



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

DISEÑO ÓPTIMO DE NERVADURAS EN ELEMENTOS TIPO *SHELL*

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. JOSÉ LUIS VALENCIA SÁNCHEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS
FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX. NOVIEMBRE 2021.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. LEOPOLDO A. GONZÁLEZ GONZÁLEZ

Secretario: DR. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ

1 er. Vocal: DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS

2 do. Vocal: DR. ADRIÁN ESPINOZA BAUTISTA

3 er. Vocal: DR. VICENTE BORJA RAMÍREZ

Lugar donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX.

TUTOR DE TESIS:

DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS

FIRMA

CONTENIDO

Agradecimientos	1
1 Introducción	4
1.1 Motivación y justificación.....	4
1.2 Objetivo.....	6
1.2 Antecedentes.....	6
2 Optimización	10
2.1 Optimización Topológica.....	10
2.2 Método del Elemento Finito.....	11
2.3 Elementos tipo Shell.....	11
3 Descripción del proceso de Optimización	16
3.1 Caso de estudio.....	17
3.2 Software de apoyo. Hyperworks®.....	18
3.3 Diagrama de flujo.....	20
4 Implementación y Resultados	21
4.1 Definición del modelo, configuración de cargas y condiciones frontera.	21
4.2 Optimización	31
4.3 Adecuación para manufactura.....	39
5 Conclusiones	44
Referencias.....	45

Agradecimientos

A Elizabeth y a José Luis, mis padres, por su apoyo incondicional y su cariño, vertidos en cada una de las etapas que nos han traído hasta aquí.

A María, mi compañera, por su paciencia y su vigilia, cuidando mi trabajo y mi persona.

A mi familia. A cada uno de ellos.

A Fernando, mi tutor. Por su apertura a escucharme, por el disfrute de su vocación como académico, y el interés en nuestro trabajo mutuo y el desarrollo de mí mismo como persona.

A la DGAPA-UNAM, por el apoyo brindado a través del proyecto **PAPIIT IN113315**, por el cual fue posible la realización de este proyecto.

Para ti, Hilda. Te extraño.

1. Introducción

1.1 Motivación y justificación

Uno de los puntos clave de la ingeniería del siglo XXI reside en el concepto de *optimización*, La palabra optimización en el contexto de la matemática, se usa para describir la teoría y la práctica empleadas para maximizar o minimizar una función, que está sujeta a varias variables, conocida como función objetivo [1]. La generalización de la optimización proviene de la posibilidad de dar solución a diferentes tipos de problemas en distintas áreas de las ciencias exactas. En el contexto de los procesos productivos, la motivación de la optimización es explotar los recursos disponibles, siempre limitados, de manera que la utilidad se maximice [2].

En el área de la ingeniería mecánica, la optimización está ligada a la mejora de diferentes procesos. Ejemplificando, aspectos como la mejora en el desempeño de una máquina de combustión interna o la reducción de elementos en un ensamble son candidatos para ser optimizados. Al considerar el impacto que posee la ingeniería en la sociedad y sus diferentes actividades económicas, la optimización es importante puesto que su objetivo puede proponerse como “hacer más con menos”.

En este sentido, la reducción de la cantidad de material empleada en la manufactura de los componentes mecánicos de un sistema es una tarea de suma importancia en la ingeniería moderna. Esta reducción puede lograrse básicamente, mediante la modificación de la composición química del material empleado o mediante la modificación de la geometría del elemento, respetando los requerimientos de diseño en cuanto a funcionalidad. La modificación de la composición química para reducir el peso de un elemento tiene como reto no alterar sus propiedades mecánicas.

Considerando los beneficios que pueden obtenerse de la optimización, en este trabajo se propuso resolver el problema de diseño óptimo de un módulo plástico, usado en pisos industriales modulares. Se consideró al módulo como un cuerpo polimérico tipo carcasa, y se propusieron como metas: obtener la máxima rigidez, con la menor masa posible, para sus condiciones de operación.

Atendiendo a criterios de clasificación como los propuestos por Kirsch [2], este problema se ubica en el área de optimización estructural. Las variables de diseño se refieren a las propiedades mecánicas del material y a la forma de la estructura (dimensiones, geometría y topología). La filosofía de diseño es determinista y los modos de falla supuestos están relacionados con la carga de operación. Las restricciones están relacionadas con valores de esfuerzos y desplazamientos y con las restricciones tecnológicas en las variables. La respuesta estructural es lineal estática. El problema de optimización se formuló con parámetros discretos, tales como las propiedades del material con el que está hecho el objeto. Se asume una función objetivo de un solo criterio, representado por la rigidez de la pieza, y se utilizan métodos numéricos de optimización estructural para resolver el problema de diseño, con el soporte de software ex profeso.

Para lo anterior, se consideró utilizar un procedimiento que posee similitudes con el algoritmo de optimización denominado Optimización Estructural Evolutiva. Mediante este algoritmo, la geometría final se obtiene verificando el cumplimiento de restricciones y el valor de una función objetivo en forma iterativa.

El software de apoyo para este trabajo fue la plataforma de simulación Hyperworks®, de la compañía Altair Engineering. Esta plataforma es capaz de desarrollar tareas de preproceso, solución y postproceso de los datos involucrados en la simulación de experimentos multifísicos. Emplea el método del elemento finito para solución de ecuaciones y cuenta con diversos algoritmos para llevar a cabo sus funciones. Hypermesh® es el preprocesador de la plataforma y permite discretizar modelos CAD y determinar las propiedades, condiciones de frontera y demás opciones requeridas que configuran un problema. La optimización se lleva a cabo con Optistruct® y sus resultados pueden ser revisados con el postprocesador denominado Hyperview® [3].

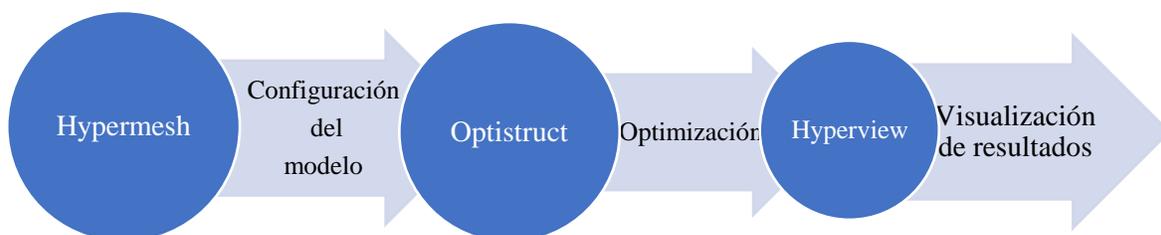


Fig 1. Configuración de los componentes de la plataforma Hyperworks ®

1.2 Objetivo

Diseñar por medio de optimización estructural un cuerpo polimérico tipo carcasa, reforzado con nervaduras, maximizando la rigidez.

1.3 Antecedentes.

El análisis estructural ha evolucionado a la par del desarrollo de la Ingeniería. Algunos autores [4,5,6] coinciden en considerar una de las propuestas de Michell [7] de 1904, como el inicio formal de la optimización estructural. Michell se enfocó en la reducción del peso de armaduras, basándose en un trabajo previo de Maxwell de 1890, como lo describen Baker et al. [8]. En sus inicios, la optimización estructural se enfocó en problemas relacionados con la optimización de tamaño, tales como encontrar la mejor sección transversal en los miembros de una armadura. En estos problemas, el dominio de diseño es fijo y permanece así durante el proceso de optimización [9].

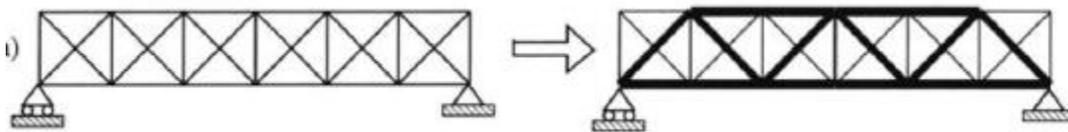


Fig 2. Optimización de tamaño o paramétrica [10].

El desarrollo subsecuente se refiere al problema de encontrar la forma óptima para una estructura. Ejemplos de estos problemas son obtener la mejor ubicación para las articulaciones de una armadura o determinar los valores óptimos para el espesor de una estructura en placa. La forma de la estructura cambia en este proceso [9].

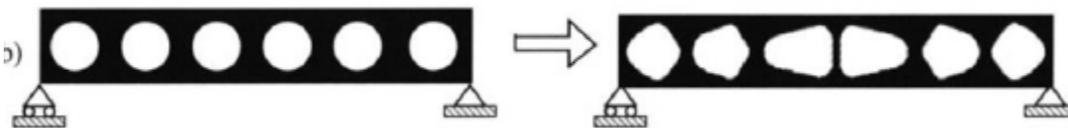


Fig 3. Optimización de forma [10].

La mejora en el diseño corresponde a todas las épocas, aunque se considera que el desarrollo significativo del análisis estructural y de la optimización de productos mecánicos

comienza alrededor de 1980 y las tres décadas siguientes conforman una etapa, de desarrollo adicional, cada una [11].

La topología, nombrada a veces coloquialmente como geometría de 'hoja de hule', propone que dos figuras geométricas tienen la misma topología si pueden convertirse una en la otra mediante torcedura, doblamiento, estiramiento o compresión; acciones a las que se denomina transformaciones continuas [12]. Una propiedad topológica es, por ejemplo, el género (genus) o número de agujeros en un objeto. La figura 4 muestra una posible transformación continua entre una dona y una taza, preservando esta propiedad.

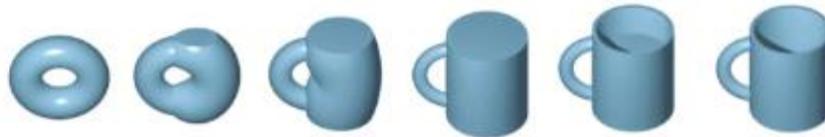


Fig. 4. Representación de una transformación continua, preservando la semejanza topológica.[13]

En la optimización de forma se da por supuesto que la topología inicial de una estructura permanece fija.

La optimización topológica se refiere elementalmente a distribuir el material con la mejor configuración para cumplir los requerimientos de una función objetivo con ciertas restricciones.

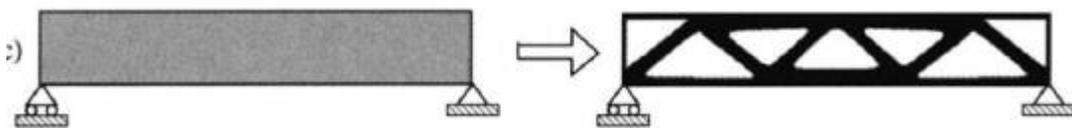


Fig 5. Optimización topológica [9].

En 1988, Bendsøe propuso un método para alcanzar la topología óptima de la misma manera que se obtiene la forma óptima de una estructura. Su propuesta consiste elementalmente en transformar el problema de optimización de forma en un problema de distribución de material, considerando al material compuesto por sustancia y vacíos. La distribución óptima microscópica de los vacíos se consideró en lugar de modificaciones a las fronteras. Según este autor, la determinación de ecuaciones constitutivas macroscópicas para un material compuesto de materiales microscópicos es una característica notable del método

que denominó *homogeneización* [14]. Guo advierte que el método de homogeneización requiere de considerables recursos de cómputo para su aplicación, toda vez que debe establecerse previamente la relación entre las propiedades elásticas efectivas del material (supuestamente poroso) y la geometría de su microestructura, la cual frecuentemente es compleja, de la misma manera que su tratamiento numérico [15].

Los elementos huecos de pared delgada, en forma de carcasa, han mantenido un estatus funcional dentro de la ingeniería debido a que es alta la relación entre su resistencia mecánica y su peso. Su empleo se ha considerado casi obligatorio en aplicaciones aeronáuticas o navales. Sin embargo, conforme el tamaño de estos dispositivos aumenta, la probabilidad de falla también lo hace, dependiendo de la condición de carga aplicada y de las restricciones correspondientes. El pandeo, por ejemplo, establece un límite de carga crítica máxima.

La adición de refuerzos en las zonas “conflictivas” de cualquier carcasa permite evitar fallas o colapso [16]. Por las condiciones de su aplicación, la mayoría de las veces la geometría exterior de las carcasas está condicionada y definida por los requerimientos de su funcionalidad, mientras que se cuenta con una mayor libertad para disponer del volumen interno. Este volumen interno es el espacio donde la incorporación de las nervaduras debe hacerse de manera que la resistencia de la pieza se incremente sin alterar de manera importante la cantidad de material empleado. Para la propuesta de los refuerzos, Wei Li et al. [16] proponen partir de un dominio de diseño e identificar un patrón de esfuerzos que indique las trayectorias de las fuerzas internas y construir nervaduras en esas zonas, a través de un sistema parametrizado que controla la forma general de la carcasa.

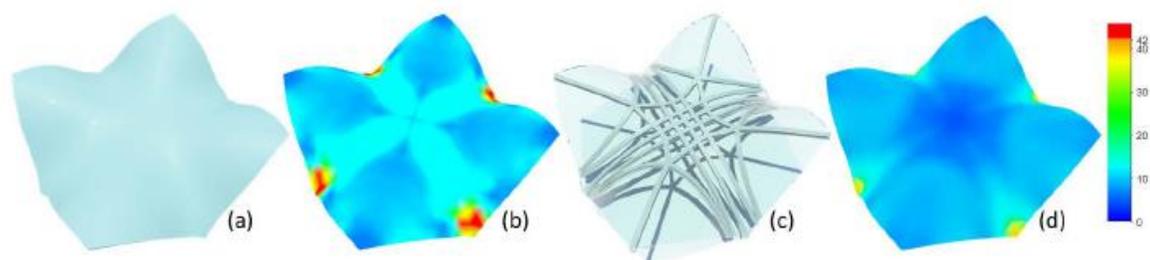


Fig.6 Sistema propuesto por Li et al.[16]. (a) configuración inicial, (b) estado de esfuerzos en la configuración inicial (esfuerzo máximo:108.94 Mpa), (c) propuesta de nervaduras en función de las fuerzas internas, (d) estado de esfuerzos en la configuración con nervaduras (Esfuerzo máximo menor a 40 MPa). Esfuerzo de cedencia: 42 MPa.

Karpov [17] propone que en el análisis de la resistencia y la estabilidad de placas debe tomarse en cuenta también el efecto de los refuerzos y reporta varios modelos matemáticos y algoritmos basados en la energía potencial total de deformación, bajo esta consideración. Por su parte, Krog et al. [18] y Locatelli et al. [19] documentan la complejidad y el potencial de la optimización para reducir el peso de aeronaves aplicándola a estructuras, tipo carcasa cerrada hueca, reforzadas con mamparas y nervaduras denominadas *SpaRibs*.

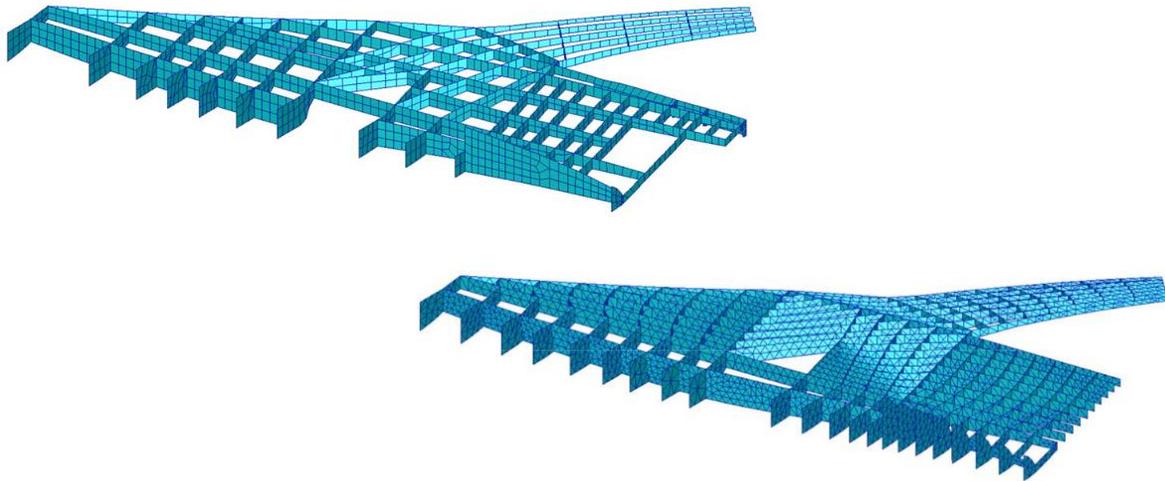


Fig 7. Arriba, configuración inicial de la estructura interna del ala del avión supersónico Boeing N+2. Abajo, configuración optimizada obtenida con la herramienta de optimización **EBF3SSWingOpt** desarrollada por Locatelli et al. [19]

De acuerdo con Tyflopoulos et al. [20], una perspectiva vigente de la optimización topológica estaría enfocada a la fase de diseño conceptual, para proveer una parametrización del diseño que conduzca a un diseño físico óptimo, sin dejar de tomar en cuenta la distribución óptima del material de una estructura con respecto a su funcionalidad y a sus restricciones. Para esto, proponen abordar el problema de optimización en dos niveles: la optimización de las condiciones frontera y la optimización del interior óptimo. En el primero, sin considerar una geometría inicial, partiendo de una “caja negra”, se ubican las condiciones de frontera óptimas de la estructura con respecto a los parámetros externos requeridos por el diseño (restricciones, cargas, contactos). Estas condiciones de frontera óptimas se toman como condiciones iniciales para el proceso tradicional de optimización topológica de la estructura interior, en el segundo nivel.

2. Optimización

2.1 Optimización Topológica

El término topología se refiere a una rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades de un objeto matemático geométrico, que no se alteran por transformaciones continuas (estiramiento, torsión, doblamiento, arrugado) sin cerrar agujeros, abrir agujeros, rasgar, pegar o pasar por sí mismo [21]. Las transformaciones continuas corresponden a homeomorfismos, los cuales se refieren a funciones biyectivas continuas, con inversa continua también, de un espacio topológico a otro [22].

En el diseño mecánico, la optimización estructural puede clasificarse en tres categorías, atendiendo a la parametrización geométrica que determina el tipo de cambios que pueden describirse mediante una variable de diseño: optimización del tamaño, optimización de la forma y optimización de la topología [2,4]. Literalmente, en la primera categoría se define el tamaño óptimo de un componente y en la segunda, la forma exterior. Para la optimización de la topología se parte de: las cargas aplicadas, las condiciones de apoyo y el volumen de la estructura a construir (zonas de no diseño). Las restricciones se refieren a las áreas sólidas indispensables para la funcionalidad. El tamaño físico, la forma y la conectividad finales de la estructura son el resultado de la optimización [23].

Los problemas de optimización topológica se proponen típicamente como un problema de diseño óptimo con dos enfoques: diseñar estructuras con la máxima rigidez (funcionalidad estructural) y el diseño de estructuras con el volumen mínimo, con la capacidad de cumplir con los requisitos del servicio, con el mínimo de material. Un área de desarrollo de la optimización topológica corresponde al diseño simultáneo de la estructura microscópica y macroscópica de materiales heterogéneos de alto rendimiento, tales como: concreto, composites, aleaciones, cerámicos. La aplicación de este tipo de optimización es posible al contar con técnicas de manufactura aditiva (deposición fundida, estereolitografía, sinterizado láser), que se caracterizan por el control que puede tenerse para obtener estructuras finas y complejas [24].

En el contexto matemático, la optimización es el proceso de encontrar los parámetros x que minimizan o maximizan una o varias funciones objetivo del tipo $f(x)$ sujetas a restricciones [25]. Los problemas de optimización requieren de un modelo que los describa. Este modelo generalmente está conformado por tres elementos: el primero es una cantidad numérica que debe ser maximizada o minimizada (la función objetivo); el segundo es un conjunto de variables cuyos valores varían para optimizar la función objetivo. El tercer elemento se refiere a un conjunto de restricciones [26]. Las restricciones son los valores que algunas variables deben tener necesariamente y limitan el rango de soluciones posibles. La solución óptima se encuentra mediante la aplicación de un algoritmo mediante el cual se puedan obtener los valores de las variables de diseño en la función objetivo sin violar las restricciones.

2.2 Método del elemento finito

El método del elemento finito (FEA) es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales. Una aplicación típica se refiere a predecir el comportamiento elástico de los cuerpos. En estos fenómenos, las variables y las restricciones del modelo son los desplazamientos y los esfuerzos. Algunos códigos empleados para el FEA utilizan la formulación de desplazamientos basada en el principio del mínimo potencial o trabajo virtual [27].

2.3 Elementos tipo *Shell*.

Las geometrías tipo carcasa son volúmenes huecos, de pared delgado, que dan pie a un elemento parecido a un recipiente que representa la superficie del sólido. Es común su uso como cubierta exterior cubriendo las funciones de protección y soporte de otros elementos. Algunos casos de este tipo de elementos son las carcasas para protección de celular, los módulos individuales utilizados para recubrir el piso de naves industriales, las carcasas de las cajas de velocidades.

Este tipo de estructuras son convenientes para ser fabricadas con materiales poliméricos -plásticos- y presentan un perfil muy delgado, en relación con el área de su superficie. Por ello, el moldeo se usa frecuentemente en su producción.



Figura 8. Diferentes elementos tipo *shell* encontrados en la industria. De izquierda a derecha, carcasa para dispositivo electrónico, centros de carga y protectores rígidos para celular. [28, 29, 30]

El modelado de este tipo de estructuras se propone desde el enfoque de estructuras Shell. Una estructura Shell podría ser considerada como una placa de espesor mínimo, con una superficie curva; sin embargo, las maneras en que soportan las cargas externas estas estructuras son diferentes. En la estructura Shell, los esfuerzos resultantes debidos a las cargas, tienen componentes tangenciales y normales [31]. Para su uso en el método de elementos finitos, no se acude directamente a las ecuaciones de gobierno deducidas para explicar su comportamiento. Se asume que el comportamiento de una superficie compuesta de pequeños elementos planos puede representar el comportamiento de una superficie curva con suficiente aproximación. La experiencia ha comprobado la validez de este planteamiento [32].

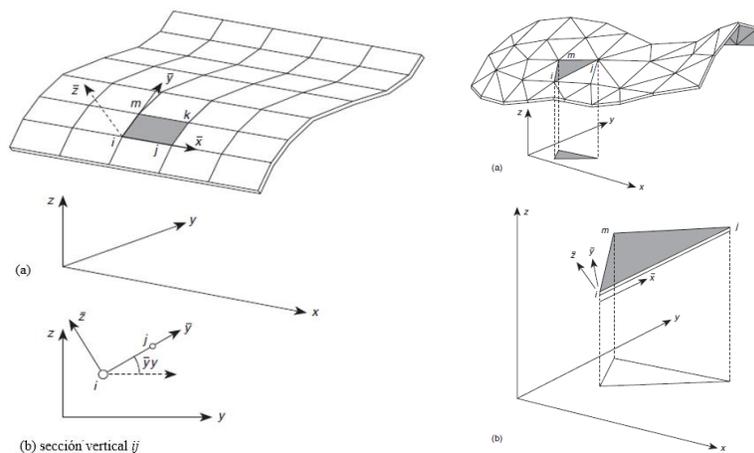


Fig. 9. Estructura Shell como ensamble de componentes rectangulares y triangulares. Coordenadas globales(a) y locales(b) [32].

Los elementos planos empleados para representar a una estructura Shell, son denominados a su vez “elementos Shell”. Comúnmente tienen forma rectangular o triangular; empleados estos últimos para representar superficies con doble curvatura. Pueden proponerse como la combinación de elementos membrana, que no consideran flexión y elementos placa delgada.

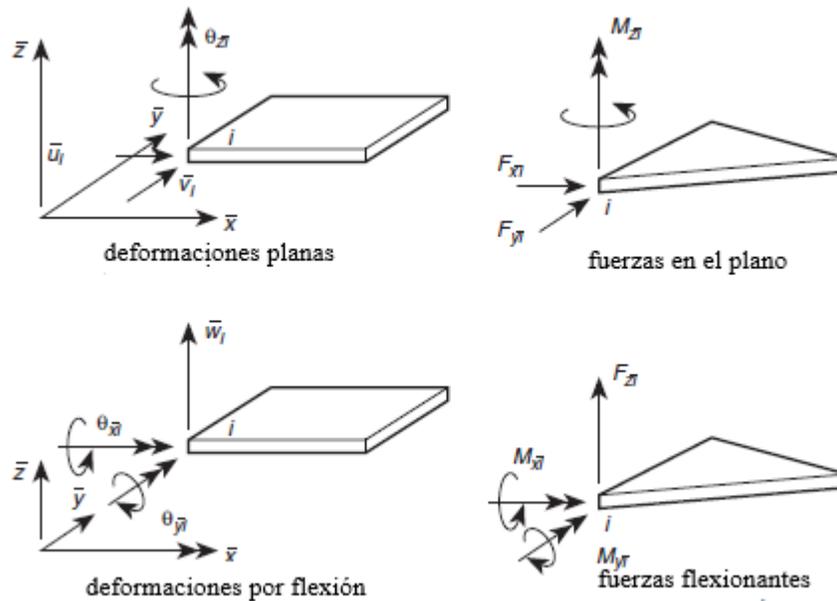


Fig. 10. Grados de libertad para los elementos que componen a un elemento Shell. Elemento membrana arriba, elemento plano, abajo [32].

El elemento membrana, sujeto a esfuerzos planos, utiliza tres grados de libertad nodales, mientras que el elemento placa emplea 3 grados de libertad en cada nodo, por lo que el número de grados de libertad del elemento Shell es 6. Debe notarse que uno de los grados de libertad se refiere a la posibilidad de rotación, denominada *drilling rotation*, con respecto al eje normal a la superficie principal. Este grado de libertad no es necesario para la formulación del comportamiento del elemento Shell, aunque deben hacerse consideraciones para su manejo, en la matriz de rigidez empleada como parte del método del elemento finito.

Una de las maneras típicas de otorgar mayor rigidez a este tipo de elementos es mediante la implementación de nervaduras en el claro que existe entre los lados de la pieza. Sin embargo, incluso cuando las nervaduras cumplan el propósito, en algunos casos llevan asociadas otro tipo de dificultades que limitan o imposibilitan las aplicaciones para las cuales

el elemento tipo carcasa fue proyectado, llegando a provocar cambios en la geometría original e inviabilidad en el uso. Es posible la generación de deformación plástica lenta (creep) en algunos materiales derivada de esta adición [33].

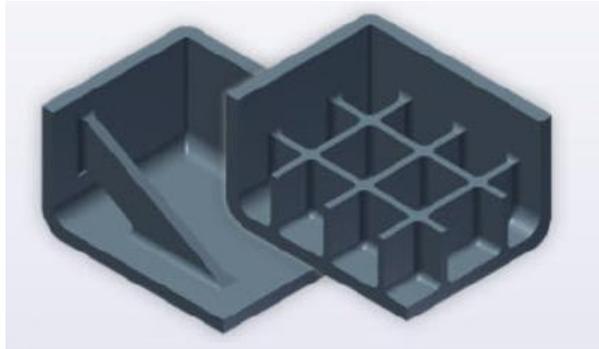


Figura 11. Cortes a estructuras tipo shell con nervaduras añadidas. (Modificada de original, [34]).

Las soluciones analíticas al problema de obtener distribuciones de fuerzas, momentos, deformaciones o esfuerzos, en forma analítica, para una placa reforzada con nervaduras han sido obtenida bajo diferentes enfoques. Szilard [35] menciona que, de acuerdo con datos experimentales, el comportamiento real de una estructura de placas reforzadas con nervaduras puede ser explicado, con buena aproximación, por un modelo ortotrópico sólo en los casos en los que las nervaduras son pequeñas, cercanas y equidistantes. Pshenichnov y Yazdurdyev [36] proponen un método que consiste en reducir un sistema de ecuaciones de orden 8 a un sistema de orden 4, para resolver el problema del doblamiento transversal de placas rectangulares con nervaduras. Boot and More citados por Salomon [38] concluyen que una aproximación teórica bidimensional se justifica solo si las nervaduras forman un sistema ortogonal.

La capacidad de cálculo de las computadoras fue empleada para comprobar en forma más eficaz, la validez de las soluciones analíticas, las cuales pasaron a ser el referente de los algoritmos empleados para resolver, mediante la aplicación del FEA, un mismo problema. Al abordar un problema de diseño óptimo de placas cuadradas reforzadas con nervaduras cuadradas, Hasan [37] obtuvo que el arreglo que consiste en dos nervaduras perpendiculares longitudinales, colocadas a una placa para soportar una carga transversal, reducía hasta en 70 % el esfuerzo máximo con respecto al esfuerzo calculado para la placa sin refuerzos. El incremento reportado en el peso de la placa fue de 51 %.

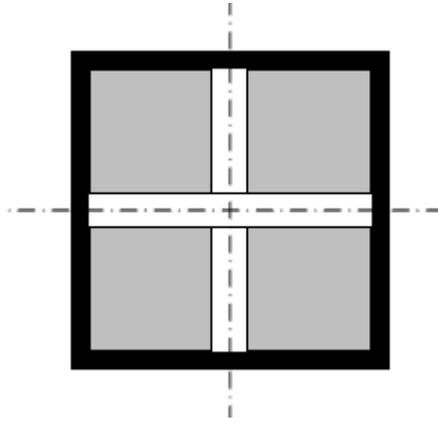


Fig.12. Representación de la placa, con dos nervaduras perpendiculares, analizada por Hasan [37]. Los bordes en negro se consideran fijos. El material es un acero inoxidable.

Para la solución del problema de desplazamientos en una placa rigidizada con nervaduras, Salomon [38] observó que el modelo compuesto por elementos Shell era el que más se aproximaba a la solución obtenida empleando un modelo tridimensional. Aplicando el método de Diseño constructal propuesto por Bejan [39], Troina et al. realizaron una optimización de tamaño de una placa delgada con nervaduras sometida a la acción de una carga transversal. Entre sus hallazgos se menciona que la reducción en el desplazamiento central en la placa, no se obtiene necesariamente incrementando el número de nervaduras. Adicionalmente encontraron que el desplazamiento central en la placa está influenciado por el cociente de la altura de la nervadura dividida por el espesor de esta. Esta influencia significativa se mantiene hasta un valor del cociente cercano a 20. Para valores mayores del cociente, la influencia en el valor del desplazamiento central es mínima. Al implementar el FEA para las pruebas, obtuvieron menores tiempos de cómputo empleando elementos Shell en comparación con el uso de elementos Solid [40]. Este hallazgo es coincidente con un ejemplo de optimización proporcionado por Altair Engineering [20].

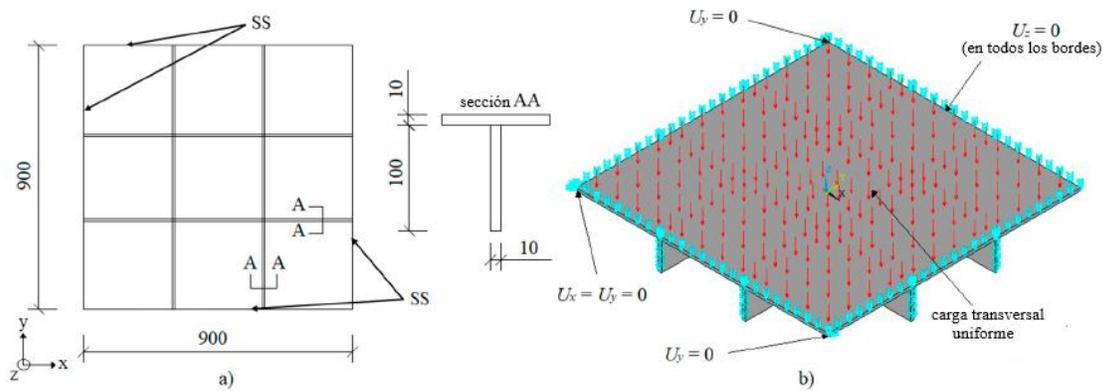


Fig. 13. Representación del modelo físico (a) y de las condiciones frontera y de carga (b) analizados por Troina et al [40]. El material es un acero. (unidades en mm)

Respecto al número de nervaduras, los arreglos con número impar de nervaduras resultaron ser menos rígidos que aquellos con número par. Este resultado se atribuye a la característica de contar con nervaduras posicionadas en el centro geométrico de la placa.

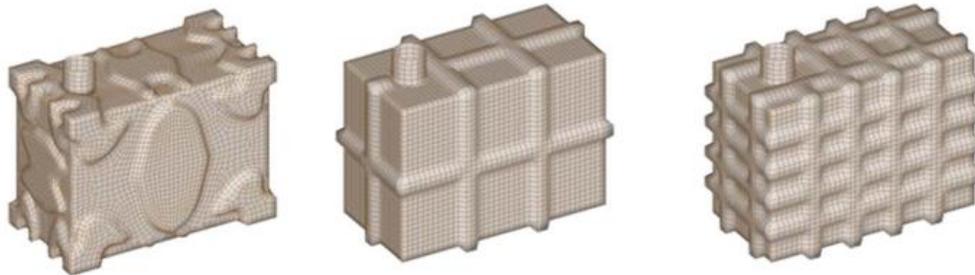


Fig 14. Resultados de la optimización para rigidez, de un tanque de pared delgada lleno con fluido. Las deflexiones máximas encontradas fueron 7.54 mm, 10.8 mm y 13.9 mm, de izquierda a derecha, respectivamente. Este resultado muestra también que el incremento en el número de nervaduras, no necesariamente incrementa la rigidez (Altair Engineering [20])

3. Descripción del proceso de Optimización

Se consideró el desarrollo de las actividades en tres etapas. En la primera se definieron tres casos de carga, los cuáles permitieron proponer modelos base para comenzar con el proceso de optimización. La segunda etapa correspondió a la optimización propiamente dicha. Los modelos propuestos se sometieron a un proceso de optimización y los resultados fueron

sujetos a análisis, en las cuales se tomaron en cuenta restricciones similares en todos los casos. Para finalizar, la tercera etapa se refirió a una adecuación para manufactura. Al converger hacia una solución, la optimización permitió proponer una geometría nueva para las nervaduras, la cual debió adecuarse en formas susceptibles de ser reproducidas físicamente.

3.1 Caso de estudio.

Los pisos industriales requieren de medidas de seguridad para salvaguardar la integridad física de trabajadores y, también sea dicho, de los dispositivos y/o maquinaria que se encuentren presentes en las áreas de operación. La necesidad de no generar o propagar electricidad estática es uno de los requisitos que se toman en cuenta dentro de las anteriormente mencionadas medidas. Existen diferentes maneras de mitigar este fenómeno. Una de ellas es la de emplear pisos modulares en la zona de trabajo para aislarla. Los módulos suelen estar fabricados a base de plásticos que en su fórmula poseen aditivos que reducen o eliminan la posibilidad de generar estática, ya sea debido a las propiedades que el material mismo presenta durante la manufactura de diferentes productos o por la fricción existente entre los módulos con el calzado de los trabajadores [41, 42]. El empleo de estructuras modulares para la construcción de pisos o de techos no es nuevo. En China, recientemente se ha generado un incremento en la demanda de este tipo de soluciones debido a: la escasez de mano de obra (paradójicamente), a una demanda creciente de construcciones y la necesidad de construir rápidamente. Una tendencia es la de utilizar arreglos reticulares para los módulos. En los módulos, la incorporación de nervaduras ha permitido obtener ahorros significativos en materiales y aumento en la rigidez, aún sin recurrir a técnicas de optimización [43].

Los módulos poseen variadas geometrías en su elaboración. Una de las configuraciones existentes para este tipo de elementos es la de tipo carcasa. En este caso de estudio, los elementos se fijan al piso y se ven sometidos a casos de carga generados por el peso de las personas que transitan sobre ellos. Al ser elementos tipo shell, los módulos deben ser capaces no sólo de resistir la fuerza aplicada sobre ellos, sino que también deben evitar la distorsión geométrica. Para ello, es común el uso de nervaduras para aumentar la rigidez del dominio.

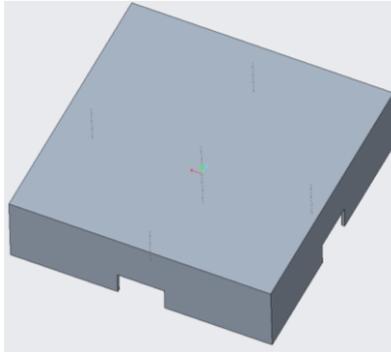


Figura 15. Geometría general de un módulo plástico de uso en pisos industriales. (Original, autor)

3.2 Software de Apoyo.

La primera versión de Optistruct fue realizada en 1994, empleando el método de homogeneización propuesto por Bendsøe. En la formulación se incluyen variables como ρ_i y v_i que se refieren a la densidad y el volumen de los elementos discretizados, el volumen meta \bar{V} está considerado y también el número total de elementos n . Se previene que la matriz de rigidez, referente a la implementación de FEA, resulte singular mediante la incorporación de la variable h que se refiere a un número pequeño menor que 1 [44, 45]. La formulación queda como:

$$\text{Minimizar: } W(\mathbf{r})$$

$$\text{Sujeta a: } V = \sum \rho_i v_i \leq \bar{V}, \quad \eta \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Este esquema se ve mejorado reduciendo la influencia de los elementos con una densidad intermedia. Si se reduce esta influencia, la solución se acerca más a un patrón de blanco y negro. En el método denominado “material isotrópico simple con penalización” (SIMP por sus siglas en inglés), a la matriz real de rigidez \mathbf{K}_i se le aplica un exponente de penalización p para obtener una matriz de rigidez penalizada $\hat{\mathbf{K}}_i$. Al método se le denomina también método de densidad. La propuesta de modificación de la matriz real de rigidez se expresa por:

$$\hat{\mathbf{K}}_i(\rho_i) = \rho_i^p \mathbf{K}_i \quad (2)$$

Una formulación interna para el problema de optimización se refiere a proponer a una restricción en relación con la restricción en la frontera como una diferencia que debe ser

menor que 0. Si se propone que la función g_j represente a la j -ésima restricción y \bar{g}_j su frontera superior, el problema queda como sigue:

Minimizar: $W(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a: } \quad & g_j(\boldsymbol{\rho}) - \bar{g}_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ & \eta \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

Para resolver problemas formulados de esta manera, pueden emplearse los métodos de optimización dual o los métodos de asíntotas móviles [44]. Según Zhou [45], en el enfoque de aproximación propuesto por Schmit y Farshi (1974), se propone resolver una serie de problemas explícitos aproximados para resolver, a su vez, el problema de optimización. La exactitud en la aproximación determina la eficiencia total. Un ejemplo de la formulación utilizada es el denominado aproximación recíproca:

$$\tilde{g}_j(\mathbf{X}) = g_{j0} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial x_i} x_{i0}^2 \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i0}} \right) \quad (4)$$

Un avance en las técnicas de aproximación está representado por el uso de variables y respuestas intermedias, relacionadas con las propiedades de la sección transversal, del tipo:

$$\mathbf{Y}_i = (t, D, t_s, MNE)_i^T \quad \text{para un elemento shell}$$

En la expresión anterior, las variables corresponden al i -ésimo elemento shell. Así, t se relaciona con el espesor, D con el espesor sujeto a flexión, t_s con el espesor sujeto a cortante y MNE con la masa no estructural. Las variables intermedias \mathbf{Y} pueden expresarse en función de las variables de dimensionamiento \mathbf{X} , mediante una relación $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ y obtener como aproximación

$$\tilde{g}_j(\mathbf{X}) = \tilde{g}_j(\mathbf{Y}(\mathbf{X})) = g_{j0} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial y_i} y_{i0}^2 \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_{i0}} \right) \quad (5)$$

A las fuerzas relevantes en los elementos $\tilde{\mathbf{F}}$, se les denomina *respuestas intermedias* y pueden expresarse mediante

$$\tilde{\mathbf{F}}_k(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{F}}_k(\mathbf{Y}(\mathbf{X})) = \mathbf{F}_{k0} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial y_i} (y_i - y_{i0}) \quad (6)$$

De manera que los esfuerzos aproximados pueden recobrase empleando

$$\tilde{g}_j(\mathbf{X}) = \tilde{g}_j(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}(\mathbf{X}))) \quad (7)$$

En el proceso de optimización, se formula un análisis de sensibilidad basado en la formulación de elementos finitos.

3.2 Diagrama de flujo.

A continuación, se muestra el diagrama de flujo del proceso de optimización, basado en la propuesta de Schramm y Zhou [46].

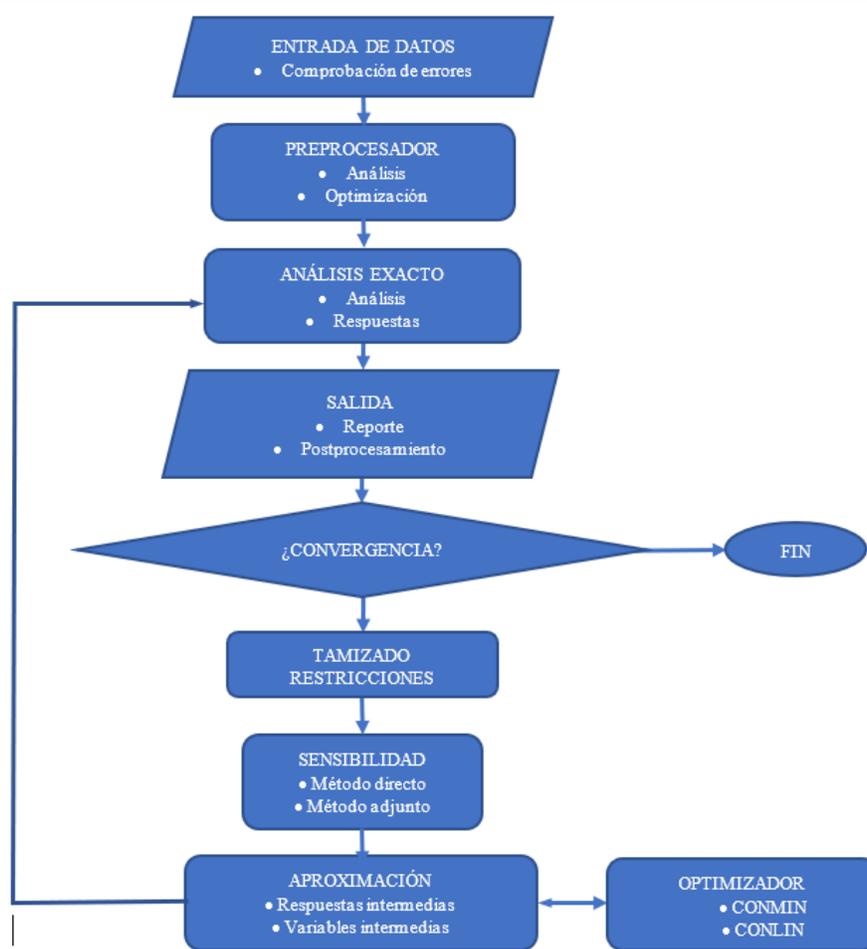


Fig.16. Diagrama de flujo de optimización empleado en Hyperworks [40]

En el diagrama de flujo (fig. 16), los optimizadores CONMIN (constrained function minimization) y CONLIN (convex linearization) se basan en el método de direcciones factibles desarrollado en 1973 por Vanderplaats [47]. y en el método dual de aproximaciones convexas propuesto en 1989 por Fleury [48].

4. Implementación y Resultados

4.1 Definición del modelo, configuración de cargas y condiciones frontera.

El presente proyecto inicia con el estudio de un módulo empleado en la conformación de pisos modulares dieléctricos de uso industrial. Este elemento se encuentra en la fase final de un proceso de optimización, es decir, es el producto final propuesto para atacar un problema, el cual se entiende como “falta de rigidez”.

La Figura 17 muestra la configuración original de la propuesta. Cabe hacer hincapié en el hecho de que esta configuración no fue propuesta por el equipo que participa en este proyecto.

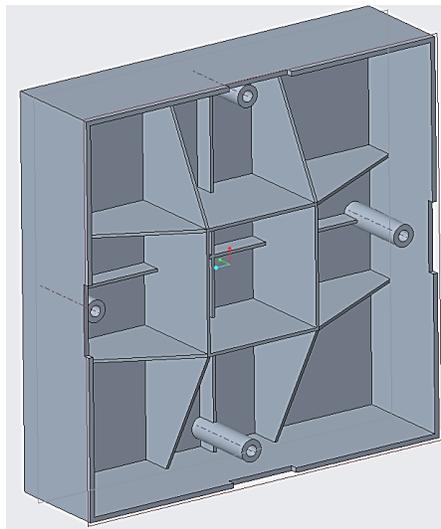


Figura 17. Configuración original del elemento tipo shell con nervaduras. (Original, autor)

La geometría general del módulo dieléctrico corresponde a un paralelogramo hueco con base cuadrada de 162 mm por 162 mm, altura de 45 mm y espesor de las paredes de 2 mm. Su masa es 0.160 kg. Se tomó como un indicador de eficiencia en el diseño, un cociente resistencia-masa, como medio para comparar propuestas, proponiendo como criterio que la resistencia a la fractura es una prioridad: Este indicador es semejante a la Resistencia

específica empleada para comparar materiales. Para el caso de estudio, el valor inicial fue 63.7 MPa/kg.

El módulo está sujeto a diferentes casos de carga, toda vez que es un elemento que recibe el peso de la persona que camina sobre él cuando varias unidades conforman el recubrimiento del suelo de un ala industrial. La tarea principal, de no generar electricidad estática, debe complementarse con resistencia mecánica. La falla de un módulo, consistente en una deformación plástica o una fractura, no es admisible en caso alguno. Debido a lo anterior es necesario entender qué es lo que acontece dentro del dominio cuando éste se encuentra bajo el influjo de las condiciones de funcionamiento y, consecuentemente, el comportamiento derivado de este fenómeno. A su vez, la interpretación del estado interno del módulo se traduce en el vector guía para proponer el proceso de optimización no como un paso más en la cadena de trabajo, sino como una actividad consecuencia de una tarea de diseño anterior a éste.

Por lo tanto, se modeló en CAD el módulo original para poder interpretar el estado de esfuerzos generado en la geometría a partir de los casos de carga. A través del uso de paquetería FEM -Altair Hyperworks®, se propusieron diferentes casos de carga que hacen posible la discretización de la gran cantidad de maneras en las que el módulo puede ser pisado, debido a que no es posible reportar la totalidad de las fuerzas introducidas en los diferentes puntos del cuerpo.

Como punto inicial, para el módulo original se propusieron seis casos de carga, los cuales generalizan la posibilidad de pisar el módulo en seis puntos estratégicos para su estudio y posibilitan la generación de información sobre estados críticos de esfuerzos, que, a su vez, pueden interpretarse fácilmente desde un punto de vista geométrico. En la Figura 18 se pueden apreciar los distintos modos de carga a los que fue sometido el dominio de diseño. El módulo fue dividido en tres zonas, gracias a la simetría que presenta el objeto. La zona resaltada en verde engloba la totalidad del módulo, la zona resaltada en rojo representa la mitad del objeto y la zona resaltada en azul representa un cuarto del objeto.

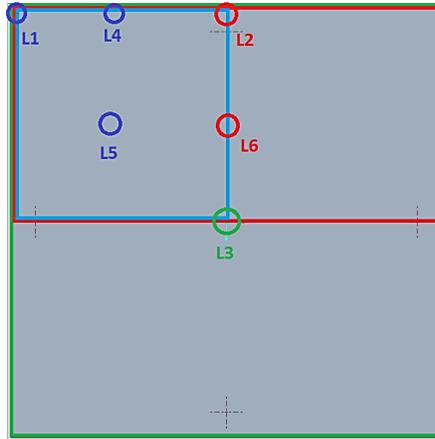


Figura 18. Vista superior del módulo para piso. El dominio total está representado por el color gris, siendo las líneas verdes las que delimitan el caso L3. Las líneas rojas delimitan los casos L2 y L6. Las líneas azules delimitan los casos L1, L4 y L5. (Original, autor).

En la tabla 1 se describe la distribución del dominio y el tipo de carga considerada.

Tabla 1 – Casos de carga. 1ª. etapa.

% del dominio analizado	Caso	Localización de la carga puntual
25 (azul)	L1	En un vértice del dominio
	L4	A una distancia de un cuarto del total de la dimensión de la arista (162/4 mm)
	L5	Al centro de la sección
50 (rojo)	L2	Sobre una arista, en el punto medio de su longitud
	L6	Al centro de la sección
100 (verde)	L3	Al centro del dominio total

Una vez definidos los casos de carga, se procedió a realizar análisis estáticos, utilizando Hyperworks® en cada una de las configuraciones. Para ello, se definió una malla fina y homogénea con elementos *quads* de 10mm de longitud, sobre una *MidSurface* a la que se le asignó una propiedad PSHELL.

Se dispuso la creación de un elemento rígido, denominado *sufridera*, el cual representó un transmisor de esfuerzo para un área determinada. La sufridera usada (Figura

19) posee un perfil oval, una forma discretizada a partir de la geometría que el pie humano posee en la sección donde el metatarso se une a las falanges de los dedos (Figura 20). Este elemento se definió con un cierto espesor, el cual permite trabajar a este componente como un *sólido* (*SOLID*) y no como una *cáscara* (*PSHELL*). Esto es importante durante el proceso de definición del problema, ya que, a nivel software, las propiedades de cada tipo de componente aporta información crítica al proceso de solución del problema.

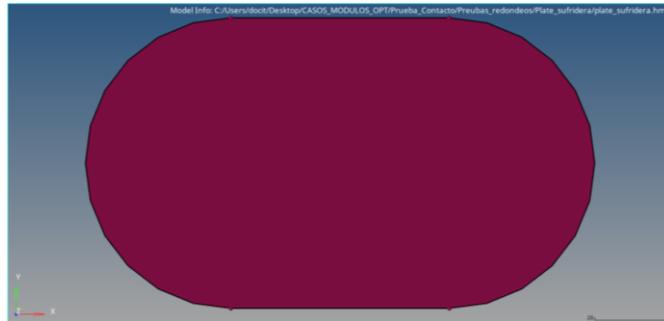


Figura 19. Sufridera, modelada como un sólido. El perfil oval representa la discretización del área en el que el pie humano hace contacto con la superficie donde pisa. (Original, autor).

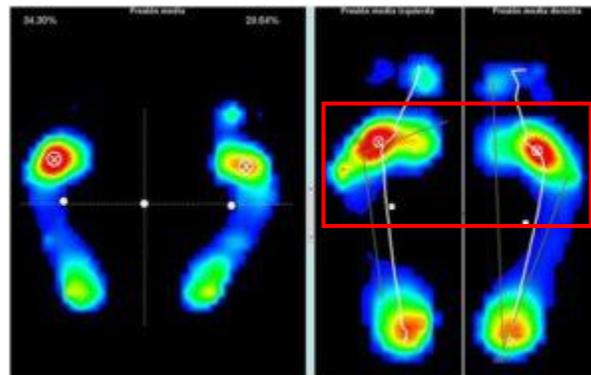


Figura 20. Análisis biomecánico de una pisada humana, considerada “neutra”. La región de interés para este estudio está remarcada por el rectángulo rojo. (Modificada de original, [49])

Para llevar a cabo la tarea de definir la pisada sobre el módulo plástico, se debe hacer uso de una condición de carga diferente a la usada anteriormente, así como también una nueva manera de introducción de la información competente en el software. En consecuencia, se determinó introducir una variable nueva al sistema; en el software se determina como un **contacto**. Dentro del programa de computación, es necesario definir la manera en que dos cuerpos diferentes interactúan entre sí tocándose en un área determinada. En general, se deben determinar las diferentes áreas donde se tocan las geometrías y de qué manera lo hacen.

En Hyperworks ® y en otros softwares que implementan el Método por Elemento Finito (FEM), basado en la aplicación del FEA, existen diferentes tipos de elemento, los cuales hacen referencia a las *dimensiones* que ocupa ese mismo elemento en el espacio. Es importante recalcar que esto *no es replicable* en realidad, sino que se trata de un proceso de discretización empleado en el modelado matemático del método. Por ello, podemos encontrar elementos 1D, 2D y 3D. Cada uno de ellos requieren información de entrada diferente, inherente a su definición y por ello su uso se recomienda para ciertas situaciones específicas.

En el caso del módulo, se propuso trabajar con un modelo PSHELL, el cual representa un modelado 2D que toma como parámetro de entrada el espesor de la *cara* que posee esta *propiedad*. En el caso de la sufridera, la *propiedad* asignada a su modelo es 3D, PSOLID.

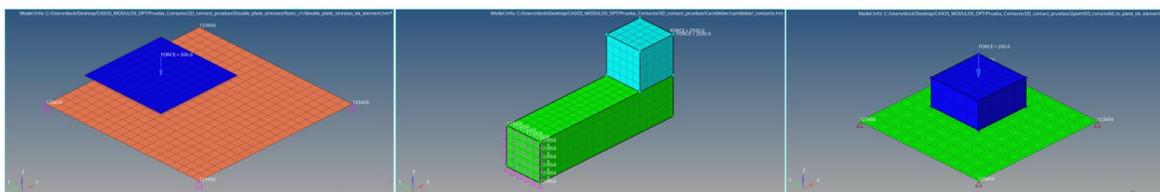


Figura 21. Izquierda, contacto entre dos elementos tipo PSHELL (2D). Centro, contacto entre dos elementos tipo PSOLID (3D). Derecha, contacto entre un elemento tipo PSHELL y un elemento tipo PSOLID. (Original, autor).

Tomando en cuenta los resultados de las anteriores iteraciones del problema, varias consideraciones nuevas fueron introducidas y algunas variables ya disponibles fueron modificadas. El contacto se definió entre un componente sólido (sufridera) y un componente cáscara (módulo) para lograr la deformación del elemento plástico mediante la acción de una *carga distribuida*. Es por ello por lo que la sufridera, dentro del software, fue determinada como un sólido PSOLID, con miras a atribuirle propiedades de rigidez inherentes a la geometría y no sólo al material.

Los parámetros que fueron tomados en cuenta durante la definición del contacto entre ambas geometrías se encuentran en la Tabla 2.

Tabla 2. Consideraciones generales del Contacto introducido al software FEM. Otros valores críticos no son visualizados puntualmente durante esta etapa del proceso.

Componente	Definición de tipo de elementos	Elemento maestro	Elemento esclavo	Tipo de elementos utilizados	Tipo de contacto	Distancia máxima permitida para contacto
<i>Sufridera</i>	PSOLID	Sí	No	Una (1) cara de un elemento PSOLID (de 3D a 2D)	TIE	10 mm
<i>Módulo</i>	PSHELL	No	Sí	Un (1) elemento PSHELL (2D)	TIE	10 mm

El material empleado para el módulo plástico es un polímero, poliestireno de alto impacto (HIPS, en inglés). La sufridera posee propiedades pertenecientes al acero, debido a que se requiere aprovechar las características de rigidez de este material para no deformar el elemento de carga bajo las condiciones de operación previstas. Las propiedades de HIPS empleadas tienen valores de 2,100 MPa para el módulo de elasticidad, 0.41 para la razón de Poisson, 20 MPa para el límite de cedencia y 1050 kg/m³ para la densidad.

Siguiendo este proceso de actualización, los modelos a estudiar también fueron modificados. Se determinó realizar diferentes modelos CAD, mostrando así numerosas configuraciones propuestas para las nervaduras, con el objetivo de emplearlas en esta nueva etapa y así comenzar a identificar las respuestas de estos conceptos de nervaduras ante una situación de carga real.

Estas propuestas de diseño surgieron tomando en consideración conceptos de fácil comparación, vertidas en propiedades geométricas de fácil definición y con una mayor posibilidad de ser manufacturadas. Esto no quiere decir -al menos hasta este punto- que las geometrías propuestas sean las mejores, pero sí son las más alcanzables -realizables- desde un punto de vista técnico. Las propuestas están fundamentadas también en los hallazgos anotados en el apartado 2.3 referentes al reforzamiento de placas planas.

Cada configuración está determinada mediante una variable entera positiva (**n**), fácilmente modificable y comparable con otras geometrías definidas de esta manera. Las

diferentes propuestas sobre las disposiciones de las nervaduras se pueden apreciar en las Figura 22.

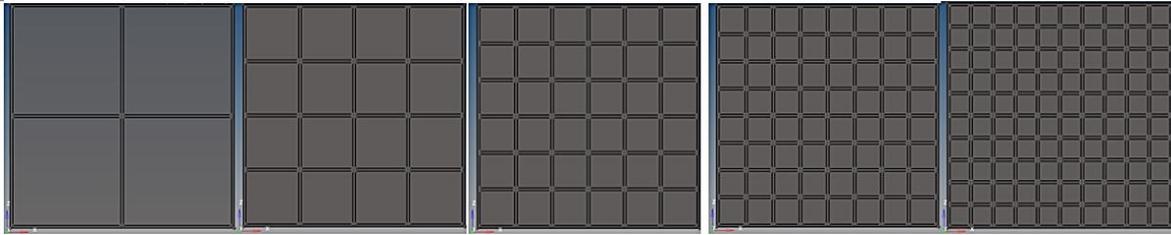


Figura 22. Configuraciones definidas por $n = 1, 2, \dots, 5$. La variable n hace alusión al número de cavidades contadas desde un borde hasta la nervadura central.

El arreglo modelado, en el que se posicionaron las nervaduras es rectangular. Debido a esta nueva configuración del modelo CAD, el mallado de los módulos debe ser considerado como punto importante, pues la malla dificulta o beneficia a la definición de áreas de contacto. Por esto, se hizo bastante hincapié que el tamaño del elemento fuera cercano a 5 mm.

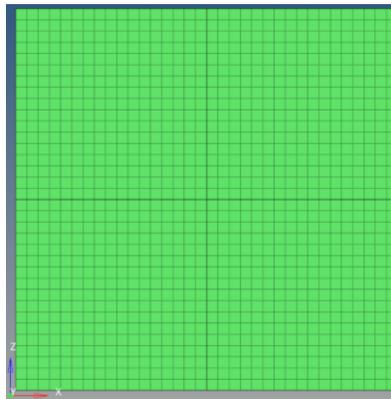


Figura 23. Malla definida sobre un módulo con nervaduras en patrón cuadrangular (Original, autor).

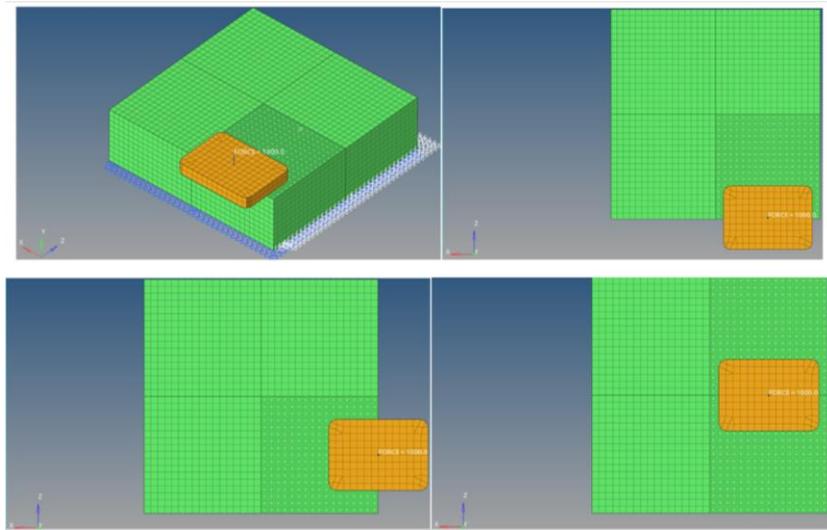


Figura 24. Detalle del Contacto creado entre el elemento Sufridera (amarillo) y el módulo plástico (verde), y de algunos de los casos de carga. (Original, autor).

Los resultados obtenidos, al comparar las distribuciones de esfuerzos, se diferencian de manera sustancial de aquellos que fueron obtenidos anteriormente mediante el uso de carga puntual, debido a que una mayor cantidad de elementos de la malla FEM se encuentran ahora bajo una condición de carga distribuida, a la vez que ocupan un área determinada, en relación con los anteriores estudios. Gran parte de la deformación ocurre en las fronteras entre el área proyectada de la sufridera sobre el módulo y el área del mismo módulo. Por lo tanto, la deformación que sufre el modelo se asemeja a la esperada por la acción de la pisada humana. Es importante recalcar que, a pesar de que la sufridera toma el lugar de un pie apoyado contra una superficie, este sistema está reducido a partir de lo que genuinamente es la interacción entre el pie humano y el módulo plástico

Dos casos de carga pueden ser apreciados en la Figura 25. En estas iteraciones se puede observar que las cargas distribuidas, debidas a la sufridera, se encuentran en las posiciones donde antes se encontraban las cargas puntuales. Esta configuración es válida para ambos casos, ya que se ha determinado validar los distintos casos de carga para eventualmente comprobar que estos convergen hacia una o varias respuestas.

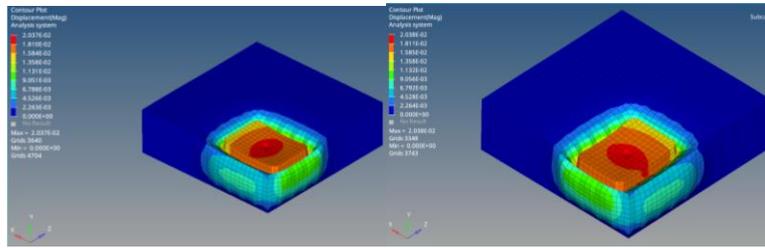


Figura 25. Simulación de la deformación generada por la sufridera sobre el módulo plástico; aumentada mil (1000) veces. De izquierda a derecha, $n = 4$ con sufridera centrada en un cuadrante, $n = 4$ con sufridera centrada en un cuadrante rotada 90° alrededor del eje y. (Original, autor).

Las pruebas realizadas bajo condición de contacto fueron determinadas como no concluyentes. Esto, a partir del análisis de la información obtenida tras efectuar numerosos análisis estáticos. Los análisis mencionados mostraron que las geometrías que forman tanto la región de no diseño como la de diseño, no se encuentran relacionadas entre sí de la manera prevista, ya que la distribución de esfuerzos se limita solamente al área que se encuentra por debajo de la proyección de la Sufridera sobre el módulo plástico. Esto puede observarse en la Figura 26, ya que gran parte del módulo se encuentra sin excitación (azul marino), como si se encontrara *desconectado* de la zona de contacto. Se concluyó que debían abandonarse estas condiciones de carga.

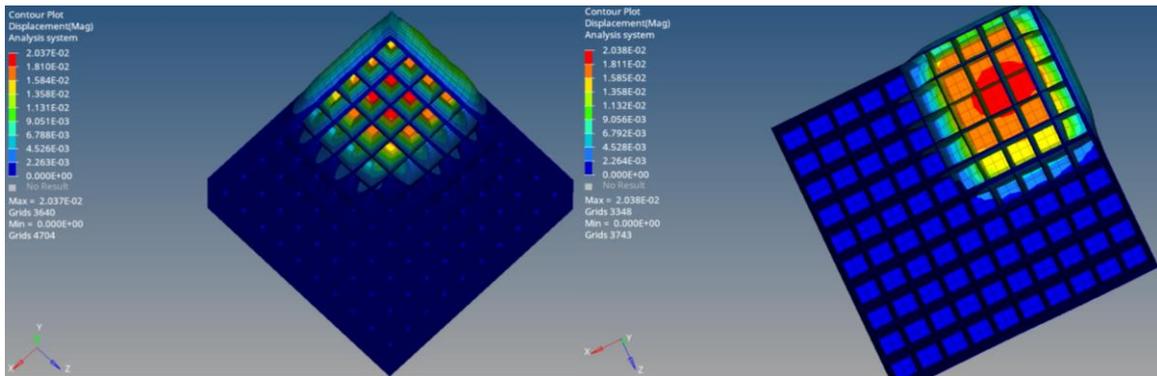


Figura 26. Deformación de diferentes módulos ($n = 10$) bajo condición de Contacto @ 1000x el desplazamiento original. Se puede notar cómo el esfuerzo no interactúa con otras zonas del área de diseño ajenas al área de contacto.

En la tercera iteración del proceso de definición del modelo, se prescindió de la Sufridera. El estado de esfuerzo que este cuerpo generó se tradujo a un arreglo donde sólo interviene un Colector de Carga, colocado directamente sobre la geometría, sin intermediarios de algún tipo. A la par, esto facilitó la aplicación de varios colectores de carga al mismo tiempo, agilizando la inserción de diferentes escenarios de carga simultáneos.

El colector empleado en estas iteraciones es un Colector de Carga tipo Presión, dispuesto directamente sobre un área delimitada sobre elementos tipo *shell*, que emula una proyección, sobre esa superficie, del área de la pisada humana sobre el módulo. Las restricciones aplicadas continúan siendo las mismas, los nodos que conforman la base del módulo no pueden moverse ni girar hacia/sobre dirección alguna.

El Colector de carga tipo Presión asemeja, a su vez, el estado de esfuerzos al cual está sujeta la Sufridera. Por lo tanto, sobre la malla FEM de la geometría tipo *shell*, se delimitó un “área” conformada por 140 elementos tipo *quad*, simulando un rectángulo definido por diez elementos finitos en dirección vertical y catorce elementos finitos en dirección horizontal, y se aplicó una presión de 303 kPa. El valor numérico de la presión se obtuvo a partir de la suposición de que el módulo es pisado por un sujeto masculino de 100 kg. La proyección del área de la sufridera no es idéntica a su original debido al tipo y al tamaño de los elementos finitos utilizados.

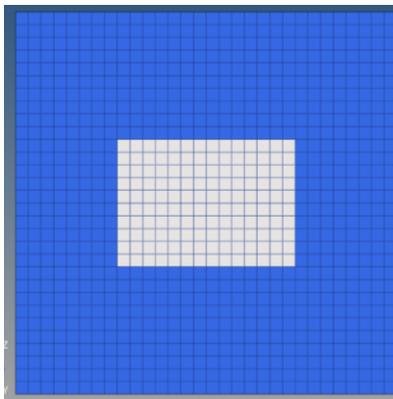


Figura 27. Proyección simplificada del área donde el Contacto se definió para un caso de carga específico. En este caso, el área mostrada será ocupada por un colector tipo Presión. (Original, autor).

Las posiciones en las que fueron ubicadas las presiones durante esta iteración asemejan las posiciones de las cargas puntuales utilizadas en la primera etapa de prueba de cargas.

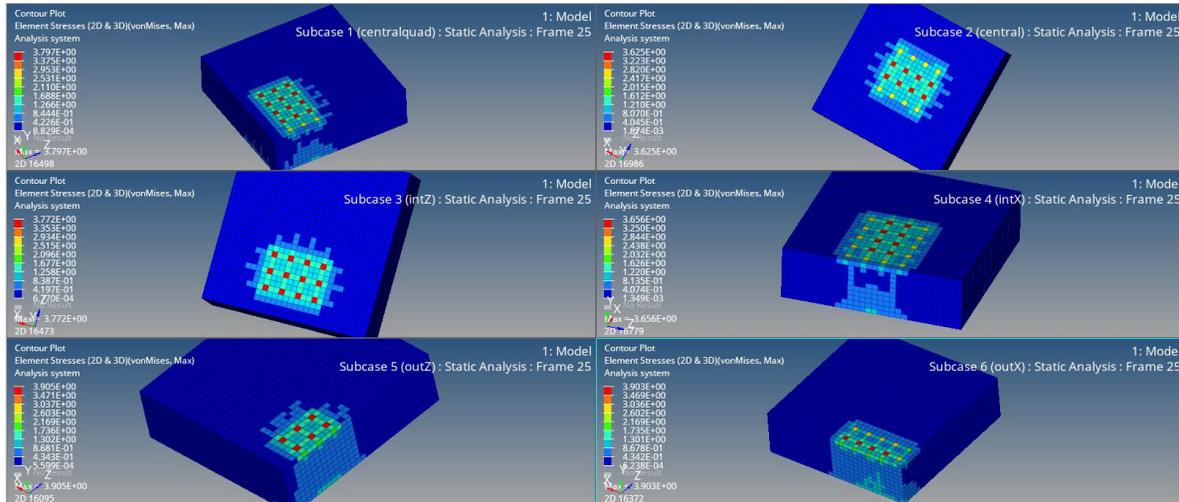


Figura 28. Distribución de esfuerzos para los casos cargados con Presión. Se puede constatar que existe cierto grado de homogeneidad en cómo se distribuye el esfuerzo bajo estos casos, situación que difiere de los casos aplicados con Contacto. (Original, autor).

A partir de las pruebas hechas en los módulos, se constató que las construcciones tipo $n = 1$ no son capaces de adecuarse a las restricciones marcadas por las propiedades del material utilizado (HIPS). Por lo tanto, estos modelos se descartaron para cualquier estudio posterior.

4.2 Optimización

Los parámetros utilizados durante el proceso de optimización fueron calculados previamente gracias al análisis estático. Los parámetros de entrada son los siguientes (Tabla 3)

Tabla 3. Parámetros introducidos a la primera generación de iteraciones de optimización. El valor de 4 MPa se obtuvo a través de análisis estáticos previos.

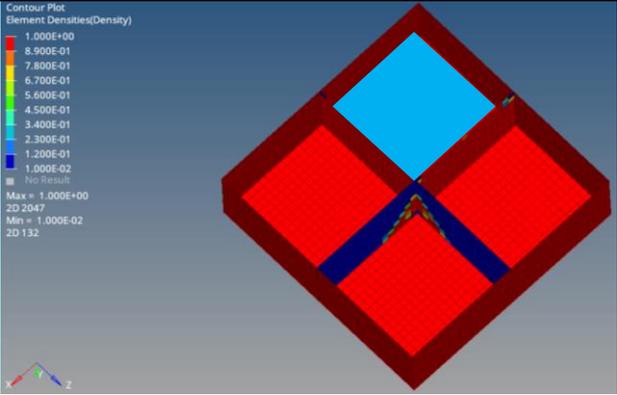
Parámetro	Valor / Referencia de control
Esfuerzo máximo permitido	4.00 MPa
Número de cargas distribuidas	6 [-]
Carga distribuida	0.303 MPa
Superficie de aplicación	XZ

Volumen reducido deseado V_R	$50 \leq V_R \leq 70$ [%]
Módulo de Young E	2100 MPa
Densidad ρ	1050 kg/cm ³
Restricciones	No se permite movimiento en la base

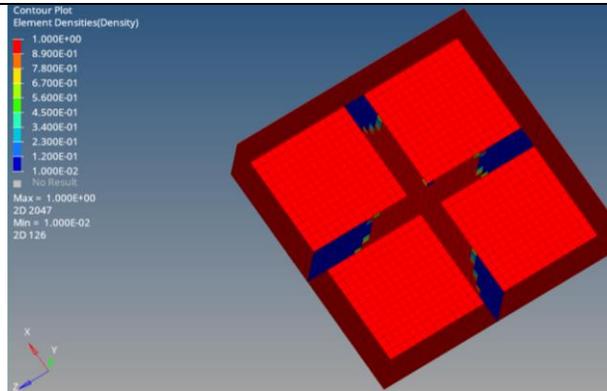
En el caso de una reducción el 50% del volumen original la propuesta del software no se diferencia en gran manera de la geometría inicial del modelo. Es decir, gran parte del área de diseño queda intacta, al concentrarse en el cuadrante donde se aplica la carga la mayor parte del material original.

Para el caso de reducción del 70% del volumen original, HyperWorks® propone una geometría más “audaz”. Esto en miras de que los elementos que conforman las nervaduras no sólo comienzan a modificar su densidad de manera más vistosa, sino que también desaparecen por completo del dominio, generando discontinuidad en las nervaduras. La heterogeneidad mostrada, en términos de elementos presentes o “desaparecidos”, permite inferir que es posible una reducción sustancial el volumen inicial, pero a costa de facilidad de manufactura.

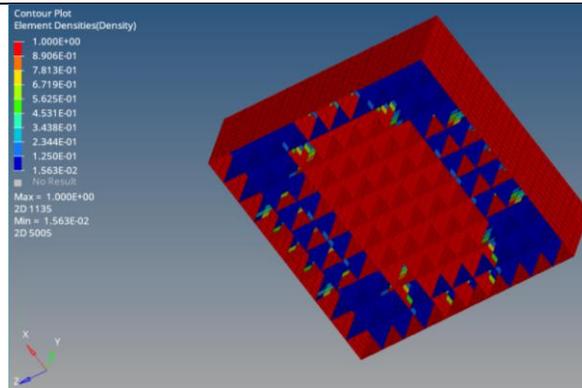
Tabla 4. Recuento de algunos casos de optimización para seis (6) cargas. Las zonas coloreadas en tonalidades diferentes al color rojo pueden ser “desechadas” según los parámetros del proceso de optimizado. (Original, autor).

Descripción	Modelo
<p>Modelo con carga no centrada y dos nervaduras, @ 50% del volumen original. Ubicada al centro de la sección de la esquina superior [delimitada en cian]. [FALLA], porque viola la restricción de máximo esfuerzo permitido (no tiene rigidez apropiada).</p>	

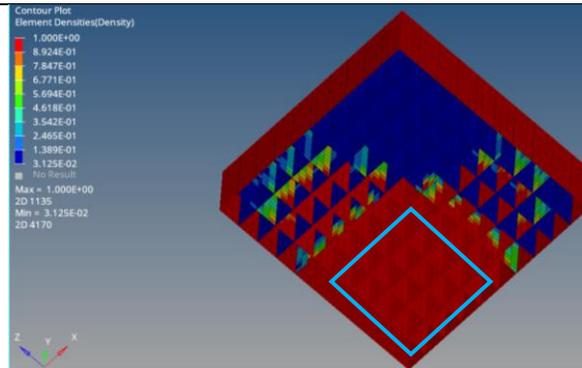
Modelo con carga central y dos nervaduras, @ 50% del volumen original. [FALLA], porque viola la restricción de máximo esfuerzo permitido (no tiene rigidez apropiada).



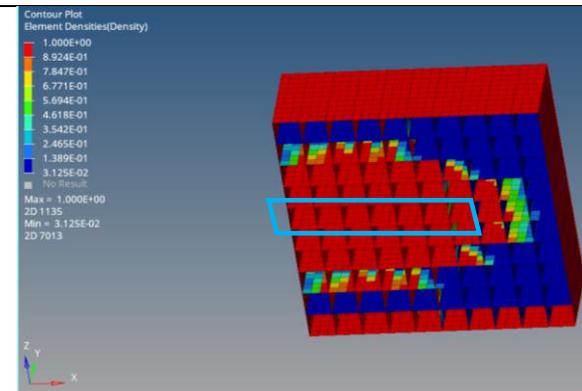
Modelo con carga centrada y dieciocho nervaduras, @ 50% del volumen original. [NO FALLA], cumple las restricciones de máximo esfuerzo permitido (tiene rigidez apropiada) y de fracción del volumen original.



Modelo con carga no centrada y dieciocho nervaduras. Ubicada al centro de la sección de la esquina superior [delimitada en cian] @ 50% del volumen original. [NO FALLA], cumple las restricciones de máximo esfuerzo permitido (tiene rigidez apropiada) y de fracción del volumen original.



Modelo con carga no centrada y dieciocho nervaduras. Ubicada al centro de la sección de la esquina superior [delimitada en cian] @ 50% del volumen original. [NO FALLA], cumple las restricciones de máximo esfuerzo permitido (tiene rigidez apropiada) y de fracción del volumen original.



Lo anterior se sustenta debido a que las primeras respuestas obtenidas, además de no minimizar de gran manera la saturación de nervaduras en la zona de diseño, muestran, también una tendencia a crear columnas, es decir, la forma óptima que debe poseer la nervadura es la de una columna, para las configuraciones especificadas. Además de no representar una geometría deseada, debido a que interviene el espacio existente dentro de la carcasa, el proceso de inyección de plásticos no permite generar estas configuraciones.

Se determinó que, al sólo utilizarse seis casos de carga, en conjunto con la restricción de movimiento de todos los nodos pertenecientes a la base del módulo, la respuesta del análisis de optimización está mal acotada y esto puede ser el motivo por el cual la geometría propuesta es poco deseable. Por ello se propuso un nuevo estado de cargas, en el cual se prioriza la respuesta por parte de veinticinco presiones diferentes, las cuales se encuentran bajo un sistema análogo a la simetría. A su vez, estos casos de carga representan las diferentes maneras en las que, teóricamente, el módulo puede ser pisado al ser parte, a su vez, de un conjunto de módulos colocados sobre una superficie.

En el mismo tenor, se establecieron nuevos parámetros de entrada para el proceso de optimización, toda vez que los utilizados con anterioridad no se adecuaban al tipo de respuesta que se desea.

Tabla 5. Parámetros utilizados para la nueva configuración utilizada en análisis estáticos y, subsecuentemente, en problemas de optimización. Los valores relacionados con el material son extraídos de las propiedades del HIPS.

Parámetro	Valor / Referencia de control
Esfuerzo máximo permitido σ_M	$\sigma_M = S_Y = 20 \text{ MPa}$
Número de cargas distribuidas	25 [-]
Carga distribuida	0.303 MPa
Superficie de aplicación	XZ
Volumen reducido deseado V_R	$50 \leq V_R \leq 70 \text{ [%]}$
Módulo de Young E	2100 MPa
Densidad ρ	1050 kg/cm^3
Restricciones	No se permite movimiento en la base de la carcasa. Las nervaduras son libres de moverse.

Una vez establecidos los nuevos parámetros de entrada, se procedió a cargar el módulo plástico mediante el esquema que se muestra en la Figura 29. Este esquema se deriva de la composición mostrada anteriormente en la Figura 18. Bajo los veinticinco casos de carga propuestos, el módulo debe mostrar un comportamiento rígido en toda condición, aunque estos no ocurran al mismo tiempo.

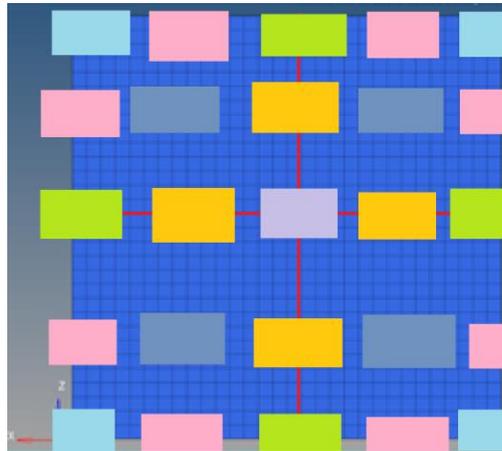


Figura 29. Posiciones de los veinticinco colectores de carga empleados en el proceso de optimización. Cada color representa una “familia” de Presiones aplicadas en zonas que asemejan las posiciones donde otrora se encontraban cargas puntuales. El perfil rectangular es un acercamiento a la geometría del área donde se aplican los colectores. (Original, autor)

Los resultados obtenidos a partir de los análisis estáticos muestran que el máximo valor de esfuerzo detectado es de 4.20 MPa, el cual se encuentra por debajo del valor del esfuerzo de cedencia para el poliestireno de alto impacto (20 MPa).

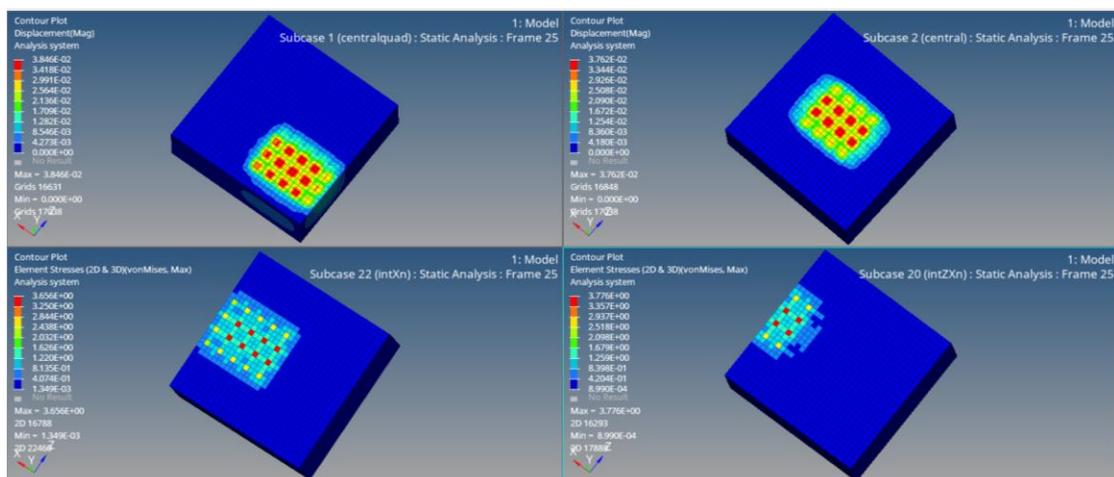


Figura 30. Sub-caso 1 (izquierda arriba), sub-caso 2 (derecha arriba), sub-caso 22 (izquierda abajo) y sub-caso 20 (derecha abajo). Se implementaron veinticinco (25) “sub-casos” en un solo modelo para poder tomar el mayor número de casos representativos alusivos al problema de pisada sobre el módulo plástico.

Una vez comprobada la posibilidad de que los módulos se comporten de manera adecuada, se procedió a realizar estudios de optimización para las configuraciones de módulos propuestas, exceptuando $n=1$, por razones ya mencionadas anteriormente. Los módulos fueron cargados con los veinticinco casos de carga descritos. Los parámetros iniciales tomados en consideración se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Parámetros de entrada para la optimización.

Parámetro	Elemento de control
Espesor PSHELL	2 mm
Tipo de respuestas -Compliance -Volumefrac	[-]
Máximo esfuerzo permitido	20 MPa (límite elástico HIPS)
Volumen reducido	De 50% hasta 70%
Tipo de objetivo -Minimizar (Min)	Compliance
SPC (restricciones)	Carcasa [zona de no diseño]: base completamente restringida. GDL = 0.
	Nervaduras [zona de diseño]: sin restricciones. GDL = 6.

A diferencia de las propuestas obtenidas durante el primer proceso de optimización, los resultados que se obtuvieron a partir de la nueva configuración de parámetros forman un patrón bien definido en cualquiera de los arreglos de nervaduras que presentados. Cuatro casos se muestran a continuación, en la Figura 31.

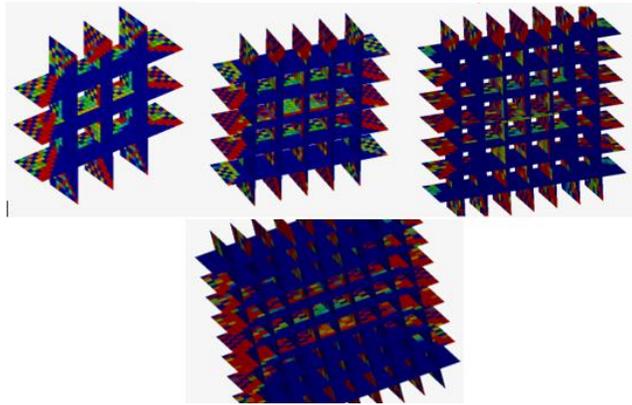


Figura 31. De izquierda a derecha, de arriba hacia abajo: módulo n2, módulo n3, módulo n4 y módulo n5. Todos ellos @ 30% de su masa original, cumpliendo con restricción de esfuerzo máximo $S_y=20\text{MPa}$. Se puede apreciar en todos los módulos la aparición de una sección de “doble arco” sobre la superficie de las nervaduras (cuadrícula). (Original, autor).

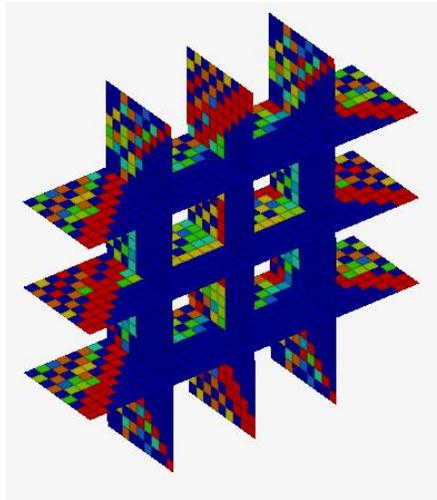


Figura 32. Módulo n2 @ 30% de su masa original, cumpliendo con restricción de esfuerzo máximo $S_y=20\text{MPa}$. Pueden apreciarse de mejor manera los dobles arcos formados en el dominio de las nervaduras. (Original, autor).

El proceso de optimización de Hyperworks®, a grandes rasgos, funciona mediante la eliminación de elementos finitos del dominio de diseño, basada en el rango de densidad admisible. El criterio que utiliza es el de reducción de densidad -y por lo tanto de volumen- de cada elemento finito dependiendo de su contribución en la distribución de esfuerzos. Si un elemento no se encuentra “lo suficientemente cargado”, quiere decir que la energía que

contiene puede ser redirigido a otro elemento, mientras que el elemento en cuestión reduce su tamaño y, por lo tanto, su contribución con el sistema (Figura 32).

La escala de colores muestra a los miembros virtualmente desaparecidos, o a punto de hacerlo, coloreados en una tonalidad azul oscuro. Mientras un diagrama de optimización topológica muestre tonalidades más claras y el color tienda a rojo, implica que los elementos poseen un porcentaje de densidad igual o cercano al 100%.

Lo que puede apreciarse es que, sin importar la cantidad de nervaduras que se encuentren en el dominio de diseño, la respuesta converge a una única solución; en este caso específico, hacia una forma en particular. El arco doble es una constante que se presenta prácticamente en todos los ejercicios de optimización, sin importar si se fue asignado un valor, o no, al límite máximo de esfuerzo permitido. También debe constatarse que, aunque varíe el porcentaje de masa retirada de la zona de diseño, la forma de doble arco se mantiene también.

Por lo tanto, comprobado que los módulos son capaces de resistir un estado de esfuerzos cuyo valor máximo se encuentra por debajo del límite elástico, se procede a la adecuación por manufactura de estos patrones, los cuales podemos ver más claramente en la Figura 33.

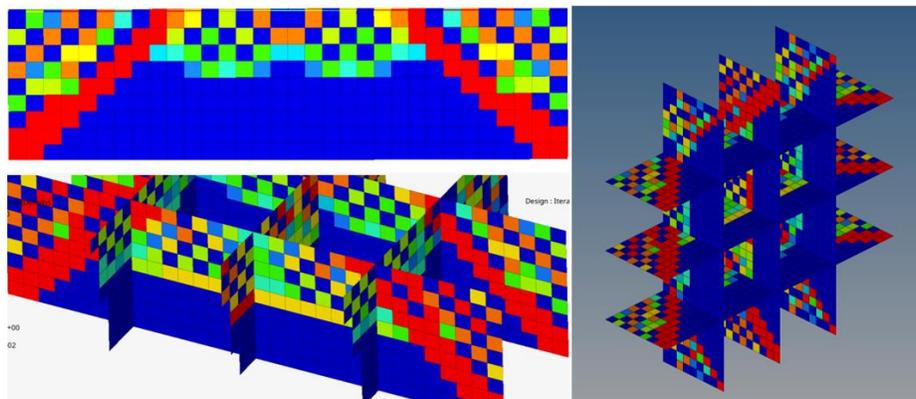


Figura 33. Se puede apreciar como los elementos azules, que representan entidades cuya densidad es cero, se apropian de gran parte de la pieza. Por lo tanto, al retirar este tipo de material, puede obtenerse una forma que recuerda a un arco o a un arco doble.

4.3 Adecuación para manufactura

No todas las soluciones aportadas obtenidas al término de un proceso de optimización constituyen un diseño terminado. Se requiere de un tratamiento adicional para conformar una geometría con posibilidades de manufacturarse. Este proceso se realiza en algunos casos con intervención humana, aunque ya se tienen herramientas como OSSmooth de la plataforma Hyperworks® que puede emplearse con este propósito. El concepto manejado por esta herramienta se refiere a abrir el diseño en una dirección predeterminedada.

Las geometrías presentadas como propuestas se definieron a partir de la ubicación de puntos representativos dentro de la malla, como los mostrados en la Figura 34.

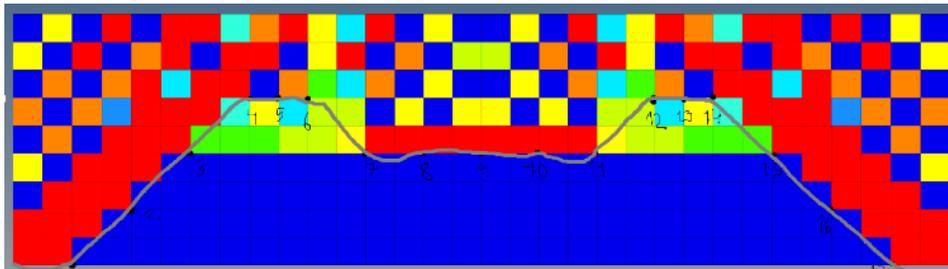
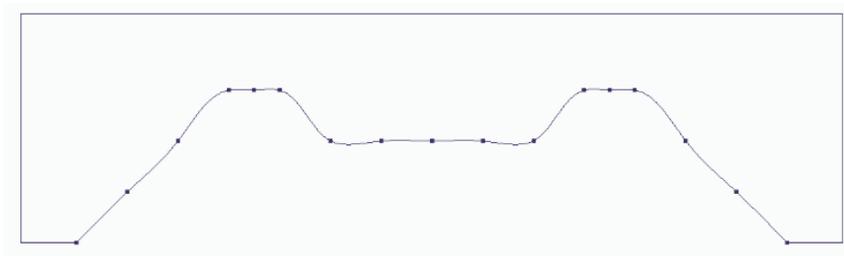


Figura 34. Puntos representativos dentro del dominio de optimización entregado por Optistruct®.

Se realizaron dos propuestas para definir la adecuación del dominio de diseño original. Estas adecuaciones toman en consideración los resultados de optimización que, a su vez, fueron respuesta a la tercera etapa de casos de carga planteada. En la Figura 35 puede apreciarse la conceptualización de la geometría generalizada, común para todos los casos de carga y para todos los módulos ($n = 2, 3, 4, 5$).



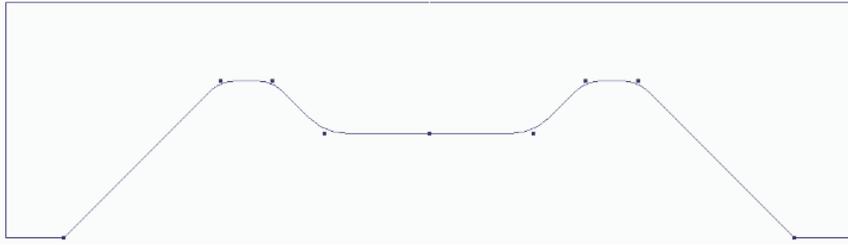


Figura 35. Arriba, Propuesta A para manufactura. Bordes suaves, pero más difíciles de fabricar. Abajo, Propuesta B, geometría parametrizada y más accesible para su manufactura.

El proceso de adecuación para manufactura mediante un proceso de inyección de plásticos se llevó a cabo en un software CAD, específicamente Siemens SolidEdge®. La Propuesta A para manufactura se construyó a partir del mapeo de los puntos señalados en la Figura 34. Una vez señalada la localización en el espacio de todos los puntos, se construyó una curva tipo SPLINE. Las características de esta curva están basadas en la definición propia del software en cuestión [23]. Puede constatar que la Opción A presenta una curva que se acopla en gran manera al perfil de “doble arco” que el proceso de optimización arrojó como respuesta óptima para todos los casos. Los bordes de esta nueva nervadura se aprecian redondeados, con secciones rectas cortas y escasas.

En el caso adecuación para la Propuesta B, se mapearon los puntos de interés previamente identificados. Al construir la geometría, se tomó como vector guía la inclusión de geometrías de fácil definición tanto en el programa CAD como en una situación real de manufactura. Las curvas, en su mayoría, fueron transformadas en segmentos de línea recta, definidos a través una dirección y una longitud. Los vértices formados por la unión de diferentes segmentos fueron redondeados mediante la inserción de un radio, y el origen de este, en su definición. La forma general de “doble arco” se mantiene, mientras que la geometría se estilizó y se volvió más fácil de modificar, llegado el caso.

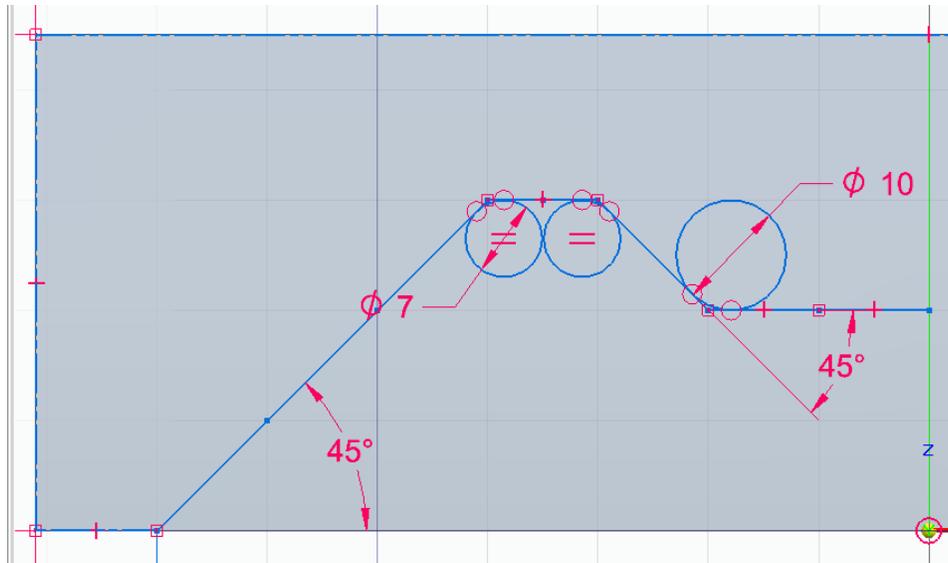


Figura 36. Muestra de la parametrización de la Propuesta B presentada.

Al compararse las propuestas entre sí, se constató que es deseable la implementación de la Propuesta B en miras a manufactura. Toda vez que esta geometría es fácilmente parametrizable, al contar con elementos más característicos y adaptables a un cambio. La Propuesta A muestra una solución con curvas más complejas (splines), determinadas por secciones.

Para ambos casos, los módulos cumplen con las restricciones planteadas. Ninguno de ellos sobrepasa el valor de esfuerzo máximo del material, estipulado en 20MPa en ninguno de los 25 casos de carga. En la figura 12 puede verse un comparativo del estado de esfuerzos en módulos similares ($n_1=n_2$) con diferente configuración de nervaduras.

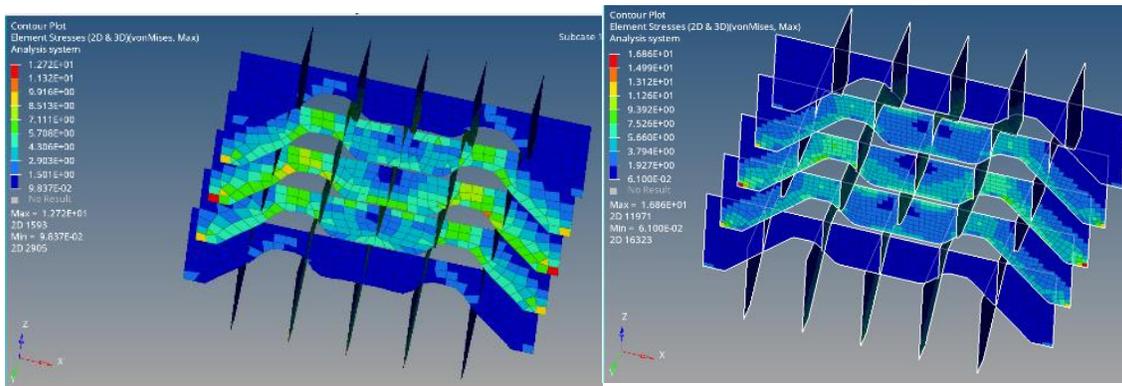


Figura 37. Estado de esfuerzos en módulo $n=3$, para Propuesta A (izquierda) y Propuesta B (derecha).

Se realizó un proceso cuya finalidad es la selección de un solo módulo, puesto que cada uno de los casos responde convenientemente a la solución del problema. Para ello se empleó el cociente que mide la relación entre esfuerzo máximo y masa, para cada uno de los módulos, considerando que los valores altos del cociente son mejores. Todo esto aplicando la Propuesta B al diseño. (Tabla 7).

Tabla 7. Valores del cociente esfuerzo máximo/masa, para diferentes valores de n .

Módulo	Masa [gr]	Esfuerzo máximo en el módulo [MPa]	Cociente [MPa/kg]
$n=2$	162.46	18.53	114.06
$n=3$	194.45	12.72	65.42
$n=4$	225.90	9.029	39.97

Determinados los cocientes, se concluye que el módulo tipo $n=2$ posee la mejor relación entre esfuerzo máximo calculado y masa. Sin embargo, es precisamente el valor del esfuerzo, muy cercano al esfuerzo máximo (20MPa), lo que evita su selección como solución. Utilizando este criterio, el módulo tipo $n=3$, con geometría referente a la Propuesta B es el más adecuado para responder ante el proceso de optimización planteado (Figura 38).

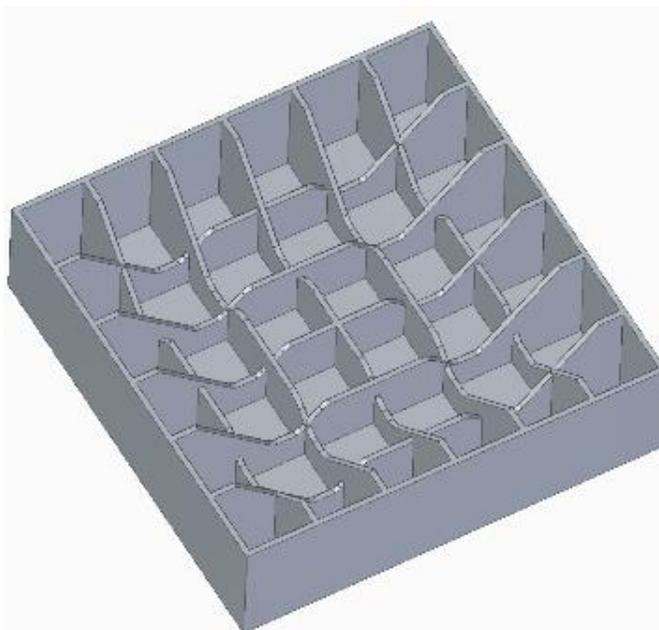


Figura 38. Módulo con configuración propuesta.

En cuanto a esta respuesta ($n=3$), se redujo la masa “original”, relacionada con el primer proceso de optimización. Tras el adelgazamiento de las nervaduras, pudo constatarse este hecho. El material HIPS posee un rango de espesores utilizados en el proceso de inyección, el cual es un procedimiento mediante el cual estas piezas, los módulos dieléctricos, se fabrican; este rango puede representarse por $0.9 \text{ mm} \leq t_h \leq 3.0 \text{ mm}$, donde t_h es el espesor de las paredes del elemento inyectado.

Nervaduras con un espesor de 1.2 mm fueron propuestas para una nueva iteración, donde el módulo disminuyó su masa hasta una medida de 0.160 kg y el esfuerzo máximo registrado aumentó a 14.3 MPa. Esto, subsecuentemente, modificó el valor del cociente resistencia-masa, que cambió a 87.8 MPa/kg.

En cuanto a la comparación realizada entre el módulo $n=3$, Propuesta B, y el módulo original, la Tabla 8 ofrece información al respecto.

Tabla 8. Comparación entre características del módulo original y del módulo propuesto por este trabajo.

Característica	Módulo original	Módulo $n=3$ Propuesta B
Masa [kg]	0.160	0.160
Esfuerzo máximo [MPa]	10.04	14.3
Cociente resistencia-masa [MPa/kg]	63.7	87.8

A pesar de que se aprecia que la masa en ambos casos es prácticamente la misma, el esfuerzo máximo detectado en la geometría aumenta en un 42%. Esto indica que la propuesta optimizada es capaz de soportar una carga mayor sin ver comprometida su funcionalidad. De igual manera, esto puede constatarse un aumento del 34% en su valor, contrastando con el valor inicial de 65.5 MPa/kg ante el valor final de 83.8 MPa/kg.

5. Conclusiones

Es importante hacer hincapié en que el concepto optimizado provee a la geometría de una distribución de esfuerzos preferible ante la que presenta el diseño original, toda vez que las transiciones visualizadas poseen transiciones más suaves, a la vez que se acoplan a la geometría propuesta. En el caso de la geometría original, se puede apreciar que las transiciones no son suaves y que existen zonas donde se concentran esfuerzos.

Aunado a lo anterior, el estado de esfuerzos que presenta el diseño original sobrepasa en gran manera el esfuerzo límite del material, al analizarse bajo los casos de carga propuestos para este trabajo. Esta razón es más que suficiente para proponer una nueva geometría que permite, en mínima instancia, soportar los diferentes casos de carga sin fallar. Como ya se mencionó anteriormente, al inicio de esta sección, el módulo $n=3$, Propuesta B, es capaz de resistir en cada uno de los 25 casos. (Figura 51).

Se concluye que, debido a la relación existente entre resistencia y masa, la masa misma del elemento y a su facilidad para manufacturar, el módulo $n=3$, en su versión parametrizada (Propuesta B) es la mejor opción para modificar la geometría general de los módulos dieléctricos para pisos industriales. Las nervaduras propuestas no demeritan la propiedad de carcasa de los módulos, los perfiles distribuyen de manera adecuada el estado de esfuerzo y el valor máximo de esfuerzo detectado en el sistema no sobrepasa el valor de cedencia del material.

6. Referencias

- 1 Encyclopedia.com. Oxford University Press. Optimization. [En línea; consultado 18 de marzo de 2021]. <https://www.encyclopedia.com/computing/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/optimization>.
- 2 U. Kirsch, *Structural Optimization: Fundamentals and Applications*, New York: Springer-Verlag, 1993.
- 3 Altair Engineering, Inc. Structural Optimization using OptiStruct. Manual. 2013.
- 4 H. Eschenauer, N. Olhoff. *Topology optimization of continuum structures: A review*. Applied Mechanics Reviews - APPL MECH REV. 54. 10.1115/1.1388075: 2001.
- 5 G.I.N. Rozvany. (2001). *Scope, Methods, History and Unified Terminology of Computer-Aided Topology Optimization in Structural Mechanics*. Structural and Multidisciplinary Optimization 21, 90-108. Structural and Multidisciplinary Optimization. 21. 90-108. 10.1007/s001580050174: 2001.
- 6 J. Lögö, I. Hussein. *Milestones in the 150-Year History of Topology Optimization: A Review*. Computer Assisted Methods in Engineering and Science. 27(2-3): 97-132, 2020, doi: <https://doi.org/10.24423/cames.296>
- 7 A.G.M. Michell. LVIII. *The limits of economy of material in frame-structures*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 8 (47): 589-597, 1904, doi: <https://doi.org/10.1080/14786440409463229>
- 8 W. Baker, William, L. Beghini, A. Mazurek, J. Carrion, A. Beghini, *Maxwell's reciprocal diagrams and discrete Michell frames*. Structural and Multidisciplinary Optimization. 48: 267-277, 2013, doi: <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0910-0>
- 9 G. Tejani, V. Savsani, S. Bureerat, *Truss Topology Optimization: A Review*, Beau Bassin: Scholar's Press, 2018.
- 10 M.P. Bendsøe, O.Sigmund, *Topology Optimization Theory, Methods and Applications*. 2nd ed., Springer, New York. Berlin Heidelberg. 2003.
- 11 K. Saitou, K. Izui, S. Nishiwaki, P. Papalambros. *A Survey of Structural Optimization in Mechanical Product Development*. Journal of Computing and Information Science in Engineering. 5:215-226. 2005. Doi: 5. 10.1115/1.2013290.
- 12 A.Idris, T. Ahmad, N. Maan, (2008). *Homeomorphism between Sphere and Cube*. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences. 4(2): 343-352, 2008, doi: <https://doi.org/10.11113/mjfas.v4n2.42>.
- 13 R. Yang. *A Stepping Stone in the Topological Revolution*. Molecular Frontiers Journal. 4, 1-6, 2020, doi: <https://doi.org/10.1142/S2529732520970020>.

- 14 M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 71(2), 197–224, 1998, doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2)
- 15 X. Guo, G. Cheng, *Recent development in structural design and optimization*. *Acta Mechanica Sinica*. 27: 807-823, 2010, doi: <https://doi.org/10.1007/s10409-010-0395-7>.
- 16 W. Li, A. Zheng, L. You, X. Yang, J. Zhang, L. Liu. *Rib-reinforced Shell Structure*. *Computer Graphics Forum*. 36: 15-27, 2017, doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.13268>.
- 17 V.Karpov, A. Semenov. *Mathematical models and algorithms for studying strength and stability of shell structures*. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 11. 70-81. 2017 doi: <https://doi.org/10.1134/S1990478917010082>
- 18 L. Krog, A. Tucker, M. Kemp, R. Boyd. *Topology Optimization of Aircraft Wing Box Ribs*. 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. Doi: <https://doi.org/10.2514/6.2004-4481>
- 19 D. Locatelli, S. Mulani, R. Kapania. *Wing-Box Weight Optimization Using Curvilinear Spars and Ribs (SpaRibs)*. *Journal of Aircraft*. 48(5),1671-1684, 2011, doi: <https://doi.org/10.2514/1.C031336>.
- 20 E. Tyflopoulos, D. Flem, M. Steinert, A. Olsen, *State of the art of generative design and topology optimization and potential research needs* en *Proceedings of NordDesign 2018*, [en línea] disponible en: <https://www.designsociety.org/publication/40924/State+of+the+art+of+generative+design+and+topology+optimization+and+potential+research+needs>
- 21 Merriam Webster Dictionary. *Topology*. [En línea; consultado 18 de marzo de 2020] <https://www.merriam-webster.com/dictionary/topology>.
- 22 M. Macho-Stadler, Marta. “¿Qué es la topología?”. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, (20), 63-77, 2002, [en línea], disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=803774>
- 23 Altair OptiStruct® Concept Design with Topology and Topography Optimization. [en línea] disponible en https://blog.altair.co.kr/wpcontent/uploads/2011/03/optistruct_optimization_10-0.pdf. Altair Engineering. 2009
- 24 L. Xia, *Multiscale Structural Topology Optimization*. London: ISTE Press. Elsevier. 2016
- 25 B. Hassani, E. Hinton. *Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice, and Software*. London: Springer, 1999
- 26 M. Ochoa. *Topology optimization algorithms for the solution of compliance and volume problems in 2D*. Tesis Maestral. Centro de Investigación en Matemáticas, AC. Guanajuato, México, 2016.
- 27 M.L. Bucleam, KJ.Bathe. *The principle of virtual work*. In: *The Mechanics of Solids and Structures -Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*. Computational Fluid

- and Solid Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-26400-2_5. 2011
- 28 Figura 8 [izquierda]. Original disponible en *epectec.com*. Consultado en noviembre 14, 2019.
- 29 Figura 8 [centro]. Original disponible en *paragon-rt.com*. Consultado en noviembre 14 2019.
- 30 Figura 8 [derecho]. Original disponible en *coronaplastics.co.uk*. Consultado en noviembre 14, 2019.
- 31 S.Timoshenko, Stephen, S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill, 1959.
- 32 O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *Finite Element Method: Volume 1 - The Basis*. 5th Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- 33 V.V. Karpov, *Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts. International Journal of Solids and Structures*. Vol 146. (2018). International Journal of Solids and Structures Volume 146, 1 August 2018, Pages 117-135 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024>
- 34 Figura 11. Modificada de original, disponible en *synergiscadblog.com*. Consultado en noviembre 15, 2019.
- 35 R.Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons. 2004
- 36 G.I.Pshenichnov, A. Yazdurdyev, *Transverse bending of ribbed rectangular plates. Soviet Applied Mechanics*. 27, 1182–1185, 1991, doi: <https://doi.org/10.1007/BF01301503>
- 37 Mohammed M. Hasan. *Optimum design of stiffened square plates for longitudinal and square ribs*. Al-Khwarizmi Engineering Journal, 3(3), 13-30, 2007, [en línea] disponible en <https://alkej.uobaghdad.edu.iq/index.php/alkej/article/view/630>
- 38 A.Salomon, *An evaluation of finite element models of stiffened plates*, Master of Science in Naval Architecture and Marine Engineering Thesis, Massachusetts Institute of Technology. Department of Ocean Engineering, USA, 2001
- 39 A. Bejan, S. Lorente, *Design with Constructal Theory*. Hoboken, NJ, USA: Wiley. 2008.
- 40 G.Troina, M. Cunha, V. Pinto, L. Rocha, E. dos Santos, C. Fragassa, L. Isoldi, *Computational Modeling and Constructal Design Theory Applied to the Geometric Optimization of Thin Steel Plates with Stiffeners Subjected to Uniform Transverse Load*, Metals 10(2), 2020. 220. <https://doi.org/10.3390/met10020220>
- 41 StaticWorx. GroundSafe ESD Flooring. 2021. *What Is ESD Flooring, How Does It Work, And How Do I Choose One?* [en línea] disponible en <https://kb.staticworx.com/esd-flooringbasics/what-is-esd-flooring-how-does-it-work/>

- 42 Instituto Nacional de seguridad e higiene en el trabajo España. NTP 567: *Protección frente a cargas electrostáticas* [en línea]. disponible en https://www.insst.es/documents/94886/327064/ntp_567.pdf/e56dd285-1b4f-4432-a998-95e3827d7937.
- 43 K. Ghavami, M.R. Khedmati. *Nonlinear Large Deflection Analysis of Stiffened Plates en Finite Element Analysis - Applications in Mechanical Engineering*, Farzad Ebrahimi, IntechOpen, 2012, doi: <https://doi.org/10.5772/48368>.
- 44 K. Svanberg, *The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization*, International Journal for Numeric Methods in Engineering.,24 (1987), pp. 359–373.
- 45 M. Zhou, Y.K. Shyy, H.L. Thomas. *Checkerboard and minimum member size control in topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization. 21. 152-158. 2001, doi: <https://doi.org/10.1007/s001580050179>.
- 46 U. Schramm, M. Zhou. *Recent Developments in the Commercial Implementation of Topology Optimization* en IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials: Status and Perspectives. 2006, doi: https://doi.org/10.1007/1-4020-4752-5_24.
- 47 G. Vanderplaats. *CONMIN: A FORTRAN program for constrained function minimization: User's manual*. Ames Research Center and U.S. Army Air Mobility R&D Laboratory, 1973.
- 48 C. Fleury. *CONLIN: An efficient dual optimizer based on convex approximation concepts*. Structural Optimization 1, 81–89, 1989, doi: <https://doi.org/10.1007/BF01637664>
- 49 Figura 20. Modificada de original, disponible en <https://www.fisiolluch.com/biomecanica-de-la-pisada/>. Consultado en noviembre 15, 2019.