



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Modelo de Eshelby aplicado a  
inclusiones en yacimientos  
petroleros**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A**

Sánchez Castillo Cristo Nephtalí

**DIRECTOR(A) DE TESIS**

Dra. Elsa Leticia Flores Márquez



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **Agradecimientos**

A mi madre **Rosahisela Castillo Haro**, a mi padre **Rafael Sánchez Madrid** (q.e.p.d.) y a mi hermano **Abraham Leví Sánchez Castillo** por darme todo el apoyo y el amor necesarios para que, hasta el día de hoy, pueda convertirme en un profesional íntegro y en lo que soy ahora.

A mis tíos **Raúl Sánchez Madrid**, **Ramiro Sánchez Madrid**, **Miguel Ángel Castillo Haro**, **Victor Manuel Castillo Haro** y **Rodolfo Sánchez Madrid** por estar presentes en mi vida, como parte de mi familia. Gracias a ellos, pude ver lo que es ser de la misma sangre y lo que es ser parte de una familia.

A mi directora de tesis y sinodal, la **Dra. Elsa Leticia Flores Márquez**, por sus conocimientos, sus observaciones y su apoyo durante la realización de esta tesis. Sin ella, no pude acercarme más al panorama que tengo sobre la industria y sobre los temas de interés.

A mis demás sinodales, el **Dr. Rodolfo Gabriel Camacho Velázquez**, la **Dra. Iza Canales García**, el **Ing. Javier Arellano Gil** y el **Ing. Leonardo Meneses Larios**, por su paciencia y sus observaciones hacia este trabajo que, junto con sus conocimientos, pude mejorarlo hasta llevarlo a su versión final, al mismo tiempo que pude ampliar más la información sobre mi tema de tesis. ¡Gracias a todos ustedes!

A mi tutora de carrera, la **Quim. Antonia del Carmen Pérez León**, por su apoyo durante toda mi carrera, además de estar siempre dispuesta a lo que necesite. Recuerdo muy bien mi primer semestre y como me la pasé a todo dar con ella.

A mi honorable alma mater la **Universidad Nacional Autónoma de México** y a la **Facultad de Ingeniería** y todos mis profesores que he tenido durante mi carrera, por darme no solo conocimientos y herramientas para mi vida profesional, sino también diferentes maneras de pensar y experiencias que han vivido mis profesores. Gracias a ello, pude desenvolverme en un ambiente que, si bien tiene sus altibajos, me ha servido para convertirme en un profesional de excelencia.

A la **División de Ingeniería en Ciencias de la Tierra** y al **Departamento de Ingeniería Petrolera** y todos sus coordinadores de carrera que tuve durante mi estancia en la facultad, por darme la atención necesaria para orientarme en este largo camino que terminé de tomar llamado "Ingeniería Petrolera", por la amabilidad de su personal y por la orientación que tuve durante mi proceso de titulación. Gracias a la **Srita. Irene** por su amabilidad al brindarme atención para todo lo referente a mi carrera, en lo académico y en lo administrativo.

A todos mis profesores de la carrera de Ingeniería Petrolera y mis profesores de Geología, por darme las herramientas necesarias para desempeñarme en el mundo laboral, además de la experiencia que nos cuentan para sobrellevar a la actualidad de la industria. Con ello, pude darme cuenta de que este logro, este momento de titulación, solo es el principio de lo que me esperará en mi vida profesional. ¡Muchas gracias por ello, queridos profesores!

A mi paidopsiquiatra y verdadero amigo, el **Dr. Humberto Corona**, por darme la confianza de contarle mis deseos, mis problemas y mis aspiraciones. Muchas gracias, doctor. Sin usted, no tendría con quién socializar y poder desenvolverme en este mundo con los demás.

A todos mis compañeros de carrera, sobre todo a **Abraham Mar, Saúl, Henry, Alexis, Fer, Adriana, Ricardo, Ingrid, Eric Monroy, Ibrahim Gallardo, René, Ángel, Angie, Noé, Adán, Edgar, Abraham Colula, Arnold, Joaquín, Osmár y Ricardo Ayala, Beto, Andrea, Carlos Josué, Carlos Encarnación, Ivonne, Jaquie, Rodrigo y Alejandro**, por todo el tiempo que nos la hemos pasado no solo durante las clases, sino también entre clase y clase y durante las prácticas de campo.

Y finalmente, agradezco a **Dios** por permitirme estar en esta etapa de vida y que gracias a él, pude terminarlo como se debe: con un entusiasmo tan grande que estoy dispuesto a darlo todo en lo que me resta de vida. ¡Gracias!

### **Dedicatorias**

A todos mis familiares, en especial a mi tío **Isaac** y a mi hermana **Patricia**. Gracias por todo y por ser parte esencial de mi vida, con momentos tristes y buenos que, al final, sé valorarlos.

A mi amigo y excompañero de primaria, **Juan Carlos**. Gracias, amigo. Por ti pude darme cuenta de que no basta con tener tantos amigos, sino también valorar la amistad verdadera.

A mis excompañeros de preparatoria, en especial a **Shannon, Carina, Pablo, Betty, Sebastián, Josué y Orlando**. Recuerdo bien todos y cada uno de esos momentos en donde hacíamos desde las ofrendas en la explanada de la preparatoria hasta nuestra despedida al finalizar el año escolar. Esos momentos nunca se olvidan.

***A la memoria de:***

***Mi padre Rafael Sánchez Madrid.***

***Mis abuelos Rafael Sánchez Ojeda, Esperanza Madrid Tapia, Fulgencio Castillo Reyes y  
Esther Haro Rodríguez.***

***Mi tío Fulgencio Castillo Haro.***

***Y demás familiares que se nos adelantaron en el camino.***

***Muchas gracias, donde quieran que estén.***

## Contenido

Índice de figuras.....	3
Índice de tablas.....	5
Resumen.....	6
Abstract.....	7
Capítulo 1: Introducción.....	8
1.1 Breve antecedente.....	8
1.2 Objetivo.....	9
1.3 Resumen de los capítulos.....	9
Capítulo 2: Marco teórico y conceptos fundamentales.....	11
2.1 Conceptos teóricos fundamentales.....	11
2.1.1 Conceptos teóricos de métodos sísmicos.....	11
2.1.2 Conceptos matemáticos y físicos.....	17
2.2 Ecuación de onda y su solución.....	20
2.3 Modelo de Eshelby.....	21
2.4 Esfuerzo y deformación.....	25
2.5 Módulo de Young y relación de Poisson.....	27
2.6 Ecuaciones de la deformación equivalente y el esfuerzo de la inclusión mediante la ley de Hooke.....	28
2.7 Aplicación a yacimientos petroleros.....	29
2.7.1. Caracterización de yacimientos.....	29
2.7.2 Geomecánica.....	29
2.7.3 Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF).....	30
2.7.4 Yacimientos no convencionales.....	30
2.7.5 Recuperación secundaria y mejorada.....	31
Capítulo 3: Implementación numérica.....	32
3.1 Introducción a la filosofía de funcionamiento del algoritmo desarrollado.....	32
3.2 Procedimiento inicial de funcionamiento del programa “EsfuerzosEshelbyMod”.....	32
3.3 Filosofía de funcionamiento de la función “EshelbyDemo”.....	34
3.4 Procedimiento de cálculo del campo externo dentro de “EshelbyDemo”.....	37
3.5 Procedimiento final del programa “EsfuerzosEshelbyMod”.....	41
3.6 Acoplamiento de celdas.....	41

Capítulo 4: Experimentos numéricos .....	46
4.1 Casos de experimentos numéricos a realizar.....	48
4.1.1 Caso 1 (roca-fluido) .....	48
4.1.2 Caso 2 (roca-roca) .....	49
4.1.3 Caso 3 (roca-fluido) .....	50
4.1.4 Caso 4 (roca-roca) .....	52
4.1.5 Caso 5 (roca-roca) .....	54
4.1.6 Caso 6 (roca-fluido) .....	55
4.1.7 Caso 7 (roca-roca) .....	56
4.1.8 Caso 8 (roca-fluido) .....	58
4.1.9 Caso 9 (roca-roca) .....	59
4.1.10 Caso 10 (roca-fluido) .....	60
4.2 Resultados.....	62
4.2.1 Caso 1.....	63
4.2.2 Caso 2.....	65
4.2.3 Caso 3.....	67
4.2.4 Caso 4.....	69
4.2.5 Caso 5.....	71
4.2.6 Caso 6.....	73
4.2.7 Caso 7.....	74
4.2.8 Caso 8.....	76
4.2.9 Caso 9.....	77
4.2.10 Caso 10.....	78
4.3 Ventajas y desventajas del modelo de Eshelby .....	80
Capítulo 5: Conclusiones.....	81
5.1 Conclusiones .....	81
5.2 Contribución .....	81
5.3 Recomendaciones .....	82
Referencias bibliográficas .....	83
Anexo. Diagramas de flujo del modelo de Eshelby.....	87

## Índice de figuras

Figura 2.1. Funcionamiento de la sísmica de reflexión. (Modificado de Lowrie, 2007).....	13
Figura 2.2. Sísmica de reflexión y refracción, consideradas ambas como una sola técnica. (Fuente: Romero Rubio, 2015).....	14
Figura 2.3. Esquema de las componentes de una onda.....	15
Figura 2.4. Tipos de esferoide.....	19
Figura 2.5. Explicación gráfica del modelo de Eshelby (Jaimes Tejeda, 2018; Eshelby, 1957) ...	22
Figura 2.6. Esquema de corte y soldadura para obtener el tensor de deformación necesario (Eshelby, 1957).....	23
Figura 2.7. Malla Voronoi para el modelo (González Martínez, 2000). ....	24
Figura 2.8. Malla de elementos finitos, para estudiar el comportamiento de materiales heterogéneos, en un caso más general (González Martínez, 2000; Nakamura, Suresh, 1993)...	24
Figura 2.9. Esquema ilustrativo de la deformación y el esfuerzo (Lowrie, 2007).....	26
Figura 2.10. Esquema ilustrativo de la relación de Poisson (Lowrie, 2007) .....	27
Figura 3.1. Diagrama de flujo del programa “EsfuerzosEshelbyMod “. ....	42
Figura 3.2. Diagrama de flujo de la función EshelbyDemo de Healy (2009). ....	43
Figura 3.3. Diagrama de flujo de la función EshelbyDemo de Healy (2009) (cont.) .....	44
Figura 3.4. Diagrama de flujo de la función EshelbyDemo de Healy (2009) (cont.) .....	45
Figura 4.1. Caso general del modelo sintético.....	47
Figura 4.2. Caso particular del modelo sintético.....	48
Figura 4.3. Ejemplos de formaciones compuestas de calizas, las que presentan porosidad vugular (Yao, Huang, 2016) .....	49
Figura 4.4. Esquema de un yacimiento de shale oil.....	50
Figura 4.5. Tipos de yacimiento geotérmico: 1.- Alta temperatura, 2.- Media temperatura, 3.- Baja temperatura, 4.- Surgencia térmica o manifestación superficial.....	51
Figura 4.6. Afloramiento de basaltos en Ciudad Universitaria, Ciudad de México. Este es un ejemplo de las litologías que se pueden encontrar en un yacimiento geotérmico. Las fracturas o vesículas pueden ser saturadas por el acuífero (sea artificial o natural) dependiendo de su conductividad, donde la misma roca es la encargada de transmitir el calor al acuífero.(“Basaltos en CU”, s.f.).....	52
Figura 4.7. Brecha.....	53
Figura 4.8. Conglomerado.....	53
Figura 4.9. Afloramiento de areniscas con lutitas, en Sudáfrica. (“Lutitas con areniscas”, s.f.) ....	55
Figura 4.10. Afloramiento de areniscas (con arcilla) en Letonia. La arcillosidad de estas puede reducir el tamaño de los poros, debido a la naturaleza y fineza de los granos (“Areniscas con arcillas”, s.f.).....	56
Figura 4.11. Ejemplos de trampas petroleras; la figura azul representa a un diapiro salino.....	57
Figura 4.12. Brecha dolomítica con presencia de vúgulos. (Adaptado de IMP, 2018) .....	58
Figura 4.13. Caliza mudstone o caliza con intercalaciones de lutita. (“Caliza mudstone”, s.f.).....	59
Figura 4.14. Formación La Casita, norte de México. Este es un ejemplo de formación carbonatada. (Casas Peña, 2016).....	61
Figura 4.15. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 1. ....	63
Figura 4.16. Esfuerzo normal del caso 1 .....	63
Figura 4.17. Esfuerzo cortante del caso 1 .....	64
Figura 4.18. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 2. ....	65

Figura 4.19. Esfuerzo normal del caso 2 .....	65
Figura 4.20. Esfuerzo cortante del caso 2 .....	66
Figura 4.21. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 3. ....	67
Figura 4.22. Esfuerzo normal del caso 3 .....	67
Figura 4.23. Esfuerzo cortante del caso 3 .....	68
Figura 4.24. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 4. ....	69
Figura 4.25. Esfuerzo normal del caso 4 .....	69
Figura 4.26. Esfuerzo cortante del caso 4 .....	70
Figura 4.27. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 5. ....	71
Figura 4.28. Esfuerzo normal del caso 5 .....	71
Figura 4.29. Esfuerzo cortante del caso 5 .....	72
Figura 4.30. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 6. ....	73
Figura 4.31. Esfuerzo normal del caso 6 .....	73
Figura 4.32. Esfuerzo cortante del caso 6 .....	74
Figura 4.33. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 7. ....	74
Figura 4.34. Esfuerzo normal del caso 7 .....	75
Figura 4.35. Esfuerzo cortante del caso 7 .....	75
Figura 4.36. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 8. ....	76
Figura 4.37. Esfuerzo normal del caso 8 .....	76
Figura 4.38. Esfuerzo cortante del caso 8 .....	76
Figura 4.39. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 9. ....	77
Figura 4.40. Esfuerzo normal del caso 9 .....	77
Figura 4.41. Esfuerzo cortante del caso 9 .....	78
Figura 4.42. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 10. ....	78
Figura 4.43. Esfuerzo normal del caso 10 .....	79
Figura 4.44. Esfuerzo cortante del caso 10 .....	79
Figura A.1. Diagrama de flujo de calcIsotropicStiffness de Healy (2009) (elaboración propia) ....	88
Figura A.2. Diagrama de flujo de calcEshelbyS de Healy (2009) (elaboración propia) .....	89
Figura A.3. Diagrama de flujo de calcEigenStrain de Healy (2009) (elaboración propia) .....	90
Figura A.4. Diagrama de flujo de IsPointOutside de Healy (2009). (Elaboración propia) .....	91
Figura A.5. Diagrama de flujo de calcExternalField de Healy (2009) (elaboración propia).....	92
Figura A.6. Diagrama de flujo de calcEshelbyG de Healy (2009) (elaboración propia) .....	93
Figura A.7. Diagrama de flujo de calcEshelbyG de Healy (2009) (elaboración propia) (cont.) ....	94

## Índice de tablas

Tabla 1. Tabla de parámetros para el caso 1 .....	49
Tabla 2. Tabla de parámetros para el caso 2 .....	50
Tabla 3. Tabla de parámetros para el caso 3 .....	52
Tabla 4. Tabla de parámetros para el caso 4 .....	54
Tabla 5. Tabla de parámetros para el caso 5 .....	55
Tabla 6. Tabla de parámetros para el caso 6 .....	56
Tabla 7. Tabla de parámetros para el caso 7 .....	57
Tabla 8. Tabla de parámetros para el caso 8 .....	58
Tabla 9. Tabla de parámetros para el caso 9 .....	59
Tabla 10. Tabla de parámetros para el caso 10 .....	61

## Resumen

El modelo de Eshelby (1957) es un elemento esencial para la interpretación de levantamientos sísmicos en yacimientos petroleros, el cual permite cuantificar los campos de esfuerzos en las formaciones de dichos yacimientos a partir de las propiedades elásticas de las mismas. En estudios primordiales de prospección sísmica, el modelo ha jugado un papel importante en el comportamiento elástico de materiales heterogéneos, constituyendo una base para formulaciones novedosas, tales como la propuesta por Healy (2009).

Como las formaciones productoras de hidrocarburos son medios heterogéneos que impactarían en la capacidad de flujo de estas, este modelo ha sido de ayuda para la administración de yacimientos, que incluye la corroboración de información de geociencias, registros de pozo, análisis de núcleos e imágenes realizadas en las formaciones a agujero descubierto. Antes de la perforación de pozos, el esfuerzo encaminado a interpretar zonas probables de hidrocarburos radica en el potencial del modelo para caracterizar el yacimiento; todo lo anterior con el propósito de acoplar los resultados a estudios de geomecánica y simulación numérica de flujo de fluidos.

En esta tesis se presenta un programa computacional con el cual se calculan los campos de esfuerzos por medio de funciones auxiliares creadas por Healy (2009), a fin de graficar el comportamiento de las formaciones al paso de ondas planas que se alejan de la fuente, y con ello interpretar dicho comportamiento. Se han introducido vectores de deformación y esfuerzo iniciales con fines experimentales para poder cuantificar la eficiencia del modelo, también se usaron propiedades elásticas típicas de litologías comunes en yacimientos petroleros, así como de yacimientos geotérmicos.

## Abstract

Eshelby's model (1957) is an essential element for the interpretation of seismic surveys in oil reservoirs, which allows to compute stress fields in the formations of these reservoirs from their elastic properties. In primordial studies of seismic prospection, the model has taken an important role in the elastic behavior of heterogeneous materials and has constituted a base for novel formulations, like that proposed by Healy (2009).

As the hydrocarbon-producing formations are heterogeneous media that affects in the flow capacity of these, this model has been helpful for reservoir management, that includes the corroboration of geoscience information, well logs, core analysis and images made in open-hole formations. Before to the well drilling, the effort aimed at hydrocarbon potential zones interpreting settles in the model potential to characterize the reservoir; all of this with the purpose of coupling the results to geomechanics studies in a coupled numerical simulation .

This thesis presents a computational program that allows to compute the stress fields through assistant functions done by Healy (2009), with the purpose of visualize the formation behavior when planar waves are moving away from the source and be able to interpret this behavior. Initial strain and stress vectors have been introduced for experimental purposes in order to quantify the model efficiency, also typical elastic properties from common lithologies from oil and gas reservoirs, as well as from geothermic reservoirs, has been used.

## Capítulo 1: Introducción

La caracterización de cualquier tipo de yacimientos involucra todos los métodos geofísicos de exploración, que tienen la ventaja de ser no invasivos y menos costosos que las perforaciones, además de cubrir extensiones volumétricas más grandes. En particular, los estudios sísmicos de refracción y/o de reflexión son mayormente utilizados en el estudio del subsuelo en busca de yacimientos potenciales, ya sean petroleros o mineros. Dentro de los primeros se contemplan los yacimientos de petróleo, de gas, geotérmicos y de gas y condensado. Dado que no podemos observar directamente las formaciones del subsuelo del área en estudio, es indispensable tener en cuenta que los estudios sísmicos nos darán una imagen de la estratigrafía, distribución estructural y forma de las formaciones geológicas. Esto es posible gracias a que los tiempos de viaje y la velocidad de las ondas emitidas son conocidos, y dependiendo de la resistencia de las formaciones para permitir el paso de las ondas acústicas o sísmicas y/o la capacidad de estas para modificar la velocidad de las ondas y/o a refractarlas, estas velocidades serán modificadas y podremos inferir la geometría de las secuencias sedimentarias (conjuntos de estratos).

Existen varios tipos de estudios de prospección geofísica y dependen de las leyes físicas que los rigen, en el caso de la prospección sísmica se considera una sola técnica, la de refracción, que es diferente de otras técnicas de prospección, como son la gravimétrica, la magnetometría, la eléctrica, por mencionar algunas. De lo anterior, cabe destacar que estas técnicas de prospección son no invasivas, y que también se diferencian por su característica de exploración, según sean puntuales o masivas.

La ventaja de la prospección sísmica es que proporciona una imagen continua del subsuelo por secciones bidimensionales, cosa que no pasa con todos los métodos. La mayoría de ellos da resultados puntuales y por lo tanto dan una imagen “discontinua” del yacimiento, aunque las técnicas de interpolación permiten también hacer secciones. Otra de las ventajas de la sísmica además de ser no invasiva, es su carácter no destructivo. A pesar de que las técnicas modernas no comprometen la integridad del yacimiento, en sus inicios la sísmica se hizo con ayuda de explosivos, como la dinamita, en ese caso sería una técnica destructiva y de alto riesgo. Hoy en día, la sísmica, como se mencionó anteriormente, no representa mayor riesgo debido a que se usan camiones vibradores en zonas continentales, o pistolas de agua y de aire en mar.

### 1.1 Breve antecedente

Las técnicas de exploración y prospección sísmica parten del estudio de los sismos (coloquialmente conocidos como “temblores” o terremotos) y del principio físico en la que ambas cosas están estrechamente relacionadas: los movimientos ondulatorios. La sismología es una ciencia que se ha estudiado durante siglos, nacida del interés del ser humano por estudiar los movimientos telúricos, que en la antigüedad se han atribuido a poderes divinos o sobrenaturales, y por buscar las maneras de poder mitigar, en lo posible, los daños que estos fenómenos ocasionan. Con respecto a las técnicas sísmicas de exploración, estas toman provecho del movimiento ondulatorio propio de los sismos, para explorar el subsuelo e interpretar la litología que conforma dicho subsuelo y sus tendencias elásticas y/o mecánicas que dependen de sus características físicas. Debido a ello, estas técnicas se han convertido en un elemento primordial

para la comprensión del subsuelo y su comportamiento, motivo por el cual se han usado en aplicaciones ingenieriles tales como: la exploración de yacimientos petroleros y mineros, estudios de geotecnia para proyectos de ingeniería civil (puentes, carreteras, construcción), por mencionar las más comunes.

Particularmente los yacimientos petroleros han sido estudiados desde varias perspectivas, en particular la relación petrofísica con las propiedades sísmicas de las formaciones geológicas. En torno al modelo de Eshelby (1957), si bien es un modelo relativamente “nuevo”, en realidad se ha estudiado desde hace mucho tiempo, específicamente desde antes de ser publicado en 1957. Sus primeras aplicaciones fueron en el estudio de la física de materiales y de la viscoelasticidad de medios heterogéneos, sean sólidos o fluidos. Sin embargo, con la llegada de métodos numéricos modernos y la simulación de ondas, así como la rápida evolución de las computadoras, este modelo atrajo el interés de los investigadores quienes se encargaron de darle un enfoque práctico, por ello ha sido la base para novedosas formulaciones, cada una con consideraciones particulares sobre el problema físico que resuelven, pero manteniendo en todo momento las hipótesis autoconsistentes del mismo. Es en este punto donde radica el potencial del modelo para ser codificado mediante lenguajes y entornos de programación, dando como resultado la versatilidad del modelo para su aplicación no solo en el campo científico, sino también en el ingenieril.

Por ello, el modelo de Eshelby (1957) cambió el paradigma característico de la mecánica de medios continuos, dando una sorprendente respuesta al problema de determinar el comportamiento de los campos elásticos en materiales heterogéneos. Hoy en día, este modelo es todavía aplicable en los estudios geofísicos de mecánica de rocas y de geotecnia en general, que, junto con las técnicas de exploración sísmica, han contribuido a mejorar la comprensión de los campos elásticos en el subsuelo, principal razón de su aplicabilidad en la prospección sísmica para la explotación de recursos naturales como petróleo, gas, agua y minerales.

## 1.2 Objetivo

El objetivo del presente trabajo es aplicar el modelo de Eshelby (1957) en ejemplos tipo de la industria petrolera, a partir de ensayos numéricos que permiten reproducir los campos de esfuerzos en un medio compuesto (matriz e inclusión), modelando el paso de ondas planas en estos medios. En este trabajo se usaron varios valores típicos de parámetros elásticos de rocas encontradas en los yacimientos petroleros. En otras palabras, el objetivo del trabajo es construir un modelo sintético de un yacimiento petrolero a través del modelo de Eshelby (1957) para identificar el comportamiento elástico de este yacimiento, bajo la suposición de distintas sensibilidades elásticas de litologías comunes en estos yacimientos, y con ello visualizar y cuantificar los campos de esfuerzos presentes en dichos modelos. Estos experimentos sintéticos permitirán cuantificar su potencial para el estudio de prospección sísmica en yacimientos petroleros y/o geotérmicos.

## 1.3 Resumen de los capítulos

Este trabajo se divide en cinco capítulos. Aparte de lo expuesto en este capítulo, los cuatro capítulos restantes se distribuyen y se describen de manera siguiente:

- En el segundo capítulo, se establecerá el marco teórico fundamental para la comprensión del tema y con ello se desarrollará todo lo referente a los estudios de sísmica, el modelo de Eshelby (1957), y sus aplicaciones potenciales en la industria petrolera.
- En el tercer capítulo se desarrollarán la parte práctica del trabajo y se mostrarán las ecuaciones a desarrollar para el modelo sintético y otras adicionales para la comprensión del fenómeno, las cuales se tomarán como referencia para la interpretación de los resultados y comportamientos arrojados por el modelo.
- En un cuarto capítulo, se mostrará un recopilatorio de experimentos numéricos y sus descripciones, los cuales se usaron para el modelo desarrollado. Se mostrarán además las interpretaciones de cada experimento y sus resultados asociados, así como las ventajas y limitantes del modelo desarrollado.
- En un quinto capítulo, se mostrarán las conclusiones y las debidas recomendaciones que se tienen que atender para llevar el modelo a más aplicaciones dentro de la industria petrolera.

## Capítulo 2: Marco teórico y conceptos fundamentales

Este capítulo está dedicado a la descripción detallada de los conceptos fundamentales necesarios para entender el modelo de Eshelby, las ecuaciones fundamentales que describen el fenómeno físico que deseamos modelar y los parámetros físicos involucrados en las mismas.

El modelo de Eshelby (1957) es una herramienta matemática mediante la cual se puede modelar y simular el comportamiento de medios heterogéneos. Los yacimientos petroleros, al ser claros ejemplos por naturaleza de este tipo de medios, pueden ser tratados por este tipo de modelos. Sin embargo, se debe tomar en cuenta las características de la prueba sísmica y entender la teoría para determinar el modelo más conveniente para la interpretación del levantamiento sísmico de un yacimiento.

### 2.1 Conceptos teóricos fundamentales

Los siguientes conceptos que serán desarrollados en este apartado son fundamentales para entender el modelo de Eshelby y la transferencia de ondas sísmicas en medios compuestos. Asimismo, estos conceptos son cruciales para el entendimiento de los resultados y de cómo se pueden aplicar los resultados de este trabajo a la prospección sísmica de yacimientos petroleros.

Iniciaremos con los conceptos relativos a los métodos sísmicos

#### 2.1.1 Conceptos teóricos de métodos sísmicos

##### ***Banda ultrasónica:***

El ultrasonido está representado por ondas mecánicas longitudinales con una frecuencia mayor de 20,000 ciclos por segundo (Médica, 2018). La frecuencia en que funcionan los transductores en ultrasonido diagnóstico es usualmente de 2 a 5 MHz (de dos a cinco millones de ciclos por segundo).

##### ***Sísmica de refracción:***

La sísmica de refracción consiste en la incidencia de ondas sísmicas las cuales, al atravesar de una formación a otra, ocasiona una anomalía en la velocidad del tren de ondas (Lowrie, 2007). Este fenómeno se rige bajo dos leyes fundamentales, dependiendo de la forma en cómo se trabaja la incidencia: la ley de Snell y la ley de Huygens. La ley de Huygens estipula que “todos los puntos en un frente de onda pueden ser considerados como puntos fuente para la generación de nuevas ondas esféricas”, y además garantiza que el nuevo frente de ondas es la superficie tangencial al campo de ondas secundarias. Por su parte, la ley de Snell garantiza la reflexión de las ondas a su paso en una formación “resistente”, es decir, que no admite el paso de las ondas.

Este método de sísmica tiene su particularidad de que las ondas incidentes de formaciones superiores generan en formaciones inferiores una red de ondas esféricas, las cuales se dispersan en todas partes de dicha formación. En términos de velocidades, estas ondas viajan con velocidades que varían principalmente del tipo de material del que se componen dichas formaciones, así como las posibles heterogeneidades que se pueden encontrar en el subsuelo, sean fracturas, estratificaciones, granos, etc.

Estas velocidades están controladas por los parámetros elásticos que describen el material y pueden correlacionarse con numerosas propiedades geomecánicas.

### ***Sísmica de reflexión:***

Esta técnica de exploración sísmica se basa principalmente en la reflexión de las ondas, por la cual se rige la ley de Fermat (Lowrie, 2007). Esta ley establece que, para un tren de ondas y dos puntos A y B que conforman los extremos de las trayectorias posibles, el camino más corto es la que tiene el menor tiempo de viaje entre dichos puntos.

Esta técnica consiste en la incidencia de un tren de ondas, las cuales algunas “rebotan” al entrar en contacto con una interfase en la cual una de las formaciones no permite el paso de las ondas, dependiendo del material del que se componen, y del tipo de ondas que se inciden, tal como se muestra en la Figura 2.1. Esto nos da como resultado la recopilación de los datos de viaje entre el emisor y el geófono, al tomar en cuenta la profundidad a la cual son capaces de transitar las ondas. Esto nos da una “imagen” real de lo que está en el subsuelo, la cual permite hacer un levantamiento sísmico al procesar la información en cuanto a los tiempos de viaje, como se muestra en la Figura 2.2.

A la hora de hacer el procesamiento, es posible que estos datos recolectados contengan algún “ruido” indeseable, es decir, datos atípicos ocasionados por la superposición de las ondas o por la forma de distribuir los geófonos a lo largo del área en estudio. Este ruido se mitiga al elegir la distribución que genere menos ruido, y al discriminar (o descartar, mejor dicho), mediante normalización, esos valores atípicos que ocasionarán en interpretaciones erróneas las cuales podrían desencadenar en una pésima caracterización del yacimiento.

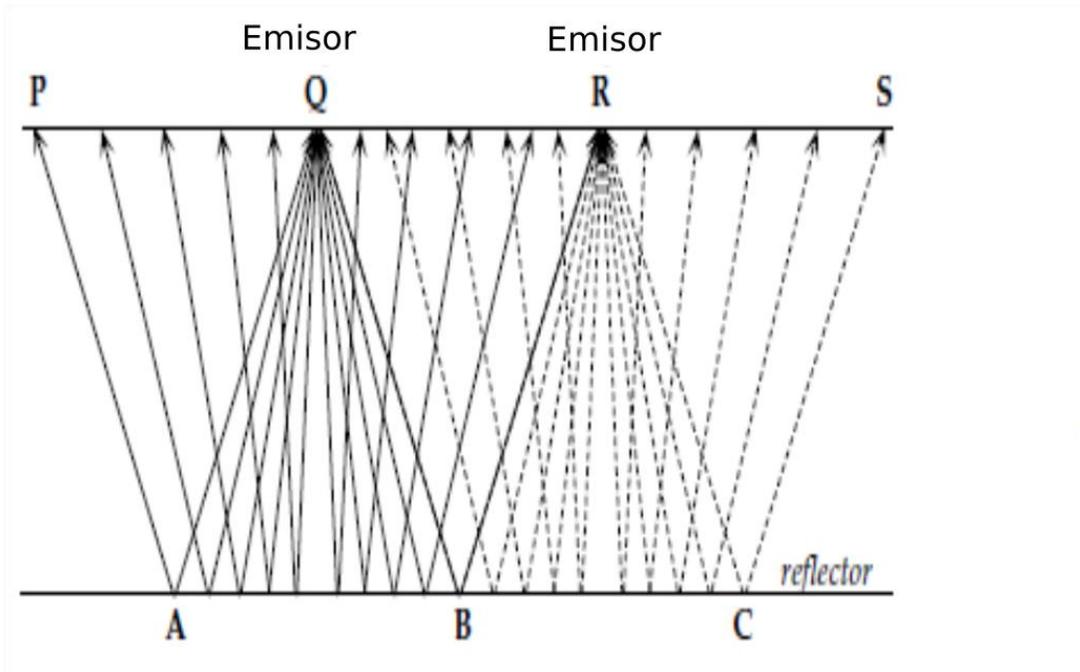


Figura 2.1. Funcionamiento de la sísmica de reflexión. (Modificado de Lowrie, 2007)

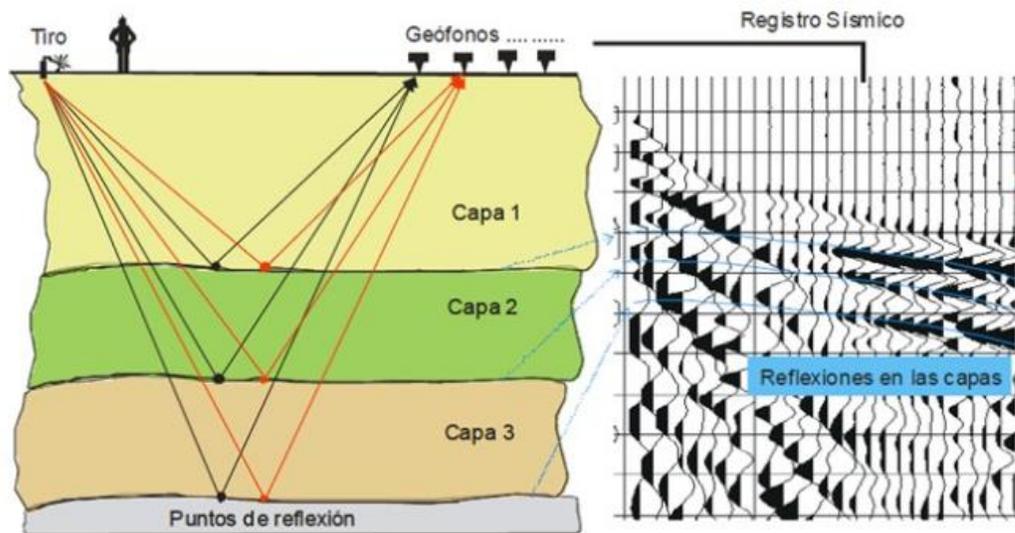
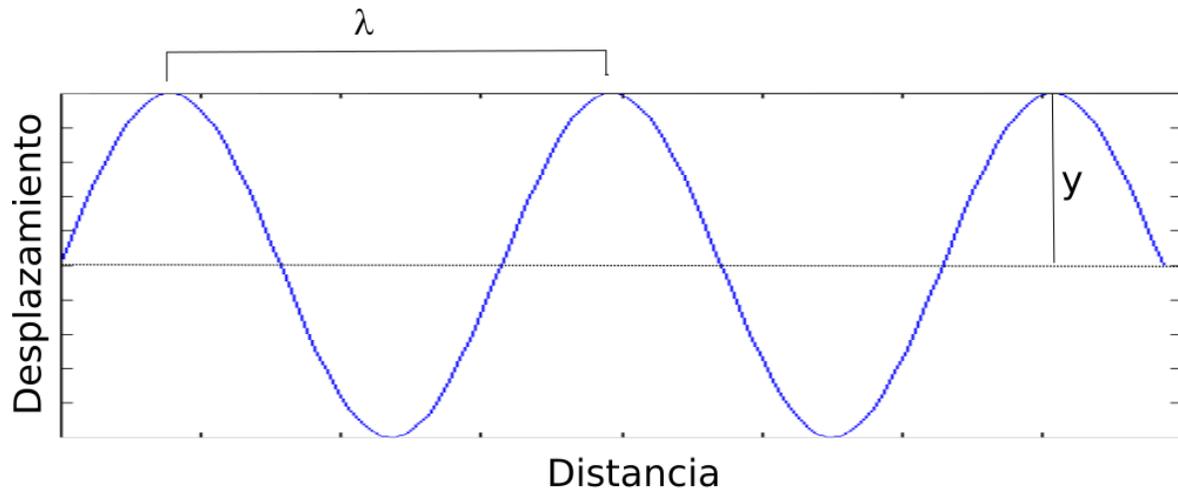


Figura 2.2. Sísmica de reflexión y refracción, consideradas ambas como una sola técnica. (Fuente: Romero Rubio, 2015)

**Onda:**

En física, una onda (Figura 2.3) consiste en la propagación de una perturbación de alguna propiedad del espacio, por ejemplo, densidad, presión, campo eléctrico o campo magnético, implicando un transporte de energía sin transporte de materia (French, 1971). El espacio perturbado puede contener materia (aire, agua, etc.) o no (el vacío).

# Onda



$\lambda$  = Longitud de onda

$y$  = Amplitud

Figura 2.3. Esquema de las componentes de una onda.

## **Longitud de onda:**

En física, se conoce como longitud de onda la distancia que recorre una perturbación periódica que se propaga por un medio en un ciclo (Hecht, 1987). La longitud de onda, también conocida como periodo espacial, es la inversa de la frecuencia multiplicada por la velocidad de propagación de la onda en el medio por el cual se propaga. La longitud de onda se suele representar con la letra griega  $\lambda$ .

## **Amplitud:**

En física la amplitud de un movimiento oscilatorio, ondulatorio o señal electromagnética es una medida de la variación máxima del desplazamiento u otra magnitud física que varía periódica o cuasiperiódicamente en el tiempo (Tatum, 2007). Dicho de otra forma, la amplitud es la distancia entre el punto más alejado de una onda y el punto de equilibrio o medio.

## **Onda plana:**

En la física de propagación de ondas (especialmente en campos y ondas electromagnéticas), una onda plana o también llamada onda unidimensional, es una onda de frecuencia constante cuyos frentes de onda (superficies con fase constante) son planos paralelos de amplitud constante (Jackson, 1998) normales al vector velocidad de fase.

**Número de onda:**

La inversa de la longitud de onda, es decir, el número de ciclos de onda por unidad de distancia (“Número de onda”, s. f.). Su abreviatura es  $k$ .

**Frecuencia angular:**

Es el cambio en el ángulo de rotación  $\Delta\varphi$  por unidad de tiempo  $\Delta t$  en un sistema rotativo u oscilante (“Frecuencia angular”, 2018).

**Dispersión:**

Un tipo de distorsión de un tren de ondas en el que la velocidad de la onda varía con la frecuencia. Las ondas de superficie y las ondas volumétricas electromagnéticas generalmente exhiben un fenómeno de dispersión, en tanto que las ondas P en la mayoría de las rocas muestran pocos cambios de velocidad con la frecuencia (“Dispersión, dispersor de ondas”, s.f.).

El fenómeno de una onda que se separa en sus componentes de frecuencia cuando atraviesa un medio. Cada componente de frecuencia viaja con su velocidad de fase ( $v_p$ ), que es el producto de la frecuencia ( $f$ ) por la longitud de onda ( $\lambda$ ) de ese componente.

La dispersión angular resulta de la anisotropía, que hace que la velocidad varíe con la dirección.

La dispersión afecta todos los tipos de ondas, incluidas las ondas luminosas, electromagnéticas, acústicas, elásticas, gravimétricas y las ondas de agua.

**Polarización:**

La polarización electromagnética es una propiedad de las ondas que pueden oscilar con más de una orientación. (Shipman et al., 2015; Muncaster, 1993; Singh, 2015; Avadhanulu, 1992; Desmarais, 1997).

**Ímpetu:**

En física, se conoce como ímpetu, o también como cantidad de movimiento, una magnitud vectorial que se obtiene del producto de multiplicar la masa de un móvil por su velocidad en un momento determinado (“Ímpetu”, 2016).

Como tal, el ímpetu puede describir el movimiento de un cuerpo en cualquier teoría mecánica. Su fórmula es  $p=m*v$ . Para distinguir el ímpetu del momento angular se le llama también momento lineal.

Por otra parte, se dice que la conservación del ímpetu es posible en sistemas aislados sobre los cuales no actúan fuerzas externas, de allí que en dichos casos el ímpetu total del sistema permanece constante.

## 2.1.2 Conceptos matemáticos y físicos

### ***Método de Campo Efectivo:***

En física, una teoría de campo efectivo es un tipo de aproximación (o teoría efectiva) a una teoría física fundamental, como la teoría cuántica de campos o un modelo de mecánica estadística (Ofek et al., 2014). Una teoría de campo efectivo incluye los grados de libertad apropiados para describir un fenómeno físico que ocurre a una escala de longitud o escala de energía determinada, mientras que ignora la subestructura y los grados de libertad a distancias más pequeñas (o, de forma equivalente, a mayores energías). Intuitivamente, uno promedia el comportamiento de la teoría fundamental a escalas más pequeñas para obtener un modelo que se espera sea simplificado a escalas de longitud mayores. Típicamente, las teorías de campo efectivo funcionan mejor cuando existe una gran separación entre la escala de longitud de interés y la escala de longitud de la dinámica fundamental. Las teorías de campo efectivo han resultado ser útiles en la física de partículas, la mecánica estadística, la física de la materia condensada, la relatividad general y la hidrodinámica. Estas teorías simplifican los cálculos y permiten tratar los efectos de disipación y radiación.

### ***Método de Medio Efectivo:***

Un método para la determinación de las propiedades efectivas de los campos aleatorios; su abreviatura común es EMT ("Teoría del medio efectivo", s.f.). Desarrollada originalmente para estimar los coeficientes de transporte, esta teoría se basa en la idea de reemplazar el medio heterogéneo por un medio homogéneo equivalente, de modo que las fluctuaciones inducidas mediante la restitución de la heterogeneidad promedien cero. El método EMT se utiliza para escalar parámetros tales como la permeabilidad para ser utilizados en estudios de simulación de yacimientos en rocas clásticas de grano grueso. Esta utilización es controvertida en yacimientos que no son homogéneos.

### ***Función de Green:***

En matemáticas, una función de Green es una función matemática usada como núcleo de un operador lineal integral y usada en la resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con condiciones de contorno especificadas (condiciones de frontera) (Eyges, 1972; Polyanin, Zaitsev, 2003; Polyanin, 2002; Marion, 2010). La función de Green recibe ese nombre por el matemático británico George Green, que desarrolló el concepto hacia 1830.

El término también aparece en física, particularmente en teoría cuántica de campos, para referirse a varios tipos de funciones de correlación y operadores integrales para ciertas magnitudes calculables a partir del operador de campo.

### ***Método de Galerkin:***

En matemáticas, en el área de análisis numérico, los métodos de Galerkin son una clase de métodos que se utilizan para la conversión de un problema de operador continuo (tal como una ecuación diferencial) a un problema discreto (Mikhlin, 1964). En principio, es el equivalente de

aplicar el método de variación de parámetros a un espacio de funciones, mediante la conversión de la ecuación para una formulación débil. Normalmente se aplican algunas restricciones en el espacio funcional para caracterizar el espacio con un conjunto finito de funciones de base.

El enfoque se atribuye generalmente a Boris Galerkin, pero el método fue descubierto por Walther Ritz, a la que se refiere Galerkin. A menudo, cuando se refiere a un método de Galerkin, también se da el nombre junto con métodos de aproximación típicos utilizados, tales como el método Bubnov-Galerkin (después de Ivan Bubnov), método Petrov-Galerkin (después de Georgii I. Petrov) o método Ritz-Galerkin (después de Walther Ritz).

### ***Esferoide:***

Un esferoide es un elipsoide de revolución, es decir, la superficie que se obtiene al girar una elipse alrededor de uno de sus ejes principales. Por convenio, el eje de simetría se denomina  $c$  y se sitúa en el eje de coordenadas cartesianas  $z$ ; el eje perpendicular al de simetría se denomina  $a$  ("Spheroid", s.f.).

Si  $a > c$  (el eje de simetría es el menor), la superficie se llama esferoide oblato o simplemente esferoide.

Si  $a < c$  (el eje de simetría es el mayor), la superficie se llama esferoide prolato u oblongo.

Si  $a = c$  (el eje de simetría es igual), la superficie es una esfera; la esfera es un caso especial de esferoide en donde la curva generatriz es una elipse de ejes iguales, es decir, una circunferencia.

Todas estas configuraciones ya mencionadas se ilustran en la Figura 2.4.

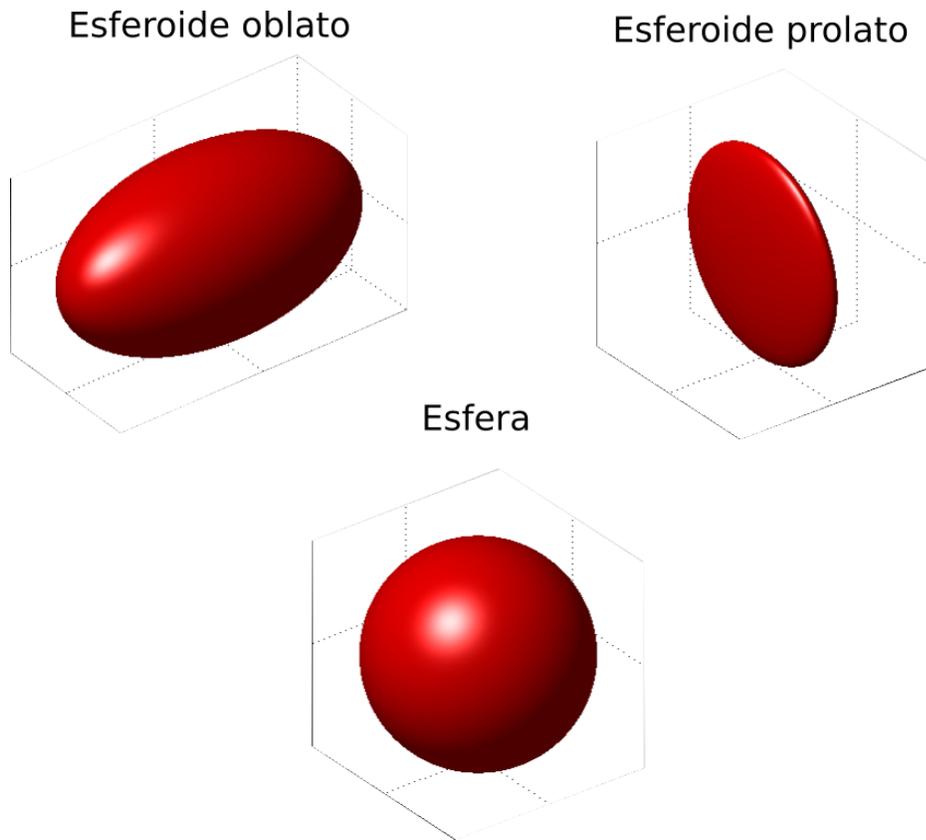


Figura 2.4. Tipos de esferoide

**Porosidad:**

Es el porcentaje de volumen de poros o espacio poroso, o el volumen de roca que puede contener fluidos (“Porosidad”, s.f.). La porosidad puede ser un producto de la deposición de los sedimentos (conocida como porosidad primaria, como el espacio existente entre los granos que no fueron completamente compactados) o puede desarrollarse a través de la alteración de las rocas después de la cementación y/o consolidación de estas (conocida como porosidad secundaria, como sucede cuando los granos de feldespato o los fósiles se disuelven preferentemente a partir de las areniscas, o la resultante de fracturas naturales).

**Permeabilidad:**

La capacidad, o medición de la capacidad de una roca, para transmitir fluidos, medida normalmente en darcies o milidarcies (“Permeabilidad”, s.f.). El término fue acuñado por Henry Darcy, quien demostró que la matemática común de la transferencia del calor podía ser modificada para describir correctamente el flujo de fluidos en medios porosos. Las formaciones que transmiten los fluidos fácilmente, tales como las areniscas, se describen como permeables y tienden a tener muchos poros grandes y bien conectados. Las formaciones impermeables, tales como las lutitas y las limolitas, tienden a tener granos más finos o un tamaño de grano mixto, con poros más pequeños, más escasos o menos interconectados. La permeabilidad depende, por lo

tanto, del tamaño de los poros, de su interconectividad y de la apertura de fracturas. Sus unidades son: Darcy, para uso en campo, y  $m^2$ , de acuerdo con el Sistema Internacional de Unidades.

## 2.2 Ecuación de onda y su solución

La ecuación de onda nos proporciona la posición de una partícula en el espacio, a un tiempo  $t$  dado. Este tipo de ecuación aplica tanto para ondas mecánicas como electromagnéticas, y en general para aquellos fenómenos físicos relacionados con el movimiento ondulatorio.

La ecuación de onda en su forma general se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \equiv c^2 \nabla \cdot \nabla u \quad (2.1)$$

Donde  $\nabla^2$  es el laplaciano,  $u$  es la posición,  $t$  es el tiempo y  $c$  es la velocidad de propagación de la onda.

En una dimensión (onda plana) la ecuación se expresa en:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

Donde  $x$  es igual a la ubicación a lo largo del eje  $x$ .

Una solución particular de la ecuación viene dada en la forma general (Jaimes Tejeda, 2018) por:

$$u(x, t) = f(x \pm ct) \quad (2.3)$$

Donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda.

Esta solución se puede expresar en términos de funciones senos y cosenos, debido a que, para una onda, se tiene una estrecha relación de esta con las funciones trigonométricas, como se muestran a continuación:

$$u(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x) - \frac{2\pi}{T}(t) + \phi\right) \quad (2.4a)$$

$$u(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x) - \frac{2\pi}{T}(t) + \phi\right) \quad (2.4b)$$

Donde  $\lambda$  es la longitud de onda (distancia a la cual se repite una fase de una onda),  $T$  es el periodo (tiempo en el cual se repite la fase),  $A$  es la amplitud de la onda y  $\phi$  es la fase de la onda (fracción de periodo transcurrido desde un instante de referencia).

Esta solución aplica cuando la función es armónica, dado que, si las ondas en estudio cumplen con esta condición, entonces es posible llevar la solución general a la forma trigonométrica.

Asimismo, esta solución puede ser llevada a su forma compleja, esto con el fin de facilitar las operaciones, la cual es:

$$u(x, t) = A[\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] \quad (2.5)$$

Donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  se conoce como número de onda y  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  es la frecuencia angular.

Al hacer uso de la fórmula de Euler (número complejo en forma exponencial)  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  podemos expresar la solución de forma compacta, como:

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (2.6)$$

El hecho de expresar la solución de esta manera ayuda mucho en cuestiones ingenieriles, ya que permite analizar el comportamiento de estas ondas sin tener que recurrir a un tratamiento más riguroso, al mismo tiempo de llevar su estudio a su enfoque práctico.

El motivo por el cual la solución compleja se puede escribir mediante una combinación lineal de cosenos y senos, es porque toda onda cumple con el principio de superposición, el cual está estrechamente relacionado con el teorema de superposición de soluciones, que garantiza el hecho de que, si cualquier solución particular satisface una ecuación diferencial, entonces la suma de estas soluciones también es una solución de dicha ecuación diferencial.

### 2.3 Modelo de Eshelby

El modelo de Eshelby (Eshelby, 1957) consiste en realizar una simulación autoconsistente de ondas sísmicas planas atravesando una muestra de roca que contiene inclusiones ideales con geometría elipsoidal. Estas inclusiones pueden ser de fluido o inclusiones de roca o fracturas.

Este modelo toma en cuenta los esfuerzos de corte y de deformación para modelar el campo de esfuerzos alrededor de la inclusión y en la inclusión misma, haciendo énfasis en el estudio de las ondas planas sobre la inclusión. Cabe mencionar que el cálculo de los tensores de esfuerzos conlleva el cálculo de parámetros auxiliares, que involucran álgebra lineal y álgebra matricial.

Los datos que se requieren para el cálculo del campo de esfuerzos con base en el modelo de una onda plana viajando a través de una roca, son los módulos de Young y las relaciones de Poisson para la matriz y la inclusión. Las longitudes de los ejes mayor y menor del elipsoide (a, b, c) que representa la inclusión, son solamente sus características geométricas, pero estas tienen un impacto en la forma en que los esfuerzos inciden en la inclusión.

El modelo involucra la suposición de que todas las inclusiones habidas en una parte de la formación de interés se reducen a una sola, además de que dicha inclusión equivalente posee las propiedades elásticas efectivas de los materiales estudiados.

Dada la idealización geométrica de las inclusiones, las ecuaciones del modelo de Eshelby (1957) se simplifican bastante, al resultar en soluciones analíticas fáciles de calcular y de manejar. Para otras geometrías, las soluciones resultantes involucran funciones no elementales; estas funciones involucran integrales que solamente se pueden evaluar mediante métodos numéricos (Healy, 2009).

A pesar de esta situación, la condición autoconsistente ayuda mucho a simplificar este problema y obtener su solución fácilmente. Esta condición implica que la onda incidente en la inclusión es la misma que la onda incidente en la matriz, haciendo que la autoconsistencia y continuidad de los resultados funcionen incluso si se tienen celdas concatenadas.

La razón por la que se hizo el apilamiento a lo largo del eje x, es porque en primer lugar es el apilamiento más común para estudiar el comportamiento, y en segundo lugar porque la onda pasa paralela a ese eje, es decir, va en la dirección del eje x.

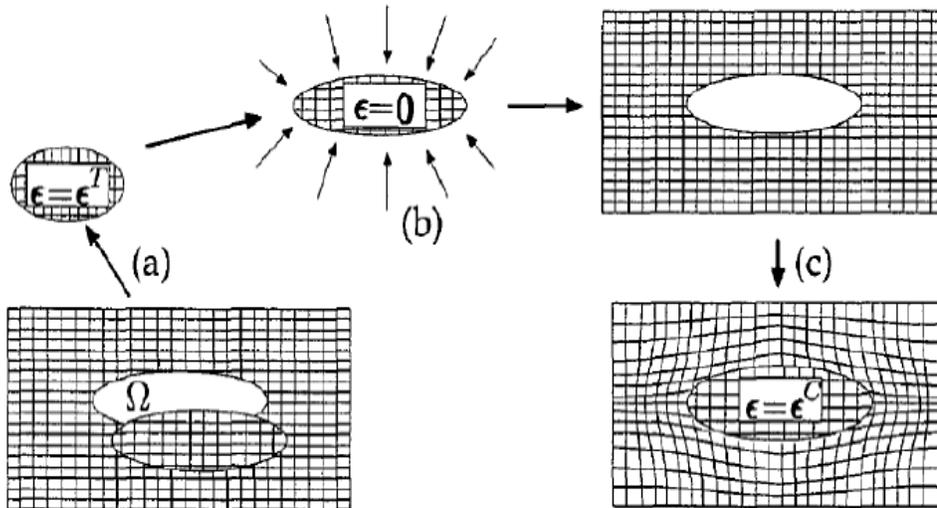


Figura 2.5. Explicación gráfica del modelo de Eshelby (Jaimes Tejeda, 2018; Eshelby, 1957)

Jaimes Tejeda (2018) y Eshelby (1957) afirman que el modelo se puede explicar mejor mediante un proceso de corte y soldadura, tal como se ilustra en la Figura 2.5. De acuerdo con la Figura 2.5., a partir de un medio heterogéneo, se extrae la inclusión de la matriz; luego de ser extraída, se realiza una deformación libre o eigendeformación  $\epsilon^T$  (a) que, según Eshelby (1957), es la deformación efectuada libre de tensiones. Al hacer esto, el próximo paso es aplicar las tensiones necesarias para otorgarle a la inclusión su estado original (b). Una vez realizado el equilibrio tensional, se inserta dicha inclusión en la matriz y finalmente se retiran las tensiones para provocar en la matriz una deformación resultante de equilibrio, que se expresa con  $\epsilon^C$  (c).

Para obtener el tensor de deformación necesario, tendremos que recurrir a la Figura 2.6, en donde se muestra que para llegar a ello es necesario reemplazar la inclusión real por una ficticia. Esto hace que se cumplan las hipótesis del modelo y al mismo tiempo se llegue a simplificar el modelo, haciendo el cálculo de dicho tensor aún más sencillo.

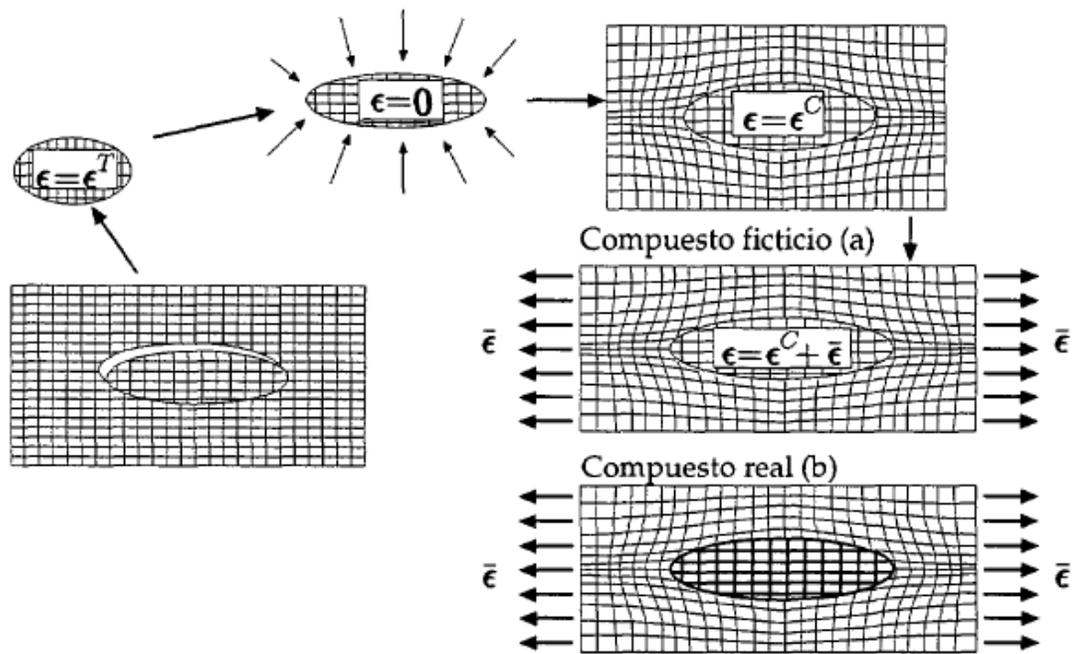


Figura 2.6. Esquema de corte y soldadura para obtener el tensor de deformación necesario (Eshelby, 1957).

La solución de la ecuación diferencial parcial de la onda plana se puede usar también para estudiar el comportamiento conjunto de las ondas con la elasticidad de los medios heterogéneos por las que atraviesa. Esta solución puede ser analítica (mostrado en el anterior apartado) o numérica; en el caso numérico este modelo se puede resolver por medio de diferencias finitas o por elementos finitos. En caso de este último método, se recurren a mallas Voronoi (Figura 2.7), o a mallas irregulares (Figura 2.8). En esta tesis se usaron tres celdas para estudiar la efectividad del modelo, al mismo tiempo que se usa la ecuación de onda como referencia para las interpretaciones y se puedan extrapolar los resultados a extensiones mayores, como toda una formación geológica o hasta el yacimiento entero, dependiendo de las exigencias del modelo y de la capacidad computacional para lograrlo.

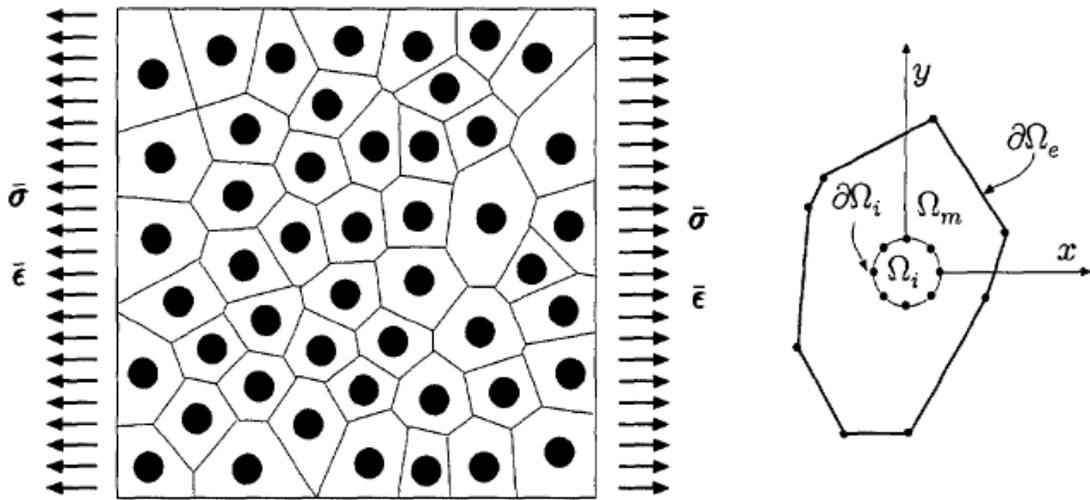


Figura 2.7. Malla Voronoi para el modelo (González Martínez, 2000).

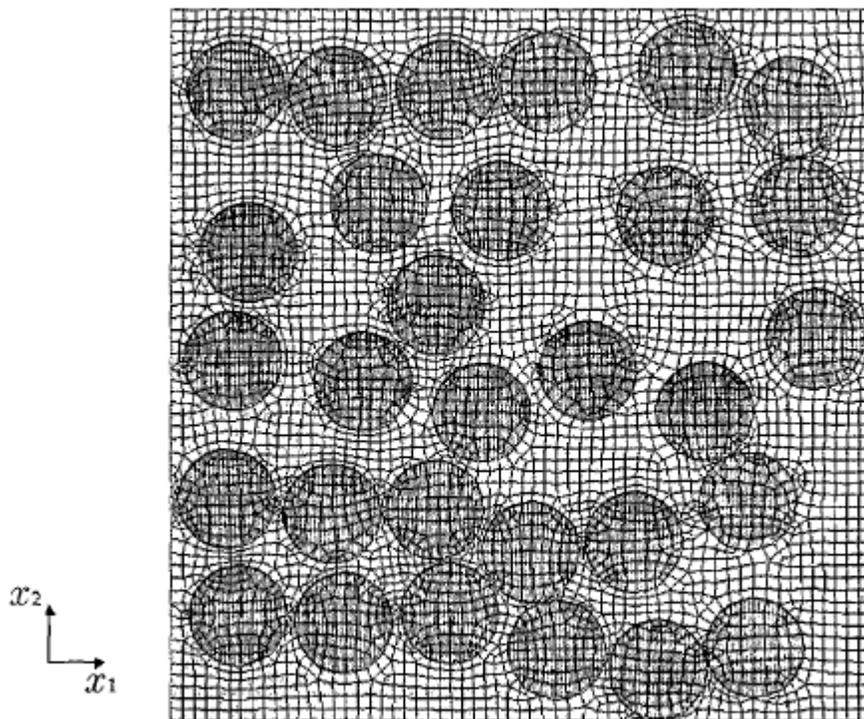


Figura 2.8. Malla de elementos finitos, para estudiar el comportamiento de materiales heterogéneos, en un caso más general (González Martínez, 2000; Nakamura, Suresh, 1993).

## 2.4 Esfuerzo y deformación

La base de este modelo comienza en el tratamiento del comportamiento elástico de las rocas, a través de dos parámetros fundamentales: el módulo de Young y la relación de Poisson. Este tratamiento se reduce a un análisis de dos variables de interés: la deformación y el esfuerzo. Este hecho se expresa a través de la ecuación (Jaimes Tejeda, 2018):

$$\sigma = L\epsilon \quad (2.7)$$

Donde  $\sigma$  es el esfuerzo,  $L$  es la matriz de rigidez y  $\epsilon$  es la deformación.

En su forma matricial, al trabajar en un medio transversalmente isótropo, se expresa en la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{11} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{31} & L_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Con

$$L_{66} = \frac{1}{2}(L_{11} - L_{12}) \quad (2.9)$$

La razón por la cual la matriz de rigidez aparece en esta forma se debe a que se trabaja con un plano isotrópico XY, siendo Z el eje de simetría de la celda en estudio. Al darse esta consideración, lo que se obtiene es que varios de los elementos de esta matriz, que en general contiene 36 constantes elásticas independientes, se hacen ceros, llegando a resultar una matriz simétrica, haciendo más fácil trabajar con un número menor de constantes elásticas.

Supongamos un bloque cilíndrico de altura  $h$  y área transversal  $A$ . Al aplicar una fuerza  $F$  que cause en ese mismo bloque una deformación notable, esa deformación se cuantifica a través del desplazamiento denotado como  $\Delta h$ .

Una vez aplicada la fuerza, se puede notar que la deformación (o desplazamiento) “es directamente proporcional a la fuerza aplicada y a la dimensión no desplazada del bloque, pero es inversamente proporcional a la sección transversal del bloque” (Lowrie, 2007), esto bajo una deformación elástica, en donde el bloque regresa a su forma original al dejar de aplicarse esa fuerza.

$$\frac{F}{A} \propto \frac{\Delta h}{h} \quad (2.10)$$

El esfuerzo se define como el valor límite de la fuerza a medida que  $A$  es infinitamente pequeño. Se denota como  $\sigma$  y este tiene la unidad de la presión (Pa). Por su parte, la deformación se define como el cambio fraccional en las dimensiones del bloque, a medida que  $h$  es infinitamente pequeño. Se denota como  $\epsilon$ , y a diferencia del esfuerzo, la deformación es una cantidad adimensional. Estos conceptos se ilustran en la Figura 2.9.

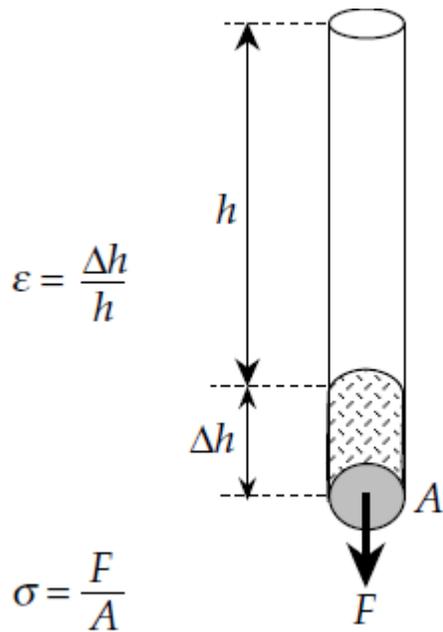


Figura 2.9. Esquema ilustrativo de la deformación y el esfuerzo (Lowrie, 2007)

En un comportamiento elástico, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación. La ecuación resultante de esta conjetura es llamada la ley de Hooke, expresada por la ecuación (2.7).

En un comportamiento plástico, el bloque sometido a esfuerzo experimenta una deformación de “memoria”, permanente o de histéresis. Es bajo este comportamiento que el bloque no puede regresar a su forma original debido a dicha deformación permanente, y por lo tanto la ley de Hooke ya no tiene validez.

Por otro lado, bajo un comportamiento frágil el bloque sometido experimenta, al exceder esta fuerza a la resistencia del material al fracturamiento, un efecto de cizalla. Este efecto ocasiona el afallamiento de la misma muestra. De hecho, algunas rocas (o materiales) son más propensas a sufrir afallamientos que otras.

La deformación y el esfuerzo se representan bajo matrices de 3x3, las cuales se representan por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.11a)$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.11b)$$

En un medio transversalmente isótropo, las matrices se someten al análisis hecho para la ecuación (2.8), llegando de manejar las nueve constantes elásticas mostradas a solamente manejar tres de ellas.

## 2.5 Módulo de Young y relación de Poisson

El módulo de Young se define como la medida de proporcionalidad de las deformaciones longitudinales. De acuerdo con la ley de Hooke:

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{yy} = E\epsilon_{yy} \quad (2.12b)$$

$$\sigma_{zz} = E\epsilon_{zz} \quad (2.12c)$$

De ahí, el módulo de Young se define en las ecuaciones (2.12a) a (2.12c) como una constante de proporcionalidad bajo un comportamiento elástico. Se define como  $E$ .

Para definir la relación de Poisson, debemos tomar como referencia la Figura 2.10.:

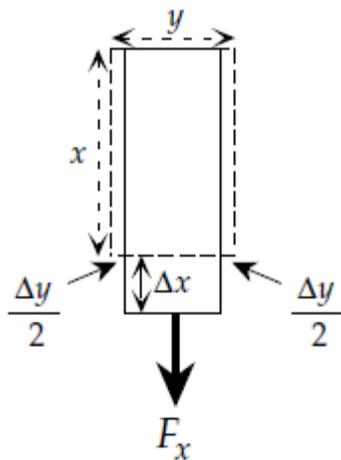


Figura 2.10. Esquema ilustrativo de la relación de Poisson (Lowrie, 2007)

Aquí, podemos notar que los cambios longitudinales en “y” y en “z” son pequeños, y que la deformación máxima se lleva a cabo en la dirección “x”. Por lo tanto, los cambios se llevan en sentidos opuestos y de manera proporcional a la deformación en “x”, tal como se expresa en las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon_{yy} = -\nu\epsilon_{xx} \quad (2.13a)$$

$$\epsilon_{zz} = -\nu\epsilon_{xx} \quad (2.13b)$$

A partir de las ecuaciones (2.13a) a (2.13b), la relación de Poisson se define como la constante de proporcionalidad de tales ecuaciones o, dicho de otra manera, como la razón entre la deformación en “y” o en “z” y la efectuada en la dirección “x”. Se denota como  $\nu$  (“Relación de Poisson”, s.f.).

El módulo volumétrico ( $K$ ) es la medida cuantitativa de la dilatación experimentada bajo condiciones hidrostáticas. Se relaciona con el módulo de Young y la relación de Poisson a través de la siguiente ecuación (Lowrie, 2007):

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.14)$$

El módulo de corte o de cizalla ( $\mu$ ) es la constante de proporcionalidad en la ley de Hooke para un comportamiento de cizalla, dada en las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \quad (2.15a)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \quad (2.15b)$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu\epsilon_{zx} \quad (2.15c)$$

Este módulo se relaciona con la relación de Poisson y el módulo de Young a través de:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.16)$$

Este módulo se denota también con la letra  $G$ , y junto con  $\lambda$  conforman los parámetros de Lamé.

El parámetro  $\lambda$  (primer parámetro de Lamé) se expresa como:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.17)$$

El módulo de Young, la relación de Poisson y el módulo volumétrico se pueden expresar en términos de los parámetros de Lamé por medio de las siguientes expresiones:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2.18a)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.18b)$$

$$E = \mu \left( \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \quad (2.18c)$$

## 2.6 Ecuaciones de la deformación equivalente y el esfuerzo de la inclusión mediante la ley de Hooke

Al aplicarse las consideraciones hechas para el modelo, se tiene que la deformación equivalente viene dada por la siguiente expresión (Eshelby, 1957):

$$\epsilon^{eq} = S\epsilon^T \quad (2.19)$$

Donde  $\epsilon^{eq}$  es la deformación equivalente,  $S$  es el tensor de Eshelby y  $\epsilon^T$  es la deformación libre necesaria para la inclusión.

El esfuerzo en la inclusión se puede expresar a través de la ley de Hooke (ecuación (2.7)), que en su forma matricial viene representado por la siguiente expresión:

$$\sigma_r = L_0(\epsilon^{eq} - \epsilon^T) = L_0(S_i - I)\epsilon^T \quad (2.20)$$

Donde  $S_i$  es el tensor de Eshelby para la inclusión,  $L_0$  es la rigidez de la inclusión inicial (la cual toma en cuenta una inclusión "ficticia" con las mismas propiedades del medio o de la matriz),  $I$  es la matriz identidad y  $\sigma_r$  es la tensión o esfuerzo de la inclusión. Se llegaron a tales expresiones con el fin de garantizar el cumplimiento de las hipótesis autoconsistentes del modelo de Eshelby (1957).

## 2.7 Aplicación a yacimientos petroleros

### 2.7.1. Caracterización de yacimientos

Los resultados del modelo de Eshelby ayudan en la caracterización estática y dinámica de los yacimientos petroleros.

La caracterización estática de yacimientos se encarga de la caracterización petrofísica y geológica de las formaciones de un yacimiento petrolero (Fuente: López Aguirre, D., Clase de Caracterización Estática de Yacimientos, comunicación personal). El modelo contribuye a que las interpretaciones del subsuelo sean las correctas, mediante la identificación de litologías a base de rocas comunes en gráficas cruzadas (crossplot).

Estos procedimientos auxiliares dan como resultado un entendimiento de las características geológicas del yacimiento y ayudan a corroborar información recopilada de geociencias (sísmica y geología) y a que, con la perforación posterior de pozos de exploración y el uso de registros geofísicos, haya menos incertidumbre a la hora de estudiar físicamente el subsuelo y garantizar la recuperación de las reservas calculadas en acumulaciones de hidrocarburos descubiertas.

Por otro lado, en la caracterización dinámica estos modelos nos pueden ser útiles para corroborar las fronteras del yacimiento y las posibles heterogeneidades físicas en el flujo como fracturas, barreras de flujo, vórgulos conectados, etc. (Fuente: Gallardo Ferrera, H. E., Curso de Caracterización Dinámica de Yacimientos, comunicación personal). Esto se logra mediante un análisis del modelo estático generado y los parámetros petrofísicos estimados de registros (indirectamente). Al hacer la prueba de presión pertinente, podemos corroborar si nuestra interpretación es la correcta y si no se da el caso, en revisar nuevamente toda la información respectiva para hacer nuevas interpretaciones.

### 2.7.2 Geomecánica

En esta parte es donde el modelo cobra mayor importancia. El estudio de la elasticidad de las formaciones nos ayuda a planear mejor nuestras estrategias de explotación de hidrocarburos y realizarlas con el menor riesgo posible. No obstante, se necesita una mejor comprensión por parte del equipo multidisciplinario para llevar a cabo una clara interpretación de lo que le pasará al yacimiento si se implementa cierta estrategia (Fuente: Castellanos Páez, F., Curso de Administración Integral de Yacimientos, comunicación personal).

En la perforación de pozos, los resultados arrojados por el modelo serán de gran utilidad para poder construir la ventana operativa y poder elegir el equipo que mejor se adapte a nuestro yacimiento, con el riesgo de que, si se elige el equipo inapropiado o está mal diseñada la ventana operativa, se tendrían problemas en un futuro como brotes, admisión de los fluidos del yacimiento al pozo o una conificación de gas y/o agua.

En yacimientos, la importancia del modelo es predecir el comportamiento de la presión de poro conforme el yacimiento es explotado, la cual se hace con simulación (Fuente: López Jiménez, B. A., Curso de Simulación Numérica de Yacimientos Naturalmente Fracturados, comunicación

personal), mediante el concepto de simulación de flujo de fluidos acoplada con geomecánica (*Fluid Flow simulation coupled with geomechanics*).

### 2.7.3 Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF)

Un yacimiento naturalmente fracturado es aquel que contiene fracturas creadas por la naturaleza, las cuales podrían influir positiva o negativamente en el flujo de fluidos a través de ellas (Nelson, 2001; Aguilera, 1995). El papel de los modelos elásticos en la explotación de YNF, además de la geomecánica y de la caracterización, también se hace presente en el análisis de fractalidad de las redes de fracturas y su distribución, geometría y orientación (Flamenco, Camacho, 2003), así como en la estimación del esfuerzo y la deformación de fracturas críticamente estresadas, que son aquellas que son más propensas a activarse y generar sismicidad con la inyección de fluidos. Es en estas últimas donde radica la necesidad de usar un modelo discreto de fracturas (DFN) y con ello realizar una estrategia que provoque menos sismicidad en el yacimiento.

El motivo por el cual se quiere menos generación de temblores es debido a riesgos operativos, sociales y ambientales; en los primeros involucran riesgos económicos y sobre todo el hecho de provocar subsidencia por falta de fluido, entendiéndose este a la sensibilidad que tienen las formaciones productoras de experimentar roturas o encogimiento por la explotación o inyección de fluido, la cual está estrechamente relacionado con la presión de poro y de confinamiento, además de los esfuerzos de sobrecarga en todo el yacimiento.

### 2.7.4 Yacimientos no convencionales

En yacimientos no convencionales, se tiene contemplado el uso de técnicas no convencionales de perforación e incluso se llega a usar fracturamiento hidráulico, en casos donde se tengan yacimientos del tipo lutita aceitífera o lutita gasífera (shale oil o shale gas, respectivamente). En el caso del fracturamiento hidráulico, es indispensable saber usar bien la técnica para evitar descontentos sociales y/o daños ambientales.

En este caso, el modelo es una herramienta útil para los encargados de perforación y mantenimiento de pozos, al dar información necesaria para poder implementar las técnicas de manera adecuada y segura. En fracturamiento hidráulico este es el caso, pues se usan aditivos químicos y apuntalantes que ayudan a que las fracturas hidráulicas se generen correctamente y se mantengan abiertas por más tiempo, hasta el agotamiento del yacimiento.

Además, la información proporcionada por el modelo ayuda a cuantificar la sismicidad del yacimiento debido a la inyección, como en el punto anterior, y a evitar contaminar mantos acuíferos cercanos.

Cabe mencionar que, dentro de los yacimientos no convencionales, se tienen especialmente los asociados a rocas ígneas como formaciones almacenadoras, en el *argot* petrolero. Estos ejemplos pueden encontrarse en Japón, China y en otras partes del mundo. Sin embargo, se pueden considerarse YNF por que las fracturas que hay en ellos se formaron por choque térmico (Fuente: Camacho Velázquez, R. G., Curso de Temas Selectos de Ingeniería Petrolera,

comunicación personal). Sin embargo, estos son minoría debido a que la mayoría de los yacimientos petroleros en el mundo se encuentran en formaciones constituidas de rocas sedimentarias.

#### 2.7.5 Recuperación secundaria y mejorada

Los métodos de recuperación secundaria y mejorada tienen como objetivo el ayudar a desplazar los hidrocarburos remanentes después del agotamiento natural de la energía del yacimiento, mediante técnicas que contribuyen a modificar o no los fluidos del yacimiento y/o el yacimiento mismo. En especial, el modelo tiene mayor importancia en las técnicas que implican inyección de fluidos tales como agua, gas, químicos surfactantes, entre otros (Fuente: López Ramírez, S., Curso de Recuperación Secundaria y Mejorada, comunicación personal).

En estos casos, este modelo es conveniente para el análisis del campo de esfuerzos en todo el yacimiento, teniendo en cuenta que los procedimientos de sísmica de exploración podrían afectar a las fallas y/o fracturas propensas a activarse, lo cual raramente se da con el yacimiento sin explotar y teniendo la consideración de que los métodos sísmicos modernos no tienen mayor impacto en el yacimiento. No obstante, esto se puede resolver mediante el análisis concienzudo de cómo se va a implementar la sísmica y la distribución de emisores y geófonos más conveniente, y tomar en cuenta el hecho de que los riesgos de sismicidad se atribuyen más a la explotación del yacimiento y/o la inyección de fluidos que a la sísmica en sí.

## Capítulo 3: Implementación numérica

Este capítulo trata la filosofía de funcionamiento del algoritmo desarrollado y las funciones creadas por Healy (2009) en MATLAB, simultáneamente con el tratamiento de las ecuaciones usadas en los mismos algoritmos.

Si bien la ecuación de onda se puede resolver mediante funciones de Green o métodos de elemento finito (entre los cuales está el método de Galerkin), para el alcance de esta tesis se puede resolver mediante la solución analítica expuesta en el capítulo anterior o bien mediante diferencias finitas. Aunque la ecuación de onda se usa en este trabajo como apoyo para las interpretaciones, esta también se puede acoplar al modelo a fin de poder visualizar simultáneamente los resultados tanto del campo de esfuerzos como del movimiento ondulatorio incidente.

### 3.1 Introducción a la filosofía de funcionamiento del algoritmo desarrollado

El motivo de plantear la solución de esta manera es hacer un paralelismo con fenómenos físicos, los cuales se modelan en su mayoría por ecuaciones diferenciales parciales. No obstante, al hacer el apilamiento de celdas se tomó en cuenta que estas soluciones deben satisfacer ciertas condiciones de frontera. Estas condiciones en este caso tratan de la distribución de los esfuerzos en la cara de frontera con la celda posterior. Por ello, en el programa se consideró que tanto la deformación como el esfuerzo resultante de la celda actual se consideran como datos de entrada en la celda siguiente, para garantizar la continuidad de las funciones.

Las soluciones implican el uso de álgebra tensorial, gracias al cual se hace un tratamiento más sistemático de las mismas al hacer una analogía con el álgebra matricial en conjunto con los procedimientos de funcionamiento de MATLAB. La naturaleza tensorial de algunas de las ecuaciones usadas es de suma importancia a la hora de hacer los cálculos.

Para calcular el campo de esfuerzos y de deformaciones se desarrolló el programa “**EsfuerzosEshelbyMod**” que consiste en un programa principal y el uso de varias funciones elaboradas por Healy (2009); este programa permite cuantificar los campos de esfuerzos en casos similares a los yacimientos estudiados.

### 3.2 Procedimiento inicial de funcionamiento del programa “EsfuerzosEshelbyMod”

El programa comienza con los datos de entrada, en el que el usuario debe ingresar el número de celdas, los valores de los semiejes a, b y c de la inclusión en cada celda y los valores del módulo de Young y la relación de Poisson, para la matriz y la inclusión en cada celda; siendo el módulo de Young de la inclusión la variable a sensibilizar se pide al usuario que ingrese los valores mínimo y máximo de este parámetro. La diferencia de valores de E se define como:

$$\Delta E_i = \frac{E_{imax} - E_{imin}}{N_{E_i} - 1} \quad (3.1)$$

Siendo  $N_{E_i}$  el número de incrementos de E de la inclusión, y los valores de  $E_i$  se calculan con:

$$E_i = E_{imin} + n\Delta E_i \quad (3.2)$$

Siendo  $n$  el índice de posición en el vector de  $E_i$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_{E_i} - 1$ ,  $E_i \in [E_{imin}, E_{imax}]$ .

Los valores de  $E$  son estimados a partir del módulo volumétrico y de cizalla ( $K$  y  $G$ , respectivamente), obtenidos de referencias bibliográficas (Mavko et al., 2009; Tamburrino, 2010; Das, 2001) a partir de la ecuación siguiente (“Constante elástica”, s.f.):

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (3.3)$$

Para el caso de fluidos, el valor de  $E$  se estima a partir de valores supuestos de  $\nu$  (relación de Poisson) y valores de  $K$  (módulo volumétrico), obtenidos de referencias bibliográficas (Mavko et al., 2009; Tamburrino, 2010; Das, 2001) mediante la siguiente expresión:

$$E = 3K(1 - 2\nu) \quad (3.4)$$

El valor de  $\nu$  para algunos casos se estima a partir de  $K$  y  $G$  a través de la siguiente expresión (“Coeficiente de Poisson”, s.f.):

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (3.5)$$

A su vez, para materiales compuestos se tiene que, a partir de los valores de  $E$  y de  $\nu$  calculados, se hace un promedio ponderado (Jaimes Tejeda, 2018) expresado por:

$$E = \sum_{i=1}^{N_i} f_i E_i \quad (3.6a)$$

$$\nu = \sum_{i=1}^{N_i} f_i \nu_i \quad (3.6b)$$

Donde el subíndice  $i$  es el número de componente del material en estudio, y  $N_i$  el número total de componentes en un material.  $f_i$  hace referencia a la fracción volumétrica del componente.

Una vez ingresados los datos, estos se almacenan en los vectores correspondientes, para proceder a cargar los vectores de deformación de la inclusión y de esfuerzo de la matriz, los cuales son dados manualmente por el usuario desde el código del programa “**EsfuerzosEshelbyMod**”.

Hecho esto, el programa abre un archivo .txt (“**Resultados.txt**”), y posteriormente entra en un ciclo donde un índice contador representa el número de valores de  $E$  (módulo de Young) de las inclusiones y otro el número de celdas del modelo. En el primer valor de  $E$  (valor mínimo de  $E$  de la inclusión, proporcionado por el usuario) y en la primera celda, se cargan los vectores dados para la deformación en la inclusión y el esfuerzo de la matriz como condiciones iniciales. Al hacer esto, se muestra en pantalla el valor de  $E$  y el número de celda, al mismo tiempo que los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y de los parámetros elásticos de la matriz e inclusión se cargan para la celda en cuestión. Estos mismos valores se escriben en el archivo .txt.

Después, se llama a la función “**EshelbyDemo**” (Healy, 2009) para realizar los cálculos correspondientes a los campos de esfuerzos y deformaciones en la celda actual.

Cabe mencionar lo siguiente:

- Los valores que se usen para los siguientes cálculos o se requieran para ser datos de entrada en la celda siguiente se almacenarán. Algunos lo hacen a través de variables auxiliares.
- El dominio de la inclusión debe ser tal, que abarque todo el dominio en la dirección x y, por lo tanto, haya valores en el mismo y se garantice la continuidad de la función.
- La función “**EshelbyDemo**” (Healy, 2009) contempla dos partes, que abarcan los campos de esfuerzos normales y de corte. Una vez realizado el procedimiento y se haya cuantificado el campo de esfuerzos normales, se repite el mismo procedimiento para el campo de esfuerzos cortantes.

### 3.3 Filosofía de funcionamiento de la función “EshelbyDemo”

La función comienza con la generación de la representación gráfica de la celda, a través del elipsoide que caracterice a la inclusión correspondiente. Posteriormente, se convierten los valores de E, para ambos medios, de pascasles a gigapascasles (GPa).

Luego, se realiza el cálculo del tensor de rigidez para ambos medios, a través de la función “**calcIsotropicStiffness**”, y consecuentemente su inverso. El tensor de rigidez viene dado por la siguiente expresión:

$$C_n = \begin{pmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_C \end{pmatrix} \quad (3.7a)$$

Donde  $\alpha_C = \frac{A-B}{2}$  (3.7b) y

$$A = \lambda + \frac{2E_k}{2(1 + \nu_k)} \quad (3.8a)$$

$$B = \lambda = \frac{E_k \nu_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)} \quad (3.8b)$$

Aquí, E es el módulo de Young y  $\nu$  es la relación de Poisson; el subíndice k se refiere al medio, el cual puede abarcar la matriz y la inclusión, las cuales se mencionarán posteriormente bajo los subíndices m e i, respectivamente.

Una vez hecho lo anterior, la función procede a calcular el tensor S, mediante la función “**calcEshelbyS**”. Realizado este cálculo, el programa lo muestra en pantalla. Para el cálculo del tensor S, tenemos en cuenta las siguientes expresiones fundamentales:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Conocida como delta de Kronecker (equivalente a la matriz identidad de 3x3).

Los tensores auxiliares se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Con:

$$S_{11} = \left(4\nu + \frac{2}{\alpha^2 - 1}\right)g_0 + 4\nu + \frac{4}{3(\alpha^2 - 1)} \quad (3.11a)$$

$$S_{12} = S_{13} = \left(4\nu - \frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}\right)g_0 + 4\nu - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \quad (3.11b)$$

$$S_{21} = S_{31} = \left(-2\nu - \frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}\right)g_0 - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \quad (3.11c)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \left(-2\nu + \frac{4\alpha^2 - 1}{4(\alpha^2 - 1)}\right)g_0 + \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} \quad (3.11d)$$

Y

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Con:

$$S_{11} = \left(-4\nu + \frac{4\alpha^2 - 2}{\alpha^2 - 1}\right)g_0 - 4\nu + \frac{12\alpha^2 - 8}{3(\alpha^2 - 1)} \quad (3.13a)$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{21} = S_{31} = \left(-\nu - \frac{\alpha^2 + 2}{\alpha^2 - 1}\right)g_0 - 2\nu - \frac{2}{\alpha^2 - 1} \quad (3.13b)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \left(2\nu - \frac{4\alpha^2 - 7}{4(\alpha^2 - 1)}\right)g_0 + \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} \quad (3.13c)$$

$$\alpha = \frac{a}{c} \quad (3.14)$$

Al parámetro  $\alpha$  se le conoce como relación de forma de la inclusión.

El parámetro  $g_0$  se calcula según la geometría de la inclusión, idealizada a un esferoide o elipsoide (Eshelby, 1957; Eshelby, 1959; Ju, Sun, 1999; Ju, Sun, 2001; Mura, 1987). Estas expresiones - todas ellas más las anteriores (3.10 a 3.13c), son soluciones analíticas para inclusiones elipsoidales transversalmente isótropas (Figuras 2.5, 4.1 y 4.2) - son válidas solamente para  $\alpha \neq 1$ :

$$g_0 = \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{1.5}} \left[ \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) - \alpha\sqrt{\alpha^2 - 1} \right] & \text{si } \alpha > 1 \text{ (esferoide oblato)} \\ \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)^{1.5}} \left[ \alpha\sqrt{1 - \alpha^2} - \cos^{-1} \alpha \right] & \text{si } \alpha < 1 \text{ (esferoide prolato)} \end{cases} \quad (3.15)$$

La ecuación auxiliar del tensor base, para estas geometrías, está dada por la siguiente ecuación:

$$S'_{ijkl} = \frac{1}{4(1 - \nu)} \left[ S_{1ik} \delta_{ij} \delta_{kl} + S_{2ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \quad (3.16)$$

Si  $\alpha = 1$ , es decir, la inclusión es una esfera, entonces la ecuación auxiliar está dada por:

$$S'_{ijkl} = \frac{1}{15(1-\nu)} \left[ (5\nu - 1)\delta_{ij}\delta_{kl} + (4 - 5\nu)[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] \right] \quad (3.17)$$

El tensor S, para todo caso, es entonces dado por:

$$S = \begin{pmatrix} S'_{1111} & S'_{1122} & S'_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{2211} & S'_{2222} & S'_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{3311} & S'_{3322} & S'_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{1212} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Luego, el programa calcula el vector de deformación de la matriz. Se sabe que, de la ley de Hooke (2.7), la deformación de la matriz se relaciona con el esfuerzo en la misma de la siguiente manera:

$$\epsilon_m = (C_m)^{-1}\sigma_m \quad (3.19)$$

Donde  $\sigma_m$  es considerado como dato.

La función "**calcEigenStrain**" es la que hace cargo del cálculo numérico de la eigendeformación dentro del medio heterogéneo, teniendo como condicional si la deformación en la inclusión es cero o no. Para el cálculo de la eigendeformación (Healy, 2009), denotado como  $\epsilon^{**}$ , se recurre a las siguientes ecuaciones auxiliares:

$$A = (C_i - C_m)^{-1}C_m \quad (3.20a)$$

$$B = (C_i - C_m)^{-1}C_i \quad (3.20b)$$

A partir de estas ecuaciones, la eigendeformación está dada por las siguientes expresiones, las cuales son válidas según corresponda:

$$\epsilon^{**} = \begin{cases} (S + A)^{-1}[B\epsilon_i - \epsilon_m] & \text{si } \epsilon_i \neq 0 \\ -(S + A)^{-1}\epsilon_m & \text{si } \epsilon_i = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Se puede notar que la ecuación para el segundo caso se deduce directamente de la del primer caso.

Una vez calculada la eigendeformación, lo que procede es generar la matriz identidad (**I**) de 6x6 y después estimar el vector de deformación y de esfuerzo en la inclusión. Esto se hace a partir de las ecuaciones del modelo de Eshelby (Eshelby, 1957), las cuales se dan como:

$$\epsilon_i = S\epsilon^{**} \quad (3.22a)$$

$$\sigma_i = C_m(S - I)\epsilon^{**} \quad (3.22b)$$

Una vez realizado este paso, el programa muestra los resultados de estas operaciones en pantalla, y la deformación resultante en la inclusión es almacenada como dato de salida, para su uso como entrada en la celda siguiente.

Enseguida, se generan las variables y matrices necesarias para la cuantificación del campo externo y los esfuerzos resultantes. Se realiza el conteo con respecto a las coordenadas y se establece la condicional de que dicho punto a analizar esté fuera de la inclusión. Esto garantiza que haya valores para las coordenadas afuera de la misma y se asigne el valor *NaN* a los puntos que sí estén dentro de ella.

### 3.4 Procedimiento de cálculo del campo externo dentro de “EshelbyDemo”

El cálculo del campo externo requiere dos datos importantes: el tensor *G* y la eigendeformación. El primero se trata mediante un análisis similar al del tensor *S*, pero con algunos otros parámetros que calcular, tomando en cuenta que se efectúa solamente afuera de la inclusión, cuya ecuación (dada por su forma geométrica) es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.23)$$

La función “*IsPointOutside*” se encarga de lo anterior, siendo una función condicional cuyo resultado es un valor lógico, mientras que la función “*calcExternalField*” se hace cargo de la cuantificación numérica del campo externo. Por su parte, la función “*calcEshelbyG*” es la responsable del cálculo del tensor *G*, la cual tiene un funcionamiento similar a la función “*calcEshelbyS*”. El marco teórico y las ecuaciones usadas para estas dos últimas funciones es como sigue:

El radio al cuadrado se define como:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.24)$$

$$\lambda = \frac{r^2 - a^2 - b^2 + \sqrt{(r^2 + a^2 - b^2)^2 - 4x^2(a^2 - b^2)}}{2} \quad (3.25)$$

Se recurren a los vectores columna auxiliares (Healy, 2009):

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2 + \lambda} \\ \frac{y}{b^2 + \lambda} \\ \frac{z}{c^2 + \lambda} \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a^2 + \lambda}}{b} \\ \frac{b}{\sqrt{b^2 + \lambda}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(a^2 + \lambda)(\|\theta\|^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{y}{(b^2 + \lambda)(\|\theta\|^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{z}{(c^2 + \lambda)(\|\theta\|^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Donde:

$$\|\theta\|^2 = \left(\frac{x}{a^2 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2 + \lambda}\right)^2 \quad (3.29)$$

$$\|\rho\|^2 = \frac{a^2}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} \quad (3.30)$$

$$\rho_{cubo} = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \quad (3.31)$$

$$\zeta = \rho_1^2 \theta_1^2 + \rho_2^2 \theta_2^2 + \rho_3^2 \theta_3^2 \quad (3.32)$$

Aquí, los números 1, 2 y 3 se refieren a los componentes de los vectores auxiliares dados anteriormente.

Los tensores auxiliares se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Con:

$$S_{11} = \left(4\nu + \frac{2}{\alpha^2 - 1}\right)g - \frac{2}{3(\alpha^2 - 1)}\rho_1^3 + \left(4\nu + \frac{2}{\alpha^2 - 1}\right)\rho_1\rho_2^2 \quad (3.34)$$

$$S_{12} = S_{13} = \left(4\nu - \frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}\right)g + \left(4\nu - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1}\right)\rho_1\rho_2^2 \quad (3.35)$$

$$S_{21} = S_{31} = \left(-2\nu - \frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}\right)g - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1}\rho_1\rho_2^2 \quad (3.36)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \left(-2\nu + \frac{4\alpha^2 - 1}{4(\alpha^2 - 1)}\right)g + \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)}\frac{\rho_2^4}{\rho_1} \quad (3.37)$$

Y

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Con:

$$S_{11} = \left(-4\nu + \frac{4\alpha^2 - 2}{\alpha^2 - 1}\right)g - \frac{2}{3(\alpha^2 - 1)}\rho_1^3 - \left(4\nu - \frac{4\alpha^2 - 2}{\alpha^2 - 1}\right)\rho_1\rho_2^2 \quad (3.39)$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{21} = S_{31} = \left(-\nu - \frac{\alpha^2 + 2}{\alpha^2 - 1}\right)g - \left(2\nu + \frac{2}{\alpha^2 - 1}\right)\rho_1\rho_2^2 \quad (3.40)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \left( 2\nu - \frac{4\alpha^2 - 7}{4(\alpha^2 - 1)} \right) g + \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} \frac{\rho_2^4}{\rho_1} \quad (3.41)$$

El cálculo del parámetro  $g$  está dado en función de la relación de forma  $\alpha$ , bajo la siguiente relación (Eshelby, 1957; Eshelby, 1959; Ju, Sun, 1999; Ju, Sun, 2001; Mura, 1987):

$$g = \begin{cases} \left( -\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \frac{\rho_2^2}{\rho_1} \right) + \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{1.5}} \log \left( \sqrt{\alpha^2 - 1} \rho_2 + \frac{\alpha \rho_2}{\rho_1} \right) & \text{si } \alpha > 1 \text{ (esferoide oblato)} \\ \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{\rho_2^2}{\rho_1} - \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)^{1.5}} \cos^{-1} \left( \frac{\alpha \rho_2}{\rho_1} \right) & \text{si } \alpha < 1 \text{ (esferoide prolato)} \end{cases} \quad (3.42)$$

Asimismo, los vectores auxiliares en la determinación del tensor  $G$  son:

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 2\rho_{cubo}(1 - \rho_1^2) \\ 2\rho_{cubo}(1 - \rho_2^2) \\ 2\rho_{cubo}(1 - \rho_3^2) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 2\rho_{cubo}(1 - 2\nu - \rho_1^2) \\ 2\rho_{cubo}(1 - 2\nu - \rho_2^2) \\ 2\rho_{cubo}(1 - 2\nu - \rho_3^2) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{S}_5 = \mathbf{S}_6 = \begin{pmatrix} 2\rho_{cubo}(\nu - \rho_1^2) \\ 2\rho_{cubo}(\nu - \rho_2^2) \\ 2\rho_{cubo}(\nu - \rho_3^2) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

La ecuación auxiliar del tensor base, para estas geometrías, está dada por la siguiente ecuación:

$$S'_{ijkl} = 2\rho_{cubo} \left[ 2(\rho_i^2 + \rho_j^2 + \rho_k^2 + \rho_l^2) + \|\rho\|^2 - \frac{4\zeta}{\|\theta\|^2} - 5 \right] \quad (3.46)$$

Y la ecuación auxiliar para el tensor  $G$  es dada por:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ijkl} = \frac{1}{4(1 - \nu)} & \left[ S_{1ik} \delta_{ij} \delta_{kl} + S_{2ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + S_{3i} \delta_{ij} \hat{n}_k \hat{n}_l \right. \\ & + S_{4k} \delta_{kl} \hat{n}_i \hat{n}_j + S_{5i} (\delta_{ik} \hat{n}_j \hat{n}_l + \delta_{il} \hat{n}_j \hat{n}_k) \\ & \left. + S_{6j} (\delta_{jk} \hat{n}_i \hat{n}_l + \delta_{jl} \hat{n}_i \hat{n}_k) + S'_{ijkl} \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_k \hat{n}_l \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Si  $\alpha = 1$ , es decir, la inclusión es una esfera, entonces la ecuación auxiliar para el tensor  $G$  está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ijkl} = \frac{\rho_{sf} \rho_{sf}^2}{30(1 - \nu)} & \left[ (3\rho_{sf}^2 + 10\nu - 5) \delta_{ij} \delta_{kl} \right. \\ & + (3\rho_{sf}^2 - 10\nu + 5) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + 15(1 - \rho_{sf}^2) \delta_{ij} \hat{n}_k \hat{n}_l \\ & + 15(1 - 2\nu - \rho_{sf}^2) \delta_{kl} \hat{n}_i \hat{n}_j \\ & + 15(\nu - \rho_{sf}^2) [\delta_{ik} \hat{n}_j \hat{n}_l + \delta_{il} \hat{n}_j \hat{n}_k + \delta_{jk} \hat{n}_i \hat{n}_l + \delta_{jl} \hat{n}_i \hat{n}_k] \\ & \left. + 15(7\rho_{sf}^2 - 5) \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_k \hat{n}_l \right] \end{aligned} \quad (3.48a)$$

Donde  $\rho_{sf} = \frac{a}{r}$  (3.48b).

Entonces el tensor  $G$  se determina mediante:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \bar{G}_{1111} & \bar{G}_{1122} & \bar{G}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{G}_{2211} & \bar{G}_{2222} & \bar{G}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{G}_{3311} & \bar{G}_{3322} & \bar{G}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{G}_{1212} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Una vez determinado el tensor  $\mathbf{G}$  y cuantificado el campo externo, la función calcula el campo total de esfuerzos y deformaciones, así como los esfuerzos resultantes, según sea las circunstancias por analizar:

- **Esfuerzo normal en la inclusión (crack normal stress) o esfuerzo interno de la inclusión**

El campo de deformaciones total (Healy, 2009; Eshelby, 1957; Eshelby, 1959) se calcula considerando que la deformación en la matriz es cero, puesto que solamente se estudiará la inclusión. Esta ecuación se expresa de la manera siguiente:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ext} = \mathbf{G}\boldsymbol{\epsilon}^{**} \quad (3.50)$$

De la misma manera para el esfuerzo, se considera el esfuerzo en la matriz igual a cero, por lo que la ecuación se expresa como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ext} = (\mathbf{C}_m\mathbf{G})\boldsymbol{\epsilon}^{**} \quad (3.51)$$

La cual puede deducirse fácilmente usando la ley de Hooke, expresada por la ecuación (2.7)

Se considera el esfuerzo en la dirección  $x$  como la variable a graficar, y el esfuerzo promedio, dependiente de la posición  $x$  (definida como las coordenadas del punto en estudio), se determina como:

$$\bar{\sigma}(x) = \frac{\sigma_{xx}(x) + \sigma_{yy}(x) + \sigma_{zz}(x)}{3} \quad (3.52)$$

- **Esfuerzo de corte máximo (maximum shear stress) o esfuerzo cortante**

En este caso, tanto para la deformación como para el esfuerzo, se considera que el valor de estos vectores para la matriz es diferente de cero, pues se estudia todo el medio en su totalidad.

Estas expresiones son las siguientes:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ext} = \boldsymbol{\epsilon}_m + \mathbf{G}\boldsymbol{\epsilon}^{**} \quad (3.53)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ext} = \boldsymbol{\sigma}_m + (\mathbf{C}_m\mathbf{G})\boldsymbol{\epsilon}^{**} \quad (3.54)$$

Aquí, la variable a graficar es el esfuerzo de corte máximo (Healy, 2009; Eshelby, 1957; Eshelby, 1959), también dependiente de la posición. Esta variable se expresa matemáticamente como:

$$\sigma_{MaxSh}(x) = 0.5\sqrt{(\sigma_{yy}(x) - \sigma_{xx}(x))^2 + 4(\sigma_{xy}(x))^2} \quad (3.55)$$

Hecho esto, estos resultados se almacenan y, para el caso de los esfuerzos y las deformaciones totales, se almacena el vector de esfuerzo en la matriz en el punto central de la frontera de la celda en análisis por donde pasa la onda, para ser usado como dato en la celda siguiente.

### 3.5 Procedimiento final del programa “EsfuerzosEshelbyMod”

Para cada campo de esfuerzos, se grafican las superficies asociadas a estos campos de esfuerzos, y se muestran estas gráficas, junto con la representación gráfica de la celda, en pantalla. Se imprime el resultado en un archivo .tiff (“**3dstress.tiff**”) y los valores almacenados, como el campo de esfuerzos resultante para ambos casos (esfuerzo normal y cortante), son los datos de salida arrojados por la función “**EshelbyDemo**”.

Ya teniendo estos resultados, el programa principal almacena los vectores de esfuerzo y deformación resultantes para ser condiciones iniciales en la siguiente celda, y posteriormente extrae los valores en la frontera de la celda actual del campo de esfuerzos normales y de corte para escribirlos en el archivo .txt. El proceso se repite hasta llegar a la última celda, después de la cual se avanza en el siguiente valor de E. Ahí, se vuelven a cargar los vectores iniciales de deformación y esfuerzo dados por el usuario, y se repite el proceso de cálculo, hasta llegar a la última celda, en el último valor de E (valor máximo de E de la inclusión).

Realizado lo anterior, el programa procede a guardar el archivo .txt y concluir su escritura. Al hacer esto, el programa termina, y el archivo .txt está listo para visualizarse, mientras que las gráficas arrojadas por el programa se pueden guardar con los formatos de imagen permitidos en MATLAB (.fig, .jpg, .png, etc).

Los diagramas de flujo del programa principal y de la función “**EshelbyDemo**” se muestran en las Figuras 3.1 a 3.4, mientras que los de las demás funciones mencionadas arriba se encuentran en el Anexo de este trabajo.

### 3.6 Acoplamiento de celdas

El acoplamiento se realizó en el programa principal, modificando la función de cálculo del modelo de Eshelby (Healy, 2009) de tal manera que los esfuerzos y las deformaciones de salida de una celda en estudio, garanticen su continuidad en la próxima celda y cumplan con la autoconsistencia del modelo. Los valores en la frontera de los esfuerzos en las celdas ayudan a ver su efecto como una función continua, la cual es una de las hipótesis autoconsistentes del modelo.

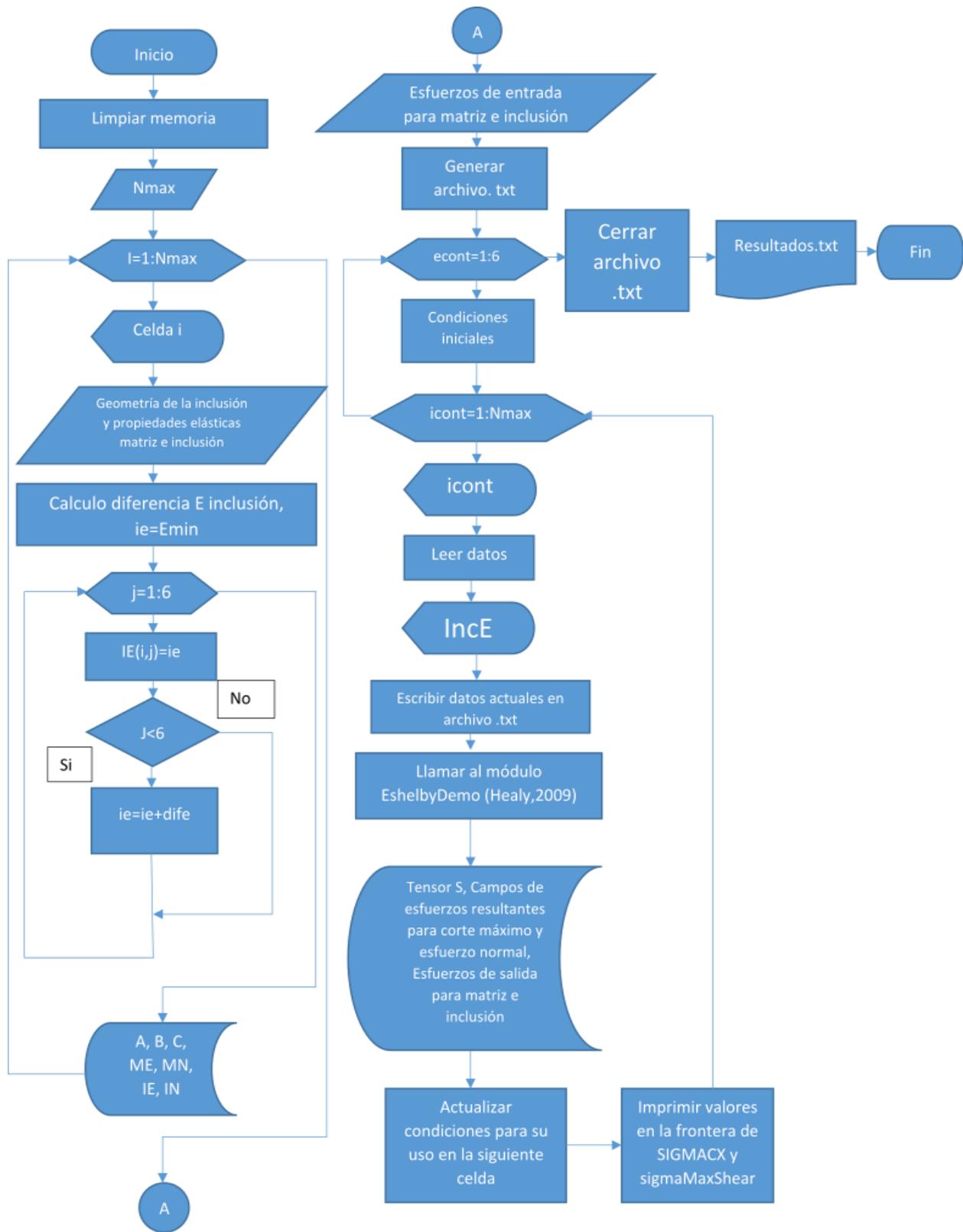


Figura 3.1. Diagrama de flujo del programa "EsfuerzosEshelbyMod".

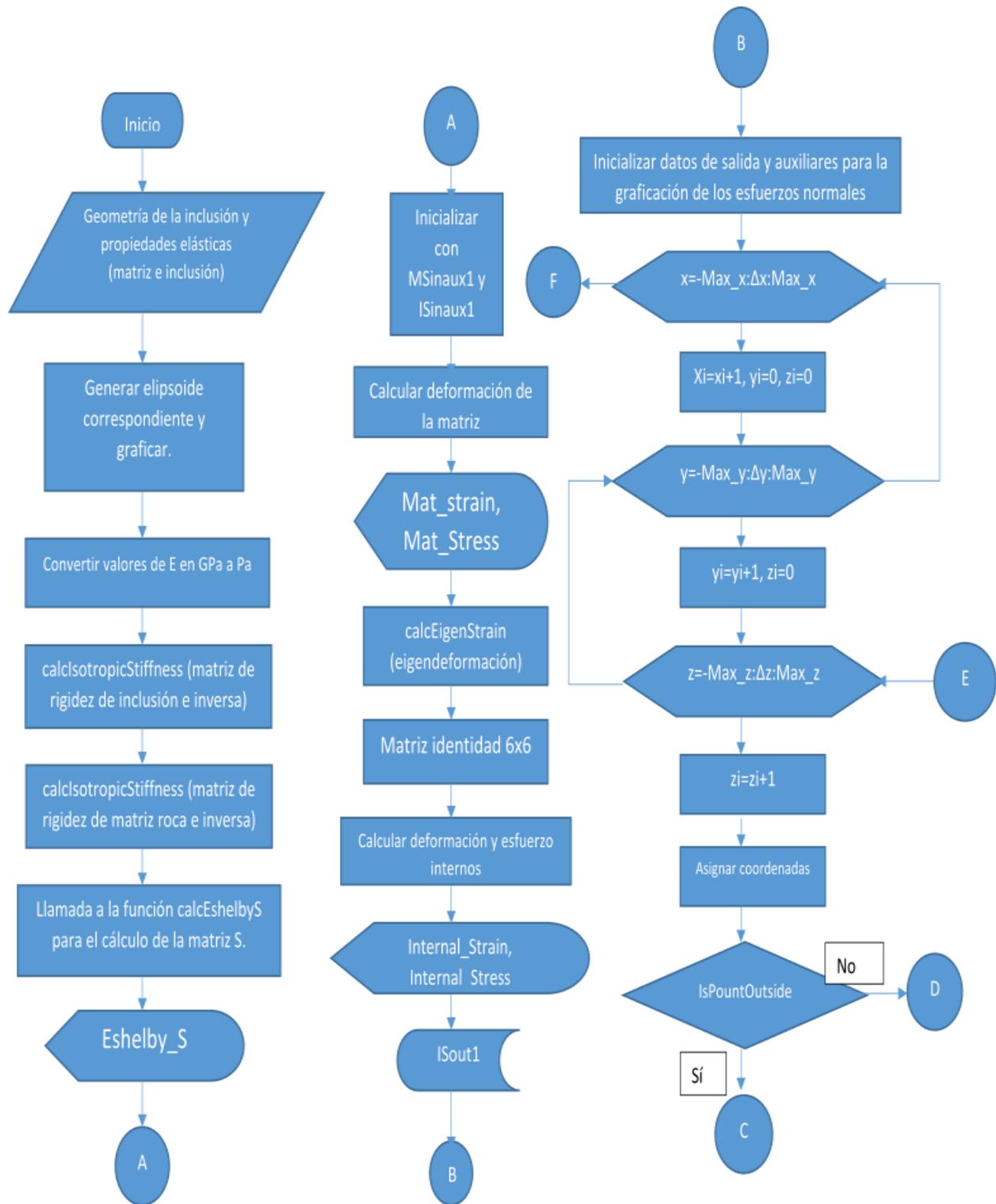


Figura 3.2. Diagrama de flujo de la función EshelbyDemo de Healy (2009).

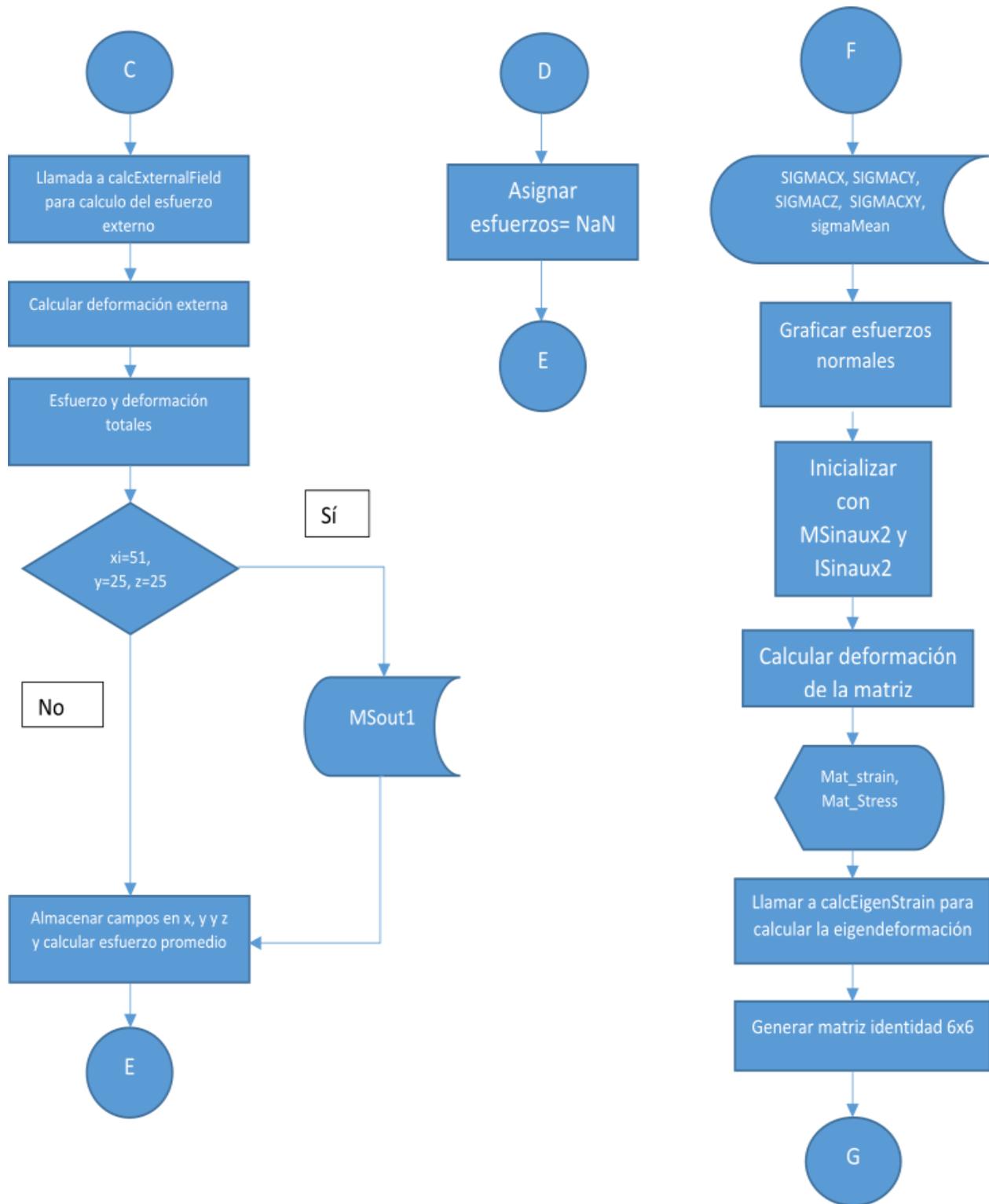


Figura 3.3. Diagrama de flujo de la función EshelbyDemo de Healy (2009) (cont.)

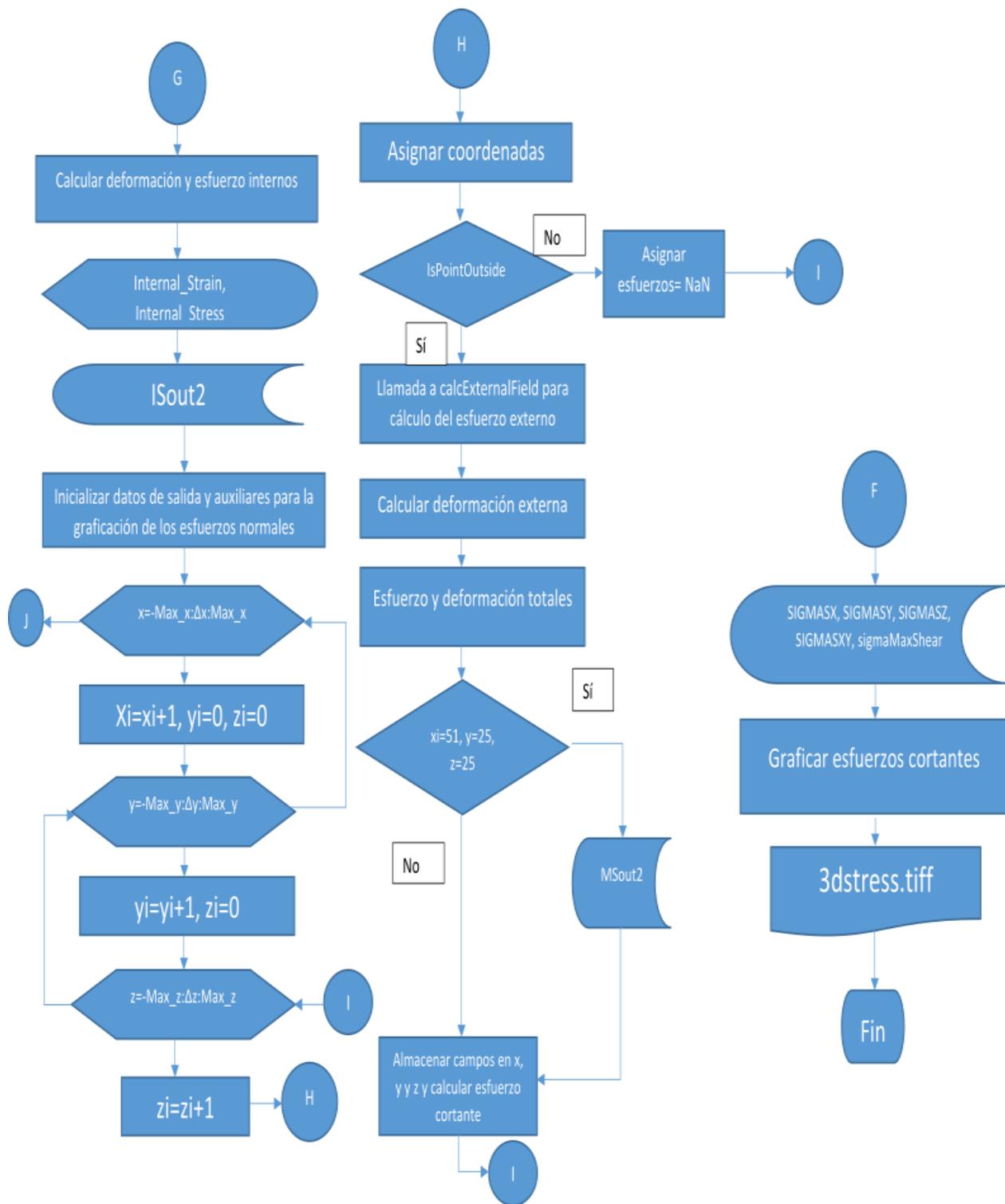


Figura 3.4. Diagrama de flujo de la función EshelbyDemo de Healy (2009) (cont.)

## Capítulo 4: Experimentos numéricos

El modelo de Eshelby (1957) considera fragmentos de formaciones a nivel microscópico, es decir, hace cumplir las hipótesis planteadas por el mismo. La inclusión en estudio debe ser representativa de todas las posibles inclusiones que se encuentran en la formación, a fin de reducir el problema al de un medio homogéneo equivalente.

Por otra parte, el modelo también toma en cuenta que la onda incidente en la matriz es la misma que la onda que pasa a través de la inclusión. Esta junto a la anterior son las hipótesis fundamentales del modelo de Eshelby (1957).

La geometría elipsoidal de las inclusiones puede representar estratos, vórgulos, poros, fracturas, fragmentos de domos salinos o vetas mineralizadas, entre otros. Esto depende de la orientación de la inclusión (elipsoide) y de la interpretación geológica correspondiente, así como de su apertura, longitud y demás características de esta. Una vez hecho esto, este elipsoide representará aproximadamente a la heterogeneidad modelada siempre y cuando las características geométricas sean lo suficientemente cercanas a las propiedades geológicas de la misma. En otras palabras, se deben elegir los valores adecuados (en cuanto a la geometría del elipsoide) para representar de manera aproximada la disposición real de la inclusión a modelar.

En cuanto a la matriz, es necesario conocer también sus características geológicas, las cuales deben ser representativas a lo largo de toda la formación en estudio. En caso de varios materiales ya sea en la inclusión y/o en la matriz se recurren a las ecuaciones (3.6a) y (3.6b).

La homogenización es fundamental puesto que, como ya se mencionó antes, se debe respetar la hipótesis de reducir el problema a uno donde se cuente con la matriz y una inclusión aislada que represente a las posibles dentro de un área en específico, de tal manera que “cada inclusión es un compuesto embebido en una matriz con las propiedades efectivas” (Jaimes Tejeda, 2018).

A continuación, se presentan casos de secuencias de rocas típicas que se pueden encontrar en yacimientos petroleros y geotérmicos, de las cuales se genera un modelo tridimensional para cada uno de ellos que represente una porción microscópica de dichas formaciones.

Cabe mencionar que se eligieron diez casos de forma tal, que puedan representar a las formaciones geológicas de yacimientos tipo, con la finalidad de identificar los efectos en el campo de esfuerzos. Asimismo, se contemplaron tres celdas contiguas y apiladas en la dirección  $x$  para todos los modelos; los valores considerados se muestran en las tablas, tales como los parámetros elásticos de la matriz y de la inclusión, así como la geometría de las inclusiones ( $a$ ,  $b$  y  $c$ ), y se contemplaron también 6 intervalos de valores de  $E$  de la inclusión para garantizar las propiedades efectivas del medio dentro de las seis caras de la celda. Para cada uno de los casos, en cada una de las tres celdas de cada modelo generado se embebió una inclusión elipsoidal ubicada en el centro; cada una de estas inclusiones posee las mismas propiedades elásticas y las mismas configuraciones geométricas para cada celda, tal como se muestra en la Figura 4.2. Por su parte, la Figura 4.1 muestra un modelo general, donde cada una de las

inclusiones en cada celda posee las mismas propiedades elásticas pero diferente configuración geométrica.

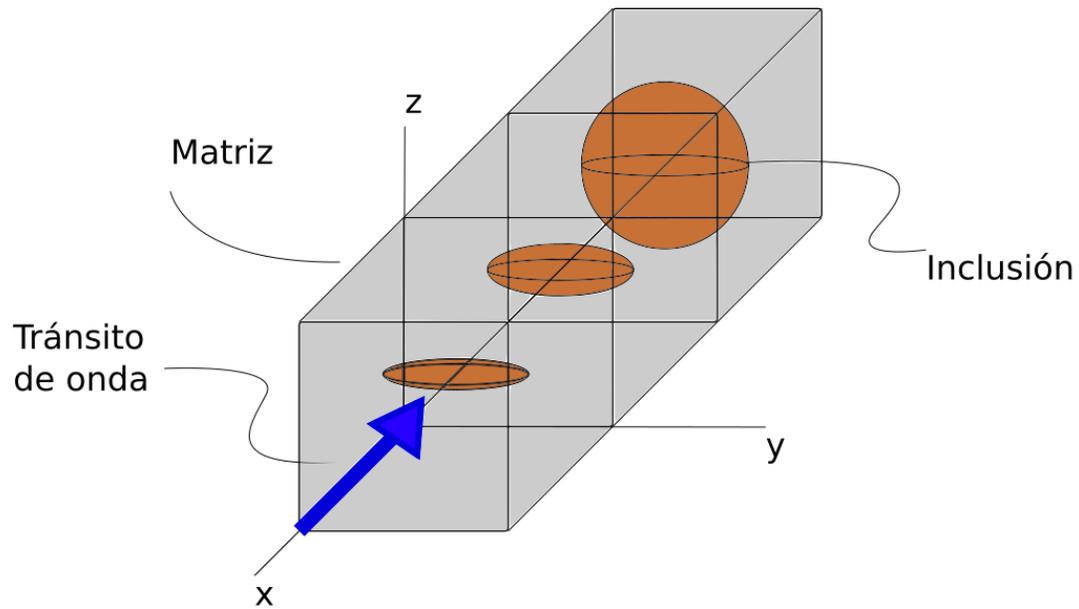


Figura 4.1. Caso general del modelo sintético

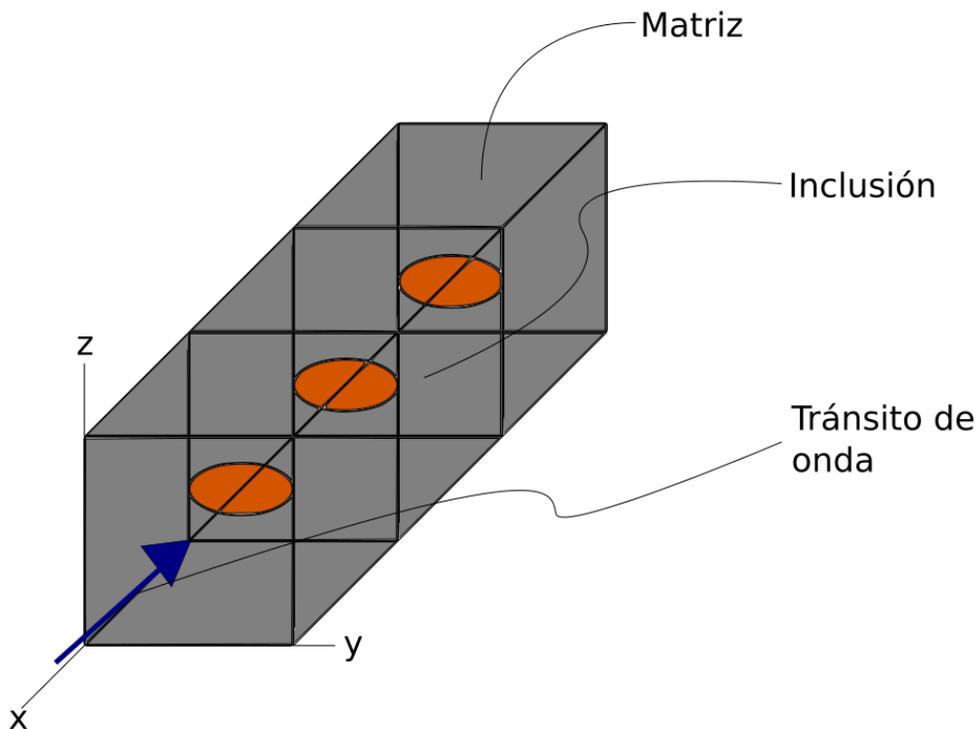


Figura 4.2. Caso particular del modelo sintético

## 4.1 Casos de experimentos numéricos a realizar

### 4.1.1 Caso 1 (roca-fluido)

Se trata de un yacimiento petrolero cuya matriz es roca carbonatada, compuesta 100% de calcita, y las inclusiones son tres vóculos (cavidades formadas por disolución de la roca) aislados y centrados, uno para cada celda, con orientación vertical en los cuales se aloja petróleo crudo ligeramente compresible, debido a una fase gaseosa en su mayoría disuelta en el crudo.

Este tipo de yacimientos petroleros son de los más complejos, por lo tanto, son más difíciles de estudiar y de explotar, aún más si se tiene una disposición de fracturas y vóculos de manera fractal (espaciamiento no uniforme) (Flamenco, Camacho, 2003). Estos yacimientos se conocen comúnmente como yacimientos naturalmente fracturados vóculares (YNFV). En estos, se tienen tres medios fundamentales: las fracturas, la matriz y los vóculos (Camacho et al., 2005).

Estos yacimientos pueden abarcar desde rocas carbonatadas fracturadas en la cual hay presencia de vóculos, como en este caso, hasta yacimientos en rocas ígneas, siendo estos últimos en donde las cavidades de escape de gas que se formaron al momento en que se enfría la lava se tratan como “vóculos o cavidades de disolución” (se puso entre comillas puesto que hay un término geológico que mejor describe a estas cavidades, realmente llamadas “vesículas”, y porque el origen de estas en realidad no es de disolución). Estos yacimientos se pueden

encontrar en el sureste de México (Golfo de México), con el campo Cantarell; en China, Japón y otras partes del mundo. Ejemplos de formaciones (o secuencias) de rocas carbonatadas fracturadas con vórgulos se encuentran en la Figura 4.3. y los datos para este caso están dados en la Tabla 1.

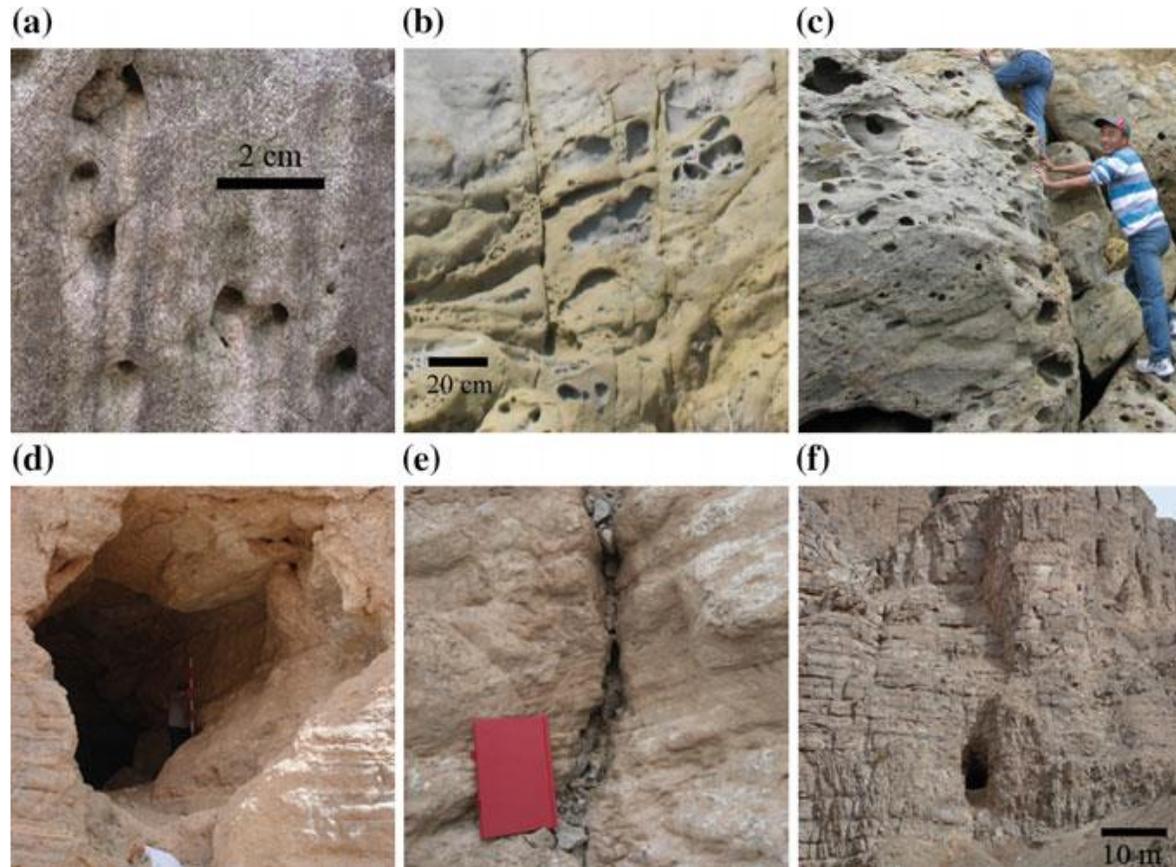


Figura 4.3. Ejemplos de formaciones compuestas de calizas, las que presentan porosidad vugular (Yao, Huang, 2016)

a=	0.6
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	84.3
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	0.25 a 0.55
Relación de Poisson de la matriz=	0.3
Relación de Poisson de la inclusión=	0.45

Tabla 1. Tabla de parámetros para el caso 1

#### 4.1.2 Caso 2 (roca-roca)

Se trata de un yacimiento no convencional, del tipo aceite en lutitas (shale oil). La roca, en este caso, corresponde a lutitas de baja permeabilidad, mientras que la inclusión es una estratificación horizontal de kerógeno sólido centrada en las tres celdas. La lutita se considera, para este caso, compuesta de 60% de cuarzo con arcilla, 20% de feldespato y 20% de micas. Se eligió esta disposición geométrica debido a las características litológicas de la misma.

Este ejemplo es crucial para el entendimiento de las técnicas de fracturamiento hidráulico, sobre todo cuando se trata de un yacimiento de baja permeabilidad que, obviamente, al momento de su explotación puede dar bajos gastos de producción. Estos yacimientos se pueden encontrar en todo el mundo. Ejemplo de ello son los yacimientos en Estados Unidos, Canadá, Argentina, el noreste de México, Francia, China, etcétera. La Figura 4.4. muestra un ejemplo de yacimiento de este tipo, y los datos para este caso están dados en la Tabla 2.

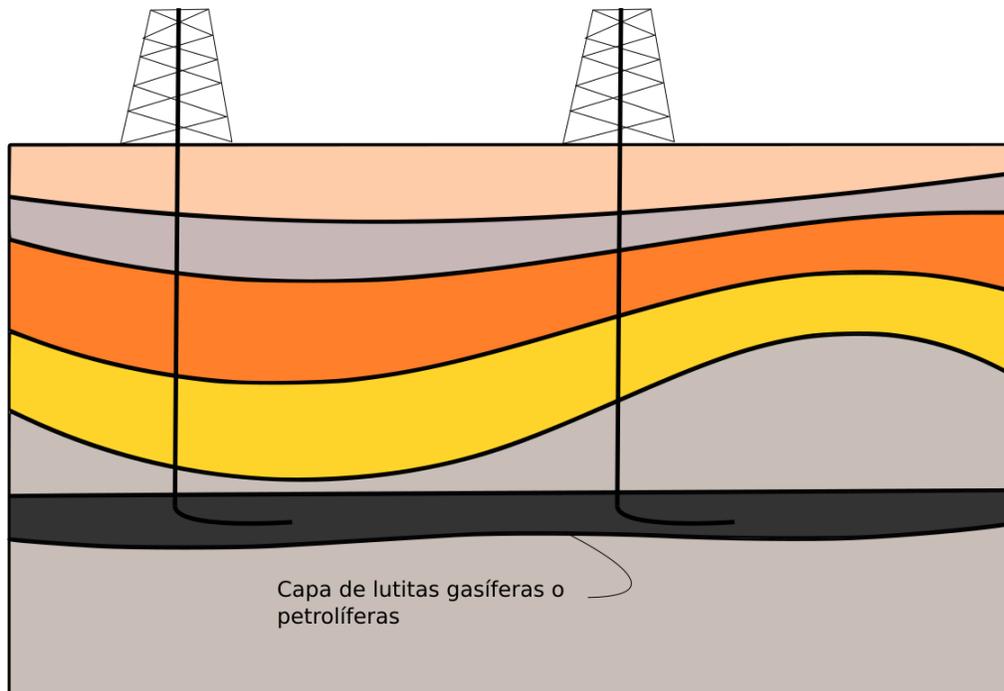


Figura 4.4. Esquema de un yacimiento de shale oil

a=	1.8
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	74.44
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	69.75 a 69.98
Relación de Poisson de la matriz=	0.212
Relación de Poisson de la inclusión=	0.14

Tabla 2. Tabla de parámetros para el caso 2

#### 4.1.3 Caso 3 (roca-fluido)

Se trata de un yacimiento geotérmico, que consiste en un acuífero sometido a altas temperaturas, bajo una matriz de granito. Es decir, trata de un acuífero (sea este artificial o natural) en la que se realiza una inyección de agua a la roca sometida al calor interno de la Tierra. La forma de las inclusiones indica una orientación no determinada u homogénea del acuífero, que atraviesa el centro de las tres celdas.

Estos yacimientos, aunque no son de importancia para la industria del petróleo y gas natural, juegan un papel importante en las energías renovables, sobre todo cuando las técnicas de perforación, producción y de exploración se extienden a este tipo de yacimientos, aunque de una manera distinta pues se busca extraer calor adquirido por el agua, por contacto con la roca. Un ejemplo de sismicidad por inyección en yacimientos geotérmicos (que derivó en sismos perceptibles en zonas cercanas) se dió lugar en Corea del Sur, en la provincia de Gyeongsang del Norte, en 2017, de acuerdo con análisis de dicho terremoto por parte del Instituto Coreano de Geociencia y Recursos Minerales (KIGAM).

En el mundo, estos yacimientos se pueden encontrar en México (en basaltos o andesitas), Estados Unidos, Nueva Zelanda, Italia, Indonesia, Filipinas, Japón, Islandia, entre otros. Cabe mencionar el graben del Rin, el cual es un campo geotérmico y petrolero considerado como el más antiguo del continente europeo; este está situado en la zona limítrofe de Alemania y Francia.

Las Figuras 4.5 y 4.6 muestran ejemplos de este caso, siendo la primera un esquema donde se ilustran los tipos de yacimientos geotérmicos. Mientras, la Tabla 3 muestra los datos de este caso.

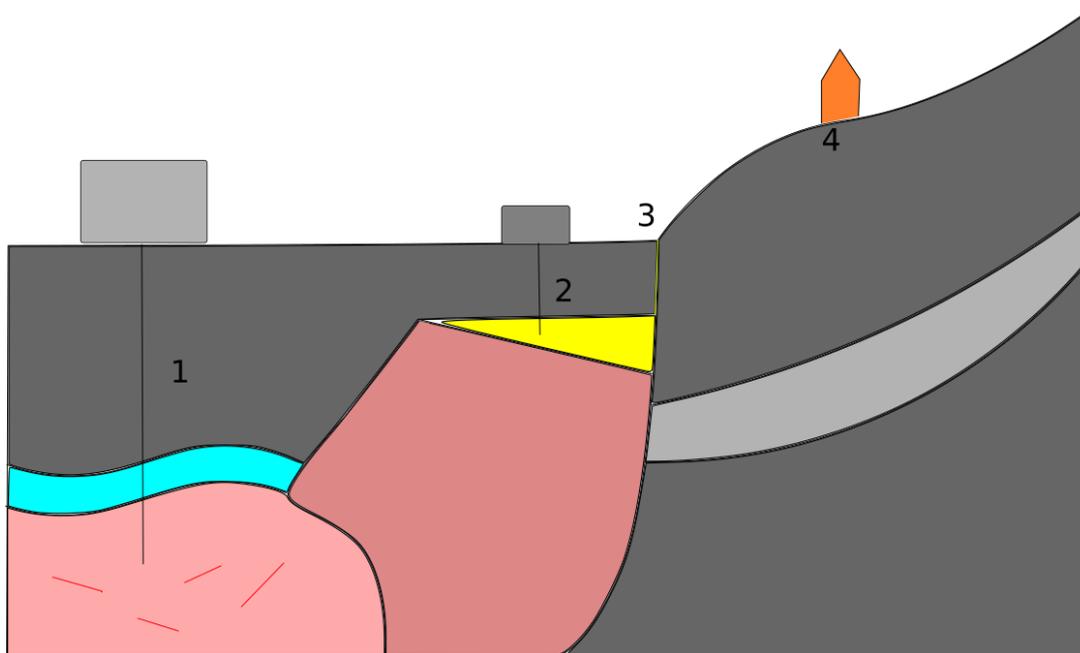


Figura 4.5. Tipos de yacimiento geotérmico: 1.- Alta temperatura, 2.- Media temperatura, 3.- Baja temperatura, 4.- Surgencia térmica o manifestación superficial



Figura 4.6. Afloramiento de basaltos en Ciudad Universitaria, Ciudad de México. Este es un ejemplo de las litologías que se pueden encontrar en un yacimiento geotérmico. Las fracturas o vesículas pueden ser saturadas por el acuífero (sea artificial o natural) dependiendo de su conductividad, donde la misma roca es la encargada de transmitir el calor al acuífero. ("Basaltos en CU", s.f.).

a=	1
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	50
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	0.1 a 0.2
Relación de Poisson de la matriz=	0.25
Relación de Poisson de la inclusión=	0.49

Tabla 3. Tabla de parámetros para el caso 3

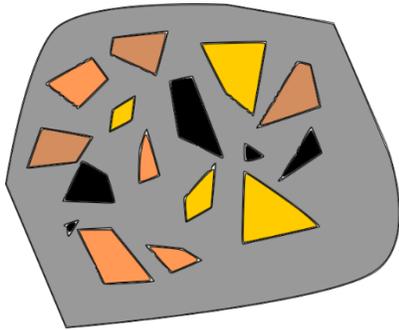
#### 4.1.4 Caso 4 (roca-roca)

Trata de una formación de roca caracterizada geológicamente como una brecha, compuesta de calcita como matriz (cementante) y de clastos de arena y grava. Estos clastos se representan bajo la forma de una esfera, como tres inclusiones centradas, una para cada celda, aunque los clastos en una brecha son angulosos. Este caso también puede representarse a un conglomerado en lugar de una brecha, puesto que ambas rocas comparten las mismas características litológicas y geológicas, aunque difieren en la redondez de los granos.

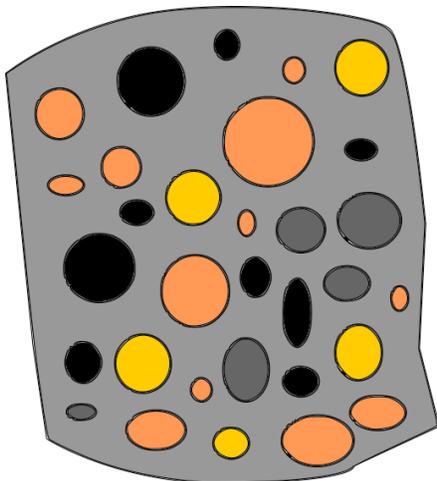
Estos tipos de roca se pueden encontrar en yacimientos que se caracterizan por tener un ambiente de depósito de alta energía, bajo el cual es posible encontrar conglomerados o brechas, respectivamente. Estos granos también tienen su redondez por la lejanía al macizo rocoso de origen o bien por otros factores como el impacto de meteoritos.

Estos yacimientos pueden albergar tanto a yacimientos de petróleo como de gas dependiendo de la disposición de los granos y el espacio poroso que dejan después de consolidada la roca, y aún más después de procesos post-depósito tales como vugulación, turbación orgánica, por mencionar los más comunes.

En el mundo, ejemplos de estos yacimientos se pueden encontrar en el campo Cantarell y el complejo Ku-Maloob-Zaap, en el Golfo de México (formados por impacto meteórico); en Veracruz, con el campo Poza Rica, en Medio Oriente, etcétera. Las Figuras 4.7 y 4.8 muestran un ejemplo de una brecha y un conglomerado, respectivamente, y los datos de este caso se muestran en la Tabla 4.



*Figura 4.7. Brecha.*



*Figura 4.8. Conglomerado.*

a=	1
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	55
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	0.14 a 0.2
Relación de Poisson de la matriz=	0.21
Relación de Poisson de la inclusión=	0.35

*Tabla 4. Tabla de parámetros para el caso 4*

#### 4.1.5 Caso 5 (roca-roca)

Trata de otra formación que se compone de una intercalación de areniscas con lutitas. Estas lutitas son de la misma composición que la del caso 2, y se representan como inclusiones del tipo de estratificaciones horizontales no compactas, centradas en las tres celdas. La litología analizada es la arenisca, también con bajo nivel de compactación.

Estas litologías son también representativas no solo de yacimientos no convencionales, sino también a aquellos relacionados con lentes de areniscas y/o disposiciones estratigráficas conectadas con fenómenos de depósito de alta energía. En yacimientos petroleros, estas unidades son potenciales como formaciones productoras aisladas, o bien como rocas sello, entendiéndose estas como aquellas que impiden la migración del fluido hacia la superficie y lo “entrampan”.

Casos reales se pueden encontrar en todo el mundo; sin embargo, los mayores ejemplos por excelencia son los yacimientos de aceite y gas en lutitas (shale oil y shale gas). La Figura 4.9 muestra un afloramiento de areniscas con lutitas en Sudáfrica, y la Tabla 5 muestra los datos usados para este caso.



Figura 4.9. Afloramiento de areniscas con lutitas, en Sudáfrica. (“Lutitas con areniscas”, s.f.)

a=	1.6
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	4.8
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	74.44 a 78
Relación de Poisson de la matriz=	0.28
Relación de Poisson de la inclusión=	0.212

Tabla 5. Tabla de parámetros para el caso 5

#### 4.1.6 Caso 6 (roca-fluido)

Se trata de una formación de arenisca con matriz arcillosa, la cual tiene por inclusiones tres poros centrados, uno para cada celda, de orientación horizontal que contienen gas, el cual los satura al 100%. Este ejemplo representa un yacimiento de gas seco.

En el caso de yacimientos de gas, es necesario tener identificadas las características del fluido y poder correlacionar con sus propiedades elásticas. En cuanto a la litología, las areniscas se caracterizan por tener una porosidad notable, dependiendo de la mineralogía y de la disposición de los granos (bien clasificados o mal clasificados). Una arenisca con matriz arcillosa puede funcionar como roca almacenadora o como roca sello.

Ejemplos de yacimientos de gas seco hay en todo el mundo. Entre ellos se destacan los yacimientos en Rusia, Alemania, Estados Unidos, México, etc. La Figura 4.10 muestra un ejemplo de este caso y la Tabla 6 muestra los datos usados en el mismo.



Figura 4.10. Afloramiento de areniscas (con arcilla) en Letonia. La arcillosidad de estas puede reducir el tamaño de los poros, debido a la naturaleza y fineza de los granos (“Areniscas con arcillas”, s.f.)

a=	1.2
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	77.22
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	0.01 a 0.05
Relación de Poisson de la matriz=	0.17
Relación de Poisson de la inclusión=	0.49

Tabla 6. Tabla de parámetros para el caso 6

#### 4.1.7 Caso 7 (roca-roca)

Se trata de una formación carbonatada intrusionada con sal; la sal es tratada como inclusión centrada para cada celda y la forma de la inclusión es determinada de manera tal que represente a un fragmento vertical de diapiro salino “invadiendo” la formación y rompiéndola al mismo tiempo. Los domos salinos se forman con la plasticidad de la sal al ser sepultada por estratos suprayacentes, de tal forma que actúe como un fluido y busque la forma de migrar hacia la superficie. Puede suceder que estos diapiros salinos puedan alcanzar o no la superficie.

Con respecto a la forma en que modifican la configuración estructural de los estratos superiores al de la sal, se puede presentar un domo salino “normal” si solamente deforma los mismos estratos, o un diapiro salino si llega a penetrarlos, como en el presente caso.

Los domos y diapiros salinos son piezas clave para determinar las zonas potenciales de acumulación de hidrocarburos. En los yacimientos petroleros, las estructuras salinas juegan el papel de formar trampas para acumulaciones de hidrocarburos. El motivo es evitar la perforación en esos domos salinos, ya que al perforarlos se pueden ocasionar derrumbes en las paredes de los pozos y consecuentemente problemas de operación.

Hay ejemplos de yacimientos en trampas formadas por intrusiones salinas que se encuentran en varias regiones del mundo, siendo más destacada la cuenca salina del Istmo (continental y marina) y el Cinturón Plegado Perdido en el caso de México, en Brasil, Alemania, etc. Se muestra un esquema de estos yacimientos en la Figura 4.11 y los datos de este caso en la Tabla 7.

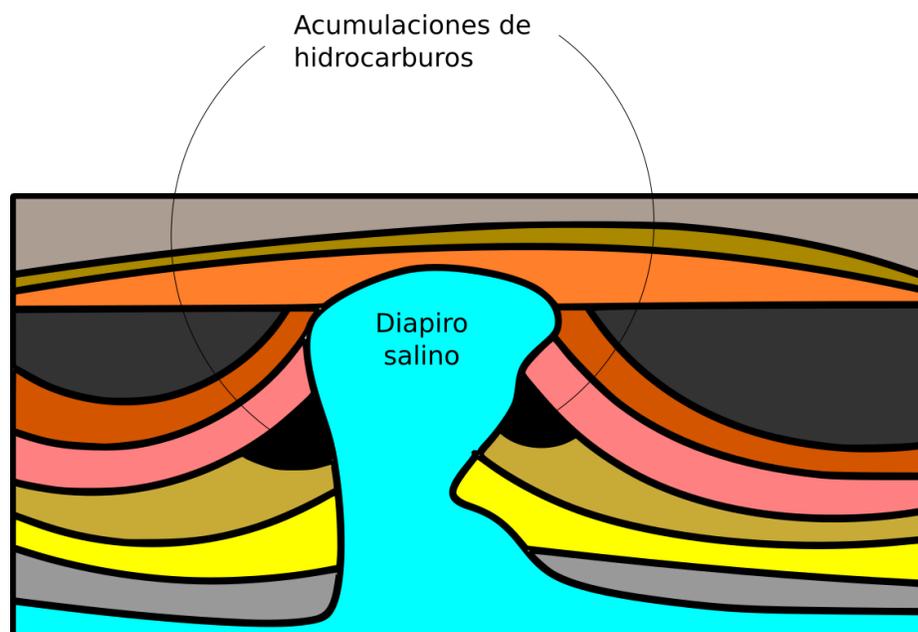


Figura 4.11. Ejemplos de trampas petroleras; la figura azul representa a un diapiro salino.

a=	1
b=	1
c=	1.9
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	84.3
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	36.85 a 36.87
Relación de Poisson de la matriz=	0.3
Relación de Poisson de la inclusión=	0.25

Tabla 7. Tabla de parámetros para el caso 7

#### 4.1.8 Caso 8 (roca-fluido)

Se trata de una formación en dolomías cuyas inclusiones son representadas como tres vógonos centrados y aislados de gran apertura, uno para cada celda, saturados de aceite con gas disuelto, el cual coexiste con una parte de gas libre a la presión del yacimiento a la cual está sometido ese aceite. La geometría se eligió para representar aproximadamente los vógonos, los cuales no tienen orientación específica.

Las formaciones dolomíticas se forman por sustitución de elementos químicos en la roca caliza (el magnesio sustituye al calcio), la cual es una característica de dicha litología. No obstante, las heterogeneidades en las dolomías pueden también ser formadas por disolución.

Ejemplos de estos yacimientos petroleros son los mismos que en el primer caso (un ejemplo de ello es Jáchymov, en República Checa), en los cuales se pueden generar donde se tienen secuencias de carbonatos.

Se muestra un fragmento de formación de este tipo en la Figura 4.12, y los datos usados para el modelo de este caso están en la tabla 8.



Figura 4.12. Brecha dolomítica con presencia de vógonos. (Adaptado de IMP, 2018)

a=	2
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	116.6
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	0.2 a 0.26
Relación de Poisson de la matriz=	0.3
Relación de Poisson de la inclusión=	0.42

Tabla 8. Tabla de parámetros para el caso 8

#### 4.1.9 Caso 9 (roca-roca)

Este caso muestra el ejemplo de una formación de calizas intercaladas con lutitas compactas de baja permeabilidad. Para este caso, se considera que la matriz es la caliza y la inclusión es la lutita, la cual atraviesa el centro de las tres celdas. Se eligió el elipsoide oblatado debido a la geometría de las lutitas.

Este tipo de formaciones se pueden dar en yacimientos cuya litología principal es la caliza mudstone, una roca constituida por lodos calcáreos (micrita) que se forman en diversos ambientes sedimentarios. Dado que los yacimientos carbonatados conforman una buena parte de las rocas almacenadoras de yacimientos petroleros conocidos en el mundo, se puede encontrar en ellos diferentes disposiciones litológicas, al relacionarse con otras rocas, por ejemplo, intercalaciones de calizas con lutitas.

Cabe mencionar que las calizas arcillosas son buenas rocas sello, debido a su baja permeabilidad y por lo tanto a su poca porosidad. En la Figura 4.13 se muestra un fragmento de roca de este tipo, y los datos del caso se muestran en la Tabla 9.



Figura 4.13. Caliza mudstone o caliza con intercalaciones de lutita. ("Caliza mudstone", s.f.).

a=	1.5
b=	1.5
c=	1.1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	84.3
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	74.43 a 74.48
Relación de Poisson de la matriz=	0.3
Relación de Poisson de la inclusión=	0.212

Tabla 9. Tabla de parámetros para el caso 9

#### 4.1.10 Caso 10 (roca-fluido)

Este caso representa un ejemplo de un yacimiento petrolero, donde la formación almacenadora está constituida por una lutita calcárea fracturada naturalmente y poco dolomitizada; su composición es de 25% calcita, 30% cuarzo con arcilla, 20% feldespatos, 20% micas y 5% dolomita. Las inclusiones son tres fracturas verticales centradas, una para celda, conectadas con la matriz y saturadas 20% por agua, 50% por aceite y 30% por gas. Se eligió la geometría de un esferoide prolato semiplano para representar adecuadamente las inclusiones.

En estos yacimientos, juegan un papel fundamental la matriz y las fracturas, quienes aportan fluidos al pozo dependiendo de la conectividad, la permeabilidad, la porosidad asociada, etc. Como producto de ello, las fracturas pueden reproducirse bajo un modelo tradicional de doble porosidad, si la distribución espacial de las fracturas es uniforme, o bajo un modelo fractal, en caso contrario (Flamenco, Camacho, 2003).

Debido a los esfuerzos de sobrecarga y la presión de poro, estos yacimientos son los más propensos a sufrir fallamientos, subsidencia y hasta desquebrajarse durante la etapa de producción del yacimiento y/o inyección de fluidos dentro del mismo. Por ello es necesario tener bien caracterizado estos yacimientos en su totalidad, a fin de poder mitigar lo más posible estas problemáticas.

Ejemplos de estos yacimientos en México, son los correspondientes a la Formación La Casita, en el noreste de México (Figura 4.14). La Tabla 10 muestra, por su parte, los datos empleados para el modelo de este caso.

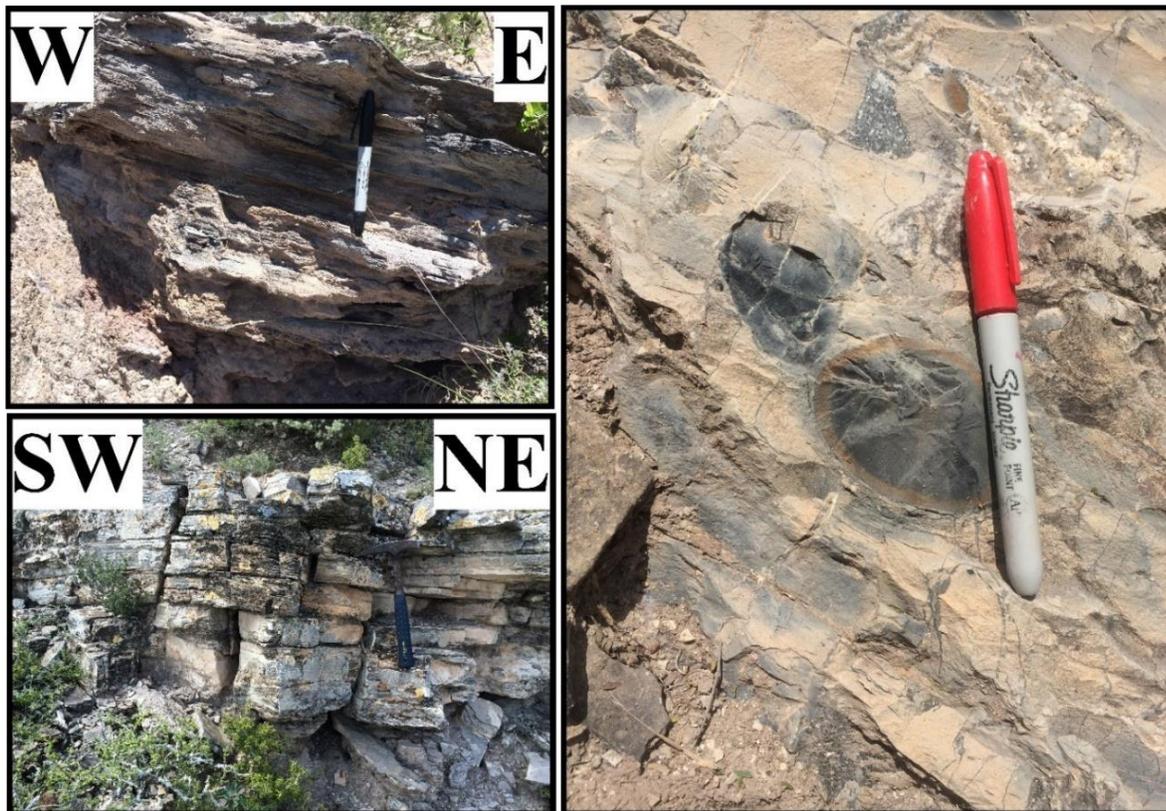


Figura 4.14. Formación La Casita, norte de México. Este es un ejemplo de formación carbonatada. (Casas Peña, 2016)

a=	0.05
b=	1
c=	1
Módulo de Young de la matriz (GPa)=	78.17
Módulo de Young de la inclusión (GPa)=	0.15 a 0.35
Relación de Poisson de la matriz=	0.256
Relación de Poisson de la inclusión=	0.47

Tabla 10. Tabla de parámetros para el caso 10

## 4.2 Resultados

Los ensayos numéricos y sus resultados que se mostrarán a continuación se hicieron con la finalidad de cuantificar el impacto de los efectos de las ondas sísmicas planas en las muestras microscópicas de las formaciones de los casos expuestos anteriormente. La importancia de estudiar el comportamiento elástico de las rocas almacenadoras de un yacimiento a partir de una escala microscópica radica en que los efectos se tengan lugar a esa escala y que estos puedan extrapolarse a todo el yacimiento con tal de determinar la susceptibilidad a fracturamiento, rompimiento o deformación de este, a través de los campos de esfuerzos modificados por el paso del tren de ondas a causa de la descompensación de estos.

Como se mencionó anteriormente, se usaron modelos de tres celdas para que, además de cumplir con lo mencionado previamente, pueda representar claramente el comportamiento elástico de las rocas de las formaciones y al mismo tiempo verificar la funcionalidad del modelo. Esto se hizo siguiendo el esquema de la Figura 4.2, donde las inclusiones atraviesan el centro de las celdas.

A continuación, se muestran los resultados arrojados por el programa para los diez casos planteados arriba, siendo que los vectores de deformación y esfuerzo iniciales usados para cada uno de ellos son:

$$\epsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\sigma_m = \begin{pmatrix} 1 * 10^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Cabe mencionar dos puntos respectivos para lo anteriormente mencionado: los vectores iniciales usados anteriormente son para fines de experimentación numérica. En realidad, estos dependen de las condiciones del yacimiento (físicas y/o químicas), la naturaleza de la prueba a realizar, entre otros factores. Por otro lado, los campos de esfuerzos resultantes del programa abarcan el dominio de las celdas, por lo que fue necesario establecer el valor de referencia a estos campos (es decir, graficar superficies para un valor de esfuerzo concreto) con el fin de poder representar gráficamente dichos campos.

Sin embargo, debe quedar claro que los campos de esfuerzos resultantes solo son modificaciones al campo de esfuerzos natural debido al paso de las ondas planas y por la descompensación que estas ocasionan, pues se debe tomar en cuenta que un yacimiento en su estado virgen (antes del paso de las ondas) está en todo momento sujeto a campos de esfuerzos naturales que son producto de fuerzas tectónicas locales, el peso de las formaciones superiores, la presión de fluidos y los efectos gravitacionales, entre otros factores.

Con fines ilustrativos, los campos de compresión (que generan fallas inversas en el esfuerzo cortante, entendiéndose por fallas inversas aquellas en las que hay cabalgamiento del bloque de techo con respecto al bloque de suelo) se representan con superficies color azul rey, los campos de esfuerzo (que generan fallas normales en el esfuerzo contante, entendiéndose por fallas normales aquellas en las que hay deslizamiento del bloque de piso con respecto al bloque de techo) con superficies color amarillo, y los de equilibrio con superficies color turquesa. Las siglas OP significan “onda plana”, las cuales se colocaron a un lado de las flechas que representan el paso de las ondas.

#### 4.2.1 Caso 1

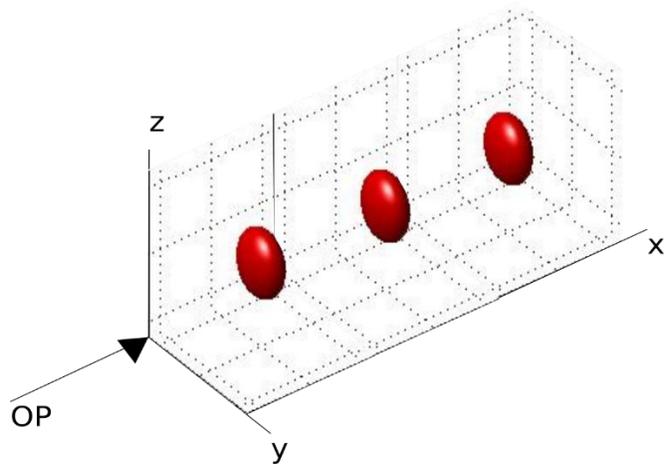


Figura 4.15. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 1.

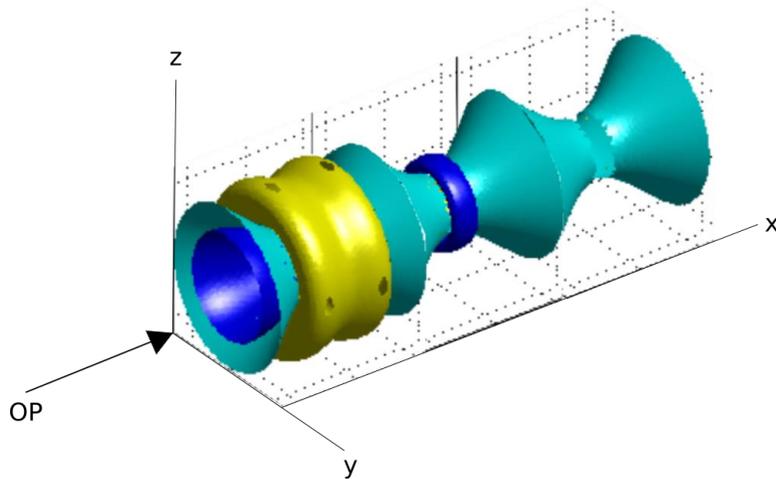


Figura 4.16. Esfuerzo normal del caso 1

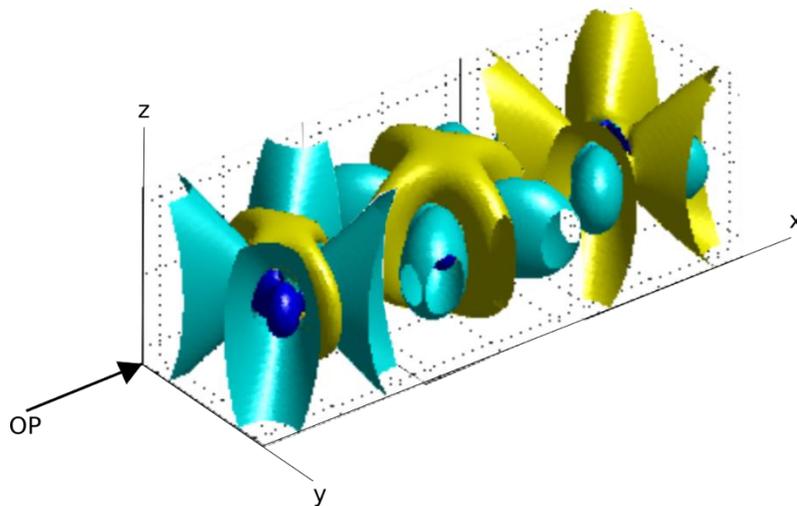


Figura 4.17. Esfuerzo cortante del caso 1

De acuerdo con los resultados arrojados para este caso (Figuras 4.15, 4.16 y 4.17), podemos dar cuenta que como los campos de esfuerzos abarcan un dominio grande, se puede presentar una alta susceptibilidad al fracturamiento de la roca carbonatada, o más aún, a un posible colapso de los vórgulos de la misma y ocasionar derrumbes a la hora de perforar un pozo o bien cuando el yacimiento se agote por energía natural (recuperación primaria).

Para tener en cuenta estos efectos y mitigarlos, se debe tener una buena planeación y un buen monitoreo del yacimiento para explotarlo de una manera eficiente, pues este tipo de formaciones tienden a colapsarse mediante la reducción de la presión de poro y por la sobrecarga de las formaciones suprayacentes.

Estos yacimientos son difíciles de estudiar y por lo tanto de explotar. La permeabilidad de los vórgulos puede llegar a ser mayor a la de la matriz y de las fracturas (Camacho et al., 2005); de ahí que es indispensable tomar en cuenta que su exagerado agotamiento puede ocasionar daños irreversibles a estas formaciones. El modelo tridimensional, por su parte, es suficiente para determinar los daños potenciales en rocas carbonatadas.

#### 4.2.2 Caso 2

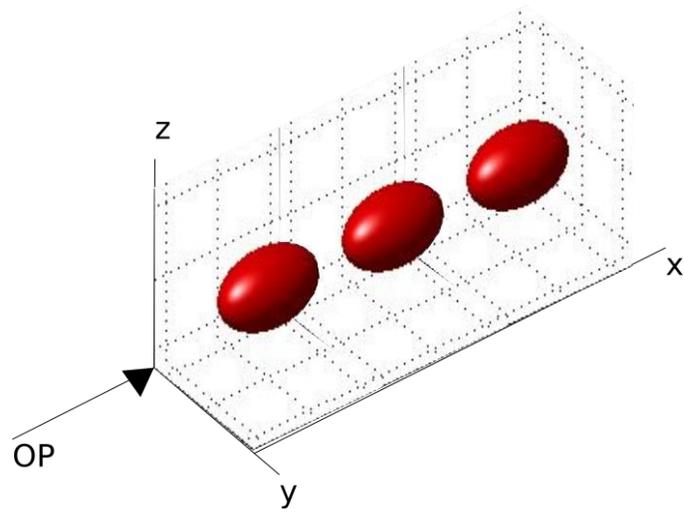


Figura 4.18. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 2.

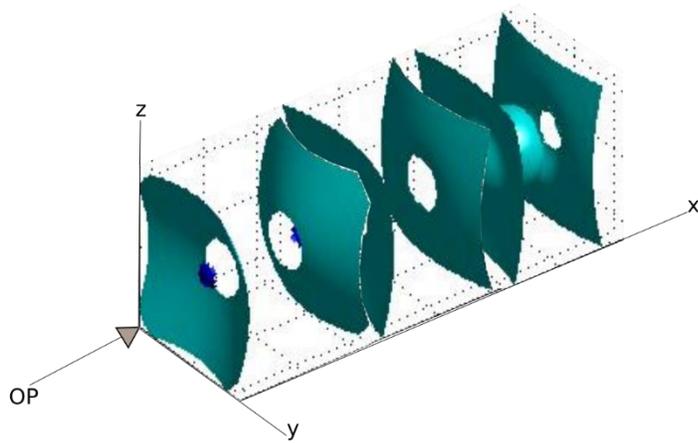


Figura 4.19. Esfuerzo normal del caso 2

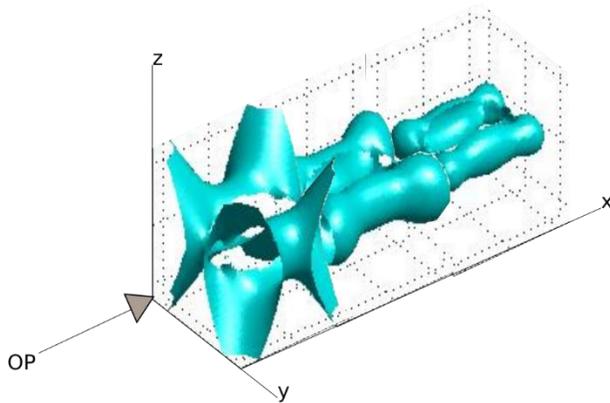


Figura 4.20. Esfuerzo cortante del caso 2

Ante el paso de las ondas planas, los yacimientos de aceite y gas en lutitas tienen la característica de ser dúctiles debido a las características litológicas de las lutitas y rocas afines, como se puede ver en los resultados arrojados por este modelo.

De estos resultados (Figuras 4.18, 4.19 y 4.20) se puede inferir que estos yacimientos pueden ser propensos a sufrir modificaciones mediante el uso de fracking o por esfuerzos naturales (como puede ser la presión de sobrecarga). El amplio dominio de los campos de esfuerzos así lo indica, y además dan a entender que las lutitas pueden responder bien a las ondas sísmicas y transmitir las de una manera eficiente.

Como estas formaciones son susceptibles a estos fenómenos, en la planeación de proyectos que involucren yacimientos de aceite y gas en lutitas es fundamental tener bien conocido el fracturamiento hidráulico y saberlo usar bien, de tal manera que no genere mayores daños ambientales, económicos, sociales y hasta técnicos. El modelo da los resultados suficientes sin necesidad de añadir más celdas.

### 4.2.3 Caso 3

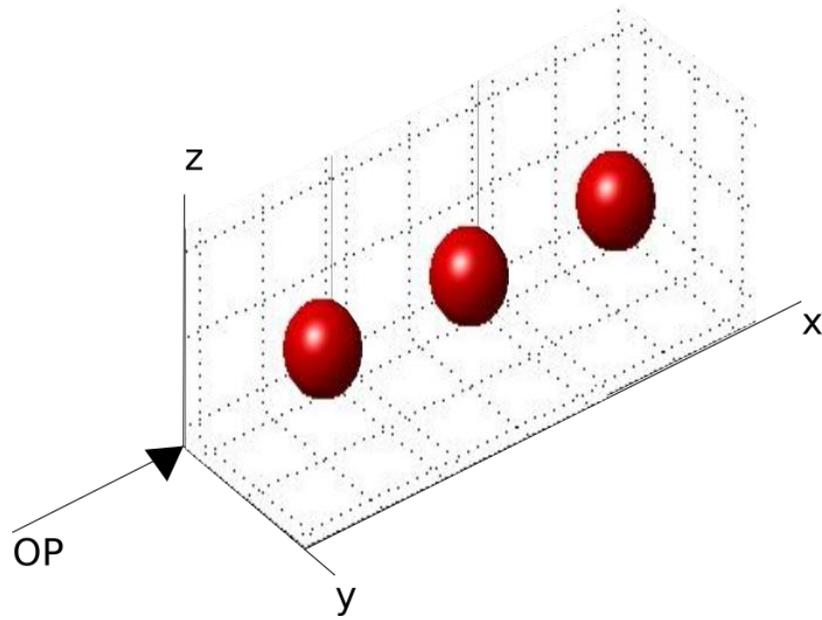


Figura 4.21. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 3.

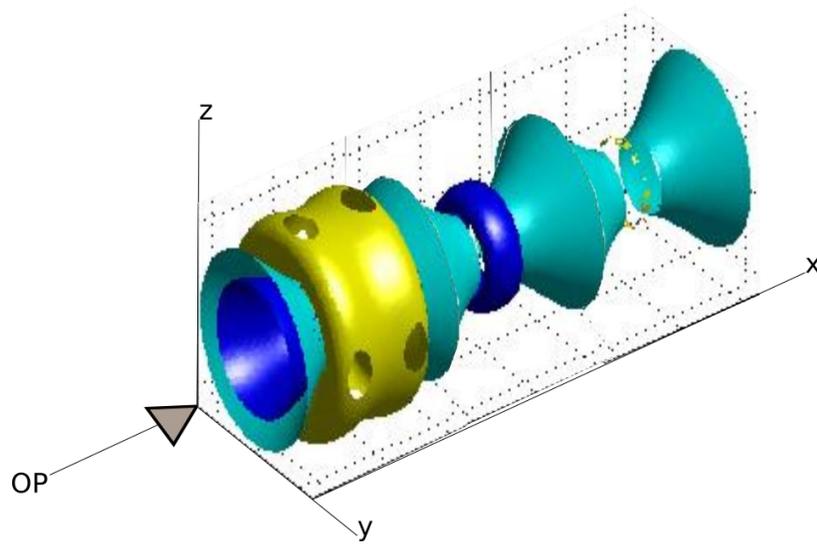


Figura 4.22. Esfuerzo normal del caso 3

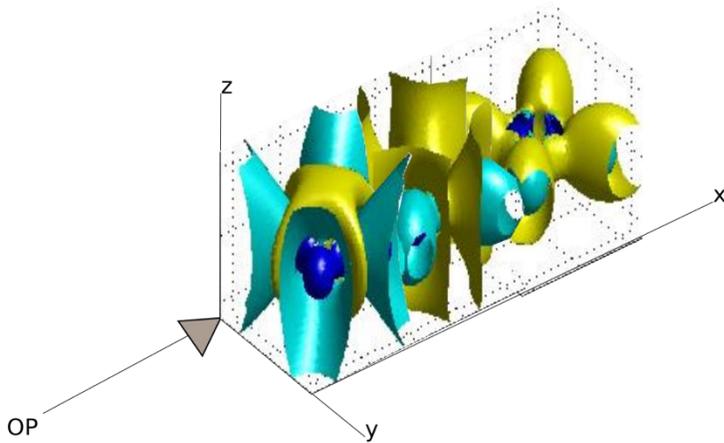


Figura 4.23. Esfuerzo cortante del caso 3

Los resultados arrojados por este modelo (Figuras 4.21, 4.22 y 4.23) son similares al primer caso, los cuales dan a entender que los yacimientos geotérmicos son más propensos a ocasionar sismos mediante el agotamiento repentino de los acuíferos asociados y de cómo se maneja la inyección de agua para la obtención de energía una vez que dicha inyección haya entrado en contacto con la roca caliente mediante la transmisión por contacto.

Como se expuso anteriormente, es por esta causa que se generaron sismos que se sintieron en zonas cercanas y hasta provocaron en pérdidas patrimoniales, como es el caso de un yacimiento geotérmico en la provincia de Gyeongsang, en Corea del Sur.

Es por esto mismo que el modelo da los resultados suficientes para llevar a cabo esta interpretación. Para proyectos de este tipo, se debe tomar en cuenta un buen manejo de la planeación de la infraestructura necesaria y de cómo llevar a cabo inyecciones de agua hacia las rocas (en contacto con el calor interno de la Tierra) de una forma segura.

#### 4.2.4 Caso 4

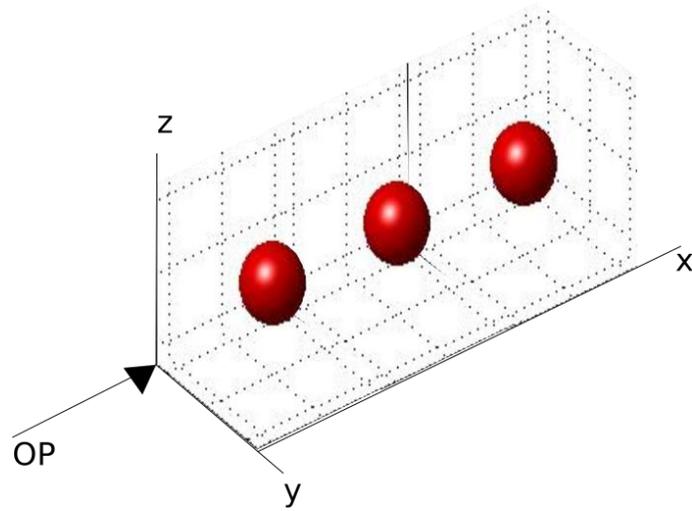


Figura 4.24. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 4.

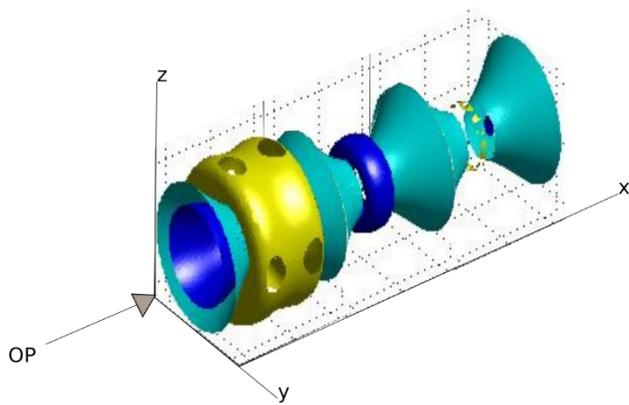


Figura 4.25. Esfuerzo normal del caso 4

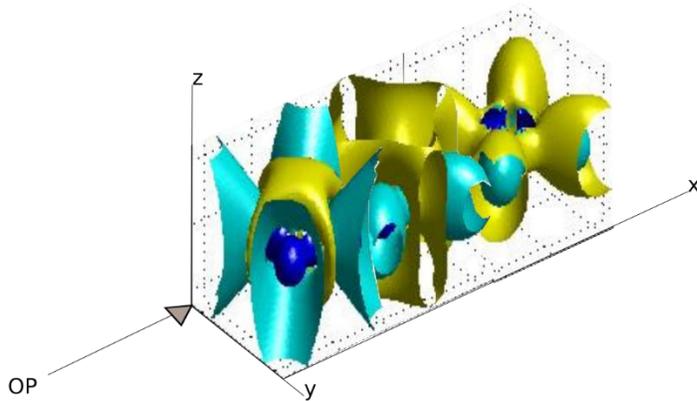


Figura 4.26. Esfuerzo cortante del caso 4

Con los resultados arrojados por el modelo (Figuras 4.24, 4.25 y 4.26), podemos notar que las brechas y los conglomerados tienen más tendencia a responder al paso del tren de ondas, puesto que la calcita que tienen como cementante responde bien a los efectos que imponen las ondas sobre los medios que atraviesan.

Esto es clave para la caracterización de yacimientos, ya que en el caso del campo Cantarell, una de las mayores dificultades que se tuvo a la hora de explorar el subsuelo de los yacimientos asociados es la mala caracterización de las brechas. Varios autores de artículos clasifican a las brechas dentro de las formaciones típicas de yacimientos naturalmente fracturados, al considerar como fracturas mineralizadas los espacios ocupados por el cementante, mientras que otros no, causando que se abriera un debate sobre si las formaciones de este tipo pueden considerarse o no como formaciones fracturadas. De hecho, dentro de las formaciones de los yacimientos del campo Cantarell, se dio a conocer que hubo agua percolada que causó vugulación en estas brechas, de tal manera que se puede modelar el flujo de fluidos mediante un modelo de triple porosidad (Camacho et al., 2005).

Lo anterior es un claro ejemplo de cómo la caracterización de formaciones complejas depende de las interpretaciones petrofísicas y litológicas de las formaciones mediante núcleos, registros de imagen y geofísicos y pruebas de presión de fluidos, y del modelo que se use para simular el flujo de fluidos.

Las brechas y los conglomerados son buenos conductores sísmicos debido a sus propiedades elásticas, y por ello se pueden diferenciar mediante la respuesta que experimentan y la redondez de los granos. El modelo, por su parte, da los datos necesarios para realizar esta interpretación.

#### 4.2.5 Caso 5

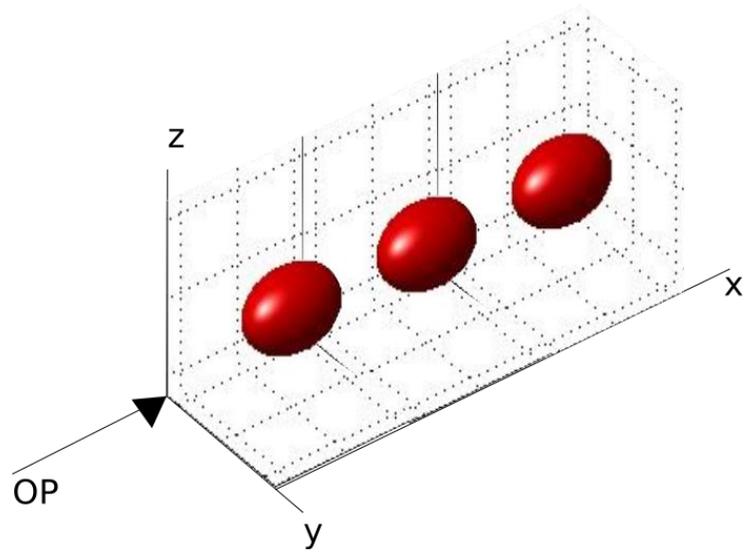


Figura 4.27. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 5.

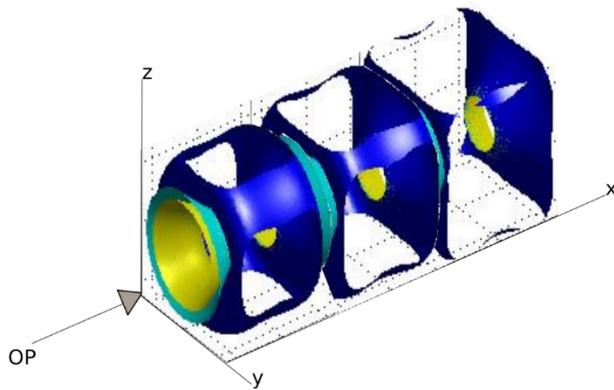
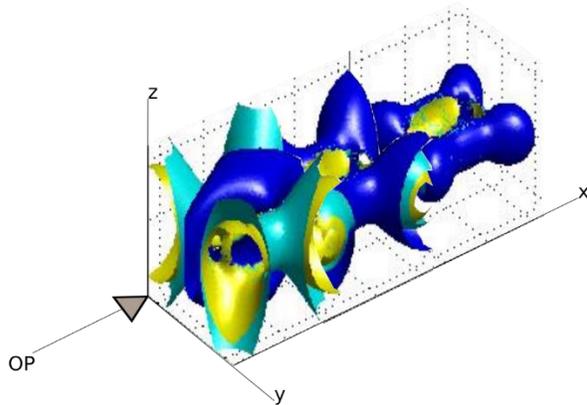


Figura 4.28. Esfuerzo normal del caso 5



*Figura 4.29. Esfuerzo cortante del caso 5*

Los resultados arrojados para este modelo (Figuras 4.27, 4.28 y 4.29) indican que la lutita en conjunto con la arenisca son buenos conductores de ondas planas, dado que estas litologías son más dúctiles y por lo tanto se pueden llegar a comprimir formando sinclinales o anticlinales (estos últimos son las trampas más comunes en yacimientos petroleros).

Este resultado implica que, en el proceso de formación de dichos yacimientos, los esfuerzos a los que se someten las formaciones de este tipo contribuyen a formar trampas gracias a las propiedades elásticas de estos macizos rocosos. En los proyectos petroleros, estas trampas tienen potencial para la acumulación de hidrocarburos.

Se requiere que, para tratar la explotación en zonas como éstas, hay que considerar que estas formaciones son más proclives a hinchamientos o a derrumbes dependiendo de las características mineralógicas de las lutitas y areniscas presentes. Conocer bien estas formaciones garantiza una buena estabilidad en los pozos, una perforación eficiente y una segura recuperación de hidrocarburos.

#### 4.2.6 Caso 6

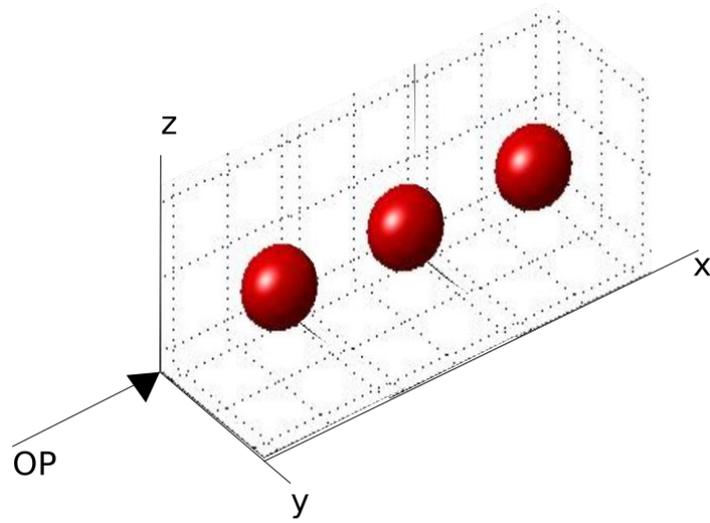


Figura 4.30. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 6.

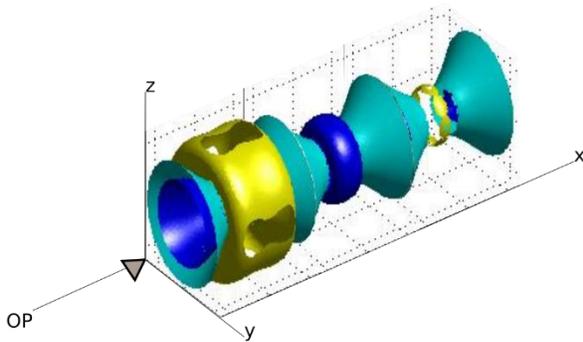


Figura 4.31. Esfuerzo normal del caso 6

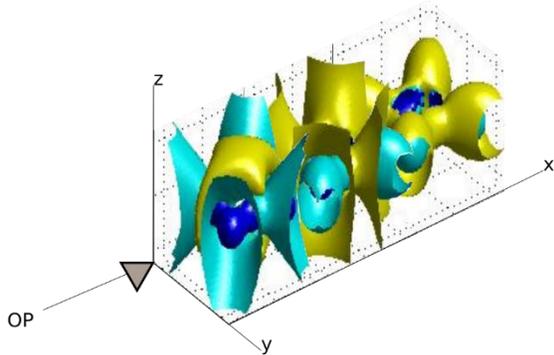


Figura 4.32. Esfuerzo cortante del caso 6

Los resultados en las Figuras 4.30, 4.31 y 4.32 muestran que, al contrario que en el caso anterior, las formaciones de este tipo, aunque tengan la misma composición aparentemente, no contribuyen a un mayor riesgo puesto que son dúctiles. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que, al tener el campo de esfuerzos un mayor dominio, estas formaciones pueden tender a sufrir rompimientos si las propiedades elásticas asociadas rebasan el límite plástico. Puesto que las areniscas pueden llegar a ser deleznales, al momento de perforar se puede representar un derrumbe temprano. Para mitigar estos derrumbes es necesario un buen lodo de perforación, una lechada de cemento de buena calidad y una ágil colocación de tuberías de perforación y producción.

Aunque los resultados son suficientes para este caso con tres celdas, se puede ampliar el número de celdas para estudiar más a detalle cómo se comportan estas formaciones, incluso si se tratan de lentes de areniscas.

#### 4.2.7 Caso 7

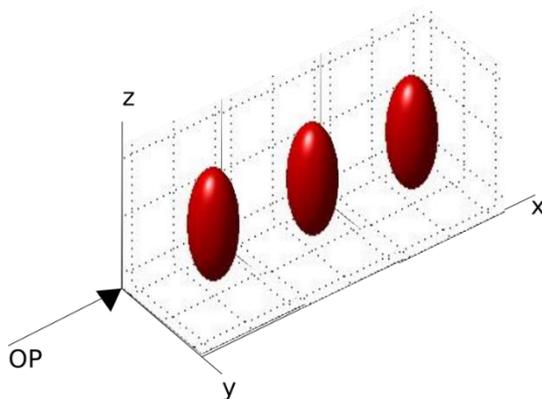


Figura 4.33. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 7.

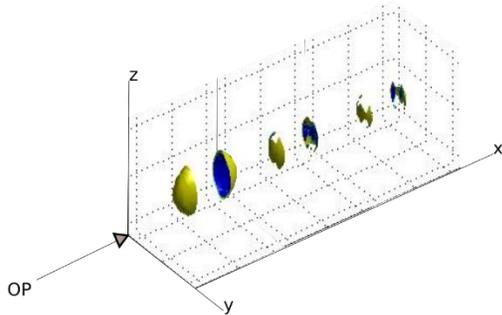


Figura 4.34. Esfuerzo normal del caso 7

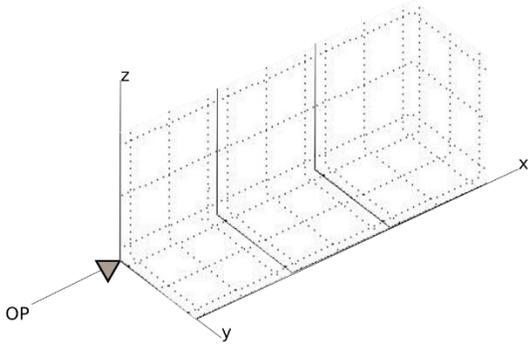


Figura 4.35. Esfuerzo cortante del caso 7

Los resultados para este caso (Figuras 4.33, 4.34 y 4.35) no son suficientes para tres celdas puesto que se trata con un fragmento vertical de diapiro salino. A pesar de ello, podemos notar gracias a estos resultados que los domos y diapiros salinos constituyen un obstáculo para el tren de ondas, causando disipación y/o reflexión-refracción. Es por ello que, en levantamientos sísmicos, los domos y diapiros salinos se pueden identificar mediante puntos brillantes, además de que sus características litológicas propician a los domos salinos a impedir la difusión del tren de ondas.

Esto es importante tanto para la caracterización de yacimientos como para la geomecánica y perforación de pozos. El perforar pozos en estructuras salinas conllevaría a un derrumbe por parte de las paredes del pozo, pues la sal posee un comportamiento de “fluido” o de “arena deleznable” a pesar de su densidad, lo que ocasionaría en colapsos de agujero y/o tubería y posteriormente graves problemas operativos.

#### 4.2.8 Caso 8

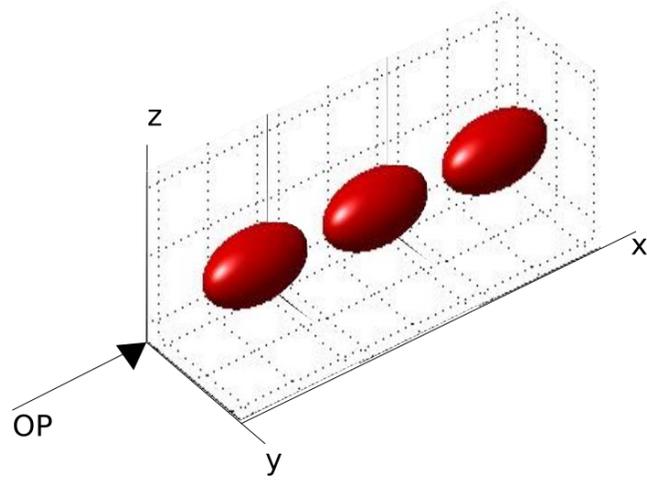


Figura 4.36. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 8.

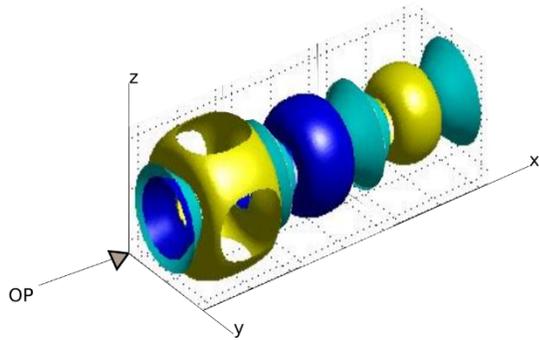


Figura 4.37. Esfuerzo normal del caso 8

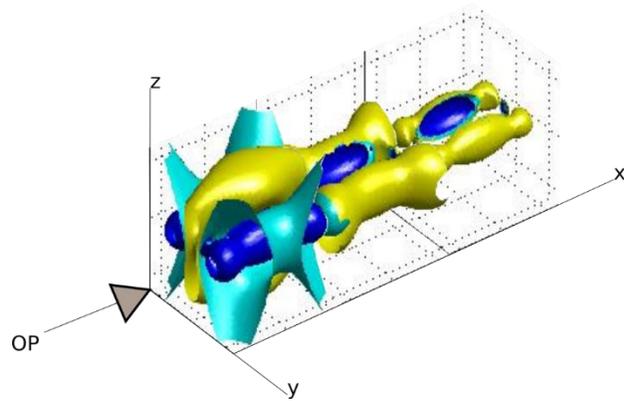


Figura 4.38. Esfuerzo cortante del caso 8

Los resultados arrojados por el modelo (Figuras 4.36, 4.37 y 4.38) muestran que las dolomías son propensas a fracturamiento y, por lo tanto, provocan daños operacionales ya sea durante la perforación o durante la producción de hidrocarburos. Esto es debido a que las propiedades elásticas de la dolomía la hacen una roca propensa a colapsar por la descompensación del campo de esfuerzos provocada por las ondas planas (e incluso durante la producción de hidrocarburos), así como del campo de esfuerzos que rodea a cada una de las celdas.

Esto es un ejemplo de que las dolomías, como toda roca carbonatada, son proclives a reaccionar a las ondas sísmicas en busca de equilibrio de esfuerzos. Esto es cierto, debido a que las dolomías son “carbonatos alterados químicamente” y por lo tanto tienen casi el mismo comportamiento que las rocas calizas.

#### 4.2.9 Caso 9

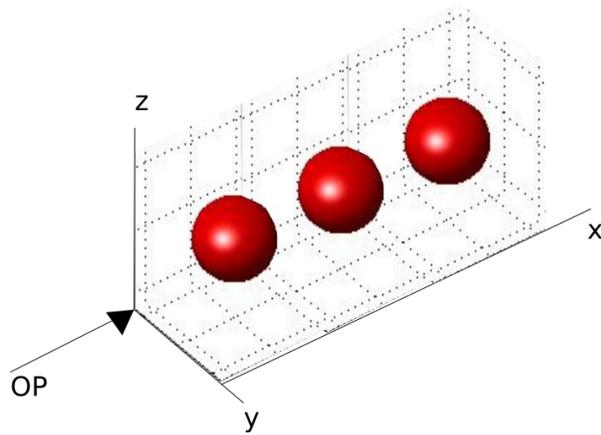


Figura 4.39. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 9.

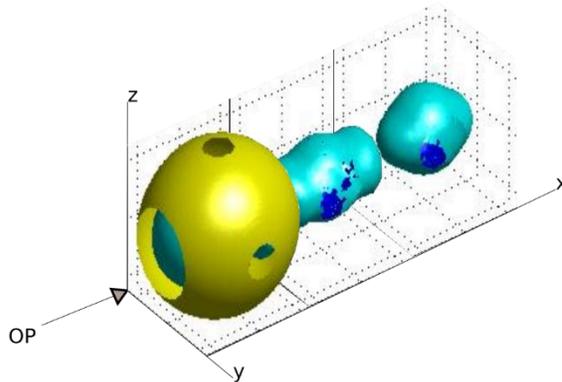


Figura 4.40. Esfuerzo normal del caso 9

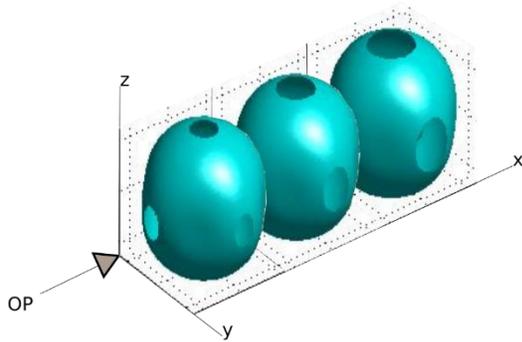


Figura 4.41. Esfuerzo cortante del caso 9

Si bien estos resultados (Figuras 4.39, 4.40 y 4.41) son suficientes bajo el modelo de tres celdas, se pueden añadir más para comprender más a profundidad el comportamiento de las formaciones compuestas de calizas arcillosas. Por lo mientras, estos resultados hacen referencia al hecho de que este tipo de rocas son dúctiles gracias a su contenido en arcilla, y dependiendo de la mineralogía de la última, son proclives a sufrir deformaciones del tipo plástico.

Estas litologías causan fallamientos si son sometidas a campos de esfuerzos que exceden el régimen de elasticidad plástica. Es importante ubicar estas rocas a la hora de comenzar a perforar pozos, ya que la cantidad de arcilla presente en ellas puede llegar a ocasionar hinchamientos y demás problemas de índole operacional si se usan lodos de perforación base agua.

#### 4.2.10 Caso 10

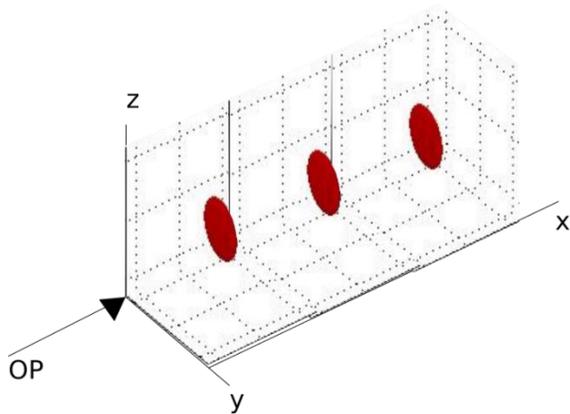


Figura 4.42. Diagrama de celdas e inclusiones para el caso 10.

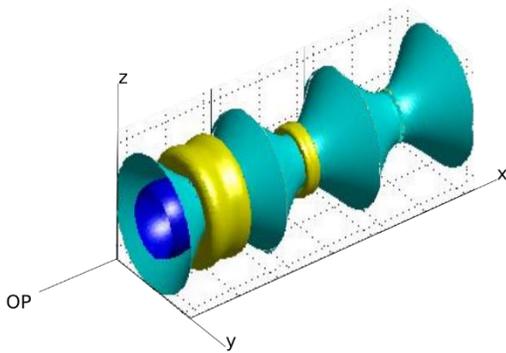


Figura 4.43. Esfuerzo normal del caso 10

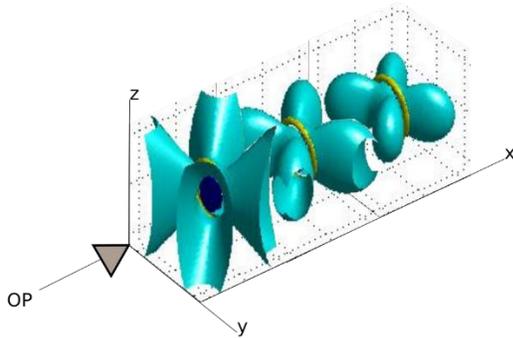


Figura 4.44. Esfuerzo cortante del caso 10

Los resultados calculados por el modelo (Figuras 4.42, 4.43 y 4.44) son suficientes como para poder interpretar el comportamiento de estas formaciones. Estos prueban que las lutitas calcáreas dolomitizadas pueden ser candidatas a ser yacimientos naturalmente fracturados, pues estas tienen tendencia a ser fracturadas por procesos naturales.

Debido a ello, podemos notar que un proyecto que se lleve a cabo en estas formaciones tiene que tomar, como uno de los factores de importancia para su éxito, la geomecánica. Gracias a los estudios que se obtienen de ella se puede obtener un mejor panorama del yacimiento y poder crear un plan operativo rentable, seguro y óptimo. Esto, sumado a la información recopilada durante el ciclo de vida del yacimiento hasta su abandono, puede conducir a que el proyecto alcance sus objetivos, dentro de un panorama económico, técnico y de legislación de la industria.

Cabe mencionar que la extracción de hidrocarburos de estas formaciones es compleja, por lo que es necesario contar con una buena estrategia de explotación y buenos modelos del yacimiento para garantizar la producción sin caer en riesgos operativos mayores.

### 4.3 Ventajas y desventajas del modelo de Eshelby

Una de las ventajas del modelo de Eshelby (1957) es pronosticar el comportamiento elástico de las formaciones de un yacimiento, haciendo fácil identificar las litologías presentes en el mismo a partir de litologías de referencia como lutitas, calizas, areniscas, etc.

Otra ventaja del modelo de Eshelby es que propone una solución a problemas de geomecánica, de control y perforación de pozos, a través de estudios sísmicos. Al hacer la corroboración de los datos recopilados y generado el modelo estático, se procede a poblar dicho modelo con datos y geoestadística de propiedades petrofísicas de pruebas de presión, núcleos y registros, creando así el modelo dinámico, útil para simulación numérica de flujo de fluidos. El modelo también ayuda como herramienta auxiliar para elegir, de todas las opciones viables para la explotación de un yacimiento, aquella que provee una explotación óptima, rentable y segura.

En cuanto a las desventajas, la principal proviene que estas idealizaciones son solamente aplicables a geometrías elipsoidales e inclusiones ubicadas solamente en el centro de las celdas. Lo anterior se puede solucionar mediante la ecuación canónica del elipsoide y con ella, poder dar una solución que se puede pensar es la misma para inclusiones centradas, aunque con ciertas modificaciones. No obstante, el hecho de que se aplique solo para geometrías elipsoidales es un motivo por el cual, bajo esta geometría, el modelo propone soluciones analíticas y fáciles de calcular numéricamente, como se mencionó anteriormente en este trabajo.

También podemos considerar una limitante que los resultados y sus interpretaciones dependen del número de celdas que se manejen. Podemos decir que, mientras más celdas se contemplen en el modelo, mejor será la información arrojada por el modelo y nuestra interpretación con base a ella, y menor será la incertidumbre al momento de analizarla.

Este modelo es únicamente un recurso para llevar a cabo interpretaciones, por lo que no puede sustituir a la sísmica y el análisis de núcleos y de registros, que juegan un papel importante dentro de la caracterización de un yacimiento. Mientras tanto, el modelo es auxiliar en estudios de geomecánica, cruciales para lograr una mejor comprensión del mismo yacimiento y llevar a cabo mejores resultados.

## Capítulo 5: Conclusiones

### 5.1 Conclusiones

El modelo de Eshelby es una herramienta de importancia para las etapas primordiales de la explotación de un yacimiento petrolero, en especial todo lo relacionado con la exploración y prospección sísmica del mismo. Este mismo modelo ayuda a tomar decisiones en cuanto a la perforación, terminación y control de pozos, así como corroborar información recolectada de geociencias, la cual abarca registros en pozo y análisis de núcleo y afloramientos.

Al ser una herramienta para interpretar los levantamientos sísmicos de los yacimientos, contribuye a disminuir los riesgos financieros y técnicos al proporcionar un elemento clave para la construcción del modelo estático, lo cual conlleva a modelar dinámicamente al yacimiento a partir de pruebas de presión-producción para identificar los regímenes de flujo presentes en el mismo, con el fin de poder simular numéricamente dicho flujo a partir de escenarios de producción estipulados, y elegir el que genere una producción óptima.

Con respecto a los resultados del presente trabajo, se pudo llegar al hecho de que dependen de varios factores, como la naturaleza de la prueba, la dirección e intensidad de las ondas, las propiedades elásticas de las formaciones, entre otros. Estos resultados son la prueba de que el modelo de Eshelby es una herramienta útil para estudios de geomecánica, fundamentales para el entendimiento del yacimiento. Además, dichos resultados también contribuyeron a mostrar las ventajas y desventajas de este, ya que el modelo estudia las formaciones y su comportamiento elástico al paso de las ondas sísmicas, en una escala microscópica. Ello ha implicado el ajuste del dominio de las celdas de tal manera que los resultados tengan valor en toda la celda, y elegir los valores necesarios para representar gráficamente los campos de esfuerzos resultantes.

Mas aún, los resultados arrojados por el modelo pueden ser usados para implementar métodos de recuperación secundaria y mejorada, así como fracturamiento hidráulico, de una manera segura, y además también se usan como datos de entrada en simulaciones numéricas de flujo acoplada con geomecánica.

### 5.2 Contribución

Se realizó un programa principal (EsfuerzosEshelbyMod) en MATLAB® mediante el cual se recopilan los datos de los semiejes de la inclusión y los parámetros elásticos del medio, así como los vectores iniciales de esfuerzo y deformación. Este algoritmo realiza una llamada a la función EshelbyDemo (Healy, 2009) que se encarga del cálculo del campo de esfuerzos a través de funciones auxiliares. A partir de los resultados arrojados por el programa, se realizó la representación gráfica de los campos de esfuerzos para cada celda en el modelo, y se realizó una interpretación con base en el comportamiento mostrado por éstas.

### 5.3 Recomendaciones

- Generalizar el modelo a inclusiones no centradas y geometrías no elipsoidales, así como generalizar el algoritmo a fin de adaptarlo a las mismas condiciones explicadas anteriormente.
- Usar el modelo con el fin de poder acoplarlo a simuladores numéricos de flujo y software especializado de geofísica (sísmica) y de perforación de pozos.
- Usar el modelo como complemento para interpretaciones de caracterización dinámica a fin de poder identificar barreras al flujo, heterogeneidades como fallas o fracturas y acuíferos circundantes, elementos esenciales para estudios primarios de balance de materia, mecanismos de empuje y de producción, y regímenes de flujo existentes.
- Ampliar el modelo para yacimientos naturalmente fracturados de carácter fractal, con disposición no uniforme de fracturas (Camacho et al., 2008), con el propósito de cuantificar de manera aproximada a la realidad, en cuanto a la interpretación sísmica de estos yacimientos a través de modelos discretos de redes de fracturas (DFN). La importancia de estos radica en que el espaciamiento no uniforme de las fracturas y el hecho de que no todas las fracturas forman conexión entre ellas y que las redes de fracturas se concentran más en algunas zonas que en otras, impactan mucho en la recuperación de hidrocarburos (Camacho et al., 2008).

## Referencias bibliográficas

Aguilera, R. (1995). *Naturally Fractured Reservoirs* (2.a ed.). PennWell Books.

*Areniscas con arcillas.* (s. f.). [Fotografía]. DepositPhotos.  
<https://sp.depositphotos.com/440174692/stock-photo-land-outcrops-outcrops-mainly-composed.html>

Avadhanulu, M. N. (1992). *A Textbook of Engineering Physics*. S Chand & Company.

*Basaltos en CU.* (s. f.). [Fotografía]. Ning.com. <http://remarq.ning.com/photo/colada-de-basalto-invernadero>

*Caliza mudstone.* (s. f.). [Fotografía]. Alamy.com. <https://www.alamy.com/stock-photo-limestone-with-mudstone-layers-85012584.html>

Camacho, R., Fuentes, G., & Vásquez, M. (2008). Decline Curve Analysis of Fractured Reservoirs with Fractal Geometry. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 11(3), 606-619.

Camacho, R. G., Vásquez, M. A., Castrejón, R., & Arana, V. (2005). Pressure-Transient and Decline-Curve Behavior in Naturally Fractured Vuggy Carbonate Reservoirs. *SPERE*, 8(2), 95-112.

Casas Peña, J.M. (2016) (Tesis de licenciatura), *Revisión estratigráfica del Jurásico en el Cerro La Cruz, Aramberri, Nuevo León*, Universidad Autónoma de Nuevo León, Linares, Nuevo León.

*Coeficiente de Poisson.* (s. f.). Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado 19 de julio de 2020, de [https://es.wikipedia.org/wiki/Coeficiente\\_de\\_Poisson](https://es.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_Poisson)

*Constante elástica.* (s. f.). Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado 19 de julio de 2020, de [https://es.wikipedia.org/wiki/Constante\\_el%C3%A1stica](https://es.wikipedia.org/wiki/Constante_el%C3%A1stica)

Das, B. M. (2001). *Fundamentos de Ingeniería Geotécnica* (4.a ed.). Cengage Learning.

Desmarais, L. (1997). *Applied Electro Optics*. Pearson Education.

*Dispersión, dispersor de ondas.* (s. f.). Oilfield Glossary. Recuperado 19 de julio de 2020, de <https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/d/dispersion.aspx>

Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London*, 241, 376-392.

Eshelby, J. D. (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London*, 252, 561-569.

Eyges, L. (1972). *The Classical Electromagnetic Field*. Dover Publications.

- Flamenco, F., & Camacho, R. (2003). Determination of Fractal Parameters of Fractured Networks Using Pressure-Transient Data. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 6(1), 39-47.
- Frecuencia angular*. (2018). Definiciones. <https://glossar.item24.com/es/indice-de-glosario/articulo/item//frecuencia-angular-2.html>
- French, A. P. (1971). *Vibrations and waves (The M.I.T. introductory physics series)*. Nelson Thornes.
- Geología y Elasticidad de las Rocas*. (s. f.). UNR. Recuperado 19 de julio de 2020, de [https://www.fceia.unr.edu.ar/geologiaygeotecnia/Elasticidad\\_de\\_rocas.pdf](https://www.fceia.unr.edu.ar/geologiaygeotecnia/Elasticidad_de_rocas.pdf)
- González Martínez, C. D., (2000) (Tesis de doctorado), *Dos modelos micromecánicos de deformación con daño en materiales compuestos*, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España.
- Healy, D. (2009). Elastic field in 3D due to a spheroidal inclusion- MATLAB code for Eshelby's solution. *Computers & Geoscience*, 35, 2170-2173.
- Hecht, E. (1987). *Optics* (2nd ed.). Addison-Wesley.
- IMP. (2018). *Curso de evaluación de formaciones* [Diapositivas]. SlideShare. <https://www.slideshare.net/JuanAS3/fundamentos-basicos-95073299>
- Ímpetu*. (2016). Significados. <https://www.significados.com/impetu/>
- Jackson, J. D. (1998). *Classical Electrodynamics* (3rd Revised ed.). Wiley.
- Jaimes Tejeda, L., (2018) (Tesis de maestría), *Modelado de velocidades de ondas en rocas anisótropas y heterogéneas con aplicación en la exploración de recursos naturales*, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Ju, J. W., & Sun, L. Z. (1999). A novel formulation for the exterior-point Eshelby's tensor of an ellipsoidal inclusion. *Journal of Applied Mechanics*, 66, 570-574.
- Ju, J. W., & Sun, L. Z. (2001). Effective elastoplastic behaviour of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities, Part I: micromechanics-based formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 38(2), 183-201.
- Lowrie, W. (2007). *Fundamentals of Geophysics* (2.a ed.). Cambridge University Press.
- Lutitas con areniscas*. (s. f.). [Fotografía]. Alamy.es. <https://www.alamy.es/foto-capas-de-arenisca-y-lutita-afloran-sudafrica-34835721.html>
- Marion, J. B. (2010). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Editorial Reverté.
- Mavko, G., Mukerji, T., & Dvorkin, J. (2009). *Rock Physics Handbook* (2.a ed.). Cambridge University Press.

- Médica, D. E. U. (2018). *La física del ultrasonido*. D. E. U. Médica. <https://diplomadomedico.com/la-fisica-del-ultrasonido/>
- Mikhlin, S. G. (1964). *Métodos variacionales en Física Matemática*. Pergamon Press.
- Muncaster, R. (1993). *A-level Physics*. Nelson Thornes.
- Mura, T. (1987). *Micromechanics of Defects in Solids*. Kluwer Academic.
- Nakamura, T., Suresh, S. (1993). Effects of thermal residual stresses and fiber packing on deformation of metal-matrix composites, *Acta metall. Mater.*, *41*, 1665-1681.
- Nelson, R. A. (2001). *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs* (2.a ed.). Gulf Professional Pub.
- Número de onda*. (s. f.). Oilfield Glossary. Recuperado 19 de julio de 2020, de <https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/w/wavenumber.aspx>
- Ofek, B., Shahar, H., & Barak, K. (2014). *Radiation reaction at the level of the action*. Cornell University.
- Permeabilidad*. (s. f.). Oilfield Glossary. Recuperado 30 de octubre de 2020, de <https://www.glossary.oilfield.slb.com/Terms/p/permeability.aspx>
- Polyanin, A. D. (2002). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Taylor & Francis.
- Polyanin, A. D., & Zaitsev, V. F. (2003). *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, Second Edition* (2nd ed.). Routledge.
- Porosidad*. (s. f.). Oilfield Glossary. Recuperado 30 de octubre de 2020, de <https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/p/porosity.aspx>
- Relación de Poisson*. (s. f.). Oilfield Glossary. Recuperado 19 de julio de 2020, de [https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/p/poissons\\_ratio.aspx#:~:text=Una%20constante%20el%C3%A1stica%20que%20es,latitudinal%20y%20la%20deformaci%C3%B3n%20longitudinal.&text=La%20relaci%C3%B3n%20de%20Poisson%20del%20carb%C3%B3n%20es%200%2C4](https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/p/poissons_ratio.aspx#:~:text=Una%20constante%20el%C3%A1stica%20que%20es,latitudinal%20y%20la%20deformaci%C3%B3n%20longitudinal.&text=La%20relaci%C3%B3n%20de%20Poisson%20del%20carb%C3%B3n%20es%200%2C4).
- Romero Rubio, L. (2015). *Sísmica de reflexión* [Diapositivas]. Slideplayer. <https://slideplayer.es/slide/4875336/>
- Shipman, J., Wilson, J. D., & Higgins, C. A. (2015). *An Introduction to Physical Science* (14.a ed.). Cengage Learning.
- Singh, D. (2015). *FUNDAMENTALS OF OPTICS, SECOND EDITION* (2.a ed.). Prentice Hall.

*Spheroid*. (s. f.). Wolfram Mathworld. Recuperado 19 de julio de 2020, de <https://mathworld.wolfram.com/Spheroid.html>

Tamburrino, A. (2010). *Propiedades de algunos sólidos y líquidos necesarias para el cálculo de la celeridad de la onda de presión*. Universidad de Chile. [https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2010/1/CI4101/1/material\\_docente/bajar?id\\_material=280468](https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2010/1/CI4101/1/material_docente/bajar?id_material=280468)

Tatum, J. B. (2007). *Physics - Celestial Mechanics*. Universidad de Victoria.

*Teoría del medio efectivo*. (s. f.). Oilfield Glossary. Recuperado 19 de julio de 2020, de [https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/e/effective\\_medium\\_theory.aspx#:~:text=Desarrollada%20originalmente%20para%20estimar%20los,de%20la%20heterogeneidad%20promedien%20cero.](https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/e/effective_medium_theory.aspx#:~:text=Desarrollada%20originalmente%20para%20estimar%20los,de%20la%20heterogeneidad%20promedien%20cero.)

Yao, J., & Huang, Z. Q. (2016). *Fractured Vuggy Carbonate Reservoir Simulation*. Springer Publishing.

## Anexo. Diagramas de flujo del modelo de Eshelby

En el presente anexo se muestran los diagramas de flujo de las subfunciones de la función “**EshelbyDemo**” de Healy (2009), las cuales manejan los cálculos para el modelo de Eshelby (Figuras A.1 a A.7). Este anexo es un compendio de estos diagramas de flujo, y su utilidad radica en orientar al lector en el procedimiento usado para la metodología del modelo. Así, se busca explicar, de una manera más clara posible, estas subfunciones y los datos de entrada y salida que manejan.

Cabe aclarar que el algoritmo propuesto por Healy (2009) tiene la ventaja de acoplarse a algoritmos propios gracias a su adaptabilidad y a que es un algoritmo de código abierto. Por tal motivo, este anexo también ilustra los pasos que sigue el mismo algoritmo en sus subfunciones.

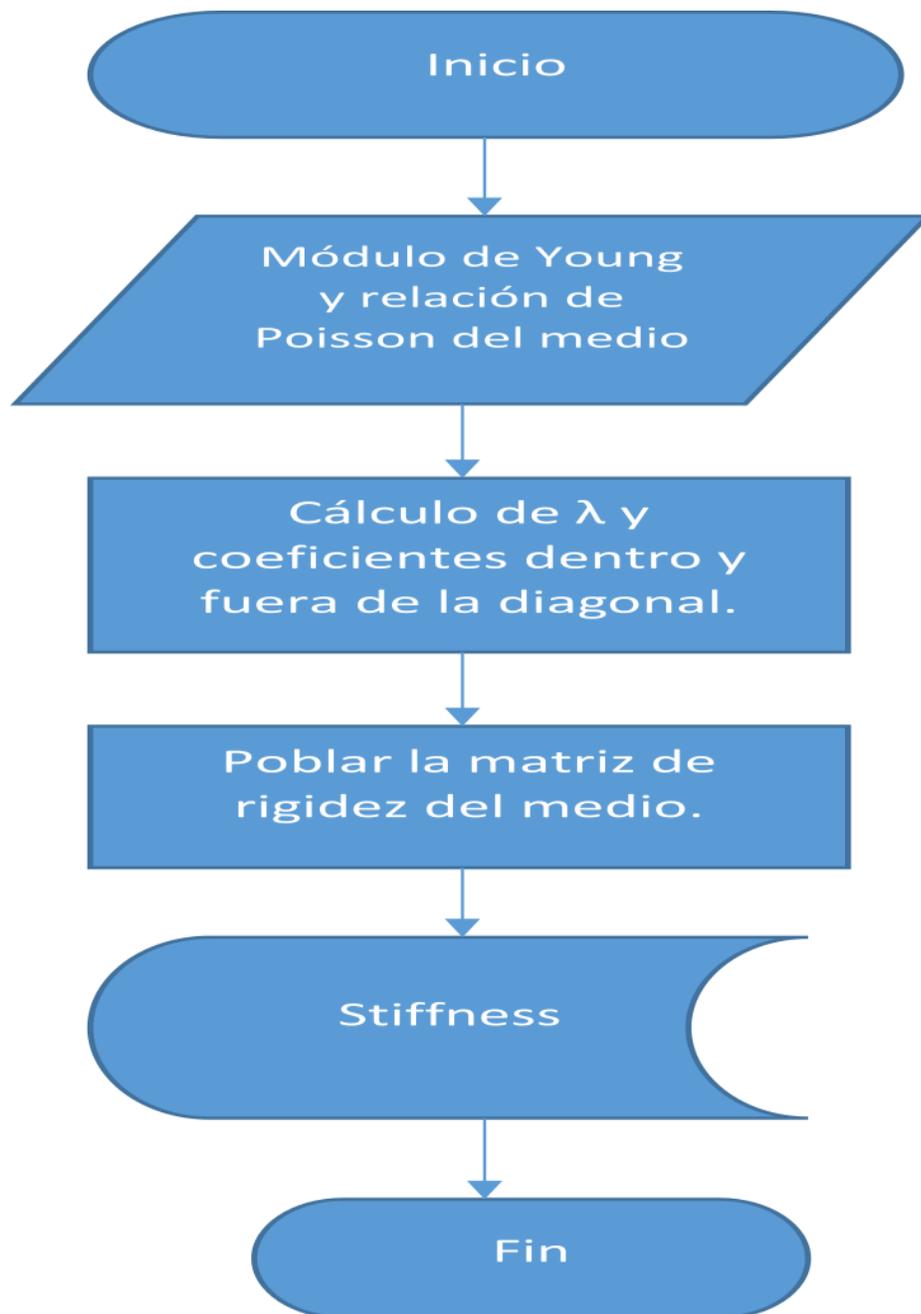


Figura A.1. Diagrama de flujo de `calcIsotropicStiffness` de Healy (2009) (elaboración propia)

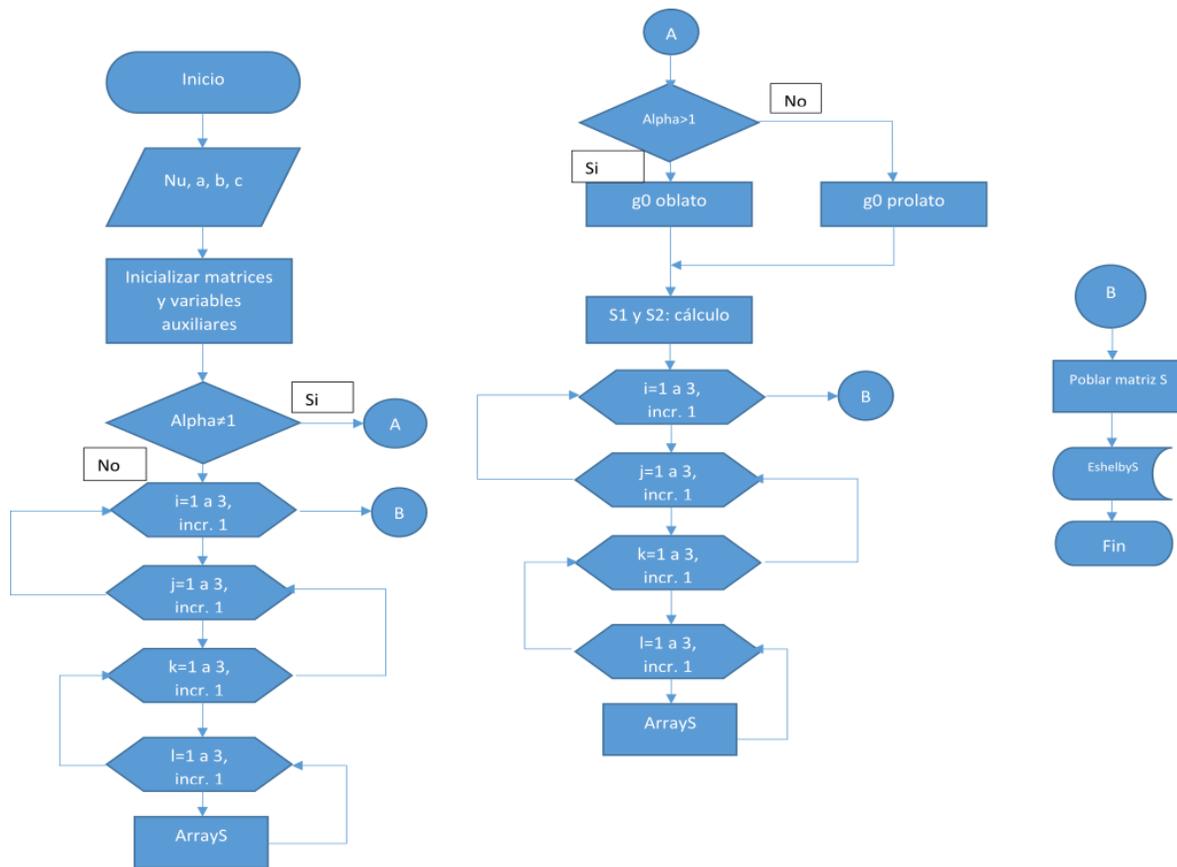


Figura A.2. Diagrama de flujo de calcEshelbyS de Healy (2009) (elaboración propia)

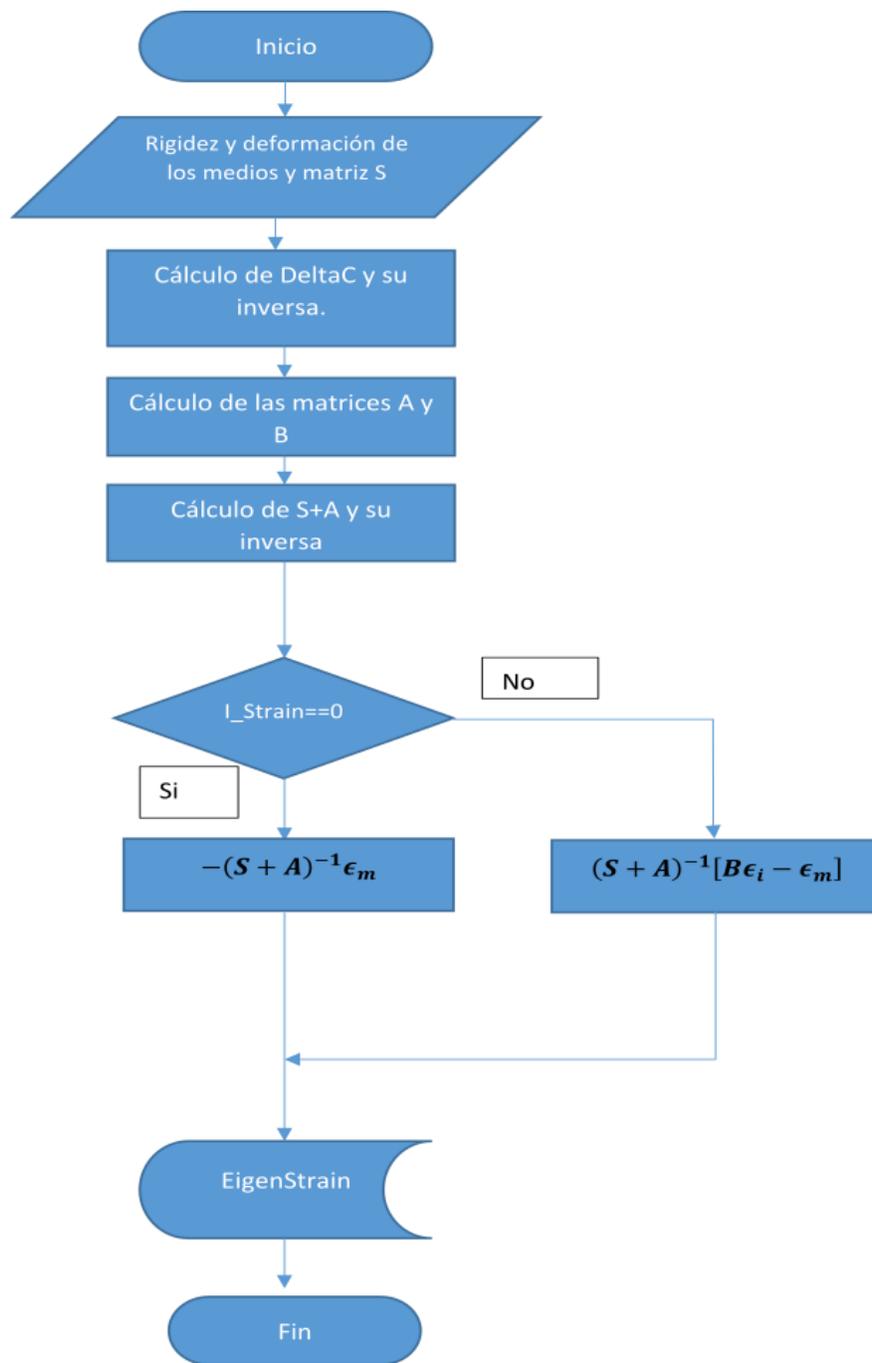


Figura A.3. Diagrama de flujo de calcEigenStrain de Healy (2009) (elaboración propia)

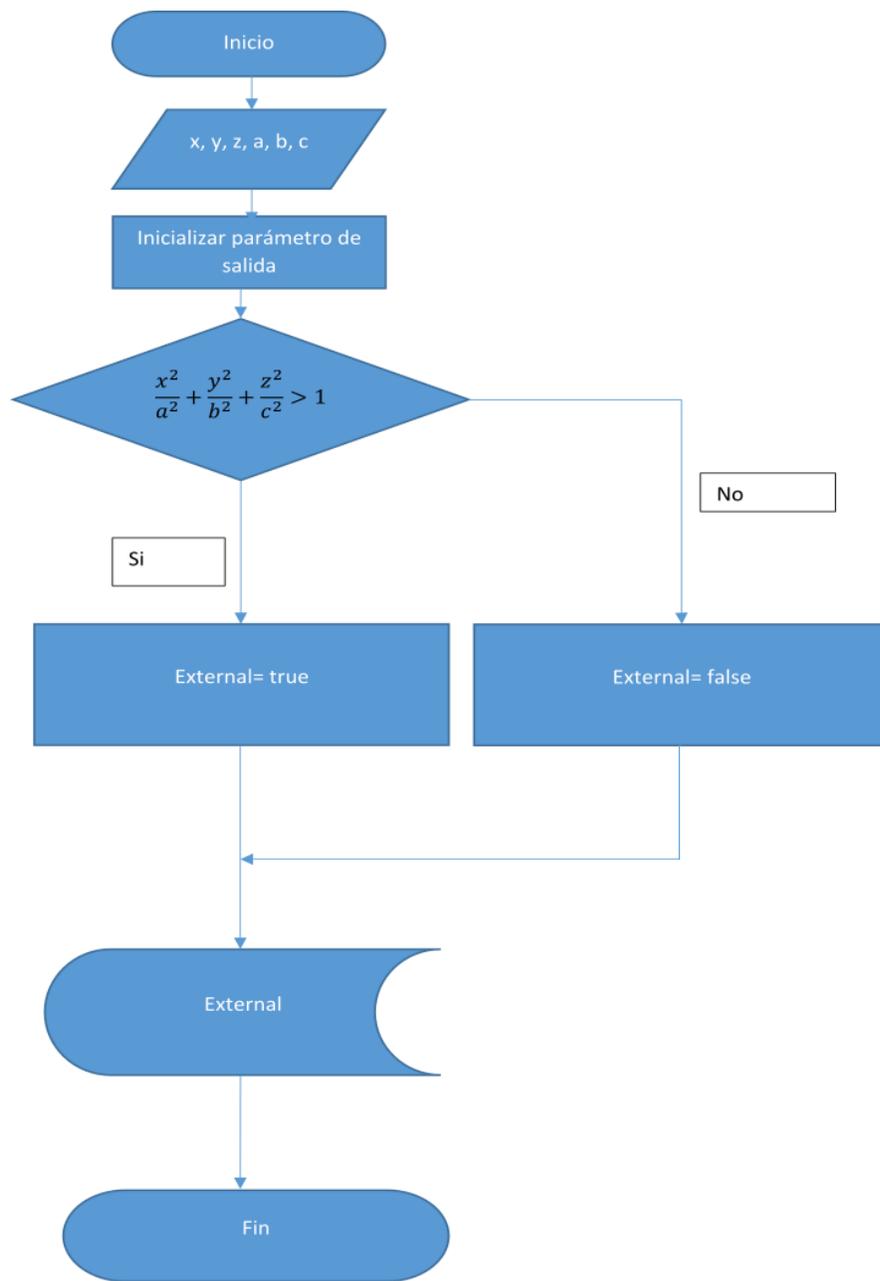


Figura A.4. Diagrama de flujo de IsPointOutside de Healy (2009). (Elaboración propia)

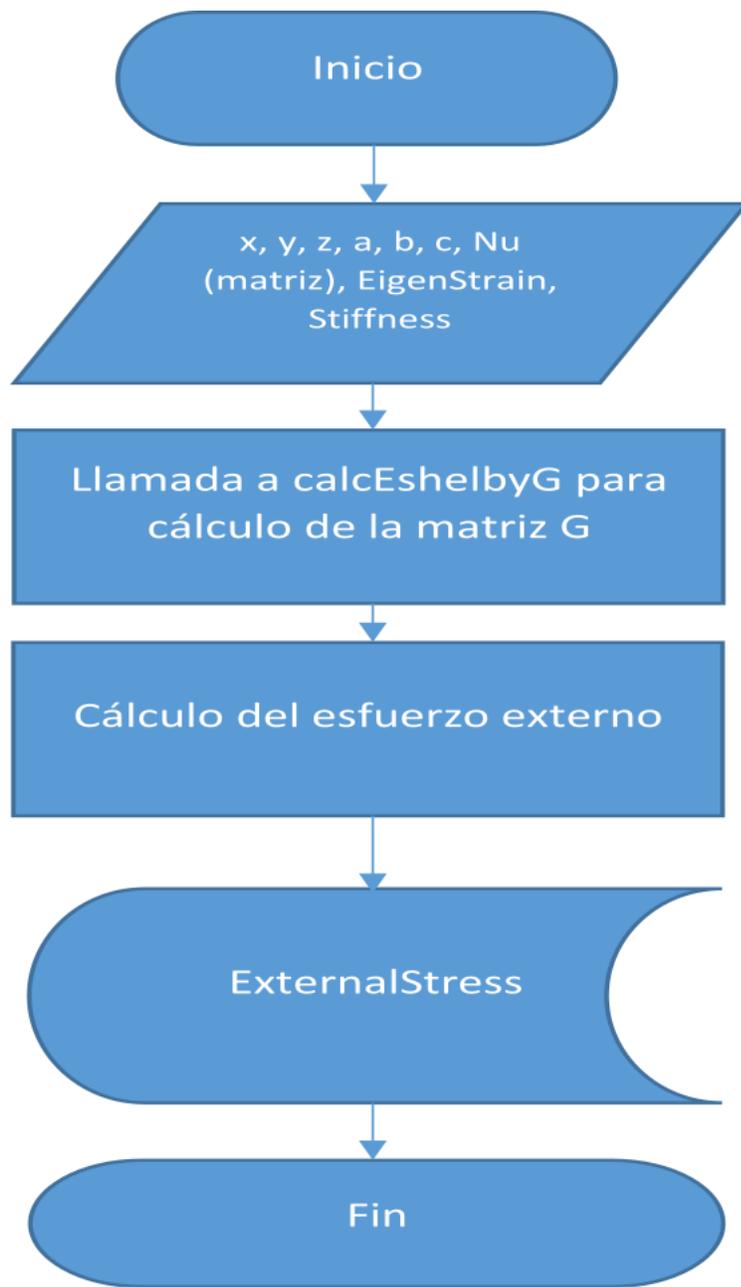


Figura A.5. Diagrama de flujo de `calcExternalField` de Healy (2009) (elaboración propia)

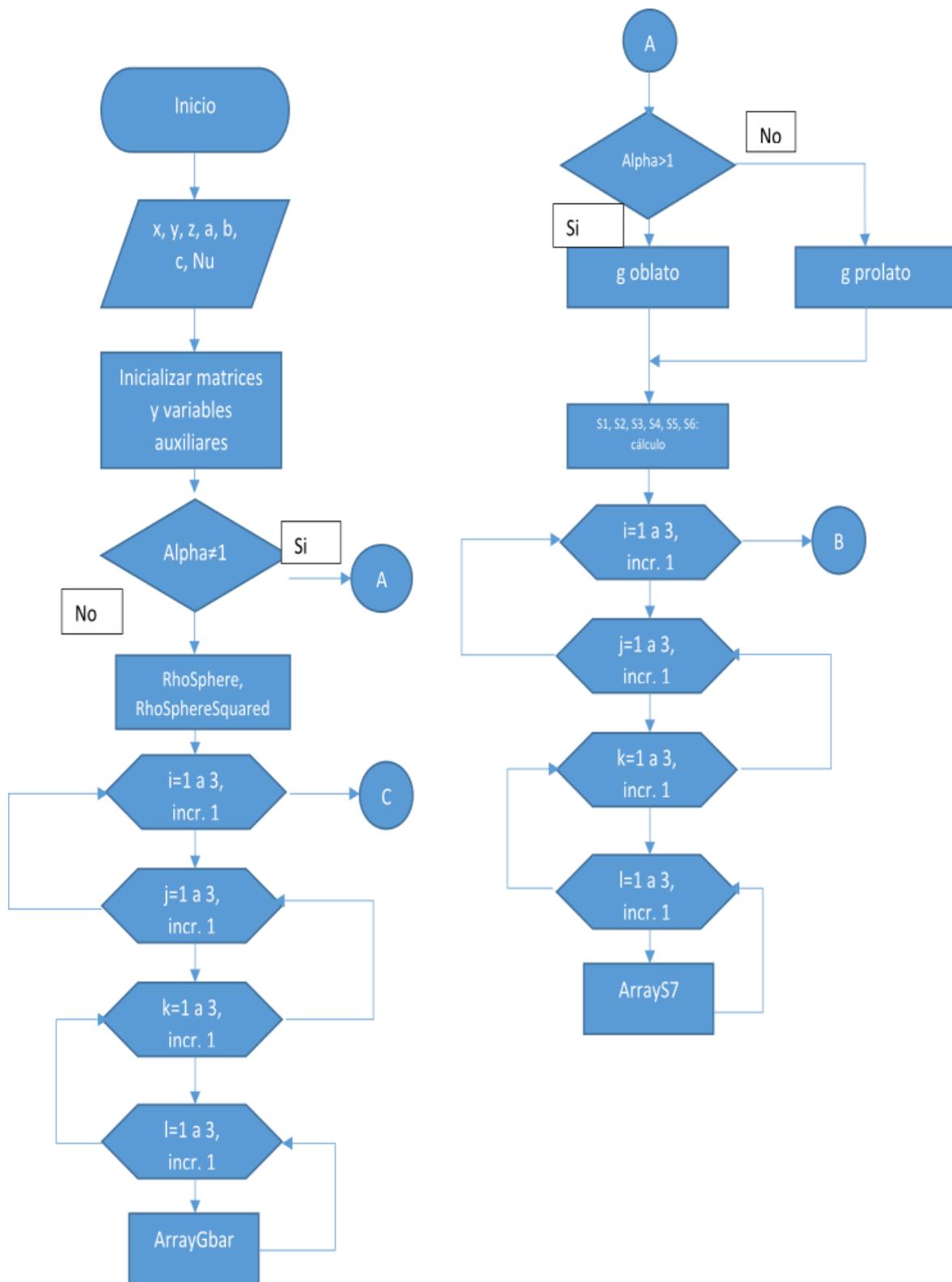


Figura A.6. Diagrama de flujo de calcEshelbyG de Healy (2009) (elaboración propia)

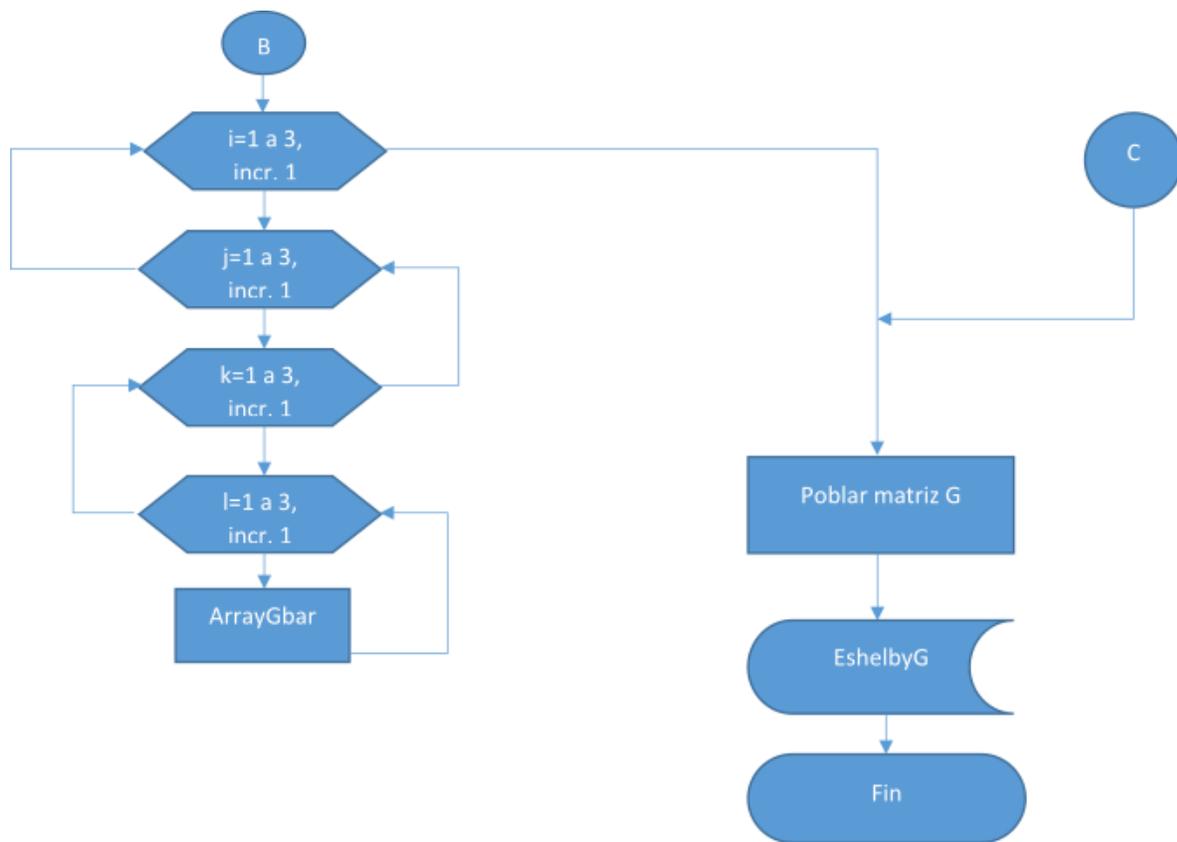


Figura A.7. Diagrama de flujo de calcEshelbyG de Healy (2009) (elaboración propia) (cont.)