



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA**

Facultad de Filosofía y Letras, Facultad de Ciencias, Instituto de Investigaciones  
Filosóficas, Dirección General de Divulgación de la Ciencia

**Una ontología relativista para la teoría de colapso de GRW**

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE  
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

En el campo de conocimiento de  
Filosofía de la Ciencia

PRESENTA

PATRICIO ALONSO ÁVILA CÁRDENAS

TUTOR

Elías Okón Gurvich  
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, octubre 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### **1. Datos del Alumno**

Ávila  
Cárdenas  
Patricio  
Alonso  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Posgrado en Filosofía de la Ciencia  
Filosofía de la Ciencia  
310006417

### **2. Datos del Tutor**

Dr.  
Elías  
Okón  
Gurvich

### **3. Datos del Sinodal 1**

Dr.  
Alessandro  
Torza

### **4. Datos del Sinodal 2**

Dr.  
Daniel  
Eduardo  
Sudarsky  
Saionz

### **5. Datos del Sinodal 3**

Dr.  
Yuri  
Bonder  
Grimberg

### **6. Datos del Sinodal 4**

Dra.  
Fernanda  
Samaniego  
Bañuelos

### **7. Datos del trabajo escrito**

Una ontología relativista para la teoría de colapso de GRW  
89 pp.  
2021

## **Agradecimientos**

Me gustaría agradecer a mi tutor, Elías, por adentrarme en el camino de los fundamentos y filosofía de la física; sin él, este trabajo no hubiera sido posible. De igual manera, agradezco a mis lectores, Daniel, Alessandro, Yuri y Fernanda por sus valiosas observaciones.

Gracias a Fer, el amor de mi vida, por su paciencia, cariño y apoyo incondicionales. Sin ellos, no hubiera llegado hasta aquí.

También me gustaría agradecer a mis amigos, quienes me han acompañado durante esta faena. Sin duda sus palabras de aliento y su compañía hicieron de este trayecto algo mucho más ameno.

Por último, esta tesis fue apoyada por el programa de becas nacionales del CONACyT.

*A Fer*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>1</b>
1.1. El formalismo de la mecánica cuántica estándar . . . . .	1
1.2. Problemas conceptuales . . . . .	10
1.2.1. El problema de la medición . . . . .	11
1.2.2. El problema de la ontología . . . . .	12
1.3. El espacio-tiempo en la relatividad especial . . . . .	16
1.4. Tensiones entre la cuántica y la relatividad . . . . .	25
1.4.1. Localidad . . . . .	25
1.4.2. Invarianza de Lorentz . . . . .	33
<b>2. Coexistencia pacífica</b>	<b>39</b>
2.1. La propuesta de Myrvold . . . . .	40
2.2. Invarianza de Lorentz y una ontología hipotética . . . . .	53
<b>3. Colapso objetivo</b>	<b>59</b>
3.1. La teoría del colapso objetivo de GRW . . . . .	59
3.2. Ontologías primitivas para la teoría de GRW . . . . .	67
3.2.1. Ontología de los <i>flashes</i> . . . . .	67
3.2.2. Ontología de la densidad de masa . . . . .	69
3.2.3. Ejemplo de un sistema con subdeterminación desde la densidad de masa . . . . .	76
<b>Conclusiones</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>



# Introducción

La mecánica cuántica es una de las teorías empíricamente más exitosas de la física. No obstante, existen algunas problemáticas conceptuales en torno a ella. En primer lugar, tenemos el problema de la medición. Éste, a grandes rasgos, deriva de la utilización del término “medición” en sus postulados fundamentales, pues es un término ambiguo que no precisa cuándo la dinámica unitaria se interrumpe y ocurre un colapso (Okon, 2014). Por otro lado, también se tiene el problema de la ontología, pues esta teoría es incapaz de responder a la pregunta “¿qué es lo que existe a nivel fundamental?” (Norsen, 2018, pp. 18-21).

Históricamente, estas dificultades fueron veladas debido a la influencia de las ideas de Bohr y estudiantes suyos como Heisenberg, Pauli, Born, entre otros. A grandes rasgos, ellos sostenían que la mecánica cuántica no decía nada objetivo sobre el mundo. Más aún, según esta manera de pensar la teoría, plantearse la pregunta “¿qué existe de acuerdo con la mecánica cuántica?” no tenía sentido (Becker, 2018, p.14). Citando a Bohr: “... no hay un mundo cuántico. Sólo hay una descripción cuántica abstracta” (Becker, 2018, p.14). De manera similar, Heisenberg afirmaría: “la idea de un mundo real objetivo cuyas partes más pequeñas existen objetivamente en el mismo sentido en el que piedras y árboles existen, independientemente de que los veamos o no, es imposible” (Becker, 2018, p.14). A esta manera de ver la mecánica cuántica, con el tiempo, se le refirió con el nombre de “interpretación de Copenhague”.

Aunque este modo de pensar fue dominante durante la fundación misma de la teoría, hubo quienes no estuvieron satisfechos. Algunos físicos, como Einstein y Schrödinger, siguieron poniendo en duda sus fundamentos. El primero pensaba que el carácter no-local de la teoría implicaba que ésta estaba incompleta y que debía ser completada con variables que no se tomaban en cuenta. Es decir, debía existir una teoría



que completara el formalismo cuántico y lo volviera local (Becker, 2018, pp. 52-54). No obstante, la prueba de von Neumann —que posteriormente resultó ser falsa—, de 1935, sobre la imposibilidad de teorías de variables ocultas, le dio fuerza, temporalmente, a las ideas de Bohr (Becker, 2018, p. 10).

Todo esto no evitó que otras personas se siguieran preguntando sobre los fundamentos de la teoría. Por ejemplo, Bohm postuló una teoría determinista de variables ocultas empíricamente equivalente a la teoría estándar (Becker, 2018, 89-116). De la misma manera, Everett propuso una interpretación de muchos mundos (Becker, 2018, pp. 117-141) y, posteriormente, en la década de los ochentas, se postularon las teorías de colapso objetivo.

La teoría de onda piloto de Bohm, una teoría determinista de variables ocultas, mostraba que algo debía estar mal en la prueba de von Neumann. Esto inspiró a Bell a trabajar estos temas y, posteriormente, a escribir su teorema en 1964, publicando distintas versiones de éste con el paso de los años (Myrvold, Genovese, y Shimony, 2020). En él, probó que cualquier teoría que reproduzca las predicciones de la mecánica cuántica tiene que implicar interacciones superlumínicas entre sistemas. Para ello, dedujo unas desigualdades que caracterizan a cualquier teoría local y dio un ejemplo en donde la mecánica cuántica —y, por ende, cualquier teoría que haga las mismas predicciones— las viola. Es decir, esta teoría es no-local. Posteriormente, la adecuación empírica de las predicciones de la cuántica, en esquemas parecidos a los planteados en el teorema, fue probada por Aspect *et. al.* en 1981. En otras palabras, si toda teoría empíricamente equivalente a la cuántica es no-local y esta última hace las predicciones adecuadas sobre los experimentos, entonces cualquier teoría que pretenda describir el mundo adecuadamente debe ser no-local.

A primera vista, esto parece generar tensiones con la relatividad especial, pues la existencia de interacciones superlumínicas parece violar el límite de la velocidad de la luz impuesto por ésta. No obstante, éste no es necesariamente el caso. Las constricciones que impone la relatividad sobre cualquier teoría que pretenda ser compatible con ella no son evidentes. Un análisis más cuidadoso podría arrojar luz sobre dichas acotaciones.

Wayne Myrvold (2016a) distingue entre acción a distancia y no-localidad. Para él, si una teoría es no-local, no necesariamente implica que haya una relación *causal*

que suponga un conflicto con la relatividad especial. Para estudiar esto un poco más a fondo, definamos algunos conceptos.

Bell tiene una noción de localidad muy particular. En esencia, él creía que cualquier correlación que pudiera haber entre un par de eventos que no tuvieran una relación causa-efecto directa tenía que estar fundamentada en una causa común en el pasado de ambos (Myrvold, 2021). Para analizar cómo formalizó esta idea, pensemos en la siguiente situación: tenemos un par de sistemas que se preparan de tal manera que cada uno de ellos se encuentran en regiones espaciales  $A$  y  $B$  causalmente disjuntas. Supongamos que  $\lambda$  es una especificación total de las condiciones iniciales de ambos sistemas. Si se decide medir la cantidad  $a$  en  $A$  y  $b$  en  $B$ , se puede definir la probabilidad de tener el resultado  $x$  en el sistema localizado en  $A$  y obtener  $y$  en aquél que se encuentra en  $B$  como:  $P(x, y|a, b, \lambda)$ . Aquí,  $\lambda$  es una especificación total —o “estado fundamental”— de las propiedades de los sistemas. La idea de que cualquier posible correlación entre  $A$  y  $B$  recae en una causa común en su pasado puede expresarse como que la probabilidad de obtener los resultados  $x$  en  $A$  y  $y$  en  $B$ , dado que se decidió medir  $a$  y  $b$  y la especificación  $\lambda$ , es el producto de las probabilidades de los resultados por separado. Es decir, que:

$$P(x, y|a, b, \lambda) = P(x|a, \lambda)P(y|b, \lambda). \quad (1)$$

A grandes rasgos, la expresión (1) refleja que si se condicionaliza sobre  $\lambda$ , las probabilidades individuales de obtener resultados particulares en cada ala del experimento deben ser independientes, pues ya se ha tomado en cuenta cualquier posible causa común. A esto se le ha llamado *factorizabilidad*.

Este principio tiene dos supuestos: 1) la independencia de resultados —*outcome independence* u OI—, y 2) la independencia de parámetros —*parameter independence* o PI. El primero rescata que los resultados de cada experimento deben ser independientes entre sí una vez habiendo condicionalizado sobre la especificación total del estado del sistema. Mientras que el segundo asevera que aquello que se decide medir en un ala del sistema, no afectará el resultado del otro lado.

Ahora bien, para la derivación de las desigualdades, es necesaria una última

suposición referente a los estados fundamentales  $\lambda$ , la cual radica en que la distribución de los estados  $\rho(\lambda)$  es independiente de qué se ha decidido medir en ambas regiones. Es decir, el estado del sistema no tiene relación con aquello que se ha decidido medir en las alas del experimento. A esto se le conoce como independencia de ajustes —*settings independence* o SI.

Tomando como ciertas OI, PI y SI, entonces es posible deducir las desigualdades de Clauser, Horne, Shimony y Holt (1969) —conocidas como las desigualdades de CHSH—, las cuales son una generalización de aquellas propuestas por Bell.

Debido a que todas las teorías que reproducen las predicciones de la mecánica cuántica —incluso aquéllas que lo hacen sólo aproximadamente, como las teorías de colapso— son capaces de violar dichas desigualdades, entonces es necesario que violen OI, PI o SI. En general, a las teorías provenientes de la violación de SI se les llama “superdeterministas” (Ciepielewski, Okon, y Sudarsky, 2020). Aunque éstas no serán exploradas en este trabajo, la idea detrás de ellas es que las condiciones iniciales de los experimentos están correlacionadas con qué se decide medir. Se les ha calificado como teorías “conspiracionales”, pues es como si el universo se “acomodara” para generar las correlaciones y, de esa manera, retener la localidad.<sup>1</sup>

Más allá de las teorías que violan SI, enfoquémonos ahora en los dos supuestos restantes. Es menester mencionar que aquellas teorías que violan PI entra necesariamente en tensión con la relatividad especial. Para hacer patente lo anterior, primero definamos una relación de causalidad local. Supongamos que tenemos una relación de precedencia temporal  $\prec$ , tal que es antisimétrica y transitiva. Así,  $x$  precede temporalmente a  $y$  si y sólo si  $x \prec y$ . De igual manera, sabemos que en la relatividad especial hay pares de eventos que no tienen una precedencia temporal establecida. De tal suerte que puede definirse una relación de desconexión temporal  $x \sim y \equiv \neg(x \prec y) \wedge \neg(y \prec x)$ . Si presuponemos que las relaciones causales deben darse con un ordenamiento temporal —que si  $x$  causa  $y$  entonces  $x$  está en el pasado de  $y$ — entonces esta estructura espacio-temporal presupone PI (Myrvold, 2016a).

Para hacer patente lo anterior, definamos la relación  $\prec$  como  $\sim$  para regiones espacio-temporales y no sólo para puntos. Sean dos regiones espacio-temporales  $A$  y

---

<sup>1</sup>Para un modelo concreto, véase Ciepielewski, Okon y Sudarsky (2020).

$B$ . Diremos que  $A \prec B$  si y sólo si  $\exists a \in A$  y  $\exists b \in B$  tal que  $a \prec b$ . Con esta relación, análogamente definimos  $A \sim B \equiv \neg(A \prec B) \wedge \neg(B \prec A)$ . Esta definición, en otras palabras, captura el hecho de que  $\forall a \in A$  y  $\forall b \in B$   $\neg(a \prec b)$  y  $\neg(b \prec a)$ .

Ahora bien, para mostrar que una violación a PI implica una transgresión a la relación de causalidad local ya definida, pensemos en lo siguiente: supongamos que tenemos dos sistemas en dos regiones espacio temporales  $A$  y  $B$  tal que  $A \sim B$ . Supongamos que la elección del parámetro a medir en  $A$  se da en una región espacio-temporal  $X$ , tal que  $X \prec A$  y  $X \sim B$ . Esta elección puede hacerse debido a que, como  $A$  y  $B$  tienen separación tipo espacio, siempre existirá una región en el cono pasado de luz de  $A$  tal que no es parte del cono pasado de  $B$ . Análogamente, sea  $Y$  la región espacio temporal en donde se eligen los parámetros a medir en  $B$  tal que  $Y \prec B$  y  $A \sim Y$  —véase la figura 1. Una teoría que viole las desigualdades de Bell al violar PI prohíbe que existan este tipo de sistemas que sí son permitidos por la estructura causal de la relatividad. De aquí que la transgresión a PI implique una tensión con la relatividad.

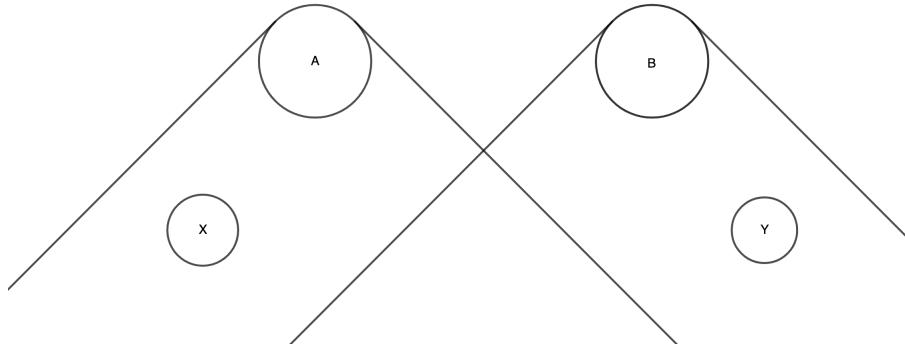


Figura 1: Esquema en el que se hace patente que, de acuerdo a la definición de causalidad local, la elección de qué se medirá en cada ala del experimento puede hacerse de tal manera que sea independiente del resultado del experimento del otro lado. Para conseguirlo, si  $X$  es la región en donde se elige lo que se medirá en  $A$ , y  $Y$  es el análogo para  $B$ , entonces es menester que  $X \sim B$  y  $Y \sim A$ .

Lo anterior implica que cualquier teoría compatible con la relatividad especial debe satisfacer PI. Pero, como ya vimos, las teorías que reproducen las predicciones cuánticas deben violar las desigualdades de Bell al infringir OI o PI. Esto coloca una cota sobre las posibles teorías cuánticas que pueden lograr esa coexistencia pacífica. Por un lado, cualquier teoría determinista, cuyas probabilidades sólo sean cero o uno,

deben satisfacer OI.<sup>2</sup> Esto, a su vez, implica que, para infringir las desigualdades de Bell es necesario que violen PI, lo cual es inherentemente incompatible con la relatividad. Contrariamente, las teorías fundamentalmente indeterministas —como las de colapso objetivo— violan OI y pueden satisfacer PI, lo que las hace de especial interés para buscar una compatibilidad con la relatividad especial.

El propósito del presente trabajo es hacer notar que la no-localidad cuántica y el postulado del colapso no implican una tensión con la relatividad. Más aún, es posible construir una teoría que resuelva el problema de la medición y cuya ontología que sea invariante relativista. La importancia de este trabajo es brindar claridad sobre uno de los aspectos más controversiales en la física, pues de antaño se ha afirmado que la mecánica cuántica es incompatible con la estructura causal relativista. En otras palabras, se hace patente que es posible resolver las dificultades conceptuales de la mecánica cuántica y, al mismo tiempo, proponer una ontología bien definida que sea compatible con la estructura causal de la relatividad.

Uno de los problemas que parece haber entre las teorías de colapso y la relatividad es que las transformaciones de Lorentz no alcanzan a codificar la historia cuántica completa desde distintos marcos de referencia. En ese sentido, este trabajo analizará unos ejemplos propuestos por David Albert (2015) y Myrvold (2002) en donde parece existir una subdeterminación de las historias cuánticas cuando se ven desde distintos marcos de referencia. Es decir, parece que este tipo de sistemas no son susceptibles de ser invariantes relativistas. Para analizar más a fondo la cuestión y evitar las dificultades de la mecánica cuántica estándar, se utilizará una teoría de colapso objetivo. La elección de esta teoría, como ya se mencionó, es porque su no-localidad proviene de la violación de OI y no PI, lo que la hace propicia para habitar en un contexto relativista.<sup>3</sup> En particular, para ello, se utilizará la ontología relativista de densidad de masa propuesta por Daniel Bedingham *et. al.* (2014) para la teoría de colapso objetivo de Ghirardi,

---

<sup>2</sup>Para un análisis a fondo sobre las constricciones que impone la relatividad a las distintas interpretaciones de la mecánica cuántica, véase Myrvold (2021). Aquí, se menciona que, aunque las teorías que violan PI entran en conflicto con la estructura causal relativista, hay varias maneras de evitar esta conclusión.

<sup>3</sup>Aunque las teorías de muchos mundos también pueden adaptarse a esa estructura de manera más sencilla, no se explorarán debido a las dificultades que tienen para hacer sentido de la probabilidad y de rescatar la imagen manifiesta. Más aún, es difícil definir la noción de localidad en este contexto Myrvold (2021).

Rimini y Weber (1986) —de aquí en adelante la teoría de GRW.

El Capítulo 1 cubre las nociones preliminares que se utilizarán a lo largo de la tesis. En primer lugar, se hará un repaso del formalismo de la mecánica cuántica estándar. Posteriormente, se expondrán, a grandes rasgos, los problemas de la medición y de la ontología. En la siguiente sección, se formulará la estructura básica de la teoría de la relatividad especial. Por último, este capítulo cierra con una exposición del teorema de Bell y con lo que Albert (2015) llama la “no-narrabilidad” de la mecánica cuántica cuando está inmersa en un contexto relativista. Este concepto, a grandes rasgos, es que la historia cuántica de algunos sistemas se subdetermina cuando se considera desde marcos de referencia distintos. Esto, en apariencia, es una incompatibilidad con la relatividad especial, ya que hacer una transformación de Lorentz parece ser insuficiente para poder deducir la historia del sistema vista desde otros marcos de referencia.

En el Capítulo 2, se revisará un artículo de Myrvold (2002), en el que propone una solución a esta subdeterminación al tomar en cuenta la dinámica de los sistemas al pasar de un marco de referencia a otro. No obstante, se hará énfasis en que la coherencia potencial con la relatividad especial no puede darse a este nivel, debido a que se sigue teniendo de fondo el problema de la ontología. Es decir, es necesario que la teoría responda la pregunta “¿qué es lo que existe a nivel fundamental?” para poder establecer dicha coexistencia pacífica, o incluso para establecer algún tipo de tensión con la relatividad.

Por último, en el Capítulo 3, se hará una breve exposición de la teoría de colapso de GRW, poniendo énfasis en cómo resuelve el problema de la medición. Adicionalmente, se presentarán un par de ontologías para esta teoría: la de *flashes* y la de densidad de masa. De ambas, se presentarán sus versiones relativistas, pero el trabajo se enfocará en aquella de densidad de masa propuesta por Bedingham *et. al.* (2014). Por último, se retomará un ejemplo dado por Myrvold (2002), en el que se subdeterminan las historias cuánticas, y se analizará utilizando la densidad de masa en su versión no-relativista y relativista. Se verá que la versión relativista hace que desaparezca la subdeterminación.



# Capítulo 1

## Antecedentes

Este capítulo tiene como objetivo presentar las bases conceptuales que se utilizarán a lo largo del trabajo, así como algunos problemas asociados a estas nociones que se abordarán en múltiples ocasiones en los capítulos posteriores. En primer lugar, se presentará el formalismo estándar de la mecánica cuántica, así como algunos problemas conceptuales que se desprenden de éste. En específico, se expondrán los problemas de la medición y de la ontología. Posteriormente, se presentará la estructura espacio-temporal de Minkowski. En dicha exposición, más que hacer una descripción matemática, se priorizará en una reconstrucción geométrica y conceptual. Por último, se explorarán algunas de las dificultades que se originan al pensar la mecánica cuántica en un contexto relativista —es decir, en un espacio-tiempo de Minkowski.

### 1.1. El formalismo de la mecánica cuántica estándar

A continuación, se hará una exposición canónica de la estructura matemática de la mecánica cuántica y se hará énfasis en la forma en la que normalmente se interpreta este formalismo. Esta manera estándar de entender la teoría es atribuida a Bohr y a Heisenberg, y se le conoce como la interpretación de Copenhague. Es menester resaltar que no existe algo así como una única interpretación de Copenhague. Cada uno de los físicos que fundaron la mecánica cuántica tenían distintas formas de interpretar la teoría, incluyendo a los mismos Bohr y Heisenberg. Sin embargo, con el paso del tiempo se ha instaurado una forma “canónica” de presentar el formalismo, así como



de interpretarlo (Albert, 1992, p.17).

El formalismo matemático de la teoría cuántica es diferente al de la mecánica clásica. En esta última, para poder establecer el estado de un sistema, se deben especificar las coordenadas canónicas de todos los cuerpos que lo componen, es decir, detallar sus posiciones y sus momentos conjugados. Esto es necesario para poder asociarle al sistema un punto en el espacio fase (Goldstein, Poole, y Safko, 2001, p. 34). Posteriormente, se deben detallar las fuerzas y constricciones que hay entre estos objetos. Una vez hecho esto, sabemos que el sistema evolucionará *deterministamente* de acuerdo a las ecuaciones hamiltonianas de movimiento:

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i} \quad y \quad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}.$$

En donde  $\bar{q}_i$  y  $\bar{p}_i$  son la posición y el momento de la partícula  $i$ -ésima respectivamente y  $H$  es una función que representa la energía total del sistema. A ésta se le llama hamiltoniano, el cual toma como argumento las posiciones, los momentos y, dependiendo del sistema, también el tiempo y va a los números reales. Cuando esta función no depende explícitamente del tiempo y no hay fuerzas externas, entonces es una cantidad conservada. Por otro lado, si el potencial no depende de las velocidades y las constricciones son independientes del tiempo, entonces el hamiltoniano es numéricamente idéntico a la energía total del sistema.

Contrariamente, en la mecánica cuántica, los estados de los sistemas están representados por vectores unitarios en un espacio de Hilbert,  $\mathcal{H}$ , el cual está sobre el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .<sup>1</sup> Retomaremos la notación propuesta por Dirac (1958), de tal suerte que los vectores del espacio de Hilbert los denotaremos con el símbolo  $|\cdot\rangle$ .

Es menester detenernos un poco y estudiar más a fondo algunas de las propiedades de estos espacios. Por definición de espacio vectorial, los espacios de Hilbert son cerrados bajo sumas entre vectores y bajo multiplicaciones escalares —es decir, multiplicaciones por números pertenecientes al campo. Estos dos hechos pueden verse matemáticamente de la siguiente forma:

---

<sup>1</sup>Un espacio de Hilbert se define formalmente como un espacio vectorial que posee producto interno y que es completo bajo la norma inducida por dicho producto (Clapp, 2015).

$$|x\rangle + |y\rangle \in \mathcal{H} \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H},$$

$$c|x\rangle \in \mathcal{H} \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}, \forall c \in \mathbb{C}.$$

De igual manera, es importante resaltar que los espacios de Hilbert, además de poseer la multiplicación por escalares del campo, también están dotados de un productador interno, el cual a todo par ordenado de vectores le asocia un número escalar:  $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ . Esta función tiene las siguientes propiedades:

- $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle \quad \forall |x\rangle, |y\rangle, |z\rangle \in \mathcal{H},$ <sup>2</sup>
- $\langle cx|y\rangle = c\langle x|y\rangle \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}, \forall c \in \mathbb{C},$
- $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle} \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H},$  en donde la barra denota la conjugación compleja.
- $\langle x|x\rangle > 0 \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H} \quad \text{tal que} \quad |x\rangle \neq |0\rangle.$ <sup>3</sup>

Si tenemos dos vectores,  $|x\rangle$  y  $|y\rangle$ , distintos de  $|0\rangle$ , tal que  $\langle x|y\rangle = 0$ , entonces decimos que éstos son *ortogonales*. Esta noción es la generalización del concepto de “perpendicularidad” que se define en el espacio euclideo.

De igual manera, a partir del producto interno, se puede definir una norma dada por  $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$  para cualquier vector de  $\mathcal{H}$ . Este número, en el espacio euclideo, representa la longitud que tiene el vector dado el origen  $|0\rangle$ . A su vez, esta norma puede inducir una métrica de la siguiente manera:

$$d(|x\rangle, |y\rangle) = \| |x\rangle - |y\rangle \|,$$

la cual es una manera de representar la “distancia” entre distintos elementos de  $\mathcal{H}$ .

<sup>2</sup>Aquí, la notación se está utilizando tal que  $|y+z\rangle = |y\rangle + |z\rangle$ .

<sup>3</sup>La formulación original de esta notación, presentada en Dirac (1958, pp. 18-22), utiliza la noción de vectores *bra*,  $\langle \cdot |$ . Matemáticamente, este tipo de vectores no pertenecen al espacio vectorial de Hilbert, sino a su dual  $\mathcal{H}^*$ . El espacio dual de un espacio vectorial consiste en todas las funciones lineales que van del espacio al campo. En este caso:  $\langle f| \in \mathcal{H}^* \Leftrightarrow \langle f| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ . No obstante, se puede hacer la formulación a través del producto interno debido al teorema de Fréchet-Reisz si pedimos que los funcionales sean continuos. Éste prueba que para cualquier  $\langle f| \in \mathcal{H}^*$ , existe un único  $|x\rangle \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle f|(|x\rangle) = \langle f|x\rangle$  (Clapp, 2015, p. 377). Lo anterior asegura que si se aplica el funcional lineal a un vector de  $\mathcal{H}$ , siempre existirá otro vector del espacio tal que el producto interno entre ambos es igual a la aplicación de la función.

También es menester definir el concepto de *base ortonormal*. Supóngase que se tiene un espacio de Hilbert de  $n$  dimensiones —la dimensión del espacio, en la mecánica cuántica, estará dado por los grados de libertad que tenga el sistema en cuestión. Diremos que  $\beta = \{|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$  si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\langle a_i | a_i \rangle = 1$ ,
- $\langle a_i | a_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$ ,
- $\forall |x\rangle \in \mathcal{H} \quad \exists b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad |x\rangle = b_1 |a_1\rangle + \dots + b_n |a_n\rangle$ .

El primer punto captura el hecho de que los miembros de la base son unitarios, es decir, tienen una norma igual a la unidad; el segundo apunta a que estos elementos son ortogonales entre sí, y el tercero dicta que cualquier vector en el espacio puede ser escrito como una combinación lineal de los miembros de este conjunto. La base puede pensarse como un sistema de coordenadas para los puntos  $n$ -dimensionales en el espacio (Albert, 1992, p. 22). De tal suerte que si se quiere escribir un vector del espacio de Hilbert, es suficiente con especificar los escalares para construir la combinación lineal dada la base en cuestión.

De igual forma, definimos operadores lineales,  $\hat{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , entre espacios de Hilbert. Éstos tiene dos propiedades:

- $\hat{O}(|x\rangle + |y\rangle) = \hat{O}(|x\rangle) + \hat{O}(|y\rangle), \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H},$  y
- $\hat{O}(c|x\rangle) = c\hat{O}(|x\rangle), \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}, \quad \forall c \in \mathbb{C}.$

Y, dentro del conjunto de estos operadores, podemos utilizar la definición de producto interno para definir una clase de éstos que será especialmente importante para la teoría cuántica. En general, si tenemos un operador lineal  $\hat{O}$ , podemos definir su adjunto  $\hat{O}^\dagger$  como aquél que

$$\langle \hat{O}|x\rangle |y\rangle = \langle x | \hat{O}^\dagger |y\rangle .$$

No obstante, si el operador es tal que  $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$ , entonces diremos que éste es *autoadjunto* o *hermitiano*.

Ahora que ya hemos definido la noción de operador, es menester introducir las nociones de *eigenvector* y *eigenvalor*. Sea un operador  $\hat{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Diremos que  $|x\rangle \in \mathcal{H}$  es un eigenvector de  $\hat{O}$  con eigenvalor  $\lambda \in \mathbb{C}$  si y sólo si  $\hat{O}(|x\rangle) = \lambda |x\rangle$ .

Por último, es menester abordar la noción de *producto tensorial* entre espacios. Sean  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  espacios de Hilbert. Decimos que el producto tensorial entre  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  es el par  $(\mathcal{P}, \varphi)$ , en donde  $\mathcal{P}$  es un espacio de Hilbert y  $\varphi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{P}$  es una transformación bilineal, los cuales cumplen lo siguiente (Kadison y Ringrose, 1983, p. 125):

- La totalidad de las combinaciones lineales del conjunto de todos los vectores  $\varphi(|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2)$  es igual a  $\mathcal{P}$ , y
- $\langle \varphi(|\psi\rangle_1, |\phi\rangle_2) | \varphi(|\xi\rangle_1, |\chi\rangle_2) \rangle = \langle \psi | \phi \rangle \langle \xi | \chi \rangle \quad \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \quad \text{y} \quad \forall |\xi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ .

La primera propiedad establece que el generado de la imagen de la transformación abarcará la totalidad del espacio  $\mathcal{P}$  y la segunda que el producto interno de  $\mathcal{P}$  es igual a la multiplicación de los productos internos de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ .

En general,  $\mathcal{P}$  se denota como  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  y sus elementos  $\varphi(|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2)$  como  $|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$ . Y si tenemos en cuenta que el conjunto de operadores lineales es también un espacio vectorial, entonces también podemos definir el producto tensorial entre operadores. En efecto, sea  $\hat{O}_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  y  $\hat{O}_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ . Entonces definimos el producto tensorial entre ambos operadores como:  $\hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2 : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , tal que:

$$\hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2 (|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2) = \hat{O}_1 (|\psi\rangle_1) \otimes \hat{O}_2 (|\psi\rangle_2).$$

Hasta ahora, sólo se han definido algunas nociones de álgebra lineal utilizando la notación de Dirac. Aún no se ha tocado cómo este formalismo matemático se relaciona con la teoría cuántica. Para esto, se retomará la reconstrucción que hace Albert (1992, pp. 30-38). Esta teoría puede presentarse como aquélla que se sigue de los siguientes cinco postulados:

- (1) A todo sistema cuántico,  $S$ , se le asocia un espacio de Hilbert. A su vez, todo posible estado del sistema será representado por un vector  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  tal que  $\| |\psi\rangle \| = 1$ . Es decir, el espacio asociado al sistema contiene todos los posibles estados en los que

éste puede encontrarse. La relación que hay entre los estados del sistema y los vectores unitarios del espacio asociado no es uno a uno. Los vectores “antípodas”,  $|\psi\rangle$  y  $|-\psi\rangle$ , de la “esfera” unitaria del espacio de Hilbert representan el mismo estado cuántico.

(2) Por otro lado, las propiedades del sistema que son susceptibles a ser medidas en el laboratorio están representadas por operadores autoadjuntos que van del espacio asociado en sí mismo. Pero esto acarrea una interrogante evidente: ¿si los datos que se extraen de los laboratorios son números, cómo es que los observables están representados por operadores? ¿Cómo conectar la noción de operador con aquello que se mide en la práctica? Supongamos que tenemos un sistema  $S$ , cuyo estado está representado por el vector  $|\psi\rangle$ . De igual manera, pensemos que  $\hat{O}$  denota un observable —como el momento, la posición, la energía, etcétera. Diremos que el sistema tiene el valor  $\lambda$  de la propiedad representada por  $\hat{O}$  si y sólo si  $\hat{O}(|\psi\rangle) = \lambda|\psi\rangle$ . Dicho en otras palabras, el sistema tendrá el valor  $\lambda$  en la propiedad representada por  $\hat{O}$  si se encuentra en un estado  $|\psi\rangle$  que es eigenvector de  $\hat{O}$  con eigenvalor  $\lambda$ . A esto se le llamará la *regla eigenvector-eigenvalor*.

Aquí parece que nace una dificultad. Si el espacio de Hilbert está sobre los números complejos, entonces los  $\lambda$  serán complejos, sin embargo, los datos experimentales siempre son representados por números reales. Aquí es importante recalcar que los observables son representados por operadores *hermitianos*, los cuales tienen la propiedad de tener sólo eigenvalores reales, aunque el campo del espacio vectorial sea  $\mathbb{C}$  (Friedberg, Insel, y Spence, 2014, p. 373).

(3) Debe recalcar que todo lo que se ha dicho está definido para un instante de tiempo  $t$ . Al pasar el tiempo, los sistemas evolucionan de acuerdo con una dinámica específica que incluye las fuerzas y constricciones a las que el sistema está sometido. Dicho en otras palabras, hay una ley determinista que establece los futuros estados del sistema dado que éste haya tenido un estado inicial  $|\psi(t_1)\rangle$ . A esta ley se le llama la ecuación de Schrödinger y puede expresarse de la siguiente manera (Maudlin, 2019, p. 42) y (Norsen, 2018, p. 33):

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (1.1)$$

Aquí,  $\hat{H}$  es el operador hamiltoniano del sistema, el cual puede tener distintas formas. Este operador apela a la noción clásica de energía total. Así, por ejemplo, si nuestro sistema es una partícula de masa  $m$ , entonces la ecuación de Schrödinger toma la siguiente forma:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\bar{r}, t) \right] |\psi(t)\rangle. \quad (1.2)$$

Aquí,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $\nabla^2$  es el operador laplaciano, y  $V(\bar{r}, t)$  es un potencial.<sup>4</sup> Como el operador del momento de la partícula está dado por  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ , entonces  $\hat{p}^2 = -\hbar^2\nabla^2$ . De aquí que la analogía con la energía cinética se dé por el primer sumando de la parte derecha de la ecuación:  $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ . De la misma manera, la analogía con la energía potencial se da por el potencial  $V(\bar{r}, t)$ .

Es menester recalcar que la ecuación de Schrödinger, de manera general, es una ecuación lineal y determinista. La linealidad de la ecuación consiste en que las combinaciones lineales de sus soluciones son, a su vez, soluciones. El significado físico de lo anterior puede expresarse de la siguiente manera: supongamos que un sistema se encuentra en el estado  $|\psi_1\rangle$ , al tiempo  $t_1$ , y evoluciona, a partir de la ecuación (1.1), de tal forma que, al tiempo  $t_2$ , está en el estado  $|\psi_2\rangle$ . Ahora imaginemos que el mismo sistema, en lugar de encontrarse en el estado  $|\psi_1\rangle$  al tiempo  $t_1$ , estaba en  $|\phi_1\rangle$  para luego evolucionar, de acuerdo a la misma ecuación, al estado  $|\phi_2\rangle$ , al tiempo  $t_2$ . Lo anterior implica que, si el estado hubiese estado en la superposición  $z_1|\psi_1\rangle + z_2|\phi_1\rangle$  al tiempo  $t_1$ , entonces su estado al tiempo  $t_2$  será  $z_1|\psi_2\rangle + z_2|\phi_2\rangle$ .

(4) Aunque en el punto (2) se relacionaron los resultados de los experimentos con los eigenvalores de los operadores, todavía es necesario ahondar más en este punto. Y es que una pregunta se hace manifiesta: ¿qué sucede si el sistema está en un estado tal que éste no es eigenvector del observable que se quiere medir? Si tenemos un sistema en el estado  $|\psi\rangle$ , queremos saber qué valor tiene una propiedad representada por  $\hat{O}$  y además es el caso que  $\hat{O}(|\psi\rangle) = \lambda|\psi\rangle$ , sabemos con certeza —con probabilidad igual a la unidad— que el valor de la propiedad del sistema es  $\lambda$ . Sin embargo, si el sistema se encuentra en un estado tal que no existe  $\lambda$  que cumpla con que  $\hat{O}(|\psi\rangle) = \lambda(|\psi\rangle)$ ,

---

<sup>4</sup>El laplaciano se define, en  $n$  dimensiones, como  $\nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

entonces no se puede determinar con certeza cuál será el resultado del experimento. Más aún, bajo esta interpretación, el hecho de que el estado del sistema no sea un eigenvector de  $\hat{O}$  no sólo significa que no sabemos con exactitud qué se encontrará en el laboratorio, sino que esta propiedad, *ontológicamente*, no está definida para dicho estado.

No obstante, aunque el estado del sistema no sea un eigenvector del observable que se desea medir, aún es posible calcular la probabilidad de que en el experimento tengamos algún resultado concreto. Supongamos que tenemos un sistema en el estado  $|\psi\rangle$  y buscamos conocer el valor de la propiedad  $\hat{O}$ . Denotemos los eigenvectores de  $\hat{O}$  como  $|\lambda_i\rangle$  con eigenvalor  $\lambda_i$ . Habiendo definido lo anterior, se establece que la probabilidad de encontrar el valor  $\lambda_i$  de la propiedad representada por  $\hat{O}$  dado que el sistema está en el estado  $|\psi\rangle$  es:

$$P(\lambda_i) = |\langle\psi|\lambda_i\rangle|^2. \quad (1.3)$$

De la ecuación anterior hay algunas cosas que hay que mencionar. En primer lugar, debido a que todos los estados cuánticos son unitarios, entonces  $P(\lambda_i) \leq 1$ . Por otro lado, la ecuación (1.3) es coherente con que se haya postulado que  $|\psi\rangle$  y  $|\psi\rangle$  representan el mismo estado, ya que tienen las mismas probabilidades:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} P(\lambda_i) &= |\langle\psi|\lambda_i\rangle|^2 \\ &= (-1)^2 |\langle\psi|\lambda_i\rangle|^2 \\ &= |(-1)\langle\psi|\lambda_i\rangle|^2 \\ &= |\langle-\psi|\lambda_i\rangle|^2. \end{aligned}$$

Es menester mencionar que la conversa no se sigue. Es decir, de haber postulado que  $|\psi\rangle$  y  $|\psi\rangle$  representan el mismo estado, entonces se debe concluir que reproducen

---

<sup>5</sup>De hecho, también resultan ser los mismos si difieren en una fase  $e^{i\theta}$ . De aquí que no sea del todo preciso que los estados cuánticos estén representados por vectores en el espacio de Hilbert, sino que, más bien, están dados por rayos en el espacio proyectivo de Hilbert. En general, de acuerdo con Maudlin (2018), es menester que cualquier teoría física distinga entre los grados de libertad físicos con aquéllos que son meramente matemáticos.

las mismas probabilidades. No obstante, el hecho de que un par de estados tengan las mismas probabilidades no implica necesariamente que sean el mismo. Esto, como veremos más adelante, se desprende del hecho de que la mecánica cuántica estándar no es lo suficientemente precisa sobre qué es lo que existe a nivel microscópico. De tal suerte que, en principio, podrían haber ciertas diferencias indetectables a nivel empírico entre dichos estados. En este caso, equivalencia empírica no implica equivalencia ontológica.

Por último, cabe mencionar que si  $|\psi\rangle = |\lambda_i\rangle$  entonces  $P(\lambda_i) = \langle \lambda_i | \lambda_i \rangle = 1$ , por lo que se rescata el caso en el que el sistema de hecho está en un eigenestado del observable. A la ecuación (1.3) se le llama la *regla de Born* y es, junto con la regla de eigenvector/eigenvalor, la forma en la que se relaciona el formalismo cuántico con lo que se observa en los laboratorios.

(5) El quinto supuesto de la mecánica cuántica tiene que ver también con las mediciones y es conocido como el *postulado del colapso*. Es un hecho experimental que si se hace una medición en el laboratorio y se obtiene un resultado, digamos  $\lambda_i$ , e inmediatamente después se vuelve a medir, el resultado será el mismo  $\lambda_i$ . Esto implica que la probabilidad de que la segunda medición dé un resultado idéntico que la primera es igual a uno, sin importar el estado en el que se encontraba el sistema en un principio. Pensemos esto en términos de la regla de Born. Supongamos que tenemos un sistema que, en  $t_1$ , se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$  y que queremos saber el valor del observable  $\hat{O}$  del sistema. También consideremos que el vector asociado al estado no es eigenvector del operador. En ese instante de tiempo, si  $\lambda$  es eigenvalor de  $\hat{O}$ , entonces  $P(\lambda) = |\langle \psi | \lambda \rangle|^2 < 1$ . Ahora pensemos que, en  $t_2$ , se mide la propiedad representada por  $\hat{O}$  y que se obtiene el valor  $\lambda$ . De aquí que, *ceteris paribus*, para todo tiempo posterior a  $t_2$ ,  $P(\lambda) = 1$ . Esto implica que, para todo tiempo subsecuente a la medición,  $\langle \psi | \lambda \rangle = 1$ . Esto, a su vez significa que  $|\psi\rangle = |\lambda\rangle$ . Dicho en otras palabras, la medición hizo colapsar al sistema al eigenestado  $|\lambda\rangle$  de  $\hat{O}$ . Este colapso es instantáneo, no-lineal, indeterminista —pues sólo se pueden calcular las probabilidades asociadas a que el sistema colapse a cierto estado en particular— y sucede únicamente en el momento en el que se hace una medición. Las reglas de eigenvalor-eigenvector, de Born y el postulado del colapso son el puente entre el formalismo de la teoría y los resultados experimentales.

Por último, vale la pena retomar, a la luz de estos cinco postulados, la noción de



sistemas compuestos. Supongamos que tenemos dos sistemas  $S_1$  y  $S_2$ , a los cuales se les asocian los espacios  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ . Es posible preguntarse por el sistema compuesto  $S$  que incluye tanto a  $S_1$  como a  $S_2$ . Retomando la noción de producto tensorial, el espacio de Hilbert asociado a  $S$  será  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  y, por lo tanto, tendrá un estado de la forma  $|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$ . De aquí, se pueden definir dos clases de estados para sistemas compuestos: los separables y los enredados. Un estado separable será aquél que puede ser factorizado en un producto tensorial de dos términos, uno que sólo contenga vectores de  $\mathcal{H}_1$  y otro que sólo contenga vectores de  $\mathcal{H}_2$ . Por el contrario, un estado enredado es aquél que no es susceptible de dicha factorización.

Aunque esta formulación de la mecánica cuántica es la manera más arraigada de verla, esto no significa que esté libre de controversias. Más aún, hay quienes no consideran lo anterior como una teoría física, sino como un mero algoritmo para predecir los resultados de los experimentos. Por ejemplo, Maudlin (2019) la llama una “receta” para realizar predicciones, mientras que Albert la reduce a un “algoritmo” (1992). El hecho de que estos principios, fundamentados en su respectivo formalismo matemático, no sean considerados como una teoría física en su propio derecho no implica que ésta carezca de éxito empírico. Todo lo contrario, las técnicas experimentales provenientes de esta receta han resultado tener un éxito experimental sin precedentes. En la siguiente sección se discutirán algunos de los problemas conceptuales que acarrea esta forma de ver a la cuántica.

## 1.2. Problemas conceptuales

La mecánica cuántica, en su formulación estándar, es una de las teorías empíricamente más exitosas en la historia de la ciencia. Empero, ésta tiene algunos problemas conceptuales que se divisaron desde su nacimiento, pero que quedaron enterrados con el paso del tiempo. En esta sección, discutiremos dos de estas problemáticas. La primera es a la que se le denomina generalmente como el “problema de la medición” y la segunda es a la que Norsen (2018) llama “el problema de la ontología”.

### 1.2.1. El problema de la medición

Para presentar la primera de éstas, es importante notar que los postulados (3) y (5), postulados en la página implican que existen dos formas de evolución temporal de los sistemas cuánticos. Mientras el sistema no se mida, su estado evolucionará de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. Esta dinámica, como ya se mencionó, es determinista y lineal. Es decir, que si se especifica el hamiltoniano del sistema y las condiciones iniciales, se puede predecir su evolución para cualquier tiempo posterior. A esta evolución la llamaremos unitaria. A la par, los sistemas cuánticos, al ser medidos, se proyectan a un eigenestado del observable que se midió. Esta segunda ley de evolución, a diferencia de la primera, es indeterminista, discontinua y no-lineal. A ésta le llamaremos evolución de colapso.

El hecho de que haya dos dinámicas distintas para los estados cuánticos no implica ningún tipo de inconsistencia, siempre y cuando se precise en qué situaciones acaece cada tipo de evolución. En apariencia, esto se especifica en los postulados ya mencionados: mientras no se haga una medición, la evolución es unitaria; cuando se mide, el sistema colapsa. Sin embargo, existe una ambigüedad que se hace manifiesta cuando analizamos con más cuidado el término “medición”, ya que no tiene una definición precisa dentro de la teoría. Esta vaguedad deviene en una dificultad para poder puntualizar cuándo rige la evolución unitaria y cuándo la del colapso (Okon, 2014).

Analizando esto un poco más a fondo, es preciso hacernos la pregunta: ¿qué tipo de interacción puede ser considerada como una “medición”? Se podría argumentar que el colapso acaece en un sistema microscópico cuando interactúa con un objeto macroscópico —como un aparato de medición, por ejemplo. Sin embargo, inmediatamente podemos hacernos la siguiente interrogante: ¿qué tan grande debe ser el dispositivo para que éste cause el colapso de un sistema microscópico? Ya vimos, en la sección pasada, que es posible representar sistemas compuestos de subsistemas a partir del producto tensorial de sus espacios de Hilbert asociados. Esto significa que se puede predecir la evolución de dos sistemas microscópicos a partir de la ecuación de Schrödinger. Pero, parece que, a medida que uno de ellos “crece”, habrá un momento en que ya no puedan tratarse de esta forma. No obstante, el formalismo estándar no es capaz de especificar en qué punto esto sucede.

La falta de este punto fijo puede acarrear la siguiente consecuencia: si suponemos que los objetos macroscópicos están hechos de entidades cuánticas, entonces podemos elegir tratar al aparato de medición también como un objeto cuántico. Al hacer esto, la interacción entre el sistema y el aparato de medición no devendría en un colapso, sino que la aguja —o lo que sea que indique el resultado de la medición— entraría en una superposición de los posibles resultados del sistema. Entonces podríamos poner otro aparato de medición que capture el resultado del primer instrumento. Pero éste, a su vez, también puede ser tratado como un objeto cuántico, por lo que esta interacción no colapsaría el estado de los dos dispositivos y del sistema. Este proceso puede llevarse al infinito sin que en algún momento ocurra una “medición” y, por lo tanto, jamás se dé el colapso. Este ejemplo, aunque no es algo que empíricamente se observe, es una posibilidad lógica del formalismo que se desprende de la ambigüedad que introduce el término “medición”. Esta consecuencia podría evitarse si la teoría postulara un proceso físico que asegurara el colapso en objetos compuestos de muchas entidades cuánticas. Sin embargo, la dependencia de la dinámica del colapso al término “medición” lo hace imposible.

### 1.2.2. El problema de la ontología

Para poder abordar esta problemática, es menester precisar qué es lo que se espera que cumpla cualquier teoría física. Un par de los requerimientos mínimos que debe establecer una teoría física son su ontología fundamental y su nomología (Maudlin, 2018).<sup>6</sup> El primer término refiere a aquello que la teoría postula que existe a nivel fundamental y el segundo especifica cómo es que aquello se comporta. Por ejemplo, en la mecánica newtoniana, la ontología está dada por partículas puntuales de masa, mientras que las tres leyes de movimiento y la de gravitación universal son su nomología.

Ya se vio que la nomología de la mecánica cuántica, la cual viene dada por la ecuación de Schrödinger y el postulado del colapso, es ambigua debido a que depende del término “medición”. Similarmente, ésta también carece de una ontología clara,

---

<sup>6</sup>Maudlin establece que, además de estos elementos, es necesario que se postule la estructura del espacio-tiempo; los objetos matemáticos que se usarán para representar la ontología, especificando qué elementos sí refieren a cantidades físicas y cuáles son meramente matemáticos, y la ontología derivada de la fundamental (Maudlin, 2018, p.7).

pues no especifica qué es lo que de hecho existe a un nivel fundamental. Más aún, según la “interpretación de Copenhague”, hacer esta pregunta no tiene sentido, pues la cuántica simplemente predice resultados de laboratorio, sin especificar qué es lo que sucede a nivel ontológico. Contrariamente, y como veremos más adelante, hay razones para hacernos dicha pregunta y, más aún, hay propuestas concretas de dicha ontología. En ese sentido, para ahondar sobre la ontología de la función de onda, es menester analizar con mayor detenimiento el concepto de “estado cuántico”.

Se vio que los estados cuánticos son vectores unitarios del espacio de Hilbert. Desde la teoría estándar, se asume que estos vectores son descripciones completas del sistema, al grado de que si éste no es un eigenvector de un observable, entonces la propiedad relacionada a este último no está definida en el sistema. Ahora bien, estos vectores pueden ser representados a partir de una base en particular. La manera canónica de representar estos vectores es a partir de los eigenvectores de la posición. Supongamos, por un momento, que tenemos un sistema de una sola partícula, en un espacio unidimensional, que se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$  y que los estados que refieren a que la partícula está en la posición  $x$  son  $|x\rangle$ . En general, la posición de una partícula no es definible con precisión, sino que el estado cuántico  $|\psi\rangle$  contendrá muchas componentes que representan las posibles posiciones de la partícula. A la función definida por dichas componentes y dada por:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad (1.4)$$

se le llama la función de onda en el espacio de posiciones (Weideman, 2020).<sup>7</sup> Es menester notar que, en este caso,  $x \in \mathbb{R}$ , por lo que  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si complicamos el sistema, entonces el dominio de la función de onda también crecerá. Por ejemplo, si suponemos que la partícula no está en un espacio unidimensional, sino de tres dimensiones, entonces  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ . Si ahora suponemos que depende del tiempo, entonces  $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ . Por último, si, además de la dependencia temporal, suponemos que el sistema no tiene una sola partícula, sino  $n$ , entonces  $\psi : \mathbb{R}^{3n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ .

---

<sup>7</sup>Así como se puede definir esta función de onda desde el espacio de posiciones, también es representable desde la base de los momentos. Más aún, como puede haber distintas bases para el espacio de Hilbert, entonces la representación del estado cuántico puede hacerse de infinitas maneras diferentes.

Este objeto matemático no es una cantidad que habite en el espacio físico y, por lo mismo, no tiene un referente físico evidente. De aquí, es posible hacernos la siguiente pregunta: ¿qué representa la función de onda?, ¿tiene un referente físico, alude a nuestras creencias sobre los posibles resultados de laboratorio o codifica información estadística que tenemos acerca de ensambles de sistemas? En los siguientes párrafos, se darán razones por las cuales es preciso adoptar una interpretación ontológica de la función de onda —es decir, que ésta representa algo físico— por encima de una epistémica.

Harrigan y Spekkens (2010) introdujeron una terminología conveniente para clasificar las distintas aproximaciones al significado de la función de onda. En general, se pueden separar en dos grandes rubros: las teorías  $\psi$ -ónticas y las  $\psi$ -epistémicas.<sup>8</sup> Las primeras sostienen que la función de onda representa una característica física real del sistema. Las últimas son aquéllas que ven a este objeto matemático como una representación de la información que tenemos sobre el sistema. Las teorías  $\psi$ -epistémicas, a su vez, pueden dividirse en dos:  $\psi$ -estadísticas y  $\psi$ -credal (Maudlin, 2019, p. 80). Esta última distinción radica en que las segundas aseguran que la función de onda representa el conocimiento que tenemos sobre sistemas particulares, mientras que las primeras afirman que refleja el conocimiento estadístico sobre los resultados de colecciones o “ensambles” de sistemas.

Similarmente, se puede agregar una tercera clasificación que tiene que ver con qué tanto rescata la función de onda el estado “real” o “fundamental” del sistema. Es posible distinguir entre teorías  $\psi$ -completas,  $\psi$ -suplementadas y  $\psi$ -incompletas. Las primeras serán aquéllas que afirmen que la función de onda rescata todo aquello que se puede decir del sistema. La teoría estándar —o interpretación ortodoxa— es un ejemplo de ello. Las  $\psi$ -suplementadas son aquellas teorías que agregan variables al formalismo, como, por ejemplo, la mecánica de de Broglie-Bohm, para “completar” la descripción. Por último, las incompletas son, simplemente, aquéllas que no son completas.

La definición formal que dan los autores comienza con lo que es un modelo ontológico. Un modelo ontológico de una teoría cuántica operacional postula la existencia

---

<sup>8</sup>Para una clasificación más desmenuzada y filosófica de las interpretaciones de la función de onda, véase (Chen, 2019).

de un espacio  $\Lambda$ , compuesto por estados ónticos  $\lambda$  —es decir, estados físicos reales. Adicionalmente, prescribe una distribución de probabilidad,  $p(\lambda|P_\psi)$ , sobre  $\Lambda$ , para cada preparación  $P_\psi$  en el laboratorio que esté asociada al estado cuántico  $|\psi\rangle$ . Con base en este modelo, podemos recuperar las distinciones que se hicieron anteriormente:

- Un modelo ontológico es  $\psi$ -óntico si para cualesquiera par de preparaciones en el laboratorio,  $P_\psi$  y  $P_\phi$ , asociadas con los estados  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$ , se tiene que  $p(\lambda|P_\psi)p(\lambda|P_\phi) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda$ .

Esto implica que diferentes estados cuánticos producen distribuciones de probabilidad que tienen regiones disjuntas en  $\Lambda$ , es decir, que éstas no se traslapan. Esta característica puede traducirse en que el estado cuántico codifica algo físico del sistema debido a que un estado óntico  $\lambda$  es consistente con un solo estado cuántico. Esto no implica necesariamente que la relación entre los estados cuánticos y los ónticos sea uno a uno. Éste sólo sería un caso particular de las teorías  $\psi$ -completas, en donde la distribución de probabilidad cumple que  $p(\lambda|P_\psi) = \delta(\lambda - \lambda_\psi)$ . De hecho, en este caso, el modelo ontológico  $\Lambda$  es isomorfo al espacio de rayos del espacio de Hilbert.

Las teorías  $\psi$ -epistémicas son aquéllas que no son ontológicas. Es decir, son en las que existe algún  $\lambda$  y un par de preparaciones  $P_\psi$  y  $P_\phi$  tal que  $p(\lambda|P_\psi)p(\lambda|P_\phi) \neq 0$ . Dicho en otras palabras, en este caso, un mismo estado óntico es compatible con dos estados cuánticos diferentes.

La importancia de hacer todas las definiciones anteriores radica en que, dos años después de la publicación de esta clasificación, Pusey, Barrett y Rudolph (2012) publicaron lo que ahora se conoce como el teorema de PBR. Sucintamente: los autores probaron que si adoptamos los modelos ontológicos arriba definidos y asumimos que cuando se preparan sistemas cuánticos de manera independiente, entonces el sistema compuesto no será más que la suma directa de los estados de cada parte, entonces el estado cuántico no puede ser interpretado de manera epistémica. Es decir, que las distribuciones de probabilidad de diferentes estados cuánticos no se traslapan. Esto es de vital importancia, porque le da más viabilidad a la interpretación óntica de la función de onda que a la epistémica.

Por último, y un poco al margen de toda la discusión en torno al teorema de PBR,

también es difícil pensar en una interpretación epistémica de la función de onda cuando se toman en cuenta algunos arreglos experimentales. Es cierto que hay experimentos en donde es posible adoptar una interpretación epistémica. Por ejemplo, cuando analizamos el comportamiento de dos partículas en un estado enredado, es intuitivo pensar que el colapso de la función de onda que se da cuando se mide uno de los lados del experimento es meramente una actualización de nuestro conocimiento sobre el estado de ambos subsistemas. No obstante, parece que no se puede tener esta actitud con experimentos como el de la doble rendija. Este experimento demuestra que, en cada corrida individual, se genera el patrón de interferencia si ambas aperturas se encuentran abiertas, mientras que dicho comportamiento no se dará si una de éstas está cerrada. El peculiar comportamiento es más compatible con una interpretación ontológica de la función de onda que con una epistémica (Maudlin, 2019, p. 84).

Por todo lo dicho anteriormente, en este trabajo se considerará que la función de onda es ontológica y rescata algo físico y real del sistema. Empero, aún queda el problema de cuál es aquella característica física que representa este objeto matemático. La función de onda, según lo discutido, rescata un aspecto de la realidad física de los sistemas microscópicos. No obstante, a diferencia de cantidades como la masa, la velocidad, etcétera; la función de onda no está definida en el espacio físico, sino en el de configuraciones. Esto último hace que la referencia física no sea directa, por lo que la pregunta es: ¿qué es lo que está capturando?

### 1.3. El espacio-tiempo en la relatividad especial

Para la presentación del espacio-tiempo de Minkowski, se retomará la exposición contenida en Maudlin (2012). A diferencia de muchas reconstrucciones de la relatividad especial que aluden a postulados como “la velocidad de la luz en el vacío es constante” o “todos los marcos de referencia son equivalentes”, aquí comenzaremos con una construcción geométrica. Esto debido a que las nociones de “velocidad” y “marco de referencia” no son fundamentales, sino que se derivan de conceptos más generales que se desprenden de la geometría intrínseca de la teoría. En el caso de la velocidad, es sabido que las *velocidades absolutas* no tienen realidad física, por lo que apelar a este

concepto en los postulados de una teoría fundamental es poco deseable. De la misma manera, la noción de “marco de referencia” responde directamente a las coordenadas que se usan para “etiquetar” el espacio sobre el cual se está trabajando. Esto hace de las coordenadas algo secundario que depende de la geometría de fondo.

En lugar de proponer la invarianza de la velocidad de la luz como postulado fundamental, Maudlin propone lo que él llama “la ley de la luz”: la trayectoria de la luz en el vacío es independiente del estado físico de su fuente (Maudlin, 2012, p. 68). Nótese que esta ley no apela a la noción de velocidad. Ahora bien, como dicho principio está definido en el vacío, entonces la independencia que hay entre la luz y su fuente debe estar dada por la estructura misma del espacio. O, dicho en otras palabras, es la estructura del espacio-tiempo la que determina la trayectoria de los rayos de luz. Por ello es importante que establezcamos qué tipo de espacio-tiempo es el que la relatividad especial afirma que existe.

El espacio-tiempo de la relatividad especial se llama *espacio-tiempo de Minkowski* y las coordenadas que habitualmente se le asocian se denominan *coordenadas de Lorentz*, aunque podrían ser cualesquiera otras. Este espacio-tiempo tiene cuatro dimensiones, por lo que es necesario asociar cuatro coordenadas a cada punto:  $\bar{p} = (x, y, z, t)$ , en donde  $x, y, z$  y  $t \in \mathbb{R}$ . El hecho de que cada entrada sea un número real implica que las coordenadas varían de manera continua, de tal suerte que se puede definir cuándo un punto se mueve continuamente y cuándo no: un punto se mueve continuamente en el espacio-tiempo de Minkowski si y sólo si sus coordenadas lorentzianas cambian de manera continua al moverse.<sup>9</sup> Al igual que las coordenadas cartesianas nos permiten diferenciar las líneas rectas de las curvas en el espacio euclideo, lo mismo pasa en el espacio-tiempo de Minkowski con las coordenadas de Lorentz. Basta con definir una línea recta como:  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ , tal que  $\gamma(s) = (x_1 + sx_2, y_1 + sy_2, z_1 + sz_2, t_1 + st_2)$ , en donde  $x_2, y_2, z_2$  o  $t_2$  es no-nulo.

Hasta ahora, la manera de diferenciar entre curvas continuas y discontinuas —

---

<sup>9</sup>La posibilidad de distinguir cuando un punto se mueve continuamente o discretamente es posibilitada por la estructura topológica del espacio en cuestión (Maudlin, 2012, p. 7). Esto se debe a que las nociones de conexidad de conjuntos y de segmentos pueden definirse a través de conjuntos abiertos (Crossley, 2005, p. 38), los cuales son la noción primitiva de la topología (Maudlin, 2010). Las estructuras afín y métrica se construyen sobre la estructura topológica. La primera de éstas permite distinguir entre líneas rectas y curvas, mientras que la segunda posibilita medir las distancias entre puntos y la longitud de segmentos (Maudlin, 2012, pp. 6-8)



es decir, la estructura topológica— y de discriminar entre líneas rectas y curvas —la estructura afín— definidas para el espacio-tiempo de Minkowski son equivalentes a aquéllas del espacio euclideo. Es decir, hasta este punto, este espacio parece ser equivalente a  $E^4$ . No obstante, es en la manera de determinar distancias y longitudes —la estructura métrica— en donde comienzan las diferencias. Dadas las coordenadas cartesianas, la distancia entre dos puntos se define de la siguiente manera:

$$d(p, q) = \sqrt{(X(p) - X(q))^2 + (Y(p) - Y(q))^2 + (Z(p) - Z(q))^2}, \quad (1.5)$$

en donde  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son las funciones coordenadas.<sup>10</sup>

Por el contrario, la estructura métrica del espacio-tiempo de Minkowski no está dada por la distancia euclidea de cuatro dimensiones, sino que se postula como:

$$I(p, q) = \sqrt{(T(p) - T(q))^2 - (X(p) - X(q))^2 - (Y(p) - Y(q))^2 - (Z(p) - Z(q))^2}. \quad (1.6)$$

A esta cantidad se le denomina *intervalo invariante relativista*.<sup>11</sup> Así, aunque las estructuras topológica y afín del espacio-tiempo de Minkowski se postulan como idénticas a las del espacio euclideo, la estructura métrica es radicalmente distinta. Esto debe tomarse en cuenta cuando se hacen diagramas espacio-temporales, pues la distancia que aparece en éstos no es la misma al intervalo que de hecho hay entre los eventos.

Sin embargo, el hecho de que la estructura afín y la topológica sean idénticas a las del espacio euclideo implica que es posible representar el espacio-tiempo de Minkowski. Analicemos la estructura de un espacio-tiempo de tres dimensiones para poder visualizarlo. Suprimamos la dimensión representada por  $z$  y quedémonos sólo con  $x$ ,  $y$  y  $t$ , en donde la última coordenada es la que va en dirección vertical. De igual manera, llamemos a un punto el origen y denotémoslo como  $o$ . Si nos preguntamos por

<sup>10</sup>De hecho, esta métrica no es exclusiva a un espacio euclideo de tres dimensiones, sino que puede generalizarse para un espacio euclideo de  $n$  dimensiones como:  $d_2(p, q) = \sqrt{(X_1(p) - X_1(q))^2 + \dots + (X_n(p) - X_n(q))^2}$  (Clapp, 2015, p. 8).

<sup>11</sup>Es menester mencionar que, aunque ésta sea la manera de determinar la distancia entre puntos,  $I$  no cumple con la definición formal de ser una métrica por las siguientes razones: 1) no es una función que vaya del producto cartesiano de  $\mathcal{M}$  a  $\mathbb{R}$ , puesto que, para algunos  $p$  y  $q$ ,  $I(p, q) \in \mathbb{C}$ ; 2) dado  $p$ , existen infinitos puntos  $q$  tales que  $I(p, q) = 0$ , y 3) no cumple con la desigualdad del triángulo.

todos los eventos que tienen un intervalo nulo desde el origen, obtenemos la siguiente ecuación:

$$I(p, o) = \sqrt{(T(p) - T(o))^2 - (X(p) - X(o))^2 - (Y(p) - Y(o))^2} \quad (1.7)$$

$$= \sqrt{(T(p) - 0)^2 - (X(p) - 0)^2 - (Y(p) - 0)^2} \quad (1.8)$$

$$= \sqrt{T(p)^2 - X(p)^2 - Y(p)^2}. \quad (1.9)$$

De allí, tenemos que

$$I(p, o)^2 = T(p)^2 - X(p)^2 - Y(p)^2 = 0. \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) señala que el conjunto de puntos que se encuentran a un intervalo igual a cero del origen forman un doble cono centrado en el origen y orientado hacia el eje de las coordenadas  $t$ . A éste le llamaremos “cono de luz”. Como el origen es un punto genérico, entonces a cada punto en el espacio-tiempo de Minkowski,  $p$ , se le asocia un doble cono de luz que está formado por todos los puntos,  $q$ , que cumplen que  $I(p, q) = 0$ . El cono que abarca la parte hacia el futuro del punto es llamado el *cono futuro de luz*, mientras que el restante es denominado como el *cono pasado de luz*. Nótese que, por la presencia de esta superficie, el espacio-tiempo de Minkowski, a diferencia del espacio no-relativista, no es isotrópico, pues no presenta las mismas características en todas las direcciones. Más aún, dado un punto, su doble cono divide al espacio en cinco regiones distintas: 1) los eventos que se encuentran *sobre* el cono futuro de luz, 2) los que están *sobre* el cono pasado de luz, 3) los que se encuentran *dentro* del cono futuro de luz, 4) los que comprenden la región *dentro* del cono pasado de luz, y 5) aquéllos fuera del cono. Se dice que los eventos se encuentran en las regiones (1) y (2) tienen separación tipo tiempo de  $p$ ; aquéllos en (3) y (4) tienen separación tipo luz, y los que componen la región (5) tienen separación tipo espacio. En términos de las coordenadas, estos tres tipos de eventos corresponden respectivamente a si el intervalo  $I$  toma un valor real estrictamente mayor que cero, cero o es una cantidad imaginaria.

Con toda la geometría definida hasta ahora, ya es posible establecer tres postulados empíricos que servirán de base para conectar esta estructura espacio-temporal con la experiencia física. En primer lugar, la ley de la luz la definiremos de la siguiente forma:

*Ley de la luz:* la trayectoria de un rayo de luz emitido desde un evento (en el vacío) es una línea recta sobre el cono futuro de luz de ese evento. (Maudlin, 2012, p. 73)

De aquí que su nombre sea “cono de luz”.

De igual manera, se puede rescatar la noción de que nada puede viajar más rápido que la velocidad de la luz con el siguiente enunciado:

*El rol limitante del cono de luz:* la trayectoria de cualquier ente físico que pasa por un evento jamás sale del cono futuro de luz de ese evento.

Es menester notar que no se utilizó la noción de “velocidad” para definir dicha ley.

Como el espacio-tiempo de Minkowski tiene una estructura afín, entonces hay una forma en la que se puede definir una ley de inercia relativista:

*Ley de inercia relativista:* la trayectoria de cualquier objeto físico sujeto a ninguna influencia externa será una línea recta en el espacio-tiempo de Minkowski. (Maudlin, 2012, p.75)

Por último, Maudlin establece una última proposición con carácter de hipótesis:

*La hipótesis del reloj:* la cantidad de tiempo que un reloj preciso muestra que ha pasado entre dos eventos es proporcional a la longitud de la trayectoria del reloj entre dichos eventos.<sup>12</sup>(Maudlin, 2012, p. 76)

---

<sup>12</sup>La longitud de esta curva puede definirse de la siguiente manera: sea una curva representada por una función  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_0$ , que va del evento  $\bar{p}$  al evento  $\bar{q}$ . Aquí,  $\mathcal{M}_0$  es el espacio de Minkowski, el cual, como ya vimos, cumple que es topológica e isométricamente igual a  $\mathbb{R}^4$ , pero con una métrica distinta. Definimos la longitud de la curva  $\gamma$  como  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ . Aquí,  $\|\bar{p}\|$  representa la norma definida por  $I(\bar{p}, 0)$ . Intuitivamente, puede pensarse como la suma de todos los fragmentos rectos infinitesimales que componen a la curva en cuestión.

La hipótesis del reloj es especialmente útil para dar claridad a algunas situaciones físicas que se han considerado difíciles de explicar en la relatividad. Por ejemplo, explica la paradoja de los gemelos sólo al calcular la diferencia entre los intervalos recorridos por las trayectorias de los hermanos (Maudlin, 2012, pp. 77-83).

Hasta ahora, hemos explicitado el tipo de espacio-tiempo que la relatividad especial propone que existe. De igual manera, hemos dado cuatro enunciados que conectan dicha geometría con el comportamiento de los objetos físicos. En cuanto al sistema de coordenadas, sólo hemos aseverado que a cada evento se le asocian cuatro números reales, pero no se especificado cómo es que se puede establecer ese sistema de coordenadas en términos prácticos. La ley de la luz, la hipótesis del reloj y la ley de inercia relativista son suficientes para poder construir, en términos físicos, dicho sistema de coordenadas.

En primer lugar, establezcamos la coordenada  $t$  a cada evento del espacio-tiempo. Supongamos que tenemos una colección infinita de relojes ideales, libres de fuerzas, y que escogemos, al azar, a uno de ellos al que llamaremos “reloj maestro”. También supongamos que éste tiene una escala de tiempo determinada. De tal suerte que el reloj maestro asignará una coordenada  $t$  a cada evento por el que pase en su línea de mundo. Para poder extender la asignación de la coordenada  $t$  a eventos que no se encuentren en la trayectoria del reloj maestro harán falta más relojes. Por la hipótesis del reloj, no es posible simplemente sincronizar todos los relojes con el reloj maestro y enviarlos a todas direcciones, pues sus lecturas serán distintas dependiendo de sus trayectorias particulares. En lugar de eso, presupongamos que los relojes necesariamente son inerciales, es decir, sus trayectorias son rectas en el espacio-tiempo de Minkowski e identifiquemos qué relojes son co-móviles al reloj maestro.

Dos relojes son co-móviles si ambos están en una trayectoria inercial y no se acercan ni se alejan. En ese sentido, si situamos al observador en el reloj maestro, podemos identificar todos aquellos relojes que son co-móviles al reloj maestro a través del envío de rayos de luz. Como ya se mencionó, la trayectoria de los rayos de luz en el vacío siempre está contenida en el cono futuro de luz desde el cual éstos se emiten. Si nos restringimos a dos dimensiones para poder pensar de manera más fácil la situación, el rayo de luz emitido desde el reloj maestro puede ser representado como una línea

recta a 45 grados de la vertical. Ahora supongamos que desde el reloj maestro se emite un rayo de luz hacia un reloj co-móvil, que éste regresa al reloj maestro, y se toma el tiempo que tarda el rayo en llegar al otro reloj y regresar. Si para cualesquiera ocasiones que se emita el rayo de luz, el reloj maestro marca que el tiempo que le toma a éste hacer el viaje de ida y vuelta es siempre el mismo, entonces el reloj objetivo será un reloj co-móvil al reloj maestro. Si éste no fuera constante, entonces el reloj objetivo no sería co-móvil con el maestro, pues la diferencia en las siguientes señales denotaría que éstos se están alejando o acercando. Así, el espacio-tiempo de Minkowski puede ser llenado completamente a partir de relojes co-móviles, foliándolo en trayectorias rectas paralelas.

Para poder establecer la coordenada temporal a cada evento, es necesario que los relojes estén calibrados y sincronizados. Lo primero se consigue suponiendo que el reloj maestro emite un pulso de luz cada cierta unidad de tiempo y que los relojes co-móviles ajustan su medición de tal forma que pasa una unidad de tiempo cada vez que reciben un rayo de luz.

La sincronización es una cuestión de convención, puesto que el espacio-tiempo de Minkowski no tiene la estructura necesaria para definir una simultaneidad absoluta en el tiempo. No hay un hecho físico que defina cuándo dos eventos son simultáneos. (Maudlin, 2012, p. 76) Este punto se repetirá en múltiples ocasiones a lo largo de este trabajo, así que veamos cómo, en este contexto, se puede establecer una simultaneidad por convención. Pensemos en que el reloj maestro manda un pulso de luz a un reloj co-móvil. Éste rayo, al alcanzar el segundo reloj, se refleja y regresa al reloj maestro. La convención es que cuando el segundo reloj reciba el pulso de luz, su lectura sea una unidad de tiempo mayor que la que tenía el reloj maestro al mandar el rayo. Así, si este último emitió el rayo a las 12:01, el reloj co-móvil marcará 12:01 al recibirlo. Posteriormente, el reloj maestro marcará las 12:02 al encontrarse con el rayo reflejado. Si se adopta esta convención para todo los relojes co-móviles que llenan el espacio-tiempo, podemos asignar a cada evento una coordenada  $t$ . Así, todos los eventos con la misma coordenada  $t$  serán simultáneos y definirán una sucesión de superficies que folian todo el espacio-tiempo. Esta simultaneidad es convencional en tanto que desde la elección del reloj maestro hasta la frecuencia de la emisión de los rayos de luz ha sido

arbitraria. Si se hubiese elegido un reloj maestro diferente, junto con la colección de los relojes co-móviles a él, los eventos que tengan la misma coordenada  $t'$ , no serían los mismos que a los que se les designó la misma coordenada  $t$ . Como no existe un hecho físico que defina una simultaneidad privilegiada, cualquier simultaneidad coordenada es igual de válida que cualquier otra. A esto se le conoce como la *relatividad de la simultaneidad* (Maudlin, 2012, p.92).

Ya que tenemos la coordenada temporal para todos los eventos, resta asignar las coordenadas espaciales  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Imaginemos que desde el reloj maestro se eligen tres direcciones ortogonales arbitrariamente. Estipulemos que el reloj maestro funge como el origen espacial, de tal manera que las tres coordenadas son cero. Ahora supongamos que se emite un rayo en la dirección  $x$ . Dada esta dirección, habrá una colección de relojes co-móviles que recibirán el rayo. Ellos definirán el eje  $x$  de nuestras coordenadas. De manera análoga, se definen los ejes  $y$  y  $z$ . Ahora sólo hace falta ver cómo medir la distancia. Es natural pensar que la distancia espacial debe ser proporcional al viaje de ida y vuelta del rayo de luz emitido por el reloj maestro y reflejado por los relojes objetivos. Si este viaje toma dos minutos con un reloj particular, entonces al espacio ocupado por éste se le asignará la coordenada  $x = 1$ . Tomando esa unidad, se puede extender el etiquetado a todo el eje  $x$ . Las coordenadas restantes se construyen análogamente.

Por último, hace falta ver cómo es que se pasa de un sistema de coordenadas a otro. Esto se hace a partir de las *transformaciones de Lorentz*. Pero antes de presentarlas, es menester mencionar que, aunque la estructura espacio-temporal de Minkowski no es suficiente para poder definir una velocidad objetiva, ya habiendo establecido un sistema de coordenadas, entonces se pueden definir velocidades *coordenadas*. De tal suerte que es posible preguntarnos por la relación matemática que hay entre dos sistemas coordinados entre los cuales hay una velocidad relativa distinta de cero. Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas  $K$ , cuyas coordenadas son  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$  y que nos preguntamos por la relación que tiene con las coordenadas  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  y  $t'$  de otro marco de referencia. Para la construcción de estas transformaciones, adoptaremos otra forma de expresar la métrica:

$$I(p, q) = c^2(T(p) - T(q))^2 - (X(p) - X(q))^2 - (Y(p) - Y(q))^2 - (Z(p) - Z(q))^2. \quad (1.11)$$

Como puede verse, las ecuaciones (1.11) y (1.6) no son exactamente iguales. La diferencia radica en que se ha elevado al cuadrado la ecuación (1.6) y la componente del tiempo se ha multiplicado por la velocidad coordenada de la luz,  $c$ . Esta convención es adoptada por algunos textos de física, no obstante, para la construcción conceptual que se hizo no era del todo conveniente dicha expresión. En primer lugar, porque hablar de la velocidad de la luz como una característica fundamental de la geometría de Minkowski es erróneo, pues ésta sólo puede definirse desde un sistema de coordenadas. De hecho hay ocasiones en las que se presenta el intervalo relativista sin la presencia de la  $c$ , haciendo su valor igual a la unidad. Pero, en nuestro caso, se omitió porque la noción *velocidad de la luz* es un concepto derivativo, no fundamental. No obstante todo lo anterior, utilizaremos esta última convención para deducir las transformaciones de Lorentz tal cómo aparecen en Landau y Lifshitz (1996).

Consideremos que tenemos dos sistemas de coordenadas  $K$  y  $K'$ , tal que la velocidad coordenada de  $K'$  relativa a  $K$ , en la dirección  $x$ , es  $v_x$ . De igual manera, pensemos que los ejes de  $K$  y  $K'$  están alineados cuando  $t = t' = 0$ . Como las transformaciones de Lorentz deben dejar invariante el intervalo  $I$ , éstas son parte de las isometrías del espacio-tiempo de Minkowski.<sup>13</sup> Con las suposiciones arriba mencionadas, hallar la transformación requerida es buscar la solución para:

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2. \quad (1.12)$$

Una solución general para la ecuación (1.12) es  $x = x' \cosh(\psi) + ct' \sinh(\psi)$  y  $ct = x' \sinh(\psi) + ct' \cosh(\psi)$ . Matemáticamente, estas soluciones son rotaciones en el plano  $tx$ , sin embargo, el hecho de que la métrica sea distinta a la euclídeana implica que éstas estén definidas a través de las funciones hiperbólicas en lugar de usar las trigo-

<sup>13</sup>El grupo completo de las isometrías en el espacio-tiempo de Minkowski es el grupo de Poincaré, el cual comprende las rotaciones y traslaciones de este espacio. El grupo de Lorentz es un subgrupo del de Poincaré que contiene a las rotaciones espaciales ordinarias sobre los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$  así como las rotaciones temporales sobre los planos  $tx$ ,  $ty$  y  $tz$ . A estas últimas se les llama *boosts* (Landau y Lifshitz, 1996, p. 10).

nométricas usuales. Al determinar el ángulo  $\psi$  en términos de  $v_x$  y  $c$  llegamos a las siguientes expresiones (Landau y Lifshitz, 1996, pp. 9-10):

$$x = \frac{x' + v_x t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.13)$$

$$y = y' \quad (1.14)$$

$$z = z' \quad (1.15)$$

$$t' = \frac{t + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.16)$$

Para obtener las transformaciones inversas sólo hay que sustituir  $v_x$  por  $-v_x$ .

## 1.4. Tensiones entre la cuántica y la relatividad

### 1.4.1. Localidad

La relación entre la localidad y la mecánica cuántica se remonta a un experimento pensado expuesto por Einstein en 1927 en la quinta conferencia Solvay. Supongamos que tenemos una pantalla con una apertura en medio y que del otro lado de ésta hay un filme fosforescente capaz de detectar el impacto de un solo electrón. Ahora pensemos que lanzamos un electrón por la apertura. La cuántica no puede predecir exactamente en qué lugar del filme impactará; más bien su función de onda está extendida sobre la totalidad de la placa fosforescente y dicta la probabilidad que hay de que se registre un impacto en cierta región de la placa. Esto hace pensar que tal vez la descripción de la mecánica cuántica es incompleta y que de hecho hay causas o “variables” ocultas que no son tomadas en cuenta por la teoría y que determinan con precisión en dónde impactará la partícula. Por el contrario, si suponemos que la descripción de la función de onda es todo lo que hay —es decir, que es completa— entonces el proceso, en sí mismo, es indeterminista y la partícula adquiere una posición definida hasta el momento



en el que se encuentra con el filme. No obstante, si éste fuera el caso, parece haber una “tenebrosa” acción a distancia, puesto que al localizarse el electrón en el punto del impacto, la función de onda colapsa *instantáneamente* y hace que la probabilidad de que el electrón se encuentre en otro sitio se anule *ipso facto*. Esto parece problemático en varios aspectos. En primer lugar, parece implicar que hay influencias causales superlumínicas, pues el hecho de que el electrón se localice en un punto de la placa hace que la probabilidad de que éste impacte en cualquier otro sitio se vuelve cero instantáneamente. En segundo lugar, la noción de instantaneidad, como ya vimos, es referente a un marco de referencia, por lo que parece que este comportamiento está definiendo un marco de referencia privilegiado. Así, Einstein trató de argumentar que si la mecánica cuántica era completa, entonces violaba postulados básicos de la relatividad.

Este experimento pensado no trascendió y la discusión sobre esta acción a distancia volvió a tener relevancia hasta la publicación del artículo de Einstein, Podolsky y Rosen (1935) —de aquí en adelante EPR. En éste, los autores presuponen que no puede haber acción a distancia y, con ello, muestran que la mecánica cuántica debe ser “incompleta”. Es decir, que hay ciertos aspectos de la naturaleza microscópica que la cuántica no puede capturar, por lo que sólo alcanza a hacer descripciones incompletas de estos sistemas. De tal suerte que, según este argumento, era necesario “completar” la mecánica cuántica con variables ocultas de tal manera que ésta no presentara dicha acción a distancia, es decir, para que fuera local.

No obstante, Bell (1964) demostró que, cualquier teoría que haga la mismas predicciones que la mecánica cuántica tiene que ser no-local. Esto incluye a aquéllas que resultaran de completar, con variables ocultas, el formalismo cuántico. Para explicar a detalle cómo es que hizo esto, retomaremos la introducción al asunto presentada por Ciepielewski, Okon y Sudarsky (2020).

Supongamos que tenemos un ensamble de pares de partículas, todos ellos en el estado singulete:  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+\rangle_1 \otimes |n-\rangle_2 - |n-\rangle_1 \otimes |n+\rangle_2)$ . Los estados  $|n+\rangle_i$  denotan que la partícula  $i$  tiene el *spin* a lo largo de la dirección positiva de  $n$ ; mientras que  $|n-\rangle_i$  denota que la partícula  $i$ -ésima tiene el *spin* en la dirección contraria a lo largo de  $n$ . Es menester mencionar que, dada la invarianza rotacional de este estado, esta expresión representa el *spin* del sistema para cualquier dirección  $n$ . Recordemos

que, al medir el *spin*, el estado del sistema colapsará a un eigenestado de dicha propiedad. Es decir, los *spins*, después de la medición, deben estar bien definidos para ambas partículas, aunque sus direcciones deberán ser contrarias entre sí. De aquí que si decidimos medir el *spin* de cualquiera de las partículas, a lo largo de la dirección  $n$ , el sistema tendrá dos posibles resultados:  $|n+\rangle_1 \otimes |n-\rangle_2$  o  $|n-\rangle_1 \otimes |n+\rangle_2$ , ambos con la misma probabilidad de  $\frac{1}{2}$  de realizarse.

Denotemos por  $a$  y  $b$  las direcciones a lo largo a las cuales se hará la medición del spin de la partícula 1 y 2 respectivamente, y supongamos que  $A$  y  $B$  son los resultados que arrojarán las mediciones correspondientes. Denotemos por  $\lambda$  el estado completo del sistema, el cual contiene toda la información sobre el par de partículas. Si la mecánica cuántica es completa, entonces  $\lambda$  será la función de onda. Contrariamente, si esta teoría es incompleta,  $\lambda$  podría ser tanto la función de onda junto con variables adicionales que suplementen la información faltante o podría ser algo completamente distinto.

Ahora bien, pensemos que las mediciones de  $a$  y  $b$  son eventos con separación tipo espacio. Un modelo local del sistema presupondría que el acto y el resultado de medir en un ala del experimento no tiene consecuencias en el otro extremo. Esto lo podemos formalizar de la siguiente manera: sea  $P(A, B|a, b, \lambda)$  la probabilidad de obtener los resultados  $A$  y  $B$  dado que se decidió medir  $a$  y  $b$  y suponiendo que el estado del par de partículas era  $\lambda$ . Dado que las alas del experimento, descritas por una teoría local, son independientes entre sí, entonces tenemos que:

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P(A|a, \lambda)P(B|b, \lambda). \quad (1.17)$$

A esta ecuación se le llama factorizabilidad y captura el hecho de que los resultados de ambas mediciones no tienen influencia entre sí.

Ahora bien, el estado cuántico y el estado completo  $\lambda$  no tienen necesariamente que ser uno a uno. Sabemos que todos los pares del experimento están en el estado singulete, pero bien podría ser que éstos estuvieran en distintos estados fundamentales  $\lambda$ . De allí que el ensamble de pares medidos se pueda ver como una distribución sobre los estados completos:  $\rho(\lambda)$ . De aquí, hacemos la suposición de que la elección de qué se mide es independiente del estado del sistema. Es decir, que  $\rho(\lambda|a, b) = \rho(\lambda)$ . A esto,

como ya se mencionó en la introducción, se le conoce como independencia de ajustes.

Con base en lo anterior, puede calcularse el valor de expectación del producto  $AB$  sobre todos los pares de partículas:

$$E(a, b) = \int \sum_{A, B} ABP(A, B|A, B, \lambda)\rho(\lambda|a, b, )d\lambda. \quad (1.18)$$

Esta cantidad, de acuerdo con el teorema de Bell, debe obedecer la siguiente desigualdad:

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2. \quad (1.19)$$

En otras palabras, toda teoría que cumpla con la condición de factorizabilidad y con la independencia de ajustes deberá satisfacer la desigualdad (1.19). Es menester mencionar que la noción de localidad está dada por la factorizabilidad, mientras que la independencia de ajustes es una suposición adicional que hace Bell para deducir la desigualdad.

Ahora bien, lo remarcable es que existe la posibilidad de construir ejemplos concretos desde la mecánica cuántica que violan este resultado. En el estado singulete, si la medición del *spin* se hace en la misma dirección en ambas partículas, entonces sabemos que los resultados deben ser opuestos; pero si las mediciones se hacen en distintas direcciones, éste no es el caso, al grado que, si se hacen con una diferencia de 90 grados, los resultados serán estadísticamente independientes. Podemos pensar en el caso general de la siguiente manera (Myrvold y cols., 2020): si  $a$  y  $b$  representan direcciones arbitrarias en las que se medirá el *spin* de las partículas —que están en el estado singulete—, cuyos resultados pueden ser  $+1$  o  $-1$ , entonces el valor de expectación de los resultados está dado por:

$$E_\psi(a, b) = \langle \psi | \sigma_a^1 \otimes \sigma_b^2 | \psi \rangle = -\cos(\theta_{ab}), \quad (1.20)$$

en donde  $\theta_{ab}$  es el ángulo entre las direcciones  $a$  y  $b$ . Aquí, si tomamos cuatro direcciones distintas  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  y  $b'$ , en donde los ángulos entre ellas sean:  $\theta_{ab} = \theta_{a'b'} = \theta_{a'b} = \theta_{a'b'} = \frac{\pi}{4}$  y  $\theta_{ab} = \frac{\pi}{2}$ , entonces tenemos que

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| = 2\sqrt{2} > 2. \quad (1.21)$$

De aquí que la teoría cuántica —y cualquiera empíricamente equivalente a ella, ya sea de variables ocultas o fundamentalmente distinta— no sea local. Más aún, los experimentos realizados por Aspect (1981) y (1982) muestran que los resultados experimentales de hecho violan la desigualdad (1.19). Lo anterior significa que el teorema de Bell no sólo muestra que toda teoría empíricamente equivalente a la mecánica cuántica debe ser no-local, sino que cualquier teoría que sea empíricamente adecuada también debe serlo.

Se ha argumentado que el carácter no-local de la mecánica cuántica entra en conflicto directamente con la relatividad especial. No obstante, se vio que el rol limitante de la ley de la luz sólo impone que objetos que pasan por un evento no puedan salir de su cono de luz. La violación de la desigualdad (1.19), más bien, entra en conflicto con lo que se definió como factorizabilidad o con la independencia de ajustes. Más aún, si suponemos que este último se cumple, entonces la violación más bien es sobre aquello que Bell nombró como el “principio de causalidad local” (1987a). De hecho, la factorizabilidad puede derivarse desde este principio. Revisemos, pues, en qué consiste.

Para comenzar, es menester definir el concepto de *beable* de una teoría, el cual refiere a aquellas entidades que podemos pensar seriamente que corresponden a algo físico. Ahora bien, un *beable* local es aquél que puede asociarse a regiones del espacio tiempo. Por ejemplo, es un consenso general que los campos eléctrico y magnético del electromagnetismo clásico son *beables* locales. Por otro lado, la energía total en todo el espacio podría ser un *beable*, pero no sería local. Contrariamente, los potenciales eléctricos y magnéticos, aunque son entidades matemáticas que sirven para hacer cálculos, no se les considera como entes con una realidad física, por lo que éstos no son *beables* (Bell, 1987b).

Con lo anterior, estamos listos para definir el principio de causalidad local. Bell lo define como que las causas y los efectos —ya sea que éstos sean directos o indirectos— de eventos no pueden estar más separados que por aquéllo que permite la velocidad coordinada de la luz. Dicho en otras palabras, dado un evento, todas sus causas deben

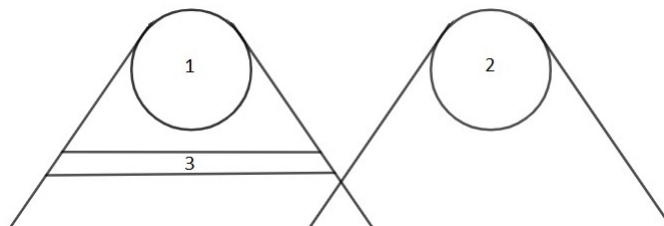


Figura 1.1: Esquema del principio de causalidad de Bell. Las probabilidades adscritas a *beables* locales en la región 1, dada una completa especificación de la región 3, no deben ser alteradas por la precisión del valor de algún *beable* local de la región 2. Es necesario que la región 3 esté completamente fuera del cono pasado de luz de la región 2.

encontrarse en su cono pasado de luz, mientras que los efectos deben estar en su cono futuro. Así, en puntos tipo espacio no se pueden encontrar causas ni efectos para el evento en cuestión. Sin embargo, esto no significa que dos eventos con separación tipo espacio no puedan estar correlacionados, pues es posible que tengan una causa en común en la intersección de sus conos pasados de luz.

De lo anterior, podemos definir lo que es que una teoría sea localmente causal:

Se dirá que una teoría es localmente causal si las probabilidades adscritas a valores de *beables* locales en la región espacio-temporal 1 no se alteran bajo la especificación de los valores de *beables* locales en una región 2 con separación tipo espacio, cuando lo que sucede en el cono pasado de luz de 1 está lo suficientemente especificado, por ejemplo por una especificación completa de los *beables* locales en la región espacio-temporal 3. (Bell, 1987a, p. 240)

La región 3 debe estar completamente fuera del cono de luz de la región 2 —véase la Figura 1.1—, de lo contrario, podría haber eventos que fueran causas comunes de la región 1 y de la región 2. La existencia de éstas implicaría que lo que sucediera en la región 2 podría brindar información sobre la región 1.

Veamos, ahora, cómo es posible llegar a la factorizabilidad desde este principio. Supongamos que tenemos un par de *beables*,  $\chi$  y  $\xi$ , con separación tipo espacio. Sea, de igual modo,  $\sigma$  una superficie espacial en el cono pasado de luz de  $\chi$ , cuya intersección con el cono pasado de luz de  $\xi$  es vacía. Asimismo, supongamos que  $\lambda_\sigma$  es una especificación completa de los eventos de  $\sigma$  y que  $b_\chi$  y  $b_\xi$  son un par de valores de ambos *beables*. Ahora bien, un modelo que asigna una probabilidad a  $b_\chi$  será local si cumple que:

$$P(b_\chi|\lambda_\sigma) = P(b_\chi|\lambda_\sigma, b_\xi). \quad (1.22)$$

Es decir, la probabilidad de que el valor de  $\chi$  sea  $b_\chi$ , dado  $\lambda_\sigma$ , es igual a aquella en la que se agrega el hecho de que el valor de  $\xi$  es  $b_\xi$ . En otras palabras: el valor de  $\xi$  es inocuo para el valor de  $\chi$  porque está fuera de su pasado causal y  $\sigma$  no es parte del cono pasado de luz de este último.

Retomemos el ejemplo anteriormente discutido para analizarlo a la luz de este nuevo principio: sean, nuevamente,  $a$  y  $b$  las direcciones a lo largo de las cuales se elige hacer las mediciones de los *spins* y  $A$  y  $B$  los resultados de éstas. De igual manera, sea  $\Sigma$  una superficie de simultaneidad en el futuro de la intersección entre los conos pasados de la región en donde se dan  $a, b$  y  $A$  y  $B$  —véase la Figura 1.2. Teniendo esto en cuenta, podemos escribir la probabilidad de que se den los resultados  $A$  y  $B$  dados  $a, b$  y  $\lambda_\Sigma$  de la siguiente manera:

$$P(A, B|a, b, \lambda_\Sigma) = P(A|a, b, \lambda_\Sigma)P(B|a, b, \lambda_\Sigma). \quad (1.23)$$

El principio de causalidad local nos dice que  $a$  y  $A$  son independientes de  $b$  y  $B$ , por lo que:

$$P(A|a, b, B, \lambda_\Sigma) = P(A|a, \lambda_\Sigma) \quad y \quad P(B|a, b, \lambda_\Sigma) = P(B|b, \lambda_\Sigma). \quad (1.24)$$

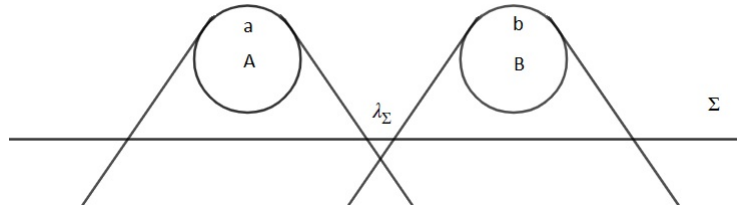


Figura 1.2:  $a$  y  $b$  simbolizan la dirección del *spin* que se ha decidido medir para cada partícula;  $A$  y  $B$  son los resultados de las mediciones y  $\lambda_\Sigma$  es una especificación total de los eventos sobre la hipersuperficie de simultaneidad  $\Sigma$ .

De allí que:

$$P(A, B|a, b, \lambda_\Sigma) = P(A|a, \lambda_\Sigma)P(B|b, \lambda_\Sigma). \quad (1.25)$$

Ahora bien, aunque esto ya parece ser la condición de factorizabilidad, hay un detalle que hay que mencionar. Como se hizo la condicionalización sobre toda la hipersuperficie, entonces no se cumple que  $\rho(\lambda_\Sigma|a, b) = \rho(\lambda_\Sigma)$  (Ciepielewski y cols., 2020). Esto se desprende del hecho de que la especificación está hecha sobre toda la hipersuperficie de simultaneidad, por lo que es posible que haya correlación entre  $a$ ,  $b$  y  $\lambda_\Sigma$ . Sin embargo, nótese que  $\lambda_\sigma$  puede descomponerse en cuatro especificaciones distintas: 1)  $\lambda_a$ , de aquéllos eventos que determinan a  $a$ ; 2)  $\lambda_b$ , de aquéllos que determinan a  $b$ ; 3)  $\lambda$ , de los que determinan el estado físico del par de partículas y  $\lambda_E$  del resto. Es menester mencionar que  $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$  y  $\lambda_E$  pueden eliminarse, pues son irrelevantes para el estado del sistema. En el caso de los primeros dos, éstos son redundantes, pues su influencia sobre los resultados ya están mediadas a través de  $a$  y  $b$ . En cuanto al último, éste puede ser desechado, pues por definición tiene una influencia nula para los resultados (Ciepielewski y cols., 2020, pp. 9-10). Así, nos quedamos con la siguiente expresión:

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P(A|a, \lambda)P(B|b, \lambda). \quad (1.26)$$

La expresión (1.26) representa lo que habíamos llamado párrafos atrás “factorizabilidad”. Recopilando todo lo que se ha dicho hasta ahora, tenemos que si suponemos la independencia entre aquello que se decide medir con el estado del sistema —es decir, que  $\rho(\lambda|a, b) = \rho(\lambda)$ — y la factorizabilidad de la probabilidad de ambos resultados dada las configuraciones de los experimentos y el estado fundamental del sistema —en otras palabras, que  $P(A, B|a, b, \lambda) = P(A|a, \lambda)P(B|b, \lambda)$ —, entonces se sigue la desigualdad (1.19). También se vio que la mecánica cuántica viola esta desigualdad. Esto implica que la mecánica cuántica viola la factorizabilidad o la independencia de ajustes. Ha habido intentos por argumentar que los resultados de la mecánica cuántica entran en conflicto con la independencia de las mediciones y no con la factorizabilidad. A esto se le ha llamado “superdeterminismo” (Ciepielewski y cols., 2020) (Myrvold y cols., 2020). No obstante, para fines de este trabajo, se supondrá que la independencia de los ajustes es válida. Esto significa que los resultados de la mecánica cuántica implican

que esta teoría no cumple con la factorizabilidad.

En este punto parece haber una contradicción entre la mecánica cuántica y la relatividad especial, puesto que el principio de causal local está escrito en términos de esta última teoría, además de que parece intuitivo que este principio sea parte de los resultados de la teoría. No obstante, no es claro que éste, de hecho, sea una condición necesaria para que una teoría sea compatible con la relatividad especial. Más aún, no es evidente cuáles son las restricciones que esta teoría le impondría a cualquier otra. En Maudlin (2011) se analizan varias posibilidades: que no se pueda transportar materia o energía más rápido que la velocidad coordinada de la luz; que no se puedan mandar señales superluminales o que no haya influencias causales que viajen más rápido que la velocidad coordinada de la luz.

De acuerdo a la reconstrucción que se hizo anteriormente, la relatividad especial es una teoría que postula que la estructura del espacio-tiempo físico es aquella del espacio-tiempo de Minkowski. También se establecieron tres postulados empíricos que sirvieron de base para enlazar este espacio geométrico con la experiencia: *la ley de la luz*, *la ley de inercia relativista* y *la hipótesis del reloj*. De éstos, se mencionó que la ley de la luz imponía una restricción a las trayectorias de cualquier objeto físico que pasara por un evento determinado, pues éste ya no podría salir del cono de luz de aquél. Esta limitación en el movimiento de los objetos no parece entrar en contradicción directa con la no-localidad cuántica, pues ésta no permite el transporte de energía y materia cuya velocidad coordinada sea mayor a la de la luz. Si suponemos la independencia de ajustes, debido al teorema de Bell y a los resultados de los experimentos de Aspect *et. al.*, cualquier teoría empíricamente adecuada para los sistemas microscópicos es necesariamente no-local. Una lectura apresurada de esto y de la relatividad especial parecería imponer grandes dificultades a la coexistencia pacífica entre aquellas teorías y esta última. No obstante, analizándolo un poco más a detalle, esto no parece ser el caso necesariamente.

### 1.4.2. Invarianza de Lorentz

Otro aparente conflicto que hay entre la cuántica estándar y la relatividad surge cuando se analiza la sucesión de estados de un sistema cuántico enredado a la luz de las



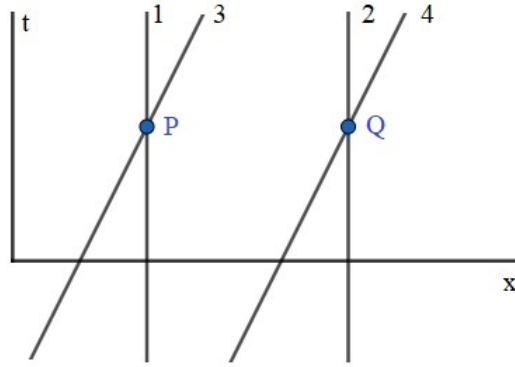


Figura 1.3: Diagrama espacio-temporal de un sistema en el que las partículas 1 y 2 están en un estado singlete; al igual que las partículas 3 y 4. Cuando las partículas 1 y 3 se tocan, en el evento  $P$ , sus *spins* invierten su dirección automáticamente. De igual manera, al chocar 2 y 4, en el evento  $Q$ , sus *spins* se invierten.

transformaciones de Lorentz. Hay ocasiones en las que no es posible deducir lo observado en un marco de referencia a través de una transformación de Lorentz (Albert, 2015). Para ejemplificar lo anterior, retomaremos dos ejemplos. El primero aparece en Albert (2015) y el segundo es propuesto por Myrvold (2002).

Consideremos un sistema de cuatro partículas de *spin*  $\frac{1}{2}$ . La partícula 1 se mueve confinada en una región espacial, acotada alrededor de un punto  $y$ , de igual manera, la partícula 2 se mueve en la región dada por la vecindad de otro punto distinto. Contrariamente, las partículas 3 y 4 tiene un movimiento rectilíneo uniforme y sus trayectorias son paralelas. Las trayectorias de las partículas 3 y 1 se intersectan en el punto espacio-temporal  $P$ , al igual que las de 2 y 4 en el punto  $Q$ . Estipulemos que, desde un marco de referencia  $K$ ,  $Q$  y  $P$  son simultáneos. Ahora supongamos que, inicialmente, las partículas 1 y 2 están en un estado singlete, al igual que las partículas 3 y 4. Es decir, que:

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2) \quad (1.27)$$

y

$$|\psi\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_3 \otimes |\downarrow\rangle_4 - |\downarrow\rangle_3 \otimes |\uparrow\rangle_4) \quad (1.28)$$

Ahora consideremos dos dinámicas distintas. En la primera, tenemos el caso en el que el sistema evoluciona libremente desde  $t = -\infty$  hasta  $t = \infty$ . En ésta, el sistema siempre

permanecerá en el mismo estado.

En la segunda, supongamos que el contacto de las partículas las hace cambiar de *spin*. Así, se dará la siguiente evolución cuando las partículas se toquen:

$$|\uparrow\rangle_i \otimes |\downarrow\rangle_j \rightarrow |\downarrow\rangle_i \otimes |\uparrow\rangle_j;$$

$$|\downarrow\rangle_i \otimes |\uparrow\rangle_j \rightarrow |\uparrow\rangle_i \otimes |\downarrow\rangle_j.$$

Si suponemos que  $P$  y  $Q$  son simultáneos, entonces, en esta dinámica, el estado total del sistema,  $|\psi\rangle_{12} \otimes |\psi\rangle_{34}$ , seguirá siendo el mismo desde  $t = -\infty$  hasta  $t = \infty$ . Esto significa que, desde este marco de referencia, el sistema se comportará de la misma manera en ambas dinámicas.

Ahora bien, vimos anteriormente que la simultaneidad es una noción coordinada y que depende del marco de referencia. Eventos que para un marco de referencia son simultáneos, en general, para cualquier otro no lo serán. Si cambiamos el marco de referencia, ya no es el caso que, en ambas dinámicas, se presente la misma historia de estados del sistema. Sea  $K'$  un marco de referencia en el que  $P$  sucede antes que  $Q$ . Desde éste, bajo la primera dinámica, el estado del sistema será el mismo para todo tiempo, pues evolucionará libremente. No obstante, si consideramos el caso en donde el *spin* cambia al momento de la colisión, entonces la historia del sistema ya no será la misma. Esto se debe a que el sistema se encontrará en el estado  $|\psi\rangle_{14} \otimes |\psi\rangle_{23}$  en el intervalo de tiempo que va desde que ocurre  $P$  hasta que sucede  $Q$ . El caso en el que sucede primero  $Q$  y luego  $P$  es análogo.

En suma, desde el marco de referencia  $K$ , el sistema tendrá la misma historia de estados cuánticos independientemente de ambas dinámicas, mientras que, desde  $K'$ , los estados que tomará el sistema serán distintos dependiendo de la dinámica que sea el caso. De aquí se pueden sacar algunas conclusiones. Para empezar, no es posible deducir la historia de estados del sistema de un determinado marco de referencia desde cualquier otro meramente a través de una transformación del espacio-tiempo. Esto se desprende del hecho de que se necesitaría que la transformación mapeara la misma historia de  $K$  a dos distintas en  $K'$  dependiendo de la dinámica del sistema.

Como veremos más adelante, Myrvold (2002) ha ofrecido una propuesta para poder realizar dicha deducción. Sin embargo, la diferencia con el contexto clásico radica en que es necesario tomar en cuenta la dinámica del sistema para poder hacer dicha transformación (Myrvold, 2016b).

Veamos otro ejemplo, pero ahora tomando en cuenta el colapso de la función de onda debido a las mediciones. Supongamos que tenemos un par de partículas de *spin*  $\frac{1}{2}$  en un estado singulete, de tal forma que podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 - |z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2). \quad (1.29)$$

Pensemos que ambas partículas se distancian, de tal forma que la partícula 1 se encuentra en la región  $A$  y la partícula 2 en la región  $B$ , y que las mediciones de los *spins* se hacen con separación tipo espacio en ambas partículas. Supongamos que, desde el marco de referencia del laboratorio, ambas mediciones se hacen simultáneamente. En la región  $A$ , se mide el *spin* de la partícula 1 en la dirección  $\hat{x}$ , mientras que en la región  $B$  se mide el *spin* en la dirección  $\hat{z}$ ; resultando ambas mediciones en  $+1$ .

Ahora bien, definamos los marcos  $K$  y  $K'$ . En el primero, la medición en  $A$  se hace antes que la medición en  $B$  y en el segundo el orden es el inverso.

De tal suerte que la historia del sistema, según  $K$ , puede verse de la siguiente manera: la partícula 1, al tiempo  $t_1$ , llega al aparato de medición estando enredada con la partícula 2. La medición del *spin* a lo largo de  $\hat{x}$  hace que el estado del sistema compuesto colapse a  $|x+\rangle_1 \otimes |x-\rangle_2$ . Posteriormente, la partícula 2, sin estar enredada, al tiempo  $t_2$ , llega al aparato de medición en el estado  $|x-\rangle_2$ , en donde el resultado del experimento es  $|z+\rangle_2$ .

Por el contrario, desde  $K'$ , la partícula 2 llega al aparato, al tiempo  $t'_1$ , enredada con la partícula 1. La medición a lo largo de  $\hat{z}$  colapsa el sistema al estado  $|z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2$ . La partícula 1, sin estar enredada, al tiempo  $t'_2$ , llega al aparato de medición en el estado  $|z-\rangle_1$ , y el resultado del experimento es  $|x+\rangle_1$ .

Desde  $K$ , la partícula 2 se encuentra en el estado  $|x-\rangle_2$  en el intervalo de tiempo que va de  $t_1$  a  $t_2$ . No obstante, desde  $K'$ , la partícula nunca se encuentra en dicho estado. De manera análoga, desde  $K'$ , la partícula 1 adquiere el estado  $|z-\rangle_1$  en el

intervalo que va de  $t'_1$  a  $t'_2$ , algo que jamás se reporta desde  $K$ .

El fenómeno que es ejemplificado por ambos casos tiene como consecuencia que la mecánica cuántica no sea narrable. Para Albert (2015), un mundo es narrable si es posible decir todo aquello que se puede decir de él en una sucesión temporal de situaciones globales físicas e instantáneas. De esa manera, la mecánica newtoniana es únicamente narrable, puesto que, debido a que el tiempo es absoluto en esta teoría, es posible presentar todo lo que se puede decir de una única manera. Por otro lado, la electrodinámica relativista clásica ya no es únicamente narrable, pero sí es múltiplemente narrable, pues hay distintas formas de foliar el espacio-tiempo. La dificultad que nace de explorar la mecánica cuántica en un contexto relativista es que, bajo la definición de Albert, ésta ya no es narrable. Es decir, que todo lo que hay que decir sobre el mundo cuántico relativista no se puede presentar en una sucesión de especificaciones globales físicas. Cualquier intento de lograr esto resultará en que los valores de expectación de propiedades no-locales que son simultáneas desde un marco de referencia, estarán indefinidos en cualquier otro marco en donde no lo sean. Según Albert, para presentar todo aquello que se puede decir desde una mecánica cuántica relativista, es necesario especificar, por separado, el estado cuántico del mundo en cada hipersuperficie con separación tipo espacio. Cabe notar que la noción de “presentar todo aquello que se puede decir” depende de cómo se entienda el estado instantáneo del mundo. Para Albert, es simplemente una especificación de la situación física del mundo dado un instante. Sin embargo, ésta noción podría ser otra, de tal manera que la mecánica cuántica relativista sí fuera narrable —por ejemplo, podría tomarse en cuenta la dinámica del sistema como parte del estado instantáneo del mundo. De igual forma, es importante destacar que la no-narratividad, tal como la define Albert, no implica, por sí misma, que haya un conflicto entre la relatividad y la mecánica cuántica. Para comenzar, en el segundo ejemplo, las probabilidades asociadas a los posibles resultados de los laboratorios son invariantes ante cambios en los marcos de referencia. Por otro lado, y como se mencionó antes, la mecánica cuántica estándar tiene el problema de la ontología. Es decir, la función de onda no tiene un referente físico claro, por lo que la consistencia de las distintas descripciones de los marcos de referencia debe darse sobre una posible ontología que postulara la mecánica cuántica. El hecho de que las

historias cuánticas, descritas por la evolución de la función de onda, parezcan no ser compatibles no implica necesariamente un conflicto entre las dos teorías. Es menester dar una respuesta a la pregunta “¿qué es lo que existe según la mecánica cuántica?” para determinar las implicaciones de este comportamiento entre los distintos marcos de referencia.

En el siguiente capítulo se presentará la propuesta de Myrvold (2002). En ésta, se propone una manera en la que la historia cuántica vista desde un sistema de referencia de hecho determina la historia para cualquier otro observador. Sin embargo, estas transformaciones siguen teniendo que tomar en cuenta la dinámica, como vimos anteriormente. Se hará énfasis en que es menester definir una ontología para la función de onda para evaluar la verdadera compatibilidad entre las historias vistas desde distintos marcos de referencia.

## Capítulo 2

# Coexistencia pacífica

En el capítulo anterior, se definieron las nociones fundamentales de la mecánica cuántica estándar y de la relatividad especial, así como algunas dificultades conceptuales que aparecen al considerar sistemas cuánticos en un espacio-tiempo relativista. Por un lado, se vio que la teoría cuántica viola el principio de causalidad local. Por otro, se expusieron un par de sistemas cuyas historias cuánticas, definidas desde distintos marcos de referencia, son incompatibles. Más aún, se arguyó que, dada la historia cuántica, definida desde un marco de referencia, no es posible deducir ésta sobre algún otro marco aplicando únicamente una transformación de Lorentz. Es decir, las historias de los estados cuánticos están subdeterminadas. De esto se desprende, también, que la mecánica cuántica no sea narrable —en el sentido definido por Albert— en un contexto relativista.

En este capítulo, se retomará un artículo Myrvold (2002), en donde se hace patente que la historia de un sistema cuántico en un marco de referencia sí permite deducir la historia en cualquier otro marco, aunque es necesario tomar en cuenta la dinámica de los sistemas. No obstante, se verá que esto no es suficiente para poder apuntar hacia una compatibilidad entre la teoría cuántica y la relatividad. Para lograr lo anterior, es menester establecer una ontología concreta que sea invariante de Lorentz. Esto no se puede hacer desde la versión estándar de la cuántica, pues ésta no establece qué es lo que existe a nivel fundamental. Sin embargo, teorías del colapso objetivo, que se verán en el siguiente capítulo, sí son susceptibles de proponer una ontología concreta con esa característica.

## 2.1. La propuesta de Myrvold

Consideremos dos sistemas cuánticos,  $S_1$  y  $S_2$ , que están confinados, respectivamente, en las regiones  $A$  y  $B$ , las cuales son pequeñas en comparación con la distancia que hay entre ellas. Llamemos  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  los espacios de Hilbert correspondientes a dichos sistemas. De la misma forma, sean  $\bar{x}_1(t)$  y  $\bar{x}_2(t)$  sus posiciones al tiempo  $t$ . Como ya se vio, el sistema compuesto,  $S$ , tendrá asociado el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Pensemos, por ahora, que el estado del sistema compuesto  $|\psi(t)\rangle_{12}$  es un estado separable, por lo que existen  $|u(t)\rangle \in \mathcal{H}_1$  y  $|v(t)\rangle \in \mathcal{H}_2$  tal que:

$$|\psi(t)\rangle_{12} = |v(t)\rangle_1 \otimes |u(t)\rangle_2. \quad (2.1)$$

Ahora bien, recordemos que las transformaciones entre marcos de referencia sobre el plano  $tx$  están dadas por las ecuaciones (1.13)-(1.16). Representemos estos *boosts* como transformaciones unitarias  $\Lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^1$ . Así, si  $\Lambda_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  y  $\Lambda_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ , entonces la transformación del sistema compuesto estará dada por  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ . De aquí que, habiéndole dado el *boost* a  $|\psi(t)\rangle_{12}$ , se obtenga el siguiente estado para cualquier tiempo  $t$ :

$$|\psi'\rangle_{12} = \Lambda_1 |u(t)\rangle_1 \otimes \Lambda_2 |v(t)\rangle_1 = |u'(t_1(t'))\rangle_1 \otimes |v'(t_2(t'))\rangle_2 \quad (2.2)$$

Aquí se hace patente que, desde el marco de referencia original,  $\Sigma$ , el sistema compuesto se encuentra en el estado  $|u(t)\rangle_1 \otimes |v(t)\rangle_2$  al tiempo  $t$ , mientras que, desde  $\Sigma'$ ,  $S_1$  se encontrará en  $|u'\rangle$  al tiempo  $t_1(t')$  y  $S_2$  en  $|v'\rangle$  en un tiempo distinto  $t_2(t')$ . Esto es la formalización de que sucesos del sistema compuesto que son simultáneos desde un marco de referencia, dado un *boost*, se transformarán en sucesos sobre los estados de los subsistemas a diferentes tiempos.

El cambio en la simultaneidad fue clave para el argumento de Albert, debido a que

---

<sup>1</sup>Esto es posible gracias al teorema de Wigner. Las transformaciones de Lorentz que se definieron en el capítulo 1 actúan en el espacio de Minkowski, pero, en el contexto de la teoría cuántica, los estados son representados por vectores en el espacio de Hilbert. Es por ello que la traducción entre transformaciones sobre  $\mathcal{M}$  a operadores en  $\mathcal{H}$  no es inmediata. El teorema de Wigner nos asegura que las simetrías físicas pueden ser representadas como operadores unitarios en el espacio de Hilbert. En particular, el grupo de Poincare y las transformaciones de Lorentz pueden representarse de esta manera. (Wigner, 1959, pp. 233-235).

la perturbación del sistema compuesto dependía de que los pares de partículas chocaran en el mismo instante. Ahora bien, el hecho de que no se perturbara en un marco de referencia y en el resto sí dependió también de que las partículas se encontraran en estados enredados.

Myrvold da un ejemplo concreto en donde puede verse cómo opera esta dependencia con el enredamiento. Para ello, primero veamos qué pasa en el caso separable. Supongamos que tenemos un par de partículas cargadas de *spin*  $\frac{1}{2}$ , en las regiones  $A$  y  $B$  respectivamente, que se encuentran en el estado  $|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2$  y que están en reposo con respecto al marco de referencia  $\Sigma$ . Consideremos que, a cierto tiempo  $\tau$ , se accionan un par de campos magnéticos en la dirección  $\hat{z}$  con magnitud  $\mathcal{B}$ , acotados a las regiones de las partículas. Teniendo esto en mente, y anulando todos los grados de libertad con excepción del *spin*, el hamiltoniano adoptará la siguiente forma:

$$\hat{H} = -\hbar\omega \left( \hat{\sigma}_{1z} \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_{2z} \right), \quad (2.3)$$

en donde  $\omega = -\frac{e\mathcal{B}}{2mc}$ . Suponiendo que el campo magnético es constante, entonces el operador de evolución temporal estará dado por  $U(t) = e^{\frac{H(t-\tau)}{-i\hbar}}$ . De tal suerte que la evolución del sistema compuesto estará dado por:

$$U(t) |z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 = e^{\frac{\mathcal{H}(t-\tau)}{-i\hbar}} (|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2) \quad (2.4)$$

$$= e^{i\omega(t-\tau)} |z+\rangle_1 \otimes e^{-i\omega(t-\tau)} |z-\rangle_2 \quad (2.5)$$

$$= e^{i\omega(t-\tau)} e^{-i\omega(t-\tau)} |z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 \quad (2.6)$$

$$= |z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2. \quad (2.7)$$

El paso de la ecuación (2.5) a la (2.6) fue posible debido a que el producto tensorial cumple con que  $a|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes a|\phi\rangle$ .<sup>2</sup>

De tal suerte que si los campos magnéticos se accionan al mismo tiempo en

---

<sup>2</sup>Esto se desprende de la definición de producto tensorial que se dio en el capítulo 1. Recordemos que  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \varphi(\psi, \phi)$ , en donde  $\varphi$  es una transformación bilineal que va del producto cartesiano de los espacios de Hilbert asociados a  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  a otro espacio de Hilbert. Ahora bien, como  $\varphi$  es bilineal, entonces es lineal por entradas. De aquí que:  $(a|\psi\rangle) \otimes |\phi\rangle = \varphi(a\psi, \phi) = a\varphi(\psi, \phi) = \varphi(\psi, a\phi) = |\psi\rangle \otimes (a|\phi\rangle)$ .



ambos subsistemas, entonces el sistema compuesto quedará imperturbado. Si éstos comenzaran a actuar a diferentes tiempos,  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , para cada subsistema, entonces la evolución temporal sería:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 \quad (2.8)$$

$$= e^{i\omega(t-\tau_1)} |z+\rangle_1 \otimes e^{-i\omega(t-\tau_2)} |z-\rangle_2 \quad (2.9)$$

$$= e^{i\omega(\tau_2-\tau_1)} |z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2. \quad (2.10)$$

Aquí, (2.7) y (2.10) sólo difieren en una fase compleja, por lo que el sistema compuesto quedaría, igualmente, imperturbado. Esto implica que tanto en un marco de referencia en el que se accionan los campos simultáneamente como en uno donde no, el sistema completo permanecerá en el mismo estado.

Ahora bien, esta imperturbabilidad desaparece cuando tomamos en cuenta estados enredados. Pensemos en el mismo caso que acabamos de discutir, pero considerando que el estado inicial del sistema compuesto es un estado singulete. Es decir, que  $|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 - |z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2)$ . En este caso, el sistema será perturbado si el campo magnético se acciona a diferentes tiempos para cada subsistema. Consideremos que un campo se prende en la región  $A$  al tiempo  $\tau_1$  y que en la región  $B$  se acciona otro al tiempo  $\tau_2$ . De tal suerte que la evolución temporal está dada por la siguiente expresión:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi\rangle_{12} \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega(t-\tau_1)} |z+\rangle_1 \otimes e^{i\omega(t-\tau_2)} |z-\rangle_2 - e^{i\omega(t-\tau_1)} |z-\rangle_1 \otimes e^{-i\omega(t-\tau_2)} |z+\rangle_2) \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\omega(\tau_2-\tau_1)} |z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 - e^{-i\omega(\tau_2-\tau_1)} |z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2). \quad (2.13)$$

Así, si  $\tau_1 = \tau_2$ , entonces las exponenciales se reducirían a la unidad y el sistema quedaría imperturbado. No obstante, si estos tiempos son distintos, entonces hay una probabilidad distinta de cero de que los resultados de la medición de los *spins* en

la dirección  $\hat{x}$  no sean opuestos, por lo que el estado dado por (2.13) ya no es un singulete. Lo anterior significa que el sistema fue perturbado por la desincronización de los campos magnéticos aplicados a los subsistemas.

Aquí se hace patente que, en sistemas como éste, si los campos magnéticos, desde un marco de referencia  $\Sigma$ , son encendidos simultáneamente, entonces el estado quedará imperturbado. Sin embargo, para cualquier otro marco, digamos  $\Sigma'$ , los campos no serán accionados simultáneamente y, por ende, el sistema será perturbado. Desde  $\Sigma$ , la probabilidad de que, al medir, el resultado de los *spins* en la dirección  $\hat{x}$  sean coincidentes es cero, mientras que desde  $\Sigma'$  esta probabilidad no es nula, pues es igual a  $\frac{1}{2}\text{sen}(\omega(\tau_1 - \tau_2))$ .

Estamos ante una situación análoga al ejemplo de Albert. Si hubiéramos dejado evolucionar el sistema sin accionar los campos magnéticos, entonces, al cambiar de marco de referencia, el estado del sistema hubiera quedado invariante. No obstante, en el caso en el que se prenden los campos magnéticos simultáneamente desde un marco de referencia, al cambiar a otro en donde éstos no se accionan simultáneamente, el estado del sistema ya no será un singulete. Esto parece implicar que se necesitan dos transformaciones de Lorentz del sistema original, cada una aplicándose según la dinámica que rijan al sistema.

Veremos, a continuación, que esto no es así. Empero, se verá que para que sea posible pasar de un marco a otro, es necesario tomar en cuenta la evolución temporal del sistema y que ésta cumpla con que  $U(t) = U_1(t) \otimes U_2(t)$ . Para hamiltonianos que no son la suma de los hamiltonianos locales, es decir, si  $H \neq H_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes H_2$ , lo siguiente no es válido.

Supongamos que tenemos un sistema compuesto de dos subsistemas localizados, respectivamente, en  $\bar{x}_1(t)$  y  $\bar{x}_2(t)$ . Inicialmente, en  $t = 0$ , tenemos que el sistema está dado por:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_k c_k |u_k\rangle \otimes |v_k\rangle. \quad (2.14)$$

Tomando en cuenta que la evolución del sistema compuesto es  $U(t) = U_1(t) \otimes U_2(t)$ , entonces el sistema se desarrollará a través del tiempo como:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle = \sum_k c_k U_1(t) |u_k\rangle \otimes U_2(t) |v_k\rangle. \quad (2.15)$$

Al aplicar un *boost* de Lorentz, el cual, como ya vimos, se puede escribir como  $\Lambda = \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ , tenemos que:

$$\Lambda U(t) |\psi(0)\rangle = \sum_k c_k \Lambda_1 U_1(t) |u_k\rangle \otimes \Lambda_2 U_2(t) |v_k\rangle \quad (2.16)$$

Asimismo, el estado en una hipersuperficie de simultaneidad de  $\Sigma'$  tiene la siguiente forma:

$$|\psi'(t')\rangle = \sum_k c_k \Lambda_1 U_1(t_1(t')) |u_k\rangle \otimes \Lambda_2 U_2(t_2(t')) |v_k\rangle \quad (2.17)$$

$$= \Lambda_1 U_1(t_1(t')) \otimes \Lambda_2 U_2(t_2(t')) |\psi(0)\rangle. \quad (2.18)$$

Esto implica que, para poder pasar del estado definido desde  $\Sigma$  a lo largo de una hipersuperficie de simultaneidad de  $\Sigma$  al estado definido desde  $\Sigma'$  a lo largo de una hipersuperficie de  $\Sigma'$ , es necesario tomar en cuenta tanto la transformación entre los marcos de referencia como la evolución temporal del estado que va de un hiperplano al otro. La covarianza del estado cuántico se da gracias a que, como se pidió que  $U(t) = U_1(t) \otimes U_2(t)$ , la evolución del sistema completo puede verse como evoluciones localizadas en cada subsistema.

La ecuación (2.18) establece la forma de pasar de un marco de referencia a otro cuando se toma en cuenta la evolución temporal del sistema —y se presupone que ésta está localizada para ambos subsistemas. De manera similar, Myrvold formaliza qué sucede cuando la evolución no es unitaria, sino de colapso.

Supongamos que tenemos un par de partículas de *spin*  $\frac{1}{2}$ , cada una de ellas localizada, respectivamente, en las regiones  $A$  y  $B$ . Consideremos, de igual manera, que su estado inicial es  $|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2$ . Al hacer una medición del *spin* de la partícula 2, en la dirección  $\hat{x}$  y cuyo resultado es positivo, colapsamos el sistema al estado  $|z+\rangle_1 \otimes |x+\rangle_2$ . Sea  $P$  un punto en la línea de mundo de la partícula 1 que tiene separación tipo

espacio con el evento de medición acaecido en la partícula 2. A este último llamémosle  $M$ . El hecho de que  $P$  y  $M$  tengan separación tipo espacio implica que existen un par de marcos de referencia,  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , que diferirán sobre el orden temporal de  $P$  y  $M$ . Consideremos que el plano de simultaneidad  $\sigma_p$  que pasa por  $P$ , definido desde  $\Sigma$ , está en el pasado de  $M$ . Análogamente, supongamos  $\sigma'_p$ , que es el plano de simultaneidad que pasa por  $P$  definido desde  $\Sigma'$ , se encuentra en el futuro de  $M$ . Esto significa que, en  $\sigma_p$ , el estado cuántico del sistema estará dado por  $|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2$ , mientras que, en  $\sigma'_p$ , será  $|z'+\rangle_1 \otimes |x'+\rangle$ .

Ahora bien, consideremos exactamente el mismo escenario, sólo que tomando como el estado inicial a  $|z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2$ . En este caso, desde  $\sigma_p$  el estado será  $|z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2$ , mientras que, desde  $\sigma'_p$ , será  $|z'-\rangle_1 \otimes |x'+\rangle_2$ .

Ahora combinemos ambos escenarios tomando su superposición:

$$|\psi\rangle = \alpha |z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 + \beta |z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2. \quad (2.19)$$

Si suponemos que se hace la misma medición y se obtiene el mismo resultado, entonces, en la superficie  $\sigma_p$ , tenemos que el estado será idéntico al inicial. Esto se desprende de que este hiperplano, por construcción, se encuentra en el pasado de la medición. No obstante, desde  $\sigma'_p$ , la medición de la partícula dos ya se efectuó, por lo que el estado del sistema será:

$$|\psi'\rangle = \alpha |z'+\rangle_1 \otimes ({}_2\langle x' + |z'-\rangle_2) |x'+\rangle_2 + \beta |z'-\rangle_1 \otimes ({}_2\langle x' + |z'+\rangle_2) |x'+\rangle_2. \quad (2.20)$$

Utilizando la distributividad sobre el producto tensorial<sup>3</sup>, obtenemos lo siguiente:

---

<sup>3</sup>Esta propiedad también se desprende de la bilinealidad de la definición de producto tensorial que se dio en el primer capítulo. En efecto, sean  $|u\rangle$ ,  $|v\rangle$  en  $\mathcal{H}_1$  y  $|w\rangle$  en  $\mathcal{H}_2$ . Así, tenemos que:  $|u\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w\rangle = \varphi(u, w) + \varphi(v, w) = \varphi(u + v, w) = (|u\rangle + |v\rangle) \otimes |w\rangle$ .

$$|\psi'\rangle = \alpha({}_2\langle x' + |z'-\rangle_2) |z'+\rangle_1 \otimes |x'+\rangle_2 + \beta({}_2\langle x' + |z'+\rangle_2) |z'-\rangle_1 \otimes |x'+\rangle_2 \quad (2.21)$$

$$= (\alpha {}_2\langle x' + |z'-\rangle_2 |z'+\rangle_1 + \beta {}_2\langle x' + |z'+\rangle_2 |z'-\rangle_1) \otimes |x'+\rangle_2 \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |z'+\rangle_1 + \beta |z'-\rangle_1) \otimes |x'+\rangle_2. \quad (2.23)$$

Lo anterior significa que el cambio en el sistema compuesto se da por medio del cambio en el estado de uno de sus subsistemas, es decir, del colapso de la partícula 2. Esto implica que este tipo de dinámica, de manera similar a como se observó con la evolución unitaria, puede entenderse como cambios localizados en los subsistemas que componen al sistema total. A diferencia del primer ejemplo, en donde dependiendo del marco de referencia el sistema era o no perturbado, aquí, en  $\sigma_p$  el sistema estará en un estado enredado, mientras que en  $\sigma'_p$  éste será factorizable. Myrvold llama a este comportamiento *la relatividad de enredamiento*.

En general, Myrvold muestra que la evolución del colapso no necesariamente establece un marco de referencia privilegiado y que, al igual que con la evolución unitaria, es posible deducir la historia de un sistema definida en un marco desde cualquier otro. No obstante, como en el caso anterior, es necesario ver el colapso como algo que afecta el estado completo del sistema únicamente a través de ser un cambio localizado en alguno de los subsistemas.

Representemos la evolución del colapso como un operador de un solo parámetro, lineal y no-unitario. Llamémosle  $E(t)$ . Este operador tendrá la siguiente regla funcional:

$$E(t) = \begin{cases} I, & \forall t(t < \tau), \\ P^{|\phi\rangle}, & \forall t(t \geq \tau). \end{cases}$$

Es decir, el operador  $E(t)$  se comportará como la identidad antes de la medición y como  $P^{|\phi\rangle}$  cuando ésta se dé, así como para cualquier tiempo posterior. El operador  $P^{|\phi\rangle}$  proyecta el estado cuántico al subespacio generado por  $|\phi\rangle$ . Como ya se mencionó en varias ocasiones, se supondrá que  $E(t) = E_1(t) \otimes E_2(t)$ .

Para ejemplificar cómo se ve la transformación para el caso de la evolución del colapso, retomemos el ejemplo que se dio al final del capítulo anterior. Supongamos

que tenemos un par de partículas de *spin*  $\frac{1}{2}$ , la primera de ellas localizada en la región  $A$  y la segunda en la región  $B$ , que se encuentran en un estado singlete:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 - |z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|x+\rangle_1 \otimes |x-\rangle_2 - |x-\rangle_1 \otimes |x+\rangle_2). \end{aligned}$$

Consideremos que se miden el *spin*, en la dirección  $\hat{x}$ , de la partícula uno y el *spin*, en la dirección  $\hat{z}$ , de la partícula 2. Pensemos que ambos resultados dan 1+. Establezcamos que estas mediciones se hacen con separación tipo espacio, de tal manera que, para un marco de referencia  $K$ , éstas ocurren simultáneamente. Sea  $\Sigma$  un marco de referencia donde primero se hizo la medición sobre la partícula 1 y, posteriormente, sobre la partícula 2, y sea  $\Sigma'$  un marco en donde este orden es el inverso.

Como vimos, las historias cuánticas vistas desde ambos marcos de referencia parecen ser contradictorias. Por un lado, desde  $\Sigma$ , se tiene que la partícula 1 llega al aparato de medición en el estado  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|x+\rangle_1 \otimes |x-\rangle_2 - |x-\rangle_1 \otimes |x+\rangle_2)$  y, al medirse, el estado del sistema colapsa a  $|x+\rangle_1 \otimes |x-\rangle_2$ . Posteriormente, la partícula 2 llega al aparato, sin estar enredada, en el estado  $|x-\rangle_2$ . El resultado de esta medición es  $|z+\rangle_2$ .

Contrariamente, la historia desde  $\Sigma'$  es muy distinta. La partícula 2 es la que llega estando enredada y es la medición sobre ésta la que colapsa al sistema compuesto a  $|z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2$ . Así, la partícula 1 llegará sin estar enredada, en el estado  $|z-\rangle_1$ , cuya medición resultará en  $|x+\rangle_1$ .

Podemos observar que ambos marcos de referencia difieren en cuál es la medición que desenreda a las partículas. Por otro lado, desde  $\Sigma$ , en el lapso de tiempo entre las mediciones, el sistema se encuentra en el estado  $|x+\rangle_1 \otimes |x-\rangle_2$ , mientras que desde  $\Sigma'$ , el sistema nunca adquiere ese estado. De igual manera, desde  $\Sigma'$ , en el tiempo que va de la primer medición a la segunda, el sistema adquiere el estado  $|z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2$ , el cual, desde  $\Sigma$ , nunca acaece.

Con lo anterior, veamos cómo se ven estas historias desde el modelo de colapso anteriormente discutido. Supongamos que, desde  $\Sigma$ , la medición en la región  $A$  se realiza al tiempo  $t_1$ , y aquélla en la región  $B$ , al tiempo  $t_2$ . Así, la evolución del estado

se verá de la siguiente forma:

$$|\psi(t)\rangle = E(t) |\psi\rangle = E_1(t) \otimes E_2(t) |\psi\rangle, \quad (2.24)$$

en donde:

$$E_1(t) = \begin{cases} I_1, & \forall t \text{ tal que } (t < t_1), \\ P^{|x^+\rangle}_1, & \forall t \text{ tal que } (t \geq t_1). \end{cases}$$

y

$$E_2(t) = \begin{cases} I_2, & \forall t \text{ tal que } (t < t_2), \\ P^{|z^+\rangle}_2, & \forall t \text{ tal que } (t \geq t_2). \end{cases}$$

Análogamente, desde  $\Sigma'$ , si al tiempo  $t'_1$  se hace la medición en B y, en  $t'_2$ , se realiza la medición en A, entonces la evolución puede verse de la siguiente manera:

$$|\psi'(t')\rangle = E(t') |\psi'\rangle = E_1(t') \otimes E_2(t') |\psi'\rangle \quad (2.25)$$

con

$$E'_1(t') = \begin{cases} I_1, & \forall t' \text{ tal que } (t' < t'_2), \\ P^{|x'^+\rangle}_1, & \forall t' \text{ tal que } (t' \geq t'_2). \end{cases}$$

y

$$E'_2(t') = \begin{cases} I_2, & \forall t' \text{ tal que } (t' < t'_1), \\ P^{|z'^+\rangle}_2, & \forall t' \text{ tal que } (t' \geq t'_1). \end{cases}$$

Aquí, los operadores primados son la transformación de Lorentz de los operadores definidos desde  $\Sigma$ :  $E'_i = \Lambda_i E_i(t_i(t')) \Lambda_i^\dagger$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>El símbolo  $\dagger$  denota al operador adjunto del operador original. Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno:  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow F$ . Si  $A: V \rightarrow V$ , entonces existe un único operador  $A^\dagger: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , tal que  $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^\dagger(y) \rangle$  (Friedberg y cols., 2014, p. 358). Al operador  $A^\dagger$  se le conoce como el operador adjunto de  $A$ . En el contexto de los espacios de Hilbert con el campo en los números complejos, desde la notación de dirac, el operador adjunto de  $A$  se define, comúnmente, como aquél que cumple la siguiente ecuación:  $\langle \phi | A | \psi \rangle = \langle \psi | A^\dagger | \phi \rangle^*$ . Aquí, el símbolo  $*$  refiere al complejo conjugado.

Ahora bien, definamos las coordenadas, en  $\Sigma$ ,  $t_\alpha$ ,  $t_\beta$  y  $t_\gamma$ , tal que  $t_\alpha < t_1 < t_\beta < t_2 < t_\gamma$ . A su vez, consideremos las hipersuperficies de simultaneidad definidas por ellas: 1) el hiperplano de simultaneidad  $\sigma_{t_\alpha}$  que se encuentra en el pasado de ambas mediciones; 2) la hipersuperficie  $\sigma_{t_\beta}$  que está en el futuro de la medición en  $A$ , pero en el pasado de aquélla realizada en  $B$ , y 3)  $\sigma_{t_\gamma}$ , aquél hiperplano que se encuentra en el futuro de ambas mediciones.

Así, antes de cualquiera de las mediciones, el estado del sistema es:

$$E(t_\alpha) |\psi\rangle = E_1(t_\alpha) \otimes E_2(t_\alpha) |\psi\rangle = I_1 \otimes I_2 |\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (2.26)$$

Posteriormente, sobre  $\sigma_{t_\beta}$ , el estado habrá colapsado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E(t_\beta) |\psi\rangle &= E_1(t_\beta) \otimes E_2(t_\beta) |\psi(0)\rangle \\ &= (P^{|x^+\rangle_1} \otimes I_2) |\psi(0)\rangle \\ &= P^{|x^+\rangle_1} |x^+\rangle_1 \otimes |x^-\rangle_2 - P^{|x^+\rangle_1} |x^-\rangle_1 \otimes |x^+\rangle_2 \\ &= |x^+\rangle_1 \otimes |x^-\rangle_2. \end{aligned}$$

Finalmente, en  $\sigma_{t_\gamma}$ , el estado será:

$$\begin{aligned} E(t_\gamma) |\psi\rangle &= E_1(t_\gamma) \otimes E_2(t_\gamma) |\psi(0)\rangle \\ &= (P^{|x^+\rangle_1} \otimes P^{|z^+\rangle_2}) |\psi(0)\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |x^+\rangle_1 \otimes |z^+\rangle_2. \end{aligned}$$

Si, análogamente, definimos  $t'_a < t'_1 < t'_b < t'_2 < t'_c$ , entonces, en  $\sigma_{t'_a}$  tendremos que el estado será:

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= |z'^+\rangle_1 \otimes |z'^-\rangle_2 - |z'^-\rangle_1 \otimes |z'^+\rangle_2 \\ &= E'_1(t'_a) \otimes E'_2(t'_a) |\psi(0)\rangle. \end{aligned}$$



Sobre  $\sigma_{t'_b}$ :

$$\begin{aligned} E'_1(t'_b) \otimes E_2(t'_b) |\psi'(0)\rangle &= (I_1 \otimes P^{|z'+\rangle}) |\psi'(0)\rangle \\ &= |z'+\rangle_1 \otimes P^{|z'+\rangle_2} |z'-\rangle_2 - |z'-\rangle_1 \otimes P^{|z'+\rangle_2} |z'+\rangle_2 \\ &= -|z'-\rangle_1 \otimes |z'+\rangle_2. \end{aligned}$$

Y, finalmente, en  $\sigma_{t'_c}$ :

$$\begin{aligned} E'_1(t'_c) \otimes E_2(t'_c) |\psi'(0)\rangle &= (P^{|x'+\rangle_1} \otimes P^{|z'+\rangle_2}) |\psi'(0)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |x'+\rangle_1 \otimes |z'+\rangle_2. \end{aligned}$$

Así, al igual que la ecuación (2.18) muestra cómo se puede transformar una historia cuántica definida desde un marco a algún otro, también es posible hacer lo mismo para la evolución del colapso. Si tenemos en cuenta ambas evoluciones, podemos llegar a una expresión general para poder pasar a distintos marcos de referencia:

$$|\psi'(t)\rangle = \Lambda_1 E_1 U_1(t_1(t')) \otimes \Lambda_2 E_2 U_2(t_2(t')) |\psi(0)\rangle. \quad (2.27)$$

Así, la ecuación (2.27) proporciona una manera de deducir, para marcos de referencia distintos, la historia de un sistema cuántico definido desde otro marco. Esta propuesta que Myrvold (2002) nos presenta se apoya en varios puntos, que ya se han mencionado, que recapitularemos brevemente. En primer lugar, que es necesario tomar en cuenta la dinámica del sistema para poder hacer el cambio en los marcos de referencia sin que haya subdeterminación en las historias cuánticas. En segundo lugar, que tanto la evolución unitaria como la de colapso deben ser *localizables*. Es decir, se presupone que la evolución que sufrirá el sistema compuesto se da a través de cambios localizados en los subsistemas. Matemáticamente, esto quiere decir que  $U = U_1 \otimes U_2$  y que  $E = E_1 \otimes E_2$ . Esto no debe confundirse con el principio de causalidad local que se discutió en el sección pasada —por ello utilizo la palabra *localizabilidad* en lugar de localidad. La no-localidad estipulada por el teorema de Bell tiene que ver con que, en

sistemas enredados, hay una acción entre subsistemas que se encuentran separados. La localizabilidad es simplemente ver que esta interacción —o cambio global— se puede asociar a la modificación localizada en alguno de los dos subsistemas. La localizabilidad no entra en contradicción con la no-localidad de Bell. De igual manera, es importante mencionar que la presuposición de la localizabilidad no restringe el alcance de la conclusión, ya que, en general, una vez que los subsistemas se encuentran separados, el hamiltoniano total será la suma directa de los hamiltonianos de los subsistemas, pues éstos sólo actuarán entre sí a través del producto tensorial.

Es menester mencionar que aunque se haya propuesto que las evoluciones estuvieran localizadas, los estados enredados siguen siendo no-separables. Es decir, el estado de un sistema extendido en el espacio —en nuestro caso, en dos regiones disjuntas— no siempre puede escribirse como el producto tensorial de dos estados locales.

Por último, es importante notar que los estados cuánticos se definen sobre superficies de simultaneidad. En la mecánica cuántica estándar, como ya se vio, las funciones de onda están asociadas a un tiempo en específico, no a los puntos espacio-temporales. En ese sentido, al pasar de un contexto estándar al relativista, las funciones de onda también son asociadas, dado un marco de referencia, a una coordenada  $t$  constante. Sin embargo, en este contexto, lo anterior implica asociar el estado cuántico a toda una hipersuperficie de simultaneidad. Y, como no hay una sola manera de foliar el espacio-tiempo, entonces el estado cuántico inevitablemente variará dependiendo del marco de referencia. Más aún, las probabilidades variarán dependiendo de la hipersuperficie desde la cual se estén calculando.

Para enfatizar en lo anterior, supongamos que tenemos dos superficies de simultaneidad  $\tau$  y  $\sigma$ , de tal manera que éstas ocupan los mismos puntos espacio-temporales, exceptuando la frontera de una región  $\delta$  —véase la figura 2.1. Supongamos que  $\alpha$  es una región acotada que comparten  $\tau$  y  $\sigma$ .



Figura 2.1: Dos hipersuperficies  $\tau$  y  $\sigma$  que difieren únicamente en la frontera de la región espacio temporal  $\delta$ . Aquí,  $\alpha$  es una región acotada compartida por ambas hipersuperficies.

Pensemos que un par de partículas se encuentran en un estado singulete desde la hipersuperficie  $\tau$ :  $|\psi\rangle_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\hat{x}+\rangle_1 \otimes |\hat{x}-\rangle_2 - |\hat{x}-\rangle_1 \otimes |\hat{x}+\rangle_2)$ . Supongamos que la partícula 1 está en  $\alpha$  y la línea de mundo de la partícula 2 pasa por la región  $\delta$ . Establezcamos que se mide del *spin* en la región delta de la partícula 2, de tal manera que se obtiene un resultado definido de este observable en  $\sigma$ . Digamos que éste fue  $|\hat{x}+\rangle_2$ . Ahora preguntémonos por las probabilidades de obtener  $|x-\rangle_1$  para la partícula que se encuentra en  $\alpha$ . Si lo hacemos desde  $\tau$ , tendremos que  $P_{|x+\rangle_1}^\tau = \frac{1}{2}$ . Pero si lo hacemos desde  $\sigma$ , superficie de simultaneidad en la que ya se midió el *spin* de la otra partícula, entonces  $P_{|x+\rangle_1}^\sigma = 1$ . Ahora bien, esto sería problemático si suponemos que el *spin* es algo ontológico o que la función de onda es un *beable* local.

Debido a que la función de onda no está definida para puntos-espacio temporales particulares, sino a todo un hiperplano de simultaneidad, entonces cumple con la definición de *beable* local que se expuso en el capítulo anterior. Por otro lado, la variación de la probabilidad del *spin* podría parecer, en un principio, un problema para la coherencia conceptual de una teoría cuántica relativista. Sin embargo, sigue abierta la pregunta sobre cuál es el estado físico fundamental en la región  $\alpha$ . El modelo de Myrvold (Myrvold, 2002) que acabamos de revisar nos ofrece una manera de establecer unívocamente las historias cuánticas desde distintos marcos de referencia, pero no resuelve la dificultad conceptual de fondo. De aquí que esta receta no sea suficiente para concluir una compatibilidad entre la mecánica cuántica y la relatividad especial. Es necesario construir una ontología clara y es sobre ésta en la que recae la posible coexistencia pacífica con la teoría relativista.

## 2.2. Invarianza de Lorentz y una ontología hipotética

Antes de analizar los alcances del modelo de Myrvold en relación con la compatibilidad que pudiera tener la mecánica cuántica con la relatividad especial, es menester detenernos a estudiar cuáles son, de hecho, las restricciones que impone esta última sobre cualquier teoría que pueda ser conciliable con ella. Maudlin (2011) nos da cinco alternativas: 1) la materia y la energía no pueden viajar más rápido que la velocidad de la luz; 2) no se pueden mandar señales más rápido que la luz; 3) no existen procesos causales más rápidos que la luz; 4) no se puede transmitir información más rápido que la velocidad de la luz, y 5) la teoría debe ser invariante de Lorentz.

Si la condición que se impusiera fuera la 1) o la 2), entonces no habría ningún conflicto con la mecánica cuántica, puesto que la violación a la causalidad local no presupone un transporte superlumínico de energía o materia. De igual manera, si consideramos un sistema en el estado singulete, no es posible hacer una medición en un ala del experimento para comunicar algo al lado opuesto.

Por otro lado, vimos que el hecho de que se mida en un ala del experimento sí afecta el resultado del otro subsistema. Esto implica que de hecho hay relaciones causales superlumínicas entre los subsistemas. De tal suerte que parece violarse la condición (3). No obstante, Myrvold (2016a, 2021) sostiene que las correlaciones no-locales sean, necesariamente, una especie de acción a distancia o una influencia causal superlumínica. Remitiéndonos a la introducción del presente trabajo, si suponemos que, en las relaciones causales, necesariamente las causas preceden los efectos, entonces la relación que se da entre dos sistemas enredados cuando colapsan no tiene la forma de una influencia causal, ya que su relación es simétrica.

Por otro lado, la condición (4) parece violarse. Esto se debe a que las correlaciones cuánticas que violan las desigualdades de Bell no pueden reproducirse si no hay transferencia de “información”, ya que la medición en alguna de las partículas depende de lo que se haya medido en su pareja. En ese sentido, si tratamos a la partícula cuyo *spin* se mide primero como el transmisor y a la segunda como receptor, parece ser necesario que el primero mande, de manera instantánea, la información de haber

tenido cierto resultado a su contraparte.

No obstante todo lo anterior, me quiero centrar en el quinto aspecto. Es decir, en la posibilidad de tener una teoría cuántica invariante de Lorentz.<sup>5</sup> En relación con esto, parece que el modelo de Myrvold (2002) logra mostrar que, contrariamente a lo que afirma Albert (2015), no es el caso que las historias cuánticas de estos ejemplos sean contradictorias desde distintos marcos de referencia ni que haya una subdeterminación de éstas. Más bien, las historias, vistas desde distintos marcos de referencia, no son más que distintas maneras de dar cuenta de los mismos eventos y procesos físicos. La función de onda, definida en una hipersuperficie de simultaneidad es una cantidad invariante de Lorentz debido a que cualquier marco de referencia verá el mismo estado sobre el hiperplano en particular en el que esté definido el estado cuántico.

No obstante, hay quienes han argumentado que la dependencia sobre la hipersuperficie implica una especie de indefinición ontológica (Maudlin, 2011, p. 194). Los estados enredados, en la mecánica cuántica estándar no-relativista, presentan lo que Teller (1986) llama holismo relacional —que también se conoce como no-separabilidad. Teller afirma que hay dos tipos de propiedades: las intrínsecas y las relacionales. Las primeras son aquellas que un objeto posee con independencia de la existencia o estado del resto de los objetos, por ejemplo: la masa o el volumen. Contrariamente, las segundas son aquellas que pueden darse entre distintos objetos. Pensemos, en particular, en la relación “ser más largo que”. Esta propiedad es relacional en tanto que se define a través de un par de objetos. El hecho de que  $x$  sea más largo que  $y$  no es algo intrínseco a  $x$ , sino que sólo tiene sentido en relación con  $y$ . Sin embargo, esta propiedad sí depende de las características intrínsecas de los objetos en cuestión. Definamos las longitudes de ambos objetos como  $L(x)$  y  $L(y)$ . La propiedad relacional “ $x$  es más largo que  $y$ ” se da sólo en el caso de que  $L(x) > L(y)$ . Esto significa que la relación depende de una propiedad intrínseca a ambos objetos: sus longitudes. Así, decimos que esta relación *superviene* en características intrínsecas de los objetos que forman parte de la relación.

Ahora bien, en la mecánica cuántica, no toda propiedad relacional superviene

---

<sup>5</sup>La teoría cuántica de campos tiene un análogo a la ecuación de Schrödinger que es invariante de Lorentz. De tal suerte que los estados cuánticos se transforman de manera adecuada. No obstante, esto es mientras no se tome en cuenta el colapso. En ese sentido, si se quiere pensar en éste como algo físico real, la pregunta por una teoría cuántica con colapso invariante relativista sigue siendo relevante (Maudlin, 2011, p. 178).

en las propiedades intrínsecas de los objetos involucrados. Si tenemos un sistema en el estado singulete, sabemos que el *spin* total del sistema compuesto siempre será nulo. Es decir, la relación entre los subsistemas es tal que sus *spines* apuntarán en direcciones contrarias. No obstante, dado que es un estado enredado, también sabemos que los *spins* individuales no están definidos. En este caso, la relación no superviene en las propiedades intrínsecas de las partes. A esta característica le llamamos holismo relacional, pues parece que el todo es más que la suma de las partes.

Para Maudlin, el hecho de que el estado cuántico dependa de las hipersuperficies de simultaneidad indetermina el estado intrínseco de los sistemas cuánticos. Ya no es sólo que no esté definido para los subsistemas particulares, sino que la dependencia a todo un instante del universo hace que el estado intrínseco del sistema completo también esté indeterminado. En palabras de Maudlin:

No es sólo que haya ciertas relaciones que no supervienen en el estado intrínseco de sus partes, sino que éstas no tienen ningún estado intrínseco. No es sólo que el todo sea más que la suma de las partes, sino que las partes no pueden ser definidas sin el todo. (Maudlin, 2011, p. 194)

En efecto, ya no es únicamente que el todo esté definido con independencia del estado intrínseco de las partes, sino que es necesario que se tome en cuenta todo un instante del universo —dado un marco de referencia— para definir con precisión el estado cuántico.

Empero, la dependencia que tiene el estado cuántico a las superficies de simultaneidad no supone, necesariamente, una indefinición ontológica. Como se vio en la segunda sección del capítulo pasado, la mecánica cuántica estándar no especifica una ontología del mundo. Es decir, por sí sola, es incapaz de responder la pregunta ¿qué es lo que de hecho hay en el mundo?, puesto que el estado cuántico no parece ser, directamente, algo físico. Sin embargo, el teorema de PBR nos da razones para pensar que ésta sí refiere a algo ontológico y que no es meramente un representación de nuestras creencias o de la información que tenemos sobre el sistema. Entonces, la definición ontológica no puede recaer *ipso facto* en el estado cuántico. De tal suerte que la pregunta sobre si la dependencia sobre todo un instante del universo que tiene la función de onda implica una indefinición ontológica cede lugar a la siguiente pregunta: tomando en cuenta que el estado cuántico depende de las hipersuperficies de simulta-

neidad enteras, ¿es posible contruir una ontología concreta con base en ella? Más aún, ¿es posible construir una ontología relativista?

Ahora se ve un poco más claro el panorama, pues, aunque Myrvold haya mostrado que no hay una subdeterminación de las historias cuánticas, la problemática de fondo que podría apuntar hacia una posible compatibilidad entre la mecánica cuántica y la relatividad especial radica, más bien, en que la ontología cuántica sea o no invariante de Lorentz.

Ahondemos un poco más sobre esta cuestión utilizando los modelos ontológicos de Harrigan y Spekkens (2010). Retomemos el ejemplo del sistema en un estado singulete, en el que se mide el *spin* de la partícula 1 a lo largo de  $\hat{x}$  y el de la partícula 2 a lo largo de  $\hat{z}$ , cuyos resultados son  $|x+\rangle_1$  y  $|z+\rangle_2$  respectivamente. Sea  $\Sigma$  un marco de referencia en donde primero se mide el *spin* de la partícula 1 y luego el de la partícula 2 y sea  $\Sigma'$  en donde se invierte el orden. Sea  $\sigma_{t_b}$  la superficie de simultaneidad de  $\Sigma$  en donde ya se midió el *spin* de la partícula 1, pero aún no el de la partícula 2. De igual manera, sea  $\sigma_{t'_\beta}$ , un hiperplano de  $\Sigma'$ , en la que ya se midió el *spin* de la partícula 2, pero aún no aquél de la partícula 1.

Sabemos que los estados cuánticos  $|\psi(t_b)\rangle$  y  $|\psi'(t'_\beta)\rangle$  son distintos, pues

$$|\psi(t_b)\rangle = |x+\rangle_1 \otimes |x-\rangle_2, \quad (2.28)$$

y

$$|\psi'(t'_\beta)\rangle = -|z'-\rangle_1 \otimes |z'+\rangle_2. \quad (2.29)$$

Estos dos estados son separables. Es decir, en  $\sigma_{t_b}$ , la partícula 1 estará en el estado  $|x+\rangle_1$  y la partícula 2 en  $|x-\rangle_2$ . De igual manera, desde  $\sigma_{t'_\beta}$ , la primera estará en  $|z'-\rangle_1$  y la segunda en  $|z+\rangle_2$ . Los subsistemas, en cada superficie de simultaneidad, tienen estados bien definidos y diferentes.

Ahora bien, es menester preguntarse por el estado óptico del sistema en estas hipersuperficies que se encuentran al futuro de la primera medición pero en el pasado de la segunda. Sabemos que, de acuerdo con el modelo de los estados ópticos, para cualquier preparación de laboratorio,  $P_\phi$ , correspondiente al estado cuántico  $|\phi\rangle$ , exis-

te una distribución de probabilidad sobre los estados ónticos  $p(\lambda|P_\phi)$ . En este caso, tenemos dos estados cuánticos diferentes, dados por  $|\psi(t_b)\rangle$  y  $|\psi'(t'_b)\rangle$ , lo que implica que tenemos dos distribuciones de probabilidad  $p(\lambda|P_\psi)$  y  $p(\lambda|P_{\psi'})$ . Supongamos que la ontología subyacente a los estados cuánticos es primitiva. Es decir, que se encuentra contenida en el espacio físico, de tal forma que puede ser representada por una función que depende de puntos del espacio-tiempo. Llamémosla  $\lambda(\bar{x}, t)$ . Sabemos que para que la ontología sea invariante de Lorentz, dado un punto particular en el espacio-tiempo, ésta debe tomar un solo valor sin que el sistema de coordenadas influya en esta cantidad. Esto implica que, en la intersección de las superficies de simultaneidad  $\sigma_{t_b}$  y  $\sigma_{t'_b}$ , aunque los estados cuánticos asociados a ellas sean distintos, el valor de  $\lambda$  debe ser el mismo. Esto es posible debido a que el estado cuántico está definido en toda una hipersuperficie de simultaneidad, mientras que la ontología primitiva,  $\lambda$ , sí está definida sobre puntos en el espacio-tiempo.

En Myrvold (2016a) se retoma la misma cuestión de manera similar. En él, se definen un par de hipersuperficies de simultaneidad  $\sigma$  y  $\sigma'$  en la que su intersección no es vacía:  $\sigma \cap \sigma' = \alpha$ . De igual manera, si tenemos evolución unitaria diferente a la identidad, entonces el estado cuántico  $\rho_\sigma \neq \rho_{\sigma'}$ . Si nos fijamos en los estados reducidos  $\rho_{\alpha|\sigma}$  y  $\rho_{\alpha|\sigma'}$ , también serán distintos entre sí. Esto hace pensar que, si la ontología primitiva está definida en términos del estado cuántico, entonces parece haber dos maneras de dar cuenta del estado óntico del sistema. No obstante, esta conclusión apresurada se desprende de no tomar en cuenta que los estados cuánticos no son la ontología primitiva —en términos de Myrvold, no es un *beable local*. Así, pues, es de vital importancia siempre tener en cuenta que el estado cuántico no es la ontología primitiva.<sup>6</sup>

La conclusión de todo lo anterior es que es plausible la existencia de una ontología primitiva relativista para la mecánica cuántica, aunque sea el caso que diferentes marcos de referencia reporten diferentes historias cuánticas y que el estado cuántico sea

---

<sup>6</sup>Ha habido propuestas de ver la función de onda como un multcampo definido en el espacio físico y no como un campo en el espacio de configuraciones. La idea radica en generalizar la idea de un campo. En general, un campo asigna cantidades, ya sean escalares o vectoriales, a puntos del espacio-tiempo. Un multcampo asignará un valor a una colección de  $n$  puntos distintos (Hubert y Romano, 2018, 523). De esa manera, la función de onda puede verse como parte de la ontología primitiva. Empero, esta discusión va más allá de los objetivos de este trabajo. Un par de fuentes sobre este tema son (Hubert y Romano, 2018) y (Romano, 2020).



dependiente de la foliación espacio-temporal. Si se quiere ahondar más en esta cuestión y se toma en cuenta que la mecánica cuántica estándar carece de una ontología definida, se torna necesario voltear a ver una teoría cuántica no estándar. En particular, se analizará la teoría de colapso objetivo de Ghirardi, Rimini y Weber (1986). Ésta nace como una respuesta al problema de la medición a la par de que se han propuesto ontologías bien definidas para esta teoría. Ésta será el tema del próximo capítulo de este trabajo.

# Capítulo 3

## Colapso objetivo

Cómo ya se vio, la propuesta de Myrvold, aunque logra superar la subdeterminación de las historias cuánticas de un sistema vistas desde distintos marcos de referencia, no resuelve el problema de fondo. Una teoría que realmente sea compatible con la relatividad especial debe establecer una ontología bien definida que sea invariante de Lorentz. El objetivo, entonces, es investigar una ontología primitiva que sea propensa a ser invariante relativista. Por ello, en este capítulo, se hará una revisión de la teoría de colapso objetivo de Ghirardi, Rimini y Weber (1986) —de aquí en adelante, la teoría de GRW—, se explorará una propuesta de ontología de densidad de masa relativista (Bedingham y cols., 2014) y se retomará un ejemplo expuesto por Myrvold (2002) a la luz de ésta.

### 3.1. La teoría del colapso objetivo de GRW

La motivación principal de las teorías de colapso fue unificar la dinámica microscópica con la de los objetos macroscópicos. Retomando el problema de la medición, recordemos que la introducción del postulado del colapso evita que haya superposiciones a nivel macroscópico. Supongamos que tenemos una partícula de *spin*  $\frac{1}{2}$  que está en una superposición de tener el *spin* hacia arriba y hacia abajo en la dirección  $n$ :  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+\rangle + |n-\rangle)$ . Pensemos, de igual manera, que el aparato de medición puede tratarse como una colección de objetos cuánticos. En un primer momento, el aparato estará en un estado “listo”,  $|A_0\rangle$ , que indica que aún no ha habido interacción entre

el aparato de medición y el sistema. Imaginemos que, cuando el aparato está en este estado, entonces un puntero marca el número 0. Ahora bien, existen otros dos estados del aparato, los cuales podemos denotarlos por  $|A_{n+}\rangle$  y  $|A_{n-}\rangle$ . El primero indica que se ha medido una partícula con el spin en la dirección positiva de  $n$  y el segundo que esta última tiene dicha propiedad en el sentido contrario. Así, si el estado de la partícula estuviera definido en  $|n+\rangle$  o  $|n-\rangle$ , el sistema compuesto por el aparato de medición y la partícula podría adoptar los siguientes estados:

$$|\phi\rangle = |n+\rangle \otimes |A_{n+}\rangle \quad \text{o} \quad |\phi\rangle = |n-\rangle \otimes |A_{n-}\rangle.$$

No obstante, si la partícula está en una superposición, entonces la evolución unitaria del sistema compuesto lo llevaría a:

$$|\phi\rangle = |n+\rangle \otimes |A_{n+}\rangle + |n-\rangle \otimes |A_{n-}\rangle. \quad (3.1)$$

Es decir, el puntero del aparato apuntaría a dos lugares distintos al mismo tiempo. El postulado del colapso asegura que el *spin* de la partícula se defina durante la medición y, por lo mismo, que la superposición no se traslade al dispositivo. De esta forma, la mecánica cuántica estándar es capaz de rescatar lo observado en el laboratorio. Sin embargo, ya se vio que introducir el término “medición” en los postulados fundamentales es problemático debido a su ambigüedad: no es posible establecer de manera precisa qué cuenta como una medición, además de que se hace una separación tajante entre lo que es medido y lo que mide. Las teorías de colapso objetivo resuelven, en este sentido, el problema de la medición.

Las teorías de colapso pueden rastrearse hasta el artículo de Bohm y Bub (1966). En éste, Bohm y Bub propusieron explicar la reducción del paquete de onda que acaece durante la medición a partir de variables ocultas. En este modelo, los autores propusieron una modificación a la ecuación de Schrödinger que daba como resultado una única evolución determinista con un colapso continuo y determinado causalmente a partir de las variables ocultas. Sin embargo, este modelo fue abandonado y las teorías de colapso que actualmente se discuten no son de variables ocultas, ni son deterministas; sino que la dinámica tiene componentes estocásticos. En éstas, los colapsos son, más

bien, completamente aleatorios. Hubo ciertos trabajos de Pearle, Gisin y Diosi desarrollando este tipo de teorías, pero es el modelo de Ghirardi, Rimini y Weber, de 1986, el primero que ha sido estudiado ampliamente. De igual manera, posteriormente, Pearle (1989) propuso otro modelo, conocido como CSL por sus siglas en inglés —*Continuous Spontaneous localization*—, del cual se hablará sucintamente en esta sección.

Debido a que esta teoría pretende unificar la dinámica microscópica y macroscópica, entonces debe asegurar que los objetos macroscópicos tengan posiciones bien definidas. No obstante, también es necesario que permita la existencia de estados superpuestos por tiempos prolongados en sistemas de pocas partículas.

Para explicar que las posiciones de los objetos macroscópicos están siempre bien definidas, la teoría, a diferencia de la cuántica estándar, establece que hay una base privilegiada para la representación de los estados cuánticos: la base de las posiciones. Una pregunta inmediata que se puede hacer es: ¿qué sucede con todas las demás propiedades? Debido a que la medición de las otras propiedades siempre se hace en términos de las posiciones, esta decisión no genera dificultades. Así, los valores de la energía, del *spin*, etcétera, son registrados en términos de la posición, por ejemplo, de una aguja de un aparato de medición (Norsen, 2018, p. 246). De igual manera, debido a esta misma selección de base, el colapso debe entenderse como la *localización* espontánea de las partículas.

Con esto en mente, los postulados de la teoría de colapso objetivo de GRW son:

- Un sistema de  $n$  partículas es descrito por la función de onda  $\psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t)$ . La dinámica de ésta es descrita por la ecuación de Schrödinger, la cual es interrumpida por eventos repentinos de localización que sufren las partículas.
- El proceso de localización repentina de la partícula  $i$ -ésima alrededor del punto  $\bar{x}_0$  se representa matemáticamente por la multiplicación de la función de onda por una distribución gaussiana centrada en  $\bar{x}_0$ :

$$\psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t) \longrightarrow N \left( \frac{1}{\pi a^2} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2a^2}} \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t) := NL_{\bar{x}_0}^i \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t). \quad (3.2)$$

Aquí,  $N$  es una constante de normalización,  $a \approx 10^{-7}m$  y  $L_{\bar{x}_0}^i$  es el operador que representa la localización de la partícula  $i$ -ésima alrededor del punto  $\bar{x}_0$ . De tal suerte que la localización de la función de onda se centrará en el punto  $\bar{x}_0$  a través de su multiplicación por una gaussiana con un ancho que tiene un orden de magnitud cercano a  $10^{-7}m$ .

Es importante destacar que  $a$  aparece como una nueva constante de la naturaleza cuyo valor está determinado por su adecuación empírica. Ésta debe ser lo suficientemente pequeña para que los objetos macroscópicos tengan posiciones bien definidas. Empero, tampoco puede ser arbitrariamente pequeña. Esto se debe a que los colapsos producen energía. Si una partícula libre está en un eigenestado de la energía, un colapso aumentará el valor de expectación de la energía por  $\Delta E = \frac{\hbar^2}{4ma^2}$  (Maudlin, Okon, y Sudarsky, 2020, p. 76). Así, pensemos que en lugar de que la función de onda fuera multiplicada por una gaussiana de ancho  $a$ , lo fuera por una delta de Dirac, cuyo ancho es nulo. Este proceso representaría una localización absoluta de la partícula, pues la función de onda pasaría de estar extendida sobre todo el espacio a ser nula en todos los puntos con excepción de uno. Este cambio infinitamente rápido, de acuerdo con la expresión  $\Delta E$ , implicaría introducir una cantidad infinita de energía. Ahora bien, aunque no fuera de ancho nulo,  $a$  no podría ser muy pequeña, porque la estabilidad de los átomos se vería afectada, pues la energía asociada a la localización espontánea de un electrón haría que éste se ionizara y saliera expulsado del átomo (Maudlin, 2019, p. 104). Ya que este tipo de comportamiento no se observa, entonces el valor de  $a$  no puede ser tan pequeño como se quiera.

- La densidad de probabilidad de que la partícula  $i$ -ésima sufra una localización alrededor del punto  $\bar{x}_0$  está dada por:

$$\int_{\mathbb{R}^{3n}} |L_{\bar{x}_0}^i \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t)| d^3 x_1, \dots, d^3 x_n. \quad (3.3)$$

- Los eventos de localización ocurren con una tasa promedio de  $\lambda \approx 10^{-16} \frac{1}{s}$ . Al igual que  $a$ ,  $\lambda$  es una nueva constante de la naturaleza cuyo valor es ajustado para que la teoría sea empíricamente adecuada. Es necesario que su magnitud

sea lo suficientemente chica como para permitir superposiciones prolongadas en sistemas microscópicos y lo bastante grande como para evitar las superposiciones en sistemas macroscópicos.

Antes que nada, es menester señalar algunas diferencias que hay entre la mecánica cuántica estándar y la teoría de GRW. Por un lado, cómo ya se mencionó, la cuántica no presupone una base privilegiada, mientras que en GRW se escoge la de posiciones. Por otro lado, mientras que la cuántica estándar introduce el colapso al momento de la medición; en GRW, éste sucede aleatoriamente cada cierto tiempo  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  para cada partícula. El problema con la cuántica estándar surgía en que el término “medición” no era lo suficientemente claro. En la teoría de GRW, este problema se desvanece, puesto que los colapsos ya no ocurren al momento de la “medición”, sino aleatoriamente con una tasa promedio en específico.

Ahora bien, el tiempo entre los colapsos para una única sola partícula es de  $\tau = \frac{1}{\lambda} = 10^{16} s \approx 3 \times 10^8$  años. Es decir, una única partícula tarda alrededor de trescientos millones de años en colapsar. Esto implica que es altamente improbable que ocurra un colapso en sistemas microscópicos. La definitud de la posición de los objetos macroscópicos se rescata debido al gran número de partículas que los componen. Supongamos que tenemos un sistema de dos partículas. En éste, el tiempo aproximado para que se dé un colapso en cualquiera de las dos es de  $\frac{\tau}{2} = 150$  millones de años. Si estuviera compuesto por 3, entonces  $\frac{\tau}{3} = 100$  millones de años, etcétera. Si, además de esto, se toma en cuenta que un mol de sustancia tiene alrededor de  $n \approx 10^{23}$  partículas, entonces  $\frac{\tau}{n} \approx 30 \times 10^{-9} s$ . Es decir, en sistemas macroscópicos, los colapsos ocurren con una alta frecuencia. Ahora bien, si consideramos que las partículas que componen a los objetos macroscópicos están enredadas, entonces la localización de una de ellas haría colapsar a todas las demás instantáneamente, haciendo que el objeto tuviera una posición definida cada 30 nanosegundos. De tal suerte que la superposición de los sistemas con una gran cantidad de partículas es imperceptible, lo que explica por qué no vemos superposiciones macroscópicas. Es de esta manera que la teoría de GRW puede resolver el problema de la medición, unificar la dinámica microscópica y macroscópica y ser empíricamente adecuada.

La adecuación empírica de la teoría implica, también, que debe rescatarse el

hecho de que las mediciones causan el colapso de los sistemas. Esto es simplemente una consecuencia del número de partículas que componen al aparato de medición. Es decir, el sistema cuántico, aunque tenga una probabilidad muy baja de sufrir un colapso, al momento de medirse, se enreda con el aparato de medición y la gran cantidad de partículas que componen a éste hace que sea extremadamente probable que el sistema compuesto colapse y se encuentre un resultado definido en el laboratorio.

Ahora bien, es menester mencionar que la teoría de GRW no es empíricamente equivalente a la teoría cuántica estándar. Hay teorías que hacen modificaciones al formalismo, como la mecánica de onda piloto, que son empíricamente equivalentes a la teoría estándar.<sup>1</sup> No obstante, éste no es el caso de las teorías de colapso objetivo en general, ni de la de GRW en particular. Esto se debe a las dos nuevas constantes de la naturaleza que esta teoría introduce.

En la teoría estándar, un sistema tendrá el valor  $b$  de la propiedad  $B$  si está en un estado  $|\psi\rangle$  tal que  $B(|\psi\rangle) = b|\psi\rangle$ . Es decir, si el sistema está en un eigenestado del observable en cuestión, el valor de la propiedad será igual al eigenvalor asociado a su estado. En la teoría de GRW, el sistema realmente no alcanza a ser un eigenestado de la posición, sino que se aproxima de manera significativa a éste. Esto se debe a que la constante  $a$ , como ya se vio, no es ni puede ser nula. De igual manera, esta teoría predice que los colapsos suceden de manera espontánea con una frecuencia  $\lambda$  para cada partícula, a diferencia del formalismo estándar. Lo anterior implica que, en principio, hay situaciones en GRW donde acaecen colapsos que en la teoría estándar no suceden.

Si es el caso que el mundo se comporta de acuerdo a la teoría de GRW, entonces debe ser posible medir ambas constantes. Aunque en el artículo original, los valores propuestos fueron los ya mencionados —  $a \approx 10^{-7}m$  y  $\lambda \approx 10^{-16}s^{-1}$ —, hay una gran variedad de valores que son compatibles con la evidencia experimental hasta

---

<sup>1</sup>Esta teoría postula que las partículas tienen posiciones y, por ende, velocidades y trayectorias bien definidas y que no hay colapsos. Al igual que la teoría estándar, la mecánica de Bohm postula la ecuación de Schrödinger como la dinámica de la función de onda. No obstante, postula una ecuación adicional que especifica las velocidades de las partículas, a la cual se le llama “la ecuación guía”. La equivalencia empírica entre la cuántica estándar y el formalismo de Bohm radica en el principio de equivariancia, el cual postula que a cierto  $t_0$  las posiciones de las partículas están distribuidas como  $|\psi|^2$ . La evolución, dada por la ecuación de Schrödinger y por la ecuación guía aseguran que dicha distribución se mantenga. Esto, a su vez, asegura que las probabilidades calculadas para los sistemas sigan la regla de Born (Allori, Dürr, Goldstein, y Zanghì, 2002, p. S483).

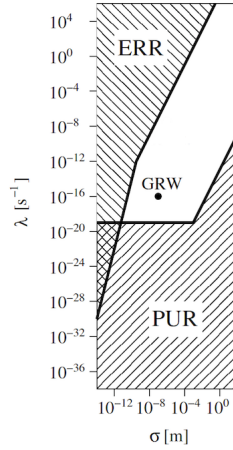


Figura 3.1: Diagrama sobre los posibles valores de  $\lambda$  y del ancho de banda de la gaussiana que representa el colapso. Éste fue extraído del artículo Feldmann y Tumulka (2012).

ahora recabada (Feldmann y Tumulka, 2012). A continuación, en la figura 3.1, se extrae del artículo de Feldmann y Tumulka (2012) un diagrama que muestra qué par de valores para  $a$  y para  $\lambda$  son aún posibles. La región ERR — *Empirically Refuted Region*— representa los valores descartados experimentalmente, mientras que la PUR — *Philosophically Unsatisfactory Region*— son aquéllos que no explican por qué no se observan superposiciones macroscópicas.

Antes de pasar a discutir posibles ontologías para esta teoría, es menester mencionar otro modelo de colapso objetivo: el modelo de localización espontánea continua. A diferencia del modelo de GRW, en CSL los colapsos no se dan discontinuamente, sino que se representan como una evolución estocástica continua en el espacio de Hilbert (Ghirardi y Bassi, 2020). Éstos llevan a la función de onda inicial a un eigenestado de un operador de colapso  $\hat{A}$ . La solución al caso más sencillo está dada por (Okon y Sebastián, 2018):

$$|\psi(t)\rangle_B = e^{-[i\hat{H} + \frac{1}{4\lambda t}(B(t) - 2\lambda\hat{A})^2]} |\psi(0)\rangle. \quad (3.4)$$

Aquí,  $\lambda$  denota el peso que tienen los términos estocásticos,  $\hat{A}$  es el operador de colapso y  $B(t)$  es una función de movimiento browniano clásico aleatoria. Es menester mencionar que la densidad de probabilidad de  $B(t)$  está dada por:

$$\mathcal{P}(B) = {}_B\langle\psi|\psi\rangle_B. \quad (3.5)$$



Para ejemplificar cómo funciona la teoría, supongamos por un momento que el sistema es tal que evoluciona libremente, es decir, que  $\hat{H} = 0$ . Escribamos el estado inicial como una combinación lineal de eigenestados de  $\hat{A}$ :

$$|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle. \quad (3.6)$$

Así, la evolución del sistema está dada por:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-[\frac{1}{4\lambda t}(B(t)-2\lambda\hat{A})^2]} |\psi(0)\rangle = \sum_j c_j e^{-[\frac{1}{4\lambda t}(B(t)-2\lambda a_j)^2]} |a_j\rangle, \quad (3.7)$$

y tendrá la siguiente distribución de probabilidad:

$$P_t(B) = \sum_i e^{-\frac{1}{2\lambda}[B(t)-\lambda a_i]^2 |c_i|^2}. \quad (3.8)$$

De aquí, tenemos que los  $B(t)$  más probables a ocurrir con los  $2\lambda a_j t$ , por lo que:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_B &\approx \sum_i c_i e^{-\frac{1}{2\lambda t}[2\lambda a_j t - 2\lambda a_i t]^2} |a_i\rangle \\ &\approx c_j |a_j\rangle + \sum_{i \neq j} c_i e^{-2\lambda t[a_j - a_i]^2} |a_i\rangle. \end{aligned}$$

Y si hacemos tender el tiempo al infinito, entonces todos los sumandos desaparecen con excepción al primero (Okon y Sebastián, 2018). Esto significa que el sistema evoluciona continuamente de tal manera que va colapsando al eigenestado  $|a_j\rangle$ , con probabilidad  $|c_j|^2$ , del operador de colapso  $\hat{A}$ . Ahora bien, a diferencia de la teoría de GRW, en donde se establece, desde el principio, que la base privilegiada es la de posiciones, en CSL el operador de colapso puede ser cualquiera. Empero, para darle sentido físico a la teoría, éste se interpreta como el operador de posición difuso.

Así, pues, este par de teorías de colapso objetivo resuelven el problema de la medición al postular que los colapsos ocurren aleatoriamente y no meramente al realizar una “medición”. No obstante, al igual que el formalismo estándar, así como se acaban de presentar, estas teorías no resuelven el problema de la ontología. Bell hizo énfasis en esta cuestión (1987b) y propuso una ontología específica para la teoría de GRW: la

ontología de los *flashes*. De manera similar, posteriormente se propuso la de densidad de masa. La siguiente sección se ocupará de este tema y lo enlazará con lo previamente discutido sobre la compatibilidad con la estructura espacio-temporal de la relatividad especial.

## 3.2. Ontologías primitivas para la teoría de GRW

### 3.2.1. Ontología de los *flashes*

Antes de comenzar esta sección, es menester precisar que, en estos modelos, la utilización del término “partícula” no debe ser tomado en serio ontológicamente. Es decir, cuando se mencione dicha palabra, ésta no referirá a un ente físico, sino a los grados de libertad que tiene un sistema en concreto. Así, si se dice que se tiene un sistema de  $n$  partículas en un espacio tridimensional, esto significará que la función de onda que representa ese sistema está definida sobre el espacio  $\mathbb{R}^{3n}$ . De tal suerte que la partícula  $k$ -ésima se referirá al grado de libertad  $\bar{q}_k$  (Dürr y Lazarovici, 2020, p. 107). Esto es conveniente debido a que se presentarán dos ontologías concretas para la teoría de GRW, las cuales no involucran partículas.

Como ya se mencionó en varias ocasiones, la función de onda no es un objeto que esté definido en el espacio físico, sino en el de configuraciones. Esto significa que, así como presentamos la teoría de GRW, aún carece de una ontología perteneciente al espacio físico. Bell llamó a éste el problema de los *beables* locales. Bell notó que los colapsos sí están definidos alrededor de puntos espacio-temporales, por lo que pensó que una ontología posible para la teoría de GRW fueran los colapsos mismos. A ésta se le refiere habitualmente como la ontología de *flashes*. En ese sentido, los objetos macroscópicos podrían verse como una “galaxia” de estos eventos (Bell, 1987b, p. 205). No obstante, es menester notar que los *flashes*, a diferencia de los cuerpos astronómicos, aparecen repentinamente y desaparecen *ipso facto*. De allí su nombre de *flashes*. Así, la analogía que hace Norsen (2018) con el rudio o “nieve” proveniente de un televisor que no recibe una buena señal es más adecuada. A la teoría de GRW con la ontología de *flashes* se le denomina habitualmente como GRW<sub>f</sub>.

Aunque el tema de este trabajo no es sobre esta ontología, es imperativo mencionar que existe una versión de ésta que es invariante de Lorentz (Maudlin, 2011, pp. 243-248). Recordemos que en  $GRW_f$  lo que hay son los *flashes*, no existen partículas. No obstante, utilicemos este término de manera utilitaria. Supongamos que tenemos una partícula masiva, la cual, en su línea de mundo manifestará una serie de colapsos. Una teoría relativista de  $GRW_f$  consistiría en encontrar una manera de adscribir probabilidades a estos *flashes* de manera relativista. Para hacer esto, se toma un *flash* inicial y se postula que todos los siguientes *flashes* adscritos a dicha partícula deben ocurrir en el cono futuro de luz del evento inicial. Para poder adscribir una probabilidad de ocurrir un *flash* a cada punto en el cono futuro de luz del evento inicial, notamos primero que cualquier punto dentro del cono se encuentra a un tiempo propio invariante del primer *flash*. El conjunto de puntos que se encuentran al mismo intervalo del flash inicial definirá un hiperboloide dentro del cono futuro de luz. De esa manera, el interior del cono es foliable a partir de estas superficies. Así, al igual que en la versión que no es relativista, se establece la probabilidad de que ocurra un *flash* en algún intervalo de tiempo, aunque, en este caso, se definen las probabilidades sobre los hiperboloides dentro del cono futuro de luz. En otras palabras, dados el evento inicial y la métrica relativista, es posible definir una densidad de probabilidad de que ocurran *flashes* sobre estas superficies (Maudlin, 2011). Si elegimos un tiempo dado en el que se dará otro *flash*, entonces se estará escogiendo un hiperboloide sobre el cual se dará el evento.

Por último, es necesario definir una probabilidad sobre el hiperboloide que indique en qué región de éste es más probable que ocurra el *flash*. Hasta ahora, tenemos un evento inicial, una función de onda inicial y un hiperboloide arbitrario sobre el cual se dará el evento. Para definir probabilidades sobre esta superficie, primero se evoluciona unitariamente la función de onda inicial hasta aquella definida sobre el hiperboloide en el cual se dará un colapso. Posteriormente, se asignará la probabilidad de que acaezca el flash sobre regiones de la superficie de la forma usual: la probabilidad de que ocurra un *flash* en una región en particular será igual al cuadrado de la amplitud de la función de onda en dicha sección de la superficie.

### 3.2.2. Ontología de la densidad de masa

Además de la ontología de *flashes*, también se ha propuesto una de densidad de masa. La idea de relacionar un campo a la función de onda para definir una ontología en el espacio físico fue explorada por Schrödinger en una carta dirigida a Lorentz (Norsen, 2018, p. 129). Formalmente, Schrödinger propuso que aquello que existía en el espacio físico era un campo de densidad de carga que estaba definido, para la partícula  $i$ , de la siguiente manera:

$$\rho_i(\bar{x}, t) = q_i \int |\psi|^2 \delta^3(\bar{x}_i - \bar{x}) d^3x_1 \dots d^3x_n. \quad (3.9)$$

Aquí,  $q_i$  es la carga de la  $i$ -ésima partícula y  $\psi = \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t)$ . Nótese que, debido a la delta de Dirac, la integral (3.9) se reduce a integrar sobre las coordenadas de las demás partículas, lo que da una función en términos de  $\bar{x}$  y  $t$ , es decir, una función en el espacio físico.

Si tenemos un sistema de  $n$  partículas, entonces la densidad total estará dada simplemente por:

$$\rho(\bar{x}, t) = \sum_{i=1}^n \rho_i(\bar{x}, t). \quad (3.10)$$

Es menester notar que este campo, aunque en un principio se definiera desde la carga, es posible construirlo para la masa simplemente multiplicando por  $m_i$  y no por  $q_i$ . Schrödinger abandonó esta idea debido a que la evolución unitaria de la función de onda hacía que los paquetes de onda se propagaran y, por ello, que los puntos en los que  $\rho$  era distinta de cero se difuminaran en la totalidad del espacio, lo que iba en contra de la definitud que presentan los objetos macroscópicos. De igual manera, se seguía teniendo el problema de que la evolución unitaria generaba superposiciones macroscópicas.

Empero, la idea de la densidad de masa en el contexto de la dinámica de GRW no presenta esta dificultad, ya que se ha resuelto el problema de la medición a partir de los colapsos espontáneos. A la teoría de GRW con una ontología de densidad de masa se le denota como  $\text{GRW}_m$ . Según esta ontología, la materia está distribuida continuamente

en un campo definido por la siguiente función de densidad de masa (Bedingham y cols., 2014):

$$m(\bar{x}, t) = \sum_{i=1}^n m_i \int |\psi_t|^2 \delta^3(\bar{x}_i - \bar{x}) d^3 x_1 \dots d^3 x_n. \quad (3.11)$$

Aquí,  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ -ésima,  $n$  es el número de partículas del sistema y  $\psi_t = \psi_t(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  es la función de onda al tiempo  $t$ . Nótese que la definición en (3.11) es la misma que la propuesta por Schrödinger, sólo que se define a partir de la masa y no de la carga. De igual manera, la función de densidad de masa también puede construirse a partir de un operador  $\mathcal{M}(\bar{x})$  definido sobre el espacio  $L^2(\mathbb{R}^{3n})$ , tal que

$$\mathcal{M}(\bar{x})(\psi_t) = \sum_{i=1}^n m_i \delta^3(\bar{x}_i - \bar{x}) \psi_t. \quad (3.12)$$

Esto puede conseguirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m(\bar{x}, t) &= \sum_{i=1}^n m_i \int \delta^3(\bar{x}_i - \bar{x}) |\psi_t|^2 d^3 x_1 \dots d^3 x_n \\ &= \int \sum_{i=1}^n m_i \delta^3(\bar{x}_i - \bar{x}) |\psi_t|^2 d^3 x_1 \dots d^3 x_n \\ &= \langle \psi_t | \mathcal{M}(\bar{x}) | \psi_t \rangle. \end{aligned}$$

De acuerdo con  $\text{GRW}_m$ , no hay partículas a un nivel fundamental, sino que todo lo que existe es este campo de densidad de masa que se propaga por todo el espacio y tiene mayores concentraciones de materia alrededor de los puntos espaciales  $\bar{x}_i$ .

Para indagar un poco más sobre la dinámica de  $\text{GRW}_m$ , pongamos un ejemplo (Norsen, 2018). Supongamos que tenemos dos partículas enredadas que tienen una separación que asegura que cualquier proceso de medición en una de ellas tendrá separación tipo espacio de la medición de la otra. Supongamos que en un ala del experimento está Alice, y en la otra Bob y que en cada laboratorio hay un par de cajas: una a la izquierda y otra a la derecha, y establezcamos que el sistema se encuentra en el siguiente estado:

$$\psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_I^A(\bar{x}_1)\psi_I^B(\bar{x}_2) + \psi_D^A(\bar{x}_1)\psi_D^B(\bar{x}_2)) \quad (3.13)$$

Aquí, ñas funciones  $\psi_I^A(\bar{x}_1)$  y  $\psi_D^A(\bar{x}_1)$  indican que la partícula de Alice está en la caja de la izquierda y derecha respectivamente. Lo mismo pasa con las funciones de onda  $\psi_I^B(\bar{x}_2)$  y  $\psi_D^B(\bar{x}_2)$  correspondientes al ala del experimento de Bob. El estado (3.13) es tal que si Alice hace una medición y encuentra la partícula en la caja izquierda, entonces Bob también la encontrará en la caja izquierda y, por el contrario, si una medición encuentra la partícula de Alice en la caja derecha, entonces la de Bob también estará en la derecha.

En términos de la densidad de masa, antes de cualquier medición, tanto Alice como Bob tendrían en cada caja la mitad de la materia correspondiente a la partícula. Es decir, el campo de densidad de materia sería tal que habría cuatro máximos, uno en cada caja y correspondientes a la mitad de la masa de su partícula correspondiente. Ahora supongamos que Alice hace una medición y que el instrumento para medir consiste en un puntero que, en un estado inicial apunta al cero, pero se moverá hacia la izquierda si la partícula resulta estar en la caja izquierda y, contrariamente, se desplazará a la derecha si ésta se encuentra en la caja de la derecha. Durante la medición, el sistema se enredará con el aparato y el gran número de partículas que lo componen harán que el sistema colapse a  $\psi_I^A(\bar{x}_1)\psi_I^B(\bar{x}_2)\psi_I^P(\bar{x}_3)$  o a  $\psi_D^A(\bar{x}_1)\psi_D^B(\bar{x}_2)\psi_D^P(\bar{x}_3)$ . En donde  $\psi_I^P(\bar{x}_3)$  es que el puntero se haya desplazado a la izquierda y  $\psi_D^P(\bar{x}_3)$  su análogo hacia la derecha. Esto, en términos de la densidad de masa, significa que, posterior a la medición, la materia, en lugar de estar dividida en las cuatro cajas, estará concentrada sólo en dos de ellas, en una de Alice y otra de Bob. En cada una de ellas se encontrará la masa total de cada partícula.

Es menester recalcar varios aspectos de este planteamiento. En primer lugar, este ejemplo muestra explícitamente la no-localidad de esta ontología, debido la medición en un ala del experimento genera el colapso de todo el sistema. De igual manera, es importante precisar que la dinámica de la densidad de masa está regida por la función de onda, pues es parte de la definición (3.11). Más aún, para una configuración específica del campo de densidad de masa, existen múltiples funciones de onda. El estado

cuántico determina la densidad de masa, pero no viceversa. Así, el objeto matemático que contiene la información completa sobre el sistema es la función de onda y no la función  $m$ . Aquí puede verse que la pregunta sobre aquello que representa la función de onda sigue abierta. Aunque ahondar en este tema va más allá de los propósitos de este trabajo, es preciso destacar que hay varias posturas sobre el estado cuántico. Por un lado, el “realismo de la función de onda” asegura que no es necesario postular una ontología primitiva. Por otro, hay quienes proponen que la función de onda es parte de la ontología —Maudlin la llama ontología secundaria— junto con la ontología primitiva —o primaria— (Maudlin, 2013). Los nombres “primaria” y “secundaria” no aluden a una estratificación de importancia metafísica, sino que la ontología secundaria es empíricamente menos accesible que la primera: ambas son igualmente fundamentales. Por último, Egg y Esfeld (2015) proponen pensar el estado cuántico como una propensión —una disposición probabilística— que tiene una influencia sobre la dinámica del campo de la densidad de masa.

Ahora bien, la densidad de masa, planteada como en (3.11), no es invariante relativista, ya que se integra sobre la posición de las partículas en un instante de tiempo dado. Esto significa que, como la noción de simultaneidad está definida sobre un sistema de coordenadas en específico,  $m(\bar{x}, t)$  variará al aplicarle una transformación de Lorentz. No obstante, Bedingham *et. al* (2014) propusieron un esquema para una versión relativista.

Debido a que la función de onda determina la dinámica de la densidad de masa, primero es preciso establecer un esquema para una ley relativista para  $\psi$ . Al igual que en el modelo de Myrvold, aquí se pedirá que las funciones de onda  $\psi$  estén definidas en un hiperplano de simultaneidad  $\sigma$ . Más aún, cada hipersuperficie  $\sigma$  debe tener asociada una  $\psi_\sigma \in \mathcal{H}_\sigma$  tal que  $\|\psi_\sigma\| = 1$ .<sup>2</sup> De igual manera, asumimos que existe una hipersuperficie  $\sigma_0$  en la que comenzó la historia del mundo. Ahora bien, definamos, para cualquier punto espacio temporal  $x^\mu = (\bar{x}, t)$ , que  $PLC(x)$  sea su cono pasado de luz, que llega hasta  $\sigma_0$ , unido con la parte de  $\sigma_0$  que queda por afuera del cono. Con

---

<sup>2</sup>Se vio, en la sección del formalismo estándar que la norma de los estados cuánticos debía ser igual a uno. De igual manera, se vio que la función de onda era la representación de este vector en la base de las posiciones. Si tenemos un sistema de  $n$  partículas en tres dimensiones, la norma de la función de onda está definida como  $\|\psi\| = (\int |\psi|^2 dx_1 \dots dx_n)^{\frac{1}{2}}$  (Griffiths, 1995, p. 12).

todo esto, el esquema consiste en las siguientes cuatro proposiciones:

- (P1) Dada una función de onda inicial  $\psi_0$  en  $\sigma_0$ , la ley debe especificar la distribución de probabilidad conjunta para toda  $\psi_\sigma$ , en donde  $\sigma$  está en el futuro de  $\sigma_0$ .
- (P2) Además de las hipersuperficies en (P1),  $\sigma$  puede ser  $PCL(x)$  para cualquier punto espacio temporal.
- (P3) Cuando la evolución unitaria llevara al sistema a una superposición  $\psi_\sigma = \sum_\alpha c_\alpha \psi^\alpha$  de contribuciones macroscópicas diferentes  $\psi^\alpha$ , entonces la ley asegura que  $\psi_\sigma \approx \psi^\alpha$  con una probabilidad cercana a  $|c_\alpha|^2$ . Esto evita las superposiciones macroscópicas.
- (P4) Si se hace una medición sobre un sistema que da como resultado  $\alpha$ , entonces para cualesquiera funciones de onda  $\psi_\sigma$  y  $\psi_{\sigma'}$ , definidas sobre superficies  $\sigma$  y  $\sigma'$  al futuro del evento de la medición, deben ser tales que el resultado de medir de nuevo sea también  $\alpha$ . Este postulado recupera la noción del colapso, pues hace hincapié en que si un sistema aislado es medido y tiene un cierto resultado, entonces mediciones posteriores deben dar el mismo resultado.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, Bedingham *et. al.* (2014) proponen la siguiente ley para la densidad de masa:

$$m(x) = \langle \psi_{PCL(x)} | \mathcal{M}_{PCL(x)} | \psi_{PCL(x)} \rangle. \quad (3.14)$$

En donde  $\mathcal{M}_{PCL(x)}$  es el operador de densidad de masa en  $x$ , sobre el espacio  $\mathcal{H}_{PCL(x)}$ . Los autores llaman a la ecuación (3.14), junto con (P1)-(P4), una teoría de colapso relativista basada en la densidad de masa.

Teniendo estos postulados en mente, la caracterización de un proceso de medición en este nuevo formalismo se da de la siguiente manera (Bedingham y cols., 2014, p. 627): supongamos que tenemos un sistema al que se le realiza una medición en el punto espacio-temporal  $\bar{y}$ . ¿Cómo se describe esto en términos de la densidad de masa? Debido a (P3), sabemos que no pueden haber superposiciones macroscópicas, por lo



que el estado del sistema  $\psi_{PCL(x)}$ , debe colapsar aproximadamente a un estado  $\psi^\alpha$  y el aparato de medición debe indicar un resultado  $\alpha$ . De igual manera, por (P4), para hipersuperficies posteriores a  $\bar{y}$ , el estado y el resultado deben ser los mismos. Pero como la función  $m$ , por definición, está determinada por  $\psi_{PCL(x)}$ , entonces para los puntos en el cono futuro de luz de  $\bar{y}$ ,  $m$  debe ser aproximadamente cero, con excepción de aquéllos en donde se encuentra el puntero del instrumento de medición que indica que el resultado del experimento fue  $\alpha$ . Así, la predicción hecha por el formalismo estándar en términos de  $\psi$  es coincidente con la de la función  $m$ . Esto muestra que las mediciones pueden ser caracterizadas completamente a partir del campo de densidad de masa. Ahora bien, si notamos que las probabilidades asignadas a los posibles resultados de los experimentos coinciden aproximadamente con las probabilidades de que el puntero muestre cierto resultado, entonces la teoría de colapso relativista basada en la densidad de masa es aproximadamente equivalente al formalismo cuántico estándar.

Más allá de cómo se puede caracterizar el proceso de medición en esta teoría, la pregunta que ahora debe responderse es: ¿cómo se ve el carácter relativista de la teoría? Supongamos que tenemos, desde un marco de referencia Lorentziano, un sistema que incluye un aparato de medición y una partícula de masa  $m_0$ . La partícula se encuentra en una superposición de encontrarse en el punto  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , mientras que el aparato se encuentra listo para medir la presencia de la partícula en  $\bar{y}$ . Formalmente:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{y}\rangle + |\bar{z}\rangle) \otimes |listo\rangle. \quad (3.15)$$

Esto significa que los dos posibles estados posteriores a una medición en cualquier ala del experimento son:  $\psi \approx |\bar{y}\rangle \otimes |activado\rangle$  o  $\psi \approx |\bar{z}\rangle \otimes |no\ activado\rangle$ . Es decir, si el estado del sistema colapsa de tal forma que la partícula se encuentra en  $\bar{y}$ , el aparato de medición se activará, si no, no lo hará. La imagen de esto en términos de la densidad de masa es que habrá una distribución de materia de tal manera que habrán dos máximos de masa, con valor  $\frac{m_0}{2}$ , en cada punto. Supongamos que al realizarse la medición, el sistema colapsa al estado  $\psi \approx |\bar{z}\rangle \otimes |no\ activado\rangle$ . En el esquema de  $GRW_m$  no relativista, *ipso facto* dejaría de haber masa en  $\bar{y}$  y pasaría a estar la masa completa,  $m_0$ , alrededor de  $\bar{z}$ . No obstante, en el contexto relativista, ésta se construye

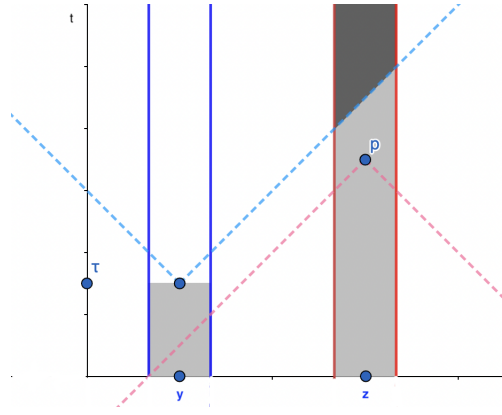


Figura 3.2: Diagrama de espacio-tiempo de una partícula en una superposición de estar en  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , en el que se hace una medición sobre  $\bar{y}$  y el sistema colapsa a que esté en la posición  $\bar{z}$ . Las zonas gris claro representan regiones en donde la masa es  $\frac{m_0}{2}$ , mientras que en la gris oscuro la masa es igual a  $m_0$ . Puede verse que la densidad de masa se concentra en la región derecha hasta que el cono futuro de luz del evento de la medición alcanza dicha zona. De igual manera, en el punto  $\bar{p}$ , la masa seguirá siendo  $\frac{m_0}{2}$ , puesto que la densidad de masa está definida sobre su cono pasado de luz.

con base en la función de onda definida sobre su cono pasado de luz. Esto implica que la densidad de masa no aparecerá instantáneamente en  $\bar{z}$ , sino que estará retrasada por la velocidad de la luz, cómo se ve en la figura (3.2). Así, si el cono pasado de luz de  $\bar{p}$  intersecta a  $\bar{y}$  en una región anterior a la medición, entonces el valor de la densidad de masa allí seguirá siendo  $\frac{m_0}{2}$ , aunque el punto esté en una hipersuperficie de simultaneidad posterior a  $\tau$ . Esto se da debido a que la densidad de masa está construida sobre  $\psi_{PCL(x)}$ .

Algo que es menester destacar es que la cantidad de masa total del universo es dependiente de la hipersuperficie y, por ende, del marco de referencia. En nuestro ejemplo, en cualquier hipersuperficie anterior a  $\tau$ , tendremos que la masa total es  $m_0$ . Sin embargo, en el intervalo de tiempo entre  $\tau$  y el “reacomodo” de la materia, la masa total sobre estas hipersuperficies será  $\frac{m_0}{2}$ . Así, la cantidad de materia total no es una cantidad invariante a través del tiempo.

De aquí, es inmediato preguntarnos sobre qué pasaría si se pone un detector de materia en  $\bar{z}$ , pues parece que podría ser el caso que se detectara una masa de  $\frac{m_0}{2}$ , aunque ya se haya medido en  $\bar{y}$ . Pero, como esta teoría y el formalismo estándar son aproximadamente empíricamente equivalentes, es necesario que el detector en  $\bar{z}$  se accione y que la masa total se encuentre en  $\bar{z}$ . Este comportamiento hace patente el carácter no-local de la densidad de masa. Como ya vimos, esto no es sorprendente,

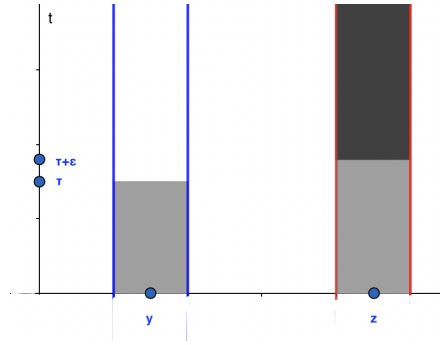


Figura 3.3: Diagrama de espacio-tiempo del sistema en el que se coloca, a un tiempo posterior a la medición,  $\tau + \epsilon$ , un detector en  $\bar{z}$ .

pues cualquier teoría que pudiera reproducir las predicciones del formalismo cuántico estándar deberá, por el teorema de Bell, ser no-local. Así, esta teoría de colapso basada en la densidad de masa es relativista y no-local. No conlleva ninguna contradicción que, al no medir en  $\bar{z}$ , la densidad de masa se colapse completamente en  $\bar{z}$  con un retraso dado por la velocidad de la luz y, por el contrario, si de hecho se mide, este colapso se dé de manera instantánea. Esto se debe a que, como la densidad de masa está construida con base en la función de onda definida sobre el cono pasado de luz del punto en cuestión, entonces, estrictamente hablando, el sistema sigue enredado para puntos cuyo cono pasado de luz se encuentre al pasado del evento de medición en  $\bar{y}$ .

### 3.2.3. Ejemplo de un sistema con subdeterminación desde la densidad de masa

El presente trabajo concluirá con una pequeña aportación propia. Retomaré un ejemplo en donde hay una aparente incompatibilidad entre distintas historias cuánticas vistas desde varios marcos de referencia y lo analizaré desde esta teoría de colapso objetivo con la densidad de masa relativista. El ejemplo se tomará de Myrvold (2002, p. 440). Supongamos que tenemos una partícula que se encuentra en un estado superpuesto de estar en tres cajas distintas:

$$\alpha = |\bar{x}_1\rangle + |\bar{x}_2\rangle + |\bar{x}_3\rangle. \quad (3.16)$$

En términos de la densidad de masa, esto implica que si se le adjudica una masa  $m_0$  a la partícula, entonces la densidad de masa estará distribuida de tal manera que

habrán máximos de  $\frac{m_0}{3}$  en cada  $\bar{x}_i$ . Ahora bien, supongamos que existe un marco de referencia  $\Sigma$  en el que las tres cajas están en reposo y definamos las trayectorias espacio-temporales de las cajas como  $\Gamma_1(t) = (\bar{x}_1, t)$ ,  $\Gamma_2(t) = (\bar{x}_2, t)$  y  $\Gamma_3(t) = (\bar{x}_3, t)$ . De igual manera, pensemos que aquéllas en  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son abiertas al mismo tiempo,  $\tau$ , desde este marco de referencia. Es decir, que los eventos de abrir las cajas serán  $(\bar{x}_1, \tau)$  y  $(\bar{x}_2, \tau)$ . Supongamos que el resultado de la medición es que la partícula no se encuentra en ninguna de dichas cajas, por lo que el sistema termina en el estado  $\psi = |\bar{x}_3\rangle$ .

El hecho de que se abran al mismo tiempo desde  $\Sigma$ , significa que los eventos de abrir dichas cajas tienen separación tipo espacio y que existen un par de marcos de referencia en donde las aperturas de las cajas no son simultáneas. Sea  $\Sigma'$ , aquél en el que se abre primero la caja en la línea de mundo  $\Lambda_1(\Gamma_1(t)) = \Gamma'_1(t') = (\bar{x}'_1, t')$  y luego la que está en la línea de  $\Lambda_1(\Gamma_2(t)) = \Gamma'_2(t') = (\bar{x}'_2, t')$ . Análogamente, definamos otro marco,  $\Sigma''$ , en donde este orden está invertido: primero se abre aquélla cuya trayectoria es  $\Lambda_2(\Gamma_2(t)) = \Gamma''_2(t'') = (\bar{x}''_2, t'')$  y, posteriormente, aquélla en  $\Lambda_2(\Gamma_1(t)) = \Gamma''_1(t'') = (\bar{x}''_1, t'')$ . Supongamos que al abrirse las cajas, la partícula no se encuentra en ninguna de ellas, siendo el estado final  $\psi = |\bar{x}_3\rangle$  desde  $\Sigma$ ,  $|\bar{x}'_3\rangle$  desde  $\Sigma'$  y  $|\bar{x}''_3\rangle$  desde  $\Sigma''$ .

Ahora bien, pensemos que, desde  $\Sigma'$ , en  $\tau'_1$ , se abre la caja  $\bar{x}'_1$ , dando como resultado el estado:

$$\beta' = |\bar{x}'_2\rangle + |\bar{x}'_3\rangle. \quad (3.17)$$

Y que, en  $\tau'_2 > \tau'_1$ , se abre la segunda caja, dejando al sistema en el estado  $|\bar{x}'_3\rangle$ .

Por otro lado, desde  $\Sigma''$ , la primera caja en abrirse será aquélla sobre  $\Gamma''$ , lo que colapsaría el sistema al estado:

$$\gamma'' = |\bar{x}''_1\rangle + |\bar{x}''_3\rangle. \quad (3.18)$$

Mientras que el resultado de la última medición haría que el sistema terminara en  $|\bar{x}''_3\rangle$ .

La aparente incongruencia entre ambos marcos de referencia es que, en el intervalo entre las mediciones, ambos reportan estados cuánticos distintos. Mientras que, desde  $\Sigma''$  el sistema está en  $\beta'$ ; desde  $\Sigma'$ , está en  $\gamma''$ . Más aún, debido a que la apertura de las cajas es simultánea desde otro marco de referencia, no parece que los estados reportados

desde los tres marcos de referencia puedan alcanzarse a través de una transformación de Lorentz. Ya vimos que en Myrsvold (2002) se da una solución para poder pasar de un marco de referencia a otro si se toma en cuenta la dinámica. No obstante, si se pretende también resolver el problema de la ontología, entonces es menester postular algo que exista en el espacio físico y que sea invariante relativista. Es por ello que analizaremos este ejemplo en términos de la densidad de masa propuesta por Bedingham *et. al.* (2014). Pero antes de ello, veamos cómo se ve el ejemplo utilizando la densidad de masa no-relativista.

A grandes rasgos, podemos pensar el proceso de “abrir” las cajas como la interacción que tiene la densidad de masa con un aparato de medición, la cual hace que inevitablemente se enreden, provocando un colapso por la gran cantidad de partículas que tiene este último. Sabemos que al momento de colapsar, la masa se “reacomodará” en las cajas que aún no han sido abiertas. Si tomamos la definición no-relativista de la densidad de masa (3.11), desde  $\Sigma$ , en donde ambas cajas se abren en  $\tau$ , tendremos que la densidad de masa colapsa en su totalidad para puntos en  $\Gamma_3$  posteriores al tiempo  $\tau$  instantáneamente —véase Figura 3.4.

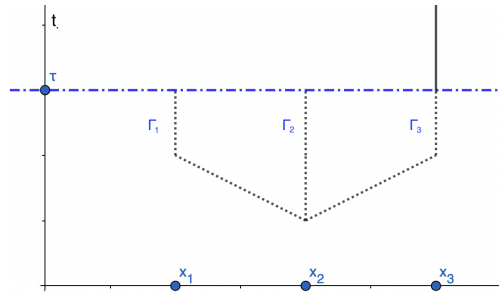


Figura 3.4: Diagrama de espacio-tiempo desde un marco de referencia en donde ambas cajas se abren simultáneamente. Las líneas punteadas indican la presencia de masa de  $\frac{m_0}{3}$ , mientras que en la continua de  $m_0$ .

Ahora bien, es menester ver qué sucede con la distribución de masa desde  $\Sigma'$  y  $\Sigma''$ . En el primer caso, tenemos que se abre primero la caja que se encuentra en  $\Gamma'_1$  y, posteriormente, aquella que define a  $\Gamma'_2$ . Supongamos que la apertura de ambas corresponden, respectivamente, a  $\tau'_1$  y  $\tau'_2$ . Así, como se muestra en la figura 3.5, en el intervalo de tiempo entre  $\tau'_1$  y  $\tau'_2$ , la densidad de masa estará distribuida entre la segunda y la tercera caja. En cada una de ellas habrá  $\frac{m_0}{2}$ .

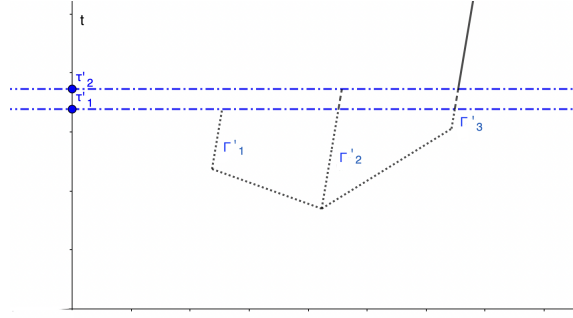


Figura 3.5: Diagrama de espacio-tiempo desde un marco de referencia en donde se abre la caja en  $\bar{x}'_1$  y, posteriormente, en  $\bar{x}'_2$ . Las líneas que constan de puntos indican la presencia de  $\frac{m_0}{3}$ , las conformadas por segmentos de recta indican que hay  $\frac{m_0}{2}$ , mientras en la continua hay  $m_0$ .

De manera análoga, desde  $\Sigma''$ , en el intervalo que va de  $\tau''_1$  y  $\tau''_2$ , la densidad de masa estará distribuida entre la primera y tercer caja, habiendo  $\frac{m_0}{2}$  en cada una de ellas.

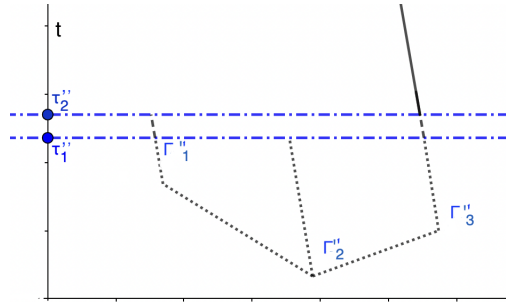


Figura 3.6: Diagrama de espacio-tiempo desde un marco de referencia en donde se abre la caja en  $\bar{x}''_2$  y, posteriormente, en  $\bar{x}''_1$ . Las líneas que constan de puntos indican la presencia de  $\frac{m_0}{3}$ , las conformadas por segmentos de recta indican que hay  $\frac{m_0}{2}$ , mientras en las continuas hay  $m_0$ .

Esto es problemático en tanto que la densidad de masa depende del marco de referencia. Desde  $\Sigma$ , sólo hay dos distribuciones de materia: antes de la medición, hay  $\frac{m_0}{3}$  en cada caja; posteriormente, toda estará concentrada en la tercera caja. Desde  $\Sigma'$ , habrá un estado intermedio, entre  $\tau'_1$  y  $\tau'_2$ , en donde la función  $m$  tomará el valor  $\frac{m_0}{2}$  en la segunda y tercera caja; mientras que, desde  $\Sigma''$ , entre  $\tau''_1$  y  $\tau''_2$ , habrá una distribución de  $\frac{m_0}{2}$  en la primera y tercer cajas.

Dicho en otras palabras, si el distintos marcos de referencia le adjudicarán distintas cantidades de materia a los mismo puntos espacio-temporales. Esto es problemático porque entonces la ontología fundamental que se está proponiendo desde  $GRW_m$  depende del marco de referencia, lo cual entra en directa tensión con la relatividad.

Esta variación emana de que la densidad de masa está construida sobre funciones

de onda definidas en superficies de simultaneidad, por lo que la diferencia, dependiendo del sistema de referencia, que se genera en las funciones de onda, en el intervalo entre las aperturas de la primera y segunda caja, que se mencionaron al principio de la sección tienen este efecto sobre  $m$ .

No obstante, en el caso relativista, debido a que la densidad de masa está construida con base en la función de onda definida sobre el cono pasado de luz del punto en donde se quiere evaluar, entonces no se acomodará de manera instantánea. Ésta habrá de colapsar para los puntos que tengan en su pasado causal la apertura de las otras cajas. Otra manera de verlo es que la masa ya se habrá acomodado para los puntos sobre la línea de mundo de la tercera caja que estén al futuro del cono futuro de luz de la apertura de las otras cajas. En el caso de  $\Sigma$ , como las aperturas de las cajas definidas sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son simultáneas, entonces la masa correspondiente a cada caja abierta  $\frac{m_0}{3}$  se situará en la línea de  $\Gamma_3$  hasta que sus conos futuros de luz alcancen dicha caja —véase la Figura 3.7.

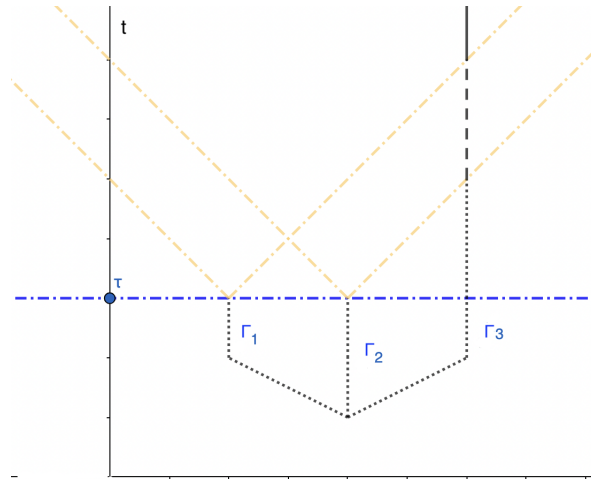


Figura 3.7: Diagrama de espacio-tiempo de la densidad de masa relativista desde un marco de referencia en donde ambas cajas se abren simultáneamente. Las líneas punteadas indican la presencia de  $\frac{m_0}{3}$ , la que tiene segmentos discontinuos corresponde a  $\frac{2m_0}{3}$ , mientras que en la continua  $m_0$ .

En este caso, como el cono futuro de luz de la medición en  $(\bar{x}_2, \tau)$  llega antes que la de  $(\bar{x}_1, \tau)$ , entonces hay un intervalo de tiempo en el que hay  $\frac{2m_0}{3}$  en la tercera caja, para luego colapsar a contener la totalidad de la masa.

Desde  $\Sigma'$ , la medición en  $(\bar{x}'_1, \tau'_1)$  es anterior a aquélla que se realiza en  $(\bar{x}'_2, \tau'_2)$ . Sin embargo, a diferencia del caso no-relativista, la definición de la función  $m$  a través





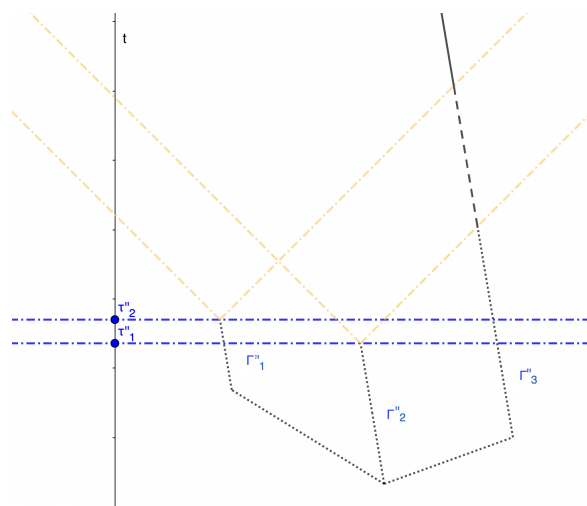


Figura 3.9: Diagrama de espacio-tiempo desde un marco de referencia en donde primero se abre la caja de en medio y luego la de la izquierda. Las líneas punteadas indican la presencia de  $\frac{m_0}{3}$ , la que tiene segmentos discontinuos corresponde a que hay  $\frac{2m_0}{3}$ , mientras que en la continua  $m_0$ .

# Conclusiones

El trabajo comenzó con la exposición de algunos aspectos de la mecánica cuántica que parecen entrar en tensión con la relatividad especial. De igual manera, se hizo énfasis en algunas dificultades conceptuales intrínsecas a la primera de ellas. Se hizo una breve exposición sobre los problemas de la ontología y de la medición, y se expuso el teorema de Bell. De la misma forma, más particularmente, se discutió aquello que Albert llama no-narrabilidad. Se puso de manifiesto que, aunque Myrvold ofrece una solución a dicha situación, ésta no es suficiente para establecer una compatibilidad fundamental entre las dos teorías. Para ello, se expuso una ontología relativista para la teoría de GRW propuesta por Bedingham *et. al.* y se mostró que, con base en ella, la subdeterminación mencionada desaparece.

Pudo observarse que la no-localidad no es *ipso facto* un impedimento para la construcción de una teoría cuántica relativista. Desde GRW es posible construir modelos de este estilo. De igual manera, es preciso mencionar que la búsqueda de una coexistencia pacífica con la relatividad especial no debe hacerse al nivel de la función de onda. De esta manera,  $GRW_m$  y  $GRW_f$  parecen satisfacer el requerimiento de poder responder la pregunta “¿qué hay en el mundo?”; resolver el problema de la medición y ser invariantes de Lorentz. Si bien es cierto que hay quienes afirman que la función de onda es suficiente y no es necesario presentar una ontología primitiva, no es evidente cómo es que aquéllos puedan enfrentar el problema de la subdeterminación de las historias cuánticas.

Ahora bien, es menester mencionar que tanto la teoría de GRW, como su versión particular con la densidad de masa relativista ya mencionada, no están deprovistas de dificultades conceptuales. Por un lado, tenemos el problema de las colas. Cuando se genera un colapso a partir de la multiplicación por la gaussiana centrada en el punto de

localización, el resto de los máximos —o “colas”—, aunque se hacen muy pequeños, no desaparecen. Por lo que siempre existe una “sombra” de la superposición que persiste, incluso de objetos macroscópicos. Aquí, la pregunta expresamente es ¿qué cuenta como un objeto real?, pues parece que persisten versiones de muy poca masa de las superposiciones macroscópicas.

Por otro lado, el hecho de que esta teoría no sea empíricamente equivalente a la teoría cuántica estándar acarrea una virtud: las teorías de colapso son, en principio, falseables/comprobables. Cómo ya se mencionó, los posibles valores de las constantes de la naturaleza que introducen estas teorías se ha ido acotando a través de los resultados empíricos, por lo que parece que eventualmente tendremos una base sólida para corroborar o falsear la teoría. Esto, aunado a la resolución de los problemas de la medición y de la ontología y a la compatibilidad intrínseca con la estructura causal de la relatividad, hace de las teorías de colapso un campo fértil de exploración.

# Bibliografía

Albert, D. Z. (1992). *Quantum mechanics and experience*. Estados Unidos de América: Harvard University Press.

Albert, D. Z. (2015). Physics and narrative. En D. Z. Albert (Ed.), *After physics* (p. 106-123). Harvard University Press.

Allori, V., Dürr, D., Goldstein, S., y Zanghì, N. (2002). Seven steps towards the classical world. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(4), S482.

Aspect, A., Dalibard, J., y Roger, G. (1981). Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters*(47), 460.

Aspect, A., Grangier, P., y Roger, G. (1982). Experimental test of realistic local theories via bell's theorem. *Physical Review Letters*(49), 1804-1807.

Becker, A. (2018). *What is real? the unfinished quest for the meaning of quantum physics*. Estados Unidos de América: Hachette Book Group.

Bedingham, D., Dürr, D., Ghirardi, G., Goldstein, S., Tumulka, R., y Zanghì, N. (2014). Matter density and relativistic models of wave function collapse. *Journal of Statistical Physics*, 154(1), 623–631.

Bell, J. S. (1964). On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Publishing Co.*, 1(3), 195-200.

Bell, J. S. (1987a). La nouvelle cuisine. En J. S. Bell (Ed.), *Speakable and unspeakable in quantum mechanics* (p. 232-247). Cambridge University Press.

- Bell, J. S. (1987b). The theory of local beables. En J. S. Bell (Ed.), *Speakable and unspeakable in quantum mechanics* (p. 232-247). Cambridge University Press.
- Bohm, D., y Bub, J. (1966). A proposed solution of the measurement problem in quantum mechanics by a hidden variable theory. *Reviews of Modern Physics*, 38(3), 453.
- Chen, E. K. (2019). Realism about the wave function. *Philosophy Compass*, 14(7), e12611.
- Ciepielewski, G. S., Okon, E., y Sudarsky, D. (2020). On superdeterministic rejections of settings independence. *arXiv preprint arXiv:2008.00631*.
- Clapp, M. (2015). *Análisis matemático*. México: papirhos, IM-UNAM.
- Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., y Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 23(15), 880.
- Crossley, M. D. (2005). *Essential topology*. Londres: Springer Verlag.
- Dirac, P. A. M. (1958). *The principles of quantum mechanics*. Cambridge: Oxford University Press.
- Dürr, D., y Lazarovici, D. (2020). *Understanding quantum mechanics: The world according to modern quantum foundations*. Springer Nature.
- Egg, M., y Esfeld, M. (2015). Primitive ontology and quantum state in the grw matter density theory. *Synthese*, 192(10), 3229–3245.
- Einstein, A., Podolsky, B., y Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10), 777-780.
- Feldmann, W., y Tumulka, R. (2012). Parameter diagrams of the grw and csl theories of wavefunction collapse. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(6), 065304.
- Friedberg, S., Insel, A., y Spence, L. (2014). *Linear algebra*. Estados Unidos de América: Pearson Education Limited.

Ghirardi, G., y Bassi, A. (2020). Collapse Theories. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Summer 2020 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/qm-collapse/>.

Ghirardi, G., Rimini, A., y Weber, T. (1986). Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Physical Review D*(34), 470-691.

Goldstein, H., Poole, C. P., y Safko, J. L. (2001). *Classical mechanics*. Estados Unidos de América: Addison Wesley.

Griffiths, D. J. (1995). *Introduction to quantum mechanics*. Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005).

Harrigan, N., y Spekkens, R. W. (2010). Einstein, incompleteness and the epistemic view of quantum states. *Found Phys*(40), 125-157.

Hubert, M., y Romano, D. (2018). The wave-function as a multi-field. *European Journal for Philosophy of Science*, 8(3), 521–537.

Kadison, R. V., y Ringrose, J. R. (1983). *Fundamentals of the theory of operator algebras. volume 1: Elemental theory*. San Diego: American Mathematical Society.

Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1996). *The classical theory of fields*. Oxford: Butterworth-Heinenann.

Maudlin, T. (2010). Time, topology and physical geometry. *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*(84), 63-78.

Maudlin, T. (2011). *Quantum non-locality and relativity. metaphysical intimations of modern physics*. Singapur: Wiley-Blackwell.

Maudlin, T. (2012). *Philosophy of physics. space and time*. Estados Unidos de América: Princeton University Press.

Maudlin, T. (2013). The nature of the quantum state. *The wave function: Essays on the metaphysics of quantum mechanics*, 126–53.

- Maudlin, T. (2018). Ontological clarity via canonical presentation: Electromagnetism and the aharonov–bohm effect. *Entropy*, 20(6), 465.
- Maudlin, T. (2019). *Philosophy of physics. quantum theory*. Estados Unidos de América: Princeton University Press.
- Maudlin, T., Okon, E., y Sudarsky, D. (2020). On the status of conservation laws in physics: Implications for semiclassical gravity. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 69, 67–81.
- Myrvold, W. (2002). On peaceful coexistence: is the collapse postulate incompatible with relativity. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*(33), 435-466.
- Myrvold, W. (2016a). Lessons of bell’s theorem: Nonlocality, yes; action at a distance, not necessarily. En M. Bell y S. Gao (Eds.), *Quantum nonlocality and reality: 50 years of bell’s theorem* (p. 238–260). Cambridge University Press.
- Myrvold, W. (2016b). Quantum mechanics and narratability. *Foundations of Physics*, 46(7), 759–775.
- Myrvold, W. (2021). Relativistic constraints on interpretations of quantum mechanics.
- Myrvold, W., Genovese, M., y Shimony, A. (2020). Bell’s Theorem. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Fall 2020 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/bell-theorem/>.
- Norsen, T. (2018). *Foundations of quantum mechanics. an exploration of the physical meaning of quantum theory*. Suiza: Springer International Publishing.
- Okon, E. (2014). El problema de la medición en mecánica cuántica. *Revista Mexicana de la Física*(60), 130-140.
- Okon, E., y Sebastián, M. Á. (2018). A consciousness-based quantum objective collapse model. *Synthese*, 1–21.

- Pearle, P. (1989). Combining stochastic dynamical state-vector reduction with spontaneous localization. *Physical Review A*, 39(5), 2277.
- Pusey, M. F., Barrett, J., y Rudolph, T. (2012). On the reality of the quantum state. *Nature Phys*(8), 475-478.
- Romano, D. (2020). Multi-field and bohm's theory. *Synthese*, 1-23.
- Teller, P. (1986). Relational holism and quantum mechanics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 37(1), 71-81.
- Weideman, T. (2020). *Wave functions*. Descargado 2020-05-05, de <https://chem.libretexts.org/@go/page/16904>
- Wigner, E. (1959). *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press.