



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCIONES EXACTAS A LAS
ECUACIONES DEL CAMPO DE EINSTEIN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

ÁNGEL DE JESÚS SÁNCHEZ LÓPEZ

TUTOR

DR. EUGENIO GARNICA VIGIL

2021





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1.Datos del alumno

SÁNCHEZ

LÓPEZ

ÁNGEL DE JESÚS

5610340420

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FÍSICA

411087816

2.Datos del tutor

Dr

GARNICA

VIGIL

EUGENIO

3.Datos del sinodal 1

Dr

LONGORIA

PADILLA

PABLO

4.Datos del sinodal 2

DR

GARCÍA

ZENTENO

JOSÉ ANTONIO RAFAEL

5.Datos del sinodal 3

PALMAS

VELASCO

OSCAR ALFREDO

6.Datos del sinodal 4

CRUZ

PACHECO

GUSTAVO

Agradecimientos

Gracias a mis padres y hermanos que siempre han estado presentes.

Índice general

1. Preliminares	9
1.1. Variedades	9
1.2. Campos vectoriales	12
1.3. Grupos de Lie	15
1.4. Álgebra de Lie	22
1.5. Tensores	27
1.6. Variedades semi-riemannianas	31
2. Grupos y ecuaciones diferenciales	45
2.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales	49
2.2. Prolongación de acciones de grupo	50
2.3. Invarianza de ecuaciones diferenciales	52
2.4. Prolongación de campos vectoriales	52
2.5. Invarianza infinitesimal	53
2.6. Ecuaciones diferenciales de orden superior	64
3. Relatividad General	67
3.1. Fundamentos del espacio-tiempo	67
3.2. Ecuaciones del campo de Einstein	71
3.3. Tensor de energía momento	74
3.4. Espacio-tiempo de Schwarzschild	81
3.5. Espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker	84
4. Aplicaciones a la Relatividad General	91
4.1. Schwarzschild	91
4.2. RFW	95
4.3. Modelo cosmológico compuesto por dos fluidos	102
A.	109
A.1. Teorema de Stokes	109
A.2. Tensores $\delta\Gamma_{jk}^i$	109
A.3. Divergencia	109
B.	111
B.1. Espacios de máxima simetría	111

Resumen

Al ser estudiados los fenómenos físicos, en general, se encuentran leyes que no vinculan entre sí las magnitudes que lo caracterizan, sino que involucran relaciones entre esas magnitudes y sus derivadas. De aquí se obtienen relaciones que no involucran solo la función incógnita (escalar o vectorial) sino además una o más derivadas de la misma, tales ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales. En física teórica son muchas las situaciones donde las podemos encontrar, desde la mecánica clásica en la ecuación de Poisson para determinar el campo gravitacional, a la física cuántica en la ecuación de Schrödinger. Sin embargo hallar soluciones de este tipo de ecuaciones no siempre es una tarea fácil, muchas veces se recurre a soluciones numéricas con el fin de tener una solución aproximada, esto suele ser muy práctico ya que mediante el uso de ordenadores se puede desarrollar un algoritmo para encontrar una solución aproximada.

En el siglo XIX Sophus Lie introdujo la noción de grupos continuos, nombrados hoy en día grupos de Lie en su honor, para unificar y extender varios métodos especializados en resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los trabajos de Lie buscaban la integración de ecuaciones diferenciales parciales. Sus investigaciones lo llevaron a que considerará grupos de transformaciones que dejaran una ecuación diferencial parcial invariante (lo que se conoce como simetrías de ecuaciones diferenciales) pronto se dio cuenta que los distintos métodos conocidos en esa época para integrar ecuaciones diferenciales eran casos particulares de una teoría general en la que cada ecuación podía integrarse bajo la acción de un grupo continuo de transformaciones. Así dada una ecuación diferencial, se debería encontrar un grupo de transformaciones que dejaría invariante la ecuación y por medio de las propiedades del grupo esta se podría simplificar para resolverla. Para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales también se encuentran estos grupos de transformaciones, así rigurosamente hablando un grupo de simetrías de un sistema de ecuaciones diferenciales es un grupo el cual transforma soluciones del sistema a otras soluciones, estos grupos consisten de transformaciones geométricas para el espacio de las variables dependientes e independientes del sistema y actúan sobre soluciones transformando su gráfica.

Nuestro objeto de estudio en este trabajo son las ecuaciones del campo de Einstein de la relatividad general para algunos casos de interés. Dado que la relatividad general es una teoría modelada como una variedad semi-riemanniana en el Capítulo 1 introducimos los conceptos matemáticos básicos de la geometría diferencial y semi-riemanniana, así como algunas nociones básicas del álgebra tensorial. Seguido de esto en el Capítulo 2 se expone el método para hallar el grupo de simetrías de un sistema de ecuaciones diferenciales. Antes de tratar de hallar grupos de simetrías en el Capítulo 3 exponemos los fundamentos de

la teoría de la relatividad general, así como una deducción de las ecuaciones del campo de Einstein a partir del principio variacional. Nos restringiremos a hallar soluciones solo para casos cuando el tensor de energía momento es modelado como un fluido perfecto. Finalmente en este capítulo se exponen dos modelos de gran interés, el primero es el modelo de Schwarzschild para una métrica con simetría esférica y el otro modelo es el de Friedmann-Robertson-Walker para un universo homogéneo e isotrópico.

Finalmente en el Capítulo 4, aplicamos el método expuesto en el Capítulo 2, en el primer caso tendremos la métrica de Schwarzschild mediante la cual tendremos una prueba más al teorema de Birkhoff, el cual dice que la solución a las ecuaciones del campo de Einstein para el espacio vacío en presencia de un objeto con simetría esférica está dada a lo más por un factor de la métrica de Schwarzschild. En una segunda aplicación del método tenemos varios modelos cosmológicos, todos modelados a partir de la ecuación de Zeldovich, en estos encontramos que la métrica se mantiene invariante, excepto en el caso cuando la presión y la densidad cumplen $p = -1/3\rho$, lo cual debe deberse a que para $p < 1/3\rho$ se tiene la condición para que la presión de la materia genere inflación y por lo tanto anisotropías e inhomogeneidades iniciales. Finalmente se considera un modelo cosmológico compuesto por dos fluidos, radiación y materia, en este caso lo que obtenemos es una solución implícita para el factor de expansión obtenida gracias al grupo de simetrías.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos matemáticos básicos de la geometría diferencial, semi-riemanniana y el álgebra tensorial. Ya que la teoría de la relatividad general modela el espacio-tiempo como una variedad semi-riemanniana. Para profundizar más en estos temas, se recomienda ver [1], [2].

1.1. Variedades

Definición 1.1. Una variedad de dimensión m es un conjunto M , junto con una colección numerable de subconjuntos $U_\alpha \subset M$, llamados *cartas coordenadas* y funciones 1:1, $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ sobre subconjuntos abiertos $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, llamados *mapeos coordenados locales*, los cuales satisfacen las siguientes propiedades

(a) Las cartas coordenadas cubren M :

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M$$

(b) Sobre la superposición de cualesquiera cartas coordenadas $U_\alpha \cap U_\beta$ el mapeo composición

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es una función infinitamente diferenciable, usualmente diremos que es una función *suave*.

(c) Si $x \in U_\alpha$ y $\tilde{x} \in U_\beta$ son puntos distintos de M , entonces existen subconjuntos abiertos $W \subset V_\alpha, \tilde{W} \subset V_\beta$, con $\chi_\alpha(x) \in W, \chi_\beta(\tilde{x}) \in \tilde{W}$ que satisfacen

$$\chi_\alpha^{-1}(W) \cap \chi_\beta^{-1}(\tilde{W}) = \emptyset$$

Los mapeos coordenados $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ dan a la variedad M una estructura de espacio topológico. Normalmente se requiere que para cada subconjunto abierto $W \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^m, \chi_\alpha^{-1}(W)$ sea un subconjunto abierto de M . Estos conjuntos forman una **base** para el espacio topológico sobre M , tal que $U \subset M$ es abierto si y solo si para cada $x \in U$ hay una vecindad de x de la forma anterior

contenida en U , tal que $x \in \chi_\alpha^{-1}(W) \subset U$ donde $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ es un mapeo coordenado que contiene a x , y W es un subconjunto abierto de V_α .

La diferenciabilidad de la composición $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ determina si la variedad M es diferenciable (**suave**). En este trabajo estaremos interesados en **funciones suaves**, de las cuales la composición de estas funciones también sea suave. Si se tiene una función continua diferenciable y además tiene inversa diferenciable esta se llamara **difeomorfismo**.

Ejemplo 1.1. La esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una variedad de dimensión 2, considerada como una superficie en \mathbb{R}^3 . Sean

$$U_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad U_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$$

los subconjuntos obtenidos por borrar el polo norte y sur respectivamente.

Sea

$$\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \{(x, y, 0)\}, \quad \alpha = 1, 2$$

la proyección estereográfica de los polos respectivamente, tal que

$$\chi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \quad \chi_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

es fácil ver que sobre la superposición $U_1 \cap U_2$

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

es un difeomorfismo, dado por la inversión

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Cambio de Coordenadas

Además de las cartas coordenadas básicas $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ dadas en la definición de M , siempre se pueden escoger varias cartas coordenadas $\chi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, sujetas al requisito de que sean compatibles con la carta dada. Esto significa que para cada $\alpha, \chi \circ \chi_\alpha^{-1}$ es suave sobre la intersección $\chi_\alpha(U \cap U_\alpha)$. Así, la restricción de un conjunto local de coordenadas χ_α a una carta pequeña $\tilde{U}_\alpha \subset U_\alpha$ también debe ser una carta coordenada válida. Una posibilidad adicional es componer un mapeo coordenado local $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ con cualquier difeomorfismo $\psi : V_\alpha \rightarrow \tilde{V}_\alpha$ de \mathbb{R}^m . Tal difeomorfismo es conocido como **cambio de coordenadas**. Ya que χ_α y $\psi \circ \chi_\alpha$ son coordenadas locales igualmente válidas sobre la carta U_α , cualquier propiedad de M u objeto definido sobre M , debe ser independiente de cualquier elección particular de coordenadas locales. (Es decir la fórmula explícita para un objeto dado puede cambiar cuando vamos de una carta coordenada a otra, pero la caracterización intrínseca del objeto es independiente de las coordenadas).

Frecuentemente uno expande la colección de cartas coordenadas para incluir todas aquellas compatibles con la carta de definición. La colección resultante

es llamada **colección máxima** de cartas o **atlas** sobre M , esta satisface las propiedades básicas (a), (b) y (c) de la Definición 1.1.

Usualmente se hace referencia que $x = (x^1, \dots, x^m)$ son coordenadas locales sobre M , lo cual de manera precisa significa que hay una carta coordenada $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, con $U_\alpha \subset M$ abierto, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ abierto, y tal que cada $p \in U_\alpha$ tiene coordenadas locales $x = \chi_\alpha(p)$. Como $\chi_\alpha(p)$ es 1:1 se puede identificar a p con su expresión x en coordenadas locales. Por la condición de compatibilidad sabemos que $y = (y^1, \dots, y^m)$ también son coordenadas locales si y solo si la superposición de dos cartas coordenadas es un difeomorfismo $y = \psi(x)$ definido sobre un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m que relaciona las coordenadas.

Condición de rango máximo

Si M y N son variedades suaves, un mapeo $F : M \rightarrow N$ se dice que es un mapeo **suave** si su expresión coordenada local es un mapeo suave en cada carta coordenada. En otras palabras, para cada carta coordenada $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ sobre M y cada carta $\tilde{\chi}_\beta : \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ sobre N , el mapeo composición

$$\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es un mapeo suave siempre que este definido (es decir sobre el subconjunto $\chi_\alpha[U_\alpha \cap F^{-1}(\tilde{U}_\beta)]$). En otras palabras, un mapeo suave es de la forma $y = F(x)$, donde F es un mapeo suave sobre los subconjuntos abiertos dadas coordenadas locales x sobre M y y sobre N .

Definición 1.2. Sea $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave de una variedad M de dimensión m a una variedad N de dimensión n . El **rango** de F en el punto $x \in M$ es el rango de la matriz Jacobiana de $n \times m$ $(\partial F^i / \partial x^j)$ en x , donde $y = F(x)$ está expresada en cualquier coordenada local conveniente cerca de x . El mapeo F es de **rango máximo** sobre un subconjunto $S \subset M$ si para cada $x \in S$ el rango de F es tan grande como sea posible. (es decir el mínimo entre m y n).

Teorema 1.1. Sea $F : M \rightarrow N$ de rango máximo en $x_0 \in M$. Entonces existen coordenadas locales $x = (x^1, \dots, x^m)$ cerca de x_0 , y $y = (y^1, \dots, y^n)$ cerca de $y_0 = F(x_0)$ tal que en estas coordenadas F tienen la forma simple

$$y = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0), \quad \text{si } n > m,$$

o

$$y = (x^1, \dots, x^n), \quad \text{si } n \leq m.$$

Subvariedades

Definición 1.3. Sea M una variedad suave. Una **subvariedad** de M es un subconjunto $N \subset M$, junto con un mapeo 1:1 suave $\phi : \tilde{N} \rightarrow N \subset M$ que satisface la condición de rango máximo en cualquier parte, donde el **espacio paramétrico** \tilde{N} es alguna otra variedad y $N = \phi(\tilde{N})$ es la imagen de ϕ . En particular, la dimensión de N es la misma que la dimensión de \tilde{N} , y no excede la dimensión de M .

El mapeo ϕ es llamado una **inmersión**, y es útil para definir una parametrización en la subvariedad N . Frecuentemente tal subvariedad es referida como una **subvariedad ímersa**.

Definición 1.4. *Una subvariedad regular N de una variedad M es una subvariedad parametrizada por $\phi : \tilde{N} \rightarrow M$ con la propiedad de que para cada $x \in N$ existe una pequeña vecindad abierta U de $x \in M$ tal que $\phi^{-1}[U \cap N]$ es un subconjunto conexo abierto de \tilde{N} .*

Curvas

Una **curva** C sobre una variedad suave M está parametrizada por un mapeo suave $\gamma : I \rightarrow M$ donde I es un subintervalo de \mathbb{R} . En coordenadas locales, C está definida por m funciones $x = \phi(t) = (\phi^1(t), \dots, \phi^m(t))$, note que no se necesita que γ sea 1:1 pues puede tener autointersecciones, o ser de rango máximo. Una degeneración particular ocurre cuando $\gamma(t) \equiv x_0$ para toda t , para alguna x_0 fija, tal que C es un solo punto. Una **curva cerrada** es aquella en la cual sus puntos finales coinciden $\phi(a) = \phi(b)$, con $I = [a, b]$ intervalo cerrado.

1.2. Campos vectoriales

Supóngase que C es una curva suave sobre una variedad M , parametrizada por $\gamma : I \rightarrow M$, donde $I \subset \mathbb{R}$. En coordenadas locales $x = (x^1, \dots, x^m)$, γ está dada por m funciones suaves $\gamma(\varepsilon) = (\gamma^1(\varepsilon), \dots, \gamma^m(\varepsilon))$ de la variable real ε . En cada punto $x = \gamma(\varepsilon)$ de γ la curva tiene un **vector tangente**, normalmente la derivada $\dot{\gamma}(\varepsilon) = d\gamma/d\varepsilon = (\dot{\gamma}^1(\varepsilon), \dots, \dot{\gamma}^m(\varepsilon))$, para poder distinguir entre vectores tangentes y expresiones de coordenadas locales para puntos en la variedad, se usa la siguiente notación

$$v|_x = \dot{\gamma}(\varepsilon) = \dot{\gamma}^1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{\gamma}^2(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \dot{\gamma}^m(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^m} \quad (1.1)$$

para el vector tangente a γ en $x = \gamma(\varepsilon)$. Por ejemplo, la hélice

$$\gamma(\varepsilon) = (\cos \varepsilon, \sin \varepsilon, \varepsilon)$$

en \mathbb{R}^3 , con coordenadas (x, y, z) , tiene vector tangente

$$\dot{\gamma}(\varepsilon) = -\sin \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

en el punto $(x, y, z) = \gamma(\varepsilon) = (\cos \varepsilon, \sin \varepsilon, \varepsilon)$. Dos curvas $C = \{\gamma(\varepsilon)\}$ y $\tilde{C} = \{\tilde{\gamma}(\theta)\}$ pasando a través del mismo punto $x = \gamma(\varepsilon^*) = \tilde{\gamma}(\theta^*)$ para algunas ε^*, θ^* , tienen el mismo vector tangente si y solo si sus derivadas coinciden en el mismo punto:

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon}(\varepsilon^*) = \frac{d\tilde{\gamma}}{d\theta}(\theta^*).$$

No es difícil ver que el concepto es independiente de la elección del sistema de coordenadas cerca de x . Además si $x = \gamma(\varepsilon) = (\gamma^1(\varepsilon), \dots, \gamma^m(\varepsilon))$ es la expresión

local en términos de $x = (x^1, \dots, x^m)$ y $y = \psi(x)$ es cualquier difeomorfismo, entonces $y = \psi(\phi(\varepsilon))$ es la fórmula local de coordenadas para la curva en términos de las coordenadas y . El vector tangente $v|_x = \dot{\gamma}(\varepsilon)$ respecto a este cambio de coordenadas toma la forma en las coordenadas y :

$$v|_{y=\psi(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{d}{d\varepsilon} \psi^j(\phi(\varepsilon)) \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \psi^j}{\partial x^k}(\phi(\varepsilon)) \frac{d\phi^k}{d\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

La matriz Jacobiana $\frac{\partial \psi^j}{\partial x^k}$ es invertible en cada punto si y solo si

$$\frac{d}{d\varepsilon^*} \psi(\phi(\varepsilon^*)) = \frac{d}{d\theta^*} \psi(\tilde{\phi}(\theta^*))$$

La colección de todos los vectores tangentes de todas las posibles curvas pasando a través de un punto dado x en M es llamado **espacio tangente** a M en x , y es denotado por $T_x(M)$, véase figura 1.1. Si M es una variedad m -dimensional, entonces $T_x(M)$ es un espacio vectorial m -dimensional, con $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ una base para $T_x(M)$ son las coordenadas locales dadas. La colección de todos los espacios tangentes a todos los puntos x en M es llamado el **haz tangente** de M , denotado por

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x(M).$$

Si $\gamma(\varepsilon)$ es cualquier curva diferenciable, entonces los vectores tangentes $\dot{\gamma}(\varepsilon) \in T_{\gamma(\varepsilon)}(M)$ deben variar suavemente de punto a punto. Esto hace que el haz tangente TM sea una variedad diferenciable de dimensión $2m$.

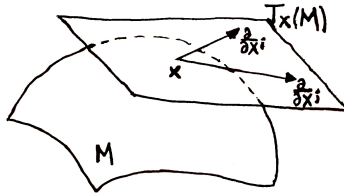


Figura 1.1: Plano tangente $T_x(M)$ en un punto x en M .

Un **campo vectorial** v sobre M asigna un vector tangente $v|_x \in T_x(M)$ a cada punto $x \in M$, con $v|_x$ variando suavemente de punto a punto. En coordenadas locales (x^1, \dots, x^m) , un campo vectorial tiene la forma

$$v|_x = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m},$$

donde cada $\xi^i(x)$ es una función suave de x . (Deberíamos poner el símbolo $|_x$ a cada $\partial/\partial x^i$ para indicar a qué espacio tangente $T_x(M)$ pertenece). La colección de todos los campos vectoriales suaves sobre M denotará como $\mathfrak{X}(M)$. Un

ejemplo físico de un campo vectorial es el campo de velocidades de un fluido estable en algún subconjunto abierto $M \subset \mathbb{R}^3$. A cada punto $(x, y, z) \in M$, el vector $v_{(x,y,z)}$ debe ser la velocidad del fluido de las partículas pasando a través del punto (x, y, z) .

Una **curva integral** de un campo vectorial v es una curva suave parametrizada $x = \gamma(\varepsilon)$ cuyo vector tangente en cualquier punto coincide con el valor de v en ese punto:

$$\dot{\gamma}(\varepsilon) = v|_{\gamma(\varepsilon)}$$

para toda ε . En coordenadas locales, $x = \gamma(\varepsilon) = (\gamma^1(\varepsilon), \dots, \gamma^m(\varepsilon))$ debe ser una solución del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

donde los $\xi^i(x)$ son coeficientes de v en x . Para $\xi^i(x)$ suave, el teorema estándar de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que hay una única solución para (1.2) para cada conjunto de valores iniciales

$$\gamma(0) = x_0.$$

Esto implica la existencia de una única curva integral **maximal** $\gamma : I \rightarrow M$ pasando a través de un punto dado $x_0 = \gamma(0) \in M$, donde "maximal" significa que no está contenida en una curva integral más grande; es decir si $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow M$ es cualquier otra curva integral con el mismo valor inicial $\tilde{\gamma}(0) = x_0$, entonces $\tilde{I} \subset I$ y $\tilde{\gamma}(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon)$ para $\varepsilon \in \tilde{I}$. Note que si $v|_{x_0} = 0$, entonces la curva integral a través de x_0 es el punto $\gamma(\varepsilon) \equiv x_0$, definido para todo ε . Nótese que si v es cualquier campo vectorial suave sobre una variedad M , y $f(x)$ es cualquier función suave de variable real definida para toda $x \in M$, entonces $f \cdot v$ es nuevamente un campo vectorial suave, con $(f \cdot v)|_x = f(x)v|_x$. En coordenadas locales, si $v = \sum \xi^i(x)\partial/\partial x^i$, entonces $f \cdot v = \sum f(x)\xi^i(x)\partial/\partial x^i$.

Flujo

Si v es un campo vectorial, denotamos la máxima curva integral parametrizada, pasando a través de x en M por $\Psi(\varepsilon, x)$ y llamamos a Ψ el **flujo** generado por v . Así para cada punto $x \in M$, y ε en algún intervalo I_x que contenga el 0, $\Psi(\varepsilon, x)$ debe ser un punto en la curva integral pasando a través de x en M . El flujo de los campos vectoriales tiene las propiedades básicas:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x) \quad x \in M, \quad (1.3)$$

para toda $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que ambos lados de la ecuación están definidos,

$$\Psi(0, x) = x, \quad (1.4)$$

y

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, x) = v|_{\Psi(\varepsilon, x)} \quad (1.5)$$

para toda ε donde este definida la igualdad.

El campo vectorial v es llamado **generador infinitesimal**, ya que por el teorema de Taylor, en coordenadas locales

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2),$$

donde $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ son los coeficientes de v .

1.3. Grupos de Lie

Un grupo es un conjunto G junto con una operación, usualmente llamada multiplicación, tal que para cualesquiera dos elementos g y h de G , el producto $g \cdot h$ es nuevamente un elemento de G . La operación del grupo requiere que se satisfagan los siguientes axiomas:

(1) **Asociatividad.** Si g, h y k son elementos de G , entonces

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k.$$

(2) **Elemento identidad.** Hay un elemento distinguido e de G , llamado elemento identidad, el cual tiene la propiedad

$$e \cdot g = g = g \cdot e$$

para toda g en G .

(3) **Inverso.** Para cada g en G hay un inverso, denotado por g^{-1} , con la propiedad

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g.$$

Definición 1.5. *Un grupo de Lie de r -parámetros es un grupo G el cual tiene la estructura de una r -variedad diferenciable de tal manera que las operaciones de grupo*

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = g \cdot h, \quad g, h \in G,$$

y la inversión

$$i : G \rightarrow G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G,$$

son mapeos suaves entre variedades.

Ejemplo 1.2. Sea $G = SO(2)$, el grupo de las rotaciones en el plano. Es decir

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : 0 \leq \theta < 2\pi \right\},$$

donde θ denota el ángulo de rotación. Note que G se puede identificar con el círculo unitario

$$S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

en \mathbb{R}^2 , el cual define la estructura de variedad en $SO(2)$. Si se incluyen las reflexiones se obtiene el grupo ortogonal

$$O(2) = \{X \in GL(2) : X^T X = I\}$$

Esté tiene la estructura de variedad con dos copias desconexas de S^1 .

Ejemplo 1.3. De manera más general, se puede considerar el grupo ortogonal de las matrices de $n \times n$

$$O(n) = \{X \in GL(n) : X^T X = I\}.$$

Así $O(n)$ es el subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} definido por las n^2 ecuaciones

$$X^T X - I = 0,$$

conteniendo las entradas x_{ij} de X . $O(n)$ es una subvariedad regular de $GL(n)$ de dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$. Más aún, la multiplicación de matrices e inversión son mapeos suaves cuando nos restringimos a $O(n)$, ya que $O(n)$ es un grupo de Lie. El grupo ortogonal especial

$$SO(n) = \{X \in O(n) : \det X = +1\},$$

siendo la componente conexa de la identidad del grupo ortogonal, es también un grupo de Lie de $\frac{1}{2}n(n-1)$ -parámetros.

Un **homeomorfismo** de grupos de Lie es un mapeo $\phi : G \rightarrow H$ entre dos grupos de Lie el cual respeta las operaciones de grupo:

$$\phi(g \cdot \tilde{g}) = \phi(g) \cdot \phi(\tilde{g}), \quad g, \tilde{g} \in G$$

Si ϕ tiene una inversa diferenciable, esta determina un **isomorfismo** entre G y H .

Subgrupos de Lie

Frecuentemente los grupos de Lie son subgrupos de otros grupos de Lie más grandes, por ejemplo los grupos ortogonales son subgrupos de los grupos generales lineales de todas las matrices invertibles.

Definición 1.6. *Un subgrupo de Lie H de un grupo de Lie G está dado por una subvariedad $\phi : \tilde{H} \rightarrow G$, donde \tilde{H} es un grupo de Lie, $H = \phi(\tilde{H})$ es la imagen de ϕ , y ϕ es un homeomorfismo de grupos de Lie.*

Por ejemplo, si w es cualquier número real, la subvariedad

$$H_w = \{(t, wt) \mod 2\pi : t \in \mathbb{R}\} \subset T^2$$

es fácil ver que es un subgrupo de Lie de 1-parámetro de el grupo toroidal T^2 . Si w es racional, entonces H_w es un isomorfismo al grupo circular $SO(2)$, y forma un subgrupo cerrado, regular de T^2 , mientras que si w es irracional, entonces H_w es un isomorfismo del grupo de Lie \mathbb{R} , y es denso en T^2 .

Teorema 1.2. *Supóngase que G es un grupo de Lie. Si H es un subgrupo cerrado de G , entonces H es una subvariedad regular de G y de aquí que sea un grupo de Lie. Recíprocamente, cualquier subgrupo de Lie regular de G es un subgrupo cerrado.*

Grupos locales de Lie

Frecuentemente no estamos interesados en el grupo de Lie de manera completa, pero si en los elementos que estén cerca del elemento identidad. Para esto es importante definir un grupo de Lie local.

Definición 1.7. *Un grupo de Lie local de r -parámetros está compuesto por subconjuntos conexos abiertos $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ que contienen el origen, y mapeos diferenciables*

$$m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^r$$

que definen la operación de grupo, y

$$i : V_0 \rightarrow V,$$

que define la inversión del grupo, con las siguientes propiedades.

(a) *Asociatividad.* Si $x, y, z \in V$, y también $m(x, y)$ y $m(y, z)$ están en V , entonces

$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z).$$

(b) *Elemento identidad.* Para todo x en V , $m(0, x) = x = m(x, 0)$.

(c) *Inversa.* Para cada x en V_0 , $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Si se escribe $x \cdot y$ para $m(x, y)$, y x^{-1} para la inclusión $i(x)$, entonces los axiomas anteriores se traducen en los axiomas usuales de grupo, excepto que no están necesariamente definidos donde sea. Entonces se tiene lo siguiente; $x \cdot y$ tiene sentido solo para x y y suficientemente cerca del 0; La asociatividad $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ donde sea que ambos lados de la ecuación esté definida. El elemento identidad del grupo es el origen 0; Finalmente, x^{-1} nuevamente está definido solo para x suficientemente cerca del 0, y $x \cdot x^{-1} = 0 = x^{-1} \cdot x$ solo para esas x 's.

Ejemplo 1.4. Sea $V = \{x : |x| < 1\} \subset \mathbb{R}$ con la multiplicación de grupo

$$m(x, y) = \frac{2xy - x - y}{xy - 1}, \quad x, y \in V.$$

Algunos cálculos verifican la ley asociativa e identidad para m . El mapeo inverso es $i(x) = \frac{x}{2x-1}$, definido para $x \in V_0 = \{x : |x| < \frac{1}{2}\}$. Así m define un grupo local de Lie de 1-parámetro.

Un método fácil de construir grupos locales de Lie es tomar un grupo global de Lie y usar una carta coordenada que contenga el elemento identidad.

Teorema 1.3. *Sea $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ un grupo local de Lie con multiplicación $m(x, y)$ e inversión $i(x)$. Entonces existe un grupo global de Lie G y una carta coordenada $\chi : U^* \rightarrow V^*$, donde U^* contiene el elemento identidad, tal que $V^* \subset V_0$, $\chi(e) = 0$, y*

$$\chi(g \cdot h) = m(\chi(g), \chi(h))$$

siempre que $g, h \in U^*$, y

$$\chi(g^{-1}) = i(\chi(g))$$

siempre que $g \in U^*$. Mas aún, hay un único grupo de Lie G^* simplemente conexo que tiene las propiedades anteriores. Si G es cualquier otro grupo de Lie, existe un mapeo $\pi : G^* \rightarrow G$ que cubre, el cual es un homeomorfismo, donde G^* y G son grupos de Lie localmente isomorfos (G^* es llamado el cubrimiento simplemente conexo del grupo G).

Proposición 1.1. Sea G un grupo de Lie conexo y $U \subset G$ una vecindad de la identidad. También, sea $U^k \equiv \{g_1 \cdot \dots \cdot g_k : g_i \in U\}$ un conjunto de k -productos de elementos de U . Entonces

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$$

En otras palabras, cada elemento del grupo $g \in G$ puede ser escrito como un producto de elementos finitos de U .

Grupo local de transformaciones

En la práctica, los grupos de Lie se conocen como grupos de transformaciones de alguna variedad M y no como algo abstracto intrínseco. Por ejemplo, el grupo $SO(2)$ se encuentra como un grupo de rotaciones en el plano $M = \mathbb{R}^2$, mientras que $GL(n)$ aparece como el grupo de transformaciones invertibles de \mathbb{R}^n . En general un grupo de Lie G debe ser considerado como un grupo de transformaciones de alguna variedad M si a cada elemento $g \in G$ hay asociado un mapeo de M en M . El grupo podría actuar solo localmente, lo cual significa que el grupo de transformaciones podría estar definido para todos los elementos del grupo pero no para todos los elementos de la variedad.

Definición 1.8. Sea M una variedad diferenciable. Un **grupo local de transformaciones** actuando sobre M está dado por un grupo local de Lie G , un subconjunto abierto U , con

$$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M,$$

el cual es el dominio de la acción de grupo, y un mapeo diferenciable $\Psi : U \rightarrow M$ con las siguientes propiedades:

(a) Si $(h, x) \in U$, $(g, \Psi(h, x)) \in U$, y también $(\Psi(g, h), x) \in U$, entonces

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(\Psi(g, h), x).$$

(b) Para todo $x \in M$,

$$\Psi(e, x) = x.$$

(c) Si $(g, x) \in U$, entonces $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in U$ y

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x.$$

por brevedad debemos denotar $\Psi(g, x)$ por $g \cdot x$, y las condiciones de esta definición toman la forma:

$$g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x, \quad g, h \in G, \quad x \in M,$$

siempre que ambos lados de la ecuación tengan sentido,

$$e \cdot x = x \quad \text{para todo } x \in M,$$

y

$$g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x, \quad g \in G, \quad x \in M,$$

Para cada x en M , los elementos g del grupo tales que $g \cdot x$ está definido forman un grupo local de Lie

$$G_x \equiv \{g \in G : (g, x) \in U\}.$$

Recíprocamente para cada $g \in G$, hay una subvariedad abierta

$$M_g \equiv \{x \in M : (g, x) \in U\}$$

de M donde la transformación dada por g esta definida. En ciertos casos, el único elemento de grupo el cual actúa sobre toda M debe ser el elemento identidad. En el otro extremo, un grupo **global** de transformaciones es uno en el cual podemos tomar el producto cruz $U = G \times M$. En este caso, $g \cdot x$ está definido para cada $g \in G$ y cada $x \in M$.

Un grupo de transformaciones G actuando sobre M es llamado **conexo** si satisface lo siguiente:

- (a) G es un grupo de Lie conexo y M es una variedad conexa;
- (b) $U \subset G \times M$ es un conjunto abierto conexo; y
- (c) para cada $x \in M$, el grupo local G_x es conexo.

Órbitas

Una órbita de un grupo local de transformaciones es el mínimo grupo invariante no vacío contenido en M . En otras palabras, $\mathcal{O} \subset M$ es una órbita si satisface las siguientes condiciones

- (a) Si $x \in \mathcal{O}$, $g \in G$ y $g \cdot x$ está definido, entonces $g \cdot x \in \mathcal{O}$.
- (b) Si $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ satisface parte (a) entonces sucede $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$, o $\tilde{\mathcal{O}}$ es vacío.

En el caso de un grupo global de transformaciones, para cada $x \in M$ la órbita a través de x tiene la definición implícita $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x : g \in G\}$. Para un grupo local de transformaciones, debe verse el producto de los elementos del grupo actuando sobre x :

$$\mathcal{O}_x = \{g_1 \cdot g_2 \cdots g_k \cdot x : k \geq 1, g_i \in G \quad \text{y} \quad g_1 \cdot g_2 \cdots g_k \cdot x \text{ está bien definido}\}.$$

Como podemos ver las órbitas de las transformaciones de un grupo de Lie son de hecho subvariedades de M , pero su dimensión puede variar, o podrían ser variedades no regulares. Debemos distinguir dos importantes subclases de acciones de grupo.

Definición 1.9. Sea G un grupo local de transformaciones actuando sobre M .

(a) El grupo G actúa *semi-regularmente* si todas las órbitas \mathcal{O} son de la misma dimensión como las subvariedades de M .

(b) El grupo G actúa *regularmente* si la acción es semirregular y además para cada punto $x \in M$ existen vecindades pequeñas arbitrarias U de x con la propiedad de que cada órbita de G interseca U en un subconjunto conexo por pedazos.

Nótese que en particular, si G actúa regularmente sobre M entonces cada órbita de G es una subvariedad regular de M .

Una acción de grupo es llamada *transitiva* si hay solo una órbita, normalmente la misma variedad. Claramente cualquier grupo transitivo de transformaciones actúa regularmente. En la mayoría de las aplicaciones, las acciones de grupo más interesantes no son transitivas.

Ejemplo 1.5. Ejemplos de grupos de transformaciones.

El grupo de traslaciones en \mathbb{R}^m : Sea $a \neq 0$ un vector fijo en \mathbb{R}^m , y sea $G = \mathbb{R}$. Defina

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon a, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

fácilmente se ve que da una acción global de grupo. Las órbitas son líneas paralelas a a , tal que la acción es regular con órbitas de una dimensión.

Ejemplo 1.6. Una acción similar que suele ser importante en el estudio de la ecuación de calor es la siguiente. Sea $M = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{R}$ y considérese el mapeo

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right),$$

el cual es definido sobre

$$U = \left\{ (\varepsilon, (x, y)) : \varepsilon < \frac{1}{x} \text{ para } x > 0, \text{ o } \varepsilon > \frac{1}{x}, \text{ para } x < 0 \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Para mostrar que esta es una acción de grupo, se verifica que:

$$\begin{aligned} \Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, (x, y))) &= \Psi\left(\delta, \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{1 - \varepsilon x}}{1 - \delta \frac{x}{1 - \varepsilon x}}, \frac{\frac{y}{1 - \varepsilon x}}{1 - \delta \frac{x}{1 - \varepsilon x}}\right) \\ &= \left(\frac{x}{1 - (\delta + \varepsilon)x}, \frac{y}{1 - (\delta + \varepsilon)x}\right) \\ &= \Psi(\delta + \varepsilon, (x, y)) \end{aligned}$$

siempre definida. Note que esta es la acción de un grupo local y no tiene contraparte global sobre \mathbb{R}^2 , además $|\Psi(\varepsilon, (x, y))| \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 1/x$ para $x \neq 0$. Las órbitas de la acción son rayos emanando desde el origen, y el mismo origen. La acción es regular sobre el plano agujerado $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Grupos generados por campos vectoriales

Es importante notar que las órbitas de la acción de grupo de un parámetro son curvas integrales máximas de un campo vectorial v . Inversamente, si $\Psi(\varepsilon, x)$ es un grupo de transformaciones de un parámetro actuando sobre M , entonces su generador infinitesimal es obtenido haciendo $\varepsilon = 0$:

$$v|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \quad (1.6)$$

La unicidad de la ecuación (1.2) garantiza que el flujo generado por v coincida con la acción local dada de \mathbb{R} sobre M en el dominio común de definición. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre grupos locales de transformaciones de un parámetro y sus generadores infinitesimales.

El cálculo del flujo o grupo de un parámetro generado por un campo vectorial dado v (en otras palabras resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias) es frecuentemente conocido como la **exponenciación** de un campo vectorial. La notación sugerida es

$$\exp(\varepsilon v)x \equiv \Psi(\varepsilon, x)$$

En términos de esta notación exponencial, tenemos tres propiedades que se siguen de la definición:

$$\exp[(\delta + \varepsilon)v]x = \exp(\delta v)\exp(\varepsilon v)x \quad (1.7)$$

siempre que este definida,

$$\exp(0v)x = x, \quad (1.8)$$

y

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} [\exp(\varepsilon v)x] \right|_{\varepsilon=0} = v|_{\exp(\varepsilon v)x}. \quad (1.9)$$

para toda $x \in M$.

Ejemplo 1.7. Sea $M = \mathbb{R}$ con coordenada x , y considérese el campo vectorial $\partial/\partial x \equiv \partial_x$. Entonces

$$\exp(\varepsilon v)x = \exp(\varepsilon \partial_x)x = x + \varepsilon,$$

el cual esta globalmente definido. Si ahora consideramos el campo $x\partial_x$ recuperamos la exponencial usual

$$\exp(\varepsilon x\partial_x)x = e^\varepsilon x,$$

ya que está debe ser solución de la ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = x$ con valor inicial x en $\varepsilon = 0$, es decir

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (e^\varepsilon x) = x e^\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = x$$

.

Ejemplo 1.8. En el caso de \mathbb{R}^m , campo vectorial constante $v_a = \sum a^i \partial/\partial x^i$, $a = (a^1, \dots, a^m)$ exponencia al grupo de traslaciones

$$\exp(\varepsilon v_a)x = x + \varepsilon a, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

en la dirección de a .

Ejemplo 1.9. Considere el grupo de rotaciones en el plano

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon).$$

Su generador infinitesimal debe ser un campo de la forma $v = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, donde debe cumplirse,

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) = -y, \\ \eta(x, y) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) = x. \end{aligned}$$

Así $v = -y\partial_x + x\partial_y$ es el generador infinitesimal, y además, el grupo de transformaciones anterior coincide con las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$dx/d\varepsilon = -y, \quad dy/d\varepsilon = x.$$

Ejemplo 1.10. Considere la acción local de grupo

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right)$$

Diferenciando como en el ejemplo anterior, se encuentra que el generador infinitesimal es $v = x^2\partial_x + xy\partial_y$.

1.4. Álgebra de Lie

Si G es un grupo de Lie, entonces hay campos vectoriales distinguidos sobre G , caracterizados por su invarianza bajo la multiplicación del grupo. Como se verá estos campos forman un espacio vectorial dimensionalmente finito, llamado álgebra de Lie de G , el cual es un "generador infinitesimal" de G .

Sea G un grupo de Lie. Para cualquier elemento del grupo $g \in G$, el mapeo **multiplicación por la derecha**

$$R_g : G \rightarrow G$$

definido por

$$R_g(h) = h \cdot g$$

es un difeomorfismo, con inversa

$$R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}$$

Un campo vectorial v sobre G es llamado **derecho invariante** si

$$dR_g(v|_h) = v|_{R_g(h)} = v|_{hg}$$

para toda g y h en G .

Definición 1.10. *El álgebra de Lie de un grupo de Lie G , denotada por la letra \mathfrak{g} , es el espacio vectorial de todos los campos vectoriales derecho invariantes sobre G .*

Nótese que un campo derecho invariante está determinado de manera única por su valor en la identidad porque

$$v|_g = dR_g(v|_e),$$

ya que $R_g(e) = g$. Inversamente, cualquier vector tangente a G en e determina de manera única un campo vectorial derecho invariante sobre G , además

$$dR_g(v|_h) = dR_g(dR_h(v|_e)) = d(R_g \circ R_h)(v|_e) = dR_{hg}(v|_e) = v|_{hg},$$

lo cual prueba la invarianza derecha de v . Por lo tanto podemos identificar el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G con el espacio tangente a G en el elemento identidad

$$\mathfrak{g} \simeq T_e(G).$$

\mathfrak{g} es un espacio vectorial dimensionalmente finito de la misma dimensión que el grupo de Lie subyacente.

El álgebra de Lie tiene una operación bilineal antisimétrica, llamada el bracket de Lie. Además, si v y w son campos vectoriales derecho invariantes sobre G , también el bracket de Lie $[v, w]$.

$$dR_g[v, w] = [dR_g(v), dR_g(w)] = [v, w].$$

Definición 1.11. *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial \mathfrak{g} junto con una operación bilineal*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

llamado el *bracket de Lie* para \mathfrak{g} , que satisface los axiomas

(a) *Bilinealidad*

$$[cv + c'v', w] = c[v, w] + c'[v', w], \quad [v, cw + c'w'] = c[v, w] + c'[v, w'],$$

para constantes $c, c' \in \mathbb{R}$,

(b) *Antisimetría*

$$[v, w] = -[w, v]$$

(c) *Identidad de Jacobi*

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0,$$

para todo u, v, v', w, w' en \mathfrak{g} .

Ejemplo 1.11. Si $G = \mathbb{R}$, entonces hay un múltiplo ascendente, un único campo vectorial derecho invariante, normalmente $\partial_x = \partial/\partial x$. De hecho, dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$R_y(x) = x + y,$$

ya que

$$dR_y(\partial_x) = \partial_x.$$

Similarmente, si $G = \mathbb{R}^+$, entonces el único campo vectorial derecho invariante independiente es $x\partial_x$

Ejemplo 1.12. Se calculará el álgebra de Lie del grupo general lineal $GL(n)$, ya que $GL(n)$ es de dimensión n^2 , podemos identificar el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ con el espacio de matrices de $n \times n$. Además, en coordenadas los elementos de $GL(n)$ son dados por las entradas $x_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ de las matrices, tal que el espacio tangente a $GL(n)$ en la identidad es el conjunto de todos los campos vectoriales

$$v_A|_I = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I,$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz arbitraria de $n \times n$. Ahora dado $Y = (y_{ij}) \in GL(n)$, la matriz $R_y(x) = XY$ tiene entradas

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} y_{kj}.$$

por lo tanto encontramos

$$\begin{aligned} v_A|_Y &= dR_Y(v_A|_I) \\ &= \sum_{l,m} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_k x_{lk} y_{km} \right) \frac{\partial}{\partial x_{lm}} \\ &= \sum_{i,j,m} a_{ij} y_{jm} \frac{\partial}{\partial x_{im}}, \end{aligned}$$

o en términos de $X \in GL(n)$,

$$v_A|_X = \sum_{i,j} \left(\sum_k a_{ik} x_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Al calcular el bracket de Lie:

$$\begin{aligned} [v_A, v_B] &= \sum_{i,j,k,l,m,p} \left\{ a_{lp} x_{pm} \frac{\partial}{\partial x_{lm}} (b_{ik} x_{kj}) - b_{lp} x_{pm} \frac{\partial}{\partial x_{lm}} (a_{ik} x_{kj}) \right\} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \\ &= \sum_{i,j,k} \left[\sum_l (b_{il} a_{lk} - a_{il} b_{lk}) \right] x_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \\ &= v_{[A,B]}, \end{aligned}$$

Donde $[v_A, v_B] \equiv BA - AB$ es el conmutador de matrices. Por lo tanto el álgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$ del grupo general lineal $GL(n)$ es el espacio de todas las matrices de $n \times n$ con el bracket de Lie siendo el operador conmutador.

Subgrupos de un parámetro

Supóngase que \mathfrak{g} es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G . El siguiente resultado muestra que hay una correspondencia uno a uno entre el subespacio unidimensional de \mathfrak{g} y subgrupos conexos de un parámetro de G .

Proposición 1.2. *Sea $v \neq 0$ un campo vectorial derecho invariante sobre un grupo de Lie G . El flujo generado por v a través de la identidad,*

$$g_\varepsilon = \exp(\varepsilon v)e \equiv \exp(\varepsilon v)$$

es definido para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y forma un subgrupo de un parámetro de G , con

$$g_{\varepsilon+\delta} = g_\varepsilon \cdot g_\delta, \quad g_0 = e, \quad g^{-1} = g_{-\varepsilon},$$

isomorfo a \mathbb{R} o al subgrupo $SO(2)$.

A la inversa, cualquier subgrupo de dimensión uno, conexo, de G es generado por un campo vectorial derecho invariante de la manera anterior.

Ejemplo 1.13. Supóngase que $G = GL(n)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$, el espacio de todas las matrices de $n \times n$ con el conmutador como bracket de Lie. Si $A \in \mathfrak{gl}(n)$, entonces el campo vectorial derecho invariante correspondiente v_A sobre $GL(n)$ tiene la expresión $v_A|_X = \sum (\sum_k a_{ik} x_{kj}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$. El subgrupo de un parámetro $\exp(\varepsilon v_A)e$ es encontrado al integrar el sistema de n^2 ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx^{ij}}{d\varepsilon} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj}, \quad x_{ij}(0) = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

involucrando las entradas de la matriz A . La solución es justo la matriz exponencial $X(\varepsilon) = e^{\varepsilon A}$, el cual es el subgrupo de un parámetro de $GL(n)$ generado por la matriz A en $\mathfrak{gl}(n)$.

Subálgebras

En general una subálgebra \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un subespacio vectorial el cual es cerrado bajo el bracket de Lie, así que $[v, w] \in \mathfrak{h}$ siempre que $v, w \in \mathfrak{h}$. Si H es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G , cualquier campo vectorial derecho invariante v sobre H puede ser extendido a un campo vectorial derecho invariante sobre G .

Una álgebra de Lie \mathfrak{g} de H es considerada como una subálgebra del álgebra \mathfrak{g} de G . La correspondencia entre los subgrupos de un parámetro de un grupo de Lie G y los subespacios de dimensión uno \mathfrak{h} de su álgebra de Lie \mathfrak{g} dan una correspondencia uno a uno entre los subgrupos de Lie de G y subálgebras de \mathfrak{g} .

Teorema 1.4. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Si $H \subset G$ es un subgrupo de Lie, su álgebra de Lie es una subálgebra de \mathfrak{g} . Inversamente, si \mathfrak{h} es cualquier subálgebra de \mathfrak{g} dimensión s , hay un único subgrupo de Lie H de G , conexo de s -parámetros con álgebra de Lie \mathfrak{h} .

Ejemplo 1.14. Si $H \subset GL(n)$ es un subgrupo, entonces su álgebra de Lie \mathfrak{h} debe ser una subálgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ de todas las matrices de $n \times n$, con bracket de Lie como la matriz de conmutación. Más aun también podemos encontrar $\mathfrak{h} \simeq TH_e$ solo viendo los subgrupos de un parámetro de $GL(n)$ los cuales son contenidos en H :

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : e^{\varepsilon A} \in H \text{ para todo } \varepsilon \in \mathbb{R}\}.$$

Acciones de grupos infinitesimales

Supóngase que G es un grupo local de transformaciones actuando sobre una variedad M es decir, $g \cdot x = \Psi(g, x)$ para $(g, x) \in U \subset G \times M$. Entonces hay

una acción infinitesimal del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G sobre M . Si $v \in \mathfrak{g}$ definimos $\psi(v)$ el campo vectorial sobre M cuyo flujo coincide con la acción del subgrupo de un parámetro $\exp(\varepsilon v)$ de G sobre M . Esto significa que para toda $x \in M$,

$$\psi(v)|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(\exp(\varepsilon v), x) = d\Psi_x(v|_e), \quad (1.10)$$

donde $\Psi(g) \equiv \Psi(g, x)$. Nótese además que

$$\Psi_x \circ R_g(h) = \Psi(h \cdot g, x) = \Psi(h, g \cdot x) = \Psi_{g \cdot x}(h)$$

siempre que esta definido, tenemos

$$d\Psi_x(v|_g) = d\Psi_{g \cdot x}(v|_e) = \psi(v)|_{g \cdot x}$$

para toda $g \in G_x$. Si ψ es un homeomorfismo de álgebras de Lie de \mathfrak{g} al álgebra de Lie de los campos vectoriales sobre M

$$[\psi(v), \psi(w)] = \psi([v, w]), \quad v, w \in \mathfrak{g}$$

Por lo tanto el conjunto de todos los campos vectoriales $\psi(v)$ correspondientes a $v \in \mathfrak{g}$ forman un álgebra de Lie de campos vectoriales sobre M . Inversamente, dada un álgebra de Lie dimensionalmente finita de campos vectoriales sobre M , siempre hay un grupo local de transformaciones cuya acción infinitesimal es generada por el álgebra de Lie dada.

Teorema 1.5. Sean w_1, \dots, w_r campos vectoriales sobre una variedad M que satisfacen

$$[w_i, w_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k w_k, \quad i, j = 1, \dots, r,$$

para ciertas constantes c_{ij}^k . Entonces hay un grupo de Lie G cuya álgebra de Lie tiene a c_{ij}^k como constantes de estructura relativas a alguna base v_1, \dots, v_r , y una acción local de grupo G sobre M tal que $\psi(v_i) = w_i$ para $i = 1, \dots, r$ donde ψ es definido por (1.10)

Recobramos \mathfrak{g} de las transformaciones de grupo por la fórmula básica

$$v|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon v)x, \quad v \in \mathfrak{g}.$$

Un campo vectorial v en \mathfrak{g} es llamado un **generador infinitesimal** de la acción de grupo G .

Ejemplo 1.15. Lie probó que dado un difeomorfismo hay precisamente tres álgebras de Lie de los campos vectoriales sobre la recta real $M = \mathbb{R}$ los cuales son:

(a) El álgebra generada por ∂_x : Está genera una acción de \mathbb{R} sobre M como un grupo de un parámetro de traslaciones $x \rightarrow x + \varepsilon$.

(b) El álgebra de Lie de dimensión generada por ∂_x y $x\partial_x$, el segundo campo vectorial generando el grupo de dilataciones $x \rightarrow \lambda x$: Note que

$$[\partial_x, x\partial_x] = \partial_x,$$

Así el álgebra de Lie es isomorfa a las matrices de 2×2 generada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto genera el grupo de Lie de todas las matrices triangulares superiores de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

La acción correspondiente sobre \mathbb{R} es el grupo $x \rightarrow \alpha x + \beta$ de las transformaciones afín.

(c) El álgebra tridimensional generada por

$$v_1 = \partial_x, \quad v_2 = x\partial_x, \quad v_3 = x^2\partial_x,$$

el tercer campo vectorial es generado por el grupo local de inversiones

$$x \rightarrow \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad |\varepsilon| < \frac{1}{x}$$

La tabla de conmutadores es la siguiente

	v_1	v_2	v_3
v_1	0	v_1	$2v_2$
v_2	$-v_1$	0	v_3
v_3	$-2v_2$	$-v_3$	0

Si reemplazamos v_3 por $-v_3 = -x^2\partial_x$ entonces encontramos la misma tabla de conmutadores de $\mathfrak{sl}(2)$ cuyas bases son

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera hay una acción del grupo especial lineal $SL(2)$ sobre la recta real con $\partial_x, x\partial_x$ y $-x^2\partial_x$ funcionando como generadores infinitesimales. Esta acción de grupo es el **grupo proyectivo**

$$x \rightarrow \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2)$$

1.5. Tensores

Propiedades algebraicas

Sean V_1, \dots, V_s módulos sobre un anillo K . Entonces $V_1 \times \dots \times V_s$ es el conjunto de todos los elementos (v_1, \dots, v_s) con $v_i \in V_i$. La definición usual sobre las componentes de suma y multiplicación por un elemento de K hace

que $V_1 \times \cdots \times V_s$ sea un módulo sobre K , llamado un producto directo o suma directa (\times se sustituye por \oplus). Si W también es un módulo sobre K , una función

$$A : V_1 \times \cdots \times V_s \rightarrow W$$

es K -multilineal pues A es K -lineal en cada entrada, esto es para cada $1 \leq i \leq s$ y $v_j \in V_j (j \neq i)$, la función

$$v \rightarrow A(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_s)$$

es K -lineal.

Si V es un módulo sobre K , sea V^* el conjunto de todas las funciones K -lineales de V a K . La definición usual de funciones de suma y multiplicación por elementos de K , hace que V^* sea un módulo sobre K , llamado el **módulo dual** de V . Si $V_i = V$ para $1 \leq i \leq s$, la notación $V_1 \times \cdots \times V_s$ se abrevia como V^s .

Definición 1.12. Para enteros $r \geq 0$, $s \geq 0$ no ambos cero, una función K -multilineal $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$ es llamada un **tensor tipo** (r, s) sobre V . De donde $A : V^s \rightarrow K$ si $r = 0$, y $A : (V^*)^r \rightarrow K$ si $s = 0$.

El conjunto de todos los tensores $T_s^r(V)$ tipo (r, s) sobre V es un módulo sobre K , nuevamente bajo las definiciones usuales del funcional para suma y multiplicación por un elemento de K . Un **tensor tipo** $(0, 0)$ sobre V es simplemente un elemento de K .

Campos tensoriales

Un **campo tensorial** A sobre una variedad M es un tensor sobre $F(M)$ módulo $\mathfrak{X}(M)$, donde $F(M)$ es el conjunto de todas las funciones C^∞ sobre M . Así si A es de tipo (r, s) este es una función $F(M)$ multilineal

$$A : T^*(M)^r \times T(M)^s \rightarrow F(M)$$

De esta manera cuando A se evalúa con r 1-formas w^1, \dots, w^r y s campos vectoriales X_1, \dots, X_s este produce una función real

$$f = A(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s) \in F(M)$$

Se dirá que w^i usa la i -ésima entrada **contravariante**, X_j la j -ésima entrada **covariante** de A .

El conjunto $T_s^r(M)$ de todos los campos tensoriales sobre M de tipo (r, s) es un módulo sobre $F(M)$. En el caso cuando $r = s = 0$, un campo tensorial sobre M de tipo $(0, 0)$ es una función $f \in F(M)$.

Para mostrar que un tensor A tipo (r, s) es un tensor, se debe mostrar que la función f es lineal en cada entrada (separadamente en cada variable). La cuestión a resolver es cuando las funciones pueden salirse de cada entrada como factores:

$$A(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, fX_i, \dots, X_s) = fA(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_i, \dots, X_s)$$

La suma de tensores solo se puede dar para tensores del mismo tipo, mientras que cualesquiera dos tensores pueden ser multiplicados como sigue: Si $A \in T_s^r(M)$ y $B \in T_{s'}^{r'}(M)$, se define como

$$A \otimes B : T^*(M)^{r+r'} \times T(M)^{s+s'} \rightarrow F(M)$$

por

$$(A \otimes B)(w^1, \dots, w^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) = A(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s) \\ \times B(w^{r+1}, \dots, w^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'})$$

Entonces $A \otimes B$ es un tensor de tipo $(r + r', s + s')$, llamado el **producto tensorial** de A y B . Si $r' = s' = 0$, tal que B es una función $f \in F(M)$, se define

$$A \otimes f = f \otimes A = fA$$

Así si también A es de tipo $(0, 0)$, el producto tensorial se reduce a la multiplicación ordinaria en $F(M)$.

Claramente el producto tensorial es $F(M)$ -bilineal, esto es

$$(fA + gA') \otimes B = fA \otimes B + gA' \otimes B$$

Es inmediato de la definición ver que el producto tensorial es asociativo, de lo cual se sigue que $A \otimes B \otimes C$ está bien definido para cualquier tipo de tensores. Sin embargo generalmente el producto tensorial es no conmutativo. Por ejemplo, sobre una vecindad coordinada

$$(dx^1 \otimes dx^2)(\partial_1, \partial_2) = dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1 \\ (dx^2 \otimes dx^1)(\partial_1, \partial_2) = dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0$$

de lo cual se concluye que $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$. Por otro lado se tiene que las funciones conmutan con todo

$$f(A \otimes B) = fA \otimes B = A \otimes fB$$

Los tensores de tipo $(0, s)$ se dice que son **covariantes**, mientras que tensores de tipo $(r, 0)$ con $r \geq 1$ son **contravariantes**.

Componentes de tensores

Las fórmulas para coordenadas de $X = \sum X(x^i)\partial_i$ con $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ para un campo vectorial y $w = \sum w(\partial_i)dx^i$ para 1-formas, se puede extender rápidamente a campos vectoriales de tipo arbitrario.

Definición 1.13. Sea $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas locales sobre $U \subset M$ (a las coordenadas ξ también las llamaremos sistema coordinado). Si $A \in T_s^r(M)$ las componentes de A relativas a ξ son funciones de variable real

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) \quad \text{sobre } U$$

donde todos los índices corren de 1 a $n = \dim M$.

Evidentemente para un tensor $(0, 1)$, esto es, una 1-forma, estas componentes son exactamente aquellas de la fórmula $w = \sum w(\partial_i)dx^i$. Al ver que la correspondencia coincide para un campo vectorial X debe usarse la interpretación de un campo tensorial $(1, 0)$. Por la definición anterior la i -ésima componente de X relativa a ξ es $X(dx^i)$, la cual es interpretada como $dx^i(X) = X(x^i)$

De manera similar, cuando un campo tensorial $(1, s)$ está dado en la forma $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ sus componentes son directamente determinadas por la ecuación

$$A(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}) = \sum_j A_{i_1, \dots, i_s}^j \partial_j$$

ya que por su interpretación $\bar{A} \in T_s^1(M)$

$$\begin{aligned} \bar{A}(dx^j, \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}) &= dx^j(A(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s})) \\ &= \sum_k A_{i_1, \dots, i_s}^k dx^j(\partial_k) = A_{i_1, \dots, i_s}^j \end{aligned}$$

Las componentes de un producto de tensores son dadas por

$$(A \otimes B)_{j_1 \dots j_{s+s'}}^{i_1 \dots i_{r+r'}} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot B_{j_{s+1} \dots j_{s+s'}}^{i_{r+1} \dots i_{r+r'}}$$

donde, como es usual, todos los índices corren de 1 a $n = \dim M$. Por ejemplo, supóngase que A es un tensor $(1, 2)$ y B tipo $(1, 1)$. Entonces $A \otimes B$ es un tensor tipo $(2, 3)$ con componentes:

$$\begin{aligned} (A \otimes B)_{ijp}^{kq} &= (A \otimes B)(dx^k, dx^q, \partial_i, \partial_j, \partial_p) \\ &= A(dx^k, \partial_i, \partial_j) \cdot B(dx^q, \partial_p) = A_{ij}^k B_p^q. \end{aligned}$$

Sea ξ un sistema coordenado sobre $U \subset M$. Entonces tal y como en un campo vectorial o 1-forma, cualquier tensor tiene una única expresión sobre U en términos de sus componentes relativas a ξ . Supóngase por ejemplo que $r = 1$ y $s = 2$. Entonces $\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$ es un tensor $(1, 2)$ sobre U para toda $1 \leq i, j, k \leq n$. Si A es cualquier tensor $(1, 2)$ entonces

$$A = \sum A_{ij}^k \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$$

sobre U , donde cada índice es sumado de 1 a n . Ya que ambos lados son $F(M)$ -multilineales es suficiente verificar que tienen el mismo valor sobre $dx^m, \partial_p, \partial_q$ para toda $1 \leq m, p, q \leq n$. De esto se sigue que

$$(\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j)(dx^m, \partial_p, \partial_q) = dx^m(\partial_k)dx^i(\partial_p)dx^j(\partial_q) = \delta_k^m \delta_p^i \delta_q^j,$$

Donde

$$\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Lo anterior se puede enunciar de forma general en el siguiente enunciado

Lema 1.1. *Sea x^1, \dots, x^n un sistema coordenado sobre $U \subset M$. Si A es un campo tensorial (r, s) , entonces sobre U ,*

$$A = \sum A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

donde cada índice es sumado desde 1 a n .

1.6. Variedades semi-riemannianas

Definición 1.14. *Un tensor métrico g sobre una variedad M es un campo tensorial $(0, 2)$ simétrico no degenerado sobre M de índice constante*

Es decir $g \in T_2^0(M)$ asigna suavemente a cada punto p de M un producto escalar g_p sobre el espacio tangente $T_p(M)$, y el índice de g_p es el mismo para toda p .

Definición 1.15. *Una variedad semi-riemanniana es una variedad M suave dotada con un tensor métrico g .*

La definición anterior implica que una variedad semi-riemanniana también deba verse como el par ordenado (M, g) . De esta manera dos tensores métricos en una misma variedad constituyen dos variedades semi-riemannianas diferentes.

El valor común ν de g_p sobre una variedad M es llamado el **índice** de M : $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Si $\nu = 0$, M es una *variedad riemanniana* y entonces cada g_p es un producto interno positivo definido sobre $T_p(M)$. Si $\nu = 1$ y $n \geq 2$, M es conocida como *variedad lorentziana*

En el presente texto se llegará a usar el símbolo \langle, \rangle el cual es una notación alternativa para g , se llegará a escribir $g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ para vectores tangentes, y $g(V, W) = \langle V, W \rangle \in F(M)$ para campos vectoriales.

Si x^1, \dots, x^n es un sistema coordenado sobre $U \in M$ las componentes del tensor métrico g sobre U son

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Así para campos vectoriales $V = \sum V^i \partial_i$ y $W = \sum W^j \partial_j$,

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle = \sum g_{ij} V^i W^j.$$

Debido a que g es no degenerada, en cada punto $p \in U$, la matriz $(g_{ij}(p))$ es invertible, y su matriz inversa es denotada por $(g^{ij}(p))$. La fórmula usual para la matriz inversa muestra que las funciones g^{ij} son suaves sobre U

Debido a que g es simétrico, $g_{ij} = g_{ji}$ y por lo tanto $g^{ij} = g^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Finalmente el tensor métrico sobre U puede ser escrito como

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Teniendo un producto escalar definido sobre cada punto de M , se pueden definir dos operaciones de gran interés, las cuales consisten en bajar y subir índices. Así para todo tensor $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \in T_q^p(M)$ se pueden bajar sus índices obteniendo el tensor $\hat{T}_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} \in T_{q+1}^{p-1}$ definido por $\hat{T}_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = g_{i_1 k} T_{j_1 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p}$ de manera analoga se puede tener la operación de subir índices definida por la regla $\hat{T}_{j_2 \dots j_q}^{j_1 i_1 \dots i_p} = g^{j_1 k} T_{k j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. La pueba de que estas operaciones son nuevamente tensores se puede ver en [3].

Para cada $p \in \mathbb{R}^n$ hay un isomorfismo canónico de \mathbb{R}^n a $T_p(\mathbb{R}^n)$ el cual en coordenadas naturales, manda cada v a $v_p = \sum v_i \partial_i$. Por lo cual el producto punto sobre \mathbb{R}^n da un tensor métrico sobre \mathbb{R}^n con

$$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum v^i w^i.$$

Por lo tanto \mathbb{R}^n denota siempre una variedad riemanniana, llamada espacio n -euclidiano.

Para un entero ν con $0 \leq \nu \leq n$, si se cambia el signo de los primeros ν por un menos, se encuentra con el siguiente tensor métrico

$$\langle v_p, w_p \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^n v^j w^j$$

de índice $\nu = 1$. El espacio **semi-euclidiano** \mathbb{R}_ν^n se reduce a \mathbb{R}^n si $\nu = 0$. Para $n \geq 2$, \mathbb{R}_1^n es llamado n -espacio de **Minkowski**, si $n = 4$ este es el ejemplo de un espacio tiempo relativista.

Si

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{para } 1 \leq i \leq \nu, \\ +1 & \text{para } \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

entonces el tensor métrico de \mathbb{R}_ν^n puede escribirse como

$$g = \sum \varepsilon_i du^i \otimes du^i.$$

El significado del índice en geometría semi-riemanniana se encuentra en lo siguiente

Definición 1.16. *Un vector v tangente a M es*

tipo espacio si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$,

nulo si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$,

tipo tiempo si $\langle v, v \rangle < 0$.

Todos los vectores nulos en $T_p M$ forman el conjunto conocido como **cono nulo** de $p \in M$. La categoría a la cual pertenece cada vector es llamada su **carácter causal**. Estos términos derivan de la teoría de la relatividad especial, y en particular en el caso de Lorentz, los vectores nulos se dice que son **tipo luz**.

De esta manera podemos definir el **cono de luz** como sigue:

$$C = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v, v \rangle = 0\}$$

Al mismo podemos visualizarlo en \mathbb{R}^3 bajo el concepto de causalidad, como se muestra en la siguiente figura 1.2 (véase [4][pag. 15]).

Sea $q(v) = \langle v, v \rangle$ para cada vector tangente v a M . En cada punto p de M , q da la forma cuadrática asociada del producto escalar en p . Así q determina el tensor métrico.

Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in F(M)$, entonces $q(fV) = f^2 q(V) \in F(M)$, así q no es un campo tensorial. Clásicamente q es llamado el **elemento de línea** de M , y denotado por ds^2 . En términos de un sistema coordenado

$$q = ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j.$$

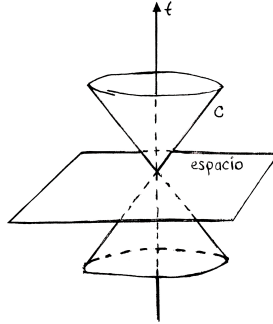


Figura 1.2: El cono representa el conjunto C , en el interior del cono todos los vectores son tipo tiempo, mientras que fuera son tipo espacio.

Aquí el símbolo $dx^i dx^j$ denota la definición ordinaria de multiplicación de funciones (sobre cada espacio tangente), así que

$$q(V) = \sum g_{ij} dx^i(V) dx^j(V) = \sum g_{ij} V^i V^j.$$

La **norma** de un vector tangente v es $|q(v)|^{\frac{1}{2}} = |\langle v, v \rangle|^{\frac{1}{2}}$, vectores unitarios, ortogonalidad y ortonormalidad se definen como es usual en espacios con producto interno.

Al símbolo ds^2 se le puede dar una interpretación intuitiva. Por simplicidad asumamos que M es riemanniana. Si p y p' son puntos cercanos con coordenadas (x^1, \dots, x^n) y $(x^1 + \Delta x^1, \dots, x^n + \Delta x^n)$ relativos a algún sistema coordenado, entonces el vector tangente $\Delta p = \sum \Delta x^i \partial_i$ en p , también lo es aproximadamente a p' . Así la distancia al cuadrado Δs desde p a p' es aproximadamente

$$|\Delta p|^2 = \langle \Delta p, \Delta p \rangle = \sum g_{ij}(p) \Delta x^i \Delta x^j.$$

como en la fórmula $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$.

Isometrías

Una isometría es un tipo especial de mapeo que mantiene la noción de isomorfismo para variedades semi-riemannianas.

Definición 1.17. Sean M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos g_M y g_N respectivamente. Una **isometría** de M a N es un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ que **preserva tensores métricos**.

De manera explícita se tiene $\langle d\phi(v), d\phi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para toda $v, w \in T_p(M)$, $p \in M$. Ya que ϕ es un difeomorfismo, cada mapeo diferencial $d\phi_p$ es un isomorfismo lineal, así la condición significa que cada $d\phi_p$ es una isometría lineal.

La interpretación de $q = ds^2$ como el cuadrado infinitesimal de la distancia sugiere pensar una isometría como un movimiento rígido, en contraste con un dieomorismo arbitrario el cual puede deformar M en aplicación de esté a N .

Un objeto preservado en el sentido apropiado por todas las isometrías es llamado un **invariante isométrico**, y la **geometría semi-riemanniana** es tradicionalmente la encargada del estudio de estos invariantes. Si existe una isometría entre M y N se dice que son **isométricos**. Rigurosamente hablando, variedades isométricas son geoméricamente la misma.

Si M es una variedad semi-riemanniana arbitraria, su tensor métrico hace que cada uno de sus espacios tangentes sean un espacio semi-euclidiano de la misma dimensión e índice que M . Esta es una forma de ver como la geometría semi-riemanniana generaliza la geometría semi-euclidiana.

Conexión de Levi-Civita

Sean V y W campos vectoriales sobre una variedad semi-riemanniana M . En está sección se mostrará como definir un nuevo campo vectorial $D_V W$ sobre M cuyo valor en cada punto p es el vector velocidad de cambio de W en la dirección V_p . En \mathbb{R}_ν^n hay una forma natural de construirlo.

Definición 1.18. Sean u^1, \dots, u^n las coordenadas naturales sobre \mathbb{R}_ν^n . Si V y $W = \sum W^i \partial_i$ son campos vectoriales sobre \mathbb{R}_ν^n , el campo vectorial

$$D_V W = \sum V(W^i) \partial_i$$

es conocido como la **derivada covariante natural** de W con respecto a V .

Debido a que en la definición anterior se usan las coordenadas naturales de \mathbb{R}_ν^n no hay una manera natural de extenderlo a una variedad semi-riemanniana arbitraria.

Definición 1.19. Una **conexión** D sobre una variedad M es una función $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que

- 1) $D_V W$ es $F(M)$ lineal en V ,
- 2) $D_V W$ es \mathbb{R} lineal en W ,
- 3) $D_V(fW) = (VF)W + fD_V W$ para $f \in F(M)$.

$D_V W$ es llamada la **derivada covariante** de W con respecto a V para la conexión D .

Proposición 1.3. Sea M una variedad semi-riemanniana. Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ considérese V^* la 1-forma sobre M tal que $V^*(X) = \langle V, X \rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Entonces la función $V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo $F(M)$ lineal de $\mathfrak{X}(M)$ a $\mathfrak{X}^*(M)$

Demostración. Ya que V^* es $F(M)$ lineal esté es además una 1-forma, y la función $V \rightarrow V^*$ es también $F(M)$ lineal. Que esto sea un isomorfismo es consecuencia de los hechos.

a) Si $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$ para toda $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $V = W$.

b) Dada una 1-forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ hay un único campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\theta(X) = \langle V, X \rangle$ para todo X .

Sea $U = V - W$. Entonces de (a) se tiene que $\langle U_p, X_p \rangle = 0$ para toda $X \in \mathfrak{X}(M)$ y para todo $p \in M$, entonces $U = 0$. Ya que cada elemento de $T_p(M)$ tiene la forma X_p , el resultado se sigue de la no degeneración del tensor métrico.

De (a) se implica la unicidad de (b), por lo tanto para probar (b) es suficiente encontrar V sobre una vecindad coordinada arbitraria U . Si $\theta = \sum \theta_i dx^i$ sobre U , sea $V = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \partial_j$. Entonces ya que (g_{ij}) y (g^{ij}) son matrices inversas,

$$\begin{aligned} \langle V, \partial_k \rangle &= \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_{i,j} \theta_i g^{ij} g_{jk} \\ &= \sum_i \theta_i \delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k) \end{aligned}$$

Se sigue por $F(M)$ linealidad que $\langle V, W \rangle = \theta(X)$ para toda X sobre U . \square

Lo cual significa que se puede transformar un campo vectorial en una 1-forma y viceversa.

A continuación se enunciará un teorema sin probarse, la prueba puede verse en [2][pág. 61]. El teorema es de suma importancia.

Teorema 1.6. *Sobre una variedad semi-riemanniana M hay una única conexión D tal que*

$$4) [V, W] = D_V W - D_W V, \text{ y}$$

$$5) X \langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle,$$

para toda $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. D es llamada la *conexión de Levi-Civita* de M , y es caracterizada por satisfacer la *fórmula de Koszul*.

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X \rangle &= V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle \\ &\quad + \langle X, [V, W] \rangle \end{aligned}$$

Definición 1.20. *Sea x^1, \dots, x^n un sistema coordinado sobre una vecindad U en una variedad semi-riemanniana M . Los **símbolos de Christoffel** para este sistema coordinado son las funciones de valor real Γ_{ij}^k sobre U tales que*

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Como $[\partial_i, \partial_j] = 0$, se sigue que $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$, por lo tanto $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Proposición 1.4. Para un sistema coordenado x^1, \dots, x^n sobre U ,

$$(1) D_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j \right\} \partial_k,$$

donde los símbolos de Christoffel son dados por

$$(2) \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}.$$

Demostración. (1) es inmediato de 3) de la Definición 1.20. Para (2) se usará el conjunto de vectores $V = \partial_i, W = \partial_j$ y ∂_m en la fórmula de Koszul. Como los brackets son cero entonces solo dejan

$$2\langle D_{\partial_i}(\partial_j), \partial_m \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{im}) - \frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ij}).$$

Pero por definición de los símbolos de Christoffel,

$$2\langle D_{\partial_i}(\partial_j), \partial_m \rangle = 2 \sum_a \Gamma_{ij}^a g_{am}.$$

Usando $\sum_m g^{mk}$ en ambos lados de la ecuación, se da el resultado requerido. \square

Definición 1.21. Sea V un campo vectorial sobre una variedad semi-riemanniana M . La (Levi-Civita) **derivada covariante** D_V es el único tensor derivación sobre M tal que

$$D_V f = Vf \quad \text{para } f \in F(M),$$

y $D_V W$ es la derivada covariante de Levi-Civita para toda $W \in \mathfrak{X}(M)$

Definición 1.22. La **diferencial covariante** de un tensor A tipo (r, s) sobre M es el $(r, s+1)$ tensor DA tal que

$$(DA)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

para toda $V, X_i \in T(M)$ y $\theta^j \in T^*(M)$.

Tanto en campos vectoriales como tensoriales, se dirá que A es **paralelo** si su derivada o diferencial covariante es cero.

Transporte paralelo

Un caso simple de un campo vectorial sobre un mapeo es un campo vectorial Z sobre una curva $\alpha : I \rightarrow M$. Z asigna suavemente a cada $t \in I$ un vector tangente a M sobre $\alpha(t)$. Por ejemplo, el vector velocidad α' es un campo vectorial sobre α , como lo es la restricción de V_α de cualquier $V \in \mathfrak{X}(M)$. El conjunto $\mathfrak{X}(\alpha)$ de todos los campos vectoriales suaves sobre α es un módulo sobre $F(I)$.

Cuando M es una variedad semi-riemanniana hay una manera natural de definir el vector velocidad de cambio Z' de un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Proposición 1.5. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva en una variedad semi-riemanniana M . Entonces hay una única función $Z \rightarrow Z' = \frac{DZ}{dt}$ de $\mathfrak{X}(\alpha)$ a $\mathfrak{X}(\alpha)$, llamada la

derivada covariante inducida, tal que

$$\begin{aligned} 1) (aZ_1 + bZ_2)' &= aZ_1' + bZ_2' && (a, b \in \mathbb{R}), \\ 2) (hZ)' &= (dh/dt)Z + hZ' && (h \in F(I)), \\ 3) (V_\alpha)' &= D_{\alpha'(t)}(V) && (t \in I, V \in \mathfrak{X}(M)). \end{aligned}$$

Ademas

$$4) (d/dt)\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1', Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2' \rangle.$$

Demostración. Unicidad Supóngase que existe una conexión inducida que satisface las primeras tres propiedades asúmase que α está en el dominio de un único sistema coordenado x^1, \dots, x^n . Por el teorema de bases, si $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces en $\alpha(t)$,

$$Z(t) = \sum Z(t)x^i\partial_i = \sum (Zx^i)(t)\partial_i.$$

Denótese la función componente por $Zx^i \rightarrow \mathbb{R}$, por Z^i . Por las propiedades (1) y (2)

$$Z' = \sum \frac{dZ^i}{dt} \partial_i|_\alpha + \sum Z^i (\partial_i|_\alpha)'$$

Pero de (3), $(\partial_i|_\alpha)' = D_{\alpha'}(\partial_i)$ así

$$Z' = \sum \frac{dZ^i}{dt} \partial_i + \sum Z^i D_{\alpha'}(\partial_i).$$

De lo cual se tiene que Z' es completamente determinada por la conexión de Levi-Civita D .

Existencia Sobre cualquier J , con $J \subset I$, $\alpha(J)$ está en una vecindad coordenada, define Z' mediante la fórmula anterior. Luego mediante cálculos rigurosos se puede mostrar que las cuatro propiedades se satisfacen. \square

Introduciendo símbolos de Christoffel en la fórmula coordenada anterior resulta

$$Z' = \sum_k \left\{ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right\} \partial_k.$$

Si $Z' = 0$, entonces se dice que Z es **paralelo**.

Proposición 1.6. *Para una curva $\alpha : I \rightarrow M$, sea $a \in I$ y $z \in T_{\alpha(a)}(M)$. Entonces hay un único campo vectorial paralelo Z sobre α tal que $Z(a) = z$.*

En la notación de la proposición, si $b \in I$ entonces la función

$$P = P_a^b : T_p(M) \rightarrow T_q(M)$$

enviando cada z a $Z(b)$ es llamado transporte paralelo a lo largo de α desde $p = \alpha(a)$ a $q = \alpha(b)$.

Lema 1.2. *El transporte paralelo es una isometría lineal.*

Demostración. Sean $v, w \in T_p(M)$ correspondientes a campos vectoriales V, W . Ya que $V + W$ también es paralelo

$$P(v + w) = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P(v) + P(w).$$

Similarmente

$P(cv) = cP(v)$. Así P es lineal.

Si $P(v) = 0$ entonces por la unicidad en la proposición, V solo puede ser el campo vectorial idénticamente cero sobre α . De aquí que $v = V(a) = 0$. Así P es uno a uno, y ya que espacios tangentes a M tienen la misma dimensión, P es un isomorfismo lineal.

Finalmente, para V, W como arriba,

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle = 0$$

De aquí que $\langle V, W \rangle$ es constante, así que

$$\langle P(v), P(w) \rangle = \langle V(b), W(b) \rangle = \langle V(a), W(a) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

□

La derivada covariante se puede extender a tensores, mediante las siguientes reglas:

1) El operador D de diferenciación covariante es lineal,

$$D_i(T + S) = D_iT + D_iS$$

para cualesquiera campos tensoriales T y S

2) La derivada covariante de un campo tensorial escalar (una función) coincide con el gradiente ordinario,

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

3) La derivada covariante de la contracción de tensores $T_{m(j)}^{(k)} S_q^{m(p)}$ con respecto al índice m es calculado por la fórmula de Leibniz,

$$D_i(T_{m(j)}^{(k)} S_q^{m(p)}) = (D_i T_{m(j)}^{(k)}) S_q^{m(p)} + T_{m(j)}^{(k)} (D_i S_q^{m(p)}).$$

4) La derivada covariante de un campo vectorial está dada por la siguiente relación

$$D_j T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i T^k.$$

A continuación se mencionará un teorema sin dar su demostración

Teorema 1.7. *La derivada covariante de un tensor $T_{(k)}^{(i)}$ de tipo (m, n) donde $(i) = i_1, \dots, i_m$, $(k) = k_1, \dots, k_n$, es*

$$\begin{aligned} D_j T_{(k)}^{(i)} &= \frac{\partial T_{(k)}^{(i)}}{\partial x^j} - T_{kk_2 \dots k_n}^{(i)} \Gamma_{k_1 j}^k - \dots - T_{k_1 \dots k}^{(i)} \Gamma_{k_n j}^k \\ &+ T_{(k)}^{ii_2 \dots i_m} \Gamma_{ij}^{i_1} + \dots + T_{(k)}^{i_1 \dots i_{m-1}} \Gamma_{ij}^{i_m}. \end{aligned}$$

Supóngase que el campo tensorial $T_{(k)}^{(i)}$ está definido sobre una curva $x(t)$, y sea $v = dx/dt$ el vector velocidad de la curva. Se puede definir la derivada covariante a lo largo de la curva

$$D_v T = \frac{dT}{dt} - T_{kk_2 \dots k_q}^{(i)} \Gamma_{k_1 j}^k v^j - \dots - T_{k_1 \dots k_{q-1} k}^{(i)} \Gamma_{k_q j}^k v^j + T_{(k)}^{i i_2 \dots i_p} \Gamma_{ij}^{i_1} v^j + \dots + T_{(k)}^{i i_1 \dots i_{p-1} i} \Gamma_{ij}^{i_p} v^j \quad (1.11)$$

Corolario 1.1. *La derivada covariante $D_v T$ del campo T a lo largo de la curva está bien definida, y su valor depende solo de los valores de T en esta curva.*

Geodésicas

Una geodésica en una variedad semi-riemanniana M es una curva $\gamma : I \rightarrow M$ cuyo campo vectorial γ' es paralelo. De manera equivalente se puede decir que las curvas geodésicas son curvas de aceleración cero $\gamma'' = 0$

Corolario 1.2. *Sea x^1, \dots, x^n un sistema coordenado sobre $U \subset M$. Una curva γ en U es una geodésica de M si y solo si sus funciones coordenadas $x^k \circ \gamma$ satisfacen*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

para $1 \leq k \leq n$.

Las expresiones anteriores son componentes de γ relativas a campos vectoriales coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$.

Es muy frecuente usar la común abreviación, escribiendo las funciones coordenadas de γ como x^i en lugar de $x^i \circ \gamma$. Entonces las ecuaciones geodésicas se expresan como

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (i \leq k \leq n).$$

El teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias da el siguiente resultado.

Lema 1.3. *Si $v \in T_p(M)$ existe un intervalo I alrededor de 0 y una única geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma'(0) = v$.*

El lema implica que $\gamma(0) = p$, se dirá que γ es una geodésica que empieza en p con velocidad inicial v .

Ejemplo 1.16. Geodésicas del espacio semi-euclidiano. Para coordenadas naturales los símbolos de Christoffel son nulos, así las ecuaciones geodésicas se convierten en

$$\frac{d^2(u^i \circ \gamma)}{dt^2} = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Así $u^i(\gamma(t)) = p^i + tv^i$ para todo t , donde p^i y v^i son constantes arbitrarias. De aquí que las geodésicas de \mathbb{R}_p^n son líneas rectas

Una curva γ en M es **tipo espacio** si todos sus vectores velocidad $\alpha'(s)$ son tipo espacio, similarmente **tipo tiempo** y **nulo**. Una curva arbitraria no necesariamente tiene los **caracteres causales**, pero una geodésica γ siempre los tiene ya que γ' es paralela, y traslaciones paralelas de vectores preservan el carácter causal de los vectores.

Curvatura

Las derivadas de Lie satisfacen la identidad $L_{[X,Y]} = [X, Y]$, donde el lado izquierdo se desarrolla como $L_X L_Y - L_Y L_X$. Ya que si $[X, Y] = 0$ entonces L_X y L_Y conmutan. Por contraste estos resultados no se satisfacen en general para la derivada covariante D_x . Esta falla es medida por un campo tensorial que juega un papel importante en geometría diferencial.

A continuación se mencionará un lema sin demostrarse, para la demostración ver [2][pág. 74].

Lema 1.4. *Sea M una variedad semi-riemanniana con conexión de Levi-Civita D . La función $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

*es un campo tensorial $(1,3)$ sobre M , llamado el **tensor de curvatura riemanniana** de M .*

El tensor R puede ser considerado como una función \mathbb{R} -multilineal sobre vectores tangentes individuales. Si $x, y \in T_p(M)$ el operador lineal

$$R_{xy} : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$$

enviando cada z a $R_{xy}z$ es llamado un **operador curvatura**. Las siguientes identidades son **simetrías** de la curvatura.

Proposición 1.7. *Si $x, y, z, v, w \in T_p(M)$, entonces*

- (1) $R_{xy} = -R_{yx}$,
- (2) $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$,
- (3) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$,
- (4) $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$.

Las primeras dos identidades muestran que el tensor de curvatura tiene dos antisimetrías. De (2) se tiene que el operador curvatura es adjunto antisimétrico. La ecuación (3) es llamada la **primera identidad de Bianchi**. De (4) se ve que se tiene **simetría por pares**

Demostración. Debido a que la derivada covariante D_x y la operación de bracket sobre campos vectoriales son operaciones locales, es suficiente trabajar sobre una vecindad de un punto p . Como las identidades a probar son ecuaciones tensoriales, los vectores tangentes x, y, \dots pueden ser extendidos a

campos vectoriales X, Y, \dots sobre alguna vecindad de manera conveniente. En este caso escojamos las extensiones de tal manera que todos sus brackets sean cero. En particular, $R_{XY}Z$ se reduce a $D_Y(D_X Z) - D_X(D_Y Z)$.

(1) Siempre que el bracket $[,]$ esté bien definido entonces la antisimetría se sigue inmediatamente de la definición de curvatura.

(2) Solo se necesita probar $\langle R_{xy}v, v \rangle = 0$. Usando la definición 5 del Teorema 1.6

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}V, V \rangle &= \langle D_Y D_X V, V \rangle - \langle D_X D_Y V, V \rangle \\ &= Y \langle D_X V, V \rangle - \langle D_X V, D_Y V \rangle - X \langle D_Y V, V \rangle + \langle D_Y V, D_X V \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y X \langle V, V \rangle - \frac{1}{2} X Y \langle V, V \rangle = 0, \end{aligned}$$

ya que $[X, Y] = 0$

(3) Supóngase que $F : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es una función que es \mathbb{R} -lineal, y sea $\Xi F(X, Y, Z)$ la suma sobre todas las permutaciones cíclicas de X, Y, Z :

$$F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y).$$

Una permutación cíclica de X, Y, Z deja $\Xi F(X, Y, Z)$ invariante. Por lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \Xi R_{XY}Z &= \Xi D_Y D_X Z - \Xi D_X D_Y Z \\ &= \Xi D_X D_Z Y - \Xi D_X D_Y Z = \Xi D_X [Z, Y] = 0. \end{aligned}$$

(4) de (3) $\langle \Xi R_{YV}X, W \rangle = 0$, donde Ξ actúa sobre cualesquiera tres campos vectoriales anexados a R , suma sobre las cuatro permutaciones cíclicas de Y, V, X, W , y luego expande cada Ξ para obtener 20 términos, usando (1) y (2), ocho de estos deben cancelarse en pares, dejando

$$2\langle R_{XY}V, W \rangle + 2\langle R_{WV}X, Y \rangle = 0.$$

por lo tanto $\langle R_{XY}V, W \rangle = \langle R_{WV}X, Y \rangle$. □

Las simetrías del tensor de curvatura R dan una simetría menos obvia para su diferencial covariante DR , llamada la **segunda identidad de Bianchi**.

Proposición 1.8. (*Segunda identidad de Bianchi*). Si $x, y, z \in T_p(M)$, entonces

$$(D_z R)(x, y) + (D_x R)(y, z) + (D_y R)(z, x) = 0$$

Lema 1.5. Sobre una vecindad coordinada de un sistema coordinado x^1, \dots, x^n ,

$$R_{\partial_k \partial_i}(\partial_j) = \sum_i R_{jkl}^i \partial_i,$$

donde las componentes de R están dadas por

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{kj}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{ij}^m.$$

Demostración. Para campos vectoriales coordenados

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = D_{\partial_l}(D_{\partial_k} \partial_j) - D_{\partial_k}(D_{\partial_l} \partial_j).$$

El primer término del lado derecho es

$$D_{\partial_l}(\sum \Gamma_{kj}^m \partial_m) = \sum_m \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^m \partial_m + \sum \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^r \partial_r.$$

renombrando dos pares de índices se tiene

$$\left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right\} \partial_j.$$

□

Campos de marcos

Una base ortonormal para un espacio tangente $T_p(M)$ es llamado un **marco** sobre M en p . Si $n = \dim M$ entonces el conjunto E_1, \dots, E_n de n campos vectoriales ortogonalmente mutuos es llamado **campos de marcos**, ya que esté asigna a cada punto un marco. Por ejemplo sobre \mathbb{R}^n los campos vectoriales de coordenadas naturales forman campos de marcos.

En general pueden no existir campos de marcos sobre todo M , pero localmente existen. Por expansión ortonormal cualquier campo V puede ser expresado en términos de campos de marcos como

$$V = \sum \varepsilon_i \langle V, E_i \rangle E_i, \quad \varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle.$$

Así

$$\langle V, W \rangle = \sum \varepsilon_i \langle V, E_i \rangle \langle W, E_i \rangle.$$

En el origen O de un sistema normal coordinado los vectores coordenados son ortonormales.

Los **campos de marcos** sobre una curva $\alpha : I \rightarrow M$ son un conjunto de campos vectoriales unitarios mutuamente ortogonales E_1, \dots, E_n sobre α . No solo tales campos de marcos pueden ser definidos sobre la curva entera, también se pueden escoger campos vectoriales $E_i \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y que sean paralelos.

Corolario 1.3. *Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva y e_1, \dots, e_n es un marco en $\alpha(0)$, entonces hay únicos campos de marcos paralelos E_1, \dots, E_n sobre α tal que $E_i(0) = e_i$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Se sabe que hay un único campo vectorial paralelo E_i sobre α tal que $E_i(0) = e_i$. Pero ya que la traslación paralela a cualquier $t \in I$ es una isometría lineal, E_1, \dots, E_n son de hecho campos de marcos paralelos. □

De lo anterior se sigue que sobre M existen localmente campos de marcos, dado cualquier marco e_1, \dots, e_n en el espacio tangente $T_O(M)$, escójase una vecindad normal U de O y extiéndase el marco a campos de marcos E_1, \dots, E_n sobre U mediante el transporte paralelo a lo largo de geodésicas radiales.

Ricci y escalar de curvatura

La contracción de la curvatura riemanniana resulta en un invariante más simple.

Definición 1.23. Sea R el tensor de curvatura riemanniana de M . El **tensor de curvatura de Ricci** Ric de M es la contracción $C_3^1 \in T_2^0(M)$, cuyas componentes relativas al sistema coordenado son $R_{ij} = \sum R_{ijm}^m$.

Lema 1.6. El tensor de curvatura de Ricci es simétrico, y está dado en relación a campos de marcos por

$$Ric(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m} Y, E_m \rangle,$$

donde como es usual $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$.

Demostración. Usemos la siguiente notación $R(X, Y, E_m) = R_{YE_m} X$, Así

$$Ric(X, Y) = (C_3^1 R)(X, Y) = \sum \varepsilon_m \langle E_m, R(X, Y, E_m) \rangle = \sum \varepsilon_m \langle R_{YE_m} X, E_m \rangle.$$

La simetría por pares del tensor de curvatura da la fórmula requerida y muestra que Ric es simétrico. \square

Si el tensor de Ricci es idénticamente cero, M se dice que es **Ricci plano**. Una variedad plana es Ricci plano, pero la inversa no se cumple.

Definición 1.24. El **escalar de curvatura** S de M es la contracción $C(Ric) \in F(M)$ de su tensor de Ricci.

En coordenadas

$$S = \sum g^{ij} R_{ij} = \sum g^{ij} R_{ijk}^k.$$

Capítulo 2

Grupos y ecuaciones diferenciales

Casi todas las teorías de la física involucran sistemas de ecuaciones diferenciales las cuales al ser resueltas muestran la naturaleza del problema desde las cuales fueron deducidas, de esta manera encontrar una solución se vuelve fundamental. En este capítulo desarrollaremos un método que involucra el uso de simetrías en el espacio de soluciones para poder hallar nuevas o poder construir una para el sistema de ecuaciones. Para profundizar más en el estudio de este método véase [5][6][7].

Supongamos que estamos considerando un sistema de ecuaciones diferenciales Υ involucrando p variables independientes $x = (x^1, \dots, x^p)$ y q variables dependientes $u = (u^1, \dots, u^q)$. Las soluciones del sistema deben ser de la forma $u = f(x)$, o en componentes, $u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^p)$, $\alpha = 1, \dots, q$. Sea $X = \mathbb{R}^p$, con coordenadas $x = (x^1, \dots, x^p)$, el espacio que representa las variables independientes, y sea $U = \mathbb{R}^q$, con coordenadas $u = (u^1, \dots, u^q)$, el que representa las variables dependientes. Un grupo de simetrías del sistema Υ debe ser un grupo local de transformaciones G , actuando sobre un subconjunto $M \subset X \times U$ de tal manera que G transforme soluciones de Υ a otras soluciones de Υ .

Identifíquese la función $u = f(x)$ con su gráfica

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U,$$

donde $\Omega \subset X$ es el dominio de la función f . Notemos que Γ_f es una subvariedad de dimensión p de $X \times U$. Si $\Gamma_f \subset M_g$, el dominio de definición del grupo de transformaciones g , entonces la transformación de Γ_f dada por g es

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) : (x, u) \in \Gamma_f\}.$$

El conjunto $g \cdot \Gamma_f$ no es necesariamente la gráfica de otra función univaluada $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Sin embargo, ya que G actúa suavemente y el elemento identidad de G no cambia a Γ_f , el dominio Ω de f nos asegura que para elementos g cerca de la identidad, la transformación $g \cdot \Gamma = \Gamma_{\tilde{f}}$ es la gráfica de alguna función suave univaluada $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Se escribe $\tilde{f} = g \cdot f$ y llamamos la función \tilde{f} la transformación de f por g .

Ejemplo 2.1. Sea $p = 1$, $q = 1$, tal que $X = \mathbb{R}$, con una única variable independiente x , y $U = \mathbb{R}$ con una única variable dependiente u . Entonces esto podría describir la situación de una ecuación diferencial ordinaria involucrando una única función $u = f(x)$.

Sea $G = SO(2)$ el grupo de rotaciones actuando sobre $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$. Las transformaciones en G son dadas por

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \cdot (x, u) = (x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta).$$

Supóngase que $u = f(x)$ es una función cuya gráfica es un subconjunto $\Gamma_f \subset X \times U$. El grupo $SO(2)$ actúa sobre f haciendo rotar su gráfica. Si el ángulo θ es suficientemente grande, la gráfica rotada $\theta \cdot \Gamma_f$ ya no será la gráfica de una función univaluada. Sin embargo, si $f(x)$ es definida sobre un intervalo finito $a \leq x \leq b$ y $|\theta|$ no es muy grande, entonces $\theta \cdot \Gamma_f$ debe ser la gráfica de una función bien definida $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$, con $\Gamma_{\tilde{f}} = \theta \cdot \Gamma_f$.

Como ejemplo específico, considere la función lineal

$$u = f(x) = ax + b$$

La gráfica de f es una línea recta, así que su rotación a través del ángulo θ debe ser otra línea recta, siempre que no sea una línea vertical, debe ser la gráfica de otra función lineal $\theta \cdot f = \tilde{f}$, la transformación de f por la rotación a través del ángulo θ . Para encontrar la fórmula precisa para $\theta \cdot f$ note que un punto $(x, u) = (x, ax + b)$ sobre la gráfica de f es rotado al punto

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = (x \cos \theta - (ax + b) \sin \theta, x \sin \theta + (ax + b) \cos \theta).$$

Para encontrar $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$, debemos eliminar x de este par de ecuaciones, esto es posible haciendo $\cot \theta \neq 0$, así que la gráfica no es vertical. Se encuentra

$$x = \frac{\tilde{x} + b \sin \theta}{\cos \theta - a \sin \theta},$$

ya que $\theta \cdot f = \tilde{f}$ está dada por

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{\sin \theta + a \cos \theta}{\cos \theta - a \sin \theta} \tilde{x} + \frac{b}{\cos \theta - a \sin \theta}$$

la cual es nuevamente una función lineal.

Supóngase que la transformación g está dada por las coordenadas

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Pi_g(x, u), \Sigma_g(x, u)),$$

para funciones suaves Π_g, Σ_g . Entonces la gráfica $\Gamma_{\tilde{f}} = g \cdot \Gamma_f$ de $g \cdot f$ está dada paramétricamente por las ecuaciones

$$\tilde{x} = \Pi_g(x, f(x)) = \Pi_g \circ (I \times f)(x), \tilde{u} = \Sigma_g(x, f(x)) = \Sigma_g \circ (I \times f)(x), x \in \Omega$$

Donde I es la función identidad de X , así que $I(x) = x$ y \times es el producto cartesiano de funciones. Para encontrar $\tilde{f} = g \cdot f$ explícitamente, debemos eliminar x de estos dos sistemas de ecuaciones. Ya que para $g = e$, $\Pi_e \circ (I \times f) = I$, sabemos que, si g está suficientemente cerca de la identidad, la matriz Jacobiana

de $\Pi_g \circ (I \times f)$ es no singular y por tanto por el teorema de la función inversa se puede resolver para x ,

$$x = (\Pi_g \circ (I \times f))^{-1}(\tilde{x}).$$

Sustituyendo en la segunda ecuación nos da la ecuación requerida para la transformación $g \cdot f$,

$$g \cdot f = (\Sigma_g \circ (I \times f)) \circ (\Pi_g \circ (I \times f))^{-1}, \quad (2.1)$$

lo cual es válido siempre que el segundo factor sea invertible.

Ejemplo 2.2. Considérese el caso en el cual el grupo G transforma solo a las variables independientes x . Así las transformaciones en G toman la forma

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Pi_g(x), u),$$

en el cual Π_g es un difeomorfismo de X con $\Pi_g^{-1} = \Pi_{g^{-1}}$ donde sea que estén definidos.

Si $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ es la gráfica de una función suave, entonces su transformación $g \cdot \Gamma_f = \{g \cdot (x, f(x))\}$ es siempre la gráfica de una función suave además

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, f(x)) = (\Pi_g(x), f(x)).$$

de esta manera se puede eliminar x invirtiendo Π_g , con

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\Pi_g^{-1}(\tilde{x})) = f(\Pi_{g^{-1}}(\tilde{x})).$$

Por ejemplo, si G es un grupo de traslaciones

$$(x, u) \rightarrow (x + \varepsilon a, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

para $a \in X$ fija, entonces la transformación de la función $u = f(x)$ es la traslación

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{u}) = f(\tilde{x} - \varepsilon a)$$

de f .

En el caso en el cual la acción sobre las variables independientes no depende de las variables dependientes

$$g \cdot (x, u) = (\Pi_g(x), \Sigma_g(x, u)).$$

Por ejemplo el grupo de un parámetro

$$g_\varepsilon : (x, t, u) \rightarrow (x + 2\varepsilon t, t, e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t} u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

siendo este un grupo de simetrías cuando se trabaja con la ecuación de calor. Si $u = f(x, t)$ es cualquier función, entonces la transformación por g_ε es

$$\tilde{u} = e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t} \cdot u = e^{\varepsilon x - \varepsilon^2 t} \cdot f(x, t),$$

el cual ahora debe ser escrito en términos de $(\tilde{x}, \tilde{t}) = g_\varepsilon \cdot (x, t) = (x + 2\varepsilon t, t)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= e^{-\varepsilon(\tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}) - \varepsilon^2\tilde{t}} \cdot f(\tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}, \tilde{t}) \\ &= e^{-\varepsilon\tilde{x} + \varepsilon^2\tilde{t}} \cdot f(\tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}, \tilde{t}) \end{aligned}$$

es la función transformada en este caso.

Definición 2.1. Sea Υ un sistema de ecuaciones diferenciales. Un grupo de simetrías del sistema Υ es un grupo local de transformaciones G actuando en un subconjunto abierto M del espacio de las variables dependientes e independientes para el sistema con la propiedad de que siempre que $u = f(x)$ es una solución de Υ , y donde sea que $g \cdot f$ esté definida para $g \in G$, entonces $\tilde{u} = g \cdot f(x)$ es también una solución de el sistema.

Prolongación

Necesitamos prolongar el espacio $X \times U$ que representa las variables independientes y dependientes a un espacio el cual represente las derivadas parciales que ocurren en el sistema.

Dada una función real suave $f(x) = f(x^1, \dots, x^p)$ de p variables independientes, entonces hay

$$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$$

derivadas parciales diferentes de orden k de f . Se usará la notación de multi-índices

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}}$$

En esta notación, $J = (j_1, \dots, j_k)$ es una "k-ada" desordenada de enteros, con entradas $1 \leq j_k \leq p$ indicando cuales derivadas serán tomadas. El orden de los multi-índices, será denotado por $\#J \equiv k$, indica como serán tomadas las derivadas. Si $f : X \rightarrow U$ es una función suave de $X \simeq \mathbb{R}^p$ a $U \simeq \mathbb{R}^q$, así que $u = f(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x))$, hay $q \cdot p_k$ números $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$ necesarios para representar todas las derivadas diferentes de orden k de las componentes de f en el punto x . Hágase $U_k \equiv \mathbb{R}^{q \cdot p_k}$ es el espacio euclidiano de esta dimensión, dotado con coordenadas u_J^α correspondiente a $\alpha = 1, \dots, q$, y todos los multi-índices $J = (j_1, \dots, j_k)$ de orden k , designando como se representan las derivadas anteriores. Por lo tanto, hágase $U^{(n)} = U \times U_1 \times \dots \times U_n$ el producto cartesiano del espacio U , cuyas coordenadas representan todas las derivadas de las funciones $u = f(x)$ de todos los órdenes desde 0 a n .

Nótese que $U^{(n)}$ es un espacio euclidiano de dimensión

$$q + qp_1 + \dots + qp_n = q \binom{p+n}{n} \equiv qp^{(n)}.$$

Un punto en $U^{(n)}$ será denotado por $u^{(n)}$, así que $u^{(n)}$ tiene $q \cdot p^{(n)}$ componentes diferentes u_J^α donde $\alpha = 1, \dots, q$, y J corre sobre los índices desordenados $J = (j_1, \dots, j_k)$ con $1 \leq j_k \leq p$ y $0 \leq k \leq n$. (Por convención, para $k = 0$ solo hay un multi-índice, denotado por 0, y u_0^α se refiere a la componente u^α de u .)

Ejemplo 2.3. Consideré el caso $p = 2$, $q = 1$. Entonces $X \simeq \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $(x^1, x^2) = (x, y)$, y $U \simeq \mathbb{R}$ tiene la única coordenada u . El espacio U_1 es isomorfo a \mathbb{R}^2 con coordenadas (u_x, u_y) ya que estos representan todas las derivadas parciales de primer orden de u con respecto a x y y . Similarmente, $U_2 \simeq \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas (u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) representando las derivadas parciales de segundo orden de u , y en general, $U_k \simeq \mathbb{R}^{k+1}$, ya que hay $k+1$ distintas k -ésimas derivadas parciales de u , normalmente $\partial^k u / \partial x^i \partial y^{k-i}$, $i = 0, \dots, k$. Finalmente $U^{(2)} = U \times U_1 \times U_2 \simeq \mathbb{R}^6$, con coordenadas $u^{(2)} = (u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$

que representa todas las derivadas de u con respecto a x y y de orden 2 como máximo.

Dada una función suave $u = f(x)$, tal que $f : X \rightarrow U$, hay una función inducida $u^{(n)} = pr^{(n)}f(x)$, llamada la **n-prolongación** de f , la cual es definida por las ecuaciones

$$u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$$

Así para $pr^{(n)}f$ es una función que va de X al espacio $U^{(n)}$, y para cada x en X , $pr^{(n)}f(x)$ es un vector cuyas $q \cdot p^{(n)}$ entradas representan los valores de f y todas sus derivadas hasta el orden n en el punto x . Por ejemplo en el caso de $p = 2, q = 1$ discutida anteriormente, dada $u = f(x, y)$, la segunda prolongación $u^{(2)} = pr^{(2)}f(x, y)$ está dada por

$$(u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = \left(f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right),$$

todas las entradas evaluadas en (x, y)

El espacio total $X \times U^{(n)}$, cuyas coordenadas representan las variables independientes, las variables dependientes y las derivadas de las variables dependientes hasta orden n , es llamado el **espacio jet** de orden n del espacio $X \times U$. En general no nos interesan ecuaciones diferenciales definidas sobre todo $X \times U$, pero si en algún subconjunto abierto $M \subset X \times U$. En este caso definimos el espacio n-jet

$$M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \cdots \times U_n$$

de M . Si $u = f(x)$ es una función cuya gráfica está en M , la n-prolongación $pr^{(n)}f(x)$ es una función cuya gráfica está en el espacio n-jet $M^{(n)}$.

2.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un sistema Υ de ecuaciones diferenciales de orden n en p dependientes y q independientes variables esta dado como un sistema de ecuaciones

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l$$

involucrando $x = (x^1, \dots, x^p)$, $u = (u^1, \dots, u^q)$ y las derivadas de u con respecto a x hasta orden n . Las funciones $\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \dots, \Delta_l(x, u^{(n)}))$ serán asumidas como funciones suaves en sus argumentos, tal que Δ puede ser visto como un mapeo suave desde el espacio jet $X \times U^{(n)}$ a algún espacio euclidiano de dimensión l ,

$$\Delta : X \times U^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^l$$

Las ecuaciones diferenciales dicen donde el mapeo Δ se hace cero sobre $X \times U^{(n)}$, y así determinan una subvariedad

$$\Upsilon_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

de el espacio jet total. Podemos identificar el sistema de ecuaciones diferenciales con su correspondiente subvariedad.

Una **solución** suave del sistema de ecuaciones diferenciales es una función suave $u = f(x)$ tal que

$$\Delta_\nu(x, pr^{(n)}f(x)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l,$$

siempre que x está en el dominio de f . La gráfica de la prolongación $pr^{(n)}f(x)$ debe estar enteramente en la subvariedad Υ_Δ determinada por el sistema;

$$\Gamma_f^{(n)} \equiv \{(x, pr^{(n)}f(x))\} \subset \Upsilon_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}.$$

Puede tomarse un sistema de ecuaciones diferenciales de orden n para que sea una subvariedad Υ_Δ en el espacio n -jet $X \times U^{(n)}$ y una solución que sea una función $u = f(x)$ tal que la gráfica de la n -prolongación $pr^{(n)}f$ está contenida en la subvariedad Υ_Δ .

Ejemplo 2.4. La ecuación de Laplace en el plano

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Aquí $p = 2$ ya que las variables independientes son x y y , y $q = 1$ con variable dependiente u . Como la ecuación es de segundo orden, entonces $n = 2$. Entonces $(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ de $X \times U^{(2)}$ define una subvariedad lineal, y éste es el conjunto Υ_Δ para la ecuación de Laplace. Una solución $u = f(x, y)$ debe satisfacer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

para toda (x, y) . Por ejemplo si,

$$pr^{(2)}f(x, y) = (x^3 - 3xy^2; 3x^2 - 3y^2, -6xy; 6x, -6y, -6x)$$

esta en Υ_Δ ya que la cuarta y sexta entrada suman cero.

2.2. Prolongación de acciones de grupo

Ahora supóngase que G es un grupo local de transformaciones actuando sobre un subconjunto abierto $M \subset X \times U$ del espacio de las variables independientes y dependientes. Hay una acción local inducida de G sobre el espacio n -jet $M^{(n)}$, llamado la n -ésima prolongación de G y será denotada por $pr^{(n)}G$. Esta prolongación es definida de tal manera que esta transforma las derivadas de la función $u = f(x)$ en las correspondientes derivadas de la función transformada $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Sea $(x_0, u_0^{(n)})$ es un punto dado en $M^{(n)}$. Escoja cualquier función $u = f(x)$ definida en una vecindad de x_0 , cuya gráfica está en M , y tiene las derivadas dadas en x_0

$$u_0^{(n)} = pr^{(n)}f(x_0), \quad u_{J_0}^\alpha = \partial_J f^\alpha(x_0).$$

Por ejemplo, f podría ser un polinomio de Taylor de orden n en x_0 correspondiente a los valores dados $u_0^{(n)}$

$$f^\alpha(x) = \sum_J \frac{u_{J_0}^\alpha}{\tilde{J}!} (x - x_0)^J, \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

(La suma va sobre todos los multi-índices $J = (j_1, \dots, j_k)$ con $0 \leq k \leq n$, también $(x - x_0)^J = (x^{j_1} - x_0^{j_1})(x^{j_2} - x_0^{j_2}) \cdots (x^{j_k} - x_0^{j_k})$).

Dada J , sea $\tilde{J} = (\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_p)$ donde \tilde{j}_i es igual al número de j'_k s los cuáles son iguales a i , con esta notación $\tilde{J}! \equiv \tilde{j}_1! \tilde{j}_2! \cdots \tilde{j}_p!$

Si g es un elemento de G suficientemente cerca de la identidad, la función transformada $g \cdot f$ tal como esta dada en (2.1) es definida en una vecindad del punto correspondiente $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = g \cdot (x_0, u_0)$, con $u_0 = f(x_0)$ siendo las componentes de orden cero de $u_0^{(n)}$. Cuando determinamos la acción del grupo de transformaciones prolongado $pr^{(n)}g$ sobre el punto $(x_0, u_0^{(n)})$ por evaluar las derivadas de la función transformada $g \cdot f$ en \tilde{x}_0 , de manera explícita

$$pr^{(n)}g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}),$$

donde

$$\tilde{u}_0^{(n)} \equiv pr^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0),$$

Ejemplo 2.5. Sea $p = q = 1$, tal que $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, y considere la acción del grupo de rotaciones $SO(2)$. Calculamos aquí la primera prolongación $pr^{(1)}SO(2)$. Nótese primero que $X \times U^{(1)} \simeq \mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, u, u_x) . Dada una función $u = f(x)$, la primera prolongación es

$$pr^{(1)}f(x) = (f(x), f'(x)).$$

Ahora dado un punto $(x^0, u^0, u_x^0) \in X \times U^{(1)}$, y una rotación en $SO(2)$ caracterizada por el ángulo θ , debemos encontrar el correspondiente punto transformado

$$pr^{(1)}\theta \cdot (x^0, u^0, u_x^0) = (\tilde{x}^0, \tilde{u}^0, \tilde{u}_x^0)$$

Escojamos el polinomio de Taylor lineal

$$f(x) = u^0 + u_x^0(x - x^0) = u_x^0 \cdot x + (u^0 - u_x^0 x^0)$$

como función representativa, nótese que

$$f(x^0) = u^0, \quad f'(x^0) = u_x^0,$$

tal como se requiere. La transformada de f por una rotación a través del ángulo θ es la función lineal

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \theta \cdot f(\tilde{x}) = \frac{\sin \theta + u_x^0 \cos \theta}{\cos \theta - u_x^0 \sin \theta} \tilde{x} + \frac{u^0 - u_x^0 x^0}{\cos \theta - u_x^0 \sin \theta},$$

la cual está bien definida haciendo $u_x^0 \neq \cot \theta$. Entonces

$$\tilde{x}^0 = x^0 \cos \theta - u^0 \sin \theta,$$

de aquí que

$$\tilde{u}_x^0 = \tilde{f}'(\tilde{x}^0) = \frac{\sin \theta + u_x^0 \cos \theta}{\cos \theta - u_x^0 \sin \theta}.$$

La acción prolongada $pr^{(1)}SO(2)$ sobre $X \times U^{(1)}$ está dada por

$$pr^{(1)}\theta \cdot (x, u, u_x) = \left(x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta, \frac{\sin \theta + u_x \cos \theta}{\cos \theta - u_x \sin \theta} \right),$$

el cual esta definido para $|\theta| < |\operatorname{arccot} u_x|$

2.3. Invarianza de ecuaciones diferenciales

Supóngase que se tiene un sistema de orden n de ecuaciones diferenciales, o, equivalentemente, una subvariedad Υ_Δ del espacio jet $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. Un grupo de simetrías de este sistema está definido como un grupo local de transformaciones G actuando sobre $M \subset X \times U$ el cual transforma soluciones del sistema a otras soluciones. La conexión entre esta condición de simetría y la condición geométrica que la correspondiente subvariedad Υ_Δ es invariante bajo el grupo de acción prolongado $pr^{(n)}G$. Esta observación efectivamente debe reducir el problema de determinar los grupos de simetrías de ecuaciones diferenciales a un problema más práctico cuando alguna subvariedad es invariante bajo algún grupo local de transformaciones.

Teorema 2.1. *Sea M un subconjunto abierto de $X \times U$ y suponga $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ es un sistema de ecuaciones de orden n definido sobre M , con correspondiente subvariedad $\Upsilon_\Delta \subset M^{(n)}$. Suponga que G es un grupo local de transformaciones actuando sobre M cuya prolongación deja Υ_Δ invariante, lo cual significa que siempre que $(x, u^{(n)}) \in \Upsilon_\Delta$, tenemos $pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in \Upsilon_\Delta$ para todo $g \in G$ tal que este definido. Entonces G es un grupo de simetrías del sistema de ecuaciones diferenciales de acuerdo a la Definición 2.1.*

2.4. Prolongación de campos vectoriales

Definición 2.2. *Sea $M \subset X \times U$ abierto y suponga v es un campo vectorial sobre M , con correspondiente grupo local de un parámetro $exp(\varepsilon v)$. La n -prolongación de v , denotada $pr^{(n)}v$, debe ser un campo vectorial en el espacio jet $M^{(n)}$, y es definido por ser el generador infinitesimal del correspondiente grupo de un parámetro prolongado $pr^{(n)}[exp(\varepsilon v)]$. En otras palabras,*

$$pr^{(n)}v|_{(x, u^{(n)})} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} pr^{(n)}[exp(\varepsilon v)](x, u^{(n)})$$

para cualquier $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Note que ya que las coordenadas $(x, u^{(n)})$ sobre $M^{(n)}$ son las variables independientes (x^1, \dots, x^p) y todas las derivadas u_α^J de las variables dependientes hasta orden n , un campo vectorial sobre $M^{(n)}$ en general debe tomar la forma

$$v^* = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_\alpha^J},$$

la suma corre sobre todos los índices múltiples J de orden $0 \leq \#J \leq n$; los coeficientes son funciones ξ^i, ϕ_α^J puede depender de todas las variables $(x, u^{(n)})$. En el caso v^* es la prolongación $pr^{(n)}v$ de un campo vectorial

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

los coeficientes ξ^i, ϕ_α^J de $v^* = pr^{(n)}v$ deben ser determinados por los coeficientes ξ^i, ϕ_α del mismo v . El grupo de acción prolongado cuando se restringe a solo

las variables de orden cero x, u de $M^{(0)} = M$, coincide con la acción de grupo ordinaria $exp(\varepsilon v)$ sobre M . Por lo tanto los coeficientes ξ^i y $\phi_\alpha^0 = \phi_\alpha$ de $v^* = pr^{(n)}v$ deben coincidir con los correspondientes ξ^i, ϕ_α del mismo v . Así

$$pr^{(n)}v = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_\alpha^J},$$

donde $\xi^i, \phi_\alpha = \phi_\alpha^0$ deducida de v . Más aun, si $\#J = k$, los coeficientes ϕ_α^J de $\partial/\partial u_\alpha^J$ deben solo depender de derivadas de orden k y derivadas de orden menor de u , $\phi_\alpha^J = \alpha_\alpha^J(x, u^{(k)})$.

Ejemplo 2.6. Considere el grupo de rotaciones $SO(2)$ actuando sobre $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, el generador infinitesimal correspondiente

$$v = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}$$

con

$$exp(\varepsilon v)(x, u) = (x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon)$$

siendo el ángulo de rotación a través del ángulo ε . La primera prolongación toma la forma

$$pr^{(1)}[exp(\varepsilon v)](x, u, u_x) = \left(x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon, \frac{\sin \varepsilon + u_x \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon - u_x \sin \varepsilon} \right).$$

Un cálculo fácil muestra que

$$pr^{(1)}v = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x}$$

2.5. Invarianza infinitesimal

Definición 2.3. Sea

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l,$$

un sistema de ecuaciones diferenciales. El sistema se dice que es de rango máximo si la matriz Jacobiana de $l \times (p + qp^{(n)})$

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_\alpha^J} \right)$$

de Δ con respecto a todas las variables $(x, u^{(n)})$ es de rango l siempre que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$

Por ejemplo la ecuación de Laplace es de rango máximo ya que la matriz Jacobiana respecto a las variables $(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ en $X \times U^{(2)}$ es

$$J_\Delta = (0, 0; 0; 0, 0; 1, 0, 1)$$

La cual es de rango 1, en cualquier punto. Es importante notar que no ocurre lo mismo con la ecuación equivalente

$$\tilde{\Delta} = (u_{xx} + u_{yy})^2 = 0$$

no es de rango máximo pues

$$J_{\tilde{\Delta}} = (0, 0; 0, 0; 0, 0; 2(u_{xx} + u_{yy}), 0, 2(u_{xx} + u_{yy}))$$

la cual se anula siempre que $(u_{xx} + u_{yy})^2 = 0$

Teorema 2.2. *Supóngase que*

$$\Delta_{\nu}(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l,$$

es un sistema de ecuaciones diferenciales de rango máximo definido sobre $M \subset X \times U$. Si G es un grupo local de transformaciones actuando sobre M , y

$$pr^{(n)}v[\Delta_{\nu}(x, u^{(n)})] = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad \text{siempre que } \Delta(x, u^{(n)}) = 0,$$

para cada generador infinitesimal v de G , entonces G es un grupo de simetrías del sistema.

Ejemplo 2.7. Sea $G = SO(2)$ actuando sobre $X \times U = \mathbb{R}^2$. Considérese la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\Delta(x, u, u_x) = (u - x)u_x + u + x = 0$$

Nótese que la matriz Jacobiana es

$$J_{\Delta} = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial u}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_x} \right) = (1 - u_x, 1 + u_x, u - x),$$

la cual es de rango 1 donde sea. Aplicando el generador infinitesimal de $pr^{(1)}SO(2)$ se encuentra que

$$\begin{aligned} pr^{(1)}v(\Delta) &= -u \frac{\partial \Delta}{\partial x} + x \frac{\partial \Delta}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial \Delta}{\partial u_x} \\ &= -u(1 - u_x) + x(1 + u_x) + (1 + u_x^2)(u - x) \\ &= u_x[(u - x)u_x + u + x] \\ &= u_x \Delta. \end{aligned}$$

Fórmula de prolongación

Se comenzará analizando la prolongación de un grupo de transformaciones de un parámetro que actúa solamente sobre las variables independientes en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. En otras palabras consideré el campo vectorial

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

sobre el espacio $M \subset X \times U$. Los elementos del grupo $g_{\varepsilon} = \exp(\varepsilon v)$ son de la forma

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_{\varepsilon} \cdot (x, u) = (\Pi_{\varepsilon}(x), u)$$

en el cual las componentes $\tilde{x}^i = \Pi_{\varepsilon}^i(x)$ satisfacen

$$\left. \frac{d\Pi_{\varepsilon}^i(x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \xi^i(x),$$

Consideré el caso de una única variable dependiente $u \in \mathbb{R}$.

El primer espacio jet $M^{(1)}$ tiene coordenadas $(x, u^{(1)}) = (x^i, u, u_j)$ donde $u_j \equiv \partial u / \partial x^j$. La acción de grupo prolongado se encuentra de la siguiente manera; $(x, u^{(1)})$ es cualquier punto en $M^{(1)}$, y $u = f(x)$ es cualquier función con $u_j = \partial f / \partial x^j$, $j = 1, \dots, p$ entonces $pr^{(1)}g_\varepsilon \cdot (x, u^{(1)}) = (\tilde{x}, \tilde{u}^{(1)})$, donde $\tilde{x} = \Pi_\varepsilon(x)$, $\tilde{u} = u$, y \tilde{u}_j son las derivadas de la función transformada $\tilde{f}_\varepsilon = g_\varepsilon \cdot f$, la cual está dada por

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = f[\Pi_\varepsilon^{-1}(\tilde{x})] = f[\Pi_{-\varepsilon}(\tilde{x})].$$

(en lo anterior se usa el hecho de que $g_\varepsilon^{-1} = g_{-\varepsilon}$ donde sea que este definido). De esta manera

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k}(\Pi_{-\varepsilon}(\tilde{x})) \cdot \frac{\partial \Pi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}).$$

Pero se tiene $\Pi_{-\varepsilon}(\tilde{x}) = x$, de aquí que

$$\tilde{u}_j = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Pi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Pi_\varepsilon(x)) u_k \quad (2.2)$$

da la fórmula explícita de la acción de grupo prolongada en las derivadas de primer orden. Para encontrar el generador infinitesimal de $pr^{(1)}g_\varepsilon$, debe diferenciarse la fórmula de la transformación prolongada respecto a ε y hacer $\varepsilon = 0$. Entonces

$$pr^{(1)}v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^p \phi^j(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j},$$

donde $\xi^i(x)$ es como antes y donde

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Pi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Pi_\varepsilon(x)) u_k,$$

Ya que las funciones son suaves se puede intercambiar el orden de la diferenciación, y se obtienen dos términos multiplicando u_k , primero aquellos de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \left[\left. \frac{d \Pi_{-\varepsilon}^k}{d\varepsilon} \right] (\Pi_\varepsilon(x)) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left. \frac{d \Pi_{-\varepsilon}^k}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right] (x) = -\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x),$$

La segunda involucra dos derivadas respecto a x de $\Pi_{-\varepsilon}$:

$$\sum_l \frac{\partial^2 \Pi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^l}(\Pi_{-\varepsilon}(x)) \left. \frac{d \Pi_{-\varepsilon}^l}{d\varepsilon}(x) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

el cual se hace cero ya que $\Pi_0(x)$ es la identidad. Como en $\varepsilon = 0$ todas las derivadas de segundo orden respecto a x de Π_ε se hacen cero. Entonces

$$\phi^j(x, u, u_x) = -\sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \cdot u_k$$

Ejemplo 2.8. Sea $p = 2, q = 1$, y considérese el campo vectorial

$$v = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

sobre $X \simeq \mathbb{R}^2$ en las coordenadas (x, y) . La primera prolongación es

$$pr^{(1)}v = v + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^y \frac{\partial}{\partial u_y}$$

donde $\phi^x = -\frac{\partial \xi}{\partial x} u_x - \frac{\partial \eta}{\partial x} u_y$ $\phi^y = -\frac{\partial \xi}{\partial y} u_x - \frac{\partial \eta}{\partial y} u_y$

En el caso anterior teníamos que el grupo solo actuaba sobre las variables independientes. Ahora consideraremos uno en el cual la transformación solo se da sobre las variables dependientes:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (x, \Sigma_\varepsilon(x, u)),$$

Este tiene un generador infinitesimal $v = \phi(x, u) \partial_u$, donde

$$\phi(x, u) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Sigma_\varepsilon(x, u).$$

Si $u = f(x)$ es una función, la función transformada $\tilde{f}_\varepsilon = g_\varepsilon \cdot f$, entonces

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(x) = \Sigma_\varepsilon(x, f(x)).$$

Para encontrar la acción de grupo, se debe diferenciar

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial}{\partial x^j} \{ \Sigma_\varepsilon(x, f(x)) \} = \frac{\partial \Sigma_\varepsilon}{\partial x^j}(x, f(x)) + \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \frac{\partial \Sigma_\varepsilon}{\partial u}(x, f(x)),$$

de aquí que $pr^{(1)}g_\varepsilon \cdot (x, u^{(1)}) = (x, \tilde{u}^{(1)})$, donde

$$\tilde{U}_j = \frac{\partial \Sigma_\varepsilon}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \Sigma_\varepsilon}{\partial u}.$$

El generador infinitesimal

$$pr^{(1)}v = v + \sum_{j=1}^p \phi^j(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j}$$

de $pr^{(1)}g_\varepsilon$ donde

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \tilde{u}_j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial u}.$$

Derivadas totales

Supóngase que $\phi^j(x, u^{(1)})$ se obtiene de $\phi(x, u)$ diferenciándola con respecto a x^j , mientras se trata a la vez u como función de x . La derivada resultante es llamada **derivada total** de ϕ con respecto a x^i , y se denotará como

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = D_j \phi(x, u) = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial u}.$$

Definición 2.4. Sea $P(x, u^{(n)})$ una función suave de x, u , y de derivadas de u hasta orden n , definida sobre un subconjunto $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. La **derivada total** de P con respecto a x^i es la única función suave $D_i P(x, u^{(n+1)})$ definida sobre $M^{(n+1)}$ y dependiente de las derivadas de u hasta orden $n+1$, con la propiedad de que si $u = f(x)$ es una función suave

$$D_i P(x, pr^{(n+1)} f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} \{P(x, pr^{(n)} f(x))\}.$$

Proposición 2.1. Dada $P(x, u^{(n)})$, la i -ésima derivada total de P tiene la forma general

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha} \quad (2.3)$$

donde $J = (j_1, \dots, j_k)$,

$$u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}. \quad (2.4)$$

La suma corre sobre todos los J 's de orden $0 \leq \#J \leq n$, donde n representa el orden más alto de las derivadas que aparecen en P .

Las derivadas totales de orden superior son definidas en analogía con la notación para derivadas parciales de orden superior. Explícitamente, si $J = (j_1, \dots, j_k)$ son k -índices con $1 \leq j_k \leq p$ para cada k , entonces la J -ésima derivada total es denotada

$$D_J = D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k}.$$

Fórmula general de la prolongación

Teorema 2.3. Sea

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (2.5)$$

un campo vectorial definido sobre un subconjunto abierto $M \subset X \times U$. La n -ésima prolongación de v es el campo vectorial

$$pr^{(n)} v = v + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (2.6)$$

definido sobre el correspondiente espacio jet $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, la segunda sumatoria se hace sobre todos los índices (no ordenados) $J = (j_1, \dots, j_k)$, con $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$. Los coeficientes de $pr^{(n)} v$ son funciones ϕ_α^J dadas por la siguiente fórmula

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J \left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha, \quad (2.7)$$

donde $u_i^\alpha = \partial u^\alpha / \partial x^i$, y $u_{J,i}^\alpha = \partial u_J^\alpha / \partial x^i$

los coeficientes de $\frac{\partial}{\partial u_{J,k}^\alpha}$ en la primera prolongación de $pr^{(n-1)}v$ es

$$\phi_\alpha^{J,k} = D_k \phi_\alpha^J - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha \quad (2.8)$$

Consideremos el caso del grupo de rotaciones $SO(2)$ actuando sobre $X \times U \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con generador infinitesimal

$$v = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}$$

Es fácil ver que $\phi = x$, $\xi = -u$, entonces la primera prolongación

$$pr^{(1)}v = v + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x}$$

es dada por

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = D_x(x + u u_{xx}) - u u_{xx} = 1 + u_x^2.$$

Los coeficientes ϕ^{xx} de $\partial/\partial u_{xx}$ en $pr^{(2)}$ son encontrados usando (2.7)

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^2(x + u u_x) - u u_{xxx} = 3u_x u_{xxx},$$

o la fórmula de recursión (2.8)

$$\phi^{xx} = D_x \phi^x - u_{xx} D_x \xi = D_x(1 + u_x^2) + u_x u_{xx} = 3u_x u_{xx}.$$

Entonces el generador infinitesimal de la segunda prolongación $pr^{(2)}SO(2)$ actuando sobre $X \times U^{(2)}$ es

$$pr^{(2)}v = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_x u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

Se deduce inmediatamente que la ecuación diferencial ordinaria $u_{xx} = 0$ tiene $SO(2)$ como grupo de simetrías, ya que

$$pr^{(2)}v(u_{xx}) = 3u_x u_{xx} = 0$$

siempre que $u_{xx} = 0$. Esto es solo una consecuencia geométrica de que las rotaciones mandan líneas rectas en líneas rectas. Para otra ilustración geométrica consideré la función

$$k(x, u^{(2)}) = u_{xx} (1 + u_x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Un cálculo fácil muestra que

$$pr^{(2)}v(k) = 0$$

para toda u_x, u_{xx} , k es un invariante de $pr^{(2)}SO(2)$

$$k(pr^{(2)}\theta \cdot (x, u^{(2)})) = k(x, u^{(2)})$$

para cualquier rotación θ . k es justo la curvatura de la gráfica de $u = f(x)$ así que lo que se ha probado es que la curvatura de una curva es invariante bajo rotaciones.

Ejemplos de grupos de simetrías

La Ecuación de calor. Considere la ecuación para la conducción de calor en un camino unidimensional

$$u_t = u_{xx},$$

el término difusivo ha sido normalizado a la unidad. En la ecuación anterior se ve que se tienen dos variables independientes x y t , y solo una variable dependiente u , entonces $p = 2$ y $q = 1$. La ecuación de calor es de segundo orden entonces $n = 2$, y se puede identificar con la subvariedad lineal en $X \times U^{(2)}$ determinada por la anulación de la función $\Delta(x, t, u^{(2)}) = u_t - u_{xx}$. Puede proponerse un campo vectorial de la forma

$$v = \xi^{(1)}(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^{(2)}(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

la cual es un campo vectorial sobre $X \times U$. Se determinarán los coeficientes $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ y ϕ tales que el grupo de un parámetro correspondiente a $\exp(\varepsilon v)$ es un grupo de simetrías de la ecuación de calor. Para esto necesitamos saber la forma de la segunda prolongación de v .

$$pr^{(2)}v = v + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

Aplicando $pr^{(2)}v$ a la ecuación diferencial y utilizando el Teorema 2.2. encontramos que

$$\begin{aligned} \phi^t &= \phi^{xx} \\ \phi^t &= \phi_t - \xi_t^{(1)} u_x + (\phi_u - \xi_t^{(2)}) u_t - \xi_u^{(1)} u_x u_t - \xi_u^{(2)} u_t^2 \\ &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}^{(1)}) u_x - \xi^{(2)} u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}^{(1)}) u_x^2 - 2\xi_{xu}^{(2)} u_x u_t - \xi_{uu}^{(1)} u_x^3 \\ &\quad - \xi_{uu}^{(2)} u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x^{(1)}) u_{xx} - 2\xi_x^{(2)} u_{xt} - 3\xi_u^{(1)} u_x u_{xx} - \xi_u^{(2)} u_t u_{xx} \\ &\quad - 2\xi_u^{(2)} u_x u_{xt} \\ &= \phi^{xx}, \end{aligned}$$

se debe igualar los coeficientes de los monomios en las derivadas de primero y segundo orden de u , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} u_x u_{xt} & \quad 0 &= -2\xi_u^{(2)} & \quad (a) \\ u_{xt} & \quad 0 &= -2\xi_x^{(2)} & \quad (b) \\ u_{xx}^{(2)} & \quad -\xi_u^{(2)} &= -\xi_u^{(2)} & \quad (c) \\ u_x^{(2)} u_{xx} & \quad 0 &= -\xi_{uu}^{(2)} & \quad (d) \\ u_x u_{xx} & \quad -\xi_u^{(1)} &= -2\xi_{xu}^{(2)} - 3\xi_u^{(1)} & \quad (e) \\ u_{xx} & \quad \phi_u - \xi_t^{(2)} &= -\xi_{xx}^{(2)} + \phi_u - 2\xi_x^{(1)} & \quad (f) \\ u_x^3 & \quad 0 &= -\xi_{uu}^{(1)} & \quad (g) \\ u_x^2 & \quad 0 &= \phi_{uu} - 2\xi_{xu}^{(1)} & \quad (h) \\ u_x & \quad \xi_t^{(1)} &= 2\phi_{xu} - \xi_{xx}^{(1)} & \quad (i) \\ 1 & \quad \phi_t &= \phi_{xx} & \quad (j) \end{aligned}$$

Los coeficientes se determinan fácilmente pues su forma esta dada en términos de ecuaciones elementales. De (a) y (b) se tiene que $\xi^{(2)}$ solo puede ser función

de t . Entonces de (e) se tiene que $\xi^{(1)}$ no puede depender de u , y (f) necesita satisfacer que $\xi_t^{(2)} = 2\xi_x^{(1)}$, entonces $\xi(x, t) = \frac{1}{2}\xi_t^{(2)}x + \sigma(t)$, donde σ es alguna función que depende solo de t . Por otro lado se tiene de (h) que ϕ es una función lineal de u , tal que

$$\phi(x, t, u) = \beta(x, t) + \alpha(x, t)$$

para ciertas funciones α y β . De (j), $\xi^{(1)} = -2\beta_x$, tal que β es a lo más cuadrática en x , con

$$\beta = -\frac{1}{8}\xi_{tt}^{(2)}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t).$$

Por último de (k) se necesita que tanto α como β sean soluciones de la ecuación de calor,

$$\alpha_t = \alpha_{xx} \quad \beta_t = \beta_{xx}$$

Usando la forma anterior de β se encuentra que

$$\xi_{ttt}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0, \quad \rho_t = -\frac{1}{4}\xi_{tt}^{(2)}.$$

Así $\xi^{(2)}$ es cuadrática en t , σ es lineal en t , ahora ya se puede dar $\xi^{(1)}$ y ϕ directamente de la forma de ρ, σ y $\xi^{(2)}$. Se puede entonces concluir que la simetría infinitesimal de la ecuación de calor tiene funciones coeficientes de la forma

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt \\ \xi^{(2)} &= c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2 \\ \phi &= (c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^{(2)})u + \alpha(x, t) \end{aligned}$$

donde c_1, c_2, \dots, c_6 son constantes arbitrarias y $\alpha(x, t)$ es una solución arbitraria de la ecuación de calor. Entonces el álgebra de Lie de las simetrías infinitesimales de la ecuación de calor es generada por los campos vectoriales

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_x \\ v_2 &= \partial_t \\ v_3 &= u\partial_u \\ v_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t \\ v_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u \\ v_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u \end{aligned}$$

y la subálgebra de dimensión infinita

$$v_\alpha = \alpha(x, t)\partial_u$$

donde α es una solución arbitraria de la ecuación de calor

Los grupos de un parámetro G_i generados por los v_i están dados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_1 &: (x + \varepsilon, t, u) \\ G_2 &: (x, t + \varepsilon, u) \\ G_3 &: (x, t, e^\varepsilon u) \\ G_4 &: (e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t, u) \\ G_5 &: (x + 2\varepsilon t, t, u \cdot \exp(-\varepsilon x - \varepsilon^2 t)) \\ G_6 &: \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right\} \right) \\ G_\alpha &: (x, t, u + \varepsilon\alpha(x, t)) \end{aligned}$$

Como cada grupo G_i es un grupo de simetrías, entonces si $u = f(x, t)$ es una solución de la ecuación de calor, también lo serán las funciones

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= f(x - \varepsilon, t) \\ u^{(2)} &= f(x, t - \varepsilon) \\ u^{(3)} &= e^\varepsilon f(x, t) \\ u^{(4)} &= f(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t) \\ u^{(5)} &= e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t, t) \\ u^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\} f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right) \\ u^{(\alpha)} &= f(x, t) + \varepsilon \alpha(x, t) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\alpha(x, t)$ es una solución de la ecuación de calor.

La apariencia del grupo G_6 es muy común en los principios físicos y tiene una buena consecuencia. Si consideramos la solución constante $u = c$, entonces se tiene que la función

$$u = \frac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}$$

es una solución. En particular, si hacemos $c = \sqrt{\varepsilon/\pi}$ se obtiene la solución fundamental de la ecuación de calor en el punto $(x_0, t_0) = (0, -1/4\varepsilon)$. Se obtiene la solución fundamental

$$u = \frac{1}{4\pi} \exp\left\{\frac{-x^2}{4t}\right\}$$

Se necesita trasladar esta solución en t usando el grupo G_2 (con ε remplazada por $\frac{1}{4\varepsilon}$).

El grupo de simetrías de un parámetro más general se obtiene considerando la combinación lineal $c_1 v_1 + \dots + c_6 v_6 + v_\alpha$, pero la fórmula explícita para el grupo de transformaciones es complicada. De manera alternativa puede representarse una transformación del grupo g como la composición de transformaciones de los subgrupos de un parámetro $G_1, \dots, G_6, G_\alpha$. En particular, si g esta cerca de la identidad, puede ser representado de manera única como

$$g = \exp(v_\alpha) \cdot \exp(\varepsilon_6 v_6) \cdot \dots \cdot \exp(\varepsilon_1 v_1)$$

La solución más general que se obtiene de una solución dada $u = f(x, t)$ por un grupo de transformaciones es de la forma

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon_6 t}} \exp\left\{\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_5 x + \varepsilon_6 x^2 - \varepsilon_5^2 t}{1+4\varepsilon_6 t}\right\} \\ &\times f\left(\frac{e^{-\varepsilon_4}(x-2\varepsilon_5 t)}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_1, \frac{e^{-2\varepsilon_4 t}}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_2\right) + \alpha(x, t) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$ son constantes reales y α una solución arbitraria de la ecuación de calor.

La Ecuación de Onda. Considérese la ecuación de onda

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

donde la parte espacial es de dimensión 2. Ahora un campo vectorial en el espacio de las variables independientes y dependientes puede tomar la forma

$$v = \xi^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + \xi^{(2)} \frac{\partial}{\partial y} + \xi^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u}$$

donde $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \phi$ dependen de x, y, t, u . Aplicando el criterio de invarianza, se tiene

$$\phi^{tt} - \phi^{xx} - \phi^{yy} = Q \cdot (u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) \quad (2.9)$$

en el cual $Q(x, y, t, u^{(2)})$ puede depender de derivadas de segundo orden de u . Las funciones $\phi^{tt}, \phi^{xx}, \phi^{yy}$ de $pr^{(2)}v$ se determinan de manera similar a las del ejemplo anterior pero con términos extras dados por la coordenada y , entonces

$$\begin{aligned} \phi^{tt} &= D_t^2(\phi - \xi^{(1)}u_x - \xi^{(2)}u_y - \xi^{(3)}u_t) + \xi^{(1)}u_{xtt} + \xi^{(2)}u_{ytt} + \xi^{(3)}u_{ttt} \\ &= D_t^2\phi - u_x D_t^2\xi^{(1)} - u_y D_t^2\xi^{(2)} - u_t D_t^2\xi^{(3)} - 2u_{xt}D_t\xi^{(1)} - 2u_{yt}D_t\xi^{(2)} \\ &\quad - 2u_{tt}D_t\xi^{(3)} \end{aligned}$$

Nótese que los primeros términos involucran derivadas parciales mixtas de segundo orden de u , estas son u_{xy}, u_{xt} y u_{yt} , cada una de las cuales ocurre linealmente al lado izquierdo. Esto requiere que $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ y $\xi^{(3)}$ no dependan de u . Más aún

$$\xi_y^{(1)} + \xi_x^{(2)} = 0, \quad \xi_t^{(1)} - \xi_x^{(3)} = 0, \quad \xi_t^{(2)} - \xi_y^{(3)} = 0. \quad (2.10)$$

Los coeficientes de las derivadas de segundo orden restantes de u dan las relaciones

$$\phi - 2\xi_t^{(3)} = \phi_u - 2\xi_x^{(1)} = \phi_u - 2\xi_y^{(2)} = Q$$

de aquí se sigue que

$$\xi_t^{(3)} = \xi_x^{(1)} = \xi_y^{(2)} \quad (2.11)$$

Entonces las funciones $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$ son polinomios cuadráticos de x, y, t de la forma

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= c_1 + c_4x - c_5y + c_6t + c_8(x^2 - y^2 + t^2) + 2c_9xy + 2c_{10}xt, \\ \xi^{(2)} &= c_2 + c_5x + c_4y + c_7t + 2c_8xy + c_9(-x^2 + y^2 + t^2) + 2c_{10}yt, \\ \xi^{(3)} &= c_3 + c_6x + c_7y + c_4t + 2c_8xt + 2c_9yt + c_{10}(x^2 + y^2 + t^2), \end{aligned}$$

donde c_1, \dots, c_{10} son constantes. Se encuentra que

$$\xi_{xxx}^{(1)} = \xi_{xyy}^{(2)} = -\xi_{xyy}^{(1)} = -\xi_{yyt}^{(3)} = -\xi_{ytt}^{(2)} = -\xi_{xtt}^{(1)} = -\xi_{xxt}^{(3)} = -\xi_{xxx}^{(1)},$$

por lo tanto las derivadas de tercer orden se hacen cero, un argumento similar prueba que todas las derivadas de tercer orden de $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ y $\xi^{(3)}$ son cero y la estructura de los polinomios cuadráticos se siguen inmediatamente de (2.10) y (2.11).

Luego los coeficientes de u_x^2 o $(u_y^2$ o $u_t^2)$ en (2.9) indican $\phi_{uu} = 0$, así que

$$\phi(x, y, t, u) = \beta(x, y, t)u + \alpha(x, y, t).$$

Finalmente, los coeficientes de los términos lineales en las derivadas de primer orden de u , y los términos sin u en todos ellos dan las relaciones

$$\begin{aligned} 2\beta_x &= \xi_{xx}^{(1)} + \xi_{yy}^{(1)} - \xi_{tt}^{(1)} \\ 2\beta_y &= \xi_{xx}^{(2)} + \xi_{yy}^{(2)} - \xi_{tt}^{(2)} \\ 2\beta_t &= \xi_{tt}^{(3)} - \xi_{xx}^{(3)} - \xi_{yy}^{(3)} \\ \alpha_{tt} - \alpha_{xx} - \alpha_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Así α es cualquier solución de la ecuación de onda, y

$$\beta = c_1 - c_8x - c_9y - c_{10}t.$$

Esto da la solución más general de las ecuaciones que determinan el grupo de simetrías de la ecuación de onda. De esta manera el grupo infinitesimal de simetrías de la ecuación de onda es expandido por los diez campos vectoriales

$$\begin{aligned} & \partial_x, \quad \partial_y, \quad \partial_t, \\ r_{xy} &= -y\partial_x + x\partial_y, \quad r_{xt} = t\partial_x + x\partial_t, \quad r_{yt} = t\partial_y + y\partial_t \\ & d = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t \\ i_x &= (x^2 - y^2 + t^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xt\partial_t - xu\partial_u \\ i_y &= 2xy\partial_x + (y^2 - x^2 + t^2)\partial_y + 2yt\partial_t - yu\partial_u \\ i_t &= 2xt\partial_x + 2yt\partial_y + (x^2 + y^2 + t^2)\partial_t - tu\partial_u \end{aligned}$$

la cual genera el álgebra conforme para \mathbb{R}^3 con la métrica de Lorentz dada, y campos vectoriales adicionales

$$u\partial_u, \quad v_\alpha = \alpha(x, y, t)\partial_\alpha,$$

para una solución arbitraria α de la ecuación de onda, reflejando la linealidad de la ecuación. El correspondiente grupo de transformaciones para las traslaciones y dilataciones se encuentra facilmente. De las rotaciones, debido al carácter indefinido de la métrica subyacente $dt^2 - dx^2 - dy^2$, las rotaciones que no están en el plano (x, y) son rotaciones hiperbólicas. Por ejemplo r_{xt} genera el grupo

$$(x, y, t) \mapsto (x \cosh \varepsilon + t \sinh \varepsilon, y, x \sinh \varepsilon + t \cosh \varepsilon).$$

Los grupos inversos pueden ser construidos, esto es:

$$I(x, y, t) = \left(\frac{x}{t^2 - x^2 - y^2}, \frac{y}{t^2 - x^2 - y^2}, \frac{t}{t^2 - x^2 - y^2} \right)$$

que se define siempre que (x, y, z) no esté en el cono de luz $t^2 = x^2 + y^2$. Definimos el grupo generado por i_x , se da por primera intersección, luego trasladando la dirección x , y luego reinvirtiendo:

$$\exp(\varepsilon i_x) = I \circ \exp(\varepsilon \partial_x) \circ I.$$

La fórmula general es

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x + \varepsilon(t^2 - x^2 - y^2)}{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{y}{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{t}{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)} \right)$$

el cual es definido incluso para (x, y, z) en el cono de luz (el cual es una subvariedad invariante). La transformación correspondiente de u bajo $\exp(\varepsilon i_x)$ entonces es

$$u \mapsto \sqrt{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}u.$$

se concluye que si $u = f(x, y, z)$ es una solución a la ecuación de onda, también lo es

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}} \\ &\times f \left(\frac{x - \varepsilon(t^2 - x^2 - y^2)}{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{y}{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{t}{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)} \right). \end{aligned}$$

2.6. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Los grupos de simetrías también son utilizados para encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales de orden superior.

Sea

$$\Delta(x, u^{(n)}) = \Delta(x, u, u_x, \dots, u_n) = 0, \quad (2.12)$$

la única ecuación diferencial de orden n involucrando la única variable dependiente u , donde $u_n \equiv d^n u / dx^n$. El resultado básico en este caso es que si se conoce el grupo de simetrías de un parámetro de esta ecuación, entonces se puede reducir a $n - 1$ el orden de la ecuación.

Escojan coordenadas $y = \mu(x, u)$, $w = \nu(x, u)$ (véase [5][pág. 132]) tales que el grupo transforma en un grupo de traslaciones con generador infinitesimal $v = \partial / \partial w$. Aplicando la regla de la cadena, se pueden expresar las derivadas de u con respecto a x en términos de y, w y las derivadas de w con respecto a y ,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \delta_k \left(y, w, \frac{dw}{dy}, \dots, \frac{d^k w}{dy^k} \right),$$

para algunas funciones δ_k . Antes de continuar es necesario enunciar un teorema; para la prueba véase [5][pág. 86].

Teorema 2.4. *Supóngase que G es un grupo que actúa semi-regularmente sobre M y sea $\zeta^1(x), \dots, \zeta^{m-s}(x)$ un conjunto completo de funcionales invariantes independientes definidos sobre un subconjunto $W \subset M$. Si una subvariedad $\Upsilon_\Delta = \{x : \Delta(x) = 0\}$ es G -invariante, entonces para cada solución $x_0 \in \Upsilon_\Delta$ hay una vecindad $\tilde{W} \subset W$ de x_0 , y una función equivalente G -invariante $\tilde{\Delta}(x) = \tilde{\Delta}(\zeta^1(x), \dots, \zeta^{m-s}(x))$ cuyo conjunto solución coincide con el de Δ en \tilde{W} :*

$$\Upsilon_\Delta \cap \tilde{W} = \Upsilon_{\tilde{\Delta}} \cap \tilde{W} = \{x \in \tilde{W} : \tilde{\Delta}(\zeta^1(x), \dots, \zeta^{m-s}(x)) = 0\}$$

Usando la proposición anterior al sustituir las expresiones en la ecuación diferencial se encuentra una ecuación equivalente de orden n

$$\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = \tilde{\Delta}(y, w, w_y, \dots, w_n) = 0 \quad (2.13)$$

en términos de las nuevas coordenadas y y w . Como el sistema original (2.12) es invariante bajo el grupo G también lo será el sistema transformado. En términos de las coordenadas (y, w) , el generador infinitesimal tiene una prolongación trivial

$$pr^{(n)}v = v = \frac{\partial}{\partial w}.$$

El criterio infinitesimal implica que

$$pr^{(n)}v(\tilde{\Delta}) = \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial w} = 0 \quad \text{siempre que} \quad \tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0$$

Esto significa que existe una ecuación equivalente

$$\hat{\Delta} \left(y, \frac{dw}{dy}, \dots, \frac{d^n w}{dy^n} \right) = 0$$

la cual es independiente de w , es decir $\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0$ si y solo si $\hat{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0$. Por último para reducir el orden hágase $z = w_y$. Entonces se tiene una ecuación de orden $n - 1$ para z ,

$$\hat{\Delta}(y, z, \dots, d^{n-1}z/dy^{n-1}) = \hat{\Delta}(y, z^{n-1}) = 0 \quad (2.14)$$

cuya solución proporciona una solución general al sistema original. Comúnmente si $z = h(y)$ es una solución de (2.14), entonces $w = \int h(y)dy + c$ es una solución de (2.13), entonces, reemplazando w y y por sus expresiones en términos de x y u , implícitamente define una solución de la ecuación original.

Capítulo 3

Relatividad General

En este capítulo damos una breve revisión de la teoría de la relatividad general, exponiendo algunos de los conceptos más importantes. Empezamos partiendo de principios fundamentales, la deducción de las ecuaciones del campo de Einstein hasta llegar a los modelos de Schwarzschild y Robertson-Walker.

3.1. Fundamentos del espacio-tiempo

Partamos de los conceptos de espacio y tiempo en el marco de la teoría Newtoniana. Para Newton el espacio consistía solamente del espacio tridimensional euclidiano, repetido para todo tiempo. De manera matemática esto es equivalente a considerar $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$. El espacio euclidiano tiene su métrica usual y el tiempo es medido por un reloj universal. Todos los observadores con velocidades diferentes son igualmente válidos, esta forma de relatividad fue construida dentro de la mecánica Galileana. Esto implica que no hay una forma estándar universal para el reposo, y diferentes observadores deberían tener diferentes definiciones de si dos eventos ocurriendo en diferentes tiempos sucedieron en el mismo lugar. Pero todos los observadores deberían coincidir en la simultaneidad, de si dos eventos suceden o no en el mismo lapso de tiempo. De esta manera la separación en el tiempo entre dos eventos significa el tiempo transcurrido entre dos rebanadas euclidianas que contienen los dos eventos. Esto es independiente de la localización espacial de los eventos, así en gravedad Newtoniana hay una noción universal del tiempo. Similarmente la separación en el espacio entre dos eventos significa la distancia euclidiana entre ellos. Si los eventos son simultáneos, ocurriendo en la misma rebanada euclidiana, entonces es simple calcular usando la métrica de aquella rebanada, y todos los observadores deben coincidir en eso. Si los eventos suceden en diferentes tiempos, cada observador toma la localización de los eventos en sus respectivas rebanadas espaciales y calculan la distancia euclidiana entre ellos. La localización debería ser diferente para diferentes observadores, pero la distancia entre ellos debe ser la misma para todos los observadores.

Usando las transformaciones de Galileo¹ en las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo se encuentra que estas dejan de ser invariantes. Lo cual llevó

¹Una transformación de Galileo es un cambio de coordenadas y velocidades que deja invariante las ecuaciones de Newton.

a que Lorentz encontrara un nuevo tipo de transformaciones que las dejan invariantes. Estas transformaciones solo eran una curiosidad matemática que mantenían la invarianza. Fue Einstein quien les encontró un significado incluyéndolas en su teoría de la relatividad especial, la cual se desarrolla a partir de los siguientes principios: (se recomienda ver [8], [9], [10])

1) No hay experimento que pueda medir la velocidad absoluta de un observador; los resultados de cualquier experimento hecho por un observador no dependen de la velocidad relativa de otro observador que no este involucrado en el experimento.

2) La velocidad de la luz para cualquier observador que este en movimiento no acelerado es $c = 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$, suele normalizarse la velocidad de la luz y considerarla como $c = 1$.

En su teoría de la relatividad especial la coordenada tiempo juega un papel importante pues deja de haber tiempo absoluto, y ahora el tiempo para cada observador esta sujeto a una transformación de Lorentz. Así es necesario que las coordenadas de cualquier observador pasen de tres a cuatro. Este tipo de enfoque además da nuevos aspectos geométricos pues la forma en como se miden distancias entre eventos requiere que la métrica clásica cambie, introduciendo la métrica de Minkowski sobre el denominado espacio-tiempo que será el conjunto de eventos. La forma matemática del espacio-tiempo tiene las siguientes características:

a) El **espacio-tiempo** (todos los eventos) es una variedad semi-riemanniana de cuatro dimensiones cuya métrica es la de Minkowski.

b) La **métrica** es medida por reglas y relojes. La distancia a lo largo de una regla que une dos puntos es $|dx \cdot dx|^{\frac{1}{2}}$ y el tiempo medido por un reloj que experimenta dos eventos ligeramente separados en el tiempo es $|-dx^1 \cdot dx^1|^{\frac{1}{2}}$.

En las expresiones de la relatividad especial no se considera la intervención de fuerzas, solo se tiene en cuenta el movimiento de las partículas sin interacción con su medio. Entonces bajo consideraciones más generales el espacio-tiempo podría ser curvado y la métrica ya no sería la de Minkowski.

Regresemos un poco a lo clásico y recordemos que Newton dio una ley para la fuerza que experimentan los cuerpos $F = ma$, el comportamiento de los objetos que experimentan fuerzas gravitacionales esta descrito por $F = -m\nabla\phi$ donde ϕ es el potencial gravitacional en un punto del campo gravitatorio. Además de esto, Newton encontro otra ley para poder determinar ϕ , esta ley relaciona el potencial gravitacional ϕ con la densidad de masa del cuerpo ρ , mediante la expresión $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, donde G es la constante de gravitación universal. Estas dos leyes son de suma importancia que deberían de poder encontrarse sus análogos desde el punto de vista de un espacio-tiempo curvado.

Ya que se sabe que la aceleración de una partícula en un campo gravitacional es independiente de su masa, se puede pensar en un marco inercial² cayendo

²Su forma matemática se describe en la sección 1.6. Este marco igual debe tener la propiedad física de que un observador aquí considerará una serie de acuerdos mediante los cuales

libremente³ en el cual las partículas cercanas no tienen aceleración. Este se suele identificar como un marco localmente inercial. Debido a que las partículas que caen libremente en este marco no tienen aceleración, sus trayectorias son a largo de líneas rectas, por lo menos localmente. Pero las líneas rectas en un marco local inercial son la definición de líneas rectas sobre toda la variedad curvada.

Por lo tanto el primer postulado que Einstein propuso acerca de como las partículas son afectadas por la métrica, se puede enunciar de la siguiente manera (se recomienda ver [8], [9], [10]):

3) **Principio de equivalencia débil:** Las partículas que caen libremente se mueven en el espacio-tiempo sobre geodésicas tipo tiempo⁴

El principio de equivalencia débil se refiere solo a partículas. Pero lo que interesa es como los fluidos son afectados por métricas que no sean planas⁵. Para ello se requiere que el principio de equivalencia débil se generalice. Esto se hace de la siguiente manera:

Para tratar el principio de equivalencia en su forma completa, debe entenderse que lo que Einstein argumentó en el principio de equivalencia débil es para el caso ideal donde el campo gravitacional es homogéneo y estático pero en la realidad los campos no son de ese tipo, entonces el campo gravitacional que bien puede identificarse con la métrica g puede depender de x o t , entonces en un campo donde ocurra esa dependencia los observadores si podrían detectar cuando están sometidos a un campo gravitacional, pues las fuerzas inerciales no se eliminan de manera exacta con las fuerzas gravitacionales para el sistema cayendo libremente. Pero aún se puede esperar que el campo sea débil si se restringe a una pequeña región del espacio-tiempo de tal manera que los cambios del campo en esta región sean muy pequeños. Entonces el principio de equivalencia se puede enunciar de la siguiente manera

4) **Principio de Equivalencia.** Sobre cada punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional arbitrario es posible escoger un marco inercial local, tal que en una región suficientemente pequeña del punto escogido las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas no acelerado en ausencia de gravedad.

El principio de equivalencia se enuncia de una manera alternativa, en el conocido **Principio de Covarianza General**. Dice que cualquier ecuación física se mantiene sin cambio en un campo gravitacional, si se cumple lo siguiente:

(A) Si en ausencia de gravedad se reduce a la forma dada desde la relatividad especial donde el tensor métrico que se tiene es el de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ y la conexión afín es cero $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$.

(B) La ecuación es covariante, lo cual significa que preserva su forma bajo una transformación de coordenadas $x \rightarrow x'$.

El principio general de covarianza contiene al principio de equivalencia, pero

medirá magnitudes físicas.

³Caída libre significa que las partículas no son afectadas por otras fuerzas, como podrían ser campos eléctricos, campos magnéticos, etc.

⁴Cuando decimos que una curva es tipo tiempo, significa que su vector velocidad es tipo tiempo en cualquier punto donde este definida.

⁵Una métrica se dirá que es plana cuando el tensor de Riemann es nulo.

su aporte principal es debido a (B), pues lo que dice es que una ecuación ocurre en todo sistema coordinado si está ocurre en algún sistema coordinado. Pero en cualquier punto hay una clase de sistemas coordinados, los sistemas localmente inerciales, en los cuales los efectos de la gravitación no se sienten. La condición (A) dice que la ecuación ocurre en estos sistemas, y de aquí que ocurra en cualquier otro. El principio de covarianza general solo puede ser aplicado en una escala que es pequeña comparada con las distancias del espacio-tiempo típicas para el campo gravitacional, para esto solo en esta pequeña escala el principio de equivalencia permite la construcción de un sistema coordinado en el cual los efectos de la gravedad son nulos.

¿Qué sucede realmente con una partícula? se debe recordar que la gravedad desde el punto de vista clásico es una fuerza, así que su energía cinética y momento de una partícula no son necesariamente conservados bajo su acción. En el nuevo punto de vista, significa que no se puede esperar encontrar un sistema coordinado en el cual las componentes del momento p sean constantes a lo largo de la trayectoria de la partícula.

La ecuación geodésica del momento se puede escribir igualando a cero la ecuación (1.11) y aplicándola a las componentes $p_i = g_{ik}p^k$ que corresponde a las componentes del covector asociado al momento $p = m(u^i)(u^i$ -componentes del vector 4-velocidad). Entonces se tiene:

$$m \frac{dp_j}{d\tau} - \Gamma_{ji}^k p^i p_k = 0 \quad (3.1)$$

De donde se pueden escoger las coordenadas de tal manera que τ corresponda al tiempo propio⁶ de la partícula.

Del lado derecho de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k p^i p_k &= \frac{1}{2} g^{kl} (g_{lj,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) p^i p_k \\ &= \frac{1}{2} (g_{lj,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) g^{kl} p_k p^i \\ &= \frac{1}{2} (g_{lj,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) p^l p^i. \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores $(, q) = \frac{\partial}{\partial x^q}$ para simplificar la notación.

El producto $p^l p^i$ es simétrico sobre l e i , mientras que el primer y tercer término dentro de el paréntesis son antisimétricos sobre l e i . Por lo tanto se cancelan, dejando solo el término de enmedio

$$\Gamma_{ji}^k p^i p_k = \frac{1}{2} g_{li,j} p^l p^i.$$

De esta manera la ecuación geodésica puede escribirse de manera completa como

$$m \frac{dp_j}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{li,j} p^l p^i \quad (3.2)$$

El resultado anterior es de suma importancia pues nos dice que si todas las componentes g_{il} son independientes de x^j para algún índice fijo j , entonces p_j es constante a lo largo de cualquier trayectoria de la partícula. La ecuación (3.2) es análogo a la segunda Ley de Newton.

⁶El tiempo propio es el que miden todos los observadores, cada uno en reposo con respecto a los otros, sobre un determinado suceso que también esta ocurriendo con respecto a ellos.

En los siguientes dos apartados se abordarán conceptos importantes que llevan a encontrar la ecuación análoga que describe la fuente del campo gravitacional.

3.2. Ecuaciones del campo de Einstein

Ahora se deducirán las ecuaciones del campo de Einstein. Consideremos el espacio-tiempo como una variedad semi-riemanniana M , con métrica (g_{ik}) de índice constante (visto de otra forma signatura $(- + + +)$ constante con la métrica diagonalizada). De acuerdo a los principios de la relatividad general en cada punto $x_0 \in M$ se puede encontrar una vecindad tal que la métrica puede ser reducida mediante un cambio de coordenada a la métrica de Minkowski (a lo que es lo mismo el espacio-tiempo es localmente plano),

$$(\eta_{ik}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el determinante de esta métrica es negativo $\eta = \det(\eta_{ik}) = -1 < 0$, entonces si (g_{ij}) es la métrica global se tiene que el determinante es negativo $g < 0$ y entonces $|g| = -g > 0$.

Con lo cual la forma de volumen sobre el espacio-tiempo se escribe como $d\mu = \sqrt{-g}d^4x$, sea Γ_{jk}^i la conexión simétrica compatible con la métrica, y sea R_{jkl}^i el tensor de Riemann correspondiente a esta conexión. Recuérdese que el tensor de Ricci $R_{ik} = R_{iqk}^q = g^{lm}R_{limk}$, entonces se escribe como

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l$$

y el escalar de curvatura R , es igual a

$$R = g^{ik}R_{ik}.$$

De acuerdo al principio general de la relatividad general, el campo gravitacional en el espacio-tiempo M es la métrica (g_{ij}) . Las ecuaciones del campo de Einstein se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange bajo la variación de la acción de este campo. La acción que se necesita fue introducida por Hilbert véase [11][pág. 136], [3][pág. 549],

$$I = \int (R + L_m)\sqrt{-g}d^4x.$$

Donde $L_m = L_m(f^j, f_{x^i}^k, x^l)$ es una función lagrangiana que es función de campos físicos, sus derivadas y de las coordenadas.

La integral es tomada sobre el dominio D limitada por dos hipersuperficies tipo espacio, estas hipersuperficies son análogas a las superficies de nivel del tiempo para $t = t_1, t_2$ en el espacio de Minkowski.

Se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional

$$I = \int_D (R + L_m)\sqrt{|g|}d^4x,$$

La variación de esta acción se da a través de la variación de las componentes de la métrica (g_{ij}) .

Teorema 3.1. *La siguiente igualdad se cumple*

$$\frac{\delta I}{\delta g^{ij}} = \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \sqrt{|g|} + \frac{\delta(L_m \sqrt{|g|})}{\delta g^{ij}},$$

para la cual

$$\delta I = \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \delta g^{ij} \sqrt{|g|} d^n x + \delta \int \sqrt{|g|} L_m d^n x.$$

Demostración. Calculemos la variación de la integral $\int R \sqrt{|g|} d^n x$,

$$\begin{aligned} \delta \int R \sqrt{|g|} d^n x &= \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{|g|} d^n x \\ &= \int (R_{ik} \sqrt{|g|} \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta(\sqrt{|g|}) + g^{ik} \sqrt{|g|} \delta R_{ik}) d^n x \end{aligned}$$

Debe de calcularse $\delta(\sqrt{|g|})$. Sea c^{ik} el cofactor del elemento g_{ik} en la matriz (g_{lm}) . Para encontrar el determinante de esta matriz, se hace la expansión por menores sobre la k -ésima columna: $g = \sum_i g_{ik} c^{ik}$. Es fácil ver que $\delta g = (\delta g_{ik}) c^{ik}$ con suma ahora sobre i y k , ya que la diferencial δg_{ik} de cada componente g_{ik} debe ser multiplicada por los coeficientes de está componente en la expresión para g , es decir por c^{ik} . Ya que $g^{ik} = \frac{c^{ik}}{g}$, entonces se tiene $c^{ik} = g g^{ik}$, lo cual implica $\delta g = g g^{ik} \delta g_{ik}$. Por otro lado se tiene que $g^{ik} g_{ik} = \delta_i^i = n = \dim M$, por lo tanto $(\delta g^{ik}) g_{ik} + g^{ik} (\delta g_{ik}) = 0$, lo cual implica la igualdad $\delta g = -g g_{ik} \delta g^{ik}$. Además por definición se tiene que $|g| = -g$. Entonces se tiene

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g \cdot g_{ik} \delta g^{ik} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik}$$

Haciendo un cálculo similar para $|g| = g$ se llega a la fórmula general

$$\delta(\sqrt{|g|}) = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{ik} \delta g^{ik}$$

Finalmente juntando los resultados anteriores se obtiene

$$\delta \int R \sqrt{|g|} d^n x = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{|g|} d^n x + \int g^{ik} (\delta R_{ik}) \sqrt{|g|} d^n x.$$

Por último necesitamos saber quién es δR_{ik} . Por **Teorema A1** (Véase Apéndice A) la variación $\delta \Gamma_{jk}^i$ forma un tensor, aunque los símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i no lo sean.

Para calcular δR_{ik} , fijemos un punto arbitrario e introdúzcase un sistema coordenado geodésico cerca del punto. Esto significa que $\Gamma_{ij}^k = 0$ en este punto, ya que $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g^{ik}) = 0$ en el punto seleccionado. Se tiene

$$\begin{aligned} g^{ik} \delta R_{ik} &= \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \right) g^{ik} \\ &= g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^l) - \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \Gamma_{il}^l) \right) = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^l) - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^l} (g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k) = \frac{\partial W^l}{\partial x^l}, \\ W^l &= g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k. \end{aligned}$$

Ya que $\delta\Gamma_{jk}^i$ es un tensor, las cantidades W^l son las componentes de un tensor, entonces su divergencia $\frac{\partial W^l}{\partial x^l}$ en el sistema de coordenadas escogido es invariante bajo el cambio a cualquier otro sistema de coordenadas que no necesariamente sea plano. Entonces se puede usar la definición invariante de divergencia $divT = D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} T^i$, ya que $\frac{\partial}{\partial x^i}(T^i)$ no es tensor relativo a los cambios arbitrarios de coordenadas. Se necesita la fórmula explícita para la divergencia en un sistema de coordenadas arbitrario, relativo a una conexión simétrica compatible con la métrica. Véase apéndice A

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^l \frac{\partial}{\partial x^l} (\log \sqrt{|g|}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{|g|} T^l).$$

Entonces se tiene $g^{ik} \delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{|g|} W^l)$ por lo cual la siguiente integral $\int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{|g|} d^n x$ se transforma a $\int \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{|g|}) d^n x$. Usando el teorema de Stokes esta integral es igual a la integral de $|g| W^l$ sobre la frontera ∂D de el dominio. Ya que la variación del campo se anula sobre la frontera ∂D , su integral también es igual a cero. De esta manera se obtiene

$$\delta I_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{|g|} d^n x + \delta \int L_m \sqrt{|g|} d^n x.$$

□

Como $\frac{\delta I}{\delta g^{ij}} = 0$ entonces

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \sqrt{|g|} + \frac{\delta(L_m \sqrt{|g|})}{\delta g^{ik}} = 0 \quad (3.3)$$

Dividiendo entre $\sqrt{|g|}$ y redefiniendo el término a la derecha de la ecuación anterior como $-\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(L_m \sqrt{|g|})}{\delta g^{ik}} = 8\pi T_{ik}$ donde T_{ik} son las componentes de un tensor simétrico conocido como tensor de energía momento. Entonces la ecuación (3.3) se puede reescribir de la siguiente manera

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = 8\pi T_{ik} \quad (3.4)$$

Notemos que la ecuación anterior para el espacio-tiempo representa un conjunto de 16 ecuaciones las cuales son conocidas como ecuaciones del campo de Einstein⁷ (aveces las abreviaremos como E.C.E.). Después de publicar las ecuaciones de campo, Einstein agregó del lado izquierdo el término λg_{ik} donde λ es la constante cosmológica, que describe la aceleración del universo.

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} + \lambda g_{ik} = 8\pi T_{ik} \quad (3.5)$$

La ecuación anterior es equivalente a la ecuación $R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} + \lambda g^{ik} = 8\pi T^{ik}$.

⁷La ecuación (3.4) fue deducida de manera independiente por el físico Albert Einstein y por el matemático David Hilbert. Publicadas por primera vez en 1915 por Einstein, en una forma equivalente a la que se da en este trabajo.

Mediante la doble contracción⁸ de la segunda identidad de Bianchi se puede encontrar que

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} + \lambda g^{ik}) = 0$$

Lo cual necesariamente implica que

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

La ecuación anterior tiene un significado importante en física, debido a que el término T^{ik} tiene información acerca de cantidades físicas medibles, de esta ecuación suelen encontrarse leyes de conservación. En la siguiente sección veremos como construir el tensor de energía-esfuerzo partiendo del teorema de Noether.

3.3. Tensor de energía momento

Las leyes de conservación para cualquier sistema físico se obtienen de las simetrías del sistema. Por ejemplo si el Lagrangiano L de un problema variacional invariante no depende explícitamente del tiempo, entonces la energía del sistema es conservada. En este caso el Lagrangiano es invariante de alguna variable espacial x^i , el momento correspondiente a la coordenada es conservado:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0.$$

La relación entre las simetrías y las leyes de conservación se puede ver en el teorema de Noether⁹, el cual se enuncia a continuación:

Teorema 3.2. Noether Sea

$$x \rightarrow \tilde{x}(x, \tau), \quad f^\alpha \rightarrow \tilde{f}^\alpha(x, f^\alpha, \tau) \quad (3.6)$$

una transformación de coordenadas, de las coordenadas x^i y las variables del campo f^α especificada por funciones suaves de un número de parámetros finito τ_1, \dots, τ_s . Supóngase que la variación de la acción $\int_D L d^n x$ relativa a esta transformación es igual a cero para cualquier dominio D . Entonces existen s leyes de conservación (invariantes dinámicas), es decir existen s funcionales de las variables del campo las cuales no cambian con el tiempo y hay una correspondencia uno a uno con las deformaciones relacionadas a los parámetros τ_1, \dots, τ_s .

Consideremos un caso importante donde el lagrangiano no depende de las variables espaciales. Supongamos que los campos f^α son definidos en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ con coordenadas x^1, x^2, x^3, x^4 y que el lagrangiano no depende de las variables x^i , $1 \leq i \leq 4$ entonces la funcional tiene la forma

$$I_m = \int L_m(f^\alpha, f_{x^k}^\beta) d^4 x \quad (3.7)$$

⁸Para llevar a cabo la contracción de dos tensores se iguala uno de los índices superiores de un tensor con uno de los índices inferiores del otro tensor, por ejemplo del tensor métrico con la segunda identidad de Bianchi, $g^{ik}[R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k}] = 0$, donde ; denota la derivada covariante.

⁹ El teorema se denomina así por la matemática alemana Emmy Noether, que lo formuló en 1915.

Claramente aquí el elemento de volumen $\sqrt{|\eta|}d^4x = d^4x$ (Luego se podrá generalizar fácilmente mediante el principio de covarianza). Las simetrías continuas forman el grupo de Poincaré¹⁰,

$$x \rightarrow Ax + b, \quad A \in O(1,3), b \in \mathbb{R}^{1,3},$$

el cual preserva la métrica de Minkowski

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = -(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2.$$

Las funciones extremales que describen el sistema de movimiento, satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L_m}{\partial f^\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L_m}{\partial f_{x^i}^\alpha} \right) = 0$$

El funcional I_m es invariante bajo transiciones a los otros marcos de referencia: $x \rightarrow x' = Ax + b$. Bajo tal transición un escalar f^α va en $\tilde{f}^\alpha(x') = f^\alpha(x)$, y si los f^α forman un vector f^i , entonces las transformaciones de simetrías tienen la forma

$$x^i \rightarrow x' = a_j^i x^j + b^i, \quad f^i(x) \rightarrow \tilde{f}^i(x') = a_j^i f^j(x), \quad A = (a_j^i) \in O(1,3).$$

Las leyes de movimiento especificadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional I_m son las mismas en todos los puntos del espacio. Este hecho es básico para la derivación de las leyes de conservación.

Se derivarán las leyes de conservación a las traslaciones correspondientes

$$x \rightarrow x' = x + \xi, \quad f^\alpha(x) \rightarrow \tilde{f}^\alpha(x') = f^\alpha(x), \quad d^4x' = d^4x.$$

Supóngase que se tiene una solución f^α a las ecuaciones de Euler-Lagrange en $\mathbb{R}^{1,3}$. Para un dominio arbitrario $U \subset \mathbb{R}^{1,3}$, considérense variaciones de la acción generadas por las traslaciones

$$x \rightarrow x' = x + s\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^{1,3}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

La variación es

$$\delta I_m = \int_{U+s\xi} L_m(\tilde{f}^\alpha(x'), \tilde{f}_{x^i}^\beta(x')) d^4x' - \int_U L_m(f^\alpha(x), f_{x^i}^\beta(x)) d^4x \equiv 0,$$

donde $U + s\xi$ es el dominio de U desplazado por $s\xi$. Ahora se escribirá de manera explícita la igualdad $\delta I_m = 0$, con esta variación dada para la solución f^α a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\delta I_m = s \int_U \frac{\partial L_m}{\partial x^i} \xi^i d^4x + s \int_U \left(\frac{\partial L_m}{\partial f^\alpha} \delta_i f^\alpha + \frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} \delta_i f_{x^k}^\alpha \right) \xi^i d^4x + o(s) \equiv 0. \quad (3.8)$$

El primer término es debido al cambio del dominio U , y por $\frac{\partial L_m}{\partial x^i}$ se dice que la derivada del Lagrangiano toma la solución dada $L_m = L_m(f^\alpha(x), f_{x^{kl}}^\beta(x))$.

¹⁰El grupo de Poincaré es el grupo de Lie formado por el conjunto de transformaciones de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski.

El segundo término está relacionado al cambio de la forma de las funciones f^α . Si se tiene una familia de funciones $\tilde{f}^\alpha(\tilde{x}) = g^\alpha(s, x + s\xi) \equiv f^\alpha(x)$ parametrizada por s , y por $\xi^i \delta_i f^\alpha$ se quiere decir la derivada respecto al primer argumento s con $s = 0$. En particular para una base de vectores $\xi = e_i$, donde $\xi^j = \delta_i^j$, se tiene

$$\left. \frac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial s} \right|_{s=0} = \delta_i f^\alpha + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \equiv 0.$$

Entonces de lo anterior se concluye fácilmente que

$$\delta_i f^\alpha = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}, \quad \delta_i f_{x^k}^\alpha = -\frac{\partial f_{x^k}^\alpha}{\partial x^i}$$

Ahora sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (3.5)

$$\delta I_m = s \int_U \left(\frac{\partial L_m}{\partial x^i} - \frac{\partial L_m}{\partial f^\alpha} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} \frac{\partial f_{x^k}^\alpha}{\partial x^i} \right) \xi^i d^4x + o(s) \equiv 0.$$

De manera sucesiva se sustituyen las ecuaciones de Euler-Lagrange y la igualdad $\frac{\partial}{\partial x^i} (f_{x^k}^\alpha) = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (f_{x^i}^\alpha)$ dentro del integrando

$$\begin{aligned} \delta I_m &= s \int_U \left(\frac{\partial L_m}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} \right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} \frac{\partial (f_{x^k}^\alpha)}{\partial x^i} \right) \xi^i d^4x + o(s) \\ &= s \int_U \left(\frac{\partial L_m}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} \right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^k} (f_{x^i}^\alpha) \right) \xi^i d^4x + o(s) \\ &= s \int_U \left(\frac{\partial L_m}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} f_{x^i}^\alpha \right) \right) \xi^i d^4x + o(s) \equiv 0 \end{aligned}$$

Ya que el dominio U y el vector ξ son arbitrarios, se concluye que para cualquier solución a las ecuaciones de Euler-Lagrange la siguiente igualdad se satisface:

$$\frac{\partial L_m}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial L_m}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} f_{x^i}^\alpha \right).$$

Esto se puede reescribir como

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_i^k L_m - f_{x^i}^\alpha \frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} \right) = 0. \quad (3.9)$$

El tensor

$$T_i^k = f_{x^i}^\alpha \frac{\partial L_m}{\partial f_{x^k}^\alpha} - \delta_i^k L_m \quad (3.10)$$

es llamado tensor de energía momento¹¹ del sistema lagrangiano $L_m(f, f_{x^k})$. Este también se puede escribir como:

$$T_{ik} = g_{kl} T_j^l, \quad T^{ik} = g^{kl} T_l^i.$$

La ecuación (3.9) indica que la divergencia del tensor T_i^k es cero en cualquier parte:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (3.11)$$

¹¹El tensor de energía momento de la ecuación (3.10) no siempre es simétrico pero siempre puede definirse una transformación $T_i^k \rightarrow T_i^k + \frac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^l}$ a partir de un tensor antisimétrico $\psi_i^{kl} = -\psi_i^{lk}$ que lo vuelve simétrico, véase [3][pág. 540].

Nótese que la fórmula derivada anteriormente es válida para cualquier traslación invariante del lagrangiano L_m en $\mathbb{R}^{1,3}$. Mediante el principio de covarianza es fácil ver que la ecuación (3.11) es válida en cualquier sistema coordenado, entonces la forma general de escribirla es mediante la derivada covariante

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} T^{ik} = 0 \quad (3.12)$$

En el caso cuando se tiene $n = 1$, $x^1 = t$, y $f^\alpha = y^\alpha$ hay coordenadas locales en alguna variedad M^k , entonces lo que queda es un problema variacional unidimensional. Entonces el tensor de energía momento tiene una sola componente

$$T = T_1^1 = \dot{y}^\alpha \frac{\partial L_m}{\partial \dot{y}^\alpha} - L_m = E,$$

Donde E debe denotar la energía del sistema, la relación (3.9) implica que

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Fluido perfecto

En muchas situaciones en cosmología la fuente de campo gravitacional puede ser tomada como un **fluido perfecto**. En general un fluido es considerado como un continuo, el cual esta conformado por una colección de partículas tan numerosas que la dinámica de las partículas individuales no se puede seguir, lo cual permite solo una descripción de la colección en términos de cantidades promedio; número de partículas por unidad de volumen, densidad de energía densidad de momento, presión, temperatura, etc. Sin embargo estas propiedades podrían variar de punto a punto, por lo tanto se considerará que se pueden tomar regiones lo suficientemente pequeñas de tal manera que las partículas contenidas en la región tengan las mismas cantidades físicas, tal región es conocida como elemento de volumen. De esta manera en un continuo cada punto pertenece a un elemento de volumen el cual tiene sus valores de densidad, temperatura, etc. Así un continuo está definido por varios campos, que tienen distintos valores en cada punto en el tiempo.

Bajo la definición anterior se tiene que un cuerpo rígido también es un continuo. La clase de continuos que nos interesan son los fluidos en especial el **fluido perfecto** el cual se puede definir como aquel en el cual las fuerzas de corte son cero, y la única fuerza entre vecindades de elementos de fluido es la presión.

Consideremos un fluido tal que en cada punto del espacio-tiempo se tiene un sistema coordenado donde el vector velocidad de cada elemento que lo constituye este dado por $u = \frac{\partial}{\partial t}$ (la velocidad de cada elemento de volumen es $v = 0$), este sistema suele llamarse como sistema coordenado momentáneamente en reposo el cual abreviaremos como SCMR¹² en este sistema cada partícula tiene energía m , y el número de partículas por unidad de volumen es n . Por lo tanto la energía por unidad de volumen es mn . Esto se denota por ρ

$$\rho = \text{densidad de energía en SCMR}$$

¹²Este sistema de referencia también se le suele llamar sistema de referencia comóvil o sistema sincrónico, esto es debido a que el sistema de referencia en realidad se mueve junto con la partícula pero con respecto a la partícula está siempre esta en reposo.

Así $\rho = mn$ es un escalar como n y m .

Si el fluido se considera de tal manera que cada una de sus partículas tiene velocidad v , entonces el número de densidad es $n/\sqrt{1-v^2}$ y ahora la energía de cada partícula es $m/\sqrt{1-v^2}$. Por lo tanto la densidad de energía es

$$\frac{\rho}{1-v^2}$$

la cual es la densidad de energía en un sistema de referencia en el cual las partículas tienen velocidad v

La transformación de un sistema coordinado a otro involucra dos factores de $(1-v^2)^{1/2} = \partial x^1 / \partial y^1$ debido a que energía y volumen se transforman, donde $\{x\}$ representa las coordenadas del fluido a velocidad v y $\{y\}$ las coordenadas donde $v = 0(\partial/\partial t)$. Esto indica que la densidad de energía no se puede representar como las componentes de un vector. Para definir la energía se requiere de una 1-forma, para poder elegir la primera componente del vector velocidad de energía y momento. Para definir una densidad también se requiere una 1-forma ya que es un flujo cruzando una superficie a tiempo constante. Similarmente, un flujo de energía también requiere dos 1-formas, una para definir energía y otra para definir la superficie. También se puede hablar de densidad de momento, de nuevo definir 1-formas como componentes del momento, y otra que defina la densidad. Por analogía también hay un flujo de momento, la velocidad a la cual el momento cruza alguna superficie. Todos estos casos requieren dos 1-formas. Así se define T , es un tensor que tiene todos estos números en sus coeficientes.

Las componentes se pueden definir como

Definición 3.1.

$$T(dx^i, dx^k) = T^{ik} = \text{flujo de momento } i \text{ cruzando una superficie a } x^k \text{ constante}$$

Bajo la definición anterior T^{11} es definido como el flujo de momento (energía) 1 cruzando una superficie $t = cte$. Que es justo la densidad de energía

$$T^{11} = \text{densidad de energía}$$

Similarmente T^{1i} es el flujo de energía cruzando una superficie $x^i = cte$

$$T^{1i} = \text{flujo de energía cruzando la superficie } x^i$$

Entonces T^{i1} es el flujo de momento i cruzando una superficie $t = cte$, la densidad de momento i

$$T^{i1} = \text{densidad de momento } i$$

Finalmente, T^{ij} es el flujo j del momento i

$$T^{ij} = \text{flujo de momento } i \text{ cruzando la superficie } j$$

La Definición 3.1 es general. Consideremos el caso especial en el SCMR, donde no hay momento espacial en las partículas. Entonces en el SCMR se tiene

1) T^{11} es la densidad de energía ρ

2) T^{1i} es el flujo de energía aunque no hay movimiento en este sistema coordinado podría ser transmitida por la conducción de calor. Así T^{1i} es interpretada como la conducción térmica en el sistema

3) T^{i1} es la densidad de momento. Nuevamente las partículas por si mismas no tienen momento neto en el sistema considerado, pero si hay transferencia de calor, entonces la energía en movimiento debe tener un momento asociado, debe coincidir $T^{i1} = T^{1i}$.

4) T^{ij} el flujo de momento. Este término será llamado el esfuerzo. Este corresponde a aquellas fuerzas que se ejercen entre la interfase que hay entre elementos de volumen consecutivos. La viscosidad es un ejemplo de este tipo de fuerzas.

Es importante mencionar que en su sistema coordinado en reposo el tensor T es simétrico, es decir $T^{ij} = T^{ji}$ luego mediante el principio de covarianza es simétrico en cualquier sistema coordinado.

Es de especial interés en este trabajo tratar con un tensor de esfuerzo especial, el que modela un fluido perfecto, este tiene las siguientes propiedades (1) se mueve a través del espacio-tiempo con un vector cuatro velocidad u el cual puede variar de evento a evento, y (2) exhibe una densidad de masa-energía ρ y una presión isotrópica p en el marco en reposo de cada elemento del fluido. Presión anisotrópica, viscosidad, fuerzas cortantes, o imperfecciones en el fluido, deben de estar ausentes además de no tener conducción de calor. Entonces de acuerdo a la definición de T^{ij} en este sistema debe tener la siguiente forma

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Mediante los coeficientes de la métrica de Minkowski (η^{ij}) es fácil ver que este tensor satisface

$$T^{ij} = (\rho + p)u^i u^j + p\eta^{ij}$$

Mediante el principio de equivalencia se debe concluir que la ecuación es válida para cualquier sistema coordinado donde la métrica no es necesariamente la de Minkowski, es decir

$$T^{ij} = (\rho + p)u^i u^j + pg^{ij} \quad (3.13)$$

Debido a que T representa la energía y momento contenidos en el fluido, debe tener de alguna forma la información acerca de la ley de conservación de energía y momento. Considérese un elemento de fluido de forma cúbica con aristas de longitud l , consideremos una sección constante digamos $x^4 = cte$ de tal forma que lo que nos queda es una cara cuadrada de lados l , ver figura 3.1, paralela al plano $x^2 - x^3$. La energía que fluye en esta cara puede cruzar los 4 lados. La velocidad de flujo en la dirección x^2 es la que esta cruzando el lado (4) $l^2 T^{12}|_{x^2=0}$ menos la que cruza (2) $-l^2 T^{12}|_{x^2=l}$, el signo menos es debido a que T^{12} representa el flujo de energía en la dirección positiva x^2 , la cual sale del elemento de volumen por (2). De manera similar la energía fluyendo en la dirección x^3 es $l^2 T^{13}|_{x^3=0} - l^2 T^{13}|_{x^3=l}$. La suma de estas velocidades debe dar la velocidad de cambio de energía dentro del elemento de volumen. Es decir

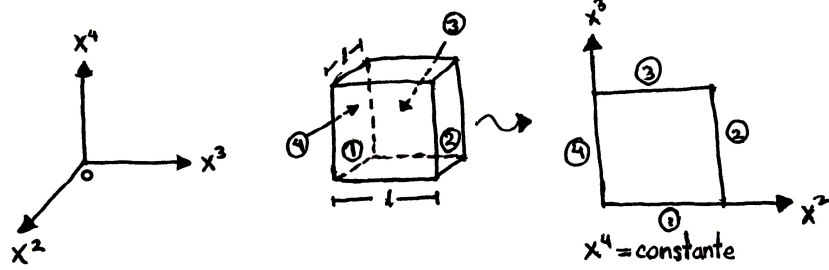


Figura 3.1: Elemento de volumen. Del lado derecho de la figura se muestra una sección a $x^4 = \text{constante}$.

$$\frac{\partial l^3 T^{11}}{\partial x^1} = l^2 \{ T^{12}|_{x^2=0} - T^{12}|_{x^2=l} + T^{13}|_{x^3=0} - T^{13}|_{x^3=l} + T^{14}|_{x^4=0} - T^{14}|_{x^4=l} \}$$

Dividiendo entre l^3 y tomando el límite cuando $l \rightarrow 0$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x^1} T^{11} = -\frac{\partial}{\partial x^2} T^{12} - \frac{\partial}{\partial x^3} T^{13} - \frac{\partial}{\partial x^4} T^{14} \quad (3.14)$$

donde se está usando la definición de derivada de la siguiente manera

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{T^{1\alpha}|_{x^\alpha=0} - T^{1\alpha}|_{x^\alpha=l}}{l} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{1\alpha}$$

con $\alpha = 1, 2, 3, 4$

La ecuación (3.14) se puede reescribir como

$$\frac{\partial}{\partial x^1} T^{11} + \frac{\partial}{\partial x^2} T^{12} + \frac{\partial}{\partial x^3} T^{13} + \frac{\partial}{\partial x^4} T^{14} = 0$$

o como

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{1k} = 0$$

Lo cual da el tratamiento para la conservación de la energía, cambiando el índice 1 para 2, 3, 4 y haciendo exactamente el mismo análisis, se tiene la conservación de momento. Lo cual indica que en general la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0 \quad (3.15)$$

Una vez más mediante el principio de covarianza en cualquier sistema coordenado se debe tener $D_{x^k} T^{ik} = 0$. Lo cual indica que el tensor de energía momento para un fluido perfecto se puede utilizar en las ecuaciones del campo de Einstein.

3.4. Espacio-tiempo de Schwarzschild

Supóngase que el universo esta compuesto por una única estrella, que se encuentra estática y es de forma esférica, además de ser la única posible fuente de campo gravitacional por lo cual la forma del tensor métrico debe ser únicamente determinada por este objeto. En 1916 Karl Schwarzschild dio una forma exacta para este tensor métrico. Inicialmente solo tuvo significado físico en el exterior, más tarde se encontró que este modelo junto con la región no considerada forman un modelo simple para un agujero negro.

Construyamos un modelo para la métrica del espacio-tiempo bajo las consideraciones anteriores

1) Un espacio-tiempo euclidiano **estático** de cuatro dimensiones puede verse como la variedad $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$ con elemento de línea de la forma

$$A(x)dt^2 + q \quad (x \in \mathbb{R}^3),$$

donde q es transportado desde \mathbb{R}^3 . La proyección $t : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ es llamada **tiempo de Schwarzschild**.

El transporte ∂_t de d/dt desde \mathbb{R}^1 es un campo de Killing (Véase **Ápndice B**).

2) Ya que la estrella tiene simetría esférica, también la tendrá el espacio resultante, así para cada $\phi \in O(3)$ el mapeo $(t, x) \rightarrow (t, \phi x)$ debe ser una isometría. Entonces es natural dar una descripción esférica de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ como $\mathbb{R}^+ \times S^2$, donde $\mathbb{R}^+ = \{\rho \in \mathbb{R} | \rho > 0\}$ y S^2 es la esfera unitaria. La simetría esférica implica que el elemento de línea q sobre $\mathbb{R}^+ \times S^2 \approx \mathbb{R}^3 - 0$ pueda ser escrito como $B(\rho)d\rho^2 + C(\rho)d\sigma^2$, donde $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ es el elemento de línea estándar sobre la esfera unitaria. Para cada $\phi \in O(3)$ el mapeo diferencial de $id \times \phi$ lleva ∂_t a ∂_t , ya que el coeficiente $A(x)$ de dt^2 solo depende de ρ . De esta manera el elemento de línea sobre $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^2 \approx \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ se convierte en

$$A(\rho)dt^2 + B(\rho)d\rho^2 + C(\rho)d\sigma^2$$

3) El elemento de línea se puede **normalizar** haciendo un cambio de variable en \mathbb{R}^1 reemplazando $C(\rho)$ por r^2 , de tal manera que el elemento de línea ahora tendrá la forma

$$ds^2 = E(r)dt^2 + G(r)dr^2 + r^2d\sigma^2.$$

La proyección $r : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ es llamada la **función radial de Schwarzschild**.

4) Debido a que la única fuente de campo gravitacional es la estrella entonces a una distancia lo suficientemente lejana su influencia debe ser pequeña y por lo tanto el espacio tiempo debe ser plano, por lo cual el elemento de línea debe coincidir con el elemento de línea de **Minkowski** en coordenadas esféricas para el espacio vacío, es decir

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\sigma^2$$

Lo cual necesariamente condiciona a las funciones $E(r)$ y $G(r)$, haciendo que $E(r) \rightarrow -1$ y $G(r) \rightarrow +1$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Sin pérdida de generalidad se puede hacer $E(r) = -e^{2\phi(r)}$, $G(r) = e^{2\Lambda(r)}$, entonces el elemento de línea se puede escribir de la siguiente manera

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (3.16)$$

Para que el espacio siga siendo plano lejos del origen se hace

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r) = 0 \quad (3.17)$$

El elemento de línea (3.16) define el tensor métrico (también suele decirse que (3.16) define las coordenadas de Schwarzschild), usando este elemento de línea se pueden calcular las componentes del tensor de Einstein $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}$, lo cual da como resultado

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2\phi} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})] \quad (3.18)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \phi' \quad (3.19)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} [\phi'' + (\phi')^2 + \frac{\phi'}{r} - \phi' \Lambda' - \frac{\Lambda'}{r}] \quad (3.20)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta} \quad (3.21)$$

donde $\phi' \equiv d\phi/dr$, etc. Las otras componentes del tensor de Einstein son cero.

Todos los cálculos que se han obtenido se simplificaron gracias a la simetría esférica del problema. Hay varias situaciones con dicha propiedad, por ejemplo en el estudio de un agujero negro, en una estrella de neutrones, algunos casos especiales de estrellas, etc. Pero la información necesaria para analizar estos casos no se encuentra en el tensor de Einstein, esta se encuentra contenida en el tensor de energía esfuerzo. Estamos interesados en estrellas estáticas, las cuales puedan ser consideradas compuestas por un fluido perfecto el cual no tenga movimiento a través del espacio, esto con el fin de simplificar la situación. Entonces la única componente distinta de cero del vector de velocidad u será u^t . Consideremos además una u normalizada, es decir

$$u \cdot u = -1 \quad (3.22)$$

Esto implica que bajo las coordenadas de Schwarzschild se tenga

$$u^t = e^{-\phi}, \quad u_t = -e^{\phi} \quad (3.23)$$

Y dado que el tensor de energía momento se considera como el de un fluido perfecto, entonces sus componentes son

$$T_{tt} = \rho e^{2\phi} \quad (3.24)$$

$$T_{rr} = p e^{2\Lambda} \quad (3.25)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 p \quad (3.26)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta} \quad (3.27)$$

y las otras componentes se hacen cero. Por otro lado recuérdese que el tensor de energía momento debe satisfacer la ecuación de conservación $D_{x^k} T^{jk} = 0$, esto implica que se tengan cuatro ecuaciones, una para cada valor del índice j . De las simetrías que se tienen solo una de ellas no se hace idénticamente cero, esto ocurre cuando $j = r$. Lo cual da

$$(\rho + p) \frac{d\phi}{dr} = -\frac{dp}{dr} \quad (3.28)$$

Esta ecuación nos dice que el gradiente de la presión necesariamente mantiene al fluido estático en el campo gravitacional, el efecto del cual depende de $d\phi/dr$.

Regresando a las E.C.E. en la ecuación (3.18) redefinamos un término de la siguiente manera

$$m(r) = \frac{1}{2} r (1 - e^{-2\Lambda}) \quad (3.29)$$

fácilmente se ve de la ecuación anterior que se satisface

$$g_{rr} = e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \quad (3.30)$$

Bajo esta definición la ecuación (3.18) implica

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3.31)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de Newton, la cual identifica a $m(r)$ como la masa dentro de la esfera de radio r . De manera equivalente debemos de llamar a $m(r)$ como la función de masa, pero no puede ser interpretada como la energía de masa dentro de una esfera de radio r ya que la energía total no es localizable en relatividad general.

Ahora veamos que pasa con las E.C.E. para r . En este caso se tiene

$$-\frac{2}{r^3} e^{2\Lambda} m(r) + \frac{2}{r} \phi' = p e^{2\Lambda}$$

Entonces usando las ecuaciones (3.29) y (3.30) se llega a que

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]} \quad (3.32)$$

Si nos encontramos fuera de la estrella, entonces de las ecuaciones (3.31) y (3.32) se tiene que

$$\frac{dm}{dr} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m}{r(r - 2m)} \quad (3.34)$$

Las soluciones de las ecuaciones anteriores son muy fáciles de obtener y estas son

$$m(r) = M = cte \quad (3.35)$$

$$e^{2\phi} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (3.36)$$

en esta solución además se exige que $\phi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto se ve que la métrica que queda es la muy bien conocida métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (3.37)$$

Birkhoff probó que la solución de Schwarzschild (3.37) es la única solución con simetría esférica y asintóticamente plana para las E.C.E. en el vacío, esta prueba puede verse en [10][pág. 843].

Una representación gráfica del modelo puede verse en la figura 3.2. Donde además podemos ver que esta solución tiene sentido para $r > 2M$, que corresponde al exterior (N) de la estrella que estamos considerando, el interior (B) por lo tanto corresponde a lo que suele llamarse agujero negro, que es la región del espacio-tiempo donde las E.C.E. dejan de funcionar.

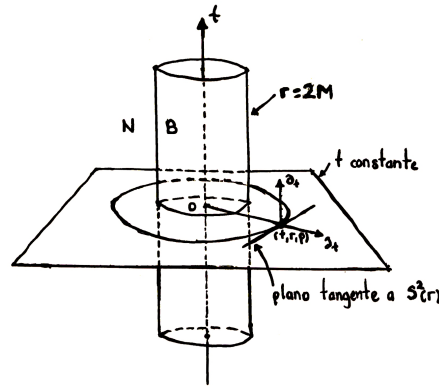


Figura 3.2: Espacio-tiempo de Schwarzschild, donde (B) representa la región interna de la estrella y (N) la parte externa, para $r > 2M$.

3.5. Espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker

La Cosmología se encarga de estudiar el universo a gran escala, es decir se encarga de entender todo lo existente dando un significado o interpretación que nos ayude a comprenderlo. Por lo cual considera el extenso dominio de las galaxias, cúmulos de galaxias, objetos cuasistelares, etc, como el dominio de estudio.

A diferencia de las otras ciencias la Cosmología estudia el universo como un todo, junto con el papel de fondo que estudia el resto de la física y las demás ciencias. En el estudio del universo a veces se tienen que delimitar los problemas que van surgiendo debido a su gran escala o a las altas temperaturas que ocurrieron en su inicio. Aún de manera experimental existen muchas limitaciones que no permiten entender las condiciones que lo originaron, estas limitaciones también se encuentran en nuestra capacidad para observar el universo en regiones muy distantes y a épocas muy tempranas. De lo anterior es inevitable que se

caiga en discusiones filosóficas, muchas veces llevando a teorías cuyas exigencias parecen ser demasiado ambisiosas.

La cosmología moderna parte de los modelos cosmológicos propuestos por A. Einstein y W. de Sitter en 1917, basados en la teoría de la relatividad de Einstein. El concepto de un universo en expansión lo introdujo algunos años más tarde A. Friedmann y G. Lemaitre, pero este acento de credibilidad hasta los años treinta debido a las observaciones de las galaxias hechas por Hubble. Estas muestran un corrimiento al rojo con la distancia, junto con la prueba de Eddington sobre la inestabilidad del modelo estático de Einstein. En los años cuarenta las implicaciones de un universo expandiéndose han sido investigadas con un particular énfasis en cuatro distintas épocas de la historia del Universo:

(1) La **época galáctica**, es el periodo de tiempo que se extiende desde la formación de las galaxias hasta el presente. Está es la época mas accesible a las observaciones. Durante este periodo, la materia usualmente se idealiza como un fluido perfecto libre de presión, considerando cúmulos de galaxias o galaxias como las partículas del fluido. La radiación cósmica de fondo tiene un efecto que puede ser despreciado durante la dinámica de este periodo.

(2) La **época pre-galáctica**. En esta la materia se idealiza como un gas, considerando a las partículas como un gas de moléculas, átomos núcleos o partículas elementales a diferentes tipos. Esta época aún puede dividirse en dos periodos, **periodo post-desacoplamiento**, cuando la materia y radiación evolucionan esencialmente independientes, y **periodo pre-desacoplamiento**, cuando la materia es ionizada e interactúa fuertemente con la radiación a través de dispersión Thomson. La radiación cósmica de fondo observada se interpreta como una fuerte evidencia para la existencia de este período. En esta época, a tiempos tardíos la materia domina dinámicamente, por el contrario en la parte temprana la radiación cósmica de fondo es la componente dominante. Por lo tanto la aproximación que se hace es presentarla como un gas ideal relativista. La física en estas dos épocas está bastante estudiada, y juntas constituyen el **módulo estándar cosmológico** del universo. Este modelo encaja muy bien en el análisis de datos recopilados por las observaciones. Adicionalmente dos periodos tempranos han estado bajo un intensivo estudio, sin embargo la física de estos tiempos aun no se entiende del todo bien.

(3) La **época inflacionaria**. En esta época el universo experimenta una inflación acelerada. En la mayoría de los modelos para esta época, los cuales ocurren antes de la época pre-galáctica mencionada anteriormente y después del tiempo de Planck, la fuente que la produce es considerada un campo escalar, autointeractuando a través de un potencial para el cual puede o no puede surgir un término de masa. El prototipo para estos campos es el bosón de Higgs, el cual surge en el modelo estándar de física de partículas. Esto tiene consecuencias observacionales como el aspecto de las fluctuaciones en la densidad que pueden estar relacionadas con las anisotropías de la radiación cósmica de fondo.

(4) La **época de gravedad cuántica**, la cual ocurre antes de la época de Planck¹³. En esta época, la teoría de la relatividad general clásica ya no puede

¹³Es el universo más temprano, el período de tiempo en la historia entre 0 y 10^{-43} segundos

asumirse válida.

En cosmología es usual asumir que la evolución del universo está gobernada por las ecuaciones de campo de Einstein durante las épocas (1) y (2), y usualmente también en la época (3), aunque a veces en la época inflacionaria se atribuyen los efectos de las teorías gravitacionales modificadas.

Los primeros estudios sobre los modelos de un universo expandiéndose, espacialmente homogéneo e isotrópico, fueron emprendidos por Friedmann y Lemaitre, y establecido en términos geométricos por H.P. Robertson y A.G. Walker. Asumir que la geometría del espacio-tiempo es tal que esté es espacialmente homogéneo e isotrópico se denomina como **Principio Cosmológico**.

A continuación se describe la forma de las matemáticas que modelan el comportamiento del universo para los casos (1), (2) y a veces con alguna modificación para (3). Lo primero que se hace es construir un sistema local de coordenadas para espacio-tiempo. Se pueden escoger en la parte espacial coordenadas x^i las cuales tengan un origen en $x^i = 0$ el cual podría ser el centro de la Vía Láctea, con direcciones fijadas que van desde el origen a alguna galaxia distante, y con una escala de distancia definida por la aparente luminosidad de las galaxias distantes, o por otros objetos que son visibles desde la Vía Láctea. Para la definición de la coordenada temporal es importante usar el mismo universo envolvente como un reloj. Se cree que varios campos cósmicos escalares, tales como la densidad de energía propia, la temperatura de la radiación de cuerpo negro son monótonamente decrecientes en cualquier región así que es posible escoger a cualquiera de este tipo y llamarlo como S y hacer que el tiempo de cada evento sea una función $t(S)$ del escalar escogido, cuando y donde el evento ocurra. Las coordenadas x, t así definidas deben ser llamadas coordenadas cósmicas estándar.

El principio cosmológico será formulado como el tratamiento acerca de la existencia de un sistema de coordenadas equivalentes. Supóngase que se usa el sistema de coordenadas estándar para llevar a cabo observaciones astronómicas, donde es posible determinar el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$, y todos los otros campos físicos, como función de las coordenadas cósmicas estándar x^μ . Un conjunto x'^μ diferente de coordenadas para el espacio-tiempo será considerado equivalente a las coordenadas cósmicas estándar, si la historia del universo es la misma en el sistema coordenado x'^μ como en el sistema coordenado estándar. Para que se satisfaga lo anterior se necesita que cada campo físico $g'_{\mu\nu}(x')$, $T'_{\mu\nu}(x)$, etc, sea el mismo en función de las x'^μ que sus correspondientes cantidades $g_{\mu\nu}(x)$, $T_{\mu\nu}(x)$, etc, en función de las coordenadas estándar x^μ . Esto es a cualquier punto coordenado y^μ se debe tener

$$g_{\mu\nu}(y) = g'_{\mu\nu}(y) \quad (3.38)$$

$$T_{\mu\nu}(y) = T'_{\mu\nu}(y) \quad \text{etc.} \quad (3.39)$$

Las ecuaciones anteriores indican que la transformación de coordenadas $x \rightarrow x'$ debe de ser una isometría, lo cual significa que las cantidades $T_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ deben ser invariantes bajo la transformación.

Las ecuaciones (5.8), (5.9) deben de satisfacerse para un campo escalar S el cual ha sido usado para definir el tiempo estándar t . Ya que S es por definición una

(un tiempo de Planck).

función solo de t , y un escalar las ecuaciones equivalentes para S se leen, en $y = x'$, como

$$S(t') = S'(x') \equiv S(x) = S(t)$$

y entonces

$$t' = t$$

De esta manera todos los sistemas que son equivalentes al sistema cósmico estándar usan necesariamente tiempo cósmico estándar.

La suposición de que se tiene isotropía espacial se puede formular suponiendo la existencia de una familia de sistemas coordenados x'^{μ} , que dependen de tres parámetros independientes $\theta^1, \theta^2, \theta^3$, los cuales serán equivalentes a las coordenadas cósmicas estándar y que tendrán el mismo origen, es decir

$$x'^{\mu}(0, t; \theta) = 0 \quad (3.40)$$

Los tres parámetros θ^n se puede pensar de manera intuitiva que son los ángulos de Euler que indican la orientación de la coordenada x'^i relativa al eje coordenado x^i .

Ahora se formula el concepto en forma matemática de homogeneidad, primero debe tenerse claro un hecho importante, nótese que observador alejándose de la Vía Láctea a la mitad de la velocidad de la luz verá de manera diferente el universo a como lo hacemos nosotros, esto implica que no cualquier objeto puede escogerse como el origen de un sistema coordenado equivalente a nuestras coordenadas cósmicas estándar. Para poder dar un significado a cualquier punto x^{μ} a partir de la homogeneidad, se usara el **Principio de Weyl** que asume que el universo es uniforme como un fluido perfecto en el cual las geodésicas son ortogonales a una familia de hipersuperficies tipo espacio. Las coordenadas que se definen mediante el principio suelen llamarse coordenadas comóviles, que se definen por medio de caídas libres de los observadores fundamentales, de tal forma que dos geodésicas no se intersecan excepto en algún punto singular del pasado o del futuro. Si los observadores fundamentales sincronizan sus relojes cuando sus parámetros cosmológicos tienen los mismos valores, el tiempo común resultante es el tiempo cósmico que definirá las hipersuperficies de simultaneidad, de esta manera cada punto x^{μ} en el espacio-tiempo está en alguna trayectoria fundamental $x^i = X^i(t)$, la cual puede funcionar como el origen de un sistema coordenado equivalente x'^{μ} a el sistema cósmico estándar. La Vía Láctea es una galaxia ordinaria, casi en reposo respecto a sus vecindades cercanas, así que se puede esperar que las trayectorias fundamentales $X(t)$ estén bien definidas. Ya que las trayectorias fundamentales a cualquier tiempo t llenan todo el espacio, estas se determinan por tres parámetros independientes a^i , los cuales se pueden escoger como los valores $a^i \equiv X^i(T)$ de X^i a algún tiempo particular $t = T$. Así la homogeneidad significa que hay un conjunto de coordenadas $\bar{x}^{\mu}(x; a)$, las cuales son equivalentes a las coordenadas cósmicas estándar x^{μ} , y las cuales tienen origen en la trayectoria $x^i = X^i(t; a)$, esto es

$$\bar{x}^i(X(t; a), t; a) = 0 \quad (3.41)$$

y donde además se satisface

$$\bar{x}'^i(0, t; a) = X^i(t; a) \quad (3.42)$$

Las $X(t; a)$ son las trayectorias de los observadores que perciben el universo isotrópico. Por tanto lo que se tiene son dos transformaciones $x \rightarrow x'$, $x \rightarrow \bar{x}'$ independientes de coordenadas representadas por (3.40) y (3.41) respectivamente, cada una dependiente de tres parámetros. Estas transformaciones son isometrías las cuales dejan invariante la coordenada correspondiente al tiempo. A continuación se muestra cómo estas transformaciones definen seis campos de Killing cuando $t = cte$.

Para poder usar las propiedades infinitesimales de estas transformaciones, hagamos que θ^i y a^i se aproximen a cero. Entonces hay seis vectores de Killing $\xi_j^\mu(x)$ y $\bar{\xi}_j^\mu(x)$, definidos por

$$\xi_j^i(x) = \left. \frac{\partial x'^i(x; \theta)}{\partial \theta^j} \right|_{\theta=0} \quad \xi_j^t(x) = 0 \quad (3.43)$$

$$\bar{\xi}_j^i(x) = \left. \frac{\partial \bar{x}'^i(x; a)}{\partial a^j} \right|_{a=0} \quad \bar{\xi}_j^t(x) = 0 \quad (3.44)$$

Para mostrar que los seis vectores son linealmente independientes, usamos una combinación lineal, esto es

$$\sum_j c^j(t) \xi_j^i(x) + \sum_j \bar{c}^j \bar{\xi}_j^i(x) = 0 \quad (3.45)$$

En el origen del sistema estándar se tiene

$$\xi_j^i(0, t) = 0 \quad (3.46)$$

$$\bar{\xi}_j^i(0, t) = \left. \frac{\partial X^i(t, a)}{\partial a^j} \right|_{a=0} \quad (3.47)$$

Entonces en $x^i = 0$ se tiene que la ecuación (3.45) toma la siguiente forma

$$\sum_j \bar{c}^j(t) \left. \frac{\partial X^i(t, a)}{\partial a^j} \right|_{a=0} = 0$$

Como los parámetros a^i son independientes, entonces se debe satisfacer que

$$\bar{c}^j(t) = 0$$

Luego usando esto último en la ecuación (3.45), se tiene que satisfacer

$$\sum_j c^j(t) \left. \frac{\partial x'^i(x; \theta)}{\partial \theta^j} \right|_{\theta=0} = 0$$

Como los parámetros θ^i son independientes, entonces

$$c^j(t) = 0$$

Con lo cual se muestra que se tienen seis campos vectoriales de Killing linealmente independientes, con $\xi^t = 0$, y el cual es el máximo número posible en un espacio de tres dimensiones.

Entonces lo que se concluye es que las transformaciones construidas son del tipo (B.11), (B.12) mostradas en el Apéndice B las cuales corresponderán a un subespacio de máxima simetría, en este caso inmerso en un espacio de dimensión cuatro, ya que $t = t'$, como consecuencia se tendrá entonces que el subespacio de máxima simetría es de dimensión tres.

El principio cosmológico se puede resumir en lo siguiente

- (i) Las hipersuperficies con tiempo cósmico estándar son subespacios de máxima simetría del espacio-tiempo.
- (ii) No solo la métrica $g_{\mu\nu}$, todos los tensores cósmicos son invariantes con respecto a las isometrías de estos subespacios.

Debido a la formulación que se da a partir del Principio Cosmológico se pueden aplicar directamente los resultados del Apéndice B para espacios con subespacios de máxima simetría de tal manera que la métrica toma la forma (B.15)

$$-ds^2 = g(v)dv^2 + f(v) \left\{ du^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right\}$$

Es conveniente definir nuevas coordenadas t, r, θ, φ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} t &= \int (-g(v))^{1/2} dv \\ u^2 &= r \sin \theta \cos \varphi \\ u^3 &= r \sin \theta \sin \varphi \\ u^4 &= r \cos \theta \end{aligned}$$

y además se puede hacer $R(t) = \sqrt{f(v)}$ la cual será una función desconocida del tiempo. De tal manera la métrica queda expresada como

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\} \quad (3.48)$$

donde k es una constante, la cual para una elección adecuada de unidades para r puede escogerse de tal manera que tenga los valores +1, 0, o -1. Estas no son necesariamente las coordenadas cósmicas introducidas anteriormente aunque t es el tiempo cósmico estándar o una función de este. La métrica (3.42) es conocida como la **métrica de Robertson-Walker**.

Capítulo 4

Aplicaciones a la Relatividad General

4.1. Schwarzschild

Consideremos el universo formado solamente por una esfera de radio r_0 . Dicha esfera es una estrella formada por un fluido el cual se comporta como fluido perfecto, además consideremos que la estrella se encuentra estática. Bajo estas suposiciones la métrica que moldea el espacio-tiempo tiene como elemento de línea a la forma cuadrática de Schwarzschild.

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

Para radios mayores que r_0 las ecuaciones de campo del Einstein para el vacío son las que deben dar la forma exacta de la métrica. Estas son las siguientes

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-\Lambda}}{r^2} + \frac{2e^{-2\Lambda}}{r} \Lambda_r = 0 \quad (\Delta_1(r, \phi_J, \Lambda_J)) \quad (4.1)$$

$$\frac{2}{r} \phi_r - \frac{e^{2\Lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (\Delta_2(r, \phi_J, \Lambda_J)) \quad (4.2)$$

$$r^2 \phi_{rr} - r^2 \Lambda_r \phi_r + r^2 \phi_r^2 - r \Lambda_r + r \phi_r = 0 \quad (\Delta_3(r, \phi_J, \Lambda_J)) \quad (4.3)$$

En el capítulo anterior se muestra como encontrar una solución al sistema, que es justo la solución que fue dada por Schwarzschild para el caso en que se consideren radios r mayores que el radio r_0 de la estrella. Con el fin de que quizá se puedan generar nuevas soluciones al sistema para $r > r_0$, vamos a usar el método expuesto en el capítulo 2. Cada solución del sistema (4.1)-(4.3) puede verse como el par $u = (\phi, \Lambda)$. Así está u deberá satisfacer $\Delta_l(x, u^2) = 0$ en este caso $x = r$, para $l = 1, 2, 3$. Esta forma de escribir la solución nos permite ver la forma del generador infinitesimal de simetrías para el espacio de soluciones del sistema, que de acuerdo a las ecuaciones (2.5) y (2.6) el generador infinitesimal de simetrías y su segunda prolongación deben estar dados por las siguientes expresiones

$$v = \alpha \frac{\partial}{\partial r} + \beta \frac{\partial}{\partial \phi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \Lambda} \quad (4.4)$$

$$pr^{(2)}v = v + \beta^r \frac{\partial}{\partial \phi_r} + \gamma^r \frac{\partial}{\partial \Lambda_r} + \beta^{rr} \frac{\partial}{\partial \phi_{rr}} + \gamma^{rr} \frac{\partial}{\partial \Lambda_{rr}} \quad (4.5)$$

Donde α, β y γ son funciones que pueden depender de r, ϕ y Λ . Los coeficientes β^r, γ^r y β^{rr} son obtenidos mediante la ecuación (2.8), de la cual se tiene

$$\begin{aligned} \beta^r &= \beta_r - \alpha_r \phi_r + \beta_\Lambda \Lambda_r + \beta_\phi \phi_r - \alpha_\Lambda \Lambda_r \phi_r - \alpha_\phi \phi_r^2 \\ \gamma^r &= \gamma_r - \alpha_r \Lambda_r + \gamma_\Lambda \Lambda_r + \gamma_\phi \phi_r - \alpha_\Lambda \Lambda_r^2 - \alpha_\phi \phi_r \Lambda_r \\ \beta^{rr} &= D_r \beta^r - (D_r \alpha)(\phi_{rr}) \end{aligned}$$

Donde D_r es la derivada total, todavía no es necesario calcular el coeficiente γ^{rr} , pues al aplicar la prolongación al sistema no se tiene como factor, debido a que la expresión Λ_{rr} no aparece en ninguna ecuación del sistema. Por otro lado β^{rr} aun no se calcula de manera explícita pues para simplificar los cálculos se utilizaran resultados obtenidos al calcular $pr^{(2)}v[\Delta_i(r, \phi_J, \Lambda_J)]$ para $i = 1, 2$.

El siguiente paso es usar el Teorema 2.2, este exige que la matriz Jacobiana $J_s(r, \phi, \Lambda)$ del sistema sea de rango máximo. La matriz Jacobiana del sistema es la siguiente

$$J_s(r, \phi, \Lambda) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2\Lambda}-1}{r^3} & 0 & \frac{2e^{-2\Lambda}(1-2r\Lambda_r)}{r^2} & 0 \\ \frac{e^{2\Lambda}-1}{r^2} & 0 & -\frac{2e^{2\Lambda}}{r^2} & \frac{2}{r} \\ re^{2\Lambda}(\phi_{rr} - \Lambda_r \phi_r + \phi_r^2) & 0 & 0 & (2r^2 \phi_r + r - r^2 \Lambda_r)e^{-2\Lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -e^{-2\Lambda}(r^2 \phi_r + r) & r^2 e^{-2\Lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente la matriz anterior tiene rango máximo, pues solo debe anularse cuando se satisface el sistema, entonces se puede aplicar el teorema. Al aplicar la segunda prolongación (4.5) a las ecuaciones (4.1)-(4.3) y sustituyéndolas siempre que se satisfagan, se encuentra que se pueden agrupar los términos en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
pr^{(2)}v[\Delta_1(r, \phi_J, \Lambda_J)] &= \frac{e^{2\phi}e^{-2\Lambda}}{r^3}\alpha - \frac{e^{2\phi}}{r^3}\alpha + \frac{2e^{2\phi}e^{-2\Lambda}}{r^2}\gamma - \frac{4e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\Lambda_r\gamma + \\
&\quad \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\gamma_r \\
&= \frac{e^{2\phi}e^{-2\Lambda}}{r^3}\alpha - \frac{e^{2\phi}}{r^3}\alpha + \frac{2e^{2\phi}e^{-2\Lambda}}{r^2}\gamma - \frac{4e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\Lambda_r\gamma + \\
&\quad \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\gamma_r - \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}\alpha_r}{r}\Lambda_r + \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}\gamma_\Lambda}{r}\Lambda_r + \\
&\quad \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}\gamma_\phi}{r}\phi_r - \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}\alpha_\Lambda}{r}\Lambda_r^2 - \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}\alpha_\phi}{r}\times \\
&\quad \phi_r\Lambda_r \\
&= \left\{ \frac{e^{2\phi}e^{-2\Lambda}}{r^3}\alpha - \frac{e^{2\phi}}{r^3}\alpha + \frac{2e^{2\phi}e^{-2\Lambda}}{r^2}\gamma + \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\gamma_r \right\} \\
&\quad \times (1) + \{\gamma_\Lambda - 2\gamma - \alpha_r\}(\Lambda_r) + \left\{ \frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\gamma_\phi \right\}(\phi_r) \\
&\quad + \left\{ -\frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\alpha_\Lambda \right\}(\Lambda_r^2) + \left\{ -\frac{2e^{-2\Lambda}e^{2\phi}}{r}\alpha_\phi \right\} \times \\
&\quad (\phi_r\Lambda_r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pr^{(2)}v[\Delta_2(r, \phi_J, \Lambda_J)] &= \frac{e^{2\Lambda}}{r^3} - \frac{\alpha}{r^3} - \frac{2\gamma e^{2\Lambda}}{r^2} + \frac{2\beta^r}{r} \\
&= \frac{\alpha e^{2\Lambda}}{r^3} - \frac{\alpha}{r^3} - \frac{2\gamma e^{2\Lambda}}{r^2} + \frac{2\beta_r}{r} - \frac{2\alpha_r}{r}\phi_r + \frac{2\beta_\Lambda}{r}\Lambda_r + \\
&\quad \frac{2\beta_\phi}{r}\phi_r - \frac{2\alpha_\Lambda}{r}\Lambda_r\phi_r - \frac{2\alpha_\phi}{r}\phi_r^2 \\
&= \left\{ \frac{\alpha e^{2\Lambda}}{r^3} - \frac{\alpha}{r^3} - \frac{2\gamma e^{2\Lambda}}{r^2} + \frac{2\beta_r}{r} \right\} (1) + \left\{ \frac{2\beta_\phi}{r} - \frac{2\alpha_r}{r} \right\} \\
&\quad \times (\phi_r) + \left\{ \frac{2\beta_\Lambda}{r} \right\} (\Lambda_r) + \left\{ -\frac{2\alpha_\Lambda}{r} \right\} (\phi_r\Lambda_r) \\
&\quad + \left\{ -\frac{2\alpha_\phi}{r} \right\} (\phi_r^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Los desarrollos anteriores se satisfacen solo si los coeficientes son cero con lo cual es fácil concluir que $\alpha_\phi = \alpha_\Lambda = \beta_\Lambda = 0$, utilizando este resultado en el cálculo de β^{rr} , se tiene que

$$\beta^{rr} = \beta_{rr} + 2\beta_{r\phi}\phi_r - 2\alpha_r\phi_{rr} - \alpha_{rr}\phi_r + \beta_\phi\phi_{rr} + \beta_{\phi\phi}\phi_r^2$$

Ahora que se conoce β^{rr} se pueden encontrar más relaciones de los coeficientes

$$\begin{aligned}
pr^{(2)}v[\Delta_3(r, \phi_J, \Lambda_J)] &= \frac{1}{e^{2\Lambda}}(r\phi_{rr} - r\Lambda_r\phi_r + r\phi_r^2)\alpha + \frac{1}{e^{2\Lambda}}(-r^2\Lambda_r + 2r^2\phi_r \\
&\quad + r)\beta^r + \frac{1}{e^{2\Lambda}}(-r^2\phi_r - r)\gamma^r + \frac{1}{e^{2\Lambda}}(r^2)\beta^{rr} \\
&= \frac{r\alpha}{e^{2\Lambda}}\phi_{rr} - \frac{r\alpha}{e^{2\Lambda}}\Lambda_r\phi_r + \frac{r\alpha}{e^{2\Lambda}}\phi_r^2 - \frac{r^2\beta_r}{e^{2\Lambda}}\Lambda_r + \frac{2r^2\beta_r}{e^{2\Lambda}}\phi_r \\
&\quad + \frac{r\beta_r}{e^{2\Lambda}} - \frac{r^2\gamma_r}{e^{2\Lambda}}\phi_r - \frac{r\gamma_r}{e^{2\Lambda}} + \frac{r^2\alpha_r}{e^{2\Lambda}}\Lambda_r\phi_r + \frac{r\alpha_r}{e^{2\Lambda}}\Lambda_r - \\
&\quad \frac{r^2\gamma_\Lambda}{e^{2\Lambda}}\Lambda_r\phi_r - \frac{r\gamma_\Lambda}{e^{2\Lambda}}\Lambda_r + \frac{r^2\beta_{rr}}{e^{2\Lambda}} + \frac{r^2\beta_{r\phi}}{e^{2\Lambda}}\phi_r - \frac{r^2\beta_\phi}{e^{2\Lambda}}\phi_{rr} \\
&= \left\{ \frac{r\beta_r}{e^{2\Lambda}} - \frac{r\gamma_r}{e^{2\Lambda}} + \frac{r^2\beta_{rr}}{e^{2\Lambda}} \right\} (1) + \left\{ \frac{2r^2\beta_r}{e^{2\Lambda}} - \frac{r^2\gamma_r}{e^{2\Lambda}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{r^2\beta_{r\phi}}{e^{2\Lambda}} \right\} (\phi_r) + \left\{ -\frac{r^2\beta_r}{e^{2\Lambda}} + \frac{r\alpha_r}{e^{2\Lambda}} - \frac{r\gamma_\Lambda}{e^{2\Lambda}} \right\} (\Lambda_r) + \\
&\quad \left\{ -\frac{r\alpha}{e^{2\Lambda}} + \frac{r^2\alpha_r}{e^{2\Lambda}} - \frac{r^2\gamma_\Lambda}{e^{2\Lambda}} \right\} (\Lambda_r\phi_r) + \left\{ \frac{r\alpha}{e^{2\Lambda}} \right\} (\phi_r^2) \\
&\quad + \left\{ \frac{r\alpha}{e^{2\Lambda}} - \frac{r^2\beta_\phi}{e^{2\Lambda}} \right\} (\phi_{rr}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Las relaciones que se obtienen para las derivadas de los coeficientes se resumen en la siguiente tabla

	Monomios	Coefficientes obtenidos de $pr^{(2)}v[\Delta_1(r, \phi_J, \Lambda_J)] = 0$
(a)	1	$\alpha e^{2\Lambda} - \alpha - 2(r\gamma + r^2\gamma_r) = 0$
(b)	Λ_r	$\gamma_\Lambda - 2\gamma - \alpha_r = 0$
(c)	ϕ_r	$\gamma_\phi = 0$
(d)	Λ_r^2	$\alpha_\Lambda = 0$
(e)	$\phi_r\Lambda_r$	$\alpha_\phi = 0$
	Monomios	Coefficientes obtenidos de $pr^{(2)}v[\Delta_2(r, \phi_J, \Lambda_J)] = 0$
(f)	1	$e^{2\Lambda} - 2e^{2\Lambda}r\gamma - \alpha + 2r^2\beta_r = 0$
(g)	ϕ_r	$\beta_\phi - \alpha_r = 0$
(h)	Λ_r	$\beta_\Lambda = 0$
	Monomios	Coefficientes obtenidos de $pr^{(2)}v[\Delta_3(r, \phi_J, \Lambda_J)] = 0$
(i)	1	$\beta_r - \gamma_r + r\beta_{rr} = 0$
(j)	ϕ_r	$2\beta_r - \gamma_r + \beta_{r\phi} = 0$
(k)	Λ_r	$\alpha_r - \gamma_\Lambda - r\beta_r = 0$
(l)	$\Lambda_r\phi_r$	$r\alpha_r - r\gamma_\Lambda - \alpha = 0$
(m)	ϕ_r^2	$\alpha = 0$
(n)	ϕ_{rr}	$\alpha - r\beta_\phi = 0$

De (m) se tiene $\alpha = 0$ así por (n) se sigue que $\beta_\phi = 0$, como $\beta_\phi = 0$ usando (g) se llega a que $\alpha_r = 0$, ya que $\alpha = \alpha_r = 0$ a partir de (l) se deduce $\gamma_\Lambda = 0$. Como $\alpha_r = \gamma_\Lambda = 0$ entonces de (k) se sigue $\beta_r = 0$ usando este resultado en (j) se llega a que $\gamma_r = 0$, lo cual en (a) implica que $\gamma = 0$. Por lo tanto $\alpha = \gamma = 0$ y $\beta = a = cte$. De esta manera el generador infinitesimal de simetrías tiene la siguiente forma

$$v = a \frac{\partial}{\partial \phi}$$

El generador infinitesimal de simetrías bajo el mapeo exponencial nos da el flujo, el cual es un grupo de un parámetro, es decir satisface $exp(\varepsilon v)(r, \phi, \Lambda) \equiv \Psi(\varepsilon, (r, \phi, \Lambda))$ donde Ψ representa el flujo, en este caso con el generador encontrado se tiene

$$exp(\varepsilon v)(r, \phi, \Lambda) = (r, \phi + a\varepsilon, \Lambda) \quad \text{con } \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

Entonces si $\phi_s(r), \Lambda(r)$ son soluciones, de las ecuaciones de campo, también lo serán $\tilde{\phi} = \phi_s(r) + a\varepsilon$ y $\Lambda(r)$. De lo anterior se sigue que dicha transformación también se puede ver como una transformación para la coordenada t es decir si se hace $\tilde{t} = e^{a\varepsilon}t$ entonces el elemento de línea tendrá la siguiente forma

$$ds^2 = -e^{2\phi}d\tilde{t}^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.7)$$

O una transformación para la coordenada $\tilde{r} = e^{-a\varepsilon}r$, en este caso, se encuentra la relación para dos elementos de línea mediante un factor, esto es

$$d\tilde{s}^2 = e^{a\varepsilon}ds^2 \quad (4.8)$$

donde $ds^2 = -e^{2\phi}dt^2 + (e^{-a\varepsilon}dr)^2 + (e^{-a\varepsilon}r)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ en este caso debido a la condición de frontera se debe escoger $\varepsilon = 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Tal y como lo muestran las ecuaciones (4.7) y (4.8), las soluciones nuevas son a lo más un factor de la métrica de Schwarzschild, esto en realidad era de esperarse, pues la solución que da Schwarzschild es única, para radios mayores que r_0 , tal y como se menciona en el capítulo anterior esto fue demostrado por el matemático Birkhoff, el cual lo enuncia en un teorema el cual dice que la métrica para un espacio-tiempo vacío con simetría esférica, siempre esta dada por una pieza de la métrica de Schwarzschild. Lo cual es verificado mediante el grupo de simetrías para el sistema de ecuaciones diferenciales.

Si se escoge $a\varepsilon \geq 0$ entonces (4.7)-(4.8) se cumplirán siempre que se tenga

$$\tilde{t} \geq t \quad , \quad r \geq \tilde{r}$$

La desigualdad para el tiempo nos indica que el tiempo en las nuevas coordenadas será mayor que en las primeras, esto a las vez dice que para que se satisfaga (4.7) solo debe ser transformada la coordenada temporal. Por lo tanto las E.C.E. bajo esta condición son invariantes.

En la desigualdad para la coordenada radial también tenemos que las E.C.E. se satisfacen siempre que nos movamos en dirección radial, acercandonos a la estrella. Además debido a que la invarianza de la métrica permite hacer traslaciones en la coordenada φ , entonces en general se tiene que aquellos observadores que caen libremente serán los que encontrarán que la transformación (4.8) se satisface.

Notemos que si hacemos $a\varepsilon < 0$ se tienen situaciones analogas.

4.2. RFW

Las hipótesis de isotropía y homogeneidad para el espacio-tiempo indica la existencia de isometrías mediante las cuales se tiene que el espacio-tiempo tiene un subespacio de máxima simetría, este subespacio es una hipersuperficie tipo

espacio, con esto la métrica para el espacio-tiempo esta dada por la conocida métrica de Robertson-Walker.

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (4.9)$$

donde $R(t)$ es una función desconocida del tiempo, y k es una constante, la cual para una elección adecuada en las unidades de r la cual puede escogerse tal que tenga los valores -1 , 0 , o $+1$.

Para una t constante, el espacio tridimensional tiene la métrica definida por

$$g_{rr} = \frac{R^2(t)}{1-kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = r^2 R^2(t), \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta R^2(t)$$

con $g_{\mu\nu}$ igual a cero para $\mu \neq \nu$. Por lo tanto la curvatura escalar tridimensional para el espacio es

$$K(t) = kR^{-2}(t) \quad (4.10)$$

Para $k = -1$ o $k = 0$ el espacio es infinito, mientras que para $k = +1$ es finito (pero sin frontera), con circunferencia propia dada por

$$L = 2\pi R(t) \quad (4.11)$$

y cuyo volumen propio esta dado por

$$V = 2\pi^2 R^3(t) \quad (4.12)$$

Para $k = +1$ la parte espacial puede considerarse como la superficie de una esfera de radio $R(t)$ contenido en un espacio euclidiano de dimensión cuatro, y $R(t)$ puede justamente puede ser llamado el radio del universo. No se puede hacer una interpretación similar para $k = -1$ o $k = 0$, pero $R(t)$ aun debe dar la escala de la geometría del espacio, así $R(t)$ en todos los casos debe ser llamado el factor de escala cósmico.

A partir de las observaciones se pueden estimar los valores para R , en nuestro tiempo actual las cuales nos conducen a la constante de Hubble, pero si se quiere saber el comportamiento de R como función del tiempo t , entonces es necesario resolver las ecuaciones del campo de Einstein las cuales estarán escritas bajo la suposición de que el Principio Cosmológico es válido y por lo tanto la métrica que admite el espacio-tiempo es la de Robertson-Walker.

Dado que la homogeneidad del espacio se apoya en el postulado de Weyl el cual supone que el universo esta compuesto por un fluido perfecto, entonces las componentes del tensor de energía momento satisfacen las siguientes relaciones

$$T_{tt} = \rho(t) \quad T_{it} = 0 \quad T_{ij} = g_{ij}p(t)$$

donde ρ y p son cantidades desconocidas de la densidad y la presión respectivamente, que podrían depender de t , pero no de r , θ o ϕ . Esto se puede escribir de otra forma usando el vector cuatro velocidad U_μ , esto es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (4.13)$$

donde $U^t = 1$ y $U^i = 0$.

Entonces del principio cosmológico y postulado de Weyl se tiene que las E.C.E. incluyendo una constante cosmológica distinta de cero, se reducen a solo

dos ecuaciones diferenciales para R , las cuales son conocidas como las ecuaciones de Friedman

$$3\frac{R_t^2 + k}{R^2} - \lambda = \tilde{a}\rho \quad (4.14)$$

$$\frac{2R_{tt}}{R} + \frac{R_t^2 + k}{R^2} - \lambda = -\tilde{a}p \quad (4.15)$$

con $\tilde{a} = 8\pi G$ ($R_t \equiv dR/dt$).

Para dar una solución R primero se debe recordar que el sistema físico que se esta analizando es un fluido perfecto y entonces debe existir alguna ecuación de estado que relacione su presión, densidad y temperatura. Podemos usar la ecuación de estado propuesta por Zeldovich [12], la cual asume que la temperatura es constante y relaciona a la presión y densidad de la siguiente manera

$$p = (\sigma - 1)\rho, \quad 1 \leq \sigma \leq \frac{4}{3} \quad (4.16)$$

Harrison[13] sugiere que la expresión anterior entre la presión y la densidad también es válida para fluidos relativistas, pero en estos casos los valores de σ estan en el siguiente intervalo $\sigma \leq 2$.

Debe recordarse que el tensor de energía esfuerzo satisface la ecuación de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ de la cual se deduce

$$\rho R^{3\sigma} = \frac{3C}{a} \quad (4.17)$$

donde C es una constante.

Cada valor de σ usualmente describe una forma de materia para el universo y por lo tanto corresponde a un modelo cosmológico, por lo cual es de interés saber como se comportan las soluciones R para cada valor de σ . Muchos de los fluidos que consideremos ya cuentan con alguna solución a las E.C.E., sin embargo debemos recordar que con el grupo de simetrías siempre es posible construir nuevas soluciones a partir de una conocida. Por lo tanto en lo siguiente veremos como actúa el grupo de simetrías sobre el espacio de soluciones.

Entre los fluidos que suelen encontrarse en la construcción de modelos cosmológicos para cada valor de sigma σ , se encuentran los siguientes,

$\sigma = 2$	escalar
$\sigma = 4/3$	radiación
$\sigma = 1$	polvo
$\sigma = 2/3$	curvatura
$\sigma = 0$	constante

De las ecuaciones de Friedman (4.14) y (4.15) puede identificarse que las variables independientes y dependientes son t y R , las soluciones para este sistema son $u = R(t)$, se puede identificar el par ordenado (t, R) tal que $(t, R) \in M$ donde $M = X \times U$ representa un subconjunto del producto cartesiano de las variables independientes y dependientes sobre las cuales las ecuaciones de Friedman tienen solución, además sobre el cual actúa un grupo de simetrías G en

caso de que exista. Ahora que se tienen identificadas a las variables, se debe encontrar la expresión para el generador de simetrías, que de acuerdo a la ecuación (2.5) tiene la siguiente forma

$$v = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial R} \quad (4.18)$$

y de la ecuación (2.6) la segunda prolongación de v es

$$pr^{(2)}v = v + \phi^1 \frac{\partial}{\partial R_t} + \phi^2 \frac{\partial}{\partial R_{tt}} \quad (4.19)$$

Del Teorema 2.2 se tiene que la condición necesaria y suficiente para que v sea generador infinitesimal de simetrías es que $pr^{(2)}v(\Delta_l(x, u^{(n)})) \equiv 0$ donde $l = 1, 2$ representa cada una de las ecuaciones de Friedman, es importante que el sistema sea de rango máximo pues el Teorema 2.2 lo exige, al aplicar esta condición se puede determinar cada uno de los coeficientes del generador de simetrías. Debido a que en las ecuaciones de Friedman siempre se tiene la misma dependencia de t y R , entonces para cada modelo cosmológico la manera en que se obtiene el generador infinitesimal de simetrías es siempre la misma.

Usando las ecuaciones (4.16) y (4.17) las ecuaciones de Friedman se transforman en el siguiente sistema

$$3R_t^2 R^{3\sigma-2} + 3kR^{3\sigma-2} - \lambda R^{3\sigma} - 3C = 0 \quad \Delta_1(r, R_J) \quad (4.20)$$

$$2R_{tt}R^{3\sigma-1} + R_t^2 R^{3\sigma-2} + kR^{3\sigma-2} - \lambda R^{3\sigma} + (\sigma - 1)3C = 0 \quad \Delta_2(r, R_J) \quad (4.21)$$

El cual tiene el siguiente Jacobiano

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 3(\sigma - 2)R_t^2 R^{3(\sigma-1)} + 3k(3\sigma - 2)R^{3(\sigma-1)} - \lambda 3\sigma R^{3\sigma-1} \\ 0 & 2(3\sigma - 1)R_{tt}R^{3\sigma-2} + (3\sigma - 2)R_t^2 R^{3(\sigma-1)} + k(3\sigma - 2)R^{3(\sigma-1)} \\ & -\lambda 3\sigma R^{3\sigma-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6R_t R^{3\sigma-2} & 0 \\ 2R_t R^{3\sigma-2} & 2R^{3\sigma-2} \end{pmatrix}$$

Como la matriz Jacobiana es de rango máximo entonces se puede aplicar el Teorema 2.2 y los coeficientes del campo se pueden encontrar a partir de las ecuaciones 2.7 y 2.8. Con lo cual se obtiene lo siguiente

$$\phi^1 = \phi_t + (\phi_R - \xi_t)R_t - \xi_R R_t^2 \quad (4.22)$$

$$\phi^2 = \phi_{tt} + (2\phi_{Rt} - \xi_{tt})R_t + (\phi_{RR} - 2\xi_{Rt})R_t^2 + (\phi_R - 2\xi_t)R_{tt} - 3\xi_R R_{tt}R_t - \xi_{RR}R_t^3 \quad (4.23)$$

Ahora se puede aplicar la segunda prolongación $pr^{(2)}v$ al sistema dado por las ecuaciones (4.20)-(4.21) para usar el criterio del Teorema 2.2 y encontrar relaciones de los coeficientes del generador infinitesimal de simetrías. Al aplicar la prolongación al sistema se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
pr^{(2)}v[\Delta_1(t, R_J)] &= (6R_r R^{3\sigma-2})\phi^1 + (3\sigma - 2)3R_t^2 R^{3\sigma-3}\phi + 3k(3\sigma - 2)R^{3\sigma-3} \\
&\quad \times \phi - \phi\lambda 3\sigma R^{3\sigma-1} \\
&= 6\phi_t R^{3\sigma-2}R_t + 6\phi_R R^{3\sigma-2}\left(\frac{\lambda}{3}R^2 + CR^{2-3\sigma} - k\right) - 6\xi_t \\
&\quad \times R^{3\sigma-2}\left(\frac{\lambda R^2}{3} + CR^{2-3\sigma} - k\right) - 6\xi_R\left(\frac{\lambda R^2}{3} + CR^{2-3\sigma} - k\right)R_t R^{3\sigma-2} \\
&\quad + 3\phi(3\sigma - 2)\left(\frac{\lambda R^2}{3} + CR^{2-3\sigma} - k\right)R^{3(\sigma-1)} \\
&\quad + 3\phi k(3\sigma - 2)R^{3(\sigma-1)} - \lambda\phi 3\sigma R^{3\sigma-1} \\
&= \{6\phi_t + 6k\xi_R\}(R_t R^{3\sigma-2}) + \{2\lambda\phi_R - 2\lambda\phi_t\}(R^{3\sigma}) + \{6C \\
&\quad \times \phi_R - 6C\xi_t - 6C\xi_R\}(1) + \{-6k\phi_R + 6k\xi_t\}(R^{3\sigma-2}) \\
&\quad + \{-2\sigma\xi_R\}(R_t R^{3\sigma}) + \{\phi(3\sigma - 2)\lambda - \lambda\phi 3\sigma\}(R^{3\sigma-1}) \\
&\quad + \{3\phi(3\sigma - 1)C\}(R^{-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pr^{(2)}v[\Delta_2(t, R_J)] &= 2\phi^2 R^{3\sigma-1} + 2\phi^1 R_t R^{3\sigma-2} + 2(3\sigma - 1)R_{tt} R^{3\sigma-2}\phi + \\
&\quad (3\sigma - 2)R_t^2 R^{3(\sigma-1)}\phi + k(3\sigma - 2)R^{3(\sigma-1)}\phi - 3\sigma\lambda R^{3\sigma-1}\phi \\
&= 2\phi_{tt} R^{3\sigma-1} + 2(2\phi_{Rt} - \xi_{tt})R_t R^{3\sigma-1} + 2(\phi_{RR} - 2\xi_{Rt}) \times \\
&\quad \left(\frac{\lambda}{3}R^{3\sigma+1} + CR - kR^{3\sigma-1}\right) + 2(\phi_R - 2\xi_t)\left(\frac{\lambda}{3}R^{3\sigma} - \frac{(\sigma-1)}{2}\right) \\
&\quad \times 3C + \frac{C}{2} - 6\xi_R\left(\frac{\lambda}{3}R^{3\sigma} - \frac{(\sigma-1)3C+C}{2}\right)R_t - 2\xi_{RR}\left(\frac{\lambda}{3}\times\right. \\
&\quad \left.R^{3\sigma+1} + CR - kR^{3\sigma-1}\right)R_t + 2\phi_t R_t R^{3\sigma-2} + 2(\phi_R - \xi_t) \\
&\quad \times \left(\frac{\lambda}{3}R^{3\sigma} + C - kR^{3\sigma-2}\right) - \xi_R\left(\frac{\lambda}{3}R^{3\sigma} + C - kR^{3\sigma-2}\right)R_t \\
&\quad + 2(3\sigma - 1)\phi\left(\frac{\lambda}{3}R^{3\sigma-1} - \frac{(\sigma-1)3C+C}{2}R^{-1}\right) + (3\sigma - 2)\phi \times \\
&\quad \left(\frac{\lambda}{3}R^{3\sigma-1} + CR^{-1} - kR^{3(\sigma-1)}\right) + k(3\sigma - 2)R^{3(\sigma-1)}\phi - \\
&\quad 3\sigma\lambda\phi R^{3\sigma-1} \\
&= \left\{2\phi_{tt} - 2k(\phi_{RR} - 2\xi_{Rt}) + \frac{2}{3}\lambda(3\sigma - 1)\phi + \frac{(3\sigma-2)\phi\lambda}{3} - \right. \\
&\quad \left. \sigma\lambda\phi\right\}(R^{\sigma-1}) + \{2(2\phi_{Rt} - \xi_{tt}) - 2k\xi_{RR}\}(R^{3\sigma-1}R_t) + \\
&\quad \left\{\frac{2}{3}\lambda(\phi_{RR} - 2\xi_{Rt})\right\}(R^{3\sigma+1}) + \{2C(\phi_{RR} - 2\xi_{Rt})\}(R) + \\
&\quad \left\{\frac{2}{3}\lambda(\phi_R - 2\xi_t) + \frac{2}{3}(\phi_R - \xi_t)\lambda\right\}(R^{3\sigma}) + \{-(\phi_R - 2\xi_t) \\
&\quad \times [(\sigma - 1)3C + C] + 2C(\phi_R - \xi_t)\}(1) + \left\{-2\xi_R\lambda - \frac{\lambda\xi_R}{3}\right\} \\
&\quad \times (R^\sigma R_t) + \{3[(\sigma - 1)3C + C]\xi_R - C\xi_R\}(R_t) + \{2\phi_t + \\
&\quad k\xi_R\}(R_t R^{3\sigma-2}) + \{-2k(\phi_R - \xi_t)\}(R^{3\sigma-2}) + \{-\phi(3\sigma - \\
&\quad 1)[(\sigma - 1)3C + C] + C(3\sigma - 2)\phi\}(R^{-1}) + \{-\frac{2}{3}\lambda\xi_{RR}\} \times \\
&\quad (R_t R^{3\sigma+1}) + \{-2C\xi_{RR}\}(R_t R) \\
&= 0
\end{aligned}$$

lo anterior solo se cumple cuando los coeficientes de los monomios son idénticamente cero, entonces las relaciones entre los coeficientes del campo son las siguientes

	Monomios	Coefficientes de $pr^{(2)}v[\Delta_1(t, R, R_t, R_{tt})] = 0$
(a)	$R_t R^{3\sigma-2}$	$\phi_t + k\xi_R = 0$
(b)	1	$\phi_R - \xi_t - \xi_R = 0$
(c)	$R^{3\sigma-1}$	$\lambda\phi = 0$
(d)	R^{-1}	$\phi(3\sigma - 2) = 0$
	Monomios	Coefficientes de $pr^{(2)}v[\Delta_2(t, R, R_t, R_{tt})] = 0$
(e)	$R^{3\sigma-1}$	$2\phi_{tt} - 2k(\phi_{RR} - 2\xi_{Rt}) + \frac{2\lambda}{3}(3\sigma - 1)\phi + \frac{1}{2}(3\sigma - 2)\phi\lambda - 3\sigma\lambda\phi = 0$
(f)	$R^{3\sigma-1}R_t$	$2\phi_{Rt} - \xi_{tt} - k\xi_{RR} = 0$
(g)	$R^{3\sigma+1}$	$C(\phi_{RR} - 2\xi_{Rt}) = 0$
(h)	$R^{3\sigma}$	$\lambda(\phi_R - 2\xi_t) + \lambda(\phi_R - \xi_t) = 0$
(i)	1	$-(\phi_R - 2\xi_t)[(\sigma - 1)3C + C] + 2C(\phi_R - \xi_t) = 0$
(j)	$R^{3\sigma}R_t$	$\xi_R = 0$
(k)	R_t	$(3[\sigma - 1]3C + C)\xi_R - C\xi_R = 0$
(l)	$R_t R^{3\sigma-2}$	$2\phi_t + k\xi_R = 0$
(m)	$R^{3\sigma-2}$	$\phi_R - \xi_t = 0$
(n)	R^{-1}	$-\phi(3\sigma - 1)[(\sigma - 1)3C + C] + c(3\sigma - 2)\phi = 0$
(ñ)	$R_t R^{3\sigma+1}$	$\xi_{RR} = 0$

Tabla 1. Relaciones de las derivadas de los coeficientes del generador infinitesimal de simetrías, obtenidos de la aplicación $pr^{(2)}v\Delta_l(t, R, R_t, R_{tt}) = 0$, donde $l = 1, 2$ representa cada una de las ecuaciones del sistema.

Es necesario dar solución a las expresiones dadas en la Tabla 1. De la ecuación (c) se tiene que necesariamente $\phi = 0$ o $\lambda = 0$. Si se supone $\phi = 0$ entonces la ecuación (m) implica que $\xi_t = 0$ luego como de (j) ya se tiene $\xi_R = 0$ se concluye fácilmente que $\xi \equiv \xi_0$ con ξ_0 una constante. Entonces el generador infinitesimal de simetrías es igual a su prolongación y tienen la siguiente forma

$$v = pr^{(2)}v = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.24)$$

Como el generador infinitesimal debe satisfacer la ecuación (1.9), donde el mapeo exponencial $exp(\varepsilon v)x = \Psi(\varepsilon, x)$ da el grupo de simetrías que es generado por v , se obtiene que este grupo de simetrías $G \equiv \Psi$ esta dado por

$$G : (t, R) \rightarrow (t + \xi_0\varepsilon, R) \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (4.25)$$

Este grupo mapea soluciones del sistema en otras soluciones mediante la siguiente regla, si $R(t)$ es una solución, entonces también lo es $R(t - \xi_0\varepsilon)$.

Ahora se verá que sucede cuando se supone $\phi \neq 0$, $C \neq 0$, $\lambda = 0$ y $\sigma = \frac{2}{3}$. Como $C \neq 0$ de (g) se tiene $\phi_{RR} - 2\xi_{Rt} = 0$ usándolo en la ecuación (e) junto con la suposición $\lambda = 0$ se tiene que $\phi_{tt} = 0$. De (ñ) se tiene $\xi_{RR} = 0$ lo cual lleva a que la ecuación (f) tome la forma $2\phi_{Rt} - \xi_{tt} = 0$. Como de (j) se ve que $\xi_R = 0$ entonces la ecuación (l) indica que $\phi_t = 0$. Las ecuaciones (d) y (n) se satisfacen bajo la suposición $\sigma = \frac{2}{3}$. Mientras que la ecuación (i) agregando además la condición dada por la ecuación (m). De las consideraciones anteriores la Tabla 1 se reduce a la siguiente.

(A)	$\phi_{RR} - 2\xi_{Rt} = 0$
(B)	ϕ_{tt}
(C)	$2\phi_{Rt} - \xi_{tt} = 0$
(D)	$\phi_R - \xi_t = 0$
(E)	$\phi_t = 0$
(F)	$\xi_R = 0$

De (E) se tiene $\phi_t = 0$ entonces de (C) se sigue que $\xi_{tt} = 0$. De (F) se ve que $\xi_R = 0$ entonces usando esto en (A) se concluye que $\phi_{RR} = 0$. En resumen se ha obtenido que $\xi_{tt} = \xi_R = 0$ y $\phi_{RR} = \phi_t = 0$. De lo cual fácilmente se puede concluir que $\xi \equiv \xi(t)$ y $\phi \equiv \phi(R)$ por lo que es válido suponer que $\xi_t = \xi_0$ y $\phi_R = \phi_0$ donde ξ_0, ϕ_0 son constantes. Pero debido a que la ecuación (D) se debe satisfacer, entonces necesariamente se debe cumplir $\xi_0 = \phi_0 = a$, donde a es la misma constante. Entonces para determinar el generador infinitesimal de simetrías se tienen que integrar las ecuaciones $\xi_t = a$ y $\phi_R = a$ entre $[0, t]$ y $[0, R]$ respectivamente y bajo la condición $\xi(0) = \phi(0) = 0$ con lo cual se obtiene $\xi(t) = at$ y $\phi(R) = aR$. Por lo tanto el generador infinitesimal de simetrías y su segunda prolongación toman la siguiente forma

$$v = at \frac{\partial}{\partial t} + aR \frac{\partial}{\partial R} \quad (4.26)$$

$$pr^{(2)}v = v - aR_{tt} \frac{\partial}{\partial R_{tt}} \quad (4.27)$$

Con el generador infinitesimal de simetrías se obtienen los siguientes grupos

$$G_1 : (t, R) \rightarrow (te^{a\varepsilon}, R) \quad (4.28)$$

$$G_2 : (t, R) \rightarrow (t, Re^{a\varepsilon}) \quad (4.29)$$

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Cada acción de grupo indica como se deberán transformar las variables independientes y dependientes, para que deje invariante el conjunto de soluciones. Las transformaciones en las variables son

$$t \rightarrow \tilde{t} = te^{a\varepsilon}$$

$$R \rightarrow \tilde{R} = Re^{a\varepsilon}$$

De lo cual se tiene que $t = \tilde{t}e^{-a\varepsilon}$ y $R = \tilde{R}e^{-a\varepsilon}$, entonces $dt^2 = e^{-2a\varepsilon}d\tilde{t}^2$, $R^2 = e^{-2a\varepsilon}\tilde{R}^2$. Si se sustituye lo anterior en la métrica de Robertson-Walker entonces se tiene

$$ds^2 = e^{-2a\varepsilon}d\tilde{S}^2 \quad (4.30)$$

donde $d\tilde{S}^2 = -d\tilde{t}^2 + \tilde{R}^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right]$

En resumen se ha encontrado que cuando $\phi = 0$ las soluciones nuevas que se pueden generar a partir del grupo infinitesimal de simetrías con $\sigma \neq 2/3$ se dan a partir de traslaciones en la coordenada temporal $x = t$, esto implica que dada una solución $R(t)$ está mantiene sus propiedades a través de traslaciones temporales, lo cual indica que el factor de expansión $R_\sigma(t)$ en cada modelo, es

válido para cada época en que se le consideré, conservando siempre la geometría intrínseca del espacio-tiempo.

Por otro lado si $\phi \neq 0$, $C \neq 0$, $\lambda = 0$ y $\sigma = 2/3$, entonces el grupo de simetrías actúa sobre la variable independiente y dependiente, haciendo que la métrica se transforme como en (4.30), lo cual indica que para este caso la métrica nueva podría ser un múltiplo de la métrica de Robertson-Walker, lo cual prueba que la métrica es única para este espacio-tiempo. Lo especial de este caso está en el hecho de que justo para presiones $p < -1/3\rho$ el universo experimenta una expansión acelerada, véase [14][pag. 471], entonces que la métrica sea un múltiplo de la métrica de Robertson-Walker indica la naturaleza de que a $p = -1/3\rho$ se tiene el límite clásico para una expansión del universo donde aún no hay expansión acelerada. Nótese que aún no hay aceleración pero se tienen soluciones donde la escala del espacio-tiempo puede ser mayor, lo cual debe corresponder a un ligero rompimiento en la homogeneidad, no igual al que describen las teorías acerca de la expansión acelerada del universo, pero que deben estar en correspondencia con el límite de estas.

4.3. Modelo cosmológico compuesto por dos fluidos

Una versión más real en la composición del universo, es considerarlo compuesto por más de dos fluidos perfectos, algunos de los modelos propuestos se pueden ver en [15][16], cuyas soluciones encontradas a las ecuaciones de campo de Einstein resultan ser soluciones implícitas para el factor de expansión de la métrica de Robertson-Walker, en lo siguiente supondremos que tenemos la suma de un fluido de radiación y uno de materia, supondremos que ambos fluidos no interactúan por lo cual las ecuaciones de estado para los fluidos son las siguientes

$$\rho(t) = \rho_{m_0} \frac{R_0^3}{R^3(t)} + \rho_{r_0} \frac{R_0^4}{R^4(t)} \quad (4.31)$$

$$p(t) = \frac{1}{3} \rho_{r_0} \frac{R_0^4}{R^4(t)} \quad (4.32)$$

donde ρ_{m_0} y ρ_{r_0} son la densidad de la materia en el universo y la densidad de radiación respectivamente (ambas cantidades consideradas para la actualidad), R_0 es el factor de expansión del universo en la actualidad.

A partir de las ecuaciones de estado las ecuaciones de Friedman se reducen al siguiente sistema

$$3R_t^2 R^2 + 3kR^2 - 8\pi\rho_{m_0} R_0^3 R - 8\pi\rho_{r_0} R_0^4 = 0 \quad (4.33)$$

$$2R_{tt}R^3 + R_t^2 R^2 + kR^2 + \frac{8}{3}\pi\rho_{r_0} R_0^4 = 0 \quad (4.34)$$

Las variables independientes y dependientes son t y R respectivamente. Entonces el generador de simetrías y su prolongación tienen la forma de las ecuaciones (4.18)-(4.19) respectivamente y los coeficientes están determinados por las ecuaciones (4.22)-(4.23). La matriz Jacobiana del sistema es la siguiente

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 6(R_t^2 + k)R - 8\pi\rho_{m_0}R_0^3 & 6R_tR^2 & 0 \\ 0 & 6R_{tt}R^2 + 2(R_t^2 + k)R & 2R_tR^2 & 2R^3 \end{pmatrix}$$

la cual es de rango máximo, por lo cual se puede aplicar la segunda prolongación del generador de simetrías $pr^{(2)}v$ al sistema (4.33)-(4.34). Para simplificar se hace $a = 8\pi\rho_{m_0}R_0^3, b = 8\pi\rho_{r_0}R_0^4$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 pr^{(2)}v[\Delta_1(t, R_J)] &= (6R_t^2R + 6kR - 1)\phi + (6R_tR^2)\phi^1 \\
 &= 2a\phi - 2b\phi - a\phi + 6\phi_tR_tR^2 + 6(\phi_R - \xi_t)R^2 \left(\frac{a}{3} \frac{1}{R} + \frac{b}{3} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{1}{R^2} - k \right) - 6\xi_RR_tR^2 \left(\frac{a}{3} \frac{1}{R} + \frac{b}{3} \frac{1}{R^2 - k} \right) \\
 &= \{a\phi + 2b(\phi_R - \xi_t)\}(1) \\
 &\quad + \{2b\phi\}\left(\frac{1}{R}\right) + \{\phi_t + k\xi_R\}(R_tR^2) + \{k(\phi_R - \xi_t)\}(R^2) \\
 &\quad + \{-2a\xi_R\}(R_tR) + \{2b\xi_R\}(R_t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 pr^{(2)}v[\Delta_2(t, R_J)] &= 6\phi R_{tt}R^2 + 2\phi R_tR + 2k\phi R + 2\phi^1R_tR^2 + 2\phi^2R^3 \\
 &= -6\phi \left(\frac{a}{6R^2} + \frac{b}{3R^3} \right) R^2 + 2\phi R_tR + 2k\phi R + 2\phi_tR_tR^2 + \\
 &\quad 2(\phi_R - \xi_t)R^2 \left(\frac{a}{R} + \frac{b}{R^2} - k \right) - 2\xi_RR^2R_t \left(\frac{a}{R} + \frac{b}{R^2} - k \right) \\
 &\quad + 2\phi_{tt}R^3 + 2(2\phi_{Rt} - \xi_{tt})R_tR^3 + 2(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) \left(\frac{a}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b}{R^2} - k \right) R^3 - 2(\phi_R - 2\xi_t) \left(\frac{a}{6R^2} + \frac{b}{3R^3} \right) R^3 + 6\xi_R \times \\
 &\quad \left(\frac{a}{R^2} + \frac{b}{R^3} \right) R_tR^3 - 2\xi_{RR}R^3 \left(\frac{a}{R} + \frac{b}{R^2} - k \right) R_t \\
 &= \left\{ -a\phi + \frac{2b}{3}(\phi_R - \xi_t) - \frac{2b}{3}(\phi_R - 2\xi_t) \right\} (1) + \left\{ 2\phi - \frac{a}{3} \times \right. \\
 &\quad \left. \xi_R - \frac{2b}{3}\xi_{RR} \right\} (R_tR) + \left\{ 2k\phi + \frac{2a}{3}(\phi_R - \xi_t) + \frac{2b}{3}(\phi_{RR} \right. \\
 &\quad \left. - 2\xi_{tR}) - \frac{a}{3}(\phi_R - 2\xi_t) \right\} (R) + \left\{ \phi_t + k\xi_R - \frac{a}{3}\xi_{RR} \right\} (R_t \\
 &\quad \times R^2) + \{2a(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) - 3k(\phi_R - \xi_t)\}(R^2) + \{\phi_{tt} - \\
 &\quad k(\phi_{RR} - 2\xi_{tR})\}(R^3) + \{2\phi_{Rt} - \xi_{tt} + k\xi_{RR}\}(R_tR^3) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Para que se satisfagan los resultados anteriores se requiere que los coeficientes de los monomios sean idénticamente cero, entonces en resumen se tiene

	Monomios	Coefficientes de $pr^{(2)}v[\Delta_1(t, R, R_t, R_{tt})] = 0$
(a)	1	$a\phi + 2b(\phi_R - \xi_t) = 0$
(b)	$1/R$	$b\phi = 0$
(c)	$R_t R^2$	$\phi_t + k\phi_R = 0$
(d)	R^2	$k(\phi_R - \xi_t) = 0$
(e)	$R_t R$	$a\xi_R = 0$
	Monomios	Coefficientes de $pr^{(2)}v[\Delta_2(t, R, R_t, R_{tt})] = 0$
(f)	1	$-a\phi + \frac{2}{3}b(\phi_R - \xi_t) - \frac{2}{3}b(\phi_R - 2\xi_t) = 0$
(g)	$R_t R$	$2\phi - \frac{1}{3}a\xi_R - \frac{2}{3}b\xi_{RR} = 0$
(h)	R	$2k\phi + \frac{2}{3}a(\phi_R - \xi_t) + \frac{2}{3}b(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) - \frac{1}{3}a(\phi_R - 2\xi_t) = 0$
(i)	$R_t R^2$	$\phi_t + k\xi_R - \frac{1}{3}a\xi_{RR} = 0$
(j)	R^2	$2a(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) - 3k(\phi_R - \xi_t) = 0$
(k)	R^3	$\phi_{tt} - k(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) = 0$
(l)	$R_t R^3$	$2\phi_{Rt} - \xi_{tt} + k\xi_{RR} = 0$

Tabla 3. Relaciones de las derivadas de los coeficientes, donde $a = 8\pi\rho_{m_0}R_0^3$ y $b = 8\pi\rho_{r_0}R_0^4$.

De la ecuación (b) se tiene $\phi = 0$ por lo cual de (a) se sigue $\xi_t = 0$. Pero de (e) se tiene $\xi_R = 0$. Por lo tanto se concluye $\xi = \xi_0$ con $\xi_0 = \text{constante}$ y $\phi \equiv 0$. De esta manera el generador infinitesimal de simetrías es igual a su segunda prolongación.

$$v = pr^{(2)}v = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.35)$$

Entonces el grupo de simetrías es el siguiente

$$G : (t, R) \rightarrow (t + \xi_0\varepsilon, R) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Mediante el grupo anterior se pueden generar soluciones. Lo cual significa que dada una solución $R(t)$ para el sistema entonces $R(t - \xi_0\varepsilon)$ donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ es una solución sin embargo necesitamos determinar una solución para este fluido, lo cual se encontrará utilizando las herramientas que se muestran en el Capítulo 4. Lo primero que se hará es tratar de reducir el sistema de ecuaciones diferenciales a una sola ecuación. Si se combinan las ecuaciones (4.33)-(4.34), despejando el término $R_t^2 R^2$ de (4.33) y lo sustituimos en (4.34) se encuentra que la ecuación resultante es

$$2R^3 R_{tt} + \frac{8}{3}\pi\rho_{m_0}R_0^3 R + \frac{16}{3}\pi\rho_{r_0}R_0^4 = 0$$

de la ecuación anterior cada una de sus soluciones debe ser solución para las ecuaciones del sistema, nuevamente para simplificar la notación hágase $a = 8\pi\rho_{m_0}R_0^3$ y $b = 8\pi\rho_{r_0}R_0^4$ con lo cual queda la siguiente ecuación

$$6R^3 R_{tt} + aR + 2b = 0 \quad \Delta(t, R_J) \quad (4.36)$$

Como se puede ver la ecuación resultante tiene soluciones para alguna $R(t)$, nuevamente la variable independiente y dependiente es t y R respectivamente, por lo cual se puede usar el mismo generador de simetrías y su prolongación (4.18)(4.19) junto con sus coeficientes (4.22)-(4.23). Para poder encontrar una nueva solución mediante cuadraturas se necesita encontrar el grupo de simetrías

de la ecuación (4.36). Para esto se aplica la segunda prolongación a la ecuación resultante $pr^{(2)}v(2R^3\phi_{Rt} + aR + 2b) = 0$.

$$\begin{aligned}
 pr^{(2)}v[\Delta(t, R_J)] &= (18R^2R_t + a)\phi + 6R^3\phi^2 \\
 &= 18\phi R^2 \left(-\frac{a}{6} \frac{1}{R^2} - \frac{b}{3} \right) + a\phi + 6\phi_{tt}R^3 + 6(2\phi_{Rt} - \xi_{tt})R_t \\
 &\quad \times R^3 + 6(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) \left(\frac{a}{3} \frac{1}{R} + \frac{b}{3} \frac{1}{R^2} - k \right) R^3 + 6(\phi_R - \\
 &\quad 2\xi_t) \left(-\frac{a}{6} \frac{1}{R^2} - \frac{b}{3} \frac{1}{R^3} \right) R^3 + 18\xi_R \left(\frac{a}{6} \frac{1}{R^2} + \frac{b}{3} \frac{1}{R^3} \right) R_t \times \\
 &\quad R^3 - 6\xi_{RR} \left(\frac{a}{3} \frac{1}{R} + \frac{b}{3} \frac{1}{R^2} - k \right) R_t R^3 \\
 &= \{-3a\phi + a\phi - 2b(\phi_R - 2\xi_t)\}(1) + \{-6b\phi\}\left(\frac{1}{R}\right) + \{6\phi_{tt} \\
 &\quad - 6k(\phi_{RR} - 2\xi_{tR})\}(R^3) + \{6(2\phi_{Rt} - \xi_{tt}) + 6k\xi_{RR}\}(R_t \\
 &\quad \times R^3) + \{2(\phi_{RR} - 2\xi_{tR})a\}(R^2) + \{2(\phi_{RR} - 2\xi_{tR})b - a \\
 &\quad \times (\phi_R - 2\xi_t)\}(R) + \{3a\xi_R - 2b\xi_{RR}\}(RR_t) + \{6b\xi_R\}(R_t) \\
 &\quad + \{-2a\xi_{RR}\}(R_t R^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior se satisface solo si los coeficientes de los monomios son cero, es decir

	Monomios	Coefficientes
(a)	1	$a\phi + b(\phi_R - 2\xi_t) = 0$
(b)	$1/R$	$6b\phi = 0$
(c)	R^3	$\phi_{tt} - k(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) = 0$
(d)	$R_t R^3$	$2\phi_{Rt} - \xi_{tt} + k\phi_{RR} = 0$
(e)	R^2	$a(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) = 0$
(f)	R	$2b(\phi_{RR} - 2\xi_{tR}) - a(\phi_R - 2\xi_t) = 0$
(g)	RR_t	$3a\xi_R - 2b\xi_{RR} = 0$
(h)	R_t	$b\xi_R = 0$
(i)	$R_t R^2$	$a\xi_{RR} = 0$

Tabla 4. Relaciones de las derivadas de los coeficientes.

De la ecuación (b) se tiene que $\phi = 0$ por lo cual es fácil concluir para (a) que $\xi_t = 0$. Pero de la ecuación (h) se tiene $\xi_R = 0$ por lo tanto $\xi = \xi_0$ donde ξ_0 es una constante. Entonces el generador infinitesimal de simetrías es igual a su segunda prolongación.

$$v = pr^{(2)}v = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.37)$$

Con lo que se obtiene el grupo de simetrías

$$G : (t, R) \rightarrow (t + \xi_0 \varepsilon, R) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Se puede utilizar el grupo de simetrías G para encontrar una solución de la ecuación (4.36), tal y como se explica en el final del Capítulo 3.

Sea $y = R$ y $u = t$, entonces

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\frac{dR}{dR}}{\frac{dt}{dR}} = \frac{1}{\frac{du}{dR}} = \frac{1}{u_y}$$

entonces $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{u_y}$

Pero necesitamos $\frac{d^2R}{dt^2}$, utilizando el resultado anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d^2R}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{u_y} \\ &= -(u_y)^{-2} \frac{du_y}{dt} = -(u_y)^{-2} \frac{\frac{du_y}{dy}}{\frac{dt}{dy}} \\ &= -(u_y)^{-2} \frac{u_{yy}}{u_y} = -\frac{1}{u_y^3} u_{yy} \end{aligned}$$

entonces $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{u_{yy}}{u_y^3}$. Para simplificar en (4.36) hagamos $A = a/3$, $B = 2b/3$ con lo cual se tiene la ecuación $2R^3 R_{tt} + AR + B = 0$, sustituyendo en está los valores encontrados para R_{tt} con el cambio de variable así como la misma R se tiene la siguiente ecuación

$$-2y^3 \frac{u_{yy}}{u_y^3} + Ay + B = 0$$

hacemos un cambio de variable, haciendo $z = u_y$ entonces $z_y = u_{yy}$ luego

$$-2y^3 \frac{z_y}{z^3} + Ay + B = 0 \tag{4.38}$$

entonces $\frac{z_y}{z^3} = \frac{A}{2y^2} + \frac{B}{2y^3}$, la expresión anterior aún parece difícil de integrar, entonces hagamos un cambio de variable más, sea $w = \frac{1}{z}$, entonces $\frac{dw}{dy} = -w^2 \frac{dz}{dy}$ de lo anterior se sigue que $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{dy}$ y $w^3 = \frac{1}{z^3}$, sustituyendo en la ecuación (4.38) se tiene

$$-w \frac{dw}{dy} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{y^2} + \frac{B}{y^3} \right)$$

pero $\frac{d(w^2)}{dy} = 2w \frac{dw}{dy}$, entonces $\frac{d(w^2)}{dy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{y^2} + \frac{B}{y^3} \right)$, haciendo $s = w^2$ finalmente se tiene

$$\frac{ds}{dy} = - \left(\frac{A}{y^2} + \frac{B}{y^3} \right)$$

Ahora integramos la ecuación anterior, entonces

$$s = \frac{2Ay^2 + By}{2y^3} + s_0$$

con s_0 una constante de integración, ahora recordando los cambios de variable que se hicieron llegamos a que $z = \frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{2(Ay + s_0y^2) + B}}$ pero $z = \frac{du}{dy} = \frac{dt}{dR}$ y $y = R$, entonces la integral es una cuadratura

$$\frac{dt}{dR} = \frac{\sqrt{2R}}{\sqrt{2(AR + s_0R^2) + B}}$$

Haciendo los cambios de variable adecuados, se encuentra que la integral es

$$\tilde{t} - \tilde{t}_0 = \frac{1}{s_0} \sqrt{(R + A')^2 + B'} - \frac{A'}{s_0} \operatorname{Ln} |R + A' + \sqrt{|B'| + (R + A')^2}|$$

Haciendo $t = s_0 \tilde{t}$ y $\tilde{t} = s_0 \tilde{t}$ se tiene

$$t - t_0 = \sqrt{(R + A')^2 + B'} - A' \operatorname{Ln} |R + A' + \sqrt{|B'| + (R + A')^2}| \tag{4.39}$$

donde $A' = \frac{A}{2s_0^2}$ y $B' = \frac{B}{2s_0^2} - \frac{A^2}{4s_0^4}$

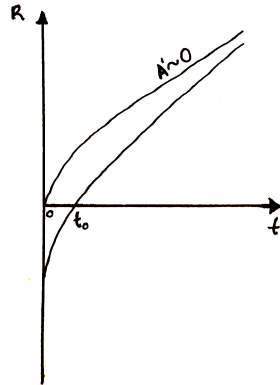


Figura 4.1: Gráfica del factor de escala R en función de t

Al estudiar la ecuación anterior se encuentra una gráfica para el factor de escala $R(t)$ en función del tiempo, esta gráfica se representa en la figura 4.1, donde además se tiene que solo para valores de $A' \sim 0$ esta representa una solución física para todo t , en caso contrario se obtienen valores negativos para R lo cual no representa una solución física, sino a partir de cierto t_0 .

La ecuación (4.39) es una solución implícita para R , como se puede ver del lado derecho de la ecuación no aparece la variable t , por lo cual al hacer actuar el grupo de simetrías del sistema sobre esta solución se tiene nuevamente que el factor de expansión conserva sus propiedades mediante las traslaciones en el tiempo. Lo cual nos permite concluir nuevamente que se conserva la geometría intrínseca del espacio-tiempo, por lo cual la homogeneidad e isotropía se siguen conservando.

Apéndice A

A.1. Teorema de Stokes

Sea T una $n-1$ forma, sobre una variedad M^n suave y compacta cuya frontera ∂M^n es suave por pedazos. Entonces

$$\int_{\partial M^n} T = \int_{M^n} dT$$

En particular, si la variedad M^n es cerrada (es decir no tiene frontera), entonces la integral de cualquier forma dT sobre la variedad es igual a cero.

A.2. Tensores $\delta\Gamma_{jk}^i$

Teorema A.1. .

(1) Los símbolos de Christoffel Γ_{kj}^i se transforman solo como un tensor solo bajo transformaciones lineales o afines de coordenadas $z^i = z^i(x^1, \dots, x^n)$. En este caso $\frac{\partial^2 z^i}{\partial x^k \partial x^j} \equiv 0$

(2) La variación de dos símbolos de Christoffel de dos conexiones diferentes es un tensor

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i$$

es un tensor tipo (1,2)

(3) La expresión

$$T_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{[kj]}^i$$

forma un tensor, el cual es conocido como tensor de torsión

A.3. Divergencia

Teorema A.2. Si en algunas coordenadas todas las derivadas de primer orden de g_{ij} se hacen cero en algún punto, entonces los símbolos de Christoffel de la conexión compatible Γ_{jk}^i con la métrica se hace cero en ese punto.

La divergencia covariante de un campo vectorial v es definido como

$$\text{div} v^i = \nabla_i v^i = v^i_{;i}$$

Teorema A.3. *Si la conexión es simétrica y compatible con una métrica $g \neq 0$, entonces la divergencia covariante de un campo vectorial es*

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} v^i)$$

La fórmula explícita para la divergencia $\text{div}T$ en un sistema coordenado arbitrario, relativo a una conexión simétrica compatible con la métrica

$$\nabla_i T^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} T^i)$$

Apéndice B

B.1. Espacios de máxima simetría

Vectores de Killing

Una métrica $g_{\mu\nu}(x)$ se dice que es una **forma-invariante** bajo una transformación de coordenadas dada $x \rightarrow x'$, cuando la métrica transformada $g'_{\mu\nu}(x')$ es la misma función de su argumento x'^{μ} como la métrica original $g_{\mu\nu}(x)$ en su argumento x^{μ} , esto es,

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad \text{para toda } y \quad (\text{B.1})$$

La condición para un escalar es diferente, esta es $S'(x') = S(x)$. A cualquier punto dado la métrica transformada esta dada por la relación

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x)$$

o de manera equivalente

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g'_{\rho\sigma}(x')$$

Cuando (B.1) es válida, se puede reemplazar $g'_{\rho\sigma}(x')$ con $g_{\rho\sigma}(x')$ y obtener el requerimiento fundamental para una forma invariante de la métrica:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x') \quad (\text{B.2})$$

Cualquier transformación $x \rightarrow x'$ que satisface (B.2) es llamada una isometría. En general la ecuación (B.2) es una restricción muy complicada sobre la función x'^{μ} . Esta se puede simplificar descendiendo al caso especial de una transformación de coordenada infinitesimal:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}(x) \quad \text{con } |\varepsilon| \ll 1 \quad (\text{B.3})$$

A primer orden en ε , la ecuación (B.2) se escribe como

$$0 = \frac{\partial \xi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\rho}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} g_{\rho\nu}(x) + \xi^{\mu}(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\mu}}$$

La ecuación anterior puede reescribirse en términos de derivadas de las componentes covariantes de $\xi_{\sigma} \equiv g_{\mu\sigma} \xi^{\mu}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \xi^{\mu} \left[\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right] \\ &= \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - 2\xi_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

o de manera mas compacta

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} \quad (\text{B.4})$$

Cualquier campo vectorial $\xi_\sigma(x)$ de cuatro componentes que satisface la ecuación (B.4) se dice que forma un campo vectorial de Killing de la métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Así el problema de determinar todas las simetrías infinitesimales de una métrica dada ahora se reduce al problema de determinar todos los vectores de Killing de la métrica dada. Cualquier campo vectorial particular de Killing $\xi_\rho^n(x)$ de la métrica $g_{\mu\nu}(x)$ puede ser expresado como

$$\xi_\rho^n(x) = A_\rho^\lambda(x; X)\xi_\lambda^n(X) + B_\rho^{\lambda\nu}(x; X)\xi_{\lambda;\nu}^n(X) \quad (\text{B.5})$$

Donde A_ρ^λ y $B_\rho^{\lambda\nu}$ son funciones que dependen de la métrica y del punto X , pero no dependen de los valores iniciales de $\xi_\lambda(X)$ y $\xi_{\lambda;\nu}(X)$, y por lo tanto son los mismos para todos los vectores de Killing. Cada vector de killing $\xi_\rho(x)$ de una métrica dada esta únicamente especificado por los valores de $\xi_\rho(X)$ y $\xi_{\rho;\sigma}(X)$ en cualquier punto particular X .

Un conjunto de vectores de Killing $\xi_\rho^n(x)$ se dice que es independiente si no satisface ninguna relación lineal de la forma

$$\sum_n c_n \xi_\rho^n(x) = 0 \quad (\text{B.6})$$

con coeficientes constantes c_n . La ecuación (B.5) dice que pueden haber a lo mas $N(N+1)/2$ vectores de killing independientes en N dimensiones.

Un espacio métrico se dice que es **homogéneo** si existen isometrías infinitesimales (B.3) que llevan cualquier punto X a cualquier otro punto en su vecindad inmediata.

Un espacio métrico se dice que es **isotrópico** alrededor de un punto X si existen isometrías infinitesimales (B.3) que dejan el punto X fijo, tales que $\xi^\lambda(X) = 0$, y para las cuales las primeras derivadas $\xi_{\lambda;\nu}(X)$ toman los posibles valores. Solo sujeto a la condición de antisimetría (B.4)

Una métrica que admite el máximo número $N(N+1)/2$ de campos de Killing se dice que es de **simetría máxima**. En particular, un espacio que es homogéneo e isotrópico alrededor de algún punto X debe admitir los $N(N+1)/2$ vectores de Killing.

Construcción de un espacio de máxima simetría

Considérese un espacio plano de dimensión $n+1$, con la métrica dada por

$$d\tau^2 = g_{ab}dx^a dx^b = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + K^{-1}dz^2$$

donde k es una constante y $C_{\mu\nu}$ es una matriz de $n \times n$

Se puede encajar un espacio de dimensión n , restringiendo las variables x^μ y z a la superficie de una esfera(o pseudoesfera)

$$kC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1 \quad (\text{B.7})$$

entonces

$$dz^2 = \frac{k^2(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{1 - kC_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}$$

Con lo cual el elemento de línea tiene la siguiente forma

$$d\tau^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{k(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{1 - kC_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}$$

Así los coeficientes de la métrica estan dados por

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{k}{1 - kC_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta} C_{\mu\lambda}x^\lambda C_{\nu k}x^k$$

Si el espacio permite coordenadas localmente euclidianas, entonces el elemento de línea se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} ds^2 &= k^{-1} \left[dx^2 + \frac{(x \cdot dx)^2}{1-x^2} \right] & k > 0 \\ ds^2 &= |k|^{-1} \left[dx^2 - \frac{(x \cdot dx)^2}{1+x^2} \right] & k < 0 \\ ds^2 &= dx^2 & k = 0 \end{aligned}$$

Las rotaciones del espacio de dimensión $n+1$ mantienen invariante la ecuación (B.7), lo cual indica que la métrica $(g_{\mu\nu}(x))$ acepta $\frac{n(n+1)}{2}$ grupos de isometrías de un parámetro. Esto es bajo transformaciones de la forma (véase [8])

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x'^\mu &= R_\nu^\mu x^\nu + R_z^\mu z \\ z \rightarrow z' &= R_\mu^z z^\mu + R_z^z z \end{aligned}$$

donde las constantes R_k^i son constantes que satisfacen

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu}R_\rho^\mu R_\sigma^\nu + k^{-1}R_\rho^z R_\sigma^z &= C_{\rho\sigma} \\ C_{\mu\nu}R_\rho^\mu R_z^\nu + k^{-1}R_\rho^z R_z^z &= 0 \\ C_{\mu\nu}R_z^\mu R_z^\nu + k^{-1}(R_z^z)^2 &= k^{-1} \end{aligned}$$

Enseguida se muestran dos tipos de transformaciones simples que satisfacen el sistema anterior.

1)

$$R_\nu^\mu = \mathfrak{R}_\nu^\mu \quad R_\mu^\mu = R_\mu^z = 0 \quad R_z^z = 1$$

donde \mathfrak{R}_ν^μ es una matriz de $n \times n$ que cumple $C_{\mu\nu}\mathfrak{R}_\rho^\mu \mathfrak{R}_\sigma^\nu = C_{\rho\sigma}$

$$x'^\mu = \mathfrak{R}_\nu^\mu x^\nu \tag{B.8}$$

2)

$$R_z^\mu = a^\mu \quad R_\mu^z = -kC_{\mu\nu}a^\nu \quad R_z^z = (1 - kC_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma)^{1/2} \quad R_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - bkC_{\nu\rho}a^\rho a^\mu$$

donde a^μ es arbitraria y $R_z^z \in \mathbb{R}$, con lo cual deben satisfacer

$$kC_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma \leq 1$$

y

$$b = \frac{1 - (1 - kC_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma)^{1/2}}{kC_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma}$$

lo que se tiene son cuasitraslaciones de la forma

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}[(1 - kC_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})^{1/2} - bkC_{\rho\sigma}x^{\rho}a^{\sigma}] \quad (\text{B.9})$$

estas transformaciones mandan el origen en a^{μ}

La existencia de la isometría (B.8) que incluye todas las rotaciones alrededor del origen significa que el espacio es isotrópico, mientras que la isometría (B.9) significa que cualquier punto es geoméricamente como cualquier otro, lo cual indica que el espacio es homogéneo.

Espacios con subespacios de máxima simetría

En muchos de los casos de interés para la física, el espacio(espacio-tiempo) total no es de máxima simetría, pero puede ser descompuesto en dos subespacios de máxima simetría. Por ejemplo, un espacio tridimensional esféricamente simétrico puede descomponerse en una familia de superficies esféricas centradas en el origen, cada una de las cuales es descrita por una métrica de la forma

$$ds^2 = K^{-1}[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2] \quad (\text{B.10})$$

Se dice que un subespacio con constante v^a es de máxima simetría si la métrica del espacio completo es invariante bajo un grupo infinitesimal de transformaciones

$$u^i \rightarrow u'^i = u^i + \varepsilon \xi^i(u, v) \quad (\text{B.11})$$

$$v^a \rightarrow v'^a = v^a \quad (\text{B.12})$$

con $M(M+1)/2$ vectores independientes ξ^i de Killing. Estas son transformaciones de la forma (B.3), pero con la especial característica de que las v^a son invariantes, así que

$$\xi^a(u, v) = 0 \quad (\text{B.13})$$

Note que aunque estas transformaciones afectan solo a la variable u , no hay razón por la cual las reglas de transformación no puedan depender paramétricamente de v^a del subespacio particular siendo transformado. Siempre es posible escoger coordenadas u tales que la métrica del espacio total es dada por

$$-d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{ab}(v)dv^a dv^b + f(v)\tilde{g}_{ij}(u)du^i du^j \quad (\text{B.14})$$

donde $g_{ab}(v)$ y $f(v)$ son funciones que dependen solo de la coordenada v , y $\tilde{g}_{ij}(u)$ es una función que depende solo de la coordenada u que por si misma es la métrica de un espacio $M - dimensional$ de máxima simetría.

En la mayoría de los casos de importancia, los subespacios de máxima simetría son espacios, que se le atribuyen al espacio-tiempo, así que todos los eigenvalores de la matriz g_{ij} son positivos. En estos casos se puede escribir

$$-d\tau^2 = g_{ab}(v)dv^a dv^b + f(v) \left\{ du^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right\} \quad (\text{B.15})$$

donde $f(v)$ es positiva y

$$k = \begin{cases} +1 & \text{si sub max sim tiene } K > 0 \\ -1 & \text{si sub max sim tiene } K < 0 \\ 0 & \text{si sub max sim tiene } K = 0 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Espacio-tiempo esféricamente simétrico

Supóngase que la dimensión del espacio-tiempo es $N = 4$, entonces hay tres eigenvalores de su métrica que son positivos y uno negativo, y este tiene asociado un subespacio de máxima simetría de dimensión 2 cuya métrica tiene eigenvalores positivos y curvatura positiva. Entonces se pueden encontrar v – *coordenadas*, las cuales se pueden identificar con r y t , y dos u – *coordenadas* identificadas con θ y φ a partir de la ecuación (B.12) y haciendo $k = 1$, se tiene

$$-d\tau^2 = g_{tt}(r, t)dt^2 + 2g_{rt}(r, t)drdt + g_{rr}(r, t)dr^2 + f(r, t)\{d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2\} \quad (\text{B.17})$$

donde $f(r, t)$ es una función positiva y $(g_{ij}(r, t))$ es una matriz de 2×2 con un eigenvalor positivo y uno negativo.

Espacio-tiempo homogéneo esféricamente simétrico

Supóngase que la dimensión del espacio total es $N = 4$, que tres de los eigenvalores de la métrica son positivos y uno es negativo, y que tiene un subespacio de máxima simetría tridimensional que tiene eigenvalores positivos y una curvatura arbitraria. Entonces hay una coordenada v y tres coordenadas u , tales que la ecuación (B.12) se convierte en

$$-d\tau^2 = g(v)dv^2 + f(v) \left\{ du^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right\} \quad (\text{B.18})$$

donde $f(v)$ es una función positiva, $g(v)$ es una función negativa y $u \in \mathbb{R}^3$

En esta situación siempre es conveniente definir nuevas coordenadas t, v, θ, φ por

$$\begin{aligned} \int (-g(v))^{\frac{1}{2}} dv &\equiv t \\ u^1 &\equiv r \sin\theta \cos\varphi \\ u^2 &\equiv r \sin\theta \sin\varphi \\ u^3 &\equiv r \cos\theta \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right\} \quad (\text{B.19})$$

donde $R(t) \equiv \sqrt{f(v)}$. De esta manera la métrica queda finalmente determinada a partir de la homogeneidad e isotropía, la ecuación (B.15) corresponde a la métrica de Robertson-Walker.

Bibliografía

- [1] WARNER, FRANK W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [2] B. O' NEILL, *Semi-riemannian geometry*, Academic Press, 1983.
- [3] S. P. NOVIKOV, I. A. TAIMANOV, *Modern geometric structures and fields*, American Mathematical Society, 2006.
- [4] HANS STEPHANI, *Relativity An Introduction to Special and General Relativity*, 3rd ed, Cambridge University Press, 2004.
- [5] PETER J. OLVER, *Applications of lie groups to differential equations*, 2nd ed, Springer, 1993.
- [6] H. STEPHANI, D. KRAMER, M.A.H. MACCALLUM, C. HOENSELAERS, E. HERLT, *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*, Cambridge university press, 2003.
- [7] IBRAGIMOV, N.H, *Transformation groups applied to mathematical physics* (Reidel, Boston), 1985.
- [8] WEINBERG, STEVEN, *Gravitation and Cosmology*, Jhon Wiley & Sons, Inc. 1972.
- [9] B. SHUTZ, *A first course on general relativity*, 2nd ed, Cambridge University Press, 2009.
- [10] MISNER, C. W., THORNE, K. S. & WHEELER, J. A., *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [11] RICHARD P. FEYNMAN, *Feynman lectures on gravitation*, Addison-Wesley, 1995.
- [12] ZELDOVICH, YA. B., 1962. *Soviet Phys, JETP* **14**, 1143.
- [13] HARRISON E. R., 1967. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **137**, 69-79.
- [14] JOHN F. HAWLEY & KATHERINE A. HOLCOMB, *Foundations of Modern Cosmology*, 2nd ed, Oxford University Press, 2004.
- [15] C. B. G. MCINTOSH, 1972. *Aust. J. Phys.***25**, 75.
- [16] C. B. G. MCINTOSH AND J. M. FOYSTER, 1972. *Aust J. Phys.***25**, 83.