



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS**

MOVIMIENTO ORBITAL SATELITAL

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICA**

**PRESENTA:
ABIGAIL RIVERA ESUIVEL**

**TUTOR DE TESIS:
ARTURO OLVERA CHÁVEZ**



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a la memoria de mi padre,
Ya mi madre, por su amor incondicional.*

Agradecimientos

Después de algunos años de empezar esta tesis, tras escribir el último párrafo que lo conforma, escribo los agradecimientos como siempre lo planeé.

Me gustaría empezar por agradecer a mi padre Luis Rivera Fonrouge, a pesar de su partida pude disponer economicamente para poder terminar mis estudios, ésto gracias al trabajo que hizo durante su vida que me llena de orgullo por su gran ingenio, nos dejó un importante legado. Sé que estuvo y está muy orgulloso de lo que nunca tuve la dicha de contarle, que estudié la carrera de Matemáticas y aunque nunca imaginé estudiar dicha carrera era muy feliz de poder aprender temas tan interesantes, los cuales me hubiera gustado tanto compartir con él.

También quiero agradecer a mi mamá Marta Esquivel Escalera por ser pieza fundamental en la conclusión de la licenciatura, el termino de esta tesis es más logro suyo que mío, siempre será un logro compartido en todos los sentidos, por siempre apoyarme.

A mi hermana Jazmín Rivera Esquivel por darme ánimos, apoyarme y respaldarme siempre que hizo falta, por confiar en mí.

Al Dr. Gustavo Cruz Pacheco por liberarme de mis miedos relacionados a la carrera, motivarme de continuar, por ser un gran soporte.

A mi asesor de tesis el Dr. Arturo Olvera Chávez por la gran paciencia que me ha tenido y haberme guiado durante este largo camino que fue la creación de esta tesis, por compartirme su conocimiento, por sus platicas tan interesantes y divertidas, por ser gran amigo.

Por último pero no menos importante a mis sinodales de tesis ordenados por orden alfabético, el Dr. Renato Carlos Calleja Castillo, el Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña, la Dra. Clara Eugenia Garza Hume y el Dr. Panayiotis Panayotaros que se han tomado el tiempo para poder revisar el trabajo escrito y darme sus valiosos comentarios y correcciones para poder mejorar el trabajo y poder así concluir esta tesis, darle vuelta final a ese episodio de mi vida.

Índice general

Introducción	1
1. Algunos preliminares	3
2. Parámetros orbitales	7
3. Planteamiento general del problema	11
4. Tierra Esférica	15
4.1. Órbita inicial circular	15
4.2. Órbita inicial elíptica	32
4.2.1. Ángulos de Euler	32
4.2.2. Órbita satelital elíptica y coplanar a la órbita Lunar.	35
4.3. Simulaciones numéricas	50
5. Aproximación al caso real	55
6. Configuración general de la órbita satelital	61
Conclusión	71
APÉNDICE A	73
6.1. Cálculo de \dot{c}	73
6.2. Cálculo de \dot{e}	74
6.3. Cálculo de $\frac{di}{dt}$	78
6.4. Cálculo de $\dot{\Omega}$	79
6.5. Cálculo de $\dot{\omega}$	80
6.6. Cálculo de \dot{a}	81
APÉNDICE B	83
APÉNDICE C	89

Introducción

El problema que inspiró esta tesis fue entender el movimiento de la órbita de un satélite que sigue una órbita kepleriana que es perturbada por la fuerza de la luna y la fuerza que genera el achatamiento de la tierra.

Debido a que las fuerzas perturbativas que son la fuerza de la luna y la del achatamiento de la tierra son pequeñas en comparación con la fuerza de atracción de la tierra al satélite (la fuerza que la tierra ejercería sobre el satélite si fuera esférica), se decidió usar las ecuaciones diferenciales que describen el cambio de los elementos orbitales con respecto a dichas fuerzas perturbativas [POL], lo cual nos permitirá conocer cómo cambia la órbita del satélite con el tiempo mediante el enfoque de la teoría asintótica de promedios, sacando partido de la naturaleza oscilatoria del problema y de cuánto puede simplificar el problema.

La teoría asintótica de promedios se utiliza en este trabajo para encontrar el efecto promedio del cambio de los elementos orbitales al integrar éstos sobre un período del satélite y ver cuáles de éstos cambian, cuales no y a qué órdenes lo hacen. Suponemos que hay un parámetro pequeño, que en este caso resulta ser la excentricidad de la órbita del satélite y la razón entre los radios del satélite y de la luna. Esto se explicará con mayor detalle en el capítulo 4.

En el capítulo 1 se describe detalladamente el problema, al igual que su importancia y *grosso modo* el contexto histórico de éste.

Se explican los parámetros o elementos orbitales y sus ecuaciones de cambio en el capítulo 2.

Se revisa en el capítulo 3, así como el nombre del capítulo lo indica, el planteamiento general del problema. Se explica la importancia de subdividir el planteamiento general en subcasos los cuales además de simplificar la resolución del problema, toman cierta relevancia incluso en las características de los satélites según su función.

En el capítulo 4 se empieza a resolver el problema considerando la perturbación debida al movimiento de la Luna en órbita circular y considerando la tierra esférica. Se divide el problema en dos casos, cuando la órbita inicial satelital es circular y cuando es elíptica. En la primera subsección del segundo caso se describen los ángulos de Euler, piezas fundamentales en la resolución del problema cuando la órbita inicial satelital es elíptica. En este capítulo se introducen las principales nociones de la teoría asintótica

de promedios y se resuelve el primer caso con ella. También se hacen las simulaciones numéricas correspondientes al caso de la órbita inicial satelital elíptica, para demostrar la veracidad de los resultados obtenidos y la eficiencia del método utilizado.

En el penúltimo capítulo se resuelve el problema considerando únicamente la perturbación que la tierra achatada genera sobre el satélite, utilizando los resultados descritos en [OLV]. Por el principio de superposición de fuerzas newtonianas, se sumarán los resultados obtenidos con los del previo capítulo, obteniendo los resultados generales del capítulo anterior.

En el último capítulo, se estudia el más general de todos los casos revisado en esta tesis, cuando la configuración inicial de la órbita satelital es más compleja con respecto a la eclíptica lunar. Se completa con visión geométrica, al igual que se ha hecho a lo largo de la historia de la astronomía, el espectro del contenido de esta tesis.

Las ecuaciones que determinan el movimiento de los parámetros orbitales se deducen en el apéndice A, de acuerdo a cómo se explican en [POL], revisando cada uno de los elementos orbitales.

En el apéndice B, se demuestra la crucial relación entre la anomalía verdadera y el tiempo, misma que se explica en el capítulo 4, al igual que su importancia, con base en [MUE].

Por último, en el apéndice C, se explica el proceso límite, mediante el cual fundamentamos en el capítulo 6 que el achatamiento de la tierra se puede replicar matemáticamente en el estudio de esta tesis colocando dos masas negativas en cada uno de los polos de ésta.

Sin más, concluimos esta breve introducción.

Capítulo 1

Algunos preliminares

Newton, Kepler, Tycho Brahe y Copérnico, así como otros grandes personajes de la historia, fueron partícipes del gran descubrimiento que ha influido radicalmente en la historia moderna: todos los cuerpos celestes siguen una trayectoria establecida, que puede ser elíptica, parabólica, hiperbólica o casos degenerados de éstas. No obstante, dichas trayectorias cónicas no son del todo estáticas, pueden estar en constante cambio, debido principalmente a la atracción de cuerpos con gran masa (en comparación a la masa del cuerpo cuya trayectoria se considere, y considerablemente cerca de éste), capaz de ejercer una fuerza cuya magnitud altere el viaje del cuerpo sobre el enorme universo [NOR].

Estas fuerzas que cambian el rumbo de los cuerpos astronómicos, como bien su naturaleza lo indica, se denominan fuerzas perturbadoras y dependen de las circunstancias del objeto en cuestión con respecto a los demás astros cercanos. Por ejemplo, dependen de su masa y distancia con respecto a la de dichos cuerpos, pues las fuerzas gobernantes del movimiento de los cuerpos son las generadas por el campo gravitacional creado por los demás astros, y como dedujo Newton, sin involucrarnos en teorías relativistas, a primera escala dichas fuerzas son proporcionales al producto de las masas e inversamente proporcionales a las distancias que hay entre ellos, con constante de proporcionalidad G , la constante de gravitación universal [POL]. Además, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza que aplica la naturaleza a los dos cuerpos simultáneamente es de igual magnitud [MAR], como se muestra en la figura 1.1.

En este trabajo, nos embarcaremos en el estudio de cómo un cuerpo, cuya masa es despreciable con respecto a otros dos, con masas grandes, se mueve, considerando como fuerzas perturbadoras las que generan sobre el primer cuerpo las otras dos. Supondremos que la masa del primer cuerpo es tan pequeña, que la fuerza que ésta genera sobre los demás es despreciable y por ende consideraremos que por parte de esa masa no hay fuerza alguna que desemboque en ningún cuerpo a considerar importante en este trabajo.

Aunque consideraremos el movimiento de una masa pequeña perturbada por otras dos mucho mayores, en general, con el método que describiremos en las páginas posteriores, se podría conocer el cambio de la trayectoria de un cuerpo, considerando que

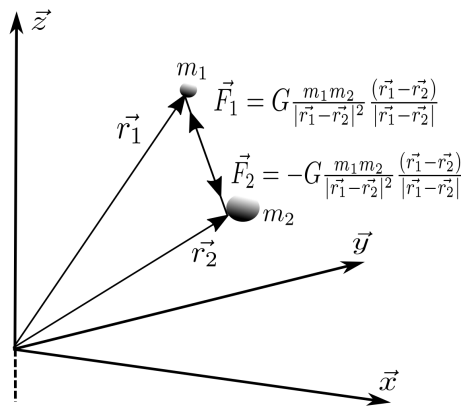


Figura 1.1: Fuerzas Newtonianas.

la fuerza perturbadora es generada por cualquier número de cuerpos, e incluso con fuerzas perturbadoras de otra naturaleza.

En particular, al estudiar el movimiento de cuerpos de suma importancia para la tecnología actualmente que son los satélites, se tomarán en cuenta en esta tesis, las principales dos fuerzas perturbadoras que a éstos atañen.

La primera fuerza es la fuerza perturbadora de la Luna, pues además de estar muy cerca de la Tierra y por ende de cualquier satélite, también es muy grande en comparación con éstos.

La segunda fuerza radica en que nuestro planeta no es completamente esférico, tiene un relieve pronunciado capaz de alterar el movimiento de cualquier satélite, pues a niveles exactos de precisión cualquier mínima imperfección cuenta, y si no se consideraran dichas perturbaciones, la trayectoria resultante podría no corresponder exactamente con la trayectoria observada. Una característica predominante, por ejemplo, es el hecho de que el diámetro de la Tierra sobre el ecuador mide 12,756 km, mientras que el diámetro de polo a polo mide 12,714 km, es decir, la Tierra está ligeramente achataada en los polos y abultada en el ecuador, resultado de la fuerza centrípeta a causa de la rotación de nuestro planeta a través del tiempo. De ahí, que en primera instancia, nuestro planeta se pueda aproximar por un *esferoide oblato* (véase la figura 1.2).

Como el satélite es mucho más próximo a la Tierra que a la Luna, las posibles deformidades que pudiera tener la Luna no nos interesarán, pues de existir, sus efectos serán casi nulos.

Desde hace unas décadas cuando la Unión Soviética puso en órbita el primer satélite artificial *Sputnik* para demostrar la viabilidad de los satélites artificiales en órbita terrestre, ha sido de suma importancia, por diversos motivos, poder predecir exactamente la posición de los satélites para todo tiempo. Pero como ya hemos comentado, el satéli-

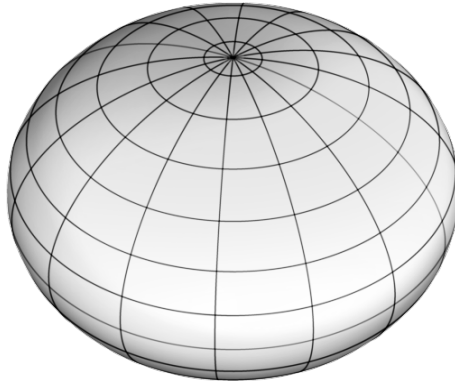


Figura 1.2: Esfeoride

te no solo avanza sobre una trayectoria elíptica, sino que conforme el tiempo avanza, y las fuerzas perturbadoras están presentes, los *parámetros orbitales* que determinan una y sólo una órbita, cambian con respecto al tiempo [POL].

Para ello es fundamental poder determinar la posición de una órbita elíptica con un número mínimo de parámetros (a fin de simplificar el problema) y con base en éstos poder determinar el cambio de la órbita al determinar su variación con respecto al tiempo. Dichos parámetros recibirán el nombre de parámetros orbitales, tema que se abordará en las páginas consecutivas.

Capítulo 2

Parámetros orbitales

Los parámetros o elementos orbitales son las variables que determinan la posición exacta de una órbita kepleriana elíptica en el espacio y el tiempo. Por facilidad los primeros serán ángulos, aunque bien se pueden utilizar otras coordenadas, por ejemplo las coordenadas de Jacobi.

Algunos de dichos ángulos sólo son un caso particular de los ángulos de Euler, que constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, móvil, respecto a otro sistema de referencia con ejes ortogonales fijos. Esto se puede visualizar en la figura 2.1, donde el sistema fijo es el sistema, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, y el móvil, $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$.

Además, como veremos en la sección 2 del capítulo 2, cualquier punto en el sistema, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, se puede encontrar en términos del sistema, $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$, por medio de dichos ángulos y por tanto la orientación de cualquier cuerpo en el sistema fijo.

En este caso, estudiaremos la órbita de un satélite alrededor de nuestro planeta, aunque siempre se puede pensar en la órbita de un astro en general. Por la anterior razón, de principio fijaremos en el origen del sistema fijo, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, el punto que concentra la mayor masa de la Tierra o el centro de la esfera que correspondería a la Tierra al suponerla esférica, pues como se sabe, la suma de las fuerzas generadas por todos los pedazos infinitesimales que conforman una esfera, es la misma que la fuerza generada si consideramos toda la masa concentrada de ésta, en su centro de masa [POL]. Por consiguiente, los parámetros orbitales son las variables que determinan una trayectoria elíptica alrededor de la Tierra, en el espacio, en un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra. Éstos son determinados por medio de dos sistemas de coordenadas ortonormales, uno fijo, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, y el otro variable, $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$.

El sistema coordenado variable, así como se define, está determinado por el vector del satélite, \vec{r} , el vector director para todo tiempo del cuerpo cuya trayectoria queremos conocer. El momento angular, $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$, es una cantidad que se conserva en el tiempo, siempre y cuando no haya ninguna fuerza perturbadora presente, y por último, $\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{c}$.

La excentricidad, e , y el semieje mayor, a , forman parte de los elementos más importantes de una órbita elíptica, pues determinan la forma de la elipse. Aunque pertenecen al conjunto de los elementos orbitales, como es evidente, no determinan su posición espacialmente.

También es un parámetro orbital el tiempo que tarda en pasar el satélite por el perigeo desde la posición inicial, τ , sin embargo, podemos ignorarlo puesto que a nuestro problema no contribuye mayormente, pues siempre podemos considerar a $\tau = 0$ en terminos prácticos como condición inicial, es decir, podemos pensar que desde el momento inicial que se manda el satélite al espacio, éste se encuentra ya en el perigeo, pues así se construirá su órbita, y cada vez que se reconstruya ésta, se hará de tal forma que el satélite esté en el perigeo.

Una característica importante de la trayectoria del satélite o del cuerpo en general, no sólo es la órbita sobre la cual éste avanza, sino que también es importante saber cómo éste gira cuando recorre su órbita. El momento angular, mide el estado de giro instantáneo, por medio de la magnitud del vector velocidad angular, \vec{c} .

Antes de especificar algo más sobre el tema, es importante para lo consecutivo recordar básicos aunque asombrosos resultados de la *Mecánica Celeste*. El movimiento de un cuerpo celeste, bajo la influencia de una fuerza de campo central, ¡se mueve sobre un plano! al cual se denomina *eclíptica*. Y, como ya lo habíamos mencionado se mueve con movimiento conoidal. En el caso elíptico, el vector excentricidad al igual que el vector velocidad, siempre pertenecerán al plano, ra , que por supuesto, alberga al movimiento del satélite al contener a los vectores, \vec{r} , y \vec{a} .

Los restantes tres parámetros orbitales determinarán la posición de la órbita del satélite en la eclíptica, y la eclíptica en el espacio, conociendo así perfectamente la trayectoria del satélite.

Dentro de la categoría de los elementos orbitales que determinan la posición de la órbita del satélite y cuando ya se le ha dado una forma en específico a esta órbita por medio de los parámetros e , y a , se encuentra el primer parámetro orbital; ω , el ángulo de la intersección de los planos, ra , y xy , es decir, la intersección de la *línea de nodos*, $\vec{\eta}$, con el vector excentricidad (véase la figura 2.1).

Los parámetros orbitales que determinan la eclíptica en el espacio son dos: el ángulo entre los ejes, \vec{z} , y \vec{z} ; i , es decir, la inclinación de la eclíptica sobre el plano, (\vec{x}, \vec{y}) , y Ω , el ángulo entre el eje \vec{x} y la línea de nodos, es decir, la orientación del plano inclinado (eclíptica), sobre el plano, (\vec{x}, \vec{y}) , los cuales como ya se había comentado, son algunos de los ángulos de Euler.

Resumiendo, nuestro principal objetivo será poder predecir la posición de un satélite alrededor de nuestro planeta para todo tiempo. Esto nos conduce naturalmente a conocer su trayectoria sobre un sistema coordenado fijo, el cual consideraremos co-

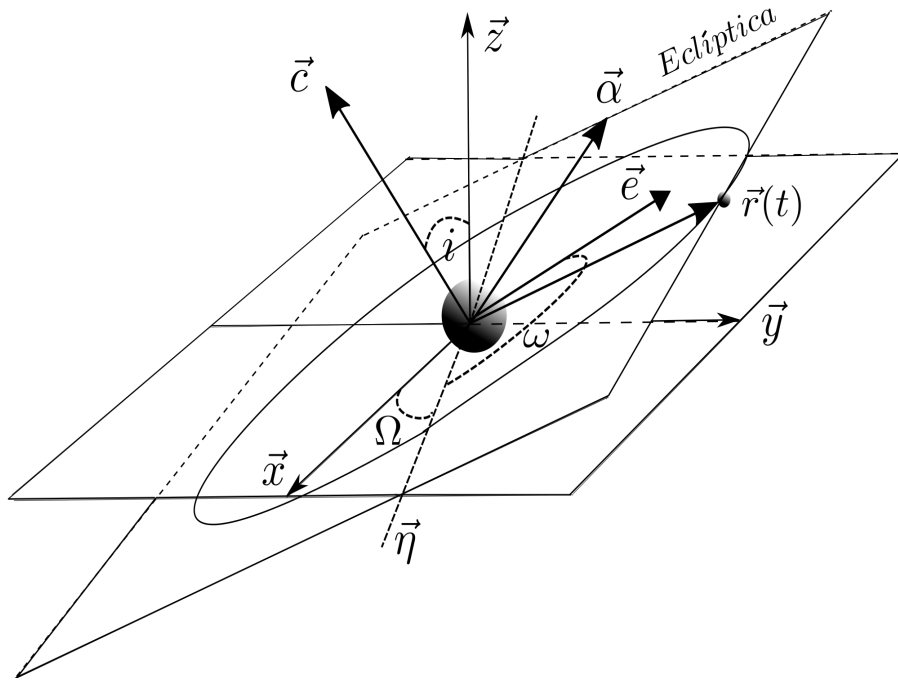


Figura 2.1: Parámetros orbitales.

mo, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, y por lo tanto, a utilizar los parámetros orbitales. Empero, al considerar las fuerzas de perturbación, éstos cambiarán conforme el tiempo avanza. Por suerte sabemos cómo cambian con respecto al tiempo en términos de, \vec{F}_α , \vec{F}_r y \vec{F}_c , proyecciones de la fuerza general perturbadora, \vec{F}_p , sobre los ejes, \vec{a} , \vec{r} y \vec{c} , respectivamente. Estos cambios son determinados por las ecuaciones diferenciales en (2.0.1), las cuales se deducirán en el apéndice A [POL].

$$\begin{aligned}
 \dot{c} &= rF_\alpha, \\
 \dot{e} &= \frac{c}{\mu}F_r \text{sen}(f) + \frac{c}{\mu}F_\alpha \frac{e + 2\cos(f) + e\cos^2(f)}{1 + e\cos(f)}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{r}{c}F_c \cos(\omega + f), \\
 \dot{\Omega} &= \frac{r}{c}F_c \frac{\text{sen}(\omega + f)}{\text{sen}(i)}, \\
 \dot{\omega} &= -\frac{c}{\mu e}F_r \cos(f) - \frac{r}{c}F_c \frac{\cos(i)\text{sen}(\omega + f)}{\text{sen}(i)} + \frac{c^2 + r\mu}{\mu ec}F_\alpha \text{sen}(f), \\
 \dot{a} &= 2\frac{a^2 e}{c}F_r \text{sen}(f) + 2\frac{a^2 c}{\mu r}F_\alpha, \\
 \dot{i} &= \frac{1}{\mu a e \text{sen}(f)} \left[r c - \frac{3}{2}\mu e(t - \tau)\text{sen}(f) \right] \dot{a} - \frac{ac}{\mu e \text{sen}(f)} \dot{e} \cos(f).
 \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

Capítulo 3

Planteamiento general del problema

Como hemos visto, el principal objetivo en esta tesis será poder rastrear la posición de los satélites en el tiempo y espacio. Para llevar a cabo dicha tarea, veremos en el principio de superposición de fuerzas gravitacionales el primer paso importante a estudiar en el problema que nos concierne.

Consideraremos únicamente la fuerza de atracción de la Luna y la generada por la forma achatada de la Tierra. Así, al sumar dichas fuerzas, el resultado será la fuerza perturbadora general que se aplicará sobre el satélite en cuestión.

Para representar la fuerza perturbadora ejercida por la forma de nuestro planeta, se hará uso de dos masas negativas, denominadas *bipolos*, situadas en la posición de los polos norte y sur de la Tierra. Esta aproximación es similar a la que se hace en electromagnetismo con los modos multipolares [JACK].

Se explicará en el Apéndice C por qué el procedimiento anterior simula una Tierra achatada.

Gráficamente, el planteamiento general del problema se ve plasmado en la figura 3.1.

M será la masa de la Tierra, m_s , la masa del satélite, m_L , la masa de la Luna, \vec{r}_L , el vector posición de la Luna, \vec{r} , el vector posición del satélite, $\pm\vec{\delta}$, el vector posición de los bipolos, y por último, r_L , r , y δ , sus respectivas normas.

Se considerará la órbita lunar circular, pues el valor de su excentricidad es 0.05, y las distancias Luna-satélite son tan grandes, en relación a las distancias Tierra-satélite, que esta aproximación no afectará mayormente la validez de nuestros cálculos.

Asimismo, como consideramos la mayor concentración de masa de la Tierra en el origen de coordenadas y la masa de los bipolos, así como la masa del satélite son pequeños, la órbita de la Luna básicamente no sufrirá variación alguna.

Con base en la anterior suposición, el centro de la órbita lunar permanecerá siem-

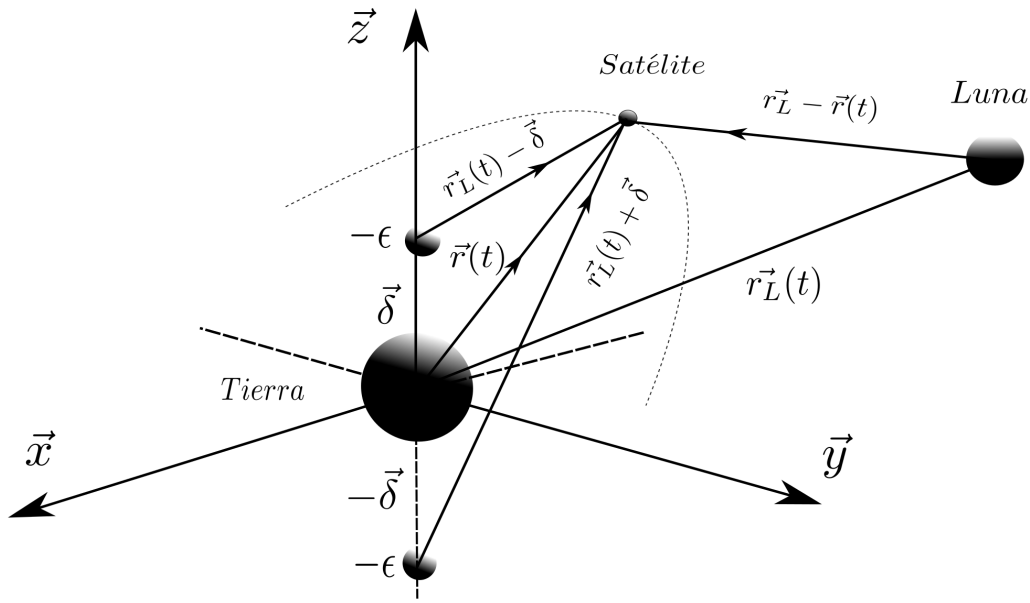


Figura 3.1: Planteamiento general.

pre fijo en el origen de los sistemas coordenados (véase la figura 3.2). Supondremos la frecuencia lunar, ω_L , constante, por ser la trayectoria de la Luna circular.

La masa que representa a la Tierra, M , es la que ejerce la fuerza de campo central sobre el satélite, así pues, origina su movimiento elíptico alrededor de la Tierra.

Las fuerzas gravitacionales ejercidas por la Luna y los bipolos generan otro tipo de impacto sobre la órbita, que son las fuerzas que perturbarán la órbita inicial elíptica del satélite, generada por nuestro planeta. La suma de las dos fuerzas anteriores será nuestra tan mencionada fuerza, \vec{F}_p , cuyas proyecciones sobre los ejes del sistema variable, $(\vec{r}, \vec{a}, \vec{c})$, serán las que decidirán el movimiento futuro de la posición de la órbita del satélite, pues son las que hacen variar los parámetros orbitales con el tiempo.

Así pues, la fuerza general que suma todas las anteriores sobre el satélite es,

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_p,$$

donde,

$$\vec{F}_c = \frac{GMm_s}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

y

$$\vec{F}_p = \frac{Gm_L m_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3} (\vec{r}_L - \vec{r}) + \frac{Gm_e m_s}{|\vec{r} - \vec{\delta}|^3} (\vec{r} - \vec{\delta}) + \frac{Gm_e m_s}{|\vec{r} + \vec{\delta}|^3} (\vec{r} + \vec{\delta}).$$

Aquí \vec{F}_c es la fuerza gravitacional principal generada por la mayor cantidad de masa

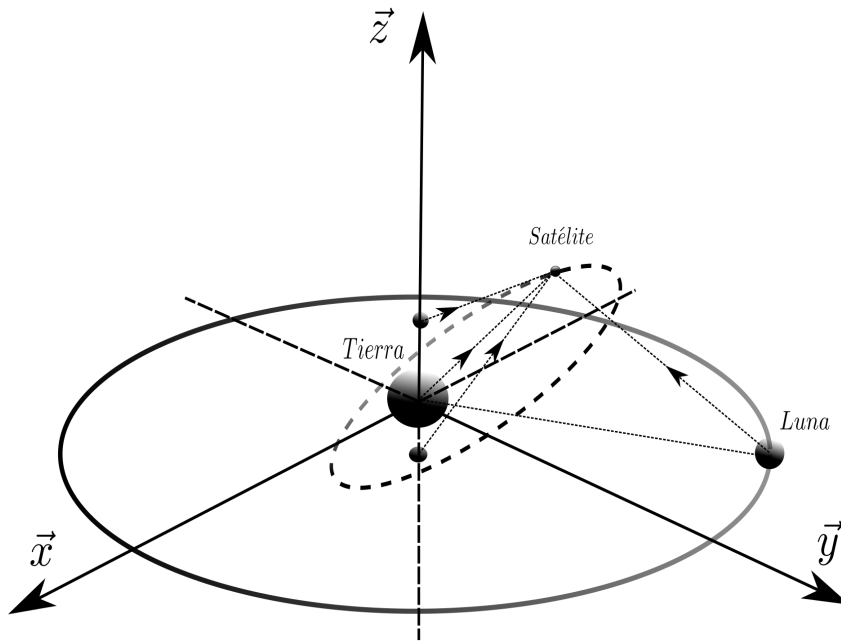


Figura 3.2: La órbita Lunar es circular.

de la Tierra y \vec{F}_p la fuerza que perturbará al satélite de su posición gravitacionalmente estable. Así, la fuerza total aplicada al satélite será,

$$\vec{F} = \frac{GMm_s}{|\vec{r}|^3} \vec{r} + \frac{Gm_L m_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3} (\vec{r}_L - \vec{r}) + \frac{Gm_e m_s}{|\vec{r} - \vec{\delta}|^3} (\vec{r} - \vec{\delta}) + \frac{Gm_s}{|\vec{r} + \vec{\delta}|^3} (\vec{r} + \vec{\delta}).$$

Ahora ampliaremos aún más nuestro problema ahondando nuestro estudio sobre los satélites. Los satélites son clasificados según su misión, y con base en ello las características de su órbita son especificadas, tienen una gran gama de propósitos, por ejemplo, hay satélites destinados a fines militares, astronómicos, también hay satélites de comunicaciones y de observación terrestre; entre éstos se encuentran los satélites meteorológicos y de navegación, por no hacer una lista más detallada.

Cada satélite tiene características particulares cuya funcionalidad requiera. Aunque existen muchas más características que distinguen a los satélites y a sus órbitas, la clasificación más general y la que nos interesa ahora, es la mostrada en la figura 3.3. En primer lugar están los satélites con la órbita más cercana a la Tierra, LEO (*Low Earth Orbit*), éstos orbitan en una trayectoria casi circular alrededor y a una distancia entre 700-1200 km de la Tierra, su período orbital varía de 80 a 150 minutos, se utilizan para proporcionar los datos geológicos y para la red telefónica satelital. Los satélites con órbita media, MEO (*Medium Earth Orbit*) alcanzan una distancia de 10,000 a 20,000 km a la Tierra, su forma también es circular, su período orbital es de 10 a 14 horas, primordialmente se usan para las comunicaciones de telefonía, televisión y para las mediciones de experimentos espaciales. Asimismo, los satélites con una excentricidad más pronunciada; HEO (*Highly Elliptical Orbit*), cuyas órbitas son muy elípticas, son utilizados para car-

tografiar la Tierra y para misiones secretas de espionaje, pues al acercarse al perigeo, éstos pasan muy cerca de la superficie terrestre; su período puede variar. Por último, los satélites geostacionarios, GEO, su período es de 24 horas, estando así siempre por encima de una locación de la Tierra y sólo se pueden conseguir muy cerca de un anillo de 35,786 km sobre el ecuador. Algunos también tienen órbita circular [NOR].

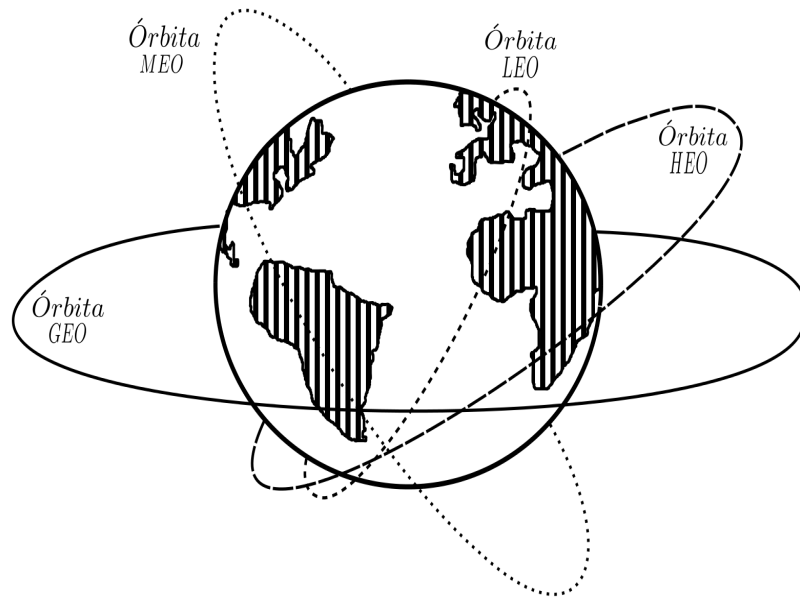


Figura 3.3: Tipos de órbitas.

Como se listó, los requerimientos de los distintos satélites son diversos y muy frecuentemente necesarios para una buena funcionalidad de estos artefactos. Sin embargo, estas órbitas iniciales son susceptibles al cambio, y es de vital importancia calcular estas disgresiones para poder corregirlas y poder ubicar al satélite sobre la esfera celeste.

Así, nuestro primordial cuestionamiento será: ¿cuál es el comportamiento en función del tiempo de una órbita establecida?, es decir, si la órbita queda fija o no, y si no, ¿cómo es que cambia?. Dicho de una forma más determinista, con base en que vimos que los parámetros orbitales determinan únicamente la posición y forma de una órbita en el espacio; ¿cuáles parámetros orbitales se quedan fijos al avanzar el tiempo?, ¿cuáles cambian?, y si es que cambian, ¿cómo lo hacen?.

Con una órbita establecida, citada en el párrafo anterior, nos referimos a que dicha órbita tiene condiciones iniciales muy específicas. Como hay varios tipos de órbitas, es necesario en este punto analizar nuestro problema en diferentes casos, que corresponden, también, a los diferentes tipos de satélites antes mencionados, con órbitas con condiciones iniciales dadas y estudiarlas con detenimiento.

Capítulo 4

Tierra Esférica

En este capítulo estudiaremos el caso más simple del problema que nos concierne. Como en primera aproximación el planeta Tierra se puede considerar como una esfera, podremos prescindir de la fuerza de atracción generada por los bipolos que simulan el efecto de la forma real de la Tierra sobre el satélite, reduciendo considerablemente el problema. Así, consideraremos el movimiento lunar como la única fuerza perturbadora.

Sin embargo, apesar de la simplicidad de esta sección, aquí se desarrollará el corazón teórico de esta tesis, que precederá a los cada vez más precisos casos.

Calcularemos así el cambio con respecto al tiempo de las órbitas de los satélites, tomando en cuenta dos órbitas iniciales.

Para ir elevando gradualmente la dificultad al problema, principio básico que utilizaremos a lo largo de este trabajo y haciendo nuestra aproximación cada vez más parecida a la realidad, la primera órbita que consideramos, al igual que la órbita lunar, será circular, pues incluso los satélites *LEO* y *MEO* tienen trayectorias circulares. Así que al tiempo que presentamos los conceptos requeridos para resolver problemas cada vez más difíciles, jugaremos con las distintas condiciones que requieren la vasta gama de los satélites en la actualidad.

La segunda órbita considerada será elíptica, realidad que concuerda, por ejemplo, con los satélites con órbita *HEO*. Aunado a este hecho, en estos primeros casos, consideraremos dichas órbitas coplanares a la órbita lunar, razón por la cual, se reducirá el problema aún más.

4.1. Órbita inicial circular

En esta sección, como en el resto del trabajo, se pensará la frecuencia de la Luna igual a k veces la frecuencia del satélite, a menos que se especifique lo contrario. Es decir, que al tiempo que el satélite da k vueltas, la Luna habrá dado una.

Como ya lo mencionamos, en este primer caso, consideraremos las órbitas lunar y satelital circulares y coplanares. Así pues, nuestros elementos orbitales satelitales iniciales satisfarán; $i_0 = 0$, $a_0 = r_0$, y $e_0 = 0$, y también, $\omega_L = k\omega_s$, donde ω_s es la frecuencia del satélite y ω_L la frecuencia lunar. Además, sólo consideraremos la fuerza perturbadora de la Luna, pues al pensar una Tierra esférica, se deberán omitir los bipolos y su respectiva acción.

Nótese que cuando la órbita satelital es circular, ω_0 y Ω_0 , no tienen sentido, pues por definición de los parámetros sólo existen para órbitas elípticas, no obstante, al avanzar el tiempo éstas variables podrían obtener un valor definido, en otras palabras, la órbita circular inicial podría deformarse a una órbita elíptica en el tiempo.

De acuerdo a lo visto en la sección 3, la fuerza total sobre el satélite sin considerar a los bipolos es,

$$\vec{F} = \frac{GMm_s}{r^3}\vec{r} + \frac{Gm_Lm_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3}(\vec{r} - \vec{r}_L), \quad (4.1.1)$$

donde

$$\vec{F}_p = \frac{Gm_Lm_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3}(\vec{r} - \vec{r}_L).$$

Como se ha especificado, iniciaremos con la órbita satelital circular. Así, definiremos $\eta = (\omega_s - \omega_L)t$, el ángulo entre el vector director del satélite y el de la Luna, como se puede visualizar en la figura 4.1.

Para poder encontrar las ecuaciones diferenciales gobernantes de los elementos orbitales, necesitamos encontrar las proyecciones de \vec{F}_p en el sistema $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$, pues son las que se necesita introducir en las ecuaciones (2.0.1).

Para encontrar fácilmente las proyecciones de \vec{F}_p en el sistema variable, primero hemos de encontrar el vector lunar proyectado en éste (figura 4.2).

Por trigonometría elemental, en el sistema coordenado, $(\vec{\alpha}, \vec{r})$, como $\vec{c} = \vec{z}$ e $i_0 = 0$, el vector lunar se escribe como,

$$\vec{r}_L = r_L \cos(\eta)\hat{r} + r_L \sin(\eta)\hat{\alpha}.$$

Por lo tanto, la fuerza perturbativa en el sistema, $(\vec{\alpha}, \vec{r})$, es

$$\vec{F} = \frac{Gm_Lm_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3}(\vec{r} - (r_L \cos(\eta)\hat{r} + r_L \sin(\eta)\hat{\alpha})).$$

Sin embargo, como, $\vec{r} = r\hat{r}$, entonces,

$$\vec{F} = \frac{Gm_Lm_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3}(r\hat{r} - (r_L \cos(\eta)\hat{r} + r_L \sin(\eta)\hat{\alpha})).$$

Reacomodando los términos,

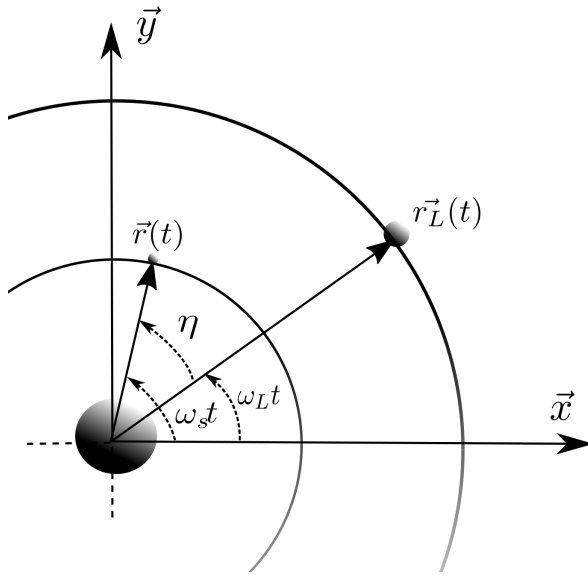


Figura 4.1: Ángulos lunar y satelital cuando sus órbitas son circulares.

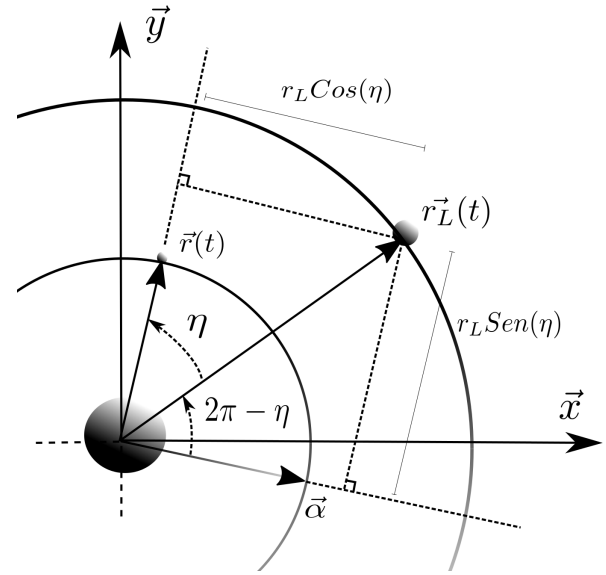


Figura 4.2: Proyecciones de \vec{F} .

$$\vec{F} = \left(\frac{Gm_L m_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3} r - \frac{Gm_L m_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3} r_L \cos(\eta) \right) \hat{r} - \frac{Gm_L m_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3} r_L \sin(\eta) \hat{\alpha}.$$

De esta forma podemos conocer a F_r y a F_α , explícitamente:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{Gm_L m_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3} (r - r_L \cos(\eta)), \\ F_\alpha &= -\frac{Gm_L m_s}{|\vec{r}_L - \vec{r}|^3} r_L \sin(\eta). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Como introdujimos en el capítulo primero, para calcular la variación de los parámetros orbitales, falta aún encontrar F_c . Sin embargo, en estas circunstancias la fuerza general sobre el satélite vive únicamente en el plano $(\vec{r}, \vec{\alpha})$, por lo tanto la proyección sobre la dirección de \vec{c} , es cero.

$$F_c = 0.$$

Por la ley de los cosenos,

$$|\vec{r}_L - \vec{r}|^{-3} = (r_L^2 + r^2 - 2r r_L \cos(\eta))^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.1.3)$$

Factorizando r_L^{-3} obtenemos,

$$|\vec{r}_L - \vec{r}|^{-3} = r_L^{-3} \left(1 + \left(\frac{r}{r_L} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{r_L} \right) \cos(\eta) \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Esta igualdad resultará fundamental para los cálculos posteriores. No obstante, como se podrá observar en las páginas posteriores, el problema no puede ser resuelto con

dicha expresión escrita de tal forma, pues sólo haría más difícil y hasta imposible resolverlo.

Para desentrañar el obstáculo de la *no linealidad*, recurriremos a ideas revolucionarias en la Matemática; la aproximación de una función no lineal por medio de series infinitas. En cálculo real un caso muy importante lo conforman las conocidas *series de Taylor* mediante funciones polinomiales.

Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.1.4)$$

aproximando por medio de series de Taylor alrededor del cero y truncando hasta orden 2, obtenemos que

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2. \quad (4.1.5)$$

Si $x = \left(\frac{r}{r_L}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_L}\right)\cos(\eta)$. Como $\frac{r}{r_L} \approx 0$, pues $r_L \gg r$, entonces $\left(\frac{r}{r_L}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_L}\right)\cos(\eta) \approx 0$. Así, vemos que sí procede expandir alrededor de $x = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\vec{r}_L - \vec{r}|^3 &\approx r_L^{-3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r^2}{r_L^2} - 2\frac{r}{r_L} \cos(\eta) \right) + \frac{15}{8} \left(\frac{r^2}{r_L^2} - 2\frac{r}{r_L} \cos(\eta) \right)^2 \right] \\ &\approx r_L^{-3} - \frac{3}{2} r^2 r_L^{-5} + 3r r_L^{-4} \cos(\eta) + \frac{15}{8} r^4 r_L^{-7} - \frac{15}{2} r^3 r_L^{-6} \cos(\eta) + \frac{15}{2} r^2 r_L^{-5} \cos^2(\eta). \end{aligned}$$

Sin embargo, como consideramos grande el valor de la distancia de la Luna a la Tierra, r_L , $\frac{1}{r_L}^n$ es muy pequeño, en particular si n es grande. Por este motivo en esta tesis, a menos que se especifique lo contrario, sólo nos quedaremos con potencias menores o iguales a 4 de $\frac{1}{r_L}$ en las proyecciones de la fuerza gravitacional general \vec{F}_α y \vec{F}_r . Por lo tanto,

$$|\vec{r}_L - \vec{r}|^3 \approx r_L^{-3} (1 + 3r r_L^{-1} \cos(\eta)).$$

Substituyendo en (4.1.2), F_α y F_r quedan como,

$$F_r = Gm_L m_s r_L^{-3} (r + 3r^2 r_L^{-1} \cos(\eta) - 3r \cos^2(\eta) - r_L \cos(\eta)), \quad (4.1.6)$$

$$F_\alpha = -Gm_L m_s r_L^{-2} \sin(\eta) (1 + 3r r_L^{-1} \cos(\eta)).$$

Se necesitará hacer un parentésis para introducir nuevos conceptos que desde tiempos de Kepler se introdujeron en la matemática celeste. El primero y más importante será la ecuación matemática que describe algebraicamente lo que Kepler enunció empíricamente, haciendo uso de los datos obtenidos por Tycho Brahe en sus observaciones, la segunda ley de Kepler [NOR]. Ésta alude a que el movimiento de cualquier cuerpo

celeste bajo la influencia de un campo central y cuya trayectoria sea elíptica, no será uniforme, de hecho, dicho cuerpo barre áreas iguales en tiempos iguales. La ecuación de Kepler describe cómo es su recorrido que por supuesto depende del tiempo; ésta se expresa matemáticamente de la siguiente forma,

$$u - e \operatorname{sen}(u) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau). \quad (4.1.7)$$

La cantidad u recibe el nombre de *anomalía excéntrica* y representa el ángulo determinado por el vector excentricidad con la recta determinada por la unión del origen y la intersección de la línea que corta a la elipse por donde pasa el cuerpo e interseca perpendicularmente la dirección del vector excentricidad, con la circunferencia que circunscribe a la elipse (véase la figura 4.3). La anomalía excéntrica u , está íntimamente relacionada con la posición del cuerpo, que a la vez se puede describir en términos del ángulo f , al cual se le denomina *anomalía verdadera* y que es el que va del eje excentricidad hasta la línea que une el origen y la posición del cuerpo [POL]. Así, como hemos visto, u está relacionado con la anomalía verdadera f , por ende la ecuación (4.1.7) describe cómo es que la partícula o cuerpo avanza con respecto el tiempo, al ser ésta una relación, aunque indirecta de f y t .

La variable μ es igual a MG , donde G es la constante de gravitación universal, y, en este caso, cuando el cuerpo que genera el principal campo central es la Tierra, M será la masa de ésta. Por último, y como ya habíamos descrito, τ es igual al tiempo que tarda en pasar el satélite de su posición inicial sobre el perigeo, y a es el semieje mayor de la trayectoria del cuerpo: la elipse.

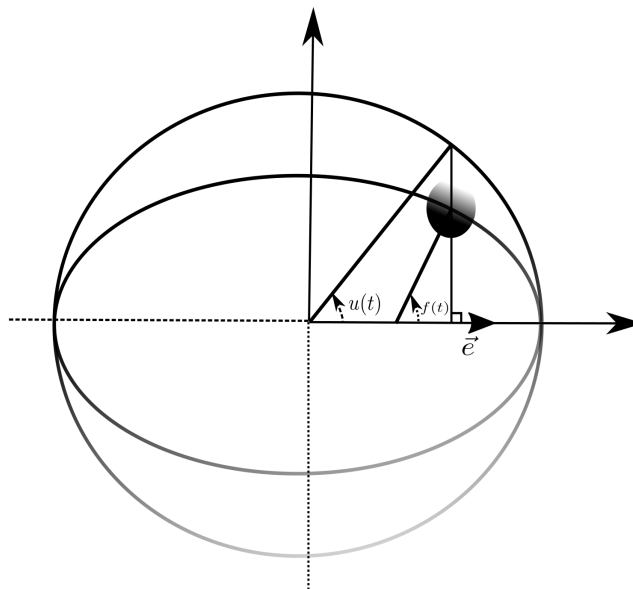


Figura 4.3: Anomalías.

Al lado derecho de la última igualdad, (4.1.7), se le denomina *movimiento medio* o *ano-*

malía media, pues es el movimiento uniforme que recorrería el cuerpo en la trayectoria circular que circunscribe a la elipse en la figura 4.3.

En el caso que estamos considerando, el principal cuerpo para el cual utilizaremos la ecuación de Kepler será el satélite del cual queremos conocer los cambios de la trayectoria.

Como en primera instancia hemos considerado su trayecto inicial una circunferencia, $e = 0$, entonces $u = f$, lo cual se puede corroborar geoméricamente de la construcción de u a partir de f (figura 4.3) o bien con la expresión analítica (4.1.7). Además, $a = r_s$, donde r_s es el radio de la órbita inicial del satélite. Así,

$$f = u = \sqrt{\frac{\mu}{r_s^3}}(t - \tau). \quad (4.1.8)$$

No obstante, en la página 8 se concluyó que en el caso particular cuando el cuerpo corresponde a un satélite podremos considerar a $\tau = 0$. Como $\eta = (\omega_s - \omega_L)t$, despejando t en (4.1.8) y sustituyendo en η , obtenemos,

$$\eta = \sqrt{\frac{r_s^3}{\mu}}(\omega_s - \omega_L)f. \quad (4.1.9)$$

Pero, como se especificó en la página 16 para los parámetros ω y Ω , aunque la órbita satelital sea circular en el tiempo inicial, ésta puede variar a elíptica al avanzar el tiempo, por lo tanto, aunque en el instante cero su semieje mayor coincida con el radio r_s de su órbita inicial, en general es una variable, así que le llamaremos simplemente a para ir de acuerdo con las ecuaciones diferenciales de los parámetros orbitales.

Por lo tanto,

$$\eta = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(\omega_s - \omega_L)f. \quad (4.1.10)$$

La tercera ley de Kepler dice que el cuadrado del período T de una órbita es proporcional, con constante de proporcionalidad igual a μ , al cubo del semieje mayor,

$$T^2 = \mu a^3.$$

Como la órbita lunar es circular fija para todo tiempo, su semieje mayor corresponde con el radio de su órbita, r_L . Así, el período de la Luna es $T_L = \sqrt{\mu}(r_L)^{\frac{3}{2}}$, por lo tanto su frecuencia es igual a $\omega_L = \frac{2\pi}{T_L} = 2\pi\mu^{-\frac{1}{2}}r_L^{-\frac{3}{2}}$. Además, la frecuencia lunar es k veces la frecuencia satelital, de ahí que la frecuencia del satélite sea igual a $\omega_s = \frac{1}{k}\omega_L = \frac{2\pi}{kT_L} = \frac{2\pi}{k}\mu^{-\frac{1}{2}}r_L^{-\frac{3}{2}}$, de lo cual, η puede ser escrito como,

$$\begin{aligned} \eta &= 2\pi\mu^{-\frac{1}{2}}r_L^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(\frac{1}{k} - 1\right)f \\ &= \beta f, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

donde $\beta = 2\pi\mu^{-\frac{1}{2}}r_L^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.

Lo que resulta realmente importante de la anterior igualdad, es decir, de poner una dependencia del tiempo con respecto a la anomalía verdadera, es que podemos observar la variación de los parámetros orbitales con respecto al cambio de la misma, lo cual nos será muy útil, ya que por su periodicidad, nos permitirá utilizar un método asintótico, desarrollado en sus inicios por Lagrange, para resolver sistemas de ecuaciones no lineales con gran facilidad: *La Teoría de Promedios* [OLV].

En estos momentos tenemos los ingredientes esenciales para poder calcular cómo cambia la órbita de un satélite si nuestro planeta fuera esférico y la órbita lunar como la satelital fueran, además de circulares, coplanares. Dichos ingredientes los conforman las ecuaciones diferenciales (2.0.1), (4.1.11), y las proyecciones F_α , F_r , y F_c ; (4.1.6). He aquí nuestro razonamiento.

Como ejemplo desarrollaremos los cálculos con el parámetro orbital e . Sustituyendo (4.1.11) en F_α , F_r , F_c , y éstas últimas en la ecuación diferencial de e , en (2.0.1), obtenemos,

$$\begin{aligned} \dot{e} = & Gm_L m_s \frac{c}{\mu} r_L^{-3} \sin(f) (r + 3r^2 r^{-1} \cos(\beta f) - 3r \cos^2(\beta f) - r_L \cos(\beta f)) \\ & - Gm_L m_s \frac{c}{\mu} \frac{e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)}{1 + e \cos(f)} r_L^{-2} \sin(\beta f) (1 + 3r r^{-1} \cos(\beta f)). \end{aligned}$$

Es importante ahora recordar que si una partícula tiene una trayectoria elíptica $r(t)$, ésta se puede escribir como,

$$r(t) = \frac{c^2}{\mu} \left(\frac{1}{1 + e \cos(f)} \right). \quad (4.1.12)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)). \quad (4.1.13)$$

Tendremos como objetivo poner en términos de f las ecuaciones diferenciales de los parámetros orbitales. Si sustituimos $r(t)$ en dichas ecuaciones, es fácil darse cuenta que los términos de $r(t)$ elevados a una potencia positiva son una dificultad, a diferencia de los términos elevados a potencias negativas, que en la integración no causan mayor problema, pues son suma de funciones trigonométricas que tienen una expansión en series de Fourier finita: composición de funciones matemáticas que no incluye una fracción cuyo denominador tenga funciones trigonométricas. Por este motivo, será necesario despejar el término de $r(t)$ elevado a la máxima potencia positiva en cada término de las ecuaciones diferenciales, que en este caso es $r^2(t)$, de esta manera cargaremos con una única dificultad: $r^2(t)$, multiplicando el lado derecho de las anteriores igualdades.

$$\dot{e} = \left(Gm_L m_s \frac{c}{\mu} r_L^{-3} \sin(f) (r^{-1} + 3r^{-1} \cos(\beta f) - 3r^{-1} \cos^2(\beta f) - r^{-2} r_L \cos(\beta f)) \right. \\ \left. - Gm_L m_s \frac{1}{c} (e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)) r_L^{-2} \sin(\beta f) (r^{-1} + 3r^{-1} \cos(\beta f)) \right) r^2.$$

Como f es un valor periódico, pues representa un ángulo, si ponemos las ecuaciones diferenciales de los elementos orbitales en función únicamente de f será más fácil poder encontrar la solución a las ecuaciones diferenciales de los parámetros orbitales, pues al integrar éstas, podremos hacerlo sobre solamente un período que puede corresponder a una sola vuelta del satélite, como a k vueltas, o incluso a un número racional a nuestra conveniencia. El anterior argumento muestra la necesidad de poner tales ecuaciones diferenciales en términos solamente de la variable f .

En este punto hemos podido expresar el lado derecho de las ecuaciones anteriores con respecto a f . Pero en el lado izquierdo de las ecuaciones los parámetros orbitales están siendo derivados con respecto al tiempo.

No obstante, si $p(f)$ es un parámetro orbital, por la regla de la cadena tenemos,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{df} \frac{df}{dt}. \quad (4.1.14)$$

Derivando la ecuación de Kepler con respecto al tiempo, se obtiene que,

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}} (1 + e \cos(f))^2, \quad (4.1.15)$$

de lo cual, por (4.1.14),

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}} (1 + e \cos(f))^2 \frac{dp}{df}. \quad (4.1.16)$$

Por último, substituyendo en nuestras ecuaciones diferenciales, (4.1.16), y (4.1.12), y despejando $\frac{dp(f)}{df}$, donde $p(f)$ es el correspondiente parámetro orbital, obtenemos,

$$\frac{de}{df} = \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ Gm_L m_s \frac{c}{\mu} r_L^{-3} \sin(f) (r^{-1} + 3r^{-1} \cos(\beta f) \right. \\ \left. - 3r^{-1} \cos^2(\beta f) - r^{-2} r_L \cos(\beta f)) \right. \\ \left. - Gm_L m_s \frac{1}{c} (e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)) r_L^{-2} \sin(\beta f) (r^{-1} + 3r^{-1} \cos(\beta f)) \right\} (1 + e \cos(f))^{-4}.$$

Haciendo uso del truco que utilizamos en la página 18, consideremos,

$$f(x) = (1 + x)^{-4}.$$

Desarrollando en serie de Taylor alrededor de $x = 0$,

$$f \approx 1 - 4x + 10x^2.$$

Por lo tanto, si $x = e \cos(f)$,

$$(1 + e \cos(f))^{-4} \approx 1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f). \quad (4.1.17)$$

Por última vez, sustituyendo (4.1.17) y a r^{-1} , es decir (4.1.13), en nuestras ecuaciones, obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{de}{df} = & \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ Gm_L m_s \frac{c}{\mu} r_L^{-3} \operatorname{sen}(f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \\ & - \frac{\mu^2}{c^4} r_L (1 + e \cos(f))^2 \cos(\beta f) + 3r_L^{-1} \cos(\beta f) \\ & \left. \left. - \frac{3\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \cos^2(\beta f) \right] \right. \\ & - Gm_L m_s \frac{1}{c} (e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)) r_L^{-2} \operatorname{sen}(\beta f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \right. \\ & \left. \left. + 3r_L^{-1} \cos(\beta f) \right] \right\} \\ & (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Análogamente, con los demás parámetros se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{dc}{df} = & -\frac{c^4}{\mu^2} Gm_L m_s \operatorname{sen}(\beta f) \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left[\frac{\mu}{c^2} r_L^{-2} (1 + e \cos(f)) \right. \\ & \left. + 3r_L^{-3} \cos(\beta f) \right] (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)), \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{df} = & \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ \frac{2a^2 e c^3}{\mu^2} Gm_L m_s r_L^{-3} \operatorname{sen}(f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \\ & - \frac{\mu^2}{c^4} r_L (1 + e \cos(f))^2 \cos(\beta f) + 3r_L^{-1} \cos(\beta f) \\ & \left. \left. - \frac{3\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \cos^2(\beta f) \right] \right. \\ & - \frac{2a^2 c^5}{\mu^3} Gm_L m_s r_L^{-2} \operatorname{sen}(\beta f) \left[\frac{\mu^3}{c^6} (1 + e \cos(f))^3 \right. \\ & \left. \left. + \frac{3\mu^2}{c^4} r_L^{-1} \cos(\beta f) (1 + e \cos(f))^2 \right] \right\} (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)), \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{df} = & \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ -\frac{c^5}{\mu^3 e} G m_L m_s r_L^{-3} \cos(f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \\
& - \frac{\mu^2}{c^4} r_L (1 + e \cos(f))^2 \cos(\beta f) + 3 r_L^{-1} \cos(\beta f) \\
& \left. \left. - \frac{3\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \cos^2(\beta f) \right] \right. \\
& - \frac{c^3}{\mu^3 e} G m_L m_s r_L^{-2} \sin(\beta f) \sin(f) \left[\frac{\mu^2}{c^2} (1 + e \cos(f))^2 \right. \\
& \left. \left. + \frac{\mu^2}{c^2} (1 + e \cos(f)) + 3\mu r_L^{-1} \cos(\beta f) (1 + e \cos(f)) + 3\mu r_L^{-1} \cos(\beta f) \right] \right\} \\
& (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)),
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

$$\frac{di}{df} = 0,$$

$$\frac{d\Omega}{df} = 0.$$

Hasta ahora hemos logrado que nuestras ecuaciones diferenciales estén completamente en términos de f , por lo que estamos listos para poder utilizar la teoría de promedios, cuyo primer principio en este trabajo, será el suponer que los parámetros orbitales no cambian en un período en el que la Luna da una vuelta completa, y el satélite da k , es decir, transcurren 24 horas. Esto resulta natural, pues dicho período de tiempo es pequeño y los parámetros orbitales no cambian significativamente en él.

Con el supuesto de que los parámetros orbitales no cambian en períodos cortos de tiempo, al integrar podemos tomar a los parámetros orbitales como constantes del lado derecho de las ecuaciones diferenciales anteriores.

Sin embargo, como en períodos largos los elementos orbitales podrían cambiar oscilatoriamente, nos interesará sumar el cambio neto de éstos, ejercido por la Luna en el período antes mencionado, tomando el tiempo que tarde en recorrer la Luna una vuelta como unidad de tiempo, y ver cómo cambian los elementos orbitales al dar ésta un número entero de vueltas. Para llevar a cabo lo anterior se necesitará integrar el cambio de los parámetros orbitales cuando f va de 0 a $2\pi k$. A ese resultado le llamaremos el promedio de un parámetro orbital $\langle \dot{P} \rangle$ [OLV], el cual está dado por,

$$\langle \dot{P} \rangle = \int_0^{2k\pi} \frac{dP}{df} df. \tag{4.1.22}$$

Como lo mencionamos, al integrar en dicho intervalo el cambio del parámetro orbital naturalmente se rescala el tiempo, de tal forma que el nuevo tiempo, \bar{t} , está dado como $\bar{t} = \bar{T} t$, donde \bar{T} es el tiempo en que la Luna da una vuelta y el satélite k . Por lo tanto, el nuevo tiempo se contará en rotaciones de la Luna alrededor de nuestro planeta (véase la figura 4.4).

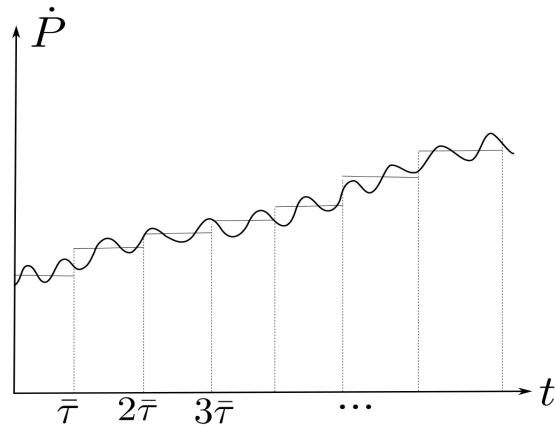


Figura 4.4: Promedio del cambio del parámetro orbital P .

$\langle \dot{P} \rangle$ será la suma del cambio del parámetro orbital P en una vuelta. Por lo tanto, será el cambio del parámetro orbital con respecto al tiempo $\bar{\tau}$. Para conocer el valor de los parámetros orbitales en el tiempo largo, $\bar{\tau}$, necesariamente hemos de integrar $\langle \dot{P} \rangle$ con respecto de $\bar{\tau}$. Figura 4.5 y 4.6.

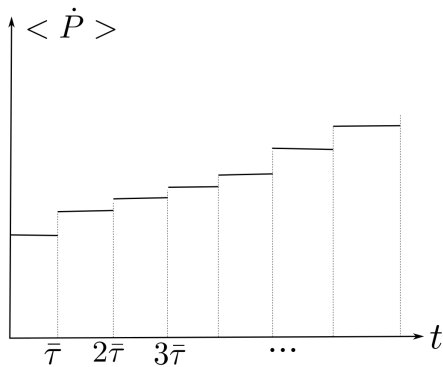


Figura 4.5: Promedio de \dot{P} en el tiempo t

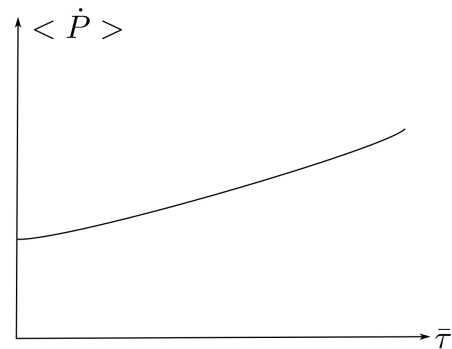


Figura 4.6: Promedio de \dot{P} en el tiempo τ

Así vemos que para conocer la dinámica del movimiento de la trayectoria del satélite, será fundamental conocer los promedios evaluados de los parámetros.

Para poder integrar fácilmente el lado izquierdo de las últimas ecuaciones diferenciales que obtuvimos; (4.1.18), (4.1.19), (4.1.20), (4.1.21), haremos uso de las siguientes identidades trigonométricas, que se deducen muy fácilmente de las fórmulas de adición y substracción de ángulos del seno y coseno y veremos de esta forma cuánto se simplificarán dichas integrales.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(mx) \cos(nx) &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x) \right\}, \\
\operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(m-n)x - \cos((m+n)x) \right\}, \\
\cos(mx) \cos(nx) &= \frac{1}{2} \left\{ \cos((m-n)x) + \cos((m+n)x) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Para simplificar el integrando de las ecuaciones (4.1.18), (4.1.19), (4.1.20), (4.1.21) utilizaremos Maxima, sistema de álgebra computacional, cuyo método computarizado en esencia se basa en aplicar repetidamente las igualdades (4.1.23), simplificando así las funciones trigonométricas, de tal forma que todos los integrandos se reduzcan a series de Fourier finitas, es decir, series de funciones de alguna constante por $\operatorname{sen}(\text{"algo"} f)$ y $\cos(\text{"algo"} f)$.

A modo de ejemplo, mostraremos el procedimiento de la ecuación diferencial para c . Si introducimos la función trigonométrica a simplificar del lado derecho de (4.1.19) en Maxima, ésta quedará como,

$$\begin{aligned}
c: & -c \wedge 4 / \mu \wedge 2 * G * \mathbf{mL} * \mathbf{ms} * \sin(\mathbf{beta} * f) \\
& * \operatorname{sqr}t(a \wedge 3 * (1 - e \wedge 2) \wedge 3 / \mu) * (\mathbf{rL} \wedge (-2) * \mu / c \wedge 2 * (1 + e * \cos(f)) \\
& + 3 * \mathbf{rL} \wedge (-3) * \cos(\mathbf{beta} * f)) * (1 - 4 * e * \cos(f) + 10 * e \wedge 2 * \cos(f) \wedge 2),
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

donde, μ , r_L y r_s representan a μ , r_L y a r_s respectivamente. Le aplicaremos a (4.1.24), en Maxima, una composición de instrucciones que serán aplicadas repetidamente.

Primero, se aplicará la función,

$$\mathit{resultadoc} : \operatorname{expand}(c); \tag{4.1.25}$$

Hecho lo anterior, en el resultado quedarán potencias de e mayores a 3. Para simplificar la expresión, quitaremos todos los términos multiplicados por dichas potencias mediante la instrucción, $\mathit{resultadoc} : e \wedge 4 = 0, e \wedge 5 = 0, e \wedge 6 = 0$, que cambiará las variables e^4 , e^5 , y e^6 por 0, hasta la máxima potencia de e , en dicha expresión, pues en el caso de c , la máxima potencia de e en (4.1.25), es 6. Así, la expresión estará escrita en términos únicamente de sumas de funciones trigonométricas, con potencias de e menores o iguales a 3 positivas.

Una vez escrita la variable en la sintaxis necesaria, se le aplicará el comando (4.1.26). Los comandos (4.1.26) y (4.1.25), se explicarán con mayor detalle en la próximas páginas, cuando se estudien los casos generales.

$$\mathit{resultadofinalc} : \operatorname{factor}(\operatorname{trigreduce}(\operatorname{trigexpand}(\mathit{resultadoc}), f)); \tag{4.1.26}$$

Si escribimos el resultado que finalmente obtuvimos con Maxima, tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{dc}{df} = & -\frac{Gm_L m_s c^2}{4\mu^2 r_L^3} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [5e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta+3)f) \\ & +6e^2 \mu r_L \text{sen}((\beta+2)f) + 15e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta+1)f) - 6e \mu r_L \text{sen}((\beta+1)f) \\ & +12e^2 \mu r_L \text{sen}(\beta f) + 4\mu r_L \text{sen}(\beta f) + 15e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta-1)f) \\ & -6e \mu r_L \text{sen}((\beta-1)f) + 6e^2 \mu r_L \text{sen}((\beta-2)f) + 5e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta-3)f) \\ & -12c^2 e \text{sen}((2\beta+1)f) - 12c^2 e \text{sen}((2\beta-1)f) + 15c^2 e^2 \text{sen}(2(\beta+1)f) \\ & +30c^2 e^2 \text{sen}(2\beta f) + 6c^2 \text{sen}(2\beta f) + 15c^2 e^2 \text{sen}(2(\beta-1)f)]. \end{aligned}$$

Así, si dejamos a Maxima simplificar nos la vida con las ecuaciones diferenciales de los demás parámetros, obtendremos,

$$\begin{aligned} \frac{de}{df} = & -\frac{Gm_L m_s c}{16\mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [42e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+4)f) + 24e^2 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+3)f) \\ & +160e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+2)f) - 28e \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+2)f) + 36e^2 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+1)f) \\ & +24\mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+1)f) + 204e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}(\beta f) - 24e \mu^2 r_L^2 \text{sen}(\beta f) \\ & +24e^2 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-1)f) + 8\mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-1)f) + 96e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-2)f) \\ & -12e \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-2)f) + 12e^2 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-3)f) + 10e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-4)f) \\ & -12c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((3\beta+2)f) + 15c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((3\beta+1)f) \\ & +6c^2 e \mu r_L \text{sen}((3\beta+1)f) - 15c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((3\beta-1)f) - 6c^2 e \mu r_L \text{sen}((3\beta-1)f) \\ & +12c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((3\beta-2)f) + 78c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((2\beta+3)f) \\ & +126c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((2\beta+1)f) + 36c^2 \mu r_L \text{sen}((2\beta+1)f) + 66c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((2\beta-1)f) \\ & +12c^2 \mu r_L \text{sen}((2\beta-1)f) + 18c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((2\beta-3)f) + 45c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta+3)f) \\ & +15c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(2(\beta+2)f) - 36c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((\beta+2)f) + 15c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(3(\beta+1)f) \\ & +120c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(2(\beta+1)f) - 66c^2 e \mu r_L \text{sen}(2(\beta+1)f) + 45c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta+1)f) \\ & +18c^2 e \mu r_L \text{sen}((\beta+1)f) + 210c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(2\beta f) - 60c^2 e \mu r_L \text{sen}(2\beta f) \\ & -15c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(3(\beta-1)f) + 120c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(2(\beta-1)f) - 18c^2 e \mu r_L \text{sen}(2(\beta-1)f) \\ & -45c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta-1)f) - 18c^2 e \mu r_L \text{sen}((\beta-1)f) + 15c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(2(\beta-2)f) \\ & +36c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}((\beta-2)f) - 45c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((\beta-3)f) - 20c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(4f) \\ & +36c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}(3f) - 40c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(2f) - 24c^2 e \mu r_L \text{sen}(2f) \\ & +36c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}(f) + 8c^2 \mu r_L \text{sen}(f) - 60c^4 e^2 \text{sen}((\beta+3)f) + 48c^4 e \text{sen}((\beta+2)f) \\ & -60c^4 e^2 \text{sen}((\beta+1)f) - 24c^4 \text{sen}((\beta+1)f) + 60c^4 e^2 \text{sen}((\beta-1)f) + 24c^4 \text{sen}((\beta-1)f) \\ & -48c^4 e \text{sen}((\beta-2)f) + 60c^4 e^2 \text{sen}((\beta-3)f)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{df} = & -\frac{Gm_L m_s a^2}{4c\mu^2 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [22e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+3)f) - 2e^2 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+2)f) \\
& + 60e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta+1)f) + 4e^2 \mu^2 r_L^2 \text{sen}(\beta f) + 8\mu^2 r_L^2 \text{sen}(\beta f) \\
& + 54e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-1)f) - 8e\mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-1)f) + 6e^2 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-2)f) \\
& + 16e^3 \mu^2 r_L^2 \text{sen}((\beta-3)f) + 33c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((2\beta+3)f) + 81c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((2\beta+1)f) \\
& - 6c^2 e \mu r_L \text{sen}((2\beta+1)f) + 63c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((2\beta-1)f) - 18c^2 e \mu r_L \text{sen}((2\beta-1)f) \\
& + 15c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}((2\beta-3)f) + 18c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}(2\beta f) + 12c^2 \mu r_L \text{sen}(2\beta f) \\
& + 18c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}(2(\beta-1)f) + 6c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(3f) - 6c^2 e^2 \mu r_L \text{sen}(2f) \\
& + 6c^2 e^3 \mu r_L \text{sen}(f) + 4c^2 e \mu r_L \text{sen}(f) - 30c^4 e^3 \text{sen}((\beta+3)f) \\
& + 24c^4 e^2 \text{sen}((\beta+2)f) - 30c^4 e^3 \text{sen}((\beta+1)f) - 12c^4 e \text{sen}((\beta+1)f) \\
& + 30c^4 e^3 \text{sen}((\beta-1)f) + 12c^4 e \text{sen}((\beta-1)f) - 24c^4 e^2 \text{sen}((\beta-2)f) \\
& + 30c^4 e^3 \text{sen}((\beta-3)f)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{df} = & \frac{Gm_L m_s c}{8e\mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [5e^4 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta+5)f) + 21e^3 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta+4)f) \\
& + 20e^4 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta+3)f) + 12e^2 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta+3)f) + 58e^3 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta+2)f) \\
& - 14e\mu^2 r_L^2 \cos((\beta+2)f) + 30e^4 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta+1)f) + 18e^2 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta+1)f) \\
& + 12\mu^2 r_L^2 \cos((\beta+1)f) + 48e^3 \mu^2 r_L^2 \cos(\beta f) - 8e\mu^2 r_L^2 \cos(\beta f) \\
& + 20e^4 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta-1)f) - 4\mu^2 r_L^2 \cos((\beta-1)f) + 6e^3 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta-2)f) \\
& + 6e\mu^2 r_L^2 \cos((\beta-2)f) + 5e^4 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta-3)f) - 6e^2 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta-3)f) \\
& - 5e^3 \mu^2 r_L^2 \cos((\beta-4)f) + 33c^2 e^2 \mu r_L \cos((2\beta+3)f) + 51c^2 e^2 \mu r_L \cos((2\beta+1)f) \\
& + 18c^2 \mu r_L \cos((2\beta+1)f) + 3c^2 e^2 \mu r_L \cos((2\beta-1)f) - 6c^2 \mu r_L \cos((2\beta-1)f) \\
& - 15c^2 e^2 \mu r_L \cos((2\beta-3)f) + 15c^2 e^3 \mu r_L \cos(2(\beta+2)f) \\
& + 45c^2 e^3 \mu r_L \cos(2(\beta+1)f) - 30c^2 e \mu r_L \cos(2(\beta+1)f) + 45c^2 e^3 \mu r_L \cos(2\beta f) \\
& - 18c^2 e \mu r_L \cos(2\beta f) + 15c^2 e^3 \mu r_L \cos(2(\beta-1)f) + 12c^2 e \mu r_L \cos(2(\beta-1)f) \\
& + 5c^2 e^3 \mu r_L \cos(4f) + 6c^2 e^2 \mu r_L \cos(3f) + 20c^2 e^3 \mu r_L \cos(2f) \\
& - 6c^2 e \mu r_L \cos(2f) + 18c^2 e^2 \mu r_L \cos(f) + 4c^2 \mu r_L \cos(f) + 15c^2 e^3 \mu r_L \\
& - 6c^2 e \mu r_L - 30c^4 e^2 \cos((\beta+3)f) + 24c^4 e \cos((\beta+2)f) - 90c^4 e^2 \cos((\beta+1)f) \\
& - 12c^4 \cos((\beta+1)f) + 48c^4 e \cos(\beta f) - 90c^4 e^2 \cos((\beta-1)f) - 12c^4 \cos((\beta-1)f) \\
& + 24c^4 e \cos((\beta-2)f) - 30c^4 e^2 \cos((\beta-3)f)],
\end{aligned}$$

$$\frac{di}{df} = 0,$$

$$\frac{d\Omega}{df} = 0.$$

Ya con las últimas ecuaciones en mano, podremos conocer el comportamiento de los elementos orbitales con respecto al tiempo, al promediar o integrar las ecuaciones obtenidas.

Sin embargo, aquí tenemos una ramificación de posibles valores para β y k . No obstante, como los números racionales son densos en \mathbb{R} , sólo tomaremos los valores de las variables antes dichas en los números racionales.

Dentro de dichas ramificaciones, está el considerar la frecuencia armónica de nuestro sistema Luna-satélite, es decir, suponer que $\beta \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, de manera que el satélite da un número entero de vueltas, k , al tiempo que la Luna da una vuelta completa. Aunque por la forma en que se expresa β originalmente, es decir, por contener al número π multiplicando a toda la expresión, página 21, necesariamente es un número irracional, por fines prácticos al análisis de los siguientes casos se revisará este caso.

Hemos logrado que las ecuaciones diferenciales de los parámetros orbitales dependan únicamente de la anomalía verdadera del satélite, f . También que su parte derecha contenga al integrando que nos interesa ya simplificado, como suma de funciones de alguna constante por $\text{sen}(\text{"algo"} f)$ y $\text{cos}(\text{"algo"} f)$, donde ese "algo", simboliza la constante que multiplica a la variable f dentro de las anteriores funciones trigonométricas. Para unificar tales sumandos, nombraremos a dicha constante generalizada como α , que como podemos observar de las últimas ecuaciones diferenciales obtenidas en cada sumando del lado derecho, depende de β linealmente. Por consiguiente $\alpha k \in \mathbb{Z}$, pues $k \in \mathbb{N}$, y para todo posible valor de $\alpha(\beta)$ que se considere, éste es un número entero, pues inicialmente se consideró $\beta \in \mathbb{Z}$.

Como $\alpha k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\text{sen}(k\alpha(2\pi)) = 0$, y $\text{cos}(k\alpha(2\pi)) = 1$.

En consecuencia, para todo valor que tome α tal que $\beta \in \mathbb{Z}$, se sigue que,

$$\begin{aligned} \int_0^{2k\pi} \text{cos}(\alpha f) df &= 0, \\ \int_0^{2k\pi} \text{sen}(\alpha f) df &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

De aquí, el lector puede notar cuánto se simplifica el cambio evaluado sobre el período que hemos considerado de nuestros parámetros orbitales! Sólo sobrevivirán los términos constantes del lado derecho de las ecuaciones diferenciales.

Procediendo a calcular los promedios de los parámetros orbitales, como se muestra en (4.1.22), obtenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \dot{c} \rangle &= 0, \\
\langle \dot{e} \rangle &= 0, \\
\langle \dot{a} \rangle &= 0, \\
\langle \dot{i} \rangle &= 0, \\
\langle \dot{\Omega} \rangle &= 0, \\
\langle \dot{\omega} \rangle &= \frac{Gm_L m_s c \pi k}{4\mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [15c^2 e^2 \mu r_L - 6c^2 \mu r_L].
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

Como vimos, $\langle \dot{p} \rangle$, es el cambio neto de p en el tiempo $\bar{\tau}$. Por lo tanto, integrando las ecuaciones en (4.1.28) con respecto de $\bar{\tau}$, obtenemos el valor de los parámetros orbitales en términos de $\bar{\tau}$.

$$\begin{aligned}
e &= e_0, \\
a &= a_0, \\
c &= c_0, \\
i &= i_0, \\
\Omega &= \Omega_0, \\
\omega &= \left\{ \frac{Gm_L m_s c \pi k}{4\mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [15c^2 e^2 \mu r_L - 6c^2 \mu r_L] \right\} \bar{\tau} + \omega_0.
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

Así, sabemos que los elementos orbitales, c , e , a , i y Ω se mantienen constantes en el tiempo, o al menos en el tiempo largo el cual es el de mayor importancia. A saber, toman los valores: c_0 , e_0 , a_0 , i_0 y Ω_0 respectivamente, los cuales son las condiciones iniciales de dichas variables, cuando $\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 = 0$. Como consideramos la órbita inicial satelital circular y coplanar a la órbita lunar, entonces $e_0 = 0$, $a_0 = r_0$, $i_0 = 0$, $\Omega_0 = 0$, y $c = ||\vec{r}_s \times \vec{v}_0||$, donde \vec{v}_0 es el vector velocidad inicial, que como sabemos es constante y su norma está dada por,

$$v_0 = \omega_s r_s.$$

Por lo tanto,

$$c = \omega_s r_s^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \omega_s r_s^2.$$

En este momento conocemos exactamente la trayectoria del satélite; para todo tiempo el satélite se mantendrá sobre su órbita inicial.

Si $k \in \mathbb{N}$ y $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, entonces $\beta = \frac{p}{q}$, donde $q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 2$, y $p \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\alpha = \frac{s}{q} \quad \text{para algún } s \in \mathbb{Z}. \tag{4.1.30}$$

Si q divide a k , entonces $2k\alpha \in \mathbb{N}$. En cuyo caso, nos encontramos en el supuesto original, por tanto, la órbita del satélite será la órbita inicial circular y coplanar a la órbita

de la Luna para todo tiempo.

Si q no divide a k , entonces para que al promediar nuestras ecuaciones diferenciales, los promedios de los parámetros orbitales se simplifiquen, como ya lo hemos visto, promediaremos sobre f , de 0 a $2\pi kq$, lo cual hará que se sume el cambio del parámetro orbital en cuestión, en qk vueltas del satélite, y en q vueltas de la Luna, sólo que ahora $\tau = T_q t$, donde T_q es el tiempo en el cual la Luna da q vueltas.

Como los promedios de los parámetros orbitales quedan en términos de las siguientes integrales,

$$\int_0^{2qk\pi} \cos(\alpha f) df = \text{sen}(\alpha(2qk\pi)) - \text{sen}(\alpha(0)) = \text{sen}(\alpha(2qk\pi)),$$

$$\int_0^{2qk\pi} \text{sen}(\alpha f) df = -\cos(\alpha(2qk\pi)) + \cos(\alpha(0)) = -\cos(\alpha(2qk\pi)) + 1,$$

y $2\alpha qk \in \mathbb{N}$, las integrales anteriores se anularán. Así, podremos deducir que los cambios obtenidos al llegar al tiempo T_q se cancelarán al sumarse periódicamente. Por lo tanto, al obtener los promedios de los parámetros, éstos resultarán ser los mismos que en (4.1.29), multiplicados una constante q . Por consiguiente, casi se obtendrá la misma solución que en los dos casos anteriores,

$$\begin{aligned} e &= e_0, \\ a &= a_0, \\ c &= c_0, \\ i &= i_0, \\ \Omega &= \Omega_0, \\ \omega &= \left\{ \frac{Gm_L m_s c \pi k q}{4\mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [15c^2 e^2 \mu r_L - 6c^2 \mu r_L] \right\} \bar{\tau} + \omega_0. \end{aligned}$$

Si la frecuencia es subarmónica, es decir, si el número de vueltas que da el satélite al tiempo que la Luna da una, no corresponde a un número entero, es decir, $k \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, se procede similarmente a como se hizo cuando $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Sólo que se toma el mayor entero de k , y se integra de 0 a $2\pi \lfloor k \rfloor$, quedando exactamente la misma solución; una órbita circular coplanar a la órbita Lunar, con radio r_0 ,

$$\begin{aligned} e &= e_0, \\ a &= a_0, \\ c &= c_0, \\ i &= i_0, \\ \Omega &= \Omega_0, \\ \omega &= \left\{ \frac{Gm_L m_s c \pi k \lfloor k \rfloor}{4\mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [15c^2 e^2 \mu r_L - 6c^2 \mu r_L] \right\} \bar{\tau} + \omega_0. \end{aligned}$$

Nótese que si hubieramos expandido a órdenes más altas de e , quizá los otros parámetros orbitales en vez de mantenerse constantes tendrían otro tipo de movimiento. Como se verá más adelante, los diferentes parámetros se mueven más rápido o más lento que otros, en este caso, aunque la órbita resultante es circular y ω en este caso no tiene sentido, si podemos suponer que si hubieramos tomado órdenes más grandes de e , éste resultaría un parámetro rápido.

4.2. Órbita inicial elíptica

En esta sección desarrollaremos el cálculo cuando la órbita inicial del satélite es elíptica. Todos los demás supuestos anteriores se preservarán, es decir, la frecuencia del satélite será k - veces la frecuencia de la Luna, la órbita lunar será circular y las órbitas lunar y satelital serán coplanares. Dicho procedimiento será muy parecido al anterior, a diferencia que algunas ideas conceptuales concernientes a los ángulos cambiarán.

En esta sección, además, se desarrollarán las ideas y procedimientos faltantes para el cálculo del cambio de los parámetros orbitales cuando las condiciones iniciales son elípticas.

4.2.1. Ángulos de Euler

Uno de los procedimientos de suma importancia para el desarrollo de esta tesis es poder escribir cualquier vector del sistema fijo $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en términos del sistema variable $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$.

Son tres los ángulos que determinan la posición de los sistemas coordenados anteriores, los ángulos de Euler, los cuales ya citamos geoméricamente en la figura 2.1: i , Ω y ω . Pero para aclarar ideas, se empezará por suponer únicamente $\Omega \neq 0$.

El problema en cuestión será poder encontrar las coordenadas de $\vec{q} = (x, y, z)$, un vector general del sistema $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, en el sistema $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$, en términos de sus coordenadas originales, x , y , y z , donde el sistema $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ es el resultado de rotar el primero con respecto al eje z un ángulo Ω (véase la figura 4.7).

Notamos por geometría elemental en la misma figura, que los triángulos $\triangle AOC$ y $\triangle BOD$ son semejantes, puesto que $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACO = \sphericalangle ADB = \Omega$. Si

$$\begin{aligned}
 AC &= x, \\
 AD &= y, \\
 BC &= x', \\
 BD &= y', \\
 BO &= t', \\
 AO &= s', \\
 OC &= t'', \\
 OD &= s'', \\
 CR &= z = z'.
 \end{aligned}$$

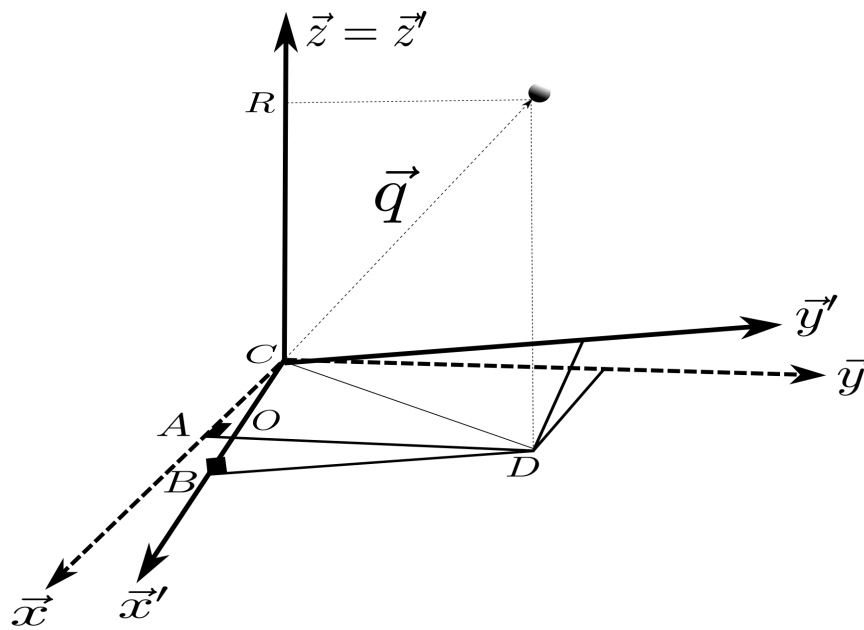


Figura 4.7: Caso $\Omega \neq 0$.

se satisface,

$$\frac{x}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right)} = \frac{t''}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (4.2.1)$$

y

$$\frac{s'}{\text{sen}(\Omega)} = \frac{t''}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (4.2.2)$$

Despejando t'' y s' de (4.2.1) y (4.2.2), tenemos que

$$t'' = \frac{x}{\cos(\Omega)} \quad (4.2.3)$$

y

$$s' = t'' \text{sen}(\Omega). \quad (4.2.4)$$

Sustituyendo (4.2.3) en (4.2.4), obtenemos,

$$s' = x \tan(\Omega), \quad (4.2.5)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} s'' &= y - s' \\ &= y - x \tan(\Omega). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Por otro lado,

$$\frac{t'}{\text{sen}(\Omega)} = \frac{s''}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (4.2.7)$$

Despejando t' en (4.2.7), y sustituyendo (4.2.6) en la ecuación resultante, tenemos,

$$\begin{aligned} t' &= s'' \text{sen}(\Omega) \\ &= (y - x \tan(\Omega)) \text{sen}(\Omega). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x' &= t' + t'' \\ &= \frac{x}{\cos(\Omega)} + (y - x \tan(\Omega)) \text{sen}(\Omega) \\ &= x \cos(\Omega) + y \text{sen}(\Omega). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

También,

$$\frac{y'}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right)} = \frac{t'}{\text{sen}(\Omega)},$$

de lo cual, despejando y' ,

$$y' = t' \cot(\Omega). \quad (4.2.10)$$

Así, sustituyendo (4.2.8) en (4.2.10), obtenemos,

$$y' = (y - x \tan(\Omega)) \cos(\Omega) = y \cos(\Omega) - x \text{sen}(\Omega). \quad (4.2.11)$$

Como la coordenada en z se queda igual, pues se rotó con respecto al eje z , se tiene debido a (4.2.9) y a (4.2.11) que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & \text{sen}(\Omega) & 0 \\ -\text{sen}(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.2.12)$$

Así, como el eje \vec{x} , por medio de la anterior rotación corresponde ahora con el eje \vec{x}' , el eje \vec{y} con \vec{y}' , y \vec{z} con \vec{z}' (los cuales son los mismos), podremos proceder con el sistema $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ al rotarlo con respecto al eje \vec{x}' , un ángulo i , y así obtener el sistema $(\vec{x}'', \vec{y}'', \vec{z}'')$, cuyos ejes se corresponden de la manera obvia, quedándonos básicamente la figura anterior sólo que el plano de los triángulos similares quedaría en el plano yz , con un ángulo i . Análogamente, se obtiene,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & \text{sen}(i) \\ 0 & -\text{sen}(i) & \cos(i) \end{pmatrix}.$$

Si aplicamos el procedimiento anterior una vez más, pero rotando alrededor del eje \vec{z}'' un ángulo $\omega + f$, obtendremos exactamente lo mismo que en la ecuación (4.2.12). Si hacemos corresponder el sistema $(\vec{x}''', \vec{y}''', \vec{z}''')$ con el sistema $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$, ω significará la orientación de la órbita sobre el plano ya inclinado y f la marcha del satélite sobre éste. Así, el último sistema es variable y corresponde con la definición que dimos del mismo en la página 8.

$$\begin{pmatrix} \vec{x}''' \\ \vec{y}''' \\ \vec{z}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega + f) & \text{sen}(\omega + f) & 0 \\ -\text{sen}(\omega + f) & \cos(\omega + f) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Componiendo dichas rotaciones para poder encontrar el vector \vec{q} cuando todos los ángulos de Euler son distintos de cero y haciendo corresponder el sistema $(\vec{x}''', \vec{y}''', \vec{z}''')$ con el sistema $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$, obtenemos que cualquier vector \vec{q} , puede ser escrito en dicho sistema variable, en términos de sus coordenadas iniciales x , y , y z , del sistema coordenado fijo (x, y, z) .

Así, que si \mathbf{q} es el vector \vec{q} , escrito en sistema de coordenadas variable, éste es de la forma,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_4 & \Sigma_5 & \Sigma_6 \\ \Sigma_7 & \Sigma_8 & \Sigma_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.2.13)$$

donde,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \cos(\omega + f) \cos(\Omega) - \cos(i) \text{sen}(\Omega) \text{sen}(\omega + f), \\ \Sigma_2 &= \cos(\omega + f) \text{sen}(\Omega) - \cos(i) \cos(\Omega) \text{sen}(\omega + f), \\ \Sigma_3 &= \text{sen}(\omega + f) \text{sen}(i), \\ \Sigma_4 &= \text{sen}(\omega + f) \cos(\Omega) - \cos(i) \text{sen}(\Omega) \cos(\omega + f), \\ \Sigma_5 &= -\text{sen}(\omega + f) \text{sen}(\Omega) + \cos(i) \cos(\Omega) \cos(\omega + f), \\ \Sigma_6 &= \cos(\omega + f) \text{sen}(i), \\ \Sigma_7 &= \text{sen}(i) \text{sen}(\Omega), \\ \Sigma_8 &= -\text{sen}(i) \cos(\Omega), \\ \Sigma_9 &= \cos(i). \end{aligned}$$

En general las rotaciones que se hacen son tres y se hace para ubicar la elipse en el espacio, como muestra la figura 4.8.

4.2.2. Órbita satelital elíptica y coplanar a la órbita Lunar.

Con el resultado anterior tenemos lo necesario para continuar la búsqueda de la trayectoria del satélite cuando su órbita inicial es elíptica y coplanar a la órbita de la Luna. De este modo, como lo plasma la figura 4.9, estudiaremos por ahora el caso; $\omega \neq 0$, $i = 0$, y $\Omega = 0$. Como dato curioso, si $i = 0$, entonces no existe la línea de nodos y por lo tanto Ω no tiene sentido, esto de acuerdo con la definición que se dio de dichos ángulos en

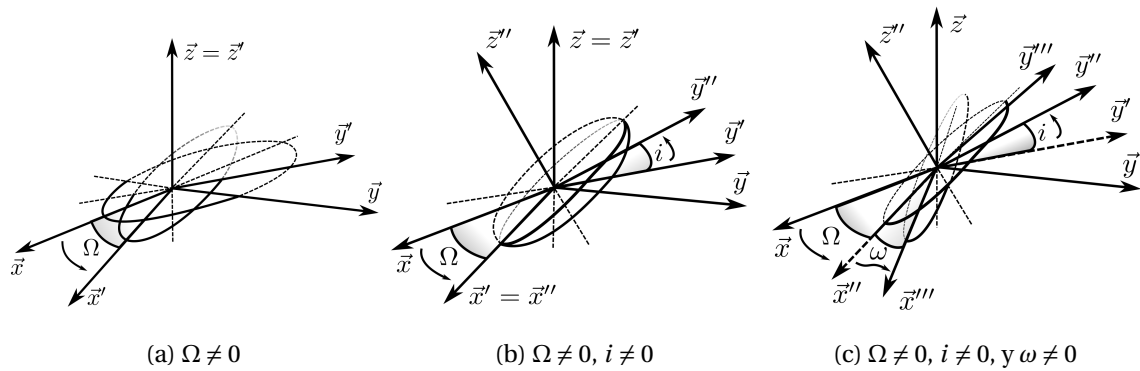


Figura 4.8: Ángulos de Euler

la página 8. Igual que en el caso primero, se tomará a la órbita de la Luna circular y su frecuencia igual a $\frac{1}{k}$ veces la frecuencia del satélite.

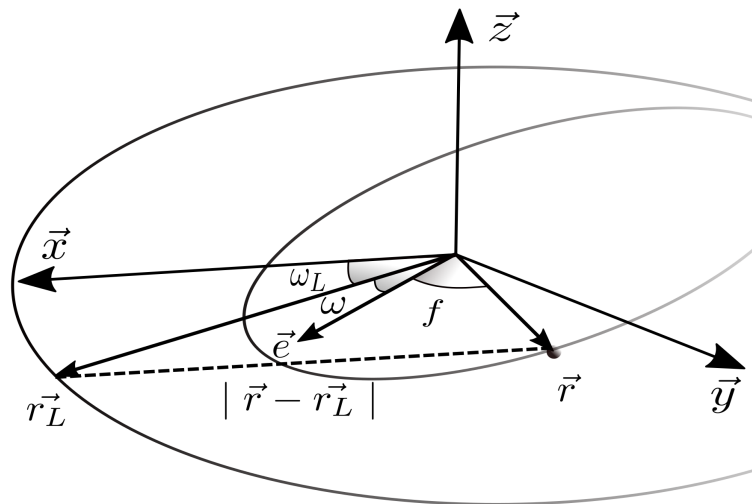


Figura 4.9: Órbita inicial elíptica.

Igual que en el primer caso, la fuerza total ejercida sobre el satélite es

$$\vec{F} = GMm_L r^{-3} \vec{r} + Gm_L m_s |\vec{r} - \vec{r}_L|^{-3} (\vec{r} - \vec{r}_L) \quad (4.2.14)$$

y la fuerza perturbativa es

$$\vec{F}_p = Gm_L m_s |\vec{r} - \vec{r}_L|^{-3} (\vec{r} - \vec{r}_L). \quad (4.2.15)$$

A partir de aquí y en los casos posteriores, los pasos a seguir para encontrar las proyecciones de la fuerza perturbadora, \vec{F}_p , aplicada al satélite en el sistema $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$, serán similares a los ya ejecutados en el primer caso.

De este modo, necesitamos encontrar a \vec{r}_L en términos del sistema variable. Para ello, utilizaremos la ecuación (4.2.13), sin antes notar que en el sistema fijo, r_L , se escribe como,

$$\vec{r}_L = r_L \begin{pmatrix} \cos(\omega_L t) \\ \text{sen}(\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto en el sistema variable se expresa como,

$$\begin{aligned} \vec{r}_L &= r_L \begin{pmatrix} \cos(\omega + f) & -\text{sen}(\omega + f) & 0 \\ \text{sen}(\omega + f) & \cos(\omega + f) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_L t) \\ \text{sen}(\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r_L \begin{pmatrix} \cos(\omega + f) \cos(\omega_L t) - \text{sen}(\omega + f) \text{sen}(\omega_L t) \\ \text{sen}(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \cos(\omega + f) \text{sen}(\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Con el fin de encontrar la distancia del satélite a la Luna, con respecto a los ángulos que hemos introducido, consideraremos la ley de los cosenos en la figura anterior. De ahí que,

$$|\vec{r} - \vec{r}_L|^{-3} = [r_L^2 + r^2 - 2r_L r \cos(f + \omega - \omega_L t)]^{-\frac{3}{2}}.$$

Desarrollando en serie de Taylor como se hizo en (4.1.5) y se explicó en la página 18, obtenemos,

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_L|^{-3} &\approx r_L^{-3} \left[1 - \frac{3r^2}{2r_L^2} - \frac{3r}{r_L} \cos(f + \omega - \omega_L t) + \frac{15r^4}{8r_L^4} - \frac{15r^3}{2r_L^3} \cos(f + \omega - \omega_L t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{15r^2}{2r_L^2} \cos^2(f + \omega - \omega_L t) \right] \\ &\approx r_L^{-3} [1 - 3r r_L^{-1} \cos(f + \omega - \omega_L t)]. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Sustituyendo (4.2.17), y (4.2.16) en (4.2.15) obtenemos,

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= Gm_L m_s r_L^{-3} [1 - 3r r_L^{-1} \cos(f + \omega - \omega_L t)] \{ r \hat{r} \\ &\quad - r_L (\cos(\omega + f) \cos(\omega_L t) - \text{sen}(\omega + f) \text{sen}(\omega_L t)) \hat{r} \\ &\quad - r_L (\text{sen}(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \cos(\omega + f) \text{sen}(\omega_L t)) \hat{\alpha} \}. \end{aligned}$$

Como se ha mencionado, la distancia de la Tierra a la Luna es grande, así, las potencias de $\frac{r}{r_L}$ serán valores positivos muy pequeños, casi cero. En particular, para una buena aproximación nos quedaremos con potencias menores o iguales a 4 de $\frac{r}{r_L}$. Por consiguiente, las resultantes proyecciones de la fuerza sobre el satélite en el sistema variable quedan como,

$$F_r = Gm_L m_s r_L^{-3} (1 - 3r r_L^{-1} [\cos(f + \omega) \cos(\omega_L) + \sin(f + \omega) \sin(\omega_L t)]) \\ [r - r_L \cos(\omega + f) \cos(\omega_L t) + r_L \sin(\omega + f) \sin(\omega_L t)], \quad (4.2.18)$$

$$F_\alpha = -Gm_L m_s r_L^{-2} (1 - 3r r_L^{-1} [\cos(f + \omega) \cos(\omega_L) + \sin(f + \omega) \sin(\omega_L t)]) \\ [\sin(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \cos(\omega + f) \sin(\omega_L t)], \quad (4.2.19)$$

$$F_c = 0. \quad (4.2.20)$$

El paso siguiente será sustituir (4.2.18), (4.2.19) y (4.2.20) en (2.0.1) para obtener las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de los parámetros orbitales, dichas ecuaciones quedarán en términos de f , r y t . Con las ecuaciones (4.1.7), (4.1.13) y (4.1.16) encontraremos las ecuaciones diferenciales de los elementos orbitales en términos únicamente de f como ya se hizo anteriormente.

Procederemos a encontrar la ecuación diferencial de c . Sustituyendo (4.2.19) en (2.0.1), análogamente como lo hicimos en el caso de la órbita circular y sustituyendo la expansión de suma trigonométrica a $\cos(\omega + f - \omega_L)$, obtenemos,

$$\frac{dc}{df} = -\frac{c^4}{\mu^2} Gm_L m_s r_L^{-2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} (\sin(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \cos(\omega + f) \sin(\omega_L t)) \\ \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) - 3r_L^{-1} (\cos(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \sin(\omega + f) \sin(\omega_L t)) \right] \\ (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)). \quad (4.2.21)$$

De la misma manera obtenemos las demás ecuaciones diferenciales de los parámetros orbitales.

$$\frac{de}{df} = \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ \frac{c^5}{\mu^3} Gm_L m_s r_L^{-3} \sin(f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \\ \left. \left. - 3r_L^{-1} (\cos(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \sin(\omega + f) \sin(\omega_L t)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu^2}{c^4} r_L (1 + e \cos(f))^2 (-\cos(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \sin(\omega + f) \sin(\omega_L t)) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) (\sin^2(\omega + f) \sin^2(\omega_L t) - \cos^2(\omega + f) \cos^2(\omega_L t)) \right] \right. \\ \left. - \frac{\mu^2}{c^5} Gm_L m_s r_L^{-2} (e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)) (\sin(\omega + f) \cos(\omega_L t) \right. \\ \left. + \cos(\omega + f) \sin(\omega_L t)) \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \\ \left. \left. - 3r_L^{-1} (\cos(\omega + f) \cos(\omega_L t) + \sin(\omega + f) \sin(\omega_L t)) \right] \right\} \\ (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)), \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{df} = & \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ \frac{2a^2ec^3}{\mu^2} Gm_L m_s r_L^{-3} \text{sen}(f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1+e \cos(f)) \right. \right. \\
& - 3r_L^{-1} (\cos(\omega+f) \cos(\omega_L t) + \text{sen}(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \\
& + \frac{\mu^2}{c^4} r_L (1+e \cos(f))^2 (-\cos(\omega+f) \cos(\omega_L t) + \text{sen}(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \\
& \left. \left. + \frac{3\mu}{c^2} (1+e \cos(f)) (\text{sen}^2(\omega+f) \text{sen}^2(\omega_L t) - \cos^2(\omega+f) \cos^2(\omega_L t)) \right] \right. \\
& - \frac{2a^2c^5}{\mu^3} Gm_L m_s r_L^{-2} (\text{sen}(\omega+f) \cos(\omega_L t) + \cos(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \\
& \left. \left[\frac{\mu^3}{c^6} (1+e \cos(f))^3 - 3\frac{\mu^2}{c^4} r_L^{-1} (1+e \cos(f))^2 (\cos(\omega+f) \cos(\omega_L t) \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{sen}(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \right] \right\} (1-4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)), \tag{4.2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{df} = & \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ -\frac{c^5}{\mu^3 e} Gm_L m_s r_L^{-3} \cos(f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1+e \cos(f)) \right. \right. \\
& - 3r_L^{-1} (\cos(\omega+f) \cos(\omega_L t) + \text{sen}(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \\
& + \frac{\mu^2}{c^4} r_L (1+e \cos(f))^2 (-\cos(\omega+f) \cos(\omega_L t) + \text{sen}(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \\
& \left. \left. - \frac{3\mu}{c^2} (1+e \cos(f)) (\text{sen}^2(\omega+f) \text{sen}^2(\omega_L t) - \cos^2(\omega+f) \cos^2(\omega_L t)) \right] \right. \\
& - \frac{c^3}{\mu^3 e} Gm_L m_s r_L^{-2} \text{sen}(f) (\text{sen}(\omega+f) \cos(\omega_L t) + \cos(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \\
& \left. \left[\frac{\mu^2}{c^2} (1+e \cos(f))^2 - 3\mu r_L^{-1} (1+e \cos(f)) (\cos(\omega+f) \cos(\omega_L t) \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{sen}(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) + \frac{\mu^2}{c^2} (1+e \cos(f)) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3\mu r_L^{-1} (\cos(\omega+f) \cos(\omega_L t) + \text{sen}(\omega+f) \text{sen}(\omega_L t)) \right] \right\} \\
& (1-4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)), \tag{4.2.24}
\end{aligned}$$

$$\frac{di}{df} = 0,$$

$$\frac{d\Omega}{df} = 0.$$

Como se explicó en la página 8, para poder simplificar el problema, la variable τ se puede considerar $\tau_0 = 0$, para todos los tiempos enteros de $\bar{\tau}$.

Así, cada vez que se ajuste la órbita del satélite se deberá esperar a que éste se encuentre en el perigeo, o que cuando se modifique su órbita se haga de tal forma que se satisfaga la condición previa, $\tau_{\bar{\tau}} = 0$. Por lo tanto, podremos omitir la ecuación diferencial de τ en (2.0.1).

Como vimos en la sección 4.1, para poder utilizar la teoría de promedios, será necesario poner dichas ecuaciones diferenciales en términos de f como variable dependiente del tiempo, para así examinar períodos sobre f en los cuales se promediará su cambio.

No obstante, como en este caso la condición inicial de la excentricidad es distinta de cero, no podremos considerar $u = f$, y así poder poner a f en términos del tiempo como lo hicimos en la página 20.

Sin embargo, será fundamental expresar a f como función de t , con el inconveniente de que la única relación que existe de $f(t)$ en la Mécanica Celeste, implica a la ecuación de Kepler, (4.1.7) y a la ecuación que relaciona las anomalías verdadera y excéntrica, (4.2.25), cuya demostración se puede consultar en [CEL].

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right). \quad (4.2.25)$$

Por otro lado, tal y como veremos en el Apéndice B, por medio de la relación previa de f con u , se deduce,

$$u = f + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{8}\right)^n \frac{\text{sen}(nf)}{n}. \quad (4.2.26)$$

Pero como en este trabajo estimaremos a la excentricidad, e , como una cantidad pequeña, mucho menor que uno pero positiva, si aproximamos sólo con los términos de la excentricidad menor o igual a 2, podemos aproximar a u de la siguiente forma,

$$u \approx f - e \text{sen}(f) + \frac{e^2}{4} \text{sen}(2f).$$

Por (4.1.7), tenemos,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau) &= f - e \text{sen}(f) + \frac{e^2}{4} \text{sen}(2f) \\ &\quad - e \text{sen}\left(f - e \text{sen}(f) + \frac{e^2}{4} \text{sen}(2f)\right). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Utilizando la identidad trigonométrica de adición y sustracción tenemos

$$\begin{aligned} &\text{sen}\left(f - e \text{sen}(f) + \frac{e^2}{4} \text{sen}(2f)\right) \\ &= \text{sen}(f) \cos\left(\frac{e^2}{4} \text{sen}(2f) - e \text{sen}(f)\right) \\ &\quad + \cos(f) \text{sen}\left(\frac{e^2}{4} \text{sen}(2f) - e \text{sen}(f)\right). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f) - e \operatorname{sen}(f)\right) \\
&= \cos\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f)\right) \cos(e \operatorname{sen}(f)) \\
&\quad + \operatorname{sen}\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f)\right) \operatorname{sen}(e \operatorname{sen}(f))
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

y

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen}\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f) - e \operatorname{sen}(f)\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f)\right) \cos(e \operatorname{sen}(f)) \\
&\quad - \cos\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f)\right) \operatorname{sen}(e \operatorname{sen}(f)).
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Si expandimos en series de Taylor y truncamos las potencias de e mayores o iguales a 2, como lo seguiremos haciendo en lo consecutivo, tenemos que,

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f)\right) \\
&\quad \approx 1 - \frac{e^4}{16} \operatorname{sen}^2(2f) \\
&\quad \approx 1, \\
& \operatorname{sen}\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f)\right) \\
&\quad \approx \frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f), \\
& \cos(e \operatorname{sen}(f)) \\
&\quad \approx 1 - \frac{e^2}{2} \operatorname{sen}^2(2f), \\
& \operatorname{sen}(e \operatorname{sen}(f)) \\
&\quad \approx e \operatorname{sen}(f).
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Expandiendo los términos que faltan en las ecuaciones (4.2.28) y (4.2.29): $\operatorname{sen}(e \operatorname{sen}(f))$ y $\cos(e \operatorname{sen}(f))$, similarmente a como acabamos de proceder, sustituimos su resultado, así como la ecuación (4.2.30), en (4.2.28) y (4.2.29) y aproximamos el resultado hasta orden cúbico con respecto la excentricidad, tenemos,

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f) - e \operatorname{sen}(f)\right) \\
&\approx 1 - \frac{e^2}{2} \operatorname{sen}^2(f) + \left(\frac{e^2}{4} \operatorname{sen}(2f)\right) (e \operatorname{sen}(f)) \\
&\approx 1 - \frac{e^2}{2} \operatorname{sen}^2(f)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \text{sen}\left(\frac{e^2}{4}\text{sen}(2f) - e\text{sen}(f)\right) \\ & \approx \frac{e^2}{4}\text{sen}(2f) - e\text{sen}(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \text{sen}\left(f - e\text{sen}(f) + \frac{e^2}{4}\text{sen}(2f)\right) \\ & \approx \text{sen}(f)\left(1 - \frac{e^2}{2}\text{sen}^2(f)\right) + \cos(f)\left(\frac{e^2}{4}\text{sen}(2f) - e\text{sen}(f)\right). \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Así, si sustituimos (4.2.31) en (4.2.27), despreciando términos de potencias de e mayores o iguales a 3 y despejando t , obtenemos,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau) &= f - e\text{sen}(f) + \frac{e^2}{4}\text{sen}(2f) \\ & - e\left[\text{sen}(f)\left(1 - \frac{e^2}{2}\text{sen}^2(f)\right) + \cos(f)\left(\frac{e^2}{4}\text{sen}(2f) - e\text{sen}(f)\right)\right] \\ & \approx f - 2e\text{sen}(f) + \frac{e^2}{4}\text{sen}(2f) + \frac{e^2}{2}\text{sen}(2f). \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Así,

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(f - 2e\text{sen}(f) + \frac{3}{4}e^2\text{sen}(2f)\right). \quad (4.2.33)$$

Como

$$\cos(\omega + f - \omega_L t) = \cos(f + \omega)\cos(\omega_L t) + \text{sen}(f + \omega)\text{sen}(\omega_L t), \quad (4.2.34)$$

observamos que al sustituir t en $\cos(\omega_L t)$ y $\text{sen}(\omega_L t)$, si $\gamma = \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$,

$$\begin{aligned} \cos(\omega_L t) &= \cos\left(\gamma f - 2\gamma e\text{sen}(f) + \frac{3}{4}\gamma e^2\text{sen}(2f)\right) \\ &= \cos(\gamma f)\cos\left(\frac{3}{4}\gamma e^2\text{sen}(2f) - 2\gamma e\text{sen}(f)\right) \\ & \quad - \text{sen}(\gamma f)\text{sen}\left(\frac{3}{4}\gamma e^2\text{sen}(2f) - 2\gamma e\text{sen}(f)\right). \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Pero como

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f) - 2\gamma e \text{sen}(f)\right) \\
&= \cos\left(\frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f)\right) \cos(2\gamma e \text{sen}(f)) \\
&\quad + \text{sen}\left(\frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f)\right) \text{sen}(2\gamma e \text{sen}(f)) \quad (4.2.36) \\
&\approx \left(1 - \frac{9}{16}\gamma^2 e^4 \text{sen}^2(2f)\right) (1 - 4\gamma^2 e^2 \text{sen}^2(f)) + \left(\frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f)\right) (2\gamma e \text{sen}(f)) \\
&\quad \approx 1 - 4\gamma^2 e^2 \text{sen}^2(f)
\end{aligned}$$

y

$$\text{sen}\left(\frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f) - 2\gamma e \text{sen}(f)\right) = \frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f) - 2\gamma e \text{sen}(f), \quad (4.2.37)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\cos(\omega_L t) &\approx \cos(\gamma f) (1 - 4\gamma^2 e^2 \text{sen}^2(f)) \\
&\quad - \text{sen}(\gamma f) \left(\frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f) - 2\gamma e \text{sen}(f)\right). \quad (4.2.38)
\end{aligned}$$

De igual forma, podemos obtener que

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\omega_L t) &\approx \text{sen}(\gamma f) (1 - 4\gamma^2 e^2 \text{sen}^2(f)) \\
&\quad + \cos(\gamma f) \left(\frac{3}{4}\gamma e^2 \text{sen}(2f) - 2\gamma e \text{sen}(f)\right). \quad (4.2.39)
\end{aligned}$$

Sustituyendo γ ,

$$\begin{aligned}
\cos(\omega_L t) &\approx \cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) \\
&\quad - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{sen}\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \left(\frac{3}{4}e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f)\right), \quad (4.2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\omega_L t) &\approx \text{sen}\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) \\
&\quad + \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \left(\frac{3}{4}e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f)\right). \quad (4.2.41)
\end{aligned}$$

Las últimas dos ecuaciones son absolutamente necesarias para poder poner las ecuaciones de los parámetros orbitales (4.2.21), (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24) completamente en términos de f . Así, si las sustituimos, por ejemplo, en (4.2.24), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{df} = & \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left\{ -\frac{c^5}{\mu^3 e} G m_L m_s r_L^{-3} \cos(f) \left[\frac{\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \\
& - 3r_L^{-1} \left(\cos(\omega + f) \left[\cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \sin^2(f)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \sin\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \left(\frac{3}{4} e^2 \sin(2f) - 2e \sin(f)\right) \right] \right. \\
& \left. + \sin(\omega + f) \left[\sin\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \sin^2(f)) \right. \right. \\
& \left. \left. + \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \left(\frac{3}{4} e^2 \sin(2f) - 2e \sin(f)\right) \right] \right) \\
& + \frac{\mu^2}{c^4} r_L (1 + e \cos(f))^2 \left(-\cos(\omega + f) \left[\cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \right. \right. \\
& \left. \left. (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \sin^2(f)) - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \sin\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{3}{4} e^2 \sin(2f) - 2e \sin(f)\right) \right] + \sin(\omega + f) \left[\sin\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \right. \right. \\
& \left. \left. (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \sin^2(f)) + \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{3}{4} e^2 \sin(2f) - 2e \sin(f)\right) \right] \right) - \frac{3\mu}{c^2} (1 + e \cos(f)) (\sin^2(\omega + f)) \\
& \left[\sin\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \sin^2(f)) \right. \\
& \left. + \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \left(\frac{3}{4} e^2 \sin(2f) - 2e \sin(f)\right) \right]^2 \\
& - \cos^2(\omega + f) \left[\cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \sin^2(f)) \right. \\
& \left. - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \sin\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \left(\frac{3}{4} e^2 \sin(2f) - 2e \sin(f)\right) \right]^2 \left. \right\} \\
& - \frac{c^3}{\mu^3 e} G m_L m_s r_L^{-2} \sin(f) \left(\sin(\omega + f) \left[\cos\left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f\right) \right. \right.
\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{sen} \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \\
& (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{sen} \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \\
& \left(\frac{3}{4} e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f) \right) \Big] + \cos(\omega + f) \left[\text{sen} \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \right. \\
& (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) + \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \\
& \left. \left(\frac{3}{4} e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f) \right) \right] \Big] \left[\frac{\mu^2}{c^2} (1 + e \cos(f))^2 - 3\mu r_L^{-1} \right. \\
& (1 + e \cos(f)) \left(\cos(\omega + f) \left[\cos \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{sen} \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \left(\frac{3}{4} e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f) \right) \right] \right. \\
& \left. + \text{sen}(\omega + f) \left[\text{sen} \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) \right. \right. \\
& \left. \left. + \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \left(\frac{3}{4} e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f) \right) \right] \right] \Big] \\
& + \frac{\mu^2}{c^2} (1 + e \cos(f)) - 3\mu r_L^{-1} \left(\cos(\omega + f) \left[\cos \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \right. \right. \\
& (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) - \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{sen} \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \\
& \left. \left(\frac{3}{4} e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f) \right) \right] + \text{sen}(\omega + f) \left[\text{sen} \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \right. \\
& (1 - 4\omega_L^2 a^3 e^2 \mu^{-1} \text{sen}^2(f)) + \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos \left(\omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} f \right) \\
& \left. \left(\frac{3}{4} e^2 \text{sen}(2f) - 2e \text{sen}(f) \right) \right] \Big] \Big] \Big\} (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)).
\end{aligned}$$

Como en el caso anterior y también en los próximos, utilizaremos Maxima para simplificar los productos de senos y cosenos que dependen de f y poder integrar fácilmente. Para ejemplificar utilizaremos ahora al parámetro orbital ω .

Necesitamos introducir el lado derecho de (4.2.42), incluso las constantes en Maxima, para poder simplificar ésta en una suma finita de Fourier en términos de f . Le

nombraremos en Maxima w .

Una vez escrita la variable en la sintaxis necesaria, se le aplicarán los siguientes comandos respectivamente. Primero, aplicaremos la función: $w2 : expand(w)$, la cual hace que se desarrollen todos los productos de polinomios.

Hecho lo anterior, quedarán potencias de e mayores a 3. Para simplificar la expresión, quitaremos todos los términos multiplicados por dichas potencias mediante la instrucción, $w3 : w2, e \wedge 4 = 0, e \wedge 5 = 0, e \wedge 6 = 0, e \wedge 7 = 0$; , que hará e^4, e^5, e^6 y e^7 igual a 0, pues 7 es la máxima potencia de e , dentro de la ecuación diferencial de ω . Así, la expresión estará escrita en terminos únicamente de sumas de funciones trigonométricas, con potencias de e menores o iguales a 3 positivas.

La instrucción, $trigexpand()$, expandirá las funciones trigonométricas; $\sin(\omega + f)$ y $\cos(\omega + f)$, dentro de la ecuación diferencial (4.2.42). Así, aplicaremos, $w4 = trigexpand(w3)$.

Queremos poner al último producto obtenido por Maxima, $w4$, como suma finita de Fourier. Es decir, series finitas de funciones con terminos de la forma: " $algo$ " * $\sin("algo" f)$ y " $algo$ " * $\cos("algo" f)$. De esta manera, podremos integrar de la forma antes vista.

De acuerdo a lo anterior, el siguiente paso consistirá en aplicar la siguiente instrucción al último resultado, $w4 : trigreduce(w3, f)$; la cual desarrolla dicho producto en una suma finita de Fourier, en la variable f . Y, después, $w5 : factor(w4)$; , para factorizar las funciones trigonométricas que dependan de la variable f , y simplificar.

Escribiremos sólo el inicio del resultado obtenido al simplificar $\frac{d\omega}{df}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{df} = & -\sqrt{\frac{a^3(3e^2 - 1)}{\mu} \frac{Gm_s m_L c}{256e\mu^4 r_L^4}} \\ & \left[1728a^3 c^2 e^2 \mu r_L \omega_L^2 \sin^2(\omega) \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} + 3\right)\right) \right. \\ & + 1728a^3 c^2 e^2 \mu r_L \omega_L^2 \cos^2(\omega) \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} + 3\right)\right) \\ & + 2352c^2 e^2 \mu^2 r_L \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \sin^2(\omega) \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} + 3\right)\right) \\ & + 2352c^2 e^2 \mu^2 r_L \omega_L \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos^2(\omega) \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} + 3\right)\right) \\ & + 1056c^2 e^2 \mu^2 r_L \sin^2(\omega) \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} + 3\right)\right) \\ & \left. + 1056c^2 e^2 \mu^2 r_L \cos^2(\omega) \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} + 3\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

$$\begin{aligned}
& -4032a^3c^2e^2\mu r_L\omega_L^2\text{sen}^2(\omega)\cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}+1\right)\right) \\
& -4032a^3c^2e^2\mu r_L\omega_L^2\cos^2(\omega)\cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}+1\right)\right) \\
& -912c^2e^2\mu^2r_L\omega_L\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\text{sen}^2(\omega)\cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}+1\right)\right) \\
& -912c^2e^2\mu^2r_L\omega_L\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\cos^2(\omega)\cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}+1\right)\right) \\
& \dots \\
& -384c^2e^2\mu^2r_L\cos^2(\omega)\cos(f)-192c^2\mu^2r_L\cos^2(\omega)\cos(f) \\
& +480c^2e^3\mu^2r_L\cos^2(\omega)+384c^2e\mu^2r_L\cos^2(\omega) \\
& +320c^2e^3\mu^2r_L\cos(4f)+384c^2e^2\mu^2r_L\cos(3f) \\
& +1280c^2e^3\mu^2r_L\cos(2f)-384c^2e\mu^2r_L\cos(2f) \\
& +1152c^2e^2\mu^2r_L\cos(f)+256c^2\mu^2r_L\cos(f) \\
& +960c^2e^3\mu^2r_L-384c^2e\mu^2r_L].
\end{aligned}$$

Aunque es tedioso tratar de escribir toda la expresión, podemos escribir todas las funciones trigonométricas que componen a los sumandos a integrar; $\text{sen}(\text{"algo"}f)$, $\cos(\text{"algo"}f)$, omitiendo las constantes que a ellas multipliquen y saber cual será el límite superior adecuado para que se anulen todos los sumandos que no sean constantes en f , al promediar ω . Dichas funciones son

$$\begin{aligned}
& \cos(f), \sin(f), \cos(2f), \sin(2f), \dots, \cos(7f), \sin(7f), \\
& \cos\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L\right), \sin\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L\right), \cos\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L\right), \sin\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L\right), \\
& \cos\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-5\right), \sin\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-5\right), \dots, \cos\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-1\right), \\
& \sin\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-1\right), \cos\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-5\right), \sin\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-5\right), \\
& \dots, \cos\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-1\right), \sin\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L-1\right), \cos\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L+3\right) \\
& , \sin\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L+3\right), \dots, \cos\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L+1\right), \sin\left(2f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L+1\right),
\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

$$\begin{aligned} & \cos\left(f\sqrt{2\frac{a^3}{\mu}\omega L-5}\right), \sin\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L-5}\right)\right), \dots, \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L-1}\right)\right), \\ & \sin\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L-1}\right)\right), \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L+7}\right)\right), \sin\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L+7}\right)\right), \\ & \dots, \cos\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L+1}\right)\right), \sin\left(f\left(2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L+1}\right)\right), \dots \end{aligned}$$

Si, $\beta = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\omega L$, como se describió en la página 29, el argumento de los senos y cosenos en (4.2.44) será $\alpha(\beta)f$, donde α depende de β linealmente en todos los casos. Análogamente a como lo hicimos, se considerará, $\beta \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, también, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Utilizaremos el mismo argumento que en la página 29, para que al promediar sobre el cambio del parámetro orbital ω , es decir, al integrar el cambio de éste sobre un período en el que el satélite recorre k vueltas, como se describe en (4.2.45), los únicos términos que sobreviven son los que no dependen de f ; los términos constantes en (4.2.43).

$$\langle \dot{c} \rangle = \int_0^{2k\pi} \frac{dc}{df} df. \quad (4.2.45)$$

Para conseguir lo anterior en Maxima, haremos uso del comando para yuxtaponer variables por otras, y poder eliminar las funciones trigonométricas en (4.2.43). Así, por ejemplo, para eliminar las sumas que multipliquen a $\sin\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L}\right)$, se ejecutará; $w6 : w5, \text{Sen}\left(f\sqrt{\frac{a^3}{\mu}\omega L}\right) = 0;$ y así sucesivamente hasta que desaparezcan todas esas funciones trigonométricas y únicamente sobrevivan los términos constantes como ya se hizo anteriormente.

Así, recolectando pacientemente los términos constantes en f , del resultado de ω que devolvió Maxima, obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle \dot{\omega} \rangle \approx & -\frac{2\pi Gm_s m_L c}{256e\mu^4 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \\ & [768a^3 c^2 e^3 \mu r_L \omega_L^2 \text{sen}^2(\omega) - 768a^3 c^2 e^3 \mu r_L \omega_L^2 \text{cos}^2(\omega) \\ & - 480c^2 e^3 \mu^2 r_L \text{sen}^2(\omega) - 384c^2 e \mu^2 r_L \text{sen}^2(\omega) \\ & + 480c^2 e^3 \mu^2 r_L \text{cos}^2(\omega) + 384c^2 e \mu^2 r_L \text{cos}^2(\omega) \\ & + 960c^2 e^3 \mu^2 - 384c^2 e \mu^2 r_L]. \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

Si aproximamos con potencias menores o iguales a 2 de e , tenemos,

$$\begin{aligned} \langle \dot{\omega} \rangle \approx & -\frac{2\pi k G m_s m_L c^3}{256 e \mu^2 r_L^3} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \\ & [-960e^3 \sin^2(\omega) + 288e \sin^2(\omega) + 960e^3 \cos^2(\omega) \\ & -288e \cos^2(\omega) + 960e^3 - 384e]. \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

Procediendo igual con los demás parámetros, aproximando hasta potencias cuadradas de e , obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle \dot{c} \rangle = & -\frac{2\pi G m_L m_s c^4 e^2}{16 \mu^3 r_L^3} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \\ & [-48a^3 \omega_L^2 \cos(\omega) \sin(\omega) - 120\mu \cos(\omega) \sin(\omega)], \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{e} \rangle = & \frac{2\pi G m_L m_s}{32 c^7 \mu^4 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \\ & [-168c^2 e \mu^6 r_L \cos(\omega) \sin(\omega) + 72c^{10} e \mu^2 r_L \cos(\omega) \sin(\omega)], \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{a} \rangle = & -\frac{2Gk\pi a^2 m_s m_L}{256 c \mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \\ & [-1536a^3 c^2 e^2 \mu r_L \omega_L^2 \cos(\omega) \sin(\omega)], \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

$$\left\langle \frac{di}{df} \right\rangle = 0, \quad (4.2.51)$$

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = 0. \quad (4.2.52)$$

A diferencia de los casos anteriores, una vez integrando el lado derecho de los promedios, vemos que c, a , y e no son constantes, pues sus promedios no son cero, así que no se podrá integrar analíticamente, pues las ecuaciones diferenciales dependen de todos los parámetros orbitales no linealmente. Tampoco podríamos suponer que cambian muy poco significativamente, por el cambio de variable que hicimos. Así que se tendrá que integrar numéricamente para poder obtener el cambio de los parámetros orbitales en el tiempo \bar{t} .

Para facilitar dicha integración, nos quedaremos con órdenes de la excentricidad menores o iguales a 2, pues como se ha mencionado, se ha considerado trabajar con excentricidades pequeñas debido a que la gran cantidad de los cuerpos astronómicos familiares así se comportan.

En la próxima sección, se verá la forma en que trabajaremos con esta dificultad, además de mostrar cómo coinciden los valores obtenidos por medio de la teoría asintótica de promedios, de acuerdo con las simulaciones numéricas.

4.3. Simulaciones numéricas

En la sección anterior se obtuvo el comportamiento de la variación promedio de los parámetros orbitales; estas expresiones las podemos pensar para órbitas muy poco elípticas de tal forma que $|e| \ll 1$. Por tal razón es entonces conveniente expresar las variaciones de los parámetros orbitales como series de potencias de e . Con el propósito de verificar las fórmulas encontradas podemos confrontar dichas expresiones con simulaciones numéricas y comprobar que a primeros órdenes de e hay concordancia de los datos numéricos con el pronóstico del comportamiento de los parámetros a tiempos largos.

Vamos a suponer un planeta de masa unitaria donde la constante de Gravedad es también 1 para simplificar los cálculos. Consideremos que este planeta tiene una luna de masa 0.2 que gira alrededor del planeta en órbita circular. Un satélite muy pequeño se mueve inicialmente en órbita elíptica alrededor del planeta cuya órbita esta en el mismo plano de la órbita de la luna. Vamos a suponer que el semieje mayor de la órbita del satélite es a y la órbita circular de la luna tiene un radio igual a $10a$. Por simplicidad consideremos que $a = 1$ y que la frecuencia de la luna es 0.2 veces el período del satélite.

El modelo numérico lo podemos representar como el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales [BLA]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_x &= -C \frac{x}{r^3} + L \frac{x_l - x}{r_l^3}, \\ \dot{v}_y &= -C \frac{y}{r^3} + L \frac{y_l - y}{r_l^3},\end{aligned}$$

donde (x, y) son las coordenadas del satélite y (v_x, v_y) sus velocidades, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $C = Gm$ siendo G la constante de gravitación y m la masa del planeta. Las coordenadas de la luna son (x_l, y_l) y la distancia del satélite a la luna es

$$r_l = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2},$$

donde $L = Gm_l$.

Dado que la luna sigue una órbita circular, entonces sus coordenadas las definimos así:

$$\begin{aligned}x_l &= 10a \sin(Ft), \\ y_l &= 10a \cos(Ft),\end{aligned}$$

siendo a el semieje mayor inicial de la órbita del satélite y $F = 0.2$.

Para encontrar la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales se utilizó un integrador numérico del tipo Runge-Kutta de orden 7-8 (de paso variable). Las ecuaciones se integraron durante un tiempo de 5×10^4 unidades con un error de integración del orden de 10^{-14} . Nuestro interés fue determinar la evolución de los parámetros orbitales del satélite. Para ello se calculó para la órbita del satélite alrededor del planeta su

pericentro y su apocentro. La evolución de estos dos puntos nos ayudan a determinar los parámetros a , e y ω , tal como se ve en la figura 4.10.

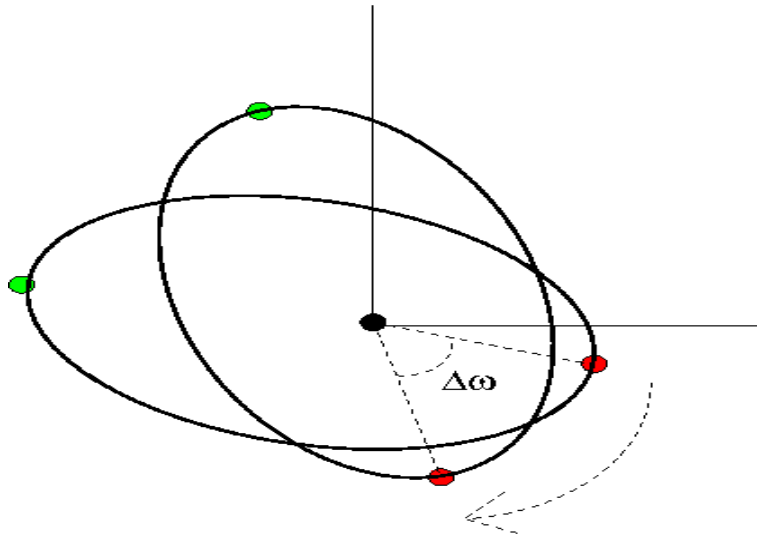


Figura 4.10: En la figura podemos ver el corrimiento de pericentro (puntos rojos) y del apocentro (puntos verdes) de la órbita del satélite. El cambio de ω se puede determinar por el cambio de la posición de los pericentros.

Al realizar la simulación numérica con un valor inicial de $a = 1$ y de $e = 0.05$, podemos analizar el comportamiento del pericentro y del apocentro de la órbita del satélite. Si graficamos la localización del pericentro y del apocentro cada vez que el satélite completa una órbita podemos observar el comportamiento de estos puntos. En la figura 4.11 podemos observar la gráfica de los puntos de los epicentros (puntos rojos) y de los apocentros (puntos verdes), al transcurrir la simulación numérica los pericentros y apocentros van variando su posición y en particular la distancia al centro de la figura, sin embargo podemos observar que los pericentros describen en promedio una corona y lo mismo sucede con los apocentros. Así podemos concluir que en promedio la distancia del pericentro al origen no cambia y lo mismo sucede con el apocentro. De esta forma podemos afirmar que el cambio promedio del semieje mayor y de la excentricidad no varía con el tiempo cuando la excentricidad es pequeña. Si ahora observamos la forma que tiene $\langle \dot{a} \rangle$ en la ecuación (4.2.50), podemos ver que los términos de orden más bajo en e son cuadráticos. Para la variación de $\langle \dot{e} \rangle$ en la ecuación (4.2.49) los términos de orden más bajo de e son lineales. De esta forma podemos verificar que a orden (e^0) las variaciones de a y e son cero; esto concuerda con el comportamiento numérico.

Ahora, si calculamos el desplazamiento del eje excéntrico ω en la simulación numérica obtenemos una gráfica como se muestra en la figura 4.12. En esta gráfica vemos como ω varía al cabo del tiempo formando un entramado simétrico, sin embargo el comportamiento promedio es lineal. Ahora tomemos la expresión de $\langle \dot{\omega} \rangle$ en la ecuación (4.2.47); si sólo consideramos los términos a orden más bajo de e (que son de orden

(e^0), tenemos la ecuación diferencial,

$$\langle \dot{\omega} \rangle = -\frac{2\pi G m_s m_L c^3}{256 \mu^3 r_L^3} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2 - 19)}{\mu}} (-672 + 576 \sin^2(\omega)).$$

Esta ecuación diferencial sólo depende de ω a orden (e^0), es decir, las variables a , e y c son constantes a este orden. Al hacer la integración numérica obtenemos como resultado la curva morada que se observa en la figura 4.12. Es claro que la curva sigue las mismas oscilaciones del entramado del eje excéntrico pero en promedio se comporta igual que el promedio de dicho eje.

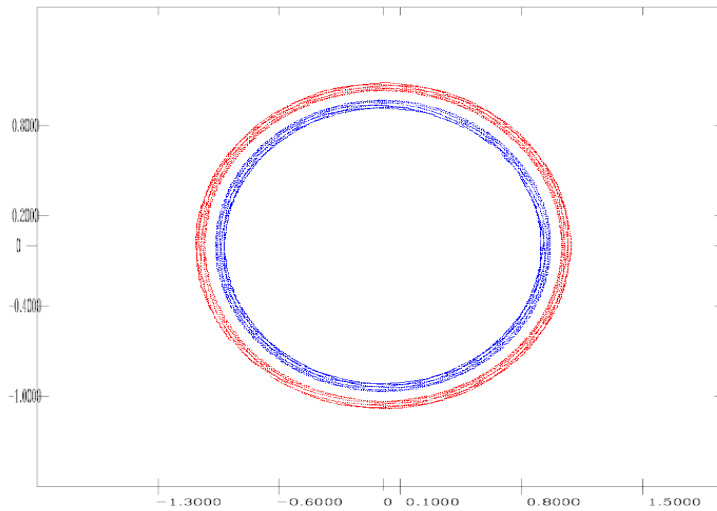


Figura 4.11: Los puntos rojos representan la evolución de los pericentros y los puntos azules de los apocentros. Debemos observar que los apocentros y los pericentros forman una corona en promedio. Los ejes de la gráfica son x e y .

Podemos concluir que al examinar los resultados obtenidos en este capítulo son consistentes con los experimentos numéricos al hacerlos a orden (e^0).

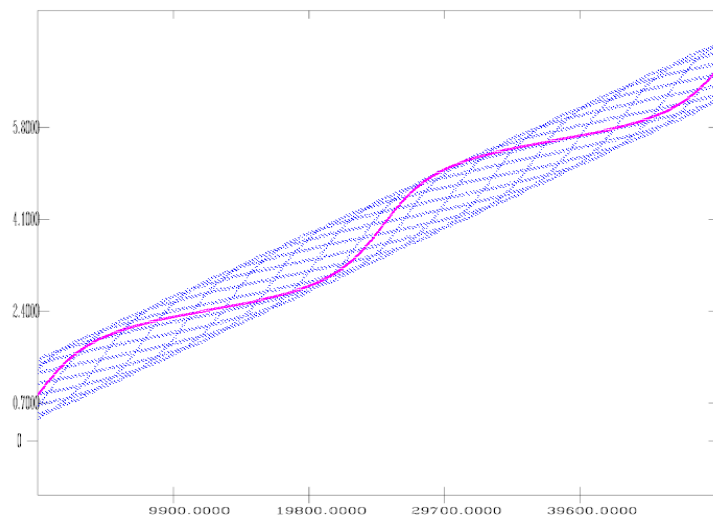


Figura 4.12: El entramado de puntos azules representa la evolución del eje excéntrico ω en la simulación numérica. La línea azul representa la solución de la ecuación diferencial de ω .

Capítulo 5

Aproximación al caso real: la Tierra en forma de esferoide

En los casos previos de nuestra tesis tenemos la base de ésta, el esqueleto teórico que la fundamenta. Con todo, aún no hemos considerado la forma real de la Tierra, la cual se explicó ampliamente en la página 4. Como primera aproximación del geoide, se considerará la forma de la Tierra un esferoide.

Para ello introduciremos dos masas negativas, una arriba y otra abajo del origen donde se concentra la masa principal de la Tierra, sobre el eje \vec{z} del sistema fijo, tal y como lo muestra la figura 5.1. La razón se explicará en el Apéndice C.

Como las fuerzas son aditivas, es decir, al considerar la fuerza resultante de un conjunto de fuerzas aplicadas a un objeto, basta con sumar la representación vectorial de todas éstas. Para resolver estos casos, bastará sumar la fuerza perturbadora de los bipolos en las fuerzas perturbadoras de los casos anteriores, donde la fuerza perturbadora de la Luna y la fuerza de campo central generada por la Tierra ya fueron consideradas. Por lo tanto, tendremos que encontrar las fuerzas \vec{F}_r , \vec{F}_α y \vec{F}_c , correspondientes a dichas dos fuerzas.

La fuerza perturbadora generada por los bipolos es,

$$\vec{F}_b = Gm_s m_\epsilon |\vec{r} - \vec{\delta}|^{-3} (\vec{r} - \vec{\delta}) + Gm_s m_\epsilon |\vec{r} + \vec{\delta}|^{-3} (\vec{r} + \vec{\delta}).$$

Sin embargo, como $|\vec{r} - \vec{\delta}|^{-3} = |\vec{r} + \vec{\delta}|^{-3}$, por simetría dado que \vec{r} pertenece al plano xy (figura 5.1) obtenemos,

$$\vec{F}_b = 2Gm_s m_\epsilon |\vec{r} - \vec{\delta}|^{-3} \vec{r},$$

donde, m_ϵ , es la masa de los bipolos y como hemos visto, m_s , es la masa del satélite.

No obstante, si observamos la figura 5.1, se satisface,

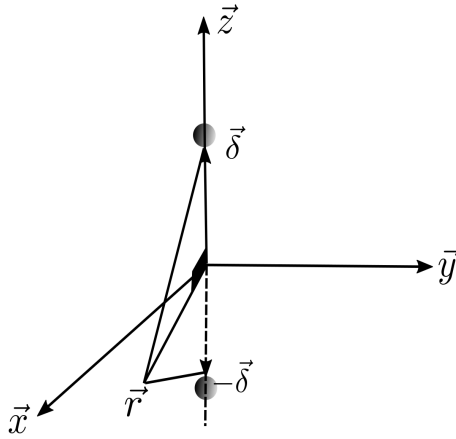


Figura 5.1: Bipolos

$$\begin{aligned}
 |\vec{r} - \vec{\delta}|^{-3} &= (r^2 + \delta^2)^{-\frac{3}{2}} \\
 &= r^{-3} \left(1 + \frac{\delta^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
 &\approx r^{-3} \left(1 - \frac{3\delta^2}{2r^2} + \frac{15\delta^4}{8r^4}\right).
 \end{aligned}$$

Utilizando Taylor y despreciando los términos de $\left(\frac{\delta}{r}\right)^n$ con n mayor a 4, obtenemos,

$$\vec{F}_b \approx 2Gm_s m_e \left(r^{-2} - \frac{3}{2}\delta^2 r^{-4}\right) \hat{r}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_r &\approx 2Gm_s m_e \left(r^{-2} - \frac{3}{2}\delta^2 r^{-4}\right) \hat{r}, \\
 \vec{F}_\alpha &= 0, \\
 \vec{F}_c &= 0.
 \end{aligned}$$

Aquí desembocamos en los dos casos anteriores; si la órbita satelital es circular o elíptica.

Ahora que ya tenemos las proyecciones de la fuerza perturbadora que generan los bipolos sobre el satélite, es importante notar, que como las ecuaciones diferenciales de los parámetros orbitales, (2.0.1), son lineales con respecto a F_r , F_α y F_c , podemos calcular cómo cambian los parámetros orbitales si la única fuerza perturbativa fuera la generada por los dos bipolos, promediarlos, para luego sumar ese resultado con el que hemos obtenido en la página 30, en el caso en que la órbita satelital es circular, donde

se calcularon los promedios de los parámetros orbitales con la fuerza de perturbación que la Luna genera únicamente sobre el satélite (4.1.28).

Si la órbita del satélite es circular, dado que las proyecciones de la fuerza perturbadora respectivas son, $F_r = 2Gm_s m_e \left(r^{-2} - \frac{3}{2} \delta^2 r^{-4} \right)$, $F_\alpha = 0$ y $F_c = 0$, por (2.0.1), podemos notar que dentro las integrales resultantes de los parámetros no habrá términos constantes diferentes de cero cuando se sustituyan los valores de F_r , F_α y F_c , pues al sustituir las proyecciones de las fuerzas, sólo quedarán constantes multiplicando por las funciones trigonométricas de (2.0.1) y al promediar los parámetros orbitales, éstos se harán 0 (este último argumento se verá más claramente cuando desarrollemos más adelante en el caso cuando la órbita inicial del satélite sea elíptica). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle \dot{c} \rangle &= 0, \\ \langle \dot{e} \rangle &= 0, \\ \langle \dot{a} \rangle &= 0, \\ \langle \dot{\omega} \rangle &= 0, \\ \langle \dot{i} \rangle &= 0, \\ \langle \dot{\Omega} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Aquí vemos que no le afecta nada al satélite que la Tierra esté achatada cuando la órbita del satélite es circular, pues los parámetros se seguirán moviendo como en (4.1.29).

Cuando la órbita es elíptica, tendremos que poner a r en términos de f para poder integrar, así que utilizando la ecuación (4.1.13) procedemos de la misma manera como lo hemos hecho. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}F_r &= 2Gm_s m_e \left(\frac{\mu^2}{c^4} (1 + e \cos(f))^2 - \frac{3\delta^2 \mu^4}{2c^8} (1 + e \cos(f))^4 \right), \\ F_\alpha &= 0, \\ F_c &= 0.\end{aligned}$$

Substituyendo en (2.0.1), obtenemos,

$$\frac{de}{df} = \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left[2 \frac{c}{\mu} Gm_s m_e \sin(f) \left(\frac{\mu^2}{c^4} (1 + e \cos(f))^2 - \frac{3\mu^4 \delta^2}{2c^8} (1 + e \cos(f))^4 \right) \right] \\ (1 - 2e \cos(f) + 3e^2 \cos^2(f)).$$

Ya que no hay ninguna potencia positiva de r , sólo expandimos en serie de Taylor de $(1 + e \cos(f))^2$, que viene de cuando hacemos el cambio de variable de t con f .

$$\frac{da}{df} = \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left[4 \frac{a^2 e}{c} Gm_s m_e \sin(f) \left(\frac{\mu^2}{c^4} (1 + e \cos(f))^2 - \frac{3\delta^2 \mu^4}{2c^8} (1 + e \cos(f))^4 \right) \right] \\ (1 - 2e \cos(f) + 3e^2 \cos^2(f)),$$

$$\frac{d\omega}{df} = \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)^3}{\mu}} \left[-2\frac{c}{\mu e} Gm_s m_e \cos(f) \left(\frac{\mu^2}{c^4} (1 + e \cos(f))^2 - \frac{3\delta^2 \mu^4}{2c^8} (1 + e \cos(f))^4 \right) \right] \\ (1 - 2e \cos(f) + 3e^2 \cos^2(f)).$$

Los demás resultan ser cero.

Simplificando con Maxima obtenemos,

$$\langle \dot{e} \rangle = \frac{12\pi k G a^5 c e^2 m_s m_L \omega^2}{\mu^2 r_L^3} \cos(\omega) \sin(\omega) \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}}, \quad (5.0.1)$$

$$\langle \dot{\omega} \rangle = \frac{2\pi k G \mu m_e m_s}{16c^7 e} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [48\delta^2 e \mu^2], \quad (5.0.2)$$

$$\langle \dot{a} \rangle = 0,$$

$$\langle \dot{i} \rangle = 0, \quad (5.0.3)$$

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = 0.$$

Si sumamos los promedios de los parámetros orbitales cuando sólo consideramos el caso de la Tierra achatada, es decir, (5.0.3), con los promedios de éstos últimos cuando la órbita inicial del satélite es elíptica y el satélite está siendo perturbado por la Luna cuando la Tierra es esférica, (4.2.48), (4.2.50), (4.2.49), (4.2.47), (4.2.51) y (4.2.52), de tal forma que los períodos de integración coincidan, en este caso de 0 a $2\pi k$, podremos obtener los cambios en los parámetros orbitales del caso que queremos demostrar. Son

$$\langle \dot{\omega} \rangle \approx -\frac{\pi G m_s m_L c^3}{32\mu^2 r_L^3} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [-71 \sin^2(\omega)] \\ + \frac{2\pi k G \mu m_e m_s}{16c^7 e} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} [48\delta^2 e \mu^2], \quad (5.0.4)$$

$$\langle \dot{c} \rangle = -\frac{2\pi G m_L m_s c^4 e^2}{16\mu^3 r_L^3} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \\ [-48a^3 \omega_L^2 \cos(\omega) \sin(\omega) - 120\mu \cos(\omega) \sin(\omega)], \quad (5.0.5)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = \frac{2\pi G m_L m_s}{32c^7 \mu^4 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \\ [-168c^2 e \mu^6 r_L \cos(\omega) \sin(\omega) + 72c^{10} e \mu^2 r_L \cos(\omega) \sin(\omega)] \\ + \frac{12\pi k G a^5 c e^2 m_s m_L \omega^2}{\mu^2 r_L^3} \cos(\omega) \sin(\omega) \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}}, \quad (5.0.6)$$

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{2Gk\pi a^2 m_s m_L}{256c\mu^3 r_L^4} \sqrt{-\frac{a^3(3e^2-1)}{\mu}} \quad (5.0.7)$$

$$[-1536a^3 c^2 e^2 \mu r_L \omega_L^2 \cos(\omega) \text{sen}(\omega)],$$

$$\left\langle \frac{di}{df} \right\rangle = 0, \quad (5.0.8)$$

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = 0. \quad (5.0.9)$$

Capítulo 6

Configuración general de la órbita satelital

El último caso que estudiaremos, el más general a considerar en este trabajo, consiste en suponer el eje de la Tierra inclinado y sobre él a los dos bipolos. También consideraremos los planos de la Luna y del satélite no coplanares; sin embargo, como lo muestra la figura 6.1, la configuración inicial de los dos planos con relación al plano principal, xy , será tal que dichos planos sólo estarán rotados con respecto al eje \vec{x} los ángulos i_L e i , respectivamente.

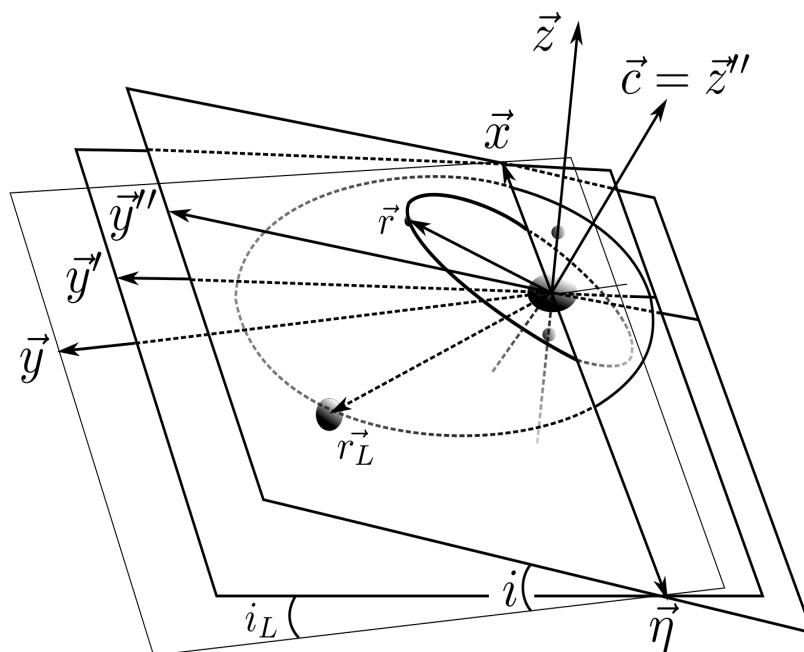


Figura 6.1: Planteamiento, caso $i \neq 0$.

La órbita lunar al igual se supondrá circular y fija. La fuerza perturbadora es:

$$\vec{F} = Gm_L m_s |\vec{r} - \vec{r}_L|^{-3} (\vec{r} - \vec{r}_L) + Gm_s m_e |\vec{r} - \vec{\delta}|^{-3} (\vec{r} - \vec{\delta}) + Gm_s m_e |\vec{r} + \vec{\delta}|^{-3} (\vec{r} + \vec{\delta}). \quad (6.0.1)$$

Como la trayectoria de \vec{r}_L es circular en el sistema $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$, se escribe en el sistema $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ como

$$\vec{r}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i_L) & \text{sen}(i_L) \\ 0 & -\text{sen}(i_L) & \cos(i_L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_L t) \\ \text{sen}(\omega_L t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_L t) \\ \cos(i_L) \text{sen}(\omega_L t) \\ -\text{sen}(i_L) \text{sen}(\omega_L t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

El ángulo que se rota es $-i_L$ pues dicha rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. Si escribimos a \vec{r}_L con respecto al sistema variable $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$, el cual podemos ubicar en la figura 6.1 por medio de los vectores \vec{r} , $\vec{z} = \vec{c}$, y el ortogonal a éstos, $\vec{\alpha}$, que no aparece en la figura, basta utilizar la ecuación (4.2.13), al suponer únicamente a i , y ω distintos de cero. Así obtendremos

$$\vec{r}_L = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (6.0.2)$$

donde,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(\omega_L t) (\cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \cos(i) \text{sen}(\Omega) \text{sen}(\omega + f)) \\ &\quad + \text{sen}(\omega_L t) \cos(i_L) (\cos(\omega + f) \text{sen}(\Omega) - \cos(i) \cos(\Omega) \text{sen}(\omega + f)) \\ &\quad - \text{sen}(\omega_L t) \text{sen}(i_L) \text{sen}(i) \text{sen}(\omega + f), \\ \alpha_2 &= \cos(\omega_L t) (\cos(\Omega) \text{sen}(\omega + f) - \cos(i) \text{sen}(\Omega) \cos(\omega + f)) \\ &\quad + \text{sen}(\omega_L t) \cos(i_L) (\cos(i) \cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \text{sen}(\Omega) \text{sen}(\omega + f)) \\ &\quad - \text{sen}(\omega_L t) \text{sen}(i_L) \text{sen}(i) \cos(\omega + f), \\ \alpha_3 &= \cos(\omega_L t) \text{sen}(i) \text{sen}(\Omega) - \text{sen}(\omega_L t) \cos(i_L) \text{sen}(i) \cos(\Omega) \\ &\quad - \text{sen}(\omega_L t) \text{sen}(i_L) \cos(i). \end{aligned}$$

Pero como en la condición inicial, $\Omega = 0$, entonces,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(\omega_L t) \cos(\omega + f) - \text{sen}(\omega_L t) \cos(i_L) \cos(i) \text{sen}(\omega + f) \\ &\quad - \text{sen}(\omega_L t) \text{sen}(i_L) \text{sen}(i) \text{sen}(\omega + f), \\ \alpha_2 &= \cos(\omega_L t) \text{sen}(\omega + f) + \text{sen}(\omega_L t) \cos(i_L) \cos(i) \cos(\omega + f) \\ &\quad - \text{sen}(\omega_L t) \text{sen}(i_L) \text{sen}(i) \cos(\omega + f), \\ \alpha_3 &= -\text{sen}(\omega_L t) \cos(i_L) \text{Sen}(i) - \text{sen}(\omega_L t) \text{sen}(i_L) \cos(i). \end{aligned}$$

El mismo procedimiento anterior lo realizamos con los bipolos que están representados en el sistema fijo como $\vec{\delta} = (0, 0, \pm 1)$. Así, los bipolos escritos en el sistema variable son,

$$\hat{\delta} = \{\pm \text{sen}(i) \text{sen}(\omega + f)\} \hat{r} + \{\pm \text{sen}(i) \cos(\omega + f)\} \hat{\alpha} + \{\pm \cos(i)\} \hat{c}. \quad (6.0.3)$$

Sólo nos queda poder expresar las distancias $|\vec{r} - \vec{r}_L|^{-\frac{3}{2}}$ y $|\vec{r} \pm \vec{\delta}|^{-\frac{3}{2}}$ en términos de los ángulos de Euler.

Para encontrar la primera de las distancias, como posteriormente explicaremos, nos basaremos en la figura 6.2 donde hemos plasmado toda la dinámica anteriormente descrita, para expresar el ángulo $\sphericalangle AOB = i'$ en términos de $i - i_L$.

Para el anterior propósito, utilizaremos el círculo unitario de la figura 6.2, ρ , el cual tiene como centro el origen de coordenadas O . Dicho círculo se encuentra en el plano κ , el cual está rotado del sistema $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ un ángulo $i - i_L$ con respecto al eje \vec{y} . El punto B es cualquier punto sobre la circunferencia ρ , y el punto A , es la proyección de B sobre el plano $\vec{x}'\vec{y}'$. El punto C es la proyección de la recta OB con el eje \vec{y} . R es la intersección del eje \vec{x}' con la proyección del punto de la circunferencia tal que si se proyecta sobre el plano $\vec{x}'\vec{y}$, cae exactamente sobre el eje \vec{x}' , S .

$i - i_L$ es el ángulo, $\sphericalangle BCA$, $i' = \sphericalangle BOA$. f es el ángulo que va del eje \vec{x} a la línea OA , y su complemento, $\frac{\pi}{2} - f$, el ángulo que va del eje \vec{x} a la línea OC . Las proyecciones de éstos últimos ángulos sobre el plano κ , se mantienen constantes. Es decir, $\sphericalangle SOB = f$, y $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC = \frac{\pi}{2} - f$.

Como el triángulo $\triangle OBC$ es rectángulo y $OB = 1$, entonces $BC = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - f\right) = \cos(f)$.

También, $\text{sen}(i') = BA$ y $\text{sen}(i - i') = \frac{BA}{BC} = \frac{BA}{\cos(f)}$.

Así, $BA = \cos(f) \text{sen}(i - i')$. De ahí que $\text{sen}(i') = \cos(f) \text{sen}(i - i')$.

Por lo tanto,

$$i' = \text{sen}^{-1}\left(\cos(f) \text{sen}(i - i_L)\right). \quad (6.0.4)$$

Nótese que el anterior resultado no depende del radio del círculo. Para explicar por qué se necesita poner a i' en términos de $i - i_L$ recurriremos a la figura 6.3. Explicaremos primero la figura. El vector \vec{r}_L es el segmento dirigido \vec{OM} , \vec{r} es el segmento dirigido \vec{ON} , $r = OM$, y $r_L = ME$. E es la proyección del punto N sobre el plano $\vec{x}'\vec{y}'$. G es la intersección de la recta que contiene al segmento \vec{OE} , con la órbita lunar. $\sphericalangle MOE = f - \omega_L t$. Además,

$$|\vec{r} - \vec{r}_L| = MN = \sqrt{ME^2 + NE^2}.$$

Si $i' = \sphericalangle NOE$, entonces,

$$\begin{aligned} NE &= r \text{sen}(i'), \\ EO &= r \cos(i'), \\ ME^2 &= r_L^2 + EO^2 - 2r_L EO \cos(f - \omega_L t) \\ &= r_L^2 + r^2 \cos^2(i') - 2r_L r \cos(i') \cos(f - \omega_L t). \end{aligned}$$

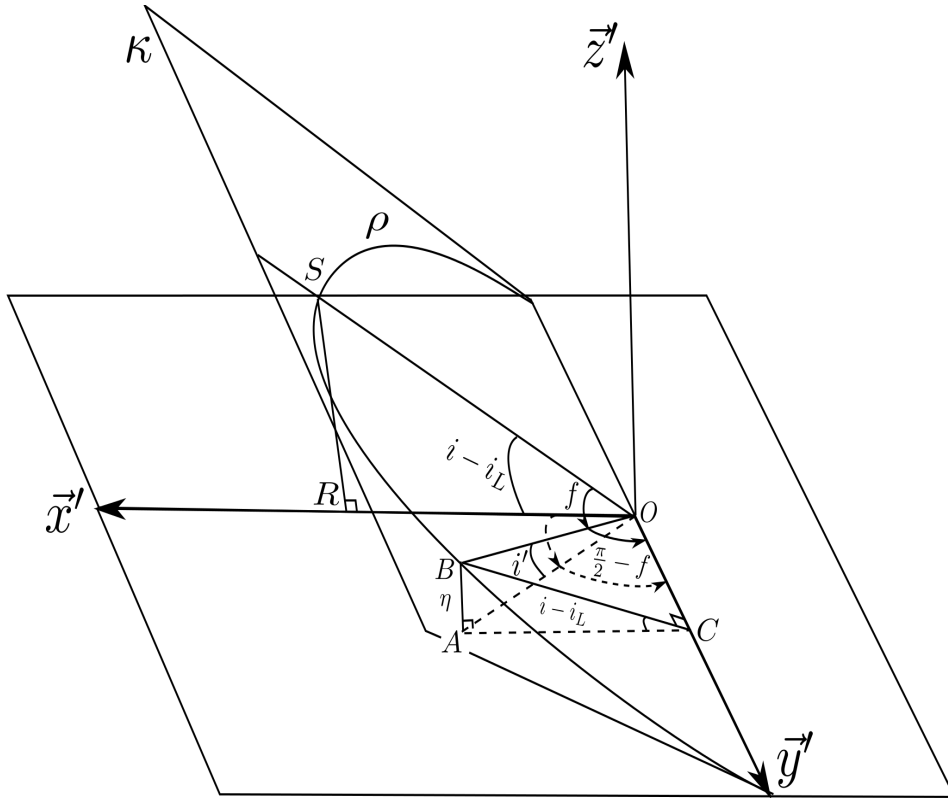


Figura 6.2: Caso $i \neq 0$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{r_L^2 + r^2 \cos(i') - 2r_L r \cos(i') \cos(f - \omega_L t) + r^2 \text{sen}(i')} \\ &= \sqrt{r_L^2 + r^2 - 2r_L r \cos(i') \cos(f - \omega_L t)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} |r - r_L|^{-3} &= (r_L^2 + r^2 - 2r_L r \cos(i') \cos(f - \omega_L t))^{-\frac{3}{2}} \\ &= r_L^{-3} \left(1 + \left(\frac{r}{r_L}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_L}\right) \cos(i') \cos(f - \omega_L t) \right)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

En este punto es necesario notar la relación entre las figuras 6.2 y 6.3. Aunque la trayectoria de \vec{r} en este caso no es circular sino elíptica, el estudio que hemos hecho se respeta, pues no hemos considerado el movimiento de éstos con respecto al tiempo; es una cuestión meramente de ángulos.

Por (6.0.4) tenemos que,

$$\begin{aligned} \cos(i') &= \sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{sen}^{-1}(\cos(f) \text{sen}(i - i_L)))} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(f) \text{sen}^2(i - i_L)}. \end{aligned}$$

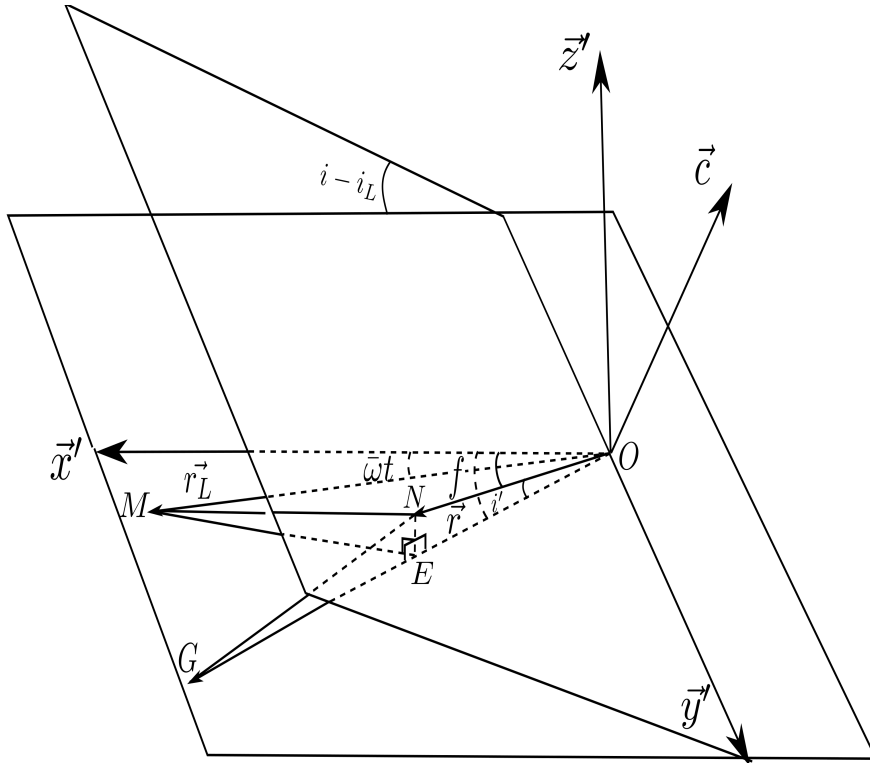


Figura 6.3: Caso $i \neq 0$.

$i - i_L \in (0, \frac{\pi}{2})$, ya que si $i - i_L$ excediera a $\frac{\pi}{2}$, sería un caso análogo al que ya se consideró pero orientado diferente. Estudiaremos el problema cuando $i - i_L \in (0, \frac{\pi}{4})$. Como, $\text{sen}^2(i - i_L) \approx 0$, aproximaremos con series de Taylor alrededor de $\cos^2(f) \text{sen}^2(i - i_L) = 0$.

Por Taylor tenemos,

$$\cos(i') \approx 1 + \frac{1}{2} \cos^2(f) \text{sen}^2(i - i_L) + \frac{3}{8} \cos^4(f) \text{sen}^4(i - i_L).$$

Así,

$$\begin{aligned} |r - r_L|^{-3} &= r_L^{-3} \left(1 + \left(\frac{r}{r_L}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_L}\right) \cos(f - \omega_L t) \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2(f) \text{sen}^2(i - i_L) + \frac{3}{8} \cos^4(f) \text{sen}^4(i - i_L) \right) \right)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Debido a que, $\frac{r}{r_L} \approx 0$, por (4.1.5),

$$\begin{aligned} |r - r_L|^{-3} &= r_L^{-3} + 3r r_L^{-4} \cos(f - \omega_L t) \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2(f) \text{sen}^2(i - i_L) + \frac{3}{8} \cos^4(f) \text{sen}^4(i - i_L) \right). \end{aligned}$$

Si $z = \cos(f - \omega_L t) \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2(f) \sin^2(i - i_L) + \frac{3}{8} \cos^4(f) \sin^4(i - i_L)\right)$, entonces,

$$|r - r_L|^{-3} = r_L^{-3} + 3r r_L^{-4} z.$$

Nótese que $\cos(f - \omega_L t) = \cos(f) \cos(\omega_L t) + \sin(f) \sin(\omega_L t)$ y las funciones trigonométricas que dependen de ωt son las mismas que las que ya hemos calculado en (4.2.40) y (4.2.41).

Solamente nos falta encontrar $|\vec{r} \pm \vec{\delta}|^{-\frac{3}{2}}$ en términos de los ángulos de Euler. De acuerdo con la figura 6.4, podemos encontrar las distancias del satélite a los dos bipolos, por medio de la ley de los cosenos.

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{\delta}| &= \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos\left(\frac{\pi}{2} - i'\right)} \\ &= r \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 - \frac{2\delta}{r} \sin(i')}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$|\vec{r} + \vec{\delta}| = r \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + \frac{2\delta}{r} \sin(i')}.$$

Sin embargo, por (6.0.4), tenemos que

$$\sin(i') = \cos(f) \sin(i - i_L).$$

Así,

$$|\vec{r} - \vec{\delta}| = r \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 - \frac{2\delta}{r} \cos(f) \sin(i - i_L)}.$$

Como el radio de la Tierra mide $6,371 \text{ km}$, es decir, $|\delta| = 6,371 \text{ km}$, y la altura promedio del satélite sobre la superficie de la Tierra, como lo vimos en la página 13, es de aproximadamente $35,786 \text{ km}$, entonces $\frac{\delta}{r} \approx 0$. Por lo tanto, podremos aproximar las expresiones anteriores alrededor de $\left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + \frac{2\delta}{r} \cos(f) \sin(i - i_L) = 0$. Así, si aquí también nos quedamos con potencias de r menores o iguales a 4, tenemos,

$$|\vec{r} - \vec{\delta}|^{-3} \approx r^{-3} + 3\delta r^{-4} \cos(f) \sin(i - i_L) \quad (6.0.5)$$

y

$$|\vec{r} + \vec{\delta}|^{-3} \approx r^{-3} - 3\delta r^{-4} \cos(f) \sin(i - i_L). \quad (6.0.6)$$

Si agrupamos los términos de cada eje de (6.0.1) y simplificamos, tenemos que

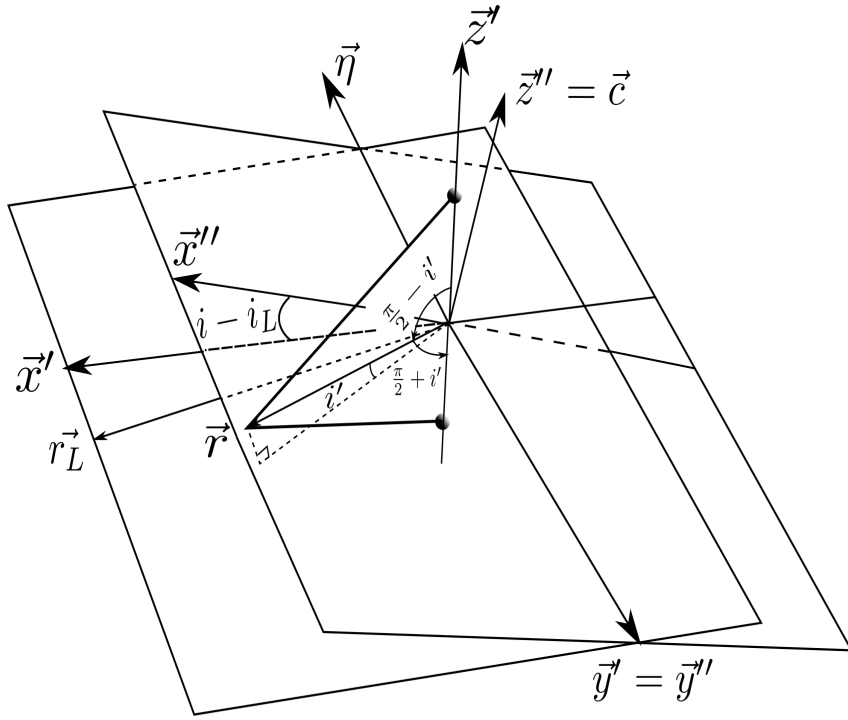


Figura 6.4: Distancia de los polos al satélite.

$$\begin{aligned}
 F_r &= Gm_L m_s (r r_L^{-3} + 3r^2 r_L^{-4} z - \alpha_1 [r_L^{-3} + 3r r_L^{-4} z]) \\
 &\quad + 2Gm_s m_e (r^{-2} - 3\beta_1 \delta \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) r^{-4}), \\
 F_\alpha &= -Gm_L m_s \alpha_2 (r_L^{-3} + 3r r_L^{-4} z) \\
 &\quad - 6Gm_s m_e \delta \beta_2 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) r^{-4}, \\
 F_c &= -Gm_L m_s \alpha_3 (r_L^{-3} + 3r r_L^{-4} z) \\
 &\quad - 6Gm_s m_e \delta \beta_3 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) r^{-4}.
 \end{aligned} \tag{6.0.7}$$

De manera similar a como lo hemos hecho vemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{dc}{df} &= \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)}{\mu}} \left[-Gm_L m_s \alpha_2 \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) + 3r_L^{-4} z \right) \right. \\
 &\quad \left. - 6 \frac{\mu^5}{c^{10}} Gm_s m_e \delta \beta_2 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^5 \right] \\
 &(1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)),
 \end{aligned} \tag{6.0.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{de}{df} = & \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)}{\mu}} \left\{ \frac{c}{\mu} \operatorname{sen}(f) \left[Gm_L m_s \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) + 3r_L^{-4} z \right. \right. \right. \\
& - \alpha_1 \left. \left. \left[\frac{\mu^2}{c^4} r_L^{-3} (1 + e \cos(f))^2 + 3 \frac{\mu}{c^2} r_L^{-4} z (1 + e \cos(f)) \right] \right] \right. \\
& + 2Gm_s m_\epsilon \left(\frac{\mu^4}{c^8} (1 + e \cos(f))^4 - 3 \frac{\mu^6}{c^{12}} \beta_1 \delta \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) \right. \\
& \left. \left. (1 + e \cos(f))^6 \right) \right] + \frac{1}{c} (e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)) \\
& \left. \left[-Gm_L m_s \alpha_2 \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) + 3r_L^{-4} z \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 6 \frac{\mu^5}{c^{10}} Gm_s m_\epsilon \delta \beta_2 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^5 \right] \right\} \\
& (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)),
\end{aligned} \tag{6.0.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{di}{df} = & \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)}{\mu}} \left\{ \frac{1}{c} \cos(\omega + f) \right. \\
& \left. \left[-Gm_L m_s \alpha_3 \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) + 3r_L^{-4} z \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 6 \frac{\mu^5}{c^{10}} Gm_s m_\epsilon \delta \beta_3 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^5 \right] \right\} \\
& (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)),
\end{aligned} \tag{6.0.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{df} = & \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)}{\mu}} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\operatorname{sen}(\omega + f)}{\operatorname{sen}(i)} \right. \\
& \left. \left[-Gm_L m_s \alpha_3 \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) + 3r_L^{-4} z \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 6 \frac{\mu^5}{c^{10}} Gm_s m_\epsilon \delta \beta_3 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^5 \right] \right\} \\
& (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)),
\end{aligned} \tag{6.0.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{df} = & \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)}{\mu}} \left\{ -\frac{c}{\mu e} \cos(f) \left[Gm_L m_s \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \right. \\
& + 3r_L^{-4} z - \alpha_1 \left[\frac{\mu^2}{c^4} r_L^{-3} (1 + e \cos(f))^2 + 3 \frac{\mu}{c^2} r_L^{-4} (1 + e \cos(f)) z \right] \\
& + 2Gm_s m_\epsilon \left(\frac{\mu^4}{c^8} (1 + e \cos(f))^4 \right. \\
& \left. \left. \left. - 3 \frac{\mu^6}{c^{12}} \beta_1 \delta \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^6 \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{c} \frac{\cos(i) \operatorname{sen}(\omega + f)}{\operatorname{sen}(i)} \left[-Gm_L m_s \alpha_3 \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) + 3r_L^{-4} z \right) \right. \\
& \left. \left. - 6 \frac{\mu^5}{c^{10}} Gm_s m_\epsilon \delta \beta_3 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^5 \right] \right. \\
& + \frac{c}{\mu e} \operatorname{sen}(f) \left[-Gm_s m_L \alpha_2 \left(\frac{\mu^2}{c^4} r_L^{-3} (1 + e \cos(f))^2 + 3 \frac{\mu}{c^2} r_L^{-4} z (1 + e \cos(f)) \right) \right. \\
& \left. \left. - 6 \frac{\mu^6}{c^{12}} Gm_s m_\epsilon \delta \beta_2 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^6 \right] \right. \\
& + \frac{1}{ec} \operatorname{sen}(f) \left[-Gm_L m_s \alpha_2 \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) + 3r_L^{-4} z \right) \right. \\
& \left. \left. - 6 \frac{\mu^5}{c^{10}} Gm_s m_\epsilon \delta \beta_2 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^5 \right] \right\} \\
& (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)),
\end{aligned} \tag{6.0.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{df} = & \frac{c^4}{\mu^2} \sqrt{\frac{a^3(1-e^2)}{\mu}} \left\{ \frac{2a^2 e}{c} \operatorname{sen}(f) \left[Gm_L m_s \left(\frac{\mu}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f)) \right. \right. \right. \\
& + 3r_L^{-4} z - \alpha_1 \left[\frac{\mu^2}{c^2} r_L^{-3} (1 + e \cos(f))^2 + 3 \frac{\mu}{c^2} r_L^{-4} (1 + e \cos(f)) z \right] \\
& + 2Gm_s m_\epsilon \left(\frac{\mu^4}{c^8} (1 + e \cos(f))^4 \right. \\
& \left. \left. \left. - 3 \frac{\mu^6}{c^{12}} \beta_1 \delta \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^6 \right) \right] \right. \\
& + \frac{2a^2 c}{\mu} \left[-Gm_L m_s \alpha_2 \left(\frac{\mu^3}{c^6} r_L^{-3} (1 + e \cos(f))^3 + 3 \frac{\mu^2}{c^4} r_L^{-4} z (1 + e \cos(f))^2 \right) \right. \\
& \left. \left. - 6 \frac{\mu^7}{c^{14}} Gm_s m_\epsilon \delta \beta_2 \cos(f) \operatorname{sen}(i - i_L) (1 + e \cos(f))^7 \right] \right\} \\
& (1 - 4e \cos(f) + 10e^2 \cos^2(f)).
\end{aligned} \tag{6.0.13}$$

Introduciendo en Maxima, como lo hemos hecho antes, e integrando para obtener los promedios de los parámetros orbitales y considerado sólo hasta (e^0) y potencias de r_L^{-1} menores que 4, tenemos,

$$\langle \dot{c} \rangle = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{1}{c^6} (6\pi k \delta m_s m_\epsilon \mu^3 G \cos(\omega) \sin(i)) \operatorname{sen}(i_L - i),$$

$$\langle \dot{i} \rangle = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{1}{c^7} (6\pi k \delta m_s m_e \mu^3 G \cos(\omega) \cos(i)) \sin(i_L - i),$$

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{1}{c^7 \sin(i)} (6\pi k \delta m_s m_e \mu^3 G \sin(\omega) \cos(i)) \sin(i_L - i),$$

$$\langle \dot{a} \rangle = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{1}{c^9} (12\pi k a^2 \delta m_s m_e \mu^4 G \cos(\omega) \sin(i)) \sin(i_L - i),$$

$$\langle \dot{e} \rangle = 0.$$

Conclusión

Mediante el planteamiento para encontrar el movimiento orbital de un satélite en órbita alrededor de nuestro planeta con pequeñas perturbaciones externas, problema fundamentalmente importante en los avances de la tecnología actual, se estudió en esta tesis la eficacia de la teoría asintótica de promedios para la resolución del movimiento de la órbita satelital.

Se utilizó para este fin el caso del movimiento de la órbita satelital elíptica coplanar a la luna.

La problemática original escrita formalmente es la siguiente.

"Se quiere resolver el movimiento global orbital de un satélite alrededor de un planeta que no es esférico en su totalidad (Tierra) y su masa es mucho mayor a la masa de éste, con una ligera perturbación generada por otro cuerpo de masa mucho mayor a los dos anteriores (Luna)".

Por global nos referimos a que en tiempos largos podemos conocer su trayectoria. Tal es el caso de las coronas generadas por los apocentros y epicentros en la página 52.

La evidencia de la eficacia de la teoría asintótica de promedios se mostró por medio de simulaciones numéricas que determinaron que la solución obtenida mediante el método propuesto corresponde bastante bien al comportamiento de la simulación.

Por medio de los órdenes de e en las ecuaciones obtenidas, se pudo conocer cómo cambia el movimiento orbital. Se logró clasificar cuáles elementos orbitales eran los rápidos y cuáles los lentos. Por ejemplo, como las ecuaciones finales de a y c sólo contienen términos de orden 2 para e , para excentricidades pequeñas, éstos no se mueven significativamente, a diferencia de los parámetros e y ω para los cuales la potencia de e más pequeña es la lineal, por lo tanto estos se mueven más rápido que los anteriores, coincidiendo con la simulación numérica.

Es importante mencionar que para lograr lo antes mencionado, se han supuesto dos hechos importantes en este trabajo que dan lugar al nombre de asintótica a la teoría aplicada: la excentricidad considerada del satélite y cómo lo vimos a lo largo de este trabajo, la razón de la distancia del satélite a la tierra y la distancia de la tierra a la luna, $\frac{r}{r_L}$, son pequeños.

Aunque los cálculos para poder determinar el movimiento de la órbita satelital son enormes y simplificarlos para resolverlos resulta ser bastante tedioso, en la práctica haciendo uso de la teoría asintótica de promedios podemos simplificar significativamente el problema, pues como vimos, sólo se necesita simplificar las funciones trigonométricas anidadas para poder integrar en un período del satélite cuyo movimiento orbital está siendo determinado analíticamente.

Uno de los grandes avances en la modernidad fue la capacidad de resolución de problemas por medio de los sistemas computacionales, en particular problemas concernientes con la Mecánica Celeste. Así, se han desarrollado diversos programas que han permitido a la humanidad poder desarrollar y simplificar cálculos enormes de manera confiable y rápida.

De esta manera, pudimos utilizar Maxima para desarrollar dichas expresiones trigonométricas y poder resolver de una manera trivial el problema, obteniendo resultados explícitos, que nos permiten visualizar el movimiento general de la órbita del satélite globalmente.

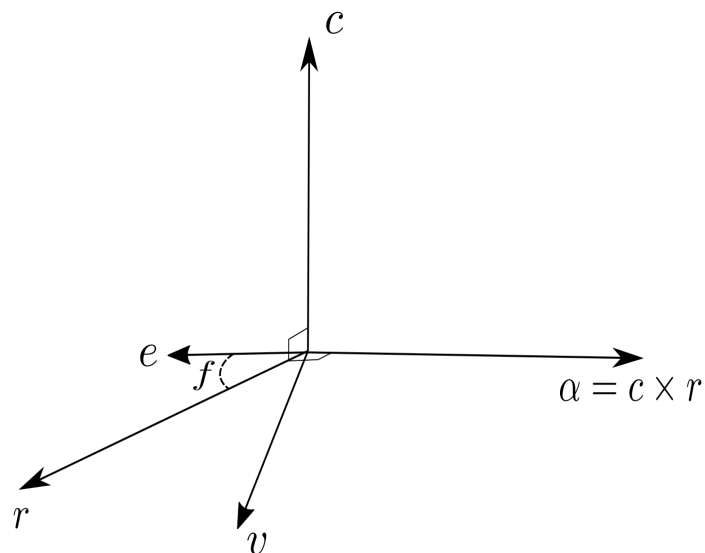
Tomando como fundamento el éxito en la comparación de los resultados por la teoría asintótica de promedios y la aproximación numérica cuando la órbita inicial del satélite es circular, podemos suponer la misma eficiencia de la teoría asintótica de promedios para la solución de los demás casos.

Este hecho resulta ser bastante reconfortante, pues simplifica tremendamente la forma de enfrentar, calcular, y entender el problema, utilizando la periodicidad del mismo a nuestro favor.

Esto nos permite tener certidumbre acerca de los cuerpos satelitales próximos al hombre, que día a día escriben nuevas páginas a la evolución de la historia y tecnología del mismo.

Apéndice A

En esta sección derivaremos las ecuaciones diferenciales que determinan el cambio de los parámetros orbitales debido a una fuerza perturbadora general \vec{F} .



6.1. Cálculo de \dot{c}

Si escribimos a la fuerza externa \vec{F} en términos de sus proyecciones; \vec{F}_α , \vec{F}_r y \vec{F}_c , en el sistema variable $(\vec{r}, \vec{\alpha}, \vec{c})$,

$$\vec{F} = F_c c^{-1} \vec{c} + F_r r^{-1} \vec{r} + F_\alpha \alpha^{-1} \vec{\alpha}. \quad (6.1.1)$$

Como $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$, $\dot{\vec{c}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}$ y como $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, entonces, $\vec{v} \times \dot{\vec{r}} = 0$. Por lo tanto,

$$\dot{\vec{c}} = \vec{r} \times \dot{\vec{v}}. \quad (6.1.2)$$

Recordemos la siguiente identidad para \vec{a} , \vec{b} , y $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (6.1.3)$$

Como la fuerza es igual a la masa por la aceleración (segunda ley de Newton), considerando la masa unitaria, $\vec{F} = \dot{\vec{v}}$, y sustituyendo (6.1.1) en (6.1.2),

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \vec{r} \times (F_c c^{-1} \vec{c} + F_r r^{-1} \vec{r} + F_\alpha \alpha^{-1} \vec{a}) \\ &= F_c c^{-1} (\vec{r} \times \vec{c}) + F_r r^{-1} (\vec{r} \times \vec{r}) + F_\alpha \alpha^{-1} (\vec{r} \times \vec{a}) \\ &= F_c c^{-1} (\vec{r} \times \vec{c}) + F_\alpha \alpha^{-1} (\vec{r} \times (\vec{c} \times \vec{r})) \\ &= -F_c c^{-1} \vec{a} + F_\alpha \alpha^{-1} [\vec{c}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{c})] \\ &= F_\alpha r^2 \alpha^{-1} \vec{c} - F_c c^{-1} \vec{a}. \end{aligned}$$

Como $\alpha = rc \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = rc$,

$$\dot{\vec{c}} = F_\alpha r c^{-1} \vec{c} - F_c c^{-1} \vec{a}. \quad (6.1.4)$$

Para obtener la ecuación gobernante de la norma del elemento orbital c nos hace falta sólo una propiedad, que aunque sencilla de demostrar no es tan intuitiva. Si $b \in \mathbb{R}^3$, por las propiedades del producto punto; $\vec{b} \cdot \vec{b} = b^2 \cos(0) = b^2$, tenemos,

$$2bb' = \frac{d}{dt}(b^2) = \frac{d}{dt}(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 2\vec{b} \cdot \dot{\vec{b}}.$$

Así,

$$bb' = \vec{b} \cdot \dot{\vec{b}} \quad \text{con } b \in \mathbb{R}^3. \quad (6.1.5)$$

Por lo tanto, si a (6.1.4), le aplicamos el operador producto punto con el vector \vec{c} , obtenemos,

$$\vec{c} \cdot \dot{\vec{c}} = F_\alpha r c^{-1} \vec{c} \cdot \vec{c} - F_c c^{-1} \vec{c} \cdot \vec{a}.$$

Como los vectores \vec{c} y \vec{a} son perpendiculares, aplicando (6.1.5), obtenemos la ecuación diferencial gobernante para el elemento orbital c .

$$c' = rF_\alpha. \quad (6.1.6)$$

6.2. Cálculo de \dot{e}

Para obtener la ecuación diferencial de la norma del vector excentricidad, recurrimos a su definición, es decir,

$$\mu \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right) = \vec{v} \times \vec{c}. \quad (6.2.1)$$

Si derivamos la última expresión con respecto al tiempo,

$$\mu \left(\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} + \dot{\vec{e}} \right) = \dot{\vec{v}} \times \vec{c} + \vec{v} \times \dot{\vec{c}}. \quad (6.2.2)$$

Por (6.1.5),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} &= \frac{r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}}{r^2} \\ &= \frac{(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} - (\dot{r} \cdot \vec{r})}{r^3}.\end{aligned}$$

Por (6.1.3),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} &= \frac{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\vec{c} \times \vec{r}}{r^3}.\end{aligned}\tag{6.2.3}$$

Antes bien, como \vec{v} es la fuerza general aplicada y las fuerzas son aditivas, este último será la suma de la fuerza de campo central de la Tierra y de la fuerza perturbadora, por lo tanto,

$$\dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3} \vec{r} + \vec{F}.\tag{6.2.4}$$

Sustituyendo (6.2.3) y (6.2.4) en (6.2.2) obtenemos,

$$\begin{aligned}\mu \left(\frac{\vec{c} \times \vec{r}}{r^3} + \dot{\vec{e}} \right) &= (-\mu r^{-3} \vec{r} + \vec{F}) \times \vec{c} + \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{F}) \\ &= (c \times \vec{r}) \mu r^{-3} + \vec{F} \times \vec{c} + \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{F}).\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\mu \dot{\vec{e}} = \vec{F} \times \vec{c} + \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{F}).\tag{6.2.5}$$

Como $\vec{\alpha} = \vec{c} \times \vec{r}$, y $\vec{c} \perp \vec{r}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{\alpha} &= \vec{r} \times (\vec{c} \times \vec{r}) \\ &= (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{r})\vec{r} \\ &= r^2 \vec{c}.\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

Además,

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \times \vec{c} &= (\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{c} \\ &= (\vec{c} \cdot \vec{c})\vec{r} + (\vec{r} \times \vec{c})\vec{c} \\ &= c^2 \vec{r}.\end{aligned}$$

El vector \vec{v} cae en el plano $r\alpha$, así puede ser escrito como

$$\vec{v} = A(t)\vec{r} + B(t)\vec{\alpha}\tag{6.2.7}$$

para algunas funciones $A(t)$ y $B(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{r} \times \vec{v} \\ &= \vec{r} \times (A(t)\vec{r} + B(t)\vec{\alpha}) \\ &= A(t)(\vec{r} \times \vec{r}) + B(t)(\vec{r} \times \vec{\alpha}) \\ &= B(t)r^2\vec{c}.\end{aligned}$$

De ahí que

$$B(t) = \frac{1}{r^2}. \quad (6.2.8)$$

Por otro lado, como \vec{r} es perpendicular a \vec{r} ,

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{v} &= \vec{r} \cdot (A(t)\vec{r} + B(t)\vec{\alpha}) \\ &= A(t)(\vec{r} \cdot \vec{r}) + B(t)(\vec{r} \cdot \vec{\alpha}) \\ &= A(t)r^2.\end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Pero por (6.2.1),

$$\left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e}\right) \vec{v} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \times \vec{c}) \cdot \vec{v}.$$

Como \vec{v} es perpendicular a $(\vec{v} \times \vec{c})$,

$$\frac{\vec{r}\vec{v}}{r} + \vec{e}\vec{v} = 0$$

y

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos(f), \quad (6.2.10)$$

$$\vec{e} \cdot \vec{\alpha} = e\alpha \cos\left(f + \frac{\pi}{2}\right) = -e\alpha \sin(f).$$

Por la definición de $\vec{\alpha}$,

$$\alpha = cr \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = cr. \quad (6.2.11)$$

De ahí que,

$$\vec{e} \cdot \vec{\alpha} = -ecr \sin(f), \quad (6.2.12)$$

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{v} &= -r(\vec{e} \cdot \vec{v}) \\ &= -r(\vec{e} \cdot (A(t)\vec{r} + B(t)\vec{\alpha})) \\ &= -r(A(t)\vec{e} \cdot \vec{r} + B(t)\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) \\ &= -r(A(t)er \cos(f) - B(t)ecr \sin(f)) \\ &= -A(t)er^2 \cos(f) + B(t)ecr^2 \sin(f).\end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Sustituyendo (6.2.9) en (6.2.13),

$$A(t)r^2 = -A(t)er^2 \cos(f) + B(t)ecr^2 \sin(f).$$

Pero por (6.2.8) y como

$$r^{-1} = \frac{\mu}{c^2}(1 + e \cos(f)) \quad (6.2.14)$$

entonces,

$$\begin{aligned} A &= \frac{ecr^{-2} \sin(f)}{1 + e \cos(f)} \\ &= \frac{\mu e \sin(f)}{rc}. \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Sustituyendo (6.2.15) y (6.2.8) en (6.2.7),

$$\vec{v} = \mu r r^{-1} c^{-1} \sin(f) \vec{r} + r^{-2} \vec{\alpha}.$$

Por otro lado, de (6.2.5) y aplicando la definición de producto vectorial,

$$\begin{aligned} \mu \vec{e} &= F \times \vec{c} + (A(t)\vec{r} + r^{-2}\vec{\alpha}) \times (\vec{r} \times F) \\ &= F \times \vec{c} + \{(A(t)\vec{r} + r^{-2}\vec{\alpha}) \cdot F\} \vec{r} - (\vec{r} \cdot F) \{A(t)\vec{r} + r^{-2}\vec{\alpha}\} \\ &= F \times \vec{c} - A(t)r^2 F + r^{-2} F \vec{r} \vec{\alpha} - A(t)r^2 F - r^{-2}(\vec{r} \cdot \vec{\alpha}) \cdot F \\ &= F \times \vec{c} - A(t)r^2 F + (A(t)F \cdot \vec{r} + r^{-2}F \cdot \vec{\alpha}) \vec{r}. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Pero como

$$\begin{aligned} F \cdot \vec{r} &= rF_r, \\ F \cdot \vec{\alpha} &= \alpha F_\alpha, \\ F \times \vec{c} &= (F_c c^{-1} \vec{c} + F_r r^{-1} \vec{r} + F_\alpha \alpha^{-1} \vec{\alpha}) \times \vec{c} \\ &= F_c c^{-1} (\vec{c} \times \vec{c}) + F_r r^{-1} (\vec{r} \times \vec{c}) + F_\alpha \alpha^{-1} (\vec{\alpha} \times \vec{c}) \\ &= -F_r r^{-1} \vec{\alpha} + F_\alpha \alpha^{-1} ((\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{c}) \\ &= -F_r r^{-1} \alpha + F_\alpha \alpha^{-1} ((\vec{c} \cdot \vec{c}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{c})) \\ &= -F_r r^{-1} \vec{\alpha} + F_\alpha c^2 \alpha^{-1} \vec{r}. \end{aligned}$$

Sustituyendo la anterior expresión en (6.2.16), como $\alpha = rc$,

$$\begin{aligned} \mu \vec{e} &= -F_r r^{-1} \vec{\alpha} + F_\alpha \alpha^{-1} c^2 \vec{r} - A(t)r^2 (F_c c^{-1} \vec{c} + F_r r^{-1} \vec{r} + F_\alpha \alpha^{-1} \vec{\alpha}) \\ &\quad + (A(t)rF_r + r^{-2} \alpha F_\alpha) \vec{r} \\ &= 2cr^{-1} F_\alpha \vec{r} - (r^{-1} F_r + A(t)rc^{-1} F_\alpha) \vec{\alpha} - A(t)r^2 c^{-1} F_c \vec{c}. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

Por (6.2.10) y (6.2.12) y como \vec{e} es perpendicular a \vec{c} ,

$$\begin{aligned}
\mu e \dot{e} &= \mu \vec{e} \dot{\vec{e}} \\
&= 2cr^{-1}F_\alpha(\vec{e} \cdot \vec{r}) - (r^{-1}F_r + A(t)rc^{-1}F_\alpha)(\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) - A(t)r^2c^{-1}F_c(\vec{e} \cdot \vec{c}) \\
&= 2cec\cos(f)F_\alpha + (r^{-1}F_r + A(t)rc^{-1}F_\alpha)ecr\sin(f).
\end{aligned}$$

Por (6.2.15) y (6.2.14),

$$\mu e \dot{e} = ec\sin(f)F_r + \frac{2ec\cos(f)F_\alpha(1 + e\cos(f)) + e^2c(1 - \cos^2(f))F_\alpha}{1 + e\cos(f)}.$$

Por lo tanto,

$$\dot{e} = \frac{c}{\mu}\sin(f)F_r + \frac{c}{\mu} \frac{e + 2\cos(f) + e\cos^2(f)}{1 + e\cos(f)}F_\alpha. \quad (6.2.18)$$

6.3. Cálculo de $\frac{di}{dt}$

Para obtener la derivada de i con respecto al tiempo, si \hat{k} es el vector unitario en la dirección del eje \vec{z} , hemos de notar que la línea de nodos se puede escribir como,

$$\vec{\eta} = \hat{k} \times \vec{c}, \quad (6.3.1)$$

cuya norma es,

$$\eta = c\sin(i). \quad (6.3.2)$$

Recordando que para \vec{a} , \vec{b} , y $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ se satisface,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \quad (6.3.3)$$

Obtenemos por (6.3.1), (6.3.2) y la figura 6.5,

$$\begin{aligned}
\hat{k} \cdot \vec{\alpha} &= \hat{k} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) \\
&= (\hat{k} \times \vec{c}) \cdot \vec{r} \\
&= \vec{\eta} \cdot \vec{r} \\
&= \eta r \cos(\omega + f) \\
&= cr \sin(i) \cos(\omega + f).
\end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Como

$$\vec{c} \cdot \hat{k} = c \cos(i),$$

si derivamos con respecto al tiempo los dos lados, como el vector \vec{k} es constante,

$$\dot{\vec{c}} \cdot \hat{k} = \dot{c} \cos(i) - c \sin(i) \frac{di}{dt}.$$

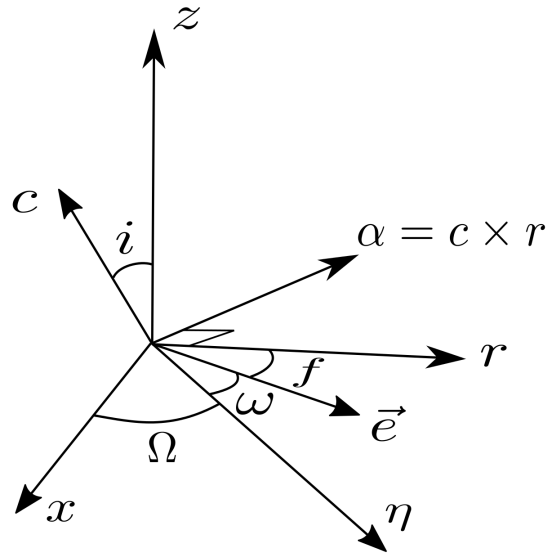


Figura 6.5: Ángulos

Por (6.1.6),

$$\dot{\vec{c}} \cdot \hat{k} = r F_{\alpha} \cos(i) - c \operatorname{sen}(i) \frac{di}{dt}. \quad (6.3.5)$$

Multiplicando ambos lados por \$\hat{k}\$ a (6.1.4), obtenemos,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{c}} \cdot \hat{k} &= -\frac{F_c}{c} \vec{\alpha} \cdot \hat{k} + \frac{r F_{\alpha}}{c} \vec{c} \cdot \hat{k} \\ &= -F_c r \operatorname{sen}(i) \cos(\omega + f) + F_{\alpha} r \cos(i). \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Si igualamos (6.3.6) y (6.3.5), y despejamos \$\frac{di}{dt}\$ tendremos el resultado para el parámetro orbital \$i\$,

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{c} F_c \cos(\omega + f). \quad (6.3.7)$$

6.4. Cálculo de \$\dot{\Omega}\$

Si, por otro lado, multiplicamos a (6.1.4), por \$\hat{j}\$, el vector unitario en la dirección de \$y\$,

$$\hat{j} \cdot \dot{\vec{c}} = \frac{r F_{\alpha}}{c} \vec{c} \cdot \hat{j} - \frac{F_c}{c} \vec{\alpha} \cdot \hat{j}.$$

Sin embargo, como \$\vec{c} \cdot \hat{j}\$ es la proyección del vector \$\hat{j}\$ en el vector \$\vec{c}\$, si evaluamos \$\hat{j}\$ en (4.2.13) y tomamos la entrada de la dirección en el eje \$c\$, obtenemos,

$$\vec{c} \cdot \hat{j} = -c \operatorname{sen}(i) \cos(\Omega).$$

Si hacemos lo mismo con \$\vec{\alpha} \cdot \hat{j}\$, que es la proyección del vector \$\hat{j}\$ sobre el vector \$\vec{\alpha}\$,

$$\vec{\alpha} \cdot \hat{j} = -rc \operatorname{sen}(\omega + f) \operatorname{sen}(\Omega) + rc \cos(\omega + f) \cos(\Omega) \cos(i). \quad (6.4.1)$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \hat{j} \cdot \dot{\vec{c}} &= -rF_\alpha \operatorname{sen}(i) \cos(\Omega) \\ &\quad - rF_c (-\operatorname{sen}(\omega + f) \operatorname{sen}(\Omega) + \cos(\omega + f) \cos(\Omega) \cos(i)). \end{aligned}$$

Pero por (6.1.6) y (6.3.7),

$$-\hat{j} \cdot \dot{\vec{c}} = \dot{c} \operatorname{sen}(i) \cos(\Omega) - rF_c \operatorname{sen}(\omega + f) \operatorname{sen}(\Omega) + c \cos(i) \cos(\Omega) \frac{di}{dt}. \quad (6.4.2)$$

No obstante, si derivamos con respecto al tiempo a (6.4.1),

$$-\hat{j} \cdot \dot{\vec{c}} = \dot{c} \operatorname{sen}(i) \cos(\Omega) - c \operatorname{sen}(i) \operatorname{sen}(\Omega) \dot{\Omega} + c \cos(i) \cos(\Omega) \frac{di}{dt}. \quad (6.4.3)$$

Igualando (6.4.3) y (6.4.2) obtenemos,

$$\dot{\Omega} = \frac{rF_c \operatorname{sen}(\omega + f)}{c \operatorname{sen}(i)}.$$

6.5. Cálculo de $\dot{\omega}$

Como se definió al vector nodal, $\vec{\eta}$, se satisface (6.3.1). Por lo tanto,

$$\vec{\eta} \times \vec{e} = (\hat{k} \times \vec{c}) \times \vec{e}.$$

Por (6.1.3), como \vec{c} es perpendicular a \vec{e} ,

$$\begin{aligned} \vec{\eta} \times \vec{e} &= (\hat{k} \cdot \vec{e}) \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{e}) \hat{k} \\ &= (\hat{k} \cdot \vec{e}) \vec{c}. \end{aligned}$$

Y como la norma de, $\vec{\eta} \times \vec{e}$, es igual a, $\eta e \operatorname{sen}(\omega)$, $\hat{k} \cdot \vec{e} \in \mathbb{R}$ (véase la figura 6.5) y por (6.3.2), tenemos,

$$c e \operatorname{sen}(i) \operatorname{sen}(\omega) = (\hat{k} \cdot \vec{e}) c.$$

Por lo tanto,

$$\hat{k} \cdot \vec{e} = e \operatorname{sen}(i) \operatorname{sen}(\omega).$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$\hat{k} \cdot \dot{\vec{e}} = \dot{e} \operatorname{sen}(i) \operatorname{sen}(\omega) + e \cos(i) \operatorname{sen}(\omega) \frac{di}{dt} + e \operatorname{sen}(i) \cos(\omega) \dot{\omega}.$$

Por (6.2.17), e igualando $\hat{k} \cdot \dot{\vec{e}}$,

$$\begin{aligned} \dot{e} \operatorname{sen}(i) \operatorname{sen}(\omega) + e \cos(i) \operatorname{sen}(\omega) \frac{di}{dt} + e \operatorname{sen}(i) \cos(\omega) \dot{\omega} = \\ \frac{2c}{\mu r} F_{\alpha} (\hat{k} \cdot \vec{r}) - \left(\frac{1}{\mu r} F_r + \frac{Ar}{c\mu} F_{\alpha} \right) (\hat{k} \cdot \vec{\alpha}) - \frac{Ar^2}{c\mu} F_c (\hat{k} \cdot \vec{c}). \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Además por (6.2.6), (6.3.3), (6.3.2) y (6.2.11),

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \vec{r} &= \hat{k} \cdot \frac{(\vec{\alpha} \times \vec{c})}{c^2} \\ &= -\frac{1}{c^2} (\hat{k} \cdot (\vec{c} \times \vec{\alpha})) \\ &= -\frac{1}{c^2} ((\hat{k} \times \vec{c}) \cdot \vec{\alpha}) \\ &= -\frac{1}{c^2} \vec{\eta} \cdot \vec{\alpha} \\ &= -\frac{1}{c^2} \alpha \eta \cos\left(\omega + f + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{c^2} \alpha \eta \operatorname{sen}(\omega + f) \\ &= r \operatorname{sen}(i) \operatorname{sen}(\omega + f). \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Sustituyendo en (6.5.1), (6.3.4), (6.5.2), $\hat{k} \cdot \vec{c} = c \cos(i)$ y los resultados previos de \dot{e} , $\frac{di}{dt}$, despejando y sustituyendo (6.2.14), obtenemos,

$$\dot{\omega} = -\frac{c}{\mu e} F_r \cos(f) - \frac{r}{c} F_c \frac{\cos(i) \operatorname{sen}(\omega + f)}{\operatorname{sen}(f)} + \frac{c^2 + r\mu}{\mu e c} F_{\alpha} \operatorname{sen}(f).$$

6.6. Cálculo de \dot{a}

Como $0 < e < 1$, la órbita de un cuerpo se puede escribir de dos formas diferentes $r = \frac{c^2}{\mu} \frac{1}{1+e \cos(f)}$, y $r = \frac{a(e^2-1)}{1+e \cos(f)}$. Por lo tanto, si $f = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\mu} \frac{1}{1+e} &= a(1-e) \\ a(1-e^2)\mu &= c^2. \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Derivando la última expresión con respecto al tiempo, obtenemos,

$$\dot{a}(1-e^2)\mu - 2ae\dot{e}\mu = 2c\dot{c}.$$

Despejando (6.6.1) y sustituyendo los resultados anteriores, (6.1.6) y (6.2.18),

$$\dot{a} \frac{c^2}{a} - 2a \left(ce F_r \operatorname{sen}(f) + ce \frac{e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)}{1 + e \cos(f)} F_{\alpha} \right) = 2cr F_{\alpha}.$$

Despejando \dot{a} , por (6.2.14) y despejando a de (6.6.1),

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2a^2e}{c} \text{sen}(f)F_r + \frac{2a^2c}{\mu r} \left(\frac{e \mu r(e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f))}{c^2(1 + e \cos(f))} + \frac{r^2\mu}{ac^2} \right) F_\alpha \\
&= \frac{2a^2e}{c} \text{sen}(f)F_r + \frac{2a^2c}{\mu r} \left(\frac{e\mu^2 r^2}{c^4}(e + 2 \cos(f) + e \cos^2(f)) + \frac{r^2\mu(1 - e^2)\mu}{c^2 c^2} \right) F_\alpha \\
&= \frac{2a^2e}{c} \text{sen}(f)F_r + \frac{2a^2c}{\mu r} \left(\frac{\mu^2 r^2}{c^4}(e^2 + 2e \cos(f) + e^2 \cos^2(f) + 1 - e^2) \right) F_\alpha \\
&= \frac{2a^2e}{c} \text{sen}(f)F_r + \frac{2a^2c}{\mu r} \left(\frac{\mu^2 r^2}{c^4}(1 + e \cos(f))^2 \right) F_\alpha \\
&= \frac{2a^2e}{c} \text{sen}(f)F_r + \frac{2a^2c}{\mu r} F_\alpha.
\end{aligned}$$

Apéndice B

En este apéndice deduciremos la importante relación de la anomalía verdadera, f , con el tiempo, misma que utilizamos en la página 40 y cuya expresión está dada en la ecuación (4.2.26).

Para poder comenzar, es de vital importancia estudiar la figura 6.6. Por medio ésta notamos, que si parametrizamos al círculo, α , y a la elipse inscrita en ésta, β , obtenemos respectivamente,

$$\begin{aligned}\alpha &: (a \cos(u), a \sin(u)), \\ \beta &: (a \cos(u'), b \sin(u')).\end{aligned}$$

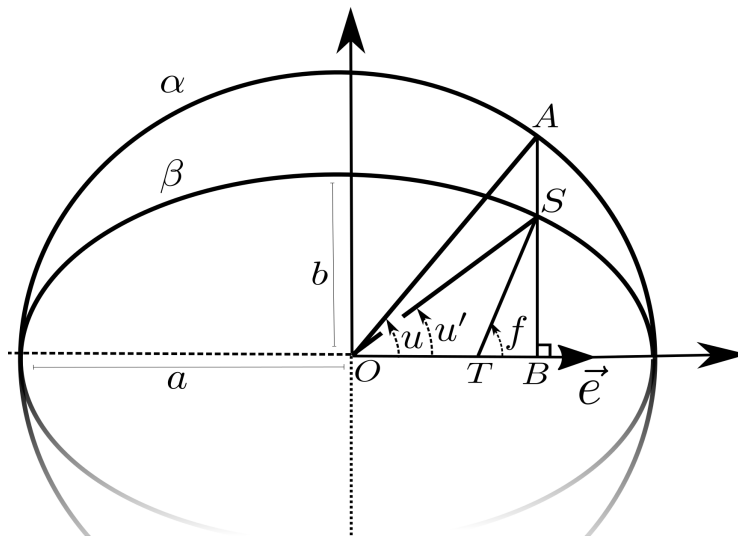


Figura 6.6: h

Sin embargo, como $OB = a \cos(u) = a \cos(u')$, se tiene que $u = u' + 2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$. De ahí que $\sin(u) = \sin(u')$.

Así, por construcción, tenemos que $\overline{EB} = b \sin(u)$, y $\overline{AB} = a \sin(u)$, de lo cual obtenemos que $\overline{EB} = \frac{b}{a} \overline{AB}$. Como \overline{OT} es la distancia del foco, S , al centro, O , de la elipse y la trayectoria de la elipse se puede escribir como

$$r(f) = \frac{a |e^2 - 1|}{1 + e \cos(f)},$$

entonces,

$$\begin{aligned}\overline{OT} &= a - r(0) = a - \frac{a|e^2 - 1|}{1 + e} = a - \frac{a|e - 1||e + 1|}{e + 1} \\ &= a - a|e - 1| = a - a|1 - e| = a - a(1 - e) = ae.\end{aligned}$$

Como $b = a\sqrt{1 - e^2}$, entonces,

$$\tan(f) = \frac{\overline{SB}}{\overline{TB}} = \frac{\frac{b}{a}\overline{AB}}{\overline{OB} - \overline{OT}} = \frac{\frac{b}{a}a\text{sen}(u)}{a\cos(u) - ae} = \frac{b}{a} \frac{\text{sen}(u)}{\cos(u) - e} = \frac{\sqrt{1 - e^2}\text{sen}(u)}{\cos(u) - e}. \quad (6.6.2)$$

Además,

$$\cos(f) = \frac{1}{\sec(f)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(f)}}.$$

Sustituyendo (6.6.2) en la última ecuación, obtenemos,

$$\begin{aligned}\cos(f) &= \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(1 - e^2)\text{sen}(u)}{(\cos(u) - e)^2}}} = \frac{\cos(u) - e}{\sqrt{\cos^2(u) - 2e\cos(u) + e^2 + \text{sen}^2(u) - e^2\text{sen}^2(u)}} \\ &= \frac{\cos(u) - e}{1 - e\cos(u)}.\end{aligned} \quad (6.6.3)$$

Por lo tanto,

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{f}{2}\right)}{\cos\left(\frac{f}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{f}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{f}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{f}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{f}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(f)}{1 + \cos(f)}}. \quad (6.6.4)$$

Sustituyendo (6.6.3) en (6.6.4),

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos(u) - e}{1 - e\cos(u)}}{1 + \frac{\cos(u) - e}{1 - e\cos(u)}}} = \sqrt{\frac{(1 + e)(1 - \cos(u))}{(1 - e)(1 + \cos(u))}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right).$$

Así,

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right).$$

Si $\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = \cos(\alpha)$, $\frac{f}{2} = y$, y $\frac{u}{2} = x$, entonces,

$$\tan(x) = \cos(\alpha) \tan(y).$$

Así,

$$x = \tan^{-1}(\cos(\alpha) \tan(y)),$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{\cos(\alpha) \sec^2(y)}{1 + \cos^2(\alpha) \tan^2(y)} = \frac{\frac{\cos(\alpha)}{\cos^2(y)}}{\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(y)} \left(\frac{\cos^2(y)}{\cos^2(\alpha)} + \tan^2(y) \right)} \\ &= \frac{\sec(\alpha)}{\sec^2(\alpha) \cos^2(y) + \tan^2(y)} = \frac{\sec(\alpha)}{(1 + \tan^2(\alpha)) \cos^2(y) + \tan^2(y)} \\ &= \frac{\sec(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha) \cos^2(y)} = \frac{\sec(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha) \left(\frac{1 + \cos(2y)}{2} \right)} \\ &= \frac{2 \sec(\alpha)}{2 + \tan^2(\alpha)(1 + \cos(2y))} = \frac{2 \sec(\alpha)}{1 + \sec^2(\alpha) + \tan^2(\alpha) \cos(2y)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{2 \sec(\alpha)}{1 + \sec^2(\alpha) + \tan^2(\alpha) \cos(2y)}.$$

Como $f(y)$ es una función periódica en y , se puede expandir en serie de Fourier,

$$f(y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ny) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(ny),$$

donde,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{dy} dy = \frac{1}{2\pi} x|_0^{2\pi} = 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos(ny) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \sec(\alpha) \cos(ny)}{1 + \sec^2(\alpha) + \tan^2(\alpha) \cos(2y)} dy. \end{aligned}$$

Como

$$\cos(ny) = \frac{e^{iny} + e^{-iny}}{2},$$

entonces,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sec(\alpha) (e^{iny} + e^{-iny})}{1 + \sec^2(\alpha) + \frac{\tan^2(\alpha)}{2} (e^{i2y} + e^{-i2y})} dy. \quad (6.6.5)$$

Si $z = e^{2iy}$, entonces $dz = 2ie^{2iy} dy$, por lo tanto $dy = -\frac{i}{2z} e^{-2iy} dz = -\frac{i}{2z} dz$. Si sustituimos las anteriores relaciones en (6.6.5),

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sec(\alpha) \left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} \right)}{2z(1 + \sec^2(\alpha)) + \tan^2(\alpha)(z^2 + 1)} dz \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sec(\alpha) \left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} \right)}{\tan^2(\alpha) \left(-z^2 - \frac{2z(1 + \sec^2(\alpha))}{\tan^2(\alpha)} - 1 \right)} dz. \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio $-z^2 - \frac{2z(1+\sec^2(\alpha))}{\tan^2(\alpha)} - 1$ son,

$$z_{\pm} = \frac{-(1 + \sec^2(\alpha)) \pm \sqrt{(1 + \sec^2(\alpha))^2 - \tan^4(\alpha)}}{\tan^2(\alpha)}.$$

Pero

$$\begin{aligned} (1 + \sec^2(\alpha))^2 - \tan^4(\alpha) &= 1 + 2\sec^2(\alpha) + (1 + \tan^2(\alpha))^2 - \tan^4(\alpha) \\ &= 4\sec^2(\alpha). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$z_{\pm} = \frac{-(1 + \sec^2(\alpha)) \pm 2\sec(\alpha)}{\tan^2(\alpha)} = -\left(\frac{\sec(\alpha) \pm 1}{\tan(\alpha)}\right)^2 = -\left(\frac{1 \pm \cos(\alpha)}{\sen(\alpha)}\right)^2.$$

Así,

$$\begin{aligned} z_+ &= -\left(\frac{1 + \cos(\alpha)}{\sen(\alpha)}\right)^2 = -\left(\frac{1 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 = -\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ z_- &= -\left(\frac{1 - \cos(\alpha)}{\sen(\alpha)}\right)^2 = -\left(\frac{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 = -\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sec(\alpha) \left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}}\right)}{\tan^2(\alpha) \left(z + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \left(z + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)} dz.$$

Como

$$\left(\frac{1}{z + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) - \left(\frac{1}{z + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = -\frac{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(z + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \left(z + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}.$$

Entonces,

$$a_n = -\frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sec(\alpha) \left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}}\right)}{\tan^2(\alpha) \left(\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)} \left(\frac{1}{z + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{z + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) dz.$$

Pero

$$\begin{aligned} \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\sen^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} i = \frac{(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))^2 - \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{2\sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = -\frac{\cos(\alpha)}{4\sen(\alpha)}. \end{aligned}$$

Así,

$$a_n = \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} \right) \left(\frac{1}{z + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{z + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) dz.$$

Sin embargo, como $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \cos(\alpha)$,

$$\begin{aligned} \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{1 + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)}{\left(1 + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)} \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} + \frac{1-e}{1+e}}{1 - \frac{1-e}{1+e}} = \frac{1 + e - 2(1+e)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} + 1 - e}{1 + e - 1 + e} = \frac{1 - \sqrt{1-e}}{e} \\ &\approx \frac{1 - \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right)}{e} = \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8}. \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

Si e es pequeño, entonces $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ es menor que uno, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{z}\right)^i \\ -\frac{1}{z + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &= -\frac{1}{\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)} = -\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^i. \end{aligned}$$

Así,

$$a_n = \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} \right) \left(\frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{z}\right)^i - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^i \right) dz.$$

Pero

$$\int z^p dz = \begin{cases} 0 & p \neq -1 \\ 4i\pi & p = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\frac{n}{2} \notin \mathbb{Z}$, $a_n = 0$. Pero si $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$, los únicos términos que contribuyen al valor de a_n son,

$$\begin{aligned} z^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{z} \left(-\frac{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{z}\right)^{\frac{n}{2}} \right) + z^{-\frac{n}{2}} \left(-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) z\right)^{\frac{n}{2}-1} \right) \\ = 2(-1)^{\frac{n}{2}} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Así, por último, obtenemos,

$$a_n = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2(-1)^{\frac{n}{2}} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{z} dz = 2(-1)^{\frac{n}{2}} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

si n es par y $a_n = 0$ si n es impar. En el caso de b_n , como

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \operatorname{sen}(ny) dy$$

y

$$\operatorname{sen}(ny) = \frac{e^{iny} - e^{-iny}}{2i},$$

solo difiere del caso anterior por un signo menos,

$$b_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(z^{\frac{n}{2}} - z^{-\frac{n}{2}} \right) \left(\frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{z} \right)^i - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) z \right)^i \right) dz.$$

Por lo tanto, los únicos dos términos que integran diferente de cero, son iguales, y como se restan,

$$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, como sólo contribuyen los valores pares de n , y se empieza a contar desde $n = 2$,

$$f(y) = \frac{dx}{dy} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(2ny).$$

Así,

$$x = y + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}(2ny)}{2n} + C.$$

No obstante, como $f = 0$ si y sólo si $u = 0$, la constante de integración es cero, y por (6.6.6),

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} \right)^n \frac{\operatorname{sen}(2ny)}{n}.$$

Como $\frac{f}{2} = y$, y $\frac{u}{2} = x$,

$$u = f + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} \right)^n \frac{\operatorname{sen}(2ny)}{n}.$$

Apéndice C

En esta sección explicaremos la razón por la cual el uso de dos masas negativas en las direcciones del polo norte y sur de la Tierra simulan el efecto de un planeta achata-

do. Para ello deformaremos cada vez más una esfera hasta llegar a la situación extrema, donde ésta es un alambre infinito, como lo indica la figura 6.7.

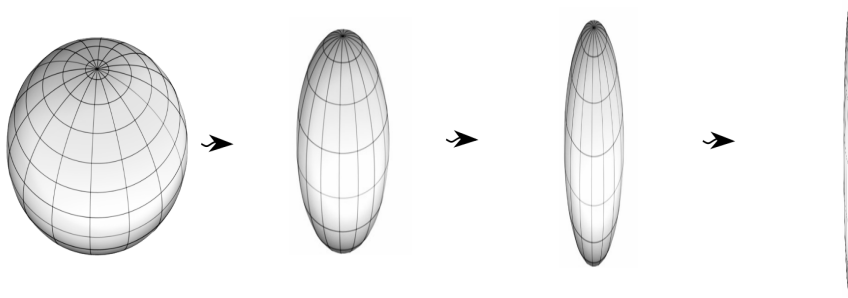


Figura 6.7: Deformación de la Tierra a un alambre infinito.

En este caso, dado que el alambre es infinito y simétrico, la dirección de la fuerza resultante de la suma de las fuerzas generadas por éste al cuerpo, será perpendicular a

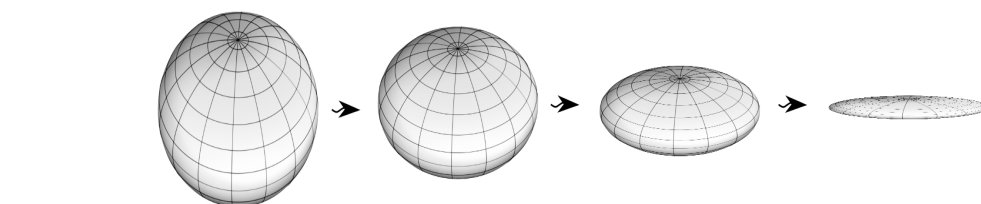


Figura 6.8: Deformación de la Tierra a un alambre infinito.

Análogamente, deformaremos la Tierra hasta llegar a la situación extrema cuando la Tierra fue completamente aplastada hasta llegar al caso cuando es un plano infinito, como lo muestra la figura 6.8.

A diferencia del caso anterior, como el plano es infinito y simétrico, la fuerza apuntará hacia arriba, como se ve en la figura 6.10.

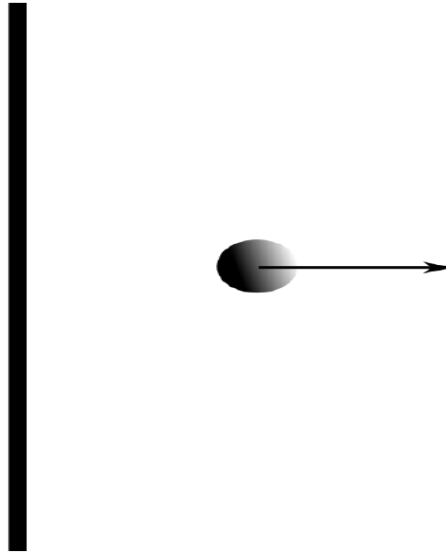


Figura 6.9: Deformación de la Tierra a un alambre infinito.

He aquí donde relacionaremos nuestro problema con la teoría de electromagnetismo, al considerar las masas de los bipolos y el punto donde se concentra la mayor parte de la masa de la Tierra como cargas puntuales. Siguiendo la ley de la naturaleza que dice que cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen, consideraremos el mismo hecho, al pensar las cargas de la masa de los bipolos y la de la masa de la Tierra, haciendo notar que como la masa de la Tierra es positiva, cuando los bipolos son negativos, tiene sentido que la distancia entre ellos y el punto que concentra la masa de la Tierra sea menor (pues en principio dichas masas se atraerían) que la distancia entre los bipolos y el centro de la Tierra, si los bipolos fueran positivos, lo cual coincidiría con la esfera oblata, que en vez de ser achatada tiene forma alargada.

El razonamiento del párrafo anterior, también se puede demostrar como un proceso límite de suma de fuerzas; para poder comprenderlo de una forma intuitiva nos ayudarán los procesos límite descritos anteriormente.

Si consideramos la Tierra oblata, es decir, las masas de los bipolos positivas, la dirección de las fuerzas resultantes de los bipolos y el origen al satélite son opuestas a éstos últimos, véase la figura 6.12. Las fuerzas \vec{f}_a , \vec{f}_b y \vec{f}_t son las que los bipolos y el origen generan sobre el satélite, y la fuerza \vec{f}_r es la fuerza resultante de sumar las tres anteriores, por lo tanto la fuerza total que se aplicará a éste. Como se ve en la figura 6.12, la fuerza \vec{f}_r estará por debajo de \vec{f}_t . El sentido de \vec{f}_r , concuerda con el sentido de la fuerza aplicada sobre el cuerpo en el caso límite cuando la tierra se deforma a un alambre infinito (la distancia de los bipolos se hace más grande con respecto al centro de la masa de la Tierra), que resulta ser perpendicular a la tierra en este caso límite.

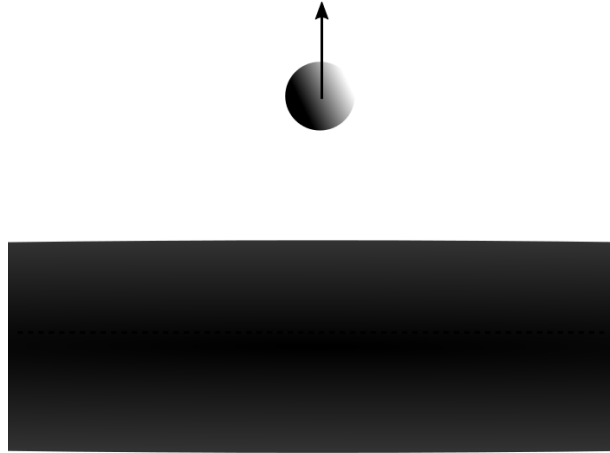


Figura 6.10: Deformación de la Tierra a un plano infinito.

A diferencia del caso anterior, si las masas de los bipolos son negativas, como el caso que estamos considerando en esta tesis, la fuerza que los bipolos generan sobre el satélite apuntará en la dirección de los bipolos, como se puede ver en la figura 6.14; no obstante, la fuerza aplicada por el origen a éste, será en la dirección contraria. Las fuerzas \vec{f}_a , \vec{f}_b y \vec{f}_t son las generadas por los bipolos y el origen, respectivamente, y la fuerza \vec{f}_r , es la fuerza resultante de la suma de las últimas tres, y como se muestra en la figura 6.14, ésta estará por encima de la fuerza \vec{f}_t . Utilizando el razonamiento anterior, vemos que el sentido de \vec{f}_r concuerda con el caso límite cuando la Tierra es aplanada hasta ser un plano infinito, figura 6.10.

Por lo tanto, una Tierra oblata podrá ser representada utilizando bipolos con masas positivas, y una Tierra achatada utilizando bipolos con masas negativas.

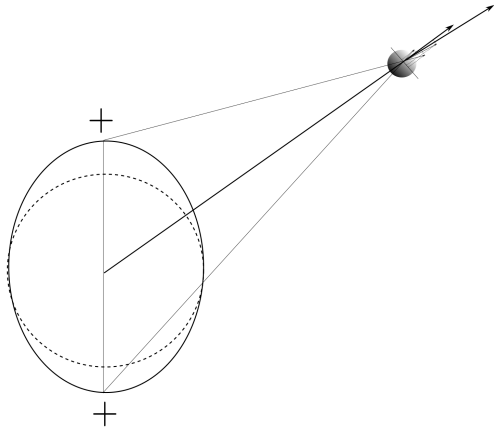


Figura 6.11: Masas de los bipolos negativos.

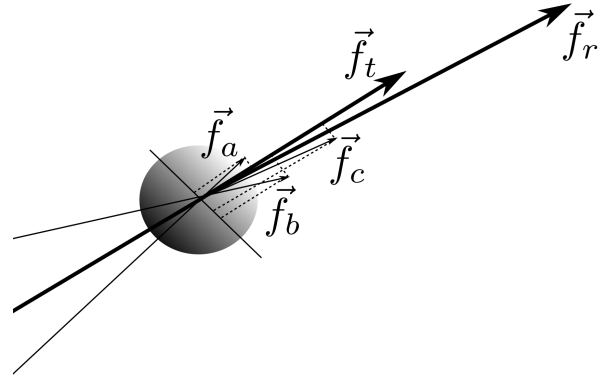


Figura 6.12: Acercamiento de la figura 6.11.

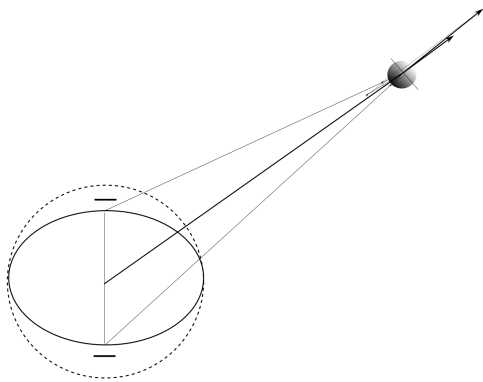


Figura 6.13: Masas de los bipolos positivos.

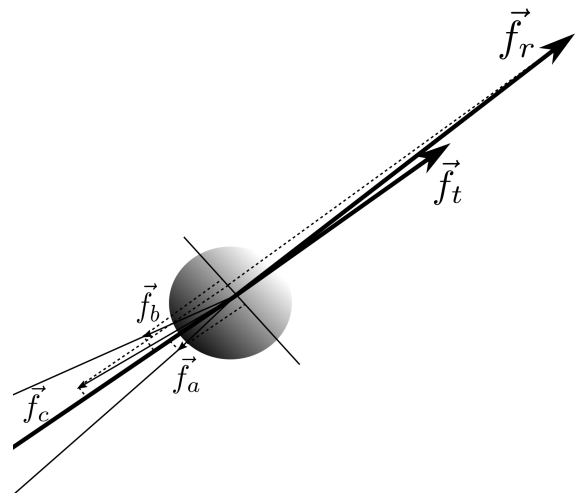


Figura 6.14: Acercamiento de la figura 6.13.

Referencias

[POL] POLLARD, HARRY. *Mathematical introduction to celestial mechanics*. Prentice-Hall Inc., E.U., 1966.

[OLV] OLVERA, ARTURO. ZAMBRANO, SARA. *Breve introducción a la teoría de promedios*. Tesis de Licenciatura, IIMAS. 2002.

[MUE]MÜELLER, M. *Equation of time. Problem in astronomy*. Gymnasium Münchenstein, Grellingerstrasse 5, 4142 Münchenstein, Switzerland, 1994.

[NOR] NORTH, JOHN. *Historia Fontana de la astronomía y la cosmología*. Fondo de cultura económica, 2001.

[MAR] THORNTON, MARION. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Fifth Edition, Thomson., Brooks/Cole.

[BLA] BLANCHARD, PAUL. *Differential Equations*. Fourth Edition, Brooks/Cole, 2011.

[JACK] JACKSON, JOHN D.. *Classical Electrodynamics*. Third Edition, John Wiley, 1998.

Bibliografía

- [POL] POLLARD, HARRY. *Mathematical introduction to celestial mechanics*. Prentice-Hall Inc., E.U., 1966.
- [OLV] OLVERA, ARTURO. ZAMBRANO, SARA. *Breve introducción a la teoría de promedios*. Tesis de Licenciatura, IIMAS. 2002.
- [MUE] MÜELLER, M. *Equation of time. Problem in astronomy*. Gymnasium Münchenstein, Grellingerstrasse 5, 4142 Münchenstein, Switzerland, 1994.
- [CEL] CELLETTI, ALESSANDRA. *Stability and Chaos in Celestial Mechanics*. Springer, U.K., 2010.
- [NOR] NORTH, JOHN. *Historia Fontana de la astronomía y la cosmología*. Fondo de cultura económica, 2001.
- [MAR] THORNTON, MARION. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Fifth Edition, Thomson., Brooks/Cole.
- [BLA] BLANCHARD, PAUL. *Differential Equations*. Fourth Edition, Brooks/Cole, 2011.
- [JACK] JACKSON, JOHN D.. *Classical Electrodynamics*. Third Edition, John Wiley, 1998.