UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Infinidad de soluciones para un problema elíptico indefinido

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Carlos Chánez Villagrán

TUTORA

Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora

Ciudad de México 2021

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
Chánez
Villagrán
Luis Carlos
6142522178
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
417032450

2. Datos del asesor.
Dra.
Mónica Alicia
Clapp
Jiménez Labora

3. Datos del sinoidal 1.
Dr.
Alberto
Saldaña
De Fuentes

4. Datos del sinoidal 2.
Dra.
Judith
Campos
Cordero

5. Datos del sinoidal 3.
Dr.
Juan Carlos
Fernández
Morelos

6. Datos del sinoidal 4.
Dr.
Luis Fernando
López
Ríos

7. Datos del trabajo escrito
Infinidad de soluciones para un problema elíptico indefinido
40 p.
2021

Índice general

Introducción

Fijamos $N > 2$ entero positivo. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in (2, 2^*)$ (donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ se le conoce como el exponente crítico de Sobolev). Nuestro objetivo es probar la existencia de funciones no-triviales que satisfagan las siguientes dos identidades

$$(\wp_0) \begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = |u(x)|^{p-2}u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} ,$$

donde Δu denota al Laplaciano

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \ .$$

Para poder dar una formulación variacional de este problema debemos comenzar por establecer una definición apropiada de **solución débil**. En general se procede de la siguiente manera. Una función $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ que satisface la ecuación $(\wp_0)$ se llama una solución clásica al problema $(\wp_0)$. Supongamos que u es una solución clásica de $(\wp_0)$ y consideremos a $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ arbitrario, multiplicando la ecuación $(\wp_0)$ por φ e integrando obtenemos que

$$-\int_\Omega (\Delta u)\varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi,$$

utilizando la fórmula de Green en la primera integral, deducimos que toda solución clásica de $(\wp_0)$ debe de satisfacer que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega); \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi, \tag{0.0.1}$$

donde ∇u denota el gradiente de u

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right).$$

Definimos una **solución débil** del problema $(\wp_0)$ como una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la propiedad (0.0.1).

En el primer capítulo daremos daremos la definición precisa del espacio $H_0^1(\Omega)$. Por el momento es suficiente con mencionar que $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Por construcción, la clase de soluciones débiles contiene a todas las soluciones clásicas. En [14, Appendix B] se demuestra que si la frontera de Ω es suave, toda solución débil del problema $(\wp_0)$ es de clase $\mathscr{C}^2$.

Observemos que si u es una solución débil de $(\wp_0)$ entonces podemos aplicar el teorema de Green en (0.0.1) (como lo hicimos antes) y luego factorizar φ dentro de la integral para deducir que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega); \int_\Omega (-\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u)\varphi = 0.$$

Por el criterio de nulidad de los espacios de Lebesgue (Teorema 1.1.4) se sigue que

$$-\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u = 0 \tag{0.0.2}$$

salvo un conjunto de medida nula o casi dondequiera (c.d.) en Ω.

El propósito de esta tesis es demostrar la existencia de una infinidad de soluciones débiles del problema

$$(\wp) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}.$$

Mediante la definición de solución débil podemos considerar al **funcional de energía** asociado al problema $(\wp)$ que denotamos por $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. La propiedad fundamental de este funcional está en que los puntos críticos de J son las soluciones al problema $(\wp)$.

En [6, Capítulo 3] se prueba la existencia de una infinidad de soluciones de $(\wp)$ cuando $\lambda > -\lambda_1$, donde λ_1 es el primer valor propio del operador $-\Delta$ sobre el espacio $H_0^1(\Omega)$ (Teorema 1.3.7). En este caso, el problema variacional tiene una restricción natural, llamada la variedad de Nehari, que es una variedad de clase $\mathscr{C}^2$ por lo que el flujo gradiente negativo de J sobre ella está bien definido. Los cambios en la topología de los conjuntos de subnivel están dados en términos de un invariante topológico clásico llamado el género de Krasnoselskii.

En el caso general, es posible construir una variedad topológica llamada la variedad de Nehari generalizada [15] que contiene a los puntos críticos. En vez de construir una variedad de Nehari generalizada vamos a utilizar una variante del Teorema de Paso de Montaña (TPM) para demostrar la existencia de mínimos de J. El precio que hay que pagar por la variedad de Nehari es que requerimos un invariante topológico más sofisticado que presentaremos en el segundo capítulo, el pseudo-género.

El TPM es una herramienta muy efectiva para garantizar la existencia de puntos críticos, siendo el teorema de Rolle y el de Courant [7, Chapter II: Theorem 1.1] algunas versiones memorables del TPM en espacios de dimensión finita. A lo largo de los años se ha buscado extender los alcances del TPM para demostrar la existencia de mínimos en funcionales cuyo dominio son espacios de dimensión infinita. El TPM de Ambrosetti y Rabinowitz [1] es considerado una de las versiones más importantes de las últimas décadas por ser modelo de otros teoremas sobre puntos críticos de funcionales con dominios de dimensión infinita. Supuestos como la condición de Palais-Smale han sido clave para poder extender estos resultados en espacios de dimensión infinita.

En este artículo vamos a utilizar el TPM de Bartolo, Benci y Fortunato que da condiciones para la existencia de múltiples puntos críticos y que enunciaremos en detalle en el capítulo 2.

Este artículo se divide en tres capítulos. El primer capítulo enunciaremos algunos resultados elementales que estaremos utilizando. Estos resultados se pueden encontrar en cualquier libro de ecuaciones diferenciales parciales o análisis matemático como [8], [4] o [5]. En el segundo capítulo abordaremos la prueba del Teorema de Bartolo, Benci y Fotunato; para ello demostraremos el lema de deformación de Willem para funciones impares y luego probaremos algunos resultados sobre el género de Krasnoselskii. En el tercer capítulo vamos a verificar que el funcional J satisface las hipótesis del Teorema de Bartolo, Benci y Fotunato para encontrar una infinidad de puntos críticos de J; comenzaremos con la formulación variacional del problema $(\wp)$ y después probaremos algunos lemas que nos permiten utilizar el Teorema de Bartolo, Benci y Fotunato. Al final de ese capítulo vamos a demostrar formalmente la existencia de una infinidad de soluciones.

Esta tesis fue posible gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) y se les agradece por el apoyo de beca otorgada por la DGAPA-UNAM a través del proyecto PAPIIT IN100718 de mi asesora para concluir con mis estudios de licenciatura.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciaremos los conceptos y resultados del análisis matemático que usaremos más adelante. Una exposición más completa y detallada se encuentra en [8], [4] o [5].

1.1. Espacios de Lebesgue

Consideramos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Decimos que dos funciones son iguales si coinciden casi dondequiera (es decir, excepto en un subconjunto de medida cero de su dominio). Respecto a esta relación de equivalencia podemos definir para cada $p \in [1, +\infty)$ al espacio vectorial normado

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \text{ es integrable en } \Omega\}$$

y cuya norma la denotamos por

$$|f|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Dichos espacios $L^p(\Omega)$ se conocen como los espacios de Lebesgue. No está de más recordar que, rigurosamente, cada elemento del espacio de Lebesgue es una clase de equivalencia entre funciones que coinciden c.d. en Ω, i.e. que coinciden respecto a la relación que mencionamos antes.

Definición 1.1.1. *Un espacio vectorial normado (sobre $\mathbb{R}$) que es completo con la métrica dada por su norma se llama un espacio de Banach.*

Resulta que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach ([5, Teorema 14.27]).

Proposición 1.1.2 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $p, q \in (1, +\infty)$, $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$. Si $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

[5, Teorema 14.27]

La norma $|f|_p$ depende directamente del dominio Ω. Con la desigualdad de Hölder es posible deducir las siguiente desigualdad.

Proposición 1.1.3. *Sean $q, p \in (1, +\infty)$ tales que $q < p$. Si Ω es un dominio acotado entonces $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ y para toda $f \in L^p(\Omega)$*

$$|f|_q \leq |\Omega|^{p-q/pq} |f|_p$$

donde $|\Omega| := \int\limits_{\Omega} 1$ es la medida de Lebesgue de Ω en $\mathbb{R}^N$.

Ambas desigualdades las utilizaremos en la prueba del Lema 3.2.3. Otra propiedad fundamental para el estudio de ecuaciones diferenciales parciales es el críterio de nulidad que utilizamos en la introducción. De la misma manera que definimos a los espacios de Lebesgue definimos al espacio

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad : \quad \begin{array}{c} \text{Si } \omega \text{ es un abierto acotado en } \mathbb{R}^N \text{ tal que } \overline{\omega}^{\mathbb{R}^N} \subset \Omega \\ \text{entonces } f|_\omega \in L^1(\Omega) \end{array} \right\}.$$

donde $\overline{\omega}^{\mathbb{R}^N}$ denota a la cerradura de ω respecto a la topología euclidiana de $\mathbb{R}^N$. Es fácil ver que, $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para toda $p \in (1, +\infty)$.

Teorema 1.1.4 (Criterio de Nulidad)**.** *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si para toda $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$*

$$\int\limits_{\Omega} f\varphi = 0$$

entonces $f = 0$ casi dondequiera en Ω. [5, Proposición 14.49]

1.2. Espacios de Hilbert

Definición 1.2.1. *Sea H un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. H es un* ***espacio de Hilbert*** *si es completo bajo la norma*

$$\|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2}.$$

Decimos que la norma $\|\cdot\|$ es ***inducida por el producto escalar*** *$\langle \cdot, \cdot \rangle$ si satisface la igualdad anterior.*

Un ejemplo de espacio de Hilbert de dimensión finita es $\mathbb{R}^N$. Observemos que la norma de $L^2(\Omega)$ es inducida por el producto interno

$$(u, v) \mapsto \int\limits_{\Omega} uv.$$

Como $L^2(\Omega)$ es espacio de Banach entonces $L^2(\Omega)$ es un ejemplo de un espacio de Hilbert de dimensión infinita. A continuación vamos a enunciar la siguiente definición (y/o propiedad) de los espacios de Hilbert.

Definición 1.2.2. *Sea V un espacio vectorial cerrado de H. Definimos al* ***complemento ortogonal de*** *V como el subespacio $V^\perp := \{w \in H : \forall v \in V; \langle w, v\rangle = 0\}$.*
La ***proyección ortogonal de*** *H* ***sobre*** *V es la función $P_V : H \to V$ que a cada $u \in H$ le asocia el único elemento $P_V u \in V$ que satisface alguna de estas dos propiedades*

- $\|u - P_V u\| = \operatorname{ínf}_{w\in V} \|u - w\|$.
- $u - P_V u \in V^\perp$.

[5, Capítulo 15.2]

Cabe mencionar las siguientes propiedades elementales sobre subespacios de Hilbert:

1. Aunque V no sea cerrado en H, $V^\perp$ siempre es cerrado en H.
2. $V = (V^\perp)^\perp$ únicamente cuando V es cerrado.
3. Todo subespacio de dimensión finita de H es cerrado.

Las siguientes son propiedades fundamentales del complemento ortogonal en espacios de Hilbert.

Teorema 1.2.3. *Sea V un subespacio vectorial cerrado de H. Se cumple lo siguiente:*

1. *La proyección ortogonal $P_V : H \to V$ es la única función lineal de H en V tal que*
$$P_V \circ P_V = P_V \qquad y \qquad kern(P_V) = V^\perp.$$
2. *P_V es continua.*
3. *$V \neq \{0\} \Rightarrow \|P_V\|_{\mathscr{L}(H,V)} = 1$.*
4. *La función $i : V \oplus V^\perp \to H$ dado por $i(v,w) = v + w$ es un isomorfismo lineal y una isometría.*

[5, Capítulo 15.2]

Las propiedades de la proyección ortogonal serán de mucha utilidad para demostrar las Proposiciones 2.4.3 y 2.4.4. Las propiedades de los espacios ortogonales tendrán mucha relevancia a lo largo del capítulo 3.

Otra cosa que podemos hacer en los espacios de Hilbert es extender la noción de convergencia.

Definición 1.2.4 (Convergencia Débil)**.** *Sea H espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Una sucesión (u_k) en H* ***converge débilmente a un*** *(único)* ***elemento*** *$u \in H$ $\left(u_k \overset{H}{\rightharpoonup} u\right)$ si para cada $v \in H$ se cumple que*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Se dice que u es el ***límite débil de*** *(u_k)* ***en*** *H.*

Ambas nociones de convergencia coinciden cuando H es un espacio de dimensión finita (como en $\mathbb{R}^N$). En general, es cierto que si tenemos convergencia fuerte en H ($u_k \xrightarrow{H} u$) entonces hay convergencia débil en H ($u_k \overset{H}{\rightharpoonup} u$). El reciproco no es cierto en espacios de dimensión infinita. Es posible demostrar que todo subconjunto ortonormal (con una infinidad de elementos) de un espacio de Hilbert carece de un límite fuerte pero sí converge débilmente a 0. El siguiente resultado nos da condiciones para garantizar cuando un límite débil resulta ser fuerte.

Teorema 1.2.5. *Supongamos que $u_k \overset{H}{\rightharpoonup} u$. Esto implica que $\|u\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_k\|$ y, además,*

$$u_k \xrightarrow{H} u \iff \|u\| = \liminf_{n\to+\infty} \|u_k\| .$$

[5, Proposición 15.27]

Es posible demostrar que toda sucesión débilmente convergente en H es una sucesión acotada en H, de la misma manera que se prueba que las sucesiones fuertemente convergentes está acotadas. Además, la convergencia débil nos permite recuperar una propiedad típica de los conjuntos compactos.

Teorema 1.2.6 (Propiedad Fundamental de la Convergencia Débil)**.** *Toda sucesión acotada en H tiene una subsucesión débilmente convergente en H. [5, Teorema 15.29]*

Estas propiedades de convergencia débil serán de utilidad para demostrar el Lema 3.2.3.

Sea $u \in H$ donde H es un espacio de Hilbert. Es sencillo verificar que el mapeo $v \mapsto \langle u, v\rangle$ es lineal y continuo. Una propiedad impresionante de los espacios de Hilbert es que se vale el reciproco.

Teorema 1.2.7 (Teorema de Repesentación de Frechét-Riesz)**.** *Sea H espacio de Hilbert. Si $T : H \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal y continuo entonces existe un único $u \in H$ tal que para toda $v \in H$*

$$T(v) = \langle u, v\rangle .$$

Además el mapeo $w \mapsto \langle \cdot, w\rangle$ es una isometría y un isomorfismo lineal del espacio H sobre el espacio $\mathscr{B}(H,\mathbb{R})$ (el espacio normado de las funciones lineales y continuas de H a $\mathbb{R}$). [5, Teorema 15.19]

El teorema de Lax-Milgram es una generalización de este resultado que aparece en [8, Chapter 6.2.1]. En este artículo no aplicaremos directamente estos teoremas pero nos permitirán definir una extensión del gradiente en espacios de Hilbert (1.4.5). El siguiente resultado se utiliza para probar la segunda afirmación del Teorema 1.3.5.

Proposición 1.2.8.

1. *Sea H espacio de Hilbert.*
   $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H si y solo si para todo $T : H \to \mathbb{R}$ lineal y continuo $Tu_k \to Tu$.

2. *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y $T : H_1 \to H_2$ lineal y continuo.*
   Si $u_k \rightharpoonup u$ en H_1 entonces $Tu_k \rightharpoonup Tu$ en H_2.

[6, Ejercicio 1.54]

1.3. Espacio de Sobolev

En esta sección daremos una breve explicación de los espacios $H_0^1(\Omega)$. Para una explicación muy detallada el lector puede consultar [8, PART II: Chapter 5-6] o [5, Capítulo 15-17].

A grandes rasgos la derivada parcial débil de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la función $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ (que es única salvo clase de equivalencia en $L^1_{loc}(\Omega)$) que permite que u satisfaga el teorema de integración por partes ante cualquier función φ infinitamente diferenciable con soporte compacto en Ω. En otras palabras.

Definición 1.3.1 (Derivada Débil)**.** *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que u es **débilmente diferenciable** si existen funciones $v_1, \ldots, v_N$ que satisfacen que para toda $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$*

$$\int_\Omega u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i \cdot \varphi = 0.$$

Resulta que la derivada clásica coincide (c.d. en Ω) con la derivada débil. Por lo que ahora en adelante vamos a denotar a la derivada débil de u como

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := v_i.$$

Así mismo denotamos al gradiente débil de una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

respectivamente.

Los espacios de Sobolev se pueden definir de manera muy amplia como cierta clase de espacios vectoriales normados pero aquí solo mencionaremos al espacio que nos interesa.

Definición 1.3.2. *Definimos al **espacio de Sobolev** $H^1(\Omega)$ como el espacio vectorial con producto interno*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \forall i = 1, \ldots, N; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Su producto interno lo denotaremos por

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \int_\Omega uv,$$

y a su norma inducida por

$$\|u\|_1 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + \int_\Omega u^2 \right)^{1/2}.$$

Resulta que todos los espacios de Sobolev son de Banach. En particular, $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert ([5, Teorema 16.14]). Este hecho se requiere para poder utilizar el teorema de Bartolo, Benci y Fortunato que demostraremos en el siguiente capítulo.

Ahora observemos que podemos encajar $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ como representantes de una clase de equivalencia de $L^2(\Omega)$. Mediante todas estas consideraciones, se define a $H_0^1(\Omega)$ como la cerradura topológica de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ en el espacio $H^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Los próximos dos teoremas juegan un papel muy importante en el estudio de problemas no lineales. Únicamente vamos a enunciar el caso para dominios acotados.

Vamos a denotar

$$\langle u,v\rangle_0 := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \qquad \text{y} \qquad \|u\|_0 := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

Se satisface la siguiente desigualdad.

Teorema 1.3.3 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Si Ω es un dominio acotado y $p \in [1,2^*]$, entonces existe una constante $C_{\Omega,p}$ que depende de Ω y de p tal que para toda $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$|u|_p \leq C_{\Omega,p}\,\|u\|_0\,.$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y su inclusión es continua. [5, Teorema 17.8]

Este resultado lo utilizaremos en el Lema 3.2.2. El siguiente resultado es consecuencia de la desigualdad de Poincaré.

Proposición 1.3.4. *La forma bilineal*

$$\langle u,v\rangle_0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

es producto interno en $H_0^1(\Omega)$. Además su norma inducida

$$\|u\|_0 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ en $H_0^1(\Omega)$. [5, Corolario 17.9]

$\langle \cdot,\cdot\rangle_0$ no necesariamente es definido positivo en todo $H^1(\Omega)$. Por ende, $\|\cdot\|_0$ no es norma en $H^1(\Omega)$, ni si quiera tiene sentido preguntarnos por una equivalencia entre normas.

Teorema 1.3.5 (Rellich-Kondrashov)**.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado y $p \in [1,2^*)$. La inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es un operador compacto. Es decir, toda sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ tiene una subsucesión fuertemente convergente en $L^p(\Omega)$.*
[5, Teorema 17.12]
Más aún, si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ entonces existe una subsucesión tal que $u_k \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)$.

Por convención se denota a la subsucesión de (u_k) del Teorema 1.3.5 de la misma manera que la sucesión (u_k). Para la segunda afirmación se requiere el Teorema 1.2.8. Este resultado lo utilizaremos para demostrar el Lema 3.2.3.

A continuación enunciaremos algunos resultados propios del espacio $H_0^1(\Omega)$ que resultan fundamentales para resolver el problema. Para la siguiente definición consideremos al problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.3.1}$$

Definición 1.3.6. *Una **solución débil de** (1.3.1) es una pareja (λ, u) con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

*Decimos que λ es un **valor propio de** $-\Delta$ **en** $H_0^1(\Omega)$ si existe $e \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que (λ, e) es una solución débil de (1.3.1).*
*Se dice entonces que e es una **función propia de** $-\Delta$ **en** $H_0^1(\Omega)$ **con valor propio** λ.*

El siguiente teorema nos da algunas propiedades fuertes sobre las funciones propias de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.3.7. *Existe un conjunto $\mathscr{B} := \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $H_0^1(\Omega)$ con las siguientes propiedades:*

1. *e_k es una función propia de $-\Delta$ con valor propio $\lambda_k = \|e_k\|_0^2$.*
2. *$\mathscr{B}$ es ortogonal respecto a $H_0^1(\Omega)$:*
$$k \neq j \Rightarrow \langle e_k, e_j \rangle_0 = 0.$$
3. *$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.*
4. *$\mathscr{B}$ **es una base normal de Hilbert en** $L^2(\Omega)$, i.e. es un conjunto ortonormal y el subespacio vectorial generado por $\mathscr{B}$, lin$(\mathscr{B})$, es denso respecto al producto interno de $L^2(\Omega)$:*
$$|e_k|_2 = 1, \qquad k \neq j \Rightarrow \int_\Omega e_k e_j = 0, \qquad L^2(\Omega) = \overline{lin(\mathscr{B})}^{L^2(\Omega)}.$$

[5, Proposición 17.18]

Es muy importante considerar que el valor de cada e_k y de cada λ_k dependen del dominio Ω que fijamos al principio.

Teorema 1.3.8. *Si $\lambda > -\lambda_1$ (λ_1 como en el Teorema 1.3.7) entonces la forma bilineal*

$$\langle u,v\rangle_\lambda = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \lambda\int_\Omega uv = \langle u,v\rangle_0 + \lambda\,\langle u,v\rangle$$

es producto interno en $H_0^1(\Omega)$. Además su norma inducida

$$\|u\|_\lambda = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda\int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$. [5, Ejercicio 17.28]

En general, $\langle u,v\rangle_\lambda$ no es producto interno fuera de $H_0^1(\Omega)$. Si suponemos que $\lambda \leq -\lambda_1$ (descartamos la hipótesis de que $\lambda > -\lambda_1$) entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ no es definido positivo en $H_0^1(\Omega)$. Por esta razón, para el caso general en el que $\lambda\in\mathbb{R}$ denotaremos $B[u,v] := \langle u,v\rangle_\lambda$ para no sugerir mediante la notación que es un producto interno pero sí una forma bilineal. Dejaremos implícito en la notación que B depende directamente de λ y Ω.

1.4. Diferenciabilidad en Espacios de Banach

Sean V y W espacios de Banach, con normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ respectivamente. El espacio

$$\mathscr{B}(V,W) := \{T : V\to W \quad : \quad T \text{ es lineal y continua}\}$$

con la norma

$$\|T\|_{\mathscr{B}} := \sup_{v\in V}\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \tag{1.4.1}$$

es un espacio de Banach. [5, Proposición 9.3]

Definición 1.4.1. *Sea A abierto en V.*
*Una función $F : A\to W$ es **diferenciable en el punto** $u_0\in A$ si existe $T\in\mathscr{B}(V,W)$ tal que*

$$\lim_{v\to 0}\frac{\|F(u_0+v)-F(u_0)-Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0.$$

*T es **la derivada de F en** u_0 y se denota $F'(u_0) := T$. Decimos que F es **diferenciable en** A si lo es en cada punto $u\in A$. Definimos a **la derivada de** F **en** A como la función*

$$F' : A\to\mathscr{B}(V,W); \quad u\mapsto F'(u).$$

*Si la función F' es continua, decimos que F **es de clase** $\mathscr{C}^1$ **en** A. Inductivamente, F **es de clase** $\mathscr{C}^k$ **en** A si es de clase $\mathscr{C}^{k-1}$ y su $(k-1)$-ésima derivada es de clase $\mathscr{C}^1$. F **es de clase** $\mathscr{C}^\infty$ **en** A si es de clase $\mathscr{C}^k$ para toda $k\in\mathbb{Z}_{>0}$. Además denotaremos*

$$\mathscr{C}^k(A) := \{f : A\to\mathbb{R} \ : \ f \text{ es de clase } \mathscr{C}^k \text{ en } A\}.$$

Las siguientes son algunas propiedades de la derivada. No vamos a utilizarlas todas en este artículo.

Proposición 1.4.2. *Sea A abierto en V. $F : A \to W$ es $\mathscr{C}^1$ si y solo si satisface las siguientes afirmaciones:*

1. *Para cualesquiera $u \in A$ y $v \in V$ existe el límite:*
$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} := \mathscr{G}F(u)v.$$
2. *Para todo $u \in A$, $\mathscr{G}F(u) \in \mathscr{B}(V,W)$.*
3. *La función $\mathscr{G}F : A \to \mathscr{B}(V,W)$ es continua. En este caso, $F' = \mathscr{G}F$.*

[5, Teorema 9.21]

Las siguientes funciones son fundamentales para trabajar con el funcional de energía del capítulo 3.

Proposición 1.4.3. *Sea V un espacio de Banach. Si $B : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y simétrica ($B[u,v] = B[v,u]$) que además es continuo por entradas ($B[u,\cdot]$ es continuo) entonces la función*
$$F : V \to \mathbb{R}; \quad F(u) := \frac{1}{2}B[u,u]$$
es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en V y para toda $u,v,w \in H$
$$F'(u)v = B[u,v] \quad y \quad F''(u)[v,w] = B[v,w].$$
[5, Proposición 1.40]

Proposición 1.4.4. *Sea $p \in (2,+\infty)$. La función*
$$F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad F(u) := \frac{1}{p}|u|_p^p$$
es de clase $\mathscr{C}^2$ en $L^p(\Omega)$ y para toda $u,v,w \in L^p(\Omega)$
$$F'(u)v = \int_\Omega |u|^{p-2}uv \quad y \quad F''(u)[v,w] = (p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}vw.$$
[6, Proposición 1.41]

Esta última función también sera de utilidad para el Lema 3.2.3.

Definición 1.4.5. *Sea H espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*
Supongamos que A es abierto en H y $J : A \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable en A.
Al ser $J'(u)$ un operador lineal y continuo, el teorema de Representación de Frechét-Riesz nos permite definir al ***gradiente*** *de J como el único elemento $\nabla J(u) \in H$ tal que para toda $v \in H$*
$$J'(u)v = \langle \nabla J(u), v\rangle.$$

Además es posible demostrar que para cualquier $J : A \to \mathbb{R}$ diferenciable, el mapeo $u \mapsto \nabla J(u)$ es continuo si y solo si $J \in \mathscr{C}^1(H)$. El gradiente lo utilizaremos en el lema de deformación cualitativo (Lema 2.1.7).

Capítulo 2

Puntos Críticos de Funciones Simétricas

En todo este capítulo vamos a denotar por H a un espacio de Hilbert arbitrario con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma inducida $\|\cdot\|$. Además fijemos a $J : H \to \mathbb{R}$ funcional par continuamente diferenciable (de clase $\mathscr{C}^1$). Usualmente estaremos utilizando $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \in [a, b]$.

Definición 2.0.1. *Decimos que un subconjunto S de algún espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) es un **conjunto simétrico** si $u \in S \;\Rightarrow\; -u \in S$. Dada una función entre dos conjuntos simétricos $f : S \to R$, decimos que f es **par** si $f(-u) = f(u)$ y que f es **impar** si $f(-u) = -f(u)$.*

A continuación enunciamos algunas observaciones muy elementales.

Proposición 2.0.2.

1. *Los subconjuntos simétricos son cerrados bajo intersecciones, uniones y complementos. La preimagen de un conjunto simétrico bajo una función par es un conjunto simétrico. La imagen de un conjunto simétrico bajo una función impar es un conjunto simétrico.*

2. *Sea S conjunto simétrico. Si $f, g : S \to \mathbb{R}$ son funciones pares entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son funciones pares. Si $f : S \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es par entonces $1/f$ también es par.*

3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ no-vacío entonces la función*

$$dist(\cdot, A) : H \to \mathbb{R}; \qquad dist(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

es Lipschitz continua. Más aún, si X es espacio de Hilbert y A es simétrico entonces la función $dist(x, A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|$ es par.

Demostración: Las dos primeras observaciones son fáciles de demostrar. La última es más interesante. Que la función sea localmente Lipschitz es un resultado sencillo de análisis matemático. Sean $x,z \in X$ y $y \in A$ arbitrarios, como el ínfimo es una cota inferior

$$dist(x,A) \leq d(x,y)$$
$$dist(z,A) \leq d(z,y)$$

utilizando únicamente la desigualdad del triangulo (sobre espacios métricos) deducimos que

$$dist(x,A) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
$$dist(z,A) \leq d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y).$$

Tomando ínfimos sobre $w,y \in A$ tenemos que

$$dist(x,A) \leq d(x,z) + dist(z,A)$$

$$dist(z,A) \leq d(z,x) + dist(x,A).$$

Por propiedades del valor absoluto

$$|dist(x,A) - dist(z,A)| \leq d(x,z).$$

Como $x,z \in X$ son arbitrarios, la desigualdad anterior nos garantiza que $dist(\cdot,A)$ es Lipschitz continua.

Sea $x \in X$ arbitrario, para demostrar que $dist(\cdot,A)$ es par, observemos que $x \mapsto -x$ es una biyección sobre A. Denotando $w = -y$ y utilizando la biyección es fácil de ver que

$$\begin{aligned} dist(-x,A) &= \inf_{y\in A} \|y-(-x)\| = \inf_{y\in A} \|x+y\| = \\ &= \inf_{y\in A} \|x-(-y)\| = \inf_{w\in A} \|x-w\| = \inf_{w\in A} \|w-x\| = dist(x,A). \end{aligned}$$

□

2.1. Un Lema de Deformación Simétrico

Bajo ciertas construcciones apropiadas, los resultados de esta sección se pueden extender a cualquier subvariedad de Hilbert de clase $\mathscr{C}^1$ en H [6, Sección 3.1].

Definición 2.1.1. *Sea (X,d) espacio métrico y $A \subset X$ abierto y no-vacío. Decimos que una función $f : A \to X$ es **localmente Lipschitz** (en A) si para cada $u \in A$ existen constantes $r, C > 0$ que dependen de u tales que*

$$v,w \in B_r(u) \;\Rightarrow\; d(f(v), f(w)) \leq Cd(v,w).$$

Se tienen las siguientes propiedades se deducen a partir de la definición.

Proposición 2.1.2. *Sean X,Y espacios de Banach, $A \subset X$ abierto no-vacío.*

1. *Si $f,g : A \to Y$ son funciones localmente Lipschitz entonces $f+g$ es localmente Lipschitz en A.*

2. *Si* $f : A \to Y$ *y* $g : A \to \mathbb{R}$ *son funciones localmente Lipschitz entonces* $f \cdot g$ *es localmente Lipschitz en A.*

3. *La composición entre funciones localmente Lipschitz es localmente Lipschitz.*

4. *Si* $f : A \to Y$ *es de clase* $\mathscr{C}^1$ *entonces* f *es localmente Lipschitz.*

Demostración: Las primeras tres afirmaciones se deducen a partir de las definiciones. La última propiedad es consecuencia del teorema del valor medio ([5, Corolario 9.17]).

□

Esas propiedades las utilizaremos frecuentemente en el Teorema 2.1.7.

Teorema 2.1.3. *Sea* $\chi : H \to H$ *un campo localmente Lipschitz. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Para cada* $u \in H$*, existe un intervalo abierto* $I(u) := (t^-(u), t^+(u))$ *que contiene al origen y una única función* $\sigma(\cdot, u) : I(u) \to H$ *de clase* $\mathscr{C}^1$ *que es solución del problema de Cauchy*

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) = \chi(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) = u \end{cases}$$

2. *El intervalo* $I(u)$ *es máximo, es decir,* $\sigma(\cdot, u)$ *no se puede extender a una solución definida en un intervalo más grande.*

3. *De existir una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\forall t \in [0, t^+(u));\ \|\chi(\sigma(t,u))\| < C$$

entonces $t^+(u) = +\infty$*. Análogamente, si existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\forall t \in (t^-(u), 0];\ \|\chi(\sigma(t,u))\| < C$$

entonces $t^-(u) = -\infty$*.*

4. *El dominio de* σ

$$D := \{(t,u) \in \mathbb{R} \times H : t \in I(u)\}$$

es abierto en $\mathbb{R} \times H$ *y la función* $\sigma : D \to H$*, definida por* $(\mathscr{C})$ *es continua. La función* $\sigma : D \to H$ *se llama el flujo generado por* χ*. Si* $D = \mathbb{R} \times H$ *se dice que el flujo es global.*

Demostración: La demostración del resultado se puede encontrar por ejemplo en [10, Capítulo IV, Secciones 1 y 2].

□

Definición 2.1.4 (Flujo Gradiente Negativo)**.** *Decimos que el* ***flujo gradiente negativo*** *de J en H es la función* σ *que satisface el problema de Cauchy* $(\mathscr{C})$ *del Teorema 2.1.3 en el caso particular en el que*

$$\chi(u) := -\nabla J(u).$$

Dado cualquier $c \in \mathbb{R}$, $Z \subset H$ y $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ denotamos lo siguiente

- El conjunto cerrado de todos puntos críticos de J en el nivel c,
  $K_c = \{u \in H \,:\, J(u) = c,\ \nabla J(u) = 0\} = \{u \in H \,:\, J(u) = c,\ J'(u) = 0\}$.
- El conjunto de subnivel c de J, $J^c = J^{-1}(-\infty, c]$.
- La envoltura de Z de grosor δ, $B_\delta(Z) = \{u \in H \,:\, dist(u, Z) < \delta\}$.

La siguiente propiedad nos dice que las trayectorias del flujo gradiente negativo de J a lo largo de las cuales la función está acotada, tienden a un punto crítico.

Definición 2.1.5. *Sea $J : H \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en A. Una sucesión (u_k) de H que satisface*

$$J(u_k) \to c \quad y \quad J'(u_k) \to 0$$

*se le llama una **sucesión de Palais-Smale para J en** c, donde la convergencia de $J'(u_k)$ es respecto a la norma $\|\cdot\|_{\mathscr{B}}$ definida en (1.4.1) sobre el espacio $\mathscr{B}(H, \mathbb{R})$.*
J satisface la condición de PS_c si toda sucesión de Palais-Smale para J en c tiene una subsucesión convergente.
Sea $I \subset \mathbb{R}$, J satisface la condición de PS_I si J satisface PS_c para toda $c \in I$.

Las siguientes son un par de propiedades elementales de las funciones que satisfacen la condición de Palais-Smale.

Proposición 2.1.6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $c \in [a, b]$. Si J satisface PS_c entonces K_c es compacto. Además si J satisface $PS_{[a,b]}$ entonces para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$u \in J^{-1}[a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon] \setminus \bigcup_{c \in [a,b]} B_\delta(K_c) \quad \Longrightarrow \quad \|\nabla J(u_k)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta},$$

donde $B_\delta(\emptyset) = \emptyset$.

Demostración. Claramente el vacío es compacto. Si $K_c \neq \emptyset$ entonces cualquier sucesión (u_k) de K_c es una sucesión de Palais-Smale porque

$$J(u_k) = c \qquad \text{y} \qquad J'(u_k) = 0.$$

En consecuencia, tiene una subsucesión convergente. Por un resultado sobre espacios métricos esto quiere decir que K_c es compacto.

Para la segunda afirmación procedemos por contradicción. Supongamos que existe una sucesión (u_k) tal que

$$u_k \notin \bigcup_{c \in [a,b]} B_\delta(K_c), \quad J(u_k) \in \left[a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}\right], \quad \|\nabla J(u)\| < \frac{2}{k\delta},$$

Por compacidad del intervalo $[a-1, b+1]$ existe una subsucesión (u_k) tal que $J(u_k) \to c \in [a, b]$. Por la condición de Palais-Smale existe otra subsucesión (de la subsucesión) (u_k) que converge a $u \in K_c$. Lo cual es absurdo porque $\|u_k - u\| > \delta$ ($u_k \notin B_\delta(K_c)$). Este mismo argumento es valido cuando K_c es vacío, la contradicción está en que el límite $u \in K_c = \emptyset$.

$\square$

La prueba del siguiente resultado se le atribuye a Willem [16]. Nosotros además verificaremos que si J es par entonces la deformación es impar. Este teorema nos da una condición sobre J para que dado cualquier conjunto de nivel y cualquier vecindad de ese conjunto de nivel exista una vecindad de c y una deformación del espacio respecto al flujo gradiente negativo de J.

Teorema 2.1.7 (Lema de Deformación Cuantitativo)**.** *Sean $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ y $Z \subset H$ simétrico. Además suponemos que $J \in \mathscr{C}^1(H)$ es par.*
Si toda u en $J^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \smallsetminus B_\delta(Z)$ satisface la desigualdad

$$\|\nabla J(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta} \tag{2.1.1}$$

entonces existe $\eta : [0,1] \times H \to H$ continua con las siguientes características:

1. *Si $u \notin J^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \smallsetminus B_\delta(Z)$ entonces $\eta(t,u) = u$.*
2. *$J(\eta(\cdot,u))$ es decreciente.*
3. *$\eta(1, J^{c+\varepsilon} \smallsetminus B_{3\delta}(Z)) \subset J^{c-\varepsilon}$.*
4. *$\eta(t,\cdot)$ es un mapeo acotado, i.e. la imagen de cualquier conjunto acotado bajo $\eta(t,\cdot)$ es un conjunto acotado.*
5. *$\eta(t,\cdot) : H \to H$ es un homeomorfismo cuya inversa es un mapeo acotado.*
6. *$\eta(t,\cdot)$ es impar.*

Demostración. Para obtener la deformación vamos a construir un campo impar localmente Lipschitz χ como el producto de otros dos funcionales ρ y φ. Consideremos a los conjuntos simétricos (por la Proposición 2.0.2)

$$A = J^{-1}(c-2\varepsilon, c+2\varepsilon) \smallsetminus \overline{B_\delta(Z)} \qquad \text{y} \qquad B = J^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \smallsetminus B_{2\delta}(Z).$$

Notemos que $B \subset A$, entonces B y $H \smallsetminus A = (H \smallsetminus J^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cup B_\delta(Z)$ son cerrados disjuntos. Por lo que podemos considerar a la función

$$\rho : H \to [0,1]; \qquad \rho(u) = \frac{dist(u, H \smallsetminus A)}{dist(u, H \smallsetminus A) + dist(u,B)}.$$

Por la Proposición 2.0.2, ρ es par (ya que $H \smallsetminus A$ y B son simétricos). Observemos que la función real $x \mapsto 1/x$ es localmente Lipschitz por ser de clase $\mathscr{C}^1$ (Proposición 2.1.2). Denotamos

$$f : H \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}; \qquad f(u) := \frac{1}{dist(u, H \smallsetminus A) + dist(u,B)}.$$

Por la Proposición 2.1.2 se sigue que f es localmente Lipschitz por ser suma y composición de funciones localmente Lipschitz (Proposición 2.0.2). Por la Proposición

2.1.2 sabemos que ρ es localmente Lipschitz por ser producto entre las funciones f y $g(u) := dist(u, H \setminus A)$. Además es fácil ver que ρ cumple las siguientes condiciones

$$B \subset \rho^{-1}(\{1\}) \quad \text{y} \quad H \setminus A \subset \rho^{-1}(\{0\}). \tag{2.1.2}$$

Sea $\tilde{H} := \{u \in H \ : \ \nabla J(u) \neq 0\}$. Por (2.1.1) y la contención anterior, basta definir φ con dominio en $\tilde{H}$. Si J es de clase $\mathscr{C}^2$ entonces $\varphi(u) = \nabla J(u) / \|\nabla J(u)\|^2$ satisface lo que necesitamos. De lo contrario, la construcción de φ es muy similar a demostrar que existe un campo pseudogradiente para J en $\tilde{H}$, como veremos a continuación.
Para cada $u \in \tilde{H}$ denotamos $z_u := \frac{2}{3} \frac{\nabla J(u)}{\|\nabla J(u)\|^2}$, se cumple que

$$\begin{cases} \|z_u\| < 1/\|\nabla J(u)\| \\ \langle \nabla J(u), z_u \rangle > 1/2 \end{cases}.$$

Por continuidad de ∇J existe una vecindad B_u de u en $\tilde{H}$ tal que z_u satisface las siguientes desigualdades para toda $x \in B_u$,

$$\begin{cases} \|v\| \leq 1/\|\nabla J(x)\| \\ \langle \nabla J(x), v \rangle \geq 1/2 \end{cases}. \tag{2.1.3}$$

Es claro que la colección $\{B_u\}_{u \in \tilde{H}}$ es cubierta abierta de $\tilde{H}$, por el teorema de A.H. Stone [12], esa cubierta tiene un refinamiento $\mathscr{C}$ localmente finito. Es fácil ver que si $x \in B_u \cap B_w$ entonces la suma convexa entre z_u y z_w satisface la desigualdades (2.1.3). Es decir, si $a, b \geq 0$ y $a + b = 1$ entonces

$$\|az_u + bz_w\| \leq a\|z_u\| + b\|z_w\| \leq (a+b)/\|\nabla J(x)\| = 1/\|\nabla J(x)\|$$

$$\langle \nabla J(x), az_u + bz_w \rangle = a \langle \nabla J(x), z_u \rangle + b \langle \nabla J(x), z_w \rangle \geq (a+b)/2 = 1/2$$

Para cada $B \in \mathscr{C}$ podemos (por el axioma de elección) denotar $z_B := z_u$ para alguna $u \in \tilde{H}$ tal que $B \subset B_u$. Consideremos a la función

$$v : \tilde{H} \to H; \quad v(x) = \sum_{B \in \mathscr{C}} \rho_B(x) z_B,$$

donde $\rho_B(x) := dist(x, \tilde{H} \setminus B) / \sum\limits_{C \in \mathscr{C}} dist(x, \tilde{H} \setminus C)$.

Ahora veamos que v es localmente Lipschitz. Al ser $\mathscr{C}$ localmente finito, por definición sabemos que cualquier $u \in \tilde{H}$ tiene una vecindad V_u en $\tilde{H}$ tal que la colección

$$\mathscr{C}_u := \{B \in \mathscr{C} \ : \ B \cap V_u \neq \emptyset\}$$

es finita. En consecuencia, tenemos que para toda $x \in V_u$

$$C \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_u \Longrightarrow dist(x, \tilde{H} \setminus C) = 0.$$

En consecuencia, v es localmente Lipschitz en V_u por ser suma finita, producto y composición de funciones localmente Lipschitz (Proposiciones 2.0.2 y 2.1.2). Esto es suficiente para garantizar que v es localmente Lipschitz en todo $\tilde{H}$. Además, la finitud nos garantiza que $v(x)$ es suma convexa ($\sum_{B\in\mathscr{C}_u}\rho_B(x)=\sum_{B\in\mathscr{C}}\rho_B(x)=1$ y $\rho_B(x)\geq 0$) de vectores $\{z_B\}_{B\in\mathscr{C}_u}$ para toda $x\in V_u$. Por ende, $v(u)$ satisface las desigualdades

$$\begin{cases}\|v(u)\|\leq 1/\|\nabla J(u)\|\\ \langle\nabla J(u),v(u)\rangle\geq 1/2\end{cases}.$$

Con los mismos argumentos del párrafo anterior, debe de ser claro que la función impar

$$\varphi:H\to H;\qquad \varphi(x):=\frac{1}{2}(v(x)-v(-x))$$

es localmente Lipschitz. Utilizando que $\nabla J(\cdot)$ es impar (porque J es par) podemos deducir que para toda $u\in\tilde{H}$

$$\|\varphi(u)\|\leq\frac{1}{2}\|v(u)\|+\frac{1}{2}\|v(-u)\|\leq\frac{1}{2\|\nabla J(u)\|}+\frac{1}{2\|\nabla J(-u)\|}=\frac{1}{\|\nabla J(u)\|}$$

$$\langle\nabla J(u),\varphi(u)\rangle=\frac{1}{2}\langle\nabla J(u),v(u)\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla J(-u),v(-u)\rangle\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Así, φ también satisface las siguientes desigualdades

$$\begin{cases}\|\varphi(u)\|\leq 1/\|\nabla J(u)\|\\ \langle\nabla J(u),\varphi(u)\rangle\geq 1/2\end{cases}. \tag{2.1.4}$$

Por (2.1.1) y (2.1.2) podemos definir al siguiente campo impar y localmente Lipschitz

$$\chi:H\to H;\quad \chi(u):=\begin{cases}-4\varepsilon\rho(u)\varphi(u) & ,\ u\in A\\ 0 & ,\ u\notin A\end{cases}.$$

Por construcción es fácil ver que dado cualquier $u\in H$

$$\|\chi(u)\|\leq\frac{4\varepsilon|\rho(u)|}{\|\nabla J(u)\|}\leq\delta.$$

El Teorema 2.1.3 nos garantiza que hay una única solución global $\eta(\cdot,u):\mathbb{R}\to H$ de clase $\mathscr{C}^1$ al problema de Cauchy

$$(\mathscr{C})\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,u)=\chi(\eta(t,u))\\ \eta(0,u)=u\end{cases},$$

y además $\eta:\mathbb{R}\times H\to H$ es continua.

1. Observemos que si $u\notin A$ entonces, por definición de χ, la función $f(t)=u$ satisface trivialmente $(\mathscr{C})$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}f(t)=\frac{\partial}{\partial t}u=0=\chi(u)=\chi(f(t))\\ f(0)=u\end{cases}.$$

   Por unicidad $\eta(t,u)=u$.

2. Por otro lado, supongamos que $u \in A$. Por la regla de la cadena y (2.1.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\eta(t,u)) = J'(\eta(t,u)) \left[\frac{\partial}{\partial t} \eta(t,u) \right] = \left\langle \nabla J(\eta(t,u)), \frac{\partial}{\partial t} \eta(t,u) \right\rangle = \\ = \langle \nabla J(\eta(t,u)), \chi(\eta(t,u)) \rangle \leq -2\varepsilon \rho(\eta(t,u)) \leq 0. \quad (2.1.5)$$

   Por ende, $J(\eta(\cdot,u))$ es decreciente.

3. Sea $u \in J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(Z)$ arbitrario. Si suponemos que existe $s \in [0,1]$ tal que $\eta(s,u) \in J^{c-\varepsilon}$, entonces (por el inciso anterior) $\eta(1,u) \in J^{c-\varepsilon}$. Por otro lado, supongamos que para todo tiempo $s \in [0,1]$ sucede que $\eta(s,u) \in J[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Observemos que $(\mathscr{C})$ nos garantiza que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \eta(t,u) \right\| = \|\chi(\eta(t,u))\| \leq \delta.$$

   El teorema del valor medio nos garantiza que

$$\|\eta(t,u) - u\| \leq \max_{s \in [0,t]} \left\| \frac{\partial}{\partial s} \eta(s,u) \right\| |t| \leq \delta |t|. \quad (2.1.6)$$

   En particular para $t \in [0,1]$

$$\|\eta(t,u) - u\| \leq \delta t \leq \delta.$$

   Como $u \in H \setminus B_{3\delta}(Z)$ esto quiere decir que para $t \in [0,1]$; $\eta(t,u) \in H \setminus B_{2\delta}(Z)$. Utilizando el teorema fundamental del Cálculo y la desigualdad (2.1.5) deducimos que

$$J(\eta(1,u)) - J(u) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} J(\eta(t,u))\, dt = -2\varepsilon \int_0^1 \rho(\eta(t,u))\, dt = -2\varepsilon$$

   donde la última igualdad se debe a que $\eta(t,u) \in B$ y por (2.1.2). Por el inciso anterior y como $u \in J^{c+\varepsilon}$, concluimos que

$$J(\eta(1,u)) = J(u) - 2\varepsilon \leq c - \varepsilon.$$

4. Utilizando la desigualdad del triangulo y (2.1.6) tenemos que

$$\|\eta(t,u)\| - \|u\| \leq \|\eta(t,u) - u\| \leq \delta |t|.$$

   Despejando deducimos que $\eta(t,\cdot)$ es un mapeo acotado porque

$$\|\eta(t,u)\| \leq \delta |t| + \|u\|.$$

5. De antemano, notemos que $\{\eta(t,\cdot)\}_{t \geq 0}$ es un semi-grupo no-lineal. Como mencionamos antes, $\eta(\cdot,u)$ es continuo y $\eta(0,u) = u$ por el Teorema 2.1.3. Sean $r,s \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Denotamos $w_s := \eta(s,u)$ y $f_s(t) := \eta(t+s,u)$. Al ser η es

solución global, $\eta(\cdot, w_s)$ satisface $(\mathscr{C})$ $(w_s \in D)$. Por otro lado, notemos que $f_s(\cdot)$ también satisface $(\mathscr{C})$ bajo la misma condición inicial, w_s,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_s(t) = \frac{\partial}{\partial t}\eta(t+s,u) = \chi(\eta(t+s,u)) = \chi(f_s(t)) \\ f_s(0) = \eta(0+s,u) = w_s \end{cases}.$$

Por unicidad, ambas funciones coinciden. Evaluando en r deducimos la igualdad

$$\eta(r+s,u) = f_s(r) = \eta(r, w_s) = \eta(r, \eta(s,u)).$$

Procediendo de la misma manera (intercambiando r y s) obtenemos la otra igualdad

$$\eta(r+s,u) = f_r(s) = \eta(s, w_r) = \eta(s, \eta(r,u)).$$

De esta forma, η satisface la identidad del semigrupo

$$\eta(r+s,u) = \eta(r, \eta(s,u)) = \eta(s, \eta(r,u)).$$

Esta última identidad implica que para toda $t \in \mathbb{R}$

$$u = \eta(0,u) = \eta(t, \eta(-t,u)) = \eta(-t, \eta(t,u)).$$

Esto quiere decir que $\eta(t,\cdot)$ es biyectiva. Como mencionamos antes, $\eta(t,\cdot)$ y su inversa, $\eta(-t,\cdot)$, son funciones continuas como consecuencia del Teorema 2.1.3. Por lo tanto, $\eta(t,\cdot)$ es un homeomorfismo. Por el inciso anterior, su inversa $\eta(-t,\cdot)$ también es un mapeo acotado.

6. Al ser χ es impar, por ser producto de una función par $(-2\varepsilon\rho)$ y otra impar (φ), vemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(-\eta(t,-u)) = -\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,-u) = -\chi(\eta(t,-u)) = \chi(-\eta(t,-u)) \\ -\eta(0,-u) = u \end{cases},$$

esto quiere decir que $-\eta(\cdot,-u)$ satisface $(\mathscr{C})$. Por unicidad

$$\eta(t,u) = -\eta(t,-u).$$

Por ende, $\eta(t,\cdot)$ es impar.

Por lo tanto, η satisface todo lo que buscábamos.

□

Teorema 2.1.8 (Lema de Deformación). *Sea $J \in \mathscr{C}^1(H)$. Si J es par y satisface PS_c entonces para cualquier $\delta > 0$ existen $\varepsilon > 0$ y $\eta : [0,1] \times H \to H$ continua tales que cumplen cuatro propiedades:*

1. *Si $u \in H \setminus J^{-1}[(c-\varepsilon, c+\varepsilon)]$ entonces $\eta(t,u) = u$.*

2. *$J(\eta(\cdot,u))$ es decreciente.*

3. *$\eta(1, J^{c+\varepsilon} \setminus B_\delta(K_c)) \subset J^{c-\varepsilon}$.*

4. *$\eta(t,\cdot): H \to H$ es un mapeo acotado (imagen de conjuntos acotados es acotado) y es un homeomorfismo impar. Además su inversa también es un mapeo acotado.*

Demostración. Aplicando la Proposición 2.1.6 para $a = b = c$ obtenemos que toda u en $J^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \setminus B_\delta(K_c)$ satisface la desigualdad

$$\|\nabla J(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}.$$

Aplicando el Teorema 2.1.7 (para $Z := K_c$) obtenemos el resultado. □

Si además suponemos que c pertenece a un intervalo abierto, I, podemos escoger ε suficientemente pequeño tal que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset I$. Por otra parte, η depende de c y δ. El resultado también es valido cuando $K_c = \emptyset$. En ese caso, $\eta(1,\cdot)$ deforma $J^{c+\varepsilon} = J^{c+\varepsilon} \setminus B_\delta(K_c)$ en $J^{c-\varepsilon}$.

2.2. El Género de Krasnoselskii

A lo largo de [6, Capítulo 3] se motiva la definición del género de Krasnoselskii mediante la categoría de Lusternik-Schnirelmann y se prueban algunas propiedades del género. La siguiente es la definición que aparece en [9].

Definición 2.2.1. *Dado cualquier $S \subset H$ simétrico y no-vacio definimos a su **género de Krasnoselskii** como*

$$g(S) = \min\{m \in \mathbb{Z}_{>0} \quad : \quad \textit{Existe } \Phi : S \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \textit{ continua e impar}\}.$$

De no existir $\Phi : S \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ continua e impar para ningún m, definimos $g(S) = +\infty$. Además definimos $g(\emptyset) = 0$.

Notemos que por propiedades de los mapeos impares $g(\{0\}) = +\infty$ por lo que es importante considerar conjuntos que no contengan al origen. El género además satisface las siguientes propiedades elementales.

Proposición 2.2.2. *Para $A, B \subset H$ simétricos arbitrarios el género satisface lo siguiente:*

- ***No-trivialidad:*** *$A = \emptyset$ si y solo si $g(A) = 0$.*
- ***Subaditividad:*** *Si A y B son cerrados en H entonces $g(A \cup B) \leq g(A) + g(B)$.*
- ***Continuidad:*** *Si A es cerrado entonces existe $\delta > 0$ tal que $g(B_\delta(A)) = g(A)$.*
- ***Monotonía:*** *De existir una función $h : A \to B$ continua e impar entonces $g(A) \leq g(B)$.*
- ***Finitud:*** *Supongamos que A no contiene al origen. Si A es compacto entonces $g(A) < +\infty$. Además, A es finito y no-vacio si y solo si $g(A) = 1$.*

Demostración: La demostración se puede consultar en [11, Lemma 1.1] o en [6, Proposición 3.36].

□

La monotonía nos garantiza que de existir un homeomorfismo impar entre A y B entonces $g(A) = g(B)$. Esto quiere decir que el género es un **invariante topológico** (respecto a homeomorfismos impares).

La finitud y la Proposición 2.1.6 nos garantizan que si J es par, satisface PS_c y $0 \notin K_c$ entonces el género de K_c es finito. Para demostrar la existencia de soluciones (que K_c no sea vacío) nos interesa verificar que $g(K_c) > 0$.

El teorema de Borsuk-Ulam [3] resulta ser uno de los teoremas más importantes en topología algebraica. En particular es una herramienta muy útil para calcular el género de Krasnoselskii. A continuación enunciaremos la variante que aparece en [13, Corollary 3.29].

Teorema 2.2.3 (Borsuk-Ulam)**.** *Sea B un abierto en $\mathbb{R}^N$, acotado y simétrico que contiene al origen. Además, sea $f : \partial B \to \mathbb{R}^N$ impar y continua. Si la imagen de f está contenida en un subespacio vectorial distinto del total entonces existe $x \in \partial B$ tal que $f(x) = 0$.*

Demostración. La prueba viene en la sección G del tercer capítulo de [13].

□

La siguiente proposición es una buena oportunidad para ejemplificar la manera en que se utiliza el teorema de Borsuk-Ulam para calcular el género.

Proposición 2.2.4. *Sea W un espacio vectorial de dimensión finita. Si B es un abierto acotado en W, $0 \in B$ y B es simétrico entonces $g(\partial B) = dim\, W$.*

Demostración Denotamos $N := dim\, W$ y supongamos que $W = \mathbb{R}^N$. Como $0 \notin \partial B$, se sigue por monotonicidad que

$$g(\partial B) \leq g(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) = N.$$

Denotamos $m = g(\partial B)$. Si suponemos que $g(\partial B) < N$ entonces existe un mapeo impar y continuo $\Phi : \partial B \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Consideremos el encaje (impar y continuo) $i : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N$. En consecuencia, el mapeo impar y continuo $f = i \circ \Phi$ contradice el teorema de Borsuk-Ulam porque, para toda $x \in \partial B$,

$$f(x) = \Phi(x) \neq 0.$$

Por lo tanto, $g(\partial B) = N$. Para el caso general basta con fijar un isomorfismo lineal entre $\mathbb{R}^N$ y W. Al ser ambos espacios de dimensión finita, dicho isomorfismo es un homeomorfismo que además es impar (por linealidad).

□

2.3. Motivación

Vamos a motivar de manera informal un nuevo invariante topológico, el pseudo-género de Krasnoselskii. Para fijar ideas supongamos que

$$J(x) := \frac{2}{5}|x|^5 - x^2 + 0.7,$$

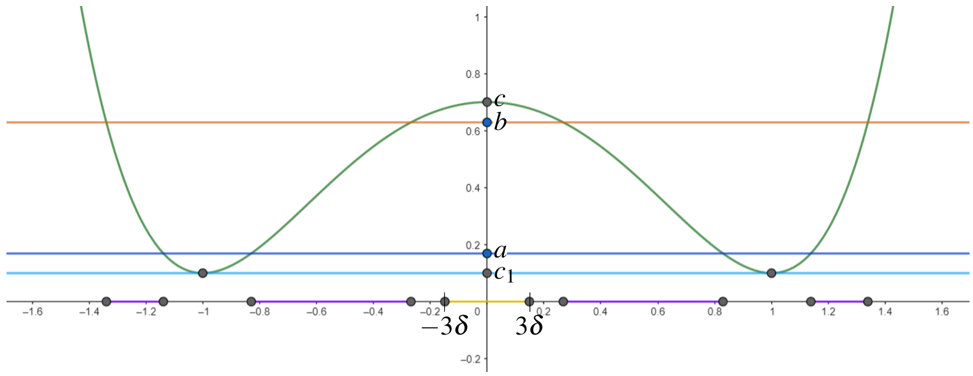

Figura 2.1: Gráfica de J (verde) y la intersección $J^b \cap S_a$ (morado).

esta función satisface $PS_{\mathbb{R}}$. Es claro de la gráfica de J (2.1) que hay dos mínimos globales con valor crítico c_1 y un máximo local en $c := J(0)$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ como en la Gráfica 2.1. Nos interesa un criterio que nos permita verificar que no hay ningún valor crítico en el intervalo $[a,b]$. Si denotamos $S_a := J^{-1}[a, +\infty)$ entonces (por la gráfica) es claro que $g(J^b \cap S_a) = 1$. Esto nos dice que el género por sí mismo no es buen estimador para contar la cantidad de valores críticos.

Por fortuna el lema de deformación nos permite mejorar esta estimación. Sean $I = \mathbb{R}_{>0}$, $\delta > 0$ como en la Gráfica 2.1 y η como en el lema de deformación (Teorema 2.1.8). Para cualquier $d \in J^b$ sabemos que $t \mapsto J(\eta(t,d))$ es decreciente. Si suponemos que J^b se deforma en c_1 de la siguiente manera

$$\lim_{t \to +\infty} J(\eta(t, J^b)) = \{c_1\}, \tag{2.3.1}$$

entonces existe algún tiempo $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $J(\eta(t_0, d)) < a$. Esto implica que el valor

$$\min_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} g(\eta(t, J^b) \cap S_a) = g(\eta(t_0, J^b) \cap S_a) = g(\emptyset) = 0$$

es una mejor estimación más apropiada a la cantidad de valores críticos en $[a,b]$.

Por otro lado, el límite (2.3.1) anterior nos garantiza que para todo tiempo t la intersección $J(\eta(t, J^b)) \cap S_0$ ($S_0 := J^{-1}(0, +\infty)$) no es vacía. Esto implica que

$$\min_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} g(\eta(t, J^b) \cap S_0) = \min_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} g(\eta(t, J^b) \cap S_0) = 1.$$

Esta igualdad es consistente con el hecho de que hay un valor crítico, c_1, en el intervalo $(0, b)$.

Ambas observaciones sugieren que podemos acotar por abajo a la cantidad de valores críticos de cualquier intervalo $[a,b]$ mediante el género más pequeño de las deformaciones de J^b en S_a que podemos encontrar a lo largo del tiempo. Lamentablemente no hay nada que nos garantice la convergencia de (2.3.1) ya que solo conocemos el comportamiento de $\eta(t,\cdot)$ sobre alguna vecindad de K_c, ($J^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon]$). Lo que podemos hacer para corregir este último detalle es minimizar respecto a una colección $\mathscr{H}$ que contenga todos los posibles homeomorfismos, $\eta(t,\cdot)$, que podemos construir a partir del lema de deformación variando $c \in I$. En otras palabras, la mínima cantidad de puntos críticos en el intervalo $[a,b]$ viene dado por

$$\min_{h\in\mathscr{H}} g(h(J^b)\cap S_a),$$

donde

$$\mathscr{H} := \left\{ h : H \to H \quad : \quad \begin{array}{c} h \text{ es homeomorfismo impar y} \\ u \in H \smallsetminus J^{-1}[I] \;\Rightarrow\; h(u) = u \end{array} \right\}.$$

2.4. El Teorema de Bartolo, Benci y Fortunato

Definición 2.4.1 (Pseudo-género)**.** *Sean H espacio de Hilbert, $\mathscr{H}$ un grupo de homeomorfismos impares y S un subconjunto cerrado y simétrico de H. Dado cualquier A cerrado simétrico de H definimos al* ***pseudo-género de Krasnoselskii de*** A ***relativo a los conjuntos*** $\mathscr{H}$ ***y*** *S como*

$$g^*(A) = \min_{h\in\mathscr{H}} g(h(A)\cap S).$$

Pedimos que $\mathscr{H}$ sea un grupo para que el pseudo-género sea invariante topológico respecto a las funciones en $\mathscr{H}$, ya que el automorfismo $h \mapsto h\circ f$ ($f\in\mathscr{H}$) nos garantiza que (denotando $h' := h\circ f$)

$$g^*(f(A)) = \min_{h\in\mathscr{H}} g(h(f(A))\cap S) = \min_{h'\in\mathscr{H}} g(h'(A)\cap S) = g^*(A).$$

Además, el automorfismo $h \mapsto h^{-1}$ y la invariancia del género nos garantizan que

$$g^*(A) = \min_{h^{-1}\in\mathscr{H}} g(h^{-1}(A)\cap S) = \min_{h\in\mathscr{H}} g(A\cap h(S)).$$

Teorema 2.4.2. *Fijemos $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, $a,b \in I$ tales que $a<b$.*
Sean H espacio de Hilbert y J funcional $\mathscr{C}^1(H)$ par que cumple PS_I.
Fijamos $S \subset J^{-1}[a,+\infty)$ cerrado simétrico y al grupo de homeomorfismos

$$\mathscr{H} := \left\{ \eta : H \to H \quad : \quad \begin{array}{c} \eta \textit{ es homeomorfismo impar, es un } \underline{\textit{mapeo acotado}} \\ \textit{(su inversa también es un } \underline{\textit{mapeo acotado}}\textit{) y} \\ u \in H \smallsetminus J^{-1}[I] \;\Rightarrow\; \eta(u) = u \end{array} \right\}.$$

Consideramos al pseudo-género relativo a S y $\mathscr{H}$, $g^*(A) := \min_{h\in\mathscr{H}} g(h(A)\cap S)$.
De existir un conjunto $W \subset J^b$ cerrado en H y simétrico tal que $0 < g^*(W) < +\infty$ entonces los valores

$$c_k := \inf_{A\in\Sigma_k} \sup_{u\in A} J(u),$$

donde $\Sigma_k := \{A \text{ cerrado simétrico en } H \,:\, g^*(A) \geq k\}$ y $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, tienen las siguientes propiedades:

1. *La sucesión (c_k) es no-decreciente y se satisface la siguiente desigualdad*

$$a \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_{g^*(W)-1} \leq c_{g^*(W)} \leq b.$$

2. *Si dos o más números de la sucesión (c_k) resultan ser iguales entonces hay una infinidad de puntos críticos distintos. Más aún, para cualesquiera enteros $k > 0$ y $r \geq 0$ que cumplen la desigualdad $k + r \leq g^*(W)$ se satisface que*

$$c_k = c_{k+r} \Longrightarrow g(K_{c_k}) \geq r + 1.$$

   En consecuencia, J tiene al menos $g^*(W)$ pares de puntos críticos distintos en el intervalo $[a,b]$.

3. *Si J satisface $PS_{[a,+\infty)}$ entonces $c_k \to +\infty$.*

Demostración:

1. Por construcción de c_k es claro que la sucesión es no-decreciente (conforme k aumenta se toma el ínfimo entre menos elementos). Para verificar que cada c_k está bien definida (que en efecto es un número finito) basta con demostrar que $c_k \in [a,b]$. Procedemos por contradicción.

   Supongamos que $a > c_k$. Como el ínfimo es cota inferior, existe un conjunto simétrico $A \subset H$ tal que $g^*(A) \geq k$ y $\sup_A J < a$. Por propiedades del supremo $A \subset J^{-1}(-\infty, a)$. Por hipótesis, $S \subset J^{-1}[a, +\infty)$, así que $A \cap S = \emptyset$. Entonces

$$1 \leq k \leq g^*(A) = \min_{h \in \mathscr{H}} g(h(A) \cap S) \leq g(A \cap S) = 0,$$

   lo cual es absurdo. Así $a \leq c_k$.

   Supongamos que $c_k > b$. Por propiedades del ínfimo tenemos que si $g^*(A) \geq k$ entonces $\sup_A J \geq c_k > b$. Por la existencia de W esto resulta absurdo. Pues $g^*(W) \geq k$ pero $W \subset J^b$. Así $c_k \leq b$.

Antes de continuar con la prueba vamos a deducir dos desigualdades clave. Sea $c \in I$ arbitrario, por continuidad del género existe $\delta > 0$ tal que $g(\overline{B}) = g(K_c)$ donde $B := B_{3\delta}(K_c)$.

Por el lema de deformación (Lema 2.1.8) existen $\varepsilon > 0$ y $\eta : [0,1] \times H \to H$ tales que

$$\eta(t,\cdot) \in \mathscr{H} \qquad \text{y} \qquad \eta(1, J^{c+\varepsilon} \smallsetminus B) \subset J^{c-\varepsilon}. \tag{2.4.1}$$

Sea $A \subset J^{c+\varepsilon}$ cerrado simétrico en H arbitrario, utilizando ambas contenciones anteriores deducimos la primera propiedad que nos interesa

$$\eta(1, A \smallsetminus B) \subset \eta(1, J^{c+\varepsilon} \smallsetminus B) \subset J^{c-\varepsilon},$$

es decir,

$$\sup J(\eta(1, A \smallsetminus B)) \leq c - \varepsilon. \tag{2.4.2}$$

Por otra parte, sea $h \in \mathscr{H}$ arbitraria, podemos descomponer a $h(A) \subset H$ de la siguiente manera

$$h(A) = [h(A) \cap h(B)] \cup [h(A) \smallsetminus h(B)] \subset h(\overline{B}) \cup h(A \smallsetminus B).$$

Después, intersecando con S y distribuyendo en la unión tenemos que

$$h(A) \cap S \subset [h(\overline{B}) \cap S] \cup [h(A \setminus B) \cap S] \subset h(\overline{B}) \cup [h(A \setminus B) \cap S].$$

Por monotonía, subaditividad e invariancia del género

$$g^*(A) \leq g(h(A) \cap S) \leq g(h(\overline{B})) + g(h(A \setminus B) \cap S) = g(\overline{B}) + g(h(A \setminus B) \cap S).$$

Como $h \in \mathscr{H}$ es arbitraria, el mínimo sobre h preserva la desigualdad anterior

$$g^*(A) \leq g(\overline{B}) + g^*(A \setminus B) = g(K_c) + g^*(A \setminus B).$$

Despejando obtenemos la otra desigualdad que buscábamos

$$g^*(A) - g(K_c) \leq g^*(A \setminus B). \tag{2.4.3}$$

Para fijar ideas, lo que acabamos de hacer fue probar que para toda $c \in I$ existen B abierto en H, $\varepsilon > 0$ y $\eta : H \to H$ tales que si $A \subset J^{c+\varepsilon}$ es cerrado y simétrico en H entonces se satisfacen (2.4.3) y (2.4.2).

2. Sean $k > 0$ y $r \geq 0$ enteros tales que $k + r \leq g^*(W)$. Denotamos $c := c_k$ y supongamos que $c_k = c_{k+r}$. Procedemos por contradicción, vamos a suponer que $g(K_c) \leq r$. Como $c = c_{k+r}$ existe A cerrado y simétrico en H tal que

$$A \subset J^{c+\varepsilon} \qquad \text{y} \qquad g^*(A) \geq k + r.$$

Utilizando la desigualdad anterior y (2.4.3) deducimos que

$$k = (k + r) - r \leq g^*(A) - g(K_c) \leq g^*(A \setminus B),$$

donde $B := B_{3\delta}(K_c)$. Como $\eta(1, \cdot) \in \mathscr{H}$ y por la invariancia del pseudogénero tenemos que

$$k \leq g^*(A \setminus B) = g^*(\eta(1, A \setminus B)).$$

Por propiedades del ínfimo y la definición de c_k, se sigue que

$$\sup J(\eta(1, A \setminus B)) \geq c_k = c.$$

Sin embargo, la desigualdad (2.4.2) contradice esto último

$$\sup J(\eta(1, A \setminus B)) \leq c - \varepsilon < c.$$

Por lo tanto, $g(K_c) \geq r + 1$. Esto implica que hay al menos $r + 1$ pares de puntos críticos distintos de J con valor crítico c. Considerando cada c_k, hay al menos $g^*(W)$ pares de puntos críticos distintos de J en todo H.

3. Por el primer inciso sabemos que $c_k \geq a$ para toda $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Si existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $c_k = +\infty$, técnicamente el enunciado es cierto porque la sucesión no decrece. Supongamos que cada c_k es finita. El resto de la prueba se argumenta de la misma manera que en el inciso 2.

Procedemos por contradicción, vamos a suponer que la sucesión es acotada, denotamos por c a su supremo. En consecuencia, existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

$$m \geq k \Longrightarrow c - c_m < \varepsilon,$$

donde ε es como en (2.4.1) (de esta manera, $\eta(J^{c+\varepsilon} \setminus B) \subset J^{c_k}$).

Por la Proposición 2.1.6 y la finitud del género $g(K_c) < +\infty$, denotamos $m := k + g(K_c)$. Por definición de c_m existe A cerrado simétrico en H tal que

$$A \subset J^{c_m+\varepsilon} \subset J^{c+\varepsilon} \quad \text{y} \quad g^*(A) \geq k + g(K_c).$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (2.4.3) deducimos que

$$k = (k + g(K_c)) - g(K_c) \leq g^*(A) - g(K_c) \leq g^*(A \setminus B).$$

Como $\eta(1,\cdot) \in \mathscr{H}$ y por la invariancia del pseudogénero tenemos que

$$k \leq g^*(A \setminus B) = g^*(\eta(1, A \setminus B)).$$

Por propiedades del ínfimo y la definición de c_k, tenemos que

$$\sup J(\eta(1, A \setminus B)) \geq c_k.$$

Sin embargo, por la desigualdad (2.4.2) y la elección de k podemos contradecir esa última afirmación

$$\sup J(\eta(1, A \setminus B)) \leq c - \varepsilon < c_k.$$

Por lo tanto, la sucesión (c_k) no puede estar acotada. Como la sucesión es creciente (por el inciso 1), concluimos que $c_k \to \infty$.

$\square$

Hay una característica fundamental de $\mathscr{H}$ que utilizamos en la prueba del Teorema 2.4.2. $\mathscr{H}$ es un grupo que contiene a todos los homeomorfismos, $\eta(t,\cdot)$ que podemos obtener del lema de deformación. El resultado anterior se puede extender a cualquier grupo de homeomorfismos impares que cumpla con esa propiedad. Cabe mencionar que si el grupo en cuestión es muy grande podríamos detectar menos puntos críticos, y es muy impráctico enunciar al grupo de homeomorfismos más pequeño que cumple con la propiedad. Escogemos $\mathscr{H}$ para enunciar el Teorema 2.4.2 porque ese grupo es suficientemente pequeño para demostrar el Teorema de Bartolo, Benci y Fortunato.

Implícitamente, lo que hicimos al inicio de este capítulo fue definir dos clases; una de funciones equivariantes (impares) y otra de conjuntos invariantes (simétricos), respecto a un grupo de simetrías ($\{-1,1\} \cong \mathbb{Z}_2$). Mediante ambas clases definimos al género. Un índice es una generalización del género que nos permite trabajar a partir de cualquier grupo compacto de transformaciones unitarias. Los incisos de la Proposición 2.2.2 son muy similares a los axiomas de un índice. Para más detalles del índice y el pseudo-índice se puede consultar [2, Definition 2.5 - Definition 2.8]. El Teorema 2.4.2 se puede extender a cualquier índice, la prueba es formalmente la misma. No hace falta explicar qué es una teoría de índice para demostrar el Teorema de Bartolo, Benci y Fortunato pero en [6] se puede encontrar más información sobre sus alcances.

Los siguientes tres resultados nos permitirán demostrar el Teorema de Bartolo, Benci y Fortunato.

Proposición 2.4.3. *Sea A simétrico y W subespacio de dimensión finita en H.*
Si $g(A) > dim\, W$ entonces $A \cap W^{\perp} \neq \emptyset$.

Demostración: Como W tiene dimensión finita es claro que es cerrado en H. Por ende, tiene sentido hablar de su proyección ortogonal P_W. Procedemos por contraposición, supongamos que $A \cap W^{\perp} = \emptyset$. Esto implica que $P_W(A) \subset W \setminus \{0\}$. Por monotonía

$$g(P_W(A)) \leq g(W \setminus \{0\}) = dim\, W.$$

Observemos que toda función lineal es una función impar. Por el Teorema 1.2.3 P_W es un funcional impar y continuo. Aplicando monotonía concluimos que

$$g(A) \leq g(P_W(A)) \leq dim\, W.$$

□

Proposición 2.4.4. *Sea W subespacio de dimensión finita en H.*
Si $h : H \to H$ es un homeomorfismo impar entonces $g(W \cap h(\mathbb{S}_\rho)) = dim\, W$,
donde $\mathbb{S}_\rho := \{x \in H \,:\, \|x\| = \rho\} = \partial B_\rho(0)$ denota a la esfera de radio ρ.

Demostración: Sea $B_\rho(0)$ la bola abierta en H de radio ρ centrada en el origen. Al ser h impar, $0 \in W \cap h(B_\rho(0))$ y $W \cap h(B_\rho(0))$ es simétrico por la Proposición 2.0.2. Como h es homeomorfismo, $W \cap h(B_\rho(0))$ es abierto en W. Por la proposición anterior

$$g(\partial_W \, [W \cap h(B_\rho(0))]) = g(W \cap [\partial \, h(B_\rho(0))]) = dim\, W,$$

donde ∂_W hace referencia a que estamos tomando la frontera respecto al subespacio topológico W. Por último, notemos que h es un <u>homeomorfismo de H sobre H</u>, en consecuencia

$$\partial h(B_\rho(0)) = h(\partial B_\rho(0)) = h(\mathbb{S}_\rho).$$

Por lo tanto, $g(W \cap h(\mathbb{S}_\rho)) = dim\, W$.

□

El último argumento de la prueba anterior puede no ser cierto si h no es homeomorfismo de H sobre H. Por ejemplo, si hablamos de dos conjuntos $A, B \subset H$ y cualquier homeomorfismo $f : A \to B$ puede suceder que sus fronteras ∂A y ∂B ni si quiera tengan la misma cardinalidad.

El siguiente lema es la razón por la que escogemos $\mathscr{H}$ como en el Teorema 2.4.2.

Lema 2.4.5. *Sean V y W dos subespacios vectoriales cerrados de H tales que $dim W$, $codim V < +\infty$. Si $h : H \to H$ es un <u>mapeo acotado</u> y un homeomorfismo impar entonces*

$$dim W - codim V \leq g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap V]),$$

donde $codim V := dim(V^{\perp})$.

Demostración: Para obtener el resultado debemos de hacer algunas afirmaciones muy precisas.

Afirmamos que $h^{-1}(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V])$ es compacto. Observemos que $\mathbb{S}_\rho\cap V$ es la esfera de radio ρ en V. Esto implica que $h[\mathbb{S}_\rho\cap V]$ es cerrado (h^{-1} es continua) y acotada (h es un mapeo acotado). En consecuencia, como W es un espacio de dimensión finita, el teorema de Heine-Borel nos garantiza que $W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V]$ es compacto. Por ende, $h^{-1}(W\cap h(\mathbb{S}_\rho\cap V))$ es compacto.

Ahora afirmamos la existencia de un $\delta>0$ tal que

$$g(W\cap h(\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}))=g(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V]). \tag{2.4.4}$$

La continuidad del género nos garantiza que existe $\varepsilon>0$ tal que

$$g(\overline{B_\varepsilon(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V])})=g(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V]).$$

Observemos que h es uniformemente continua sobre (el compacto) $h^{-1}(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V])$. Esto quiere decir que existe $\delta>0$ suficientemente pequeño que satisface la contención

$$h[\overline{B_\delta(h^{-1}[W]\cap\mathbb{S}_\rho\cap V)}]=h[\overline{B_\delta(h^{-1}[W\cap h(\mathbb{S}_\rho\cap V)])}]\subset\overline{B_\varepsilon(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V])}, \tag{2.4.5}$$

podemos escoger $\delta<\rho$.
Como h es biyectiva

$$W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}]=h[h^{-1}(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}])]=h[h^{-1}[W]\cap\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}]$$

Es fácil comprobar que $h^{-1}[W]\cap\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}\subset\overline{B_\delta(h^{-1}[W]\cap\mathbb{S}_\rho\cap V)}$, usando la igualdad anterior se sigue que

$$W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}]=h[h^{-1}[W]\cap\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}]\subset h[\overline{B_\delta(h^{-1}[W]\cap\mathbb{S}_\rho\cap V)}].$$

Por está última contención y (2.4.5)

$$W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}]\subset h[\overline{B_\delta(h^{-1}[W]\cap\mathbb{S}_\rho\cap V)}]\subset\overline{B_\varepsilon(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V])}.$$

Utilizando la monotonía del género

$$g(W\cap h(\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}))\le g(\overline{B_\varepsilon(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V])})=g(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V]).$$

Por otro lado, como la imagen bajo h preserva contenciones, se sigue de la monotonía del género que

$$g(W\cap h(\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}))\ge g(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V]).$$

De esta manera,

$$g(W\cap h(\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}))=g(W\cap h[\mathbb{S}_\rho\cap V]).$$

Antes de continuar, observemos que podemos descomponer a la esfera de la siguiente manera

$$\mathbb{S}_\rho=\left[\mathbb{S}_\rho\cap B_\delta(V)\right]\cup\left[\mathbb{S}_\rho\cap B_\delta(V)^c\right], \tag{2.4.6}$$

donde $B_\delta(V)^c:=H\smallsetminus B_\delta(V)$ es cerrado. Luego, calculando la imagen de h y abriendo la unión se sigue que

$$h(\mathbb{S}_\rho)=h[\mathbb{S}_\rho\cap B_\delta(V)]\cup h[\mathbb{S}_\rho\cap B_\delta(V)^c]\subset h[\mathbb{S}_\rho\cap\overline{B_\delta(V)}]\cup h[\mathbb{S}_\rho\cap B_\delta(V)^c].$$

Después, intersectando con W y distribuyendo en la unión tenemos que

$$W \cap h(\mathbb{S}_\rho) = \left(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap \overline{B_\delta(V)}]\right) \cup \left(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap B_\delta(V)^c]\right).$$

Y por propiedades del género deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
dim W =& g(W \cap h(\mathbb{S}_\rho)) && \text{(Proposición 2.4.4)}\\
\le& g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap \overline{B_\delta(V)}]) + g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap B_\delta(V)^c]) && \text{(subaditividad)}\\
\le& g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap \overline{B_\delta(V)}]) + g(h[B_\delta(V)^c]) && \text{(monotonía)}\\
=& g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap \overline{B_\delta(V)}]) + g(B_\delta(V)^c) && \text{(invariancia)}\\
=& g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap V]) + g(B_\delta(V)^c). && (2.4.4)
\end{aligned}$$

Para obtener el resultado resta demostrar que $g(B_\delta(V)^c) = codim V$. Como escogimos $\delta \le \rho$, es fácil visualizar que $\mathbb{S}_\rho \cap V^\perp \subset B_\delta(V)^c$. Por la Proposición 2.4.4 y la monotonía del género,

$$codim V = dim(V^\perp) = g(\mathbb{S}_\rho \cap V^\perp) \le g(B_\delta(V)^c).$$

Por el Teorema 1.2.3 podemos deducir que

$$\|u - P_V u\| = \|P_{V^\perp} u\| \le \|P_{V^\perp}\|_{\mathscr{B}} \|u\| = \|u\|.$$

En consecuencia,

$$P_{V^\perp}[B_\delta(V)^c] \subset \{v \in V^\perp : \|v\| \ge \delta\} = V^\perp \smallsetminus B_\delta(0).$$

Observemos que la función

$$\rho : V^\perp \smallsetminus B_\delta(0) \to \mathbb{S}_\delta \cap V^\perp; \qquad \rho(v) := \delta \frac{v}{\|v\|}$$

es continua e impar. Por la Proposición 2.4.4 y la monotonía del género,

$$g(B_\delta(V)^c) \le g((\rho \circ P_{V^\perp})[B_\delta(V)^c]) \le g(\mathbb{S}_\delta \cap V^\perp) = dim(V^\perp) = codim V.$$

Total que $g(B_\delta(V)^c) = codim V$. Por lo tanto,

$$dim W \le g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap V]) + g(B_\delta(V)^c) = g(W \cap h[\mathbb{S}_\rho \cap V]) + codim V.$$

□

Teorema 2.4.6 (Bartolo, Benci y Fortunato)**.** *Sea H espacio de Hilbert. Supongamos que $J \in \mathscr{C}^1(H)$ es un funcional par que satisface $J(0) \ge 0$. Fijemos V y W dos subespacios vectoriales cerrados de H tales que*

$$dim W, codim V < +\infty \qquad y \qquad dim W \ge codim V.$$

Si J satisface $PS_{\mathbb{R}_{>0}}$ y existen constantes $J(0) < a < b$ y $\rho > 0$ tales que

$$\inf_{\mathbb{S}_\rho \cap V} J \ge a \qquad y \qquad \sup_W J < b$$

entonces J tiene al menos $m = dim W - codim V$ pares de puntos críticos distintos cuyos valores críticos están en el intervalo $[a, b]$.

Demostración: El caso $dim W = codim V$ es trivial, toda función tiene al menos 0 pares de puntos críticos. Supongamos que $dim W > codim V$. Para utilizar el teorema anterior denotamos $I = \mathbb{R}_{>0}$, $S = \mathbb{S}_\rho \cap V$ y $\mathscr{H}$ como en el Teorema 2.4.2.

Observemos que W es cerrado en H (porque $dim W < +\infty$) y es simétrico (por ser espacio vectorial), $g^*(W) = dim W < +\infty$ (por la Proposición 2.4.4) y $W \subset J^b$ por hipótesis. Falta verificar que el pseudo-género de W no es nulo para poder aplicar el Teorema 2.4.2.

Por el Teorema 2.4.5 y la invariancia del género tenemos que para toda $h \in \mathscr{H}$

$$m = dim W - codim V \leq g(W \cap h(\mathbb{S}_\rho \cap V)) = g(h^{-1}(W) \cap [\mathbb{S}_\rho \cap V]).$$

Como $h \in \mathscr{H}$ si y solo si $h^{-1} \in \mathscr{H}$, se tiene que $m \leq g^*(W)$. Por el Teorema 2.4.2 sabemos que

$$m \leq g^*(W) \leq \sum_{k=1}^{g^*(W)} g(K_{c_k})$$

donde $c_k \in [a,b]$ se define como en el Teorema 2.4.2. Al ser $a > J(0)$ es claro que $0 \notin K_{c_k}$ para cada valor crítico c_k. Por la Proposición 2.1.6 y la finitud del género, se sigue que

$$0 < m \leq \sum_{k=1}^{g^*(W)} g(K_{c_k}) < +\infty.$$

Por lo tanto, hay al menos m puntos críticos en J con valores críticos en $[a,b]$.

□

Observemos que si $V^\perp \subset W$ entonces la intersección $W \cap [\mathbb{S}_\rho \cap V]$ coincide con una esfera de dimensión $dim W - codim V$. Por la Proposición 2.2.4

$$g^*(W) \leq g(W \cap [\mathbb{S}_\rho \cap V]) = dim W - codim V = m.$$

Por lo cual, en ese caso $g^*(W) = m$.

Como nos interesa utilizar el Teorema 2.4.6 para demostrar que J tiene una infinidad de puntos críticos, lo que debemos de hacer es encontrar alguna sucesión (W_m) de subespacios de H y constantes $b_m > a$ tales que para toda $m \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\sup_{W_m} J < b_m, \qquad W_m < W_{m+1} \quad \text{y} \quad m = dim W_m - codim V. \tag{2.4.7}$$

De existir esa sucesión de subespacios podríamos concluir mediante el tercer inciso del Teorema 2.4.2 que el conjunto de valores críticos de J no puede estar acotado.

El siguiente capítulo vamos a construir los espacios apropiados para nuestro caso y verificaremos las hipótesis del Teorema 2.4.6.

Capítulo 3

Infinidad de Soluciones

Fijamos $N > 2$ entero positivo. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado y $p \in (2, 2^*)$ (donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ se le conoce como el exponente crítico de Sobolev). Fijamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y consideramos el problema

$$(\wp) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} .$$

3.1. Formulación Variacional del Problema

Definición 3.1.1. *Denotamos a la **forma bilineal asociada al problema** $(\wp)$ como*

$$B[u,v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv.$$

Definición 3.1.2. *Una **solución** de $(\wp)$ es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que cumple que para toda $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$*

$$(B[u,\varphi] :=) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi.$$

Definición 3.1.3. *Definimos al **funcional de energía** $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de $(\wp)$ de la siguiente manera*

$$J(u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p := \frac{1}{2}B[u,u] - \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

donde $|u|_p := (\int_\Omega |u|^p)^{1/p}$ denota a la norma de $L^p(\Omega)$.

Observemos que B es suma lineal de funciones bilineales, simétricas y continuas por entradas. Por linealidad de la derivada y las Proposiciones 1.4.3 y 1.4.4, el funcional J es $\mathscr{C}^2$ y sus derivadas están dadas por

$$J'(u)v = B[u,v] - \int_\Omega |u|^{p-2}uv \quad \text{y} \quad J''(u)[v,w] = B[v,w] - \int_\Omega |u|^{p-2}vw.$$

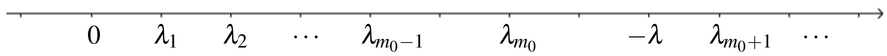

Figura 3.1: Gráfica de λ_{m_0} cuando $\lambda < -\lambda_1$.

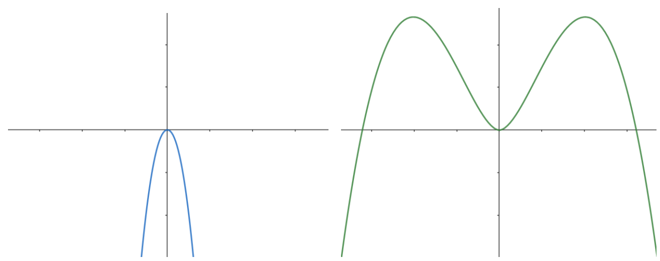

Figura 3.2: Gráfica (no a escala) de J_{e_k} para los casos $k \leq m_0$ (azul) y $k > m_0$ (verde) respectivamente.

En consecuencia,

$$J'(u) = 0 \iff u \text{ es solución de } (\wp).$$

Ahora consideremos a las sucesión de funciones propias (e_k) y sus respectivos valores propios (λ_k) del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ (Teorema 1.3.7). Sea $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $-\lambda \in [\lambda_{m_0}, \lambda_{m_0+1})$ (Figura 3.1) donde denotamos $\lambda_0 := -\infty$ y $[\lambda_0, \lambda_1) := (-\infty, \lambda_1)$.

Para fines ilustrativos, podemos visualizar la geometría de J fijando a $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ y considerando a la función $J_{e_k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$J_{e_k}(t) := J(te_k) = \frac{t^2}{2} B[e_k, e_k] - \frac{|t|^p}{p} |e_k|_p^p.$$

La Figura 3.1 nos sugiere que

$$k \leq m_0 \Rightarrow B[e_k, e_k] = (\lambda_k + \lambda) \leq 0 \qquad \text{y} \qquad k > m_0 \Rightarrow B[e_k, e_k] = (\lambda_k + \lambda) > 0.$$

Al ser $p > 2$, la gráfica de J_{e_k} toma la forma de la Figura 3.2. Estas observaciones nos motivan a construir los siguientes subespacios.

Para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ podemos considerar a los subespacios de $H_0^1(\Omega)$

$$V = \overline{lin(e_k)_{k > m_0}}, \qquad W_m = lin(e_k)_{k \leq m_0 + m}.$$

Notemos que para $m_0 = 0$ tenemos que $V = H_0^1(\Omega)$ y $W_0 = \{0\}$.

Con todo lo anterior es claro que para $m > 0$ se cumplen las primeras tres condiciones del Teorema 2.4.6. En la siguiente sección vamos a demostrar las otras dos hipótesis restantes.

3.2. Hipótesis del Teorema 2.4.6

El siguiente resultado nos dice que podemos encontrar una equivalencia de normas en el subespacio, V, generado por las funciones propias e_k tales que $\lambda_k + \lambda > 0$.

Proposición 3.2.1. *La forma bilineal asociada al problema*

$$B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad ; \qquad B[u,v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv$$

es un producto interno en $V := \overline{lin(e_k)_{k>m_0}}$ *que induce una norma equivalente a la norma* $\|\cdot\|_0$.

Demostración: Si $\lambda \geq 0$ entonces el Teorema 1.3.8 nos garantiza el resultado. Supongamos que $\lambda < 0$. Si $u = \sum_{i>m_0}^m u_i e_i$, el Teorema 1.3.7 asegura que

$$\|u\|_0^2 = \sum_{i>m_0}^m u_i^2 \|e_i\|_0^2 = \sum_{i>m_0}^m u_i^2 \lambda_i = \sum_{i>m_0}^m u_i^2 \lambda_i |e_i|_2^2 \geq \sum_{i>m_0}^m u_i^2 \lambda_{m_0+1} |e_i|_2^2 = \lambda_{m_0+1} |u|_2^2.$$

Al ser $V = \overline{lin(e_k)_{k>m_0}}$ concluimos que para toda $u \in V$

$$\|u\|_0^2 \geq \lambda_{m_0+1} |u|_2^2.$$

En consecuencia, como $\lambda < 0 < \lambda_{m_0+1}$,

$$\|u\|_0^2 = B[u,u] - \lambda |u|_2^2 \leq B[u,u] - \frac{\lambda}{\lambda_{m_0+1}} \|u\|_0^2.$$

Puesto que $-\lambda < \lambda_{m_0+1}$, se tiene que $c_1 := 1 + \frac{\lambda}{\lambda_{m_0+1}} > 0$ y de la desigualdad anterior se obtiene

$$c_1 \|u\|_0^2 \leq B[u,u].$$

Es claro que $B[u,u] \leq \|u\|_0^2$. De esta manera, existe $c_2 \geq 1$ tal que para toda $u \in V$

$$c_1 \|u\|_0^2 \leq B[u,u] \leq c_2 \|u\|_0^2.$$

Esto demuestra que, si $u \in V$, entonces $B[u,u] = 0$ si y solo si $u = 0$, y también demuestra que ambas normas son equivalentes en V.

□

Ahora tenemos todo lo necesario para verificar las hipótesis del Teorema 2.4.6. Es claro que $H_0^1(\Omega)$ es espacio de Hilbert, $J(0) = 0$ y $J \in \mathscr{C}^1(H_0^1(\Omega))$ es par. Por construcción, V y W_m son dos subespacios vectoriales cerrados de H tales que $dim W_m, codim V < +\infty$. Resta verificar dos propiedades.

Lema 3.2.2. *Para* $m \geq 0$ *existen constantes* $J(0) = 0 < a < b_m$ *y* $\rho > 0$ *tales que*

$$\inf_{\mathbb{S}_\rho \cap V} J \geq a \qquad y \qquad \sup_{W_m} J < b_m.$$

Demostración: Sea $v \in V$, por la equivalencia de la Proposición 3.2.1 y la desigualdad de Poincairé (Teorema 1.3.3) existen constantes $d_1, d_2 > 0$ que satisfacen

$$d_1 \|v\|_0^2 \leq B[v,v] \qquad \text{y} \qquad |v|_p \leq d_2 \|v\|_0$$

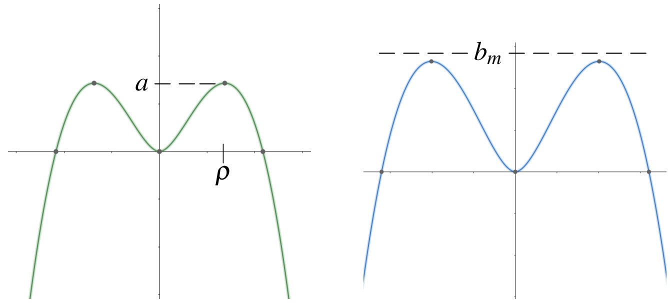

Figura 3.3: Gráficas (no a escala) de q (verde) y f (azul) respectivamente.

respectivamente. En consecuencia,

$$\frac{d_1}{2}\|v\|_0^2 - \frac{d_2^p}{p}\|v\|_0^p \leq \frac{1}{2}B[v,v] - \frac{1}{p}|v|_p^p = J(v).$$

Si definimos a la función continua $q(t) := \frac{d_1}{2}t^2 - \frac{d_2^p}{p}|t|^p$, la desigualdad anterior nos dice que $q(\|v\|_0) \leq J(v)$. De hecho, como $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ y $p > 2$, la gráfica de q tiene la misma forma que la de J_{e_k} cuando $k > m_0$ (Figura 3.2). Por lo que basta con escoger ρ (como el punto crítico) y a (fijando cualquier valor del intervalo $(0, q(\rho)]$) como se muestra en la Figura 3.3. Más rigurosamente, podemos hacer la cuenta para verificar que en efecto q tiene un máximo en $\left(d_1/d_2^p\right)^{\frac{1}{p-2}}$. Entonces escogemos a las constantes a como un máximo de q y a ρ como su respectivo valor crítico

$$\rho = \left(\frac{d_1}{d_2^p}\right)^{\frac{1}{p-2}} \qquad \text{y} \qquad a = q(\rho).$$

Es fácil de ver que a y ρ satisfacen lo que buscábamos, dado cualquier $v \in \mathbb{S}_\rho \cap V$

$$a = q(\rho) = q(\|v\|_0) \leq J(v).$$

Al ser el ínfimo la cota inferior más grande

$$a \leq \inf_{\mathbb{S}_\rho \cap V} J.$$

Por otro lado, sea $w \in W_m$. Sabemos por un resultado de análisis matemático que todas las normas son equivalentes en un espacio de dimensión finita. En consecuencia, existe una constante $b > 0$ (que depende de m) tal que se cumple la siguiente desigualdad

$$b\|w\|_0 \leq |w|_p. \tag{3.2.1}$$

Si $\lambda \geq 0$ entonces el Teorema 1.3.8 asegura que existe $c > 1$ tal que $B[w,w] \leq c\|w\|_0^2$. Si $\lambda < 0$ es claro que $B[w,w] = \|w\|_0^2 + \lambda|w|_2^2 \leq \|w\|_0^2$. En cualquier caso, existe $c > 1$ tal que para toda $w \in W_m$

$$B[w,w] \leq c\|w\|_0^2.$$

Utilizando ambas desigualdades, deducimos que

$$J(w) = \frac{1}{2}B[w,w] - \frac{1}{p}|w|_p^p \leq \frac{c}{2}\|w\|_0^2 - \frac{b^p}{p}\|w\|_0^p = f(\|w\|_0)$$

donde $f(t) := \frac{c}{2}t^2 - \frac{b^p}{p}|t|^p$. Al ser $p > 2$, f está acotada superiormente, es decir, existe $b_m > 0$ tal que $f(t) < b_m$ para toda $t \geq 0$. Por lo tanto, para toda $w \in W_m$

$$J(w) \leq f(\|w\|_0) < b_m.$$

□

Lema 3.2.3. *J satisface $PS_{\mathbb{R}_{>0}}$.*

Demostración: Sean $c \geq 0$ y (u_k) una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ tal que $J(u_k) \to c$ y $J'(u_k) \to 0$. En consecuencia,

$$\left\|J'(u_k)\right\|_{\mathscr{B}} \to 0 \quad \text{y} \quad J(u_k) \to c.$$

Como $|J'(u_k)u_k| \leq \|J'(u_k)\|_{\mathscr{B}} \|u_k\|_0$ se sigue que para k suficientemente grande

$$J(u_k) \leq c+1 \quad \text{y} \quad |J'(u_k)u_k| \leq \|u_k\|_0. \tag{3.2.2}$$

Observemos que para $q \in (2,p)$ arbitrario

$$\begin{aligned} J(u_k) - \frac{1}{q}J'(u_k)u_k &= \frac{1}{2}B[u_k,u_k] - \frac{1}{p}|u_k|_p^p - \frac{1}{q}B[u_k,u_k] + \frac{1}{q}|u_k|_p^p = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)B[u_k,u_k] + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|u_k|_p^p = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\lambda|u_k|_2^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|u_k|_p^p. \end{aligned}$$

Sustituyendo las desigualdades de (3.2.2) se sigue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\lambda|u_k|_2^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|u_k|_p^p \leq c+1+\|u_k\|_0. \tag{3.2.3}$$

Afirmamos que la sucesión (u_k) es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Notemos que si $\lambda \geq 0$ entonces por la desigualdad (3.2.3) deducimos lo siguiente

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\lambda|u_k|_2^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|u_k|_p^p \leq c+1+\|u_k\|_0.$$

Por otro lado, supongamos que $\lambda < 0$. Por la Proposición 1.1.3, existe $b > 0$ tal que $|u|_2^2 \leq b|u|_p^2$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\lambda|u_k|_2^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|u_k|_p^p \geq \\ &\qquad \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\lambda b|u_k|_p^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|u_k|_p^p := \\ &\qquad := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 + Q(|u_k|_p). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

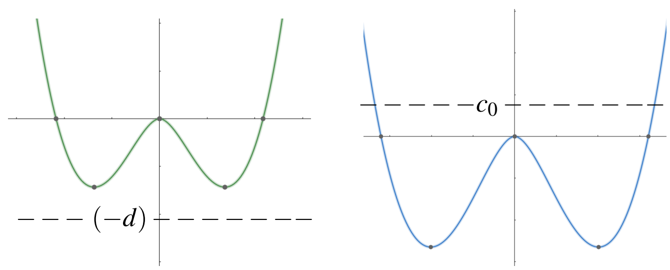

Figura 3.4: Gráficas (no a escala) de Q (verde) y f (azul) respectivamente.

donde $Q(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\lambda b t^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|t|^p$ (Gráfica 3.4). Como $p > 2$, Q está acotada inferiormente, es decir, existe $d > 0$ tal que $Q(t) \geq -d$ para toda $t \geq 0$. Utilizando las desigualdades (3.2.4) y (3.2.3) deducimos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 - d \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 + Q(|u_k|_p) \leq c + 1 + \|u_k\|_0 .$$

En ambos casos, concluimos que existe una constante $c_0 \geq (c+1+d)$ tal que

$$f(\|u_k\|_0) := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_k\|_0^2 - \|u_k\|_0 \leq c_0.$$

donde $f(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)t^2 - |t|$ (Gráfica 3.4). Como $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, concluimos que $(\|u_k\|_0)$ debe de estar acotada.

Por el Teorema 1.2.3 existen únicos $v_k \in V$ y $w_k \in W_0$ tales que $u_k = v_k + w_k$. Como (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$, las sucesiones (v_k) y (w_k) también están acotadas en V y W_0 respectivamente. Dado que W_0 es un espacio de dimensión finita, el teorema de Heine-Borel nos asegura que existe $w \in W_0$ y una subsucesión tal que $w_k \to w$ fuertemente en W_0. Por el Teorema 1.2.6 se sigue que existe $v \in V$ y una subsucesión (de la subsucesión anterior) tal que $v_k \rightharpoonup v$ débilmente en V. Pasando de nuevo a una subsucesión, el Teorema 1.3.5 nos garantiza que $v_k \to v$ fuertemente en $L^2(\Omega)$ y en $L^p(\Omega)$. De esta manera, denotando $u := v + w$, se cumple que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y $u_k \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$.

Antes de continuar vamos a hacer algunas observaciones. Como $\|J'(u_k)\|_{\mathscr{B}} \to 0$ sabemos que para toda $z \in H_0^1(\Omega)$

$$|J'(u_k)z| \leq \left\|J'(u_k)\right\|_{\mathscr{B}} \|z\|_0 \to 0, \tag{3.2.5}$$

esto quiere decir que $J'(u_k)z = o(1)$. Por la Proposición 1.4.4 y la convergencia fuerte de (u_k) en $L^p(\Omega)$ tenemos que para toda $z \in H_0^1(\Omega)$

$$J'(u)z = B[u,z] - \int\limits_{\Omega} |u|^{p-2}uz = \lim_{k\to+\infty} B[u_k,z] - \lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\Omega} |u_k|^{p-2}u_k z = \lim_{k\to+\infty} J'(u_k)z = 0, \tag{3.2.6}$$

esto nos dice que u es un punto crítico de J. La misma convergencia en $L^p(\Omega)$ nos garantiza que la sucesión $(|u_k|_p^{p-1}+|u|_p^{p-1})$ es acotada, sea $b>0$ una cota. Utilizando la desigualdad de Hölder (Teorema 1.1.2) y que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u)(u_k-u)\right| &\leq \int_\Omega |u_k|^{p-1}|u_k-u| + \int_\Omega |u|^{p-1}|u_k-u| \leq \\ &\leq (|u_k|_p^{p-1}+|u|_p^{p-1})|u_k-u|_p \leq b|u_k-u|_p \to 0. \quad (3.2.7)\end{aligned}$$

Como $w_k \to w$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ es claro que

$$\lim_{k\to+\infty} B[w_k-w,w_k-w] = \lim_{k\to+\infty} \|w_k-w\|_0^2 + \lim_{k\to+\infty} \lambda|w_k-w|_2^2 = 0,$$

es decir, $B[w_k-w,w_k-w]=o(1)$. Luego, por bilinealidad de B y la ortogonalidad entre V y W_0 en $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$,

$$B[u_k-u,u_k-u] = B[v_k-v,v_k-v] + B[w_k-w,w_k-w] = B[v_k-v,v_k-v]+o(1). \quad (3.2.8)$$

Utilizando (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) y (3.2.8) deducimos que

$$\begin{aligned}o(1) = (J'(u_k)-J'(u))[u_k-u] =& B[u_k-u,u_k-u] - \int_\Omega (|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u)(u_k-u) = \\ =& B[v_k-v,v_k-v] + o(1) \geq d\,\|v_k-v\|_0^2 + o(1),\end{aligned}$$

donde $d>0$ es la constante de la Proposición 3.2.1. Esto prueba que $v_k \to v$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, $u_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$.

□

3.3. Conclusión

Teorema 3.3.1. *Fijamos $N>2$ entero positivo. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado y $p \in (2,2^*)$ (donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ se le conoce como el exponente crítico de Sobolev). Fijamos $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces existe una infinidad de soluciones para el siguiente problema*

$$(\wp)\ \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} .$$

Demostración: Sea $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ arbitrario. A estas alturas es claro que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. Sea $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ el funcional de energía de $(\wp)$

$$J(u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p.$$

Como mencionamos al principio del capítulo, J es un funcional par y continuamente diferenciable ($\mathscr{C}^1(H_0^1(\Omega))$), que satisface $J(0)=0$.

Ahora consideremos a las sucesiones (e_k) y (λ_k) de funciones propias y valores propios del $-\Delta$ como en el Teorema 1.3.7. Sea $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\lambda \in (-\lambda_{m_0+1}, -\lambda_{m_0}]$ donde denotamos $\lambda_0 := -\infty$ y $(-\lambda_1, -\lambda_0] := (-\lambda_1, +\infty)$. Construimos los siguientes subespacios cerrados de $H_0^1(\Omega)$

$$V = \overline{lin(e_k)_{k>m_0}}, \qquad W_m = lin(e_k)_{k\leq m_0+m}.$$

Por construcción, $dim W_m = m_0 + m$ y $codim V = dim W_0 = m_0$. Así, $codim V \leq dim W_m$. Por el Lema 3.2.2, existen constantes $J(0) = 0 < a < b_m$ y $\rho > 0$ tales que

$$\operatorname*{ínf}_{\mathbb{S}_\rho \cap V} J \geq a > 0 \qquad \text{y} \qquad \sup_{W_m} J < b_m.$$

Por último, observemos que J satisface la condición de Palais-Smale en $\mathbb{R}_{>0}$ (por el Lema 3.2.3). Por todas las observaciones anteriores podemos aplicar el teorema de Bartolo, Benci y Fortunato (Teorema 2.4.6). Este teorema nos asegura que existen

$$dim W_m - codim V = (m_0 + m) - m_0 = m$$

pares de puntos críticos (distintos) no-nulos del funcional J y sus respectivos valores críticos están en el intervalo $[a, +\infty)$. Como $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es arbitrario, concluimos que para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existe m pares de soluciones (distintas) no-triviales a $(\wp)$.

Por lo tanto, existe una infinidad de soluciones para el problema $(\wp)$. Además, por el Teorema 2.4.2 sus valores críticos no están acotados.

□

En [14] se demuestra la existencia de un estado fundamental para el problema $(\wp)$. Además, en ese mismo artículo se prueba de que si $\lambda > -\lambda_1$ entonces:

- Existe al menos una solución que cambia de signo.
- Si u es estado fundamental de $(\wp)$ entonces $u > 0$ o $u < 0$.

En [16, Theorem 1.19] se demuestra que para el caso $\lambda \leq -\lambda_1$ no existen soluciones no-triviales positivas. La prueba de esa última afirmación parte del hecho de que $e_1 > 0$.

Bibliografía

[1] Ambrosetti, Antonio; Rabinowitz, Paul H.: Dual variational methods in critical point theory and applications. Journal of Functional Analysis 14 (1973), no. 4, 349-381. ISSN: 0022-1236. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7.

[2] Bartolo, P.; Benci, V.; Fortunato, D.: Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with “strong” resonance at infinity. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 7 (1983), no. 9, 981-1012. ISSN: 0362-546X. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90115-3.

[3] Borsuk, Karol: Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. Fundamenta Mathematicae 20 (1933), no. 1, 177-190.

[4] Brézis, Haïm: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. First edition. Universitext. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7.

[5] Clapp, Mónica: Análisis Matemático. Segunda edición. Colección Papirhos, Serie Textos, Núm. 2, Instituto de Matemáticas de la UNAM, México, 2017.

[6] Clapp, Mónica: Métodos Variacionales en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Notas del curso impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM, noviembre 2019.

[7] Courant, Richard: Dirichlet’s Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces. First edition. Springer, 1950, DOI: 10.1007/978-1-4612-991.

[8] Evans, Lawrence C.: Partial Differential Equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics v. 19. American Mathematical Society, 2010.

[9] Krasnoselskii, M.A.: Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. International series of monographs on pure and applied mathematics 45 (1964). Translated by A. H. Armstrong; translation edited by J. Burlak. Traducción del original ruso (Moscow, 1956).

[10] Lang, Serge: Introduction to Differentiable Manifolds. First edition. Universitext. Springer-Verlag New York, 2002. DOI: https://doi.org/10.1007/b97450.

[11] Rabinowitz, Paul H.: Variational Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems. Eigenvalues of Non-Linear Problems. Edited by G. Prodi. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, 139-195. ISBN: 978-3-642-10940-9. DOI: 10.1007/978-3-642-10940-9_4.

[12] Rudin, M.: A new proof that metric spaces are paracompact. 1969.

[13] Schwartz, Jacob T.: Nonlinear Functional Analysis. Notes on mathematics and its applications. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1969.

[14] Struwe, Michael: Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Fourth edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics Vol. 34. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-74013-1.

[15] Szulkin, Andrzej; Weth, Tobias: The method of Nehari manifold. Handbook of Nonconvex Analysis and Applications (January 2010).

[16] Willem, Michel: Minimax theorems. First Edition. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications Vol. 24. Birkhäuser Boston, 1996. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1.