



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA**

**DISEÑO DE UN VERTEDOR ESCALONADO COMO ALTERNATIVA DE  
DISIPACIÓN DE ENERGÍA**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**EVA XIMENA GONZÁLEZ RAMÍREZ**

**TUTOR:**  
**M.I. JOSÉ ALFREDO GONZÁLEZ VERDUGO**  
**INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA**

**JIUTEPEC, MORELOS, MÉXICO, OCTUBRE 2021**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. Espinoza Ayala María Joselina C.  
Secretario: M. en C. Salgado Maldonado Gilberto  
1 er. Vocal: M.I. González Verdugo José A.  
2 do. Vocal: M.I. Gómez Martínez Juan Fco.  
3 er. Vocal: M.I. Escalante Estrada Mauricio De J.

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

**TUTOR DE TESIS:**

M.I. JOSÉ ALFREDO GONZÁLEZ VERDUGO

-----  
**FIRMA**

# CONTENIDO

Introducción .....	1
1. Capítulo 1: Formulación del problema.....	3
1.1 Objetivos .....	3
1.1.1 Objetivo General .....	3
1.1.2 Objetivos específicos .....	3
1.2 Justificación.....	4
1.3 Hipótesis.....	4
2. Capítulo 2: Marco teórico.....	5
2.1 Antecedentes .....	5
2.2 Tipos de flujo .....	8
2.2.1 Flujo skimming o rasante .....	8
2.2.2 Flujo de transición .....	10
2.2.3 Flujo nappe o saltante.....	11
2.3 Criterios de diseño.....	12
2.3.1 Ruff & Ward (2002) .....	12
2.3.2 Boes & Hager (2003) .....	14
2.3.3 González & Chanson (2007) .....	19
2.4 Modelación numérica .....	23
2.4.1 Modelos de turbulencia .....	25
2.4.2 Condiciones de frontera.....	27
3. Capítulo 3: Metodología.....	29
3.1 Revisión de las características del proyecto .....	29
3.1.1 Vertedor liso con salto de esquí.....	31
3.2 Vertedor escalonado .....	35
3.2.1 Boes & Hager .....	38
3.2.2 González & Chanson .....	43
3.3 Modelación numérica.....	47
3.3.1 Mallado .....	47
3.3.2 Condiciones de frontera.....	48
3.3.3 Condiciones iniciales .....	49

3.3.4 Simulación.....	49
3.1 Tanques amortiguadores .....	53
3.1.1 Saint Anthony Falls.....	56
3.1.2 Diseño propuesto (Escalón).....	64
3.1.3 Diseño original .....	70
4. Capítulo 4 - Análisis de resultados.....	74
4.1 Comparación entre simulación numérica y criterios de diseño .....	74
4.2 Comparación entre distintas estructuras terminales .....	78
4.4 Energía disipada .....	82
5. Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones .....	84
6. Anexo.....	86
6.1 Código Matlab para procesamiento de graficas.....	86
7. Referencias .....	89

---

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Resumen de modelos realizados por diversos investigadores.....	7
Tabla 3.1 Elevaciones y capacidades del vaso de almacenamiento.....	31
Tabla 3.2 Datos generales de la obra de excedencias.....	32
Tabla 3.3 Dimensiones de bloques de mallas.....	48
Tabla 3.4 Condición de frontera para cada bloque. ....	49
Tabla 3.5 Mallado. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF aguas abajo .....	60
Tabla 3.6 Condiciones de frontera. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF aguas abajo.....	61
Tabla 3.7 Mallado. Vertedor escalonado con un tanque amortiguador propuesto. ....	67
Tabla 3.8 Condiciones de frontera. Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto aguas abajo.....	68
Tabla 3.9 Mallado. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto.....	70
Tabla 3.10 Condiciones de frontera. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto.....	70
Tabla 4.1 Comparación entre criterios de diseño y simulación numérica.....	77
Tabla 4.2 Disipación de energía diferentes tanques amortiguadores.....	82

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Zona de recirculación en tránsito de flujo rasante. Extraído de Chanson, Youichi, & Iwao (2000) .....	9
Figura 2.2 Tránsito del flujo rasante. Extraído de Matos & Meireles (2014).....	10
Figura 2.3 Tránsito del régimen saltante Extraído de: Tuna & Emiroglu (2011) .....	11
Figura 2.4 Detalle de la herramienta FAVOR con diferentes tamaños de malla en cresta de vertedor. a) malla 0.40x0.40 m, b) malla 0.30x0.30 m, c) malla 0.2x 0.2 m .....	24
Figura 3.1 Ubicación de la región Hidrológica 25 San Fernando-Soto La Marina. Diario Oficial de la Federación .....	30
Figura 3.2 Localización de la presa “La Libertad”. Imagen Satelital. Google Earth.....	30
Figura 3.3 Esquema de propuesta de vertedor liso con salto de esquí.....	33
Figura 3.4 Detalle de la plantilla de concreto aguas abajo del salto de esquí. ....	33

---

Figura 3.5 Detalle de elevaciones en la obra de excedencias.....	34
Figura 3.6 Diseño de vertedor escalonado, con escalones desde la cresta .....	36
Figura 3.7 Escalones aguas arriba del punto de tangencia.....	37
Figura 3.8 Escalones aguas abajo del punto de tangencia.....	37
Figura 3.9 Vertedor escalonado con plantilla de concreto aguas abajo.....	47
Figura 3.10 Mallado vertedor escalonado. Vista: Perfil. ....	48
Figura 3.11 Mallado vertedor escalonado. Vista: xyz .....	48
Figura 3.12 Vertedor escalonado, condición inicial del fluido.....	49
Figura 3.13 Baffles & probes: Vertedor escalonado .....	51
Figura 3.14 Velocidad plano xz. Vertedor escalonado.....	54
Figura 3.15 Numero de Froude plano xz. Vertedor escalonado .....	55
Figura 3.16 Tanque amortiguador tipo SAF. Vista de planta y longitudinal.....	56
Figura 3.17 Tanque amortiguador tipo SAF aguas abajo de vertedor escalonado. ....	59
Figura 3.18 Detalle tanque amortiguador tipo SAF .....	59
Figura 3.19 Detalle tanque amortiguador tipo SAF (3D) .....	60
Figura 3.20 Mallado vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF. Vista: perfil .....	60
Figura 3.21 Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF: condiciones iniciales y de frontera.....	61
Figura 3.22 Velocidad plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF. ....	62
Figura 3.23 Numero de Froude plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador.....	62
Figura 3.24 Velocidad 3D. Vertedor escalonado con tanque amortiguador .....	63
Figura 3.25 Numero de Froude 3D. Vertedor escalonado con .....	63
Figura 3.26 Diseño de propuesta de tanque amortiguador. ....	66
Figura 3.27 Diseño de propuesta de tanque amortiguador. (Detalle).....	66
Figura 3.28 Mallado vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto. Vista: perfil ...	67
Figura 3.29 Mallado vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto. Vista: xyz .....	67
Figura 3.30 Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto: condiciones iniciales y de frontera.....	68
Figura 3.31 Velocidad plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto. ....	68
Figura 3.32 Numero de Froude plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto. ....	69
Figura 3.33 Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto. ....	71

---

---

Figura 3.34 Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto (Detalle) .....	71
Figura 3.35 Mallado. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto. Vista: perfil .....	72
Figura 3.36 Mallado. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto. Vista: xyz. ....	72
Figura 3.37 Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto: condiciones iniciales y de frontera. ....	72
Figura 3.38 Velocidad plano xz. Vertedor original.....	73
Figura 3.39 Numero de Froude plano xz. Vertedor original.....	73
Figura 4.1 Formación del pseudofondo, vertedor escalonado.....	75
Figura 4.2 Magnitud de velocidad en m/s, plano xz. Vertedor escalonado.....	75
Figura 4.3 Numero de Froude, plano xz. Vertedor escalonado.....	76
Figura 4.4 Contenido de aire plano xz. Vertedor escalonado .....	76
Figura 4.5 Comparación de longitud de tanque amortiguadores. ....	83

## ÍNDICE DE GRAFICAS

Gráfica 3.1 Estabilidad límite y tiempo de cálculo: Vertedor escalonado. ....	50
Gráfica 3.2 Volumen del fluido: Vertedor escalonado. ....	50
Gráfica 3.3 Elevación de superficie libre: Vertedor escalonado. ....	51
Gráfica 3.4 Gasto: Vertedor escalonado.....	52
Gráfica 3.5 Tirante en el eje x. Vertedor escalonado.....	53
Gráfica 3.6 Velocidad. Vertedor escalonado .....	54
Gráfica 3.7 Numero de Froude. Vertedor escalonado.....	55
Gráfica 4.1 Comparación entre estructuras terminales: Velocidad. ....	78
Gráfica 4.2 Comparación entre estructuras terminales: Número de Froude .....	80
Gráfica 4.3 Comparación entre estructuras terminales: Superficie libre.....	81

---





# Introducción

Esta investigación trata de la propuesta de diseño de un vertedor escalonado y sus estructuras terminales como alternativa de disipación de la energía respecto a un vertedor liso convencional con salto de esquí y plantilla de concreto aguas abajo. A través de modelaciones numéricas con un software especializado en dinámica de fluidos computacional permitieron experimentar numéricamente y analizar posteriormente el comportamiento del fluido en distintas estructuras, con la finalidad de conocer cuál de ellas presentaba mayor eficiencia en la disipación de energía.

Se eligió un vertedor escalonado ya que este no abarcaría más área de construcción que la originalmente diseñada e incluso las estructuras finales podrían ser menores a lo especificado anterior, motivación que llevo a investigar distintas propuestas que resultaran con mayor o igual eficiencia en la disipación de energía y que las velocidades del agua en la zona de descarga se mantengan menores o iguales a límite establecido.

Esta investigación tuvo como objetivo diseñar un vertedor escalonado tal que se presenten condiciones de baja velocidad del agua debajo de las estructuras terminales, disipando la mayor cantidad de energía posible. Para cumplir este objetivo se tuvieron que efectuar objetivos específicos, los cuales se cumplieron, estos consistieron en validar dos de los criterios de diseño existentes para vertedores escalonados; proponer un vertedor escalonado y estructuras terminales (tanque amortiguador) que logran disipar la energía en cantidades mayores o iguales a las del vertedor original y evaluar la eficiencia de energía disipada en cada una de las propuestas realizadas.

Esta tesis se encuentra estructurada por cinco capítulos (formulación del problema, marco teórico, metodología, análisis de resultados y conclusiones & recomendaciones) además de un sexto llamado anexos en donde se incluyen los códigos de Matlab para el postproceso de resultados y finalmente las referencias de los artículos, libros y recursos electrónicos consultados durante la investigación.

En el primer capítulo se presenta una descripción de la problemática, así como la formulación de problema en donde se establecieron objetivos generales y específicos, la justificación del porqué realizar la investigación y la hipótesis de lo que se esperaba obtener al final de esta. En el segundo capítulo se desarrolló el marco teórico que contempla algunos antecedentes del progreso de los

vertedores escalonados alrededor del mundo, también se explica el comportamiento del fluido sobre los escalones y los tipos de flujo que se pueden presentar; se muestra la teoría de tres criterios de diseño que pueden ser aplicados en ante distintas condiciones y la teoría de la modelación numérica.

El tercer capítulo contiene la metodología de experimentación numérica, comenzando con la revisión de las características físicas del lugar en donde se pretende construir la presa y el diseño original de la obra de excedencias; después se realizó el diseño del vertedor escalonado, siguiendo el criterio de diseño de Boes & Hager y el de González & Chanson, posteriormente se presenta el proceso de la modelación y simulación numérica cuyos resultados fueron utilizados para realizar propuestas de estructuras terminales aguas abajo de la obra de excedencias, las cuales también fueron simuladas con el mismo proceso.

En el cuarto capítulo se muestra el análisis de resultados, en donde los datos extraídos se procesaron para su análisis, se realizó una comparación entre los resultados de la experimentación numérica y los teóricos calculados de los criterios de diseño. También se efectuó una comparación entre las diferentes propuestas de estructuras terminales, en donde además de calcular la energía disipada en cada una de ellas, se revisó la longitud que tendría cada una.

Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones observadas de la investigación y los resultados contenidos de las simulaciones, así como recomendaciones orientadas a posibles investigaciones futuras.

# Capítulo 1: Formulación del problema

El vertedor escalonado que se diseñará forma parte de obra de excedencias de la presa “La Libertad”, que se tiene proyectada construir en el municipio de Montemorelos en su límite con Linares, Nuevo León. De acuerdo con el plan hídrico estatal de Monterrey la presa aportará 1.5 m<sup>3</sup>/s a la zona metropolitana que se sumará a lo ya aportado de la presa Cerro prieto a través del acueducto Linares-Monterrey; se proyecta que esta obra abastezca a una población de 5 millones de habitantes de la metrópoli.

La zona en donde se realizará la descarga del vertedor se encuentra un acueducto que transporta agua hacia Monterrey, y un puente vehicular que atraviesa el río Potosí. Actualmente se cuenta con el diseño de un vertedor liso con salto de esquí, como parte del proyecto original, en este tipo de vertedores se suelen presentar altas velocidades al pie de la cortina si no se cuenta con la obra disipadora de energía adecuada; lo cual podría ocasionar una rápida erosión del fondo del cauce y en las obras que se presentan aguas abajo.

Con la propuesta de construcción de un vertedor escalonado sustituyendo al actual liso, **¿qué cantidad de energía se disipará comparado con el diseño del vertedor original?**

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo General

Diseñar un vertedor escalonado, tal que se presenten condiciones de baja velocidad aguas abajo de la obra de excedencia disipando la mayor cantidad de energía posible.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Validar los criterios existentes para el diseño de vertedores escalonados
- Proponer un diseño escalonado que logre disipar la mayor cantidad de energía ó igual a la que se presenta en el diseño original
- Estudiar distintas estructuras disipadoras de energía aguas abajo de la obra de excedencias
- Evaluar la eficiencia de disipación de energía en distintos escenarios

## **1.2 Justificación**

La presente investigación se enfoca en proponer una nueva estructura disipadora de energía, para la obra de excedencias de la presa “La libertad”, ya que un vertedor escalonado disipará una gran cantidad de energía en una longitud más pequeña de descarga lo permitirá disminuir los posibles riesgos de erosión aguas abajo de la descarga en condiciones de niveles máximos extraordinarios. Con el fin de asegurar un correcto funcionamiento en la descarga de la avenida de diseño, se estudiará la obra de excedencias a través de modelo numérico, en donde se revisará el comportamiento hidráulico sobre la obra de excedencias y aguas abajo de ella.

Los resultados que se obtengan tras las modelaciones numéricas permitirán conocer las condiciones hidráulicas en un modelo real, proporcionando la información para modificar u optimizar el diseño y/o dimensiones del vertedor escalonado, para que se cumpla con las condiciones hidráulicas especificadas en el proyecto, permitiendo seleccionar la mejor opción como estructura disipadora de energía.

## **1.3 Hipótesis**

La propuesta de un vertedor escalonado sustituyendo al diseño de proyecto en la presa Libertad permitirá disipar por lo menos 75% de energía específica y las velocidades aguas abajo de la obra de excedencias se reducirán a valores menores de 5 m/s.

## Capítulo 2: Marco teórico

### 2.1 Antecedentes

El concepto de vertedor escalonado inició a finales del siglo XIX y principios del XX en algunas presas de Estados Unidos, en donde los escalones eran de roca y mortero, implementándolo por primera vez en la presa New Croton al norte de Nueva York en 1905. Con el paso de los años diversos investigadores alrededor del mundo han estudiado este tipo de vertedores con el fin de conocer el comportamiento del flujo y sus aplicaciones en distintos proyectos.

Los vertedores escalonados ofrecen grandes ventajas comparadas con los vertedores lisos o convencionales, Boes & Hager (2003) mencionan que la construcción de este tipo de vertedores escalonados es más rápida y económica, ofrecen una significativa disipación de energía a través de los escalones que funcionan como “macro-rugosidades”, lo que provoca una reducción en las dimensiones del tanque de amortiguamiento al pie del vertedor.

Rice & Kadavy (1996) estudiaron el vertedor escalonado de la presa Salado Creek en San Antonio, Texas. Se tenía como objetivo estudiar el comportamiento del flujo de agua desde la cresta del vertedor, escalones y tanque amortiguador, y así poder evaluar la efectividad en la disipación de la energía. Estos investigadores elaboraron un modelo a escala 1:20, en donde se comprobó que la energía disipada con los escalones es mayor que con un canal liso, para los gastos de 14.5, 9.66 y 5.81 m<sup>3</sup>/s/m la energía disipada por los escalones fue 2.4, 2.9 y 2.8 veces más grande respectivamente, además que con menor descarga, mayor es la energía disipada, lo mismo fue dicho por Willey, Ewing, Lesleighter, & Dymke (2010) investigadores australianos que trabajaron en el diseño del vertedor escalonado de la presa Enlarged Cotter en la ciudad de Canberra, Australia.

Los investigadores Ruff & Ward (2002) establecieron criterios de diseño para vertedores escalonados para el United States Bureau of Reclamation (USBR), realizaron dos pruebas con escalones de distinta altura (0.3048 y 0.6096 m) , con el mismo gasto por unidad de ancho, determinando que el factor de fricción  $f$ , la velocidad promedio sobre los escalones, el tirante ( $d_w$ ) cuando se presenta el flujo uniforme y la energía disipada, tienden a ser similares independientemente de la altura del escalón.

Felder & Chanson (2016) realizaron un criterio de diseño basado en datos experimentales evaluando la energía residual en un vertedor escalonado con pendientes pequeñas (8.90-26.60°) y distintas configuraciones en los escalones, estos investigadores propusieron un término adimensional  $\left(\frac{H_D}{d_c}\right)$  en términos de la carga de diseño ( $H_D$ ) y el tirante crítico en la cresta del vertedor ( $d_c$ ), en donde comparan el flujo en transición y el flujo skimming independientemente de la altura del vertedor o del aire contenido en el flujo no uniforme.

Sarkardeh, Marosi, & Roshan (2015) investigadores iraníes, realizaron un modelo físico y numérico del vertedor de la presa Zhaveh, localizada en la provincia de Kordestan al oeste de Irán, se modeló el vertedor a una escala de 1:25, con escalones 1.2 m de altura y 1.0 m de longitud, por lo que la pendiente general del vertedor tiene 51.34°. Estos investigadores realizaron la comparación de los resultados entre un modelo físico y un modelo numérico, probaron 5 alternativas con distintas configuraciones de escalones, en donde se comprobó que la modelación física y numérica sí coinciden; además concluyen que realizar un apropiado modelo físico o numérico antes de la construcción de la obra resulta en un ahorro de costos y tiempo en el proyecto.

Sunil Kote & Baburao Nangare (2019) investigadores del departamento de ingeniería civil del Instituto de Tecnología Dr. D.Y.Patil, realizaron el modelo físico de la presa Khadakwasla, situada en Pune, Maharashtra. La escala del modelo fue 1:33, con 12 escalones de 4 cm, además al pie del vertedor se agregó una cubeta de lanzamiento, las pruebas se realizaron con un gasto de 0.41 m<sup>3</sup>/s/m. Los resultados mostraron una disipación de energía del 81.23%.

En la tabla 4.1 se muestra en resumen las características de los modelos realizados por los investigadores ya mencionados, y en aquellos en donde fue posible también se menciona la energía disipada al pie del vertedor.

Tabla 2.1 Resumen de modelos realizados por diversos investigadores

Referencia	Pendiente		Escala del modelo	Altura del escalón [m]	Número de escalones	Gasto unitario [m <sup>3</sup> /s/m]	Energía disipada
	grados [°]	V:H [m]					
Rice & Kadavy (1996)	21.80	1:2.50	1:20	0.610	27	14.5	48%
						9.66	58%
						5.81	71%
Ruff & Ward (2002)	26.60			0.3048	40	0.7079	79%
				0.6096	20		79%
Willey, Ewing, Lesleighter, & Dymke (2010)	36.87	1:0.75	1:45	0.600		8.00	80%
						17.00	50%
Felder & Chanson (2013)	8.90			0.05-0.10	21	0.004-2.34	
	26.60				10		0.008-1.91
Sarkardeh, Marosi, & Roshan (2015)	51.34	1.2:1	1:25	0.75-1.2	variables	0.72	
Sunil Kote & Baburao Nangare (2019)	50.00		1:33	0.400	12	0.41	81%

Elaboración propia



En presas de gravedad o de concreto, el uso de canales escalonados como vertedores es común, debido a que el método de colocación de concreto compactado con rodillo (CCR) es compatible con la superficie escalonada de la cara aguas abajo de la cortina de la presa (González & Chanson, 2007).

## **2.2 Tipos de flujo**

El flujo sobre un vertedor escalonado se divide en función del gasto de operación en tres diferentes regímenes: flujo rasante o “skimming”, flujo transitorio, y flujo saltante o “nappe” (González & Chanson, 2007).

### **2.2.1 Flujo skimming o rasante**

El flujo skimming o rasante, se presenta cuando los escalones son cortos y las descargas grandes, como el gasto de diseño (Boes & Hager, 2003b), el agua en este régimen se desliza entre los bordes del escalón desarrollado vórtices en nichos triangulares. Esta recirculación se mantiene a través del intercambio de energía con el flujo rasante en una capa de corte altamente intensa que existe a lo largo de la línea del límite virtual o pseudo-fondo (Frizell & Frizell 2015, González & Chanson 2004).

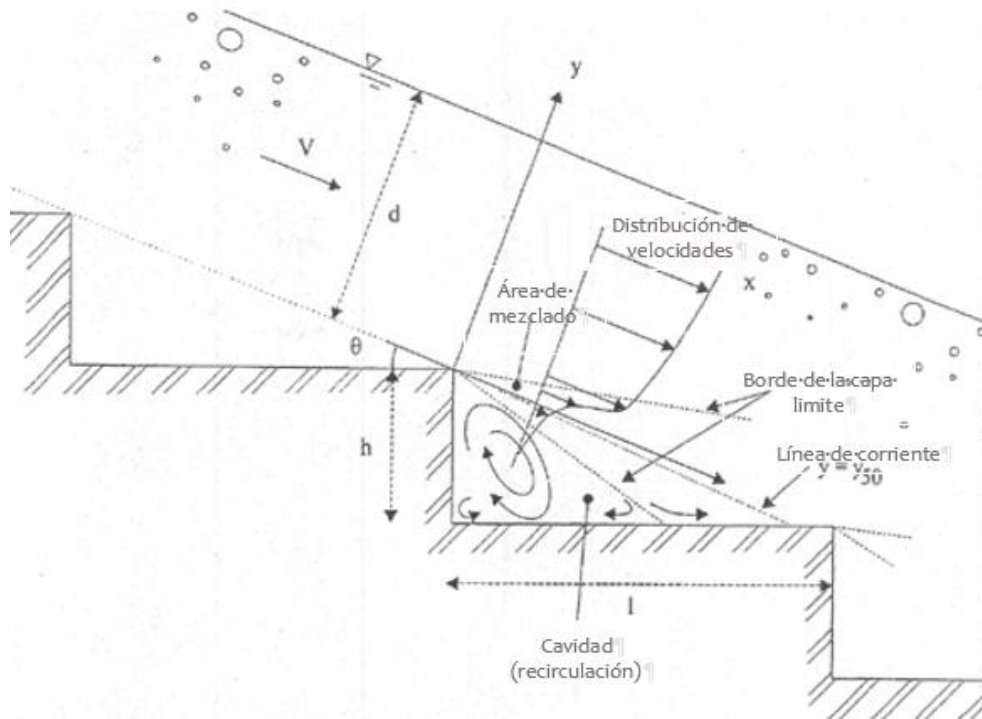


Figura 2.1 Zona de recirculación en tránsito de flujo rasante. Extraído de Chanson, Youichi, & Iwao (2000)

Matos & Meireles (2014) dividen el flujo rasante en 4 regiones (Figura 2.1); la primera de ellas es la región no aireada que comienza desde la descarga en la cresta del vertedor hasta el punto de inicio de ingreso de aire, en esta región comienza a crecer la capa límite hasta que alcanza la superficie libre; la segunda región llamada "parcialmente aireada" inicia en el punto de ingreso de aire y termina cuando se completa el aireamiento; la tercer región ya se encuentra totalmente aireada y se encuentra en flujo gradualmente variado; si el vertedor es lo suficientemente largo o las condiciones geométricas son las adecuadas se llegara a la cuarta región en flujo uniforme.

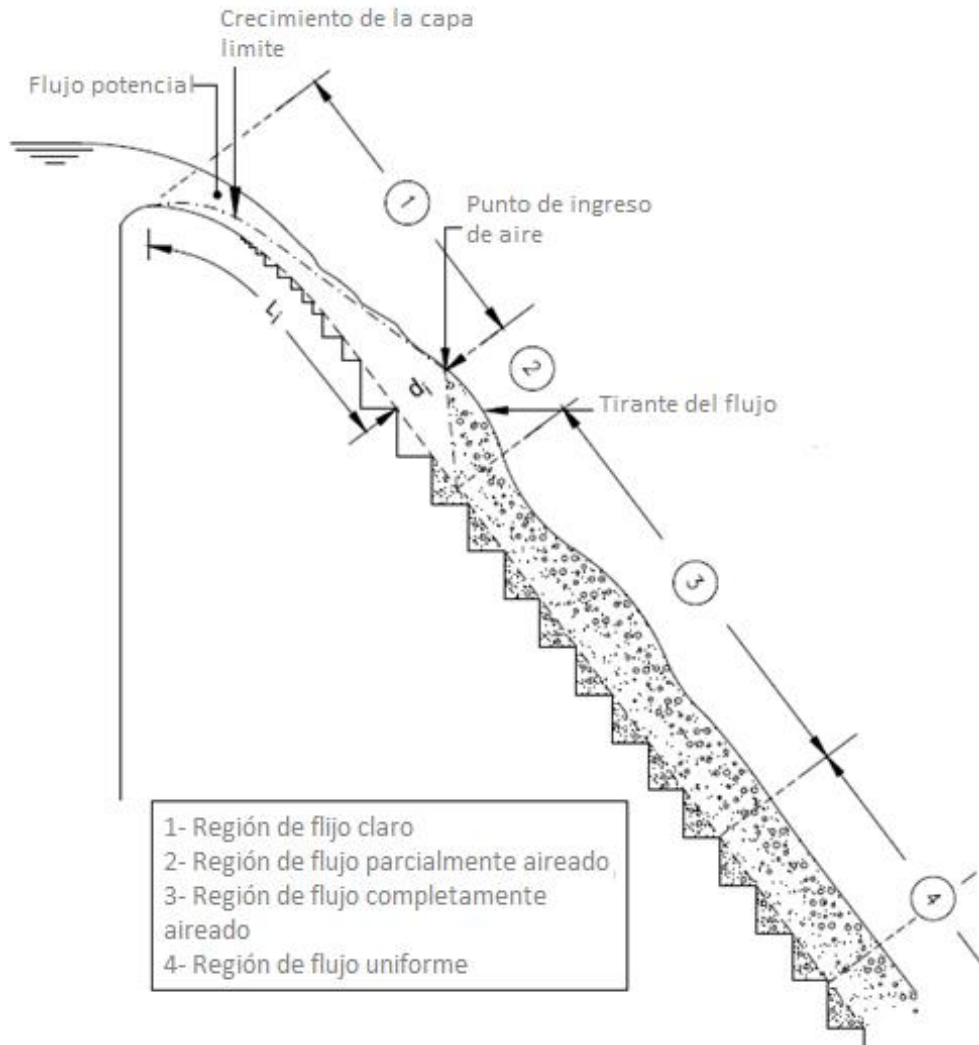


Figura 2.2 Tránsito del flujo rasante. Extraído de Matos & Meireles (2014)

### 2.2.2 Flujo de transición

Entre el flujo rasante y el flujo saltante se presenta el flujo de transición, el flujo en transición se observa cuando el vertedor opera con gastos intermedios. Este régimen presenta fuertes fluctuaciones hidrodinámicas y una apariencia caótica con gran aireación de flujo y gran cantidad de atomización o “espray”, lo cual provoca que las propiedades del flujo cambien de un escalón a otro (González & Chanson, 2007). La característica de este régimen de flujo es la presencia de estancamiento en la cara horizontal de escalón, lo cual se asocia a salpicaduras significativas en el tránsito del flujo (Shahheydari, Nodoshan, Barati, & Moghadam, 2014).

### 2.2.3 Flujo nappe o saltante

El flujo nappe o saltante, generalmente se presenta para descargas pequeñas y escalones (Boes & Hager, 2003b). Este tipo de fluido se encuentra definido por una serie de caídas libres entre escalones, uno seguido del otro; dependiendo de la pendiente del canal, la dimensión de los escalones y las condiciones de flujo, se podrá formar un salto hidráulico en cada uno de los escalones (Figura 2.3), de esta forma aumentado la energía disipada. La mayoría de los vertedores no operan en este tipo de régimen, ya que su descarga está limitada o los escalones deben de ser relativamente altos (Frizell & Frizell, 2015).

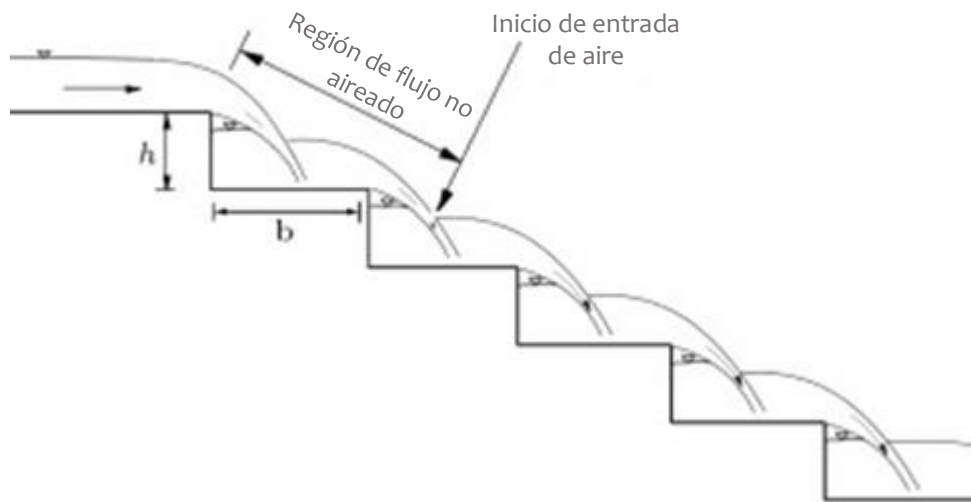


Figura 2.3 Tránsito del régimen saltante Extraído de: Tuna & Emiroglu (2011)

## 2.3 Criterios de diseño

La literatura consultada se presenta a continuación en orden cronológico. Cada uno de los criterios presentados proponen ecuaciones basadas en estudios experimentales para el diseño de los elementos principales de un vertedor escalonado, como son: la altura del escalón, la pendiente de la rápida, las coordenadas del punto de inicio de aire, identificar si se alcanza el flujo uniforme, la cantidad de energía disipada y la altura de los muros laterales.

### 2.3.1 Ruff & Ward (2002)

James F. Ruff y Jason P. Ward del Centro de Investigaciones en Ingeniería en la Universidad del Estado de Colorado, desarrollaron un criterio de diseño hidráulico para vertedores escalonados.

Este criterio es aplicable para el régimen de flujo rasante, parte del conocimiento de: el ancho del vertedor ( $b$ ), el gasto total descarga ( $Q$ ) o el gasto unitario ( $q$ ), la pendiente de la rápida ( $\theta$ ) y la altura del vertedor ( $H$ ). Además, este criterio proporciona las características para el diseño del tanque amortiguador.

#### 2.3.1.1 Factor de fricción ( $f$ )

El factor de fricción ( $f$ ) está en función del tirante en flujo uniforme ( $d_w$ ), el tirante crítico ( $y_c$ ), el promedio de la velocidad ( $U_{avg}$ ), la pendiente del vertedor  $\theta$ , la aceleración de la gravedad ( $g$ ), la altura del vertedor ( $H$ ) y la altura del escalón ( $h$ ).

$$f = \frac{8gd_w S_f}{U_{avg}^2} \quad (2.1)$$

En donde la pendiente de fricción se calculará como:

$$S_f = \frac{E_i + E_{i+1}}{\Delta X} \quad (2.2)$$

La velocidad promedio:

$$U_{avg} = \frac{U_{avg_i} + U_{avg_{i+1}}}{2} \quad (2.3)$$

Y el tirante en  $d_w$ :

$$d_w = \frac{d_{w_i} + d_{w_{i+1}}}{2} \quad (2.4)$$

Además, relaciona el factor de fricción con el valor adimensional:

$$\frac{Nh}{y_c} \quad (2.5)$$

Donde, N es el número de escalón, h la altura del escalón en metros y  $y_c$  la altura del escalón en metros.

### 2.3.1.2 Flujo uniforme

El tirante  $d_w$  y la velocidad ( $U_{avg}$ ) se calculan mediante el Método estándar del escalón (Standart Step Method), adaptado de Chow.

### 2.3.1.3 Muros laterales

Altura de los muros laterales

$$h_{wall} = 2.0y_{90} \quad (2.6)$$

Altura de los muros laterales de transición aguas arriba para que coincidan con la altura del muro de la cresta del vertedor:

$$h_{trwall} = 1.5y_c \quad (2.7)$$

### 2.3.1.4 Energía disipada

La energía disipada a lo largo de la rápida se calculará con la ecuación ( 2.8), con los valores obtenidos del tirante  $d_w$  y la velocidad ( $U_{avg}$ ).

$$\frac{\Delta E}{E_o} = 1 - \frac{d_w \cos \theta + \frac{U_{avg}^2}{2g}}{H_o + \frac{3}{2}y_c} \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Boes & Hager (2003)

EL criterio de diseño propuesto por Robert M. Boes y Willi H. Hager, se puede aplicar a presas de CCR con pendientes entre de 30° a 50° aproximadamente.

#### 2.3.2.1 Altura del escalón y régimen de flujo

La transición del flujo nappe al flujo skimming se expresa por la relación entre el tirante crítico ( $h_c$ ) y la altura del escalón ( $s$ ), con el experimento realizado por Boes & Hager indicaron que el flujo skimming inicia cuando:

$$\frac{h_c}{s} \geq 0.91 - 0.14 \tan \phi \quad (2.9)$$

#### 2.3.2.2 Punto de inicio de entrada de aire o punto de inicio

Cuando la capa límite alcanza la superficie libre se les llama da punto de inicio de entrada de aire. Su posición está definida por  $L_i$  que es la distancia desde que la capa limite comienza a crecer.

$$L_i = \frac{5.90 h_c^{\frac{6}{5}}}{(\sin \phi)^{\frac{7}{5}} s^{\frac{1}{5}}} \quad (2.10)$$

El tirante en el punto de inicio es función del número de Froude y el ángulo de inclinación del vertedor, entonces para ángulos  $26^\circ < \phi < 55^\circ$  se obtendría de la siguiente forma:

$$\frac{h_{m,i}}{s} = 0.40 F_*^{0.60} \quad (2.11)$$

Donde el número de Froude para superficies rugosas esta dado como:

$$F_* = \frac{q_d}{(g \sin \phi \times s^3)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.12)$$

Y la velocidad en este punto, donde el flujo se encuentran en dos fases (agua-aire), la cual está en función de la tirante del punto de inicio de entrada de aire ( $h_{m,i}$ )y del gasto unitario ( $q_d$ ):

$$v_{m,i} = \frac{q_d}{h_{m,i}} \quad (2.13)$$

La concentración de aire en el punto de inicio ( $\bar{C}_i$ ) depende solo de la pendiente del fondo del canal de  $26^\circ < \phi < 55^\circ$ :

$$\bar{C}_i = 1.2 \times 10^{-3} (240^\circ - \phi) \quad (2.14)$$

$$h_{w,i} = h_{m,i} (1 - \bar{C}_i) \quad (2.15)$$

$$v_{w,i} = \frac{q_d}{h_{w,i}} \quad (2.16)$$

En donde el valor de  $V_{w,i}$  debe ser menor a la velocidad crítica de 20 m/s para el punto de inicio, en la zona no aireada del flujo que es propenso a daños por cavitación para gastos unitarios del orden de 25 m<sup>3</sup>/s/m

### 2.3.2.3 Flujo uniforme

Para conocer la altura que se requiere para alcanzar el flujo uniforme se requerirá de conocer la altura de la presa y del tirante crítico.

$$\frac{H_{dam,u}}{h_c} \approx 24 (\sin \phi)^{\frac{2}{3}} \quad (2.17)$$

Tirante del flujo uniforme

$$\frac{h_{w,u}}{h_c} = 0.215 (\sin \phi)^{\frac{1}{3}} \quad (2.18)$$

Tirante del flujo mezclado

$$\frac{h_{90,u}}{s} = 0.50 F_*^{(0.1 \tan \phi + 0.5)} \quad (2.19)$$

Concentración promedio de aire en flujo uniforme

$$\bar{C}_u = 1 - \frac{h_{w,u}}{h_{90,u}} \quad (2.20)$$



### 2.3.2.4 Flujo no uniforme

La longitud de la rápida del vertedor no es lo suficientemente larga para que el flujo sea uniforme, por lo que se calcula un tirante equivalente al uniforme ( $h_{w,e1}$ ), este se puede obtener de la interpolación lineal entre el tirante en el punto de inyección ( $h_{w,i}$ ) y el tirante uniforme ( $h_{w,u}$ ), en la ecuación

$$h_{w,e1} = h_{w,i} - \frac{h_{w,i} - h_{w,u}}{(H_{dam,u} - Z_i)(H_{dam} - Z_i)} \quad (2.21)$$

Donde:

$Z_i$  es la longitud horizontal de la cresta hasta el punto de inyección

$$Z_i \approx L_i \sin(\phi) \quad (2.22)$$

### 2.3.2.5 Energía disipada

El cálculo de la energía residual se calculará de acuerdo con el valor obtenido de la relación  $\frac{H_{dam,u}}{h_c}$ , si:

$$\frac{H_{dam,u}}{h_c} < 15 \text{ a } 20 \quad (2.23)$$

La energía residual o remanente se podrá calcular con la siguiente ecuación:

$$\frac{H_{res}}{H_{max}} = e^{\left[ \left( -0.045 \left( \frac{K}{D_{h,w}} \right)^{0.1} (\sin \phi)^{0.8} \right) \frac{H_{dam}}{h_c} \right]} \quad (2.24)$$

Donde:

$$H_{max} = H_{dam} + 1.5h_c \quad (2.25)$$

$$K = s(\cos \phi) \quad (2.26)$$

$$D_{h,w} = 4h_{w,e1} \text{ diámetro hidráulico} \quad (2.27)$$

Pero si la relación  $\frac{H_{dam,u}}{h_c}$  es mayor:

$$\frac{H_{dam,u}}{h_c} \geq 15 \text{ a } 20 \quad (2.28)$$

Entonces la energía residual se calcula la ecuación ( 2.29):

$$\frac{H_{res}}{H_{max}} = \frac{F}{\frac{H_{dam}}{h_c} + F} \quad (2.29)$$

Donde:

$$F = \left( \frac{f_b}{8 \sin \phi} \right)^{\frac{1}{3}} \cos \phi + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{f_b}{8 \sin \phi} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (2.30)$$

Y el factor de fricción en el fondo rugoso se puede despejar de la ecuación ( 2.31 )

$$\frac{1}{\sqrt{f_b}} = \frac{1}{\sqrt{0.5 - 0.42 \sin(2\phi)}} \left[ 1 - 0.25 \log \left( \frac{K}{D_{h,w}} \right) \right] \quad (2.31)$$

Con la ecuación ( 2.32 ) se puede corroborar el tirante equivalente al uniforme, despejando el tirante equivalente al flujo uniforme  $h_{w,e_2}$  :

$$H_{res} = h_{w,e_2} \cos(\phi) + \alpha \frac{q^2}{2g h_{w,e_2}} \quad (2.32)$$

Calculando el término medio entre  $h_{w,e_1}$  y  $h_{w,e_2}$  :

$$h_{w,e} = \frac{h_{w,e_1} + h_{w,e_2}}{2} \quad (2.33)$$

Continuando con la velocidad final al pie del vertedor, ecuación ( 2.34 ) :

$$v_{w,e} = \frac{q}{h_{w,e}} \quad (2.34)$$

### 2.3.2.6 Muros laterales

Para el diseño de muros laterales se utilizará un factor de seguridad  $\eta$  y el tirante  $h_{90,u}$  obtenido con la ecuación ( 2.36 )

$$h_d = \eta h_{90,u} \quad (2.35)$$

$\eta = 1.2$  factor de seguridad para presas de concreto

$$h_{90,u} = s \times 0.5 F_*^{(0.1 \tan(\phi) + 0.5)} \quad (2.36)$$

### 2.3.3 González & Chanson (2007)

El criterio de diseño hidráulico parte del conocimiento del ancho ( $W$ ), la pendiente, la longitud del canal ( $L$ ), altura de la cortina ( $H_d$ ) y el gasto de diseño ( $Q_w$ ). El primer paso es calcular el tirante crítico sobre la cresta del vertedor:

$$d_c = \sqrt[3]{\frac{Q_w^2}{gW^2}} \quad (2.37)$$

#### 2.3.3.1 Altura de escalón

En seguida se elige una altura de escalón tal que se presente el flujo rasante o skimming, para esto se debe cumplir que:

$$\frac{d_c}{h} > 12 - 0.325 \tan \theta \quad (2.38)$$

Cuando los escalones son muy pequeños, estos representan una rugosidad insignificante para el flujo y las pérdidas de energía se reducen drásticamente. Por tanto, se tiene que verificar que el termino adimensional  $\frac{d_c}{h}$  elegido sea menor que el máximo, tal que los escalones dejan de actuar como superficie rugosa, entonces se debe de cumplir con la siguiente condición:

$$h \leq 15 d_c \cos \theta \quad (2.39)$$

#### 2.3.3.2 Localización del punto de ingreso de aire

Ya seleccionada la altura del escalón, se localiza el punto de ingreso de aire, este se debe presentar en la primera mitad del vertedor, para que el flujo alcance el equilibrio al pie de la rápida.

Las coordenadas de localización se pueden calcular mediante las siguientes ecuaciones:

$L_i$ , es la longitud en la que se encontrara el punto de ingreso de aire medido desde la cresta del vertedor

$$\frac{L_i}{h \cos \theta} = 9.719 (\sin \theta)^{0.0796} (F^*)^{0.713} \quad (2.40)$$

El tirante presentado en el punto de ingreso de aire se denota por  $d_i$ , el cual se encuentra en función del número de Froude ( $F$ ), la altura del escalón ( $h$ ) y el ángulo de inclinación  $\theta$ .

$$\frac{d_i}{h \cos \theta} = \frac{0.4034}{(\sin \theta)^{0.04}} (F^*)^{0.592} \quad (2.41)$$

El número de Froude está en función de la rugosidad equivalente  $k_s$ :

$$F^* = \frac{q}{\sqrt{g \sin \theta k_s^3}} \quad (2.42)$$

$$k_s = h \cos \theta \quad (2.43)$$

### 2.3.3.3 Flujo uniforme

Para garantizar que el flujo sea totalmente desarrollado antes del pie del vertedor, la longitud y la pendiente del canal deben de cumplir con la siguiente restricción:

$$\frac{d_c}{h} < \frac{1}{0.1193 \cos \theta \sin \theta^{0.259} \left( \frac{L}{h \cos \theta} \right)^{0.935}} \quad (2.44)$$

Si el canal es lo suficientemente largo como para que el flujo skimming alcance el equilibrio, la tirante del flujo se calculara como:

$$d = d_c \sqrt[3]{\frac{f_e}{8 \sin \theta}} \quad (2.45)$$

Donde  $f_e$  es un valor experimental del factor de ficción de Darcy correspondiente al flujo aire-agua, inversamente proporcional a la concentración de aire en el flujo ( $\bar{C}$ ).

$$\frac{f_e}{f_m} = 0.5 \left( 1 + \tan(h) \left( 2.5 \frac{0.5 - \bar{C}}{\bar{C} - (1 - \bar{C})} \right) \right) \quad (2.46)$$

Dado que  $f_e$  está en función de  $f_m$  y  $\bar{C}$  estos se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\sqrt{f_m}} = 2.43 - 0.2676 \ln \left( \frac{h \cos \theta}{D_H} \right) \quad (2.47)$$

Donde  $D_H$  es el diámetro hidráulico.

La concentración de aire en el fluido está en función de la altura del escalón ( $h$ ), el tirante crítico en la cresta del vertedor ( $d_c$ ) y del parámetro  $D$ .

$$\bar{C} = D - 0.3 e^{\left[ -5 \left( \frac{h}{d_c} \right)^2 - 4 \left( \frac{h}{d_c} \right) \right]} \quad (2.48)$$

Donde  $D$  es 0.3 para  $5.7^\circ < \theta < 19^\circ$  y  $D = -0.00024\theta^2 + 0.0214\theta - 0.0357$  para  $\theta \geq 19^\circ$

#### 2.3.3.4 Flujo gradualmente variado

Si el canal no es lo suficiente mente largo para alcanzar el estado uniforme, el tirante del flujo se obtiene de la combinación de resultados experimentales y flujos con condiciones en equilibrio. En donde la curva experimental obtenida es un medio para estimar las propiedades del flujo gradualmente variado:

$$\text{Si } 7 < \frac{H_{\max}}{d_c} < 20$$

$$\frac{U_w}{V_{\max}} = 0.00107 \left( \frac{H_{\max}}{d_c} \right)^2 - 0.0634 \left( \frac{H_{\max}}{d_c} \right) + 1.202 \quad (2.49)$$

Una vez que el termino adimensional ( 2.48) se conoce la velocidad  $U_w$ , y el tirante al pie del vertedor ( $d$ ) se puede calcular asumiendo que la velocidad ideal del flujo es  $V_{\max}$  igual a la velocidad máxima al pie del vertedor:

$$V_{\max} = \sqrt{2gH_{\max}} \quad (2.50)$$

Ya conocido  $U_w$  el tirante del vertedor se puede calcular mediante la ecuación ( 2.51)

$$U_w = \frac{q_w}{d} \quad (2.51)$$

Conociendo estos valores, podemos obtener la velocidad real por medio de la siguiente ecuación:

$$V_{\max} = \sqrt{2g(H_{\max} - d \cos \theta)} \quad (2.52)$$

Conocida la velocidad máxima real podemos recalculer la velocidad  $U_w$  con la ecuación ( 2.51) y el tirante  $d$  con la ecuación ( 2.50).

Pero si  $\frac{H_{\max}}{d_c} > 20$ , la velocidad se calcula con la ecuación (2.50) y el tirante con la ecuación (2.51).

### 2.3.3.5 Muros laterales

Una vez ya que se conoce el tirante característico ( $d$ ) al pie del vertedor, se puede conocer el tirante  $Y_{90}$ , que correspondiente a una concentración de aire igual a 90% ( $C=0.9$ )

$$d = (1 - \bar{C})Y_{90} \quad (2.53)$$

El bordo libre se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\text{B.L.} = 0.4Y_{90} \quad (2.54)$$

La altura de muros laterales puede ser calculados con la ecuación 6.51:

$$h_w = 1.4Y_{90} \quad (2.55)$$

## 2.4 Modelación numérica

Para la modelación numérica se utilizó un software de dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés) que resuelve numéricamente por diferencias finitas las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad. Estas son ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales y dependientes del tiempo, donde la solución numérica de las mismas implica aproximar los términos que la componen con expresiones algebraicas. El programa consta también de varios módulos complementarios para la resolución de distintos problemas tales como el transporte de sedimentos, cuerpos sólidos en movimiento, escurrimiento en medios porosos, etc. (Liscia, Angulo, De Dios, & Del Blanco, 2010)

Este software tiene la capacidad de resolver los flujos incompresibles, en donde la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu A_x) + R \frac{\partial}{\partial y}(\nu A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(w A_z) + \xi \frac{u A_x}{x} = \frac{R_{SOR}}{\rho} \quad (2.56)$$

Donde:

$R_{SOR}$  es la fuente de masa del sistema

$A_{(x,y,z)}$  son las fracciones de áreas abiertas al flujo en las direcciones x, y, z

Cuando se está utilizando el sistema de coordenadas cartesianas el valor de R es igual a 1, y  $\xi = 0$

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento son las de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left\{ u A_x \frac{\partial u}{\partial x} + \nu A_y R \frac{\partial u}{\partial y} + w A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \xi \frac{A_y \nu^2}{x V_F} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + G_x + f_x - b_x - \frac{R_{SOR}}{\rho V_F} (u - u_w - \delta u_s) \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left\{ u A_x \frac{\partial v}{\partial x} + \nu A_y R \frac{\partial v}{\partial y} + w A_z \frac{\partial v}{\partial z} \right\} + \xi \frac{A_y \nu^2}{x V_F} = -\frac{1}{\rho} \left( R \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + G_y + f_y - b_y - \frac{R_{SOR}}{\rho V_F} (v - v_w - \delta v_s) \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left\{ u A_x \frac{\partial w}{\partial x} + \nu A_y R \frac{\partial w}{\partial y} + w A_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + G_z + f_z - b_z - \frac{R_{SOR}}{\rho V_F} (w - w_w - \delta w_s) \quad (2.59)$$

en donde:

$(G_x, G_y, G_z)$  son las componentes de la gravedad en la dirección x, y, z.

$(f_x, f_y, f_z)$  son la aceleración viscosa en la dirección x, y, z.



$(b_x, b_y, b_z)$  es la pérdida en medios porosos o a través de placas porosas en la dirección  $x, y, z$ .

$(u_w, v_w, w_w)$  es la velocidad de las componentes  $(x, y, z)$  en la fuente.

$(u_s, v_s, w_s)$  es la velocidad del fluido en la superficie en relación con la fuente.

El software de dinámica de fluidos computacional emplea técnicas desarrolladas para la solución de las ecuaciones que gobiernan el flujo de los fluidos (conservación de masa, movimiento y energía) en una, dos o tres dimensiones. Las ecuaciones se discretizan y se resuelven utilizando métodos numéricos. (Flow 3d, 2014)

El método de volumen de fluido (VOF) que emplea el software, consta de 3 componentes principales: la definición del volumen del fluido, un método para resolver la ecuación de transporte y el establecimiento de las condiciones de frontera de la superficie libre.

Para definir el volumen, el software cuenta con la herramienta FAVOR (Fractional Area Volumen Obstacle Representation), la cual permite modelar y visualizar con gran detalle geometrías complejas. En la Figura 2.4 podemos observar el uso de la herramienta FAVOR, que en cuanto más pequeña es el tamaño de la malla, mejor se definen la geometría con la cual se trabajara.

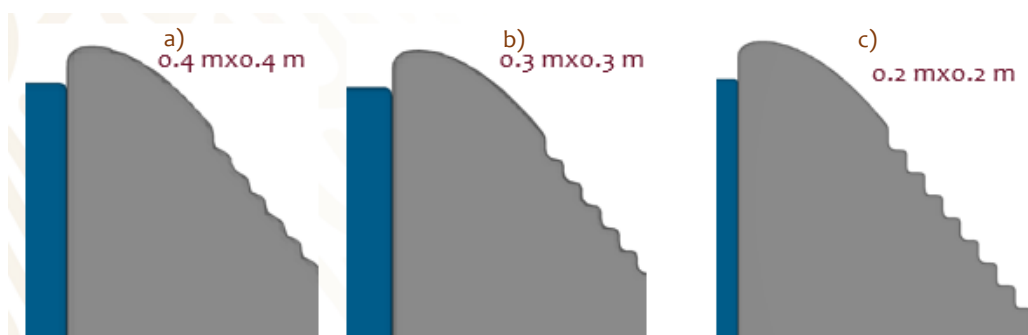


Figura 2.4 Detalle de la herramienta FAVOR con diferentes tamaños de malla en cresta de vertedor.  
 a) malla 0.40x0.40 m, b) malla 0.30x0.30 m, c) malla 0.2x 0.2 m

### 2.4.1 Modelos de turbulencia

Para representar la turbulencia, el software cuenta con seis modelos:

- **Modelo de longitud de mezcla de Prandtl**

Es el modelo más simple, asume que la viscosidad del fluido en la región fuera de la capa límite se consideran despreciables y el flujo puede considerarse no-viscoso (Muñoz, 2007), mediante el proceso de mezcla turbulentos en regiones con grandes fuerzas cortantes, por ejemplo, cerca de los límites sólidos. Sin embargo, esto solo es adecuado para flujos completamente desarrollados y casi estables.

- **Modelos de  $k-\varepsilon$  de una y dos ecuaciones**

El modelo  $k-\varepsilon$  permite obtener escalas de longitud y velocidad de turbulencia. Las ecuaciones de transporte describen la energía cinética y la tasa de disipación de turbulencia. Una de las ventajas de  $k-\varepsilon$  es efectuar los cálculos convergentes con resultados coherentes para distintos regímenes de flujo. En contraste con sus desventajas, el modelo no resulta preciso para flujos en rotación como fluidos en tubos circulares (Toapanta-Ramos, y otros, 2019).

Es el modelo de turbulencia más común y es usado con frecuencia en aplicaciones industriales por su robustez y por su bajo costo computacional. A pesar de que no se desempeña bien en casos de fuertes gradientes de presión adversa. Consiste en resolver dos ecuaciones adicionales: para el transporte de energía cinética turbulenta  $k$  (que determina la energía en la turbulencia) y para la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta  $\varepsilon$  (que determina la escala de la turbulencia). Se usa para flujos con alto número de Reynolds, sea en régimen incompresible o compresible con  $Ma < 0.3$ . El flujo cerca de las paredes es modelado usando funciones de pared, por tanto, no es simulado. Puede ser aplicado en estudios estacionarios o dependientes del tiempo.

- **Modelo de  $k-\omega$**

Es un modelo similar al  $k-\varepsilon$ , pero en este caso se resuelve para  $\omega$ , la tasa específica de disipación de energía cinética. Es un modelo para bajos números de Reynolds y se puede usar combinado con funciones de pared. Este modelo funciona para modelar flujos con gradientes de presión en sentido de la corriente como chorros y estelas.

- **Modelo basado en los modelos RNG (Renormalization-Group)**

El modelo RNG usa ecuaciones similares a las ecuaciones del modelo  $k-\varepsilon$ . Sin embargo, las constantes de ecuación se encuentran empíricamente. En este modelo, los elementos del movimiento de baja escala se eliminan sistemáticamente mediante la aplicación de herramientas estadísticas. Las ecuaciones de control del flujo se modifican respecto a los elementos de gran movimiento. Este modelo de turbulencia considera el régimen superior con efectos bajos o nulos de la región amortiguadora.

El modelo RNG no puede predecir el efecto de las esquinas, debido a la restricción en el uso de la rejilla gruesa cerca de la pared y en las esquinas. Este modelo predice con una buena concordancia con el medio poroso grande.

- **Modelo de simulación de grandes vórtices (LES)**

El modelo de turbulencia Large Eddy Simulation (LES) surgió de los esfuerzos de modelado atmosférico. La idea básica es que se debe calcular directamente todas las estructuras del flujo turbulento y estas pueden ser resueltas por una cuadrícula computacional y solo aproximar aquellas que son demasiado pequeñas para ser resueltas. Cuando se utiliza este modelo se debe recordar que la malla deberá ser necesariamente tridimensional y dependiente del tiempo. Además, las fluctuaciones deben inicializarse y/o introducirse en la frontera de entrada, esto requerirá más esfuerzo, tiempo de cálculo y uso intensivo del CPU debido a que se requerirán mallas más finas, los modelos LES a menudo proporcionan más información que la producida por los modelos basados en promedios de Reynolds.

Pr ejemplo, en los modelos LES para calcular el flujo turbulento alrededor de un edificio, no solo se obtendrán las tensiones medias del viento, sino también una estimación de la magnitud y desviación estándar de la fluctuaciones de fuerza asociadas con el flujo.

### 2.4.2 Condiciones de frontera

Para definir las fronteras el software presenta diez diferentes, las cuales se pueden elegir de acuerdo con el tipo de trabajo a realizar:

**a) Continua /Continue**

Establece una condición de gradiente cero en la frontera, lo que permite que el último valor en el límite de la malla se mantenga sin cambios.

**b) Superposición de cuadrícula/ Grid overlay**

Aplica la solución de la simulación de origen de reinicio como condición de frontera en una simulación de reinicio.

**c) Flujo de salida/ Outflow**

Se utiliza una condición de radiación de Sommerfeld para estimar dinámicamente las condiciones en la frontera.

**d) Periódico/Periodic**

Las fronteras de tipo periódico se aplican en pares y cualquier fluido que sale de la frontera se reintroduce en otra frontera a través de un par

**e) Presión especificada/Specified pressure**

Se debe especificar la presión en la frontera. También se puede especificar la elevación del fluido y la presión en la frontera será la hidrostática.

**f) Velocidad especificada / Specified velocity**

Se debe de especificar la velocidad en la frontera con la cual el fluido ingresara.

**g) Simetría / Symmetry**

Aplica una condición de gradiente de cero en la frontera, así como una condición de cero normal a la frontera. Este tipo de frontera se puede utilizar en el límite de dos mallas consecutivas.

**h) Caudal / Volume flow rate**

Ingresa un gasto o caudal específico en la frontera

**i) Muro / Wall**

Este tipo de frontera tiene la condición de no deslizamiento, así como una condición de velocidad cero, normal al límite.

**j) Onda / Wave**

Para este tipo de frontera se aplica el campo de velocidad asociado con el tipo de onda solicitado

## Capítulo 3: Metodología

En este capítulo se realizó la revisión de las características del proyecto, consistió en identificar el lugar en donde se tiene proyectado construir la presa, conocer las dimensiones y elevaciones de las estructuras así como las condiciones de diseño que se tomaron en cuenta para el diseño del vertedor liso, una vez conocidos estos parámetros se procedió al diseño del vertedor escalonado con dos criterios de diseños y a su vez se ejecutó la simulación numérica en el software especializado en dinámica computacional de fluidos para conocer el comportamiento hidráulico del agua sobre el vertedor.

Obtenidos los resultados del primer modelo el cual no contaba con algún tipo de estructura disipadora de energía aguas abajo, y tras varias simulaciones que permitieron analizar los resultados, se decidió implementar un tanque amortiguador aguas abajo que permitiera aumentar la energía disipada; se realizaron dos propuestas las cuales se consideraron adecuadas para las condiciones que presentaba el fluido aguas abajo del vertedor, a los cuales también se les realizó sus respectivas simulaciones numéricas para comprobar su eficiencia.

Además de las propuestas de tanques amortiguadores, también se realizó la modelación y simulación numérica del vertedor original liso, cuyos resultados serán de utilidad para su revisión hidráulica, sus efectos en la energía disipada y las condiciones con las que el flujo ingresará al cauce.

### **3.1 Revisión de las características del proyecto**

De acuerdo con el Sistema de Aguas y Drenaje de Monterrey y el Plan Hídrico del estado de Nuevo León, tienen como objetivo fortalecer las fuentes de abasto de agua potable a la zona Metropolitana de Monterrey, con un caudal medio anual de  $1.50 \text{ m}^3/\text{s}$ . Motivo por el cual se proyectó la construcción de la presa “La Libertad” en la cuenca del río Potosí, entre los municipios de Montemorelos, Linares y la interconexión con el Acueducto Linares-Monterrey.

El proyecto se ubica sobre el río Potosí, cuenca de los ríos Potosí 1 y Potosí 2, en la cuenca alta del río San Fernando, perteneciente a la región hidrológica RH-25

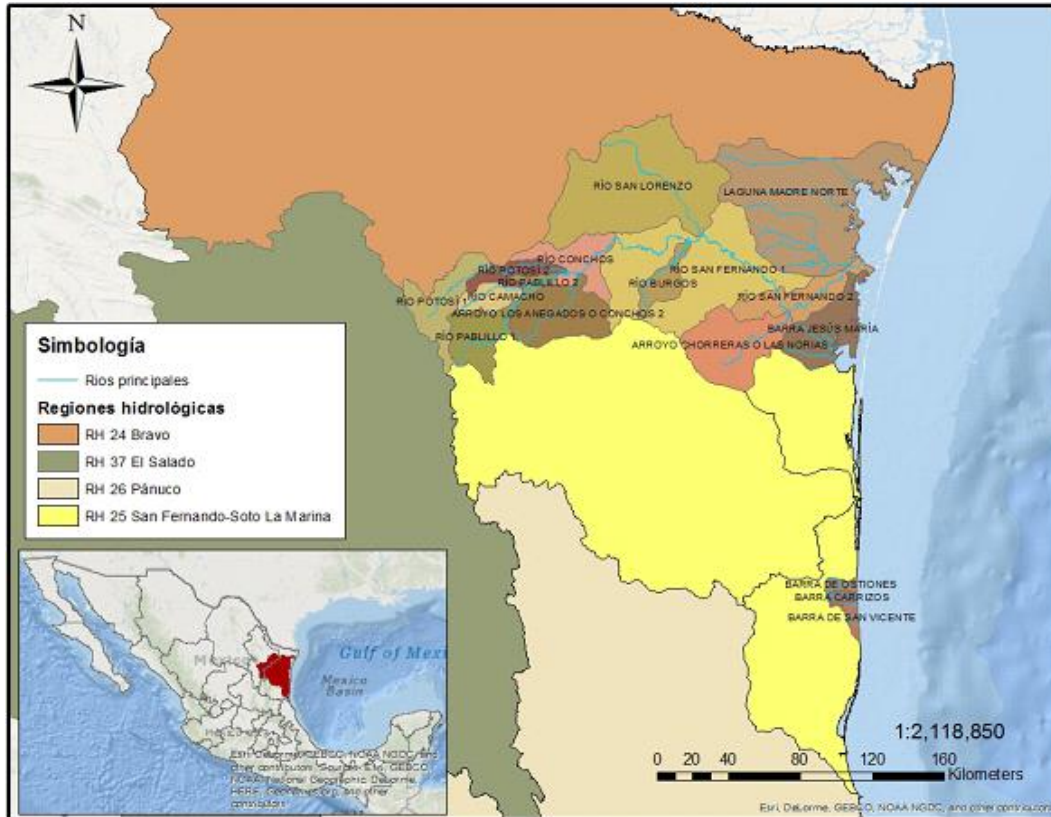


Figura 3.1 Ubicación de la región Hidrológica 25 San Fernando-Soto La Marina. Diario Oficial de la Federación

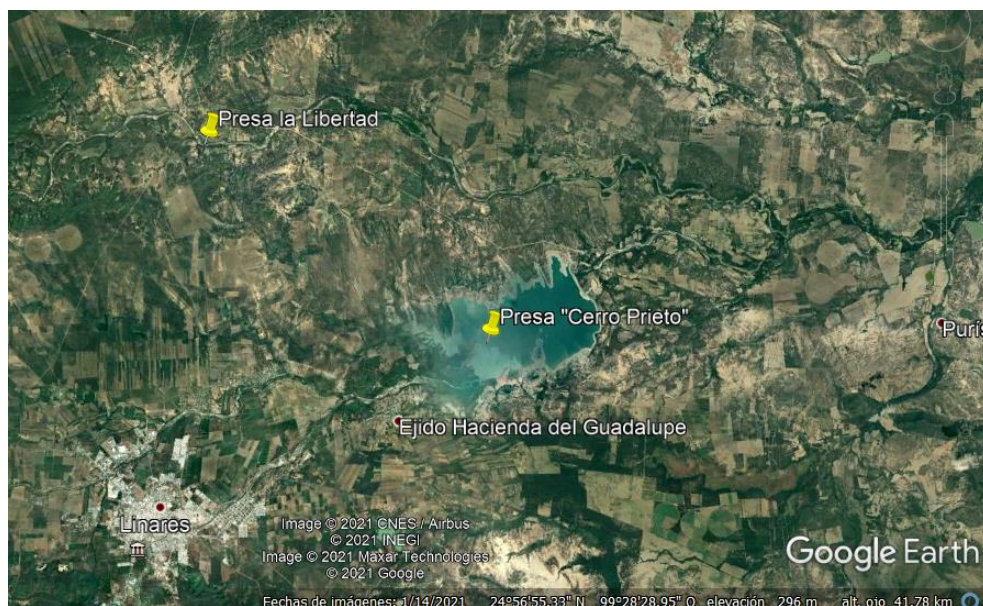


Figura 3.2 Localización de la presa “La Libertad”. Imagen Satelital. Google Earth

Las elevaciones y capacidades más importantes que definen en el vaso de almacenamiento se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1 Elevaciones y capacidades del vaso de almacenamiento

Elemento	Valor	Unidades
Elevación del parapeto de la corona de la cortina	353.5	msnm
Elevación NPT del nivel de piso terminado de la corona de la cortina	352	msnm
Elevación promedio del cauce aguas arriba	320	msnm
Elevación promedio del cauce en el eje del vertedor (Est. 1+325)	310	msnm
Elevación de azolves (estimada a 30 años)	321	msnm
Elevación al NAMINO Toma de Fondo	317	msnm
Elevación al NAMO	347	msnm
Elevación al NAME	351.44	msnm
Capacidad máxima al NAME	306.91	hm <sup>3</sup>
Capacidad máxima al NAMO	221.83	hm <sup>3</sup>
Capacidad muerta (capacidad al NAMIN Elev. 317.00)	1.63	hm <sup>3</sup>
Capacidad azolves (Elev. 316.50 T=10 años)	1.52	hm <sup>3</sup>
Capacidad NAMINO toma de Fondo (Elev. 317.00)	1.63	hm <sup>3</sup>
Capacidad útil para agua potable (Tr=10 años)	220.31	hm <sup>3</sup>
Capacidad útil para agua potable (Tr=30 años)	217.22	hm <sup>3</sup>
Capacidad de control de avenidas (NAME - NAMO) Superalmacenamiento	85.08	hm <sup>3</sup>

### 3.1.1 Vertedor liso con salto de esquí

La obra de excedencias proyectada de la presa es una estructura integrada al cuerpo de la cortina y consiste en un vertedor de descarga libre, de cresta recta y perfil Creager, con rápida lisa y cubeta deflectora con salto de esquí y tanque amortiguador con plantilla de concreto con 120 m de longitud (Figura 3.3).



El vertedor deberá ser capaz de descargar un gasto máximo regulado de  $Q=7,151.14 \text{ m}^3/\text{s}$ , correspondiente a la avenida de diseño con un periodo de retorno de 10,000 años, con esta descarga se producirán velocidades de flujo arriba de 20 m/s al final de la rápida del vertedor.

En la Tabla 3.2 se muestran los datos relevantes de la obra de excedencias:

Tabla 3.2 Datos generales de la obra de excedencias

Elemento	Valor	Unidades
Elevación de la cresta	347.00	msnm
Longitud total de la cresta	350.00	m
Carga sobre la cresta	4.66	m
Gasto máximo de avenida de diseño	7,369.97	$\text{m}^3/\text{s}$
Volumen de la avenida de diseño	119.36	$\text{hm}^3$
Periodo de retorno de la avenida de diseño (Tr)	10 000	Años
Gasto máximo de descarga	7,151.14	$\text{m}^3/\text{s}$
Gasto unitario máximo de descarga	20.43	$\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$
Velocidad máxima en la descarga	23.15	m/s
Longitud total de la cresta	350.00	m
Elevación de cubeta deflectora	313.00	m
Elevación del labio del salto de esquí	313.67	m
Elevación NPT de la losa del tanque de disipación de energía	309.00	msnm
Elevación Desplante de la losa del tanque de disipación de energía	308.00	msnm
Dimensión del tanque en sentido perpendicular al eje de la cresta	120.00	m
Elevación NPT de rellenos laterales al tanque	311.00	msnm
Elevación del desplante de muros laterales del tanque	308.00	msnm
Elevación del desplante del dentellón frontal del tanque	303.00	msnm
Elevación de la corona de muros laterales Izq y Der del tanque	315.00	msnm
Elevación de la descarga del tanque de disipación de energía	312.50	msnm

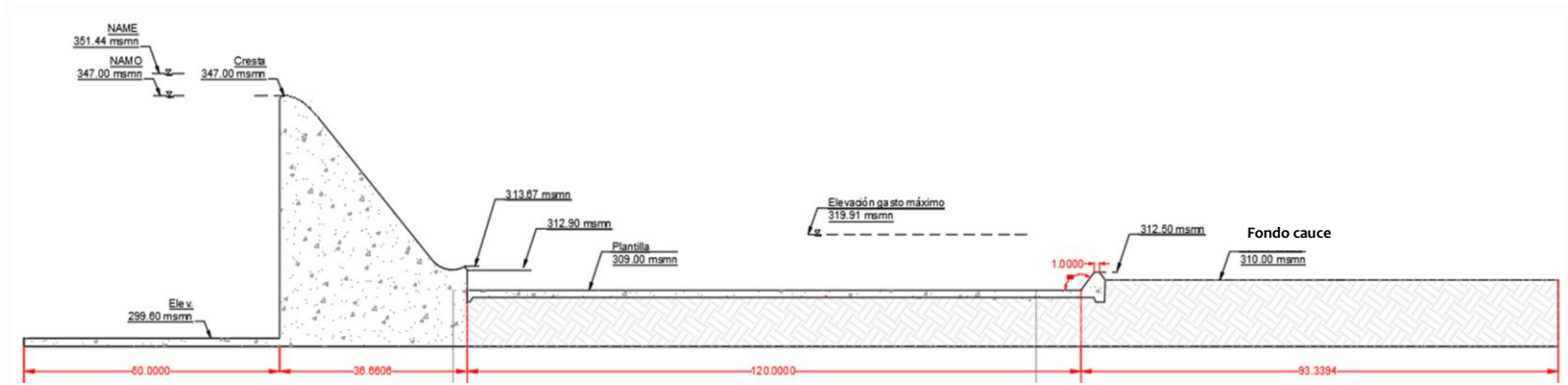


Figura 3.3 Esquema de propuesta de vertedor liso con salto de esquí.

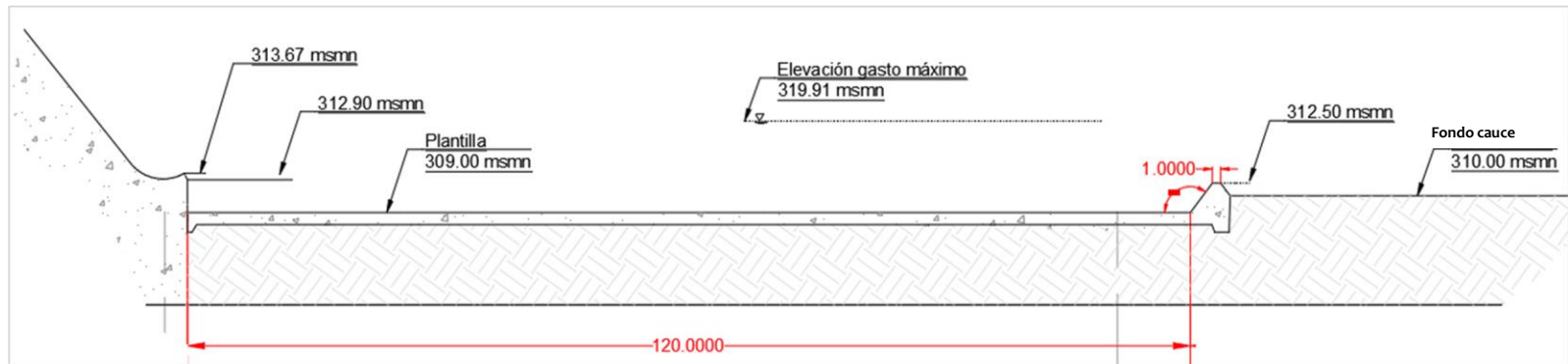


Figura 3.4 Detalle de la plantilla de concreto aguas abajo del salto de esquí.

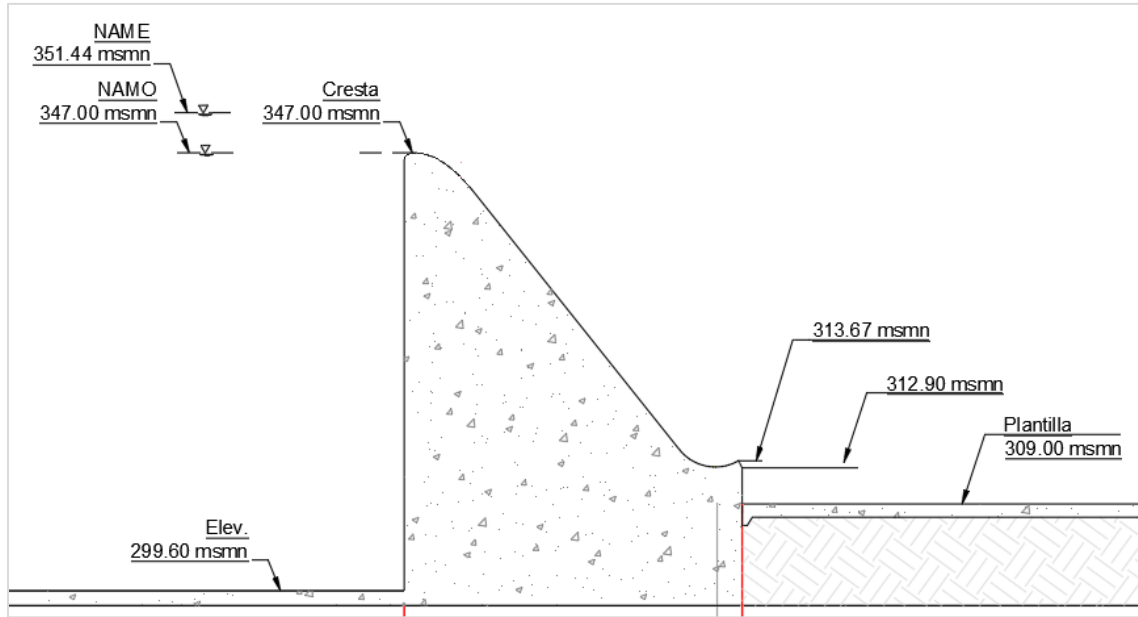


Figura 3.5 Detalle de elevaciones en la obra de excedencias

### 3.2 Vertedor escalonado

Con el gasto máximo de descarga de 7151.14 m<sup>3</sup>/s, para 10,000 años y con una longitud de cresta de 350 m con una elevación de 347.00 msnm con una altura de vertedor de 47.40 m y un talud de 0.8H:1V (51.34°); a partir de estos datos se calculó el gasto unitario máximo de descarga:

$$q_d = \frac{Q_d}{b} \quad (3.1)$$

$$q_d = \frac{7151.14 \left[ \frac{m^3}{s} \right]}{350 [m]}$$

$$q_d = 20.432 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$$

Para los criterios de diseño se seleccionó una altura de escalón de 1.2 metros los cuales comenzarán a colocarse a partir del punto de tangencia de la rápida hasta la cota de la plantilla (Figura 3.8), y aguas arriba del punto de tangencia se colocarán 6 escalones asimétricos (Figura 3.7) los cuales se acoplan a la curvatura del perfil Creager, teniendo un total de 33 escalones a lo largo del vertedor.

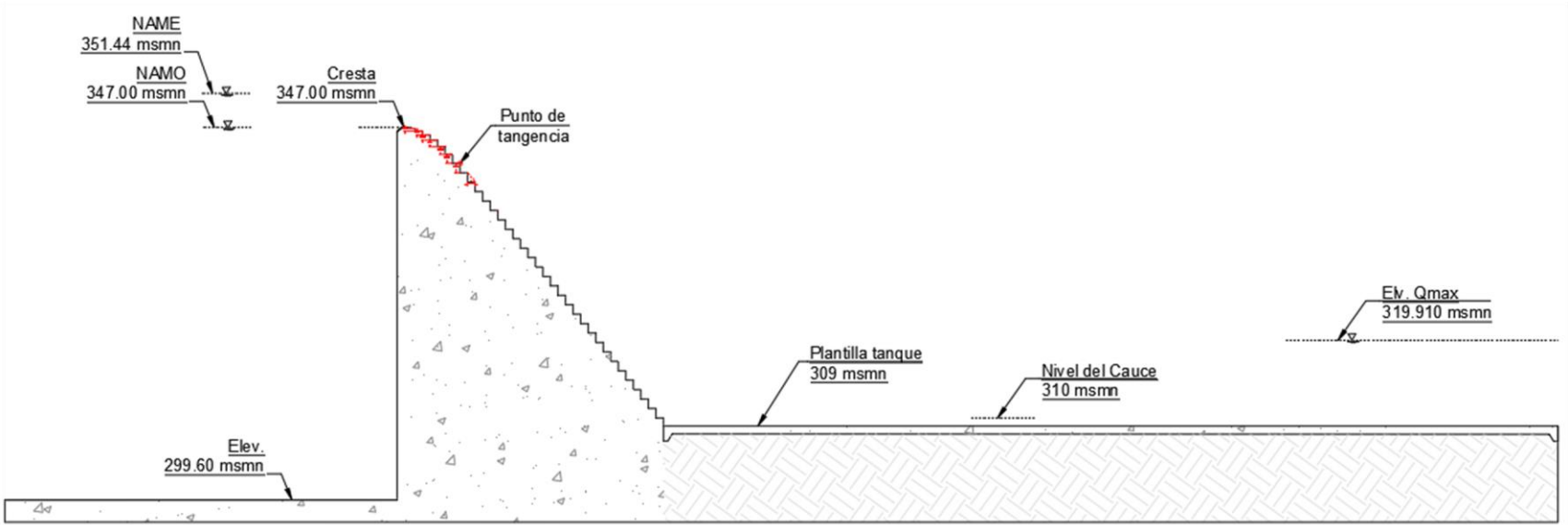


Figura 3.6 Diseño de vertedor escalonado, con escalones desde la cresta

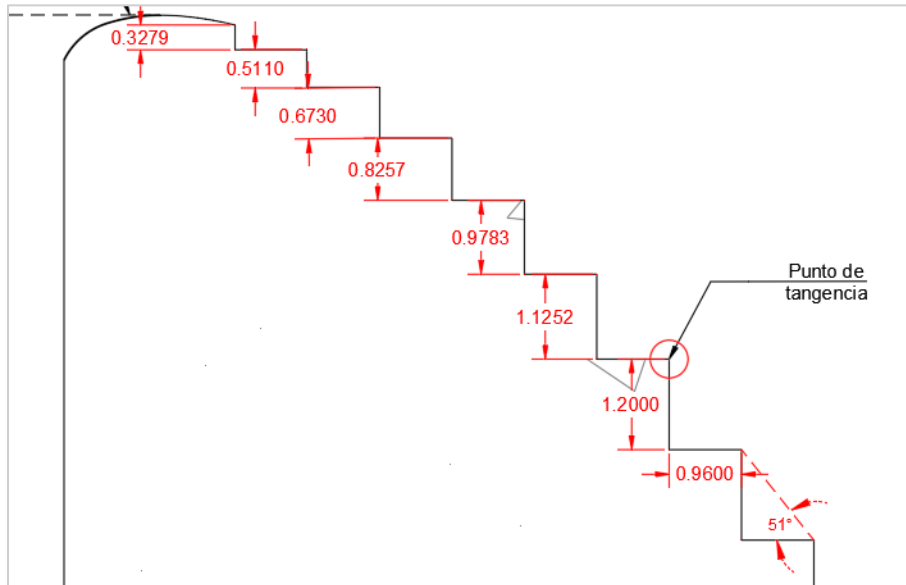


Figura 3.7 Escalones aguas arriba del punto de tangencia

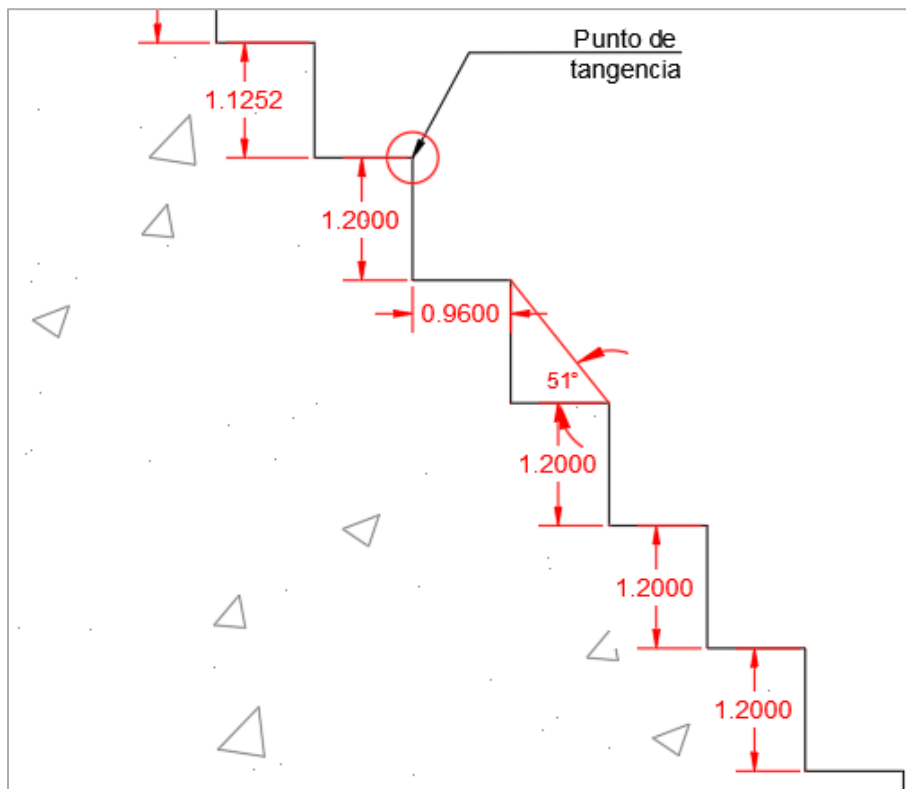


Figura 3.8 Escalones aguas abajo del punto de tangencia

### 3.2.1 Boes & Hager

Con el valor de tirante crítico calculado con la ecuación ( 3.1 ), la altura del escalón “s” y la ecuación ( 2.9) comprobamos que el flujo se encuentra en skimming o rasante:

$$\frac{h_c}{s} \geq 0.91 - 0.14 \tan \phi$$

$$\frac{3.492}{1.2} \geq 0.91 - 0.14 \tan(51.34)$$

$$2.91 \geq 0.735$$

Localizando el punto de inyección con la ecuación ( 2.10) podemos conocer la longitud medida desde la cresta hasta el inicio del punto de inyección:

$$L_i = \frac{5.90 h_c^{\frac{6}{5}}}{(\sin \phi)^{\frac{7}{5}} s^{\frac{1}{5}}} <$$

$$L_i = \frac{5.90(3.492)^{\frac{6}{5}}}{(\sin(51.34))^{\frac{7}{5}} (1.2)^{\frac{1}{5}}} = 36.062 \text{ m}$$

Para conocer el tirante de la mezcla de flujo agua-aire se utilizará la ecuación ( 2.11), calculando el número de Froude para superficies rugosas:

$$F_* = \frac{q_d}{(g \sin \phi \times s^3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$F_* = \frac{20.432}{(9.81 \times \sin(51.34) \times (1.2)^3)^{\frac{1}{2}}} = 5.617$$

$$h_{m,i} = s \times 0.40 F_*^{0.60}$$

$$h_{m,i} = 1.2 \times 0.40 (5.617)^{0.60} = 1.352 \text{ m}$$

Y por lo tanto la velocidad en este punto se calcula con la ecuación ( 2.13)

$$v_{m,i} = \frac{q_d}{h_{m,i}}$$

$$v_{m,i} = \frac{20.43}{1.352} = 15.11 \frac{m}{s}$$

Y la concentración de aire en el punto de inyección con la ecuación ( 2.14):

$$\bar{C}_i = 1.2 \times 10^{-3} (240^\circ - \phi)$$

$$\bar{C}_i = 1.2 \times 10^{-3} (240^\circ - 51.34^\circ) = 0.226$$

Entonces calculando el tirante y velocidad en el punto de inyección con las ecuaciones ( 2.15) y ( 2.16) respectivamente, además podemos notar que el valor de la velocidad crítica (20 m/s) en el punto de inyección:

$$h_{w,i} = h_{m,i} (1 - \bar{C}_i)$$

$$h_{w,i} = 1.325 (1 - 0.226) = 1.046 \text{ m}$$

$$v_{w,i} = \frac{q_d}{h_{w,i}}$$

$$v_{w,i} = \frac{20.43}{1.046} = 19.537 \text{ m/s}$$

Para conocer la altura que se requiere para alcanzar el flujo uniforme se requerirá de conocer la altura de la presa y del tirante la tirante crítica.

Para conocer si la altura de la presa es suficiente para alcanzar el flujo uniforme utilizaremos la ecuación ( 2.17) despejando  $H_{dam,u}$

$$H_{dam,u} = h_c 24 (\sin \phi)^{\frac{2}{3}}$$

$$H_{dam,u} = 3.492 \times 24 (\sin(51.34))^\frac{2}{3} = 70.06 \text{ m}$$

Entonces el flujo uniforme no se alcanza, ya que la presa tiene una altura de 47.14 m

Calculando el tirante para flujo uniforme  $h_{w,u}$  despejándolo de la ecuación ( 2.18):



$$h_{w,u} = 0.215(\sin\phi)^{-\frac{1}{3}} h_c$$

$$h_{w,u} = 0.215(\sin(51.34))^{-\frac{1}{3}} (3.492) = 0.815 \text{ m}$$

Y el tirante para flujo mezclado agua-aire al 90% utilizaremos la ecuación ( 2.19)

$$h_{90,u} = 0.50F_*^{(0.1\tan\phi+0.5)} S$$

$$h_{90,u} = 0.50(5.617)^{(0.1\tan(51.34)+0.5)} (1.2) = 1.764 \text{ m}$$

Entonces la concentración promedio de aire en flujo uniforme:

$$\bar{C}_u = 1 - \frac{h_{w,u}}{h_{90,u}}$$

$$\bar{C}_u = 1 - \frac{0.815}{1.764} = 0.538$$

Dado que la longitud de la rápida del vertedor no es lo suficientemente larga para que el flujo sea uniforme, por lo que se calcula un tirante equivalente al uniforme  $h_{w,e1}$  usando la ecuación ( 2.21 ):

$$Z_i \approx L_i \sin(\phi)$$

$$Z_i \approx 36.062 \times \sin(51.34) \approx 28.159 \text{ m}$$

$$h_{w,e1} = h_{w,i} - \frac{h_{w,i} - h_{w,u}}{(H_{dam,u} - Z_i)(H_{dam} - Z_i)}$$

$$h_{w,e1} = 1.046 - \frac{1.046 - 0.815}{(71.06 - 28.159)(47.14 - 28.159)} = 1.046 \text{ m}$$

Calculando la energía residual con la ecuación ( 2.29) dado el valor de la relación ( 2.28)

$$\frac{H_{dam,u}}{h_c} \geq 15 \text{ a } 20$$

$$\frac{H_{dam,u}}{h_c} = \frac{71.06}{3.49} = 20.35$$

de la ecuación ( 2.31 ) despejaremos  $f_b$  y calcularemos el valor de F de la ecuación ( 2.30):

$$\frac{1}{\sqrt{f_b}} = \frac{1}{\sqrt{0.5 - 0.42 \sin(2\phi)}} \left[ 1 - 0.25 \log \left( \frac{K}{D_{h,w}} \right) \right]$$

$$f_b = \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{0.5 - 0.42 \sin(2 \times 51.34)}} \right) \left( 1 - 0.25 \log \left( \frac{0.75}{3.261} \right) \right)} \right]^2 = 0.067$$

$$F = \left( \frac{f_b}{8 \sin \phi} \right)^{\frac{1}{3}} \cos \phi + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{f_b}{8 \sin \phi} \right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$F = \left( \frac{0.067}{8 \sin(51.34)} \right)^{\frac{1}{3}} \cos(51.34) + \frac{1}{2} \left( \frac{0.067}{8 \sin(51.34)} \right)^{-\frac{2}{3}} = 10.49$$

Finalmente, la energía residual quedará como:

$$H_{res} = \frac{F}{\frac{H_{dam}}{h_c} + F} H_{max}$$

$$H_{res} = \left( \frac{10.49}{\frac{47}{3.49} + 10.49} \right) (52.237) = 22.88 \text{ m}$$

Corroborando con la ecuación ( 2.32 ) el tirante equivalente al uniforme:

$$H_{res} = h_{w,e_2} \cos(\phi) + \alpha \frac{q^2}{2g h_{w,e_2}}$$

$$22.88 = h_{w,e_2} \cos(51.34) + \frac{(20.43)^2}{2(9.81)h_{w,e_2}}$$

$$h_{w,e_2} = 1.025 \text{ m}$$

Calculando el término medio entre  $h_{w,e_1}$  y  $h_{w,e_2}$  :

$$h_{w,e} = \frac{h_{w,e_1} + h_{w,e_2}}{2}$$

$$h_{w,e} = \frac{1.046 + 1.025}{2} = 1.036 \text{ m}$$

finalmente, el valor de la velocidad final al pie del vertedor se obtiene ecuación ( 2.34):

$$v_{w,e} = \frac{q}{h_{w,e}}$$

$$v_{w,e} = \frac{20.43}{1.036} = 19.727 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para obtener la energía disipada, primero obtendremos la energía al pie del vertedor:

$$E_2 = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.2)$$

$$E_2 = 1.036 + \frac{(19.722)^2}{2 \times 9.81} = 20.86 \text{ m}$$

$$E_{\text{disipada}} = \left( 1 - \frac{E_2}{E_1} \right) \times 100 \quad (3.3)$$

$$E_{\text{disipada}} = \left( 1 - \frac{20.86}{43.237} \right) \times 100 = 51.75\%$$

Para el cálculo de los muros laterales utilizaremos la ecuación ( 2.35), pero primero obtendremos  $h_{90,u}$  con la ecuación ( 2.36):

$$h_{90,u} = s \times 0.5 F_*^{(0.1 \tan(\phi) + 0.5)}$$

$$h_{90,u} = 1.2 \times 0.5 \left( 5.617^{(0.1 \tan(51.34) + 0.5)} \right) = 1.764 \text{ m}$$

Usando un factor de seguridad de  $\eta = 1.2$

$$h_d = \eta h_{90,u}$$

$$h_d = 1.2 \times 1.764 = 2.117 \text{ m}$$

### 3.2.2 González & Chanson

Al igual que el criterio anterior, los cálculos comienzan con el tirante crítico:

$$d_c = 3.492 \text{ m}$$

Con la ecuación ( 2.38), comprobaremos con la altura del escalón ( $h=1.2\text{m}$  ) se presentará el flujo en skimming o rasante:

$$\frac{d_c}{h} > 12 - 0.325 \tan \theta$$

$$\frac{3.492}{1.2} > 12 - 0.325 \tan(51.34)$$

$$2.91 > 0.794$$

Para verificar que la altura de escalón elegida actúa como superficie rugosa ocuparemos la ecuación ( 2.39), en donde:

$$h \leq 15 d_c \cos \theta$$

$$1.2 \leq 15 \times 3.492 \times \cos(51.34)$$

$$1.2 < 32.718$$

Ya seleccionada la altura del escalón ( $h=1.2\text{m}$  ), se localiza el punto de ingreso de aire con la ecuación ( 2.41), y el número de Froude que está en función de la rugosidad equivalente  $k_s$  con la ecuación ( 2.43):

$$k_s = h \cos \theta$$

$$k_s = 1.2 \times \cos(51.34) = 0.75 \text{ m}$$

$$F^* = \frac{q}{\sqrt{g \sin \theta k_s^3}}$$

$$F^* = \frac{20.43}{\sqrt{9.81 \times \sin(51.34) (0.75)^3}} = 11.376$$

Localizando el punto de inyección, la longitud  $L_i$  medida desde la cresta será:

$$L_i = 9.719(\sin\theta)^{0.0796} (F^*)^{0.713} h \cos\theta$$

$$L_i = 9.719(\sin(51.34))^{0.0796} (11.376)^{0.713} (1.2) \cos(51.34) = 40.442 \text{ m}$$

Y el tirante para el mismo punto:

$$d_i = \frac{0.4034}{(\sin\theta)^{0.04}} (F^*)^{0.592} h \cos\theta$$

$$d_i = \frac{0.4034}{(\sin(51.34))^{0.04}} (11.376)^{0.592} (1.2) \cos(51.34) = 1.288 \text{ m}$$

Para verificar si el flujo está totalmente desarrollado antes del pie del vertedor, se deberá cumplir la ecuación ( 2.44):

$$\frac{d_c}{h} < \frac{1}{0.1193 \cos\theta \sin\theta^{0.259} \left( \frac{L}{h \cos\theta} \right)^{0.935}}$$

$$\frac{3.492}{1.2} < \frac{1}{0.1193 \cos(51.34) (\sin(51.34))^{0.259} \left( \frac{50.11}{1.2 \cos(51.34)} \right)^{0.935}}$$

$$2.91 < 0.281$$

Como no se cumple la ecuación anterior, el flujo no se desarrolla y no llega al uniforme, porque continua como gradualmente variado.

Ya que el valor de  $\frac{H_{\max}}{d_c}$  se encuentra entre 7 y 20, calcularemos la velocidad y el tirante al final del vertedor con las ecuaciones ( 2.49) y ( 2.51) correspondientemente; asumiendo una velocidad ideal máxima obtenida con la ecuación ( 2.50):

$$\frac{H_{\max}}{d_c} = \frac{43.237}{3.492} = 12.383$$

$$V_{\max} = \sqrt{2gH_{\max}}$$

$$V_{\max} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 43.23} = 29.12 \frac{m}{s}$$

$$U_w = V_{\max} \left[ 0.00107 \left( \frac{H_{\max}}{d_c} \right)^2 - 0.0634 \left( \frac{H_{\max}}{d_c} \right) + 1.202 \right]$$

$$U_w = 29.12 \left[ 0.00107 \left( \frac{43.237}{3.492} \right)^2 - 0.0634 \left( \frac{43.237}{3.492} \right) + 1.202 \right] = 16.919 \frac{m}{s}$$

$$d = \frac{q_w}{U_w}$$

$$d = \frac{20.43}{16.91} = 1.208m$$

Conociendo estos valores, podemos obtener la velocidad máxima real con la ecuación ( 2.52)

$$V_{\max real} = \sqrt{2g(H_{\max} - d \cos \theta)}$$

$$V_{\max real} = \sqrt{2 \times 9.81(43.237 - 1.208 \cos(51.34))} = 28.866 \frac{m}{s}$$

Ahora, recalculando la velocidad  $U_{w real}$  y  $d_{real}$ , obtendremos:

$$U_{w real} = 28.866 \left[ 0.00107 \left( \frac{43.237}{3.492} \right)^2 - 0.0634 \left( \frac{43.237}{3.492} \right) + 1.202 \right] = 16.771 \frac{m}{s}$$

$$d_{real} = \frac{20.43}{16.771} = 1.218m$$

Para obtener la energía disipada ecuación ( 3.3 ), primero obtendremos la energía al pie del vertedor con la ecuación de energía específica:

$$E_2 = 1.218 + \frac{(16.771)^2}{2 \times 9.81} = 15.55 m$$

$$E_{disipada} = \left( 1 - \frac{15.55}{43.237} \right) \times 100 = 64.01\%$$

Ya conocido el tirante característico ( $d_{real}$ ) al pie del vertedor, se puede conocer el tirante  $Y_{90}$ , que correspondiente a una concentración de aire igual a 90% ( $C=0.9$ ) pero de calculando  $\bar{C}$  con la ecuación ( 2.48) ya que el flujo no es uniforme:

$$D = -0.00024\theta^2 + 0.0214\theta - 0.0357$$

$$D = -0.00024(51.34)^2 + 0.0214(51.34) - 0.0357 = 0.43$$

$$\bar{C} = 0.43 - 0.3e^{\left[-5\left(\frac{1.2}{3.492}\right)^2 - 4\left(\frac{1.2}{3.492}\right)\right]} = 0.388$$

Entonces, de la ecuación ( 2.53) despejaremos el tirante  $Y_{90}$ , y enseguida calcularemos la altura de los muros laterales, así como el bordo libre con las ecuaciones ( 2.55) y ( 2.54) correspondientemente:

$$Y_{90} = \frac{d_{real}}{(1-\bar{C})}$$

$$Y_{90} = \frac{1.218}{(1-0.388)} = 1.992 m$$

$$h_w = 1.4 Y_{90}$$

$$h_w = 1.4 \times 1.992 = 2.789 m$$

$$B.L. = 0.4 \times 1.992 = 0.818 m$$

Teniendo una altura total del muro lateral de:

$$Total_{wall} = 2.789 + 0.797 = 3.585 m$$

### 3.3 Modelación numérica

Una de las partes de la modelación numérica es el pre procesamiento y consta de la creación de la geometría, mallado y definición de condiciones de frontera, así como condiciones iniciales.

La geometría en tres dimensiones se realizó con AutoCAD (Figura 3.6), esta se realizó con un modelo sólido de una sola pieza, la cual está formado por el embalse, cortina de la presa, vertedor escalonado y una plantilla recta aguas abajo. El modelo fue exportado en StereoLithography (.stl), para poder trabajar con él en el software de CFD.

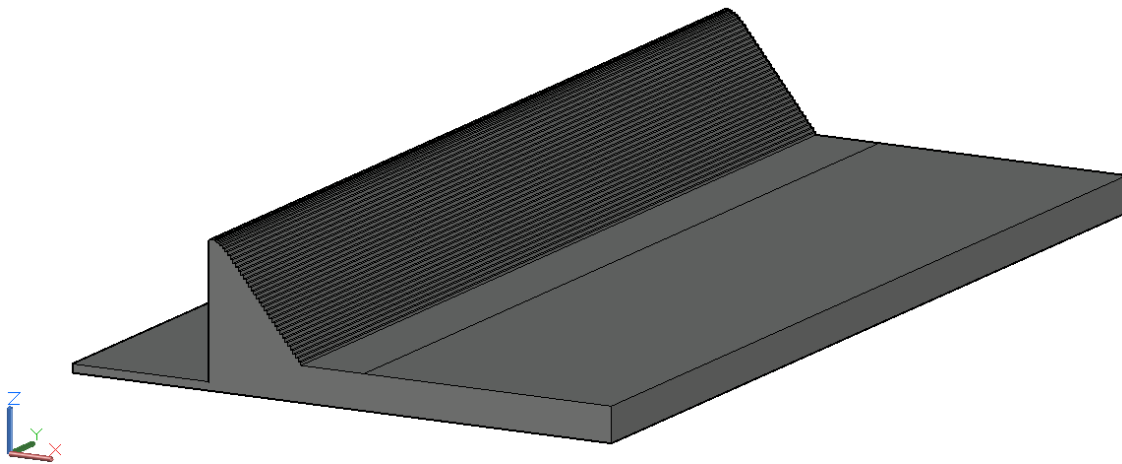


Figura 3.9 Vertedor escalonado con plantilla de concreto aguas abajo.

#### 3.3.1 Mallado

Se realizó un mallado con una malla rectangular en tres distintos bloques (Tabla 3.3) cada una de ellas tiene un ancho unitario lo que permitió reducir el tiempo de cómputo, el primero corresponde al área del embalse, seguido por un bloque de malla más refinada para la zona de los escalones del vertedor y finalmente un bloque que cubre la zona del cauce aguas abajo de la obra de excedencias, para finalmente trabajar con un total de 511,938 celdas a lo largo del modelo (Figura 3.10).



Tabla 3.3 Dimensiones de bloques de mallas

	Tamaño	x	y	z	Total celdas por bloque
Bloque 1	1.0 x 1.0 m	35	1	58	2,030
Bloque 2	0.2 x 0.2 m	350	5	290	507,500
Bloque 3	1.0 x 1.0 m	86	1	28	2,408
Total de celdas					511,938

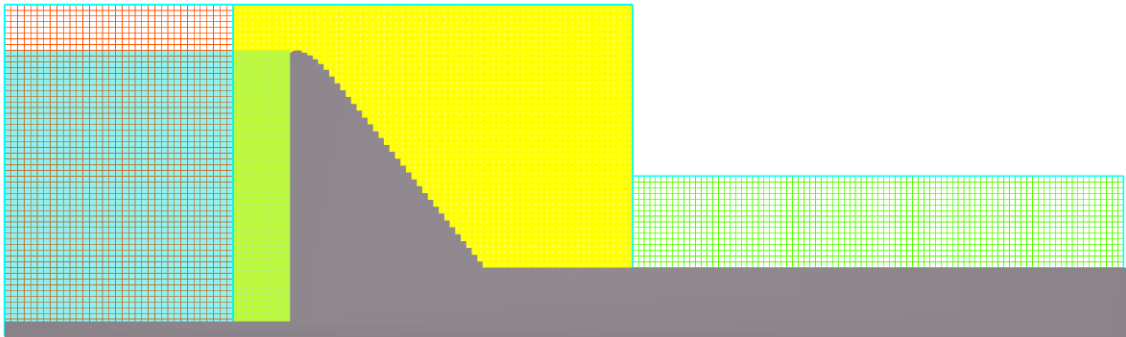


Figura 3.10 Mallado vertedor escalonado. Vista: Perfil.

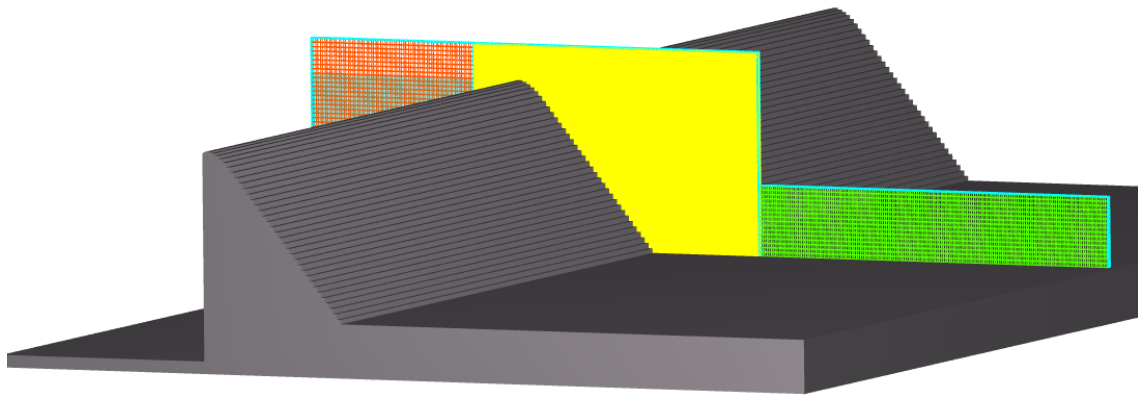


Figura 3.11 Mallado vertedor escalonado. Vista: xyz

### 3.3.2 Condiciones de frontera

A cada uno de los bloques presentados en el punto anterior se les definió una condición de frontera en cada una de sus caras, teniendo un total de 6 condiciones de frontera para cada uno de los bloques, los cuales se muestran en la Tabla 3.4, cada una de las fronteras se definió de acuerdo con lo requerido, en el punto 3.3.2 se detalló cada una de las fronteras existentes y su

función. Para este caso se requirieron fronteras del tipo muro, presión específica, simetría y salida.

Tabla 3.4 Condición de frontera para cada bloque.

	X <sub>min</sub>	X <sub>max</sub>	Y <sub>min</sub>	Y <sub>max</sub>	Z <sub>min</sub>	Z <sub>max</sub>
Bloque 1	P	S	W	W	W	P
Bloque 2	S	S	W	W	W	P
Bloque 3	S	O	W	W	W	P

P presión  
 S symmetry  
 W wall  
 O outflow

### 3.3.3 Condiciones iniciales

El fluido usado en el modelo cuenta con las propiedades físicas del agua a 20°C, la aceleración de la gravedad en la dirección adecuada, además se colocó un fluido aguas arriba de la cortina de la presa a una elevación del NAMO (347 msnm) con el fin de evitar largos tiempo de llenado del modelo; para la solución del problema se seleccionó el modelo de turbulencia  $k-\epsilon$ , tal y como se explicó en el punto 2.4.1, este es el más adecuado.

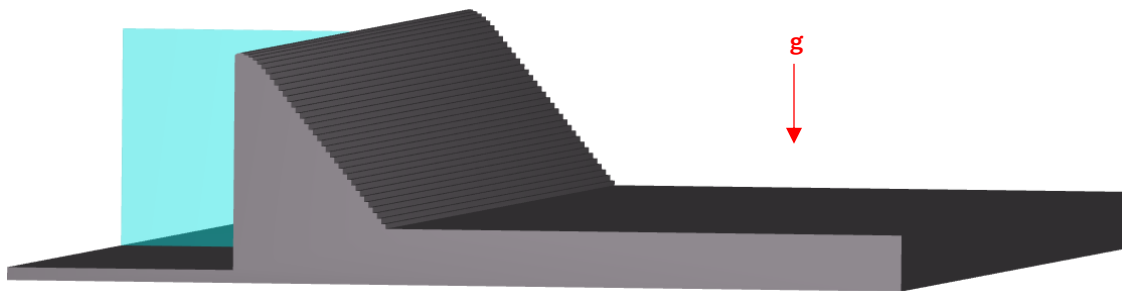


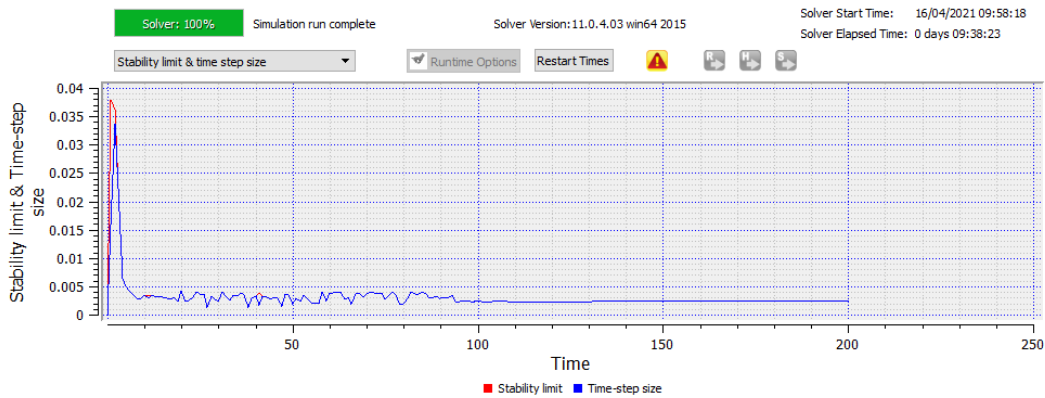
Figura 3.12 Vertedor escalonado, condición inicial del fluido.

### 3.3.4 Simulación

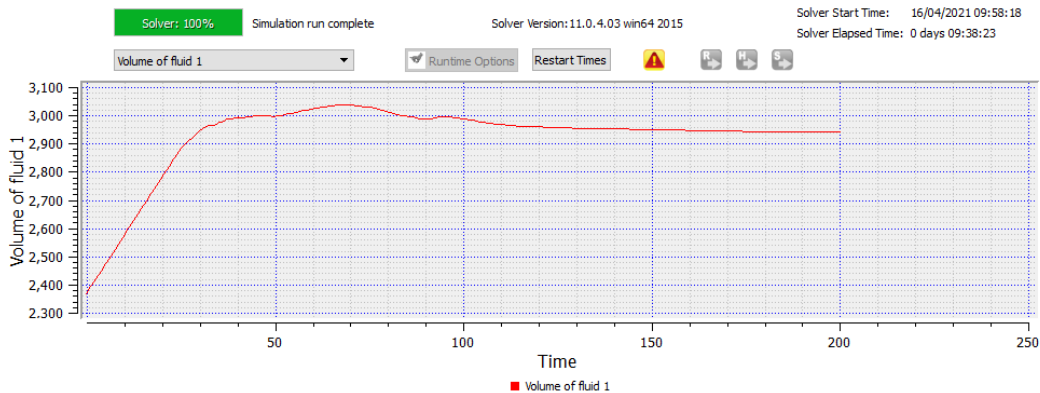
Se realizó una simulación de 200 segundos donde se siguió el comportamiento de la estabilidad del modelo, así como del establecimiento de un volumen constante dentro de él. En la Gráfica 3.1 se puede observar que a partir del segundo 132 el modelo se comienza a estabilizar, esto

mismo se puede comprobar con el volumen del fluido, en la Gráfica 3.2 se nota que comienza a ser constante, por lo que a los 200 segundos los resultados serán confiables.

El gasto unitario, así como las elevaciones constantes dentro del modelo (Gráfica 3.3 y Gráfica 3.4) fueron comprobadas con el uso de “Baffles y Probes” colocados en distintos puntos a lo largo del modelo (Figura 3.13).



Gráfica 3.1 Estabilidad límite y tiempo de cálculo: Vertedor escalonado.



Gráfica 3.2 Volumen del fluido: Vertedor escalonado.

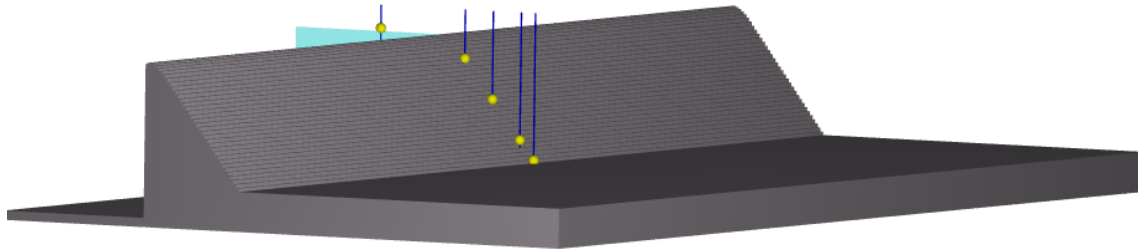
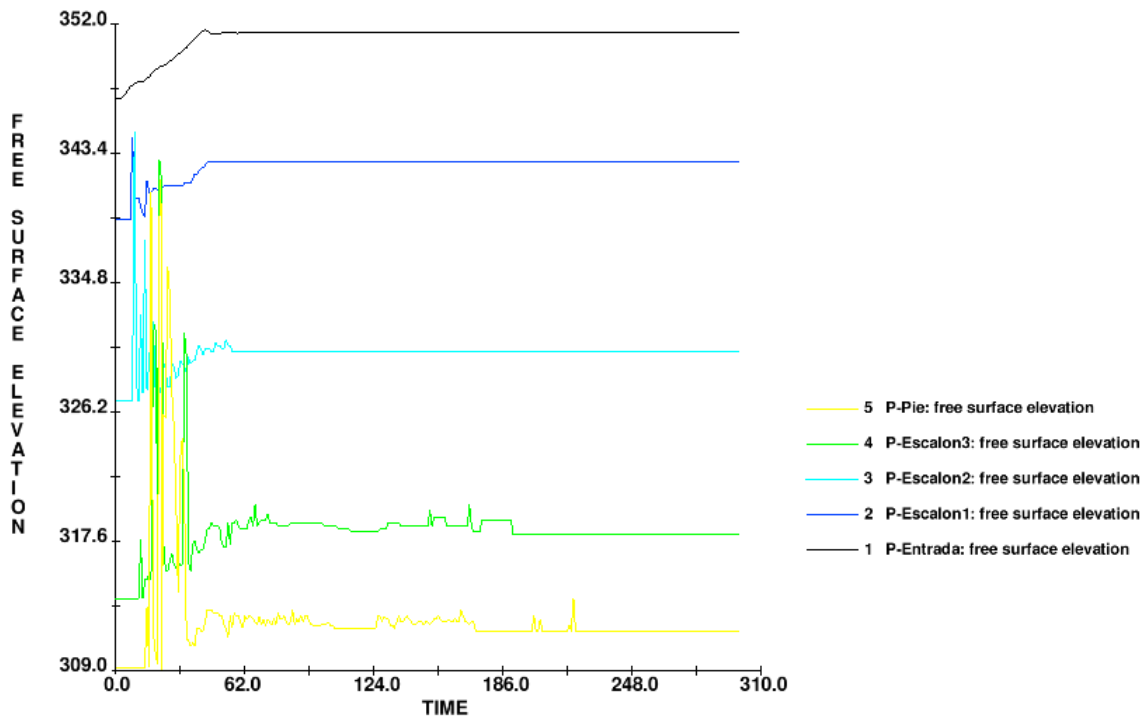
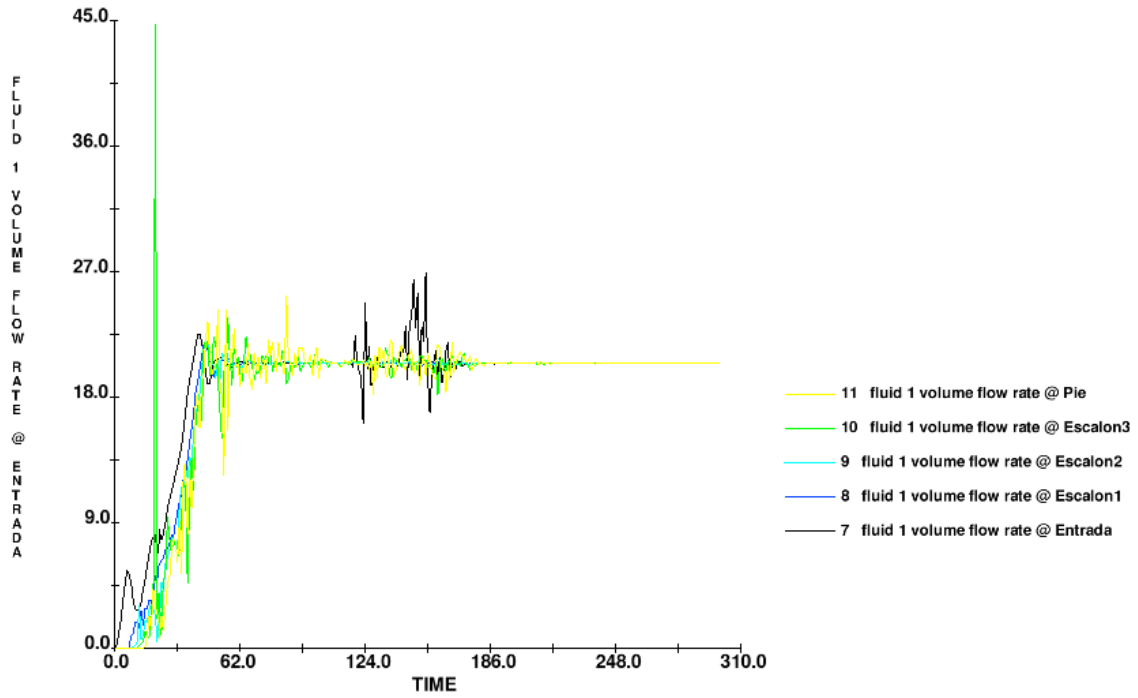


Figura 3.13 Baffles & probes: Vertedor escalonado



Gráfica 3.3 Elevación de superficie libre: Vertedor escalonado.

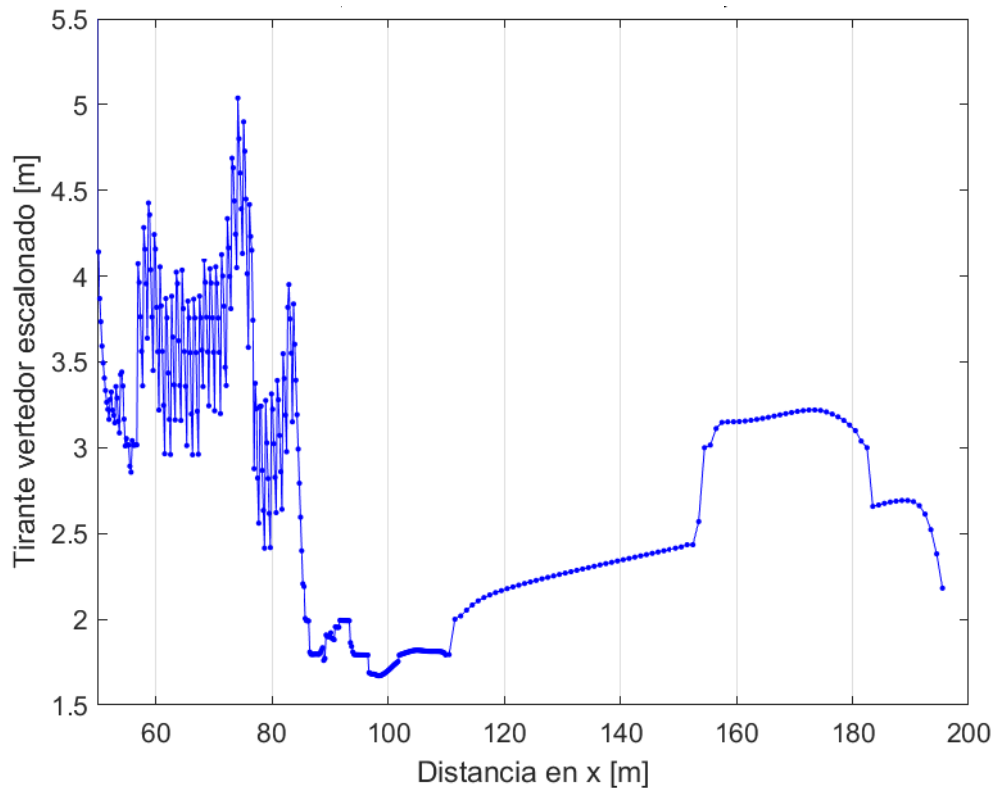


Gráfica 3.4 Gasto: Vertedor escalonado.

### 3.1 Tanques amortiguadores

Dado que los criterios de diseños seleccionados para el diseño del vertedor escalonado no proporcionan adicionalmente el diseño de un tanque amortiguador aguas abajo de éste, se realizaron distintas propuestas con la finalidad de disminuir la energía que llegara al río, y cumplir con los objetivos planteados.

De la simulación presentada en el punto 3.3.4 se extrajeron datos de tirante, velocidad y número de Froude al pie del vertedor (Gráfica 3.5, Gráfica 3.6 y Gráfica 3.7) al pie del vertedor o aguas abajo del último escalón se encontró un tirante de 1.85 m, con una velocidad del fluido de 11.04 m/s y un número de Froude de 2.593. Con estos datos, en los siguientes puntos se presenta un par de propuestas de tanque amortiguador adecuadas al tipo de régimen del fluido.



Gráfica 3.5 Tirante en el eje x. Vertedor escalonado

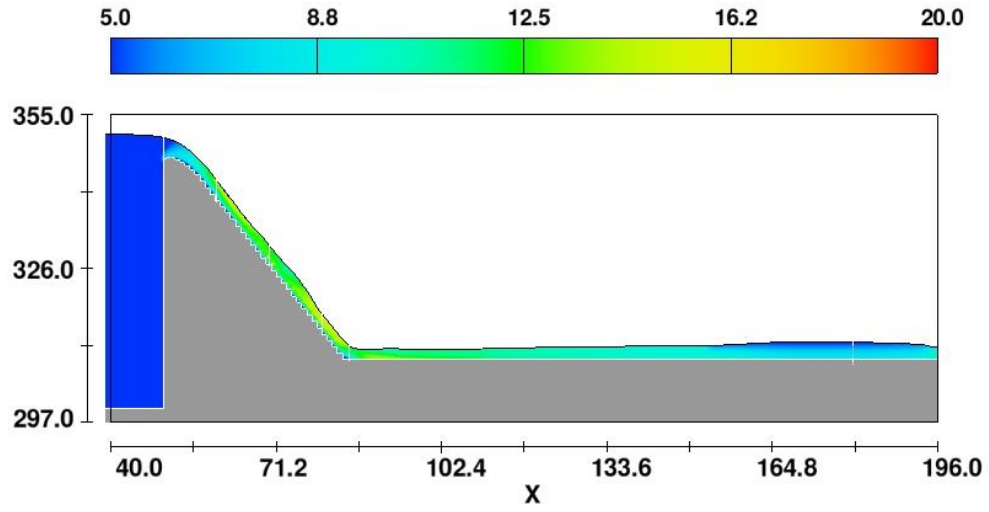
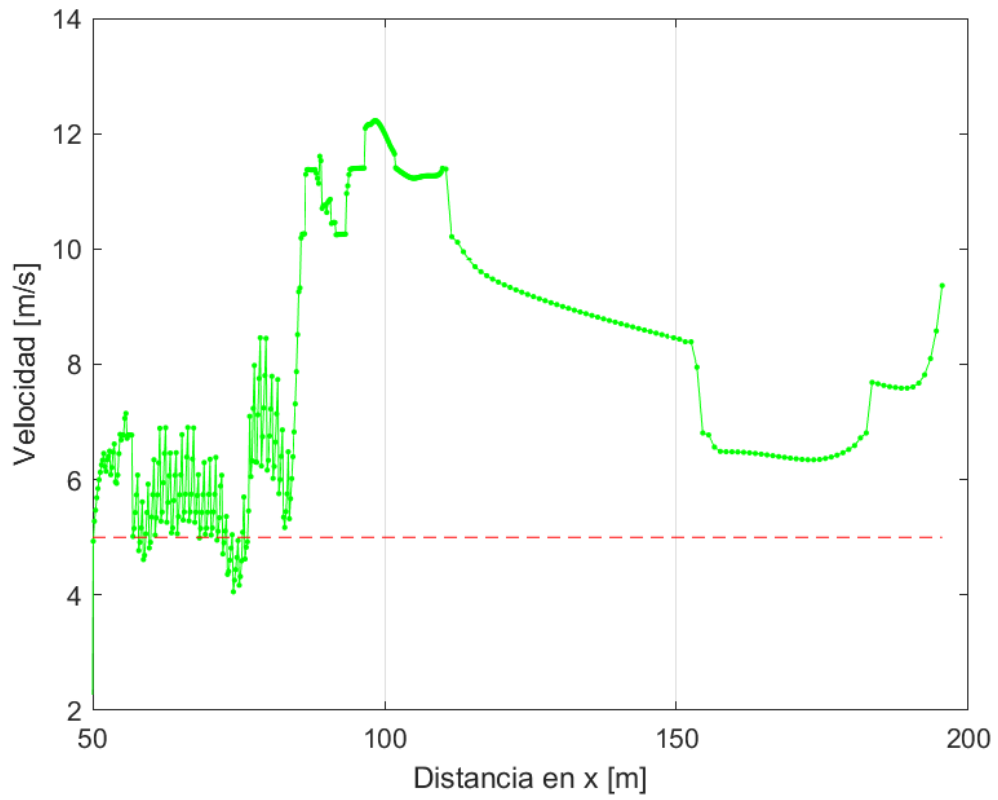


Figura 3.14 Velocidad plano xz. Vertedor escalonado



Gráfica 3.6 Velocidad. Vertedor escalonado

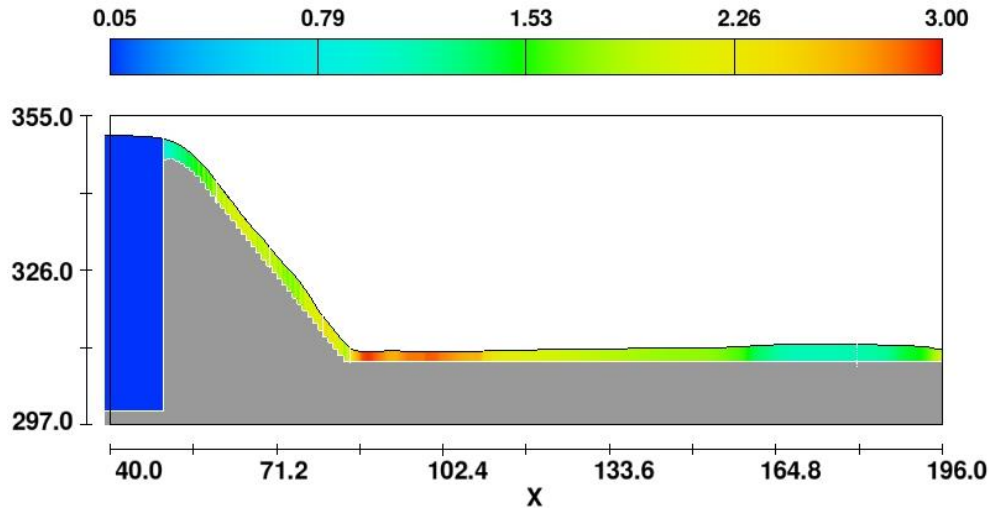
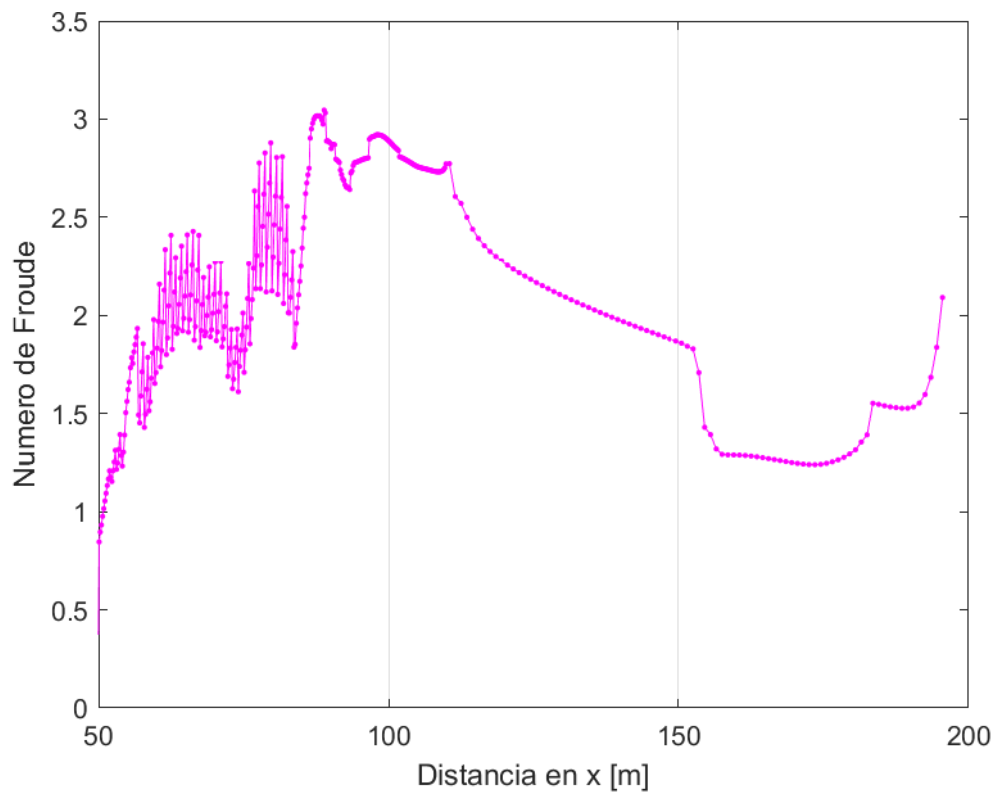


Figura 3.15 Numero de Froude plano xz. Vertedor escalonado



Gráfica 3.7 Numero de Froude. Vertedor escalonado



### 3.1.1 Saint Anthony Falls

El salto hidráulico tipo SAF (Saint Anthony Falls) fue desarrollado en el laboratorio de hidráulica Saint Anthony Falls de la Universidad de Minnesota, Estados Unidos, para su uso en pequeñas estructuras de drenaje (Torres Herrera, 1987).

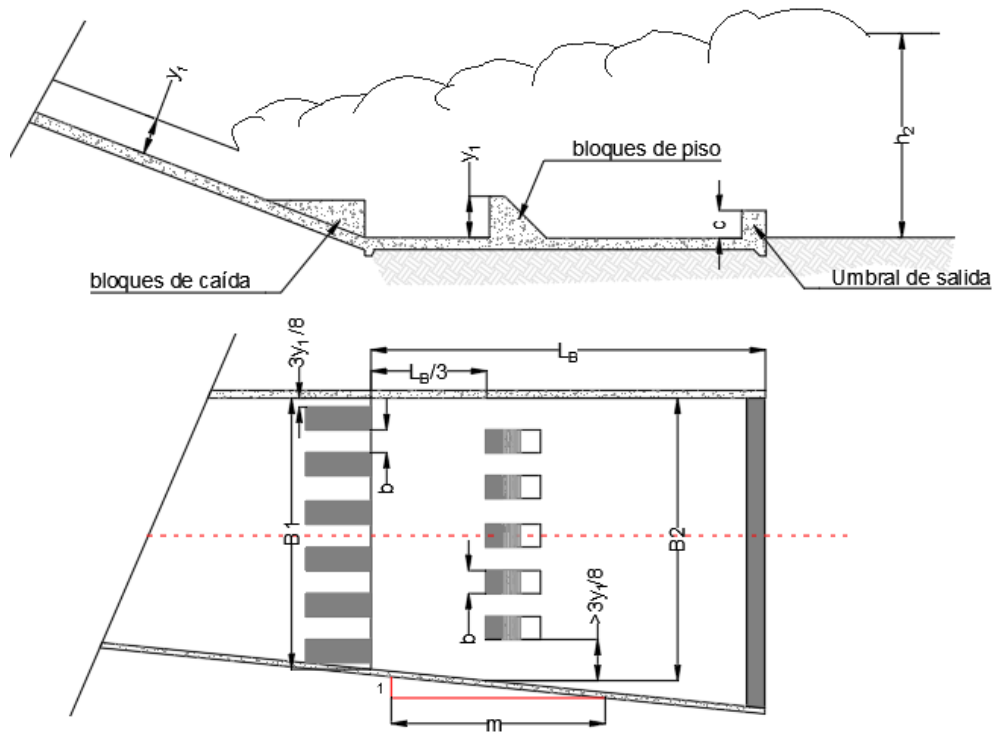


Figura 3.16 Tanque amortiguador tipo SAF. Vista de planta y longitudinal

La longitud del tanque amortiguador ( $L_B$ ) tipo SAF es aplicable solo para número de Froude entre 1.7 y 17.

$$L_B = 4.5y_2 Fr_1^{-0.76} \quad (3.4)$$

La altura de los bloques de entrada y los bloques del piso es de  $y_1$  (conjugado menor) y su ancho y espaciamiento es aproximadamente  $0.75y_1$

$$h_1 = y_1 \quad (3.5)$$

$$b = 0.75y_1 \quad (3.6)$$

La distancia desde el extremo aguas arriba del tanque amortiguador hasta los bloques del piso es  $X_B$ :

$$X_B = \frac{L_B}{3} \quad (3.7)$$

Los bloques del piso deben tener una distancia a las paredes laterales como mínimo de  $Y_B$ , los bloques del piso deben encontrarse aguas abajo enfrentados a las aberturas entre los bloques de la rápida:

$$Y_B = \frac{3y_1}{8} \quad (3.8)$$

La altura del umbral de salida está dada por  $c$ :

$$c = 0.07y_2 \quad (3.9)$$

donde:

$y_2$  es el conjugado mayor

la altura de los muros laterales por encima del tirante de salida esperada está dada por:

$$z = \frac{y_2}{3} \quad (3.10)$$

Siguiendo las reglas o condiciones de diseño dadas por el investigador Blaisdell, el tanque amortiguador contara con las siguientes dimensiones (Figura 3.17, Figura 3.18 y Figura 3.19):

Si consideramos que el tirante al pie del vertedor escalonado como conjugado menor  $y_1$ , podemos calcular el tirante conjugado mayor que utilizaremos para calcular la longitud del tanque amortiguador, entonces con la ecuación (3.4):

$$y_1 = 1.85m$$

$$v_1 = 11.044 \frac{m}{s}$$

$$Fr_1 = 2.593$$

$$y_2 = \frac{y_1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right] \quad (3.11)$$

$$y_2 = \frac{1.85}{2} \left[ \sqrt{1 + 8(2.593)^2} - 1 \right] = 5.922m$$

$$L_B = 4.5y_2Fr_1^{-0.76}$$

$$L_B = 4.5(5.922)(2.593)^{-0.76} = 12.917m$$

Para fines constructivos la longitud del tanque amortiguador se redondeará a 13 metros.

La altura de los bloques de entrada ( $h_1$ ) y los bloques del piso es de  $y_1$  (conjugado menor) y su ancho y espaciamiento es aproximadamente “b”:

$$h_1 = 1.85m$$

$$b = 0.75 \times 1.85 = 1.388m$$

Calculando la distancia desde el extremo aguas arriba del tanque amortiguador hasta los bloques del piso es  $X_B$ :

$$X_B = \frac{12.917}{3} = 4.306 m$$

Los bloques del piso tienen una distancia a las paredes laterales de  $Y_B$ :

$$Y_B = \frac{3(1.85)}{8} = 0.694 m$$

La altura del umbral de salida será:

$$c = 0.07(5.922) = 0.415m$$

La altura de los muros laterales por encima del tirante de salida es:

$$z = \frac{5.922}{3} = 1.974 m$$

Para realizar la simulación numérica se utilizaron tres mallas como se mostró en el punto 3.3.1 con la diferencia de que la malla tendrá tres metros de ancho, con el fin de observar el comportamiento y el efecto aguas abajo de los bloques de tanque amortiguador tipo SAF, las condiciones de frontera son idénticas a las mostradas en el punto 3.3.2; así mismo las condiciones iniciales.

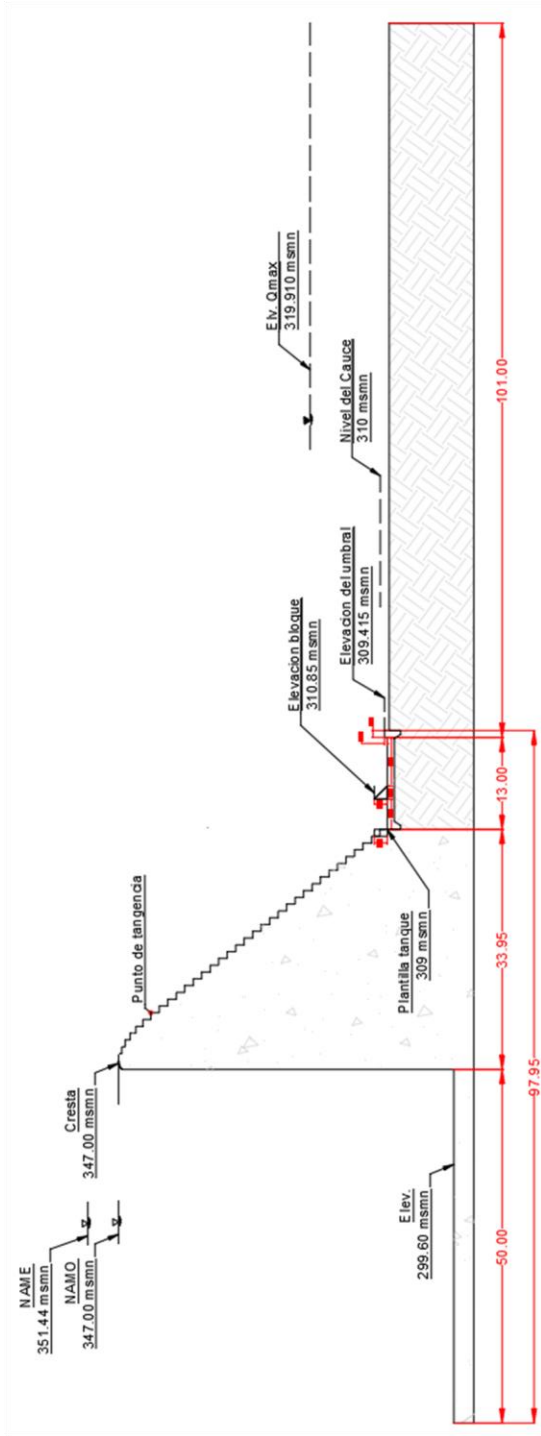


Figura 3.17 Tanque amortiguador tipo SAF aguas abajo de vertedor escalonado.

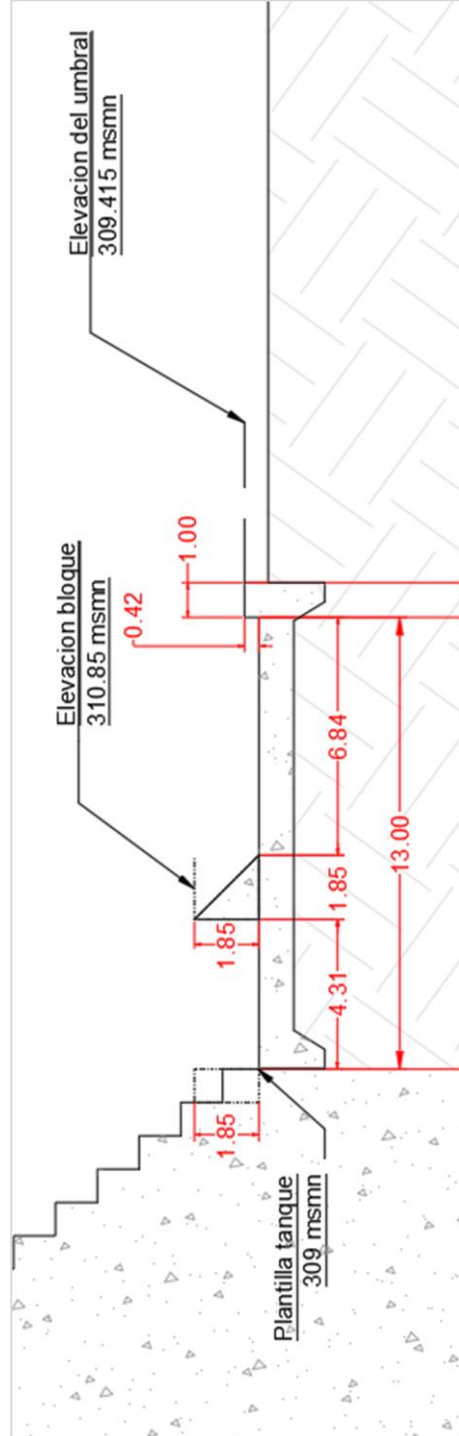


Figura 3.18 Detalle tanque amortiguador tipo SAF

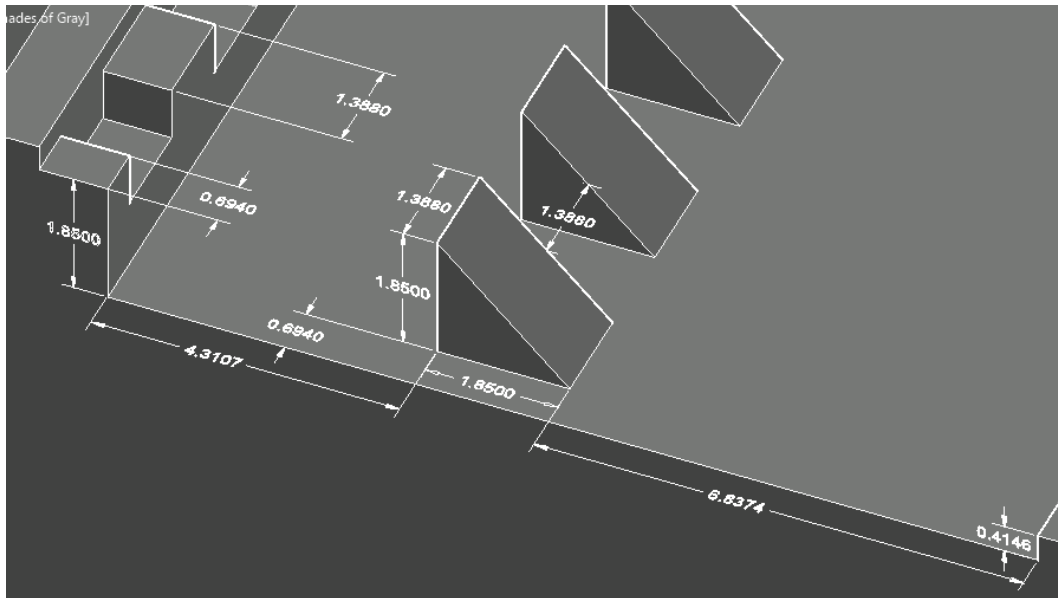


Figura 3.19 Detalle tanque amortiguador tipo SAF (3D)

Tabla 3.5 Mallado. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF aguas abajo

	Tamaño	x	y	z	Total celdas por bloque
Bloque 1	1.0 x 1.0 m	35	3	58	6,090
Bloque 2	0.2 x 0.2 m	350	15	290	1,522,500
Bloque 3	1.0 x 1.0 m	87	3	28	7,308
Total de celdas					1,535,898

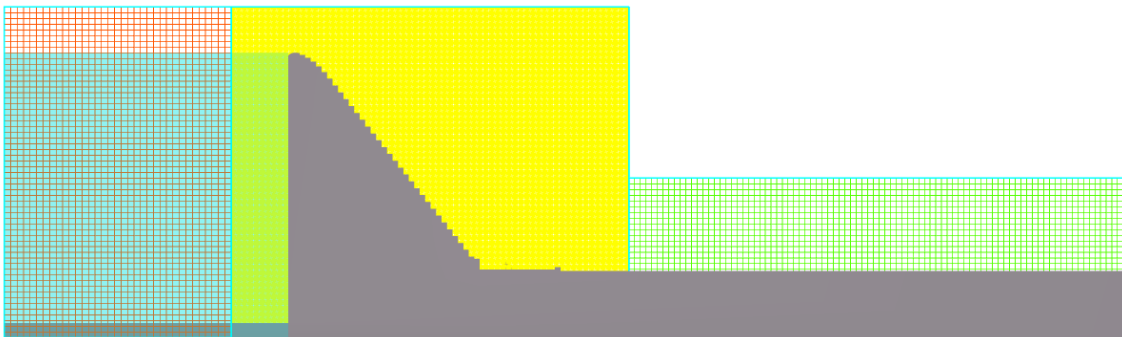


Figura 3.20 Mallado vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF. Vista: perfil

Tabla 3.6 Condiciones de frontera. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF aguas abajo

	$x_{min}$	$x_{max}$	$y_{min}$	$y_{max}$	$z_{min}$	$z_{max}$
Bloque 1	P	S	W	W	W	P
Bloque 2	S	S	W	W	W	P
Bloque 3	S	O	W	W	W	P

P presion  
 S symmetry  
 W wall  
 O outflow

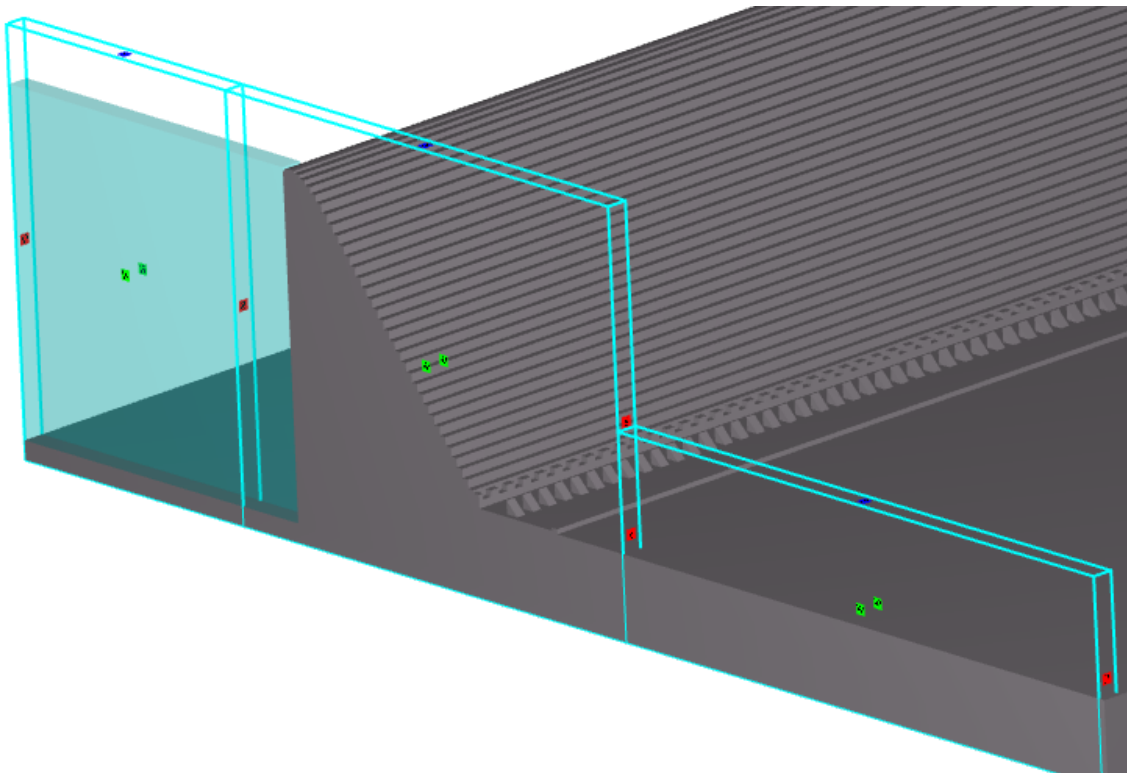


Figura 3.21 Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF: condiciones iniciales y de frontera

Se realizó una simulación de 200 segundos, la cual tuvo una duración de proceso de 1 día: 0 horas: 10 minutos: 50 segundos. Se extrajeron datos de velocidad y numero de Froude (Figura 3.22 y Figura 3.23):

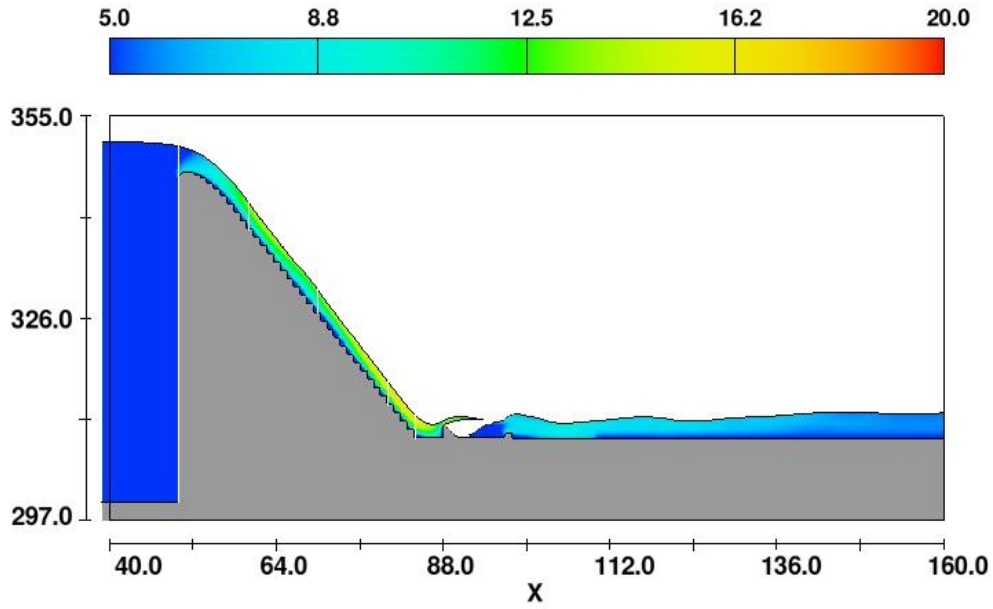


Figura 3.22 Velocidad plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF.

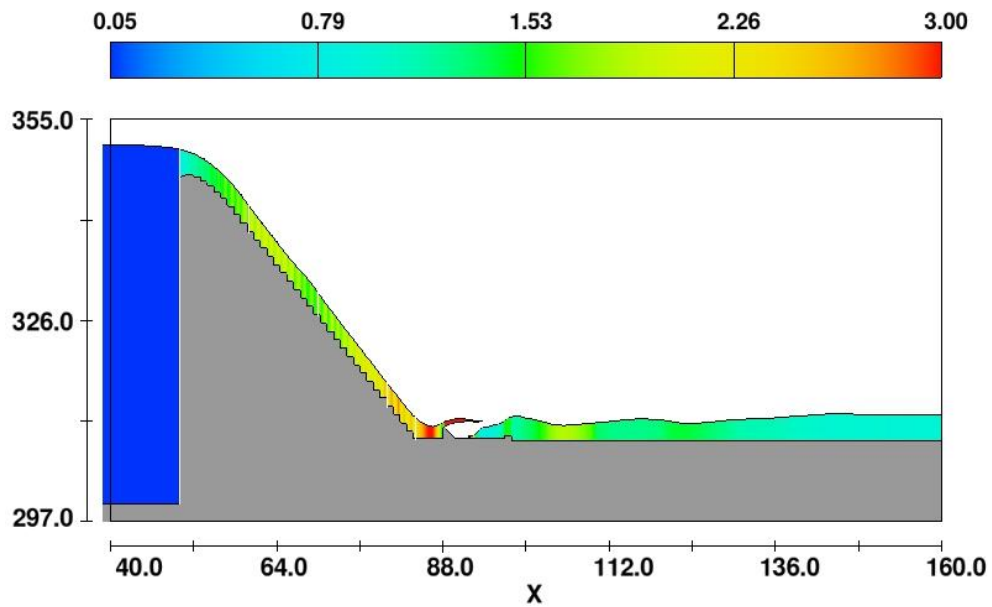


Figura 3.23 Numero de Froude plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF.

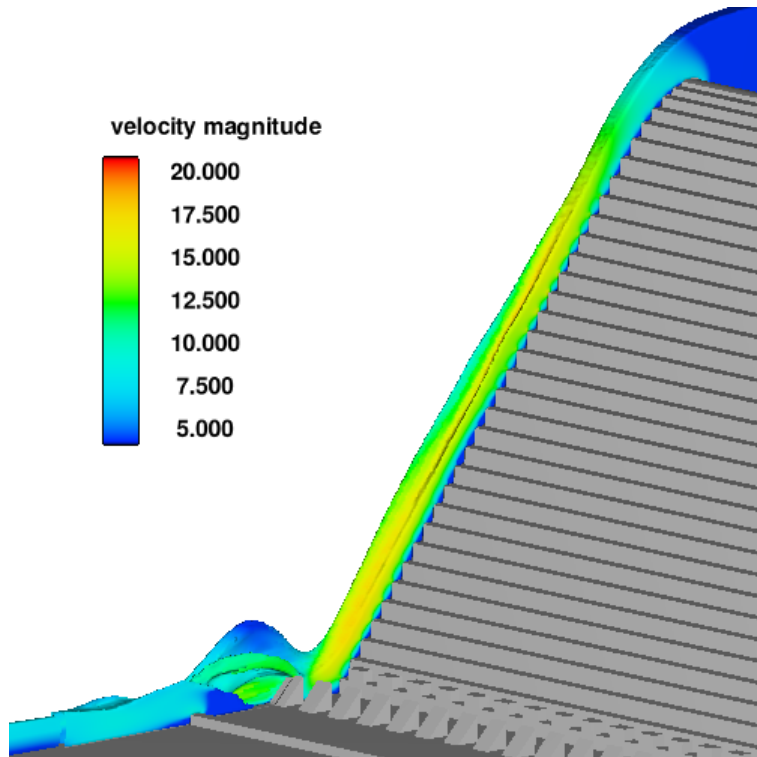


Figura 3.24 Velocidad 3D. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF.

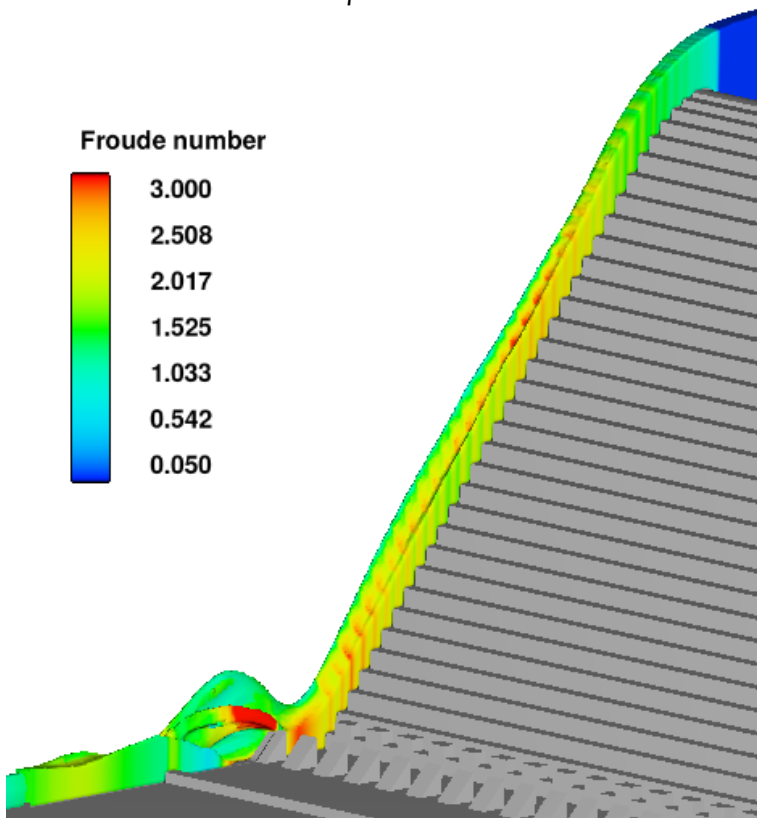


Figura 3.25 Numero de Froude 3D. Vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo SAF.



### 3.1.2 Diseño propuesto (Escalón)

Con el fin de aumentar la energía disipada al final de la obra de excedencias se propondrá un escalón aguas abajo en la plantilla de descarga, confinando el salto hidráulico a una longitud específica y manteniendo un régimen subcrítico en el cauce.

Entonces considerando el tirante al pie del vertedor (punto 3.3.4) como tirante conjugado menor ( $y_1$ ):

$$y_1 = 1.85\text{m}$$

$$v_1 = 11.044 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Fr_1 = 2.593$$

Y como se presentó en el punto anterior, el conjugado mayor sería:

$$y_2 = \frac{1.85}{2} \left[ \sqrt{1 + 8(2.593)^2} - 1 \right] = 5.922\text{m}$$

$$v_2 = 3.45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Fr_2 = 0.453$$

$$Rh_2 = 5.728\text{m}$$

Calculando la energía específica con la ecuación ( 3.12 ) para cada uno de los tirantes se puede realizar un balance de energía podremos y conocer la altura máxima del escalón ( $\Delta z_{\text{max}}$  ), sin que este afecte el régimen subcrítico del fluido.

$$E = y + \frac{v^2}{2g} \quad (3.12)$$

Para el conjugado menor tenemos:

$$E_1 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$E_1 = 1.85 + \frac{(11.044)^2}{2 \times 9.81} = 8.069\text{ m}$$

Y el conjugado mayor:

$$E_2 = y_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$E_2 = 5.922 + \frac{(3.45)^2}{2 \times 9.81} = 6.529 \text{ m}$$

Calculando la energía específica para el tirante crítico:

$$E_c = 3.492 + \frac{(5.852)^2}{2 \times 9.81} = 5.237 \text{ m}$$

Realizando el balance de energía entre el tirante conjugado mayor y el tirante crítico:

$$y_2 + \frac{v_2^2}{2g} = y_c + \frac{v_c^2}{2g} + \Delta z_{\max} \quad (3.13)$$

$$E_1 = E_c + \Delta z_{\max}$$

$$6.529 = 5.237 + \Delta z_{\max}$$

Despejando  $\Delta z_{\max}$  :

$$\Delta z_{\max} = 1.291 \text{ m}$$

Para fines constructivos la altura del escalón se considerará  $\Delta z = 1 \text{ m}$ , ya que este escalón es menor a  $\Delta z_{\max}$ , se seguirá conservando el régimen subcrítico.

Calculando la longitud del salto hidráulico:

$$L_j = y_1 \cdot 9.75 (Fr_1 - 1)^{1.01} \quad (3.14)$$

$$L_j = 1.85 \times 9.75 (2.593 - 1)^{1.01} = 28.866 \text{ m}$$

Para fines constructivos la longitud del tanque será de 29 metros.

Se realizó una simulación de 200 segundos, tiempo suficiente para que el flujo se estableciera, dicha simulación fue procesada durante 8 horas: 18 minutos: 22 segundos, al igual que en los modelos anteriores se discretizó el modelo con tres mallas ortogonales cada una de ellas con distinta abertura y tamaño (Tabla 3.7) la cual se localizó al centro del modelo tridimensional como se observa en la Figura 3.29.

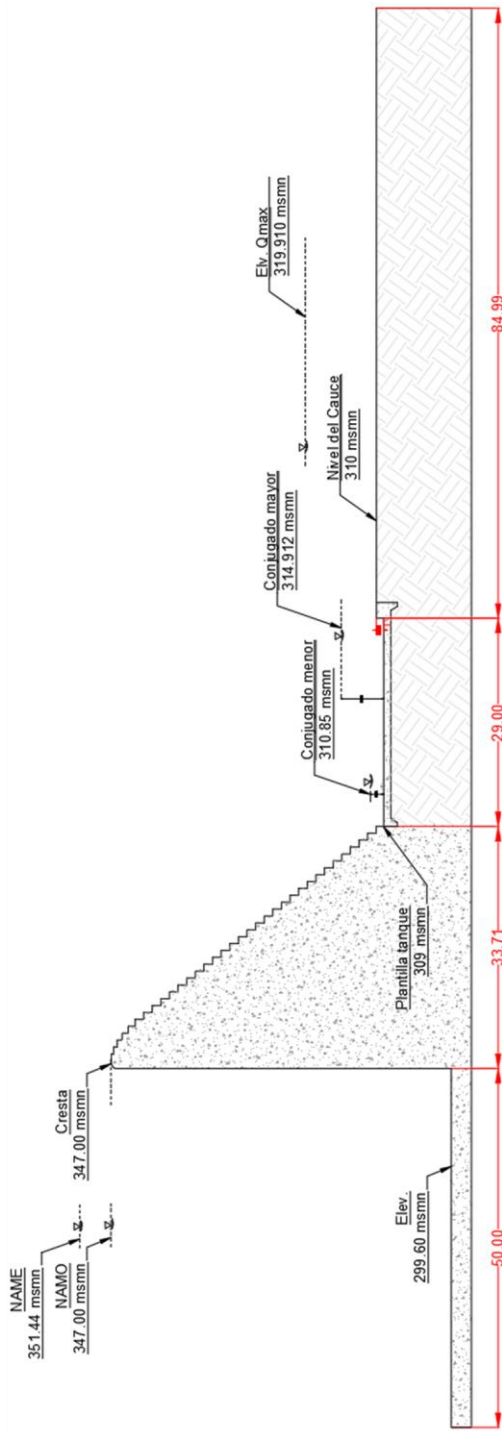


Figura 3.26 Diseño de propuesta de tanque amortiguador.

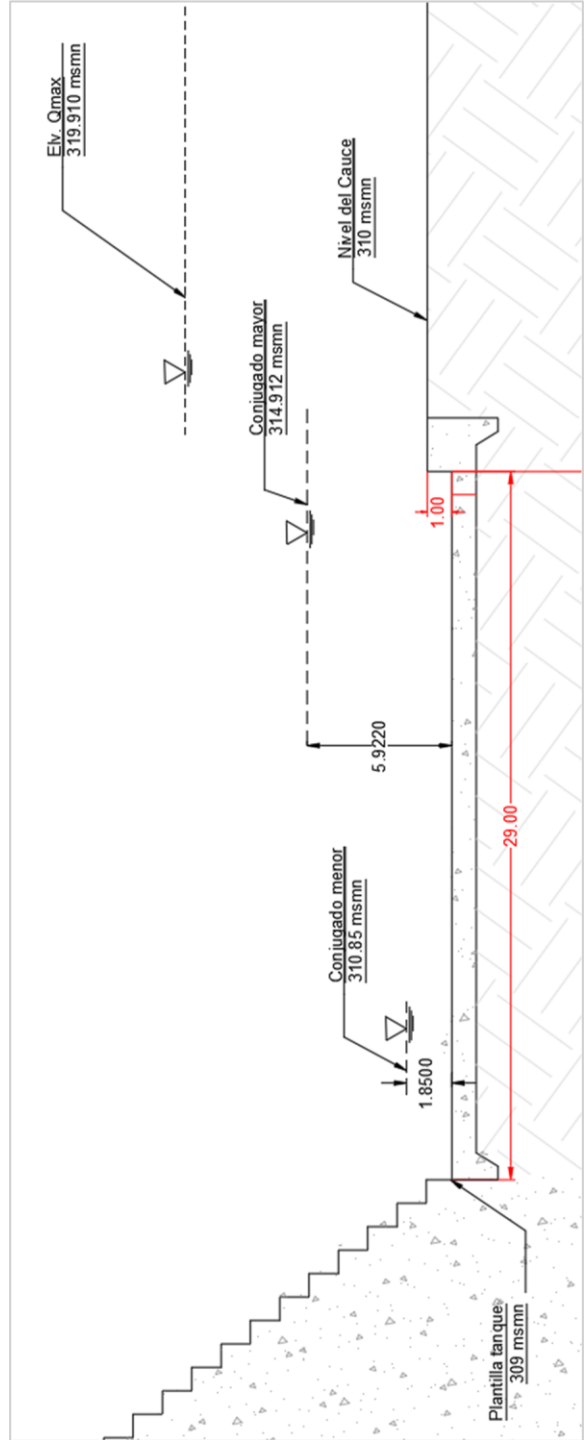


Tabla 3.7 Mallado. Vertedor escalonado con un tanque amortiguador propuesto.

	Tamaño	x	y	z	Total celdas por bloque
Bloque 1	1.0 x 1.0 m	35	1	58	2,030
Bloque 2	0.2 x 0.2 m	450	5	290	652,500
Bloque 3	1.0 x 1.0 m	67	1	28	1,876
Total de celdas					656,406



Figura 3.28 Mallado vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto. Vista: perfil

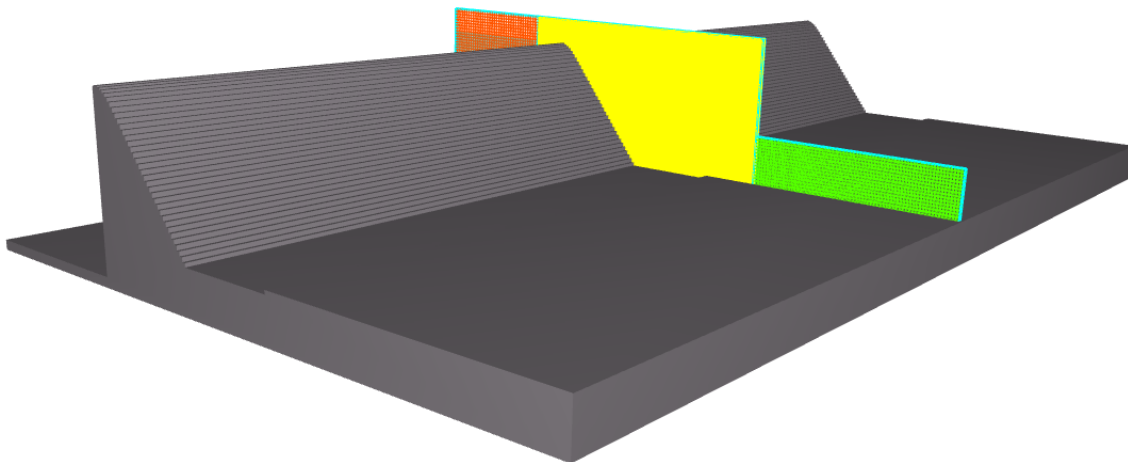


Figura 3.29 Mallado vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto. Vista: xyz

La elevación inicial se encuentra al NAMO y las condiciones de frontera se muestran en la Tabla 3.8 y Figura 3.30.

Tabla 3.8 Condiciones de frontera. Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto aguas abajo

	$x_{min}$	$x_{max}$	$y_{min}$	$y_{max}$	$z_{min}$	$z_{max}$
Bloque 1	P	S	W	W	W	P
Bloque 2	S	S	W	W	W	P
Bloque 3	S	O	W	W	W	P

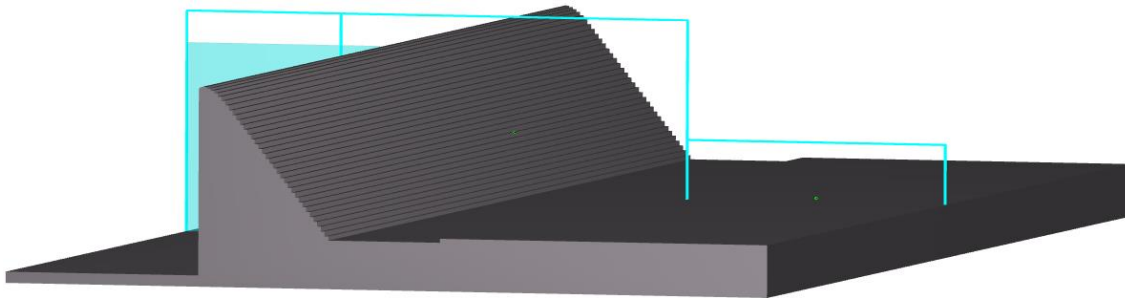


Figura 3.30 Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto: condiciones iniciales y de frontera

Como parte del postproceso se obtuvieron datos de velocidad y numero de Froude a lo largo del modelo (Figura 3.31 y Figura 3.32)

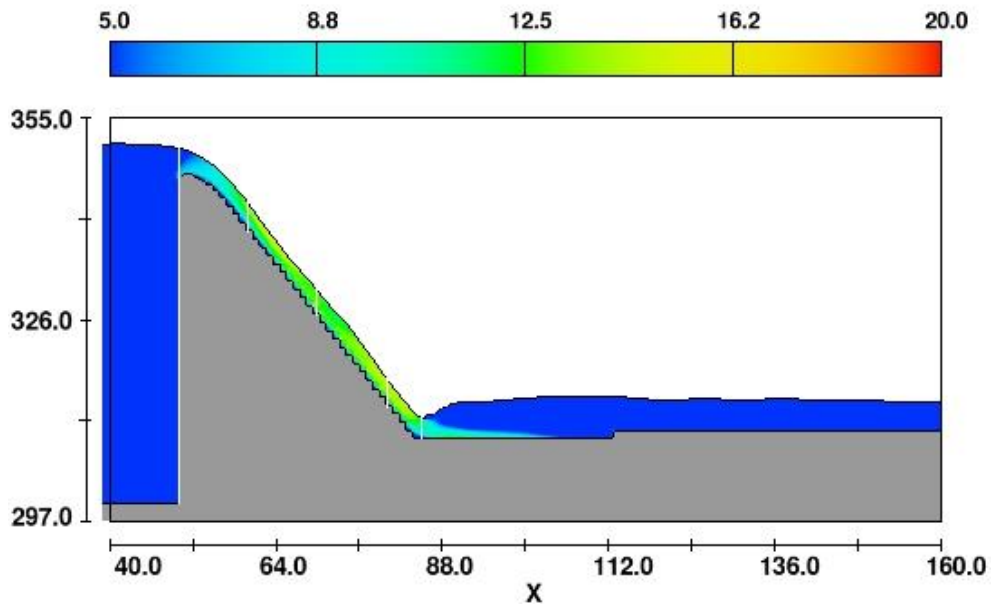


Figura 3.31 Velocidad plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto.

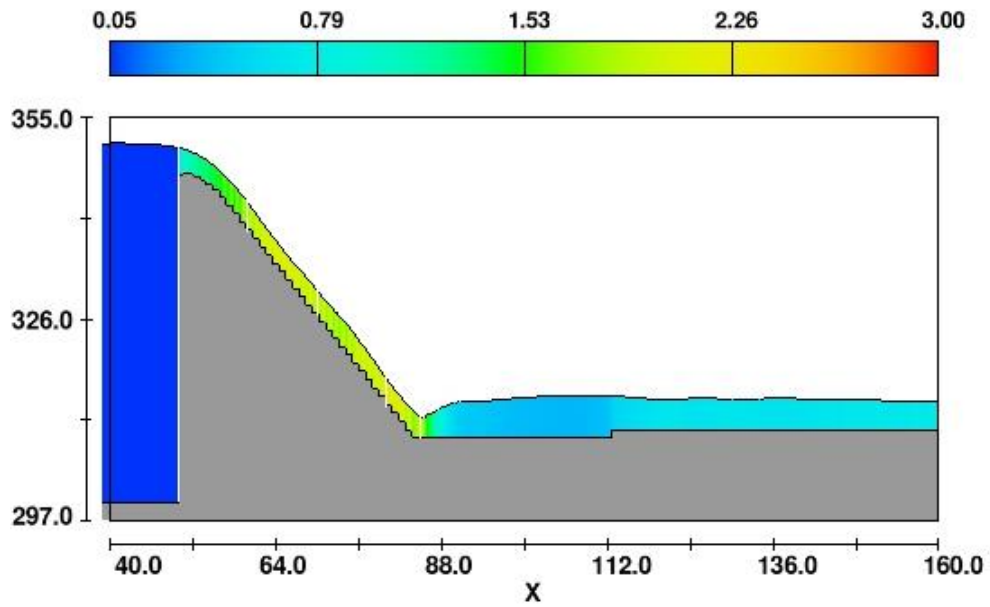


Figura 3.32 Numero de Froude plano xz. Vertedor escalonado con tanque amortiguador propuesto.

### 3.1.3 Diseño original

Como se indicó en el punto 3.1.1, el proyecto original es un vertedor liso con salto de esquí (Figura 3.33) con una plantilla de concreto aguas abajo con una longitud de 120 metros y un espesor de 1 metro ( Figura 3.34); con el propósito de conocer su comportamiento hidráulico se realizó una simulación numérica, del mismo modo que en los puntos anteriores.

A diferencia de los modelos presentados en los puntos anteriores, la discretización del modelo se realizó con una malla más gruesa (Figura 3.35), teniendo un total de 86,697 celdas.

Tabla 3.9 Mallado. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto.

	Tamaño	x	y	z	Total celdas por bloque
Bloque 1	2.0 x 2.0 m	20	1	29	580
Bloque 2	0.5 x 0.5 m	362	2	116	83,984
Bloque 3	2.0 x 2.0 m	79	1	27	2,133
Total de celdas					86,697

Las condiciones de frontera se muestran en la Tabla 3.10, las fronteras entre bloques se consideran de simetría (S), las correspondientes a  $z_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $y_{min}$  son fronteras de tipo muro (W),  $z_{max}$  para los tres bloques,  $x_{min}$  para el bloque 1 se consideran de presión específica y  $x_{max}$  para el 3er bloque es una frontera de salida de flujo (O). Para la condición inicial (Figura 3.37 Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto: condiciones iniciales y de frontera) del fluido se usó la elevación del NAMO (347.00 msnm).

Tabla 3.10 Condiciones de frontera. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto.

	$x_{min}$	$x_{max}$	$y_{min}$	$y_{max}$	$z_{min}$	$z_{max}$
Bloque 1	P	S	W	W	W	P
Bloque 2	S	S	W	W	W	P
Bloque 3	S	O	W	W	W	P

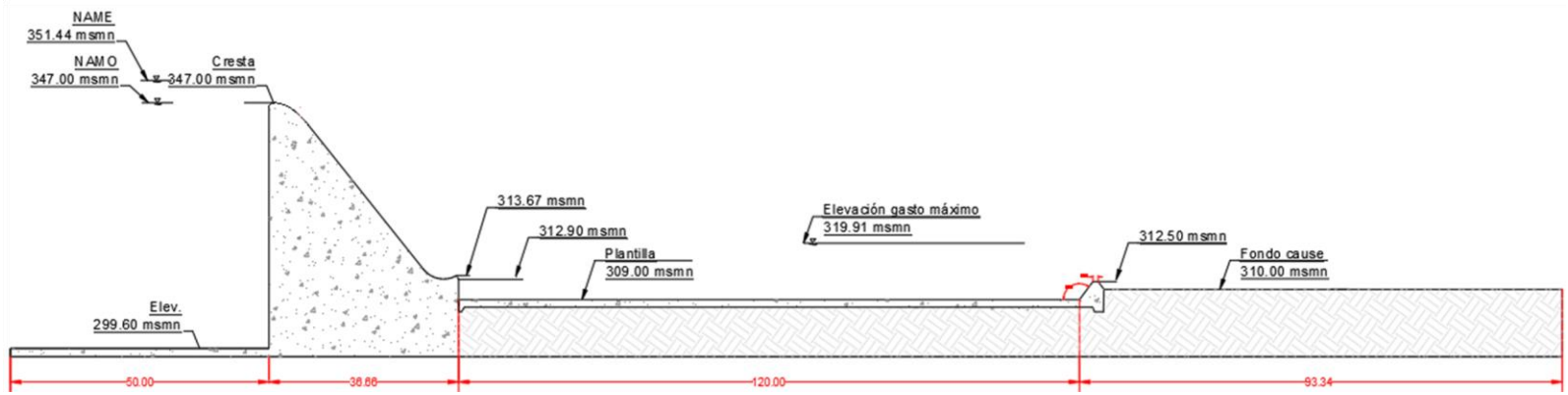
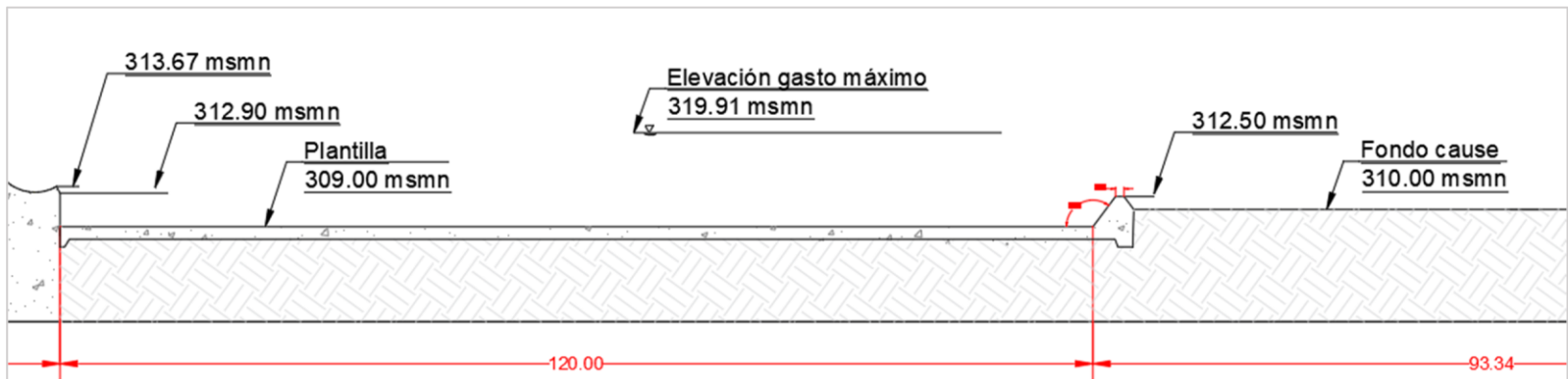


Figura 3.33 Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto.





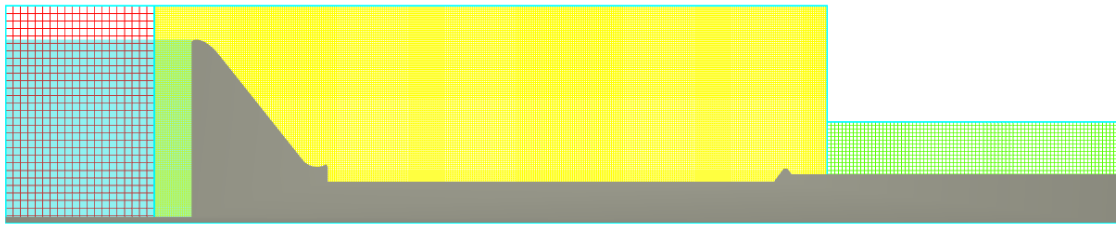


Figura 3.35 Mallado. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto. Vista: perfil

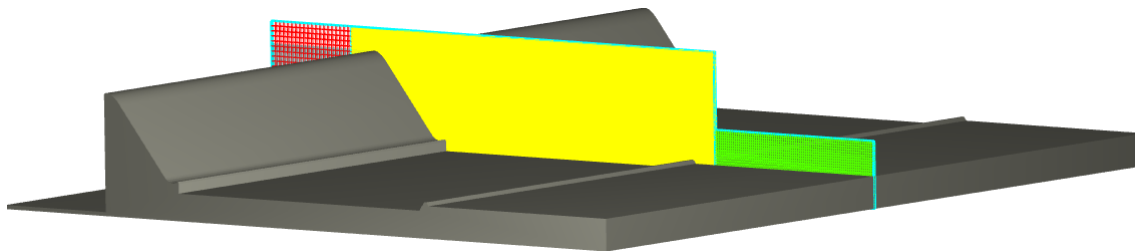


Figura 3.36 Mallado. Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto. Vista: xyz.

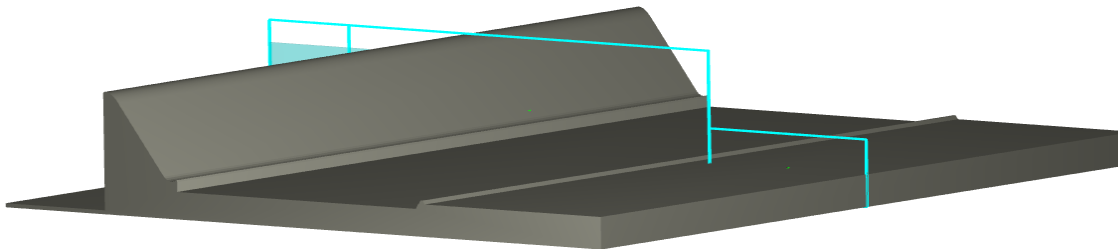


Figura 3.37 Vertedor original. Liso con salto de esquí y plantilla de concreto: condiciones iniciales y de frontera.

Se realizó una la simulación de 250 segundos, extrayendo información de tirantes, velocidad (Figura 3.38) y numero de Froude (Figura 3.39), así se podrán obtener comparaciones respecto a los resultados previamente obtenidos con el resto de los modelos.

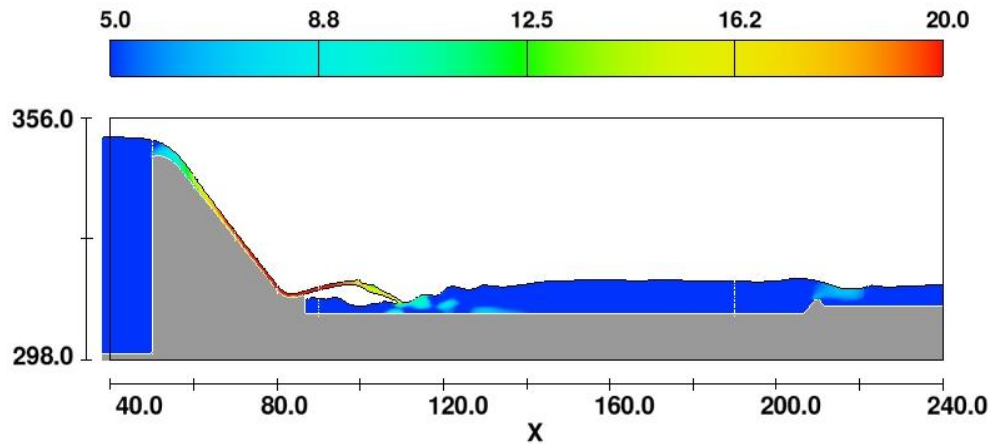


Figura 3.38 Velocidad plano xz. Vertedor original.

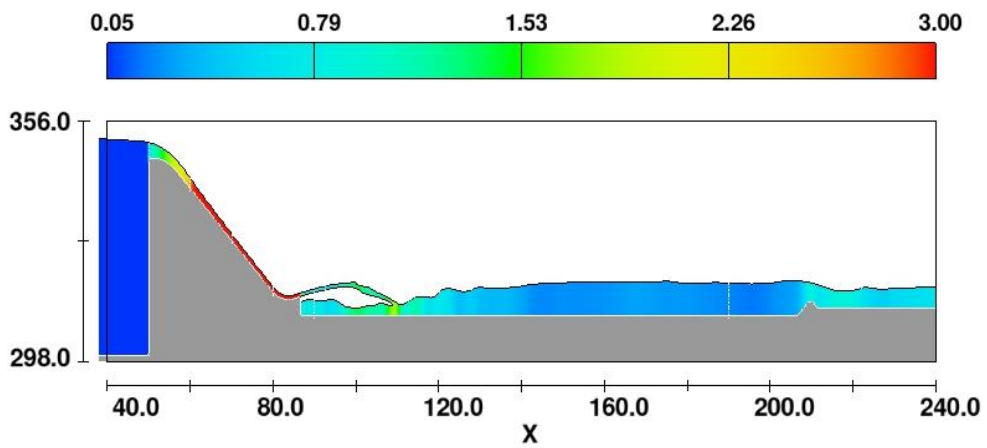


Figura 3.39 Numero de Froude plano xz. Vertedor original.

## Capítulo 4 - Análisis de resultados

En primer lugar, en este capítulo se realizó una revisión de los resultados y el análisis tras la simulación del vertedor escalonado sin ningún tipo de tanque amortiguador aguas abajo, el cual fue de utilidad para realizar las comparaciones pertinentes entre el modelo numérico y los criterios de diseño de González & Chanson y Boes & Hager.

En segundo lugar, se revisaron y analizaron los resultados de velocidad, número de Froude y elevación de la superficie libre del agua para los tres tanques amortiguadores, en donde se indicaron los puntos en donde el flujo alcanzaba altas o bajas velocidades, así como el régimen del flujo y su elevación para esos mismos casos.

Por último, se comparó la longitud de los tanques amortiguadores y la energía disipada entre ellos, identificando cuál de las opciones analizadas cuenta con la menor energía remanente al final de su correspondiente tanque amortiguador.

### **4.1 Comparación entre simulación numérica y criterios de diseño**

De las simulaciones presentadas en el punto 3.3.4 se extrajeron los resultados de tirantes, velocidad, número de Froude y contenido de aire y se compararon con los criterios de diseño, identificando así las diferencias y similitudes.

En la Figura 4.1 se puede observar el flujo sobre los escalones del vertedor, donde se logra apreciar la formación del pseudofondo, por lo que el flujo rasante si se presenta, se puede notar que las velocidades menores o iguales a 5 m/s se ubican entre las cavidades de las aristas de cada escalón, así sobre el pseudofondo podemos encontrar variación de la velocidad que pueden llegar a alcanzar los 16.2 m/s (Figura 4.2).

En la Figura 4.3 se puede notar que el régimen del flujo sobre los escalones se mantiene en supercrítico, teniendo un aumento en la zona del pie del vertedor. Revisando el contenido de aire y la localización del punto de inyección o punto de inicio de entrada de aire en la Figura 4.4 se visualiza que a partir del escalón 14 el aire comienza a ingresar al fluido, teniendo una longitud medida desde la cresta de 20.89 m con un tirante de 1.62 metros medido sobre el pseudofondo.

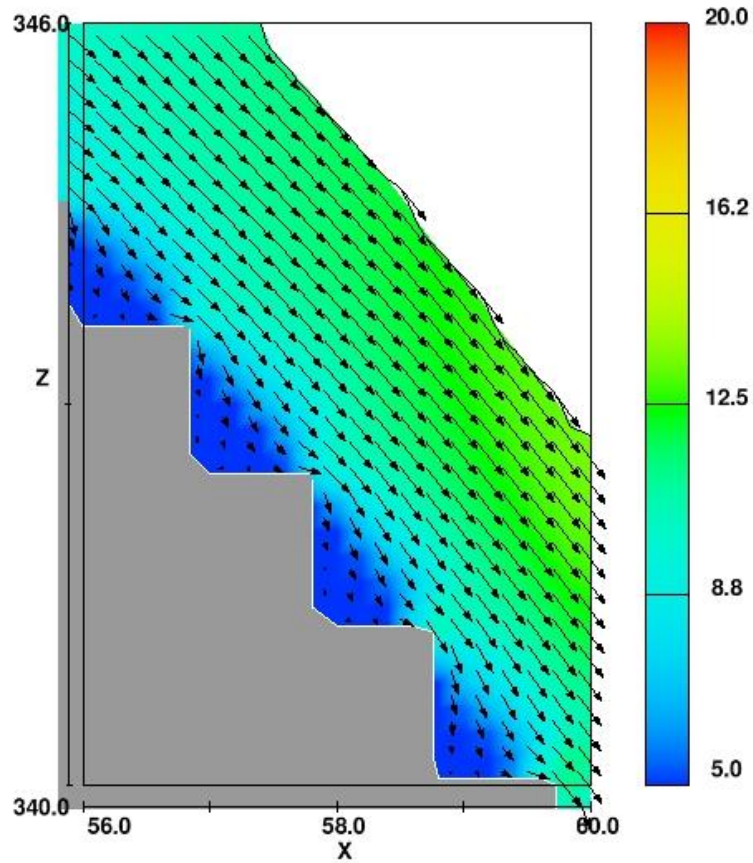


Figura 4.1 Formación del pseudofondo, vertedor escalonado.

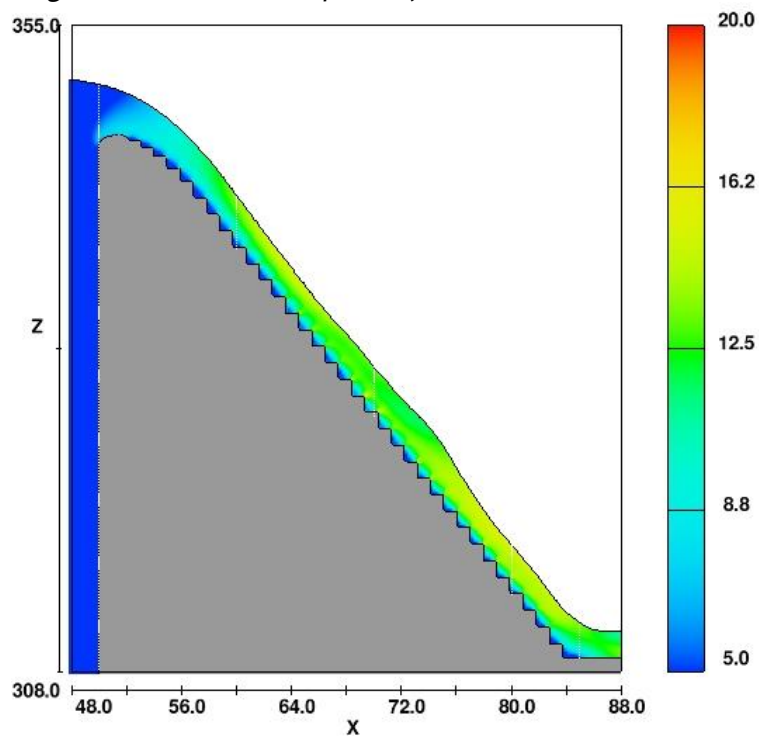


Figura 4.2 Magnitud de velocidad en m/s, plano xz. Vertedor escalonado.

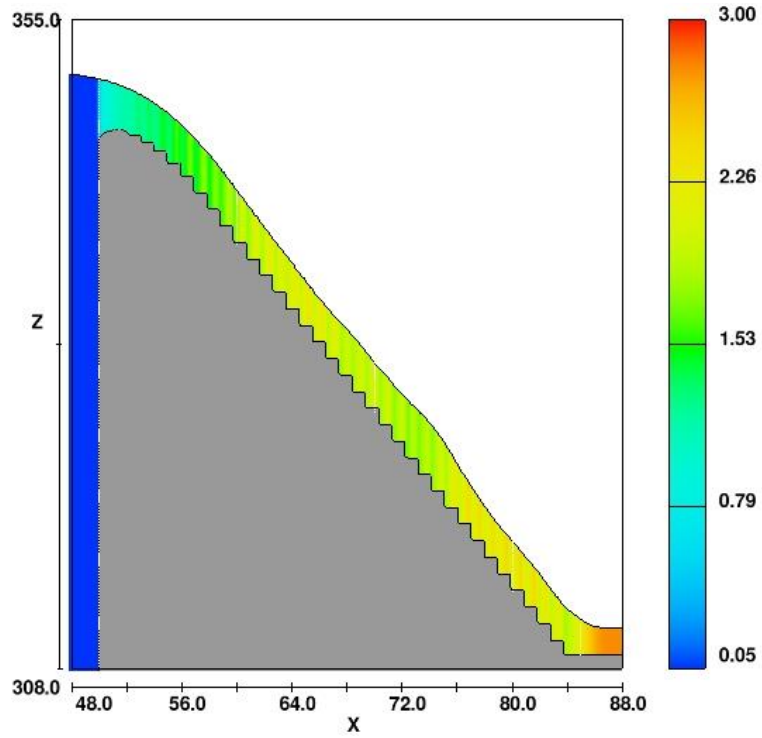


Figura 4.3 Numero de Froude, plano xz. Vertedor escalonado.

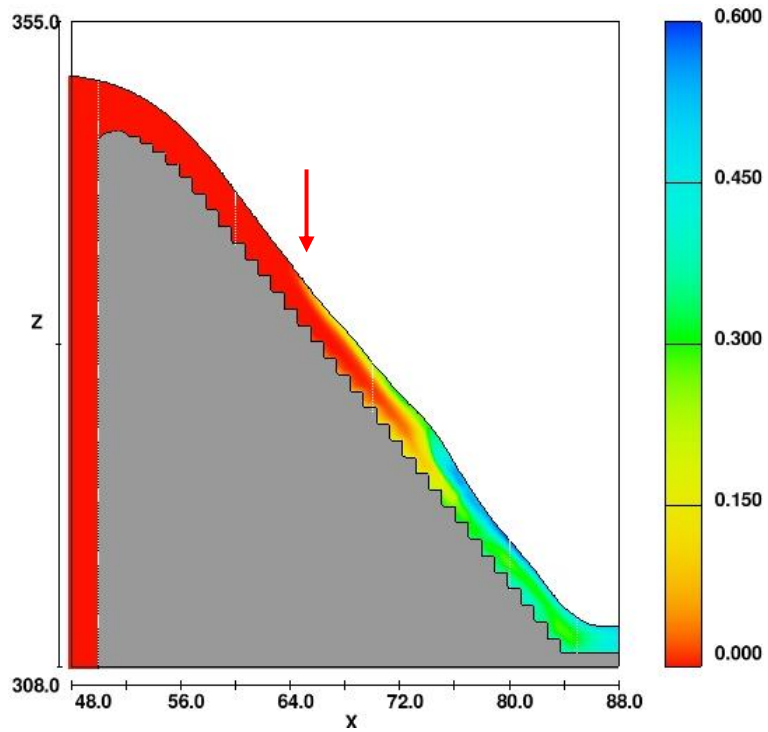


Figura 4.4 Contenido de aire plano xz. Vertedor escalonado

Una vez teniendo los resultados de la simulación del vertedor escalonado se realizó la comparación con los resultados obtenidos de los criterios de diseño, en la Tabla 4.1 podemos notar las similitudes que existen en tirante y velocidad en el punto de inyección, a excepción de la longitud en la localización de este mismo, ambos criterios de diseño tienen cierta similitud en cuanto a la localización del punto de ingreso de aire y en la modelación numérica el punto de inyección se encuentra localizado por lo menos a la mitad de la longitud que indica el criterio de González & Chanson (2004) .

Ahora, revisando el tirante al pie del vertedor encontramos que el tirante calculado en el modelo numérico es por lo menos 34.17% mayor al calculado con el criterio de González & Chanson, y 44.0% mayor al que se obtuvo con el criterio de Boes & Hager, lo que deriva en que las velocidades existan notables variaciones. Para los tres casos comparados en la Tabla 4.1 el régimen del flujo en la descarga es supercrítico.

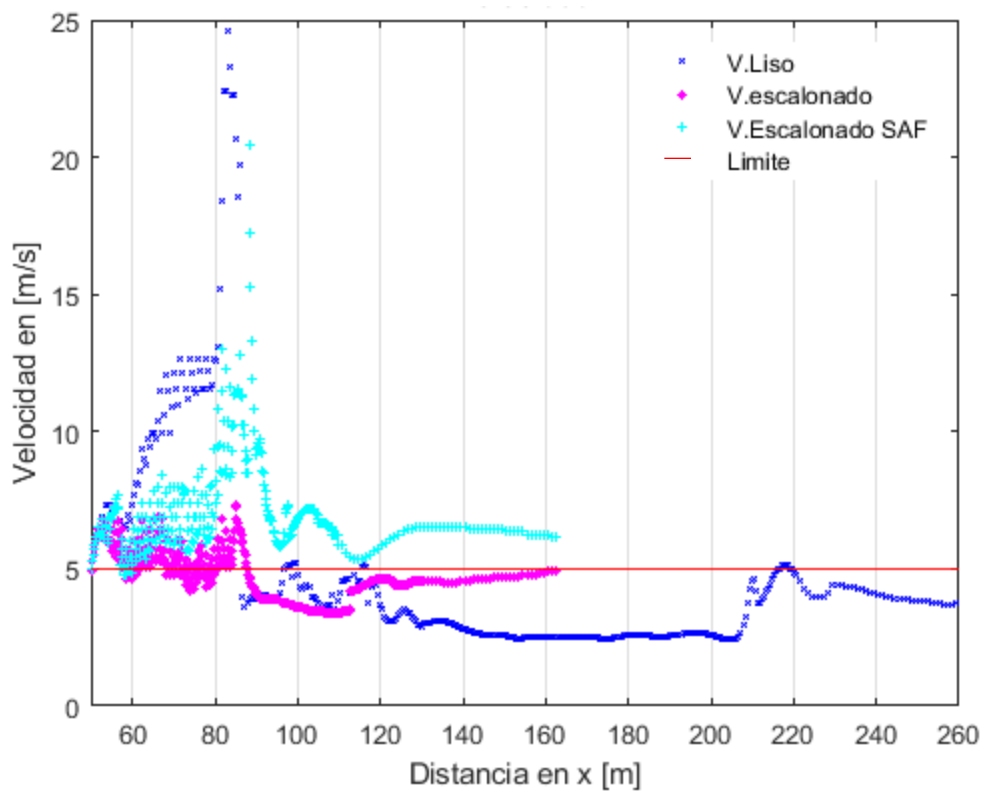
Tabla 4.1 Comparación entre criterios de diseño y simulación numérica

		González & Chanson	Boes &Hager	Modelo
	Aplicable para $\theta$	15° - 30°	30° - 53°	51.34°
	Altura de escalón [m]	1.2	1.2	1.2
Ingreso	Gasto unitario[m <sup>3</sup> /s/m]	20.43	20.43	20.43
	Tirante critico [m]	3.49	3.49	3.49
	Elevacion NAME [msnm]	351.44	351.44	351.44
	Energia [m]	43.237	43.237	43.237
Punto de inyeccion	Longitud [m]	40.442	36.062	20.89
	Tirante [m]	1.288	1.352	1.62
	Velocidad [m/s]	15.863	15.112	12.612
Descarga	Tirante [m]	1.218	1.036	1.850
	Velocidad [m/s]	16.775	19.722	11.044
	Froude	4.853	6.186	2.592
	Energia [m]	15.560	20.860	8.067
	Energia disipada [%]	64.011	51.754	81.343

Dadas las diferencias en los tirantes en la descarga, también hay diferencias comparando la energía disipada al pie del vertedor, considerando que la pendiente del vertedor es de 51.34° el criterio de Boes & Hager sería aquel en el que los resultados tendrían que ser similares, pero de acuerdo con lo mostrado en la tabla anterior esto no es así.

## 4.2 Comparación entre distintas estructuras terminales

Los resultados numéricos que se extrajeron fueron procesados en Matlab (anexo) los cuales fueron representados en gráficas. Se realizó una comparación de la velocidad (Gráfica 4.1), numero de Froude (Gráfica 4.2) y la elevación de la superficie libre del agua (Gráfica 4.3) de los tres modelos, vertedor escalonado con tanque amortiguador tipo St. Anthony Falls, vertedor escalonado con escalón aguas abajo que permite contener el salto hidráulico en 29 metros de longitud y el vertedor liso con salto de esquí.



Gráfica 4.1 Comparación entre estructuras terminales: Velocidad.

En la gráfica anterior se puede observar la variación de la velocidad para los tres modelos desde la cresta hasta el final de su correspondiente tanque amortiguador, se muestra en color azul las velocidades del vertedor liso, en donde estas superan los 20 m/s acercándose a los 25 m/s en la zona de la cubeta deflectora, mientras que dentro del tanque amortiguador las velocidades se encuentran por debajo de los 5 m/s, se logra apreciar un ligero aumento en la velocidad al salir del tanque amortiguador aguas abajo del dentellón.

Las velocidades del tanque amortiguador tipo St. Anthony Falls se encuentran representadas en color cian, las cuales no se encuentran por debajo de los 5 m/s en ninguno de los puntos analizados incluso ciertos puntos cuentan con gran velocidad debido a choque con los bloques dentro del tanque amortiguador.

Para el caso del diseño propuesto con un escalón aguas abajo (magenta), las velocidades aguas abajo del tanque amortiguador se encuentran debajo de los 5 m/s, teniendo un pequeño aumento al incorporarse al cauce.

Realizando el mismo análisis con el número de Froude, graficando de forma discreta los resultados obtenidos (Gráfica 4.2), podemos observar los puntos en donde el flujo se encuentra en régimen subcrítico ( $Fr < 1$ ) o en régimen supercrítico ( $Fr > 1$ ), por lo que en la gráfica se trazó con una línea roja para identificar el tipo de régimen.

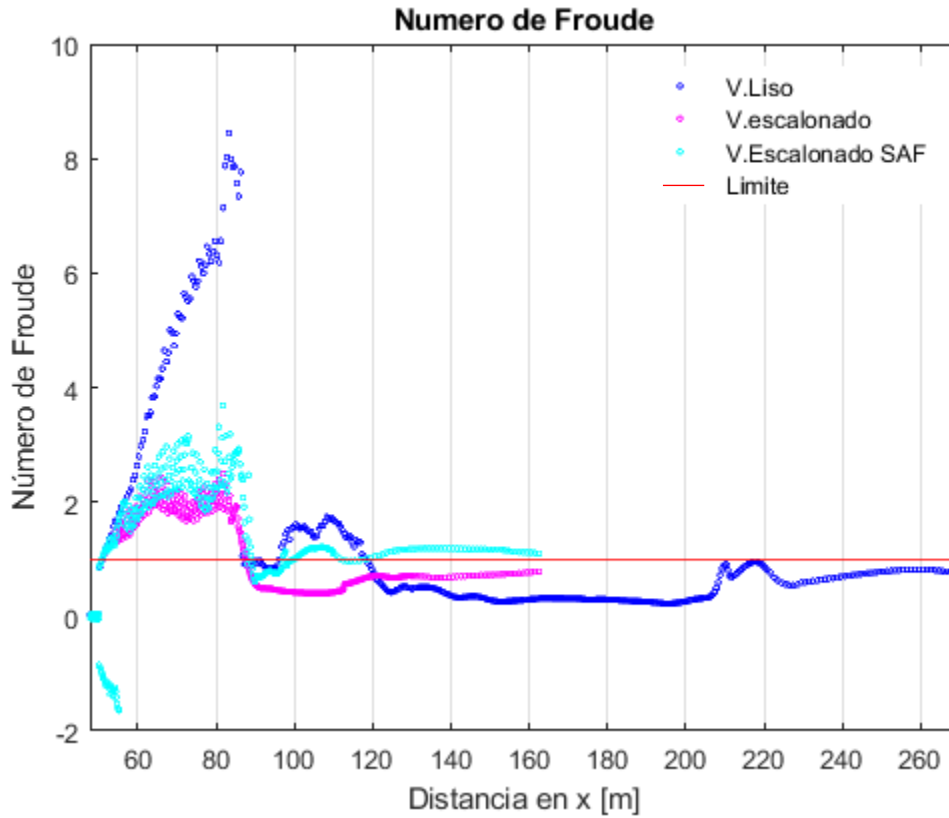
Para los tres casos podemos notar que desde la cresta hasta el pie del vertedor el flujo se encuentra en régimen supercrítico, una vez ingresando a su respectivo tanque amortiguador el comportamiento del flujo cambia para cada uno de ellos.

Para el vertedor liso notamos que el flujo se mantiene en régimen supercrítico inmediatamente aguas abajo esto debido al efecto que provoca el flujo lanzado de la cubeta deflectora llegando a alcanzar un número de Froude mayor a 8 (Figura 3.38) y que a medida que se va generando un amortiguamiento entre el fluido dentro del tanque el régimen cambia a subcrítico.

En el caso de los vertedores escalonados, el número de Froude no llega a 4 encontrándose en supercrítico, al ingresar el flujo en el tanque tipo SAF el número de Froude tiene algunas subidas y bajadas debido a los “choques” con las obstrucciones que se encuentran dentro del tanque amortiguador; el flujo del tanque amortiguado sale con un régimen subcrítico y a medida que la distancia aguas abajo del tanque aumenta el régimen vuelve a pasar a supercrítico.

Observando los resultados para el vertedor escalonado con el tanque amortiguador propuesto, el número de Froude se mantiene menor a la unidad, encontrándose en flujo subcrítico incluso hasta su incorporación al cauce aguas abajo, esto lo podemos observar en la Figura 3.32 y en color magenta en la Gráfica 4.2.

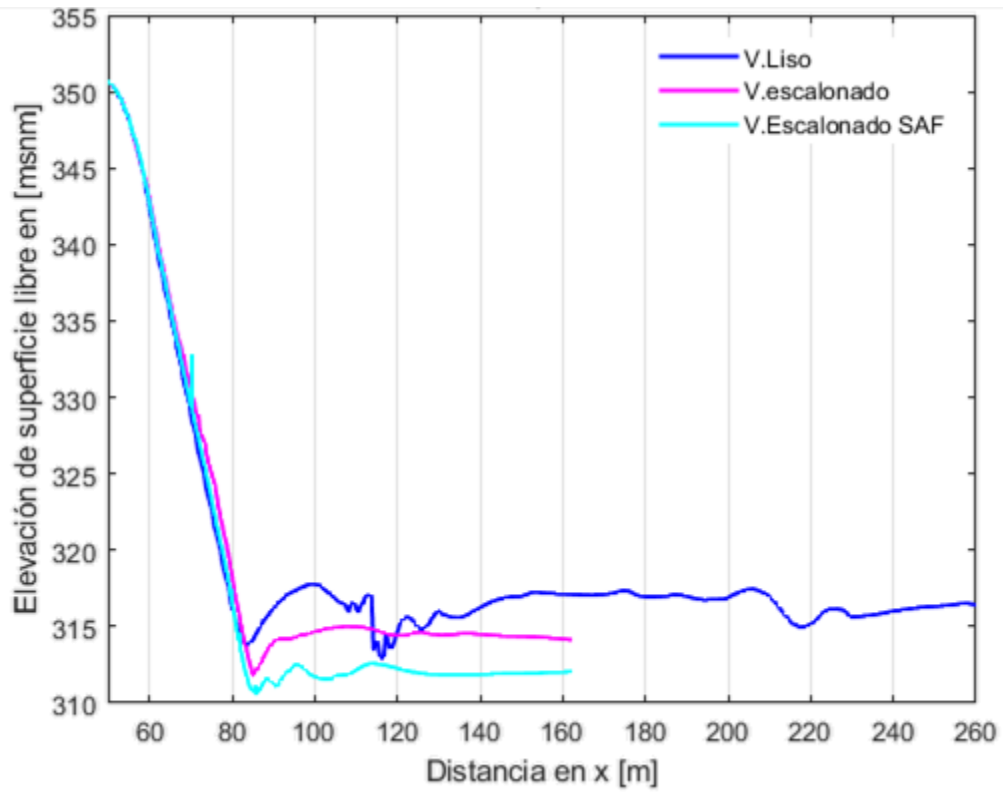




Gráfica 4.2 Comparación entre estructuras terminales: Número de Froude

También se realizó la Gráfica 4.3 en donde se puede observar el perfil de la superficie libre del agua en los tres casos modelados, como en las gráficas anteriores en azul encontramos el vertedor liso, en el cual se logra apreciar la forma y longitud que tendrá el flujo al despegarse de la cubeta deflectora.

Así mismo se puede ver que el perfil de la superficie del agua en el tanque amortiguador tipo St. Anthony Falls se encuentra a menor elevación que el perfil del tanque amortiguador propuesto, para ambos casos se logra apreciar el desarrollo del salto hidráulico dentro del mismo tanque.



Gráfica 4.3 Comparación entre estructuras terminales: Superficie libre.

#### 4.4 Energía disipada

Uno de los objetivos planteados al inicio de esta tesis fue evaluar la eficiencia de disipación de energía, ahora tras establecer las características físicas del flujo, condiciones iniciales, condiciones de frontera y realizar las modelaciones necesarias, se puede evaluar dicha eficiencia mediante un balance de energía.

En los puntos anteriores se determinó que la energía en la cresta ( $E_1$ ) tiene un valor de 43.237 m, este nos servirá para evaluar la energía disipada en los tres modelos analizados. Se decidió calcular la energía 43 metros aguas abajo de cada tanque amortiguador como se observa en la Figura 4.5 ya que se consideró que a esta distancia el flujo contaba con la longitud suficiente para mantenerse estable.

En la Tabla 4.2 se muestra la energía inicial, final y la energía disipada para cada uno de los modelos, así como la longitud de cada uno de ellos, en dicha tabla podemos observar que donde se logra disipar la mayor cantidad de energía es con el vertedor escalonado con el tanque amortiguador propuesto, disipando 87.40% de la energía, en segundo lugar, tenemos el vertedor escalonado con un tanque amortiguador tipo St. Anthony Falls con 85.27% y finalmente el vertedor liso con salto de esquí con 73.46%.

Tabla 4.2 Disipación de energía diferentes tanques amortiguadores.

Estructura	$E_1$ (m)	$E_2$ (m)	$E_{perdida}(\%)$	Longitud del tanque (m)
Vertedor liso	43.237	7.150	83.46	120
Diseño propuesto (escalón)	43.237	5.450	87.40	29
St. Anthony Falls	43.237	6.370	85.27	13

Comparando la energía disipada entre el vertedor original liso y el vertedor escalonado con el tanque amortiguador propuesto encontramos que la energía disipada con la propuesta realizada es 4.72 % mayor, además que la longitud del tanque amortiguador es 91 metros menor, lo que puede ser favorable para los tomadores de decisiones ya que esta reducción en el tamaño de la estructura aguas abajo de la obra de excedencias impactaría en los materiales de construcción y por tanto en los costos de la misma.

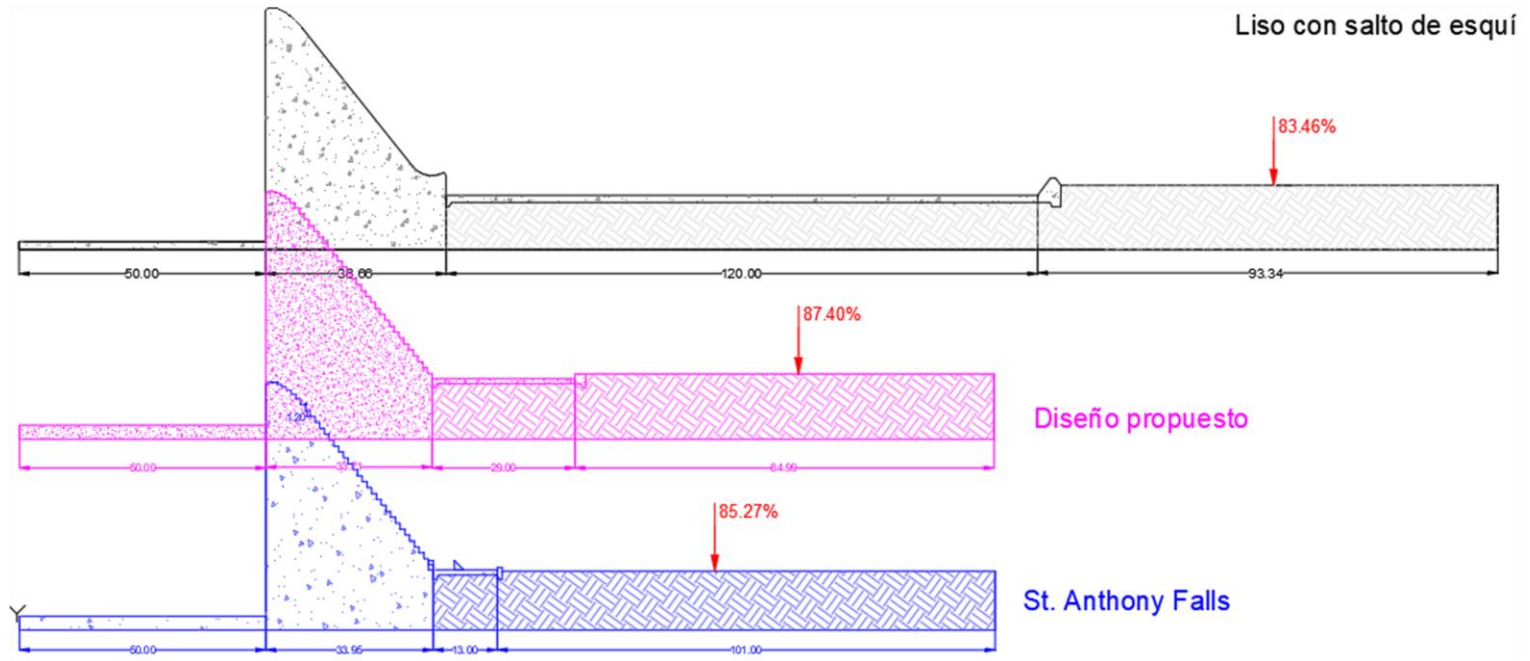


Figura 4.5 Comparación de longitud de tanque amortiguadores.

## Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones

### CONCLUSIONES

Lo expuesto anteriormente permitió concluir que se logró realizar el diseño de un vertedor escalonado como una alternativa de disipación de energía, sustituyendo a un vertedor liso con salto de esquí evaluando diferentes alternativas a través de modelaciones numéricas con un software especializado.

Se emplearon dos criterios de diseño de vertedores escalonados, con el objetivo de verificar y comparar los resultados teóricos de distintos autores respecto a un modelo numérico. Dado que solo uno de los criterios de diseño era aplicable a las condiciones del proyecto, se esperaba que los resultados de dicho criterio de diseño fueran más parecidos con la experimentación numérica, sin embargo, esto no fue así, en el punto 4.1 se mostró una tabla en donde se realizó una comparación y los resultados tienen discrepancias significativas. Teniendo en cuenta que el criterio de Boes & Hager realiza interpolaciones lineales para calcular el tirante al pie del vertedor entre el tirante en el punto de inyección y un tirante para un flujo completamente desarrollado aguas abajo del vertedor y el software calcula la dimensión de este mismo tirante mediante análisis numérico es natural que exista una discrepancia entre ellos.

Con el diseño del vertedor escalonado (sin tanque amortiguador) se logró obtener una disipación de energía del 81.34%, la cual es menor, comparada con la energía disipada por el vertedor liso con salto de esquí (83.46%) con su plantilla de concreto de 120 metro de longitud.

Dado que los criterios de diseño no incluyen una estructura aguas abajo de la obra de excedencias, se modelaron dos alternativas posibles, un tanque amortiguador tipo St. Anthony Falls y un tanque amortiguador que cuenta con un escalón que eleva el fondo de la plantilla (309.00 msnm) a la elevación del cauce (310.00 msnm), obteniendo una energía del 85.27% y 87.40% correspondientemente.

Tras evaluar la pérdida de energía en cada uno de los modelos realizados y conociendo los resultados de ellos se puede concluir que la mejor opción para lograr el objetivo general y que cumple con la hipótesis establecida, es el vertedor escalonado con el tanque amortiguador propuesto, ya que con este diseño el régimen del fluido aguas abajo se mantiene en subcrítico, con velocidades por debajo de los 5.0 m/s al ingresar al cauce y además la energía disipada es

mayor a la que puede disipar el vertedor liso original, además de que en los vertedores lisos se requiere de aireadores con la finalidad de evitar daños de cavitación.

## RECOMENDACIONES

En este trabajo se presentaron alternativas de diseño de un vertedor escalonado, dichas alternativas fueron propuestas y solucionadas mediante modelaciones numéricas, es recomendable que las alternativas sean comparadas o validadas con un modelo físico a escala.

En mi opinión, considero que este tipo de propuestas o proyectos considero deben ser verificados y ensayados física y numéricamente, ya que los resultados que se obtienen en de ambas metodologías se pueden complementar entre sí y obtener mejores pronósticos de lo que se presentará en la infraestructura real, previniendo futuras complicaciones y desastres.

Este trabajo deja la puerta abierta a futuras investigaciones que deseen profundizar en este o similares proyectos, ya que hay un campo muy amplio para investigar y muchas más propuestas que se pueden realizar y experimentar tanto física como numéricamente.

# Anexo

## 6.1 Código Matlab para procesamiento de graficas

```

%----Programa para el postprocesamiento de datos-----
%
clear
A=xlsread('Datos-esqui sf.xlsx');
X= A(:,1); %Distancia en x
E= A(:,5); %Elevacion
Y= A(:,4); %Tirante
V= A(:,8); %Velocidad
CA=A(:,7); %Contenido de aire
F= A(:,6); %Froude

B=xlsread('Datos-MD sf.xlsx');
x = B(:,1);
e= B(:,5);
y= B(:,4); %Tirante
v= B(:,8);
ca= B(:,7);
f= B(:,6);

C=xlsread('Datos-SAF sf.xlsx');
x1 = C(:,1);
e1= C(:,5);
y1= C(:,4); %Tirante
v1= C(:,8);
ca1= C(:,7);
f1= C(:,6);

%% Grafica de Elevacion superficie libre
clf
figure (1)
% Vertedor liso con ski y tanque amortiguador
plot(X,E,'b-', 'LineWidth',1.5)
hold on
% Vertedor escalonado
plot (x,e,'m-', 'LineWidth',1.5)
hold on
% Vertedor escalonado saf
plot (x1,e1,'c-', 'LineWidth',1.5)
hold on

```

```
title('Perfil de superficie libre')
xlabel('Distancia en x [m]')
ylabel('Elevación de superficie libre en [msnm]')
set(gca, 'XGrid', 'on', 'YGrid', 'off')
legend('V.Liso', 'V.escalonado', 'V.Escalonado SAF')
xlim([50 260])
%ylim([305 355])

%%Grafica velocidad
clf
figure (2)
% Vertedor liso con ski y tanque amortiguador
plot(X,V, 'bx', 'MarkerSize', 2)
hold on
% Vertedor escalonado
plot (x,v, 'm*', 'MarkerSize', 2)
hold on
% Vertedor escalonado saf
plot (x1,v1, 'c+', 'MarkerSize', 2)
hold on

ylim=0*X+5;
plot(X,ylim, '-r', 'MarkerSize', 3)
title('Velocidad')
xlabel('Distancia en x [m]')
ylabel('Velocidad en [m/s]')
set(gca, 'XGrid', 'on', 'YGrid', 'off')
legend('V.Liso', 'V.escalonado', 'V.Escalonado SAF', 'Limite')
xlim([50 260])
% ylim([-1.8 23.2])

%%Grafica Numero de Froude
clf
figure (3)
% Vertedor liso
plot(X,F, 'ob', 'MarkerSize', 2)
hold on
% Vertedor escalonado
plot (x,f, 'om', 'MarkerSize', 2)
hold on
% Vertedor escalonado SAF
plot (x1,f1, 'oc', 'MarkerSize', 2)
hold on

ylim=0*X+1;
```



```
plot(X,ylim, '-r', 'MarkerSize',4)
title('Numero de Froude')
xlabel('Distancia en x [m]')
ylabel('Número de Froude')
set(gca, 'XGrid', 'on', 'YGrid', 'off')
legend('V.Liso', 'V.escalonado', 'V.Escalonado SAF', 'Limite')
xlim([50 260])
% ylim([-1.8 23.2])
```

---

## Referencias

- Abbasi, S., & Kamanbedast, A. A. (2012). Investigation of Effect of Changes in Dimension and Hydraulic of Stepped Spillways for Maximization Energy Dissipation. *World Applied Sciences Journal*, 18(2), 261-267.
- Aras, E., & Berkün, M. (2006). Aeration on stepped spillways and its effects on stream reaeration. *Seventh International Congress on Advances in Civil Engineering* (pág. 10). Istanbul, Turkey: Karadeniz Technical University Institute of Natural Sciences.
- Aras, E., & Berkün, M. (2010). Comparison of stepped and smooth spillway effects on stream reaeration. 309-314.
- Boes, R. M., & Hager, W. H. (2003a). Two-Phase Flow Characteristics of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(9), 661-670. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:9(661)
- Boes, R. M., & Hager, W. H. (2003b). Hydraulic Design of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(9), 671-679. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:9(671)
- Chanson, H. (2015). *Energy dissipation in Hydraulic Structures*. London: CRC Press/Balkema.
- Chanson, H., & R.L, W. (1998). Gold Creek Dam and its unusual waste waterway (1890-1997): design, operation, and maintenance. *Journal of Civil Engineers*, 25, 755-768.
- Chanson, H., Youichi, Y., & Iwao, O. (2000). Flow resistance in skimming flow: A critical review. (M. & Hager, Ed.) *Hydraulics of stepped spillways*, 95-102.
- Echávez Aldape, G. (1996). *Introducción a los modelos hidráulicos de fondo fijo y a la ingeniería experimental*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Estrella, S., Sánchez-Juny, M., Bladé, E., & Dolz, J. (2015). Physical modeling of a stepped spillway without sidewalls. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 42(5), 311-318.
- Felder, S., & Chanson, H. (2011). Energy Dissipation down a Stepped Spillway with Nonuniform Step Heights. (A. S. Engineers, Ed.) *JOURNAL OF HYDRAULIC ENGINEERING*, 137(11), 1543-1548.

- Felder, S., & Chanson, H. (2013). Aeration, Flow Instabilities, and Residual Energy on Pooled Stepped Spillways of Embankment Dams. *Journal of Irrigation and Drainage*, 139(10), 880-887.
- Felder, S., & Chanson, H. (2016). Simple design criterion for residual energy on embankment dam stepped spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 142(4), 11.
- Flow 3d. (2014). Flow 3d Manual v1104. EE. UU.: Flow science.
- Frizell, K., & Frizell, K. (2015). *Guidelines for Hydraulic Design of Stepped Spillways*. Denver, CO: U.S. Dept. of the Interior, Bureau of Reclamation.
- Frizell, K., & Renna, F. (2009). *Cavitation Potential of the Folsom Auxiliary Stepped Spillway*. Denver, Colorado: U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation.
- Gandhi, S., & Mishra, D. (2016). Review on Stepped Spillway and Baffle Blocks As Energy Dissipator In Gravity Dams. *4th International conference on Challenges in Environmental Science and Technology*, (pág. 8).
- González, C. A., & Chanson, H. (2004). Interactions between cavity flow and main stream skimming flows: an experimental study. *Canadian journal of civil engineering*, 31(1), 33-44. doi: 10.1139/L03-066
- González, C. A., & Chanson, H. (2007). Diseño hidráulico de vertederos escalonados con pendientes moderadas: metodología basada en un estudio experimental. *Ingeniería hidráulica en México*, 22(2), 5-20.
- Heller, V. (2011). Scale effects in physical hydraulic engineering models. *Journal of Hydraulic Research*, 49(3), 293-306. Recuperado el Abril de 2020
- Kramer, M., & Chanson, H. (2018). Transition flow regime on stepped spillways: air–water flow characteristics and step-cavity fluctuations. *Springer Netherlands*, 18(4), 947-965.
- L. Hunt, S., Temple, D., Abt, S., Kadavy, K., & Hanson, G. (2012). Converging Stepped Spillways: Simplified Momentum Analysis Approach. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(9), 796-802.

- 
- Larese, A., Rossi, R., Oñate, E., & Idelsohn, S. (2008). Validation of the particle finite element method (PFEM) for simulation of free surface flows. *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 25(4), 385-425. doi:DOI 10.1108/02644400810874976
- Liscia, S., Angulo, M., De Dios, M., & Del Blanco, M. (2010). Modelacion matematica y fisica de un vertedor modificado. XXIV CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA PUNTA DEL ESTE, URUGUAY, NOVIEMBRE 2010 (págs. 1-14). Uruguay: AIHR.
- Matos, J., & Meireles, I. (2014). Hydraulics of stepped weirs and dam spillways: engineering challenges, labyrinths of research. *5th International Symposium on Hydraulic Structures*. Brisbane, Australia: Hydraulic Structures and Society: Engineering Challenges and Extremes.
- Meireles, I., Renna, F., Matos, J., & Bombardelli, F. (2012). Skimming, Nonaerated Flow on Stepped Spillways over Roller Compacted Concrete Dams. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(10), 870-877. doi:10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000591
- Ostad Mirza, M., Matos, J., Pfister, M., & Schleiss, A. (2017). Effect of an abrupt slope change on air entrainment and flow depths at stepped spillways. *Journal of Hydraulic Research*, 55(3), 362-375.
- Parsaie, A., & Hamzeh Haghiabi, A. (2019). Evaluation of energy dissipation on stepped spillway using evolutionary computing. *Applied Water Science*, 8.
- Peterka, J. (1958). *Hydraulic design of stilling basins and energy dissipators; Engineering monograph No.25*. Denver, Colorado: United States Department of the interior Bureau of Reclamation.
- Pfister, M., Hager, W., & Minor, H.-E. (2006). Bottom Aeration of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(8), 850-853.
- Qian, S., Xu, H., Feng, J., Wang, X., & Zhang, J. (2018). Discussion of “Energy Dissipation Prediction for Stepped Spillway Based on Genetic Algorithm–Support Vector Regression”. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 145(7), 3.
- Rice, C., & Kadavy, K. (1996). Model study of a roller compacted concrete stepped spillways. *Journal of hydraulic engineering*, 122(6), 931-936.
-

- 
- Roushangar, K., Akhgar, S., & Salmasi, F. (2017). Estimating discharge coefficient of stepped spillways under nappe and skimming flow regime using data driven approaches. *Flow Measurement and Instrumentation*, 59, 79-87.
- Ruff, J., & Ward, J. (2002). *HYDRAULIC DESIGN OF STEPPED SPILLWAYS*. Denver, Colorado: U.S. Bureau of Reclamation.
- S. Pegram, G., K. Officer, A., & Mottram, S. (1999). HYDRAULICS OF SKIMMING FLOW ON MODELED STEPPED SPILLWAYS. (ASCE, Ed.) *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(5), 500-510.
- Sánchez-Juny, M., & Dolz, J. (2005). Experimental study of transition and skimming flows on stepped spillways in RCC dams: qualitative analysis and pressure measurements. *Journal of Hydraulic Research*, 43(5), 540-548. doi:10.1080/00221680509500152
- Sarkardeh, H., Marosi, M., & Roshan, R. (2015). Stepped spillway optimization through numerical and physical modeling. *INTERNATIONAL JOURNAL OF ENERGY AND ENVIRONMENT*, 6(6), 597-606.
- Shahheydari, H., Nodoshan, E. J., Barati, R., & Moghadam, M. A. (2014). Discharge coefficient and energy dissipation over stepped spillway under skimming flow regime. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 19(4), 1174–1182. doi:10.1007/s12205-013-0749-3
- Sotelo Avila, G. (1997). *Hidráulica General. Volumen 1 Fundamentos*. Ciudad de México: Limusa.
- Sotelo Avila, G. (2006). Perfil del flujo sobre un vertedor tipo cimacio y su comprobación. *Ingeniería hidráulica en México*, 21(1), 29-42,.
- Sunil Kote, A., & Baburao Nangare, P. (2019). Hydraulic Model Investigation on Stepped Spillway's Plain and Slotted Roller Bucket. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 9(4), 4419-4422.
- Toapanta-Ramos, L. F., Zapata-Cautillo, A. J., Cholango-Gavilanes, I. A., Quitiaquez, W., Nieto-Londoño, C., & Zapata-Benabithé, Z. (2019). Estudio numérico y comparativo del efecto de turbulencia en codos y dobleces para distribución de agua sanitaria. *Revista Facultad de Ingeniería*, 28(53), 101-118. Obtenido de <https://doi.org/10.19053/01211129.v28.n53.2019.10156>
-

- Torres Herrera, F. (1987). Disipación de energía. En F. Torres Herrera, *Obras Hidráulicas* (págs. 106-143). Ciudad de México: Limusa.
- Vásquez Ojeda, J. (2003). *MODELACION NUMERICA EN HIDRÁULICA*. Universidad de Piura, Perú, Piura.
- Vergara, M. A. (1993). *Técnicas de modelación en hidráulica*. D.F, México: Alfaomega.
- Wadhai, P. J., Ghare, A. D., Deshpande, N. V., & D. Vasudeo, A. (2015). Comparative analysis for estimation of the height of training wall of convergent stepped spillway. *International Journal of Engineering & Technology*, 4(2), 194-303.
- Willey, J., Ewing, T., Lesleighter, E., & Dymke, J. (2010). Refinement of the Hydraulic Design of a Complex Stepped Spillway through Numerical and Physical Modelling. 108-113.
- Yalin, M. (1971). *Theory of hydraulic models*. Canada: Mcmillan education.