'\times S} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j\neq l} \int \frac{e_j e_l cos(k\cdot(x^j - x^l))}{\|k\|^2} \chi_{\overline{B}(0,1)}(\epsilon k) \phi(x) dx dk =$$

$$\sum_{j\neq l} 2\pi^2 \int \frac{e_j e_l \phi(x)}{\|x^j - x^l\|^2} dx dk, \tag{6.18}$$

de lo que se sigue el teorema. □

Corolario 6.5.1. *Si tomamos $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\phi(0) = 1$ y que $\phi(-k) = \phi(k)$, bajo la condición (6.8) se cumple que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{L_1,L_2,L_3\to\infty} \frac{2\pi}{|V|} \sum_{k\neq 0} \sum_{j\neq l} \phi(\epsilon k) \frac{e_j e_l cos(k\cdot(x^j - x^l))}{\|k\|^2} = \frac{1}{2} \sum_{j\neq l} \frac{e_j e_l}{\|x^j - x^l\|} \tag{6.19}$$

puntualmente para $x \in \mathbb{R}^{3n}$ tal que $x^j - x^l \neq 0$ para toda $j \neq l$.

Demostración. Primero, tomamos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\phi \restriction_{\overline{B}(0,1)} \equiv 1$ que cumpla las hipótesis del corolario. Puesto que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int \phi(\epsilon k)\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2}dk =& \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int \phi(k)\phi(\epsilon k)\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2}dk\right.\\
&\left.+\int(1-\phi(k))\phi(\epsilon k)\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2}dk\right\}\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int \phi(k)\phi(\epsilon k)\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2}dk\right.\\
&\left.-\int \frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|x^j-x^l\|^2}\Delta_k\left((1-\phi(k))\phi(\epsilon k)\|k\|^{-2}\right)dk\right\}\\
&=\left\{\int \phi(k)\frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|k\|^2}dk\right.\\
&\left.-\int \frac{cos(k\cdot(x^j-x^l))}{\|x^j-x^l\|^2}\Delta_k\left((1-\phi(k))\|k\|^{-2}\right)dk\right\} \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

Usando el teorema de convergencia dominada. Notamos que está convergencia es puntual a una función localmente integrable, pero entonces podemos usar el lado derecho de esta expresión como una representación de la distribución que representa el límite de la izquierda que ya sabemos que converge distribucionalmente por el teorema anterior. Como dos representaciones de una distribución son iguales casi donde sea, y el potencial es continuo justo donde $x^j - x^l \neq 0$, de esto se sigue el corolario $\square$

7. Los Operadores de Creación y Aniquilación y los Estados de N-Fotones

Finalmente, vamos a estudiar el estado de vacío y los estados excitados del campo cuantizado. Para hacer esto, se considerará definir operadores de creación y aniquilación cuantizando los modos de Fourier del potencial magnético, definir apropiadamente el vacío de la teoría e inductivamente definir los estados excitados. En esta sección no se va a considerar el problema de la definición del operador del campo como un operador auto-adjunto y la caracterización de su espectro puesto que estas técnicas se salen del enfoque del texto. Sin embargo notamos que el término del Hamiltoniano (2.163) del campo es un conjunto finito de osciladores armónicos desacoplados. Las propiedades espectrales del oscilador armónico son conocidas y se sabe que es un ejemplo clásico de un operador cuántico con espectro infinito y puramente discreto, esto es, compuesto únicamente de valores propios (ver [5] Teo. 3.1 y ver [40] Teo. VIII.33 para generalizar a un número arbitrario pero finito de osciladores armónicos acoplados). Regresaremos a la representación dada por (2.162) que permite una interpretación física más directa, sin embargo las variables $a^i_{l,k}$ realmente solo representan un conjunto de variables independientes en $\mathbb{R}^{4N_3}$. Primero definimos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N_3})$ los operadores

$$\hat{a}^i_{l,k} := \sqrt{\frac{|V|}{2\hbar c\|k\|}} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial a^i_{l,k}} + \frac{c\|k\|}{|V|} a^i_{l,k} \right), \tag{7.1}$$

con $k \in \Lambda_3$ e $i, l = 1, 2$. Y usando las relaciones (2.27) extendemos estas definiciones

$$\hat{a}^1_{l,-k} := -\hat{a}^1_{l,k}, \qquad \hat{a}^2_{l,-k} := \hat{a}^2_{l,k}. \tag{7.2}$$

Primero vamos a encontrar el adjunto (formal) de este operador. Definimos

$$(\hat{a}^i_{l,k})^* := \sqrt{\frac{|V|}{2\hbar c\|k\|}} \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial a^i_{l,k}} + \frac{c\|k\|}{|V|} a^i_{l,k} \right), \tag{7.3}$$

en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N})$. Se sigue de la formula de integración por partes 1.17 que

$$\left(\hat{a}^i_{l,k} f, \phi\right)_{L^2} = \left(f, (\hat{a}^i_{l,k})^* \phi\right)_{L^2}, \tag{7.4}$$

por lo que son adjuntos formales. Y es fácil de ver que

$$[\hat{a}^i_{l,k}, (\hat{a}^{i'}_{l',k'})^*] = \delta_{i,i'}\delta_{l,l'}\delta_{k,k'}, \qquad [\hat{a}^i_{l,k}, \hat{a}^{i'}_{l',k'}] = 0 \quad \text{en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N_3}). \tag{7.5}$$

Ahora, definimos los operadores de creación

$$\hat{a}_{l,k} := \frac{\hat{a}^1_{l,k} - i\hat{a}^2_{l,k}}{\sqrt{2}} \tag{7.6}$$

Y los adjuntos de estos los operadores de aniquilación en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N_3})$. De (7.5), es fácil ver que se cumple

$$[\hat{a}_{l,k}, (\hat{a}_{l',k'})^*] = \delta_{l,l'}\delta_{k,k'}, \qquad [\hat{a}_{l,k}, \hat{a}_{l',k'}] = 0 \quad \text{en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N_3}). \tag{7.7}$$

Ahora si consideramos el operador

$$\sum_{k \in \Lambda_3, l} \hbar c\|k\| (\hat{a}_{l,k})^* \hat{a}_{l,k}, \tag{7.8}$$

vemos que también está definido $B^a(\mathbb{R}^{4N_3})$ para $a \geq 2$ por lo que se puede demostrar lo que sigue calculando explícitamente

$$
\begin{aligned}
H_{\text{rad}} &:= \sum_{\substack{k\in\Lambda_3' \\ i,l\in\{1,2\}}} \frac{|V|}{2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial a_{l,k}^i}\right)^2 + \frac{c^2\|k\|^2(a_{lk}^i)^2}{2|V|} - \frac{\hbar c\|k\|}{2} \\
&= \sum_{k\in\Lambda_3',l} \hbar c\|k\|(\hat{a}_{l,k})^*\hat{a}_{l,k}. \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

También notamos que si tomamos $x \in \mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_{l,k}e^{ik\cdot x} + (\hat{a}_{l,k})^*e^{-ik\cdot x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\hat{a}_{l,k}^1 + (\hat{a}_{l,k}^1)^*)cos(k\cdot x) - i(\hat{a}_{l,k}^2 - (\hat{a}_{l,k}^2)^*)cos(k\cdot x) \\
&\quad + i(\hat{a}_{l,k}^1 - (\hat{a}_{l,k}^1)^*)sen(k\cdot x) + (\hat{a}_{l,k}^2 + (\hat{a}_{l,k}^2)^*)sen(k\cdot x)\big) \\
&= \sqrt{\frac{|V|}{\hbar c\|k\|}}\left(\frac{c\|k\|}{|V|}a_{l,k}^1 cos(k\cdot x) + \frac{c\|k\|}{|V|}a_{l,k}^2 sen(k\cdot x)\right. \\
&\quad \left. - i\hbar cos(k\cdot x)\frac{\partial}{\partial a_{l,k}^2} + i\hbar sen(k\cdot x)\frac{\partial}{\partial a_{l,k}^1}\right), \qquad (7.10)
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\sum_{k\in\Lambda_2}\frac{1}{2c\|k\|}\left(\hat{a}_{l,k}e^{ik\cdot x} + (\hat{a}_{l,k})^*e^{-ik\cdot x}\right)\vec{e}_l(k) = \sum_{k\in\Lambda_2}\frac{1}{2\hbar|V|}\left(a_{l,k}^1 cos(k\cdot x) + a_{l,k}^2 sin(k\cdot x)\right)\vec{e}_l(k). \qquad (7.11)
$$

Entonces podemos expresar el potencial magnético (sin las funciones de corte) (2.44) como

$$
\mathbf{A}(x, \{a_{\Lambda_2'}\}) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{|V}}c\sum_{\substack{k\in\Lambda_2 \\ l\in\{1,2\}}}\frac{1}{2c\|k\|}\left(\hat{a}_{l,k}e^{ik\cdot x} + (\hat{a}_{l,k})^*e^{-ik\cdot x}\right)\vec{e}_l(k), \qquad (7.12)
$$

viéndolo como operador de multiplicación. Ahora si escribimos explícitamente, los sumandos de 7.9

$$
\hbar c\|k\|(\hat{a}_{l,k})^*\hat{a}_{l,k} = -\frac{\hbar|V|}{2}\left(\frac{\partial^2}{(\partial a_{l,k}^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial a_{l,k}^2)^2}\right) + \frac{c^2\|k\|^2}{2|V|}\left((a_{l,k}^1)^2 + (a_{l,k})^2\right) - \hbar c\|k\|, \qquad (7.13)
$$

que hace fácil de ver que

$$
\Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}) := \prod_{k\in\Lambda_3',l}\sqrt{\frac{c\|k\|}{\pi\hbar|V|}}\exp\left(\frac{-c\|k\|}{2\hbar|V|}\left((a_{l,k}^1)^2 + (a_{l,k}^2)^2\right)\right), \qquad (7.14)
$$

es un eigenvector de (7.9) con eigenvalor 0, esto es

$$
H_{rad}\Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}) = 0, \qquad (7.15)
$$

y también

$$
\Psi_{1,l,k}(\{a_{\Lambda_3'}\}) := (\hat{a}_{l,k})^*\Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}) = \sqrt{\frac{2x\|k\|}{\hbar|V|}}a_{l,k}^*\Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}), \qquad \hat{a}_{l,k}\Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}) = 0. \qquad (7.16)
$$

Notamos que $\Psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N_3})$ por lo que podemos usar las reglas de conmutación 7.7 sobre Ψ_0 para obtener

$$\begin{aligned}(\hat{a}_{l',k'})^* \hat{a}_{l',k'} (\hat{a}_{l,k})^* \Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}) &= (\hat{a}_{l,k})^* \left(\delta_{k,k'}\delta_{l,l'} + (\hat{a}_{l,k})^*(\hat{a}_{l,k})\right) \Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}) \\ &= \delta_{k,k'}\delta_{l,l'}(\hat{a}_{l,k})^* \Psi_0(\{a_{\Lambda_3'}\}). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Esto es $\Psi_{1,l,k}(\{a_{\Lambda_3'}\})$ es un vector propio de $(\hat{a}_{l',k'})^* \hat{a}_{l',k'}$ con valor propio $\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}$. Vamos a demostrar por inducción que si $\Psi_{n,l,k} := (\hat{a}_{l,k})^{*,n}\Psi_0$ entonces

$$\hat{a}^*_{l',k'}\hat{a}_{l',k'}\Psi_{n,l,k} = \delta_{l',l}\delta_{k',k} n \Psi_{n,l,k}. \tag{7.18}$$

El caso base se acaba de hacer, para el paso inductivo

$$\begin{aligned}\hat{a}^*_{l',k'}\hat{a}_{l',k'}\Psi_{n+1,l,k} = \hat{a}^*_{l',k'}\hat{a}_{l',k'}\hat{a}^*_{l,k}\Psi_{n,l,k} &= \hat{a}^*_{l',k'}\left(\delta_{l,l'}\delta_{k,k'} + \hat{a}^*_{l',k'}\hat{a}_{l',k'}\right)\Psi_{n,l,k} \\ &= \hat{a}^*_{l',k'}\left(\delta_{l,l'}\delta_{k,k'} + \delta_{l,l'}\delta_{k,k'} n\right)\Psi_{n,l,k} \\ &= \delta_{l,l'}\delta_{k,k'}(n+1)\Psi_{n+1,l,k},\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad usamos las reglas de conmutación y en la segunda la hipótesis de inducción. También, si tomamos $n \geq n'$, se cumple

$$\begin{aligned}\left(\Psi_{n,l,k}, \Psi_{n',l',k'}\right)_{L^2} = \left(\Psi_{n-1,l,k}, \hat{a}_{l,k}(\hat{a}_{l,k})^*\Psi_{n'-1,l',k'}\right)_{L^2} &= \delta_{l,l'}\delta_{k,k'} n \left(\Psi_{n-1,l,k}, \Psi_{n'-1,l',k'}\right)_{L^2} \\ &= \delta_{l,l'}\delta_{k,k'} n'(n'-1)\left(\Psi_{n-2,l,k}, \Psi_{n'-2,l',k'}\right)_{L^2} \\ &\ \ \vdots \\ &= \delta_{l,l'}\delta_{k,k'} n'!\left(\Psi_{n-n',l,k}, \Psi_0\right)_{L^2} \\ &= \delta_{l,l'}\delta_{k,k'}\delta_{n,n'} n'!. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Por lo tanto se sigue que si para todo l, k fijo tomamos $n_{l,k} \in \mathbb{N}_0$ arbitrarios definimos

$$\tilde{\Psi}_{n_{l,k}} = \frac{(\hat{a}_{l,k})^{*,n_{l,k}}\Psi_0}{\sqrt{n_{l,k}!}}, \tag{7.20}$$

entonces

$$\left\{\prod_{k\in\Lambda_3',l}\tilde{\Psi}_{n_{l,k}}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \tag{7.21}$$

es un conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{R}^{4N_3})$ tal que

$$H_{\mathrm{rad}}\prod_{k\in\Lambda_3',l}\tilde{\Psi}_{n_{l,k}} = \left(\sum_{k\in\Lambda_3'} n_{l,k}\hbar c\|k\|\right)\prod_{k\in\Lambda_3',l}\tilde{\Psi}_{n_{l,k}}, \tag{7.22}$$

el estado $\prod_{k\in\Lambda_3',l}\tilde{\Psi}_{n_{l,k}}$ representa un conjunto de $\sum_{l,k} n_{l,k}$ fotones tal que $n_{l,k}$ tienen momento $\hbar k$ y polaridad l.

Apendices

A. Distribuciones Periódicas

Las teoría de las distribuciones periódicas, se puede entender como una modificación de la teoría de distribuciones usuales en donde se considera un espacio de funciones pruebas periódicas (cfr. [48]). El principal beneficio de hacer esto es que permite rigurosamente definir la serie de Fourier de una distribución. Vamos a considerar solo funciones 2π periódicas por simplicidad, pero usando cambios de variables apropiados se puede considerar cualquier tipo de periodicidad.

Definición A.1. *Sea $Q_N = [-\pi, \pi]^N$, definimos $C_p^\infty(Q_N)$ como el conjunto de funciones en $C^\infty(Q_N)$, que son 2π-periódicas en cada variable. Esto es para todo $i = 1, \dots, N$ $f(x + 2\pi\hat{e}_i) = f(x)$.*

El ejemplo prototípico de funciones de prueba periódicas son los polinomios trigonométricos

$$\sum_{\|k\| \leq K} c_k e^{ik\cdot x}.$$

Para $K \in \mathbb{N}$ definimos la seminorma $\|\cdot\|_K$ sobre $u \in C_p^\infty(Q_N)$ como

$$\|u\|_K = \sum_{|\alpha| \leq K} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \tag{A.1}$$

con estas seminormas el espacio se vuelve de Frechet y se cumple que $u_n \to u$ si y solo sí $D^\alpha u_n \to u$ uniformemente para toda α mulit-índice.

Definición A.2. *Para sucesión de números $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^N}$ decimos que decrece rápidamente si para toda $K \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_K > 0$ tal que*

$$|c_k| \leq C_K \langle k \rangle^{-K}. \tag{A.2}$$

Denotamos el espacio de sucesiones que decrecen rápidamente como $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$. Dotamos este espacio de un conjunto de normas

$$|(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^N}|_K = \sup_{k\in\mathbb{Z}^N} \langle k \rangle^K |c_k|, \tag{A.3}$$

que hace a este un espacio de Frechet.

Usamos una notación similar al espacio de Schwartz, ya que como la transformada de Fourier, vamos a ver que las series de Fourier dan un isomorfismo entre $C_p^\infty(Q_N)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$. Antes de demostrar esto recordamos que los coeficientes de Fourier de una función f están dados por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{Q_N} f(x) e^{-ik\cdot x} dx \qquad k \in \mathbb{Z}^N, \tag{A.4}$$

y la serie de Fourier esta dado, por ahora, formalmente como

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x}. \tag{A.5}$$

Teorema A.3. *Si $u \in C_p^\infty(Q_N)$ entonces $(\hat{u}(k))_{k\in\mathbb{Z}^N} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$, la serie A.5 converge a u en $C_p^\infty(Q_N)$ y si tomamos $\mathscr{F} : C_p^\infty(Q_N) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$ como*

$$\mathscr{F}(u) = (\hat{u}(k))_{k\in\mathbb{Z}^N}, \tag{A.6}$$

esta función es un isomorfismo.

Antes de demostrar este teorema se necesita un pequeño lema

Lema A.4. *La serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \langle k\rangle^{-s}, \tag{A.7}$$

converge si $s > N$.

Demostración. Por la simetría de la serie, basta con considerar

$$\sum_{k\in\mathbb{Z^+}^N} \langle k\rangle^{-s}, \tag{A.8}$$

entonces si tomamos $\lfloor x\rfloor$ como la función piso se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z^+}^N} \langle k\rangle^{-s} = \sum_{k\in\mathbb{Z^+}^N} \frac{1}{\sqrt{1+k_1^2+\cdots+k_N^2}^s} &= \int_{\mathbb{R^+}^N} \frac{1}{\sqrt{1+\lfloor x_1\rfloor^2+\cdots+\lfloor x_N\rfloor^2}^s}dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R^+}^N} \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_N^2}^s}dx \\
&= C\int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{\sqrt{1+r^2}^s}dr \\
&\leq \infty,
\end{aligned}$$

de lo que se sigue el lema. □

Demostración Teorema A.3. Primero, notamos que si tomamos $v, w \in C_p^1(Q_N)$ e $i = 1,\ldots,N$ entonces integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{Q_N} v\partial_i w dx = \int_{Q_{N-1}}\int_{-\pi}^{\pi} v\partial_i w dx_i dx' &= \int_{Q_{N-1}}\left(\cancel{vw|_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi}\partial_i v w\right)dx' \\
&= -\int_{Q_N}\partial_i v w dx,
\end{aligned} \tag{A.9}$$

por la periodicidad de las funciones. Por lo tanto se sigue para $u \in C_p^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\left(\widehat{\langle\partial_x\rangle^{2K} u}\right)(k) = \langle k\rangle^{2K}\hat{u}(k),$$

por lo tanto

$$|\hat{u}(k)| \leq \langle k\rangle^{-2K}\left|\left(\widehat{\langle\partial_x\rangle^{2K} u}\right)(k)\right| \leq \langle k\rangle^{-2K}\left\|\langle\partial_x\rangle^{2K} u\right\|_{L^\infty}.$$

Entonces $(\hat{u}(k))_{k\in\mathbb{Z}^N} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$, por lo tanto $\mathscr{F}$ está bien definida. Ahora, sea $(c_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$ y definimos

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{ik\cdot x}$$

Y sea α un multi-índice, como $D_x^\alpha e^{ik\cdot x} = (ik)^\alpha e^{ik\cdot x}$ entonces si tomamos un entero K tal que $|\alpha| - K < -s$ entonces se sigue que

$$\left|D_x^\alpha c_k e^{ik\cdot x}\right| \leq |x^\alpha c_k| \leq C_K C_0 \langle x\rangle^{|\alpha|-K}.$$

Entonces del lema anterior y de la prueba M de Weierstrass se sigue que la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^N} D_x^\alpha c_k e^{ik\cdot x},$$

converge uniformemente, por lo tanto la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k k e^{ik\cdot x},$$

converge en $C_p^\infty(Q_N)$. Por la convergencia uniforme podemos intercambiar la integral con la suma y se sigue que $c_k = \hat{u}(k)$. Esto muestra que $\mathscr{F}$ es biyectiva. Ahora notamos que

$$\langle k\rangle^{2K} |\hat{u}(k)| \leq \left|\widehat{\langle\partial_x u\rangle}(k)\right| \leq \|\langle\partial_x u\rangle\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{2K},$$

por lo que $\mathscr{F}$ es continua. La continuidad de $\mathscr{F}^{-1}$ se sigue del teorema del mapeo abierto. □

Definición A.5. *Una distribución periódica es un elemento de $C_p^\infty(Q_N)'$, el espacio dual continuo de las funciones de prueba periódicas. Esto es*

$$C_p^\infty(Q_N)' = \{T : C_p^\infty(Q_N) \to \mathbb{C} \mid T \textit{ es lineal y } T(\phi_j) \to 0 \textit{ si } \phi_j \to 0\}. \tag{A.10}$$

De la misma forma que la distribuciones usuales, $f \in L^1(Q_n)$ define únicamente una distribución periódica T_f, y la delta de Dirac como la función evaluación en 0 también es una distribución periódica. De la definición de los coeficientes de Fourier, notamos que para $u \in C_p^\infty(Q_N)$

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{(2\pi)^N} T_u(e^{-ik\cdot x}), \tag{A.11}$$

de esta manera, se motiva la siguiente definición.

Definición A.6. *Si T, es una distribución periódica, sus coeficientes de Fourier están definidos como*

$$\hat{T}(k) := \frac{1}{(2\pi)^N} T_u(e^{-ik\cdot x}) \qquad k \in \mathbb{Z}^N \tag{A.12}$$

Un ejemplo ilustrativo es considerar los coeficientes de Fourier de la delta de Dirac.

$$\hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^N}\delta(e^{-ik\cdot x}) = \frac{1}{(2\pi)^N}. \tag{A.13}$$

Formalmente la serie de Fourier de esta estaría dada por

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} e^{ik\cdot x}, \tag{A.14}$$

que solo está dada formalmente pues no converge de ninguna manera usual. La parte clave es que se puede demostrar que si converge como distribución. Antes de eso se necesita un pequeño lema útil de regularidad muy análogo a uno que existe para distribuciones temperadas.

Lema A.7. *Si T es una distribución periódica, existe un $K \in \mathbb{N}$ y $C > 0$, tal que*

$$|T(u)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq K} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \tag{A.15}$$

denotamos también por $\mathscr{F}$ el mapeo que manda una distribución a sus coeficientes de Fourier.

Demostración. Procedamos por contradicción, entonces supongamos que para cualquier $K \in \mathbb{N}$, existe un $u_K \in C_p^\infty(Q_N)$ tal que

$$|T(u_K)| \geq K \sum_{|\alpha| \leq K} \|D^\alpha u_k\|_{L^\infty}, \tag{A.16}$$

y definimos

$$\psi_K := \frac{1}{K} \left(\sum_{|\alpha| \leq K} \|D^\alpha u_K\|_{L^\infty} \right)^{-1} u_K. \tag{A.17}$$

Es claro que para un multi-índice arbitrario β, si tomamos $K \geq |\beta|$ y $K' \geq K$ se cumple

$$\left\|D^\beta \psi_{K'}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{K'}, \tag{A.18}$$

por lo tanto $D^\beta \psi_K \to 0$ uniformemente por lo tanto ψ_K converge en $C_p^\infty(Q_N)$. Por lo tanto $T(\psi_K) \to 0$ por continuidad, pero también se cumple que $|T(\psi_K)| \geq 1$ por lo que tenemos una contradicción. De esto se sigue el lema. □

Una sucesión de números $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^N}$ es de crecimiento polinomial si existe $K \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tal que

$$|c_k| \leq C \langle k \rangle^K \qquad k \in \mathbb{Z}^N, \tag{A.19}$$

y denotamos el conjunto de estas sucesiones como $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^N)$. Con todo esto se puede enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema A.8. *La función $\mathscr{F} : C_p^\infty(Q_N)' \to \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^N)$ es una biyección y para toda distribución T su serie de Fourier converge de forma distribucional. Esto eso*

$$\lim_{K \to \infty} \left(\sum_{|k| \leq K} \hat{T}(k) e^{ik \cdot x}, u \right) = (T, u) \qquad \forall u \in C_p^\infty(Q_N). \tag{A.20}$$

Demostración. Que la sucesión de coeficientes de Fourier es de crecimiento polinomial se sigue directamente de aplicar el lema A.7 a la definición de estos. Ahora sea $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^N} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^N)$ y sean C, K que cumplen (A.19). Sea $s \in \mathbb{N}$ tal que $2s > N$ y sea

$$b_k := c_k \langle k \rangle^{-2K-2s} \qquad , k \in \mathbb{Z}^N, \tag{A.21}$$

entonces por el lema A.4 y el criterio M de Weierstrass, la serie

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} b_k e^{ik \cdot x}, \tag{A.22}$$

converge uniformemente y por lo tanto f es continua. Como Q_N es compacto $f \in L^p(Q_N)$ y también define una distribución periódica y podemos tomar

$$T := \langle \partial^{2K+2s} \rangle \, T_f, \tag{A.23}$$

entices por definición los coeficientes de Fourier de T son

$$\hat{T}(k) = \frac{1}{(2\pi)^N} T_f(\langle \partial_x \rangle^{2K+2s} e^{-ik\cdot x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} T_f(\langle k \rangle^{2K+2s} e^{-ik\cdot x}) = \langle k \rangle^{2K+2s} \hat{f}(k). \tag{A.24}$$

Como $f \in L^2(Q_N)$ de la teoría usual de series de Fourier se sigue que $\hat{k} = b_k$, por lo tanto $\hat{T}(k) = c_k$. De esto se sigue que $\mathscr{F}$ es una biyección. Ahora sea T una distribución periódica, y para $u \in C_p^\infty(Q_N)$ fija, definimos

$$\phi_K := \sum_{|k|\le K} \hat{k}(k) e^{ik\cdot x}, \tag{A.25}$$

por el teorema A.3 $\phi_k \to \phi$ en $C_p^\infty(Q_N)$, y por lo tanto

$$\left(\sum_{|k|\le K} \hat{T}(k) e^{ik\cdot x}, \phi \right) = (2\pi)^N \sum_{|k|\le K} \hat{T}(k)\hat{\phi}(-k) = \sum_{|k|\le K} T(e^{-ik\cdot x})\hat{\phi}(-k) = T(\phi_K).$$

Como T es continua, tomando el límite esta converge a $T(\phi)$ □

Esto muestra que la serie de Fourier de una distribución periódica está bien definida, pero también que los coeficientes de Fourier determinan únicamente a la distribución. Finalmente vamos a considerar un corolario que permite intercambiar al derivada con la serie en un sentido distribucional.

Corolario A.8.1. *Sea T una distribución periódica, entonces para cualquier α multi-índice, se tiene que*

$$D^\alpha T = \sum_{k\in Z^N} (ik)^\alpha \hat{T}(k) e^{ik\cdot x}, \tag{A.26}$$

con la convergencia en el sentido distribucional

Demostración. Simplemente notamos que

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha T}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^N} D^\alpha T(e^{-ik\cdot x}) = \frac{1}{(2\pi)^N}(-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha e^{-ik\cdot x}) = \frac{1}{(2\pi)^N}(ik)^\alpha T(e^{-ik\cdot x}) \\ &= (ik)^\alpha \hat{T}(k).\end{aligned}$$

□

B. Teorema de la Función Inversa Global de Hadamard

Cuando es que un difeomorfismo local es también global es una pregunta complicada. Esto es fácil de ver considerando funciones como con e^z con z complejo que es una función muy regular y un difeomorfismo local, pero no global por la periodicidad. Para los propósitos de este trabajo, el teorema de la función inversa global de Hadamard nos permite dar una condición suficiente (cfr. [53] cap. 1-c). Antes de enunciarlo recordamos el teorema de la función inversa usual de cálculo diferencial

Teorema B.1. *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable. Y sea $p \in U$ tal que DF_p es invertible, entonces existe una vecindad V de p y una vecindad W de $F(p)$ tal que $F(U) = W$ y $F\restriction_V$ es un difeomorfismo (tiene inversa continuamente diferenciable).*

Aunque en cada punto la función se puede invertir si en todos lados su Jacobiano no es singular, no se sigue necesariamente que esto defina globalmente una inversa suave.

Teorema B.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable. Si Df_x es invertible para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y la norma de operador de Df_x esta acotada uniformemente con respecto a x, entonces f es un difeomorfismo global*

La demostración requiere del siguiente lema

Lema B.3. *Tomando las mismas hipótesis del teorema, tomamos $\Delta := [0,1] \times [0,1]$ y sea $\Gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ continua, para $0 \leq s \leq 1$ fija $\Gamma(s,\cdot)$ es diferenciable y existen $y_0, y_1 \in F(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Gamma(\cdot,0) \equiv y_0$ y $\Gamma(\cdot,1) = y_1$, entonces existe $\Gamma' : \Delta \to \mathbb{R}^n$ continua y diferenciable como Γ tal que*

$$F(\Gamma'(s,t)) = \Gamma(s,t) \qquad \forall (s,t) \in \Delta \tag{B.1}$$

Demostración. Sea x_0 tal que $y_0 = F(x_0)$, por el teorema de la función inversa local existen vecindades U de x_0 y V de y_0 tal que $F\restriction_U$ es un difeomorfismo a V. Ahora si consideramos el conjunto de funciones $\Gamma_t(s) = \Gamma(s,t)$ para $0 \leq t \leq 1$ fijo. Como Γ es uniformemente continua al ser una función continua en un compacto, se sigue que $\{\Gamma_t\}_{0\leq t\leq 1}$ es uniformemente equicontinua, y es claro que también es uniformemente acotada y converge puntualmente a y_0, por lo tanto se sigue del teorema de Arzela-Ascoli, que converge uniformemente a la función constante y_0, por lo que existe un $\epsilon > 0$ tal que $F([0,1] \times [0,\epsilon]) \subset V$ por lo tanto podemos definir $\Gamma'\restriction_{[0,1]\times[0,\epsilon]}(s,t) = F^{-1}\restriction_u \circ \Gamma\restriction_{[0,1]\times[0,\epsilon]}$. Sea a el supremo de las ϵ tal que se puede definir Γ' en $[0,1] \times [0,\epsilon]$, esto es, que está bien definida en $[0,1] \times [0,a)$, por la regla de la cadena, se tiene que

$$\partial_t \Gamma'(s,t) = \left(DF_{\Gamma'(t,s)}\right)^{-1} \partial_t \Gamma(t,s),$$

entonces por hipótesis existe una $K > 0$ tal que

$$|\partial_t \Gamma'(s,t)| \leq K |\partial_t \Gamma(t,s)| \leq K_s,$$

entonces del teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$|\Gamma'(s,t_1) - \Gamma'(s,t_0)| \leq K_s |t_1 - t_0|.$$

Como la función es entonces uniformemente continua existe una única extensión a la cerradura de su dominio o $[0,1] \times [0,a]$. Supongamos que $a < 1$ y consideremos $\gamma(s) = \Gamma(s,a)$. Para cada $0 \leq s \leq 1$, por el teorema de la función implícita local, podemos elegir vecindades de U_s de $\Gamma'(s,a)$ y una vecindad V_s de $\Gamma(s,a)$ tal que F es un difeomorfismo de U_S a V_s. Por compacidad existe una subcubierta finita de las de $\Gamma'([0,1],a)$, U_{s_i}, $i = 1,\ldots,N$. Esto significa que de la misma manera, que existen $\epsilon_i, i = 1,\ldots,N$ tal que Γ' está definida en $[0,1] \times [0, a + \epsilon_i)$. Por lo tanto Γ' se puede definir en $[0,1] \times [0, a + \text{mín}_i\, \epsilon_i)$, contradiciendo que a es el supremo, por lo tanto $a = 1$ □

Demostración B.2. Sea $y_0 = F(0)$, y sea $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Sea el segmento de recta que una a y_0 con y dado por $y(t) = yt + (1-t)y_0$. Como un caso particular de lema anterior, existe una curva $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(x(t)) = y(t)$. Entonces $F(x(1)) = y$, por lo que F es sobre.
Ahora, sean $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n 1$ tal que $F(x_0) = F(x_1) = y$. Consideramos los segmentos de recta

$x_0(t), x_1(t)$ que unen a 0 con x_0 y con x_1 respectivamente, entonces las curvas dadas por $y_i := F \circ x_i$, son curvas suaves que unen y_0 con y. Consideramos una homotopía entre estas curvas dadas por su suma convexa $\Gamma(s,t) = sx_1(t) + (1-s)x_0(t)$. Usando el lema, podemos encontrar $\Gamma' : \Delta \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(\Gamma'(s,t)) = \Gamma(s,t)$, con $\Gamma'(0,t) = x_0(t)$ y $\Gamma'(1,t) = x_1(t)$. Pero entonces, la curva $\Gamma'(s,1)$, con extremo x_0, x_1 es mapeada continuamente al punto y por F, entonces por el teorema de la función implícita local esto implica que $x_0 = x_1$. □

C. Integral de Riemann para Funciones Valuadas en espacios de Banach

Vamos a dar una construcción de integrales de Riemann para funciones valuadas en espacios de Banach. Típicamente las integrales de Riemann se definen para funciones de algún $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Para funciones valuadas en espacios vectoriales de dimensión finita uno puede extender la definición usando coordenadas y tomando la integral coordenada a coordenada, pero en espacios de dimensión infinita esto no es evidentemente aplicable. Esta construcción dará una forma canónica de generalizar la integral de Riemann a espacios de Banach (cfr. [20]).

Definición C.1. *Sea X un espacio de Banach y un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, decimos que una función $f : [a,b] \to X$ decimos que es escalonada, si existe una partición $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_\nu = b\}$ y $x_0, \ldots x_\nu \in X$ tal que*

$$f(t) = \chi_{[a,t_1]} x_0 + \sum_{i=1}^{\nu-1} \chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t) x_i, \tag{C.1}$$

y definimos el espacio de todas estas como $\mathscr{C}([a,b],X) \subset L^\infty([a,b],X)$. La integral de Riemann para funciones escalonadas las definimos como

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{\nu-1} x_i(t_{i+1} - t_i). \tag{C.2}$$

Notamos que $\mathscr{C}([a,b],X)$ es un subespacio vectorial de $L^\infty([a,b],X)$ y $I : \mathscr{C}([a,b],X) \to X$ definida como

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt, \tag{C.3}$$

es un mapeo lineal.

Teorema C.2. *(Integral de Riemann) El mapeo lineal I, se extiende de forma única a un operador lineal acotado $\overline{I} : \mathscr{C}([a,b],X)^{cl} \to X$ tal que*

$$\left\|\overline{I}(f)\right\| \leq (b-a)\|f\|_\infty, \tag{C.4}$$

además $C([a,b],X) \subset \mathscr{C}([a,b],X)^{cl} \subset L^\infty([a,b],X)$ y de tal forma que para $f \in \mathscr{C}([a,b],X)^{cl}$

$$\overline{I}(f) = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=1}^{\nu-1} f(c_i^\pi)(t_{i+1} - t_i) := \lim_{|\pi|\to 0} \overline{I}(f_\pi), \tag{C.5}$$

con $\pi = \{a = t_0 < t_1, \ldots < t_\nu = b\}$ un partición arbitraria, $|\pi| = \max_{0 \geq i \geq \nu-1} t_{i+1} - t_i$ y $c_i^\pi \in [t_i, t_{i+1}]$.

Nota. *El límite se tiene que entender en el sentido del límite de una red con el conjunto dirigido de particiones* $(\Pi([a,b]),\preceq)$.

Demostración. Puesto que para $f \in \mathscr{C}([a,b],X)$ se tiene que

$$\|I(f)\| \leq \sum_{i=0}^{\nu-1} \|x_i\|(t_{i+1}-t_i) \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{\nu-1}(t_{i+1}-t_i) = (b-a)\|f\|_\infty, \tag{C.6}$$

entonces I es un operador lineal acotado y existe una extensión única pues trivialmente $\mathscr{C}([a,b],X)$ es denso en $\mathscr{C}([a,b],X)^{cl}$. Sea $f \in \mathscr{C}([a,b],X)^{cl}$, y sea $\{f_n\} \subset \mathscr{C}([a,b],X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^\infty([a,b],X)$. Sea $\epsilon > 0$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\overline{I}(f - f_N)\right\| \leq (b-a)\|f - f_N\|_\infty < \epsilon/2$. Tomamos la partición π asociada a f_N y una refinamiento $\pi' = \{t_0,\ldots,t_\nu\}$ arbitrario y $\{c_i^{\pi'}\}$ arbitrarias, entonces podemos dar una representación natural de f_N usando π'

$$\begin{aligned}\left\|\overline{I}(f_N - f_{\pi'})\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{\nu-1} x_i^{N,\pi'} - f(c_i^{\pi'})(t_{i+1}-t_i)\right\| &\leq \sum_{i=0}^{\nu-1}\left\|f_N(c^{\pi'})_i - f(c_i^{\pi'})\right\|(t_{i+1}-t_i)\\ &\leq \sum_{i=0}^{\nu-1}\|f_N - f\|_\infty(t_{i+1}-t_i)\\ &< \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

entonces se sigue la última parte del teorema de la desigualdad del triangulo. □

Esta construcción es muy similar a la integral de Riemann usual, y muchas de las propiedades usuales se cumplen en este contexto.

Proposición C.3. *Sea* $f \in \mathscr{C}([a,b],X)^{cl}$ *y* $a \leq a' \leq b' \leq b$ *y* $c \in [a,b]$ *entonces se cumple que*

1. $\left\|\int_{a'}^{b'} f(t)dt\right\| \leq (b'-a')\sup\{\|f(t)\| : a' \leq t \leq b'\}$
2. $\int_{a'}^{c} f(t)dt = \int_{a'}^{b'} f(t)dt + \int_{b'}^{c} f(t)dt$
3. *La función* $F(t) := \int_a^t f(\tau)d\tau$ *es uniformemente continua*
4. *Si* Y *es otro espacio de Banach y* $T \in L(X,Y)$ *entonces* $Tf \in \mathscr{C}([a,b],Y)^{cl}$ *y*
$$T\left(\int_{a'}^{b'} f(t)dt\right) = \int_{a'}^{b'} Tf(t)dt$$
5. $\|f(\cdot)\| \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^{cl}$ *y*
$$\left\|\int_{a'}^{b'} f(t)dt\right\| \leq \int_{a'}^{b'} \|f(t)\|dt$$
6. *(Teorema fundamental del Cálculo) Si* $f \in C([a,b],X)$ *entonces* $F(t)$ *es diferenciable (fuertemente en la topología de* X*) y*
$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t)$$
.

Demostración. Para demostrar 1, 2, 4, se sigue de la definición que se cumplen para $f \in \mathscr{C}([a,b],X)$ y la proposición en general se sigue de un argumento de densidad. 3 se sigue directamente de 1. Para 5, que $\|f(\cdot)\| \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^{cl}$ se sigue de la continuidad de la norma. Notando la segunda desigualdad en C.6, es claro que se cumple para funciones escalonadas entonces se cumple en general por densidad. Para la primera parte de 6, vemos que por la propiedad 2 y 5 se cumple que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F(t+h)-F(t)-hf(t)}{h}\right\| &= \frac{1}{|h|}\left\|\int_t^{t+h} f(\tau)-f(t)d\tau\right\| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_t^{t+h}\|f(\tau)-f(t)\|d\tau,\end{aligned}$$

puesto f es continua en un compacto, es también uniformemente continua por lo que para h suficientemente pequeña, se puede acotar uniformemente el integrando por ϵ y de esto se sigue que el límite fuerte de las diferencias finitas existe y es $f(t)$. □

D. El Teorema de Compacidad de Kolmogorov-Riesz

Puesto que el teorema de Heine-Borel falla en espacios de dimensión infinita, es necesario recurrir a otras caracterizaciones de los conjuntos compactos. Recordamos que para espacios métricos, un conjunto es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado. El teorema de compacidad de Kolmogorov-Riesz da una caracterización para los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cfr. [24]). Primero se considerará un lema simple, pero muy útil.

Lema D.1. *Sea (X,d) un espacio métrico. Supongamos que, para toda $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$,un espacio métrico (W,d'), y un mapeo $\Phi : X \to W$ tal que $\Phi(X)$ es totalmente acotado, y si $x, y \in X$ son tales que $d'(\Phi(x),\Phi(y)) < \delta$, entonces $d(x,y) < \epsilon$. Entonces X es totalmente acotado*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, y $\delta, (W,d'), \Phi$ como en las hipótesis del lema. Como $\Phi(X)$ es totalmente acotado, existe una cubierta finita por vecindades de radio δ, $\{V_1,\dots,V_n\}$. Entonces se sigue directamente de las hipótesis que $\{\Phi^{-1}(V_1),\dots,\Phi^{-1}(V_n)\}$ es una cubierta de radio ϵ de X. Por lo que X es totalmente acotado. □

Teorema D.2. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $\mathscr{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ supongamos que*

1. *$\mathscr{F}$ es acotado,*
2. *Para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$, tal que para todo $f \in \mathscr{F}$*

$$\int_{\|x\|>R} |f(x)|^p < \epsilon^p, \tag{D.1}$$

3. *Para todo $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$, tal que para todo $f \in \mathscr{F}$, y $\|y\| < \rho$ se tiene*

$$\int |f(x+y)-f(x)|^P dx < \epsilon^p, \tag{D.2}$$

entonces $\mathscr{F}$ es totalmente acotado, y por lo tanto pre-compacto.

Demostración. Supongamos que $\mathscr{F}$ cumple 1,2, y 3. Sea entonces ϵ arbitrario y R y ρ como en las hipótesis. Sea Q el cubo abierto centrado en 0 de longitud $\rho/2$. Sean $Q_k = Q + k$ para $k \in \mathbb{Z}^n$, traslaciones de Q. Es claro que podemos tomar $Q_1, \ldots, Q_N$ tal que la cerradura de $\bigcup_i Q_i$ contiene a $B(0, R)$. Sea $P : L^P(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ dada por

$$Pf(x) = \begin{cases} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(x)dx & x \in Q_i, i = 1, \ldots, N \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

Usando la condición 2 se tiene que

$$\begin{aligned} \|f - Pf\|_{L^p}^p &= \int_{\bigcup_i Q_i} |f(x) - Pf|^p dx + \int_{(\bigcup_i Q_i)^c} |f(x)|^P dx \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} (f(x) - f(y))dy \right|^P dx + \epsilon^p. \end{aligned}$$

Notamos que la integral $1/|Q_i| \int_{Q_i}$ se puede ver como una integral sobre un espacio de medida sobre Q_i con medida total 1, por como $|\cdot|^p$ es convexa, por la desigualdad de Jensen se tiene que

$$\begin{aligned} \|f - Pf\|_{L^p}^p &\leq \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} |(f(x) - f(y)|^P dydx + \epsilon^p \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{2Q} |(f(x) - f(x+y)|^P dydx + \epsilon^p \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^n} |(f(x) - f(x+y)|^P dxdy + \epsilon^p \\ &< \epsilon^p + \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \epsilon^p dy = (2^n + 1)\epsilon^p, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se uso la condición 3. Entonces $\|f - Pf\|_{L^P} < (2^n + 1)^{1/p}\epsilon$, y por la desigualdad del triángulo inversa, se sigue que $\|f\|_{L^p} < (2^n + 1)^{1/p}\epsilon + \|Pf\|_{L^p}$. Notamos que P simplemente es la proyección ortogonal al subespacio generado por la base ortonormal $\{\chi_{Q_1}/|Q_i|, \ldots, \chi_{Q_N}/|Q_N|\}$, que es de dimensión finita, por lo tanto P es un operador acotado y como $\mathscr{F}$ es acotado por hipótesis, por lo que $P(\mathscr{F})$ es acotado en un espacio vectorial de dimensión finita por lo que es totalmente acotado. Si en la demostración de la última desigualdad cambiamos ϵ por $\epsilon/(2^n + 1)2$, notamos que si tomamos $\delta = \epsilon/2$ entonces para $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, notamos que si $\|P(f - g)\|_{L^p} < \delta$, reemplazando en la desigualdad que se acaba de conseguir que $\|f - g\|_{L^p} < \epsilon$. Por lo tanto se sigue del lema que $\mathscr{F}$ es totalmente acotado. $\square$

Referencias Bibliográficas

[1] ALBEVERIO, S., HAHN, A., AND SENGUPTA, A. N. Chern–simons theory, hida distributions, and state models. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 06*, supp01 (2003), 65–81.

[2] ALBEVERIO, S., HOEGH-KROHN, R. J., AND MAZZUCCHI, S. *Mathematical theory of Feynman path integrals: an introduction.* Springer, 2008.

[3] ARAI, A. *Analysis on Fock Spaces and Mathematical Theory of Quantum Fields.* WORLD SCIENTIFIC, 2018.

[4] ARNOLD, V. *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer, 1989.

[5] BEREZIN, F., AND SHUBIN, M. *The Schrödinger Equation.* Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1991.

[6] BORDER, K. Differentiating an integral: Leibniz' rule. `http://www.its.caltech.edu/~kcborder/Notes/LeibnizRule.pdf`.

[7] CAMERON, R. H. A family of integrals serving to connect the wiener and feynman integrals. *Journal of Mathematics and Physics 39*, 1-4 (1960), 126–140.

[8] CONWAY, J. B. *A Course in Functional Analysis: John B. Conway.* Springer-Verlag New York, 1985.

[9] DIRAC, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics.* Facsimile Publisher, 2013.

[10] EVANS, L. C. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, 2010.

[11] FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys. 20* (Apr 1948), 367–387.

[12] FEYNMAN, R. P., HIBBS, A. R., AND STYER, D. F. *Quantum Mechanics and Path Integrals.* Dover Publications, 2010.

[13] FUJIWARA, D. *Rigorous time slicing approach to feynman path integrals.* SPRINGER, 2019.

[14] FUJIWARA, D., AND KUMANO-GO, N. Smooth functional derivatives in feynman path integrals by time slicing approximation. *Bulletin des Sciences Mathématiques 129*, 1 (2005), 57 – 79.

[15] FUJIWARA, D., AND TSUCHIDA, T. The time slicing approximation of the fundamental solution for the schrödinger equation with electromagnetic fields. *J. Math. Soc. Japan 49*, 2 (04 1997), 299–327.

[16] GABRIELSE, G., AND HANNEKE, D. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. *AIP Conference Proceedings* (2006).

[17] GELFAND, I., FOMIN, S., AND SILVERMAN, R. *Calculus of Variations.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2000.

[18] Gelfand, I. M., Shilov, G. E., Graev, M. I., Vilenkin, N. Y., and Pyatetskii-Shapiro, I. I. *Generalized functions.* AMS Chelsea Publishing. Academic Press, New York, NY, 1964.

[19] Gel'fand, I. M., and Yaglom, A. M. Integration in functional spaces and its applications in quantum physics. *Journal of Mathematical Physics 1*, 1 (1960), 48–69.

[20] GORDON, R. Riemann integration in banach spaces. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics 21*, 3 (1991), 923–949.

[21] Grabinsky, G. *Teoria de la medida.* UNAM, 2011.

[22] Groenewold, H. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica 12*, 7 (1946), 405–460.

[23] Halmos, P. R. *Measure theory.* Springer, 2014.

[24] Hanche-Olsen, H., and Holden, H. The kolmogorov–riesz compactness theorem. *Expositiones Mathematicae 28*, 4 (2010), 385–394.

[25] Hida, T. White noise approach to feynman integrals. *J. Korean Math. Soc 38* (01 2001), 275–281.

[26] ICHINOSE, W. On convergence of the feynman path integral formulated through broken line paths. *Reviews in Mathematical Physics 11*, 08 (1999), 1001–1025.

[27] ICHINOSE, W. Convergence of the feynman path integral in the weighted sobolev spaces and the representation of correlation functions. *J. Math. Soc. Japan 55*, 4 (10 2003), 957–983.

[28] Ichinose, W. On the feynman path integral for nonrelativistic quantum electrodynamics. *Reviews in Mathematical Physics 22* (06 2010).

[29] Itô, K. Generalized uniform complex measures in the hilbertian metric space with their application to the feynman integral. In *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Contributions to Probability Theory, Part 1* (Berkeley, Calif., 1967), University of California Press, pp. 145–161.

[30] Jackson, J. D. *Classical electrodynamics; 2nd ed.* Wiley, New York, NY, 1975.

[31] Kelley, J. *General Topology.* Springer New York, 1975.

[32] Kinnunen, J. Sobolev spaces. `https://math.aalto.fi/~jkkinnun/files/sobolev_spaces.pdf`.

[33] Kufner, A. *Weighted Sobolev Spaces.* Wiley, 1985.

[34] Kufner, A., and Opic, B. How to define reasonably weighted sobolev spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 25* (1984).

[35] Kumano-go, H. *Pseudo-differential operators.* MIT Press, 1982.

[36] Montvay, I., and Münster, G. *Quantum Fields on a Lattice.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994.

[37] Nelson, E. Feynman integrals and the schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics 5*, 3 (1964), 332–343.

[38] Neumann, J. V., Beyer, R. T., and Wheeler, N. A. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press., 2018.

[39] Raymond, X. *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*. MIT Press, 02 2018.

[40] Reed, M., and Simon, B. *I: Functional Analysis*. Methods of Modern Mathematical Physics. Elsevier Science, 1981.

[41] Reed, M., and Simon, B. *II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Methods of Modern Mathematical Physics. Elsevier Science, 1981.

[42] Reiter, M., and Schuster, A. Fourier transform and sobolev spaces. `https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem08/sobolev_fourier.pdf`.

[43] Royden, H. L. *Real analysis / H.L. Royden, Stanford University, P.M. Fitzpatrick, University of Maryland, College Park.*, fourth edition [2018 reissue]. ed. Pearson, New York, NY, 2018 - 2010.

[44] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis / Walter Rudin*, 3d ed. ed. McGraw-Hill New York, 1976.

[45] Rudin, W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.

[46] Rudin, W. *Real and complex analysis*. McGraw Hill Education India, 2015.

[47] Sakurai, J. J., and Napolitano, J. *Modern Quantum Mechanics, Second edition*. Shi jie tu shu chu ban gong si, 2020.

[48] Salo, M. Fourier analysis and distribution theory. `http://users.jyu.fi/~salomi/lecturenotes/FA_distributions.pdf`.

[49] Scheck, F. *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*. Graduate Texts in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[50] Shkoller, S. Mat201c lecture notes: Introduction to sobolev spaces. `https://web.yonsei.ac.kr/nipi/lectureNote/sobolevspacebyShkoller.pdf`.

[51] Spohn, H. *Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field*. Cambridge University Press, 2004.

[52] Summers, S. J. A perspective on constructive quantum field theory, 2016.

[53] T., S. J. *Nonlinear functional analysis*. Notes on mathematics and its applications. Gordon and Breach Science Publishers, cop. 1969.

[54] Tannoudji, C. C., Roc, J. D., and Grynberg, G. *Atom - Photon Interactions: Basic Processes and Applications*. John Wiley, 1992.

[55] Weinberg, S., S, W., and de campos, T. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.