



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CASCADAS DE DUPLICACIÓN DE PERIODOS Y DE
BANDAS CAÓTICAS EN MAPEOS UNIMODALES DE NO
LINEALIDAD $z \neq 2$.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

LUIS ENRIQUE MARTÍN JIMÉNEZ

TUTOR:

DR. ALBERTO ROBLEDO NIETO

Ciudad Universitaria, CDMX, 2021





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A la mujer que me dio la vida y educó. Mi madre.

Agradecimientos

Agradezco a todas aquellas personas que se han tomado el tiempo de darme un consejo. A mi hermana que desde que tengo memoria ha estado a mi lado y a toda la familia que es cercana a mí. A mis amigos de la facultad que me han brindado mucho cariño y apoyo. Al Dr. Alvaro Díaz Ruelas que me ha guiado en la elaboración de este trabajo y a mi asesor el profesor Alberto Robledo que sin él no hubiera sido posible esta tesis.

Resumen

En el siguiente escrito se estudia la familia de mapeos logísticos $f_{z,\mu}(x) = 1 - \mu|x|^z$, $z > 1$, desde una perspectiva mecánico-estadística analizando la evolución de sus densidades invariantes. Aprovechamos que por un lado, existe la cascada de duplicación de periodos donde se encuentra la secuencia de puntos puntos súper estables y, por otro lado, la división en bandas caóticas donde se encuentran los puntos Misiurewicz, y que ambos convergen al atractor de Feigenbaum. También se hace la conexión entre la densidad de probabilidad obtenida y la entropía de Shannon, que lleva a un fenómeno conocido en física estadística llamado transiciones de fase.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
1. Introducción	2
2. Antecedentes	3
2.1. Generalidades de los sistemas dinámicos	3
2.2. Mapeo logístico	5
2.2.1. Superciclos	7
2.2.2. Punto de acumulación $\mu_\infty(z)$	9
2.2.3. Puntos de Misiurewicz	10
2.3. Teoría de la medida	12
2.3.1. Fundamentos de teoría de la medida	12
2.3.2. Teoría Ergódica	13
2.3.3. Operador de Frobenius-Perron	15
2.4. Mecánica Estadística	16
2.4.1. Entropía de Boltzmann y Shannon	17
2.4.2. Termodinámica: Transiciones de fase	19
3. Evolución de la densidad generada por el mapeo.	23
3.1. Evolución de la densidad: superciclos y puntos Misiurewicz.	24
3.2. Evolución de la densidad: μ_∞ y $\mu = 2$	29
4. Transición de fase	33
5. Discusión y conclusiones	37

Capítulo 1

Introducción

Los mapeos logísticos son un ejemplo sencillo de que un sistema dinámico de comportamiento predecible se puede convertir en un sistema caótico cuya dinámica parece aleatoria. Sin embargo, cuando se analiza desde una perspectiva estadística este comportamiento caótico comienza a mostrar características que pueden ser comprendidas con herramientas matemáticas como el operador de Frobenius-Perron [1].

Al manejar el mapeo con la conocida teoría ergódica puede relacionarse con la entropía de Shannon y el resultado es sorprendente porque las curvas obtenidas muestran una transición de fase de segundo orden [2, 3].

En el presente trabajo se extienden los resultados de publicaciones previas, no solo tomando el mapeo logístico cuadrático $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^2$ sino en principio tomando cualquier valor de $z > 1$ en los mapeos $f_{z,\mu}(x) = 1 - \mu|x|^z$. Para eso en el capítulo 2 se dan los conceptos preliminares como generalidades de sistemas dinámicos, así después se platica sobre el mapeo logístico, específicamente sobre dos sucesiones de puntos: superciclos y puntos de Misiurewicz, que comparten el mismo punto de acumulación μ_∞ el cual coincide con el atractor de Feigenbaum¹. Luego para hacer la evolución del sistema de manera estadística hay que construir el operador de Frobenius-Perron(F-P), escribirlo en su forma discreta y de dimensión finita, no sin antes hablar sobre teoría de la medida y el teorema de ergodicidad de Birkoff. Por último se obtiene la entropía de Shannon y mencionamos su relación con las transiciones de fase. Para el capítulo 3 se estudian las densidades asintóticas e invariantes para un solo mapeo, específicamente cuando $z = 1.5$, se utiliza el operador de F-P y el teorema de Birkoff de manera "directa" para mostrar cómo cambia la dinámica en la densidad dentro del atractor de Feigenbaum. Para el capítulo 4 se hace la conexión con las transiciones de fase utilizando la entropía de Shannon y se discute la similaridad con una transición de segundo orden debida a la forma de la susceptibilidad. Al final se presentan las conclusiones.

¹En algunos textos se le nombra atractor de Feigenbaum al atractor que coincide con μ_∞ para el mapeo de la ecuación 2.5 con $z = 2$ en este texto se amplia a cualquier valor de $z > 1$

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Generalidades de los sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos se utilizan para modelar comportamientos de fenómenos en distintas ramas de la ciencia como la física, química, matemáticas, o en otros ámbitos como la economía y matemáticamente hablando están conformados por un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ que dice el estado exacto del sistema y una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que definirá el estado en tiempos posteriores al inicial [4]. Un sistema dinámico se puede definir por medio de una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (2.1)$$

La manera mas fácil de relacionar (2.1) en una dimensión con un mapeo iterativo es discretizar el tiempo [5].

Sean $t_0 > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x((n+1)t_0) - x(nt_0)}{t_0} \approx F(x(nt_0))$$

$$\Rightarrow x((n+1)t_0) \approx t_0 F(x(nt_0)) + x(nt_0)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = t_0 F(x(nt_0)) + x(nt_0) = f(x_n)$$

entonces, un mapeo iterativo es un sistema dinámico cuya evolución temporal es discreta y está determinado por la ecuación (2.2).

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.2)$$

Ahora se verán algunas definiciones que involucran el resultado anterior. Si x' está en el dominio de f y sucede que $f(x') = x'$ entonces llamaremos a x' punto fijo. Al conjunto $O_f = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots\}$ que resulta de iterar la función f en un punto x_0 se le conoce como trayectoria u órbita de x_0 . Se dice que una órbita es

periódica de período τ , si dado un punto inicial x'' la órbita O_f de x'' es finita de cardinalidad $\tau \in \mathbb{N}$. Al punto x'' se le llama punto periódico. El ejemplo inmediato de una órbita periódica es un punto fijo, porque forma una órbita de período 1.

El estudio de la estabilidad de puntos fijos (o periódicos) dice si la dinámica permanece o se modifica cuando se introducen pequeñas perturbaciones en el sistema, en este caso nos interesan perturbaciones de punto inicial en un vecindad [6].

Sean $x_n = x' + \Delta_n$ donde x' es punto fijo¹ y x_n una órbita cercana a x' . Aproximando la derivada de una manera numérica

$$f'(x') = \frac{f(x' + \Delta_n) - f(x')}{\Delta_n}$$

$$\Rightarrow x' + \Delta_{n+1} = x_{n+1} = f(x' + \Delta_n) = f(x') + f'(x')\Delta_n$$

y usando $f(x') = x'$ se obtiene

$$\Delta_{n+1} = f'(x')\Delta_n$$

Si se define a $f'(x') = \lambda$, es decir, un eigenvalor ahora que se ha linealizado, se puede reescribir el último resultado como

$$\Delta_{n+1} = \lambda\Delta_n = \lambda^{n+1}\Delta_0 \tag{2.3}$$

Se ha obtenido una expresión para saber si las órbitas cercanas al punto fijo se alejan o convergen a él, asimismo solo depende de la derivada, por ello con (2.3) podemos concluir fundamentalmente 2 cosas:

1) Si $|\lambda| = |f'(x')| < 1$ entonces $\Delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y el punto x' es linealmente estable o atractor. En otras palabras, si evaluar la derivada en x' resulta menor en valor absoluto que uno, entonces las trayectorias cercanas al punto fijo serán atraídas hacia él, de ahí que se llame atractor.

2) Si $|\lambda| = |f'(x')| > 1$ entonces $\Delta_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y el punto x' es linealmente inestable o repulsor. Por lo tanto, si la derivada evaluada en x' es mayor en valor absoluto que uno, entonces la distancia de la perturbación crecerá con respecto al punto fijo (no es que realmente tienda a infinito) cada vez que la iteración aumente.

Algo que no menciona el análisis anterior es lo que sucede cuando $|\lambda| = |f'(x')| = 0$ y es muy interesante, porque a esta condición se le conoce como súper estabilidad pues es un decaimiento de perturbación más rápido que el estable, ya que es de la forma $\Delta_n \approx \Delta_0^{2^n}$. Notemos que utilizando la misma idea del cálculo anterior

$$x' + \Delta_{n+1} = x_{n+1} = f(x' + \Delta_n) = f(x') + f'(x')\Delta_n$$

¹ f' denota a la derivada de f

sin embargo, ésta vez $f'(x')\Delta_n = 0$, por lo cual

$$\Rightarrow x' + \Delta_{n+1} = f(x')$$

Ahora, la condición de super estabilidad es $f^{2^n}(x') = x'$, por lo tanto $\Delta_{n+1} = \Delta^{2^{n+1}}$.

Todo lo anterior sobre estabilidad se puede aplicar a los puntos periódicos utilizando la regla de la cadena de la siguiente forma

$$(f^\tau)'(x_0'') = f'(f^{(\tau-1)}(x_0''))(f^{(\tau-1)})'(x_0'') = f'(x_{\tau-1}'')(f^{(\tau-1)})'(x_0'') = \prod_{i=0}^{\tau-1} f'(x_i'') \quad (2.4)$$

donde $(f^\tau)'(x_0'')$ es la derivada de la τ -ésima iteración y x_0'' es un punto de periódico de período τ . La expresión (2.4) es útil porque existen sistemas dinámicos en los que un punto linealmente estable (o súper estable) también es periódico, un sistema donde existen este tipo de puntos es el mapeo logístico y de él se habla en la siguiente sección.

2.2. Mapeo logístico

El mapeo logístico es un sistema dinámico de tiempo discreto disipativo y su evolución corresponde a la ecuación (2.2). Es importante para la teoría de sistemas dinámicos no lineales por ser un sistema caótico simple. El mapeo surge de distintas maneras: para analizar ecuaciones diferenciales, como modelo de fenómenos naturales (la dinámica de una población) y también se ha logrado reproducir experimentalmente (experimento de convección de Libchaber) parte de su comportamiento [7]. Existe un conjunto de mapeos que es de interés para este trabajo y cumple con la siguiente definición.

Definición: Decimos que un mapeo f es unimodal en $[-1, 1]$ si cumple las siguientes condiciones:

- 1) f es continua
- 2) $f(0) = 1$
- 3) f es estrictamente decreciente en $[0, 1]$ y estrictamente creciente en $[-1, 0]$

Notese que a pesar de que el tiempo es discreto, la función del mapeo es continua en el espacio fase $[-1, 1]$, la definición puede parecer muy arbitraria por el dominio tan específico, sin embargo, se puede extender a cualquier intervalo de los números reales así que no hay pérdida de generalidad [5]. Una vez aclarado lo anterior, en este escrito se utilizaran específicamente los mapeos de la forma

$$f_{z,\mu}(x) = 1 - \mu|x|^z, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \mu \leq 2, \quad z > 1 \quad (2.5)$$

por cada z fijo se obtiene una infinidad de funciones dependientes de x , a decir verdad, una función por cada valor del parámetro $0 \leq \mu \leq 2$, todas con máximo en $x = 0$. Tres de éstas curvas se observan en la figura 2.1. Ahora es evidente que las variables z y x están restringidas por la definición, pero μ no, más adelante se discutirá brevemente por qué es necesario que esté acotada.

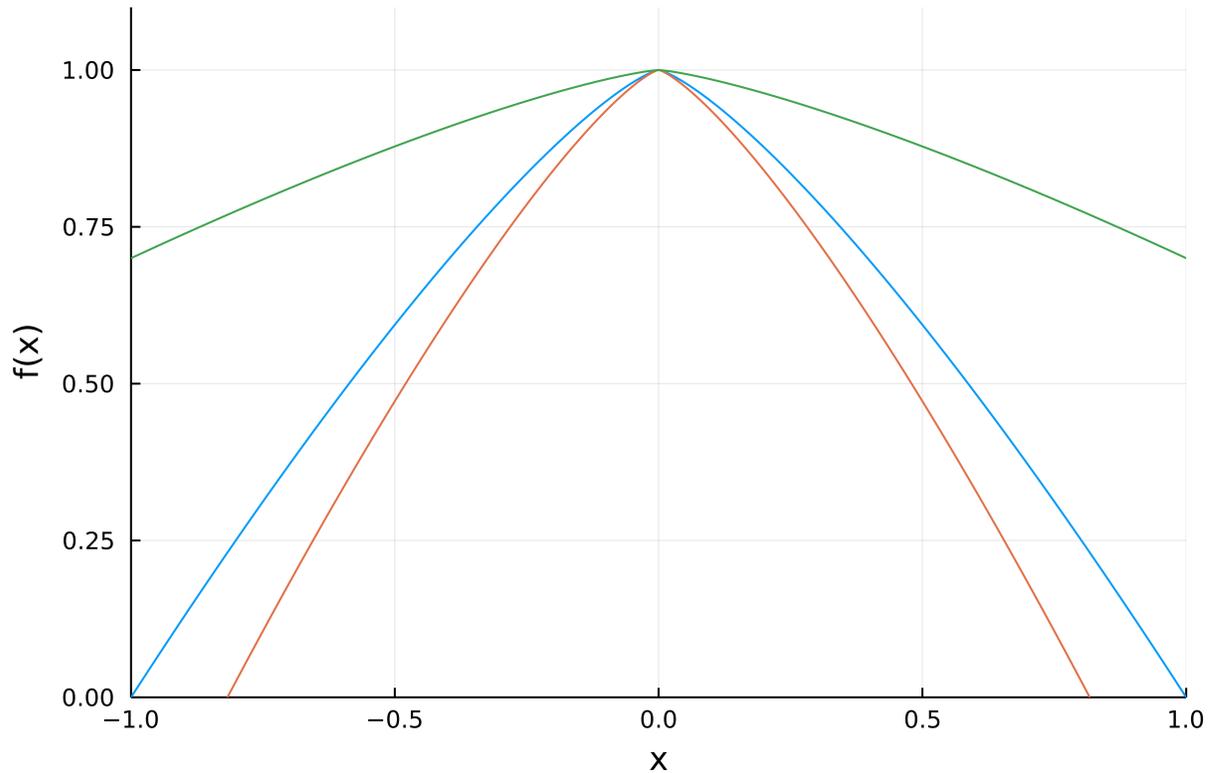


Figura 2.1: Mapeos generados con $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.3}$ con distintos valores de μ . En el mapeo verde se tomó $\mu = 0.3$, en el rojo $\mu = 1$ y para el rojo $\mu = 1.3$.

De los mapeos anteriores hay un objeto muy conocido que es el diagrama de bifurcaciones, donde μ sigue interpretándose como el parámetro de control y x pasa a convertirse en una posición que depende del tiempo, en este caso, discretamente. Por cada valor de z se tiene un diagrama de bifurcaciones, si se deja fija $z \in \mathbb{R}$ comienzan a desprenderse algunas propiedades, por ejemplo, si $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.3}$, su representación gráfica del diagrama es única y se forma al tomar una condición inicial en $[-1, 1]$ evolucionarla en el tiempo para distintos valores del parámetro de control. Ver Figura 2.2. También se observa que para valores menores a $\mu \approx 1.23$ hay un comportamiento periódico, a partir de $\mu = 0$ en adelante comienza una trayectoria que dibuja una curva, y para cierto valor de μ se duplica debido a un repulsor, después para otro μ mayor que el anterior cada órbita se vuelve a duplicar, el comportamiento se mantiene infinitamente hasta llegar a un punto límite llamado atractor de Feigenbaum, al valor de parámetro que coincide con dicho atractor es denotado por $\mu_\infty(z)$ y al dibujo de estas órbitas bien comportadas también se le conoce como cascada de duplicación de

períodos y por cada duplicación hay un punto llamado superciclo [4, 5, 7].

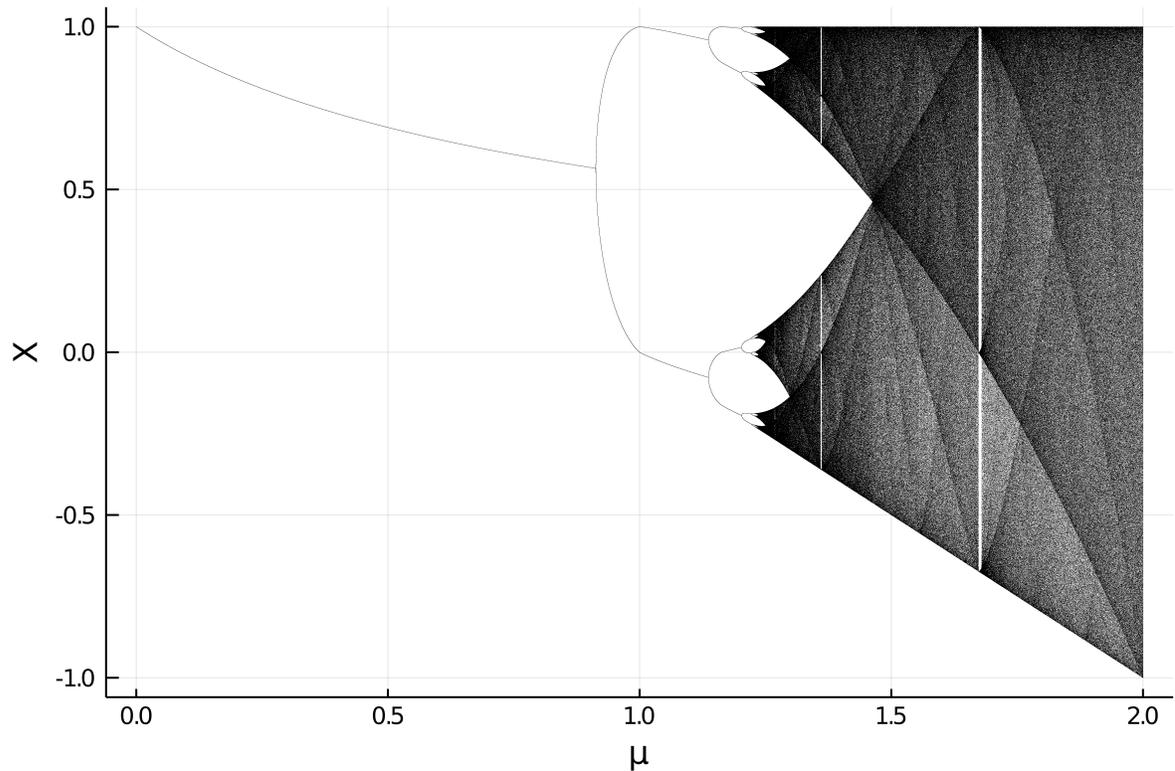


Figura 2.2: Diagrama de bifurcaciones generado con el mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.3}$

Cuando $\mu > \mu \approx 1.23$ el sistema se vuelve caótico, eso se traduce en que al tomar dos puntos iniciales tan cerca como se quiera las órbitas respectivas terminarán divergiendo una de otra. En la parte caótica hay lugares que son visitados por las trayectorias más frecuentemente que otros, formando patrones oscuros bien ubicados, los cuales están definidos por la familia de funciones $\{g^n(\mu) = f^n(0) \mid f^n(0) = 1 - \mu|f^{n-1}(0)|^{1.3} \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Tal vez el mayor atributo de esta familia es que marca las fronteras del atractor caótico. A esas curvas que se alcanzan a distinguir se les conoce como curvas de sombra; hay dos formas en las que se intersectan éstas líneas, tangencialmente y por cruce, las que son de mayor interés aquí son algunas de las que se cruzan debido a que dividen en dos bandas (caóticas) al mapeo, y dan lugar a los puntos de Misiurewicz, por cada división hay un punto Misiurewicz. La sucesión de puntos creada por dichos puntos también converge a $\mu_\infty(z)$.

2.2.1. Superciclos

De acuerdo con la sección 2.1 para poder analizar la estabilidad de los mapeos (2.5) hay que conocer la derivada, entonces para $z \geq 2$

$$\frac{\partial(1 - \mu|x|^z)}{\partial x} = -x\mu z|x|^{z-2}$$

por otro lado, cuando $1 < z < 2$

$$\frac{\partial(1 - \mu|x|^z)}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{zx\mu}{|x|^{2-z}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En ambos casos la derivada da cero si $x = 0$ lo que implica súper estabilidad, y $x = 0$ es un punto de período 2^N por lo tanto la ecuación (2.4) se reescribe como (2.6)

$$\left| \prod_{i=0}^{2^N-1} f'_{\bar{\mu}_N}(x''_i) \right| = 0 \quad (2.6)$$

$\bar{\mu}_N$ será un parámetro de control para el cual la súper estabilidad se cumplirá y conforme N vaya al infinito $\bar{\mu}_N$ convergerá al punto de acumulación $\mu_\infty(z)$, formando la sucesión $\{\bar{\mu}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$. Por cada superciclo también se tendrá un atractor, definiendo una familia que finaliza con el atractor de Feigenbaum en el borde del caos.

Una manera alternativa y visual de mostrar los valores de parámetro en los superciclos es utilizar que el punto del dominio donde se tiene el máximo de la función (2.5) en $[-1,1]$ es $x = 0$ siempre pertenece al ciclo súper estable [7], de ahí que la recta horizontal $x = 0$ se interseca con el diagrama de bifurcaciones en los puntos de abscisa $\bar{\mu}_N$ $N \in \mathbb{N}$, correspondientes a los superciclos. (ver Fig 2.3), esta misma observación se concreta en la ecuación (2.7).

$$f_{\bar{\mu}_N}^{2^N}(0) = 0 \quad (2.7)$$

Es fácil ver que $\bar{\mu}_1 = 1$ para cualquier $z > 1$.

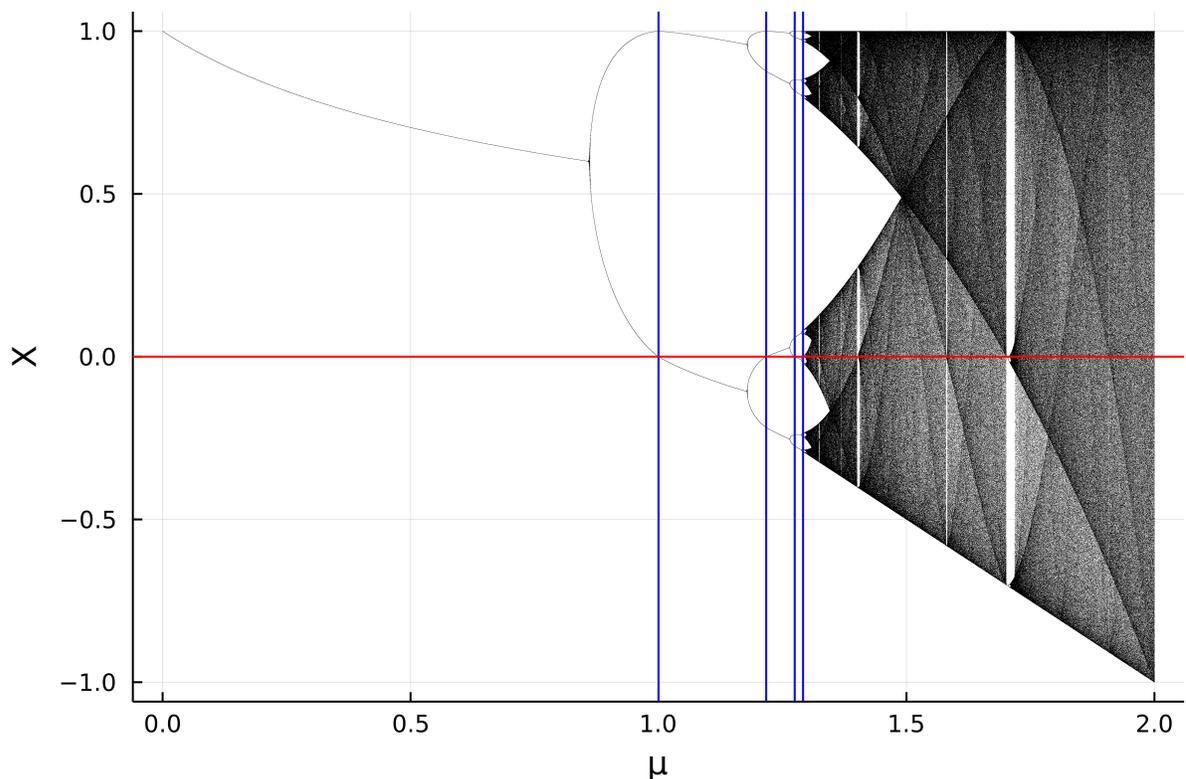


Figura 2.3: Diagrama de Bifurcaciones hecho con el mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$ dibujado junto a la función cero. Las líneas verticales azules son auxiliares y sus abscisas $\bar{\mu}_1 = 1$, $\bar{\mu}_2 \approx 1.2171$, $\bar{\mu}_3 \approx 1.2746$ y $\bar{\mu}_4 \approx 1.2914$ son también las de los superciclos de periodos 2, 4, 8 y 16, respectivamente.

2.2.2. Punto de acumulación $\mu_\infty(z)$

Antes se habló sobre la cascada de duplicación de períodos y lo bien comportada que resulta ser, pero lo que no se dijo es que puede ser descrita por factores de escala, es decir, existen constantes que son independientes de los detalles de la cascada y que pueden ser calculadas midiendo distancias de la misma debido a la universalidad. Eso justamente fue lo que encontró Feigenbaum y a dichas constantes universales¹ se les denota por $\alpha(z)$ y $\delta(z)$ [8]. Ambos factores y $\mu_\infty(z)$ se pueden calcular utilizando la ecuación (2.7) definiendo los diámetros de los superciclos y utilizando la sucesión $\{\bar{\mu}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, sin embargo, la convergencia es lenta, el método no es eficiente para z cerca de 1 ni para z tendiendo a infinito [9].

Por otro lado la teoría de grupo de renormalización demostrada por Collet and Eckmann² y utilizada por Feigenbaum funciona para ambos casos [5]. La idea funda-

¹Las constantes se denotan por α y δ pero en éste caso se pone su dependencia de z en referencia a los mapeos (2.5). Cada $z \in \mathbb{R}$ cambia los valores al igual que pasa con $\mu_\infty(z)$

²La demostración está hecha para funciones de la forma $\psi(x) = f(|x|^{1+\epsilon})$ donde $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

mental de la renormalización tiene que ver con autosimilitud³ que es la propiedad de un objeto a ser igual o parcialmente igual a una de sus partes, esto se traduce matemáticamente a la ecuación de Feigenbaum-Cvitanovic (2.8).

$$g_k(x) \equiv (-\alpha)^k f_{\mu_\infty}^{2^k} \left(\frac{x}{(-\alpha)^k} \right) \quad (2.8)$$

El objetivo es usar (2.8) y obtener el valor del punto de acumulación para cualquier valor de z , así que se puede continuar de varias formas para calcular μ_∞ , en este caso se utilizará el método de M. Lutzky que describe un algoritmo publicado previamente [10, 11]. La idea es tomar $g_{k+1}(0) = g_k(0)$, pues cuando k tiende a infinito esa igualdad se cumple y repetir para $k+1$, es decir, $g_{k+2}(0) = g_{k+1}(0)$, eso resulta en las ecuaciones $-\alpha f_{\mu_\infty}^{2^{k+1}}(0) = f_{\mu_\infty}^{2^k}(0)$ y $-\alpha f_{\mu_\infty}^{2^{k+2}}(0) = f_{\mu_\infty}^{2^{k+1}}(0)$ con estas dos expresiones se deduce la ecuación

$$f_{\mu_\infty}^{2^{k+2}}(0) f_{\mu_\infty}^{2^k}(0) - [f_{\mu_\infty}^{2^{k+1}}(0)]^2 = 0 \quad (2.9)$$

la cuál es una función que depende únicamente de μ_∞ ⁴ y se puede utilizar el método numérico de Newton para aproximar la raíces.

2.2.3. Puntos de Misiurewicz

Las curvas de sombra que se esbozan en Figura 2.2, analíticamente se construyen de la siguiente forma [12]

$$f_\mu(0) = 1$$

$$f_\mu^2(0) = 1 - \mu|1|^z$$

$$f_\mu^3(0) = 1 - \mu|1 - \mu|1|^z|^z$$

.

.

.

$$f_\mu^p(0) = 1 - \mu|f_\mu^{p-1}(0)|^z$$

Las intersecciones de estas curvas dan lugar a los puntos de Misiurewicz (P-M) que tienen la característica de ser pre-periódicos, en consecuencia existen dos números de iteración $n, m \in \mathbb{N}$ distintos tales que $f_\mu^m(0) = f_\mu^n(0)$. En la Figura 2.4 se muestran 4 curvas de las cuales se determinan 2 P-M, ahí mismo sucede la división en bandas caóticas. Una de las cosas interesantes de estos valores de parámetro de control es que siguen una secuencia para cualquier $z > 1$ y convergen al punto de acumulación μ_∞

³La autosimilitud es propiedad de los fractales, el atractor de Feigenbaum es un multifractal

⁴El valor de μ debe estar acotado entre cero y dos porque fuera de ese intervalo el atractor diverge, y ésto claramente no es lo que se desea.

como lo hacen los superciclos, solo que del lado caótico, es decir, forman una sucesión $\{\mu_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ que es decreciente y converge a μ_∞ .

Usando la condición de punto preperiódico se encuentra la intersección de las curvas, pero no es tan trivial calcular los valores deseados porque no hay una regla como (2.7) ¿qué intersecciones de todas las que suceden sirven para obtener estos parámetros específicos? La respuesta a esta pregunta se contesta con la siguiente conjetura.

Para el primer punto de Misiurewicz, se nota que el número de iteración cumple $4 - 3 = 2^0$, en el segundo $7 - 5 = 2^1$ y en general $\forall n > m$ se tiene $n - m = 2^N$ donde $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir, la resta de los números de iteraciones tiene que dar una potencia de dos. Nótese que el número de iteración es arbitrario, es decir, se construyeron dos sucesiones tales que su resta dé una potencia de dos.

$$f_{\mu_0}^3(0) - f_{\mu_0}^4(0) = 0$$

$$f_{\mu_1}^5(0) - f_{\mu_1}^7(0) = 0$$

$$f_{\mu_2}^9(0) - f_{\mu_2}^{13}(0) = 0$$

.

.

.

$$f_{\mu_N}^m(0) - f_{\mu_N}^n(0) = 0$$

El valor del parámetro $\mu = 2$ también es de interés para todos los mapeos de la ecuación (2.5) aunque no cumpla con la definición de P-M se tomará como elemento de este conjunto.

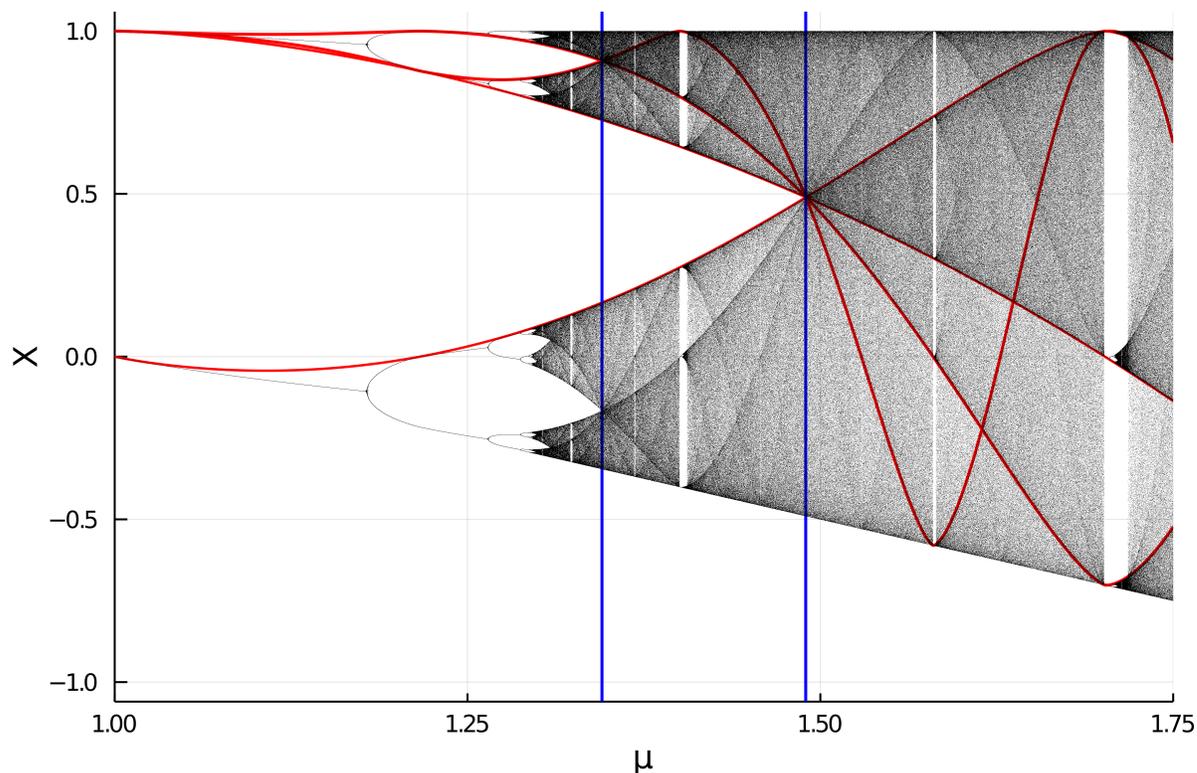


Figura 2.4: Diagrama graficado a partir del mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$. Se muestran 4 curvas de sombra en color rojo y las líneas verticales azules se encuentran en los valores $\mu_1 \approx 1.4896$ y $\mu_2 \approx 1.3452$ que también corresponden a los valores de los puntos de Misuirewicz. También se puede observar que hay zonas prohibidas una vez que se intersectan las curvas.

2.3. Teoría de la medida

Los mapeos están fuertemente involucrados con conceptos de medida de probabilidad, específicamente con la teoría ergódica. Antes de presentar los teoremas de ergodicidad se enunciarán algunos conceptos generales de teoría de la medida [1, 13]. Después ésta sección termina con el operador de Frobenius-Perron [14, 15].

2.3.1. Fundamentos de teoría de la medida

Definición: Dado un conjunto X , una colección $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es llamada σ -álgebra si cumple con lo siguiente:

- $\emptyset, X \in \mathcal{S}$
- $\forall A, B \in \mathcal{S}, (A \cup B \in \mathcal{S}) \wedge (B \setminus A \in \mathcal{S})$
- $\forall \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}, (\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{S})$

Definición: Sea \mathcal{S} una σ -álgebra de X . Si la función $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ cumple con ser no negativa y σ -aditiva, es decir,

- $\lambda(\emptyset) = 0$
- $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que $(A_i \cap A_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$,

$$\text{se cumple} \quad \lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n),$$

entonces λ es llamada medida. A la triada $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ se le conoce como espacio de medida.

Definición: Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \lambda)$. Se dice que el espacio es σ -finito si X es la unión numerable de subconjuntos con medida finita, es decir, $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathcal{S}$, $\lambda(A_n) < \infty$ y $n = 1, 2, 3, \dots$. Además si la medida es finita ($\lambda(X) < \infty$) se le conoce como σ -finita y si específicamente $\lambda(X) = 1$ entonces $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ es un espacio de probabilidad.

Definición: Sea $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de medida. La función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es medible si para todo $A \subset \mathbb{R}$ abierto, se cumple $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$.

Note que f^{-1} se refiere a la imagen inversa y no la función inversa, es decir, el conjunto $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid \exists a \in A, f(x) = a\}$

Definición: Para cualquier espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ y $0 < p < \infty$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \lambda) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \lambda, \mathbb{R})$ denota al conjunto de todas las funciones medibles en X tales que $\int |f|^p d\lambda < \infty$. Para $1 \leq p < \infty$ sea $\|f\|_p := (\int |f|^p d\lambda < \infty)^{\frac{1}{p}}$ y se llama norma L^p

Definición: Sean $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de medida donde λ es σ -finita y sea ν otra medida (solo finita) sobre ese mismo espacio. Se dice que ν es absolutamente continua respecto a λ ($\nu \ll \lambda$) si $\nu(A) = 0$ para cada $A \in \mathcal{S}$ tal que $\lambda(A) = 0$.

Teorema de Radon-Nikodym: Sea $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de medida tal que λ es una medida σ -finita. Sea ν una medida finita sobre el mismo espacio y absolutamente continua respecto a λ . Entonces existe una función $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \lambda)$ única tal que

$$\nu(A) = \int_A f d\lambda \quad \forall A \in \mathcal{S} \tag{2.10}$$

(2.10) se puede escribir como $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$

2.3.2. Teoría Ergódica

Una vez introducido el tema de medida podemos hablar de ergodicidad y el primer paso para ello es definir las medidas invariantes.

Definición: Sea $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de medida σ -finita. Se dice que $T : X \rightarrow X$

es una transformación medible si para cada $B \in \mathcal{S}$ sucede que $T^{-1}(B) \in \mathcal{S}$. Además T preserva la medida si $\lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(B)$ para todo $B \in \mathcal{S}$. Un conjunto Y es llamado T -invariante si $T^{-1}(Y) = Y$.

Se sabe que la imagen inversa de una función preserva las operaciones de conjuntos unión y resta así que la colección de todos los conjuntos invariantes es una σ -álgebra y la intersección de σ -álgebras es nuevamente una σ -álgebra, por lo tanto, es posible definir la σ -álgebra de todos los conjuntos invariantes de una transformación medible.

Definición: Sea $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de probabilidad, donde \mathcal{S} es la σ -álgebra de todos los conjuntos T -invariantes. Sea una transformación $T : X \rightarrow X$ que preserve la medida. T es llamada ergódica si para cada $Y \in \mathcal{S}$ sucede $\lambda(Y) = 0$ o $\lambda(X \setminus Y) = 0$

Definición: Sea una $T : X \rightarrow X$ transformación en un espacio medible $(X, \mathcal{S}, \lambda)$. T es un no singular si $\lambda(T^{-1}(A)) = 0$ para todo $A \in \mathcal{S}$ tal que $\lambda(A) = 0$.

Teorema: Sea $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de probabilidad y sea T una transformación que preserve la medida. Entonces, T es ergódica si y solo si

$$\forall A, B \in \mathcal{S} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(T^k(A) \cap B) = \lambda(A)\lambda(B)$$

Teorema ergódico de Birkoff: Sea $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación T -invariante sobre X que preserve la medida. Entonces T es ergódica si y sólo si para cada $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \lambda)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \int_X f d\lambda \quad (2.11)$$

para casi todo $x \in X$

Cololario: Si además de tener la hipótesis del teorema anterior f es la función característica de $A \in \mathcal{S}$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{X}_A(T^k(x)) = \lambda(A) \quad (2.12)$$

para casi todo $x \in X$. Donde \mathcal{X}_A es la función característica del conjunto A que se define como

$$\mathcal{X}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3.3. Operador de Frobenius-Perron

En las secciones anteriores se han reunido los conceptos necesarios para construir un objeto matemático que dictará la evolución de la función de densidad de probabilidad generada por un sistema determinista como el mapeo logístico, justo eso se busca y concreta a continuación.

Sean $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espacio de probabilidad, $T : X \rightarrow X$ una transformación no singular y $\rho \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \lambda)$ tal que $\rho \geq 0$ y su norma sea 1. A la función ρ se le llamará densidad. Con esta nueva función se define una medida

$$\lambda_\rho(A) = \int_{T^{-1}(A)} \rho d\lambda \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Nótese que $T^{-1}(A)$ es la imagen inversa de T sobre A , por otro lado, las hipótesis con las que se forma λ_ρ son las necesarias para aplicar el teorema de Radon-Nikodym pues λ debe ser σ -finita lo cual cumple porque es un espacio de probabilidad, λ_ρ es absolutamente continua respecto a λ ya que T es no singular ($\lambda(A) = 0$ implica que $\lambda_\rho(A) = 0$) por lo tanto existe una única $\bar{\rho} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \lambda)$ tal que

$$\lambda_\rho(A) = \int_A \bar{\rho} d\lambda \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

a la función $\bar{\rho}$ se le denota como $L\rho$. Finalmente se puede definir el operador.

Definición: El operador de Frobenius-Perron (F-P) es una función $L : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \lambda) \rightarrow \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \lambda)$ tal que

$$\int_A L\rho d\lambda = \int_{S^{-1}(A)} \rho d\lambda \quad \forall A \in \mathcal{S}, \quad \forall \rho \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \lambda) \quad (2.14)$$

La ventaja que de haber usado el teorema de Radon-Nikodym es que (2.14) se puede expresar de manera diferencial, por ejemplo, en una dimensión para una transformación que va de $[0, x]$ a $[0, x]$.

$$L\rho = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([0, x])} \rho(t) dt$$

Es importante decir que el operador tiene dimensión infinita, es decir, existe al menos una base en \mathcal{L}^1 con número infinito de elementos.

En resumen se ha deducido con poderosos teoremas una herramienta auxiliar para calcular lo mismo que el límite del teorema de Birkoff ¿por qué? La explicación es sencilla, al querer manipular (2.11) numéricamente el error sistemático producido por los decimales se vuelve tan dominante que no permite su aplicación en algunos casos. Por el contrario el operador de F-P vuelve despreciables esos errores, pero no es posible aplicar (2.14) de manera directa a las densidades generadas por los mapeos (2.5)

para hacer un estudio estadístico de los sistemas deterministas discretos, porque al ser de dimensión infinita el operador tendrá infinito número de entradas en su forma matricial eso numéricamente no es posible de manipular. Entonces, con lo antes dicho en mente, existe al menos una forma de hacer que el operador en su forma matricial tenga número de entradas finito para usarlo numéricamente [14, 15].

Sean $T : I \rightarrow I$ una transformación donde $I \subset [-1, 1]$ es finito⁵, una partición $Q = \{-1 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = 1\}$ finita. Sea $I_{i-1} \subset [x_{i-1}, x_i]$ finito con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, y sea la medida⁶ $m(I_i) = |I_i|$. Se define L_{ij} como la fracción del intervalo I_j que es mapeada al intervalo I_i por T

$$L_{ij} = \frac{m(I_i \cap T^{-1}(I_j))}{m(I_i)} \quad (2.15)$$

Luego hay que definir una densidad inicial

$$\rho_j = \frac{m(I_j)}{m(I)} \quad (2.16)$$

así al evolucionar la densidad con el operador (2.15) nos queda que

$$\rho'_j = L_{ij}\rho_j = \frac{m(I_i \cap T^{-1}(I_j))}{m(I_i)} \frac{m(I_j)}{m(I)} \quad (2.17)$$

o general si t es el número de iteración (tiempo) y ρ^0 una densidad inicial.

$$\rho^t = L^t \rho^0 \quad (2.18)$$

ahora se puede tomar específicamente algún mapeo para definir L en $[-1, 1]$ y ρ^0 con cierto número de condiciones iniciales en el mismo intervalo. Como el objetivo es hacer un estudio mecánico-estadístico, es necesario ir al campo de la física en la siguiente sección.

2.4. Mecánica Estadística

En termodinámica se definen de una manera apropiada las cantidades que describen al estado de una sistema macroscópicamente hablando, por ejemplo, P , V y T , que indican presión, volumen y temperatura respectivamente. El objetivo o uno de ellos es encontrar relación entre los cambios de estado, sobre todo los que se encuentran en equilibrio. Y en el camino se construyen las leyes de la termodinámica que tienen validez independientemente del sistema que se analice [16, 17]. Sin embargo la termodinámica no puede hacer afirmaciones ni interpretaciones a un nivel microscópico, para ello se utiliza el formalismo de la mecánica estadística que da explicaciones

⁵Note que se exige que el conjunto sea finito, esto no es necesario, sin embargo para construir numéricamente al operador sí se toman conjuntos finitos en el intervalo.

⁶ $|I_i|$ y $|I|$ denotan a las cardinalidades de los conjunto I_i e I respectivamente y son números naturales o cero, si es cero entonces $L_{ij} = 0$.

de propiedades de la materia en base al comportamiento dinámico de sus constituyentes microscópicos. Las cantidades de estado (termodinámico) macroscópicas son el resultado de tomar promedios de valores (que corresponden a las partículas microscópicas) o, como comúnmente se les llama, valores esperados. La conexión entre ambas teorías no es trivial y el inicio histórico podría ser con la teoría cinética de los gases, pero lo que sí es seguro es que la clave para esta conexión son los estudios de Boltzmann sobre la entropía [18].

2.4.1. Entropía de Boltzmann y Shannon

La base microscópica de la entropía termodinámica es la hipótesis de Boltzmann, la cual dice que la entropía de un sistema esta relacionada con la probabilidad de su estado [19].

Si la forma de derivar la entropía es por medio de la estadística, entonces se debe considerar un sistema con un número n grande y fijo de partículas que comúnmente es del orden de 10^{23} . Además el sistema tiene asignado un V volumen y E energía que también son fijas. Ahora cada partícula tiene una energía, posición, momento y se quiere conocer el valor exacto correspondiente. Evidentemente es imposible hacer mediciones de cada partícula que se encuentra en este sistema, así que a cada partícula se le asigna una probabilidad clásica del estado en el que se encuentra [19].

Un ensamble de sistemas, es una colección de sistemas que tienen el mismo número de partículas, energía y volumen. Cada uno de estos sistemas puede tener configuraciones distintas, por ejemplo, tenemos 10 partículas y cada una tiene una unidad de energía pero también puede suceder que 5 de ellas tengan 1.5 unidades de energía y las demás 0.5, idealmente hablando. Si un sistema de éstos es el total de microestados, se denota al total de los microestados como Ω [18].

Dicho lo anterior se encuentra que S (la entropía) será igual a una función dependiente de Ω

$$S = \phi(\Omega)$$

donde $\phi(\Omega)$ es una función desconocida y para determinarla se consideran dos sistemas termodinámicos A y B , de entropías

$$\begin{aligned} S_A &= \phi(\Omega_A) \quad \text{y} \\ S_B &= \phi(\Omega_B) \end{aligned}$$

Cada sistema tiene una entropía asociada pero también se puede considerar al sistema completo $S_{AB} = \phi(\Omega_{AB})$. Se sabe que la entropía de cada sistema es independiente, por lo cual la igualdad $S_{AB} = S_A + S_B$ es válida, más aún el número total de estados de cada sistema también es independiente, eso quiere decir que $\Omega_{AB} = \Omega_A \Omega_B$ por lo tanto

$$\phi(\Omega_{AB}) = \phi(\Omega_A \Omega_B) = \phi(\Omega_A) + \phi(\Omega_B)$$

la solución que satisface la expresión anterior es $\phi(\Omega) = k_B \ln(\Omega)$ donde k_B es la constante de Boltzmann. La entropía de Boltzmann queda como

$$S = k_B \ln(\Omega) \quad (2.19)$$

note que Ω no es una probabilidad, la probabilidad se hace cuando $p = \frac{1}{\Omega}$.

Si bien, la motivación de esta sección es ver de que forma se relaciona la entropía de Boltzmann con la entropía de Shannon, se inicia con la de Boltzmann porque es más común encontrarnos con ella. Con lo antes dicho en mente, se cuentan el número total de microestados del sistema $\Omega(A_n)$, con $A_n = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ donde N será el número de partículas que pueden estar en n estados de energía (E_i donde $i = 1, 2, \dots, n$). Éste sistema se considera aislado, además los valores de la energía y partículas son fijos, en otras palabras, $\sum_{i=1}^n N_i = N$ y $\sum_{i=1}^n E_i N_i = E$. Luego entonces, como hay N partículas distinguibles

$$\Omega(A_n) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n N_i!} \quad (2.20)$$

como se está suponiendo que n es un número muy grande se puede usar la aproximación de Stirling que establece $\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$ y utilizando la ecuación de la entropía (2.19)

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \left(\frac{N!}{\prod_{i=1}^n N_i!} \right) = \\ &= k_B \left[\ln(N!) - \ln \left(\prod_{i=1}^n N_i! \right) \right] \approx \\ &\approx k_B \left\{ N \ln(N) - N - \sum_{i=1}^n [N_i \ln(N_i) - N_i] \right\} = \\ &= k_B \left\{ \ln(N^N) - \sum_{i=1}^n [\ln(N_i^{N_i})] \right\} = \\ &= -k_B \ln \left(\frac{\prod_{i=1}^n N_i^{N_i}}{N^N} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -k_B N \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} \ln \left(\frac{N_i}{N} \right) \\
&= -k_B N \sum_{i=1}^n p_i \ln (p_i)
\end{aligned}$$

se define a la probabilidad como $p_i = \frac{N_i}{N}$ y se ha llegado a una nueva expresión de S , asimismo se ha demostrado que la entropía de Boltzmann es proporcional a la entropía de Shannon

$$S = - \sum_{i=1}^n p_i \ln (p_i) \quad (2.21)$$

Esta nueva expresión es más que solo una igualdad matemática que se cumple a partir de una aproximación, porque la entropía no solo tiene interpretación termodinámica también se usa en la teoría de la información, propuesta por Claude Shannon en 1948. La forma más sencilla de conectar ambas entropías es interpretar los microestados y su probabilidad asociada como datos [20].

2.4.2. Termodinámica: Transiciones de fase

Existen fenómenos dentro de la termodinámica y la mecánica estadística que son modelados con funciones bien comportadas, en otras palabras, la mayoría son diferenciables y sus derivadas son continuas, el costo por tener ecuaciones con características de este tipo es muy bajo porque la idea fundamental sigue estando en las ecuaciones mismas, por ejemplo, quitar la interacción entre partículas cuando se escribe la ecuación de los gases, porque aun así se puede entender cualitativamente un gas real. Sin embargo hay otro tipo de fenómenos donde no sucede esto, pues las ecuaciones tendrán discontinuidades analíticas o singularidades, debido que no hay un modelo simple en el que se puedan despreciar las interacciones entre partículas. Las transiciones de fase se caracterizan por ésto [18].

El reordenamiento de la estructura de un sistema es una de las características más importantes de las transiciones, por ejemplo, en el caso del agua líquida, cuando se baja la temperatura cerca de los 0 grados Celsius se convierte en sólido, por otro lado cuando se aumenta aproximadamente a 100 grados Celsius se evapora, pero al aumentar la presión por los 300 MPa se convierte en algo denominado “ice II” que es diferente del hielo por su estructura y sus propiedades termodinámicas, asimismo se ha llegado a observar que cerca del punto crítico de temperatura el cambio de estado puede ser repentino [21]. Eso es evidencia de que las transiciones de fase son más complicadas de lo que parecen.

Es posible demostrar que los cambios en la estructura de las transiciones de fase pueden ser descritas por un parámetro de orden que es el encargado de medir el grado de simetría de una fase y otra, este parámetro se denota por Ψ . Y en términos

de variables termodinámicas se exhibe que los cambios de estructura se traducen en discontinuidades abruptas o puntos no analíticos⁷. Para conocer dichas variables se utiliza la entalpía libre de Gibbs [17].

La entalpía libre de Gibbs $G(N, T, P, H, E)$ es una función dependiente (en este caso) de campos de variables intensivas como la presión (P), campo magnético (H), campo eléctrico (E), etc., por son cantidades que se pueden medir. Usando la entalpía libre es posible deducir cantidades extensivas como la entropía, volumen, dipolo eléctrico y magnético por medio de sus derivadas como se muestra en (2.22)

$$\Psi = \pm \frac{\partial G}{\partial h} \quad (2.22)$$

h es un campo de los que antes se han mencionado. Se representa con la misma notación que el parámetro de orden al valor de la derivada porque están relacionados [17]. La entropía y volumen se calculan de la siguiente forma:

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} \quad V = \frac{\partial G}{\partial P} \quad (2.23)$$

En la clasificación de Ehrenfest el orden de una transición es el orden de la derivada que deja de ser continua. Si la primera derivada de la entalpía es discontinua entonces la transición es de primer orden, por otro lado si es continua y la segunda derivada es discontinua entonces es de segundo orden y así sucesivamente. Por ejemplo, el calor específico (2.24) resulta de derivar dos veces la entalpía libre respecto a la temperatura, pero es lo mismo que derivar una vez a la entropía. Entonces, si hay discontinuidad en el calor específico se trata de una transición de fase de segundo orden.

$$C_p = -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (2.24)$$

Es bien sabido que la entalpía libre es una representación de la función fundamental expresada en variables termodinámicas intensivas. Por ello es posible pasar a una representación energética U del mismo sistema en términos de otras variables termodinámicas, por medio de una transformación de Legendre sin perder información. Con cualquiera de éstas representaciones se puede obtener información y un análisis cualitativo a partir de graficar dos variables termodinámicas en el espacio euclidiano, regresando al ejemplo del agua, si se gráfica $P - T$ se obtiene la Fig. 2.5 que indica las líneas de coexistencia y el punto triple.

⁷Los puntos no analíticos son aquellos en los que no se puede hacer una expansión en serie de potencias, como la expansión de Taylor.

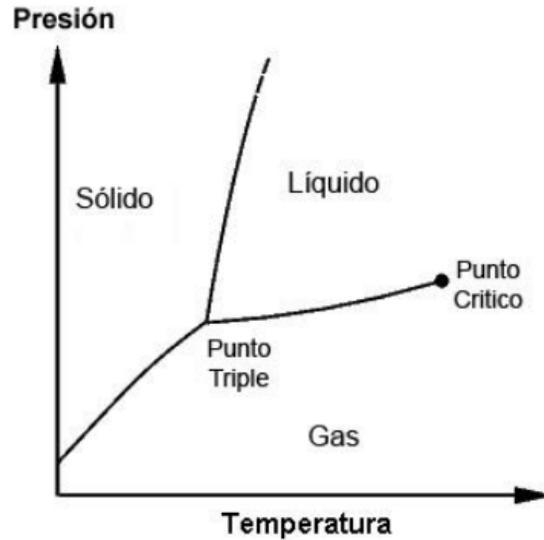


Figura 2.5: Diagrama de fases para el agua, se muestran las líneas de coexistencia, las tres fases (más conocidas) del agua y el punto triple.

El cambio de líquido a gas es una transición de primer orden, la cual es descrita de manera precisa por la ecuación de van der Waals $P(V) = \frac{k_B T}{(V-b)} - \frac{a}{V^2}$. Usando esta función se obtiene el diagrama de la figura 2.6. Como se observa hay tres curvas isotermas, una para $T < T_c$ otra para $T = T_c$ y por último una para $T > T_c$ donde T_c denota la temperatura crítica. Debido a que V es de tercer grado, entonces máximo se tienen tres raíces y se toman en cuenta solo las reales porque son las interesantes para la interpretación física. En las zonas donde $(\frac{\partial P}{\partial V}) < 0$ indican estabilidad, por lo tanto, en las zonas donde esto no se cumple hay una transición de gas a líquido y a medida que T se aproxima a T_c las raíces se vuelven una y las pendientes positivas van desapareciendo, ahí es donde se encuentra un punto crítico, en otras palabras, se genera estabilidad termodinámica y tanto gas como líquido coexiste. [22].

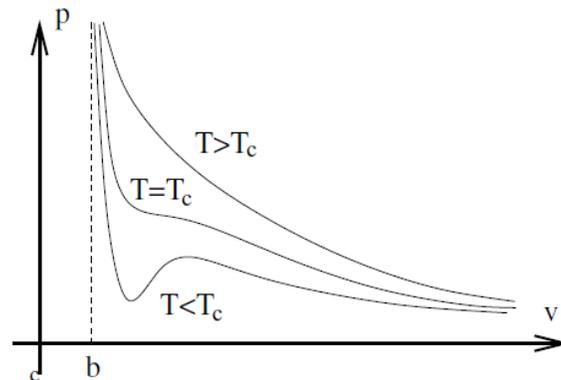


Figura 2.6: Tres curvas Isotermas graficadas a partir de la ecuación de van der Waals, donde T_c hace referencia a la temperatura crítica.

Hasta ahora se ha introducido el tema de transiciones de fase por medio de la entalpía libre, sin embargo, hay características fundamentales más generales de una transición de fase en física; simetría, escala y número de elementos dentro del sistema [18, 22]. El número de elementos que conformen al sistema debe ser considerablemente grande, como antes se mencionó debe ser del orden de 10^{23} . La simetría se define a partir del material que se este analizando, por ejemplo, en un sólido las partículas se encuentran ordenadas y juntas, entonces se puede suponer que las distancias permanecen constantes (invariantes bajo rotaciones o traslaciones), mientras que en el estado líquido de ese mismo material se deja de conservar esa propiedad, eso quiere decir que hay un rompimiento en la simetría permitiendo caracterizar a una transición de fase. Para el caso de la escala se desarrolló una técnica llamada grupo de renormalización, la idea es que si se tiene un número de interacciones entre las partículas del material entonces al aplicar esta técnica se simplificará las expresiones que resulten de dichas interacciones, uno de los ejemplos más conocidos es la aproximación de campo medio que se utiliza para el modelo de Ising.

De acuerdo con algunos estudios [2, 3] las transiciones de fase pueden presentarse en otros fenómenos que no son puramente físicos, siempre y cuando se cumplan los requisitos fundamentales antes enunciados. En el siguiente capítulo se utilizan estas ideas.

Capítulo 3

Evolución de la densidad generada por el mapeo.

La teoría ergódica es el tema que estudia el comportamiento de las medidas de probabilidad inducidas por los sistemas dinámicos deterministas. Específicamente en los mapeos logísticos (2.5) la ergodicidad entra en juego al dejar fijo un $z > 1$ porque se obtienen densidades invariantes, entonces se pueden utilizar medidas invariantes bajo transformaciones. Cada densidad invariante se forma evolucionando con el operador de Frobenius-Perron t veces una ρ inicial constituida por k condiciones iniciales en $[-1, 1]$, cabe mencionar que el valor de parámetro de control se escoge de entre las sucesiones $\{\mu_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\mu}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ y el punto de acumulación μ_∞ . Para los valores del tiempo y número de condiciones iniciales se debe cumplir que $k \sim 1$ y $t \sim 1$.

Un detalle sutil pero importante de mencionar es que se han manejado dos escalas de tiempo; la primera 2^N que ayuda a definir los valores del parámetro que coinciden con la familia de atractores y que también se utiliza para encontrar a los puntos de Misiurewicz, la segunda escala corresponde al valor de la iteración cuando se aplica el operador de F-P denotada por t .

En la sección 2.1 se dijo que la trayectoria de un mapeo logístico está determinada por un valor inicial x_0 , pero si se quiere crear una densidad ρ^0 para hacer un estudio estadístico de la dinámica de (2.5) se necesitan k valores iniciales aleatoriamente distribuidos en $[-1, 1]$

$$x_0^1, \quad x_0^2, \quad x_0^3, \quad x_0^4, \quad x_0^5, \quad \dots \quad x_0^k \tag{3.1}$$

luego, para poder formar la aproximación finita de la densidad invariante

$$\rho'_j = L_{ij} \rho_j = \frac{m(I_i \cap T^{-1}(I_j))}{m(I_i)} \frac{m(I_j)}{m(I)}$$

se requiere establecer cuáles son los conjuntos con los que se construye. Se toma $I = \{x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4, x_0^5, \dots, x_0^k\}$ y sea $Q = \{-1 = y_0, y_1, \dots, y_{r-1}, y_r = 1\}$ una partición de $[-1, 1]$ tal que $r < k$, conviene que el número de trayectorias sean mucho mayor que el

número de subintervalos $I_{j-1} = [y_{j-1}, y_j]$ hechos por la partición. Con eso es suficiente para saber quienes son ρ_j y ρ^0 . En cuanto al operador de F-P, solo falta decir que la transformación es la ecuación de los mapeos (2.5). Por lo tanto la evolución temporal esta dada por

$$\rho^t = L^t \rho^0$$

En este capítulo se analizará un único mapeo para mostrar el funcionamiento del operador, cuando $z = 1.5$, es decir, se usará $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$. Los valores que toma el parámetro de control μ son: los correspondientes a los superciclos, el punto de acumulación μ_∞ y los puntos de Misiurewicz. Como las sucesiones del primer y último conjunto son infinitas, se restringirán a los primeros valores de cada una, que son suficientes para entender el comportamiento general de la dinámica estadísticamente.

3.1. Evolución de la densidad: superciclos y puntos Misiurewicz.

Para los primeros dos valores de parámetro en los superciclos la dinámica es simple, ver figura 3.1, al componer consigo mismo el operador L y aplicarlo a la densidad inicial como lo dicta

$$\rho^t = L^t \rho^0$$

se ve que conforme el tiempo t es mayor el sistema tendrá mayor probabilidad de caer en los puntos donde hay súper estabilidad, ya se vio que en el primer superciclo $\bar{\mu}_1 = 1$ y en la figura 2.3 la línea vertical que corresponde a ese valor intersecta exactamente donde se acumulan las trayectorias en el panel A, es decir, en cero. Lo mismo sucede con el panel B, la dinámica convergerá a los puntos donde hay súper estabilidad. Aparecen más lugares por la duplicación de períodos, entonces para el tercer valor del superciclo tendrían que formarse 8 lugares donde se acumulen las trayectorias. Este comportamiento se debe a que la dinámica sucede dentro de cada atractor.

Cuando $\mu = \mu_\infty$ existe un número infinito de puntos donde se acumulan las trayectorias. Por supuesto eso solo pasa matemáticamente, numéricamente es imposible, eso se observa con claridad en la figura 3.2 pues a pesar de que en los paneles A y B se muestran dos densidades casi iguales, sus respectivos superciclos son distintos, esto sucede por dos motivos, uno de ellos tiene que ver con la precisión que antes se mencionó. Otro ejemplo de lo mismo es el mapeo logístico $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.3}$, hay un momento en el que las duplicaciones se dejan de apreciar aunque en teoría son infinitas. La segunda razón es que la convergencia del operador es muy lenta[15].

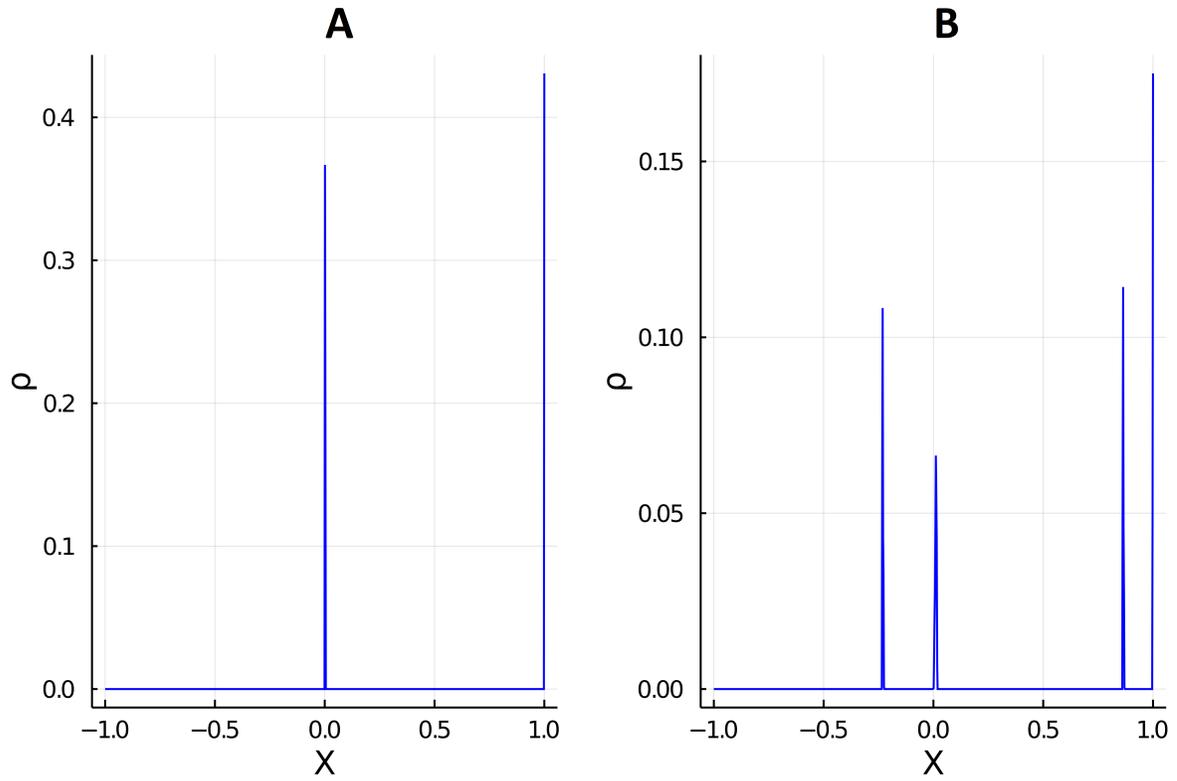


Figura 3.1: Densidades correspondientes a los dos primeros valores de superciclos para el mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$, los valores de parámetro utilizados son $\bar{\mu}_1 = 1$ para el panel A y $\bar{\mu}_2 \approx 1.233$ para el panel B. El conjunto de trayectorias se acumula alrededor de los valores que son súper estables.

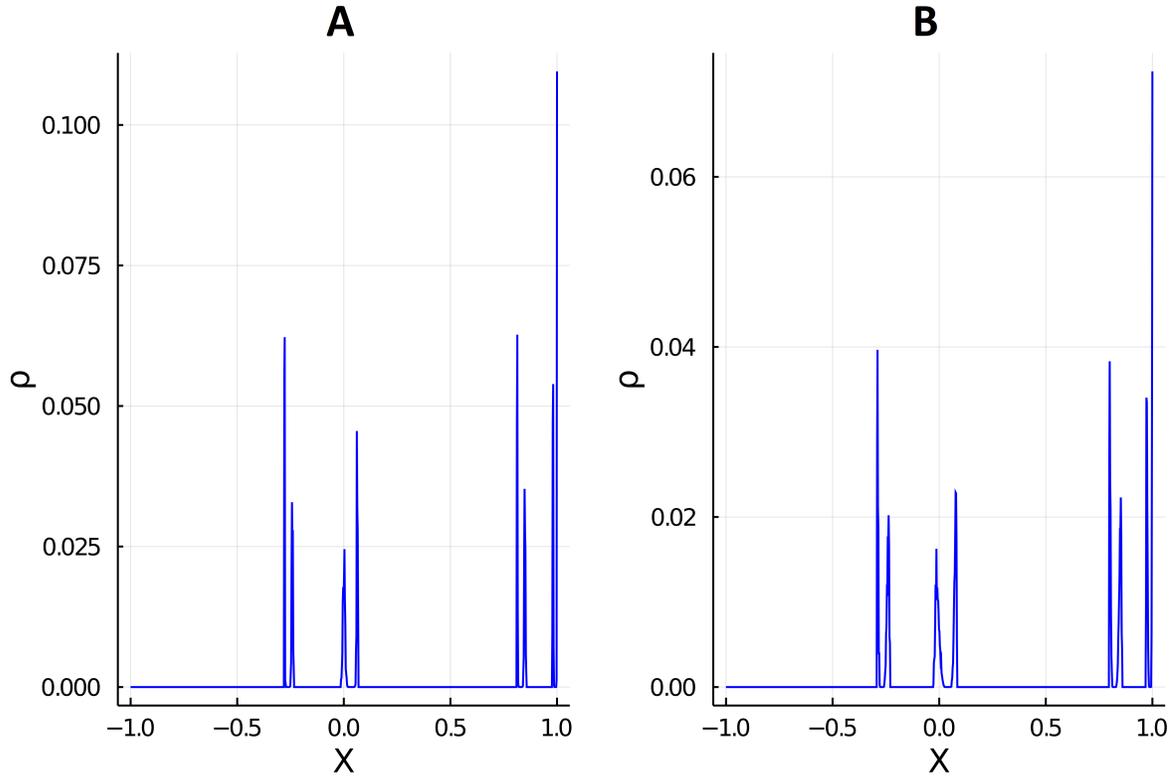


Figura 3.2: Densidades correspondientes a los valores $\bar{\mu}_3 \approx 1.279$ para el panel A y $\bar{\mu}_4 \approx 1.291$ para el panel B del superciclo para el mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$. Para estos casos es un poco menos evidente que los valores a los que tienden las órbitas son los súper estables porque el cambio es tan pequeño que no se aprecia.

Lo que sigue es examinar los P-M, pero antes de ello hay que aclarar un detalle. Cuando se introdujeron estos puntos se dijo que el cálculo se hace a partir de una conjetura ya que no existe teoría análoga como la técnica de renormalización para extraerlos ¿cómo se asegura que los puntos calculados son los correctos si no hay demostración? pues se recurre nuevamente a una gráfica, en la figura 3.3 se observa la parte caótica del mapeo en escala logarítmica, en ella se dibujan algunas curvas de sombra en color rojo junto con los valores que se obtuvieron a partir del algoritmo propuesto, nótese que los P-M están en líneas rectas verticales y nuevamente están en ubicados en la intersección de las curvas de sombra, aún más la brechas blancas horizontales son las zonas prohibidas una vez que ha sucedido la intersección, con ésto se confirma que los valores calculados son correctos. En principio ese patrón tan particular que se ve, se reproduce infinitamente, como el número de puntos es finito hacen que se vea difuminado hasta desaparecer.

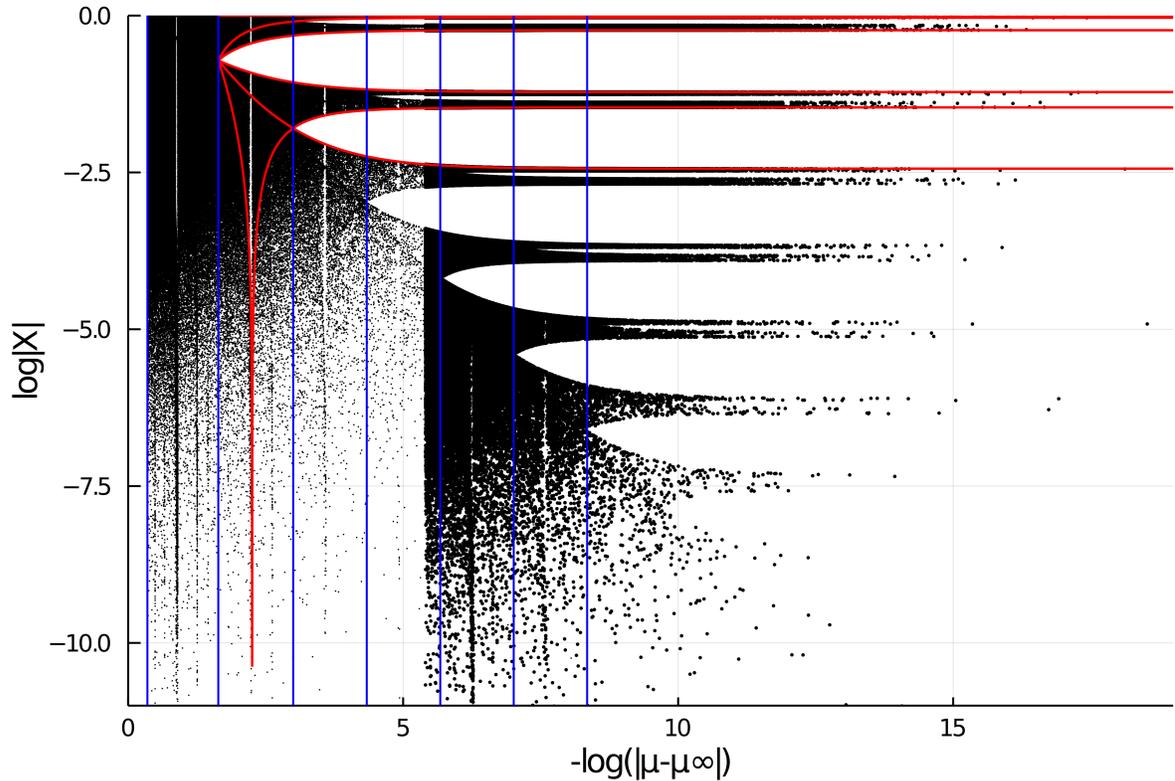


Figura 3.3: Lado caótico del mapeo logístico $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$ en escala logarítmica, dibujado junto con 6 curvas de sombra (en color rojo) y puntos de Misiurewicz (en color azul). Las brechas horizontales son las zonas prohibidas delimitadas por las mismas curvas.

Densidades formadas por los P-M tienen algunas características similares a las anteriores formadas por superciclos, por ejemplo, en la figura 3.4 se grafican dos densidades con los dos primeros valores de P-M en el panel A se logran ver 3 puntos donde se acumula la probabilidad de que caigan las trayectorias, asimismo conforme evolucione el sistema cada vez habrá mayor posibilidad de encontrarlas ahí, la diferencia es que no se puede hablar de convergencia como el caso anterior que es determinada por puntos súper estables, en vez de eso solo se dice que existe un lugar donde caerán con mayor frecuencia puntos de las órbitas, esas partes son las curvas de sombra. Una prueba de que no hay convergencia es la cantidad de área bajo las curvas, a pesar de que el tiempo es el mismo que en las densidades de superciclos.

Dos de los puntos en la Fig.3.4A donde se acumulan puntos de las trayectorias corresponderán a los bordes del atractor, mientras que el punto central que se encuentra muy cerca de 0.5 en X corresponde al punto de Misiurewicz (ver figura 2.3). Algo parecido sucede con B2 solo que la dinámica adquiere más complejidad, pues se tienen dos columnas una por cada banda caótica, pero nuevamente hay 3 puntos por columna y una vez más los centrales corresponden a los P-M (ver figura 2.3).

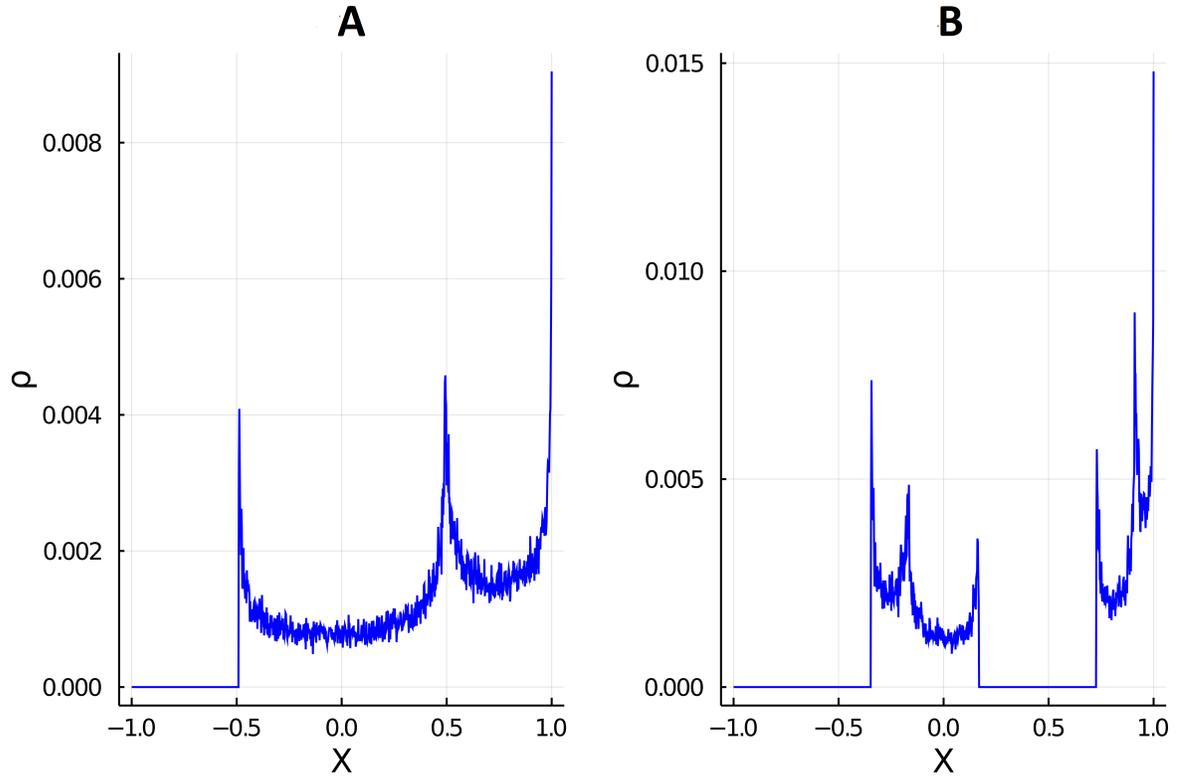


Figura 3.4: En las densidades de los paneles A y B se utilizaron los valores de parámetro de control $\mu_1 \approx 1.489$ y $\mu_2 \approx 1.345$ respectivamente para el mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$.

En el siguiente par de puntos de Misiurewicz sus densidades se muestran en la figura 3.5, se observa que cuando los valores de parámetro se van acercando por la derecha a la ubicación del atractor de Feigenbaum las densidades serán muy parecida a la de los superciclos, el panel A comienza a dar indicios de esto, la densidad es muy similar a la Fig.3.2A. Aunque la dinámica cambia en la Fig.3.5B con respecto al panel adyacente, no se logra observar por la lenta convergencia que proporciona el operador de F-P. Donde sí se logra notar el cambio es de la Fig.3.4B a la Fig.3.5B, pues las columnas de probabilidad ahora son 4 y no 2 como antes.

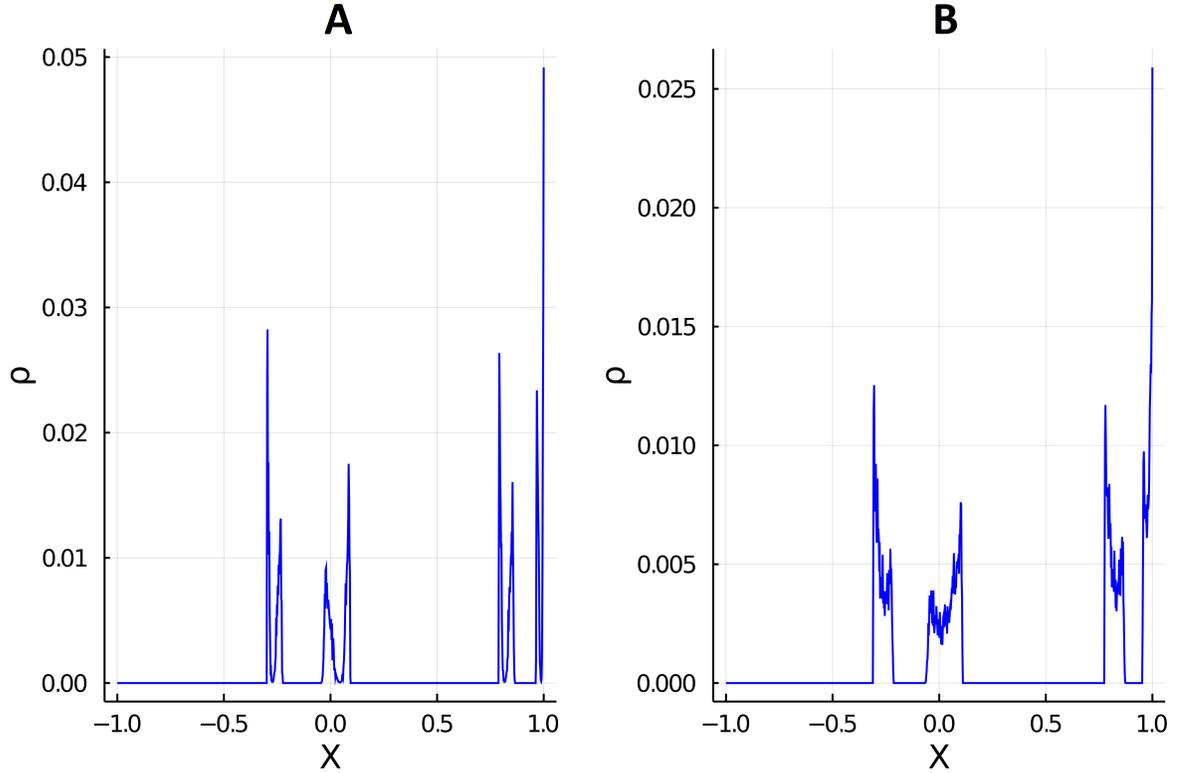


Figura 3.5: En las densidades de los paneles A y B se utilizaron los valores de parámetro de control $\mu_3 \approx 1.308$ y $\mu_4 \approx 1.298$ respectivamente para el mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$.

3.2. Evolución de la densidad: μ_∞ y $\mu = 2$.

Hasta ahora se ha visto que los puntos S-P y P-M generan densidades que cambian con el número de iteración (tiempo) pero que en el infinito o para un número suficientemente grande se convierte en un conjunto invariante. Existe un punto más del que solo se hizo mención en la sección 2.1. Este punto, cuando $\mu = 2$ es especialmente interesante porque posee una densidad invariante con expresión analítica, es decir, sin necesidad de aplicar el operador F-P (numéricamente) un número grande de veces, además no importa que valor de $z > 1$ sea, siempre existe. Probablemente la más conocida sea $z = 2$ pues recibe el nombre de mapeo de Ulamp, pero también la tiene para $z > 1$ distinta de 2 y es [23].

$$\rho(x) = \frac{1}{2z} \left(\frac{2}{1-x} \right)^{\frac{z-1}{z}} \left[\rho \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/z} \right] + \rho \left[\left(-\frac{1-x}{2} \right)^{1/z} \right] \right] \quad (3.2)$$

Este valor 2 del parámetro de control es relevante porque se puede considerar a la densidad que determina como una función propia o eigenfunción del operador de F-P. También tiene las características de que la densidad que genera no tiene medida cero

en el sentido de Lebesgue y la invarianza de este tipo aparece en toda la familia de mapeos, por ello será importante dentro de este trabajo. El gráfico 3.6 muestra dos densidades que corresponden a $z = 1.5$ en azul y $z = 2.5$ en rojo, son muy similares y para cada valor de z aparecerían otras muy parecidas donde la mayor probabilidad de encontrar las trayectorias está en los extremos -1 y 1 , también nótese que estas densidades son análogas a un punto fijo para un sistema dinámico, solo que en este caso la densidad es fija para el operador de F-P, y por lo tanto para el teorema de Birkoff.

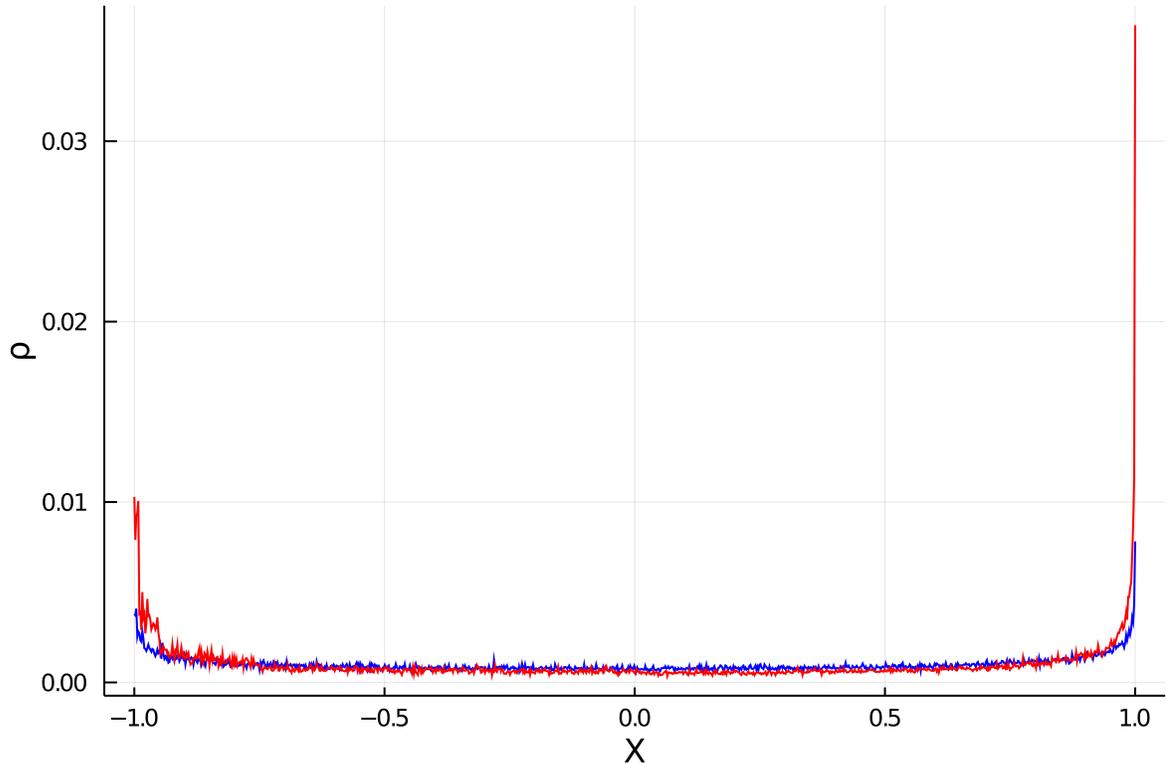


Figura 3.6: Densidades invariantes ($\mu = 2$) de los mapeos $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{1.5}$ en azul y $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{2.5}$ en rojo. Estas densidades no cambiaran aunque se les aplique el operador de F-P.

Hasta el ahora se han estudiado las densidades en superciclos, en puntos Misiurewicz y en $\mu = 2$. Es momento de ver cómo se comporta la densidad en el atractor de Feigenbaum, pero existe un impedimento que se discutió previamente. La convergencia lenta del operador. Para solucionar este problema se aplica el mapeo (2.5) con $z = 2.5$ como función al conjunto de condiciones iniciales (3.1). Si bien se dijo que es posible que se altere la convergencia a la densidad invariante al no aplicar el operador F-P, lo que no se modifica es los puntos en los que converge, es decir, la frecuencia de acumulación puede cambiar pero los puntos no, debido a que la dinámica sucede dentro del atractor de Feigenbaum, es decir, cuando el sistema se encuentra en el borde del caos ubicado en μ_∞ , entonces se ha llegado a el límite que el sistema venía

diciendo que existía por medio de los superciclos y puntos de Misiurewicz, por lo tanto cuando se evolucione el sistema en ese punto la densidad no podrá acumularse en puntos distintos. Eso es suficiente para estudiar el comportamiento. Aplicando lo antes dicho se obtienen k primeros elementos de las órbitas independientes entre si

$$f(x_0^1), \quad f(x_0^2), \quad f(x_0^3), \quad f(x_0^4), \quad f(x_0^5), \quad . \quad . \quad . \quad f(x_0^k)$$

nótese que se puede representar de la manera a la siguiente según lo establecido por (2.2)

$$x_1^1, \quad x_1^2, \quad x_1^3, \quad x_1^4, \quad x_1^5, \quad . \quad . \quad . \quad x_1^k$$

si se aplica esta misma operación t veces, resulta el conjunto $\{x_t^1, x_t^2, x_t^3, x_t^4, x_t^5, \dots, x_t^k\}$ y usando la ecuación 2.16 se obtiene una densidad ρ^t que a diferencia de lo antes hecho no se usó el operador de F-P para construir una densidad en un tiempo t .

En la figura 3.7 se muestra la densidad generada con el mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{2.5}$ utilizando el parámetro $\mu_\infty \approx 1.4705499$. Se puede ver que la diferencia de la convergencia a la densidad invariante entre un método y otro es considerable a pesar que es en el mismo tiempo (misma cantidad de iteraciones). También se puede decir que todos los mapeos tendrán un comportamiento similar dentro sus atractores, las densidades generadas se verán de una forma similar al igual que los puntos Misiurewicz, pero la distribución dependerá de cada caso.

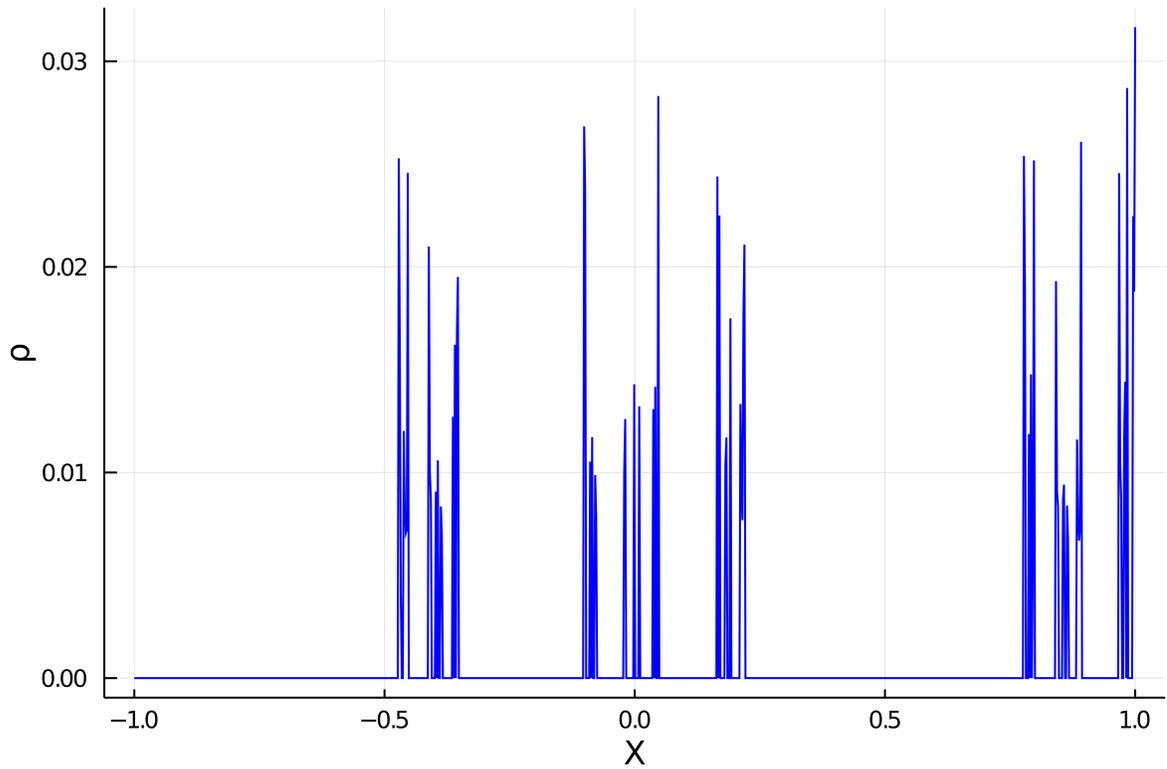


Figura 3.7: Densidad del mapeo $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^{2.5}$ donde se usa como parámetro el punto de acumulación $\mu_\infty \approx 1.4705499$. Se logra ver de forma más clara la dinámica dentro del atractor de Feigenbaum porque la convergencia es más rápida con el mapeo aplicado al conjunto de puntos iniciales en comparación con el operador de Frobenius-Perron aplicado t veces a una densidad inicial.

Capítulo 4

Transición de fase

Con base en [3, 2] se busca relacionar de una manera general las densidades resultantes de cualquier $z > 1$ con la entropía de Shannon

$$\mathcal{S} = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

En estos estudios previos se encontró que al calcular las entropías correspondientes a las densidades hechas con el mapeo logístico con $z = 2$ y graficarlas junto con el parámetro de control, ocurre lo que parece ser una transición de fase de segundo orden, atribuyendo la discontinuidad a una susceptibilidad que resulta de derivar la entropía respecto al parámetro de control μ . La primera señal de ello es que la gráfica de la entropía tiene un punto no analítico, dicho punto se obtiene de evaluar la densidad generada por el mapeo usando el valor del punto de acumulación μ_∞ correspondiente en la entropía de Shannon. Cuando los valores de superciclos y puntos Misiurewicz se acercan al atractor los valores de la entropía adquieren una pendiente cada vez mas grande, en otras palabras, el atractor de Feigenbaum no solo marca la transición del caos al comportamiento periódico sino que también divide a dos fases en términos estadísticos.

La pregunta que forma la base de este trabajo es ¿qué pasa con los valores de la entropía cuando $z \neq 2$ en los mapeos $f_{z,\mu}(x) = 1 - \mu|x|^z$? En la figura 4.1 se muestran 3 curvas que corresponden a $z = 1.5$ en azul, $z = 2.0$ en rojo y $z = 2.5$ en verde. Cada punto representa un valor de la entropía calculada con la ecuación (2.21) que está en función de sus respectivos valores de parámetro μ ya sea superciclo o P-M. Algunas cosas interesantes que vale la pena mencionar son: conforme aumenta el valor de z los valores de la entropía en $\mu = 1$ y $\mu = 2$ van disminuyendo, así que en ningún momento se intersectan las curvas. Para los valores de la entropía en $\mu = 2$ es más notoria la observación debido a la densidad invariante (3.2), entonces cuanto mayor sea la diferencia de dos valores de z también será mayor la distancia de las entropías en ese valor del parámetro.

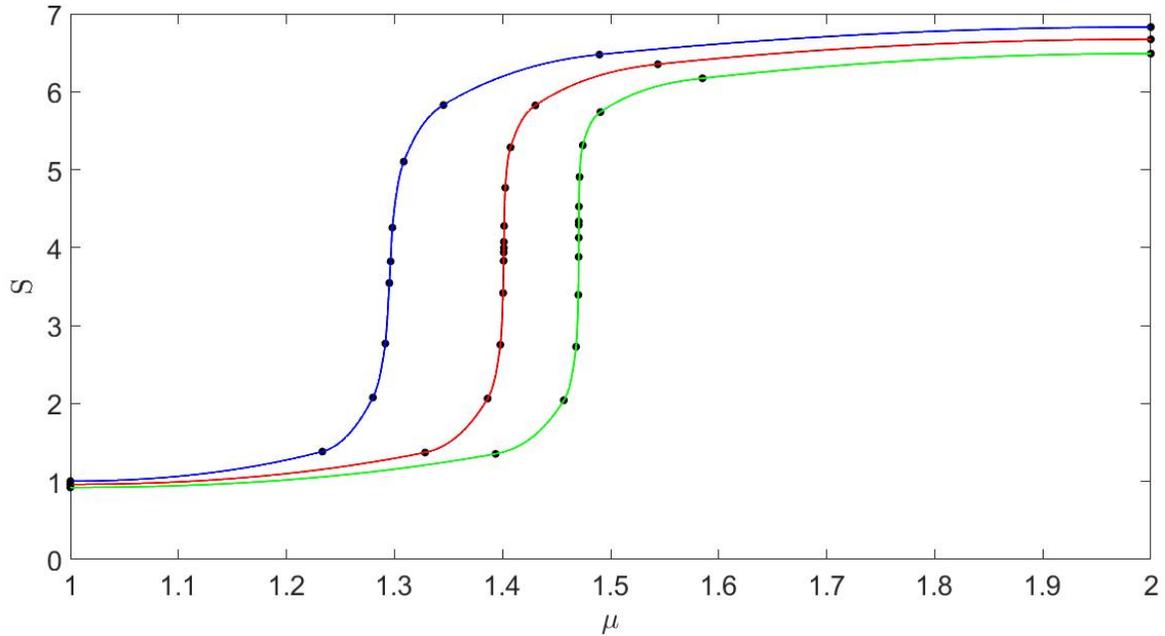


Figura 4.1: La entropía de Shannon, \mathcal{S} , como función del parámetro de control μ . Cada una de las curvas corresponde a un valor de z distinto en el mapeo $f_{z,\mu}(x) = 1 - \mu|x|^z$; $z = 1.5$ en azul, $z = 2.0$ en rojo y $z = 2.5$ en verde. Los puntos representan los valores de la entropía calculados, mientras que la línea es la aproximación continua.

Si las tres curvas describen una transición de fase en términos de la entropía, e interpretando el parámetro de control en el papel de una variable intensiva, entonces debe observarse la correspondiente divergencia de la susceptibilidad [2]. Al calcular la derivada numérica de las curvas continuas y suaves ajustadas en Fig. 4.1, se obtiene una transición de segundo orden [17].

En la figura 4.2 se observan tres funciones que corresponden a $\chi = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu}$ de las entropías antes mostradas y se mantiene el mismo código de colores $z = 1.5$ en azul, $z = 2.0$ en rojo y $z = 2.5$ en verde. Lo primero que se nota es el recorrido hacia la derecha mientras mayor es el valor de z , la razón tiene que ver con la definición de los mapeos pues se exige que $z > 1$ porque para valores $z < 1$ no existe el comportamiento de duplicación de periodos [9]. Así el recorrido horizontal es debido a que el valor de z es mayor estricto que 1 y que la ubicación del atractor depende de z . Otra observación es que debido a la resolución numérica usada para calcular las entropías, las curvas ajustadas presentan pendientes más pronunciadas cuando el valor de z aumenta, por ello, cuando $z = 2.5$ la gráfica es más alta que las dos anteriores.

El punto no analítico hace que se genere un pico que teóricamente tiende a infinito. Estos puntos no analíticos corresponden a los valores de parámetro del punto de acumulación; para $z = 1.5$ se ubica en $\mu_\infty = 1.2955099731$, para $z = 2.0$ en $\mu_\infty = 1.4011551890$, para $z = 2.5$ en $\mu_\infty = 1.4705499152$.

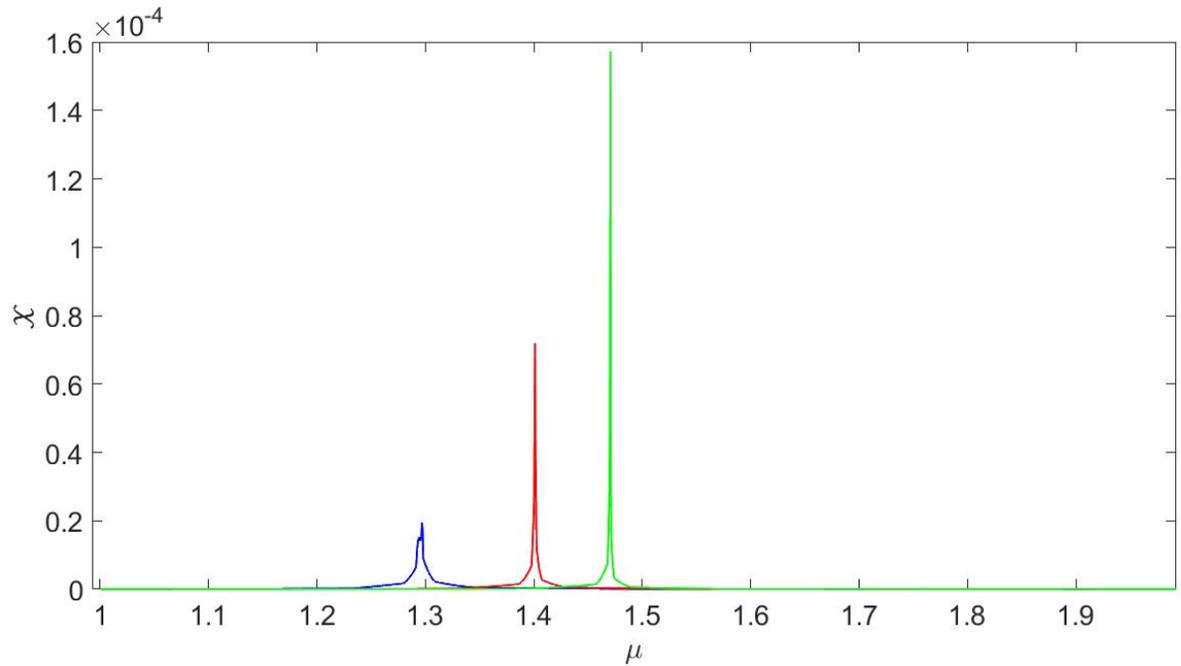


Figura 4.2: Susceptibilidad $\chi = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu}$. Las tres curvas corresponden a un valor de z distinto en el mapeo $f_{z,\mu}(x) = 1 - \mu|x|^z$; $z = 1.5$ en azul, $z = 2.0$ en rojo y $z = 2.5$ en verde. La divergencia se debe a una transición de segundo orden.

Debido a la universalidad de los escenarios dinámicos estudiados para estos mapeos, el comportamiento estadístico de todos los mapeos unimodales del intervalo $[-1, 1]$ serán similar al estudiado aquí. La ventaja de nuestro análisis es que permite construir otro recurso como el diagrama de fases pues es similar a mover un parámetro que se identifique con un campo externo físico, como se hace en termodinámica.

Ahora, si cada valor de z genera una curva de transición, entonces al graficar a cada valor de z en función de μ_∞ se estaría obteniendo el diagrama de fases (ver figura 4.3) y como se había comentado es un recurso para analizar transiciones. Los puntos indican los valores calculados y la línea que los une es la aproximación a la función continua, cuando μ_∞ tiende a 2, z tiende a infinito, evidenciando un comportamiento asintótico. Ahora mismo es difícil (o imposible) asociar un sistema físico específico y decir a cuales dos fases divide, aunque dinámicamente es claro que divide al movimiento caótico del periódico. Sin embargo, es interesante pensar que cada punto de acumulación μ_∞ puede ser análogo a un valor crítico de la temperatura T . Por otra parte, z se puede ver como la presión P . Al aumentar ambas, μ_∞ y z (T y P) nos recorremos en la línea de coexistencia de fases hasta alcanzar el punto crítico, cuando $\chi = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu}$ diverge.

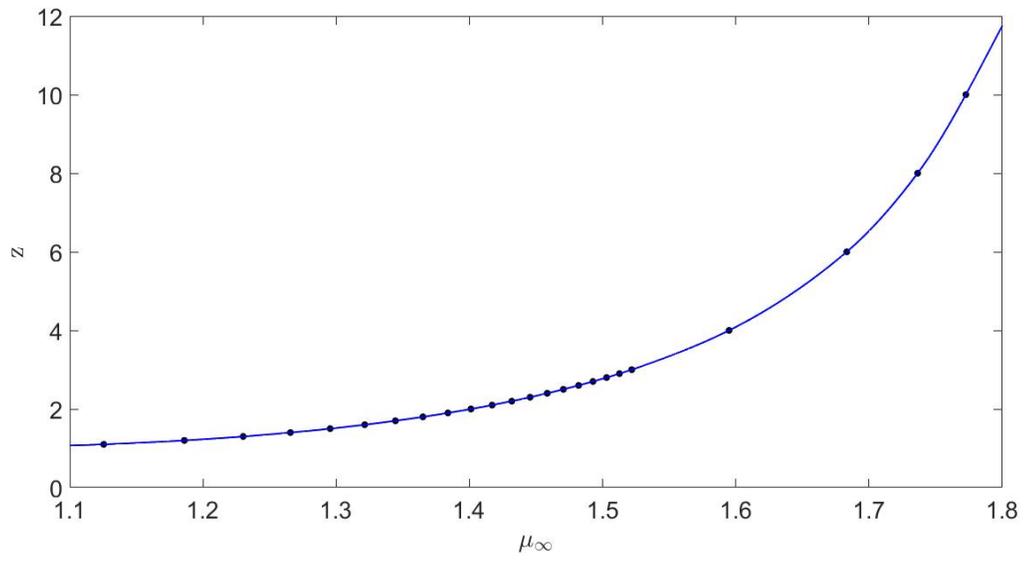


Figura 4.3: El valor de z en función de los atractores de su correspondiente mapeo, cada punto es un valor calculado y la línea es la aproximación continua. Esta gráfica respresenta el equivalente a un diagrama de fases.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

Se ha estudiado la familia de mapeos logísticos $f_{z,\mu}(x) = 1 - \mu|x|^z$ de manera estadística usando teoremas y proposiciones de ergodicidad en su forma numérica, tal es el caso del operador de Frobenius-Perron de dimensión finita. Se logró reproducir resultados previos [2] y extender a más mapeos el cálculo de densidades invariantes con superciclos, puntos Misiurewicz y punto de acumulación μ_∞ ; también hay una propuesta de un algoritmo (no demostrada) para calcular P-M sin importar el valor de z . La consistencia de los resultados es consecuencia de la propiedad de universalidad manifestada en la familia de mapeos.

La entropía de Shannon que esta relacionada directamente con la teoría de la información, también puede entenderse desde la física. Así que al utilizar esta entropía en un contexto distinto como es el de los sistemas dinámico discretos, específicamente los mapeos, es posible conectar con las transiciones de fase. En gran medida esto es posible a que la familia de mapeos cumplen con las características necesarias para construir una transición de fase, por su puesto, apoyado en la teoría ergódica [22]. En la figura 4.2 se pueden ver los tres casos estudiados. Se observa como afecta el valor de z , pues debido a este valor cambiará la ubicación de la discontinuidad, que en este caso es un pico. Por otro lado, mientras más cerca se encuentre del límite inferior de definición para z el pico se verá más pequeño por la resolución numérica.

Resulta inquietante que un fenómeno como las transiciones de fase aparezca en un lugar aparentemente sin relación, sin embargo, puede tener sentido si se analiza de una manera correcta [22]. Antes ya se dijo que las características fundamentales para que exista una transición de fase son: la escala, ruptura de simetría y número de constituyentes en el sistema que se analiza. Estos tres conceptos se encuentran estrechamente relacionados con el mapeo, la ruptura de simetría puede asociarse al cambio de comportamiento periódico a caótico donde atractor de Feigenbaum separa ambos movimientos. Y aunque en los mapeos la ruptura esta sujeta a un parámetro discreto, al usar entropía de Shannon junto a la teoría ergódica le da la solidez a la idea, que al final resulta en las curvas de la Fig.4.1.

El segundo ingrediente está en la cascada de duplicación de periodos y en las bandas

caóticas pues debido al comportamiento universal dentro de la familia de mapeos, se tiene una propiedad general de autosimilitud que deriva en ecuaciones como la de Feigenbaum-Cvitanovic, que además tiene como antecedente las constantes de Feigenbaum y el punto de acumulación μ_∞ . La misma propiedad es precursora de la conjetura propuesta para encontrar los puntos de Misiurewicz.

A todo lo anterior hay que sumarle que el sistema debe tener una cantidad de condiciones iniciales considerablemente grande de tal forma que la dinámica pueda estudiar estadísticamente. Con lo anterior dicho ya no es tan extraño encontrar este tipo de comportamiento en el análisis ergódico de sistemas discretos deterministas como los mapeos.

Bibliografía

- [1] J. Ding, A. Zhou (2009). *Statistical properties of deterministic system*, 1st Edition (Tsinghua University press and Springer).
- [2] A. Diaz-Ruelas, F. Baldovin, A. Robledo. Logistic map trajectory distributions: Renormalization-group, entropy, and criticality at the transition to chaos, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 31, **033112** (2021).
- [3] A. Díaz-Ruelas, (2019). *Statistics, Dynamics and effective degrees of freedom of complex systems models* (Doctor). UNAM.
- [4] Edward R. Scheinerman, (2000). *Dynamical Systems*, 1st Edition (Internet version).
- [5] Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann, (1980). *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, First Edition (Birkhäuser).
- [6] H. G. Schuster, W. Just, (2005). *Deterministic Chaos: An introduction*, 4th Edition (VHC Publishers, Germany).
- [7] Steven H. Strogatz, (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, 1st. edition (Perseus Books Publishing, US).
- [8] M. J. Feigenbaum. Quantitative univesality for a class of Nonlinear Transformations, *J. of Statistical physics*, **19** (1978).
- [9] Van Der Weele J. P., Capel H. W. and Kluiving R. Period doubling in maps with a maximum of order z , *Physica A*, **145** (1987) 425.
- [10] M. Lutzky. On the calculation of λ_∞ , $g(0)$ and α and for one-dimensional mappings, *Physics letters A*, **123** (1987).
- [11] Van Der Weele J. P., Capel H. W. and Kluiving R. On the scaling factors $\alpha(z)$ and $\delta(z)$, *Physics letters A*, **119** (1986).
- [12] C. Ross, M. Odell, S. Cremer. The shadow-curves of the orbit diagram permeate the bifurcation diagram, too , *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **19** (2009).

- [13] R. M. Dudley, (2004). *Real analysis and probability*, 2nd Edition (Cambridge university press).
- [14] A. I. Mees (2001). *Nonlinear dynamics and statistics*, 1st Edition (Birkhäuser).
- [15] T.-Y. Li. Finite. Approximation for the Frobenius-Perron Operator. A solution to Ulam's conjecture, *Journal of approx. theory*, **17** (1976) 177.
- [16] L. G. Colín Scherer, (1972). *Introducción a la termodinámica clásica*, 2da. Edición (Trillas).
- [17] W. Greiner, L. Neise, H Stöcker (1995). *Thermodynamics and statistical mechanics*, 2da. Edición (Springer).
- [18] R. K. Pathria, P. D. Beale, (2011). *Statistical mechanics*, 3th Edition (Elsevier).
- [19] R. Bowley, M. Sánchez, (1999). *Introductory statistical mechanics*, 2nd Edition (Oxford University press).
- [20] Matthew Schwartz, (2019). *Lecture 6: Entropy*, <https://scholar.harvard.edu/schwartz/teaching>.
- [21] Herbert B. Callen, (1985). *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, 2nd. Edition (John Wiley and Sons).
- [22] D. Tong (2017). *Statistical Field Theory*, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.html>.
- [23] C. Beck, F. Schlogl, (1993). *Thermodynamics of chaotic systems*, (Ik: Cambridge University press).
- [24] C. G. Chakrabarti, I. Chakrabarti. Boltzmann-Shannon entropy: Generalization and application, *Modern physics Letters B*, **20** (2006) 1471.