



**Universidad Nacional Autónoma de
México**
Posgrado en Ciencias Físicas
Maestría en Ciencias (Física)

**ANÁLISIS TEÓRICO SOBRE LA PRECISIÓN
DE UN GRAVÍMETRO ATÓMICO:
VIBRACIONES Y ALINEACIÓN ÓPTICA**

Tesis

Que para optar por el grado de:

Maestro en Ciencias (Física)

Presenta:

Roberto Áxel Román Morales

Tutor Principal de Tesis:
Dr. Ricardo Méndez Fragoso
Facultad de Ciencias
Ciudad Universitaria, CD. MX. 2021
Noviembre



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mis padres Roberto y Socorro cuya confianza, paciencia, comprensión y apoyo han sido indispensables para alcanzar mis metas.

A mis hermanos Astrid e Ivan que siempre me han apoyado de una u otra forma.

A mis abuelas Noe y Luz, quienes me cuidaron y criaron en distintas etapas de mi vida.

A mis tías y primos, que han sido parte vida.

Al Dr. Ricardo Méndez Fragoso quien asesoro y atendió mis dudas a lo largo de todo este trabajo.

Y a la UNAM por haberme brindado los medios necesarios para mi desarrollo académico y personal.

Se agradece el apoyo otorgado por CONACYT, así como por los proyectos DGAPA PAPIME PE 103021 y PAPIIT IN112721 para la elaboración de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	3
2. Funcionamiento de un interferómetro atómico	7
2.1. Diferencias de fase	7
2.2. Interferometría cuántica	16
3. Enfriamiento y atrapamiento láser	31
3.1. Trampa Magneto Óptica	31
3.2. Relojes atómicos y gravimetría	40
4. Algunas fuentes de ruido y errores sistemáticos	43
4.1. Aislamiento de vibraciones	43
4.2. Fuentes de ruido	46
4.3. Sensibilidad en la alineación óptica de los espejos	50
5. Aplicaciones de un gravímetro cuántico	55
5.1. Variaciones de gravedad	55
6. Discusión y conclusiones	67
Bibliografía	73

Resumen

El objetivo de éste trabajo es analizar la sensibilidad de un gravímetro atómico a variaciones de algunos de sus parámetros. En particular estudiamos los desajustes en el arreglo del espejo y láseres que son parte del sistema de preparación y medición, buscando entender cómo pueden influir en las mediciones del gravímetro.

Para lograrlo, se ha realizado un estudio teórico del funcionamiento del gravímetro y se ha identificado que las inclinaciones y vibraciones del espejo, así como el desalineamiento de los haces láser, producen variaciones en la intensidad de la luz que interactúa con los átomos del sistema, lo cual tiene un impacto en el valor de la gravedad detectado. Esto nos ha permitido estimar en valores porcentuales la relevancia que tienen estos efectos en las mediciones lo cual pretende servir como una guía para futuros experimentos o realizar correcciones en el sistema de control del gravímetro. Cabe mencionar que el gravímetro que se ha estado desarrollando tendrá un uso público, ya sea por instituciones públicas o particulares, por lo que es de vital importancia establecer el régimen de trabajo con la finalidad de garantizar las mediciones que se realicen por grupos externos a los que fabricaron el gravímetro.

Introducción

La medición de patrones de medida y constantes es relevante para el estudio y desarrollo general de la ciencia y tecnología. En particular la medición de la intensidad del campo gravitatorio o coloquialmente llamada gravedad, repercute directamente en la mayoría de las ingenierías, mecánica clásica, dinámica de fluidos, industria minera, etc. [1].

Los instrumentos empleados para realizar mediciones de la gravedad (g) son llamados gravímetros. Existen gravímetros que funcionan de maneras muy distintas, sin embargo, de manera general podemos clasificar a los gravímetros en dos grandes grupos que se describen a continuación [2].

Gravímetros relativos

Estos instrumentos determinan las variaciones del valor de g en distintas regiones con respecto a un valor de g de referencia. Los valores de referencia son medidos en estaciones de servicio de la Red Internacional de Estandarización de la Gravedad (IGSN por sus siglas en inglés) a partir de las que deben calibrarse los gravímetros relativos.

El mecanismo básico del funcionamiento de los gravímetros relativos actuales es el de la suspensión de un objeto en un resorte. La masa del objeto es previamente conocida de modo que para calibrar el aparato se suspende en un resorte de tal modo que se encuentre el sistema en equilibrio. Esto se logra estirando o contrayendo el resorte hasta su longitud natural. Esta longitud natural dependerá del peso del objeto que será proporcional al valor local de g , de modo que, si movemos el sistema a un lugar con un valor diferente de g el resorte encontrará una nueva longitud. De modo que, con medir la nueva longitud del resorte podemos determinar la diferencia del valor de g en esa región. Entre los gravímetros de este tipo podemos mencionar los siguientes:

- Gravímetro de LaCoste-Romberg: En este la masa esta fijada a una varilla articulada y a un resorte de tensión variable de tal modo que la fuerza sobre el peso esté equilibrada por la componente vertical del resorte, sea cual sea la posición de la varilla. El sistema se calibra para que esté en equilibrio en una posición conocida, de tal manera que los cambios en g producirán variaciones en la posición de la masa requiriendo un ajuste en

la tensión del resorte. Los cambios de la tensión del resorte permiten a su vez conocer las variaciones del valor de g [3].

- **Gravímetro superconductor:** Aquí los resortes y la masa suspendida son sustituidos por una esfera superconductora que levita fija en su sitio, de manera estable, por campos magnéticos inducidos de tal modo que la esfera se encuentra perfectamente centrada en una posición conocida (una vez calibrado). Si llevamos el gravímetro a un lugar donde el valor de g sea diferente al de la calibración, entonces la esfera se moverá y dejará de estar centrada. Para volver a centrar la esfera se ajustan las corrientes que generan los campos magnéticos de tal modo que vuelvan a centrar la esfera. Los cambios en las corrientes modifican el campo magnético y esto a su vez regresa la esfera a su posición de levitación original, modificando las fuerzas que contrarrestan la variación del campo gravitacional. Los campos magnéticos que actúan como resortes suelen ajustarse de tal modo que la resistencia sea lo suficientemente baja para obtener el máximo desplazamiento posible, lo cual permite a estos aparatos conseguir precisión de $nGal$ ¹ [4].

Gravímetros absolutos

Estos miden la aceleración local de la gravedad, g , en cada región sin la necesidad de hacer a una medición de referencia en algún otro lugar. El mecanismo básico de funcionamiento de los gravímetros absolutos actuales es el de un objeto en caída libre cuyo movimiento es medido por un interferómetro. Entre los gravímetros de este tipo podemos mencionar los siguientes:

- **Gravímetro de reflector de esquina:** Este aparato consiste en un interferómetro láser que monitorea un retroreflector de esquina en caída libre. El haz láser pasa por un divisor de haz y es dividido, tomando cada parte del haz un camino diferente. Una parte del haz va a un retroreflector de esquina que se encuentra fijo, la otra parte va a un retroreflector en caída libre, de tal modo que el haz reflejado por cada retroreflector se encuentren en una región donde son recombinados y detectados. Al tomar cada haz caminos diferentes se formará un patrón de interferencia y, como la distribución local del entorno repercutirá en el campo gravitacional local entonces cambiará el tiempo de caída y con esto el valor de g [5].
- **Gravímetro atómico interferométrico:** En este instrumento, dependiendo del arreglo una nube de átomos es lanzada verticalmente o dejada caer. Posterior a esto el estado cuántico de la nube atómica es preparado en una superposición de dos estados. En el proceso de preparación el cambio del estado interno de energía de los átomos es acompañado por un cambio en el momento de la función de onda atómica debido a la absorción de un par de fotones. Por esta razón, las funciones de onda asociadas a cada estado de la superposición siguen caminos distintos y en su camino cada estado adquirirá una fase debida al campo, al medir esta diferencia de fases se puede determinar el valor de g que el sistema completo ha experimentado [6].

¹En el área de gravimetría es común encontrar que la unidad de medición sea el *Gal* que equivale a 1 cm/s^2 . De esta manera, la aceleración de la gravedad que usualmente se tiene en la Ciudad de México es de 981 Gal .

Los gravímetros de alta precisión requieren de un alto control de las variables involucradas, por lo que en este trabajo estudiaremos y caracterizaremos el funcionamiento de un gravímetro atómico, el cual es parte de las llamadas tecnologías cuánticas. Estas nuevas tecnologías permiten organizar y controlar los componentes de un sistema en el que las interacciones cuánticas deben ser tomadas en cuenta, en contraste con la tecnología clásica, la cual se entiende dentro del marco de la mecánica clásica. Las tecnologías cuánticas han nacido gracias a que el avance científico y tecnológico nos ha permitido no solo observar los fenómenos que suceden a escalas pequeñas, sino manipularlos para que tengan un impacto en nuestro mundo a favor de nuestros intereses.

Con la llegada de la mecánica cuántica, y la consecuente utilización de la ecuación de Schrödinger, permitió entender el comportamiento de los electrones, y esto a su vez dio la pauta para entender como se forman los átomos. Esto dio permitió comprender la formación de la tabla periódica, entender nuevos fenómenos, hacer nuevos descubrimientos de elementos químicos, manipular estados internos de átomos, etc. Gracias a esto es posible manipular reacciones químicas y estructuras electrónicas que permitan la construcción de semiconductores, a través de los que fue posible construir y miniaturizar chips para computadoras y comenzar toda la era de la información. Además, la dualidad onda-partícula de la luz y el efecto fotoeléctrico permitió el desarrollo de la tecnología láser o de otros aparatos que hoy en día son de uso común, como las celdas solares o máquinas fotocopadoras, este proceso es llamado la “primera revolución cuántica”. Con el tiempo se desarrollaron muchos dispositivos, pero en ellos no se ocupan aún la gran mayoría de los fenómenos que predice la mecánica cuántica, principalmente por limitaciones tecnológicas. Décadas después, se ha logrado desarrollar tecnología que permite manipular estados internos los sistemas atómicos y se han logrado realizar nuevos descubrimientos que proporcionan un mejor entendimiento de la mecánica cuántica. Hoy en día tenemos sistemas de medición que no dependen de artefactos físicos y por medio de constantes fundamentales de la naturaleza se ha redefinido el Sistema Internacional de Unidades (SI), [7, 8]. Esto ha permitido construir una nueva generación de aparatos con una precisión nunca antes pensada. En particular, los gravímetros atómicos son parte de la llamada “segunda revolución cuántica”, llamada así debido a que la tecnología actual permite manipular y controlar componentes de sistemas físicos mucho más complejos, que han requerido de la tecnología desarrollada en la primera revolución cuántica, y que además no dependen de una calibración de referencia. Estos nuevos dispositivos utilizan el conocimiento que se ha obtenido en el proceso de definir las constantes universales de medición en el SI. Algunos otros ejemplos de tecnologías cuánticas son la tecnología de computación e información cuántica, algoritmos cuánticos, criptografía cuántica, electrónica cuántica, circuitos superconductores, fotónica cuántica, interferometría atómica, etc [9].

Una de las partes más importantes de un gravímetro atómico es la región de medición, en la que el sistema atómico es manipulado para emular el funcionamiento de un interferómetro, razón por la que es llamado un interferómetro atómico. En este trabajo se hará un estudio teórico del gravímetro, centrándonos en el manejo de errores, buscando ofrecer una guía útil desde el punto de vista teórico en la construcción y uso de un gravímetro atómico, así como para futuros experimentos.

El presente trabajo esta estructurado básicamente en dos partes, el funcionamiento general

de un gravímetro, y fuentes de error y potenciales aplicaciones. En el capítulo 2 estudiaremos la teoría general y los principios de funcionamiento del gravímetro atómico. En el capítulo 3 se estudiarán los mecanismos de enfriamiento y atrapamiento atómico necesarios para generar la medición de la aceleración de la gravedad, g . En el capítulo 4 estudian fuentes de error relacionadas con las partes o mecanismos involucrados en el funcionamiento del gravímetro atómico. En el capítulo 5 se muestra y estudian algunos modelos interesantes para el estudio de variaciones en la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre con la finalidad de mostrar las potenciales aplicaciones de un gravímetro atómico. Finalmente, en el capítulo 6 se muestra la discusión y conclusiones de la presente contribución.

Funcionamiento de un interferómetro atómico

El mecanismo básico en el que se basan los gravímetros atómicos es el de dispersión Raman [6] y una adaptación del funcionamiento de un interferómetro tipo Mach-Zehnder que se utiliza en óptica, pero aplicado a estados atómicos. El proceso anterior consiste en que un átomo es iluminado por dos haces láser contra-propagantes, los cuales modifican tanto su estado interno como su cantidad de momento, realizando una transición desde un estado inicial $|g, \mathbf{p}\rangle$ a un estado final $|e, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle$ donde $\mathbf{k}_{eff} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ es la diferencia entre el vector de onda de los láseres y las transiciones que suelen ser entre dos estados hiperfinos. Basado en esto, se usa una secuencia de pulsos que “divide”, “refleja” y “recombina” una nube de átomos dirigiendo porciones iguales en diferentes caminos A y B de modo que cada porción adquiere una fase ϕ_A y ϕ_B , con lo cual, el sistema atómico original adquiere una diferencia de fase $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A$. Cuando no hay influencias adicionales, esta diferencia de fase es nula, sin embargo, cuando se realiza en un campo gravitacional el resultado es que el sistema adquiere una fase resultante $\Delta\phi = \mathbf{k}_{eff}gT^2$ a partir de la cual podemos determinar el valor de g . En el presente capítulo se describirá este proceso mediante la teoría referente a las diferencias de fase obtenidas de la teoría de integral de camino, así como la implementación a través de un proceso interferométrico.

2.1. Diferencias de fase

Para calcular la diferencia de camino entre dos estados recurrimos a la teoría de integral de camino. Consideremos el estado de un sistema a un tiempo inicial t_a representado por $|\psi(t_a)\rangle$, y al aplicar el operador de evolución temporal, $\hat{U}(t_b, t_a) = e^{-\frac{i(t_b-t_a)}{\hbar}\hat{H}}$ podemos determinar el estado del sistema a un tiempo t_b [10, 11]

$$|\psi(t_b)\rangle = \hat{U}(t_b, t_a) |\psi(t_a)\rangle. \quad (2.1)$$

Al proyectar la expresión anterior en el espacio de posiciones, podemos escribirla como

$$\psi(x_b, t_b) = \int K(x_b, t_b; x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a, \quad (2.2)$$

donde $K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b | \hat{U}(t_b, t_a) | x_a \rangle$ es llamado el propagador, el cual transfiere al sistema de (x_a, t_a) a (x_b, t_b) . El operador de evolución temporal posee una propiedad de composición que podemos usar para escribir la evolución como una serie de pasos en el tiempo

$$\hat{U}(t_{N+1}, t_0) = \hat{U}(t_{N+1}, t_N) \hat{U}(t_N, t_{N-1}) \dots \hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_0) \quad (2.3)$$

donde $t_{N+1} = t_b$ y $t_0 = a$. Cuando proyectamos esta expresión en el espacio de posiciones obtenemos

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int K(x_b, t_b; x_N, t_N) \dots K(x_2, t_2; x_1, t_1) K(x_1, t_1; x_a, t_a) dx_1 \dots dx_N. \quad (2.4)$$

El producto de los propagadores puede interpretarse como una serie de pasos que se dan para llegar de un punto a otro, de modo que la integración de todos estos consiste en sumar todas las posibles trayectorias que unen los puntos inicial y final. Para conocer la forma de los propagadores consideremos uno de ellos que nos lleva de (x_j, t_j) a (x_{j+1}, t_{j+1})

$$K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) = \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \hat{H}} | x_j \rangle \quad (2.5)$$

con $\Delta t = t_{j+1} - t_j$. El hamiltoniano \hat{H} es la suma de los operadores de energía cinética $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ y potencial $\hat{V} = V(\hat{x})$, operadores que en general no conmutan. Sin embargo, si consideramos que $\epsilon = \frac{i\Delta t}{\hbar}$ es una cantidad pequeña, podemos escribir

$$e^{-\epsilon \hat{H}} \approx e^{-\epsilon \hat{T}} e^{-\epsilon \hat{V}} + O(\epsilon^2)$$

y tomar en cuenta la aproximación

$$\begin{aligned} \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \hat{H}} | x_j \rangle &\approx \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \hat{T}} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \hat{V}} | x_j \rangle \\ &= \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \hat{T}} | x_j \rangle e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} V(x_j)}. \end{aligned}$$

Además, si introducimos la relación de completitud para el espectro continuo de momentos para la energía cinética obtenemos que

$$\langle x_{j+1} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \hat{T}} | x_j \rangle = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}} e^{\left[\frac{im(x_{j+1}-x_j)^2}{2\hbar\Delta t} \right]} \quad (2.6)$$

por tanto

$$K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}} e^{\left[\frac{im(x_{j+1}-x_j)^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{i\Delta t}{\hbar} V(x_j) \right]}. \quad (2.7)$$

de modo que

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{j=0}^N dx_j \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t} \right)^{\frac{N+1}{2}} e^{\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \Delta t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\Delta t} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\}}. \quad (2.8)$$

En el límite cuando $N \rightarrow \infty$ y $\Delta t \rightarrow 0$ podemos interpretar el término de la exponencial como una suma de Riemann a lo largo del camino entre los puntos inicial y final. De modo que podemos escribir el propagador como

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int e^{\left\{ \frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right\}} d[x(t)] \quad (2.9)$$

cuya variable de integración es la trayectoria $x(t)$, la cual es el límite continuo de los pasos. De esta manera, el término de la exponencial tiene la forma

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt \quad , \quad (2.10)$$

misma que es la acción clásica entre los tiempos inicial y final, y la trayectoria puede determinarse a través del lagrangiano $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$. Algunos ejemplos de interés son el lagrangiano de la partícula libre en una dimensión

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad (2.11)$$

el de una partícula sometida a un campo gravitacional

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mg_0 x, \quad (2.12)$$

el de una partícula con vector de posición \vec{x} en un marco de referencia que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - m\vec{\Omega} \cdot (\vec{x} \times \dot{x}) + \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{x}) \cdot \dot{x}. \quad (2.13)$$

Es de particular interés para este trabajo el lagrangiano de un campo gravitacional con un gradiente lineal del campo gravitacional

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mg_0 x - \frac{m}{2} \gamma x^2. \quad (2.14)$$

Todos estos sistemas tienen en común que dependen a lo más en forma cuadrática de x y \dot{x} . Por esto, consideremos un lagrangiano cuadrático del tipo [11]

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = a(t)\dot{x}^2 + b(t)\dot{x}x + c(t)x^2 + d(t)\dot{x} + e(t)x + f(t) \quad , \quad (2.15)$$

donde a , b , c , d , e y f pueden ser funciones continuas dependientes del tiempo. Como se espera que sólo los caminos cercanos al camino clásico contribuyan a la integral de camino, es conveniente expresar cada camino $x(t)$ en términos de su desviación del camino clásico $\bar{x}(t)$

$$x(t) = \bar{x}(t) + \xi(t). \quad (2.16)$$

Ya que el camino clásico $\bar{x}(t)$ no varía

$$d[x(t)] = d[\xi(t)] \quad ,$$

y que además posee condiciones de frontera

$$x(t_a) = \bar{x}(t_a) = x_a, \quad x(t_b) = \bar{x}(t_b) = x_b, \quad \xi(t_a) = \xi(t_b) = 0$$

entonces, el propagador toma la forma

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int e^{\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}(t) + \xi(t)]} d[\xi(t)].$$

Si consideramos la desviación del camino clásico en (2.16), y la introducimos en la expresión de la acción para el lagrangiano en (2.15), obtendremos que la ecuación de la acción en (2.10) toma la forma

$$\begin{aligned} S[\bar{x}(t) + \xi(t)] &= S[\bar{x}(t)] + \int_{t_a}^{t_b} [2a(t)\dot{\bar{x}}\dot{\xi} + b(t)\dot{\bar{x}}\dot{\xi} + b(t)\bar{x}\dot{\xi} + 2c(t)\bar{x}\xi + d(t)\dot{\xi} + e(t)\xi] dt \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt. \end{aligned}$$

Ya que en el camino clásico la acción es extremal, los términos lineales de $\dot{\xi}$ y ξ no contribuyen a la acción. Por tanto podemos escribir la acción de la variación de la siguiente manera

$$S[\bar{x}(t) + \xi(t)] = S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a) + \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt, \quad ,$$

lo cual tiene como resultado que el propagador se exprese de la siguiente manera

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a)} \int e^{\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt \right\}} d[\xi(t)] \quad ,$$

que podemos escribir como

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = F(t_b, t_a) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a)}.$$

Con ello, el estado final es

$$\psi(x_b, t_b) = F(t_b, t_a) \int e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a)} \psi(x_a, t_a) dx_a. \quad (2.17)$$

De manera que hemos relacionado la fase que adquiere el estado final y la trayectoria clásica que sigue el sistema. Este resultado nos permitirá explorar la forma en que se verán afectadas las fases de los estados de un sistema de interés al ser expuesto a distintos tipos de interacciones, en particular a aquellas con campos gravitacionales.

Tratamiento en términos de onda planas

Nuestro interés se encuentra en describir como evolucionan partículas que interactúan con campos gravitacionales y electromagnéticos. Por su complejidad partiremos de partículas sin interacción y veremos como evolucionan éstas al estar expuestas a campos externos. De acuerdo

a la teoría cuántica, podemos considerar a partículas que viajan sin interactuar con un campo como partículas libres, las cuales podemos describir mediante ondas planas. De modo que podemos considerar el caso en que la función inicial es una onda plana

$$\psi(x_0, t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\left[\frac{i(p_0 x_0 - E_0 t_a)}{\hbar}\right]} \quad , \quad (2.18)$$

y expandimos la acción clásica alrededor del punto inicial x_0 hasta segundo orden

$$S_{cl}(x_b, t_b; x_0 + \zeta, t_a) = S_{cl}(x_b, t_b; x_0, t_a) - p_0 \zeta + C(t_b, t_a) \zeta^2 \quad , \quad (2.19)$$

con

$$p = -\frac{\partial}{\partial x_0} S_{cl}(x_b, t_b; x_0, t_a) \quad ,$$

$$C(t_b, t_a) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} S_{cl}(x_b, t_b; x_0, t_a) \quad ,$$

y además $C(t_b, t_a)$ es una función independiente de las posiciones. Si aplicamos la expansión a la función de onda obtenemos

$$\psi(x_0 + \zeta, t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\left[\frac{i(p_0 x_0 - E_0 t_a)}{\hbar}\right]} e^{\left(\frac{i p_0 \zeta}{\hbar}\right)} \quad , \quad (2.20)$$

e introduciendo (2.19) y (2.20) en (2.17) se obtiene que el estado final es

$$\psi(x_b, t_b) = F(t_b, t_a) \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{C(t_b, t_a)}} \psi(x_0, t_a) e^{\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, t_b; x_0, t_a)\right\}} \quad , \quad (2.21)$$

que podemos escribir como

$$\psi(x_f) = \psi(x_i) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_f, x_i)} \quad , \quad (2.22)$$

donde x_f y x_i representa los puntos final e inicial. Así, la fase de la función de onda final estará determinada por la acción a lo largo de la trayectoria clásica.

Perturbaciones

Si consideramos ahora que la función inicial es una onda plana pero ahora, ésta se encuentra con un sistema descrito por un lagrangiano perturbado

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon \mathcal{L}_1 \quad , \quad (2.23)$$

con $\epsilon \ll 1$ en cuya trayectoria los puntos iniciales para la trayectoria perturbada Γ correspondiente al lagrangiano perturbado \mathcal{L} , y para la trayectoria no perturbada Γ^0 correspondiente al lagrangiano no perturbado \mathcal{L}_0 son suficientemente cercanos entre sí. Ya que las trayectorias sólo difieren a primer orden en ϵ podemos tomar en cuenta la aproximación

$$\int_{\Gamma} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt \approx \int_{\Gamma^0} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt \quad , \quad (2.24)$$

entonces la perturbación afecta al estado final como [11]

$$\psi(f) \approx \psi(x_i) e^{\left(\frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma_{cl}^0} \mathcal{L}_0 dt\right)} e^{\left(\frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma_{cl}^0} \mathcal{L}_1 dt\right)}. \quad (2.25)$$

De modo que esta perturbación induce un cambio de fase en el estado final que toma la forma

$$\delta\phi = \frac{\epsilon}{\hbar} \int_{\Gamma_{cl}^0} \mathcal{L}_1 dt \quad . \quad (2.26)$$

Esto es, el cambio de fase es únicamente la integral del lagrangiano perturbado a lo largo de la trayectoria no perturbada.

Desfase gravitacional

Considerando átomos que viajan por dos caminos interactuando con una secuencia de pulsos que actúan como divisor, reflector y recombinador, entonces los estados atómicos se ven afectados por un lagrangiano y su perturbación

$$\mathcal{L}_0(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mg_0 x \quad , \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}_1(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \gamma x^2. \quad (2.28)$$

de modo que la trayectoria clásica según las ecuaciones de Lagrange para \mathcal{L}_0 son

$$v(t) = v_0 - g_0(t - t_0) \quad , \quad (2.29)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g_0(t - t_0)^2. \quad (2.30)$$

Si tomamos en cuenta el estado final de la trayectoria:

$$v_f = v_0 - g(t_f - t_0) \quad , \quad (2.31)$$

$$x_f = x_0 + v_0(t_f - t_0) - \frac{1}{2} g(t_f - t_0)^2 \quad , \quad (2.32)$$

podemos escribir

$$v_0 = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} + \frac{1}{2} g(t_f - t_0) \quad . \quad (2.33)$$

por lo que la acción clásica es

$$S = \int_{t_b}^{t_f} \left(\frac{1}{2} m v(t)^2 - mg_0 x \right) dt \quad (2.34)$$

$$= \frac{m}{2} \frac{(x_f - x_b)^2}{t_f - t_b} - \frac{mg_0}{2} (x_f + x_b)(t_f - t_b) - \frac{mg_0^2}{24} (t_f - t_b)^3. \quad (2.35)$$

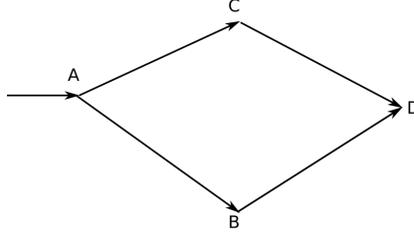


Figura 2.1: Diagrama de las trayectorias de cada porción del sistema dividido.

Entonces, al considerar la trayectoria entre 2 caminos que parten del mismo punto inicial y llegan al mismo punto final, a saber \overline{ABD} y \overline{ACD} como se muestra en la Figura 2.1.

La diferencia en los segmentos \overline{AB} y \overline{AC} es

$$S_{\overline{AB}} - S_{\overline{AC}} = \frac{m}{2T}(x_B - x_C)(x_B + x_C - 2x_A - gT^2), \quad (2.36)$$

de igual modo

$$S_{\overline{BD}} - S_{\overline{CD}} = \frac{m}{2T}(x_B - x_C)(x_B + x_C - 2x_D - gT^2), \quad (2.37)$$

por tanto

$$\Delta\phi_{camino} = \frac{1}{\hbar}(S_{\overline{AB}} + S_{\overline{BD}} - (S_{\overline{AC}} + S_{\overline{CD}})) \quad (2.38)$$

$$= \frac{m}{T\hbar}(x_B - x_C)(x_B + x_C - x_A - x_D - gT^2). \quad (2.39)$$

Los puntos de una trayectoria sin y con gravedad sólo difieren por el término $-\frac{1}{2}gt^2$. De modo que si x_{A0} , x_{B0} , x_{C0} , x_{D0} son los puntos inicial, intermedios y finales de cada trayectoria

$$\begin{aligned} x_A &= x_{A0} \quad , \\ x_B &= x_{B0} - \frac{1}{2}gT^2 \quad , \\ x_C &= x_{C0} - \frac{1}{2}gT^2 \quad , \\ x_D &= x_{D0} - 2gT^2 \quad . \end{aligned}$$

Como las trayectorias son rectas en el caso sin gravedad, estas forman un paralelogramo y por tanto $x_{D0} - x_{B0} = x_{C0} - x_{A0}$ de modo que

$$x_B + x_C - x_A - x_D - gT^2 = x_{B0} + x_{C0} - x_{A0} - x_{D0} = 0 \quad , \quad (2.40)$$

y entonces $\Delta\phi_{camino} = 0$.

El sistema además de adquirir una fase debida al camino tomado, también adquiere una fase debida al cambio del estado interno, la cual depende de la posición y el tiempo. Los cambios

entre los estados internos $|a\rangle$ y $|b\rangle$ conllevan a que cada estado adquiera una fase debida a los procesos de emisión y absorción con el campo láser, los cuales se llevan a cabo a través de una secuencia de pulsos láser. La secuencia involucra un pulso llamado $\frac{\pi}{2}$, el cual prepara una superposición cuántica entre los estados involucrados, en la que porciones iguales de la función de onda se encuentran en cada uno de los estados de interés. Además de un pulso llamado π , el cual invierte las poblaciones, transfiriendo la porción que se encontraba en el estado base al estado excitado y viceversa ¹. Entonces, los átomos en el estado $|a\rangle$ ingresan en la región del interferómetro e interactúan con el pulso $\frac{\pi}{2}$ que sirve como un divisor de haz, ya que una parte de ellos continúan en $|a\rangle$ mientras que otros son transferidos a $|b\rangle$ y adquieren una fase $\phi_1 = k_{eff}x_{A0}$. Un tiempo T después el sistema es iluminado con el pulso π que funciona como un espejo, generando una inversión de poblaciones al transferir los átomos de $|a\rangle$ a $|b\rangle$ adquiriendo una fase $\phi_2 = k_{eff}(x_{C0} - \frac{1}{2}g_0T^2) - wT$, y de $|b\rangle$ a $|a\rangle$ adquiriendo una fase $\phi_3 = -k_{eff}(x_{B0} - \frac{1}{2}g_0T^2) + wT$. El último pulso $\frac{\pi}{2}$ actúa en otro tiempo T después sirviendo como un pulso de recombinación, dejando sin cambios los átomos que se encuentran en $|b\rangle$ pero cambiando aquellos que se encuentran en $|a\rangle$ a $|b\rangle$ adquiriendo estos últimos una fase $\phi_4 = k_{eff}(x_{D0} - 2g_0T^2) - w2T$. Si tomamos la diferencia entre las fases adquiridas en cada uno de los caminos, tendremos que

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi_{luz} &= \phi_{ABD} - \phi_{ACD} \\
 &= (\phi_4 + \phi_3 + \phi_1) - \phi_2 \\
 &= \phi_4 + \phi_3 - \phi_2 + \phi_1 \\
 &= k_{eff}(x_{D0} + x_{A0} - x_{C0} - x_{B0} - g_0T^2) \\
 &= -k_{eff}g_0T^2 \quad .
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

De modo que la diferencia de fase total es $\Delta\phi = -k_{eff}g_0T^2$. Notemos que, si $x_{B0} = x_{C0}$ entonces $\phi_3 = -\phi_2$ de modo que

$$\Delta\phi_{luz} = \phi_4 - 2\phi_2 + \phi_1 \quad . \tag{2.42}$$

La expresión (2.42) podemos relacionarla con los resultados que veremos en la sección 2.2.

Perturbación gravitacional

Ahora, para la perturbación debida a \mathcal{L}_1

$$\delta\phi = \frac{1}{\hbar} \int \frac{m\gamma}{2} x^2(t) dt \quad .$$

¹El tema se tratará más a detalle en la sección 2.2

Debemos considerar la integral sobre ambos caminos teniendo en cuenta los cambios de momento. Considerando el camino \overline{ABD} que inicialmente recibe un impulso de $\frac{hk_{eff}}{m}$

$$\begin{aligned}\phi_{\overrightarrow{AB}} &= \frac{m\gamma}{2h} \int_0^T \left[(t-0) \left(\frac{hk_{eff}}{m} + v_0 \right) - \frac{g_0}{2}(t-0)^2 + x_0 \right]^2 dt \quad , \\ \phi_{\overrightarrow{BD}} &= \frac{m\gamma}{2h} \int_T^{2T} \left\{ (t-T) \left[\frac{hk_{eff}}{m} - \frac{hk_{eff}}{m} - g_0(T-0) + v_0 \right] + (T-0) \left[\frac{hk_{eff}}{m} + v_0 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{g_0}{2}(t-T)^2 - \frac{g_0}{2}(T-0)^2 + x_0 \right\}^2 dt \quad .\end{aligned}$$

Después consideramos el camino \overline{ACD} que inicialmente continúa con velocidad v_0

$$\begin{aligned}\phi_{\overrightarrow{AC}} &= \frac{m\gamma}{2h} \int_0^T \left[(t-0)v_0 - \frac{g_0}{2}(t-0)^2 + x_0 \right]^2 dt \quad , \\ \phi_{\overrightarrow{CD}} &= \frac{m\gamma}{2h} \int_T^{2T} \left\{ (t-T) \left[\frac{hk_{eff}}{m} - g_0(T-0) + v_0 \right] + (T-0)v_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{g_0}{2}(t-T)^2 - \frac{g_0}{2}(T-0)^2 + x_0 \right\}^2 dt \quad .\end{aligned}$$

al integrar y tomar la diferencia de ambos caminos encontramos que

$$\delta\phi = -\gamma k_{eff} T^2 \left(\frac{7}{12} g_0 T^2 - \bar{v}T - x_0 \right) \quad . \quad (2.43)$$

De modo que el cambio de fase total en el caso de la perturbación por el gradiente lineal es

$$\Delta\phi = -k_{eff} T^2 g \quad (2.44)$$

$$= -k_{eff} T^2 \left(g_0 + \gamma \left(\frac{7}{12} g_0 T^2 - \bar{v}T - x_0 \right) \right) \quad . \quad (2.45)$$

Por tanto

$$g = g_0 + \gamma \left(\frac{7}{12} g_0 T^2 - \bar{v}T - x_0 \right) \quad . \quad (2.46)$$

Algunos experimentos usan la fase relativa a los pulsos láser de las transiciones Raman como la referencia contra la que el resto de los desfases del interferómetro serán medidos. De este modo se puede introducir un desfase en cada pulso, el cual diferirá de las frecuencias de la transición Raman por una cantidad Δf . Cada desfase estará separado por un intervalo de tiempo igual al de los pulsos Raman T . Por tanto, tendremos los desfases $\frac{\pi}{2}\Delta f T$, $\pi\Delta f T$, $\frac{\pi}{2}\Delta f T$ dando como resultado un desfase total

$$\Delta\phi_f = 2\pi\Delta f T$$

Podemos ajustar este desfase de tal modo que el desfase total del interferómetro sea nulo $\Delta\phi - \Delta\phi_{fc} = 0$. Por tanto, de la Ec. (2.44) obtenemos

$$g = \frac{2\pi\Delta f}{k_{eff}T} \quad . \quad (2.47)$$

Lo cual nos ofrece una manera experimental de detectar el valor de g y además permite tener cierto control en el valor medido.

2.2. Interferometría cuántica

Interferometro Mach-Zehnder

Como hemos visto, para determinar el valor de la gravedad es necesario obtener diferencias de fase en un sistema, y la mejor manera de lograr esto es a través de interferómetros. Estos son dispositivos que, mediante el uso de ondas luminosas permiten medir longitudes a través de las diferencias de fase que se obtienen al hacer que un haz sea dividido y recombinado, haciendo que cada parte del haz dividido siga un camino distinto. Este proceso se adapta a un sistema atómico que nos permitirá también generar diferencias de fase en el sistema. El interferómetro elegido es de tipo Mach-Zehnder, el cual en el caso óptico consiste en un divisor de haz que separa un haz incidente en dos y dirigiendo cada parte del haz dividido en direcciones perpendiculares por caminos diferentes. En la Figura 2.2 podemos ver un diagrama general del interferómetro y notar como un haz es separado mediante un divisor de haz que hará que cada porción del haz tome distintos caminos. Los haces en un punto de su trayectoria son reflejados por espejos nuevamente en dirección perpendicular de modo que puedan reencontrarse e interferir, para así poder detectar un patrón de interferencia. La longitud de separación para los haces en los caminos C_1 y C_2 entre el punto de separación, el espejo y el punto de interferencia (llamada longitud de camino óptico) será crucial para detectar un patrón de interferencia pues si la longitud de estos caminos son iguales y no hay otra cosa que se interponga en el camino de los haces entonces no habrá un patrón de interferencia detectable. Sin embargo, dado el caso podemos colocar una muestra de interés en el camino de uno de los haces, en la cual después de que el rayo cruce por ella nos permitirá detectar un patrón de interferencia. De los materiales con los que se disponga y del experimento que pretenda realizar dependerá la configuración particular del arreglo, pudiendo variar en cada caso la longitud de cada camino, tipo y forma de los divisores y espejos, las características del haz, etc. El interés, en el caso de este trabajo, es replicar este proceso pero en el contexto de un sistema atómico [12].

En el caso atómico en lugar de un haz luminoso se utiliza una muestra de átomos. Para que la analogía con el haz sea más adecuada, se requiere que todos los átomos sean preparados inicialmente en un mismo estado interno $|a\rangle$ con momento p . Al estar en un mismo estado los átomos de la muestra, se busca dividir la función de onda de la muestra en proporciones iguales de manera análoga a como se divide el haz en el caso luminoso. En un principio los átomos viajan por un mismo camino, hasta que se usa un pulso divisor (llamado pulso $\frac{\pi}{2}$) que creará una superposición de proporciones iguales entre el estado base y el nuevo estado $|b\rangle$. Cabe

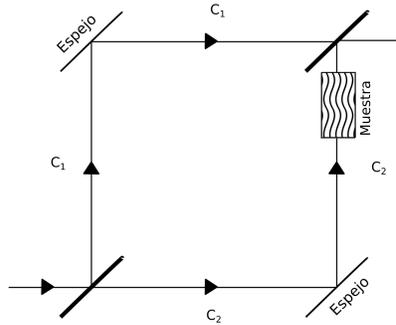


Figura 2.2: Diagrama del interferómetro tipo Mach-Zehnder.

mencionar que más adelante en este mismo capítulo se explica en detalle el funcionamiento del llamado pulso $\frac{\pi}{2}$ y π (del siguiente párrafo) ya que de momento solo se usará como analogía de divisores de haz ($\frac{\pi}{2}$) y espejos (π) que se utilizan en el interferómetro óptico de Mach-Zehnder. La interacción con el pulso no solo implica un cambio en el estado interno sino que trae consigo un cambio en el momento de la porción del sistema en el estado $|b\rangle$, el cual adquiere un nuevo momento $p + \hbar k_{eff}$, donde $\hbar k_{eff}$ representa el momento total después de interactuar con cada pulso. Esta situación podemos observarla en la Figura 2.3 (a). De esta manera logramos que cada porción del estado superpuesto tome caminos diferentes. Por tanto, tendremos un estado $|b, p + \hbar k_{eff}\rangle$ que está relacionado con el estado original $|a, p\rangle$ de manera análoga a lo que sucede en el interferómetro de Mach-Zehnder en el que las porciones del haz que viajan por dos caminos diferentes están relacionadas con el haz original, lo cual extiende la analogía entre el interferómetro atómico y el interferómetro luminoso.

Un tiempo T después utilizaremos un pulso de inversión de poblaciones (llamado pulso π) el cual transferirá los estados atómicos de $|a, p\rangle$ a $|b, p + \hbar k_{eff}\rangle$ y de $|b, p + \hbar k_{eff}\rangle$ a $|a, p\rangle$, donde vemos que no solo invierte los estados internos, sino que también los momentos. Ya que cambian los estados internos y sus respectivos momentos, los átomos de cada parte de la muestra se acercarán nuevamente, lo que nos permite ver que este pulso actúa de manera análoga a la de un espejo. Cuando se encuentran nuevamente los átomos después de otro tiempo T , se utiliza nuevamente un pulso $\frac{\pi}{2}$ que transferirá los átomos que se encuentren en el estado $|a, p\rangle$ a $|b, p + \hbar k_{eff}\rangle$ recombinando el sistema y actuando de forma análoga al recombinador óptico, permitiendo la interferencia.

En este proceso el estado adquiere una fase total, sin embargo, si el sistema es ideal los átomos de cada porción del sistema dividido no encontraran nada en su camino y al recorrer distancias similares actuarán del mismo modo que en el caso óptico y la fase será nula. Sin embargo, al existir un campo de fondo se modificarán las trayectorias de los átomos lo que modificará también la fase adquirida del mismo modo que una muestra modifica la fase adquirida (y el patrón de interferencia) de un sistema óptico. De manera que en este caso, el campo de fondo (que es el campo gravitatorio) actúa de manera análoga al de una muestra en el sistema óptico, lo cual nos proporciona una forma de medir el campo gravitacional. En la Figura 2.3 (b) podemos ver un esquema del interferómetro atómico para el caso con y sin gravedad.

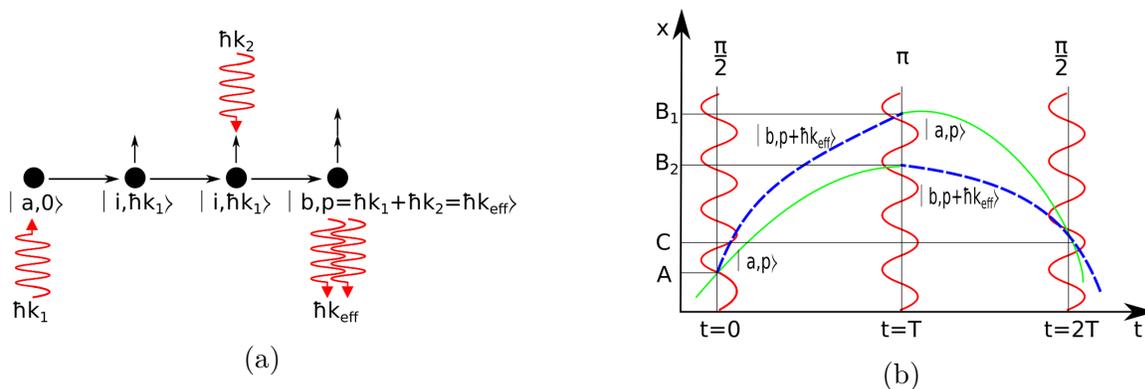


Figura 2.3: Interferometría del sistema atómico. (a) Transferencia de momento en un pulso de haces contra-propagantes como los usados en transiciones Raman para interferometría. El sistema inicia con momento 0, adquiere un momento $\hbar k_1$ al interactuar con un haz del pulso, por lo que al interactuar con el segundo haz del pulso el momento es $\hbar k_{\text{eff}} = \hbar k_1 + \hbar k_2$. (b) Diagrama del interferómetro. Los cambios en las pendientes de las curvas representan los cambios de momento en cada caso. Las curvas pretenden ilustrar el caso con gravedad, en un caso sin gravedad las curvas serían sustituidas por líneas rectas.

Transiciones atómicas

Históricamente se consideraba al átomo como la parte más pequeña de la materia, con el tiempo se descubrió que éstos poseían una estructura interna y muchos modelos surgieron para tratar de describirlos. El modelo más adecuado que se conoce hasta el momento consiste en un núcleo atómico formado por un cierto número partículas con carga eléctrica positiva llamados protones, designados por el número atómico Z y otro número de partículas sin carga eléctrica llamados neutrones, designados por el símbolo N . Protones y neutrones son mantenidos juntos dentro de una pequeña región de alrededor de $10^{-10}m$ por una fuerza nuclear debida al número de protones y neutrones, los cuales ayudan a contrarrestar la fuerza repulsiva de los protones. El núcleo a su vez está rodeado por una nube de partículas con carga eléctrica negativa llamados electrones, lo cual mantiene al átomo eléctricamente neutro. En el núcleo atómico Z y N varían y de hecho se distinguen distintas clases de átomos a partir del número de sus constituyentes.

La primera distinción que se hace es por Z , el cual determina el elemento con el que se trabaja. Por otro lado, N distingue tipos de un mismo elemento los cuales son llamados isótopos. En general, los isótopos que poseen aproximadamente el mismo número de Z y N son llamados estables, pues no sufren cambios espontáneos en sus estados internos en periodos relativamente largos de tiempo. En interferometría es común el uso de isótopos estables [13–17], sin embargo también pueden usarse isótopos inestables siempre que su estructura atómica y el tiempo en su vida media permitan cumplir los objetivos del experimento, como es el caso del ^{40}K y el ^{87}Rb [15, 18].

Los átomos poseen diferentes estados de energía nuclear pero los electrones que lo rodean se encuentran ordenados de acuerdo a la energía que éstos poseen en el átomo y a la forma en que se mueven alrededor del núcleo. Los estados electrónicos se modifican debido a las interacciones con su entorno. Nuestro interés se encuentra en los cambios de estados entre estos

niveles, los cuales, pueden determinarse y cambiarse más fácilmente que los nucleares. A través de un estudio mecánico cuántico y experimental, se encuentra que los electrones se ordenan “alrededor” del átomo siguiendo diferentes reglas sobre cuáles estados (niveles) puede ocupar un electrón en un átomo.

El principio de Aufbau nos dice que los niveles electrónicos de los átomos se llenan en el orden que indica la tabla periódica, lo cual se obtiene gracias a resultados experimentales.

El llenado de los niveles también está sujeto al principio de exclusión de Pauli, el cual nos dice que no más de dos electrones pueden ocupar el mismo nivel y si los átomos ocupan un orbital, sus espines deben estar apareados.

Cuando hay orbitales libres los electrones ocupan orbitales separados antes de aparearse con uno medio lleno lo que les da una mayor separación espacial y minimiza la energía del átomo. Además, cuando los electrones ocupan orbitales separados lo hacen con espines paralelos, esta es llamada regla de Hund de máxima multiplicidad. Una representación de la ocupación electrónica se encuentra en la Figura 2.4 [19, 20].

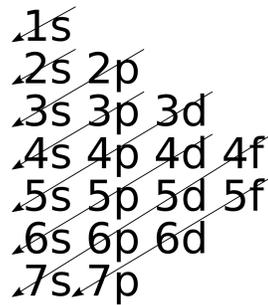


Figura 2.4: Diagrama de ocupación de los niveles electrónicos.

Los estados electrónicos en un átomo se identifican por un grupo de números cuánticos los cuales indican el nivel energético del electrón en el átomo (n), el momento angular orbital (l), el momento angular interno o de spin (s), el momento angular orbital total (J), el momento angular nuclear (I), el momento angular atómico total F y el momento angular atómico total secundario (m_F) relacionado con la orientación en el espacio del momento angular total respecto a un campo magnético. Esta información se resume con notación electrónica, la cual permite escribir un estado como $|n^{2s+1}, l_J, I, F, m_F\rangle$ teniendo en cuenta que los estados de momento angular orbital se distinguen históricamente por letras $s, p, d, f, etc.$ para $l = 0, 1, 2, 3, etc.$

Como mencionamos los estados electrónicos de un átomo también pueden cambiar, estas transiciones para átomos multi-electrónicos poseen ciertas reglas que nos indican cuáles transiciones pueden realizarse. Estas reglas de selección para transiciones dipolares eléctricas son las siguientes [19, 21] :

$$\Delta l = \pm 1 \text{ entre orbitales.}$$

$$\Delta J = 0, \pm 1, \text{ exceptuando la transición } J = 0 \rightarrow J = 0.$$

$$\Delta F = 0, \pm 1 \text{ entre estados hiperfinos.}$$

Considerando que se busca modificar los estados internos de una muestra de átomos de manera controlada entonces es deseable evitar cualquier cambio interno espontáneo de los átomos

que componen la muestra, los cuales modificarán la configuración electrónica y consecuentemente las energías de transición, por lo que, interferirán con el proceso en el cual estamos interesados.

En interferometría atómica se utilizan metales alcalinos como muestras atómicas, ya que estos poseen capas electrónicas cerradas, esto quiere decir que sus electrones más internos se encuentran apareados, fuertemente ligados y con estados difícilmente alterables. Poseen además un único electrón en su capa más externa, lo cual resulta conveniente pues será este el único que aportará a los valores del momento angular que no se cancelan y el que se verá notablemente afectado al interactuar con los campos electromagnéticos a los que será sometido el átomo, simplificando con esto la manipulación de los estados internos.

Por otro lado, se generan transiciones entre estados hiperfinos para tener un rango corto y bien definido de frecuencias de transición de manera que se pueda tener control sobre las transiciones que se realizan cada vez que se ilumina la muestra a la par que se busca minimizar o compensar cualquier corrimiento debido a la interacción con el campo.

En nuestro caso particular nos concentraremos en átomos del isotopo de Rubidio 87 (^{87}Rb), ya que por su masa y composición, es estable y fácil de manipular para realizar transiciones atómicas, lo que hace sencillo su uso en interferometría atómica ². Este átomo posee un número atómico $Z = 37$ así que debe poseer el mismo número de electrones y una configuración electrónica $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1$. Como vemos, tiene cerradas las capas internas y un único electrón externo que contribuye al momento angular. Esta estructura es similar a la del átomo de Hidrógeno, y en ese sentido, podemos tratarlo como tal, manipulando y realizando transiciones con el electrón más externo [18]. Un diagrama de esta descripción puede verse en la Figura 2.5.



Figura 2.5: Diagrama esquemático del átomo de Rubidio y la nube del electrón en su último nivel de energía estable. El diagrama que se muestra no está a escala y únicamente es para representar el electrón disponible en la última capa para hacer experimentos tipo átomo hidrogenoide.

Como hemos mencionado, el proceso de Mach-Zehnder requiere de un proceso de división, reflexión y recombinación de los estados del sistema, pero además se busca realizar transiciones entre estados hiperfinos a través de un proceso que posea una sensibilidad considerable. Estas son las razones por las que, en gravimetría atómica se realizan transiciones entre dos estados hiperfinos acoplados a través de un estado intermedio.

²La colaboración institucional que desarrolla un gravímetro cuántico en México se llama Grávico y para la construcción del dispositivo se empleará ^{87}Rb .

En el caso del ^{87}Rb se realizan transiciones entre los estados $|g\rangle = |5^2S_{\frac{1}{2}}, I = \frac{3}{2}, F = 1, m_F = 0\rangle$ y $|e\rangle = |5^2S_{\frac{1}{2}}, I = \frac{3}{2}, F = 2, m_F = 0\rangle$, los cuales no pueden hacer una transición entre ellos naturalmente, pero pueden ser acoplados a través del estado intermedio $|j\rangle = |5^2P_{\frac{3}{2}}, I = \frac{3}{2}, F' = 1, m_{F'} = 0\rangle$. Las transiciones $|g\rangle \leftrightarrow |j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ se realizan a través pulsos de haces contra-propagantes, de modo que estos pueden transicionar a través de estados originalmente desacoplados por vía de un estado intermedio mediante haces láser. El proceso descrito es llamado transición Raman [18, 21–23].

Sistema de tres niveles

Por las condiciones a las que serán expuestos los átomos, éstos quedan determinados por su estado interno y momento lineal. De modo que si consideramos el estado inicial g con momento lineal \mathbf{p} podemos escribirlo como $|g, \mathbf{p}\rangle$ y análogamente para el resto de los momentos y estados.

Los átomos son iluminados con láseres contra-propagantes de modo que son expuestos a campos electromagnéticos, además, se utiliza un campo magnético para romper la degeneración de estados y separar los niveles magnéticos en los que se preparan a los átomos. En particular, se busca preparar a los átomos en pares de estados que tengan muy baja sensibilidad a campos magnéticos y que la diferencia en el corrimiento Zeeman experimentado por ambos estados tenga una sensibilidad muy baja al campo magnético [6]. El origen contra-propagante de los pulsos permite considerar que los átomos interactúan con un campo electromagnético, cuyo campo eléctrico tiene la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\ &= \mathbf{E}_{01} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t + \phi_1) + \mathbf{E}_{02} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t + \phi_2). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Consideremos entonces un estado inicial $|g, \mathbf{p}\rangle$, este poseerá energía

$$\hbar\omega_g^0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \hbar\omega_g \quad , \quad (2.49)$$

que busca acoplarse al estado $|e, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle$, donde $\mathbf{k}_{eff} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ y posee energía

$$\hbar\omega_e^0 + \frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff})^2}{2m} = \hbar\omega_e \quad . \quad (2.50)$$

Los estados se encuentran acoplados a través de un nivel intermedio, sin embargo, la interacción con los láseres puede llevar a que éste posea diferentes valores de momento lineal los cuales también transicionan a los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con distintos valores de momento angular cada uno. Sin embargo, algunos de éstos poseen un gran desentonamiento entre frecuencias de transición y las frecuencias de los láseres de modo que el número de transiciones y poblaciones es considerablemente bajo. Además, éstos no se encuentran acoplados con los estados de interés y generan corrimientos despreciables. Por estas razones es que únicamente se consideran los estados intermedios $|j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_1\rangle$, $|j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_2\rangle$ y $|j, \mathbf{p} + \hbar(\mathbf{k}_{eff} + \mathbf{k}_1)\rangle$ con energías

$$\hbar\omega_j + \frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_1)^2}{2m} = \hbar\omega_{j1} \quad , \quad (2.51)$$

$$\hbar\omega_j + \frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_2)^2}{2m} = \hbar\omega_{j2} \quad , \quad (2.52)$$

$$\hbar\omega_j + \frac{(\mathbf{p} + \hbar(\mathbf{k}_{eff} + \mathbf{k}_1))^2}{2m} = \hbar\omega_{j3} \quad . \quad (2.53)$$

cabe mencionar que al tomar en cuenta estas consideraciones se minimiza el efecto de emisiones espontáneas. Podemos observar un diagrama del sistema de tres niveles para el caso descrito en la Figura 2.6.

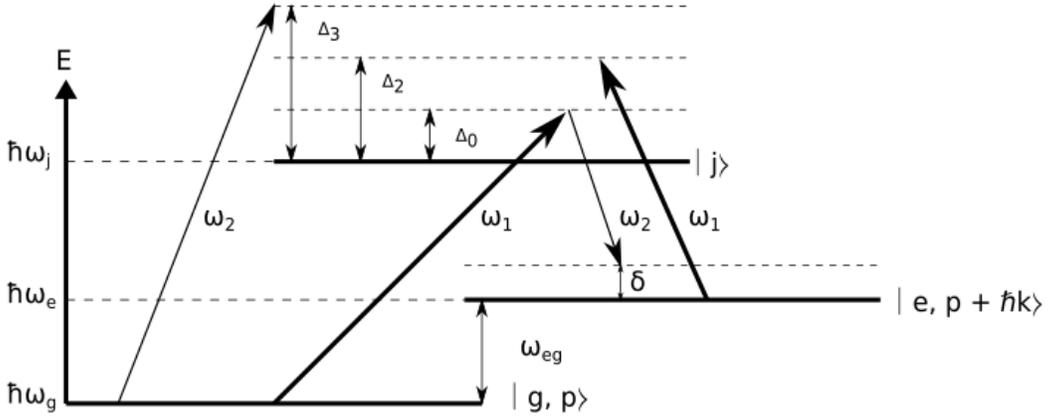


Figura 2.6: Diagrama de niveles para el sistema de tres niveles con los niveles de energía (E) en el eje vertical. En este se muestran los niveles de transición (e, g, j), las energías de cada nivel ($\hbar\omega_g, \hbar\omega_e, \hbar\omega_j$), las frecuencias de los campos de radiación (ω_1, ω_2) y los desentonamientos presentes ($\Delta_0, \Delta_2, \Delta_3, \omega_{eg}, \delta$).

El hamiltoniano más general que describa al sistema debe incluir todas las posibles transiciones e interacciones del sistema tomando en cuenta las consideraciones previas. Por esta razón, el hamiltoniano se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \hbar\omega_g^0 |g, \mathbf{p}\rangle \langle g, \mathbf{p}| + \hbar\omega_e^0 |e, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle \langle e, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff}| + \\ & + \hbar\omega_j^0 |j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_1\rangle \langle j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_1| + \hbar\omega_j^0 |j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_2\rangle \langle j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_2| + \\ & + \hbar\omega_j^0 |j, \mathbf{p} + \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{eff})\rangle \langle j, \mathbf{p} + \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{eff})| - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_2 \quad . \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde \mathbf{d} es el operador de momento dipolar. El hamiltoniano anterior incluye las energías base de cada uno de los estados de interés a través de los productos ket-bra, el cambio en sus energías cinéticas a través del término $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ y los términos de interacción de los láseres \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 . Además, el estado más general que describe al sistema es

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & A_g(t) |g, \mathbf{p}\rangle + A_e(t) |e, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle + A_{j1}(t) |j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_1\rangle + \\ & + A_{j2}(t) |j, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_2\rangle + A_{j3}(t) |j, \mathbf{p} + \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{eff})\rangle \quad , \end{aligned} \quad (2.55)$$

el cual incluye todos los posibles estados a los cuales puede transicionar el sistema. Estamos interesados en el límite en que los desentonamientos entre la frecuencia del láser y las frecuencias asociadas a las energías de los estados son mucho mayores que las frecuencias de transición (frecuencias de Rabi), podemos extraer los términos de alta oscilación del sistema al escribirlos como $A(t) = a(t)e^{-i\omega t}$, donde ω representa la frecuencia de oscilación asociada a la energía total de cada estado y, A y a son los coeficientes asociados a cada estado [21, 22, 24, 25].

Para obtener las ecuaciones de evolución para cada coeficiente primero debemos tener ciertas consideraciones que facilitarán el cálculo. Por esto escribimos

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_{0n} \frac{1}{2} \left(e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t + \phi_n)} + e^{-i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t + \phi_n)} \right) \quad \text{con } n = 1, 2 \quad , \quad (2.56)$$

y definimos

$$\Omega_{nl} = - \frac{\langle j | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{0n} | l \rangle}{\hbar} \quad \text{con } l = e, g. \quad (2.57)$$

Ahora, notemos que el término $e^{\pm i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}$ es un operador de boost, el cual actúa sobre los eigenestados de momento lineal, sumando un término de momento $\pm \hbar \mathbf{k}_n$

$$e^{\pm i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} | \mathbf{p} \rangle = | \mathbf{p} \pm \hbar \mathbf{k}_n \rangle . \quad (2.58)$$

Con estas consideraciones apliquemos la ecuación de Schrödinger al estado $|\Psi(t)\rangle$ para posteriormente realizar el producto interno con cada uno de los estados considerados. Esto nos llevará al sistema de ecuaciones

$$\dot{a}_g = - \frac{i}{2} \left(\Omega_{1g}^* e^{i[(\omega_1 + \omega_g - \omega_{j1})t - \phi_1]} a_{j1} + \Omega_{2g}^* e^{i[(\omega_2 + \omega_g - \omega_{j2})t - \phi_2]} a_{j2} \right) \quad , \quad (2.59)$$

$$\dot{a}_e = - \frac{i}{2} \left(\Omega_{1e}^* e^{i[(\omega_1 + \omega_e - \omega_{j3})t - \phi_1]} a_{j3} + \Omega_{2e}^* e^{i[(\omega_2 + \omega_e - \omega_{j1})t - \phi_2]} a_{j1} \right) \quad , \quad (2.60)$$

$$\dot{a}_{j1} = - \frac{i}{2} \left(\Omega_{1g} e^{-i[(\omega_1 + \omega_g - \omega_{j1})t - \phi_1]} a_g + \Omega_{2e} e^{-i[(\omega_2 + \omega_e - \omega_{j1})t - \phi_2]} a_e \right) \quad , \quad (2.61)$$

$$\dot{a}_{j2} = - \frac{i}{2} \Omega_{2g} e^{-i[(\omega_2 + \omega_g - \omega_{j2})t - \phi_2]} a_g \quad , \quad (2.62)$$

$$\dot{a}_{j3} = - \frac{i}{2} \Omega_{1e} e^{-i[(\omega_1 + \omega_e - \omega_{j3})t - \phi_1]} a_e \quad . \quad (2.63)$$

Debido a que se busca que la población de los estados intermedios se mantenga cercana a cero, es necesario que el campo láser se encuentre desentonado con la frecuencia de transición a los estados intermedios. Cuando el desentonamiento de los estados intermedios es considerablemente mayor que las frecuencias de Rabi, los coeficientes de los estados intermedios $|j\rangle$ y los términos que dependen explícitamente del tiempo oscilarán mucho más rápidamente que los coeficientes a_g y a_e . Esto nos permite integrar las ecuaciones (2.61) - (2.63) considerando que

a_g y a_e son constantes, por lo cual

$$\begin{aligned} a_{j1} &= \frac{a_g \Omega_{1g} e^{-i[(\omega_1 + \omega_g - \omega_{j1})t - \phi_1]}}{2(\omega_1 + \omega_g - \omega_{j1})} + \frac{\Omega_{2e} a_e e^{-i[(\omega_2 + \omega_e - \omega_{j1})t - \phi_2]}}{2(\omega_2 + \omega_e - \omega_{j1})} , \\ a_{j2} &= \frac{a_g \Omega_{2g} e^{-i[(\omega_2 + \omega_g - \omega_{j2})t - \phi_2]}}{2(\omega_2 + \omega_g - \omega_{j2})} , \\ a_{j3} &= \frac{a_e \Omega_{1e} e^{-i[(\omega_1 + \omega_e - \omega_{j3})t - \phi_1]}}{2(\omega_1 + \omega_e - \omega_{j3})} . \end{aligned} \quad (2.64)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.64) en (2.59) y (2.60) obtenemos

$$\dot{a}_g = -i \left(\frac{|\Omega_{1g}|^2}{\omega_1 + \omega_g - \omega_{j1}} + \frac{|\Omega_{2g}|^2}{\omega_2 + \omega_g - \omega_{j2}} \right) \frac{a_g}{4} - i \frac{\Omega_{1g}^* \Omega_{2e} e^{i[(\omega_1 - \omega_2 + \omega_g - \omega_e)t + \phi_2 - \phi_1]}}{\omega_2 + \omega_e - \omega_{j1}} \frac{a_e}{4} , \quad (2.65)$$

$$\dot{a}_e = -i \frac{\Omega_{1g} \Omega_{2e}^* e^{i[(\omega_2 - \omega_1 + \omega_e - \omega_g)t + \phi_1 - \phi_2]}}{\omega_1 + \omega_g - \omega_{j1}} \frac{a_g}{4} - i \left(\frac{|\Omega_{1e}|^2}{\omega_1 + \omega_e - \omega_{j3}} + \frac{|\Omega_{2e}|^2}{\omega_2 + \omega_e - \omega_{j1}} \right) \frac{a_e}{4} . \quad (2.66)$$

Definimos

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \omega_1 + \omega_g - \omega_{j1} , \\ \Delta_2 &= \omega_2 + \omega_g - \omega_{j2} , \\ \Delta_3 &= \omega_1 + \omega_e - \omega_{j3} , \\ \Delta_4 &= \omega_2 + \omega_e - \omega_{j1} , \\ \omega_{eg} &= \omega_e - \omega_g , \\ \delta &= \omega_1 - \omega_2 - \omega_{eg} , \\ \phi_{eff} &= \phi_2 - \phi_1 . \end{aligned}$$

y notamos que $\Delta_4 = \Delta_0 - \delta$, pero hemos supuesto previamente que el desentonamiento con las frecuencias de transición es grande y se busca que la diferencia de frecuencias de los láseres sea cercana a las frecuencias de transición $\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_{eg}$ que provocaran la transición $g \leftrightarrow e$. Entonces $\delta \approx 0$ de modo que podemos tomar $\Delta_4 \approx \Delta_0$.

Debido al movimiento de los átomos se considera que Δ_0 es mucho mayor que el corrimiento Doppler $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_{eff}}{m}$, y el corrimiento debido al momento de retroceso $\frac{\hbar |\mathbf{k}_{eff}|^2}{2m}$ de la transición $g \leftrightarrow e$ buscando evitar que se compense el desentonamiento y que esto produzca una población considerable de dicho estado. Entonces podemos aproximar $\Delta_2 \approx \Delta_0 - \omega_{eg}$, $\Delta_3 \approx \Delta_0 + \omega_{eg}$ para obtener

$$\dot{a}_g = -i \left(\frac{|\Omega_{1g}|^2}{\Delta_0} + \frac{|\Omega_{2g}|^2}{\Delta_0 - \omega_{eg}} \right) \frac{a_g}{4} - i \frac{\Omega_{1g}^* \Omega_{2e} e^{i(\delta t + \phi_{eff})}}{\Delta_0} \frac{a_e}{4} , \quad (2.67)$$

$$\dot{a}_e = -i \frac{\Omega_{1g} \Omega_{2e}^* e^{-i(\delta t + \phi_{eff})}}{\Delta_0} \frac{a_g}{4} - i \left(\frac{|\Omega_{1e}|^2}{\Delta_0 + \omega_{eg}} + \frac{|\Omega_{2e}|^2}{\Delta_0} \right) \frac{a_e}{4} . \quad (2.68)$$

Por lo que definimos

$$\Omega_g^{AC} = \frac{|\Omega_{1g}|^2}{4\Delta_0} + \frac{|\Omega_{2g}|^2}{4(\Delta_0 - \omega_{eg})} , \quad (2.69)$$

$$\Omega_e^{AC} = \frac{|\Omega_{1e}|^2}{4(\Delta_0 + \omega_{eg})} + \frac{|\Omega_{2e}|^2}{4\Delta_0} , \quad (2.70)$$

$$\Omega_{eff} = \frac{\Omega_{1g}^* \Omega_{2e}}{2\Delta_0} , \quad (2.71)$$

donde Ω_g^{AC} , Ω_e^{AC} son los corrimientos Stark de los niveles e , g y Ω_{eff} la frecuencia efectiva de transición entre los niveles e y g . Entonces, podemos escribir (2.67) y (2.68) como

$$\dot{a}_g = -i\Omega_g^{AC} a_g - i\frac{\Omega_{eff}}{2} e^{i(\delta t + \phi_{eff})} a_e , \quad (2.72)$$

$$\dot{a}_e = -i\frac{\Omega_{eff}^*}{2} e^{-i(\delta t + \phi_{eff})} a_g - i\Omega_e^{AC} a_e . \quad (2.73)$$

Resolver las Ecs. (2.72) y (2.73) requiere deshacernos de los términos que dependen explícitamente del tiempo en el lado derecho de las ecuaciones. Para esto, primero notemos que

$$\begin{aligned} \Omega_{pr} &= \frac{\Omega_g^{AC} + \Omega_e^{AC}}{2} , \\ \delta^{AC} &= \Omega_e^{AC} - \Omega_g^{AC} , \end{aligned}$$

son el desentonamiento promedio y relativo de los niveles e y g . Consideremos el cambio de variable $a_g = c_g e^{-i(\Omega_{pr} - \frac{\delta}{2})t}$, $a_e = c_e e^{-i(\Omega_{pr} + \frac{\delta}{2})t}$ el cual puede interpretarse como una rotación a un marco de referencia que rota con el sistema. Ahora, introduzcamos el cambio de variable recién descrito en las expresiones (2.72) y (2.73) para obtener

$$\dot{c}_g = -\frac{i}{2} \left[(\delta - \delta^{AC}) c_g + \Omega_{eff} e^{i\phi_{eff}} c_e \right] , \quad (2.74)$$

$$\dot{c}_e = -\frac{i}{2} \left[\Omega_{eff}^* e^{-i\phi_{eff}} c_g - (\delta - \delta^{AC}) c_e \right] . \quad (2.75)$$

Si definimos

$$\cos \theta = \frac{\delta - \delta^{AC}}{\Omega} , \quad (2.76)$$

$$\sin \theta = \frac{|\Omega_{eff}|}{\Omega} , \quad (2.77)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_{eff}^2 + (\delta - \delta^{AC})^2} , \quad (2.78)$$

las Ecs. (2.75) poseen como solución

$$c_g(t_0 + \tau) = \left[\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) - i \cos \theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] c_g(t_0) - i e^{i\phi_{eff}} \sin \theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) c_e(t_0) , \quad (2.79)$$

$$c_e(t_0 + \tau) = -i e^{-i\phi_{eff}} \sin \theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) c_g(t_0) + \left[\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + i \cos \theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] c_e(t_0) . \quad (2.80)$$

Si escribimos estos resultados en términos de los coeficientes originales, tomando en cuenta que $\delta + \omega_e - \omega_g = \omega_1 - \omega_2$, tenemos

$$A_g(t_0 + \tau) = \left[\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) - i \cos\theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] e^{-i(\omega_g + \Omega_{pr} - \frac{\delta}{2})\tau} A_g(t_0) - i \sin\theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff}]} e^{-i(\omega_g + \Omega_{pr} - \frac{\delta}{2})\tau} A_e(t_0) \quad , \quad (2.81)$$

$$A_e(t_0 + \tau) = -i \sin\theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{-i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff}]} e^{-i(\omega_e + \Omega_{pr} + \frac{\delta}{2})\tau} A_g(t_0) + \left[\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + i \cos\theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] e^{-i(\omega_e + \Omega_{pr} + \frac{\delta}{2})\tau} A_e(t_0) \quad . \quad (2.82)$$

Por último notemos que si suponemos oscilaciones rápidas de los estados intermedios del sistema, considerando que Δ_0 es mucho mayor que las frecuencias de Rabi y que δ , entonces δ^{AC} no debe alejarse mucho de δ de modo que $\Omega \approx |\Omega_{eff}|$.

Pulsos $\frac{\pi}{2}$ y π

Si consideramos el caso en que el pulso utilizado cumple que $\Omega\tau = \frac{\pi}{2}$ (razón por la cual este pulso es llamado $\frac{\pi}{2}$) y $\delta \approx \delta^{AC}$, entonces las ecuaciones (2.81) y (2.82) son

$$A_g(t_0 + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega_g + \Omega_{pr} - \frac{\delta}{2})\tau} A_g(t_0) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff}]} e^{-i(\omega_g + \Omega_{pr} - \frac{\delta}{2})\tau} A_e(t_0) \quad , \quad (2.83)$$

$$A_e(t_0 + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff}]} e^{-i(\omega_e + \Omega_{pr} + \frac{\delta}{2})\tau} A_g(t_0) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega_e + \Omega_{pr} + \frac{\delta}{2})\tau} A_e(t_0) \quad , \quad (2.84)$$

donde θ_0 está asociado a la fase del término $\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) - i \cos\theta \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$. Así, las ecuaciones (2.83) y (2.84) nos muestran la fase adquirida χ en el sistema debida a cada transición. Entonces para las transiciones

$$|g\rangle \rightarrow |g\rangle \text{ tendremos } \chi = (-\Omega_{pr} + \frac{\delta}{2} - \omega_g)\tau \quad ,$$

$$|e\rangle \rightarrow |g\rangle \text{ tendremos } \chi = (\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff} + (-\Omega_{pr} + \frac{\delta}{2} - \omega_g)\tau \quad ,$$

$$|g\rangle \rightarrow |e\rangle \text{ tendremos } \chi = -(\omega_1 - \omega_2)t_0 - \phi_{eff} + (-\Omega_{pr} - \frac{\delta}{2} - \omega_g)\tau \quad ,$$

$$|e\rangle \rightarrow |e\rangle \text{ tendremos } \chi = (-\Omega_{pr} - \frac{\delta}{2} - \omega_g)\tau \quad .$$

Ya que nuestro sistema empieza en estado g , consideramos el caso en que $A_g(t_0) = 1$, $A_e(t_0) = 0$ suponiendo $\delta \approx \delta^{AC}$ y calculamos las poblaciones $P_g = |A_g(t_0 + \tau)|^2$ y $P_e = |A_e(t_0 + \tau)|^2$ como funciones de $\Omega\tau$ de las ecuaciones (2.81) y (2.82). Entonces tenemos

$$P_g(\Omega\tau) = \cos^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad , \quad (2.85)$$

$$P_e(\Omega\tau) = \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad . \quad (2.86)$$

Por otro lado, para el pulso $\Omega\tau = \pi$ las ecuaciones (2.81) y (2.82) toman la forma

$$A_g(t_0 + \tau) = e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff}]} e^{-i(\omega_g + \Omega_{pr} - \frac{\delta}{2})\tau} A_e(t_0) \quad , \quad (2.87)$$

$$A_e(t_0 + \tau) = e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff}]} e^{-i(\omega_e + \Omega_{pr} + \frac{\delta}{2})\tau} A_g(t_0) \quad . \quad (2.88)$$

De modo que para las transiciones

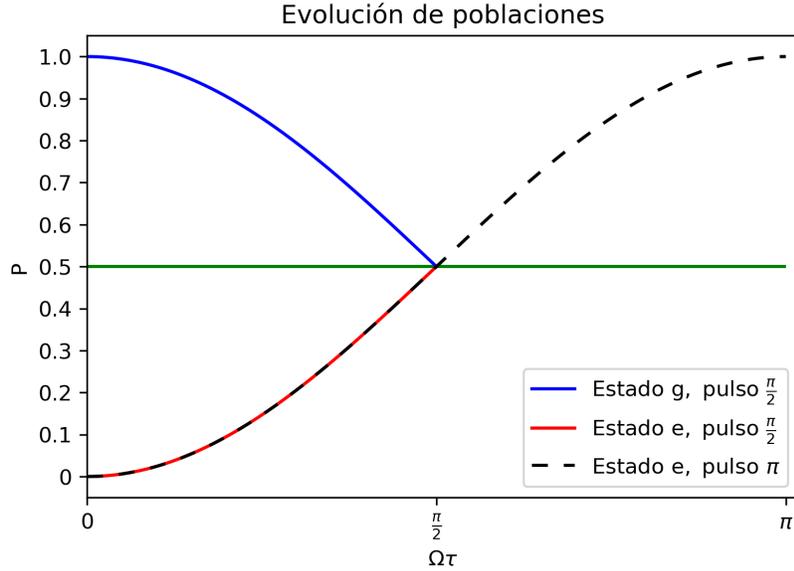
$$|e\rangle \rightarrow |g\rangle \text{ tendremos } \chi = (\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff} - \frac{\pi}{2} + (-\Omega_{pr} + \frac{\delta}{2} - \omega_g)\tau \quad ,$$

$$|g\rangle \rightarrow |e\rangle \text{ tendremos } \chi = -(\omega_1 - \omega_2)t_0 - \phi_{eff} - \frac{\pi}{2} + (-\Omega_{pr} - \frac{\delta}{2} - \omega_g)\tau \quad ,$$

y la población para $A_g(t_0) = 1$, $A_e(t_0) = 0$ suponiendo $\delta \approx \delta^{AC}$, como función de $\Omega\tau$ esta dada por

$$P_e(\Omega\tau) = \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad . \quad (2.89)$$

En la Figura 2.7 podemos observar como para el pulso $\frac{\pi}{2}$ mientras la población en el estado g decrece, la población en e crece hasta que ambas alcanzan la misma proporción, generando así una mezcla estadística. Para el pulso π vemos como la población crece hasta cambiar en su totalidad al nuevo estado. Este último efecto es llamado inversión de población. Estos efectos son precisamente los que buscamos para crear un análogo atómico al divisor, reflector y re-combinador de haz luminoso del interferómetro de Mach-Zehnder. Dicho sea de paso, con este desarrollo queda justificado el nombre de los pulsos, $\frac{\pi}{2}$ y π , que se ha venido mencionando en el texto.


 Figura 2.7: Evolución de poblaciones durante la duración de los pulsos $\frac{\pi}{2}$ y π .

Proceso interferométrico

Como hemos mencionado, buscamos emular el proceso de un interferómetro tipo Mach-Zehnder. Para un sistema atómico se usa una secuencia de pulsos $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$ los cuales tendrán la misma intensidad, estarán separados por un intervalo de tiempo T y tendrán duraciones $\tau - 2\tau - \tau$ respectivamente. Al usar esta secuencia de pulsos, cuando el sistema atómico de ^{87}Rb ingrese a la región de interferencia en estado $|g\rangle$, el pulso τ transferirá la mitad de los átomos al estado $|e\rangle$ actuando de manera similar al divisor de haz. Posteriormente el pulso 2τ realizará una inversión de poblaciones, transfiriendo la porción de átomos que se encuentren en $|g\rangle$ a $|e\rangle$ y la porción que se encuentren en $|e\rangle$ a $|g\rangle$ actuando así como un espejo reflector. El último pulso τ transfiriere los átomos que se encuentren en $|g\rangle$ a $|e\rangle$, recombinando los átomos en un solo estado final. Si suponemos que somos capaces de ajustar el desentonamiento de tal modo que podamos compensar el corrimiento Doppler y evitar el corrimiento Stark podemos tomar $\delta = 0$, $\Omega_{pr} = 0$ y que $|\Omega_{eff}| \gg |\delta - \delta^{AC}|$. Con esto en mente, escribamos las ecuaciones (2.83) y (2.84) en forma matricial

$$\begin{pmatrix} A_g \\ A_e \end{pmatrix} = R(t, \phi, \tau) \begin{pmatrix} A_g \\ A_e \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

donde

$$R(t, \phi, \tau) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{|\Omega_{eff}|\tau}{2}\right)e^{-i\omega_g\tau} & -i \sin\left(\frac{|\Omega_{eff}|\tau}{2}\right)e^{i[(\omega_1-\omega_2)t_0+\phi_{eff}-\omega_g\tau]} \\ -i \sin\left(\frac{|\Omega_{eff}|\tau}{2}\right)e^{-i[(\omega_1-\omega_2)t_0+\phi_{eff}+\omega_e\tau]} & \cos\left(\frac{|\Omega_{eff}|\tau}{2}\right)e^{-i\omega_e\tau} \end{pmatrix},$$

la cual nos dice como evolucionan los estados A_g y A_e cuando los pulsos son aplicados. En el tiempo entre pulsos, al no haber campo, $|\Omega_{eff}| = 0$, de modo que

$$R(T) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_g T} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_e T} \end{pmatrix}$$

Para simplificar un poco los cálculos, tomamos el origen temporal a mitad del segundo pulso, con lo que el primer pulso se aplica a tiempo $-T - 2\tau$ y el último a tiempo $T + 2\tau$. Considerando lo anterior, la secuencia de rayos que actuarán sobre el sistema se puede representar por la secuencia de matrices

$$R_t = R(T + \tau, \phi_3, \tau)R(T)R(-\tau, \phi_2, 2\tau)R(T)R(-T - 2\tau, \phi_1, \tau) \quad ,$$

donde hemos llamado ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 a la ϕ_{eff} de cada transición. De modo que, dado el estado inicial del sistema, el producto de las matrices de evolución y la ecuación (2.90) obtenemos que la probabilidad de transición de los estados excitados es

$$\begin{aligned} P &= |A_e(T + 2\tau)|^2 \\ &= \frac{1 - \cos(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)}{2} \quad , \end{aligned} \quad (2.91)$$

Notemos que, la expresión dentro del término cosenoidal es la fase interna adquirida en los distintos caminos del interferómetro

$$\Phi = \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 \quad . \quad (2.92)$$

Esta última expresión es análoga a la usada en el cálculo de las diferencias de fase de la Sección 2.1. De esta manera, hemos encontrado la manera de realizar un análogo a un proceso interferométrico en un sistema atómico, y en consecuencia determinar la intensidad del campo gravitatorio local. Para realizar este procedimiento es necesario preparar el sistema con el que se trabajará, lo cual se hace a través de una trampa magneto-óptica que se explicará más adelante.

Enfriamiento y atrapamiento láser

El proceso gravimétrico requiere de una preparación de los átomos, lo cual se hace a través de enfriamiento y atrapamiento láser. Todo este proceso suele ocurrir en una MOT (Magneto Optical Trap, Trampa Magneto Óptica). La MOT utiliza un arreglo de láseres que disminuyen la velocidad de los átomos en la nube de gas. A este proceso se le conoce como enfriamiento láser, puesto que puede asociarse una temperatura a dicha dispersión. El arreglo láser funciona en conjunto con un campo magnético, el cual captura los átomos en una región. Esta combinación entre los láseres y un campo magnético adecuado permite preparar una muestra bien definida y localizada de átomos con los que se trabaja. Una vez atrapados los átomos, la última parte del proceso dentro de la MOT es el lanzamiento de la muestra mediante la técnica de melazas móviles [6, 21, 23]. En las siguientes secciones exploran los puntos principales de este proceso.

3.1. Trampa Magneto Óptica

La MOT consiste de una región en la que hay un gas dentro de una cámara al alto vacío, la cual esta al alcance de un campo magnético generado por dos bobinas, una por encima y otra por debajo en una configuración tipo anti-Helmholtz. Se apuntan 3 láseres contra-propagantes hacia el centro de la cavidad, que mediante enfriamiento Doppler disminuyen la distribución de velocidad de los átomos y así, la temperatura del sistema.

Enfriamiento

El mecanismo básico del enfriamiento Doppler se basa precisamente en el efecto Doppler a través de la técnica de “melazas ópticas”. Cuando un átomo es iluminado por dos láseres exactamente iguales y contra-propagantes, al encontrarse el átomo en movimiento tendrá una velocidad v , de modo que, por efecto Doppler las frecuencias que “verá” el átomo cambiarán dependiendo de la dirección en que se mueva respecto a la dirección de propagación de los láseres

$$\omega' = \omega \mp kv \tag{3.1}$$

Así, las frecuencias aumentan si el átomo se acerca a la fuente o disminuyen cuando éste se aleja de la fuente. Para aprovechar el efecto Doppler usualmente se trabaja con átomos que son transferidos a un nuevo estado más frecuentemente al moverse hacia la fuente láser que en dirección opuesta a ella. El proceso debe hacerse repetidamente por lo que se configuran los láseres para que interactúen con ciertos estados específicos, motivo por el cual se recurre a la descripción de un sistema de dos niveles con un campo electromagnético.

Con esto en mente, podemos considerar a los láseres como ondas planas

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega_\ell t). \quad (3.2)$$

con k y ω_ℓ el número de onda y frecuencia del láser respectivamente. Esta fuente, para un sistema de dos niveles implica un hamiltoniano de interacción del tipo dipolar eléctrico:

$$\hat{H} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

Si definimos $\Omega \equiv \frac{\langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 | g \rangle}{\hbar}$, introducimos el hamiltoniano (3.3) en la ecuación de Schrödinger para el sistema de dos niveles y escribimos el resultado en términos de la matriz de densidad del sistema

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix},$$

y con ello llegaremos a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{gg}}{dt} &= \gamma\rho_{ee} + \frac{i}{2}(\Omega^*\tilde{\rho}_{eg} - \Omega\tilde{\rho}_{ge}) \quad , \\ \frac{d\rho_{ee}}{dt} &= -\gamma\rho_{ee} + \frac{i}{2}(\Omega\tilde{\rho}_{ge} - \Omega^*\tilde{\rho}_{eg}) \quad , \\ \frac{d\tilde{\rho}_{ge}}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta\right)\tilde{\rho}_{ge} + \frac{i}{2}\Omega^*(\rho_{ee} - \rho_{gg}) \quad , \\ \frac{d\tilde{\rho}_{eg}}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right)\tilde{\rho}_{eg} + \frac{i}{2}\Omega(\rho_{gg} - \rho_{ee}) \quad , \end{aligned} \quad (3.4)$$

con $\tilde{\rho}_{ge} \equiv \rho_{ge}e^{i\delta}$. Del sistema (3.4) podemos encontrar las soluciones

$$\rho_{eg} = \frac{i\Omega}{2(\gamma/2 - i\delta)(1 + s)} \quad , \quad (3.5)$$

$$\rho_{ee} = \frac{s_0/2}{1 + s_0 + (2\delta/\gamma)^2} \quad , \quad (3.6)$$

donde $s = \frac{s_0}{1+(2\delta/\gamma)^2}$, (γ) es el ritmo de decaimiento de la muestra, (I) la intensidad del láser, (I_s) la intensidad de saturación de la muestra, $s_0 = I/I_s$ y (δ) el desintonamiento entre la frecuencia de absorción de la muestra y la del láser.

Por otro lado, considerando una descripción semi-clásica de la interacción de un campo luminoso con un sistema de dos niveles, se define la fuerza F en un átomo como el valor esperado del operador de fuerza \hat{F}

$$F = \langle \hat{F} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle, \quad (3.7)$$

donde \hat{p} es el operador de momento. Si \hat{H} es el operador hamiltoniano, recordamos que la evolución temporal de un operador independiente del tiempo es

$$\frac{d}{dt}\hat{p} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}] \rangle \quad , \quad (3.8)$$

y dado que $[\hat{H}, \hat{p}] = i\hbar \frac{\partial \hat{H}}{\partial z}$, entonces

$$F = - \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial z} \right\rangle. \quad (3.9)$$

Combinando la Ec. (3.9) con las soluciones en (3.5) podemos encontrar una fuerza de la absorción y emisión espontanea de los átomos

$$\begin{aligned} F_{sp}(k, \delta) &= \hbar\gamma\rho_{ee} \\ &= \frac{\hbar k s_0 \gamma / 2}{1 + s_0 + (2\delta/\gamma)^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Esto es un efecto resultante solamente de la interacción de los átomos con el campo luminoso a través del efecto Doppler, sin embargo actúa realmente como una fuerza sobre el sistema, limitando el movimiento de los átomos. Para un par de haces contra-propagantes, si un haz láser posee frecuencias por debajo de las frecuencias atómicas de absorción, los átomos verán los fotones de los rayos que se propagan en dirección opuesta a su movimiento más cercanos a su frecuencia de absorción, y lo contrario ocurrirá con los que se propagan en su misma dirección. Al absorber los fotones contra-propagantes cambiará su momento por una cantidad igual al momento del fotón absorbido para después emitirlo por emisión espontánea en una dirección aleatoria un tiempo después. La repetición constante de este proceso resultará en un cambio de momento del átomo debido a una “fuerza viscosa de arrastre”. Para encontrar esta fuerza consideremos un par de haces contra-propagantes, que debido al efecto Doppler tendrán un desentonamiento con la frecuencia de absorción ω_a del tipo

$$\begin{aligned} \delta_{\pm d} &= \omega' - \omega_a \\ &= \omega - \omega_a \mp kv \\ &= \delta \mp kv \quad , \end{aligned}$$

de modo que cada haz imprimirá una fuerza $F_{sp}(\pm k, \delta \mp kv)$ a los átomos. Así que la fuerza viscosa F_{vi} , resultante del enfriamiento será

$$\begin{aligned} F_{vi} &= F_{sp}(k, \delta - kv) + F_{sp}(-k, \delta + kv) \\ &= \frac{\hbar k s_0 \gamma / 2}{1 + s_0 + (2(\delta - kv)/\gamma)^2} - \frac{\hbar k s_0 \gamma / 2}{1 + s_0 + (2(\delta + kv)/\gamma)^2} \\ &\approx \frac{8\hbar k^2 s_0 (\delta/\gamma)}{(1 + s_0 + (2\delta/\gamma)^2)^2} v \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

La aproximación hecha en la última igualdad supone que las velocidades de los átomos son pequeñas (el cual es el objetivo del proceso). Podemos escribir F_{vi} como

$$F_{vi} = -\beta v \quad (3.12)$$

$$\text{con } \beta = -\frac{8\hbar k^2 s_0 (\delta/\gamma)}{(1 + s_0 + (2\delta/\gamma)^2)^2}$$

Este proceso disminuirá la distribución de velocidad de los átomos, limitado solamente por el posible momento absorbido debido al retroceso de los átomos el cual se traducirá en un ligero aumento de la distribución de velocidades. Ya que el momento atómico cambia en $\hbar k$, su energía cinética de retroceso E_r cambiara por $E_r = \frac{\hbar k^2}{2M} = \hbar\omega_r$. Esto implica que la frecuencia promedio de cada absorción será $\omega_{abs} = \omega_a + \omega_r$ y la frecuencia promedio emitida será $\omega_{em} = \omega_a - \omega_r$. Entonces el campo pierde una energía promedio de $\hbar(\omega_{abs} - \omega_{em}) = 2\hbar\omega_r$ en cada dispersión. Esta energía se transforma en energía cinética por el retroceso de cada dispersión lo cual resulta en que la muestra sea calentada. El aumento y disminución de las distribuciones de velocidades de la muestra se traduce en un aumento y disminución de la temperatura de la muestra. El efecto neto total será de disminución de la temperatura hasta el límite [23, 26]

$$T_D = \frac{\hbar\gamma}{2k_B} \quad (3.13)$$

En tres dimensiones la diferencia radica en que se han de colocar 3 pares de haces contra-propagantes mutuamente ortogonales, con γ el ritmo de decaimiento del estado excitado al estado base y k_B la constante de Boltzmann a las cuales corresponde una velocidad [23, 27]

$$v_D = \frac{\omega_r \lambda}{2\pi} \sqrt{2\epsilon} \quad ,$$

con $\epsilon = \frac{\omega_r}{\gamma} = \frac{\hbar k^2}{2M\gamma}$, y M es la masa del átomo.

La Figura 3.1 muestra un diagrama general de una trampa magneto óptica. Este diagrama muestra una esfera central sellada al vacío, junto al resto del sistema, en la cual ingresa un gas de átomos evaporados de una muestra. Los haces láser representados por líneas rojas que se cruzan en una región en común, interactúan con la nube de átomos, enfriando una parte de estos y manteniendo el conjunto en la región central. Sin embargo, los haces no evitan por completo que los átomos enfriados puedan escapar de dicha región.

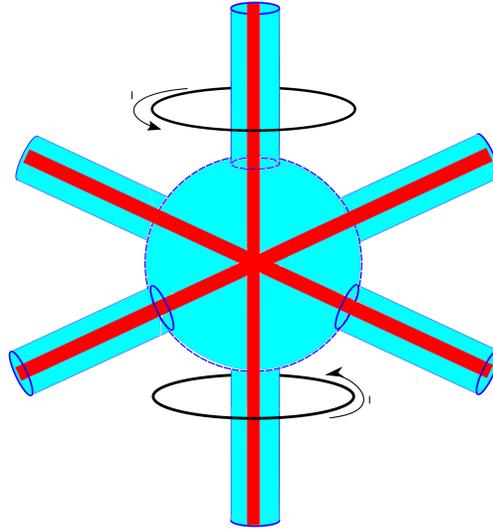


Figura 3.1: Diagrama de una trampa magneto óptica. En rojo se muestran los 6 rayos de luz contrapropagantes, y fuera de la esfera centra se muestra esquemáticamente las corrientes de las bobinas anti-Helmholtz.

Atrapamiento

Como mencionamos, aunque la técnica de melazas ópticas puede funcionar parcialmente como un mecanismo de atrapamiento, no mantiene los átomos confinados y permite que éstos escapen después de un cierto tiempo. Esto se debe al cambio de momento (y dirección) aleatorio que se ha mencionado previamente, motivo por el cual se añaden dos bobinas, lo que puede observarse en la parte externa de la esfera central de la Figura 3.1. En las bobinas circulan corrientes en sentidos opuestos, de tal modo que generen campos magnéticos opuestos que se cancelaran en una región central que coincide con la región de atrapamiento. Cuando las bobinas están separadas 1.25 veces su radio, la trampa tiene las mismas dimensiones radiales y longitudinales [23, 28]. La Figura 3.2 muestra un esquema del campo generado por un par de bobinas en el que también podemos notar que el arreglo esta dispuesto de tal forma que el campo magnético se anula en el centro de la trampa y crece mientras nos alejamos del centro, debido a que es generado por corrientes opuestas en las bobinas. El campo generado por este arreglo puede describirse como

$$\begin{aligned}
 B &= A\chi \quad , & (3.14) \\
 \chi &= \pm\sqrt{\rho^2 + 4z^2} \quad , \\
 \rho^2 &= x^2 + y^2 \quad .
 \end{aligned}$$

donde A es una constante de proporcionalidad con unidades de $\frac{\text{Gauss}}{m}$ que relaciona la variable espacial χ con el campo magnético B . La interacción con el campo tendrá como consecuencia que los átomos se vean sometidos al efecto Zeeman, lo cual modificará el desentonamiento de las frecuencias por

$$\delta_{\pm m} = \delta \mp kv \pm \mu B/\hbar \quad , & (3.15)$$

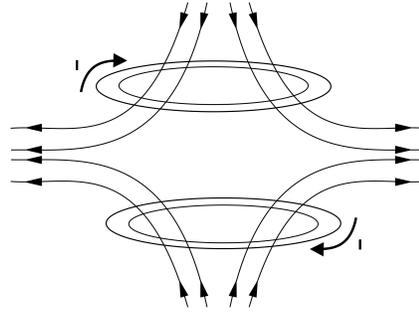


Figura 3.2: Esquema del campo generado por un par de bobinas anti-Helmholtz.

donde μ es el momento magnético efectivo para la transición. La influencia del campo magnético alterará la fuerza F_{sp} , así como la fuerza resultante. Si repetimos el proceso de la Ec. (3.11), pero ahora para el par $\delta_{\pm m}$, encontraremos que la fuerza total de la técnica de “melazas ópticas” es

$$F_{mo} = -\beta v - \kappa \chi \quad , \quad \text{con} \quad (3.16)$$

$$\kappa = \frac{\mu A}{\hbar k} \beta \quad .$$

Notamos entonces, que el atrapamiento funciona por bombeo óptico de átomos moviéndose lentamente en campo magnético linealmente inhomogéneo de forma $B = A\chi$. A medida que nos alejamos del centro, la fuerza del campo magnético crecerá y los átomos se verán sometidos al efecto Zeeman además del efecto Doppler de los rayos contra-propagantes, cuya frecuencia se encuentra por debajo de la frecuencia de absorción. El desdoblamiento entre los estados base con $J_g = N$ y excitado $J_e = J_g + 1$ posee un desdoblamiento de 3 componentes, es decir, $M_g = 0, M_e = 0, \pm 1$. Podemos dividir la región en la que actúa el campo en $\chi > 0$ y $\chi < 0$ de modo que, cuando el átomo se encuentre en la región $\chi > 0$ la frecuencia para la transición a $M_e = 1$ aumentara y para $M_e = -1$ disminuirá. De esta manera, la frecuencia de transición se encontrara más cercana a las transiciones con $\Delta M = -1$. Al otro lado del centro de la trampa la situación se invierte de modo que ahora se favorecerán las transiciones con $\Delta M = 1$. El efecto conjunto favorece la dispersión de los haces contra-propagantes provocando nuevamente un cambio de momento, pero que tiene como efecto neto dirigir los átomos al centro de la trampa. La Figura 3.3 muestra un esquema del proceso descrito.

Como vemos, ambos los mecanismos de enfriamiento y atrapamiento tienen cierta similitud. Sin embargo el atrapamiento magnético actúa en el espacio de coordenadas mientras que el enfriamiento láser en el de velocidades y al conseguir que las regiones centrales de enfriamiento y atrapamiento coincidan obtenemos el efecto buscado de confinamiento.

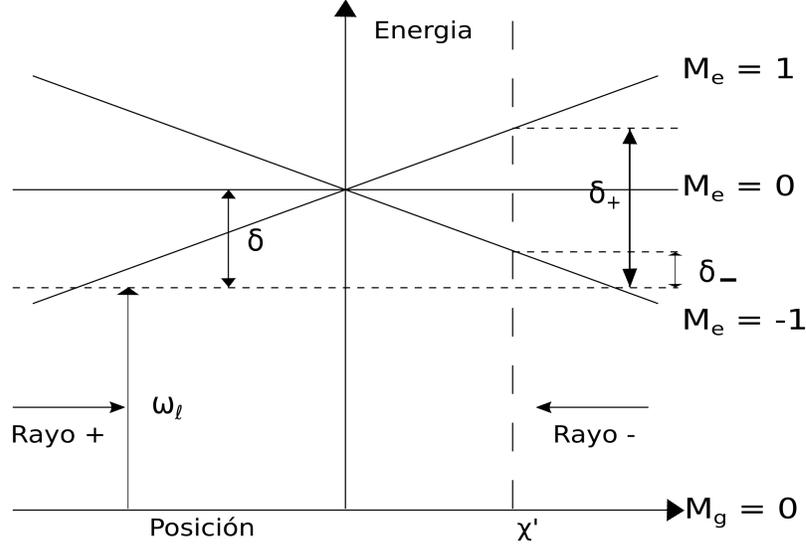


Figura 3.3: Esquema del comportamiento de los átomos durante el proceso de atrapamiento magnético. En este esquema, para un átomo que se encuentra en la región χ' las transiciones más probables son con el rayo -.

Lanzamiento de los átomos

Una vez que se tiene contenida una muestra de átomos fríos buscamos enviarlos a la región de interacción para poder trabajar con ellos. La región de interacción se encuentra sobre la región de atrapamiento de modo que es necesario lanzar los átomos para que ingresen en esta región. Para lanzar los átomos se recurre a la técnica de “melazas móviles”. En ésta, la frecuencia del haz que apunta hacia arriba y se ajusta a $\omega_\ell + \Delta\omega_\ell$, de modo que definimos $\delta_+ = \omega_\ell - \omega_0 - kv + \Delta\omega_\ell$. Mientras que, el que apunta hacia abajo se ajusta a la frecuencia $\omega_\ell - \Delta\omega_\ell$ de modo que definimos $\delta_- = \omega_\ell - \omega_0 + kv - \Delta\omega_\ell$. Si consideramos esto en las fuerzas ópticas de dispersión tenemos que, la fuerza de las “melazas móviles” es

$$\begin{aligned}
 F_{mm} &= F_{sp}(\omega_\ell - \omega_0 - kv + \Delta\omega_\ell) - F_{sp}(\omega_\ell - \omega_0 + kv - \Delta\omega_\ell) \\
 &= \frac{s_0 \gamma \hbar k}{2} \left(\frac{1}{1 + s_0 + (2\delta_+/\gamma)^2} - \frac{1}{1 + s_0 + (2\delta_-/\gamma)^2} \right) \\
 &= \frac{2s_0 \hbar k}{\gamma} \left(\frac{\delta_-^2 - \delta_+^2}{(1 + s_0 + (2\delta_+/\gamma)^2)(1 + s_0 + (2\delta_-/\gamma)^2)} \right) \\
 &= \frac{2s_0 \hbar k}{\gamma} \left(\frac{(\omega_\ell - \omega_0)(kv - \Delta\omega_\ell)}{(1 + s_0 + (2\delta_+/\gamma)^2)(1 + s_0 + (2\delta_-/\gamma)^2)} \right) . \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Ahora, para velocidades bajas a las que se producen los lanzamientos y enfriamientos y debido a que $\Delta\omega_\ell$ es pequeño, podemos tomar $\delta \approx \delta_+ \approx \delta_- \approx \omega_\ell - \omega_0$. Bajo estas consideraciones

encontramos entonces que

$$\begin{aligned} F_{mm} &= \frac{8\hbar k s_0 \delta / \gamma}{(1 + s_0 + (2\delta/\gamma)^2)^2} (kv - \Delta\omega_\ell) \\ &= \beta \left(\frac{\Delta\omega_\ell}{k} - v \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si los átomos son impulsados verticalmente con la fuerza de la ecuación (3.18), entonces esta dejará de actuar cuando el sistema alcance una velocidad

$$v = \frac{\Delta\omega_\ell}{k}. \quad (3.19)$$

Ahora, en un marco de referencia moviéndose hacia arriba con la velocidad de la Ec. (3.19), el corrimiento Doppler estará asociado a esta velocidad. De modo que en este marco de referencia los rayos parecen tener la misma frecuencia, entonces el mecanismo de melazas ópticas reduce la velocidad a cero en este marco de referencia. Estos átomos tienen la misma dispersión de velocidades alrededor de su velocidad media como los átomos en la técnica de melazas ópticas con un campo no amortiguado $\Delta\omega_\ell = 0$, de modo que la temperatura es la misma en ambos casos. Por tanto, los átomos se acelerarán hasta alcanzar la velocidad de este marco de referencia que anulara el efecto Doppler y hará subir los átomos hasta una altura máxima. La región de interferencia en el aparato de medición tiene una longitud aproximada de $1m$, entonces tomando el punto de partida como el origen, para un proyectil que alcance una altura de un metro se requiere que

$$\begin{aligned} 1 &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad , \text{(Ec. para distancias)} \\ 0 &= v_0 - g t \quad , \text{(Ec. para velocidades)} \end{aligned}$$

por tanto

$$t = \frac{v_0}{g} \quad , \quad (3.20)$$

y con ello podemos la velocidad inicial

$$\begin{aligned} 1 &= v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} \quad , \\ 1 &= \frac{v_0^2}{2g} \quad , \end{aligned}$$

y entonces

$$v_0 = \sqrt{2g} \quad . \quad (3.21)$$

De la Ec. (3.21) encontramos que se requiere una velocidad de lanzamiento de $v_0 \approx 4.427 \frac{m}{s}$ e introduciendo este resultado en la Ec. (3.20) encontramos que tardaría en subir $t_s \approx 451ms$. Por tanto, para un láser con longitud de onda de $\lambda \approx 780.2nm$ como el usado para realizar las transiciones del ^{87}Rb , según la ecuación (3.19), requeriremos un desentonamiento de $\Delta\omega_\ell \approx 5.674 MHz$.

Transiciones del ^{87}Rb

El átomo más usado para interferometría es el isótopo ^{87}Rb , este posee un spin nuclear total $I = \frac{3}{2}$ de modo que este puede encontrarse en los estados $5S_{\frac{1}{2}}$ con $F = 1$ ó $F = 2$ y puede transferirse a los estados $5S_{\frac{1}{2}}$, $F = 1, 2$ o a los estados $5P_{\frac{3}{2}}$, $F' = 0, 1, 2, 3$. En analogía

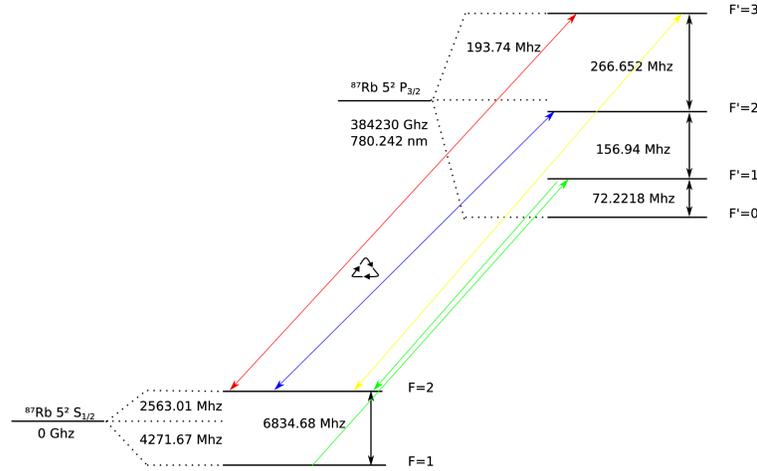


Figura 3.4: Diagrama de cascada de transiciones del ^{87}Rb . El ciclo principal de enfriamiento se representa por una línea roja, mientras que el de rebombado por una línea azul. El proceso $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$ también se encuentra representado en este diagrama mediante líneas verdes. La línea amarilla representa el proceso de detección.

con el Cs , para el enfriamiento del Rb tenemos un láser que está en un ciclo que transfiere los átomos del estado $F = 2$ al estado $F' = 3$. El estado $F' = 3$ solamente puede decaer al estado original $F = 2$, lo cual crea un bucle con el cual se genera el proceso de enfriamiento. Sin embargo, debido a que el láser posee un desentonamiento, existe una pequeña probabilidad de que un átomo sea transferido al estado $F' = 2$. En dado caso el estado puede decaer a $F = 2$ o a $F = 1$, esto presenta un problema pues el decaimiento a $F = 1$ rompería el ciclo y disminuiría el número de átomos que quedarán en la trampa. Por tal motivo se incluye un haz de rebombado, el cual transfiere nuevamente los átomos de $F = 1$ a $F' = 2$ lo que les ofrece nuevamente la posibilidad de decaer a $F = 2$ y reingresar al ciclo. La Figura 3.4 muestra un diagrama de este proceso. Para la región de interferencia los átomos en el estado $F = 1$ serían parcialmente transferidos al estado $F = 2$ a través del acoplamiento con el estado $F' = 1$ por la secuencia de pulsos $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$. Al llegar a la zona de medición se detectarían los estados en $F = 2$ primero siendo iluminados por un rayo que transferirá los átomos de $F = 2$ a $F' = 3$, luego otro pulso transferirá los átomos que aun se encuentren en el estado $F = 1$ a $F = 2$ para después ser transferidos a $F' = 3$ por el rayo de detección. Así la fluorescencia de los átomos en el estado final sería proporcional al número de átomos que se encontraban en el estado $F = 2$. El diagrama de este proceso también puede verse en la Figura 3.4.

3.2. Relojes atómicos y gravimetría

La definición de patrones de medida es un campo relevante debido a la necesidad de establecer comparaciones objetivas en distintas circunstancias. El sistema internacional de unidades establece un conjunto de unidades básicas, las cuales sirven como una referencia internacional para los instrumentos de medición. En principio estas unidades se definían en torno a objetos físicos macroscópicos relativamente comunes, sin embargo, la constante necesidad de aumentar la precisión y exactitud en los instrumentos, aunado al pequeño pero continuo desgaste de estos objetos debido a su interacción con el ambiente modificaba sus características iniciales, lo que implicaba que la referencia cambiaba con el tiempo trayendo complicaciones al realizar nuevas mediciones. Tales hechos llevaron a redefinir las unidades de modo que dependieran de procesos físicos básicos, los cuales fueran independientes de su interacción con el ambiente. En los años 60 varias cantidades fueron redefinidas tomando este hecho en cuenta, entre ellos el segundo, el cual fue definido como la duración de 9,192,631,770 oscilaciones de la radiación emitida en la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 del átomo de cesio ^{133}Cs , a una temperatura cercana a los 0K [29].

El uso del ^{133}Cs en los relojes atómicos se debe primeramente a que el segundo moderno está definido en términos de sus transiciones atómicas. Las razones para elegirlo son similares a las que se han mencionado para el Rb en el caso de gravímetros. Además, ofrece una transición atómica con una longitud de onda muy corta, ofreciendo una gran estabilidad, lo cual quiere decir que para un cierto tiempo de medida, el ^{133}Cs ofrece un gran número de transiciones entre los estados involucrados, y ya que el segundo está definido en términos del número de oscilaciones (transiciones), su uso permite disminuir el número de repeticiones en el experimento. Esto último permite determinar la frecuencia asociada al número de oscilaciones (y con esto el segundo) con una mayor precisión y exactitud en los resultados [30, 31].

Ahora, para que un reloj atómico realice sus mediciones se inicia con una nube de átomos, los cuales son evaporados a partir de un material, recolectados en una nube y enfriados a través de un arreglo de láseres contra-propagantes y campos magnéticos generados por bobinas en una MOT. Una vez atrapados los átomos, se apagan los campos magnéticos, y mediante el desentonamiento de los láseres superior e inferior se lanza a los átomos verticalmente mediante la técnica llamada melaza móvil. En el proceso de subida y bajada parte de los átomos de la nube son transferidos a un estado excitado hiperfino utilizando microondas. Durante el trayecto de subida y bajada se adquiere una fase, la cual es proporcional a la diferencia de frecuencias entre el pulso de microondas y la resonancia atómica y después de atravesar la cavidad de microondas, en su camino de regreso, un nuevo pulso láser de prueba es lanzado hacia la nube, el cual estimula la fluorescencia de los átomos que hayan pasado a estados excitados. El proceso es repetido en muchas ocasiones, probando diferentes frecuencias en la cavidad de microondas hasta encontrar la frecuencia que ofrece el mayor número de transiciones, pues la diferencia de frecuencias es exactamente igual a cero cuando las microondas tienen exactamente la misma energía (frecuencia) que la diferencia de energías entre los niveles de energía que se utilizan para la medición. Esta frecuencia será la frecuencia de resonancia natural del Cs y la usada para definir el segundo. Dicho proceso es lo que permite una medición de alta precisión de esta frecuencia de transición y por tanto se puede definir el segundo en términos de esta frecuencia

fundamental asociada a la estructura interna de los átomos. Como vemos, en este proceso no existe un pulso de inversión de poblaciones y la transferencia de momento por los pulsos de microondas no es relevante en el proceso. Sin embargo, siendo aparatos cuyo funcionamiento es similar, la diferencia fundamental se encuentra en que en los relojes atómicos la fase adquirida es un término inevitable que se remueve para obtener una medición correcta, mientras que en un gravímetro el conocer esta fase es el punto importante de todo el proceso. Si además tenemos en cuenta que los relojes atómicos se encuentran en desarrollo desde 1945 entonces podemos decir que un gravímetro atómico es una ingeniosa aplicación de un aparato ya existente con las adaptaciones expuestas en este capítulo [32, 33].

Algunas fuentes de ruido y errores sistemáticos

Hemos descrito el funcionamiento general de un interferómetro de una forma ideal, sin embargo, en un sistema real es imposible tener el control total de todos los componentes y es posible que los resultados se vean afectados por muchos factores, los cuales se manifestarán como un error o discrepancia entre los valores que se esperan obtener y los valores obtenidos. A pesar de esto, es posible estimar qué tanto afectan a nuestro sistema tales errores. Por ejemplo, de acuerdo a lo que se vio en los capítulos anteriores hay muchos puntos del experimento que son, en mayor o menor medida una fuente de ruido o discrepancia en las mediciones. En particular, a través del espejo retroreflector para realizar la interferometría, pueden presentarse varios factores externos que afectan las mediciones de nuestro aparato, ya que este no solo puede inclinarse sino que también puede vibrar debido a que el sistema completo se encuentra en contacto de alguna manera con los alrededores. Para minimizar el impacto que tengan estos errores en las mediciones se suele dotar a los interferómetros atómicos con un conjunto de acelerómetros y resortes cuyo propósito es aislar al aparato de movimientos externos. En general las partes de nuestro aparato suelen estar fijas y el mecanismo de aislamiento de movimiento evita desplazamientos indeseados importantes, sin embargo, es necesario estimar qué tanto afecta el entorno a nuestro sistema y, en nuestro caso particular, al espejo.

4.1. Aislamiento de vibraciones

Para estudiar las vibraciones del espejo consideremos que este es un objeto de masa m cuyo movimiento x se busca desacoplar de cualquier movimiento del piso x_g y cuelga de un resorte con constante k y factor de amortiguamiento c [6, 34, 35]. Por si solo, esto es un oscilador armónico amortiguado

$$\ddot{x} + 2\xi_0\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (4.1)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia intrínseca del sistema y $\xi_0 = \frac{c}{2m\omega_0}$ es la constante de amortiguamiento. Sin embargo, este movimiento no está aislado debido a las vibraciones del propio suelo, de modo que debe estar forzado por el movimiento de este. Se considera como un forzamiento extra $2\xi_0\omega_0\dot{x}_g$ debido al piso que además puede sufrir un desplazamiento x_g respecto al origen

del sistema de referencia. De modo que la ecuación del sistema forzado es

$$\ddot{x} + 2\xi_0\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 2\xi_0\omega_0\dot{x}_g + \omega_0^2x_g \quad (4.2)$$

El aislamiento de vibraciones verticales se hace introduciendo un par de fuerzas de amortiguamiento extra a través de un sistema de resortes, pistones y acelerómetros. El sistema de amortiguamiento medirá las fuerzas respecto al piso y determinará los parámetros L y H que permitirán ajustar la fuerza $F_a = -mL\ddot{x}$ que es proporcional a la aceleración del objeto y la fuerza $F_v = -2m\omega_0H\dot{x}$ que es proporcional a la velocidad del objeto que se generarán como respuesta del sistema de amortiguamiento para estabilizar el sistema. El arreglo resultante nos deja con una nueva ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \frac{2\xi_0\omega_0(1+H)}{1+L}\dot{x} + \frac{\omega_0^2}{1+L}x = \frac{2\xi_0\omega_0}{1+L}\dot{x}_g + \frac{\omega_0^2}{1+L}x_g \quad , \quad (4.3)$$

y el sistema tiene una nueva frecuencia de resonancia $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{L+1}}$ y un nuevo factor de amortiguamiento $\xi_1 = \frac{\xi_0(1+H)}{\sqrt{L+1}}$, esto permite modificar la frecuencia de resonancia del sistema y aislarla de la del piso. Consideremos ahora que el lado derecho de 4.3 puede escribirse como

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\Theta_n t) + b_n \sin(\Theta_n t) \quad , \quad (4.4)$$

$$\text{con } \Theta_n = n\omega \quad , \quad (4.5)$$

de modo que tendremos la ecuación

$$\ddot{x} + 2\xi_1\omega_1\dot{x} + \omega_1^2x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\Theta_n t) + b_n \sin(\Theta_n t) \quad . \quad (4.6)$$

Por superposición podemos separar el sistema, esto es, para hallar la solución a (4.6) podemos escribir una ecuación para cada componente del forzamiento y escribir la solución como la suma de las soluciones para cada componente. De este modo sólo requerimos resolver

$$\ddot{x} + q\dot{x} + \omega_1^2x = a_n \cos(\Theta_n t) \quad , \quad (4.7)$$

$$\ddot{x} + q\dot{x} + \omega_1^2x = b_n \sin(\Theta_n t) \quad , \quad (4.8)$$

donde $q = 2\omega_1\xi_1$. La solución a las ecuaciones 4.7 y 4.8 se encuentra como suma de la solución al sistema no forzado más una solución particular al sistema forzado.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad , \quad (4.9)$$

La solución general al sistema no forzado es

$$x_h(t) = e^{\frac{q}{2}t} \left(C_1 e^{t\sqrt{1-2\omega_1/q}} + C_2 e^{-t\sqrt{1-2\omega_1/q}} \right) \quad , \quad (4.10)$$

de modo que solo requerimos encontrar una solución al sistema forzado para cada una de ellas. En el caso de (4.7) consideramos la solución $x_p(t) = A_n \cos(\Theta_n t - \eta_n)$. Al introducir esta solución en (4.7) obtenemos

$$A_n (\omega_1^2 - \Theta_n^2) \cos(\Theta_n t - \eta_n) - A_n q \Theta_n \sin(\Theta_n t - \eta_n) - a_n \cos(\Theta_n t) = 0 \quad , \quad (4.11)$$

Si expandimos los términos de suma de ángulos llegamos a que

$$\begin{aligned} & \left\{ A_n \left[(\omega_1^2 - \Theta_n^2) \cos(\eta_n) + q\Theta_n \sin(\eta_n) \right] - a_n \right\} \cos(\Theta_n t) \\ & + \left\{ A_n (\omega_1^2 - \Theta_n^2) \sin(\eta_n) - A_n q\Theta_n \cos(\eta_n) \right\} \sin(\Theta_n t) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Al ser seno y coseno linealmente independientes para que se cumpla la condición anterior es necesario que sus coeficientes se anulen y por tanto obtenemos que

$$\eta_n = \arctan\left(\frac{q\Theta_n}{\omega_1^2 - \Theta_n^2}\right) \quad , \quad (4.12)$$

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Theta_n^2)^2 + q^2\Theta_n^2}} \quad . \quad (4.13)$$

Ahora consideramos $x_p = B_n \sin(\Theta_n t - \psi_n)$ y la introducimos en 4.8. Después de un desarrollo similar obtendremos que

$$\psi_n = \eta_n \quad , \quad (4.14)$$

$$B_n = \frac{b_n}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Theta_n^2)^2 + q^2\Theta_n^2}} \quad . \quad (4.15)$$

Por tanto la solución particular completa es

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Theta_n^2)^2 + q^2\Theta_n^2}} \right) [a_n \cos(\Theta_n t - \eta_n) + b_n \sin(\Theta_n t - \eta_n)] \quad , \quad (4.16)$$

que podemos escribir como

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Theta_n^2)^2 + q^2\Theta_n^2}} \right) \cos\left(\Theta_n t - \eta_n - \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\right) \quad . \quad (4.17)$$

Ya que $|\cos x| \leq 1$ entonces

$$|x_p(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Theta_n^2)^2 + q^2\Theta_n^2}} \quad , \quad (4.18)$$

de modo que

$$|x_p(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\max\{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Theta_n^2)^2 + q^2\Theta_n^2}} \quad . \quad (4.19)$$

Para pasar de (4.18) a (4.19) hemos hecho una sobreestimación, tomando solo el mayor de los elementos $M = \max\{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\}$ que multiplicara al resto de los elementos de la suma. Hemos

realizado esta sobreestimación, ya que nuestro interés reside en limitar las vibraciones a partir de una cierta cota superior debajo de la cual pueden ocurrir todo tipo de vibraciones que no perturben nuestro sistema más allá de nuestra cota. Entonces al ser M un término constante puede extraerse de la suma para así obtener

$$\frac{|x_p(t)|}{M} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Theta_n^2)^2 + q^2 \Theta_n^2}} \quad (4.20)$$

La evolución de las cotas superiores para (4.20) puede verse en la Figura 4.1, donde hemos usado los valores $\omega_0 = 1$, $\xi_0 = 0.03$, $L = 10000$ y $H = 300$ usados en [6] en un arreglo similar. Podemos observar que mientras nos acercamos a $6.28 \frac{rad}{s} \approx 1Hz$, el movimiento decae bruscamente y continúa tendiendo a cero para frecuencias superiores, de modo que solo hemos de ser precavidos con frecuencias inferiores a $1Hz$. Hemos visto como el sistema de amortiguamiento nos permite controlar la interferencia de las vibraciones del espejo. Sin embargo, el sistema vibracional aún puede estar sujeto a fuentes de ruido, las cuales estudiaremos en la siguiente sección.

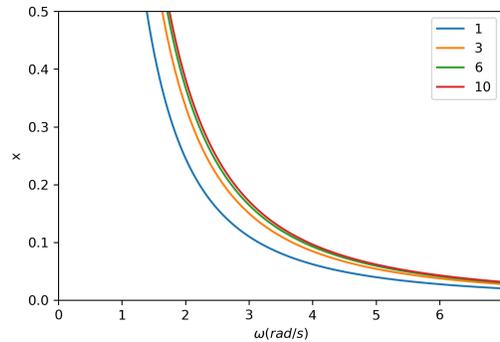


Figura 4.1: Cota superior de $x_p(t)$ para los primeros 1,3,6 y 10 términos, donde se puede observar que conforme se utilizan más términos en la suma, la curva converge a una cota superior.

4.2. Fuentes de ruido

Se le llama ruido a toda perturbación externa que pueda interferir con las mediciones del instrumento, la cual, por distintas razones no puede ser tomada en cuenta dentro del diseño experimental. Estas variaciones provocan que los datos reportados por nuestro instrumento difieran de los valores esperados, de manera que es importante determinar la fuente más importante de ruido y estimar su influencia en las mediciones de nuestro aparato. Para esto recurriremos a la función de sensibilidad, la cual nos permitirá caracterizar el ruido del sistema.

Función de sensibilidad

La función de sensibilidad caracteriza el comportamiento de la transición de probabilidad atómica en presencia de variaciones de fase de los haces Raman, lo cual permite caracterizar

las variaciones de fase en las mediciones. Para definirla, consideremos que a un tiempo t ocurre un cambio de fase $\delta\phi$ en la secuencia de pulsos de Raman, lo cual modifica la transición de probabilidad en $\delta P(\delta\phi, t)$ [36, 37]. Con esto en mente, la función de sensibilidad se define como

$$g(t) = 2 \lim_{\delta\phi \rightarrow \infty} \frac{\delta P(\delta\phi, t)}{\delta\phi}. \quad (4.21)$$

La fase total Φ es obtenida a través de una transición de probabilidad, razón por la cual es conveniente llevar al sistema a la situación en que $\Phi = \frac{\pi}{2}$, de tal manera que podamos medir las partículas que realizaron la transición y tomaron una trayectoria diferente durante el experimento. Si recordamos de la sección 2.2 que $P = \frac{1}{2}(1 + \cos \Phi)$, y calculamos la variación de fase $\delta\phi$ de la transición de probabilidad $P(\delta\phi, t)$ obtenemos

$$\delta P(\delta\phi, t) = \frac{1}{2} \sin \Phi \delta\Phi(\delta\phi, t) \quad , \quad (4.22)$$

y para $\Phi = \frac{\pi}{2}$ tenemos

$$\delta P(\delta\phi, t) = \frac{1}{2} \delta\Phi(\delta\phi, t) \quad , \quad (4.23)$$

de modo que

$$g(t) = \lim_{\delta\phi \rightarrow \infty} \frac{\delta\Phi(\delta\phi, t)}{\delta\phi} \quad . \quad (4.24)$$

Entonces, el cambio en la fase del interferómetro $\delta\Phi$ inducido por este ruido es

$$\delta\Phi = \int g(t) d\phi(t) = \int g(t) \frac{d\phi}{dt} dt \quad . \quad (4.25)$$

Físicamente la variación $\delta\phi$ representa la fase adquirida por el sistema debido al ruido en cada pulso. Suponemos que la fase del ruido se adquiere un tiempo t entre el inicio y final del pulso, razón por la cual, para calcular el cambio durante el pulso de Raman reemplazamos la matriz asociada al i -ésimo pulso $R(T_i + \tau_i, \phi_i + \delta\phi, T_i)$ con el producto de matrices $R(T_i + \tau_i, \phi_i + \delta\phi, T_i)R(T_i + t, \phi_i, T_i)$ donde la primera matriz lleva al sistema del tiempo T_i a $T_i + t$ con fase ϕ_i . En este momento se manifiesta el ruido como un cambio de fase y la segunda matriz lleva al sistema de $T_i + t$ a $T_i + \tau_i$ con fase $\phi_i + \delta\phi$. Los tiempos T_i y τ_i representan el tiempo de evolución libre y la duración del i -ésimo pulso respectivamente. Llevando a cabo este procedimiento y usando la expresión (4.21), obtenemos que

$$g(t) = \begin{cases} -\sin(\Omega_{eff}t) & 0 < t \leq \tau \\ -1 & \tau < t \leq T + \tau \\ -\sin(\Omega_{eff}(t - T)) & T + \tau < t \leq T + 3\tau \\ 1 & T + 3\tau < t \leq 2T + 3\tau \\ -\sin(\Omega_{eff}(t - 2T)) & 2T + 3\tau < t \leq 2T + 4\tau \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (4.26)$$

Si consideramos una función de ruido $\phi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0)$, de modo que

$\frac{d(t)}{dt} = -A_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0)$, entonces

$$\delta\Phi = - \int g(t)A_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0)dt. \quad (4.27)$$

La transformada de Fourier de $g(t)$ es

$$G(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} g(t)dt. \quad (4.28)$$

Si expandimos $e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)$, al ser $g(t)$ una función impar, la integral de $\cos(\omega_0 t)$ se anula y por tanto

$$G(\omega_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} i \sin(\omega_0 t)g(t)dt, \quad (4.29)$$

lo que tiene como resultado

$$G(\omega_0) = \frac{4i\Omega_{eff}}{\omega_0^2 - \Omega_{eff}^2} \sin\left(\frac{\omega_0(T + 2\tau)}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\omega_0(T + 2\tau)}{2}\right) + \frac{\Omega_{eff}}{\omega_0} \sin\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right) \right). \quad (4.30)$$

De igual modo, si desarrollamos el término $\sin(\omega_0 t + \psi_0)$ en la ecuación (4.27) como $\sin(\omega_0 t) \cos(\psi_0) + \cos(\omega_0 t) \sin(\psi_0)$, e integramos

$$\delta\Phi = -A_0\omega_0 \cos(\psi_0) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(\omega_0 t)dt \quad , \quad (4.31)$$

por tanto de la ecuación (4.29)

$$\delta\Phi = iA_0\omega_0 \cos(\psi_0)G(\omega_0) \quad , \quad (4.32)$$

y si promediamos sobre una distribución arbitraria de fases ψ_0 la media cuadrada de las fases es

$$\delta\Phi_{rms}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\delta\phi|^2 d\psi_0 = A_0^2\omega_0^2 |G(\omega_0)|^2 \quad . \quad (4.33)$$

A partir de esto, podríamos identificar como evoluciona la fase, y por tanto el valor de g , ante distintas frecuencias. Sin embargo, notando que tenemos una fluctuación y una modulación de fase en esta ecuación, podemos definir

$$H(\omega_0) = \omega_0 G(\omega_0) \quad , \quad (4.34)$$

como la función de transferencia del sistema que utilizaremos en el siguiente cálculo para obtener la respuesta del sistema a estas perturbaciones.

Usaremos ahora la función de sensibilidad para estudiar la respuesta del interferómetro al movimiento del espejo. Considerando que un cambio de la probabilidad de transición $\delta P(\delta a, t)$ se deberá a un cambio en la aceleración a del espejo, la función de sensibilidad será

$$g_a(t) = 2 \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{\delta P(\delta a, t)}{\delta a}. \quad (4.35)$$

Notemos que una variación en la altura del espejo por una cantidad δz induce un cambio de fase en los rayos Raman de $|k_{eff}|\delta z$. Entonces, podemos expresar

$$g_a(t) = \frac{d^2 g_z(t)}{dt^2} = \frac{1}{|k_{eff}|} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} \quad , \quad (4.36)$$

lo cual nos permite calcular la función de transferencia asociada, la cual toma la forma

$$|H_a(\omega_0)|^2 = \frac{k_{eff}^2}{\omega_0^4} |H(\omega_0)|^2 \quad . \quad (4.37)$$

En la Figura 4.2 se muestra el comportamiento de la función de transferencia del espejo para distintos tiempos libres T y duraciones del pulso τ . Como vemos el interferómetro será sensible a bajas frecuencias del espejo, especialmente a aquellas por debajo de los 10Hz . Sin embargo, podemos modificar su sensibilidad a través de la variación de T y τ considerando que de acuerdo a la sección 2, la fase asociada a la gravedad depende de T como $\Delta\phi = -gk_{eff}T^2$ por lo que una disminución en el valor de T tendría un impacto en la precisión de g . Entonces, variar estos parámetros dependerá de los objetivos y capacidades del experimento. Por esta razón, en el desarrollo del gravímetro se ha hecho la propuesta de introducir amortiguadores o actuadores electromecánicos cuya efectividad esté en el ancho de banda debajo de los 10Hz .

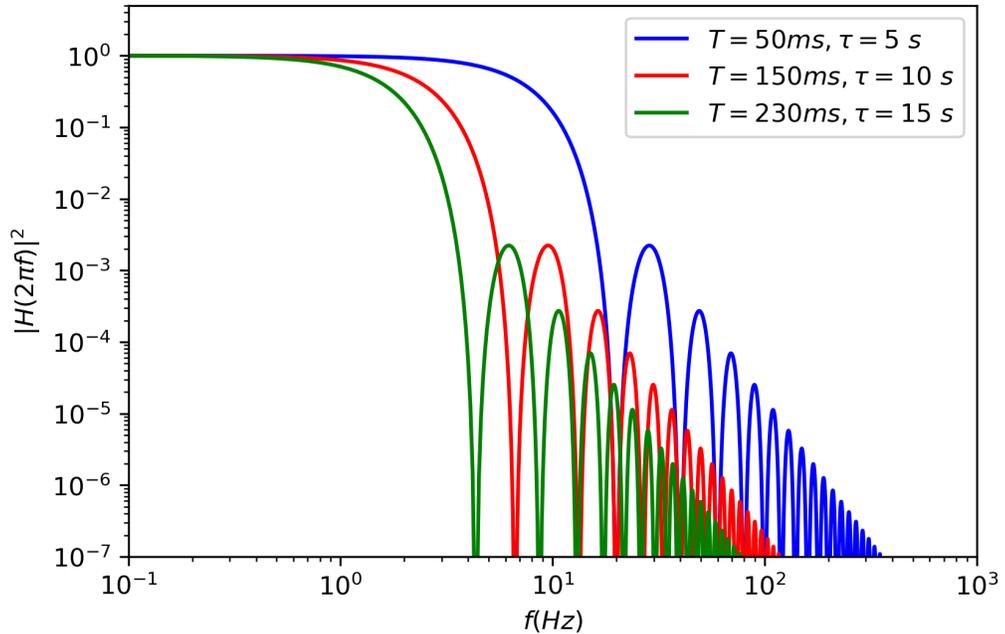


Figura 4.2: Gráficos de la función de transferencia de las vibraciones del espejo para distintos tiempos libres T y duraciones del pulso de Raman τ . Los datos han sido normalizados y graficados en representación logarítmica para realizar la comparación entre las diferentes situaciones que se tienen en el experimento.

4.3. Sensibilidad en la alineación óptica de los espejos

En nuestro arreglo, los haces láser son dirigidos verticalmente y reflejados por un espejo. Debido a esto es necesario conocer las afectaciones que se pueden producir por una desalineación ligera del espejo reflector. Para establecer un criterio de comparación que nos permita determinar que tan afectado se encuentra un haz por el desalineamiento de un espejo tengamos en cuenta que, al bombardear los átomos con los haces Raman se buscará maximizar el número de transiciones en cada interacción, de tal modo que se pueda obtener una buena estadística. Por tanto, si consideramos que la información del número de átomos se encuentra modulada espacial y temporalmente por la intensidad, entonces, maximizar las transiciones implicará considerar comparaciones en las regiones donde la intensidad es máxima. Debido a esto consideremos las variaciones en los extremos de intensidad como las variaciones debidas a la inclinación de uno de los espejos.

Polarización circular

Consideremos entonces una onda circularmente polarizada viajando en la región $0 \leq z \leq d$ [12] la cual es reflejada por un espejo en $z = d$. El espejo idealmente se encuentra derecho y se produce una reflexión normal, sin embargo, en realidad el espejo puede tener una pequeña inclinación de modo que es de interés determinar de que manera afectará al campo una inclinación en el espejo.

En principio se considera que la onda se encuentra en un sistema “a mano derecha” $x'z'$ y el espejo es el que se encuentra inclinado respecto a la vertical de este sistema, de tal manera que la onda se refleja respecto a la normal del espejo. El campo eléctrico en tal sistema toma la forma

$$\vec{E}_i = E_0(\hat{x}' + i\hat{y}')e^{i(k\hat{z}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad . \quad (4.38)$$

Sin embargo, es más sencillo y totalmente análogo a considerar que el espejo se encuentra alineado con la vertical de un sistema xz , en el que la onda incide oblicuamente. Pueden observarse diagramas de la situación descrita en la Figura 4.3.

Ya que estudiaremos el plano xz , rotamos el sistema alrededor del eje \hat{y}' , con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta \quad , \\ \hat{z}' &= \hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta \quad , \\ \hat{y}' &= \hat{y} \quad , \end{aligned}$$

de modo que la onda incidente se escribe como

$$\vec{E}_i = E_0(\hat{x} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta + i\hat{y})e^{i[k(x \sin \theta + z \cos \theta) - \omega t]} \quad , \quad (4.39)$$

y la onda reflejada en $z = d$ con respecto al eje \hat{x} tendrá la forma

$$\vec{E}_r = [E_{r1}(\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) + E_{r2}\hat{y}]e^{i[k(x \sin \theta - z \cos \theta) - \omega t]} \quad . \quad (4.40)$$

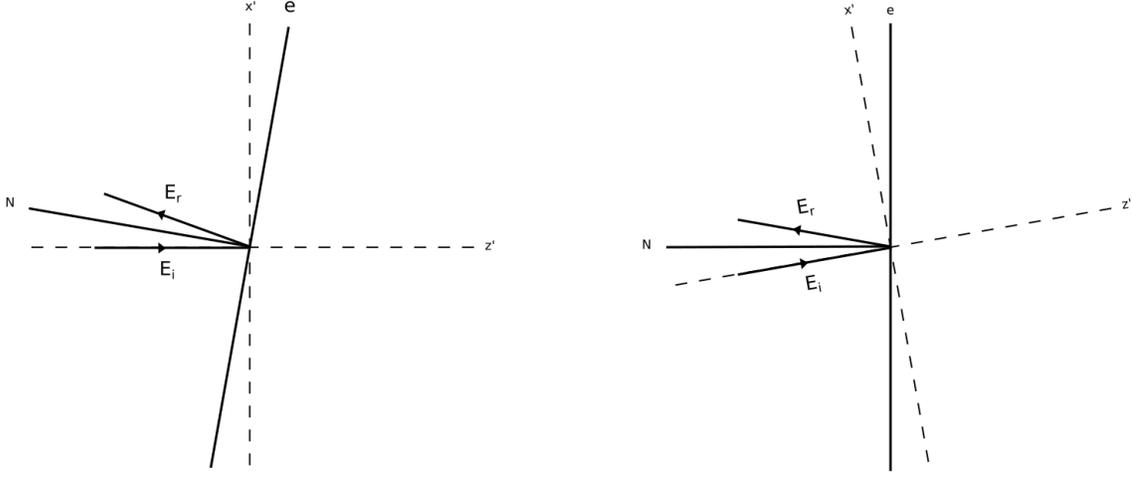


Figura 4.3: Diagrama para el sistema en que el espejo se encuentra inclinado a la izquierda, y para el que las ondas inciden oblicuamente a la derecha.

Ya que las componentes paralelas y ortogonales al plano de incidencia han de cumplir las condiciones de frontera en el plano de reflexión

$$\vec{E}_i^{\parallel} + \vec{E}_r^{\parallel} |_{z=d} = 0 \quad , \quad (4.41)$$

$$\vec{E}_i^{\perp} + \vec{E}_r^{\perp} |_{z=d} = 0 \quad , \quad (4.42)$$

por tanto en nuestro caso se tiene

$$\begin{aligned} E_0 e^{ikd \cos \theta} + E_{r1} e^{-ikd \cos \theta} &= 0 \quad , \\ E_{r1} &= -E_0 e^{i2kd \cos \theta} \quad , \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} iE_0 e^{ikd \cos \theta} + E_{r2} e^{-ikd \cos \theta} &= 0 \quad , \\ E_{r2} &= -iE_0 e^{i2kd \cos \theta} \quad . \end{aligned}$$

De manera que

$$\vec{E}_r = -E_0 (\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta + i\hat{y}) e^{i(k(x \sin \theta + (2d-z) \cos \theta) - \omega t)} \quad . \quad (4.43)$$

Entonces, por superposición en la región $0 \leq z \leq d$ tenemos

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= E_0 e^{i(k(x \sin \theta + z \cos \theta) - \omega t)} \left[(\hat{x} + i\hat{y}) \cos \theta \left(1 - e^{i2k(d-z) \cos \theta} \right) - \hat{z} \sin \theta \left(1 + e^{i2k(d-z) \cos \theta} \right) \right] . \end{aligned}$$

Así que la intensidad es

$$\begin{aligned} I(z, \theta) &= \frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \\ &= 2I_0 \left\{ 2 \cos^2 \theta [1 - \cos(2k(d-z) \cos \theta)] + \sin^2 \theta [1 + \cos(2k(d-z) \cos \theta)] \right\} \quad , \quad (4.44) \end{aligned}$$

con $I_0 = \frac{1}{2}c\epsilon_0 |E_0|^0$. Si consideramos la aproximación para ángulos pequeños entonces $\cos^2 \theta \approx 1 - \theta^2$, $\sin^2 \theta \approx \theta^2$ y

$$\begin{aligned}
 I(z, \theta) &= 2I_0 \left\{ 2(1 - \theta^2) [1 - \cos(2k(d - z))] + \theta^2 [1 + \cos(2k(d - z))] \right\} \\
 &= 4I_0 \left\{ 2(1 - \theta^2) \sin^2(k(d - z)) + \theta^2 \cos^2(k(d - z)) \right\} \\
 &= 4I_0 \left\{ 2 \sin^2(k(d - z)) + \theta^2 (\cos^2(k(d - z)) - 2 \sin^2(k(d - z))) \right\} \\
 &= 4I_0 \left\{ 2 \sin^2(k(d - z)) - \theta^2 (3 \sin^2(k(d - z)) - 1) \right\} \\
 &= 4I_0 \left\{ (2 - 3\theta^2) \sin^2(k(d - z)) + \theta^2 \right\} .
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Si medimos el valor de la intensidad en $z=0$ entonces

$$I(0, \theta) = 4I_0 \left\{ (2 - 3\theta^2) \sin^2(kd) + \theta^2 \right\} . \tag{4.46}$$

Las gráficas en la Figura 4.4 muestran el comportamiento de la intensidad luminosa cuando variamos la distancia del espejo y ángulo de incidencia para un haz con longitud de onda de $\lambda = 780nm$ la cual es cercana a la necesaria para realizar las transiciones Raman en el ^{87}Rb y una intensidad $I_0 = 3mW/cm^2$ la cual es la intensidad de saturación del ^{87}Rb .

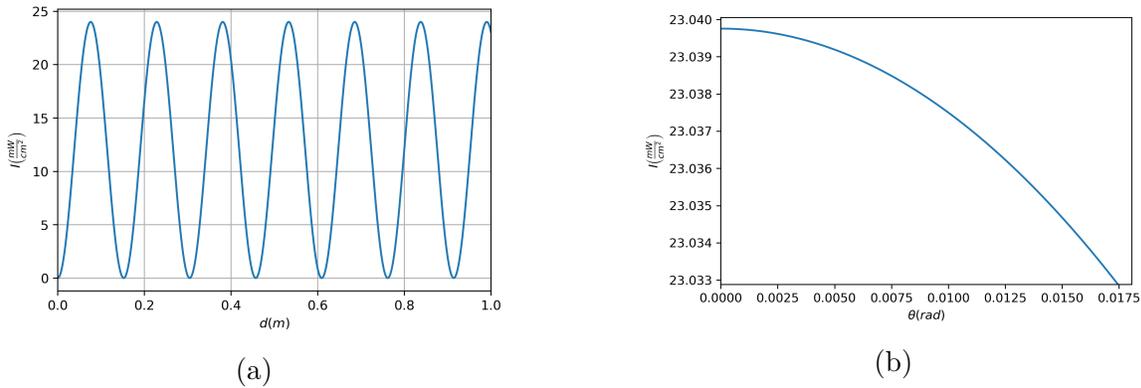


Figura 4.4: Gráfico de intensidad para una onda circularmente polarizada variando la distancia del espejo (a) y el ángulo de incidencia (b).

Polarización lineal

Si consideremos una onda linealmente polarizada, paralela al plano de incidencia x y viajando en dirección z

$$\vec{E}_i = E_0 \hat{x} e^{i(kz \cdot \vec{r} - wt)} , \tag{4.47}$$

y nuevamente rotamos alrededor del eje y y obtenemos

$$\vec{E}_i = E_0 (\hat{x} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta) e^{k(x \sin \theta + z \cos \theta) - wt} , \tag{4.48}$$

de modo que la onda reflejada será

$$\vec{E}_r = E_r(\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) e^{k(x \sin \theta - z \cos \theta) - wt} \quad , \quad (4.49)$$

nuevamente aplicamos las condiciones de frontera a las componentes paralelas

$$\vec{E}_i^{\parallel} + \vec{E}_r^{\parallel} |_{z=d} = 0 \quad , \quad (4.50)$$

y obtenmos que

$$\vec{E}_r = -E_0(\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta) e^{k(x \sin \theta + (2d-z) \cos \theta) - wt} \quad . \quad (4.51)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= E_0 e^{k(x \sin \theta + (2d-z) \cos \theta) - wt} \left\{ \hat{x} \cos \theta \left[1 - e^{i2k(d-z)} \right] - \hat{z} \sin \theta \left[1 + e^{i2k(d-z)} \right] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (4.52)$$

de manera que

$$\begin{aligned} I(z, \theta) &= \frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \\ &= 2I_0 \left\{ \cos^2 \theta \left[1 - \cos(2k(d-z) \cos \theta) \right] + \sin^2 \theta \left[1 + \cos(2k(d-z) \cos \theta) \right] \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.53)$$

usando la aproximación de oscilaciones pequeñas

$$\begin{aligned} I(z, \theta) &= 2I_0 \left\{ (1 - \theta^2) \left[1 - \cos(2k(d-z)) \right] + \theta^2 \left[1 + \cos(2k(d-z)) \right] \right\} \\ &= 4I_0 \left\{ (1 - \theta^2) \sin^2(k(d-z)) + \theta^2 \cos^2(k(d-z)) \right\} \\ &= 4I_0 \left\{ \sin^2(k(d-z)) + \theta^2 \left[\cos^2(k(d-z)) - \sin^2(k(d-z)) \right] \right\} \\ &= 4I_0 \left\{ \sin^2(k(d-z)) + \theta^2 \cos(2k(d-z)) \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.54)$$

que en $z = 0$ nos resulta ser

$$I(0, \theta) = 4I_0 \left\{ \sin^2(kd) + \theta^2 \cos(2kd) \right\} \quad . \quad (4.55)$$

Las gráficas en la Figura 4.5 muestran el comportamiento de la intensidad luminosa cuando variamos la distancia del espejo y ángulo de incidencia para un rayo linealmente polarizado con las mismas características que en el caso circularmente polarizado. Como vemos el caso linealmente polarizado posee un comportamiento similar al circularmente polarizado, sin embargo, el caso circularmente polarizado alcanza mayores cotas de intensidad pero esta es mucho menos variable y además es más sensible a inclinaciones mientras que el linealmente polarizado es menos variable y menos sensible a inclinaciones pero alcanza menores cotas de intensidad.

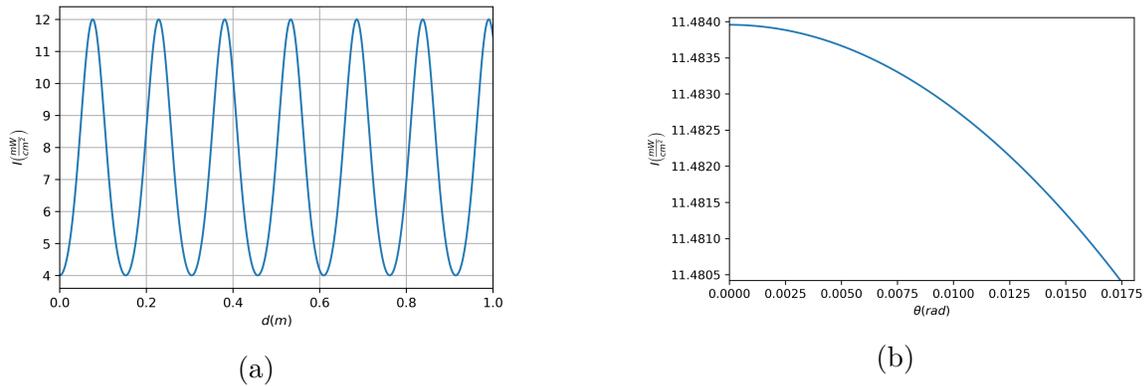


Figura 4.5: Gráfico de intensidad para una onda linealmente polarizada variando la distancia del espejo (a) y el ángulo de incidencia (b).

Como se puede observar, estas dos situaciones tienen sus ventajas y desventajas, mientras en una se favorece la intensidad, en la otra se favorece la estabilidad en la inclinación del espejo. En otras palabras, es posible controlar la región donde se realizarán las transiciones utilizando la polarización de forma conveniente, usar luz circularmente polarizada parece más conveniente evitando los mínimos de intensidad, o bien si se tiene poco control sobre las regiones de transición el caso linealmente polarizado parece ser más conveniente. De esta manera, los colegas experimentales podrán decidir la mejor manera de implementar el tipo de polarización a utilizar en el dispositivo experimental de acuerdo a sus características de construcción.

Hemos visto, el gravímetro en construcción es sensible a frecuencias cercanas y menores a $10Hz$ pero para frecuencias superiores se ha acotado el rango de error. Además, hemos determinado un rango de variabilidad de la intensidad luminosa a inclinaciones del espejo. Habiendo establecido el funcionamiento y rango de error del aparato podemos explorar algunas aplicaciones útiles, el cual será el objetivo del próximo capítulo. Cabe mencionar que estos desarrollos han servido para promover las discusiones en el grupo con la finalidad de tomar las mejores decisiones en la construcción del dispositivo.

Aplicaciones de un gravímetro cuántico

Hasta el momento hemos visto la forma de hacer una medición de g utilizando un gravímetro cuántico con bastante precisión, debido a que se utiliza un método interferométrico en el que se pueden medir frecuencias, tiempos y distancias con varias cifras significativas. Pero en la vida real, ¿Cuántas cifras necesitamos para distinguir materiales en la corteza terrestre? El objetivo de este capítulo es ilustrar un modelo un poco más realista sobre la estructura interna de la Tierra a la que se ven normalmente en cursos de licenciatura y algunos de posgrado en el área de física, con la finalidad de justificar que nos podemos concentrar en variaciones gravimétricas en la corteza terrestre, e identificar el alcance que puede tener el uso de un gravímetro cuántico.

5.1. Variaciones de gravedad

Al considerar la Tierra como una esfera perfecta, buscamos determinar el valor de la aceleración gravitacional como función del radio de la Tierra, tanto por dentro como por fuera. Para esto usaremos la ley de Gauss que relaciona el campo gravitatorio con la densidad de la Tierra

$$\oint_A \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi G M_{enc} = -4\pi G \int \varrho(\vec{\ell}) d^3\ell \quad , \quad (5.1)$$

donde M_{enc} es la masa encerrada en la superficie A . Considerando una superficie gaussiana esférica de radio r tenemos que

$$g(r) = \frac{G}{r^2} \int \varrho(\vec{\ell}) d^3\ell \quad . \quad (5.2)$$

Para modelar la densidad consideramos el modelo de Roche [38], el cual consiste en una función a trozos que subdivide la densidad de la Tierra en m capas. La función toma diferentes valores en cada una de estas capas, los cuales dependen de la profundidad a la que nos encontremos y la región del planeta que busquemos describir. De acuerdo con los datos experimentales en [38], en este caso podemos utilizar una función cuadrática para cada capa

$$\varrho_i(\vec{\ell}) = a_i + \frac{b_i}{R_T^2} \ell^2 \quad \text{con } i = 1, \dots, m \quad (5.3)$$

donde a_i y b_i corresponden a constantes asociadas a cada capa. La i -ésima capa se encuentra en el intervalo, $\ell \in [R_{i-1}, R_i]$. La tabla 5.1 nos muestra los valores a_i y b_i usados para calcular la densidad en cada capa, así como los radios R_i que delimitan la extensión de cada capa. En este caso hemos considerado un modelo con $m = 7$ capas, donde $R_0 = 0$ y $R_7 = R_T$, radio de la Tierra. Hemos elegido $m = 7$ ya que la evolución de la densidad con el radio es bastante similar a la encontrada en el modelo de la densidad terrestre PREM [38–40] el cual es una buena referencia que considera distintas variables para la descripción de la densidad del planeta.

Tabla 5.1: Valores usados para la densidad de cada capa

i -ésima capa	$a_i(\frac{Kg}{m^3})$	$b_i(\frac{Kg}{m^3})$	$R_i(Km)$
1 (Núcleo interior)	13,061	-8,891	1,221.5
2 (Núcleo exterior)	12,483	-8,343	3,480.0
3 (Manto inferior)	6,370	-2,574	5,701.0
4 (Manto superior)	6,058	-2,577	5,971.0
5 (Manto superior)	5,784	-2,524	6,151.0
6 (Manto superior)	6,057	-2,903	6,346.6
7 (Corteza)	6,622	-3,952	6,371.0

Ahora calcularemos una expresión para $g(r)$ dentro de la i -ésima capa, es decir, consideraremos una superficie gaussiana de radio $R_{i-1} \leq r \leq R_i$ usando el modelo de Roche de la Ec. (5.3) al introducirlo en la Ec. (5.2). Este procedimiento nos permitirá obtener

$$\begin{aligned}
 g_i(r) &= \frac{G}{r^2} \int \varrho_i(\vec{\ell}) d^3\ell \\
 &= \frac{G}{r^2} \int_{R_{i-1}}^r d\ell \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \left(a_i + \frac{b_i}{R_T^2} \ell^2 \right) \ell^2 \sin\theta d\phi \\
 &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_{R_{i-1}}^r \left(a_i \ell^2 + \frac{b_i}{R_T^2} \ell^4 \right) d\ell \\
 &= \frac{4\pi G}{r^2} \left[\frac{a_i}{3} (r^3 - R_{i-1}^3) + \frac{b_i}{5R_T^2} (r^5 - R_{i-1}^5) \right]. \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Este valor aplica solo dentro de la i -ésima capa y no considera las capas internas de la Tierra. Para obtener un valor que considere las capas internas primero calculemos el valor total de g para la i -ésima capa. En este caso la superficie gaussiana es de radio R_i de manera que en la Ec. (5.4) $r = R_i$ y por tanto

$$g_i(R_i) = \frac{4\pi G}{R_i^2} \left[\frac{a_i}{3} (R_i^3 - R_{i-1}^3) + \frac{b_i}{5R_T^2} (R_i^5 - R_{i-1}^5) \right]. \tag{5.5}$$

Por ejemplo, el valor de $g(r)$ dentro de la segunda capa será

$$\begin{aligned}
 g(r) &= g_1(R_1) + g_2(r) \\
 &= \frac{4\pi G}{R_1^2} \left[\frac{a_1}{3}(R_1^3 - R_0^3) + \frac{b_1}{5R_T^2}(R_1^5 - R_0^5) \right] + \\
 &\quad + \frac{4\pi G}{r^2} \left[\frac{a_i}{3}(r^3 - R_1^3) + \frac{b_i}{5R_T^2}(r^5 - R_1^5) \right] .
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

y el valor de $g(r)$ en la superficie de la Tierra será

$$g(R_7) = g_1(R_1) + g_2(R_2) + g_3(R_3) + g_4(R_4) + g_5(R_5) + g_6(R_6) + g_7(R_7) . \tag{5.7}$$

Estas expresiones nos permiten obtener una gráfica de la dependencia del valor de la aceleración gravitacional con el radio de la Tierra. En la Figura 5.1 mostramos la comparación entre la aceleración gravitacional al considerar una densidad uniforme y la densidad del modelo de la Ec. (5.3). Como podemos observar, el modelo de capas resulta en que la evolución de g sea más irregular mientras nos alejamos del centro a la superficie.

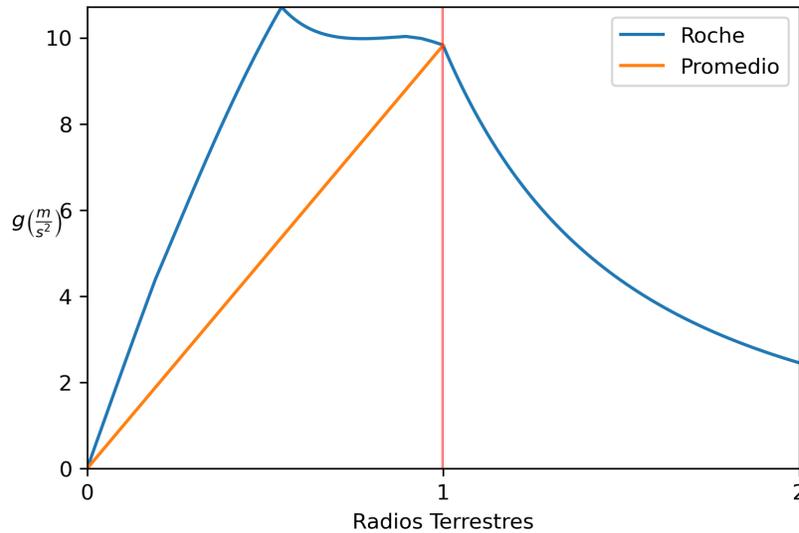


Figura 5.1: Distribución del valor de la gravedad con el radio de la Tierra. Entre las líneas rojas se encuentra la región de la corteza, la cual será la región de medición.

Notemos también que el valor de g en la corteza no cambia bruscamente debido a que ésta es muy delgada respecto al radio terrestre, ver Tabla 5.1. De este modo podemos considerar que el valor de g en las capas más internas se comporta como un valor de fondo respecto a las variaciones que este tiene en la corteza. Bajo estas consideraciones es importante estudiar el origen de dichas variaciones dependiendo de la precisión con la que se pretenda detectarlas.

Variaciones en la corteza terrestre

Para estudiar las variaciones de g en la corteza terrestre, consideremos el modelo en el que se tiene una capa esférica de densidad uniforme ρ_0 y radio R_T a la que se le extrae una esfera más pequeña de radio r_c y se le rellena con un material de densidad ρ_1 . El centro de la esfera r_c se encontrará a una profundidad P de la superficie de la esfera R_T .

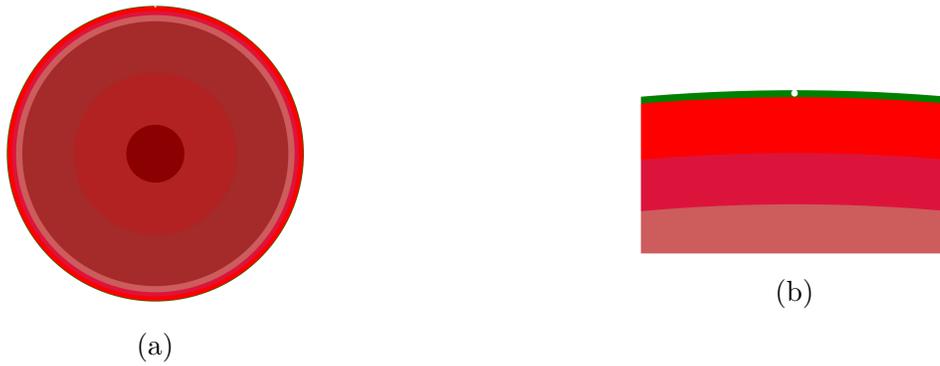


Figura 5.2: (a) Imagen representativa a escala de la superficie terrestre. (b) es un acercamiento en las capas más externas que incluye un hueco, no a escala, dentro de la superficie terrestre.

Usando la ley de Gauss, el campo gravitacional para una esfera de masa $M_T = \rho_0 \frac{4\pi R_T^3}{3}$, en la región externa a la esfera es

$$\vec{g}_0 = -G \frac{M_T}{r^2} \hat{r} \quad , \quad (5.8)$$

para una esfera de radio r_c , densidad ρ_0 a una profundidad P

$$\vec{g}_1 = \frac{4\pi G \rho_0}{3} \frac{r_c^3}{P^2} \hat{r} \quad , \quad (5.9)$$

y para una esfera de radio r_c , densidad ρ_1 a una profundidad P

$$\vec{g}_2 = \frac{4\pi G \rho_1}{3} \frac{r_c^3}{P^2} \hat{r} \quad . \quad (5.10)$$

Por tanto, el campo en un punto en la superficie de la esfera R_T , a una distancia P del

centro de la esfera r_c es

$$\begin{aligned}
 \vec{g} &= \vec{g}_0 + \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \\
 &= \hat{r} \left(-G \frac{M_T}{R_T^2} + \frac{4\pi G}{3} (\varrho_0 - \varrho_1) \frac{r_c^3}{P^2} \right) \\
 &= -\hat{r} G \frac{M_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{4\pi R_T^2}{3M_T} (\varrho_0 - \varrho_1) \frac{r_c^3}{P^2} \right) \\
 &= -\hat{r} G \frac{M_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{V_T}{M_T R_T} (\varrho_0 - \varrho_1) \frac{r_c^3}{P^2} \right) \\
 &= -\hat{r} G \frac{M_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{1}{\varrho_0 R_T} (\varrho_0 - \varrho_1) \frac{r_c^3}{P^2} \right) \\
 &= -\hat{r} G \frac{M_T}{R_T^2} \left(1 - \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \right) \frac{r_c^3}{P^2 R_T} \right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Considerando que $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ y $\rho_q = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}$, tenemos

$$\vec{g} = -\hat{r} \left(g_0 - \frac{r_c^3 g_0}{R_T P^2} (1 - \rho_q) \right) \tag{5.12}$$

En principio $r_c \leq P \leq \frac{R_T}{2}$, sin embargo, debido a que estamos limitados a las variaciones en la corteza de la Tierra (como muestra el esquema de la Figura 5.2), se considera que la estructura interior actúa como si generara un campo de fondo, el cual estará generado por una densidad ϱ_0 . Entonces podemos identificar a g_0 como el valor de fondo y al término $\delta = \frac{r_c^3 g_0}{R_T P^2} (1 - \rho_q)$ como una perturbación. De esta manera, podemos identificar a δ como la precisión del aparato y entonces

$$P = \sqrt{\frac{r_c^3 g_0 (1 - \rho_q)}{R_T \delta}} \tag{5.13}$$

Ahora, la región de intersección entre la ecuación anterior y $P = r_c$ nos dará el rango en el que la perturbación debe encontrarse para ser detectable. Dicho de otro modo, P debe tomar los valores

$$r_c \leq P \leq \sqrt{\frac{r_c^3 g_0 (1 - \rho_q)}{R_T \delta}} \tag{5.14}$$

El caso límite en el que $P = r_c$ nos da el valor mínimo que puede detectarse para una precisión δ , el cual resulta ser

$$r_{min} = \frac{R_T \delta}{g_0 (1 - \rho_q)} \tag{5.15}$$

de modo que la cota de profundidad puede expresarse como

$$r_c \leq P \leq \sqrt{\frac{r_c^3}{r_{min}}} \tag{5.16}$$

Notemos que para ciertos materiales puede suceder que $\rho_1 > \rho_0$, en cuyo caso $1 - \rho_0 < 0$ sin embargo esto también causaría que $\delta < 0$ y por tanto los valores de P y r_{min} se mantendrían reales y positivos.

Por otro lado, para realizar mediciones de aceleraciones se ha establecido una unidad de medida llamada *Gal* en honor a Galileo Galilei. Esta unidad de medida se define como $1Gal = 1\frac{cm}{s^2}$ de modo que corresponde al sistema de unidades *cgs*, en el cual la aceleración gravitacional posee un valor de $g_0 \approx 981.9Gal$. Considerando que se pretende que las mediciones del gravímetro cuántico sean del orden de $1\mu Gal$ entonces $\delta = 10^6Gal$, $R_T = 6.371 \times 10^8cm$. Por tanto $\frac{R_T\delta}{g_0} \approx 0.006m$ y

$$r_{min} = \frac{0.006m}{1 - \rho_q}. \quad (5.17)$$

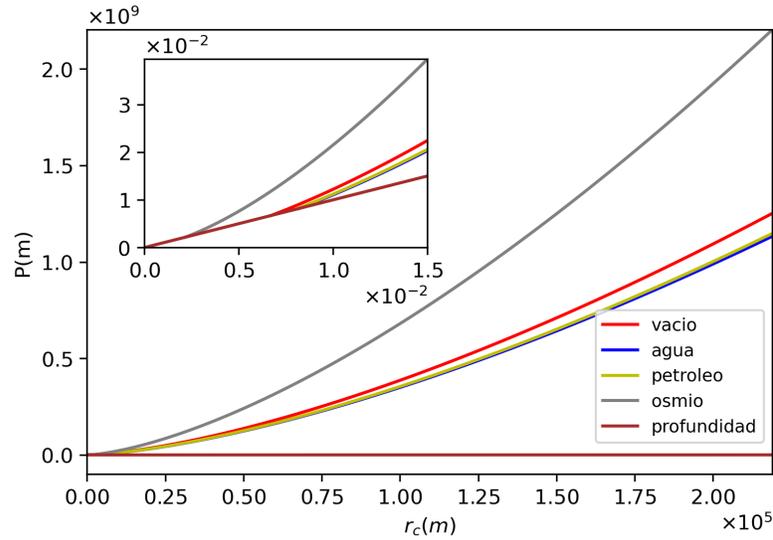
Como era de esperarse, el radio mínimo que debe poseer una esfera para ser detectable depende del material que esta posea en su interior. La Figura 5.3 (a) nos muestra las regiones de detección los radios y profundidades mínimas a partir de las cuales pueden ser detectados distintos materiales para obtener variaciones del orden de μGal . Podemos observar las regiones de detección para el resto de los materiales que se encuentran por debajo de la curva del Osmio, sirviendo esta última como una cota superior para las regiones de detección de los distintos materiales que podemos encontrar presentes en el planeta. La Figura 5.3 (b) nos muestra de forma más clara la región de detección para cualquier material. Hemos elegido al Osmio como el material más denso del análisis, pues es el elemento más denso de la tabla periódica y el mineral más denso que podemos encontrar en la superficie terrestre. Sin embargo, este es un material muy escaso y con poca relevancia industrial por su misma escasez, pero posee una densidad cercana a la del iridio y platino, los cuales son materiales con una mayor relevancia industrial. Es importante destacar que a mayor profundidad, mayor será el radio que deberá poseer la esfera para que pueda ser detectada¹.

Encontramos entonces que pequeños cambios en la distribución de densidades producen variaciones en el valor de g . Sin embargo, un uso bastante común de un gravímetro es el de buscar recursos que puedan ser extraídos, motivo por el cual suele limitarse su uso a materiales que se encuentren en la corteza terrestre. Como solo nos interesan cambios en la corteza en regiones específicas, y a que en la corteza terrestre g es aproximadamente constante, podemos considerar el modelo de "Tierra plana". En este una placa de extensión infinita, genera una aceleración gravitacional constante, que toma la forma

$$\begin{aligned} \vec{g}_0 &= -\frac{GM_T}{R_T^2} \hat{z} \\ &= -g_0 \hat{z}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

¹Aunque en general los cuerpos de diferentes materiales no tienen forma esférica, se utiliza esta medida y forma como una primera aproximación para tener una idea clara sobre su posible detección.

(a) Datos con ejes con escalas lineales.



(b) Datos con eje x en escala logarítmica.

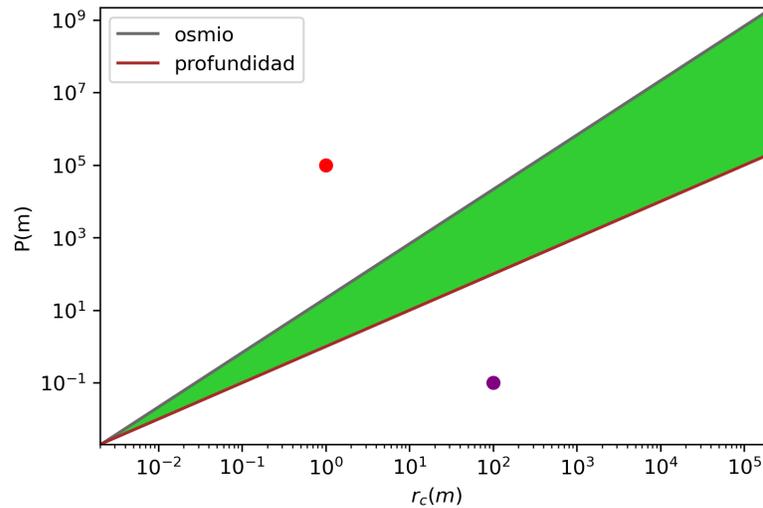


Figura 5.3: (a) Regiones de medición para distintos materiales. (b) Región de medición del Osmio. En la región del punto morado, las esferas poseen radios demasiado grandes para una profundidad dada. En la región del punto rojo, las esferas son demasiado pequeñas para conseguir una precisión de μGal . La región verde es aquella en la que se podrán realizar mediciones para la precisión buscada.

Hueco esférico

Nos interesa medir estas variaciones de g así como identificar las causas de estas variaciones de modo que nos interesará ver como se comporta el valor de g a medida que nos acercamos y alejamos de la fuente de perturbación del campo. De modo que tendremos que ver la forma

del campo en los alrededores de la esfera que produce la perturbación. Como nos interesan sólo variaciones en la corteza, y la extensión de las fuentes usualmente será pequeña comparada con el tamaño del planeta proponemos este modelo. En este, una placa de extensión infinita y grosor desconocido genera un campo gravitacional uniforme en la superficie.

Supongamos que en dicha placa existe un material contenido en una esfera de radio s , el cual posee una densidad ϱ_1 . Buscamos determinar el valor del campo en un punto $\vec{r} = (x_0, y_0, P)$ en la superficie terrestre. Usando la ley de Gauss y el principio de superposición podemos encontrar la forma en que actúa el campo en el punto de interés. Para esto, al campo generado por la placa extraeremos el campo generado por una esfera de radio s y densidad ϱ_0 , y añadiremos el campo generado por una esfera con el mismo radio pero densidad ϱ_1 como se muestra en el esquema de la figura 5.4. Si fijamos el origen de coordenadas en el centro de la esfera sólo debemos calcular el campo generado por una esfera de radio s y densidad ϱ_0 , el cual toma el valor

$$\vec{g}_{0sp}(r, \theta_0, \phi_0) = -\frac{4\pi s^3}{3r^2} G \varrho_0 (\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0),$$

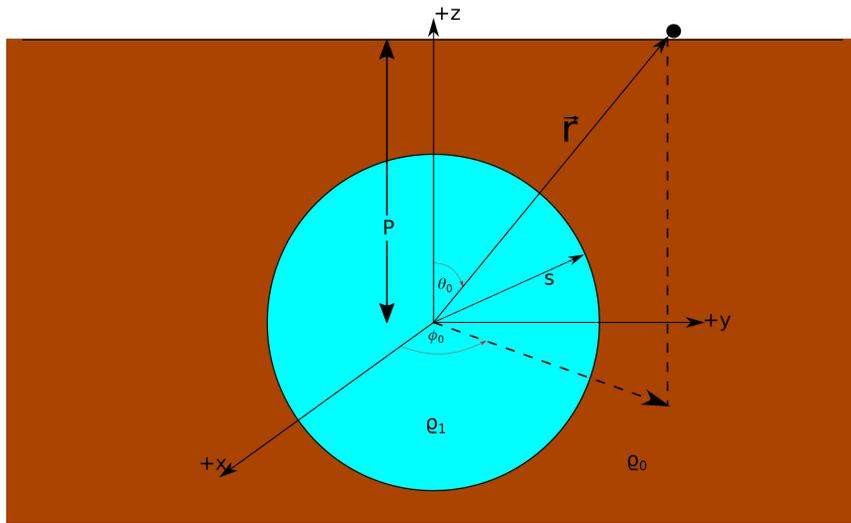


Figura 5.4: Diagrama de la esfera dentro de la placa.

el cual extraeremos al valor del campo generado por la placa de la expresión (5.18). Hemos considerado que $r = |\vec{r}|$, $\theta_0 = \arccos \frac{P}{r}$ y $\phi_0 = \arctan \frac{y_0}{x_0}$. Por último hemos de añadir el campo generado por una esfera de radio s pero la cual posee densidad ϱ_1 , esto es

$$\vec{g}_1(r, \theta_0, \phi_0) = -\frac{4\pi s^3}{3r^2} G \varrho_1 (\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0).$$

Ahora podemos usar el principio de superposición para calcular el campo gravitatorio en el punto de interés, el cual es

$$\vec{g}(r, \theta_0, \phi_0) = -\hat{z}g_0 - \frac{4\pi s^3}{3r^2} G(\varrho_1 - \varrho_0)(\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0).$$

lo que posee como magnitud

$$\begin{aligned}
 g(r, \theta_0) &= \sqrt{g_0^2 + \left(\frac{4\pi s^3 G(\varrho_1 - \varrho_0)}{3r^2}\right)^2 + \frac{8\pi s^3 G g_0(\varrho_1 - \varrho_0)}{3r^2} \cos \theta_0} \\
 &= g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi s^3 G(\varrho_1 - \varrho_0)}{3g_0 r^2}\right)^2 + \frac{8\pi s^3 G(\varrho_1 - \varrho_0)}{3g_0 r^2} \cos \theta_0} \\
 &= g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{4\pi R_T^3}{3} s^3 G \varrho_0 (1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0})}{\frac{GM_T}{R_T^2} r^2}\right)^2 - 2 \frac{\frac{4\pi R_T^3}{3} s^3 G \varrho_0 (1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0})}{\frac{GM_T}{R_T^2} r^2} \cos \theta_0} \\
 &= g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{4\pi R_T^3}{3} s^3 G \varrho_0 (1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0})}{R_T^3 \frac{GM_T}{R_T^2} r^2}\right)^2 - 2 \frac{\frac{4\pi R_T^3}{3} s^3 G \varrho_0 (1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0})}{R_T^3 \frac{GM_T}{R_T^2} r^2} \cos \theta_0} \\
 &= g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{V_T s^3 \frac{M}{V_T} (1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0})}{M_T R_T r^2}\right)^2 - 2 \frac{V_T s^3 \frac{M}{V_T} (1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0})}{M_T R_T r^2} \cos \theta_0} \\
 &= g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{s^3}{R_T r^2} (1 - \rho_q)\right)^2 - 2 \frac{s^3}{R_T r^2} (1 - \rho_q) \cos \theta_0}. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Pero recordando que $r = \frac{P}{\cos \theta_0}$, obtenemos

$$g(P, \theta_0) = g_0 \sqrt{1 - 2 \frac{s^3}{R_T P^2} (1 - \rho_q) \cos \theta_0^3 + \left(\frac{s^3}{R_T P^2} \cos \theta_0^2 (1 - \rho_q)\right)^2}. \tag{5.20}$$

Si tenemos en cuenta la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ y consideramos que el término cuadrático es pequeño comparado con el resto, encontraremos que

$$g(P, \theta_0) \approx g_0 - \frac{s^3 g_0}{R_T P^2} (1 - \rho_q) \cos \theta_0^3. \tag{5.21}$$

Notemos que cuando $\theta_0 = 0$ se tiene que $\cos \theta_0 = 1$, de modo que las Ecs. (5.21) y (5.12) coinciden, indicándonos este resultado que nuestros modelos son congruentes y además que podemos usar las regiones de detección mostradas en la Figura 5.3, pues estos son los valores máximos que tendrá g .

Hueco cúbico

Consideremos ahora un hueco cúbico de longitud L que posea el mismo volumen que una esfera de radio r_c . Igualando las expresiones para el volumen de la esfera y del cubo encontramos la longitud requerida para que los volúmenes sean iguales

$$L = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} r_c. \tag{5.22}$$

El hueco, al igual que en el caso anterior poseerá un material de densidad ρ_1 y desde su centro a la superficie habrá una distancia P . De manera que el campo generado por el cubo es

$$\vec{g}_c = -G\rho_1 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(x-x', y-y', z-z') dx' dy' dz'}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}}. \quad (5.23)$$

Usando el principio de superposición, al igual que para el caso esférico el campo total será

$$\vec{g}(x, y, z) = -\hat{z}g_0 - G(\rho_1 - \rho_0) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(x-x', y-y', z-z') dx' dy' dz'}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}}.$$

Aquí tenemos la misma integral en las 3 coordenadas

$$I_{a'} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dc' \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} db' \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(a-a') da'}{((a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2)^{3/2}}. \quad (5.24)$$

de modo que podemos escribir

$$\vec{g}(x, y, z) = -\hat{z}g_0 + G(\rho_0 - \rho_1)(I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}),$$

y por tanto

$$|\vec{g}| = \sqrt{(G(\rho_1 - \rho_0))^2(I_{x'}^2 + I_{y'}^2) + (-g_0 + G(\rho_1 - \rho_0)I_{z'})^2},$$

o escrito de otro modo

$$g = G |\rho_1 - \rho_0| \sqrt{I_{x'}^2 + I_{y'}^2 + \left(-\frac{g_0}{G(\rho_1 - \rho_0)} + I_{z'}\right)^2}.$$

Sin embargo la integral $I_{a'}$ no posee solución analítica, por lo que la evaluaremos numéricamente². Las siguientes figuras nos muestran como se comportan nuestros modelos, hueco esférico y hueco cúbico, en distintas situaciones. En las figuras se consideran huecos vacíos, rellenos de agua, de petróleo y de Osmio. Nuevamente, hemos elegido al Osmio debido al ser el elemento más denso que puede encontrarse en la Tierra, considerando que elementos ligeramente menos densos pero más relevantes y abundantes como el iridio o el platino tendrán perturbaciones similares. La densidad que se tomaron en cuenta para el agua es $\rho_1 = 997 \frac{Kg}{m^3}$, la del petróleo $\rho_1 = 880 \frac{Kg}{m^3}$ y la del Osmio $\rho_1 = 22,590 \frac{Kg}{m^3}$.

En la Figura 5.5 se muestran las curvas de la variación gravimétrica en torno al valor ideal de 9.819532 m/s^2 , mismo que de acuerdo al modelo en las secciones anteriores sería el que correspondería a una Tierra completamente esférica. Los datos del eje vertical son la desviación en μGal respecto a dicho valor ideal, y los datos en el eje horizontal corresponden a los desplazamientos sobre la superficie terrestre respecto del centro del objeto que se quiere medir

²Se utilizó un programa hecho en Python a través de las funciones de la biblioteca SciPy

en el subsuelo. Como se puede observar, en el caso de la profundidad mínima las variaciones en el eje horizontal son en centímetros como era de esperarse, pero se pueden distinguir mucho mejor los diferentes materiales que habría. Conforme se gana profundidad, las gráficas de las dos primeras filas, las curvas con densidad menor a la densidad media de la tierra se unen en una única curva indistinguible cuando se trata de cavidades con una mínima detección. En la última fila se observan las superficies equivalentes a las gráficas anteriores pero en 3D para que se pueda apreciar la evolución de las curvas conforme se gana profundidad. En estas últimas dos sólo se muestra la gráfica del Osmio y del hueco vacío (como representante de los otros materiales).

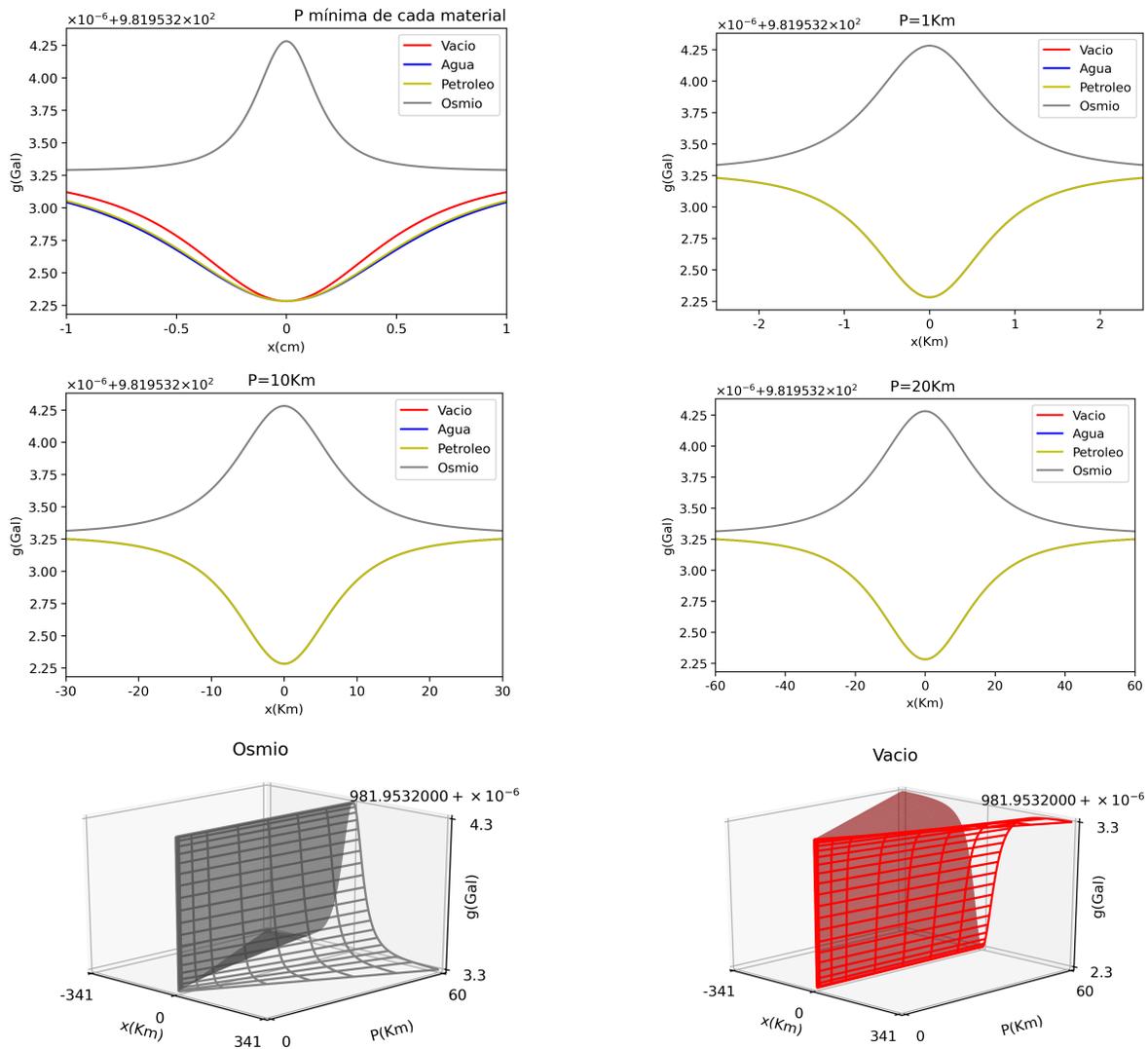


Figura 5.5: Esferas que contienen distintos materiales a distintas profundidades, desde el mínimo hasta 10Km . Se han considerado esferas cuyos radios producen variaciones en g del orden de μGal para cada material. El radio de la esfera se determina a partir de la profundidad.

En la Figura 5.6 se muestra, para el caso del hueco vacío, la diferencia entre un cuerpo esférico en comparación con uno con geometría cúbica. Como se puede apreciar, diferencia es muy pequeña únicamente en la parte central, de hecho es menor a $1 \mu Gal$ en la mayor parte del intervalo. Esto nos muestra que el aparato que se utilice para la detección de la variación gravimétrica tendría la capacidad de hacer la detección de la cavidad, pero no sería eficiente en obtener su forma geométrica localmente. Cabe mencionar que para profundidades mayores la diferencia es mucho más pequeña y lo anterior también nos dice que si se necesita obtener la forma geométrica del cuerpo que está debajo de la superficie, es necesario realizar un barrido en la superficie en distintos puntos para realizar un proceso tomográfico que escapa del alcance de este trabajo.

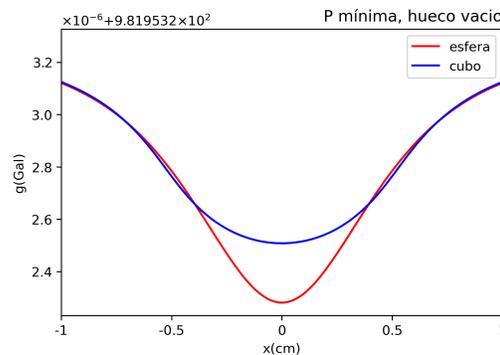


Figura 5.6: Contraste entre el valor de g para un hueco esférico y uno cúbico.

De acuerdo con lo expuesto en el presente capítulo, el modelo en el que la Tierra está formada por capas, que considera que todas las capas que se encuentran debajo de la corteza terrestre contribuyen como un valor de fondo, nos permite detectar cambios en el valor de g del orden de μGal . Esto es muy útil, pues nos permite detectar cambios de intensidad dentro de la corteza terrestre, sin embargo, no nos es posible identificar de manera precisa la densidad del material que provoca estas variaciones, solo podemos identificar si esta densidad es mayor o menor que la densidad promedio del planeta. A pesar de esto, encontramos que la sensibilidad es suficiente para proponer que se busquen estrategias para realizar barrido que permitan obtener la forma geométrica del material en el subsuelo.

Discusión y conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos hecho la descripción del funcionamiento general de un gravímetro atómico. Partiendo de las bases y principios generales de su funcionamiento, pasando por una vista general al proceso y dispositivos que permiten la captura y lanzamiento de los átomos, así como de algunas partes del dispositivo que podrían presentar variaciones debido a su interacción con el entorno, para finalmente realizar una serie de estimaciones respecto a la capacidad de medición de nuestro aparato con materiales de diferentes densidades, a diferentes profundidades los cuales están encapsulados en cavidades de geometrías distintas. Siendo este un estudio teórico, es de interés estimar que tan afectada será la medición de g debido a los efectos que se describieron en los capítulos 4 y 5.

Para obtener una estimación que sea congruente con nuestro análisis previo, recordemos que respecto a la interacción con el entorno, el movimiento e inclinación del espejo así como la sintonía de las frecuencias de los láseres eran los principales afectados.

Con respecto al espejo, la alineación es uno de los factores considerados, ya que, la intensidad del haz se ve afectada y esto depende incluso de la polarización del haz. De acuerdo a los resultados del capítulo 4, cuando el espejo posee una inclinación de 1° y se utilizan rayos circularmente polarizados, la intensidad disminuirá de $23.0397 \frac{mW}{cm^2}$ a $23.0328 \frac{mW}{cm^2}$, de modo que tenemos cambios de intensidad de aproximadamente $\Delta I \approx 0.029\%$. Por otro lado, para el rayo linealmente polarizado tenemos una disminución de $11.4839 \frac{mW}{cm^2}$ a $11.4804 \frac{mW}{cm^2}$, lo cual implica variaciones de intensidad de aproximadamente $\Delta I \approx 0.03\%$. Notamos entonces que la diferencia entre ambas desviaciones es del 0.001% , de modo que, para nuestra estimación consideraremos el peor de los casos en que el haz original disminuye por 0.03% su intensidad.

Para estimar como afectan estas variaciones de intensidad al valor de g , consideremos que los pulsos láser asociados a \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 poseen variaciones de intensidades similares, de tal manera que las intensidades con error I_{1-err} e I_{2-err} presentan las mismas variaciones

$$\begin{aligned} I_{1-err} &= 0.9997I_1 \quad , \\ I_{2-err} &= 0.9997I_2 \quad , \end{aligned}$$

lo cual, de acuerdo a la ecuación (2.57) implicará que las frecuencias de Rabi tendrán a su vez un error asociado. Por tanto la frecuencia de Rabi con error Ω_{1g-err} asociada al estado base

será

$$\begin{aligned}
 |\Omega_{1g-err}| &= \frac{|\mathbf{E}_{01}| |\langle j | \mathbf{d} | g \rangle|}{\hbar} \\
 &= \sqrt{\frac{I_{1-err}}{c\epsilon_0}} \frac{2 |\langle j | \mathbf{d} | g \rangle|}{\hbar} \\
 &= \sqrt{\frac{0.9997 I_1}{c\epsilon_0}} \frac{2 |\langle j | \mathbf{d} | g \rangle|}{\hbar} \\
 &= \sqrt{0.9997} |\Omega_{1g}| \quad , \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

y para la frecuencia asociada al estado excitado tenemos

$$|\Omega_{2e-err}| = \sqrt{0.9997} |\Omega_{2e}| \quad . \tag{6.2}$$

Por tanto la frecuencia efectiva de transición tendrá también un error asociado

$$\begin{aligned}
 |\Omega_{eff-err}| &= \frac{\sqrt{0.9997} |\Omega_{1g}^*| \sqrt{0.9997} |\Omega_{2e}|}{2\Delta_0} \\
 &= 0.9997 |\Omega_{eff}|. \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

De donde, la frecuencia asociada a las soluciones del sistema de ecuaciones de los coeficientes de los estados Ω también poseerá un error

$$\begin{aligned}
 \Omega_{err} &= |\Omega_{eff-err}| \\
 &= 0.9997 |\Omega_{eff}| \\
 &= 0.9997 \Omega \quad . \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

Ahora, con tal de ilustrar el impacto que tales efectos tendrán en la distribución de poblaciones y en las mediciones del valor de g , recordemos del capítulo 2 que la solución del sistema de ecuaciones para la evolución de los estados nos permitía escribir tales soluciones en términos de la matriz

$$R(t, \phi, \tau) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{|\Omega_{eff}| \tau}{2}\right) e^{-i\omega_g \tau} & -i \sin\left(\frac{|\Omega_{eff}| \tau}{2}\right) e^{i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff} - \omega_g \tau]} \\ -i \sin\left(\frac{|\Omega_{eff}| \tau}{2}\right) e^{-i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \phi_{eff} + \omega_e \tau]} & \cos\left(\frac{|\Omega_{eff}| \tau}{2}\right) e^{-i\omega_e \tau} \end{pmatrix} \quad .$$

Lo cual por la forma en que se configura el proceso interferométrico, nos permite representar el proceso interferométrico como el producto de matrices

$$R_t = R(T + \tau, \phi_3, \tau) R(T) R(-\tau, \phi_2, 2\tau) R(T) R(-T - 2\tau, \phi_1, \tau) \quad , \tag{6.5}$$

cuyo resultado se multiplica por el vector

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

debido a que representa el estado del que partimos g . El resultado de este proceso nos permite calcular las poblaciones que se encuentran en el estado excitado y el estado base al finalizar todo el proceso, pues la medición del valor de g depende directamente de los átomos que han sido transferidos al estado excitado

$$P = |A_e(T + 2\tau)|^2 = \frac{1 - \cos(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)}{2} . \quad (6.6)$$

Como vemos, la variación de cualquiera de los valores dentro de la matriz (y en particular la variación de Ω) tendrá un impacto en el cálculo de las poblaciones y por tanto del valor en g . Como nuestro interés se encuentra en ver el impacto que tiene la variación en las poblaciones en el valor de g entonces

$$\Phi = \arccos(1 - 2P) , \quad (6.7)$$

y a partir de este resultado podemos obtener el cambio en el valor de g con

$$g = \frac{\Phi}{k_{eff}T^2} . \quad (6.8)$$

Para ilustrar nuestras afirmaciones anteriores usaremos los valores de la Tabla 6.1 en el producto de matrices R_t para calcular numéricamente las poblaciones

Δ_0	$-229.8518MHz$
$ \langle j \mathbf{d} g \rangle $	$\sqrt{\frac{5}{24}} 3.584 \times 10^{-29}$
$ \langle j \mathbf{d} e \rangle $	$\sqrt{\frac{1}{120}} 3.584 \times 10^{-29}$
I_1, I_2	$230.4 \frac{W}{m^2}$
$\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_{eg}$	$6.834682610904290GHz$
τ	$\frac{\pi}{2\Omega}$
T	$200ms$
k_{eff}	$1.610574779769 \times 10^7 \frac{1}{m}$
ϕ_1	$k_{eff}x_A$
ϕ_2	$k_{eff}x_B - \omega_{eg}T$
ϕ_3	$k_{eff}x_C - 2\omega_{eg}T$

Tabla 6.1: Valores de variables y constantes necesarios para el cálculos [18].

Los valores de x_A , x_B y x_C al ser los puntos de división, reflexión y recombinación de nuestro interferómetro dependen ampliamente de las particularidades de la construcción de cada interferómetro y el como se elijan tales puntos. Aquí consideraremos el caso en que $x_A = 0$, $x_B = 1m$, $x_C = 0$, esto es la división y recombinación se hacen en un punto inmediatamente

CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

exterior a la zona de atrapamiento y lanzamiento mientras que la reflexión se realiza a la altura máxima alcanzada de 1 metro. Con estos datos obtenemos que las poblaciones toman los valores

$$\begin{aligned} P &= 0.71067953 \quad \text{para } \Omega \text{ y } , \\ P_{err} &= 71067981 \quad \text{para } 0.9997\Omega \text{ ,} \end{aligned}$$

así que la variación porcentual en la probabilidad es

$$\begin{aligned} \Delta P_{\%} &= 100 \times \frac{|P - P_{err}|}{P} \text{ ,} \\ &= 3.8 \times 10^{-5} \% \text{ .} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Esto implica que, para la fase tenemos

$$\Phi = 2.00573972 \quad \text{para } \Omega \text{ y} \tag{6.10}$$

$$\Phi = 2.00574032 \quad \text{para } 0.9997\Omega \text{ ,} \tag{6.11}$$

por lo que tenemos una variación de

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{|\Phi - \Phi_{err}|}{\Phi} \tag{6.12}$$

$$= 3 \times 10^{-7} \text{ .} \tag{6.13}$$

Por tanto el valor de g se vera modificado por

$$\begin{aligned} g_{err} &= k_{eff}T^2(\Phi \pm \Delta\Phi) \\ &= (k_{eff}T^2\Phi \pm 3 \times 10^{-7}k_{eff}T^2\Phi) \\ &= (1 \pm 3 \times 10^{-7})kT^2\Phi \\ &= (1 \pm 3 \times 10^{-7})g. \end{aligned}$$

Lo que implica variaciones de $10^{-7}g$ o $10\mu Gal$.

Con respecto a las vibraciones del espejo, encontramos que para frecuencias inferiores a $1MHz$ el sistema se vuelve más sensible. Generalmente el sistema de aislamiento de vibraciones está construido para evitar frecuencias bajas. De acuerdo con lo que se vio en el capítulo 3 y 4, el cambio en la medición de la fase sería:

$$\begin{aligned} k_{eff-err} &= k_{eff} \pm \Delta k_{eff} \\ &= (1 \pm 2.6 \times 10^{-10})k_{eff} \text{ ,} \end{aligned}$$

que corresponde a un valor g en

$$\begin{aligned} g_{err} &= k_{eff-err}T^2\Delta\phi \\ &= (1 \pm 2.6 \times 10^{-10})g \text{ ,} \end{aligned} \tag{6.14}$$

lo anterior implica que en términos efectivos se tenga que los cambios en la medición serán del orden de $0.01\mu Gal$. De esta manera, para la construcción de un gravímetro con una precisión

de $1 \mu Gal$ esta perturbación resulta muy fácil de controlar con actuadores que disipen las vibraciones a bajas frecuencias.

Una última fuente de error puede deberse a desentonamientos en los láseres que generan las transiciones Raman. Tales desentonamientos pueden deberse a la propia constitución del láser y estar fuera del alcance del experimentador. Consideremos pues que en el peor de los casos, tales efectos implican una diferencia de $1 MHz$ en la frecuencia efectiva del láser. Bajo tales consideraciones encontramos

$$\begin{aligned} \Delta k_{eff-err} &= k_{eff} \pm \frac{\Delta \omega_{eff}}{c} \\ &= \left(1 \pm \frac{10^6 \frac{1}{s}}{(299792458 \frac{m}{s})(1.610574779769 \times 10^7 \frac{1}{m})} \right) k_{eff} \\ &= (1 \pm 2 \times 10^{-10}) k_{eff} \quad , \end{aligned} \tag{6.15}$$

lo cual implica que

$$g_{eff} = (1 \pm 2 \times 10^{-10}) g \quad .$$

Esto nuevamente implica variaciones del orden de $0.01 \mu Gal$, por lo que estas variaciones no representan un problema muy grande a las perturbaciones que se pueden presentar en el dispositivo.

De acuerdo a nuestros resultados, hemos encontrado que la forma de las variaciones gravitatorias producen gráficas con ciertas características de las cuales, basados solamente en las medidas gravimétricas y con una sensibilidad de $1 \mu Gal$, sólo podemos distinguir si su densidad es mayor o menor que la densidad promedio del entorno, sin ser capaces de identificar el material específico. Encontramos además que las mediciones presentarán variaciones por factores intrínsecos al aparato. La inclinación del espejo es uno de estos factores, pues produce variaciones en el valor de g que afectan las mediciones que se encuentran dentro del rango de medición comercial actual. Por otro lado, las vibraciones del espejo y desentonamientos de las frecuencias de transición de hasta $1 MHz$ producen variaciones pequeñas, que se encuentran fuera del rango de medición comercial actual. Sin embargo, experimentos recientes han logrado extender la capacidad de medición gravimétrica, logrando precisiones de $10^9 g$ o $0.1 \mu Gal$ [41]. Si bien es cierto que la precisión del dispositivo que se está desarrollando por el grupo de investigación Grávico no es el más preciso del mundo, su principal objetivo se encuentra principalmente en el desarrollo de un instrumento hasta cierto punto portátil o móvil, ya que ofrece mediciones gravimétricas absolutas con la capacidad de desplazamiento, lo cual en el área de las aplicaciones por diferentes usuarios resulta muy conveniente.

Por tanto, experimentos con el objetivo de mejorar la precisión de la medición requerirán tomar consideraciones con tal de paliar o eliminar estos efectos pues, los experimentos se han vuelto mucho más precisos gracias al avance tecnológico, en particular en el campo de la física atómica, la cual posee algunas de las mediciones más precisas hasta la fecha, pues estas tienen como origen la creciente búsqueda de precisión, lo que a su vez permite indagar en detalles mucho más finos [1]. Esto conlleva a preguntas sobre fenómenos que previamente eran desconocidos o ignorados, de tal manera que hoy en día incluso se podría cuestionar la sensibilidad de

las mediciones a otros factores como la temperatura, el grado de vacío o la estructura atómica, dependiendo de la sensibilidad del aparato. Esto a su vez nos muestra como los experimentos han rebasado ampliamente los modelos teóricos gracias al avance tecnológico, a través del cual se ha logrado sortear de una u otra forma fenómenos que limitaban las capacidades de medición. Estudios más profundos en estos temas tienen la posibilidad de contribuir en la mejora de precisión de las herramientas con las que se interactúa con el mundo, lo cual en el peor de los casos ha de llevar a considerar cierta tolerancia al error que se puede aceptar en fenómenos que, por el grado de sensibilidad buscado, se encuentren fuera de las capacidades tecnológicas del momento.

Bibliografía

- [1] NIST. SI Redefinition. Visitado el 20 de Febrero de 2021. <https://www.nist.gov/content/si-redefinition>.
- [2] W. Jacoby, P. L. Smilde. Gravity Interpretation: Fundamentals and Application of Gravity Inversion and Geological Interpretation. Springer, pp 23-25, 114-124.
- [3] L. Lacoste, N. Clarkson, G. Hamilton. Lacoste and Romberg stabilized platform shipboard gravity meter. Geophysics, Volume XXXII, pp 99-109.
- [4] J. M. Goodkind. The superconducting gravimeter. AIP Publishing. Review of Scientific Instruments, Volume 70, Number 11, pp 4131-4152.
- [5] G. P. Amautov , Yu. D. Boulanger, E. N. Kalish, V. P. Koronkevitch, Yu. F. Stus, V. G. Tarasyuk. "Gabl", an Absolute Free-Fall Laser Gravimeter. IOP Publishing Ltd, Metrologia, Volume 19, pp 49-55.
- [6] A. Peters, K. Y. Chung, S. Chu. High-precision gravity measurements using atom interferometry. IOP Publishing Ltd, Metrologia, Volume 38, Number 1, pp 25-61.
- [7] National Institute of Standards and Technology (NIST). <https://www.nist.gov>
- [8] Bureau International de Poids et Mesures (Oficina Internacional de Pesos y Medidas). <https://www.bipm.org/>
- [9] J. P. Dowling, G. J. Milburn. Quantum Technology: the second quantum revolution. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Volume 361, Issue 1809, pp 1655-1674.
- [10] L. E. Ballentine. Quantum Mechanics: A modern development, New York, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, pp 63-123.
- [11] P. Storey, C. Cohen-Tannoudji. The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial. EDP Sciences, Journal de Physique II. 1994, 4 (11), pp 1999-2027.
- [12] E. Hecht. Optics, 4ed(2002). Pearson Education, pp 411-412.

BIBLIOGRAFÍA

- [13] M. E. Gehm. Preparation of an Optically-Trapped Degenerate Fermi Gas of ${}^6\text{Li}$: Finding the Route to Degeneracy. PhD thesis, Duke University, 2003, pp 225-269.
- [14] D. A. Steck. (2003). Sodium D Line Data. New Mexico, USA: Los Alamos National Laboratory.
- [15] T. G. Tiecke. Feshbach resonances in ultracold mixtures of the fermionic quantum gases ${}^6\text{Li}$ and ${}^{40}\text{K}$. PhD thesis, University of Amsterdam, 2009, pp 113-122.
- [16] D. A. Steck. (2003). Rubidium 85 D Line Data. Department of Physics. University of Oregon, 2008.
- [17] D. A. Steck. (2003). Cesium D Line Data. Department of Physics. University of Oregon, 1998.
- [18] D. A. Steck. (2003). Rubidium 87 D Line Data. New Mexico, USA: Los Alamos National Laboratory.
- [19] K. Krane. Modern Physics, 3ed(2012). John, Wiley & Sons, pp 225-252.
- [20] W. N. Cottingham, D. A. Greenwood. An introduction to Nuclear Physics, 2ed(2001). Cambridge University Press, pp 56-72.
- [21] C. J. Foot. (2005). Atomic Physics. Oxford University Press, pp 80-258.
- [22] P. R. Berman. (1997). Atom Interferometry. California, USA: Academic Press, pp 363-406.
- [23] H. J. Metcalf, P. Van Der Straten. (1999). Laser cooling and trapping, Singapore: Springer-Verlag.
- [24] M. Schmidt. A mobile high-precision gravimeter based on atom interferometry. Doctoral dissertation(2011). Humboldt University, Berlin, Alemania, pp 21-42.
- [25] P. Cheinet. Conception et réalisation d'un gravimètre à atomes froids. Physique Atomique. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français, pp 23-55.
- [26] V. S. Letokhov, V. G. Minogin, B. D. Pavlik (1977). Cooling and capture of atoms and molecules by a resonant light field. Soviet Physics JETP. 45: 698.
- [27] C. Cohen-Tannoudji. Atomic motion in laser light. Fundamental systems in quantum optics. Les Houches session LIII, July 1990, pages 1–164. Elsevier, 1992.
- [28] T. Bergeman, G. Erez, H. J. Metcalf. Magnetostatic trapping fields for neutral atoms. Physical Review A. Volume 35, Number 4, pp 1535-1546.
- [29] Bureau International des Poids et Mesures, The International Sistem of Units (SI). Consultado el 20 de Agosto de 2019.

- [30] L. Essen, J.V.L. Parry. (1955). An Atomic Standard of Frequency and Time Interval: A Caesium Resonator. *Nature* volume 176, pp. 280–282.
- [31] Markowitz, W.; Hall, R.; Essen, L.; Parry, J. (1958). "Frequency of Cesium in Terms of Ephemeris Time". *Physical Review Letters*. 1 (3): 105.
- [32] NIST, NIST-F1 cesium fountain atomic clock: The primary time and frequency standard for the United States. Consultado el 18 de Agosto de 2019.
- [33] Ch. J. Bordé. Atomic clocks and inertial sensors. IOP Publishing Ltd. *Metrologia*, Volume 39, Number 5, pp 435-463.
- [34] P. R. Saulson. Vibration Isolation for broadband gravitational wave antennas. *Review of Scientific Instruments*, Volume 55, Issue 8, pp 1315-1320.
- [35] P. G. Nelson. An active vibration isolation system for inertial reference and precision measurement. *Review of Scientific Instruments*, Volume 62, Issue 9, pp 2069-2075.
- [36] B. Barrett, P.-A. Gominet, E. Cantin, L. Antoni-Micollier, A. Bertoldi, B. Battelier and P. Bouyer. *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Volume 188: Atom Interferometry, pp. 493-555 (2014).
- [37] Patrick Cheinet, Benjamin Canuel, Franck Pereira Dos Santos, Alexandre Gauthier, Florence Yver-Leduc, and Arnaud Landragin. Measurement of the sensitivity function in a time-domain atomic interferometer. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* pp 1141–1148.
- [38] A. Marchenko. Earth's radial density profiles based on Gauss and Roche's distributions. *Bollettino di Geodesia et Scienze Affini* - June 2000. Anno LIX(3):201-220.
- [39] A. Marchenko. The Earth's Global Density Distribution and Gravitational Potential Energy. *Observing our Changing Earth*. Springer. International Association of Geodesy Symposia, Volume 133, pp 483-491.
- [40] A. M. Dziewonski, D. L. Anderson. Preliminary reference Earth model. Elsevier Scientific Publishing Company. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Volume 25, Issue 4, pp 297–356.
- [41] V. Ménotret, P. Vermeulen, N. Le Moigne, S. Bonvalot, P. Bouyer, A. Landragin, B. Desruelle. Gravity measurements below $10^{-9}g$ with a transportable absolute quantum gravimeter. *Nature Publishing Group, Scientific Reports* 8.