# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Elementos del Análisis aplicados a la Probabilidad.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Fidencio Galicia Rodríguez.

DIRECTOR
Dr. Víctor Alberto Cruz Barriguete.
Departamento de Ciencias Básicas UAM Azcapotzalco.

CIUDAD DE MÉXICO octubre de 2021.

# Elementos del Análisis Aplicados a la Probabilidad.

Fidencio Galicia Rodríguez

Octubre de 2021

En este trabajo presentamos algunas de las más bellas y útiles desigualdades y funciones del análisis matemático y también presentamos algunas aplicaciones a la Teoría de la Probabilidad e incluso la Teoría de los Números.

Supone el conocimiento, por parte del lector, de un curso de Análisis Real y uno de Análisis Complejo, ambos a nivel maestría y algo de Probabilidad, Teoría de los Números y Ecuaciones Diferenciales. También supondremos conceptos de función Riemann integrable, propiedades de convergencia de sucesiones y series y la Transformada de Laplace pero sin preocuparnos por su construcción; conceptos de linealidad de la esperanza y propiedades de la varianza y la existencia de algunos momentos de una variable aleatoria se supondrán igualmente conocidos.

El objetivo de esta tesis es presentar algunos resultados elegantes que difícilmente se estudian en los cursos de Probabilidad y Análisis Matemático en combinación con la Teoría de los Números. Han sido estudiados por el autor durante los años como estudiante de Maestría complementados con haber dictado algunos de los cursos arriba mencionados a estudiantes de la Facultad de Ciencias de la UNAM, estudiantes de la Unidad Académica Profesional Huehuetoca de la UAEM y estudiantes la Unidad Iztapalapa de la UAM.

En el Capítulo 1, repasaremos algunas de las desigualdades clásicas del análisis tratadas de manera elemental, muchos de los conceptos de este capítulo son bastante conocidos pero daremos inclusive, varias demostraciones distintas, algunas elegantes y no convencionales de un mismo teorema, esto con el fin de apreciar la belleza de los conceptos y los métodos para llegar a un resultado. Tendremos aquí algunas aplicaciones en Geometría y a los Números de Fibonacci.

En el Capítulo 2, definiremos las funciones Beta y Gamma y deduciremos algunas de sus propiedades e identidades más vistosas y teoremas vistos desde el punto de vista de las Ecuaciones Diferenciales y la Transformada de Laplace y combinaremos estos conceptos con algunas de las desigualdades obtenidas en el Capítulo 1 para encontrar algunas aplicaciones y relaciones con la Teoría de la Probabilidad y la Teoría de los Números.

En el Capítulo 3 seguimos relacionando todo el material con otras aplicaciones y relaciones, sobretodo en Teoría de la Probabilidad, la función característica y algunas distribuciones conocidas.

Es mi deseo que este material pueda ser apreciado por estudiantes de Probabilidad y Análisis, tanto de nivel Maestría como de Licenciatura. No se pretende que sea un tratado completo ni mucho menos, se pretende que sea elemental con algunas demostraciones elegantes y que el lector conozca algunas dudas, inquietudes y teoremas que he visto en otras fuentes a lo largo de mi experiencia docente. El lector sabrá disculparme si existe alguna falta, error u omisión de la cual yo soy totalmente responsable.

# Índice general

# Capítulo 1

# Desigualdades del análisis y funciones convexas.

En este capítulo iniciaremos recordando y demostrando algunas desigualdades básicas del Análisis Matemático y concernientes a funciones convexas. Durante todo este trabajo y a menos que se especifique lo contrario, nos limitaremos a las funciones reales con valor real. Trataremos las desigualdades clásicas como son Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski, Jensen y media geométrica-aritmética. Algunas de ellas las trataremos en sus versiones numéricas, vectoriales e integrales.

De aquí en adelante, supondremos que las funciones que aparecen cumplen con las hipótesis necesarias como continuidad en intervalos adecuados, derivadas hasta el orden necesario e integrabilidad.

## 1.1. Desigualdad media geométrica-media aritmética.

Comenzaremos con una de las desigualdades más elementales de números reales.

**Teorema 1.1.1.** *Sean $x$ y $y$ números reales no negativos. Entonces,*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}. \tag{1.1}$$

*Demostración.* Veamos la Figura 1.1. Tenemos una semicircunferencia de diámetro $AB$ y centro en $O$ y un punto $C$ sobre el segmento $AB$ tal que $x = AC$ y $y = CB$. Por $C$ trazamos una perpendicular $CD$ a $AB$.

Por geometría elemental tenemos que los triángulos $ADC$ y $DBC$ son semejantes, luego:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{CD}{BC}$$

de donde se cumple que

$$CD^2 = AC \cdot BC = xy.$$

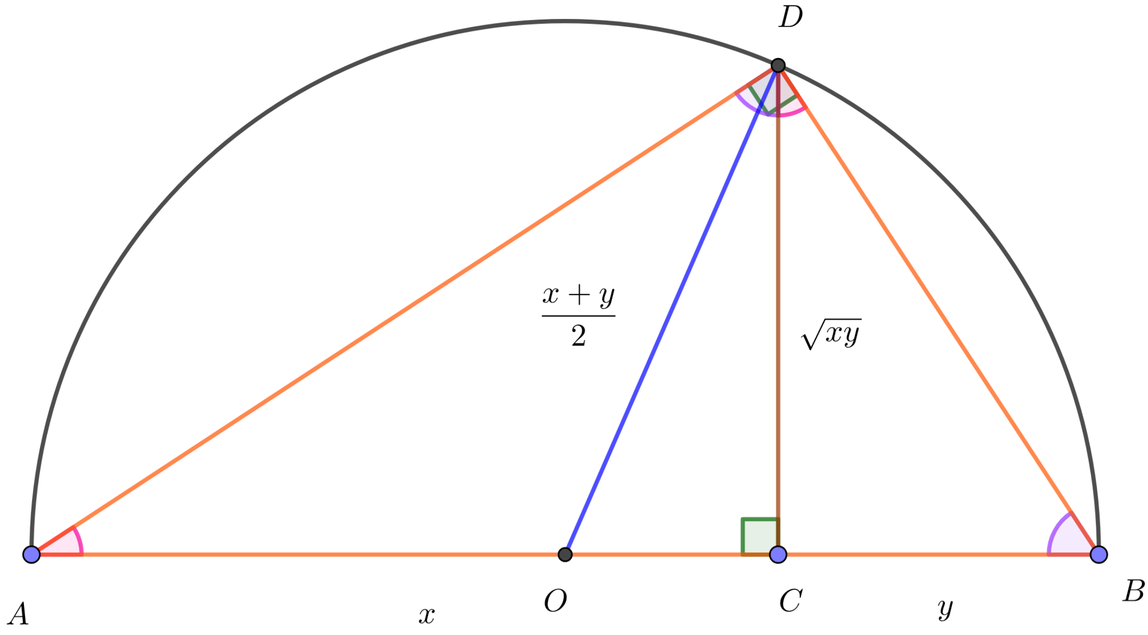


Figura 1.1: Esquema de la demostración del Teorema 1.1.1

Por lo tanto,

$$CD = \sqrt{xy}.$$

Este segmento $CD$ es claramente menor o igual que el radio $OD$ de la semicircunferencia, el cual es igual a $\dfrac{x+y}{2}$.
Por lo tanto,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Además, podemos mostrar que la igualdad se da cuando $AO = OB = x = y$. □

En el Teorema 1.1.1 que acabamos de probar, la cantidad $\sqrt{xy}$ se llama *media geométrica de los números $x$ y $y$* y la cantidad $\dfrac{x+y}{2}$ se llama *media aritmética o promedio de los números $x$ y $y$* y la desigualdad (1.1) se conoce como *desigualdad media geométrica-media aritmética.*

Existen muchas demostraciones de este resultado, algunas de ellas se pueden consultar en [12], la que acabamos de dar es elegante por la visualización geométrica. El Teorema 1.1.1 puede generalizarse, si $x_1, x_2, ..., x_n$ son $n$ números reales no negativos entonces:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{1.2}$$

El resultado general puede probarse por inducción matemática y de muchas otras maneras, por ejemplo en [4] o en [12], pero más adelante lo probaremos usando un argumento de la teoría de la probabilidad. Una exposición detallada de desigualdades numéricas y medias puede verse en [4].

## 1.2. Desigualdades clásicas del análisis matemático.

Comenzaremos probando las desigualdades de Cauchy-Schwarz en sus versiones numérica, integral y versión probabilística.

**Teorema 1.2.1.** *Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ y $y_1, y_2, ..., y_n$ dos conjuntos de números reales. Entonces,*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \tag{1.3}$$

*La igualdad se da si y sólo si existe un número real $\lambda$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para toda $i = 1, 2, ..., n$.*

*Demostración.* Para todo número real $x$ es claro que, si $x_i, y_i$ son números reales para $i = 1, \cdots, n$, entonces

$$(xy_i - x_i)^2 \geq 0.$$

Haciendo la suma,

$$\sum_{i=1}^{n}(xy_i - x_i)^2 \geq 0$$

que equivale a

$$\sum_{i=1}^{n}(x^2 y_i^2 - 2x_i y_i x + x_i^2) \geq 0$$

o bien,

$$x^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0. \tag{1.4}$$

La parte izquierda de la expresión (1.4) es una función cuadrática en $x$ mayor o igual que cero. Luego, el discriminante cumple que

$$\left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right) \leq 0$$

simplificando

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right).$$

Lo que termina la prueba. □

Veamos ahora una prueba ligeramente diferente pero interesante del Teorema 1.2.1 la cual también depende del resultado básico $(x - y)^2 \geq 0$ para todos los números reales $x$ y $y$.

Segunda demostración:

*Demostración.* Claramente, $0 \leq (x-y)^2$ para todos los números reales $x$ y $y$.

Equivalentemente tenemos que $2xy \leq x^2 + y^2$.

Definamos $x := \dfrac{|x_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$ y $y := \dfrac{|y_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$.

Sustituyendo en la desigualdad anterior tenemos que

$$2\frac{|x_i y_i|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}} \leq \frac{|x_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} + \frac{|y_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}.$$

Sumando,

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2} \\
&= 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Simplificando se obtiene

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Finalmente, aplicando la desigualdad del triángulo para valores absolutos obtenemos el resultado deseado.

□

La desigualdad (1.3) del Teorema 1.2.1 se conoce como *desigualdad numérica de Cauchy-Schwarz.*

Veamos ahora una hermosa demostración geométrica de este resultado para cuando tenemos dos parejas de números $(x, y)$ y $(a, b)$.

*Demostración.* Observemos la Figura 1.2 . Consideremos un rectángulo de lados $|x| + |b|$ y $|y| + |a|$ y dividido en triángulos y rectángulos como se ve en la Figura 1.2.

Reacomodando las figuras obtenemos otro rectángulo de las mismas dimensiones sólo que se forma un paralelogramo en su interior donde uno de los ángulos interiores de este paralelogramo es $\theta$ y su altura es $h$.

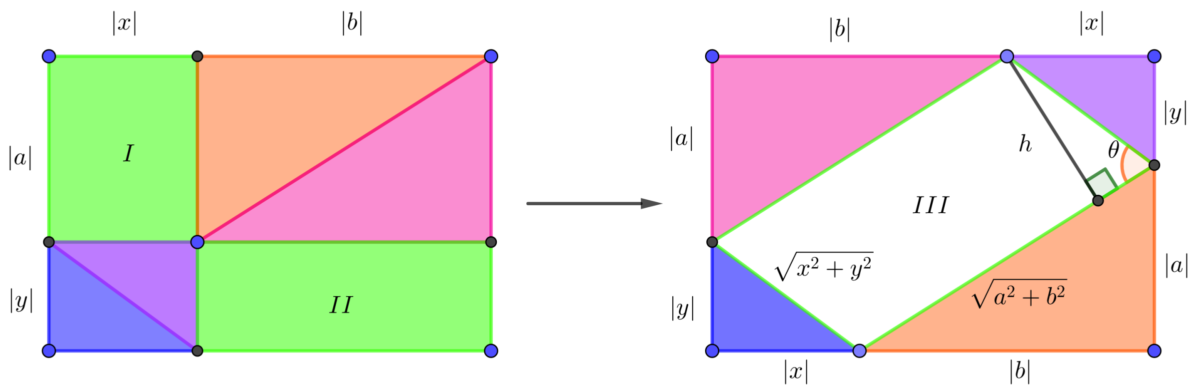


Figura 1.2: Esquema de la demostración del Teorema 1.2.1

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que los lados del paralelogramo son $\sqrt{x^2+y^2}$ y $\sqrt{a^2+b^2}$. De donde, por trigonometría se sigue que $h = \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\theta$.

Denotemos por $I$, $II$, $III$ a las áreas de los rectángulos mostrados en la Figura 1.2. Quitando a ambos rectángulos todos los triángulos, se tiene la siguiente igualdad de áreas:

$$I + II = III. \tag{1.5}$$

Pero $I = |xa|$ y $II = |yb|$. Además, como el área del paralelogramo es el producto de su base por su altura tenemos que $III = \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}\theta$.

Sustituyendo en la igualdad (1.5) tenemos que

$$|xa| + |yb| = \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}\theta.$$

Utilizando la desigualdad del triángulo para números reales y el hecho de que $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, se concluye que

$$|xa+yb| \leq \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{a^2+b^2}.$$

$\square$

A continuación pasaremos a demostrar una desigualdad análoga a la del Teorema 1.2.1 pero para integrales.

**Teorema 1.2.2.** *Sean $f$ y $g$ dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, entonces,*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \tag{1.6}$$

*La igualdad se tiene, si y solo si, existe un número real $\lambda$ tal que $f=\lambda g$ para todo valor del intervalo $[a,b]$.*

*Demostración.* Claramente, para todo número real $y$ se tiene que
$(f(x)-yg(x))^2 \geq 0$.

Integrando tenemos que

$$\int_a^b (f(x)-yg(x))^2\,dx \geq 0.$$

Desarrollando el binomio,

$$\int_a^b \left(f^2(x)-2yf(x)g(x)+y^2g^2(x)\right)dx \geq 0.$$

Separando en tres integrales tenemos que

$$y^2\int_a^b g^2(x)dx - 2y\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0.$$

La última expresión es una función cuadrática no negativa para todo valor real $y$. Por lo tanto, el discriminante de esta función cuadrática es negativo o cero, es decir,

$$\left(-2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq 4\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

Elevando al cuadrado y dividiendo entre 4 tenemos el resultado deseado.

□

Así como en el Teorema 1.2.1, daremos otra prueba del Teorema 1.2.2 usando la desigualdad básica $(x-y)^2 \geq 0$, válida para todos los números reales $x$ y $y$.

*Segunda demostración del Teorema 1.2.2.* Así como en el Teorema 1.2.1 tenemos que

$$2xy \leq x^2+y^2 \tag{1.7}$$

para todos los números reales $x$ y $y$. Si $f(x)$ o $g(x)$ son cero, entonces se cumple trivialmente la igualdad y por lo tanto la desigualdad. Supongamos entonces que $f \neq 0$ y $g \neq 0$ y definamos para cada $t \in [a, b]$:

$$x = \frac{f(t)}{\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.8}$$

y

$$y = \frac{g(t)}{\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.9}$$

Sustituyendo (1.8) y (1.9) en la desigualdad (1.7) tenemos que

$$2\frac{f(t)g(t)}{\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{f^2(t)}{\int_a^b f^2(t)dt} + \frac{g^2(t)}{\int_a^b g^2(t)dt}.$$

Por monotonía de la integral,

$$2\int_a^b \frac{f(t)g(t)dt}{\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \int_a^b \frac{f^2(t)dt}{\int_a^b f^2(t)dt} + \int_a^b \frac{g^2(t)dt}{\int_a^b g^2(t)dt} = 2.$$

Dividiendo entre 2 y sacando la constante de la integral y trasponiendo tenemos que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, elevando al cuadrado obtenemos el resultado deseado. □

La desigualdad (1.6) se conoce como *versión integral de la desigualdad de Cauchy-Schwarz*[1].

Veamos ahora una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz versión integral.

Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ y $y_1, y_2, ..., y_n$ dos conjuntos de números reales y consideremos una partición regular del intervalo $[0, 1]$,

$$P = \left\{\frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n} : i = 1, 2, ..., n\right\}.$$

Definamos las funciones

$$f(x) := \begin{cases} x_i, & \text{si } \frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n}; \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

[1]Esta desigualdad es válida para cualquier medida $\mu$ sobre un conjunto no vacío $\Omega$ y cualesquiera funciones $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y funciones medibles con integral no nula. Ver por ejemplo, [7].

y

$$g(x) := \begin{cases} y_i, & \text{si } \dfrac{i-1}{n} \leq x < \dfrac{i}{n}; \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Entonces,

$$f(x)g(x) = \begin{cases} x_i y_i, & \text{si } \dfrac{i-1}{n} \leq x < \dfrac{i}{n}; \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Claramente estas tres funciones están definidas y son integrables en el intervalo $[0, 1]$. Entonces,

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x_i y_i dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Entonces,

$$\left( \int_0^1 f(x)g(x)dx \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2. \tag{1.10}$$

Además, haciendo $g = f$ en (1.10) se obtiene

$$\left( \int_0^1 f^2(x)dx \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{1.11}$$

Análogamente, haciendo $f = g$ en (1.10),

$$\left( \int_0^1 g^2(x)dx \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \tag{1.12}$$

Sustituyendo en la desigualdad de Cauchy-Schwarz versión integral tenemos que

$$\frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

Multiplicando por $n^2$ y extrayendo raíz cuadrada se tiene que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \tag{1.13}$$

con lo cual hemos obtenido de nuevo la desigualdad numérica de Cauchy-Schwarz.

Observemos además lo siguiente:

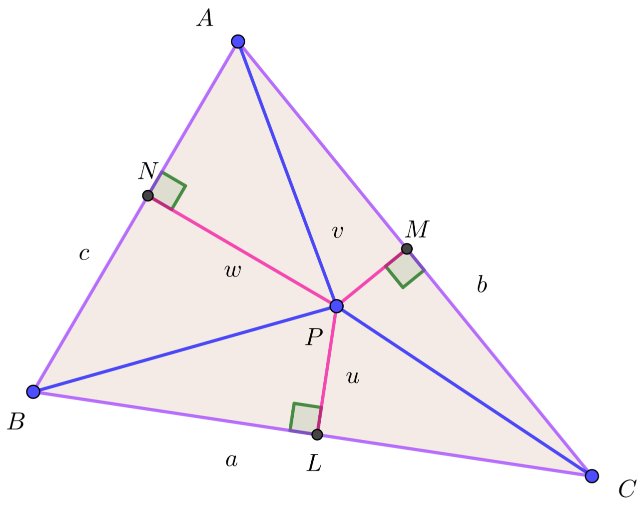


Figura 1.3: Esquema de la demostración del Teorema 1.2.3.

Si $\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ son dos vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ y $\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. Sustituyendo en la desigualdad numérica de Cauchy-Schwarz obtenemos la *desigualdad vectorial de Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|. \tag{1.14}$$

A continuación, presentamos otras aplicaciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en sus versiones numérica (1.3) e integral (1.6) .

**Teorema 1.2.3.** *Si $P$ es un punto dentro de un triángulo $ABC$, si los pies de las perpendiculares desde $P$ a los lados $BC, CA$ y $AB$ del triángulo son $L, M$ y $N$ respectivamente, y si $\frac{BC}{PL} + \frac{CA}{PM} + \frac{AB}{PN}$ es mínimo, entonces $P$ es el incentro del triángulo.*

*Demostración.* Consideremos la Figura 1.3. Denotemos entre paréntesis el área de un triángulo, por ejemplo $(ABC)$ es área del triángulo $ABC$ y consideremos $BC = a$, $CA = b$,

$AB = c$, $PL = u$, $PM = v$ y $PN = w$. Observemos que $(PBC) = \dfrac{au}{2}$, $(PCA) = \dfrac{bv}{2}$ y $(PAC) = \dfrac{cw}{2}$, entonces

$$(ABC) = (PBC) + (PCA) + (PAB) = \frac{au}{2} + \frac{bv}{2} + \frac{cw}{2} = \frac{au + bv + cx}{2}.$$

Entonces, se tiene

$$2(ABC) = au + bv + cw. \tag{1.15}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a las ternas de números $\left(\sqrt{\dfrac{a}{u}}, \sqrt{\dfrac{b}{v}}, \sqrt{\dfrac{c}{w}}\right)$ y $(\sqrt{au}, \sqrt{bv}, \sqrt{cw})$ tenemos que

$$\sqrt{\frac{a}{u}}\,\sqrt{au} + \sqrt{\frac{b}{v}}\,\sqrt{bv} + \sqrt{\frac{c}{w}}\,\sqrt{cw} \leq \sqrt{\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}}\,\sqrt{au + bv + cw}.$$

Equivalentemente tenemos que,

$$(a + b + c)^2 \leq \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}\right)(au + bv + cw).$$

Por la identidad (1.15) se sigue que

$$\frac{(a + b + c)^2}{2(ABC)} \leq \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}\right). \tag{1.16}$$

Denotemos el incentro del triángulo con $I$ y con $r$ el radio de la circunferencia inscrita del triángulo $ABC$. Aplicando un razonamiento similar al que utilizamos para deducir (1.15) tenemos que

$$2(ABC) = r(a + b + c).$$

y por la desigualdad (1.16) tenemos que

$$\frac{a + b + c}{r} = \frac{(a + b + c)^2}{r(a + b + c)} \leq \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}\right).$$

Como $\left(\dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{w}\right)$ debe ser mínimo se sigue que la igualdad en la expresión (1.2) se da, si y solo si, $u = v = w$; es decir, cuando $u = v = w = r$ y por lo tanto, cuando $P = I$ . □

Antes de ver la siguiente aplicación, definiremos los números de Fibonacci y los números de Lucas.

**Definición 1.2.1.** *Los* números de Fibonacci *se definen recursivamente como* $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ *y para* $n > 2$ *como* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

*Los* números de Lucas *se definen mediante las relaciones como* $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ *y para* $n > 1$ *como* $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

**Teorema 1.2.4.** *Para todo entero positivo $n$ tenemos que*

$$1 < \frac{F_{n+2}}{L_{n+2}} + \frac{F_{n+1}}{L_{n+1}} + \frac{F_n}{L_{n+1} + F_{n+2}}. \tag{1.17}$$

*Demostración.* Antes que nada el lector puede comprobar fácilmente que para todo entero positivo $n$ se tiene que

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \tag{1.18}$$

Definamos los siguientes vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ como:

$$\vec{u} := \left( \frac{\sqrt{F_{n+2}}}{\sqrt{F_{n+2} + 2F_{n+1}}}, \frac{\sqrt{F_{n+1}}}{\sqrt{F_{n+1} + 2F_n}}, \frac{\sqrt{F_n}}{\sqrt{F_n + 2F_{n+2}}} \right).$$

y

$$\vec{v} := (\sqrt{F_{n+2} + 2F_{n+1}}\sqrt{F_{n+2}}, \sqrt{F_{n+1} + 2F_n}\sqrt{F_{n+1}}, \sqrt{F_n + 2F_{n+2}}\sqrt{F_n}).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para vectores (1.14) tenemos que

$$\begin{aligned}(F_{n+2} + F_{n+1} + F_n)^2 \quad < \quad & \left( \frac{F_{n+2}}{F_{n+2} + 2F_{n+1}} + \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + 2F_n} + \frac{F_n}{F_n + 2F_{n+2}} \right) \\ & (F_{n+2}(F_{n+2} + 2F_{n+1}) + F_{n+1}(F_{n+1} + 2F_n) + F_n(F_n + 2F_{n+2})).\end{aligned}$$

Observamos que la parte izquierda de la desigualdad es igual a la expresión del segundo paréntesis de la parte derecha de la desigualdad lo que puede ser fácilmente comprobado desarrollando el trinomio de la parte izquierda de la desigualdad. Por lo tanto,

$$1 < \left( \frac{F_{n+2}}{F_{n+2} + 2F_{n+1}} + \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + 2F_n} + \frac{F_n}{F_n + 2F_{n+2}} \right). \tag{1.19}$$

Utilizando la definición 1.2.1 y la igualdad (1.18) tenemos las identidades:

$$\begin{aligned} F_{n+2} + 2F_{n+1} &= L_{n+2}, \\ F_{n+1} + 2F_2 &= L_{n+1} \end{aligned}$$

y

$$F_n + 2F_{n+2} = L_{n+1} + F_{n+2}.$$

Sustituyendo estas igualdades en (1.19) tenemos el resultado deseado.

□

**Teorema 1.2.5.** *Para* $-\frac{\pi}{x} < x < \frac{\pi}{2}$ *tenemos la desigualdad:*

$$2x^2 \leq \operatorname{sen} x \cdot \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right). \tag{1.20}$$

*Demostración.* Definamos la función $h(x) := \operatorname{sen} x \cdot \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right)$, entonces

$$h(-x) = -\operatorname{sen} x \cdot \ln\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \ln\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)^{-1} = h(x).$$

Por lo tanto, $h$ es una función par y entonces en las integrales que vamos a tratar utilizaremos funciones pares y también usaremos sólo el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, definamos las funciones $f(x) := \sqrt{\cos x}$ y $g(x) := \sqrt{\sec x}$. Sabemos que

$$\int_0^x \cos t \; dt = \operatorname{sen} x. \tag{1.21}$$

y

$$\int_0^x \sec t \; dt = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right). \tag{1.22}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales (1.6) a las funciones $f$ y $g$ y por las integrales (1.21) y (1.22) se sigue que

$$\left( \int_0^x \sqrt{\cos t} \; \sqrt{\sec t} \; dt \right)^2 \leq \left( \int_0^x \left( \sqrt{\cos t} \right)^2 \; dt \right) \left( \int_0^x \left( \sqrt{\sec t} \right)^2 \; dt \right).$$

y por lo tanto,

$$2x^2 \leq \operatorname{sen} x \cdot \ln \left( \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right).$$

$\square$

**Teorema 1.2.6.** *Si* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de clase* $C^1$ *con* $f(0) = 0$*, entonces*

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2 \, dx}. \tag{1.23}$$

*Demostración.* Observemos primero por hipótesis $f(0) = 0$ y del Teorema Fundamental del Cálculo que

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) \; dt \right|.$$

Aplicando lo anterior y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales a las funciones $f'(t)$ y $g(t) := 1$ tenemos que

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) \; dt \right| \leq \left( \int_0^x (f'(t))^2 \; dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^x 1^2 \; dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La segunda integral del lado derecho es igual a $x$ y como $0 \leq x \leq 1$ se sigue que

$$|f(x)| \leq \left( \int_0^x (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Presentaremos a continuación un par de resultados de Probabilidad. En el primero aplicaremos la desigualdad (1.6) y en el segundo generalizaremos las desigualdades (1.3) y (1.6) al concepto de *esperanza de una variable aleatoria*. Necesitaremos los conceptos de *variable* *aleatoria*, *variable aleatoria discreta o continua*, su *función de probabilidad o densidad* y su *función de distribución*, todos los cuales pueden consultarse en [25].

Recordemos que si $X$ es una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$. La *esperanza de $X$*, denotada por $E(X)$, se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x). \tag{1.24}$$

siempre que esta integral sea absolutamente convergente, esto es, cuando $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\ dF(x)$, en este caso diremos que $X$ tiene esperanza finita.

La integral (1.24) es una Integral de Riemann-Stieltjes (véase [25], pág. 81) la cual se transforma en

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x), \tag{1.25}$$

cuando $X$ es una *variable aleatoria discreta* y $f(x)$ es la *función de probabilidad de $X$* y en

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\ dx, \tag{1.26}$$

cuando $X$ es una *variable aleatoria absolutamente continua* y $f(x)$ es la *función de densidad* de $X$.

Asimismo, cuando $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ dF(x)$ existe, la *Varianza de la variable aleatoria $X$*, denotada por $Var(X)$, se define como

$$Var(X) = E(X - E(X))^2. \tag{1.27}$$

Es común también denotar la varianza de la variable aleatoria $X$ como $\sigma^2 = Var(X)$.
La integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ dF(x)$ se denomina *segundo momento de la variable aleatoria $X$* y se escribe como $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ dF(x)$.
En general, surge el problema de calcular esperanzas de funciones de variables aleatorias, esto es, si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Borel-medible (Ver [25], pág 61) y si $X$ es una variable aleatoria, puede demostrarse que $h(X)$ también es una variable aleatoria y que cuando $h(X)$ tiene esperanza finita entonces,

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\ dF(x), \tag{1.28}$$

donde $F(X)$ es la función de distribución de la variable aleatoria $X$.

**Teorema 1.2.7.** *Consideremos una variable aleatoria absolutamente continua $X$ con esperanza $E(X) = 0$ y con $Var(X) = \sigma^2$. Sea $F(x)$ la función de distribución de $X$. Si $x < 0$ entonces*

$$F(x) \leq \frac{\sigma^2}{x^2 + \sigma^2}. \tag{1.29}$$

*Demostración.* Consideremos a $f(x)$ como la función de densidad de $X$. Entonces por la definición de esperanza, para $x < 0$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)\ f(y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f(y)\ dy - x\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ dy = E(X) - x = -x,$$

de donde

$$-x = \int_{-\infty}^{\infty}(y-x)\, f(y)\ dy. \tag{1.30}$$

Ahora, consideremos

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)\ f(y)\ dy = \int_{-\infty}^{x}(y-x)\ f(y)\ dy + \int_{x}^{\infty}(y-x)\ f(y)\ dy. \tag{1.31}$$

Analicemos la integral

$$\int_{-\infty}^{x}(y-x)\ f(y)\ dy.$$

Como $x < 0$ y el intervalo de integración respecto a la variable $y$ es $(-\infty, x]$, tenemos entonces que $y \leq x < 0$. Por lo tanto $y - x \leq 0$ y entonces

$$\int_{-\infty}^{x}(y-x)\ f(y)\ dy \leq 0. \tag{1.32}$$

Por (1.32), (1.30) y (1.31) tenemos que

$$-x = \int_{-\infty}^{\infty}(y-x)\, f(y)\ dy \leq \int_{x}^{\infty}(y-x)\ f(y)\ dy.$$

Como $x < 0$, entonces $-x > 0$ y podemos elevar al cuadrado,

$$x^2 \leq \left(\int_{x}^{\infty}(y-x)\ f(y)\ dy\right)^2.$$

Además, como $f$ no toma valores negativos, observamos que

$$x^2 \leq \left(\int_{x}^{\infty}(y-x)\ \sqrt{f(y)}\ \sqrt{f(y)}\ dy\right)^2.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (1.6) a las funciones $(y-x)\sqrt{f(y)}$ y $\sqrt{f(y)}$ tenemos que

$$x^2 \leq \left(\int_{x}^{\infty}(y-x)^2\, f(y)\ dy\right)\left(\int_{x}^{\infty} f(y)\ dy\right). \tag{1.33}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{x}^{\infty}(y-x)^2 f(y)\ dy &\leq \int_{-\infty}^{\infty}(y-x)^2 f(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)\ dy - 2x\int_{-\infty}^{\infty} y\ f(y)\ dy + x^2\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ dy \\
&= E(X^2) + 2xE(X) + x^2 = E(X^2) + E^2(X) + x^2 = Var(X) + x^2
\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene

$$\int_x^\infty (y-x)^2 f(y)\ dy \leq x^2 + \sigma^2. \tag{1.34}$$

Además,

$$\int_x^\infty f(y)\ dy = P(X > x) = P(X \leq x)^c = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x).$$

Entonces,

$$\int_x^\infty f(y)\ dy = 1 - F(x). \tag{1.35}$$

Sustituyendo las expresiones (1.34) y (1.35) en (1.33) tenemos que

$$x^2 \leq (x^2 + \sigma^2)(1 - F(x)).$$

Simplificando se obtiene el resultado. □

Ahora generalizaremos las desigualdades (1.3) y (1.6) para esperanzas de variables aleatorias.

**Teorema 1.2.8.** *Consideremos las variables aleatorias $X$ y $Y$ con respectivos segundos momentos finitos $E(X^2)$ y $E(Y^2)$, entonces,*

$$E^2(XY) \leq E(X^2)\ E(Y^2). \tag{1.36}$$

*Demostración.* Recordemos que para todo número real $t$ se tiene que $(tX+Y)^2 \geq 0$. Entonces, $E(tX+Y)^2 \geq 0$ y como la esperanza es un operador lineal se tiene que

$$t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2) \geq 0. \tag{1.37}$$

La desigualdad (1.37) es una desigualdad cuadrática para todo $t \in \mathbb{R}$ y es tal que su discriminante nunca es positivo, es decir,

$$(2E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0.$$

Equivalentemente, se tiene

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2),$$

lo que queríamos demostrar. □

Volvamos ahora a las desigualdades integrales:

**Teorema 1.2.9.** *Consideremos una función continua y estrictamente creciente $f$ con $f(0) = 0$. Para $a, b > 0$ se cumple la* desigualdad de Young*:*

$$ab \leq \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^b f^{-1}(x)\ dx. \tag{1.38}$$

*La igualdad se da, si y solo si, $b = f(a)$.*

Daremos una demostración visual, elegante y geométrica donde los argumentos consideran la Figura 1.5.

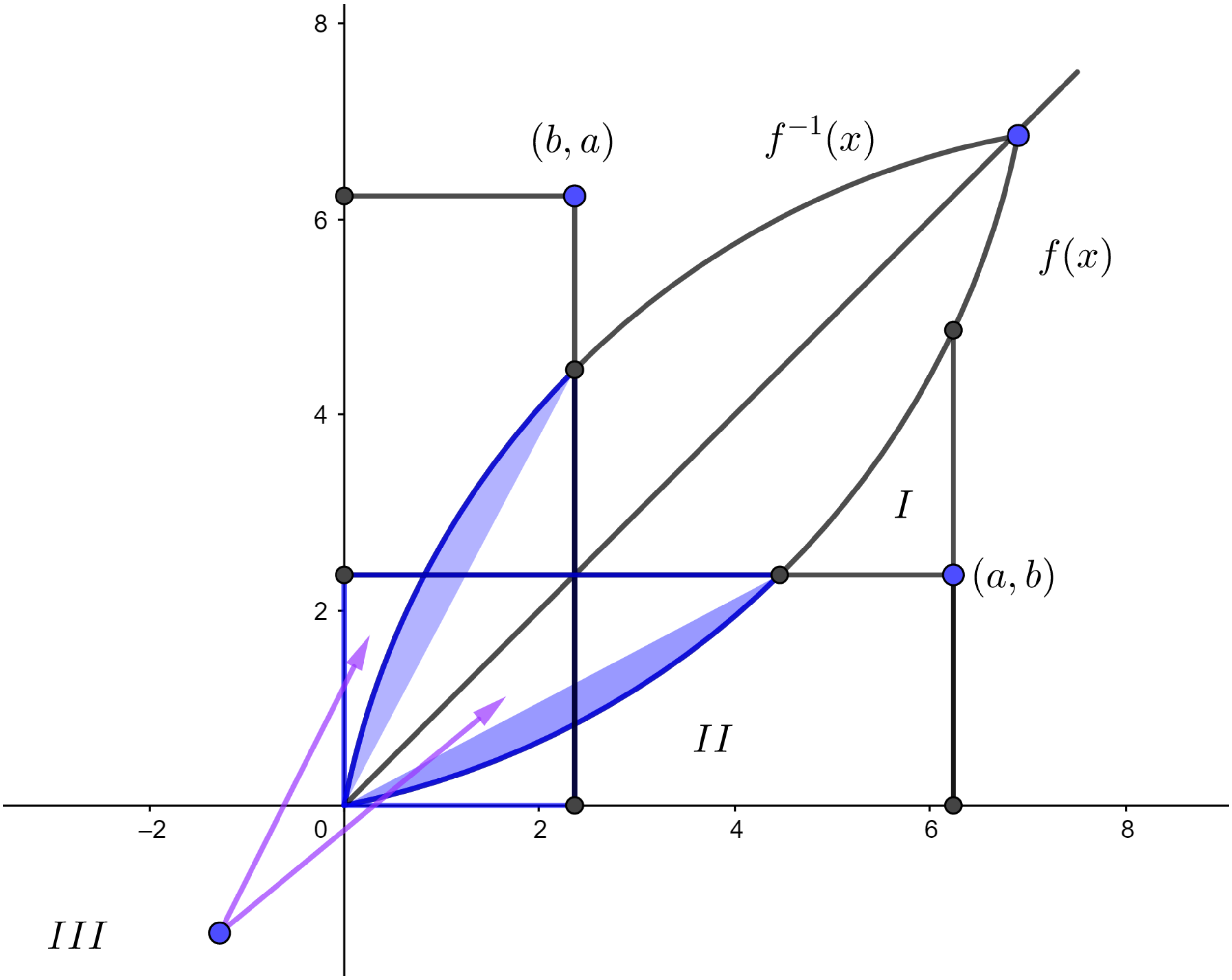


Figura 1.4: Esquema de la demostración del Teorema 1.2.9.

*Demostración.* Consideremos la Figura 1.5. Hemos construido, la gráfica de la función $f$, la gráfica de la función inversa $f^{-1}$ que es el reflejo de la gráfica de $f$ respecto a la recta $y = x$ y hemos seleccionado un punto al azar de coordenadas $(a, b)$ en el primer cuadrante (esto para que se cumpla la hipótesis de que $a, b > 0$). También consideremos el punto reflejado $(a, b)$. El punto seleccionado al azar tiene tres opciones: queda bajo la gráfica de $f$; queda exactamente en la gráfica de $f$, esto es $b = f(a)$, o bien, queda por encima de la gráfica de $f$. Sin pérdida de generalidad, en la figura hemos seleccionado el punto bajo la gráfica de $f$.

Representemos por $I$, el área bajo la gráfica de $f$ sobre el intervalo $[0, a]$, esto es, $I = \int_0^a f(x)\,dx$; representemos por $II$ el área del rectángulo determinado por los ejes de coordenadas y el punto $(a, b)$, es decir, $II = ab$. Finalmente, representamos por $III$ el área bajo la gráfica de $f^{-1}$ sobre el intervalo $[0, b]$, esto es, $III = \int_0^b f^{-1}(x)\,dx$. Por simetría de la figura, observemos que el área representada por $III$ también es el área comprendida entre el eje $y$, la recta $y = b$ y la gráfica de $f$.

Como se observa en la Figura 1.5,

$$II < I + III,$$

ya que el excedente es el área de la pequeña región comprendida entre la gráfica de $f$, la recta $y = b$ y la recta $x = a$. Por lo tanto,

$$ab < \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^b f^{-1}(x)\ dx.$$

La misma desigualdad se obtiene cuando el punto $(a, b)$ se elige por encima de la gráfica de $f$. Observemos que si $b = f(a)$, es decir, cuando $(a, b)$ pertenece a la gráfica de $f$, entonces se tiene la igualdad de áreas $II = I + III$ y por lo tanto, se da la igualdad

$$ab = \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^b f^{-1}(x)\ dx.$$

□

No se discute la belleza y elegancia del argumento geométrico. Sin embargo, veremos una demostración analítica del Teorema 1.2.9

*Segunda demostración del Teorema 1.2.9.* Definamos la función

$$h(w) := wb - \int_0^w f(x)\ dx.$$

Por continuidad de $f$ aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$h'(w) = b - f(w).$$

Consideramos tres casos:

- Si $0 < w < f^{-1}(b)$, tenemos, por la monotonía de $f$ que $f(w) < f(f^{-1}(b)) = b$ y, por lo tanto, $h'(w) = b - f(w) > 0$.
- Si $w = f^{-1}(b)$, entonces $f(w) = f(f^{-1}(b)) = b$ y, por lo tanto, $h'(w) = 0$.
- Si $w > f^{-1}(b)$, entonces, por la monotonía de $f$ tenemos que $f(w) > f(f^{-1}(b)) = b$ y, por lo tanto, $h'(w) < 0$.

De lo anterior se sigue que $h$ tiene su mínimo en $w = f^{-1}(b)$ y de aquí que, para todo $w$ tenemos que

$$h(w) \leq h(f^{-1}(b)), \tag{1.39}$$

como

$$h(f^{-1}(b)) = bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx.$$

Calculemos la integral,

$$\int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx.$$

Mediante la integración por partes

$$\int_0^{f^{-1}(b)} x\ f'(x)\ dx = f^{-1}(b)\ f(f^{-1}(b)) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\ dx = b\ f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\ dx,$$

de donde

$$h(f^{-1}(b)) = \int_0^{f^{-1}(b)} x\ f'(x)\ dx.$$

Mediante el cambio de variable $x = f^{-1}(y)$,

$$h(f^{-1}(b)) = \int_0^{f^{-1}(b)} x\ f'(x)\ dx = \int_0^b f(y)\ dy = \int_0^b f(x)\ dx.$$

Sustituyendo en la desigualdad (1.39) tenemos que

$$h(w) \leq \int_0^b f(x)\ dx.$$

Por lo que,

$$wb - \int_0^w f(x)\ dx \leq \int_0^b f(x)\ dx.$$

Haciendo $w = a$, tenemos que

$$ab - \int_0^a f(x)\ dx \leq \int_0^b f(x)\ dx,$$

que es el resultado deseado.

□

Veamos otra bella demostración del Teorema 1.2.9 basada en el Teorema del Valor Medio para derivadas.

*Tercera demostración del Teorema 1.2.9.* En la segunda demostración del Teorema 1.2.9 probamos que

$$\int_0^{f^{-1}(b)} x\ f'(x)dx = \int_0^b f(x)\ dx \tag{1.40}$$

y que

$$\int_0^{f^{-1}(b)} x\ f'(x)\ dx = b\ f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\ dx. \tag{1.41}$$

De las identidades (1.40) y (1.41) se tiene que

$$\int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\ dx = b\ f^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(x)\ dx. \tag{1.42}$$

Consideremos la función

$$h(w) := \int_0^w f(x)\ dx.$$

Supongamos primero que $a < f^{-1}(b)$. Como $f$ es continua se tiene por el Teorema Fundamental del Cálculo que $h$ es derivable y $h'(w) = f(w)$. Además es claro que la función $h$ es continua en $\left[a, f^{-1}(b)\right]$ y derivable en $(a, f^{-1}(b))$. Por el Teorema del Valor Medio para derivadas se tiene que existe $c$ en $(a, f^{-1}(b))$ tal que

$$f(c) = h'(c) = \frac{h(f^{-1}(b)) - h(a)}{f^{-1}(b) - a} = \frac{\displaystyle\int_0^{f^{-1}(b)} f^{-1}(x)\ dx - \int_0^a f(x)\ dx}{f^{-1}(b) - a}.$$

Sustituyendo el valor de

$$\int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx$$

dado por (1.42) tenemos que

$$f(c) = \frac{b\ f^{-1}(b) - \displaystyle\int_0^b f^{-1}(x)\ dx - \int_0^a f(x)\ dx}{f^{-1}(b) - a}. \tag{1.43}$$

Como $f$ es estrictamente creciente y $c < f^{-1}(b)$, se tiene que

$$f(c) < f(f^{-1}(b)) = b,$$

y por la igualdad (1.43) se tiene que

$$\frac{b\ f^{-1}(b) - \displaystyle\int_0^b f^{-1}(x)dx - \int_0^a f(x)\ dx}{f^{-1}(b) - a} < b.$$

Multiplicando por $f^{-1}(b) - a$, se tiene que

$$b\ f^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(x)\ dx - \int_0^a f(x)\ dx < b\ f^{-1}(b) - ab,$$

Por lo tanto,

$$ab < \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx.$$

La demostración es análoga para $a > f^{-1}(b)$, pero en ambos casos sólo se obtiene la desigualdad estricta. Para el caso en el que se da la igualdad hay que considerar que $a = f^{-1}(b)$ y hacer uso de la relación (1.42) y se tendrá de inmediato la igualdad. □

**Corolario 1.** *Consideremos $a, b > 0$. Si $p > 1$ y $q > 0$ son tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.44}$$

*Demostración.* Para $x > 0$ definamos la función $f(x) = x^{p-1}$. Tenemos entonces que $f(0) = 0$ y $f'(x) = (p-1)x^{p-2}$, como $x > 0$ y $p > 1$ se sigue que $f'(x) > 0$ y entonces $f$ es estrictamente creciente para $x > 0$ y por lo tanto, la función $f$ cumple con las hipótesis del Teorema 1.2.9. Además,

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p-1}}.$$

Entonces,

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1}\, dx + \int_0^b x^{\frac{1}{p-1}}\, dx = \frac{a^p}{p} + \frac{x^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}}.$$

Si $q = \dfrac{p}{p-1}$, entonces $\dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{p}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{p}{p} = 1$ y

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

A continuación utilizaremos el Corolario 1 para deducir otras desigualdades numéricas, integrales y con esperanzas.

**Teorema 1.2.10.** *Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y dos números reales $p, q > 0$ con $p > 1$ que satisfagan $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.45}$$

*Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Hôlder para números reales.*

*Demostración.* Definamos lo siguiente:

$$a = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{1.46}$$

y

$$b = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}. \tag{1.47}$$

Sustituyendo (1.46) y (1.47) en la desigualdad (1.44) tenemos que

$$\frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\dfrac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}}{p} + \frac{\dfrac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}}{q}.$$

Sumando,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}}{q} \\
&= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}}{p} + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{\sum_{i=1}^{n} x_i^q}}{q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

**Teorema 1.2.11.** *Sean $f$ y $g$ funciones integrables en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y los números reales $p, q > 0$ con $p > 1$ y tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,*

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.48}$$

*Esta desigualdad se conoce como* la versión integral de la desigualdad de Hölder.

*Demostración.* Definamos lo siguiente:

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \tag{1.49}$$

y

$$b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{1.50}$$

Sustituyendo (1.49) y (1.50) en la desigualdad (1.44) tenemos que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\frac{\dfrac{|f(x)|^{p}}{\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}dx}}{p}+\frac{\dfrac{|g(x)|^{q}}{\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx}}{q}.$$

Por monotonía de la integral,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{|f(x)g(x)|dx}{\left(\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}} &= \frac{\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)g(x)|dx}{\left(\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}}\\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta}\frac{\dfrac{|f(x)|^{p}}{\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}}}{p}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\dfrac{|g(x)|^{q}}{\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx}}{q}dx\\ &\leq \frac{\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}dx}{\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}dx}}{p}+\frac{\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx}{\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx}}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)g(x)|dx\leq\left(\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}|g(x)|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Aplicando la siguiente desigualdad válida para cualquier función integrable $f$,

$$\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|\leq\int_{a}^{b}|f(x)|dx.$$

se tiene el resultado deseado.

□

Veamos ahora el análogo de las desigualdades (1.45) y (1.48) para esperanzas de variables aleatorias.

**Teorema 1.2.12.** *Consideremos los números reales $p,q>0$ tales que $p>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Sean $X$ y $Y$ dos variables aleatorias con momentos finitos. Entonces,*

$$E(|XY|)\leq(E|X|^{p})^{\frac{1}{p}}(E|Y|^{q})^{\frac{1}{q}}. \tag{1.51}$$

La desigualdad (1.51) se conoce como *desigualdad de Hölder para esperanzas.*

*Demostración.* Definamos lo siguiente:

$$a = \frac{|X|}{(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}}. \tag{1.52}$$

y

$$b = \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}. \tag{1.53}$$

Sustituyendo (1.52) y (1.53) en la desigualdad (1.44) tenemos que

$$\frac{|XY|}{(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}\,(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\frac{|X|^p}{E|X|^p}}{p} + \frac{\frac{|Y|^q}{E|Y|^q}}{q}.$$

Aplicando el operador esperanza tenemos que

$$\begin{aligned} E\left(\frac{|XY|}{(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}\,(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}\right) &= \frac{E|XY|}{(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}\,(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq E\left(\frac{\frac{|X|^p}{E|X|^p}}{p}\right) + E\left(\frac{\frac{|Y|^q}{E|Y|^q}}{q}\right) \\ &\leq \frac{\frac{E|X|^p}{E|X|^p}}{p} + \frac{\frac{E|Y|^q}{E|X|^q}}{q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}\,(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Pasemos ahora a ver otras desigualdades más elaboradas pero interesantes, algunas de ellas son útiles en la *Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (véase por ejemplo [15]).

**Teorema 1.2.13.** *Consideremos las funciones continuas $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ donde $h$ no es decreciente en $\mathbb{R}^+$ y sea $m > 0$. Si para cada $t \in [a,b]$*

$$f(t) \leq m + \int_a^b g(s)\ h(f(s))\ ds, \tag{1.54}$$

*entonces, para cada $t \in [a,b]$*

$$f(t) \leq \Phi^{-1}\left(\int_a^t g(s)\ ds\right) \tag{1.55}$$

*donde* $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definida por*

$$\Phi(u) = \int_m^u \frac{dz}{h(z)}$$

*para cada* $u \in \mathbb{R}^+$*.*

*Demostración.* Para cada $t \in [a, b]$, definamos la función

$$y(t) := m + \int_a^t g(s)\ h(f(s))\ ds.$$

Entonces $f(t) \leq y(t)$. Por continuidad de las funciones involucradas y por el Teorema Fundamental del Cálculo que

$$y'(t) = g(t)\ h(f(t)). \tag{1.56}$$

Como $h$ es no decreciente se sigue de $f(t) \leq y(t)$ que $h(f(t)) \leq h(y(t))$ y como $g$ sólo toma valores positivos tenemos que

$$g(t)h(f(t)) \leq g(t)h(y(t)). \tag{1.57}$$

Por la igualdad (1.56) y la desigualdad (1.57) se sigue que $y'(t) \leq g(t)\ h(y(t))$ para todo $t \in [a, b]$. Equivalentemente, para evitar abuso de notación tenemos que $\dfrac{y'(s)}{h(y(s))} \leq g(s)$ para todo $s \in [a, b]$. Integrando, tenemos que

$$\int_a^y \frac{y'(s)}{h(y(s))}\ ds \leq \int_a^t g(s)\ ds. \tag{1.58}$$

La integral del lado izquierdo de (1.58) se resuelve fácilmente haciendo el cambio de variable $v = y(s)$ quedando los límites de integración $v = m$ y $v = y(t)$. Por lo tanto,

$$\int_m^{y(t)} \frac{dv}{h(v)} \leq \int_a^t g(s)ds.$$

Por definición de la función $\Phi$ y por la desigualdad anterior tenemos, para todo $t \in [a, b]$ que

$$\Phi(y(t)) \leq \int_a^t g(s)ds. \tag{1.59}$$

Si $\Phi(u) = \displaystyle\int_m^u \frac{dz}{h(z)}$, entonces $\Phi'(u) = \dfrac{1}{h(u)} > 0$, de esto se sigue que $\Phi$ es estrictamente creciente en su dominio y por lo tanto es invertible con inversa $\Phi^{-1}$ estrictamente creciente. Por lo tanto, de la desigualdad (1.59) se sigue que

$$y(t) = \Phi^{-1}(\Phi(y(t))) \leq \Phi^{-1}\left(\int_a^t g(s)\ ds\right).$$

Como $f(t) \leq y(t)$ tenemos, para todo $t \in [a, b]$ que

$$f(t) \leq \Phi^{-1}\left(\int_a^t g(s)ds\right).$$

□

**Teorema 1.2.14** (Desigualdad de Gronwall)**.** *Consideremos las funciones continuas* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *y* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *y sea* $m \geq 0$*. Si para cada* $t \in [a,b]$ *se tiene que*

$$f(t) \leq m + \int_a^t g(s)\ f(s)\, ds,$$

*entonces*

$$f(t) \leq m \exp\left(\int_a^t g(s)\ ds\right). \tag{1.60}$$

*Demostración.* Para cualquier $\epsilon > 0$ y todo $t \in [a,b]$ es claro que

$$f(t) \leq m + \int_a^t g(s)\,(f(s) + \epsilon)\ ds. \tag{1.61}$$

Definamos $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $h(r) = r + \epsilon$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$ que claramente es continua y no decreciente. También, consideremos $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es

$$\Phi(u) = \int_m^u \frac{dz}{h(z)}.$$

De la definición de la función $h$ tenemos que

$$\Phi'(u) = \frac{1}{h(u)} = \frac{1}{u + \epsilon} > 0,$$

por lo que observamos que $\Phi$ es una función estrictamente creciente e invertible en su dominio. Calculando la inversa, después de integrar y realizar algunas operaciones tenemos que $\Phi^{-1}(u) = e^u(m + \epsilon) - \epsilon$. De la definición de $h$ podemos escribir la desigualdad (1.61) como

$$f(t) \leq m + \int_a^t g(s)\,(h(f(s))\ ds. \tag{1.62}$$

La desigualdad (1.62) y la función $\Phi$ cumplen con las hipótesis del Teorema **??** y entonces

$$f(t) \leq \Phi^{-1}\left(\int_a^t g(s)\ ds\right),$$

lo cual implica que para todo $t \in [a,b]$ y todo $\epsilon > 0$,

$$f(t) \leq \exp\left(\int_a^t g(s)\ ds\right)(m + \epsilon) - \epsilon.$$

Cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ tenemos que

$$f(t) \leq m \exp\left(\int_a^t g(s)\ ds\right).$$

□

**Teorema 1.2.15.** *Consideremos las funciones continuas* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *y* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *y sea* $m > 0$*. Si para todo* $t \in [a,b]$ *tenemos que*

$$f^2(t) \leq m^2 + 2\int_a^t g(s)\ f(s)\ ds, \tag{1.63}$$

*entonces, para todo* $t \in [a,b]$ *tenemos que*

$$f(t) \leq m + \int_a^t g(s)\ ds. \tag{1.64}$$

*Demostración.* Para cada $\epsilon > 0$, definamos $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $h(r) = 2\sqrt{r+\epsilon}$ con $r \in \mathbb{R}^+$. Es claro que $h$ es estrictamente creciente en su dominio y además tenemos que

$$h(f^2(s)) = 2\sqrt{f^2(s)+\epsilon}.$$

La desigualdad de la hipótesis (1.63), la podemos escribir entonces como

$$f^2(s) \leq m^2 + 2\int_a^t g(s)\sqrt{f^2(s)+\epsilon}\ ds. \tag{1.65}$$

Por el Teorema 1.2.13 tenemos que para todo $\epsilon > 0$,

$$f^2(t) \leq \left(\sqrt{m^2+\epsilon} + \int_a^t g(s)\ ds\right)^2.$$

Pasando al límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ tenemos que para todo $t \in [a,b]$ que

$$f(t) \leq m + \int_a^t g(s)\ ds.$$

□

Como aplicación del Teorema 1.2.15 tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.16.** *Consideremos las funciones continuas* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$*. Si para todo* $t \in [a,b]$ *tenemos*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(s)\ f(s)\ ds, \tag{1.66}$$

*entonces, para todo* $t \in [a,b]$ *tenemos que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(s)\ g(s)\ \exp\left(\int_s^t h(z)\ dz\right) ds. \tag{1.67}$$

*Demostración.* Definamos la función

$$y(t) := \int_a^t h(s)\ f(s)\ ds.$$

Por la continuidad de $h$ y $f$ y el Teorema Fundamental del Cálculo, para todo $t \in [a, b]$

$$y'(t) = h(t)\ f(t).$$

Para evitar el abuso de notación, escribimos $y'(s) = h(s)\ f(s)$ para todo $s \in [a, b]$. De la definición de $y(t)$ tenemos la desigualdad

$$f(s) \leq g(s) + y(s). \tag{1.68}$$

Por hipótesis tenemos que $h(s) > 0$. Entonces, para todo $s \in [a, b]$ y por la desigualdad (1.68) tenemos que

$$h(s)\, f(s) \leq h(s)\, g(s) + h(s)\, y(s). \tag{1.69}$$

Multiplicando la expresión (1.69) por $\exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right)$ y utilizando que $y'(s) = h(s)\ f(s)$ tenemos que

$$y'(s) \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right) \leq h(s)\, g(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right)\ ds + h(s)\ y(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right).$$

Entonces,

$$y'(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right) - h(s)\ y(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right) \leq h(s)\ g(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right),$$

que puede escribirse como

$$\frac{d}{ds}\left(y(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right)\right) \leq h(s)\ g(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right),$$

entonces,

$$y(t)\ \exp\left(-\int_a^t h(z)\ dz\right) \leq \int_a^t h(s)\ g(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right) ds.$$

Despejando la función $y(t)$,

$$y(t) \leq \exp\left(\int_a^t h(z)\ dz\right) \int_a^t h(s)\ g(s)\ \exp\left(-\int_a^s h(z)\ dz\right) ds.$$

Por lo tanto,

$$y(t) \leq \int_a^t h(s)\ g(s)\ \exp\left(\int_s^t h(z) dz\right) ds. \tag{1.70}$$

De las desigualdades (1.70) y (1.68) tenemos que

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(s)\, g(s)\ \exp\left(\int_s^t h(z) dz\right) ds.$$

$\square$

Otro resultado que involucra los Teoremas 1.2.15 y 1.2.16 es el siguiente.

**Teorema 1.2.17.** *Consideremos las funciones continuas $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y $A \in \mathbb{R}$. Si para cada $t \in [a,b]$ tenemos que*

$$f(t) \leq A + \int_a^t (h(s)f(s) + g(s))\, ds. \tag{1.71}$$

*entonces,*

$$f(t) \leq A \exp\left(\int_a^t h(s)\ ds\right) + \int_a^t g(s)\ \exp\left(\int_s^t h(z)\ dz\right) ds. \tag{1.72}$$

*Demostración.* De la hipótesis (1.71), tenemos que

$$f(t) \leq A + \int_a^t (h(s)\, f(s) + g(s))\ ds = A + \int_a^t g(z)\ dz + \int_a^t h(s)\ f(s)\ ds.$$

Definamos la función $k(t) = A + \displaystyle\int_a^t g(z)\ dz$. Entonces,

$$f(t) \leq k(t) + \int_a^t h(s)\ f(s)\ ds. \tag{1.73}$$

Por la conclusión del Teorema 1.2.16 tenemos que

$$f(t) \leq k(t) + \int_a^t h(s)\ k(s)\ \exp\left(\int_s^t h(z)\ dz\right).$$

Por definición de la función $h$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &\leq A + \int_a^t g(z)\ dz + \int_a^t h(s) \left(A + \int_a^s g(z)\ dz\right)\ \exp\left(-\int_t^s h(z)\ dz\right) ds \\ &= A + \int_a^t g(z)dz + \int_a^t \left(A + \int_a^s g(z)dz\right) \frac{d}{ds}\left(-\exp\left(-\int_t^s h(z)dz\right)\right) ds \\ &= A + \int_a^t g(z)dz - \int_a^t \left(A + \int_a^s g(z)dz\right) \frac{d}{ds}\exp\left(-\int_t^s h(z)dz\right) ds. \end{aligned} \tag{1.74}$$

Mediante integración por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_a^t \left(A + \int_a^s g(z)\ dz\right) \frac{d}{ds}\exp\left(-\int_t^s h(z)\, dz\right) ds \\ &\qquad = A + \int_a^t g(z)\ dz - A\ \exp\left(\int_a^t h(z)\ dz\right) \\ &\qquad - \int_a^t g(s)\ \exp\left(\int_s^t h(z)\ dz\right) ds. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta igualdad en la desigualdad (1.74) tenemos finalmente que

$$f(t) \leq A \exp\left(\int_a^t h(s)\ ds\right) + \int_a^t g(s)\ \exp\left(\int_s^t h(z)\ dz\right) ds.$$

□

## 1.3. Funciones Convexas.

En esta sección trataremos algunos aspectos relacionados con las funciones convexas reales de variable real. En algunas demostraciones supondremos que las funciones tienen adicionalmente propiedades de diferenciabilidad. Es conveniente advertir que esta hipótesis en general no es necesaria, pero algunas demostraciones requieren *Teoría de la Medida* e integrales respecto a medidas que no trataremos aquí. También es necesario mencionar que los resultados que obtengamos se pueden extender, con hipótesis adecuadas, a funciones con más variables y sobre otros dominios convexos (véase *e. g.* [7]).

**Definición 1.3.1.** *Se dice que una función $\phi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es* convexa *si para cualesquiera dos puntos $x$ y $y$ en su dominio, y para cualquier $\lambda \in [0,1]$, se cumple la desigualdad,*

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\ \phi(x) + (1-\lambda)\ \phi(y). \tag{1.75}$$

La definición de convexidad puede adecuarse al conjunto de todos los números reales, a un intervalo cerrado o por ejemplo al conjunto $(0,\infty)$. Según convenga, usaremos para $\lambda$ el intervalo $(0,1)$.

**Definición 1.3.2.** *Se dice que una función $\phi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es* cóncava *si para cualesquiera dos puntos $x$ y $y$ en su dominio, y para cualquier $\lambda \in [0,1]$, se cumple la desigualdad,*

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda\ \phi(x) + (1-\lambda)\ \phi(y). \tag{1.76}$$

**Teorema 1.3.1.** *Si $\phi$ es convexa y si $u$ y $v$ son dos puntos de su dominio entonces el segmento de recta que une los puntos $(u,\phi(u))$ y $(v,\phi(v))$ queda por arriba de la gráfica de $\phi$ en el intervalo determinado por esos puntos.*

*Demostración.* La pendiente del segmento que une esos puntos es $m = \dfrac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}$ y la ecuación de la recta que contiene a dicho segmento está dada por

$$y - \phi(u) = \frac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}(x-u),$$

que vista como función podemos escribir como

$$g(x) = \frac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}(x-u) + \phi(u).$$

Sea $x \in [u,v]$, entonces existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $x = \lambda v + (1-\lambda)u$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
g(x) = g(\lambda v + (1-\lambda)u) &= \frac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}(\lambda v + (1-\lambda)u - u) + \phi(u) \\
&= \frac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}(\lambda v + u - \lambda u - u) + \phi(u) = \frac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}(v-u)\lambda + \phi(u) \\
&= \lambda\phi(v) - \lambda\phi(u) + \phi(u) = \lambda\phi(v) + (1-\lambda)\phi(u) \\
&\geq \phi(\lambda v + (1-\lambda)u) = \phi(x).
\end{aligned}$$

En la desigualdad que aparece hemos usado la convexidad de $\phi$. Por lo tanto, $g(x) \geq \phi(x)$ para todo $x \in [u,v]$ y esto prueba el resultado. □

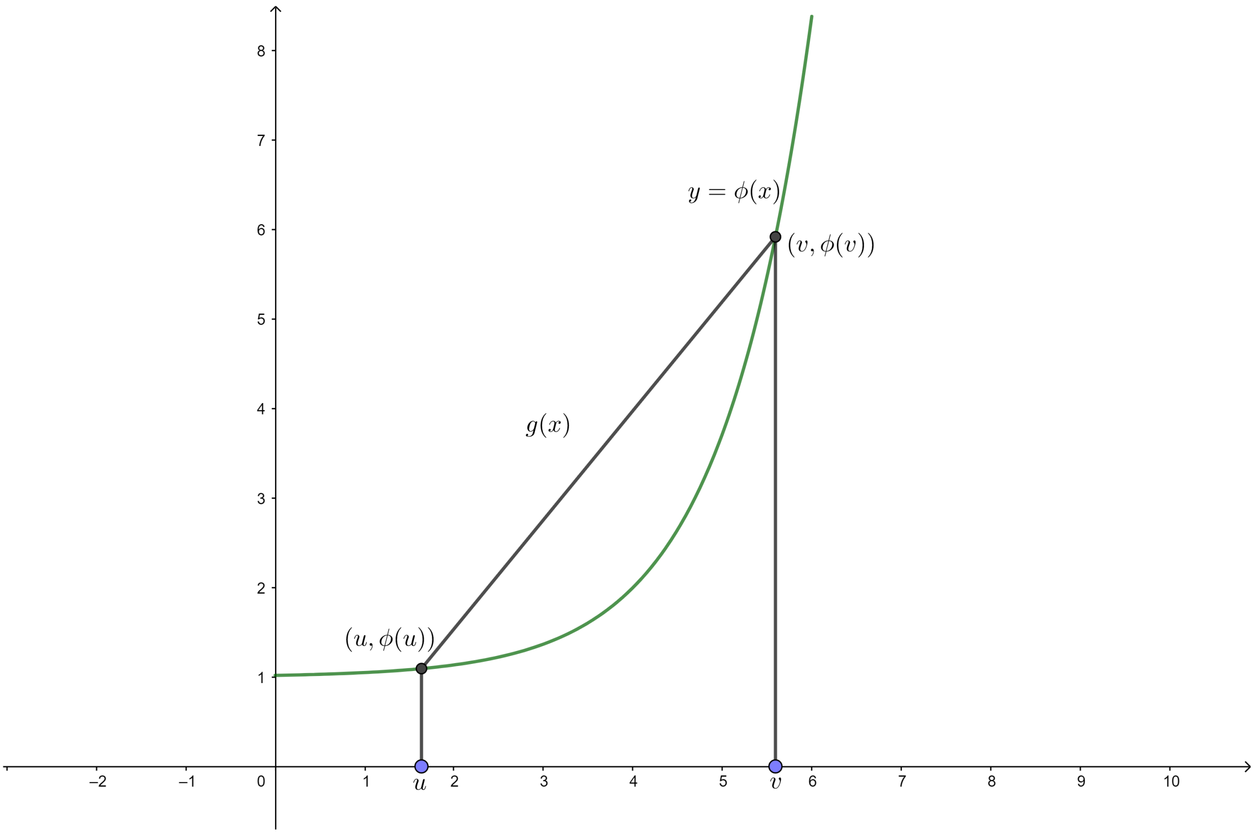


Figura 1.5: Esquema de la interpretación del Teorema 1.3.1

La interpretación geométrica del Teorema 1.3.1 se representa en la Figura 1.5. Se infiere que la gráfica de una función convexa es una gráfica "sonriente". Un resultado análogo puede obtenerse para una función cóncava y, por lo tanto, la gráfica de una función cóncava es una gráfica "triste".

**Teorema 1.3.2.** *Consideremos una función convexa $f$ definida en un intervalo $I$ de $\mathbb{R}$ y sean $x < y < z$ en $I$. Entonces*

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \tag{1.77}$$

*Demostración.* Como $y \in (x,z)$, existe $t \in (0,1)$ tal que $y = tz + (1-t)x$. Encontrando explícitamente a $t$ y $1-t$ tenemos que

$$t = \frac{y-x}{z-x}. \tag{1.78}$$

y

$$1-t = \frac{z-y}{z-x}. \tag{1.79}$$

Considerando las igualdades (1.78), (1.79) y aplicando la definición de convexidad 1.3.1, tenemos que

$$f(y) = f(t\,z + (1-t)\,x) = f\left(\frac{y-x}{z-x}z + \frac{z-y}{z-x}x\right) \leq \frac{y-x}{z-x}\,f(z) + \frac{z-y}{z-x}\,f(x).$$

Análogamente,

$$(z-x)\ f(y) \leq (y-x)\ f(z) + (z-y)\ f(x). \tag{1.80}$$

Restando a ambos lados de (1.80) la expresión $(z-x)f(x)$ tenemos que,

$$\begin{aligned}(z-x)\,f(y)-(z-x)\,f(x) &\leq (y-x)\,f(z)+(z-y)\,f(x)-(z-x)\,f(x)\\ &= (y-x)f(z)-f(x)(z-x-z+y)\\ &= (y-x)f(z)-f(x)(y-x)\\ &= (y-x)(f(z)-f(x)).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{1.81}$$

De manera análoga, restando $(z-x)\,f(z)$ a la expresión (1.80) tenemos que

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \tag{1.82}$$

Combinando las desigualdades (1.81) y (1.82) concluimos que

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

□

Con el Teorema 1.3.2 obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.3.** *Toda función convexa $f$ en un intervalo $I=(a,b)$ es continua en ese intervalo.*

*Demostración.* Consideremos $x \in (a,b)$ y sea $y \in (x,b)$. Por el Teorema 1.3.2 tenemos que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Equivalentemente, podemos escribir:

$$f(x)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(y-x) \leq f(y) \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}\,(y-x)+f(x).$$

Por el *Teorema del emparedado para límites* los límites laterales, cuando $v \longrightarrow x^-$ y cuando $v \longrightarrow x^+$ respectivamente, existen y por lo tanto tenemos tenemos que

$$\lim_{v\longrightarrow x} f(v) = f(x).$$

con lo que $f$ es continua en $(a,b)$. □

Los siguientes resultados dan una especie de recíproco del Teorema 1.3.2 de cuándo la continuidad, bajo ciertas condiciones, implica la convexidad.

Antes de enunciarlos y probarlos observemos primero que si en la Definición 1.3.1 de convexidad hacemos $\lambda = \frac{1}{2}$ tenemos que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para todos $x$ y $y$.

**Proposición 2.** *Si $f$ es una función que satisface para todos $x$ y $y$ en su dominio de definición que*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{1.83}$$

*entonces, para todo número racional $k$ tal que $0<k<1$ que es de la forma $\frac{m}{2^n}$ se tiene que*

$$f(kx+(1-k)y) \leq k\ f(x)+(1-k)\ f(y). \tag{1.84}$$

*Demostración.* La prueba del resultado la haremos por inducción sobre $n$.
Si $n=1$, entonces $0<k=\frac{m}{2}<1$ y $0<m<2$. Luego como $m$ es entero se sigue que $m=1$ y entonces, $k=\frac{1}{2}$.
Por hipótesis se cumple claramente que

$$f\left(\frac{1}{2}x+\left(1-\frac{1}{2}\right)y\right) \leq \frac{1}{2}f(x)+\left(1-\frac{1}{2}\right)f(x).$$

Supongamos que el resultado es válido para $0<k=\frac{m}{2^n}<1$, hay que probar que la proposición es válida para $0<k=\frac{m}{2^{n+1}}<1$.
Supongamos que $k=\frac{m}{2^{n+1}}$ es una fracción irreducible, entonces $m$ es un número impar y por lo tanto $m+1$ y $m-1$ son ambos números pares, es decir, $m-1=2r$ y $m+1=2s$ con $r,s\in\mathbb{Z}$ y además $m+1+m-1=2r+2s$, con lo que $m=r+s$.

Definamos los números racionales $u:=\frac{m-1}{2^{n+1}}$ y $v=:\frac{m+1}{2^{n+1}}$. Entonces tenemos que $u=\frac{2r}{2^{n+1}}=\frac{r}{2^n}$ y $v=\frac{2s}{2^{n+1}}=\frac{s}{2^n}$. Ahora, se puede probar fácilmente que $0<u<1$ y $0<v<1$.

Por hipótesis de inducción tenemos que la proposición es válida para los racionales $u$ y $v$. Además tenemos que $\frac{u+v}{2}=\frac{\frac{r}{2^n}+\frac{s}{2^n}}{2}=\frac{r+s}{2^{n+1}}=\frac{\frac{m}{2^n}}{2}=\frac{m}{2^{n+1}}=k$. Así, $k=\frac{u+v}{2}$ y

$$\begin{aligned}
f(kx+(1-k)y) &= f\left(\frac{u+v}{2}x+\left(1-\frac{u+v}{2}\right)y\right)\\
&= f\left(\frac{ux+vx}{2}+\frac{1+1-u-v}{2}y\right)\\
&= f\left(\frac{[ux+(1-u)y]+[vx+(1-v)y]}{2}\right)\\
&\leq \frac{f(ux+(1-u)y)+f(vx+(1-v)y)}{2}\\
&\leq \frac{uf(x)+(1-u)f(y)+vf(x)+(1-v)f(y)}{2}\\
&= \frac{(u+v)f(x)+(2-(u+v))f(y)}{2}\\
&= \frac{u+v}{2}f(x)+\left(1-\frac{u+v}{2}\right)f(y)\\
&= kf(x)+(1-k)f(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(kx + (1-k)y) \le kf(x) + (1-k)f(y).$$

$\square$

Ahora, con la Proposición 2 anterior podemos demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.4.** *Si $f$ es una función continua tal que*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

*para todos $a$ y $b$ en su dominio de definición, entonces $f$ es convexa.*

*Demostración.* Definamos $g(t) := f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y)$ y supongamos que $f$ no es una función convexa. De esta suposición se sigue que existe algún $t \in (0,1)$ tal que $g(t) > 0$. Entonces, sea $M$ el número real tal que

$$\max_{t\in(0,1)} g(t) = M > 0. \tag{1.85}$$

Consideremos $t_0$ el valor más pequeño de $t \in (0,1)$ tal que $g(t) = M$ y sea $\delta > 0$ lo suficientemente pequeña tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (0,1)$. Definamos:

$$u = (t_0 + \delta)x + (1 - t_0 - \delta)y$$

y

$$v = (t_0 - \delta)x + (1 - t_0 + \delta)y.$$

Observemos que

$$\frac{u+v}{2} = t_0\,x + (1-t_0)y.$$

Por hipótesis y de la definición de $u$ y $v$ tenemos que

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \le \frac{f(u)+f(v)}{2}. \tag{1.86}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
g(t_0+\delta) + g(t_0-\delta) &= f((t_0+\delta)x + (1-t_0-\delta)y) - (t_0+\delta)f(x) - (1-t_0-\delta)f(y) \\
&+ f((t_0-\delta)x + (1-t_0+\delta)y) - (t_0-\delta)f(x) - (1-t_0+\delta)f(y) \\
&= f(u) + f(v) - 2t_0 f(x) - 2(1-t_0)f(y) \\
&= f(u) + f(v) - 2(t_0 f(x) + (1-t_0)f(y)) \\
&= f(u) + f(v) - 2[f(t_0 x + (1-t_0)y) - g(t_0)] \\
&= f(u) + f(v) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + 2g(t_0) \\
&\ge f(u) + f(v) + 2g(t_0) - 2\frac{f(u)+f(v)}{2} \\
&= f(u) + f(v) + 2g(t_0) - f(u) - f(v) + 2g(t_0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$g(t_0) \le \frac{g(t_0+\delta) + g(t_0-\delta)}{2} < \frac{M+M}{2} = M.$$

Esto contradice el hecho de que $g(t_0) = M$ y por lo tanto, $f$ es una función convexa. $\square$

**Lema 3.** *Consideremos una función real de variable real $f$. Entonces, para todos los números $x$ y $y$ se tiene que*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

*si y solo si, para todos los números $s$ y $r$*

$$f(s) \leq \frac{f(s-r)+f(s+r)}{2}.$$

*Demostración.* Definamos $s := \dfrac{x+y}{2}$ y $r := s-y$, entonces $x = s+r$ y $y = s-y$. Por hipótesis se tiene que

$$f(s) \leq \frac{f(s-r)+f(s+r)}{2}. \tag{1.87}$$

Recíprocamente, definamos $s := \dfrac{x+y}{2}$ y $r = \dfrac{x-y}{2}$. Observemos que $s+r = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$ y que $s-r = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$. Así, tenemos que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.88}$$

□

**Corolario 4.** *Si $f$ es una función continua tal que $f(s) \leq \dfrac{f(s-r)+f(s+r)}{2}$ para todos los números $s$ y $r$, entonces $f$ es convexa.*

*Demostración.* Es consecuencia del Lema 3 y del Teorema 1.3.4. □

**Teorema 1.3.5.** *Sea $f$ una función derivable en $\mathbb{R}$, entonces $f$ convexa en $\mathbb{R}$, si y solo si, para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$f(x) \geq f(y) + (x-y)f'(y). \tag{1.89}$$

*Demostración.* Sea $h = x-y$ y sea $t \in (0,1)$, entonces por convexidad se tiene que

$$\begin{aligned}
f(y+th) &= f(y+t(x-y)) \\
&= f(y+tx-ty) \\
&= f(tx+(1-t)y)) \\
&\leq tf(x)+(1-t)f(y) \\
&= tf(h+y)+(1-t)f(y) \\
&= tf(h+y)-tf(y)+f(y).
\end{aligned}$$

Así,

$$f(y+th) \leq tf(y+h)+f(y)-tf(y)$$

de donde,

$$\frac{h\left[f(y+th)-f(y)\right]}{ht} \leq f(y+h)-f(y).$$

Esto implica,

$$hf'(y) = h \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{[f(y+th) - f(y)]}{ht} \leq \lim_{t \longrightarrow 0} [f(y+h) - f(y)] = f(y+h) - f(y).$$

Como $h = x - y$ se tiene que,

$$(x-y)f'(y) \leq f(y+x-y) - f(y) = f(x) - f(y).$$

Por lo tanto,

$$(x-y)f'(y) + f(y) \leq f(x).$$

Recíprocamente, supongamos que la desigualdad (1.89) es válida para todos los números reales $x$ y $y$. Sean $x_1$ y $x_2$ dos números reales y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 \leq x_2$. Sea $y \in (x_1, x_2)$, entonces, existe $t \in (0,1)$ tal que

$$y = tx_2 + (1-t)x_1. \tag{1.90}$$

Por hipótesis tenemos que

$$f(x_2) \geq f(y) + (x_2 - y)f'(y). \tag{1.91}$$

y

$$f(x_1) \geq f(y) + (x_1 - y)f'(y). \tag{1.92}$$

Sustituyendo (1.90) en (1.91) y (1.92) tenemos que

$$f(x_2) \geq f(y) + (x_2 - (tx_2 + (1-t)x_1))f'(y) = f(y) + (x_2 - x_1)(1-t)f'(y). \tag{1.93}$$

y

$$f(x_1) \geq f(y) + (x_1 - (tx_2 + (1-t)x_1))f'(y) = f(y) - t(x_2 - x_1)f'(y). \tag{1.94}$$

Multiplicando (1.93) por $t$ y (1.94) por $(1-t)$ tenemos que

$$tf(x_2) \geq tf(y) + t(x_2 - x_1)(1-t)f'(y). \tag{1.95}$$

y

$$(1-t)f(x_1) \geq (1-t)f(y) - t(1-t)(x_2 - x_1)f'(y). \tag{1.96}$$

Sumando (1.95) y (1.96) y usando (1.90) tenemos que

$$tf(x_2) + (1-t)f(x_1) \geq tf(y) + (1-t)f(y) = f(y) = f(tx_2 + (1-t)x_1).$$

y esto es la definición de convexidad. □

Un resultado análogo al Teorema 1.3.5 se obtiene para una función cóncava, sólo se invierte la desigualdad.
La interpretación geométrica del Teorema 1.3.5 se ilustra en la Figura 1.6 y procedemos a comentarlo.
Se tiene la gráfica de una función convexa $y = f(x)$ y un punto $(y_1, f(x_1))$ un punto sobre ella. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en ese punto es $g(x) = f'(y_1)(x - x_1) + f(y_1)$ con lo que queda ilustrado el teorema al observar que la gráfica de la función convexa $f$ queda por encima de la recta tangente en el punto $(y_1, f(x_1))$, excepto en ese punto en el que se da la igualdad.
Con el Teorema 1.3.5 podemos dar otra demostración de la *Desigualdad de Young* dada en el Teorema 1.2.9, pero antes de ello necesitamos el siguiente resultado.

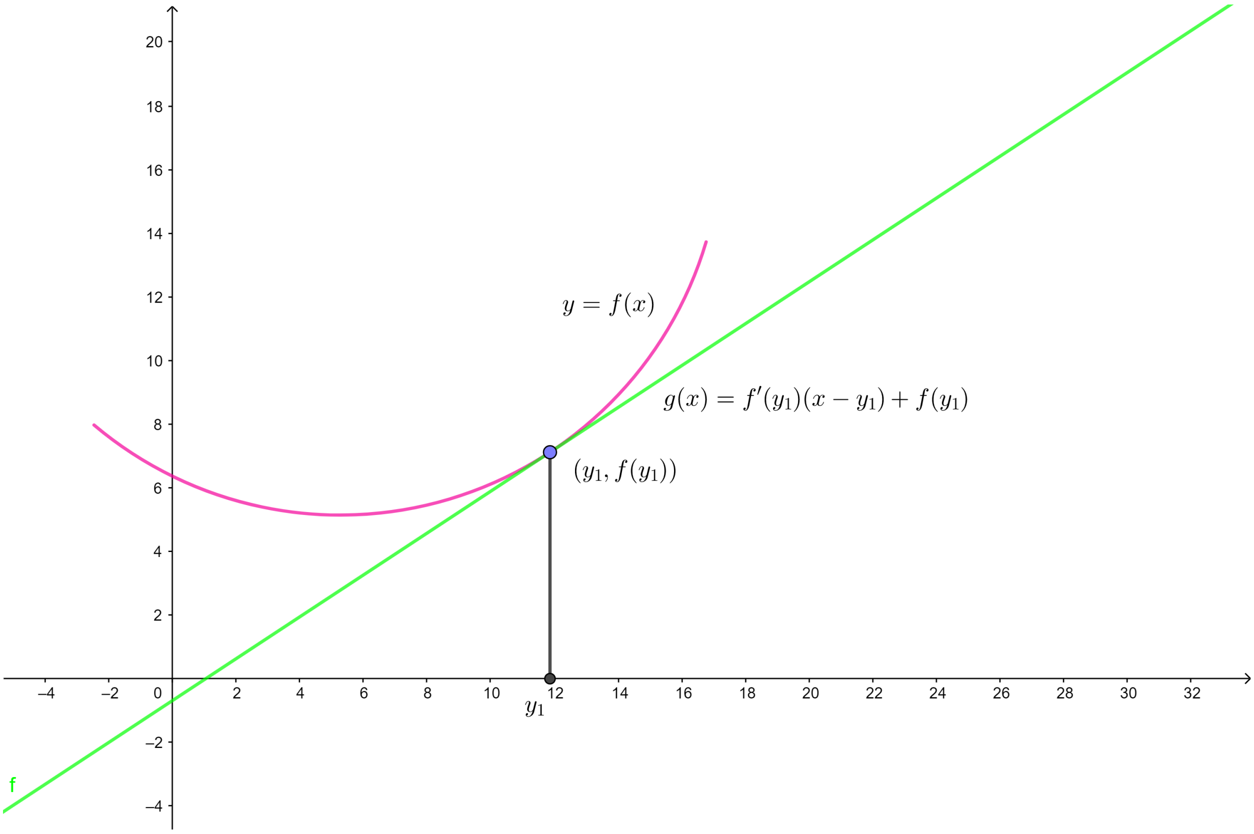


Figura 1.6: Esquema de la interpretación del Teorema 1.3.5

**Lema 5.** *Si $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, derivable y estrictamente creciente que satisface $f(0) = 0$, entonces para todo número positivo $a$ tenemos que*

$$\int_0^a f(t)\ dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\ dt = a\, f(a). \tag{1.97}$$

*Demostración.* Calcularemos la integral $\displaystyle\int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\ dt$ con un cambio de variable y usando integración por partes. Sea $w = f^{-1}(t)$, entonces $t = f(w)$ y $dt = f'(w)\,dw$. Si $t = 0$ se tiene que $w = 0$ y si $t = f(a)$, entonces $w = a$. Luego

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(t)dt = \int_0^a wf'(w)dw. \tag{1.98}$$

Ahora, hacemos $u = w$ y $dv = f'(w)\,dw$. Entonces $du = dv$ y $v = f(w)$. Luego,

$$\int_0^a wf'(w)\ dw = af(a) - \int_0^a f(w)\ dw = af(a) - \int_0^a f(t)\ dt.$$

y por (1.98) tenemos que

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\ dt = af(a) - \int_0^a f(t)\ dt.$$

Esto finaliza la demostración. □

Veamos ahora la demostración de la desigualdad de Young usando el Teorema 1.3.5 y el Lema 5.

*Demostración.* Definamos la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que $F'(x) = f(x)$, entonces tenemos que $F$ es convexa en $[0, \infty)$.

Por el Teorema 1.3.5 tenemos que para cualesquiera $x, y > 0$,

$$F(x) \geq (x - y)F'(y) + F(y).$$

En particular la desigualdad anterior es válida para $x = a > 0$ y para $y = f^{-1}(b) > 0$. Entonces tenemos que

$$F(a) \geq (a - f^{-1}(b))f(f^{-1}(b)) + F(f^{-1}(b)).$$

Equivalentemente,

$$\int_0^a f(t)\ dt \geq ab - bf^{-1}(b) + \int_0^{f^{-1}(b))} f(t)\ dt. \tag{1.99}$$

Aplicando el lema a la función $f^{-1}$ y al intervalo $[0, b]$ tenemos que

$$\int_0^b f^{-1}(t)\ dt + \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\ dt = b\, f^{-1}(b). \tag{1.100}$$

y por (1.99) se sigue que

$$\int_0^a f(t)\ dt \geq ab - bf^{-1}(b) + b\ f^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(t)\ dt.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^a f(t)\ dt + \int_0^b f^{-1}(t)\ dt \geq a\ b.$$

que es la desigualdad de Young. □

Veamos ahora el siguiente resultado cuya demostración presenta analogías con la demostración de la Desigualdad de Young.

**Teorema 1.3.6.** *Si $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente que satisface que $f(0) = 0$, entonces para todos los números positivos $a$ y $b$ tenemos que*

$$\text{mín}\left\{1, \frac{b}{f(a)}\right\} \int_0^a f(t)\ dt + \text{mín}\left\{1, \frac{a}{f^{-1}(b)}\right\} \int_0^b f^{-1}(t)\ dt \leq a\ b. \tag{1.101}$$

*La igualdad se da, si y solo si, $b = f^{-1}(a)$.*

*Demostración.* Así como en la demostración de la desigualdad de Young, consideremos que $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ es una función convexa. Por definición de convexidad tenemos, para todos $x, y \geq 0$ y para todo $t \in [0,1]$ que

$$F(t\,x + (1-t)\,y) =\leq t\,F(x) + (1-t)\,F(y).$$

En particular, si $y = 0$ tenemos, para todo $x > 0$ y todo $t \in [0,1]$ que

$$F(tx) \leq t\,F(x). \tag{1.102}$$

Supongamos primero que $a < f^{-1}(b)$. Entonces $0 < \dfrac{a}{f^{-1}(b)} < 1$, si hacemos $t = \dfrac{a}{f^{-1}(b)}$ y $x = f^{-1}(b)$ en (1.102) tenemos que

$$F(a) = F\left(\frac{a}{f^{-1}(b)} f^{-1}(b)\right) < \frac{a}{f^{-1}(b)}\,F(f^{-1}(b)). \tag{1.103}$$

Así como en el lema anterior, si calculamos la integral $\int_0^b f(t)\ dt$ con un cambio de variable e integración por partes tenemos que

$$F(f^{-1}(b)) = b\,f^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(t)\ dt, \tag{1.104}$$

y por (1.103) tenemos que

$$F(a) < \frac{a}{f^{-1}(b)}\left(b\,f^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(t)\ dt\right) = a\,b - \frac{a}{f^{-1}(b)}\int_0^b f^{-1}(t)\ dt.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^a f(t)\ dt + \frac{a}{f^{-1}(b)}\int_0^b f^{-1}(t)\ dt < a\,b. \tag{1.105}$$

Supongamos ahora que $a > f^{-1}(b)$ y definamos $G(x) := \int_0^x f^{-1}(t)\,dt$. Así, como para la función $F$, tenemos que $G$ es cóncava y se cumple que, para todo $x > 0$ y todo $t \in [0,1]$ que

$$G(tx) \leq t\,G(x). \tag{1.106}$$

Si $a > f^{-1}(b)$, entonces $f(a) > b$ y $0 < \dfrac{b}{f(a)} < 1$. Haciendo $t = \dfrac{b}{f(a)}$ y $x = f(a)$ en (1.106) tenemos que

$$G(b) = G\left(\frac{b}{f(a)}\,f(a)\right) < \frac{b}{f(a)}\,G(f(a)). \tag{1.107}$$

Por el Lema 5, tenemos que $G(f(a)) = \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\ dt = af(a) - \int_0^a f(t)\ dt$. Sustituyendo en (1.107) tenemos que

$$\int_0^b f^{-1}(t)\ dt < \frac{b}{f(a)}\left(a\,f(a) - \int_0^a f(t)\,dt\right) = a\,b - \frac{b}{f(a)}\int_0^a f(t)\ dt.$$

Por lo tanto,

$$\frac{b}{f(a)} \int_0^a f(t)\ dt + \int_0^b f^{-1}(t)\ dt < a\, b. \tag{1.108}$$

Combinando (1.105) y (1.108) tenemos que

$$\text{mín}\left\{1, \frac{b}{f(a)}\right\} \int_0^a f(t)\ dt + \text{mín}\left\{1, \frac{a}{f^{-1}(b)}\right\} \int_0^b f^{-1}(t)\ dt < ab.$$

Ahora, es claro que la igualdad se da cuando $a = f^{-1}(b)$ y por lo tanto se ha probado el teorema. □

A continuación veremos otros resultados relacionados con las funciones convexas y cóncavas.

**Proposición 6.** *Sea $f$ una función dos veces derivable tal que $f''(x) \geq 0$ para todo $x$, entonces $f$ es una función convexa. Si $f''(x) \leq 0$, entonces $f$ es una función cóncava.*

*Demostración.* Si $f'' \geq 0$, entonces $f'$ es una función no decreciente. Sean $a$ y $b$ dos números reales tales que $a < b$ y sea $x \in [a, b]$. Entonces, existe un $t \in [0, 1]$ tal que $x = tb + (1 - t)a$. Como $f$ es dos veces derivable, entonces en particular es derivable y por lo tanto es continua en $[a, x]$ y $[x, b]$ y derivable en $(a, x)$ y en $(x, b)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio para derivadas tenemos que existen $x_1 \in [a, x]$ y $x_2 \in [x, b]$ tales que

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1.109}$$

y

$$f'(x_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{1.110}$$

Utilizando las igualdades (1.109) y (1.110) y el hecho de que $x = tb + a - at$ se deduce que

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(x_1) = (tb + a - at - a)f'(x_1) = t(b - a)f'(x_1) \tag{1.111}$$

y

$$f(b) - f(x) = (b - x)f'(x_2) = (b - tb - a + at)f'(x_2) = (1 - t)(b - a)f'(x_2). \tag{1.112}$$

Por hipótesis se tiene que $x_1 < x_2$. Por lo tanto, utilizando las igualdades (1.111) y (1.112) y el hecho de que $f'$ es no decreciente se tiene que

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Lo que implica que

$$t(1 - t)(b - a)f'(x_1) \leq t(1 - t)(b - a)f'(x_1),$$

o bien,

$$(1 - t)(f(x) - f(a)) \leq t(f(b) - f(x)).$$

De aquí que,

$$f(x) \leq tf(b) + (1 - t)f(a).$$

de donde finalmente,

$$f(tb + (1 - t)f(a)) \leq tf(b) + (1 - t)f(a).$$

Análogamente a la Proposición 6 se tiene una proposición para una función cóncava. □

**Teorema 1.3.7.** *Si $f$ es convexa en $\mathbb{R}$ o en algún intervalo, entonces para cualesquiera $x_1, x_1, ..., x_n$ del dominio y para cualesquiera $t_1, t_2, ..., t_n \in [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, se tiene que*

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n). \tag{1.113}$$

*Esta desigualdad se conoce como* desigualdad de Jensen *para números reales.*

*Demostración.* La prueba la haremos por inducción a partir de $n \geq 2$. Si $n = 2$ entonces tenemos $t_1 + t_2 = 1$, y por convexidad tenemos que

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) = f(t_2x_2 + (1 - t_2)x_1) \leq t_2f(x_2) + (1 - t_2)f(x_1) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$

Supongamos que el resultado es válido para $n - 1$ sumandos, veamos entonces que el resultado es válido para $n$ sumandos:

Si $t_1+t_2+...+t_n = 1$, entonces es claro que $0 \leq \dfrac{t_i}{1 - t_n} \leq 1$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(t_1x_1 + t_2x_2 + ...t_nx_n) &= f(t_nx_n + (t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_{n-1}x_{n-1})) \\
&= f\left(t_nx_n + (1 - t_n)\left[\frac{t_1}{1 - t_n}x_1 + \frac{t_2}{1 - t_n}x_2 + ... + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n}x_{n-1}\right]\right) \\
&\leq t_nf(x_n) + (1 - t_n)f\left(\frac{t_1}{1 - t_n}x_1 + \frac{t_2}{1 - t_n}x_2 + ... + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n}x_{n-1}\right) \\
&\leq t_nf(x_n) + (1 - t_n)\left[\frac{t_1}{1 - t_n}f(x_1) + \frac{t_2}{1 - t_n}f(x_2) + ... + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n}f(x_{n-1})\right] \\
&= t_nf(x_n) + t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_{n-1}f(x_{n-1}) \\
&= t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n).
\end{aligned}$$

En la primera desigualdad usamos la definición de convexidad y en la segunda desigualdad usamos la hipótesis de inducción. La desigualdad de Jensen para números reales y funciones cóncavas se obtiene de manera análoga.

□

**Corolario 7.** *Con las hipótesis del Teorema 1.3.7, se tiene que*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}. \tag{1.114}$$

*Demostración.* Hacer en la desigualdad (1.113) los $t_i$ como $\dfrac{1}{n}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. □

**Corolario 8.** *Si, $x_1, x_2, ..., x_n$ son números positivos y $t_1, t_2, ..., t_n \in [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, entonces*

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot ... \cdot x_n^{t_n} \leq t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2 + ... + t_n \cdot x_n. \tag{1.115}$$

*Demostración.* La función exponencial $f(x) = e^x$ es convexa ya que $f''(x) = e^x > 0$. Entonces, aplicando el Teorema 1.3.7 tenemos que

$$\begin{aligned}
x_1^{t_i} \cdot x_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n} &= \prod_{i=1}^{n} x_i^{t_1} = \prod_{i=1}^{n} e^{\ln(x_i^{t_i})} \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{t_i \ln x_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} t_i \ln x_i} = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \ln x_i\right) \\
&= f(t_1 \ln x_1 + t_2 \ln x_2 + \ldots + t_n \ln x_n) \\
&\leq t_1 f(\ln x_1) + t_2 f(\ln x_2) + \ldots + t_n f(\ln x_n) \\
&= t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2 + \ldots + t_n \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_1^{t_i} \cdot x_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n} \leq t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2 + \ldots + t_n \cdot x_n.$$

□

Con este corolario podemos dar otra demostración de la Desigualdad 1.44 del Corolario 1.

**Corolario 9.** *Sean $a, , b > 0$, y $p$ y $q$ números positivos con $p > 1$ y tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.116}$$

*Demostración.* Si en el Corolario 8 hacemos $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$ y hacemos $t_1 = \frac{1}{p}$, $t_2 = \frac{1}{q}$, entonces tenemos inmediatamente el resultado. □

**Teorema 1.3.8.** *Consideremos una función convexa en $\mathbb{R}$ y derivable $\phi$ y sean $a < b$ números reales y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. Entonces*

$$\phi\left(\int_a^b f(x)\ dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi\left((b-a) f(x)\right)\ dx. \tag{1.117}$$

*Esta desigualdad se conoce como* desigualdad de Jensen para integrales.

*Demostración.* Daremos una bonita demostración geométrica, para esto veamos la Figura 1.7. Hemos construido la gráfica de la función convexa $\phi$ y la gráfica de la función integrable $f$ sobre el intervalo $[a, b]$.

El área sombreada está representada por $I = \int_a^b f(x)\ dx$, como $I$ es un número real, éste puede representarse sobre el eje $x$ y como la función $\phi$ es derivable, existe su recta tangente en cualquier punto, en particular existe la recta tangente en el punto de coordenadas $(I, \phi(I))$, la cual tiene por pendiente un cierto $m$ y tiene por ecuación

$$g(x) = mx - mI + \phi(I).$$

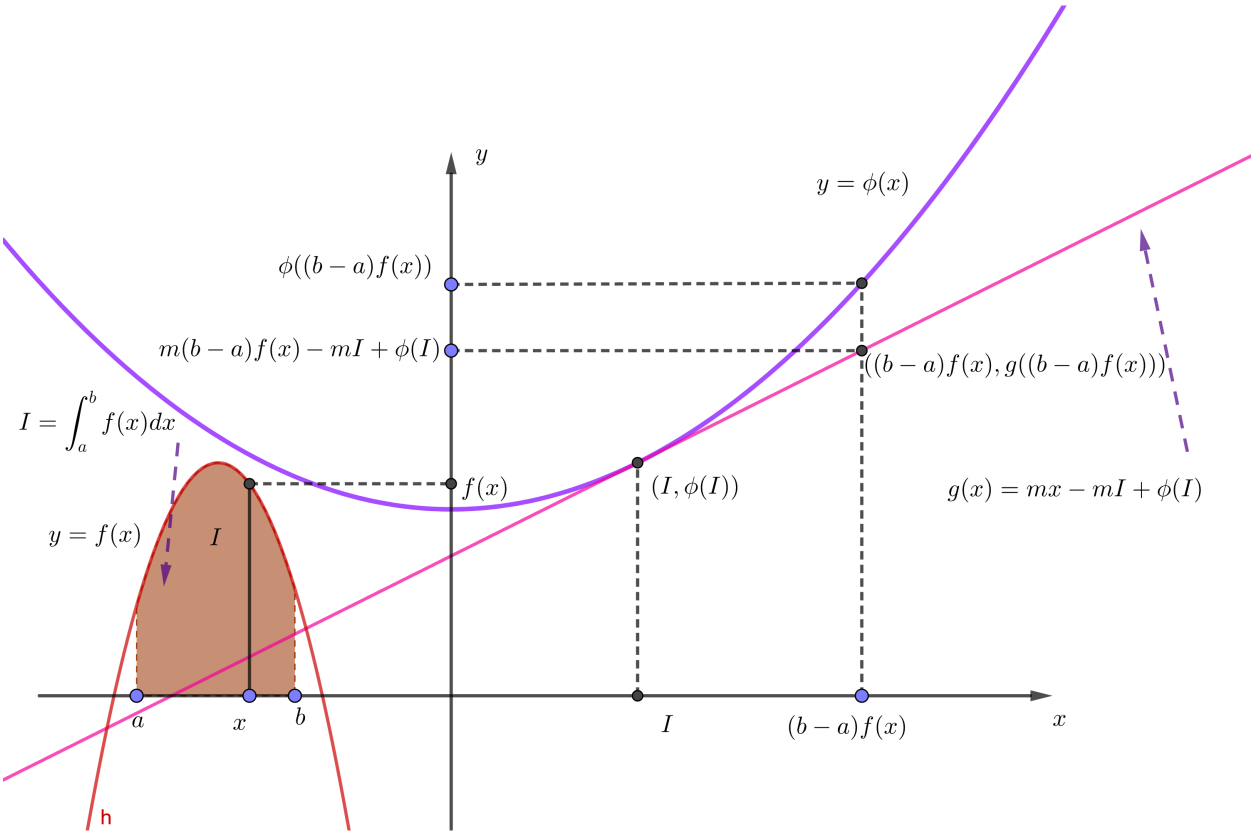


Figura 1.7: Esquema de la demostración del Teorema 1.3.8

Para cualquier $x \in [a, b]$, $f(x)$ es un número real, ciertamente $(b-a)\, f(x)$ también es un número real, el cual localizamos en el eje $x$ el cual puede o no coincidir con $I$.

Vamos a evaluar el punto $(b-a)\, f(x)$ en ambas funciones $\phi$ y $g$. Por el Teorema 1.3.5, la gráfica de la recta $g(x)$ queda por debajo de la gráfica de $\phi$, excepto en el punto de tangencia donde coinciden.

Entonces, $g((b-a)\, f(x)) \leq \phi((b-a)f(x))$, pero por la definición de $g$ se tiene que

$$g((b-a)f(x)) = m\,(b-a)\, f(x) - m\, I + \phi(I).$$

Por lo tanto,

$$m\,(b-a)\, f(x) - m\, I + \phi(I) \leq \phi((b-a)\, f(x)).$$

Integrando tenemos que

$$\int_a^b (m\,(b-a)\, f(x) - m\, I + \phi(I))\; dx \leq \int_a^b \phi((b-a)\, f(x))\; dx.$$

Separando en tres integrales la parte izquierda, resolviéndolas y recordando que $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\; dx$ queda

$$m(b-a)\int_a^b f(x)\; dx - m\,(b-a)\int_a^b f(x)\; dx + (b-a)\phi\left(\int_a^b f(x)\; dx\right) \leq \int_a^b \phi((b-a)f(x))\; dx.$$

Cancelando términos semejantes y dividiendo entre $(b-a)$ se tiene el resultado deseado. □

Si la función es cóncava la desigualdad se invierte y la demostración es análoga.

Veamos ahora la desigualdad de Jensen cuando tenemos una variable aleatoria $X$.

**Teorema 1.3.9.** *Consideremos una función convexa $\phi$ y una variable aleatoria $X$ con esperanza finita, entonces*

$$\phi(E(X)) \leq E(\phi(X)). \tag{1.118}$$

*Demostración.* Vamos a suponer que $\phi$ es derivable, aunque esta hipótesis no es necesaria, el caso general es algo más complicado (véase [7]).
Por el Teorema 1.3.5, para todos los números $x$ y $y$ del dominio de $\phi$ se tiene que

$$\phi(y) + (x-y)\phi'(y) \leq \phi(x).$$

Suponiendo que $x = X$ y $y = E(X)$ se encuentran el el dominio de $\phi$ tenemos que

$$\phi(E(X)) + (X - E(X))\phi'(E(X)) \leq \phi(X).$$

Aplicando esperanza y linealidad de la esperanza tenemos que

$$E(\phi(E(X))) + (E(X) - E(X))\phi'(E(X)) \leq E(\phi(X)).$$

Por lo tanto,

$$\phi(E(X)) \leq E(\phi(X)).$$

□

Como aplicación del Teorema 1.3.9, probaremos la desigualdad media geométrica-media aritmética generalizada para $n$ números no negativos como sigue:

**Teorema 1.3.10.** *Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números reales no negativos, entonces*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{1.119}$$

*El lado izquierdo de esta desigualdad se conoce como* media geométrica de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *y el lado derecho se conoce como* media aritmética o promedio de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

*Demostración.* Sea $X$ una variable aleatoria discreta tal que $X$ tiene *distribución uniforme discreta* en el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Es decir, la función de probabilidad de $X$ (véase [25], pág. 95) es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = x_0, x_1, \ldots, x_n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definamos, para $x > 0$, la función $\phi(x) = -\ln(x)$. Tenemos que $\phi''(x) > 0$, entonces $\phi$ es convexa para todo $x > 0$. Por la Desigualdad de Jensen (1.3.7) tenemos que

$$\phi(E(X)) \leq E(\phi(X)).$$

Entonces, por definición de la función $\phi$ tenemos que

$$-\ln(E(X)) \leq E(-\ln(X)).$$

Y por linealidad del operador esperanza tenemos que

$$E(\ln(X)) \leq \ln(E(X)).$$

Por propiedades de la variable aleatoria uniforme discreta se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\, f_X(x_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i)\right).$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right).$$

Las propiedades de logaritmos implican que

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\sqrt[n]{x_i}\right) \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

y

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{x_i}\right) \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Por lo tanto,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

□

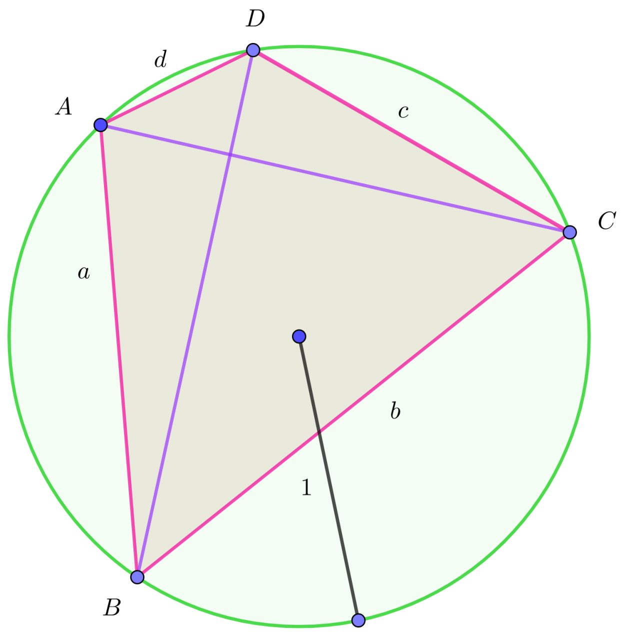


Figura 1.8: Esquema de la interpretación del Teorema 1.3.11.

Veamos ahora una interesante aplicación de la desigualdad media geométrica-media aritmética del Teorema 1.3.10

**Teorema 1.3.11.** *Si un cuadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito en la circunferencia unitaria y es tal que $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \geq 4$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado.*

*Demostración.* Consideremos la Figura 1.8. Denotemos $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ y $DA = d$. Observemos que como la circunferencia es unitaria, ninguna de las diagonales del cuadrilátero es mayor que 2, luego, $AC \leq 2$ y $BD \leq 2$. Por el Teorema de Ptolomeo tenemos que

$$ac + bd = AC \cdot BD \leq 4. \tag{1.120}$$

Por hipótesis y la desigualdad Media Geométrica y Media Aritmética (1.119) tenemos que

$$2 \leq \sqrt{abcd} \leq \frac{ac + bd}{2}.$$

Equivalentemente,

$$4 \leq ac + bd. \tag{1.121}$$

De (1.120) y (1.121) se sigue que

$$ac + bd = 4. \tag{1.122}$$

Con lo que tenemos que $AC \cdot BD = 4$ y $AC = 2$ y $BD = 2$ y por lo tanto, las diagonales del cuadriátero son diámetros de la circunferencia y entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo. Ahora, utilizando la hipótesis $abcd \geq 4$ y (1.122), tenemos que

$$0 \leq (ac - bd)^2 = (ac + bd)^2 - 4abcd \leq 16 - 16 = 0.$$

Entonces,

$$(ac - bd)^2 = 0.$$

Por lo tanto, $ac = bd$. Pero $ac + bd = 4$, entonces $4 - bd = bd$ con lo que $ac = bd = 2$, y si el cuadrilátero es un rectángulo entonces $a = c = b = d$. Luego, el cuadrilátero es un cuadrado. $\square$

Veamos ahora otro resultado que involucra funciones convexas e integrales.

**Teorema 1.3.12.** *Sea $\phi$ convexa y derivable. Sean $g(t)$ y $p(t)$ continuas y $p(x) > 0$ para todo $x$, entonces*

$$\phi\left(\frac{\displaystyle\int_a^b g(t)\,p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^b p(t)\ dt}\right) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b \phi(g(t))\,p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^n p(t)\ dt}. \tag{1.123}$$

*Demostración.* Definamos las siguientes funciones:

$$\alpha(x) := \frac{\displaystyle\int_a^x g(t)\,p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt}. \tag{1.124}$$

y

$$h(x) := \phi(\alpha(x)) - \frac{\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))\,p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt}. \tag{1.125}$$

Por continuidad de las funciones podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo. Derivando $\alpha(x)$ tenemos que

$$\alpha'(x) = \frac{g(x)\,p(x)\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt - p(x)\displaystyle\int_a^x g(t)\,p(t)\ dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt\right)^2},$$

o bien,

$$\alpha'(x) = \frac{g(x)\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt} - \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x g(t)\,p(t)\ dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt\right)^2}. \tag{1.126}$$

Derivando $h(x)$ tenemos que

$$h'(x) = \phi'(\alpha(x))\alpha'(x) - \frac{\phi(g(x))p(x)\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt - p(x)\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))\,p(t)\ dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt\right)^2}.$$

Entonces,

$$h'(x) = \phi'(\alpha(x))\,\alpha'(x) - \frac{\phi(g(x))p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt} + \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))p(t)\,dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)dt\right)^2}$$

que, sustituyendo (1.126) tenemos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g(x)\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt}\phi'(\alpha(x)) - \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x g(t)p(t)dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt\right)^2}\phi'(\alpha(x)) \\ &\quad - \frac{\phi(g(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt} + \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))p(t)\ dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt\right)^2}. \end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned} \frac{\phi(g(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt} &= -h'(x) + \frac{g(x)\ p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)dt}\phi'(\alpha(x)) \\ &\quad - \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x g(t)\,p(t)\ dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)dt\right)^2}\phi'(\alpha(x)) + \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))\,p(t)\ dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt\right)^2}. \end{aligned} \tag{1.127}$$

Ahora, por el Teorema 1.3.5, sabemos que si $\phi$ es convexa entonces, $\phi(x) \geq \phi(y)+(x-y)\phi'(y)$ para todos los números reales $x$ y $y$. En particular si hacemos $x = g(x)$ y $y = \alpha(x)$ tenemos que

$$\phi(g(x)) \geq \phi'(\alpha(x))(g(x) - \alpha(x)) + \phi(\alpha(x)).$$

Multiplicando por $\dfrac{p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)dt}$ tenemos que

$$\frac{\phi(g(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt} \geq \frac{\phi(\alpha(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt} + \frac{\phi'(\alpha(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\ dt}(g(x) - \alpha(x));$$

o bien,

$$\frac{\phi(g(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)dt} \geq \frac{\phi(\alpha(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)dt} + \frac{\phi'(\alpha(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt} g(x) - \frac{\phi'(\alpha(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}\alpha(x). \tag{1.128}$$

Combinando (1.127) y (1.128) se tiene que

$$\begin{aligned} -h'(x) + \frac{g(x)\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}\phi'(\alpha(x)) - \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x g(t)\,p(t)\;dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt\right)^2}\phi'(\alpha(x)) \\ + \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))\,p(t)\;dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt\right)^2} \geq \frac{\phi(\alpha(x))p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt} + \frac{\phi'(\alpha(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}g(x) \\ - \frac{\phi'(\alpha(x))\,p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}\alpha(x). \end{aligned}$$

Cancelando términos semejantes y recordando la definición de la función $\alpha$ tenemos que

$$-h'(x) + \frac{p(x)\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))\,p(t)\;dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt\right)^2} \geq \frac{\phi(\alpha(x))p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{p(x)\int_a^x \phi(g(t))\,p(t)\;dt}{\left(\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt\right)^2} - \frac{\phi(\alpha(x))p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(x)\;dt} \geq h'(x).$$

Lo que implica que

$$-\frac{p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}\left(\phi(\alpha(x)) - \frac{\displaystyle\int_a^x \phi(g(t))\,p(t)\;dt}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}\right) \geq h'(x).$$

Por la definición de $h$ tenemos que

$$-\frac{p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}\,h(x) \geq h'(x).$$

Entonces,

$$0 \geq h'(x) + \frac{p(x)}{\displaystyle\int_a^x p(t)\;dt}\,h(x).$$

Lo que implica que

$$0 \geq h'(x) \int_a^x p(t)\ dt + p(x)\, h(x).$$

Por lo tanto,

$$\left( h(x) \int_a^x p(t)\ dt \right)' \leq 0.$$

Integrando y aplicando el Teorema fundamental del Cálculo tenemos que,

$$\int_a^b \left( h(x) \int_a^x p(t)dt \right)' dx \leq 0$$

O bien,

$$h(b) \int_a^b p(t)dt - h(a) \int_a^a p(t)dt \leq 0.$$

Como $\displaystyle\int_a^b p(t)\ dt > 0$, se sigue que $h(b) \leq 0$. Luego, evaluando $h(x)$ y $\alpha(x)$ en $b$ tenemos que

$$\phi(\alpha(b)) - \frac{\displaystyle\int_a^b \phi(g(t))\, p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^b p(t)\ dt} \leq 0.$$

Y por lo tanto,

$$\phi\left( \frac{\displaystyle\int_a^b g(t)\, p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^b p(t)\ dt} \right) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b \phi(g(t))\, p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^n p(t)\ dt}.$$

□

Veamos ahora el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.13.** *Consideremos una función cóncava $f$ definida para $x \geq 0$ y tal que $f(0) = 0$. Entones para cualesquiera números positivos $a$ y $b$ se tiene que*

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b). \tag{1.129}$$

*Si $f$ cumple esta propiedad diremos que $f$ es una función subaditiva. Para el caso en que $f$ es convexa, la desigualdad se invierte y diremos que $f$ es una función superaditiva.*

*Demostración.* Por concavidad de $f$ tenemos que, para todos $x, y \geq 0$ y todo $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y). \tag{1.130}$$

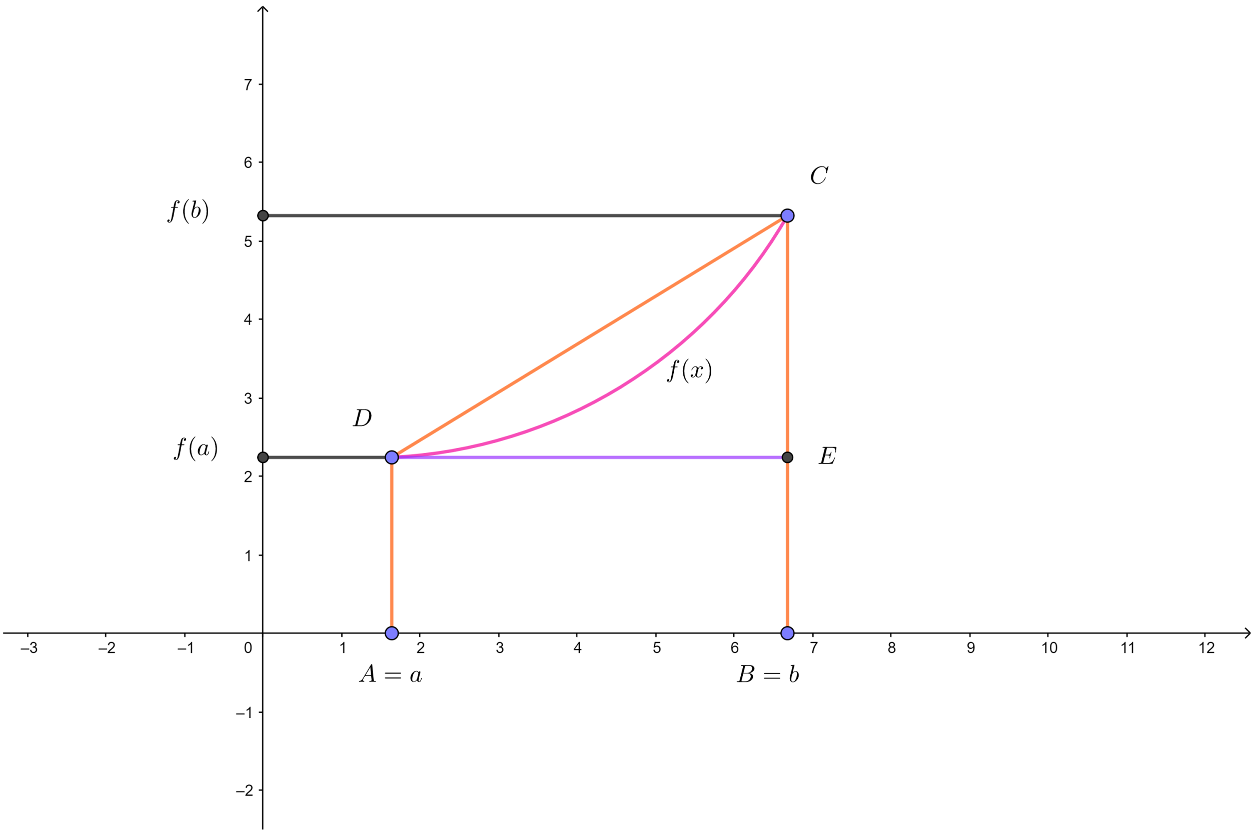


Figura 1.9: Esquema de la demostración del Teorema 1.3.14.

Haciendo $y = 0$ y usando que $f(0) = 0$ tenemos que para todo $x \geq 0$ y todo $\lambda \in [0, 1]$ que $\lambda f(x) \leq f(\lambda x)$. Si $a, b \geq 0$ es claro que $0 \leq \dfrac{a}{a+b} \leq 1$ y $0 \leq \dfrac{b}{a+b} \leq 1$. Usando la desigualdad (1.130) tenemos que

$$\begin{aligned} f(a+b) &= \frac{a+b}{a+b} f(a+b) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) f(a+b) = \frac{a}{a+b} f(a+b) + \frac{b}{a+b} f(a+b) \\ &\leq f\left(\frac{a}{a+b}(a+b)\right) + f\left(\frac{b}{a+b}(a+b)\right) = f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

**Teorema 1.3.14.** *Si $f$ es una función creciente y convexa en $[a, b]$ entonces*

$$(b-a) f(a) < \int_a^b f(x)\, dx < (b-a)\, \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{1.131}$$

*Demostración.* Con consideraciones geométricas la demostración es muy sencilla. Veamos la Figura 1.9. Es claro que el área del rectángulo $ABED$ es menor que el área bajo la curva de $f$ y, a su vez, esta es menor que el área del trapecio $ABCD$. Pero $(ABED) = (b-a)\, f(a)$ y $(ABCD) = (b-a)\, \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$. Por lo tanto,

$$(b-a) f(a) < \int_a^b f(x)\, dx < (b-a)\, \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

□

El Teorema 1.129 se utiliza, por ejemplo, para estimar integrales complicadas y que no pueden expresarse por cuadraturas como $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx$. Si consideramos $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, tenemos para $0 \leq x \leq 1$ que $f''(x) = \frac{3x^2}{4}\left(\frac{6}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\right) \geq 0$, con lo que se tiene que $f$ es una función convexa. Aplicando el Teorema 1.129 tenemos que

$$1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \sim 1{,}2$$

que es una muy buena aproximación.

## 1.4. Desigualdades de Minkowski.

En esta sección demostraremos las desigualdades de Minkowski, versiones numérica, integral y con esperanzas. Estas desigualdades pudimos haberlas probado en la segunda sección pero lo pospusimos hasta esta sección para aprovechar la convexidad y evitar dar las demostraciones clásicas. Comenzaremos con el siguiente resultado.

**Teorema 1.4.1.** *Sean* $1 < p < \infty$ *y dos conjuntos de números reales positivos* $x_1, x_2, ..., x_n$ *y* $y_1, y_2, ..., y_n$ *, entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.132}$$

*La desigualdad anterior se conoce como* desigualdad numérica de Minkowski*.*

*Demostración.* La función $f(x) := x^p$, $p > 1$ es convexa en $(0, \infty)$ ya que

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0.$$

Definamos lo siguiente:

$$x = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.133}$$

y

$$y = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.134}$$

Por las igualdades (1.133) y (1.134) tenemos claramente que $0 < \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} < 1$ y además $1 - \frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y}$.

Por convexidad tenemos que

$$f\left(\frac{x_i}{x}\cdot\frac{x}{x+y} + \left(1-\frac{x}{x+y}\right)\frac{y_i}{y}\right) \leq \frac{x}{x+y} f\left(\frac{x_i}{x}\right) + \frac{y}{x+y} f\left(\frac{y_i}{y}\right).$$

Entonces,

$$\left(\frac{x_i + y_i}{x+y}\right)^p \leq \frac{x}{x+y}\left(\frac{x_i}{x}\right)^p + \frac{y}{x+y}\left(\frac{y_i}{y}\right)^p. \tag{1.135}$$

Sustituyendo los valores de $x$ y $y$ en el lado derecho de (1.135) y aplicando sumas tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i + y_i}{x+y}\right)^p \leq \frac{x}{x+y}\frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \frac{y}{x+y}\frac{y_i^p}{\sum_{i=1}^{n} y_i^p}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{(x+y)^p}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \frac{x}{x+y}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \frac{y}{x+y}\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^p}{\sum_{i=1}^{n} y_i^p} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p. \tag{1.136}$$

De aquí ya es clara la conclusión. □

**Teorema 1.4.2.** *Sean $f$ y $g$ funciones integrables en el intervalo $[a, b]$. Entonces, para $p > 1$ tenemos que*

$$\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.137}$$

*Esta desigualdad de conoce como* desigualdad de Minkowski versión integral.

*Demostración.* Así como en el Teorema 1.4.1, la función $h(x) = x^p$ es convexa para $p > 1$ y $x \geq 0$. Definamos lo siguiente:

$$A = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.138}$$

y

$$B = \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.139}$$

Por las igualdades (1.138) y (1.139) se sigue que $0 < \dfrac{A}{A+B} < 1$, $0 < \dfrac{B}{A+B} < 1$ y $\dfrac{B}{A+B} = \left(1 - \dfrac{A}{A+B}\right)$. Por convexidad, para todo $x$, tenemos que

$$h\left(\frac{A}{A+B}\cdot\frac{|f(x)|}{A} + \left(1 - \frac{A}{A+B}\right)\frac{|g(x)|}{B}\right) \leq \frac{A}{A+B}h\left(\frac{|f(x)|}{A}\right) + \frac{B}{A+B}h\left(\frac{|g(x)|}{B}\right).$$

Entonces,

$$\left(\frac{|f(x)|+|g(x)|}{A+B}\right)^p \leq \frac{A}{A+B}\frac{|f(x)|^p}{A^p}+\frac{B}{A+B}\frac{|g(x)|^p}{B^p}.$$

Lo que implica que

$$\frac{1}{(A+B)^p}\cdot(|f(x)|+|g(x)|)^p \leq \frac{A}{A+B}\cdot\frac{|f(x)|^p}{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx}+\frac{B}{A+B}\cdot\frac{|g(x)|^p}{\displaystyle\int_a^b |g(x)|^p dx}.$$

Integrando tenemos que

$$\frac{1}{(A+B)^p}\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx \leq \frac{A}{A+B}\cdot\frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx}{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx}+\frac{B}{A+B}\cdot\frac{\displaystyle\int_a^b |g(x)|^p dx}{\displaystyle\int_a^b |g(x)|^p dx}=\frac{A+B}{A+B}=1.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx \leq \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p.$$

De aquí ya es fácil concluir. □

Ahora veamos la desigualdad de Minkowski para esperanzas de variables aleatorias.

**Teorema 1.4.3.** *Sean $X$ y $Y$ dos variables aleatorias tales que $E|X|^p$ y $E|Y|^p$ existen para todo $p>1$. Entonces*

$$E^{\frac{1}{p}}|X+Y|^p \leq E^{\frac{1}{p}}|X|^p+E^{\frac{1}{p}}|Y|^p. \tag{1.140}$$

*La desigualdad anterior se conoce como Desigualdad de Minkowski para esperanzas.*

*Demostración.* Así como en los Teoremas 1.4.1 y 1.4.2, $f(x)=x^p$ es una función convexa para todo $x\geq 0$ y para todo $p>1$.
Definamos lo siguiente:

$$a=E^{\frac{1}{p}}|X|^p \tag{1.141}$$

y

$$b=E^{\frac{1}{p}}|Y|^p. \tag{1.142}$$

Por las igualdades (1.141) y (1.142) es claro que $0<\dfrac{a}{a+b}<1$, $0<\dfrac{b}{a+b}<1$ y $\dfrac{b}{a+b}=1-\dfrac{a}{a+b}$. Procediendo como en los Teoremas 1.4.1 y 1.4.2, aplicando la convexidad de $f$ obtenemos la expresión

$$\frac{1}{(a+b)^p}\cdot(|X|+|Y|)^p \leq \frac{a}{a+b}\cdot\frac{|X|^p}{E|X|^p}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{|Y|^p}{E|Y|^p}.$$

Aplicando la monotonía y linealidad de la esperanza tenemos que

$$\frac{1}{(a+b)^p}\cdot E(|X|+|Y|)^p \leq \frac{a}{a+b}\frac{E|X|^p}{E|X|^p}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{E|Y|^p}{E|Y|^P}=\frac{a+b}{a+b}=1.$$

Por lo tanto,

$$E(|X|+|Y|)^p \leq \left[E^{\frac{1}{p}}|X|^p+E^{\frac{1}{p}}|Y|^p\right]^p.$$

De aquí ya es claro concluir. □

La ventaja de estas demostraciones de los Teoremas 1.4.1, 1.4.2 y 1.4.3 de las versiones de la desigualdad de Minkowski es que se usa sólo la convexidad sin pasar por la desigualdad de Hölder que se utiliza en las demostraciones clásicas (véase [14] o [25]).

## 1.5. Funciones log-convexas.

En esta sección estudiaremos un caso particular pero muy importante de funciones convexas que nos serán útiles en los capítulos siguientes. Comenzaremos con la siguiente.

**Definición 1.5.1.** *Una función $f: I \to (0,\infty)$ se llama* logaritmo-convexa *(abreviaremos* log-convexa*) si para todos $x, y \in I$ y para todo $\lambda \in [0,1]$ tenemos la desigualdad*

$$f(\lambda y+(1-\lambda)\,x) \leq f^{\lambda}(y)\ f^{1-\lambda}(x). \tag{1.143}$$

De la Definición 1.5.1 , tenemos que si $f$ es log-convexa entonces $\ln f$ es convexa ya que

$$\ln(f(\lambda y+(1-\lambda)\,x)) \leq \ln(f^{\lambda}(y)\ f^{1-\lambda}(x)) = \lambda \ln f(y)+(1-\lambda)\ \ln f(x)$$

y esto implica que $\ln f$ es convexa. Recíprocamente, si $\ln f$ es convexa, entonces $f$ es log-convexa.
Se puede dar una definición análoga para una función log-cóncava en la que la Desigualdad (1.143) queda invertida. Ahora tenemos el siguiente resultado.

**Lema 10.** *Si una función $f: I \to (0,\infty)$ es log-convexa, entonces $f$ es convexa.*

*Demostración.* Tenemos, aplicando el Corolario 8, que

$$f(\lambda y+(1-\lambda)\,x) \leq f^{\lambda}(y)\ f^{1-\lambda}(x) \leq \lambda f(y)+(1-\lambda)\,f(x).$$

Lo que prueba el resultado. □

El recíproco del Lema 10 en general no es cierto, por ejemplo, si $f(x)=e^x-1$. Entonces $f''(x)>0$ y, por lo tanto, $f$ es convexa. Sin embargo, si $g(x)=\ln(e^x-1)$, entonces $g''(x)<0$ y, por lo tanto, $g$ es cóncava y entonces $f$ es log-cóncava.
Veamos ahora una bella aplicación geométrica de las funciones log-convexas.

**Teorema 1.5.1.** *Si, $A, B$ y $C$ son los ángulos interiores de un triángulo, medidos en radianes, entonces*

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C < \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3. \tag{1.144}$$

*La igualdad se da, si y solo si, el triángulo es equilátero.*

*Demostración.* Definamos sobre el intervalo $(0,\pi)$ la función $f(x) := \ln\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$. Entonces, $f''(x) = \dfrac{x^2 - \operatorname{sen}^2(x)}{x^2 \operatorname{sen}^2(x)} > 0$ para todo $x \in (0,\pi)$. Luego, $f$ es convexa en $(0,\pi)$ y por lo tanto, la función $g(x) := \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ es una función log-convexa en $(0,\pi)$. Utilizando que $A+B+C=\pi$ y por convexidad de $f$ tenemos que

$$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) < \frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}.$$

Entonces,

$$\ln\left(\frac{\frac{A+B+C}{3}}{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B+C}{3}\right)}\right) < \frac{1}{3}\left(\ln\frac{A}{\operatorname{sen} A} + \ln\frac{B}{\operatorname{sen} B} + \ln\frac{C}{\operatorname{sen} C}\right).$$

Lo que implica que

$$\ln\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} < \ln\sqrt[3]{\frac{ABC}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}.$$

Por lo tanto, aplicando exponenciales y haciendo operaciones tenemos que

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C < \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC. \tag{1.145}$$

Ahora, por la desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética (1.119) tenemos que

$$\sqrt[3]{ABC} < \frac{A+B+C}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Entonces,

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^3 ABC < 1. \tag{1.146}$$

Multiplicando (1.146) por $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ tenemos que

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3. \tag{1.147}$$

Combinando 1.145 y 1.147 tenemos que

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C < \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3. \tag{1.148}$$

Ahora, si el triángulo es equilátero tenemos que $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ y

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC. \tag{1.149}$$

□

Veamos algunas otras características de las funciones log-convexas.

**Proposición 11.** *Sea $I$ un intervalo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para toda función $f : I \to (0, \infty)$.*

*(i) $f$ es log-convexa.*

*(ii) la función $g(x) = e^{ax} f(x)$ es convexa en $I$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

*(iii) la función $h(x) = f^a(x)$ es convexa en $I$ para todo $a > 0$.*

*Demostración.* $(i) \implies (ii)$. Sean $x, y \in I$ y sea $\lambda \in [0, 1]$, entonces, por convexidad de la función exponencial y la log-convexidad de $f$ tenemos que

$$g(\lambda y + (1 - \lambda)x) = e^{a(\lambda x+(1-\lambda)y)} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq e^{a\lambda x} e^{a\lambda y} f^{\lambda}(x) f^{1-\lambda}(y).$$

Entonces,

$$g(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq (e^{ax} f(x))^{\lambda} (e^{ay} f(y))^{1-\lambda} \leq \lambda e^{ax} f(x) + (1 - \lambda)e^{ay} f(y).$$

Por lo tanto,

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

y esto implica la convexidad de $g$.

$(ii) \implies (i)$. De la convexidad de $g$, para todos $s, r \in I$ tales que $s + r \in I$ y $s - r \in I$ tenemos que

$$2e^{as} f(s) \leq e^{a(s+r)} f(s + r) + e^{a(s-r)} f(s - r)$$

y entonces,

$$0 \leq e^{as+ar} f(s + r) - 2e^{as} f(x) + e^{as-ar} f(s - r).$$

Lo que implica que

$$0 \leq e^{as-ar} \left( \frac{e^{as+ar}}{e^{as-ar}} f(s + r) - \frac{2e^{as}}{e^{as-ar}} f(s) + f(s - r) \right)$$

y por lo tanto,

$$0 \leq (e^{ar})^2 f(s + r) - 2e^{ar} f(s) + f(s - r). \tag{1.150}$$

La expresión (1.150) indica que tenemos una función cuadrática no negativa en $e^{ar}$, luego, su discriminante es menor o igual a cero. Por lo tanto,

$$4f^2(s) - 4f(s + r)f(s - r).$$

Cancelando términos semejantes y aplicando logaritmos tenemos que

$$\ln f^2(s) \leq \ln(f(s + r)f(s - r)) = \ln f(s + r) + \ln f(s - r).$$

Por lo tanto,

$$\ln f(s) \leq \frac{\ln f(s + r) + \ln f(s - r)}{2}$$

lo que prueba la log-convexidad de $f$.

$(i) \Longrightarrow (iii)$. Si $\ln f$ es convexa y si $a > 0$, entonces claramente $a \ln f$ es convexa y $\ln f^a$ es convexa, con lo que $f^a$ es log-convexa y, por lo tanto, $f^a$ es convexa.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Si $f^a(x)$ es convexa para todo $a > 0$, entonces claramente lo es la función $\dfrac{f^a(x)-1}{a}$ para todo $a > 0$. Sea $u = f^a(x) - 1$, entonces $u \longrightarrow 0^+$, si y solo si, $a \longrightarrow 0^+$.

Además,

$$a = \frac{\ln(u+1)}{\ln f(x)}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{a \longrightarrow 0^+} \frac{f^a(x)-1}{a} = \lim_{u \longrightarrow 0^+} \frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln f(x)}} = \ln f(x) \lim_{u \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \ln f(x) \frac{1}{\ln e} = \ln f(x).$$

El límite de una sucesión de funciones convexas es una función convexa (no probaremos esto pero puede consultarse en [22]). Por lo tanto, $f$ es log-convexa. $\square$

Ahora probaremos que la suma de funciones log-convexas es también log-convexa pero antes de eso necesitamos probar el siguiente lema:

**Lema 12.** *Para números positivos $x, y, z, w$, y $\lambda \in [0,1]$ tenemos que*

$$x^\lambda y^{1-\lambda} + z^\lambda w^{1-\lambda} \leq (x+z)^\lambda (y+w)^{1-\lambda}.$$

*Demostración.* Como $\lambda + (1-\lambda) = 1$, aplicando el Corolario 8 tenemos que

$$\left(\frac{x}{x+z}\right)^\lambda \left(\frac{y}{y+w}\right)^{1-\lambda} \leq \lambda \left(\frac{x}{x+z}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{y}{y+w}\right). \tag{1.151}$$

Análogamente,

$$\left(\frac{z}{x+z}\right)^\lambda \left(\frac{w}{y+w}\right)^{1-\lambda} \leq \lambda \left(\frac{z}{x+z}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{w}{y+w}\right). \tag{1.152}$$

Sumando las desigualdades (1.151) y (1.152) tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x+z}\right)^\lambda \left(\frac{y}{y+w}\right)^{1-\lambda} + \left(\frac{z}{x+z}\right)^\lambda \left(\frac{w}{y+w}\right)^{1-\lambda} &\leq \lambda \left(\frac{x}{x+z}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{y}{y+w}\right) \\ +\lambda \left(\frac{z}{x+z}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{w}{y+w}\right) &= \lambda\left(\frac{x}{x+z} + \frac{z}{x+z}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{y}{y+w} + \frac{w}{y+w}\right) \\ &= \lambda + (1-\lambda) = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{x^\lambda y^{1-\lambda} + z^\lambda w^{1-\lambda}}{(x+z)^\lambda (y+w)^{1-\lambda}} \leq 1.$$

$\square$

**Teorema 1.5.2.** *La suma de dos funciones log-convexas es también una función convexa.*

*Demostración.* Sean $f$ y $g$ dos funciones log-convexas, sea $h := f + g$ y sea $\lambda \in [0, 1]$. Entonces,

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f^{\lambda}(x)f^{1-\lambda}(y) + g^{\lambda}(x)g^{1-\lambda}(y).$$

y por el lema tenemos que

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (f(x) + g(x))^{\lambda} + (f(y) + g(y))^{1-\lambda} = h^{\lambda}(x)h^{1-\lambda}(y).$$

Por lo tanto,

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq h^{\lambda}(x)h^{1-\lambda}(y). \tag{1.153}$$

y $h = f + g$ es una función log-convexa. $\square$

# Capítulo 2

# Funciones Gamma y Beta y bellas aplicaciones.

En este capítulo definiremos las funciones *Gamma* y *Beta* y probaremos algunas de sus propiedades más interesantes con un tratamiento novedoso.

Supondremos conocidas algunos hechos elementales del operador Transformada de Laplace que se define y se deducen sus propiedades en un curso de Ecuaciones Diferenciales o Análisis Complejo. No nos ocuparemos en probar las propiedades de este operador ni nos ocuparemos en justificar su existencia mediante las funciones continuas a trozos. Asimismo, en este capítulo trataremos alguna aplicación que vaya surgiendo a la Teoría de la probabilidad.

## 2.1. Propiedades de la función Gamma.

Una de las funciones más importantes del Análisis es la Función Gamma. Es una función que extiende el concepto de número factorial al campo de los números reales y al campo de los números complejos y que definimos a continuación.

**Definición 2.1.1.** *La* función Gamma $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *se define por la expresión*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \tag{2.1}$$

Observemos que la integral en la Definición 2.1.1 converge para cada $s > 0$ porque cerca de $t = 0$ la función $t^{s-1}$ es integrable y para $t$ grande la convergencia está garantizada por el decrecimiento exponencial del integrando. Estas observaciones nos permiten ampliar el dominio de definición de la función Gamma como sigue:

**Teorema 2.1.1.** *La integral impropia* $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ *es convergente para* $z \in \mathbb{C}$ *con* $Re(z) > 0$.

*Demostración.* Como $|t^{z-1}| = t^{Re(z)-1}$ para $t > 0$, es suficiente probar el resultado para el caso real.

Para $x \in (0,\infty)$ escribimos

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{2.2}$$

Para $0 \leq t \leq 1$ es claro que $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$. Entonces,

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \leq \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}. \tag{2.3}$$

Ahora, sea $n$ un número natural. Vamos a determinar el límite $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}}$.

Por la regla de L' Hôpital tenemos que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{(n-1)t^{n-2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}}.$$

Puesto que $t^{n-1}$ es un polinomio de grado $n-1$ sabemos que $\frac{d^n(t^{n-1})}{dt^n} = 0$. Aplicando recursivamente la regla de L' Hôpital tenemos que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$$

Por definición de límite tenemos que dado $\epsilon = 1$, existe $N$ tal que para todo $t \geq N$

$$\left|\frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}}\right| < 1.$$

Entonces, para $t \geq N$ tenemos $0 \leq t^{n-1} \leq e^{\frac{t}{2}}$. Esto implica que para $t \geq N$ tenemos

$$0 \leq t^{n-1}e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}. \tag{2.4}$$

Ahora, para $1 \leq t$ consideremos cualquier número $x \geq 0$ y sea $\lfloor x \rfloor$ el entero más grande tal que $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$. De aquí tenemos que $x - 1 < \lfloor x \rfloor$.

Aplicando la desigualdad (2.4) tenemos que

$$t^{x-1}e^{-t} < t^{\lfloor x \rfloor}e^{-t} = t^{(\lfloor x \rfloor + 1)-1}e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}.$$

Por lo tanto, para $1 \leq t$ tenemos que

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t} < \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Combinando las desigualdades (2.3) y (2.5) con la expresión (2.2), tenemos que $\Gamma(x)$ es convergente.

□

Antes de probar un resultado relativo a la función gamma necesitamos primero el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.2.** *Consideremos un conjunto abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $F(z,y)$ una función continua para todo $(s,y) \in \Omega \times [c,d]$ tal que para todo $y \in [c,d]$, la función $z \longmapsto F(z,y)$ es analítica en $\Omega$. Entonces la función*

$$G(z) = \int_c^d F(z,y)dy \tag{2.6}$$

*es analítica en $\Omega$.*

*Demostración.* Como la analiticidad es una propiedad local y $\Omega$ es abierto podemos suponer que $\Omega$ es un conjunto convexo.

Para cada $y \in [c,d]$ y cada triángulo $\Delta$ en $\Omega$ el Teorema de Morera (ver [5, pág.88]) implica que si $\partial\Delta$ es la frontera del triángulo $\Delta$ entonces

$$\int_{\partial\Delta} F(z,y)dz = 0.$$

Entonces,

$$\int_c^b \int_{\partial\Delta} F(z,y)dzdy = 0.$$

Equivalente, por cambio en el orden de integración tenemos que

$$\int_{\partial\Delta} \int_c^d F(z,y)dydz = 0.$$

Aplicando de nuevo el Teorema de Morera tenemos que la función $G(z)$ es analítica en $\Omega$. □

**Teorema 2.1.3.** *La función*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

*es una función analítica en $Re(z) > 0$.*

*Demostración.* Para $m > 0$, $N > 0$ y $m \leq M$ consideremos los conjuntos

$$A_{m,N} = \{(x,y) : m \leq x \leq M, -N \leq y \leq N\}.$$

Es claro que los conjuntos $A_{m,N}$ son compactos en $\mathbb{C}$.

Para $n \in \mathbb{N}$, definamos las funciones

$$\Gamma_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1}e^{-t}dt, n = 1, 2, ..., \tag{2.7}$$

Por el Teorema 2.1.2 tenemos que las funciones $\Gamma_n$ son analíticas en $Re(z) > 1$. Además, para $z \in A$ tenemos que

$$\left| \int_n^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \right| \leq \int_n^\infty e^{(M-1)\ln(t)-t}dt = \int_n^\infty e^{\left(\frac{(M-1)\ln(t)}{t}-1\right)t}dt.$$

Para un $M$ dado existe $n_0$ tal que si $y \geq 0$,

$$0 < \frac{(M-1)\ln(t)}{t} < \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, para $n \geq n_0$ tenemos que

$$\left| \int_n^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

De la misma manera, cuando $z = x + iy \in A_{m,N}$, tenemos que

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} t^{z-1}e^{-t}dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} e^{x-1}\ln(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} t^{x-1}dt = \frac{1}{xn^x} \leq \frac{1}{mn^m}.$$

De lo anterior se sigue que, para $n \geq n_0$

$$|\Gamma(z) - \Gamma_n(z)| \leq \int_n^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt + \frac{1}{mn^m}$$

uniformemente en $A_{m,N}$ y de hecho uniformemente en la banda $m \leq x \leq M$. Así, $\Gamma(z)$ es analítica como el límite uniforme en conjuntos compactos de funciones analíticas, es decir, es analítica en $Re(z) > 0$. □

**Teorema 2.1.4.** *La función gamma cumple las siguientes propiedades:*

*(i) Para todo $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

*(ii)* $\Gamma(1) = 1$.

*(iii)* $\Gamma$ *es log-convexa.*

*Demostración.*

(i) Tenemos que $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^\infty t^x e^{-t}dt$. Integrando por partes,

$$\Gamma(x+1) = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

(ii) Es claro de la definición de $\Gamma$.

(iii) Para probar esto usaremos la desigualdad de Hölder para integrales.

Sean $x, y > 0$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \int_0^\infty t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}e^{-t}dt \\
&= \int_0^\infty t^{\lambda x+(1-\lambda)y-\lambda-(1-\lambda)}e^{-\lambda t-t+\lambda t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-t}e^{\lambda t}t^{\lambda x}t^{(1-\lambda)y}t^{-\lambda}t^{-(1-\lambda)}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{\lambda x}t^{-\lambda}t^{(1-\lambda)y}t^{-(1-\lambda)}e^{-t}e^{\lambda t}dt \\
&= \int_0^\infty (t^{x-1}e^{-t})^{\lambda}(t^{y-1}e^{-t})^{1-\lambda}dt \\
&\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\lambda}\left(\int_0^\infty y^{y-1}e^{-t}dt\right)^{1-\lambda} = \Gamma^{\lambda}(x)\Gamma^{1-\lambda}(y).
\end{aligned}
$$

En resumen, tenemos que

$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \Gamma^{\lambda}(x)\Gamma^{1-\lambda}(y),$$

es decir, $\Gamma$ es log-convexa.

□

Del Teorema 2.1.4 los siguientes corolarios son inmediatos.

**Corolario 13.** *La función gamma $\Gamma$ es convexa.*

**Corolario 14.** $\Gamma(n+1) = n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado es de suma importancia ya que caracteriza la unicidad de la función gamma.

**Teorema 2.1.5** (H. Bohr-J. Mollerup)**.** *Supongamos que la función $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface las tres condiciones del Teorema 2.1.4, entonces $f = \Gamma$.*

*Demostración.* Tenemos, por hipótesis que

(i) Para todo $x > 0$, $f(x+1) = xf(x)$.

(ii) $f(1) = 1$.

(iii) $f$ es log-convexa.

Es claro, usando inducción sobre $n$ y de $(i)$ y $(ii)$ que $f(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean $x \in (0,1]$ y $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Por la log-convexidad de $f$ y por la propiedad $(i)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
f(n+1+x) &= f(n+1-nx-x+nx+2x) \\
&= f((1-x)(n+1)+x(n+2)) \\
&\leq f^{1-x}(n+1)f^{x}(n+2) = f^{1-x}(n+1)f^{x}((n+1)+1) \\
&= f^{1-x}(n+1)(n+1)^{x}f^{x}(n+1) \\
&= (n+1)^{x}f(n+1) = (n+1)^{x}n!.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$f(n+1+x) \leq (n+1)^x f(n+1) = (n+1)^x n!. \tag{2.8}$$

Ahora, observemos que

$$n+1 = nx + x^2 + n + 1 + x - nx - x - x^2 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$$

y como $f(n+1) = n!$ tenemos de nuevo por la log-convexidad de $f$ que

$$n! = f(n+1) = f(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \leq f^x(n+x)f^{(1-x)}(n+1+x).$$

Así,

$$n! \leq f^x(n+x)f^{(1-x)}(n+1+x). \tag{2.9}$$

Ahora por $(i)$ tenemos que

$$f(n+1+x) = (n+x)f(n+x),$$

lo que implica que

$$f^x(n+x) = \frac{f^x(n+1+x)}{(n+x)^x}.$$

Por la desigualdad (2.9) tenemos que

$$n! \leq \frac{f^x(n+1+x)}{(n+x)^x} f^{1-x}(n+1+x) = \frac{f(n+1+x)}{(n+x)^x}.$$

Entonces,

$$(n+x)^x n! \leq f(n+1+x). \tag{2.10}$$

Combinando las desigualdades (2.8) y (2.10) tenemos, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in (0, x]$ que

$$(n+x)^x n! \leq f(n+1+x) \leq (n+1)^x n!. \tag{2.11}$$

Aplicando recursivamente la propiedad $(i)$ tenemos que

$$f(n+1+x) = (n+x)(n-1+x)\cdots x\, f(x)$$

y por la desigualdad (2.11) tenemos que

$$\frac{(n+x)^x}{n^x} \leq \frac{(n+x)(n-1+x)\cdots x\, f(x)}{n^x n!} \leq \frac{(n+1)^x}{n^x}.$$

Lo que implica que

$$\frac{f(x)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^x} \geq \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)\cdots x} \geq \frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}. \tag{2.12}$$

Por la desigualdad 2.12 y las propiedades de los límites se tiene, para $0 < x \leq 1$ que

$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)\cdots x}. \tag{2.13}$$

Supongamos que $x > 0$, entonces podemos encontrar un número entero $k$ tal que $0 < x-k \leq 1$. Aplicando recursivamente la condición $(i)$ tenemos que

$$f(x) = (x-1)\cdots(x-k)f(x-k). \tag{2.14}$$

Usando (2.13) tenemos que

$$f(x-k) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^{x-k}}{(n+x-k)(n-1+x-k)\cdots(x-k)},$$

y por (2.14) se sigue que

$$f(x) = (x-1)\cdots(x-k) \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^{x-k}}{(n+x-k)(n-1+x-k)\cdots(x-k)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!x^{n}}{(n+x)(n-1+x)\cdots x} \cdot \frac{(n+x)(n+x-1)\cdots(n+x-(k-1))}{n^k} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!x^{n}}{(n+x)(n-1+x)\cdots x} \cdot \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x-1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x-k+1}{n}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x > 0$ tenemos que

$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^{x}}{(n+x)(n-1+x)\cdots x}.$$

Esto prueba que $f$ está únicamente determinado por las tres condiciones del teorema y como la función gamma satisface las tres condiciones se concluye que $f = \Gamma$. $\square$

**Corolario 15.** *Con las mismas hipótesis del Teorema 2.1.5 tenemos que*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^{x}}{(n+x)(n-1+x)\cdots x}. \tag{2.15}$$

**Teorema 2.1.6.** *Se cumple:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{2.16}$$

*Demostración.* No daremos la demostración clásica que depende de integrales dobles y cambios a coordenadas polares. Daremos aquí una más elegante que usa la Transformada de Laplace cuyas propiedades suponemos conocidas de un curso de ecuaciones diferenciales (véase [17]).

Definamos la función $H(t) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^2}dx$. Aplicando transformada de Laplace tenemos que

$$\mathscr{L}\{H(t)\} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{s}}.$$

Aplicando transformada inversa tenemos que

$$H(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} t^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Evaluando en $t = 1$ tenemos $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ahora, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$. Haciendo el cambio de variable $t = x^2$ tenemos que $dt = 2xdx$ y los límites de integración son los mismos. Por lo tanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

Como observación del Teorema 2.1.6 tenemos que el integrando es una función par, por lo tanto, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Hemos obtenido de una manera corta y elegante un resultado importante y útil en Análisis Matemático y Probabilidad.

Antes de seguir probando propiedades de la función gamma tenemos la siguiente manera de expresar la función seno en forma de producto infinito.

**Teorema 2.1.7** (Euler-Wallis)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que*

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right). \tag{2.17}$$

*Demostración.* Es bien conocido que $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ y que $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right)$. Entonces,

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right). \tag{2.18}$$

Aplicamos recursivamente la identidad (2.18) como sigue:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + x}{2^2}\right).$$

Entonces,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + x}{2^2}\right). \tag{2.19}$$

De nuevo, por la identidad (2.18) tenemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi + x}{4}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + x}{2^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi + x}{2^2}\right),$$

de donde,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{2^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi+x}{2^2}\right). \tag{2.20}$$

Sustituyendo las expresiones (2.20) y (2.19) en (2.18) tenemos que

$$\operatorname{sen}x=2^3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{2^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi+x}{2^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi+x}{2^2}\right). \tag{2.21}$$

Aplicando de nuevo la identidad (2.18) a cada uno de los cuatro factores de (2.21) obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}x=2^7\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{2^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi+x}{2^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi+x}{2^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi+x}{2^3}\right)\\ \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi+x}{2^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi+x}{2^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi+x}{2^3}\right).\end{aligned}$$

Continuando con este proceso $n$ veces, tenemos la expresión

$$\operatorname{sen}x=2^{2^n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{2^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi+x}{2^n}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{(2^n-1)\pi+x}{2^n}\right). \tag{2.22}$$

Observemos que

$$\frac{(2^n-1)\pi+x}{2^n}=\pi-\frac{\pi-x}{2^n}$$

y entonces podemos escribir

$$\operatorname{sen}\left(\frac{(2^n-1)\pi+x}{2^n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-x}{2^n}\right).$$

En general, para el $k$-ésimo factor escribimos

$$\frac{(2^n-k)\pi+x}{2^n}=\pi-\frac{k\pi-x}{2^n}$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{(2^n-k)\pi+x}{2^n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi-x}{2^n}\right).$$

Para utilizar esta observación, veamos primero que en (2.22) desde el segundo factor hasta el último hay un número impar de factores, entonces emparejando el segundo factor con el último, el tercero con el penúltimo, el cuarto con el antepenúltimo y así sucesivamente y observando que el término que sobra y que no se empareja es $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2^{n-1}\pi+x}{2^n}\right)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}x=2^{2^n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)\left[\left(\operatorname{sen}\frac{\pi+x}{2^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-x}{2^n}\right)\right]\cdot\left[\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi+x}{2^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi-x}{2^n}\right)\right]\\ \cdots\left[\left(\operatorname{sen}\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi+x}{2^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi-x}{2^n}\right)\right]\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2^{n-1}\pi+x}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Observemos que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2^{n-1}\pi+x}{2^n}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Además es bien conocida la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(A+B)\operatorname{sen}(A-B)=\operatorname{sen}^2 A-\operatorname{sen}^2 B$, aplicándola a cada factor entre corchetes de la igualdad de arriba tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x = 2^{2^n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)&\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]\cdot\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]\\ &\cdots\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}\cdot 2^n=2^n. \tag{2.23}$$

Dividiendo la expresión (2.23) obtenida para $\operatorname{sen} x$ entre $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}=2^{2^n-1}&\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]\cdot\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]\\ &\cdots\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Aplicando el límite cuando $x\longrightarrow 0$ y utilizando 2.23 tenemos que

$$2^n=2^{2^n-1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)\cdots\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi}{2^n}\right).$$

Por la última expresión obtenida para $\operatorname{sen} x$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{2^n}=\frac{2^{2^n-1}}{2^{2^n-1}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdot&\frac{\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\cdot\frac{\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)}\\ &\cdots\frac{\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi}{2^n}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi}{2^n}\right)}\cos\frac{x}{2^n}.\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x=2^n\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)&\left[1-\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\right]\cdot\left[1-\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)}\right]\\ &\cdots\left[1-\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2^{n-1}-1)\pi}{2^n}\right)}\right]\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Observemos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left[1-\frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}x^2}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}}\pi^2}\right]=1-\frac{x^2}{\pi^2}.$$

Los límites del resto de los factores de la expresión 2.24 se calculan de manera análoga. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{2.25}$$

□

**Corolario 16.** *Para $x \neq 0$ tenemos que*

$$\operatorname{sen}(\pi x) = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right). \tag{2.26}$$

*Demostración.* Simplemente en la fórmula del producto infinito obtenida en el Teorema 2.1.7 cambiamos $x$ por $\pi x$. □

A continuación probaremos algunos resultados que son consecuencia del Teorema 2.1.7.

**Teorema 2.1.8.** *Para todo número real $x \in (0,1)$ tenemos que*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}. \tag{2.27}$$

*Demostración.* Por el Corolario 15 tenemos

$$\Gamma(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n!n^x}{(n+x)(n-1+x)\cdots x}.$$

y

$$\Gamma(1-x) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n!n^{1-x}}{(n+1-x)(n-x)\cdots(1-x)}.$$

Multiplicando ambas igualdades tenemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n!n^x n!n^{1-x}}{(n+x)\cdots x(n+1-x)\cdots(1-x)}\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(n!)^2 n}{(n+x)\cdots x(n+1-x)\cdots(1-x)}\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{\frac{x(n+x)\cdots(1+x)(n+1-x)\cdots(1-x)}{n(n-1)(n-2)\cdots 1\cdot n(n-1)(n-2)\cdots 1}}\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n-1}\right)\cdots(1+x)\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n-1}\right)\cdots(1-x)}.
\end{aligned}$$

Por el Corolario 16 se sigue que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}. \tag{2.28}$$

Por lo tanto, para todo $x \in (0,1)$ tenemos que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

□

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.1.8 obtenemos otra demostración de que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

al evaluar en la ecuación $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$ en $x = \dfrac{1}{2}$.

Más adelante, cuando veamos la función beta, volveremos a probar el teorema anterior y nos basaremos en argumentos de ecuaciones diferenciales.

Con el teorema de Euler-Wallis también podemos probar el siguiente teorema conocido debido a Euler:

**Teorema 2.1.9.** *Se cumple*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.29}$$

*Demostración.* Consideremos la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$, la cual sabemos que tiene un número infinito de raíces de la forma $k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo la expansión en serie de MacLaurin de la función seno en la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$ y dividiendo entre $x \neq 0$ tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 0. \tag{2.30}$$

Mediante el producto de Euler-Wallis 2.17 tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right). \tag{2.31}$$

Si desarrollamos el producto (2.31) vemos que el coeficiente correspondiente a $x^2$ es

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$$

Comparando esta última igualdad con (2.30) tenemos que

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Finalmente, multiplicando por $\pi^2$ tenemos el resultado deseado. □

Ahora introduciremos la función *Zeta de Riemann*.

**Definición 2.1.2.** *La función* Zeta de Riemann *se define inicialmente para números reales $s > 1$ mediante la serie convergente:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{2.32}$$

La función zeta de Riemann puede extenderse a valores complejos $s$ con parte real mayor que 1, este hecho puede consultarse en [26, pág. 68]. En este dominio la serie infinita es convergente y analítica.
Un resultado relacionado con el Teorema 2.1.9 y la función Zeta de Riemann, es el siguiente.

**Teorema 2.1.10.** *Para $s > 1$ tenemos que*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p-primos} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{2.33}$$

*Demostración.* Probaremos el resultado usando un argumento de probabilidad.
Consideremos la variable aleatoria $X$ que toma valores al azar en el conjunto $\mathbb{N}$ y cuya función de probabilidad para $n \in \mathbb{N}$ es

$$P(X = n) := \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}. \tag{2.34}$$

Veamos primero que, en efecto, esta es una función de probabilidad:

Es claro que la función es no negativa para todos los valores $n \in \mathbb{N}$.

Ahora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = 1.$$

Esto muestra que $P(X = n)$ es una función de probabilidad para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para $m \in \mathbb{N}$, definamos el evento $A_m$ como "$X$ es divisible por $m$".

Si este evento ocurre quiere decir que $m|X$ o bien $X = mk$ con $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$P(A_m) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = mk) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{-s}k^{-s}}{\zeta(s)} = m^{-s}. \tag{2.35}$$

Sean $p_1$ y $p_2$ dos números primos distintos, de la misma manera como se definió el evento $A_m$, definimos los eventos $A_{p_1}$ y $A_{p_2}$.

Por la identidad (2.34) tenemos que

$$P(A_{p_1}) = p_1^{-s}$$

y

$$P(A_{p_2}) = p_2^{-s}.$$

Recordemos que, un número entero es divisible por $p_1$ y $p_2$, si y solo si, ese número entero también es divisible por el producto $p_1p_2$. De esto se sigue que el evento $A_{p_1} \cap A_{p_2}$ es "$p_1p_2$ divide a $X$". Entonces,

$$P(A_{p_1} \cap A_{p_2}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = p_1p_2k) = (p_1p_2)^{-s} = p_1^{-s}p_2^{-s} = P(A_{p_1})P(A_{p_2}).$$

Esta ecuación prueba que los eventos $A_{p_1}$ y $A_{p_2}$ son eventos independientes.

La independencia de eventos de este tipo es fácilmente generalizable, es decir, los eventos $A_p$ con $p$ un número primo son eventos independientes. Sabemos, por probabilidad, que los complementos de eventos independientes son también eventos independientes. Por lo tanto,

$$P\left(\bigcap A_p^c\right) = \prod_{p-primos} P(A_p^c) = \prod_{p-primos} (1 - P(A_p)) = \prod_{p-primos} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Por lo tanto,

$$P\left(\bigcap A_p^c\right) = \prod_{p-primos} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{2.36}$$

Ahora, el evento $\cap A_p^c$ quiere decir que ningún número primo divide a $X$, es decir, el evento $\bigcap A_p^c$ ocurre, si y solo si, ocurre el evento $(X = 1)$. Por lo tanto, por la identidad 2.34 tenemos que

$$P\left(\bigcap A_p^c\right) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}. \tag{2.37}$$

De (2.37) y (2.36) tenemos finalmente que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p-primos} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

□

Como aplicación de los Teoremas 2.1.9 y 2.1.10 veamos el siguiente teorema que involucra la Teoría de los Números y la Probabilidad.

**Teorema 2.1.11.** *Si se eligen al azar dos números enteros positivos, entonces la probabilidad de que sean primos relativos es igual a* $\frac{6}{\pi^2}$.

*Demostración.* Consideremos cualesquiera dos enteros positivos $m$ y $n$ elegidos al azar. Sea $A$ el evento "los enteros $m$ y $n$ son primos relativos".

La lista de números primos es $2, 3, 5, \ldots, p, \ldots$. Construyamos el siguiente argumento:

El entero $m$ es par o impar, entonces, la probabilidad de que $m$ sea dividido por 2 es igual a $\frac{1}{2}$. Análogamente, la probabilidad de que el entero $n$ sea divisible entre 2 es igual a $\frac{1}{2}$. Entonces, la probabilidad de que ambos números sean divisible entre 2 es $\frac{1}{2^2}$. Por lo tanto, la probabilidad de que $m$ y $n$ no sean divisible entre 2 es igual a $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$.

Cualquier entero es de la forma $3k$, $3k+1$ o $3k+2$, como 3 es primo, la probabilidad de que $m$ sea dividido por 3 es $\frac{1}{3}$. De la misma manera, la probabilidad de que $n$ sea dividido por 3 es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que ambos números sean divididos por 3 es $\frac{1}{3^2}$. Por lo tanto, la probabilidad de que ambos números no sean divididos entre 3 es igual a $\left(1-\frac{1}{3^2}\right)$.

Continuando con este argumento tenemos que la probabilidad de que ambos números no sean divididos por un número primo $p$ es igual a $\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$.

Por lo tanto,

$$P(A) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{p^2}\right)... = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right). \tag{2.38}$$

Por el Teorema 2.1.10 y por el Teorema 2.1.9 tenemos que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Por lo tanto, por la identidad (2.38) tenemos que

$$P(A) = \frac{6}{\pi^2}.$$

□

**Teorema 2.1.12.** *Consideremos dos variables aleatorias independientes $X$ y $Y$ con valores en $\mathbb{N}$ y con funciones de probabilidad $P(X=n)=\frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$ y $P(Y=m)=\frac{m^{-s}}{\zeta(s)}$. Sea $A$ el evento "$X$ es libre de cuadrados", entonces*

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(2s)}. \tag{2.39}$$

*Además, si $Z$ es el máximo común divisor de $X$ y $Y$, entonces*

$$P(Z=n) = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}. \tag{2.40}$$

*Demostración.* Veamos la primera parte:

Consideremos las variables aleatorias $W_i$ que representan los exponentes en la descomposición en factores primos de $X$. Sea $D$ el evento "$Y_i = 0$ o $Y_i = 1$". Entonces, el evento $D$ ocurre, si y solo si, $X$ es libre de cuadrados. Por lo tanto,

$$P(A) = \prod_{p-primos} P((W_i = 0) \cup (W_i = 1)) = \prod_{p-primos} P(D) = \prod_{p-primos} (1 - P(D^c)).$$

El evento $D^c$ es el evento "$X$ no es libre de cuadrados", entonces $P(D^c) = P(Y_i \geq 2)$, pero el evento $(Y_i \geq 2)$ significa que existe un número primo $p$ en la descomposición de $X$ tal que $p^2$ divide a $X$, es decir, ocurre el evento $A_{p^2}$. Por lo tanto,

$$P(D^c) = P(A_{p^2}) = \frac{1}{p^{2s}}.$$

Por lo tanto,

$$P(A) = \prod_{p-primos} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right). \tag{2.41}$$

Ahora sea $p$ un número primo y denotemos por $C_p$ al evento "$X$ y $Y$ son ambos divisibles por $p$", y sean $A_p$ y $B_p$ los eventos definidos como en el Teorema 2.1.10. Entonces, por la independencia de los eventos $X$ y $Y$ tenemos que

$$P(C_p) = P(A_p \cap B_p) = P(A_p)P(B_p) = p^{-s}p^{-s} = p^{-2s}.$$

Además, el evento $\bigcap C_p^c$ significa que ningún número primo divide ni a $X$ ni a $Y$. Es decir, el evento $\bigcap C_p^c$ ocurre, si y solo si, ocurre el evento $(Z = 1)$. Por lo tanto, por independencia tenemos que

$$P(Z = 1) = P\left(\bigcap C_p^c\right) = \prod_{p-primos} P(C_p^c) = \prod_{p-primos} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)}.$$

Por lo tanto,

$$P(Z = 1) = \frac{1}{\zeta(2s)}. \tag{2.42}$$

Esta igualdad ha probado la segunda parte del teorema para $n = 1$.

Para el caso general, sea $n = (X, Y)$, por propiedades del máximo común divisor existen enteros positivos $a$ y $b$ tales que $X = na$ y $Y = nb$ con $(a, b) = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P\left(\bigcup_{a,b \in \mathbb{N}, (a,b)=1} (X = na, Y = nb)\right) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}, (a,b)=1} P(X = na, Y = nb) \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{N}, (a,b)=1} n^{-2s} P(X = a, Y = b) = n^{-2s} P(Z = 1) = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(Z = n) = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

$\square$

Puestos a seguir hablado de resultados de Teoría de los Números que se prueban con argumentos de la Teoría de la probabilidad, vamos a definir primero la *Función Indicatriz de Euler*, importante en el estudio de la Teoría de los Números:

**Definición 2.1.3.** *Si $n \geq 1$ la* función indicatriz de Euler $\phi(n)$ *es el número de enteros positivos menores que $n$ que son primos relativos con $n$; es decir,*

$$\phi(n) = \sum_{k=1}^{n}{}' 1.$$

*Aquí la notación $\sum_{k=1}^{n}{}'$ indica que la suma se extiende sobre los $k$ enteros primos relativos con $n$.*

**Teorema 2.1.13.** *Consideremos la función de Euler $\phi(n)$. Entonces,*

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{2.43}$$

*donde $p|n$ denota que el entero $p$ es un divisor del entero $n$ y el producto se realiza sobre todos los números primos que dividen a $n$.*

*Demostración.* Sea $n$ un entero positivo fijo y elijamos un entero positivo $k$ al azar tal que $1 \leq k \leq n$ y sea $p$ un número primo. Definamos el evento $X_p$ como el número elegido es divisible por $p$, entonces sabemos que $P(X_p) = \frac{1}{p}$ y $P(X_p^c) = 1 - \frac{1}{p}$.

Si $p_1, p_2, p_3, \cdots$ son diferentes divisores primos de $n$, entonces es claro que los eventos $X_{p_i}$ son eventos independientes.

Como $\phi(n)$ es la función que cuenta la cantidad de primos relativos positivos con $n$ se sigue claramente que $P((n, k) = 1) = \frac{\phi(n)}{n}$.

Por definición de los $X_{p_i}$ tenemos que el evento $\bigcap_{p|n} X_p^c$ significa que ningún divisor primo de $n$ es divisor de $k$, es decir, el evento $\bigcap_{p|n} X_p^c$ ocurre si y solo si ocurre que $(n, k) = 1$. Por lo tanto, por independencia tenemos que

$$\frac{\phi(n)}{n} = P((n, k) = 1)) = P\left(\bigcap_{p|n} X_p^c\right) = \prod_{p|n} P(X_p^c) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Por lo tanto,

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

□

**Corolario 17.** *La función $\phi$ de Euler es una* función multiplicativa*. Esto es, si $m$ y $n$ son enteros positivos tales que $(m,n) = 1$, entonces $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.*

*Demostración.* Sean $m = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ y $n = q_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot q_r^{f_r}$ las descomposiciones en factores primos de $m$ y $n$ respectivamente. Como $(m,n) = 1$ se sigue que ningún primo de la descomposición de $m$ aparece en la descomposición de $n$ y ningún primo de la descomposición de $n$ aparece en la descomposición de $m$.

Así, $mn = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \cdot q_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot q_r^{f_r}$.

Por (2.43) tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi(mn) &= mn \prod_{p|mn} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
&= mn \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) \\
&= m \prod_{p_i|m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) n \prod_{q_j|n} \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) = \phi(m)\phi(n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n). \tag{2.44}$$

□

**Corolario 18.** *Si $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ es la descomposición en factores primos del entero positivo $n$, entonces*

$$\phi(n) = \left(p_1^{e_1} - p_1^{e_1 - 1}\right) \cdots \left(p_r^{e_r} - p_r^{e_r - 1}\right). \tag{2.45}$$

*En particular, si $p$ es un número primo, entonces $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ y $\phi(p) = p - 1$.*

*Demostración.* Por (2.43) tenemos que

$$\phi(n) = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \tag{2.46}$$

Realizando los productos del lado derecho de (2.46) se tiene que

$$\phi(n) = \left(p_1^{e_1} - p_1^{e_1 - 1}\right) \cdots \left(p_r^{e_r} - p_r^{e_r - 1}\right).$$

Ahora, por (2.43) se tiene que

$$\phi(p^n) = p^n \prod_{p|p^n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^n - p^{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}. \tag{2.47}$$

Haciendo $n = 1$ en (2.47) se tiene que

$$\phi(p) = p - 1. \tag{2.48}$$

□

Con el resultado del Corolario 18 se generaliza fácilmente el resultado del Corolario 17, es decir, si $m_1, \ldots, m_r$ son enteros positivos tales que $(m_1, \ldots, m_r) = 1$, entonces

$$\phi(m_1 \cdot \ldots \cdot m_r) = \phi(m_1) \cdot \ldots \cdot \phi(m_r). \tag{2.49}$$

**Corolario 19** (Teorema de Euclides)**.** *Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos*

*Demostración.* Sean $p_1, \ldots, p_n$ los números primos propuestos y sea $N$ el producto de todos ellos. Es claro que $(p_1, \ldots, p_n) = 1$, entonces por (2.49) y (2.48) tenemos que

$$2 < \phi(N) = (p_1 - 1) \cdots (p_n - 1) < N. \tag{2.50}$$

De (2.50) se sigue que existe algún entero $m \in (2, N)$ tal que $(m, N) = 1$. Obsérvese que $m$ no puede tener ningún factor primo ya que todos ellos son factores de $N$, pero si $m$ no tiene factores primos se sigue entonces que que $m = 1$ lo cual es imposible. □

**Teorema 2.1.14.** *Si $m$ es un entero positivo y $a$ es cualquier entero, entonces*

$$a^m \equiv a^{m-\phi(m)} \pmod{m}. \tag{2.51}$$

*Demostración.* Supongamos primero que $(a, m) = d > 1$. Sea $p$ un número primo tal que $p|(a, m)$ y sea $k$ el máximo entero tal que $p^k|m$, es decir, existe un entero $q$ tal que $m = p^k q$ y tal que $(p^k, q) = 1$.

Utilizando (2.44) tenemos que

$$m - \phi(m) = p^k q - \phi(p^k q) = p^k q - \phi(p^k)\phi(q). \tag{2.52}$$

Aplicando a (2.52) la propiedad de que $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ tenemos que

$$m - \phi(m) = p^k q - (p^k - p^{k-1})\phi(q) = p^{k-1}(pq - (p-1)\phi(q)).$$

Es decir,

$$p^{k-1} | m - \phi(m).$$

Con lo que,

$$m - \phi(m) \geq p^{k-1} \geq k. \tag{2.53}$$

Por las desigualdades (2.53) tenemos que $p^k \leq p^{m-\phi(m)}$ y por lo tanto,

$$p^k | p^{m-\phi(m)}. \tag{2.54}$$

Además, como $p|a$ se sigue que

$$p^{m-\phi(m)} | a^{m-\phi(m)}. \tag{2.55}$$

Aplicando la transitividad de la divisibilidad a (2.54) y (2.55) tenemos que

$$p^k | a^{m-\phi(m)}. \tag{2.56}$$

Sea $m = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ la descomposición en factores primos de $m$. Es claro que cada exponente $e_i$ cumple con la propiedad (2.56). Es decir, para toda $i = 1, \ldots, r$ tenemos que

$$p^{e_i} | a^{m-\phi(m)}$$

Con lo que es claro que

$$p^{e_i} | a^{m-\phi(m)}(a^{\phi(m)} - 1).$$

Por lo tanto,

$$p^{e_i} | a^m - a^{m-\phi(m)}. \tag{2.57}$$

Como $(p_1^{e_1}, \ldots, p_r^{e_r}) = 1$, por (2.57) se sigue que

$$m = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r} | a^m - a^{m-\phi(m)}.$$

Por lo tanto,

$$a^m \equiv a^{m-\phi(m)} \pmod{m}. \tag{2.58}$$

Si $(a, m) = 1$ el resultado es claro utilizando el *Teorema de Euler*, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ el cual se demuestra en [2]. □

Ahora probaremos un teorema análogo al Teorema 2.1.13.

**Teorema 2.1.15.** *Denotemos por $\psi(n)$ el número de enteros $x$ tales que $1 \leq x \leq n$ y $(x, n) = (x + 1, n) = 1$. Entonces*

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{2}{p}\right). \tag{2.59}$$

*Además, el valor de $\psi(n)$ es cero, si y solo si $n$ es un número par.*

*Demostración.* Sea $n$ un entero positivo fijo y elijamos la azar un entero positivo $x$ tal que $1 \leq x \leq n$ y sea $p$ un número primo. Definamos los eventos $A_p$ como el número elegido $x$ es divisible por $p$ y $B_p$ como $x+1$ es divisible por $p$.

Claramente los eventos $A_p$ y $B_p$ son eventos independientes y además tenemos que $P(A_p) = \frac{1}{p}$, $P(B_p) = \frac{1}{p}$, $P(A_p^c) = 1 - \frac{1}{p}$ y $P(B_p^c) = 1 - \frac{1}{p}$.

Ahora, $A_p \cup B_p$ se interpreta como el evento de que $p$ divide a $x$ o $p$ divide a $x+1$. Entonces,

$$P(A_p \cup B_p) = P(A_p) + P(B_p) - P(A_p \cap B_p). \tag{2.60}$$

Pero el evento $A_P \cap B_P$ se interpreta como que $p$ divide a $x$ y $p$ divide a $x+1$ con lo que $A_p \cap B_p = \emptyset$, ya que $(x, x+1) = 1$ para todo entero $x$, luego $P(A_p \cap B_P) = 0$, por lo que de (2.72) se sigue que

$$P(A_p \cup B_p) = P(A_p) + P(B_p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}. \tag{2.61}$$

Por leyes de De Morgan tenemos que

$$P(A_p \cup B_p) = 1 - p(\{A_p \cup B_p\}^c) = 1 - P(A_p^c \cap B_p^c). \tag{2.62}$$

El evento $A_p^c \cap B_p^c$ se interpreta como $p$ no divide a $x$ ni $p$ divide a $x+1$. Por lo tanto, combinando (2.61) y (2.62) tenemos que

$$P(A_p^c \cap B_p^c) = 1 - \frac{2}{p}. \tag{2.63}$$

Sea $C$ el evento $x$ y $n$ son tales que $(x, n) = (x+1, n) = 1$, entonces por la definición de la función $\psi(n)$ se sigue que

$$P(C) = \frac{\psi(n)}{n}. \tag{2.64}$$

Sea $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ la descomposición en factores primos de $n$, de manera análoga a los eventos $A_p$ y $B_p$ se definen los eventos $A_{p_i}$ y $B_{p_i}$ para toda $i = 1, \ldots, k$. Entonces es claro que los eventos $A_{p_i} \cup B_{p_i}$ son eventos independientes para toda $i = 1, \ldots, k$ y por lo tanto, los eventos $A_{p_i}^c \cap B_{p_i}^c$ también son independientes para toda $i = 1, \ldots, k$.

El evento $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}(A_{p_i} \cap B_{p_i})$ se interpreta como que ninguno de los primos $p_i$ divide a $x$ ni a $x+1$, es decir, el evento $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}(A_{p_i} \cap B_{p_i})$ si y solo si ocurre el evento $C$.

Por lo tanto, por (2.64) se sigue que

$$\frac{\psi(n)}{n} = P(C) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k}(A_{p_i} \cap B_{p_i})\right) = \prod_{p_i|n} P(A_{p_i} \cap B_{p_i}) = \prod_{p_i|n}\left(1 - \frac{2}{p_i}\right) = \prod_{p|n}\left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Por lo tanto,

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Ahora, por (2.59) tenemos que $\psi(n) = 0$ si y solo si al menos uno de los factores $\left(1 - \frac{2}{p}\right)$ es igual a cero, es decir, si y solo si $p = 2$. Con esto se concluye que $\psi(n) = 0$ si y solo si $n$ es un número par.

□

Para finalizar esta sección daremos la definición de función de Möbius y probaremos un teorema que la relaciona con la serie infinita de Euler.

**Definición 2.1.4.** *La* función de Möbius $\mu(m)$ *se define para todos los enteros positivos* $m$*, se determina por las igualdades:* $\mu(m) = 0$ *si* $m$ *es divisible por un número cuadrado mayor que* 1*;* $\mu(m) = (-1)^k$*, si* $m$ *no es divisible por un número cuadrado distinto de uno. Aquí* $k$ *es el número de divisores primos de* $m$*; en particular, para* $m = 1$ *tenemos que* $k = 0$*, por lo que tenemos que* $\mu(1) = 1$*.*

**Teorema 2.1.16.** *Sea* $X$ *un entero seleccionado al azar en el conjunto* $\{1, 2, 3, ..., (10)^k\}$ *donde* $k$ *es grande, entonces cuando* $k \longrightarrow \infty$ *tenemos que*

$$P(\mu(X) = 0) = 1 - \frac{6}{\pi^2}. \tag{2.65}$$

*Demostración.* Sea $A$ el evento "$X$ es libre de cuadrados". Entonces, $A$ ocurre si y solo si ocurre el evento $(\mu(X) \neq 0)$. Por lo tanto,

$$P(\mu(X) \neq 0) = P(A) = \prod_{p-primos} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}. \tag{2.66}$$

Aplicando la probabilidad del complemento al evento $(\mu(X) \neq 0)$ se obtiene el resultado deseado. □

## 2.2. Propiedades de la función Beta.

En esta sección definiremos y estudiaremos algunas propiedades de la función Beta.

**Definición 2.2.1.** *La función beta se define para* $x > 0$ *y* $y > 0$ *como*

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \tag{2.67}$$

**Proposición 20.** *La función beta cumple que* $B(x, y) = B(y, x)$ *para todos* $x > 0$ *y* $y > 0$*.*

*Demostración.* Si hacemos el cambio de variable $w = 1 - t$ tenemos $dw = -dt$ y los límites de integración son, en este orden, $w = 1$ y $w = 0$. Cambiando el orden de los límites de integración y utilizando que $dw = -dt$ tenemos el resultado deseado. □

**Teorema 2.2.1.** *Para todos $x, y > 0$ tenemos que*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y). \tag{2.68}$$

*Demostración.* Escribamos,

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 t^x\frac{(1-t)^x}{(1-t)^x}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt. \end{aligned}$$

Utilizando integración por partes,

$$B(x+1,y) = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt = \int_0^1 \frac{x}{x+y}t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

Por lo tanto,

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

□

**Teorema 2.2.2.** *Se cumple:*

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{(w+1)^{x+y}}dw. \tag{2.69}$$

*Demostración.* Haciendo el cambio de variable $t = \dfrac{w}{w+1}$, los nuevos límites de integración son, en este orden, $w = 0$ y $w = \infty$, de donde obtenemos el resultado deseado. □

Antes de continuar con los resultados sobre la Función Beta introduciremos el operador *Transformada de Laplace* como sigue:

**Definición 2.2.2.** *Sea $F(t)$ una función definida para $t > 0$. La* Transformada de Laplace *de $F(t)$, denotada por $\mathscr{L}\{F(t)\}(s)$, se define como*

$$\mathscr{L}\{F(t)\}(s) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt. \tag{2.70}$$

*Se dice que la Transformada de Laplace de $F(t)$ existe cuando la integral en* (2.70) *es convergente para algún valor de $s$; de otra manera, diremos que no existe.*

Cuando indiquemos con mayúscula una función de $t$, $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$, etc., la Transformada de Laplace se denotará por la correspondiente letra minúscula, es decir, $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$, etc.

En lo que sigue, para simplificar la notación, omitiremos la dependencia de $s$ en la Transformada de Laplace y en lugar de$\mathscr{L}\{F(t)\}(s)$, escribiremos simplemente $\mathscr{L}\{F(t)\}$ o bien $f(s)$.

**Definición 2.2.3.** *Diremos que una función es* continua a trozos *en un intervalo* $\alpha \leq t \leq \beta$ *si es posible partir el intervalo en un número finito de subintervalos de tal manera que la función sea continua en cada uno de ellos y tenga límites a la izquierda y derecha.*

**Definición 2.2.4.** *Una función* $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice que* es de orden exponencial $a \in \mathbb{R}$ *si y solo si existen* $t_0 > 0$ *y* $M > 0$ *tales que*

$$|F(t)| < Me^{at}, t > t_0.$$

El siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [17] garantiza condiciones suficientes para la existencia de la Transformada de Laplace:

**Teorema 2.2.3.** *Si* $F(t)$ *es continua a trozos en cada intervalo finito* $0 \leq t_0$ *y de orden exponencial* $a$ *para* $t > t_0$*, entonces existe la Transformada de Laplace* $\mathscr{L}\{F(t)\}(s)$ *para todo* $s > a$*.*

Continuaremos ahora con las propiedades de la Función Beta.

**Teorema 2.2.4.** *Se satisface:*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}. \tag{2.71}$$

*Demostración.* No daremos la demostración clásica que involucra integrales dobles y cambio a coordenadas polares, daremos una demostración basada en el operador transformada de Laplace introducido en la Definición 2.2.2.

Definamos la función $H(t) := \int_0^t w^{x-1}(t - w)^{y-1}dw$. Aplicando Transformadas de Laplace y el Teorema de Convolución para esta transformación (véase [17, pág. 170]) tenemos que

$$\mathscr{L}\{H(t)\} = \mathscr{L}\{w^{x-1}\}\mathscr{L}\{w^{y-1}\} = \frac{\Gamma(x)}{s^x}\frac{\Gamma(y)}{s^y}.$$

Entonces,

$$H(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{s^{x+y}}\} = \Gamma(x)\Gamma(y)\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{x+y}}\} = \Gamma(x)\Gamma(y)\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x + y)}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t w^{x-1}(t - w)^{y-1}dw = \Gamma(x)\Gamma(y)\frac{w^{x+y-1}}{\Gamma(x + y)}. \tag{2.72}$$

Si hacemos $t = 1$ en la igualdad (2.72) concluimos que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}.$$

□

**Corolario 21.** *Es válido:*

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \tag{2.73}$$

*Demostración.* El resultado se obtiene al sustituir $x = y = \dfrac{1}{2}$ en la identidad (2.71). Es decir,

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi.$$

□

Otro resultado relacionado con el Teorema 2.2.4 es el siguiente:

**Teorema 2.2.5.** *Para todo* $x \in (0,1)$ *tenemos*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}. \tag{2.74}$$

*Demostración.* La prueba la haremos desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, difiere de la prueba clásica basada en el Teorema de Bohr-Mollerup (véase, por ejemplo, [8]).

En el Teorema 2.2.2, hacemos $y = 1 - x$ y tenemos

$$B(x, 1-x) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{w+1} dw.$$

Denotemos con $f(x) = B(x, 1-x)$, es decir,

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{w+1} dw. \tag{2.75}$$

Sabemos por la Proposición 20 que $B(x, 1-x) = B(1-x, x)$. Entonces también tenemos que $f(x) = B(1-x, x)$ y por el Teorema 2.2.2 podemos escribir

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{w^{-x}}{w+1} dw. \tag{2.76}$$

Además, observamos que si en (2.75) evaluamos en $1 - x$ obtenemos de nuevo (2.76) y por lo tanto, obtenemos la relación

$$f(x) = f(1-x). \tag{2.77}$$

Observemos que podemos escribir (2.75) como

$$f(x) = \int_0^1 \frac{w^{x-1}}{w+1} dw + \int_1^\infty \frac{w^{x-1}}{w+1} dw. \tag{2.78}$$

Si en (2.78) en la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{w^{x-1}}{w+1} dw$ hacemos el cambio de variable $w = \dfrac{1}{t}$ tenemos que los nuevos límites de integración, en este orden, son $t = 1$ y $t = 0$ y además $dx = -\dfrac{1}{t^2} dt$. Por lo tanto, intercambiando los límites de integración y utilizando el signo negativo de $dx$ obtenemos

$$\int_1^\infty \frac{w^{x-1}}{w+1} dw = \int_0^1 \frac{t^{-x}}{w+1} dw.$$

Renombrando la variable $t$ por $w$ y sustituyendo en (2.78) tenemos que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{w^{x-1} + w^{-x}}{w+1} dw. \tag{2.79}$$

Utilizando la relación (2.77) tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{2} 2f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(1-x))$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{w+1} dw + \int_0^\infty \frac{w^{-x}}{w+1} dw\right)$$

o equivalentemente,

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{w^{x-1} + w^{-x}}{w+1} dw. \tag{2.80}$$

Ahora, derivando la relación (2.77) tenemos que $f'(x) = -f'(1-x)$ y si en esta ecuación hacemos $x = \dfrac{1}{2}$ se tiene que $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, con lo que $x = \dfrac{1}{2}$ es un punto crítico de $f(x)$.
Derivando con respecto a la variable $x$ la expresión (2.80) y utilizando la identidad (2.79) tenemos que

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{w^{x-1}\ln(w) + w^{-x}\ln(w)}{w+1} dw.$$

y

$$f''(x) = \int_0^1 \frac{w^{x-1}\ln^2(w) + w^{-x}\ln^2(w)}{w+1} dw.$$

Es decir, la segunda derivada es estrictamente positiva en $(0, 1)$ y, por lo tanto la primera derivada es estrictamente creciente en $(0, 1)$ y $x = \dfrac{1}{2}$ es un mínimo local de $f(x)$.
Para encontrar el valor mínimo de $f$ utilizamos el Teorema 2.2.4 y el hecho de que $f(x) = B(x, 1-x)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Ahora, en (2.75) hacemos el cambio de variable $w = \dfrac{t}{m}$ con los límites de integración $t = 0$ y $t = \infty$. Desarrollando se tiene

$$m^{x-1}f(x) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{w+m} dw. \tag{2.81}$$

En la misma expresión (2.75) hacemos el cambio de variable $w = mt$, con límites de integración son $t = 0$ y $t = \infty$. Simplificando se tiene

$$m^{-x}f(x) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{1+mw}\, dw. \tag{2.82}$$

Sumando (2.81) y (2.82) y dividiendo entre $m + 1$, tenemos

$$\frac{(m^{x-1} + m^{-x})f(x)}{m+1} = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{(w+1)(w+m)} + \frac{w^{x-1}}{(w+1)(1+mw)} dw.$$

Integrando respecto a $m$ sobre el intervalo $(0,1)$ tenemos que

$$\int_0^1 \frac{(m^{x-1}+m^{-x})f(x)}{m+1}\,dm = \int_0^1\int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{(w+1)(w+m)} + \frac{w^{x-1}}{(w+1)(1+mw)}\,dw\,dm.$$

Para el lado izquierdo de esta igualdad sacamos la constante $f(x)$ y utilizamos la expresión (2.79). Para el lado derecho utilizamos el Teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración y descomponemos el integrando en fracciones parciales. Haciendo estas operaciones y calculando las integrales nos queda

$$f^2(x) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}\ln(w)}{w-1}\,dw. \tag{2.83}$$

Equivalentemente, para evitar abuso de notación más adelante escribiremos la expresión (2.83) como

$$f^2(z) = \int_0^\infty \frac{w^{z-1}\ln(w)}{w-1}\,dw. \tag{2.84}$$

Restando la ecuación (2.82) de la ecuación (2.81) y dividiendo entre $m-1$ y nos queda

$$\frac{(m^{x-1}-m^{-x})f(x)}{m-1} = \int_0^\infty \frac{m^{x-1}}{(m-1)(w+m)} - \frac{w^{x-1}}{(m-1)(1+mw)}\,dw.$$

Integrando respecto a la variable m sobre el intervalo $(0,\infty)$, y cambiando el orden de integración y descomponiendo el integrando en fracciones parciales tenemos que

$$f(x)\int_0^\infty \frac{m^{x-1}-m^{-x}}{m-1}\,dm = 2\int_0^\infty \frac{w^{x-1}\ln(w)}{w+1}\,dw. \tag{2.85}$$

Derivando la expresión (2.75) tenemos que

$$\frac{df}{dx} = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}\ln(w)}{w+1}\,dw. \tag{2.86}$$

Integrando la expresión (2.84) respecto a la variable $z$ sobre el intervalo $(1-x,x)$ y cambiando el orden de integración tenemos que

$$\begin{aligned}\int_x^{1-x} f^2(z)\,dz &= \int_x^{1-x}\int_0^\infty \frac{w^{z-1}\ln(w)}{w-1}\,dw\,dz = \int_0^\infty\int_x^{1-x}\frac{w^{z-1}\ln(w)}{w-1}\,dz\,dw\\ &= \int_0^\infty \frac{\ln(w)}{w-1}\frac{w^{x-1}-w^{-x}}{\ln(w)}\,dw = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}-w^{-x}}{w-1}\,dw.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_x^{1-x} f^2(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}-w^{-x}}{w-1}\,dw. \tag{2.87}$$

Sustituyendo (2.87) y (2.86) en (2.85) tenemos que

$$f(s)\int_{1-x}^{x} f^2(z)\,dz = 2\,\frac{df}{dx}(x).$$

Como tenemos que $f(x) = f(1-x)$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $0 < x < \dfrac{1}{2}$. Luego, podemos escribir la última expresión como

$$f(x)\int_{\frac{1}{2}}^{x} f^2(z)\ dz = \frac{df}{dx}(x). \tag{2.88}$$

Derivando respecto a $x$ la expresión (2.88) obtenemos

$$\frac{df}{dx}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f^2(z)\ dz + f^3(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x).$$

De donde

$$\frac{df}{dx}f(x)\int_{\frac{1}{2}}^{x} f^2(z)\ dz + f^4(x) = f(x)\frac{d^2f}{dx^2}(x),$$

o bien,

$$f(x)\frac{d^2f}{dx^2} = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + f^4(x).$$

Así, hemos obtenido la ecuación diferencial

$$f(x)\frac{d^2f}{dx^2} = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + f^4(x)$$

y las condiciones iniciales $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \pi$ y $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.
Procedemos ahora a resolver esta ecuación diferencial:

Trabajamos sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 1)$. Definiendo $\dfrac{df}{dx} = g$
tenemos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal no homogénea

$$\frac{dg^2}{df} = \frac{2g^2}{f} + 2f^3.$$

con condición inicial $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Como $g > 0$ en $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, tenemos pues,

$$g = \frac{df}{dx} = f\sqrt{f^2 - \pi^2}.$$

Ahora, tenemos una ecuación diferencial de primer orden de variables separables y escribimos

$$\int \frac{df}{f\sqrt{f^2-\pi^2}} = x + k.$$

con lo que finalmente tenemos que

$$f(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

Como $f(x) = B(x, 1-x)$ tenemos por el Teorema 2.2.4 que $f(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$. Por lo tanto, para $x \in (0,1)$, tenemos que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

□

Veamos ahora un resultado análogo al segundo inciso del Teorema 2.1.4 pero con la función beta.

**Teorema 2.2.6.** *La función beta $B(x,y)$ es una función log-convexa en cada variable.*

*Demostración.* Fijemos $y > 0$ y consideremos $a, b > 0$ y $p$ y $q$ números positivos con $p > 1$ y tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por la desigualdad de Hölder para integrales tenemos que

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}, y\right) &= \int_0^1 t^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}-1}(1-t)^{y-1}\, dt \\
&= \int_0^1 t^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(1-t)^{y-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\, dt \\
&= \int_0^1 t^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(1-t)^{\frac{y}{p}+\frac{y}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\, dt \\
&= \int_0^1 \left(t^{a-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(t^{b-1}\right)^{\frac{1}{q}} \left((1-t)^{y-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left((1-t)^{y-1}\right)^{\frac{1}{q}}\, dt \\
&= \int_0^1 \left(t^{a-1}(1-t)^{y-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(t^{b-1}(1-t)^{y-1}\right)^{\frac{1}{q}}\, dt \\
&\leq \left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{y-1}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{y-1}\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= B^{\frac{1}{p}}(a,y) B^{\frac{1}{q}}(b,y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b, y\right) \leq B^{\frac{1}{p}}(a,y)\ B^{\frac{1}{q}}(b,y).$$

Esto implica que la función beta es log-convexa. El caso para $x$ fijo es análogo. □

Aprovechando la log-convexidad de la función beta y el Teorema de Bohr-Mollerup podemos dar otra demostración de que $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, para todo $x, y > 0$ como sigue.

*Demostración del Teorema 2.2.4.* Fijamos $y > 0$ y para $x > 0$ definamos la función:

$$f(x) := \frac{\Gamma(x+y)B(x,y)}{\Gamma(y)}. \tag{2.89}$$

Como las funciones Gamma y Beta son funciones log-convexas, claramente el producto de funciones log-convexas es una función log-convexa.

También tenemos que

$$f(1) = \frac{\Gamma(1+y)B(1,y)}{\Gamma(y)} = \frac{y\Gamma(y)}{\Gamma(y)} \int_0^1 (1-t)^{y-1}\ dt.$$

Es fácil ver que la integral de esta igualdad es $\frac{1}{y}$. Por lo tanto, $f(1) = 1$.
Ahora, usando las propiedades de las funciones Gamma y Beta tenemos que

$$f(x+1) = \frac{\Gamma(x+y+1)B(x+1,y)}{\Gamma(y)} = \frac{(x+y)\Gamma(x+y)\left(\dfrac{x}{x+y}\right)B(x,y)}{\Gamma(y)}$$

Por lo tanto,

$$f(x+1) = x\ f(x).$$

Hemos probado que $f$ cumple con todas las hipótesis del Teorema de Bohr-Mollerup. Por lo tanto, $f(x) = \Gamma(x)$ para todo $x > 0$ y ya es fácil concluir. $\square$

Damos por concluido este capítulo. Utilizaremos algunos de los resultados estudiados sobre las funciones Gamma, Beta y la Transformada de Laplace en conjunto con algunas desigualdades demostradas en el Capítulo 1 para profundizar, en el siguiente, en algunas aplicaciones a la Teoría de la Probabilidad.

# Capítulo 3

# Algunas aplicaciones a la Teoría de la Probabilidad.

En este capítulo veremos otras aplicaciones de los resultados de los capítulos anteriores a la Teoría de la Probabilidad en los cuales ya han aparecido algunas aplicaciones. Las aplicaciones que aparecen en este capítulo son más específicas, tanto de las funciones Gamma y Beta como de la transformada de Laplace. Asimismo, utilizaremos algunas de las *Distribuciones de Probabilidad* de variables aleatorias especiales y sus propiedades. Para conocer la forma de cada una de estas variables aleatorias especiales, la notación, sus funciones de probabilidad y densidad, esperanza y varianza, puede consultarse [25].

## 3.1. Relación entre Poisson y Gamma.

En esta sección estudiaremos una relación entre la distribución Poisson y la función Gamma. Veamos primero un poco de notaciones de las distribuciones de probabilidad.

Sea $X$ una variable aleatoria, utilizaremos el símbolo $\sim$ para denotar que $X$ tiene cierta distribución conocida de las que se estudian en [25]. Así, por ejemplo, si $X$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda$, abreviaremos este hecho con la notación $X \sim Poisson(\lambda)$; si $X$ tiene distribución Normal con parámetros $\mu$ y $\sigma^2$ escribiremos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, etc.

Si $A$ es cualquier conjunto, utilizaremos la notación $\mathbf{1}_A$ para denotar la *Función Indicadora* del conjunto $A$ la cual está dada por

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

**Teorema 3.1.1.** *Consideremos una variable aleatoria $X$ tal que $X \sim Poisson(\lambda)$, entonces*

$$P(X \leq x) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}t^x}{\Gamma(x+1)} dt. \tag{3.1}$$

*Además, para $\lambda$ y $y$ fijas, si $Y$ es una variable aleatoria tal que $Y \sim Gamma(y, 1)$, entonces*

$$P(X \geq y) = P(Y \leq \lambda). \tag{3.2}$$

*Demostración.* Recordemos que si $X$ es una variable aleatoria discreta tal que $X \sim Poisson(\lambda)$, entonces la función de probabilidad de $X$ es $f_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbf{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$.
Consideremos $y$ un entero positivo cualquiera. Entonces,

$$P(X \geq y) = P(\{X < y\}^c) = 1 - P(X \leq y-1) = 1 - \sum_{x=0}^{y-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}.$$

Entonces,

$$P(X \geq y) = 1 - \sum_{x=0}^{y-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}. \tag{3.3}$$

Sea $y$ un entero positivo, por las propiedades de la función Gamma incompleta tenemos que

$$\Gamma(y,\lambda) = \Gamma(y)\sum_{x=0}^{y-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}.$$

Entonces,

$$\sum_{x=0}^{y-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \frac{\Gamma(y,\lambda)}{\Gamma(y)}. \tag{3.4}$$

Combinando (3.3) y (3.4) tenemos que,

$$\begin{aligned} P(X \geq y) &= 1 - \frac{\Gamma(y,\lambda)}{\Gamma(y)} = \frac{\Gamma(y) - \Gamma(y,\lambda)}{\Gamma(y)} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt - \int_\lambda^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt}{\Gamma(y)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^\lambda t^{y-1}e^{-t}\,dt}{\Gamma(y)} = \int_0^\lambda \frac{t^{y-1}e^{-t}\,dt}{\Gamma(y)}dt = P(Y \leq \lambda). \end{aligned}$$

Hemos obtenido la segunda parte. Ahora como $P(X \geq y) = \displaystyle\int_0^\lambda \frac{t^{y-1}e^{-t}dt}{\Gamma(y)}dt$, tenemos que

$$\begin{aligned} P(X \leq y-1) &= P(X < y) = P(\{X \geq y\}^c) = 1 - P(X \geq y) \\ &= 1 - \int_0^\lambda \frac{t^{y-1}e^{-t}dt}{\Gamma(y)}dt = \int_0^\infty \frac{t^{y-1}e^{-t}dt}{\Gamma(y)} - \int_0^\lambda \frac{t^{y-1}e^{-t}dt}{\Gamma(y)}dt = \int_\lambda^\infty \frac{t^{y-1}e^{-t}}{\Gamma(y)}dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(X \leq y-1) = \int_\lambda^\infty \frac{t^{y-1}e^{-t}}{\Gamma(y)}dt.$$

Haciendo $x = y-1$, tenemos finalmente que

$$P(X \leq x) = \int_\lambda^\infty \frac{e^{-t}t^x}{\Gamma(x+1)}dt.$$

□

## 3.2. Relación entre Binomial y Beta.

Veamos ahora una relación particular pero interesante entre la distribución Binomial y la distribución Beta cuando ésta tiene parámetro enteros.

**Teorema 3.2.1.** *Si $X$ una variable aleatoria que tiene distribución Binomial con parámetro $n$ y $p$, y si $Y$ es una variable aleatoria con distribución Beta de parámetros $k$ y $n-k+1$, entonces*

$$P(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p u^{k-1}(1-u)^{n-k} du. \tag{3.5}$$

*Además $F_Y(p) = 1 - F_X(k-1)$, donde $F_X$ y $F_Y$ son, respectivamente, las funciones de distribución de $X$ y $Y$*

*Demostración.* La primera igualdad se sigue de la definición de distribución Binomial (véase [25, pág 96] ).
Ahora, calculemos de dos maneras la integral $\displaystyle\int_p^1 \frac{d}{dt}\left(\binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}\right) dt$.
Primero, por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$\int_p^1 \frac{d}{dt}\left(\binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}\right) dt = \binom{j}{n} p^j (1-p)^{n-j}. \tag{3.6}$$

Ahora la calculamos de la segunda forma:

$$\begin{aligned}
\int_p^1 \frac{d}{dt}\left(\binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}\right) dt &= \int_p^1 \left[-\binom{n}{j}\left(jt^{j-1} - t^j(n-j)(1-t)^{n-j-1}\right)\right] dt \\
&= \int_p^1 \binom{n}{j} t^j (n-j)(1-t)^{n-j-1} dt \\
&\quad - \int_p^1 \binom{n}{j} jt^{j-1}(1-t)^{n-j} dt \\
&= \int_p^1 \frac{n!}{(n-j)!j!} t^j (n-j)(1-t)^{n-j-1} dt \\
&\quad - \int_p^1 \frac{n!}{(n-j)!j!} jt^{j-1}(1-t)^{n-j} dt \\
&= s\int_p^1 \frac{n!}{(n-j-1)!j!} t^j (1-t)^{n-j-1} dt \\
&\quad - \int_p^1 \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} t^{j-1}(1-t)^{n-j} dt \\
&= \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \int_p^1 t^j (1-t)^{n-j-1} dt \\
&\quad - \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \int_p^1 t^{j-1}(1-t)^{n-j} dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_p^1 \frac{d}{dt}\left(\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j}\right)dt = \frac{n!}{(n-j-1)!j!}\int_p^1 t^j(1-t)^{n-j-1}dt - \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}\int_p^1 t^{j-1}(1-t)^{n-j}dt. \tag{3.7}$$

Usando que $n$ y $j$ son enteros y las propiedades de la función Beta tenemos que

$$\frac{n!}{(n-j-1)!j!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-j)\Gamma(j+1)} = \frac{1}{\frac{\Gamma(n-j)\Gamma(j+1)}{\Gamma(n+1)}} = \frac{1}{B(j+1,n-j)}.$$

Entonces,

$$\frac{n!}{(n-j-1)!j!} = \frac{1}{B(j+1,n-j)}. \tag{3.8}$$

También,

$$\frac{n!}{(n-j-1)!(j-1)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(j)} = \frac{1}{\frac{\Gamma(n-j+1)\Gamma(j)}{\Gamma(n+1)}} = \frac{1}{B(j,n-j+1)}.$$

Entonces,

$$\frac{n!}{(n-j-1)!(j-1)!} = \frac{1}{B(j,n-j+1)}. \tag{3.9}$$

Combinando primero las igualdades (3.8) y (3.9) con (3.7) y luego con (3.48) tenemos que

$$\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} = \frac{1}{B(j+1,n-j)}\int_p^1 t^j(1-t)^{n-j-1}dt - \frac{1}{B(j,n-j+1)}\int_p^1 t^{j-1}(1-t)^{n-j}dt. \tag{3.10}$$

Definamos $a_j = \frac{1}{B(j+1,n-j)}\int_p^1 t^j(1-t)^{n-j-1}dt$, entonces observemos que

$$a_{j-1} = \frac{1}{B(j,n-j+1)}\int_p^1 t^{j-1}(1-t)^{n-j}dt.$$

Además,

$$a_{k-1} = \frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_p^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt. \tag{3.11}$$

y

$$a_0 = \frac{1}{B(1,n)}\int_p^1 (1-t)^{n-1}dt. \tag{3.12}$$

Por la identidad (3.10) tenemos que

$$\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} = a_j - a_{j-1}.$$

Sumando hasta $k-1$ observamos que del lado derecho de esta igualdad tenemos una suma telescópica y entonces,

$$\sum_{j=1}^{k-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=\sum_{j=1}^{k-1}(a_j-a_{j-1})=a_{k-1}-a_0. \tag{3.13}$$

Además por (3.11) y (3.12) tenemos que

$$\sum_{j=1}^{k-1}(a_j-a_{j-1})=\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_p^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt-\frac{1}{B(1,n)}\int_p^1(1-t)^{n-1}dt. \tag{3.14}$$

En la igualdad (3.14) aparecen las integrales

$$\int_p^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt. \tag{3.15}$$

y

$$\int_p^1(1-t)^{n-1}dt. \tag{3.16}$$

La integral (3.15) puede dividirse en dos integrales como

$$\int_p^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt=\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt-\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt. \tag{3.17}$$

El valor de la integral (3.16) es

$$\int_p^1(1-t)^{n-1}dt=(1-p)^n. \tag{3.18}$$

Sustituyendo (3.17) y (3.18) en (3.14) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k-1}(a_j-a_{j-1}) &= \frac{1}{B(k,n-k+1)}\left(\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt-\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt\right)\\ &\quad -(1-p)^n\\ &= \frac{1}{B(k,n-k+1)}\left(B(k,n-k+1)-\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt\right)-(1-p)^n\\ &= 1-\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt-(1-p)^n.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{k-1}(a_j-a_{j-1})=1-\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt-(1-p)^n.$$

Por la identidad (3.13) tenemos que

$$\sum_{j=1}^{k-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=1-\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt-(1-p)^n.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{k-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}+(1-p)^n=1-\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\;dt.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\;dt=1-\sum_{j=1}^{k-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}-(1-p)^n.$$

Incluyendo $(1-p)^n$ en la suma del lado derecho de la igualdad tenemos que

$$\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\;dt=1-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\;dt=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\;dt=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \tag{3.19}$$

que prueba la primera parte del teorema.

Ahora, tenemos que

$$P(X\geq k)=P(\{X<k\}^c)=1-P(X<k)=1-P(X\leq k-1)=1-F_X(k-1).$$

Entonces,

$$P(X\geq k)=1-F_X(k-1). \tag{3.20}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}F_Y(p) &= P(Y\leq p)=\int_0^p \frac{1}{B(k,n-k+1)}t^k(1-t)^{n-k}\;dt\\ &= \frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\;dt.\end{aligned}$$

Por (3.19) y (3.20) se sigue que

$$F_Y(p)=1-F_X(k-1).$$

con lo que concluimos la demostración del teorema. □

## 3.3. Desigualdades integrales y variables aleatorias.

En esta sección aplicaremos el Teorema 1.3.12 para deducir algunas desigualdades relacionadas con el *$n$-ésimo momento alrededor del origen* de una variable aleatoria $X$ el cual está definido como $E(X^n)$.

**Teorema 3.3.1.** *Consideremos una variable aleatoria $X$ continua estrictamente positiva con función de densidad $f_X(x) = f(x)\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ donde $a$ y $b$ son números reales no negativos con $a \leq b$. Entonces, si $E(X^n)$ existe para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$\frac{1}{1+E(X^n)} \leq \int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n}\, dx. \tag{3.21}$$

*Demostración.* Sean $a$ y $b$ números reales tales que $0 \leq a \leq b$. Definamos para $(-1,\infty)$, la función $\phi(y) = \dfrac{1}{1+y}$. Entonces, $\phi''(y) = \dfrac{2}{(1+y)^3} \geq 0$ para todo $y$ de ese intervalo. De lo anterior se sigue que $\phi$ es una función convexa en $(-1,\infty)$.

Para el intervalo $(0,\infty)$ definamos la función $g(x) = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, es claro que $g$ es una función continua.

Por el Teorema 1.3.12, si hacemos $p(x) := f(x)$, tenemos que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$ por ser una función de densidad y tenemos que

$$\phi\left(\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)x^n\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}\right) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b \phi(x^n)f(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}.$$

Usando que $f_X(x)$ es de densidad y que $E(X^n) = \displaystyle\int_a^b x^n f(x)\, dx$ y la definición de $\phi$ tenemos que

$$\frac{1}{1+E(X^n)} \leq \int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n}\, dx.$$

y esto termina la demostración. □

El Teorema 3.3.1 es un resultado general y tenemos los siguientes corolarios:

**Corolario 22.** *Con las hipótesis del Teorema 3.3.1 tenemos que si $n = 1$, entonces*

$$\frac{1-\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{1+x}\, dx}{\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{1+x}\, dx} \leq E(X). \tag{3.22}$$

**Corolario 23.** *Si $X$ es una variable aleatoria con distribución Exponencial de parámetro $\lambda$, entonces*

$$\frac{1}{1+\lambda} \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{1+x}\, dx. \tag{3.23}$$

*Demostración.* En el teorema 3.3.1 hacemos $n = 1$. Como $X \sim exp(\lambda)$, entonces la función de densidad de $X$ es $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ y sabemos (véase [25]) que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}} \leq \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1+x}\, dx.$$

Resolviendo las fracciones del lado izquierdo y sacando la $\lambda$ de la integral del lado derecho se tiene el resultado. □

**Teorema 3.3.2.** *Consideremos una variable aleatoria $X$ tal que $X \sim Beta(a, b)$ con $a, b > 0$, entonces*

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln(x)\, dx \leq \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \ln\left(\frac{a}{a+b}\right). \tag{3.24}$$

*Demostración.* Si $X \sim Beta(a, b)$, entonces la función de densidad de $X$ es

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x). \tag{3.25}$$

Sabemos que $E(X) = \dfrac{a}{a+b}$. Hacemos $g(x) := x$, $p(x) := f(x)$ y $\phi(x) := \log(x)$. Entonces, aplicando el Teorema 1.3.12 para cuando la función $\phi$ es cóncava ($\phi = \ln$ es cóncava) tenemos que:

$$\phi\left(\frac{\int_0^1 x \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx}{\int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx}\right) \geq \frac{\int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\phi(x)\, dx}{\int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx}.$$

Entonces,

$$\ln(E(X)) \geq \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln(x)\, dx. \tag{3.26}$$

Así,

$$\ln\left(\frac{a}{a+b}\right) \geq \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln(x)\, dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln(x)\, dx \leq \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \ln\left(\frac{a}{a+b}\right).$$

□

**Teorema 3.3.3.** *Sea $X$ una variable aleatoria continua estrictamente positiva con función de densidad $f_X(x) = f(x)\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, con $0 \leq a \leq b$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ $E(X - E(X))^n$, existe, se tiene que*

$$\frac{1}{1+E(X-E(X))^n} \leq \int_a^b \frac{f(x)}{1+(x-E(X))^n}\, dx. \tag{3.27}$$

*Demostración.* Para $x \in (-1,\infty)$ definamos $\phi(y) := \dfrac{1}{1+y}$. Como en el Teorema 3.21 tenemos que $\phi$ es una función convexa. Definamos $p(x) := f(x)$ y $g(x) := (x-E(X))^n$. Aplicando el Teorema 1.3.12 tenemos que

$$\phi\left(\frac{\displaystyle\int_a^b (x-E(X))^n f(x)\ dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx}\right) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b \phi((x-E(X))^n) f(x)\ dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx}.$$

Usando la definición de $\phi$ y el hecho de que $f_X(x)$ es una función de densidad y que

$$E(g(X)) = \int_a^b g(x)\, f(x)\ dx$$

tenemos que

$$\phi(E(g(X))) = \frac{1}{1+E(X-E(X))^n} \leq \int_a^b \frac{f(x)}{1+(x-E(X))^n}\ dx.$$

□

**Corolario 24.** *Con las mismas hipótesis del Teorema 3.3.3, tenemos que si $n=2$ entonces,*

$$\frac{1-\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{1+(x-E(X))^2}\ dx}{\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{1+(x-E(X))^2}\ dx} \leq Var(X). \tag{3.28}$$

*Demostración.* Sabemos que $Var(X) = E(X-E(X))^2$. Sustituyendo y despejando $Var(X)$ se tiene el resultado. □

**Corolario 25.** *Si $X$ es una variable aleatoria tal que $X \sim exp(\lambda)$, entonces*

$$\frac{1}{1+\lambda^2} \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2+(\lambda x-1)^2}\ dx. \tag{3.29}$$

*Demostración.* Sabemos que si $X \sim exp(\lambda)$ entonces $E(X-E(X))^2 = Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Haciendo $n=2$ en el Teorema 3.3.3, tenemos que

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda^2}} \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{1+(x-\frac{1}{\lambda})^2}\ dx.$$

Entonces,

$$\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \leq \int_0^\infty \frac{\lambda^2 e^{-\lambda x}}{\lambda^2+(\lambda x-1)^2}\ dx.$$

Cancelando $\lambda^2$ se tiene el resultado. □

## 3.4. Aplicación a la distribución normal.

En esta sección aplicaremos la desigualdad del Teorema 1.3.12 a la distribución Normal. Recordemos que si $X$ es una variable aleatoria normal estándar, es decir, si $X \sim N(0,1)$ (véase [25, pág. 104]), entonces tiene como función de distribución a

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

y por lo tanto tiene como función de densidad a $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ para $-\infty < x < \infty$.

Tenemos primero el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.1.** *Consideremos la función de densidad de la distribución normal estándar $\phi(x)$ y la correspondiente función de distribución $\Phi(x)$. Entonces*

$$\phi'(x) + x\phi(x) = 0. \tag{3.30}$$

*Además, para $x > 0$, tenemos que*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} < \frac{1 - \Phi(x)}{\phi(x)} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^5}. \tag{3.31}$$

*El cociente $\frac{1 - \Phi(x)}{\phi(x)}$ se conoce como* cociente de Mills.

*Demostración.* Para la primera parte tenemos que $\phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Luego,

$$\phi'(x) + x\phi(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Ahora, utilizando esta igualdad tenemos que $\phi = \frac{-\phi'}{x}$ y por lo tanto,

$$1 - \Phi(x) = 1 - P(X \leq (x) = P(\{X \leq x\}^c) = P(X > x) = \int_x^{\infty} \phi(w) \, dw = -\int_x^{\infty} \frac{\phi'(w)}{w} \, dw.$$

Entonces,

$$1 - \Phi(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\phi'(w)}{w} \, dw. \tag{3.32}$$

Integrando por partes tenemos que $u = \frac{1}{w}$ y $dv = \phi'(w) \, dw$, entonces $du = \frac{-1}{w^2} \, dw$ y $v = \phi(w)$. Entonces,

$$-\int_x^{\infty} \frac{\phi'(w)}{w} \, dw = \frac{\phi(x)}{x} + \int_x^{\infty} \frac{\phi'(w)}{w^3} \, dw.$$

Por (3.32) tenemos que

$$1 - \Phi(x) = \frac{\phi(x)}{x} + \int_x^{\infty} \frac{\phi'(w)}{w^3} \, dw. \tag{3.33}$$

Integrando nuevamente por partes tenemos que $u = \frac{1}{w^3}$ y $dv = \phi'(w)\, dw$, entonces $du = \dfrac{-3}{w^4}\, dw$ y $v = \phi(w)$. Entonces, utilizando que $\phi(w) = -\dfrac{\phi'(w)}{w}$ tenemos que

$$\int_x^\infty \frac{\phi'(w)}{w^3}\, dw = -\frac{\phi(x)}{x} + \int_x^\infty \frac{3\phi(w)}{w}\, dw = -\frac{\phi(x)}{x^3} - \int_x^\infty \frac{3\phi'(w)}{w^5}\, dw.$$

Por la igualdad (3.33) tenemos que

$$1 - \Phi(x) = \frac{\phi(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^3} - \int_x^\infty \frac{3\phi'(w)}{w^5}\, dw. \tag{3.34}$$

Integrando nuevamente por partes tenemos que $u = \dfrac{1}{w^5}$ y $dv = \phi'(w)dw$, entonces $du = \dfrac{-5}{w^6}$ y $v = \phi(w)$. Entonces,

$$-\int_x^\infty \frac{3\phi'(w)}{w^5}\, dw = \frac{3\phi(x)}{x^5} - \int_x^\infty \frac{15\phi(w)}{w^6}\, dw.$$

Por la igualdad (3.34) tenemos que

$$1 - \Phi(x) = \frac{\phi(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^3} + \frac{3\phi(x)}{x^5} - \int_x^\infty \frac{15\phi(w)}{w^6}\, dw. \tag{3.35}$$

Definamos, para $x > 0$, la función $g(x) := \dfrac{3\phi(x)}{x^5} - \displaystyle\int_x^\infty \frac{15\phi(w)}{w^6}\, dw$. De esto tenemos que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = \infty. \tag{3.36}$$

y

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = 0. \tag{3.37}$$

Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a $g$ tenemos que

$$g'(x) = 3\left(\frac{\phi'(x)x^5 - 5\phi(x)x^4}{x^{10}}\right) + \frac{15\phi(x)}{x^6}.$$

Utilizando que $\phi' = -x\phi$, haciendo operaciones y reduciendo términos semejantes tenemos que, para todo $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-3\phi(x)}{x^4} < 0.$$

Por lo tanto, $g$ es una función decreciente, y usando los límites (3.36) y (3.37) se sigue que, para todo $x > 0$, que $g(x) > 0$.

Entonces, por (3.35) tenemos que

$$1 - \Phi(x) = \frac{\phi(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^3} + g(x) > \frac{\phi(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^3}.$$

O equivalentemente,

$$\frac{\phi(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^3} < 1 - \Phi(x)$$

Dividiendo entre $\phi(x)$ tenemos que

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} < \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)}. \tag{3.38}$$

Ahora en la igualdad (3.35) es claro que $-\displaystyle\int_x^\infty \frac{15\phi(w)}{w^6}\ dw < 0$ y entonces,

$$1-\Phi(x) < \frac{\phi(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^3} + \frac{3\phi(x)}{x^5}.$$

Dividiendo entre $\phi(x)$ tenemos que

$$\frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}. \tag{3.39}$$

Combinando (3.38) y (3.39) tenemos el resultado. □

Veamos ahora como dar otra estimación de una cota inferior del cociente de Mills mediante la desigualdad del Teorema 1.3.12.

**Teorema 3.4.2.** *Consideremos la función de densidad de la distribución normal estándar $\phi(x)$ y la correspondiente función de distribución $\Phi(x)$. Entonces, para $x > 0$ tenemos que*

$$\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{2} \le \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)}. \tag{3.40}$$

*Demostración.* Para evitar ambigüedades con la notación para la función convexa del Teorema 1.3.12 y la función de densidad $\phi$ de la distribución normal estándar, cambiaremos $f$ por $\phi$ en la desigualdad del teorema, es decir, escribiremos

$$f\left(\frac{\displaystyle\int_a^b g(t)p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^b p(t)\ dt}\right) \le \frac{\displaystyle\int_a^b f(g(t))p(t)\ dt}{\displaystyle\int_a^b p(t)\ dt}. \tag{3.41}$$

En esta desigualdad elegimos como función convexa a $f(t) = \dfrac{1}{t}$ y hacemos $a = x$, $b = \infty$, $g(t) = t$ y $p(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$. Entonces,

$$f\left(\frac{\displaystyle\int_x^\infty t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}{\displaystyle\int_x^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}\right) \le \frac{\displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}{\displaystyle\int_x^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\displaystyle\int_x^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}{\displaystyle\int_x^\infty t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt} \le \frac{\displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}{\displaystyle\int_x^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}. \tag{3.42}$$

Integrando por partes tenemos que

$$\int_x^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

y

$$\int_x^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt.$$

Sustituyendo en (3.42) tenemos que

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{xe^{-\frac{x^2}{2}} + \displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt} \leq \frac{\displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}{e^{-\frac{x^2}{2}}}.$$

Equivalentemente tenemos que

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 \leq xe^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt + \left(\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\right)^2.$$

Completando cuadrados,

$$e^{-x^2} + \frac{x^2 e^{-x^2}}{4} \leq \frac{x^2 e^{-x^2}}{4} + xe^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt + \left(\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\right)^2.$$

Entonces,

$$e^{-x^2}\left(\frac{4+x^2}{4}\right) \leq \left(\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{2} + \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\right)^2.$$

Así,

$$\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{2} \leq \frac{\displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = \frac{\displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} = \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{2} \leq \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)}.$$

Esto concluye la demostración. □

## 3.5. Transformada de Laplace y esperanzas de variables aleatorias.

En esta sección calculemos algunas esperanzas de la forma $E(X^r)$, donde $r$ no necesariamente es entero, más en particular cuando $0 < r < 1$, para ello nos basaremos en la *Transformada de Laplace* introducida en la Definición 2.2.2. Como acordamos antes, para simplificar la notación escribiremos $\mathscr{L}\{f(x)\}$ en lugar de $\mathscr{L}\{f(x)\}(s)$ en los resultados que siguen.

Comenzaremos con el siguiente teorema:

**Teorema 3.5.1.** *Sea $X$ una variable aleatoria continua no negativa con esperanza finita y con función de densidad $f_X(x) = f(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$. Entonces, para todo $0 < r < 1$ tenemos que*

$$E(X^r) = \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \frac{1 - \mathscr{L}\{f(x)\}}{s^{r+1}}\, ds. \tag{3.43}$$

*Demostración.* Comenzaremos calculando la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, ds.$

Integramos haciendo el cambio de variable $u = sx$, entonces $du = x\ ds$ y $ds = \dfrac{du}{x}$. Si $s = 0$, entonces $u = 0$ y si $s \longrightarrow \infty$, entonces $u \longrightarrow \infty$. Luego,

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, ds = \int_0^\infty \frac{1-e^{-u}}{\frac{u^{r+1}}{x^{r+1}}} \frac{du}{x} = x^r \int_0^\infty (u^{-r-1} - u^{-r-1}e^{-u})\, du = -x^r\Gamma(-r).$$

Pero $-r\Gamma(-r) = \Gamma(1-r)$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, ds = -x^r \frac{\Gamma(1-r)}{-r},$$

y por lo tanto, para todo $x \geq 0$ y todo $0 < r < 1$ tenemos que

$$x^r = \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, ds. \tag{3.44}$$

Definiendo $g(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, ds$ tenemos que

$$x^r = \frac{r}{\Gamma(1-r)} g(x). \tag{3.45}$$

Aplicando (3.44) y (3.45) tenemos que

$$\begin{aligned}
E(X^r) &= E\left(\frac{r}{\Gamma(1-r)} g(X)\right) = \frac{r}{\Gamma(1-r)} E(g(X)) \\
&= \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty g(x) f(x)\, dx \\
&= \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, ds\right) f(x)\, dx \\
&= \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, ds\, dx \\
&= \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) \frac{1-e^{-sx}}{s^{r+1}}\, dx\, ds \\
&= \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^\infty (f(x) - f(x)e^{-sx})\, dx\, ds \\
&= \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \frac{1}{s^{r+1}} \left[\int_0^\infty f(x)\, dx - \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\, dx\right] ds \\
&= \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \frac{1 - \mathscr{L}\{f(x)\}}{s^{r+1}}\, ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(X^r) = \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \frac{1 - \mathscr{L}\{f(x)\}}{s^{r+1}} \; ds,$$

que prueba el teorema. $\square$

**Teorema 3.5.2.** *Sea $X$ una variable aleatoria estrictamente positiva con esperanza finita y con función de densidad $f_X(x) = f(x)\mathbf{1}_{0,\infty)}(x)$. Entonces, para todo $r > 0$ tenemos que*

$$E(X^{-r}) = \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^\infty \mathscr{L}\{f(x)\}(s^{\frac{1}{r}}) \; ds. \tag{3.46}$$

*donde $\mathscr{L}\{f(x)\}(s^{\frac{1}{r}})$ indica la Transformada de Laplace de $f$ evaluada en $s^{\frac{1}{r}}$.*

*Demostración.* Calculemos primero la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\left(\frac{w}{x}\right)^r} \; dw$ para todo $x \geq 0$ y todo $r > 0$. Integramos haciendo el cambio de variable $u = \left(\dfrac{w}{x}\right)^r$. Entonces, $w = xu^{\frac{1}{r}}$ y $dw = \dfrac{x}{r}u^{\frac{1}{r}-1} \; du$. Si $w = 0$ entonces $u = 0$ y si $w \longrightarrow \infty$ entonces $u \longrightarrow \infty$. Luego,

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{w}{x}\right)^r} \; dw = \int_0^\infty e^{-u}\frac{x}{r}u^{\frac{1}{r}-1} \; du = \frac{x}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right).$$

Entonces,

$$x = \frac{r}{\Gamma\left(\dfrac{1}{r}\right)} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{w}{x}\right)^r} \; dw.$$

Redefiniendo $x$ por $x^{-r}$ y $r$ por $\dfrac{1}{r}$ en la igualdad anterior tenemos, para todo $x \geq 0$ y para todo $r > 0$ que

$$x^{-r} = \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-xw^{\frac{1}{r}}} \; dw. \tag{3.47}$$

Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xw^{\frac{1}{r}}} \; dw$. Entonces

$$x^{-r} = \frac{1}{r\Gamma(r)} g(x) \tag{3.48}$$

Aplicando (3.47) y (3.48) tenemos que

$$\begin{aligned}
E(X^{-r}) &= E\left(\frac{1}{r\Gamma(r)}g(X)\right) = \frac{1}{r\Gamma(r)}E(g(X)) \\
&= \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^\infty g(x)\, f(x) \; dx \\
&= \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xw^{\frac{1}{r}}} \; dw\right) f(x) \; dx \\
&= \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)e^{-xw^{\frac{1}{r}}} \; dw\, dx \\
&= \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)e^{-xw^{\frac{1}{r}}} \; dx\, dw \\
&= \int_0^\infty \mathscr{L}\{f(x)\}[w^{\frac{1}{r}}] \; dw.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(X^{-r}) = \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^\infty \mathscr{L}\{f(x)\}[w^{\frac{1}{r}}]\ dw.$$

Esto prueba el teorema. $\square$

Veamos ahora otras aplicaciones de la transformada de Laplace a la probabilidad.

**Teorema 3.5.3.** *Consideremos una variable aleatoria continua no negativa $X$ con función de distribución $F_X(x)$ y sea $g(t)$ una función integrable en el intervalo finito $[0, x]$. Definamos la función $G$ que hace que $\int_0^x g(t)dt = G(x) - G(0)$. Entonces,*

$$E(G(X)) = G(0) + \int_0^\infty g(t)(1 - F(t))\ dt. \tag{3.49}$$

*Demostración.* La prueba la haremos con el Teorema de Fubini al intercambiar el orden de integración.
Por hipótesis tenemos que $G(x) = G(0) + \int_0^x g(t)\ dt$, sea $f$ la función de densidad de $X$, entonces

$$\begin{aligned}
E(G(X)) &= \int_0^\infty G(x)f(x)\ dx = \int_0^\infty \left(G(0) + \int_0^x g(t)\ dt\right) f(x)\ dx \\
&= G(0)\int_0^\infty f(x)\ dx + \int_0^\infty \int_0^x f(x)g(t)\ dt\, dx \\
&= G(0) + \int_0^\infty \int_t^\infty f(x)\, g(t)\ dx\, dt \\
&= G(0) + \int_0^\infty g(t) \int_t^\infty f(x)\ dx\, dt \\
&= G(0) + \int_0^\infty g(t)P(X > t)\ dt \\
&= G(0) + \int_0^\infty g(t)(1 - F(t))\ dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(G(X)) = G(0) + \int_0^\infty g(t)(1 - F(t))\ dt.$$

$\square$

Observemos que en el teorema anterior no es necesario que $X$ sea una variable aleatoria continua, también puede ser discreta, en cuyo caso, la demostración se hace utilizando la integral de Riemann-Stieltjes.

Veamos en el siguiente ejemplo cómo se relaciona el Teorema 3.5.2 con la transformada de Laplace y la distribución exponencial.

Elijamos la función $g(t) = -se^{-st}$. De aquí que $G(0) = 1$ y $G(x) = e^{-sx}$. Sea $X$ una variable aleatoria tal que $X \sim \exp(\lambda)$, entonces $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x > 0$ y además $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x > 0$. Aplicando el Teorema 3.5.2 tenemos que

$$\begin{aligned} E\left(e^{-sX}\right) &= E(G(X)) = 1 - s\int_0^\infty e^{-st}(1 - F(t))\ dt \\ &= 1 - s\int_0^\infty e^{-st}\ dt + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\ dt \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\ dt = s\ \mathscr{L}\{F(t)\}. \end{aligned}$$

Por una tabla de transformadas de Laplace se ve que $\mathscr{L}\{F(t)\} = \dfrac{\lambda}{s(s+\lambda)}$.

Por lo tanto,

$$E\left(e^{-sX}\right) = \frac{\lambda}{s+\lambda}. \tag{3.50}$$

Veamos ahora el siguiente teorema que relaciona esperanzas, la función gamma y la transformada de Laplace.

**Teorema 3.5.4.** *Sea $X$ una variable aleatoria continua y positiva con función de densidad $f$. Para $n > 0$ tenemos que*

$$E(X^{-n}) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty s^{n-1}\mathscr{L}\{f(t)\}\ ds. \tag{3.51}$$

*Demostración.* Definamos la función

$$G(t) := \int_0^\infty s^{n-1}e^{-st}\ ds.$$

Hacemos el cambio de variable $w = sX$, con lo que $ds = \dfrac{dw}{X}$. Entonces,

$$E\left(\int_0^\infty s^{n-1}e^{-sX}\ ds\right) = E\left(\int_0^\infty \frac{w^{n-1}}{X^{n-1}}e^{-w}\frac{dx}{X}\right) = E\left(X^{-n}\int_0^\infty w^{n-1}e^{-w}\ dw\right).$$

Por lo tanto,

$$E\left(\int_0^\infty s^{n-1}e^{-sX}\ ds\right) = \Gamma(n)E(X^{-n}). \tag{3.52}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{n-1}\mathscr{L}\{f(t)\}\ ds &= \int_0^\infty s^{n-1}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt\,ds = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}s^{n-1}f(t)\ dt\,ds \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty s^{n-1}e^{-st}f(t)\ ds\,dt = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty s^{n-1}e^{-st}\ ds\right)\ dt \\ &= E\left(\int_0^\infty s^{n-1}e^{-sX}\ ds\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty s^{n-1}\mathscr{L}\{f(t)\}\ ds = E\left(\int_0^\infty s^{n-1}e^{-sX}\ ds\right). \tag{3.53}$$

Combinando (3.52) y (3.53) se tiene el resultado deseado. □

Como aplicación del Teorema 3.5.4 podemos calcular $E(X^{-1})$, $E(X^{-2})$ y $Var(X^{-1})$ cuando $X \sim Gamma(n, \lambda)$ como sigue:

**Teorema 3.5.5.** *Sea $X$ una variable aleatoria tal que $X \sim Gamma(n, \lambda)$, entonces $E(X^{-1}) = \dfrac{\lambda}{n-1}$ y para $n > 1$, $E(X^{-2}) = \dfrac{\lambda^2}{n-2} - \dfrac{\lambda^2}{n-1}$. Además, para $n > 2$ tenemos que $Var(X^{-1}) = \dfrac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$.*

*Demostración.* Si $f$ es la función de densidad de $X$, entonces $f(t) = \dfrac{\lambda^{n-1}t^{n-1}}{\Gamma(n)}\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$. Calculemos la transformada de Laplace de esta función,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t(s+\lambda)}\ dt.$$

Haciendo el cambio de variable $w = t(s+\lambda)$ tenemos que $dw = (s+\lambda)\ dt$ y entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{w^{n-1}}{(s+\lambda)^n}e^{-w}\ dw = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n.$$

Entonces,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n.$$

Aplicando el teorema anterior tenemos que

$$E(X^{-1}) = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n ds = \frac{\lambda}{n-1}. \tag{3.54}$$

Por lo tanto,

$$E(X^{-1}) = \frac{\lambda}{s-1}. \tag{3.55}$$

Para $n > 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
E(X^{-2}) &= \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^\infty s\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n\ ds\\
&= \int_0^\infty \lambda\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{n-1}\left(\frac{s}{s+\lambda}\right)\ ds\\
&= \int_0^\infty \lambda\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)\ ds\\
&= \int_0^\infty \lambda\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{n-1} - \lambda\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n\ ds\\
&= \int_0^\infty \lambda\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{n-1}\ ds - \int_0^\infty \lambda\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n\ ds\\
&= \frac{\lambda^2}{n-2} - \frac{\lambda^2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(X^{-2}) = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty s \left( \frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^n ds = \frac{\lambda^2}{n-2} - \frac{\lambda^2}{n-1}.$$

Ahora, para $n > 2$ y utilizando (3.54) tenemos que

$$Var(X^{-1}) = E(X^{-2}) - E^2(X^{-1}) = \frac{\lambda^2}{n-2} - \frac{\lambda^2}{n-1} - \left( \frac{\lambda}{n-1} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

Por lo tanto,

$$Var(X^{-1}) = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

Esto finaliza la demostración. □

**Teorema 3.5.6.** *Sea $X$ una variable aleatoria estrictamente positiva con transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$. Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces,*

$$E((aX+b)^{-1}) = \int_0^\infty e^{-bs} \mathscr{L}\{f(t)\}(as)\ ds. \tag{3.56}$$

*donde $\mathscr{L}\{f(t)\}(as)$ denota la evaluación de la transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$ en el punto $as$.*

*Demostración.* Por definición de Transformada de Laplace tenemos que

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(as) = \int_0^\infty e^{-ast} f(t)\ dt.$$

y

$$e^{-bs}\mathscr{L}\{f(t)\}(as) = \int_0^\infty e^{-s(at+b)} f(t)\ dt.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-bs}\mathscr{L}\{f(t)\}(as)\ ds &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(at+b)} f(t)\ dt\, ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(at+b)} f(t)\ ds\, dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty e^{-s(at+b)}\ ds\, dt = \int_0^\infty (at+b)^{-1} f(t)\ dt = E((aX+b)^{-1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E((aX+b)^{-1}) = \int_0^\infty e^{-bs} \mathscr{L}\{f(t)\}(as)\ ds.$$

Esto finaliza la demostración. □

Veamos ahora una aplicación de la transformada de Laplace a la Teoría de los Números. Comenzaremos con algunos resultados auxiliares.

**Lema 26.** *Definimos $G(t) = a_n$, para $n \leq t \leq n+1$, y $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Entonces*

$$\mathscr{L}\{G(t+k)\} = e^{ks}\mathscr{L}\{G(t)\} - \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right) \sum_{n=0}^{k-1} a_n e^{(k-n)s}. \tag{3.57}$$

*Donde,*

$$\mathscr{L}\{G(t+k)\} = \mathscr{L}\{G(t+k)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t+k)\ dt. \tag{3.58}$$

*Demostración.* Haciendo el cambio de variable $w = t + k$ en (3.58) tenemos que los nuevos límites de integración son $w = k$ y $w = \infty$ y $dt = dw$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{G(t+k)\} &= \int_k^\infty e^{-s(w-k)} G(w)\ dw \\
&= e^{ks} \int_k^\infty e^{-sw} G(w)\ dw = \\
&= e^{ks} \left( \int_0^\infty e^{-sw} G(w)\ dw - \int_0^k e^{-sw} G(w)\ dw \right) \\
&= e^{ks} \mathscr{L}\{G(t)\} - e^{ks} \int_0^k e^{-sw} G(w)\ dw.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}\{G(t+k)\} = e^{ks} \mathscr{L}\{G(t)\} - e^{ks} \int_0^k e^{-sw} G(w)\ dw. \tag{3.59}$$

Utilizando que $G(t) = a_n$ para $n \leq t < n+1$ observemos que la última integral de esta igualdad la podemos escribir como

$$\int_0^k e^{-sw} G(w)\ dw = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \int_n^{n+1} e^{-sw} dw = \sum_{n=1}^{k-1} a_n e^{-sn} \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right).$$

Sustituyendo en (3.59) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{G(t+k)\} = e^{ks} \mathscr{L}\{G(t)\} - e^{ks} \sum_{n=1}^{k-1} a_n e^{-sn} \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right) = \\
e^{ks} \mathscr{L}\{G(t)\} - \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right) \sum_{n=0}^{k-1} a_n e^{(k-n)s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}\{G(t+k)\} = e^{ks} \mathscr{L}\{G(t)\} - \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right) \sum_{n=0}^{k-1} a_n e^{(k-n)s}.$$

□

Como consecuencia de este lema tenemos las siguientes igualdades inmediatas:

$$\mathscr{L}\{G(t+1)\} = e^s \mathscr{L}\{G(t)\} - \frac{a_0 e^s (1 - e^{-s})}{s} \tag{3.60}$$

y

$$\mathscr{L}\{G(t+2)\} = e^{2s} \mathscr{L}\{G(t)\} - \frac{e^s (1 - e^{-s})(a_0 e^s + a_1)}{s}. \tag{3.61}$$

**Lema 27.** *Definimos $G(t) = a^n$ para $n \leq t < n+1$ y $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con $a$ una constante. Entonces*

$$\mathscr{L}\{G(t)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})}. \tag{3.62}$$

*Demostración.* Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-st}a^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-sn}\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right) \\
&= \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-s}\right)^n = \frac{1-e^{-s}}{s(1-ae^{-s})}.
\end{aligned}$$

Al final de esta igualdad hemos usado la serie geométrica. Por lo tanto,

$$\mathscr{L}\{G(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-ae^{-s})}.$$

□

**Teorema 3.5.7.** *Sean $F_0 = 0$ y $F_1 = F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $n \geq 0$. Si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la razón áurea y si $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, entonces*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}. \tag{3.63}$$

*Demostración.* Consideremos a $F_n$ como función de $n$ y vamos a aplicar la Transformada de Laplace a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $n$ como variable. Entonces,

$$\mathscr{L}\{F_{n+2}\} = \mathscr{L}\{F_{n+1}\} + \mathscr{L}\{F_n\}.$$

Aplicando las igualdades (3.60) y (3.61) tenemos que

$$e^{2s}\mathscr{L}\{F_n\} - \frac{e^s(1-e^{-s})(F_0e^s + F_1)}{s} = e^s\mathscr{L}\{F_n\} - \frac{F_0e^s(1-e^{-s})}{s} + \mathscr{L}\{F_n\}.$$

De donde,

$$e^{2s}\mathscr{L}\{F_n\} - \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} = e^s\mathscr{L}\{F_n\} + \mathscr{L}\{F_n\}.$$

Por lo que,

$$\mathscr{L}\{F_n\}(e^{2s} - e^s - 1) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}.$$

Lo cual implica,

$$\mathscr{L}\{F_n\} = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s} - e^{-s} - 1)}. \tag{3.64}$$

Si en la expresión $e^{2s} - e^s - 1$ hacemos $x = e^s$ obtenemos la conocida expresión $x^2 - x - 1$ que tiene como las raíces a $x = \alpha$ y $x = \beta$. Podemos entonces descomponer en fracciones parciales la igualdad 3.64 como sigue:

$$\mathscr{L}\{F_n\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-e^{-s}}{s(1-\alpha e^{-s})} - \frac{1-e^{-s}}{s(1-\beta e^{-s})}\right).$$

Por el Lema 27 tenemos que

$$\mathscr{L}\{F_n\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\mathscr{L}\{\alpha^n\} - \mathscr{L}\{\beta^n\}\right).$$

Finalmente, aplicando la transformada inversa de Laplace tenemos que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Hemos obtenido, vía la transformada de Laplace una expresión bien conocida del $n$-ésimo número de Fibonacci. □

Al hablar de los números de Fibonacci no podemos omitir la siguiente interesante aplicación en probabilidad:

Se lanza una moneda equilibrada hasta que aparezcan dos águilas consecutivas. Sea $A_n$ el evento de que este hecho sucede en el $n$-ésimo lanzamiento. ¿Quién es $P(A_n)$?

Escribamos los siguientes eventos:

$$A_2 = \{AA\}$$

$$A_3 = \{SAA\}.$$

$$A_4 = \{SSAA, ASAA\}.$$

$$A_5 = \{SASAA, ASSAA, SSSAA\}.$$

$$A_6 = \{ASASAA, SASSAA, SSASAA, ASSSAA, SSSSAA\}.$$

$$\begin{aligned} A_7 = \{&ASASSAA, SASASAA, ASSASAA, SASSSAA, \\ &ASSSSAA, SSASSAA, SSSASAA, SSSSSAA\}. \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Observemos que cada uno de estos eventos tiene $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ elementos con $2, 3, 4, 5, 6, 7, ...$ letras respectivamente, donde las dos últimas letras de cada elemento son $A$.

Ahora, calculamos las probabilidades de los eventos anteriores:

$$P(A_2) = \frac{1}{4} = \frac{F_1}{2^2}.$$

$$P(A_3) = \frac{1}{8} = \frac{F_2}{2^3}.$$

$$P(A_4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{F_3}{2^4}.$$

$$P(A_5) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32} = \frac{F_4}{2^5}.$$

$$P(A_6) = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{5}{64} = \frac{F_5}{2^6}.$$

$$P(A_7) = \frac{1}{128} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} = \frac{F_6}{2^7}.$$

$$\vdots$$

De lo anterior se infiere que $P(A_n) = \frac{F_{n-1}}{2^n}$, $n \geq 2$.

Veamos esto más formalmente:

Denotemos con $p_n$ la probabilidad de que una sucesión de $n$ lanzamientos no tenga dos águilas consecutivas.

Denotemos con $H_n$ el número de sucesiones de $n$ lanzamientos que no tienen dos águilas consecutivas y que terminan en sol y con $K_n$ el número de sucesiones de $n$ lanzamientos que tienen dos águilas consecutivas y terminan en águila. Además sea $B_n$ el número de sucesiones de $n$ lanzamientos que no tienen dos águilas consecutivas. Entonces,

$$K_n = H_{n-1}.$$

$$H_n = K_{n-1} + H_{n-1} = H_{n-2} + H_{n-1}.$$

$$B_n = B_{N-1} + H_{n-1} = B_{n-1} + K_{n-2} + H_{n-2} = B_{n-1} + B_{n-2}.$$

Por lo tanto,

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2}. \tag{3.65}$$

Como $B_1 = 1$ y $B_2 = 3$, de la igualdad (3.65) se sigue que $A_n = F_{n+1}$, el $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci.

Así que $p_n$ es igual a este número dividido entre el número total de posibles sucesiones de $n$ resultados el cual es $2^n$.

Sea $X$ el número de lanzamientos necesarios hasta obtener dos águilas consecutivas. Entonces, la probabilidad de que que se necesiten al menos $m$ lanzamientos es igual a la probabilidad de que una serie de $m-1$ lanzamientos no tenga dos águilas consecutivas. Esto es,

$$P(X \geq m) = p_{m-1} = \frac{F_m}{2^{m-1}}.$$

Así,

$$P(X > m) = p_m = \frac{F_{m+1}}{2^m}.$$

Por lo tanto,

$$P(X = m) = p_{m-1} - p_m = \frac{F_m - F_{m+1}}{2^{m-1}} = \frac{F_{m-1}}{2^m}.$$

## 3.6. Otras aplicaciones.

Veremos algunas otras aplicaciones de las funciones convexas, las funciones gamma y beta a la Teoría de la Probabilidad.

**Teorema 3.6.1.** *Sean $X$ y $Y$ dos variables aleatorias. Si para todo todo $r > 0$, $E|X|^r$ y $E|Y|^r$ existen, entonces tenemos que*

$$E|X+Y|^r \leq c_r(E|X|^r + E|Y|^r), \tag{3.66}$$

*en donde $c_r$ es tal que $c_r = 1$ si $0 < r \leq 1$ y $c_r = 2^{r-1}$ si $r > 1$.*

*Demostración.* Definamos, para $x \geq 0$ la función $g(x) = |x|^r$. Observemos que $g(0) = 0$ y para $x > 0$ tenemos que $g''(x) = \dfrac{r|x|^r(r-1)}{x^2}$.

Si $r > 1$, entonces $g''(x) > 0$ para todo $x > 0$ y entonces $g$ es convexa. En la definición de convexidad, haciendo $\lambda = \frac{1}{2}$ tenemos, para todos $x, y \geq 0$ que

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Entonces,

$$\left|\frac{X+Y}{2}\right|^r = g\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{g(X)+g(Y)}{2} = \frac{|X|^r + |Y|^r}{2}.$$

Equivalentemente,

$$|X+Y|^r \leq 2^{r-1}(|X|^r + |Y|^r).$$

Por propiedades de la esperanza tenemos que

$$E|X+Y|^r \leq E(2^{r-1}(|X|^r + |Y|^r)) = 2^{r-1}(E|X|^r + E|Y|^{r-1}).$$

Hemos probado una parte.

Si ahora $0 < r \leq 1$, entonces $g''(x) < 0$ y $g$ es una función cóncava. Por el Teorema 1.3.13 tenemos que $g$ es subaditiva y por lo tanto,

$$|X+Y|^r = g(X+Y) \leq g(X) + g(Y) = |X|^r + |Y|^r.$$

Aplicando esperanza tenemos que

$$E|X+Y|^r \leq E|X|^r + E|X|^r.$$

Combinando los dos casos se tiene el resultado. □

Una versión más débil del Teorema 3.6.1 restringida sólo cuando $r \in \mathbb{N}$ se basa en el siguiente lema:

**Lema 28.** *Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y todos los números $i, r \in \mathbb{N}$ con $i \leq r$, tenemos que*

$$|x|^i|y|^{r-i} \leq |x|^r + |y|^r. \tag{3.67}$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que $|y| \leq |x|$, entonces $|y|^{r-i} \leq |x|^{r-i}$ y

$$|x|^i|y|^{r-i} \leq |x|^{r-i}|x|^i = |x|^{i+r-i} = |x|^r \leq |x|^r + |y|^r.$$

Por lo tanto,

$$|x|^i|y|^{r-i} \leq |x|^{r-i}|x|^i = |x|^{i+r-i} = |x|^r \leq |x|^r + |y|^r.$$

Suponiendo que $|y| \geq |x|$, la demostración es análoga. □

Por la desigualdad del triángulo, el resultado del Lema 28 y el Binomio de Newton tenemos que

$$|X+Y|^r \leq (|X|+|Y|)^r = \sum_{i=i}^{r} \binom{r}{i} |X|^i|Y|^{r-i} \leq (|X|^r + |Y|^r) \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} = 2^r(|X|^r + |Y|^r). \tag{3.68}$$

Aplicando esperanza a la desigualdad (3.68) tenemos que

$$E|X+Y|^r \leq 2^r(E|X|^r + E|Y|^r).$$

El Teorema (3.6.1) puede ser generalizado para $n$ variables aleatorias. Así:

$$E|X_1 + X_2 + X_3|^r \leq c_r(E|X_1|^r + E|X_2 + X_3|^r) \leq c_r(E|X_1|^r + c_r(E|X_2|^r + E|X_3|^r)).$$

Por lo tanto,

$$E|X_1 + X_2 + X_3|^r \leq c_r E|X_1|^r + c_r^2 E|X_2|^r + c_r^2 E|X_3|^r. \tag{3.69}$$

Ahora aplicando la desigualdad (3.69) cuando tenemos cuatro variables aleatorias tenemos que

$$\begin{aligned} E|X_1 + X_2 + X_3 + X_4|^r = E|X_1 + X_2 + (X_3 + X_4)|^r \leq c_r E|X_1|^r + c_r^2 E|X_2|^r \\ + c_r^2 E|X_3 + X_4|^r \leq c_r E|X_1|^r + c_r^2 E|X_2|^2 + c_r^2(c_r E|X_3|^r + c_r E|X_4|^r) \\ = c_1 E|X_1| + c_r^2 E|X_2|^r + c_r^3 E|x_3|^r + c_r^3 E|X_4|^r. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E|X_1 + X_2 + X_3 + X_4|^r \leq c_1 E|X_1| + c_r^2 E|X_2|^r + c_r^3 E|x_3|^r + c_r^3 E|X_4|^r. \tag{3.70}$$

En general, por las desigualdades (3.69) y (3.70) se infiere por inducción matemática que si tenemos $n$ variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ entonces,

$$E\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^r \leq \sum_{k=1}^{n-1} c_r^k E|X_k|^r + c_r^{n-1} E|X_n|^r. \tag{3.71}$$

y queda así generalizado el Teorema 3.6.1

**Teorema 3.6.2.** *Sea $X$ una variable aleatoria tal que $E|X|^x$ existe para todo $x \geq 0$, entonces la función $g(x) = \ln(E|X|^x)$ es convexa para todo $x \geq 0$.*

*Demostración.* Recordemos que la desigualdad de Cauchy-Schwarz para variables aleatorias dicta que

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Sean $0 \leq r \leq s$. Vamos a aplicar Cauchy-Schwarz a las variables aleatorias $|X|^{\frac{s-r}{2}}$ y $|X|^{\frac{s+r}{2}}$. Entonces

$$E^2(|X|^{\frac{s-r}{2}}|X|^{\frac{s+r}{2}}) \leq E((|X|^{\frac{s-r}{2}})^2)E((|X|^{\frac{s+r}{2}})^2).$$

Entonces, haciendo operaciones con los exponentes tenemos que

$$E^2|X|^s \leq E|X|^{s-r}E|X|^{s+r}.$$

Aplicando logaritmos,

$$2\ln(E|X|^s) \leq \ln(E|X|^{s-r}) + \ln(E|X|^{s+r}).$$

Equivalentemente, por definición de $g$ tenemos que

$$g(s) \leq \frac{g(s-r) + g(s+r)}{2}.$$

Por el lema 3 se tiene que para todos $x, y \geq 0$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}. \tag{3.72}$$

Claramente $g$ es una función continua, entonces, combinando (3.72) con el Teorema 1.3.4 se sigue que $g$ es una función convexa para todo $x \geq 0$. □

**Teorema 3.6.3.** *Sea $X_1, X_2, \cdots$, una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli de parámetro $p$, entonces la serie infinita $X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}$ tiene media $p$ y varianza $\frac{p(1-p)}{3}$.*

*Si $p = \frac{1}{2}$, entonces $X$ tiene distribución uniforme continua en $[0, 1]$. Además con esto obtenemos una demostración de*

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

*Demostración.* Sabemos que si $X_k \sim Ber(p)$, entonces $E(X_k) = p$ y $Var(X_k) = p(1-p)$ (Ver [25] pág 95). Entonces, por linealidad de la esperanza y por series geométricas tenemos que

$$E(X) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{X_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p}{2^k} = p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = p.$$

Por lo tanto,

$$E(X) = p.$$

Ahora, por propiedades de la varianza y usando la independencia de las variables aleatorias tenemos que

$$Var(X) = Var\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} Var\left(\frac{X_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} Var(X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(1-p)}{4^k} = \frac{p(1-p)}{3}.$$

Por lo tanto,

$$Var(X) = \frac{p(1-p)}{3}.$$

Supongamos ahora que $p = \frac{1}{2}$. Calcularemos ahora la función característica de $X - \frac{1}{2}$, donde de nuevo utilizaremos la independencia de las variables aleatorias y la función generadora de momentos de una distribución Bernoulli de parámetro $p = \frac{1}{2}$, la cual es $M(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t$. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi_{X-\frac{1}{2}}(t) &= E\left(e^{it(X-\frac{1}{2})}\right) = E\left(e^{itX} e^{-\frac{it}{2}}\right) \\
&= e^{-\frac{it}{2}} E\left(e^{it\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}}\right) = e^{-\frac{it}{2}} E\left(\prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{itX_k}{2^k}}\right) \\
&= e^{-\frac{it}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} E\left(e^{\frac{itX_k}{2^k}}\right) = e^{-\frac{it}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} M_{X_k}\left(\frac{it}{2^k}\right) \\
&= e^{-\frac{it}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{it}{2^k}}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi_{X-\frac{1}{2}}(t) = e^{-\frac{it}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2}. \tag{3.73}$$

Analicemos el producto $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2}$ de dos maneras diferentes, en la primera observemos que $\left(e^{\frac{it}{2^n}}\right)^2 = e^{\frac{it}{2^n}} \cdot e^{\frac{it}{2^n}} = e^{\frac{it}{2^{n-1}}}$. También usaremos el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial. Entonces,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2} &= \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{it}{2^k}} + 1 = \frac{1}{2^n}\left(e^{\frac{it}{2^n}} + 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{it}{2^k}} + 1 \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\left(e^{\frac{it}{2^n}} + 1\right)\left(e^{\frac{it}{2^n}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{it}{2^n}} - 1\right)} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{it}{2^k}} + 1 = \frac{1}{2^n} \frac{\left(e^{\frac{it}{2^{n-1}}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{it}{2^n}} - 1\right)} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{it}{2^k}} + 1 \\
&= \frac{1}{2^n} \frac{\left(e^{\frac{it}{2^{n-1}}} + 1\right)\left(e^{\frac{it}{2^{n-1}}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{it}{2^n}} - 1\right)} \prod_{k=1}^{n-2} e^{\frac{it}{2^k}} + 1 = \frac{\left(e^{\frac{it}{2^{n-2}}} - 1\right)}{2^n\left(e^{\frac{it}{2^n}} - 1\right)} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{it}{2^k}} + 1 \\
&= \frac{e^{it} - 1}{2^n\left(e^{\frac{it}{2^n}} - 1\right)} = \frac{e^{it} - 1}{2^n\left(1 + \frac{it}{2^n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^k}{2^{nk} k!} - 1\right)} = \frac{e^{it} - 1}{ik + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^k}{2^{n(k-1)} k!}}.
\end{aligned}$$

Esto implica,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2} = \frac{e^{it}-1}{ik + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^k}{2^{n(k-1)}k!}}.$$

Así,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{e^{it}-1}{ik + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^k}{2^{n(k-1)}k!}} = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

De donde,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2} = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Sustituyendo (3.6) en (3.73) y utilizando la definición de seno complejo tenemos que

$$\phi_{X-\frac{1}{2}}(t) = e^{-\frac{it}{2}} \frac{e^{it}-1}{it} = \frac{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}}{it} = \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{t} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\phi_{X-\frac{1}{2}}(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}. \tag{3.74}$$

Ahora, sea $Y$ una variable aleatoria continua con distribución uniforme en $[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_{Y-\frac{1}{2}}(t) &= E\left(e^{it(Y-\frac{1}{2})}\right) = E\left(e^{itY} e^{-\frac{it}{2}}\right) = e^{-\frac{it}{2}} E(e^{itY}) \\ &= e^{-\frac{it}{2}} \int_0^1 e^{ity}\, dy = e^{-\frac{it}{2}} \frac{e^{it}-1}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi_{Y-\frac{1}{2}}(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}.$$

Comparando esta última igualdad con (3.74) se sigue que $X \sim Unif[0,1]$.

Analicemos ahora de la segunda manera el producto $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+e^{\frac{ik}{2^k}}}{2}$. Para ello, utilizamos la identidad trigonométrica del ángulo mitad y la expresión polar de un número complejo.

Observemos que

$$\begin{aligned}
1+e^{ix} &= 1+\cos x+i\operatorname{sen} x=\frac{2(1+\cos x)}{2}+2i\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}}{2}\\
&= 2\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}+2i\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{2}\\
&= 2\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}+2i\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\\
&= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2i\cos\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}.$$

Utilizando esta igualdad tenemos que

$$1+e^{\frac{it}{2^k}}=2\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)e^{\frac{it}{2^{k+1}}}.$$

Entonces,

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2}=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)e^{\frac{it}{2^{k+1}}}.$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2} &= \cos\left(\frac{t}{2^2}\right)\cos\left(\frac{t}{2^3}\right)...\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)e^{\frac{it}{2^2}}e^{\frac{it}{2^3}}...e^{\frac{it}{2^{n+1}}}\\
&= e^{it\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)=e^{it\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2}=e^{it\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right).$$

Y así,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+e^{\frac{it}{2^k}}}{2}=\lim_{n\longrightarrow\infty}e^{it\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)=e^{\frac{it}{2}}\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right).$$

Por (3.73) se tiene que

$$\phi_{X-\frac{1}{2}}(t)=e^{\frac{it}{2}}\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right).$$

Comparando esta igualdad con 3.74 tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right).$$

Sustituyendo $t = 2\theta$ tenemos el resultado deseado. □

El producto infinito del teorema anterior se obtuvo por medio de argumentos y conceptos de la probabilidad, como hemos visto, hay muchas demostraciones de ese hecho. Ante todo, nadie puede negar la belleza y elegancia de esta otra prueba:

**Teorema 3.6.4.** *Si $\theta > 0$, entonces*

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right). \tag{3.75}$$

*Demostración.* Veamos la figura 3.1.

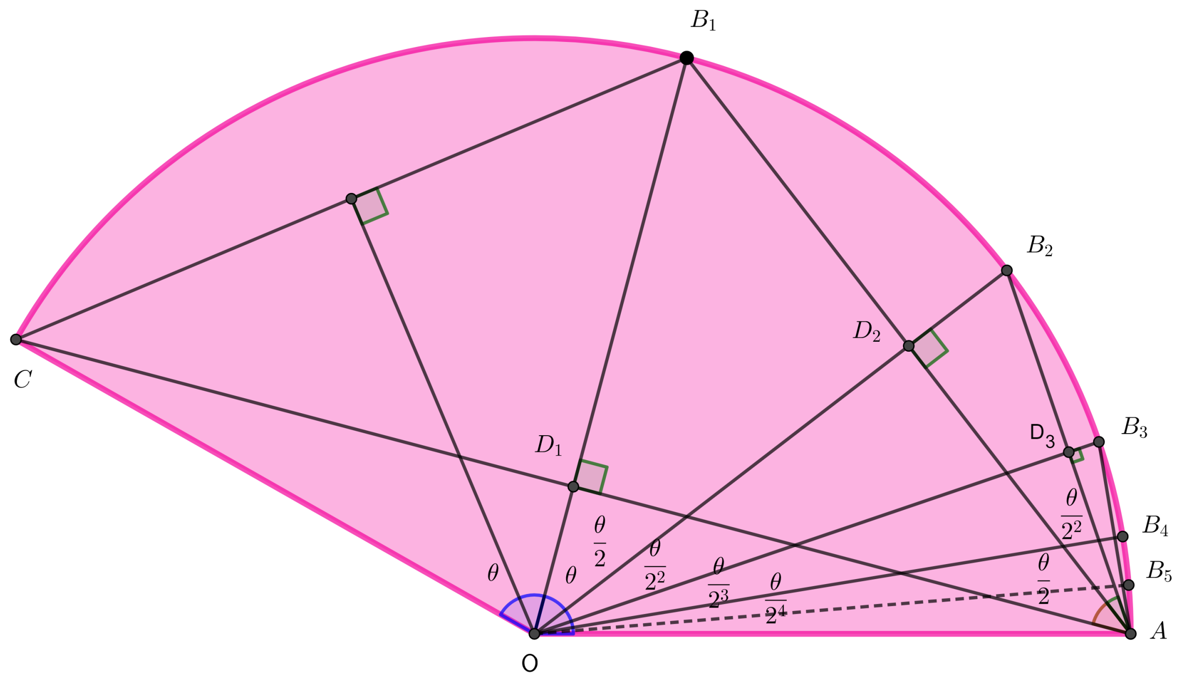


Figura 3.1: Esquema de la demostración del Teorema 3.6.4

Consideremos una circunferencia unitaria con centro en 0 y un ángulo central $\angle AOB_1 = \theta$. Por $A$ dibujamos una perpendicular $AD_1$ al segmento $AB_1$ y sea $C$ el punto donde esta perpendicular corta de nuevo a la circunferencia.

Observemos que de esta construcción se ha formado el ángulo central $\angle AOC$ el cual es igual a $2\theta$, ya que el triángulo $AOC$ isósceles con mediatriz $OB_1$ sobre el lado $AC$.

Dibujemos las siguientes bisectrices:

$OB_2$ del ángulo $\angle AOB_1$; $OB_3$ del ángulo $\angle AOB_2$; $OB_4$ del ángulo $\angle AOB_3$; $OB_5$ del ángulo $\angle AOB_4$; ... ; $OB_n$ del ángulo $\angle AOB_{n-1}$; ...

Al ser $\angle AOB_1 = \theta$, se tienen entonces las siguientes igualdades de ángulos:

$\angle AOB_2 = \angle B_2OB_1 = \dfrac{\theta}{2}$; $\angle AOB_3 = \angle B_3OB_2 = \dfrac{\theta}{2^2}$; $\angle AOB_4 = \angle B_4OB_3 = \dfrac{\theta}{2^3}$; ... ; $\angle AOB_n = \angle B_nOB_{n-1} = \dfrac{\theta}{2^{n-1}}$; ...

Ahora, los ángulos $\angle B_1AC$, $\angle B_2AB_1$, $\angle B_3AB_2$, ..., $\angle B_nAB_{n-1}$, ... son todos ellos inscritos en la circunferencia. Sabemos que todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco. Por lo tanto, de lo anterior, tenemos que $\angle AB_C = \dfrac{\theta}{2}$ y $\angle B_nAB_{n-1} = \dfrac{\theta}{2^n}$ para $n = 1, 2, 3, ....$

Sean $D_2, D_3, D_4, ..., D_{n+1}, ...$ los puntos donde las cuerdas $AB_1, AB_2, AB_3, ..., AB_n, ...$ cortan a los radios $OB_2, OB_3, OB_4, ..., OB_{n+1}, ...$ respectivamente. Esas cuerdas además son perpendiculares al respectivo radio en su punto de intersección.

De todas estas observaciones y de los triángulos rectángulos formados en los ángulos inscritos tenemos las siguientes igualdades:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{AD_1}{AB_1} = \frac{AD_1}{2AD_2}.$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) = \frac{AD_2}{AB_2} = \frac{AD_2}{2AD_3}.$$

$$\vdots$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{AD_n}{AB_n} = \frac{AD_n}{2AD_{n+1}}.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades tenemos que

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{AD_1}{2AD_2} \cdot \frac{AD_2}{2AD_3} \cdot ... \cdot \frac{AD_n}{2AD_{n+1}} = \frac{AD_1}{2^n AD_{n+1}}. \tag{3.76}$$

Ahora, como la circunferencia es unitaria y por triángulos rectángulos formados en los ángulos centrales tenemos que

$$\operatorname{sen}\theta = AD_1.$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = AD_2.$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2^2}\right) = AD_3.$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = AD_{n+1}.$$

De (3.76) se sigue que

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2^n \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}. \tag{3.77}$$

Aplicando el límite cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos el resultado deseado. □

Con las ecuaciones diferenciales se puede obtener de manera distinta a la clásica la función característica de la distribución gamma como veremos a continuación:

**Teorema 3.6.5.** *Sea $X$ una variable aleatoria continua tal que $X \sim Gamma(n, \lambda)$, entonces*

$$\phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + it}\right)^n. \tag{3.78}$$

*Demostración.* Si $X \sim Gamma(n, \lambda)$, entonces la función de densidad de $X$ es $f(x) = \dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.

Ahora,

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_0^\infty e^{itx}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{itx}x^{n-1}e^{-\lambda x}\, dx. \tag{3.79}$$

Entonces,

$$\phi\left(\frac{\lambda - 1}{i}\right) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{\lambda x}e^{-x}x^{n-1}e^{-\lambda x}\, dx = \lambda^n.$$

Entonces tenemos la condición inicial

$$\phi\left(\frac{\lambda - 1}{i}\right) = \lambda^n. \tag{3.80}$$

Ahora,

$$\phi'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{itx}x^{n-1}e^{-\lambda x}\, dx\right) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(e^{itx}x^{n-1}e^{-\lambda x})\, dx.$$

Entonces,

$$\phi'(t) = \frac{i\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^n e^{-x(\lambda - it)}\, dx. \tag{3.81}$$

Haciendo integración por partes con $u = x^n$ y $dv = e^{-x(\lambda-it)}dx$ tenemos $du = nx^{n-1}$ y $v = \dfrac{e^{-x(\lambda-it)}}{it - \lambda}$ y, por lo tanto,

$$\phi'(t) = \frac{in}{\lambda - it}\cdot\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}e^{itx}e^{-\lambda x}\, dx$$

y por (3.79) tenemos que

$$\phi'(t) = \frac{in}{\lambda - it}\phi(t).$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial ordinaria de variables separables. Resolviendo queda

$$\phi(t)(\lambda - it)^n = C.$$

Utilizando la condición inicial (3.80) obtenemos que $C = \lambda^n$. Por lo tanto,

$$\phi(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}.$$

$\square$

# Bibliografía


[1] Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté S. A., 1976.

[2] Apostol, T. M., *Introducción a la Teoría Analítica de los Números*, Editorial Reverté S. A., 1980.

[3] Birnbaum, Z. W., *An Inequality for Mill´s Ratio*, Ann. Math. Statist., Volume 13, Number 2 (1942), 245-246.

[4] Bulajich, R., Gómez G. A. and Valdez, R., *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser, 2009.

[5] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable I*, Springer, 1978.

[6] Crandall, R. and Pomerance C. *Prime Numbers, a Computational Perspective*, Second Edition, Springer, 2005.

[7] Dudley, R. M., *Real Analysis and Probability*, Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series, 1989.

[8] Farrel, O. J. and Ross, B. *Solved Problems in Analysis. As Applied to Gamma, Beta, Legendre and Bessel Functions*, Dover Publications, Inc. 2013.

[9] Frontczak, R. (2020). *Problem B-1267, Elementary Problems and Solutions*, Fibonacci Quart. 58 (2), (2020), 179.

[10] Grimmett, G. R. and Stirzaker, D. R. *Probability and Random Processes*, (3rd edn), Oxford University Press, 2001.

[11] Guzmán de, M., *Mirar y Ver*, Nivola, Libros y Ediciones, 2004.

[12] Hardy, G., Littlewood, J., Polya, G., *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.

[13] Harris, B., *Theory of Probability*, Addison-Wesley, 1966.

[14] Hernández, F., *Cálculo de Probabilidades*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Textos Volumen 25 Nivel Elemental, 2003.

[15] Jordan, D., Smith, P., *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford, 2007.

[16] Kac, M., *Statical Independence in Probability, Analysis and Number Theory*, The Mathematical Association of America, John Wiley and Sons, 1959.

[17] Kreider, D. L., Kuller, R. G. and Ostberg, D. E. *Ecuaciones Diferenciales*, Fondo Educativo Interamericano, 1968.

[18] Lange, K., *Applied Probability*, Second Edition, Springer Text in Statistics, Springer, 2010.

[19] Luca, F., *Números Primos y Aplicaciones*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Textos Volumen 26 Nivel Avanzado, 2004.

[20] Maor, E. *Trigonometry Delights*, Princeton University Press, 1998.

[21] Montel, P. *Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques*, Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 29-60.

[22] Niculescu, C. P. and Persson, L. E., *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, Springer, 2000.

[23] Peltzer, A. R., *The Riemann Zeta Distribution*, Thesis for Degree of Doctor in Philosophy in Mathematics. University of California, Irvine, 2019.

[24] Philippou A. N., *Fibonacci Numbers, Probability and Gambling*, Proceedings, ICMET 13 (17-20 Dec 2013), 13-21, Kerala, 2015.

[25] Rincón, L., *Curso Intermedio de Probabilidad*, Las Prensas de Ciencias, Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, 2015.

[26] Shakarchi, R. and Stein, E. *Complex Analysis. Princeton Lectures in Analysis 2*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2003.

[27] Shiryaev, A. N. *Probability-1*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2015.

[28] Srinivasan, G. K., *Dedekind´s proof of Euler´s reflection formula via ODEs*, Mathematics Newsletter (Ramanujan Math. Soc.), 21 (2011) 82-83.

[29] Williams, D., *Probability with Martingales*, Cambrigde Mathematical Textbooks, Cambrigde University Press, 2010.

[30] Witkowsky, A. *On Young´s Inequality*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 7, Issue 5, Article 164, 2006.