



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

**MECÁNICA DE DE BROGLIE-BOHM Y LA REGLA DE
BORN**

TESIS

*QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA*

Presenta:

WALDEMAR RUIZ LUNA

TUTOR PRINCIPAL:

**ELIAS OKON GURVICH, INSTITUTO DE
INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., OCTUBRE 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por guiarme en este camino y ayudarme a progresar día con día en mi vida profesional, a mi hermano por compartir lo que nuestros padres con tanto esfuerzo nos han ofrecido, quiero agradecer a mis padrinos y al resto de mi familia por compartir momentos llenos de alegrías y tristezas.

Quiero agradecer a mi asesor Elias Okon Gurvich por la paciencia que ha tenido durante el proceso de redacción de la tesis. También agradezco a los integrantes del jurado que han tenido que sacrificar tiempo para leer y comentar mi trabajo.

Agradezco también al CONACyT por otorgarme la beca con la cuenta CVU 926660 del programa 001471 - MAESTRÍA EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA que hizo posible la conclusión de las asignaturas y el proceso para escribir el trabajo de tesis.

Contenido

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 2 | La Mecánica Cuántica y la Interpretación Estándar | 5 |
| 2.1 | Experimento de Doble Rendija | 5 |
| 2.2 | Interpretación Estándar de la Mecánica Cuántica | 7 |
| 3 | Problema de la Medición y Posibles Soluciones | 11 |
| 3.1 | Problema de la medición | 11 |
| 3.2 | Interpretaciones Alternas | 12 |
| 4 | Teoría de Onda-Piloto de de Broglie-Bohm | 15 |
| 4.1 | Postulados de la interpretación de onda-piloto | 15 |
| 4.2 | Desarrollo de la teoría | 16 |
| 4.2.1 | La relación entre la probabilidad y la densidad $ \Psi ^2$ | 18 |
| 4.3 | Mediciones en la teoría de onda-piloto | 19 |
| 4.3.1 | Modelo para mediciones | 20 |
| 4.3.2 | La regla de Born en esquemas de medición | 24 |
| 4.4 | Doble rendija en el formalismo de onda-piloto | 26 |
| 5 | Teorema-H subcuántico | 29 |
| 5.1 | Teorema-H clásico | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.1.1 | Ecuación de Boltzmann | 30 |
| 5.1.2 | Teorema- H de Boltzmann | 34 |
| 5.1.3 | Los retos del teorema- H | 37 |
| 5.1.4 | Teorema- H a la Gibbs | 37 |
| 5.2 | Analogía para el caso subcuántico del teorema- H | 38 |
| 6 | Tipicalidad | 43 |
| 6.1 | La gramática de la tipicalidad | 45 |
| 6.2 | Desarrollo del argumento de tipicalidad en mecánica de Bohm . . . | 47 |
| 7 | Enfrentamiento de las perspectivas | 51 |
| 7.1 | Crítica de Callender | 51 |
| 7.2 | Crítica de Norsen | 52 |
| 7.3 | Análisis del enfrentamiento de perspetivas | 53 |
| 8 | Referencias | 57 |

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del siglo XX la física tuvo grandes avances en el entendimiento de la materia y el universo en general. Esto inició con las teorías que explicaban desde lo más pequeño concebible hasta las escalas más grandes que podían ser conocidas, la mecánica cuántica y la relatividad. Por otro lado, una rama remarcable de la física es la mecánica estadística, que propone exponer la naturaleza de los fenómenos macroscópicos desde recursos teóricos microscópicos. Es importante apuntar que la mecánica estadística motiva y ayuda a la unificación de la física de lo pequeño con la física de lo observable.

Este escrito está dirigido a considerar a la mecánica cuántica desde una perspectiva diferente a la que se considera estándar, es decir, se busca explicar los efectos cuánticos desde la interpretación de onda-piloto, la cual es una interpretación determinista de la teoría. En esta interpretación surgen cuestiones relacionadas con el postulado estadístico, el cual consiste en considerar que las partículas de la teoría, llámense partículas Bohmianas, están distribuidas a cierto tiempo inicial como $|\psi_0|^2$. Esto implica, por la vía de una ecuación de continuidad para la distribución de las partículas, que hay un estado de equilibrio subcuántico conocido como la regla de Born. Lo que se estudia en este trabajo es la forma en que debe considerarse el postulado estadístico, ya sea como una ley fundamental de la teoría, o si en lugar de proponer el estado inicial de equilibrio, la regla de Born aparece como una consecuencia de interacciones entre partículas fuera del equilibrio que por razones estadísticas llegan al equilibrio. Es el caso que los resultados empíricos que se obtienen de hacer pruebas sobre la naturaleza del universo se decantan por estar en concordancia con la regla de Born. En el contexto de la mecánica de de Broglie-Bohm, el postulado estadístico produce discrepancias entre ciertas posturas que buscan justificar la regla de Born. Uno de los objetivos principales de este escrito es analizar dos alternativas para interpretar el origen de la regla de Born. Con esto, hacer una evaluación informada

y fundamentada para suscribir o rechazar estas alternativas.

En el capítulo 2 se estudia a la mecánica cuántica interpretada de la forma estándar. Esta interpretación tiene serios problemas conceptuales que surgen en el contexto de la observación o medición de los fenómenos cuánticos. En capítulo 3 se describe el problema de la medición, que se entiende a partir de tres puntos que considera la mecánica cuántica estándar. En esta misma sección se explica cómo puede resolverse este problema, negando alguno de los tres puntos que considera la interpretación estándar. También se busca dar una explicación superficial para cada interpretación que resuelve el problema de la medición.

En el capítulo 4 se explica formalmente la interpretación de onda-piloto de De Broglie-Bohm, exhibiendo las relaciones más importantes de esta interpretación y haciendo énfasis en las relaciones que tienen una conexión directa con la regla de Born, como: la ecuación de continuidad para la densidad $|\psi|^2$ que surge de la ecuación de Schrödinger y la ecuación de continuidad para la distribución de probabilidad inicial del formalismo. Adicionalmente, se estudia un sistema de medición y se da interpretación a las mediciones en el contexto de la teoría de onda-piloto.

En el capítulo 5 se comienza a estudiar el artículo de Valentini [19], en el que se propone dar justificación a la regla de Born por medios estadísticos. Dado que Valentini usa una analogía con el teorema- H clásico, es menester en esta sección estudiar el trabajo de Boltzmann para tener una idea de lo que es obtener un estado de equilibrio observable a partir de cuestiones dinámicas y estadísticas fuera del equilibrio.

En el capítulo 6 se estudia la postura de Dürr, Goldstein y Zanghi [7] que Callender trata de resumir en [5] y, en la cual la mejor explicación a lo que se observa como la regla de Born se debe a que ésta solo se entiende si se aplica a subsistemas, es decir, a regiones del universo. En este enfoque la regla de Born es un resultado típico de la teoría. Este argumento se conoce como tipicidad y establece que dada la medida natural de tipicidad $\mu = |\Psi(q, 0)|^2$ y la separación del universo en subsistemas de interés, es posible asociar los subsistemas con variables aleatorias distribuidas idénticamente con distribución común $|\psi|^2$ que depende de la función de onda efectiva de cada subsistema.

En el capítulo 7 se ponen las posturas en la balanza, estudiando sus propuestas desde una perspectiva que considera los postulados incuestionables como el argumento de tipicidad o la falta de microestructura como elementos sin humildad, en el sentido de que ambas posturas afirman que sus propuestas no tienen cuestionamientos y son lo más naturales o no tienen conspiraciones. Por lo tanto, los autores no tienen empacho alguno al considerar que su propuesta es la más natural y que los cuestionamientos que se hacen entre ellos son críticas sin importancia.

Se concluye que las perspectivas dadas son teorías totalmente distintas en el sentido de que ambas son explicaciones del mismo fenómeno (la regla de Born) que toman elementos teóricos independientes, y por lo tanto no deben verse como partes de la teoría de onda-piloto, sino como teorías distintas en virtud de la humildad sobre sus postulados. Esta humildad debe entenderse como que las críticas

que se hacen los autores son realmente importantes y, como filósofos de la ciencia, tienen la obligación de responder las críticas para que su postura prevalezca. Si es el caso que no pueden responder (como se vió, las críticas para ambos son indiscutibles), deben aceptar que la crítica de su contraparte sí tiene consecuencias para su interpretación, y no hay, desde mi perspectiva, una superioridad conceptual en ninguna de las interpretaciones de la regla de Born.

Este trabajo puede entenderse como una crítica general a la teoría de de Broglie-Bohm. Empero, la interpretación de onda-piloto aporta claridad conceptual y resuelve el problema de la medición justificando de forma precisa el comportamiento de sus elementos ontológicos para llegar a las observaciones. Su único punto débil es el postulado estadístico, que como se estudia en la tesis, es un problema importante para la teoría con dos vías conocidas que pueden elegirse o rechazarse según le convenga a quien estudia este problema. Concluyo que en la teoría de de Broglie-Bohm deben tomarse en serio las críticas que se hacen a las justificaciones sobre la regla de Born. Esto sin abandonar la interpretación, ya que el avance conceptual me parece invaluable, a pesar de tener un postulado que incomoda a quien le estudia.

Capítulo 2

La Mecánica Cuántica y la Interpretación Estándar

2.1 Experimento de Doble Rendija

Una de las herramientas empíricas que se han usado para estudiar a la mecánica cuántica es el experimento de la doble rendija. De este experimento surgen características poco intuitivas de la naturaleza de la materia y de la luz. En este experimento se estudia el patrón de interferencia proyectado en una pantalla como consecuencia de un haz de electrones que incide en una doble rendija. Así, se infiere de este patrón que el comportamiento de los electrones es ondulatorio. Sin embargo, lo que se espera del comportamiento de los electrones desde una perspectiva clásica no es el de un patrón de interferencia por difracción, ya que a los electrones los entendemos como partículas puntuales.

Para modelar este experimento como lo hace Elias Okon en [16], se consideran tres elementos: (1) una fuente de electrones, (2) una pantalla que solo permita el paso de electrones por dos rendijas pequeñas (A y B), y (3) una pantalla con detectores para determinar la distribución de electrones que lograron pasar por las rendijas. El experimento consiste en observar la tendencia de acumulación de los electrones mediante el conteo de electrones que inciden en la pantalla detectora cuando fueron disparados desde la fuente y pasaron a través de las rendijas de la pantalla opaca. Una forma de estudiar este fenómeno es distinguiendo dos casos:

- (a) Los electrones pasan solo por una de las rendijas ya sea A o B. En este caso se observan patrones de distribución como los dos primeros (de izquierda a derecha) de la FIG. 2.1.
- (b) Los electrones pasan por ambas rendijas. En este caso esperaríamos un comportamiento como la tercera distribución (de izquierda a derecha) de la FIG. 2.1. Es decir, no ocurre interferencia por difracción de electrones.

El comportamiento que se observa en el laboratorio es el de la cuarta distribución (de izquierda a

derecha), el cual exhibe una distribución de electrones que corresponde a un patrón de interferencia en la pantalla.

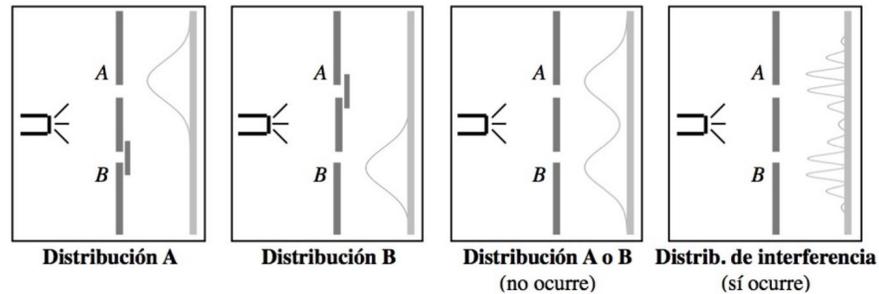


FIG. 2.1: Experimento de doble rendija [16].

Observamos que, cuando solo hay una rendija abierta, los electrones se distribuyen como una función gaussiana sobre la pantalla, dando como resultado una distribución como la de A o B. En cambio, cuando se les da la oportunidad de viajar por la otra rendija, el comportamiento de los electrones cambia y sucede que se tienen lugares en la pantalla donde ya no llegan electrones, i.e., hay interferencia destructiva en ciertas regiones, y constructiva en otras, dando como resultado un patrón de interferencia. Esto sucede incluso cuando los electrones son disparados uno por uno, sin importar la frecuencia con la que son disparados.

No se puede afirmar que algún electrón se va por una de las dos rendijas ya que esto resultaría en una distribución sin interferencia, lo cual, empíricamente no sucede. La alternativa de que el electrón tome ambos caminos a la vez es imposible, ya que las detecciones en la pantalla suceden en un solo punto y todas de la misma intensidad. Es decir, lo que se detecta en la pantalla son electrones puntuales; no se detectan fracciones de electrones en lugares distintos de forma simultánea. Por otro lado, si se colocan detectores en cada una de las rendijas para saber el camino que toma cada electrón antes de llegar a la pantalla detectora, resulta que ambos detectores nunca se activan simultáneamente. Algo que es importante mencionar es que al colocar detectores en las rendijas A o B, el patrón de interferencia desaparece. Esto quiere decir que las mediciones alteran al sistema en consideración.

Por último, la forma en que este fenómeno se entiende es mediante la *superposición*, i.e., cuando se da la posibilidad a un electrón (o cualquier partícula cuántica) de viajar por más de un camino, el electrón se encuentra en un estado de *superposición*, por lo que no tiene una trayectoria definida. En la interpretación estándar, la *superposición* es necesaria para describir al electrón, con esto al momento de llegar a la pantalla, el estado del electrón colapsará eigenestado, por lo que dejará de estar en superposición y explicar el hecho de que se tiene una sola partícula (completa y no dividida) en la pantalla del experimento.

2.2 Interpretación Estándar de la Mecánica Cuántica

Con esta evidencia teórico-experimental, además de la precisión con que se hacen pruebas empíricas de la teoría, la mecánica cuántica consiguió colocarse como una de las teorías más importantes del siglo XX. Así, los científicos de la época recurrieron a ella con más seguridad, dando lugar a la interpretación estándar de la mecánica cuántica.

Para tener mayor claridad de lo que se considera como mecánica cuántica estándar, usaré el trabajo de Elias Okon [16] y el de David Albert [1] en donde describen cinco principios de la mecánica cuántica:

- (1) Estados físicos. Las situaciones físicas, i.e., los estados físicos de las cosas, están representados por vectores. Se llaman vectores de estado. Cada sistema físico, es decir, cada objeto físico y cada colección de dichos objetos, está asociado con algún espacio vectorial en particular, o espacio de Hilbert.
- (2) Propiedades medibles. Las propiedades medibles de los sistemas físicos (conocidas como observables en la literatura de la teoría) son representadas por operadores lineales y hermíticos (operadores autoadjuntos que cumplen $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$) que actúan sobre los espacios vectoriales asociados con los sistemas físicos. Elias Okon hace notar la relación entre los operadores (véase [16]), que representan propiedades, y los valores de dichas propiedades en los posibles estados del sistema, por medio de lo que se conoce como la regla eigenvalor/eigenvector (E/E) que dice lo siguiente:
 - Un estado posee el valor λ de una propiedad representada por el operador \hat{O} si y sólo si ese estado es un eigenvector (vector propio) de \hat{O} con eigenvalor (valor propio) λ .
- (3) Dinámica. Dado el estado de cualquier sistema físico a cierto tiempo arbitrario inicial, y dadas las fuerzas y constricciones a las que está sujeto el sistema físico, en principio, el estado de ese sistema en cualquier momento posterior (es decir, el vector de estado para un tiempo en el futuro) puede calcularse mediante cierta regla matemática. Hay, en otras palabras, una dinámica del vector de estado. Existen leyes deterministas sobre cómo el vector de estado de cualquier sistema dado, sujeto a fuerzas y restricciones dadas, cambia con el tiempo. Esas leyes generalmente se presentan en forma de una ecuación de movimiento, y el nombre de esa ecuación, para sistemas cerrados y no relativistas, es la ecuación de Schrödinger.

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.1)$$

en donde \hat{H} es el operador hamiltoniano, que es hermítico, y $\psi = \psi(x)$ es la función de onda, entendida como el estado proyectado en la base de posiciones $\{|x\rangle\}$, de la forma

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x). \quad (2.2)$$

- (4) La conexión con el experimento (Regla de Born). Sea un sistema cuyo vector de estado es $|\psi\rangle$, y se realiza una medición del valor de la propiedad B en ese sistema, donde los vectores propios del operador de la propiedad B son $|b_i\rangle$, con valores propios b_i (es decir, $B|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle$ para todo i). Según la mecánica cuántica, el resultado de tal medición es una cuestión de probabilidad, y (más particularmente) la mecánica cuántica estipula que la probabilidad de que el resultado de esta medición sea $B = b_j$ es igual a

$$|\langle\psi|b_j\rangle|^2. \quad (2.3)$$

A este postulado se le conoce como la regla de Born. Entonces, el formalismo cuántico, a través de la regla de Born, proporciona dos cosas: i) los posibles resultados de la medición y ii) la probabilidad de obtener alguno de estos posibles resultados cuando se mide. La lista de posibles valores está compuesta por los eigenvalores del operador en cuestión y las probabilidades están dadas por la ec.(2.3).

- (5) Colapso. Sea un estado $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert, y un operador B hermítico. El colapso se define como la siguiente situación: cuando se realiza una medición de la propiedad que representa al operador B sobre el estado del sistema físico $|\psi\rangle$, y el resultado empírico es b_i , entonces el estado del sistema "colapsa" instantáneamente al eigenestado con dicho eigenvalor. Esquemáticamente, esto se ve como:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{medición}} |b_i\rangle. \quad (2.4)$$

Esta dinámica, a diferencia de la dinámica determinista que genera la ecuación de Schrödinger, es discontinua, indeterminista y no lineal. Para hacer compatible a la regla de Born con la regla E/E, es necesario el colapso, ya que la regla de Born requiere que si el valor de alguna propiedad está definido entonces el estado debe ser el eigenvector correspondiente, es decir, debe haber colapso al eigenvector/estado correspondiente. Este postulado también garantiza que las mediciones sean repetibles, es decir, que si medimos dos veces seguidas la misma propiedad (sin perturbar al sistema entre mediciones) entonces obtendremos dos veces el mismo valor.

Estos postulados crearon controversias entre algunos físicos, incluidos Einstein, Bohm y Everett. Lo que ellos proponen es interpretar a la mecánica cuántica de una forma distinta, o en el caso de Einstein,

propone que la mecánica cuántica es una teoría incompleta.

Capítulo 3

Problema de la Medición y Posibles Soluciones

3.1 Problema de la medición

Múltiples interpretaciones de la mecánica cuántica, provienen del problema de la medición, que se puede entender como la ambigüedad que tiene la teoría cuántica en la interpretación estándar sobre lo que es una medición. Anteriormente, en los postulados de la mecánica cuántica, encontramos dos leyes de evolución, la primera determinista y bien definida en todo el espacio y el tiempo, i.e., la ecuación de Schrödinger, y la otra, una evolución indeterminista, la cual se refiere al colapso de la función de onda que produce una discontinuidad en la evolución del estado en el momento de hacer una medición. En la interpretación estándar, estos dos postulados no son contradictorios, ya que cada uno tiene un contexto diferente relativo a la medición de las propiedades de un sistema. Dicho de otro modo [16]:

- 1) El estado físico evoluciona con la ecuación de Schrödinger cuando no hay una medición.
- 2) Cuando hay una medición, el estado colapsa a uno de los valores posibles.

Sin embargo, hay un problema en esta interpretación: no hay una definición precisa de lo que significa medir en el contexto de la teoría. Por lo que separar la dinámica en evolución determinista e indeterminista, con base en lo que consideramos medir, parece insuficiente e inadecuado, sobretodo cuando queremos entender el proceso físico sin ambigüedad.

Una explicación formal puede darse de acuerdo a la formulación de Maudlin de 1995 para el problema de la medición [12]. Maudlin dice que el problema se origina de la inconsistencia de los siguientes puntos

- C1 La función de onda de un sistema físico es una descripción completa del sistema;
- C2 La función de onda siempre evoluciona de acuerdo con una ecuación dinámica lineal, por ejemplo, la ecuación de Schrödinger;

C3 Cada medición tiene un resultado definido.[9][sec. 8.1.1, p. 97]

Para mostrar la inconsistencia usemos un ejemplo. Sea un aparato que mide el spin de un electrón en la dirección z . Si se alimenta al detector con un electrón en el eigenestado $|z - up\rangle_e$, se tiene esquemáticamente lo siguiente

$$|z - up\rangle_e |ready\rangle_d \longrightarrow |z - up\rangle_e |z - up\rangle_d.$$

Si se alimenta al detector con un electrón en el eigenestado $|z - down\rangle_e$, entonces se observa

$$|z - down\rangle_e |ready\rangle_d \longrightarrow |z - down\rangle_e |z - down\rangle_d$$

el problema surge cuando nos preguntamos qué pasa cuando se alimenta al detector con un electrón en una eigenestado en una dirección diferente como $|x - up\rangle_e$. Es decir, ¿hacia dónde evoluciona el estado

$$|x - up\rangle_e |ready\rangle_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z - up\rangle_e + |z - down\rangle_e) |ready\rangle_d?$$

Si C2 (evolución lineal) es cierta, entonces el estado evoluciona a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|z - up\rangle_e |z - up\rangle_d + |z - down\rangle_e |z - down\rangle_d).$$

Luego, si C1 (completez) es cierta, entonces este estado tiene toda la información sobre el aparato y el electrón. No obstante, esto no produce un resultado definido en el aparato de medición, ya que no hay información en este estado para que el aparato apunte a un estado definido. Por lo tanto, si C1 y C2 son ciertas entonces no hay resultados definidos, es decir, son incongruentes con el tercer punto C3.

Este problema puede ser abordado dando interpretaciones alternas a la interpretación estándar. A continuación, se esbozarán tres interpretaciones que se han propuesto, y resuelven el problema de la medición.

3.2 Interpretaciones Alternas

Para dar solución al problema de la medición, se han propuesto varias alternativas, entre ellas están la interpretación de muchos mundos de Hugh Everett, la interpretación de onda-piloto de de Broglie-Bohm, y la interpretación de colapso objetivo.

Se puede ver que existen tres enfoques básicos para resolver el problema de medición, como se vio en la sección anterior. El primer enfoque es negar la afirmación (C1), y agregar algunas variables adicionales con la dinámica correspondiente para explicar los resultados de medición definidos. Un

ejemplo conocido es la teoría de de Broglie-Bohm [2]. El segundo enfoque es negar (C2) y revisar la ecuación de Schrodinger agregando ciertos términos de evolución no lineal y estocástica para explicar los resultados de una medición. Tales teorías se llaman teorías del colapso [6], [17]. El tercer enfoque es negar (C3) y asumir la existencia de muchos mundos igualmente reales para acomodar todos los resultados posibles de las mediciones [8].

El primer enfoque (negar C1) es la interpretación de de Broglie-Bohm que es una teoría totalmente determinista. En esta interpretación, la ecuación de Schrödinger solo es parte de la dinámica, a saber, solo dicta la dinámica de la función de onda. Lo que complementa a esta ecuación es asumir la existencia de partículas puntuales, las cuales siguen una dinámica descrita por la llamada ecuación guía. En esta teoría no es necesario definir observadores ni mediciones ya que hacer una medición supone únicamente ubicar una partícula en el espacio y el tiempo [14]. Es común que se les llame a las partículas de esta teoría "partículas bohmianas".

En el segundo enfoque (negar C2) surgen las interpretaciones de colapso objetivo. Como pasa en la interpretación de onda-piloto, no es necesario hacer referencia a las mediciones ni a observadores. En esta interpretación lo que produce los resultados experimentales, o colapsos, es un elemento adicional en la ecuación dinámica, es decir, en esta interpretación, la ecuación de Schrödinger es modificada para que los colapsos se den a un nivel microscópico y evitar la superposición al nivel macroscópico [6], [17].

En el tercer enfoque (negar C3) surgen interpretaciones como la interpretación de Hugh Everett [8]. Es una teoría que se conoce como interpretación de universos múltiples. La interpretación de los universos múltiples asocia un estado cuántico puro con múltiples eigenestados/vectores posibles. Cuando un observador mide no se produce un cambio en el estado, i.e., el sistema no pasa de ser determinista a ser indeterminista (no hay colapso de la función de onda). Lo que se interpreta es que cada eigenestado corresponde a un universo diferente, y cada observador que está en cada uno de estos universos mide el estado propio de su universo. De este modo, al medir, no se produce un colapso y siempre se tiene una evolución determinista que está codificada por la ecuación de Schrödinger [9][sec. 8.1.2, p. 99].

Capítulo 4

Teoría de Onda-Piloto de de Broglie-Bohm

Algunos problemas que surgen en la interpretación estándar se deben al problema de la medición que vimos, por eso, una alternativa es juzgar a la interpretación estándar como incompleta. La mecánica de de Broglie-Bohm se propone completar a la mecánica cuántica. A grandes rasgos, la interpretación de onda-piloto estudia el movimiento de una partícula a la que se le asocian efectos cuánticos. Una característica importante es que las trayectorias de las partículas están bien definidas en todo momento. El hecho de que se tengan características estadísticas en las mediciones, se debe a que en principio, hay limitaciones epistémicas de por medio (no se conoce todo acerca de las partículas a un nivel experimental, como es el caso de los estados iniciales de las partículas).

Para comenzar, se describen a continuación los principios de la teoría de de Broglie-Bohm, y después de esto, se desarrolla el formalismo necesario para entender la teoría.

4.1 Postulados de la interpretación de onda-piloto

La teoría de de Broglie-Bohm consta de dos elementos: las partículas y las funciones de onda. En esta interpretación (onda-piloto) el movimiento de las partículas está dado por la ecuación guía, la cual está construida a partir de la función de onda. De forma semejante a mecánica cuántica estándar, las funciones de onda se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger. Así pues, la teoría se sostiene de cuatro principios:

1. Descripción de estados. El estado de un sistema físico a un tiempo t está dado por la función de onda $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \psi(x, t)$, y las posiciones de las partículas $X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_n(t)$.
2. Dinámica de la función de onda. La dinámica de la función de onda está dada por la ecuación de Schrödinger,

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi. \quad (4.1)$$

3. Dinámica de las partículas. Esta dinámica está dada por la ecuación guía,

$$\frac{dX_j(t)}{dt} = \frac{\hbar}{m_j} \operatorname{Im} \left[\frac{\nabla_j \psi}{\psi} \right]_{x=X(t)}, \quad (4.2)$$

en donde, el subíndice j denota a la partícula j , e $\operatorname{Im}[x]$ es la parte imaginaria de x . Entonces, se tienen n ecuaciones guía para un sistema de n partículas. Un detalle importante que debe notarse es que al restringir la partícula a moverse en $x = X(t)$, se restringe a la ecuación guía al movimiento de una sola partícula que se mueve en el espacio de configuraciones. Si no se usa esta restricción no es posible estudiar el movimiento de la partícula Bohmiana, ya que la variable x es un parámetro libre del espacio de configuraciones y la variable $X(t)$ es una curva en el espacio de configuraciones.

4. Postulado estadístico. A cierto tiempo inicial t_0 , las partículas están distribuidas en el espacio de acuerdo con $|\psi_0|^2$. Una forma de interpretar esto es a partir de nuestras limitaciones epistémicas, i.e., no se conocen las posiciones iniciales de las partículas, de otro modo, se conocerían las posiciones y velocidades de las partículas en la teoría. Como esto último no es el caso, dado que en los experimentos de fenómenos cuánticos no se miden posiciones sino distribuciones y probabilidades de los estados predichos por la teoría, es necesario asumir nuestra ignorancia y limitar nuestras ambiciones epistemológicas. El postulado estadístico es un axioma que no busca el conocimiento de cómo de hecho son las condiciones iniciales; es una herramienta que permite hacer conexiones con los experimentos, postulando cómo pudieron ser escogidas las condiciones iniciales, demarcando nuestros alcances como científicos y filósofos de la ciencia.

4.2 Desarrollo de la teoría

En primer lugar, tratemos de interpretar los postulados de la teoría con el objetivo de entender la física que hay en ellos. Los primeros tres postulados de la teoría nos dicen dos cosas:

- Lo que hay en el universo, y
- cómo se comportan los constituyentes del universo.

Hagamos una analogía con la propuesta de de Broglie, es decir,

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k, \quad (4.3)$$

en donde p es el momento de la partícula, λ y k son, respectivamente, la longitud de onda y el número de onda asociados, y h y \hbar son la constante de Planck y la misma constante dividida por 2π . Entonces,

para una onda plana $\psi \sim e^{ikx}$, la velocidad de la partícula está dada por

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{\hbar}{m}k. \quad (4.4)$$

Esta analogía es una simplificación de cómo funciona la teoría de onda piloto. Las partículas con momento p se mueven con una onda que tiene número de onda k . La onda guía a la partícula.

El postulado estadístico no dice nada sobre cómo se mueven los objetos ni lo que son. El postulado estadístico es una restricción para los estados iniciales de los constituyentes del universo. Este postulado es necesario para conectar la teoría con los experimentos. Aunque este postulado genera las mismas predicciones que la mecánica cuántica estándar, parece extraño que la teoría tenga, como ley fundamental, una restricción sobre los estados particulares de los objetos de la teoría. El objetivo de este escrito es poner en duda el postulado estadístico y revisar las propuestas que buscan explicar mejor la relación de la regla de Born con la teoría de onda-piloto.

La teoría puede ser vista como una generalización del modelo de de Broglie.¹ Para entender un poco esta relación, consideremos la función de onda ψ , que es solución a la ecuación de Schrödinger, y por lo tanto es un número complejo que puede escribirse en la forma polar

$$\psi = R(x, t)e^{iS(x, t)}, \quad (4.5)$$

con $R(x, t)$ la amplitud de la onda, y $S(x, t)$ la fase de la onda. Luego, la velocidad de la partícula está descrita por la ecuación

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\hbar}{m} \left. \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right|_{x=X(t)}, \quad (4.6)$$

la cual puede ser escrita en términos de la función completa,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{\psi} \Big|_{x=X(t)}, \quad (4.7)$$

Para generalizar lo anterior al caso tridimensional y n -dimensional, solo basta cambiar las derivadas parciales por gradientes, como se ve en la ec.(4.2). Esto se prueba con la independencia lineal de los parámetros x , y y z , y $\{x_i\}$ para el caso de n partículas, donde x_i es la coordenada i del vector x $3n$ -dimensional que describe a las partículas en el espacio de configuraciones.

¹La generalización de la teoría a un número arbitrario de partículas resulta altamente no trivial, y dado que los objetivos de este escrito son otros, no se desarrollará este formalismo. Para más detalle ver [3]

4.2.1 La relación entre la probabilidad y la densidad $|\Psi|^2$

Para entender la relación entre la distribución entre las partículas Bohmianas y la densidad $|\Psi|^2$ es necesario hacer un análisis más profundo a la ecuación de Schrödinger para llegar a una ecuación de continuidad para la densidad $|\Psi|^2$. Con esto, relacionar la densidad de probabilidad ρ para las partículas Bohmianas y la densidad $|\Psi|^2$ derivada de la ecuación de Schrödinger.

Comenzamos operando con la ecuación de Schrödinger para obtener la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi \right) \right], \quad (4.8)$$

en el caso de $3n$ -dimensional, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = -\nabla \cdot \left[\frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \right], \quad (4.9)$$

la cual es una ecuación de continuidad de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla \cdot j, \quad (4.10)$$

de este modo podemos identificar, tanto la corriente j en términos de la función de onda ψ , como la densidad ρ , de la forma

$$j_{Schr} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi), \quad (4.11)$$

$$\rho_{Schr} = |\psi|^2, \quad (4.12)$$

respectivamente, y donde el subíndice *Schr* denota que esta ecuación es una consecuencia directa de la ecuación de Schrödinger (para no confundir estas densidades de la función de onda con las densidades de probabilidad que pueden asociarse a las posiciones de las partículas en la interpretación de de Broglie-Bohm).

Estas dos últimas ecuaciones son comunes para esta interpretación y para la interpretación estándar. Sin embargo, en la interpretación estándar, la ecuación (4.11) es una forma de explicar la conservación de la probabilidad cuando no hay partículas puntuales en la teoría, sino solo cuando hay funciones de onda y colapsos. La ec.(4.12) es la regla de Born en la interpretación estándar. Como se expuso anteriormente, esta es la probabilidad asociada a las posibles mediciones de un sistema físico.

Supongamos que podemos hacer una analogía con los resultados de la ecuación de continuidad en electromagnetismo, en donde la densidad de corriente dada por $j = \rho(x, t)v$, puede corresponderse con una densidad de corriente para las partículas Bohmianas (es decir, las partículas que siguen la dinámica descrita por la ecuación guía ec.(4.2)). Por otro lado, en la interpretación de onda-piloto,

sabemos que las partículas siempre tienen bien definidas sus posiciones y momentos asociados, dados por la ec.(2.1) y la ec.(4.2). A pesar de estos aspectos deterministas de la teoría que prometen predecir con exactitud las posiciones y momentos, hay limitaciones epistémicas respecto a las condiciones iniciales, pues usualmente no las conocemos. Así, una distribución de probabilidad inicial para las posiciones de las partículas puede ayudar a hacer predicciones empíricas y contrastar con la teoría. Suponiendo que hay conservación de probabilidad en el sistema (así como hay conservación de carga en electromagnetismo, siguiendo la analogía), es posible usar una ecuación de continuidad para la densidad de la probabilidad de las posiciones de las partículas en esta interpretación (así, la analogía con la teoría electromagnética se da por la conservación de la densidad de carga, en este caso la densidad es de probabilidad). Con esto llegamos a la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = -\nabla \cdot (\rho(x, t)v). \quad (4.13)$$

Esta ecuación puede ayudarnos a relacionar la teoría con nuestras mediciones, que en general, son mediciones que promueven resultados estadísticos. El aspecto más importante de esta ecuación para este escrito es el hecho de que, en principio, la distribución inicial $\rho(x, t = 0)$ puede ser cualquier función de x . Sin embargo, algo que se puede deducir de los resultados empíricos relacionados a la mecánica cuántica, es que la distribución parece ser siempre la regla de Born, i.e., $\rho(x, 0) = \rho_{Schr}(x, 0) = |\psi_0|^2$. De hecho, si se usa esta distribución (con $v = dX(t)/dt|_{X(t)=x}$), la ec.(4.13) se convierte en la ec.(4.9). La suposición de que la probabilidad inicial asociada a las posiciones de las partículas sea $\rho_{Schr} = |\psi(x, t_0)|^2$, se conoce como postulado estadístico. Otra característica importante de la teoría de Bohm que cabe mencionar, es el hecho de que tanto $|\psi|^2$ como la distribución de las partículas, ρ , evolucionan de la misma forma. Dado esto, es verificable que si a cualquier tiempo inicial, e.g. $t = 0$, $\rho(x, 0) = |\psi(x, 0)|^2$, entonces la distribución ρ y la norma cuadrada de la función de onda $|\psi|^2$, serán iguales siempre. A esta propiedad de la distribución se le conoce como equivarianza.

Hay varias perspectivas sobre si es posible considerar al postulado estadístico como un principio fundamental de la interpretación de de Broglie-Bohm, o por el contrario, es una consecuencia de leyes más fundamentales. Más adelante, se estudia una perspectiva que propone que el postulado estadístico se debe a un estado de equilibrio, como consecuencia de procesos estadísticos y, por lo tanto, el postulado estadístico no es un principio fundamental.

4.3 Mediciones en la teoría de onda-piloto

La teoría de onda-piloto no tiene un problema de la medición, ya que en esta teoría medir significa especificar la posición de una partícula en el espacio de configuraciones. De hecho la teoría se amplió

desde la mecánica cuántica estándar para dar cuenta de las mediciones. No obstante, podemos preguntarnos sobre mediciones de energía, spin, momento, momento angular, etc. Para dar cuenta de estas mediciones la teoría no tiene problemas. A continuación se da un modelo de juguete para entender cómo funcionan las mediciones de cantidades que no sean la posición.

4.3.1 Modelo para mediciones

Supongamos que queremos medir la energía de una partícula unidimensional de masa m en una caja cerrada que se ubica en $[-a, a]$. Para este caso, es posible caracterizar al hamiltoniano como el de una partícula libre

$$H_x(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (4.14)$$

y la función de onda con las siguientes condiciones de frontera

$$\psi(-a) = \psi(a) = 0. \quad (4.15)$$

Usando la ecuación de Schrödinger se obtiene una solución discretizada para la energía, o mejor dicho, se obtienen los eigenvalores del hamiltoniano: E_n con $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que haremos mediciones de estos eigenestados de energía, es necesario modelar un aparato de medición que nos permita relacionar la teoría con los experimentos. Para ello utilizaremos un nuevo hamiltoniano que caracterice tanto los estados de energía como la posición del indicador del aparato de medición. Por un lado, ya tenemos una forma de caracterizar el hamiltoniano de la partícula de interés, por otro lado, es necesario caracterizar el operador de energía para la posición de la aguja en el aparato de medición:

$$H_y = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4.16)$$

Esta ecuación de onda forma un paquete con forma Gaussiana. Dado que las partículas de las que está compuesto el aparato son muchas, la masa M debe ser muy grande, por lo que

$$H_y \rightarrow 0. \quad (4.17)$$

Entonces, lo más importante para caracterizar este sistema cuántico de medición es el hamiltoniano de interacción. Este hamiltoniano debe tener la información de los eigenestados de energía y de la posición de la aguja del aparato. Dado lo complejo del sistema, este término de interacción puede ser tan complicado como se desee. Sin embargo, podemos proponer un hamiltoniano adecuado que nos ayude en nuestra labor. Para esto notamos que lo que nos importa es que: si una partícula está en cierto eigenvector de energía ψ_n , entonces la aguja debe moverse a una posición proporcional a E_n .

Con esto, se propone el hamiltoniano de interacción

$$H_{int} = \lambda H_x p_y = -i\hbar\lambda H_x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.18)$$

Donde λ es una constante que modula la intensidad de interacción y p_y es el operador de momento.

Con esto, se define un hamiltoniano total como

$$H_T = H_x + H_y + H_{int} = H_x + H_y - i\hbar\lambda H_x \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.19)$$

con λ muy grande, los demás términos del hamiltoniano total pueden desaparecer sin comprometer al resultado.

Probemos este hamiltoniano de interacción. Supongamos que inicialmente el sistema partícula/aguja está en un eigenestado de energía, así la función de onda se puede escribir como

$$\Psi(x, y, 0) = \psi_n(x)\phi(y). \quad (4.20)$$

Entonces, la ecuación de Schrödinger se ve como

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar\lambda H_x \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (4.21)$$

Se observa que las dependencias t y y de Ψ están acopladas por la ecuación, mientras que la dependencia de x queda acoplada. Así, es posible asumir que $\Psi(x, y, t)$ es proporcional a $\psi_n(x)$. Entonces la ecuación (4.21) se simplifica a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\lambda E_n \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (4.22)$$

se sigue que la solución es:

$$\Psi(x, y, t) = \psi_n(x)\phi(y - \lambda E_n t). \quad (4.23)$$

Si la medición termina al tiempo $t = T$, entonces la función de onda se ve como

$$\Psi(x, y, T) = \psi_n(x)\phi(y - \lambda E_n T). \quad (4.24)$$

Esto se entiende como que: la partícula en la caja unidimensional se mantiene en el eigenestado n -ésimo, y la función de onda (que tiene forma Gaussiana) de la aguja del aparato cambia su centro a la derecha una distancia $\lambda E_n T$.

En mecánica cuántica estándar esto ayuda a entender una medición, entendiendo que la posición de la aguja está un poco difusa. Pero ¿qué pasa si no tenemos un estado inicial propio (o eigenestado inicial)? Es decir, ¿qué pasa con la siguiente situación?

Sea la función de onda inicial de un sistema partícula/aguja de la forma

$$\Psi(x, y, 0) = (\sum_i c_i \psi_i(x)) \phi(y). \quad (4.25)$$

La función de onda al final de la medición (en $t = T$) se ve como

$$\Psi(x, y, T) = \sum_i c_i \psi_i(x) \phi(y - \lambda E_i T). \quad (4.26)$$

Esto representa una superposición enredada de muchos estados, cada uno de los cuales tiene una energía bien definida, y la posición de la aguja un poco difusa pero centrada en la correspondiente posición de la medición de energía. Este enredamiento produce un problema en la interpretación estándar, ya que en esta situación la partícula no termina en un eigenestado de energía. Peor, la posición de la aguja no está localizada en ninguno de los centros correspondientes a las mediciones de energía.

En la interpretación de onda-piloto esto no es problemático. En el sentido de que la función de onda sí es parte crucial de la teoría, pero no es ella sola la que explica el comportamiento completo del sistema físico. Están, además, las posiciones actuales $X(t)$ y $Y(t)$, de la partícula en la caja y de la aguja, respectivamente.

Hagamos un análisis cualitativo de lo que sucede en la teoría. La posición $X(t)$ de la partícula en la caja evoluciona de acuerdo a la ecuación guía:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{j_x}{|\Psi|^2}, \quad (4.27)$$

donde j_x es la componente x de la corriente de probabilidad cuántica asociada a este sistema. Análogamente, la posición $Y(t)$ de la aguja avoluciona como:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{j_y}{|\Psi|^2}, \quad (4.28)$$

donde j_y es la componente y de la corriente cuántica del sistema. Hasta cierto punto no es necesario conocer la forma exacta de las trayectorias, ya que la propiedad de equivarianza nos asegura que si comenzamos con posiciones iniciales $X(0)$ y $Y(0)$ distribuidas aleatoriamente como $|\Psi(x, y, 0)|^2$, en el futuro $X(t)$ y $Y(t)$ estarán distribuidas como $|\Psi(x, y, t)|^2$. Y así, las posiciones $X(t)$ y $Y(t)$ serán aleatorias y estarán en el soporte de $\Psi(x, y, t)$.

Para simplificar este análisis cualitativo es posible visualizar el comportamiento del sistema en la FIG. 4.1 y la FIG 4.2. La función de onda en $t = 0$ tiene soporte entre $x = 0$ y $x = L$, y en $y \approx 0$, esto se visualiza en la FIG. 4.1. En la medida en la que avanza el tiempo, los términos superpuestos en la función de onda $\Psi(x, y, t)$ evolucionan en la dirección y por distintas cantidades, por lo que después

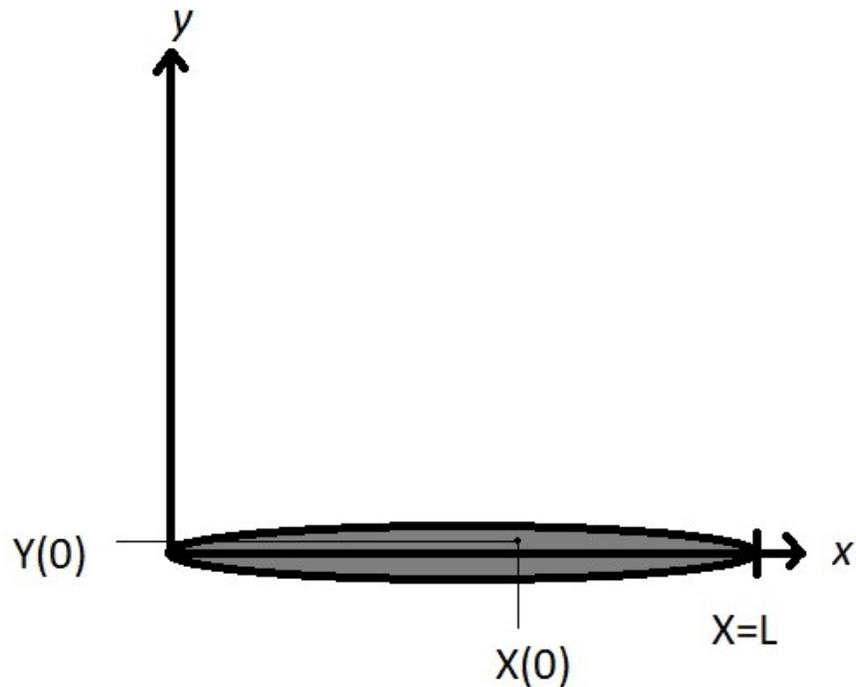


FIG. 4.1: La región gris demarca el soporte de $\Psi(x, y, 0)$, mientras $X(0)$ e $Y(0)$ están determinados dentro de esta región.

de cierto tiempo, el soporte de $\Psi(x, y, t)$ se vuelve un conjunto discreto de islas que no se intersectan en el espacio de configuraciones como se ilustra en la FIG. 4.2. Pero las partículas tienen posiciones definidas $X(t)$ y $Y(t)$ las cuales se entienden como definiendo el punto de la configuración actual que traza algún tipo de trayectoria en el espacio de configuraciones. La trayectoria exacta estará, en general, bastante retorcida y será muy complicada. Las múltiples islas de la función de onda se deslizan entre sí y existe un patrón de interferencia complicado, algo así como el que hace que las trayectorias de las partículas se doblen de un lado a otro en el experimento de la doble rendija. Pero a medida que las islas dejan de superponerse, las cosas se calman y el punto de configuración actual $X(t), Y(t)$ se encuentra en una u otra de las islas. Y así, el puntero tiene una posición específica posterior a la interacción $Y(t)$ que es aproximadamente $\lambda E_1 t$, o λE_2 , o λE_3 , etc. Por lo tanto, al final del experimento, la posición del puntero no está difuso, indefinido o superpuesto. El puntero tiene una posición definida que corresponde exactamente a uno de los valores de energía posibles.

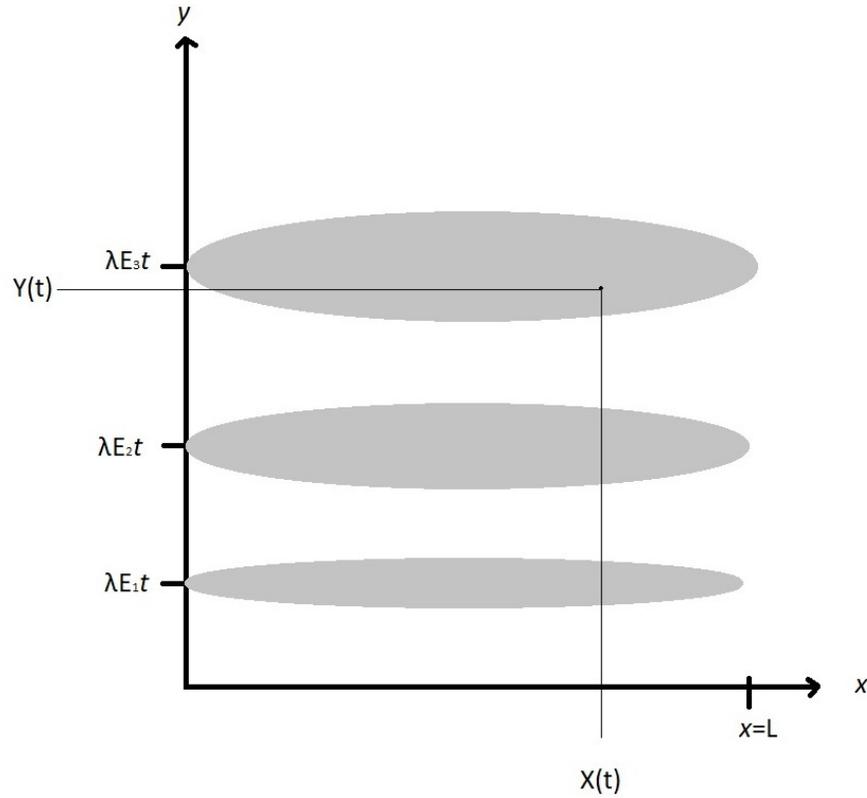


FIG. 4.2: La presencia simultánea de estas islas, en la interpretación estándar se entiende como el problema de la medición. No obstante, en la interpretación de onda-piloto, el resultado de la medición no son estas islas, sino la posición final exacta de la aguja: $Y(t)$. Este resultado será algún valor (aleatorio, pero perfectamente localizable) indicado aquí por la posición de la aguja $Y(t)$ que es una coordenada de la configuración (X, Y) . Para este caso, la configuración $(X(t), Y(t))$ está dentro de la rama $n = 3$ del soporte de $\Psi(x, y, t)$, es decir, que la posición de la aguja es aproximadamente $\lambda E_3 t$, y se dice que la medición de la energía del sistema es E_3 . Hay que notar que el resultado de la medición de energía pudo ser diferente si la configuración inicial $(X(0), Y(0))$ fuera otra.

4.3.2 La regla de Born en esquemas de medición

Para relacionar la probabilidad de medición con la regla de Born, hay que notar lo siguiente: la regla de Born se aplica a las posiciones de las partículas mediante la función de onda. Si queremos la probabilidad de obtener alguna medición de la energía o cualquier otra observable tenemos que tomar la integral de $|\Psi(x, y, t)|^2$ a lo largo y ancho de la rama n -ésima que produce el operador de interés (i.e., la n -ésima isla del soporte de la función de onda). Con algunos cálculos se llega a que esa integral se ve como

$$P_{n\text{-branch}}(x, y, t) = \int_{n\text{-branch}} |\Psi(x, y, t)|^2 = |c_n|^2. \quad (4.29)$$

La primera igualdad es la regla de Born que se deriva de los postulados, la segunda igualdad surge

de calcular la integral de la función de onda sobre la n -ésima rama del soporte de $\Psi(x, y, t)$. Este resultado es el que se espera en mecánica cuántica estándar. Entonces, con este análisis cualitativo, hemos visto que la teoría de de Broglie-Bohm hace las misma predicciones que la mecánica cuántica estándar. En el caso de mecánica cuántica estándar existe la necesidad de incluir un agente externo que haga la medición, o dicho de otro modo, haga de elemento necesario para que ocurra el colapso. En la teoría de onda-piloto, se incluye todo para explicar la medición, es decir, la medición no es problemática.

4.4 Doble rendija en el formalismo de onda-piloto

Para entender mejor lo que sucede en esta interpretación se aborda el experimento esquematizado en la sección 2.1., el cual, como se vio, requiere de la superposición cuántica para que tenga sentido en la interpretación estándar. En el caso de la interpretación de onda-piloto, no es necesario que la partícula tenga un estado de superposición.

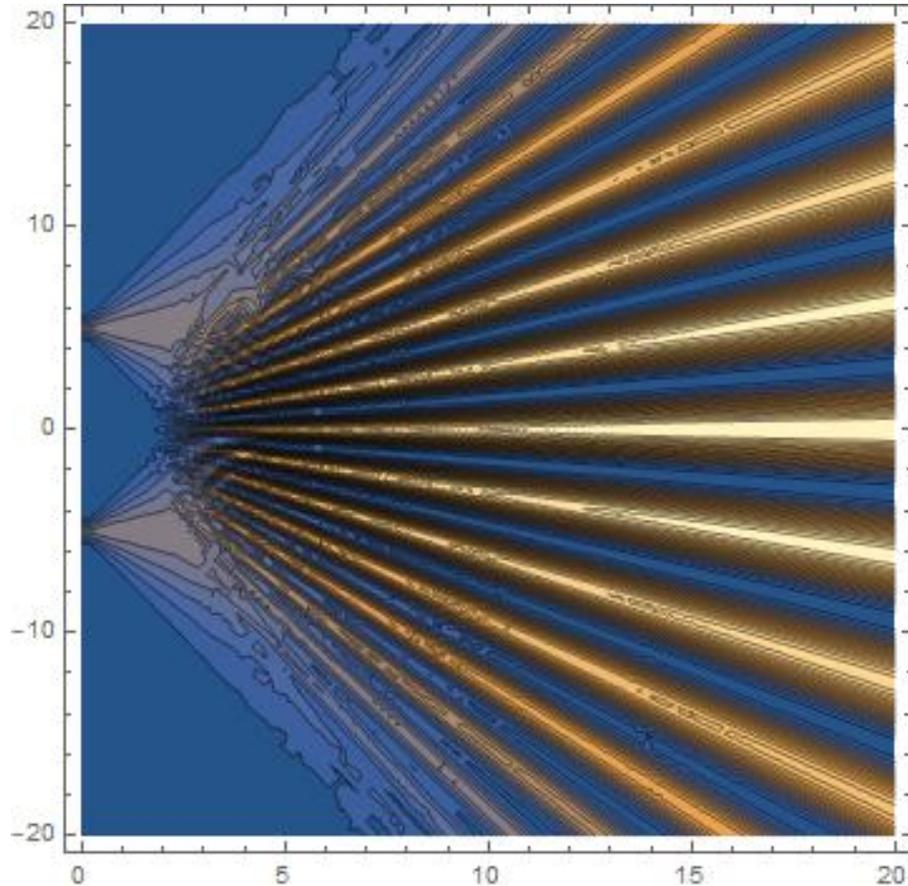


FIG. 4.3: Experimento de doble rendija. En este arreglo las rendijas se encuentran en $x_B = -5$ y $x_A = 5$ (en el eje vertical) definiendo así un diagrama espacio-temporal de la densidad ρ_{Sch} .

Se espera que las funciones de onda que atraviesan las rendijas A y B se difracten como una distribución normal (o gaussiana), de este modo se puede escribir de forma analítica la función de onda que se difracta en cada rendija, ubicando la rendija A en el punto $x = a$ y la rendija B en el punto $x = -a$. De modo que, para el paquete que sale de la rendija A se tiene

$$\psi_A(x, t) = N(t)e^{-\frac{(x-a)^2}{4(\sigma^2 + i\hbar t/2m)}}, \quad (4.30)$$

mientras que para la rendija B , se tiene

$$\psi_B(x, t) = N(t)e^{-\frac{(x+a)^2}{4(\sigma^2\hbar t/2m)}}. \quad (4.31)$$

Superponiendo estas dos funciones de onda se llega a la forma

$$\psi(x, t) = N(t) \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{4(\sigma^2\hbar t/2m)}} + e^{-\frac{(x+a)^2}{4(\sigma^2\hbar t/2m)}} \right], \quad (4.32)$$

se observa que obtener la forma polar de forma analítica se torna problemático, por lo que para obtener una idea de lo que sucede en este caso, se puede graficar el perfil de esta densidad de Schrödinger $|\psi|^2$ como se ve en la FIG. 4.3.

En concordancia con el postulado estadístico, las densidades ρ_{Sch} son iguales a las densidades de probabilidad para las partículas en la teoría. De este modo, se interpreta que las zonas de mayor densidad ρ_{Sch} son zonas con un mayor número de trayectorias de las partículas.

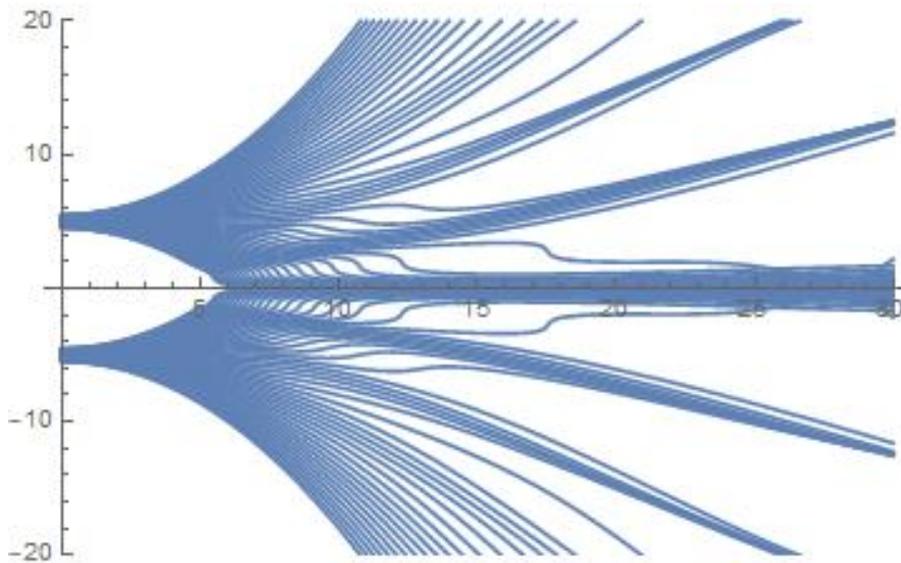


FIG. 4.4: Experimento de doble rendija. En este arreglo las rendijas se encuentra en $x_B = -5$ y $x_A = 5$ (en el eje vertical), cada línea representa la trayectoria espacio-temporal de una sola partícula.

Continuando con el análisis, a partir de soluciones numéricas a la ecuación guía, tomando la función de onda de la ec.(4.32) se contruye una ecuación diferencial que es posible graficar con sus soluciones numéricas, obteniendo trayectorias para cada partícula con su respectiva condición inicial como se muestra en la FIG. 4.4.

Es posible entender a la mecánica cuántica como una teoría completa que no es problemática con la noción de medición, ya que medir en este contexto significa verificar las trayectorias predichas por la teoría. No obstante, de manera generalizada no se conocen las condiciones iniciales de las partículas, por lo que es necesario hacer predicciones probabilísticas a partir del postulado estadístico, esto

sin olvidar que las limitaciones epistémicas son las causantes de que no sea posible determinar las trayectorias de cada una de las partículas de la teoría. A pesar de esta cota en la descripción de las trayectorias, hay claridad a nivel ontológico. A diferencia de la mecánica cuántica estándar en la que era necesario tener una medición como agente externo que produce el colapso, en la teoría de onda-piloto no se necesitaron agentes externos para interpretar los resultados estadísticos predichos. Aunque la teoría tiene mayor poder explicativo a nivel fundamental, hay discusiones sobre el postulado estadístico que son objeto de este escrito.

Capítulo 5

Teorema-H subcuántico

En esta sección se analiza la propuesta de Antony Valentini que se encuentra en el artículo [19], la cual busca relacionar tres principios desarrollando una mecánica estadística basada en la formulación de onda-piloto de la mecánica cuántica. Estos principios, son principios de imposibilidad que están íntimamente ligados al concepto de información y son:

1. La ausencia de señales instantáneas (signal-locality).
2. Principio de incertidumbre.
3. Ley estadística del incremento de entropía.

Para Valentini, los primeros dos principios pueden ser interpretados como una consecuencia estadística de una versión subcuántica (de variables ocultas) del tercer principio, en este trabajo no se abordará el proyecto completo de Valentini, nos centraremos únicamente en lo referente a la ley estadística del incremento de entropía. En la sección anterior se mencionó que la densidad de probabilidad de las partículas es independiente a priori de $|\psi|^2$. Además, en [2] Bohm explica que la regla de Born $\rho \equiv |\psi|^2$ es condición suficiente para que el principio de incertidumbre se satisfaga. De este modo, si Valentini pretende explicar el principio de incertidumbre desde la ley estadística de la entropía, entonces es menester dar una justificación adecuada de la regla de Born. Esto último es en lo que se centra este trabajo, se busca analizar si es necesaria una justificación al postulado estadístico y proveer al lector una mejor perspectiva de esta discusión. La relevancia de este análisis es obvia cuando se quieren estudiar los fundamentos de la teoría de onda-piloto, en busca de una alternativa a la interpretación estándar de la mecánica cuántica que sea clara en sus principios.

Valentini promete clarificar las cuestiones sobre la regla de Born desarrollando un análogo de la mecánica estadística clásica que hace Gibbs sobre ensambles desde la perspectiva de la teoría de onda-piloto de de Broglie-Bohm. Para entender mejor lo que sugiere Valentini, se debe entender cada

aspecto de su propuesta. Para ello, se describirá de forma esquemática la manera en que Boltzmann pudo explicar la segunda ley de la termodinámica (el incremento de la entropía), y su derivación del estado de equilibrio estable en la distribución de Maxwell mediante el teorema-H. Luego se expondrá someramente el desarrollo de Gibbs para el teorema-H.

5.1 Teorema-H clásico

En 1872, Boltzmann publicó uno de sus trabajos más importantes, que a menudo se abreviaba como *Weitere Studien* (otros estudios). En dicho trabajo se afirmaba que cualquiera que sea el estado inicial de un sistema gaseoso, siempre tenderá a evolucionar hacia el equilibrio. Por lo tanto, es el primer trabajo en tratar la teoría del no-equilibrio. El documento contenía dos resultados conocidos hoy en día como la ecuación de Boltzmann y el teorema-*H* [18].

5.1.1 Ecuación de Boltzmann

En mecánica estadística clásica se define

$$P_B(r, v, t) d^3r d^3v \quad (5.1)$$

como la probabilidad de que una partícula se encuentre en la bola con centro en r y radio d^3r , y en la bola con centro v y radio d^3v .

Por otro lado, definir una probabilidad para hallar una partícula requiere definir una distancia media entre partículas, el análisis de Boltzmann considera que las partículas están separadas una distancia que cumple

$$\lambda_{Broglie} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} = d_{dismed}, \quad (5.2)$$

donde $\lambda_{Broglie} = \frac{2\pi\hbar}{(mk_B T)^{1/2}}$ es la distancia crítica que admite efectos cuánticos. Esto define una densidad de partículas $f_B(r, v, t)$ dentro de un volumen Ω y un volumen de velocidades Γ , que cumple con

$$N = \int_{\Omega} d^3r \int_{\Gamma} d^3v f_B(r, v, t) \quad (5.3)$$

y

$$\frac{1}{N} f_B(r, v, t) = P_B(r, v, t), \quad (5.4)$$

en donde N es el número de partículas en un volumen cerrado.

El objetivo en el análisis de Boltzmann es hallar una ley de evolución para la densidad de partículas o función de distribución $f_B(r, v, t)$. Es posible considerar la evolución de r y v en un intervalo de tiempo dt debido al arrastre de la fuerza $F(r, t)$, ésta se ve como las transformaciones

$$r' = r + vdt, \quad (5.5)$$

$$v' = v + \frac{1}{m}Fdt. \quad (5.6)$$

De este modo, las partículas en los intervalos (r, d^3r) y (v, d^3v) al tiempo t , evolucionan a los intervalos (r', d^3r') y (v', d^3v') al tiempo $t + dt$, con una distribución $f_B(r', v', t + dt)$. Recordando que el teorema de Liouville establece que la distribución de probabilidad es constante a lo largo de cualquier trayectoria del espacio fase, se llega a que las distribuciones cumplen que

$$f_B(r', v', t + dt) = f_B(r, v, t). \quad (5.7)$$

¹ Si se expande el lado izquierdo de la igualdad en serie de Taylor alrededor de r , v y t (a orden lineal), se llega a que

$$f_B(r, v, t) + \nabla f_B \cdot vdt + \nabla_v f_B \cdot \frac{F}{m}dt + \frac{\partial f_B}{\partial t}dt = f_B(r, v, t), \quad (5.8)$$

o lo que es lo mismo:

$$\left(\frac{\partial f_B}{\partial t} \right) = -\nabla f_B \cdot v - \frac{1}{m} \nabla_v f_B \cdot F, \quad (5.9)$$

en donde $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ y $\nabla_v = (\partial/\partial v_1, \partial/\partial v_2, \partial/\partial v_3)$. En el caso que aborda Boltzmann, se simplifica el trabajo de tratar con fuerzas discontinuas y muy complicadas, a solo partir de la evolución temporal de la distribución en: a) una contribución de flujo, en la que la fuerza se debe a un potencial externo independiente del tiempo, y b) una contribución discontinua en la que hay interacción entre las partículas, o contribución por colisiones. Con esto, la evolución se describe como

$$\left(\frac{\partial f_B}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial f_B}{\partial t} \right)_{flujo} + \left(\frac{\partial f_B}{\partial t} \right)_{colision}. \quad (5.10)$$

Entonces podemos reescribir la ec.(5.9) como

$$\left(\frac{\partial f_B}{\partial t} \right) = -\nabla f_B \cdot v - \frac{1}{m} \nabla_v f_B \cdot F_{ext} + \left(\frac{\partial f_B}{\partial t} \right)_{colision} \quad (5.11)$$

Para continuar con el cálculo, suponemos que el gas está lo suficientemente diluido para que solo importen las colisiones binarias entre partículas. Como vimos anteriormente el volumen en el espacio fase que nos interesa en la evolución es el comprendido entre r y $r + dr$ y v y $v + dv$.

¹Notar que esta caracterización del teorema de Liouville genera una diferencial total de f_B nula, $df_B = f_B(r', v', t + dt) - f_B(r, v, t) = 0$

Para caracterizar el término colisional es necesario considerar (i) las partículas que inicialmente no estaban en el volumen del espacio fase y que tras las colisiones entran en el volumen (esto nos lleva a un término de ganancia T^+) y (ii) las partículas que inicialmente estaban dentro del volumen del espacio fase y que posterior a las colisiones fueron lanzadas fuera de este volumen (que nos caracteriza un término de pérdida T^-). Con esto, podemos escribir la variación de la distribución colisional en términos de estas cantidades:

$$\left(\frac{\partial f_B}{\partial t}\right)_{colisional} d^3r d^3v dt = (T^+ - T^-) d^3r d^3v dt \quad (5.12)$$

Para obtener la forma explícita de T^+ y T^- , consideremos una partícula posicionada dentro de d^3r con velocidad v . Si hacemos incidir un flujo homogéneo de partículas con velocidades entre v_1 y $v_1 + dv_1$ al blanco en d^3r , el flujo se ve como ²

$$dv_1 f_B(r, v_1, t) |v_1 - v| \quad (5.13)$$

A partir de un flujo w de partículas que colisionan en una partícula blanco que dispersa un número de partículas dN en la dirección Ω en un intervalo dt produce la siguiente relación de dispersión:

$$dN(\Omega) = w\sigma(\Omega) d\Omega dt. \quad (5.14)$$

Extrapolando esto, podemos obtener el número dispersado de partículas en un ángulo sólido $d\Omega$ de la siguiente forma:

$$wbdbd\varphi = w\sigma(\Omega) \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (5.15)$$

así, queda definida la sección eficaz como:

$$\sigma(\Omega) = \frac{1}{\sin \theta} b \frac{db}{d\theta}, \quad (5.16)$$

en donde b es el parámetro de impacto (mide la distancia de la trayectoria a la asíntota en el punto de colisión) y los ángulos θ y φ dependen de este parámetro. Con esto, es fácil notar en el caso de la colisión elástica binaria, que el parámetro de impacto es constante, además el módulo de las velocidades finales se mantiene constante, por lo que lo único que cambia son las direcciones finales de las velocidades, que dependen del parámetro de impacto. Por lo tanto, $v' = v'(\Omega)$ y $v'_1 = v'_1(\Omega)$.

Entonces, con estas propiedades de la sección eficaz, es posible escribir el flujo dispersado dentro

²La teoría de colisiones se estudia con detalle en [11], no abordo en este escrito estos cálculos ya que no son necesarios para el argumento principal.

de un ángulo sólido a causa de la colisión como

$$dv_1 f_B(r, v_1, t) |v_1 - v| \sigma(v, v_1 \longrightarrow v', v'_1) d\Omega dt \quad (5.17)$$

Para definir el término de pérdida, es decir, el número de partículas que abandonan el volumen fásico comprendido entre r y $r + dr$ y v y $v + dv$, y pasan a r y $r + dr$ y v' y $v' + dv'$, es necesario tomar una hipótesis adicional: *Stosszhalansatz* (caos molecular). Esta hipótesis establece que: El número de pares de partículas $dN(v, v_1)$ con velocidades en intervalos $[v, v + d^3v]$ y $[v_1, v_1 + d^3v_1]$, respectivamente, que están por colisionar en un intervalo de tiempo dt es de la forma

$$dN(v, v_1) \propto f_B(v) f_B(v_1) dt d^3v d^3v_1, \quad (5.18)$$

es decir, que la densidad f_B después de la colisión puede escribirse como un producto de densidades $f_B(v)$ y $f_B(v_1)$.

Así, multiplicando al término (5.17) por $f_B(r, v, t) d^3r d^3v$ e integrando sobre todas los posibles ángulos de salida, obtenemos el número de pares de partículas involucradas en la colisión

$$dN^-(v, v_1) = \int d\Omega |v_1 - v| f_B(r, v_1, t) \sigma(v, v_1 \longrightarrow v', v'_1) f_B(r, v, t) d^3r d^3v dt. \quad (5.19)$$

Con esto, el número de partículas que abandonan el volumen fásico r y $r + dr$ y v y $v + dv$ debe ser la integral del número de pares $dN^-(v, v_1)$ sobre todas las velocidades del flujo incidente v_1

$$T^- d^3r d^3v dt = \int d^3v_1 \int d\Omega |v_1 - v| f_B(r, v_1, t) \sigma(v, v_1 \longrightarrow v', v'_1) f_B(r, v, t) d^3r d^3v dt. \quad (5.20)$$

Éste es el término de pérdida que buscamos. Para hallar el término de ganancia usemos una colisión inversa a la considerada anteriormente, esto se hace simplemente intercambiando las velocidades finales por las iniciales. Esto se interpreta como que las partículas que están inicialmente fuera del volumen fásico pasan a estar adentro del volumen después de la colisión.

$$T^+ d^3r d^3v dt = \int d^3v'_1 \int d\Omega |v'_1 - v'| f_B(r, v'_1, t) \sigma(v', v'_1 \longrightarrow v, v_1) f_B(r, v', t) d^3r d^3v dt. \quad (5.21)$$

Esta ecuación es integro-diferencial y no-lineal, por lo que encontrar una solución analítica resultaría muy complicado. En lugar de esto, se analiza su estabilidad usando una función de la cantidad que se busca estudiar. A esta función se le conoce como función (o funcional) de Lyapunov y es útil en el estudio de la estabilidad en sistemas dinámicos, cuando hay pocas alternativas para caracterizar al sistema.

Boltzmann ³ usa el hecho de que en la colisión binaria, es posible mantener constantes las velocidades relativas, es decir, $|v - v_1| = |v' - v'_1|$. Luego, en virtud de la invariancia ante inversión temporal $\sigma(v, v_1 \longrightarrow v', v'_1) = \sigma(v', v'_1 \longrightarrow v, v_1)$. Además, por el teorema de Liouville, los volúmenes fásicos no cambian por la colisión. Con esto se llega a que

$$\left(\frac{\partial f_B}{\partial t}\right)_{\text{Colisional}} = \frac{\partial f_B}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f_B}{\partial r} = \int d^3v_1 \int d\Omega |v_1 - v| \sigma(v, v_1 \longrightarrow v', v'_1) [f_B(r, v'_1, t) f_B(r, v', t) - f_B(r, v_1, t) f_B(r, v, t)]. \quad (5.22)$$

Dado que la evolución de la distribución solo depende de las direcciones de las velocidades finales v' y v'_1 , la integral respecto a todos los ángulos absorbe la dependencia de estas dos variables, dejando a la integral solo con dependencia en r , v y t . La ecuación (5.22) se conoce como la ecuación de Boltzmann, y es una ecuación de evolución para la distribución de las partículas fuera del equilibrio térmico.

5.1.2 Teorema- H de Boltzmann

Para entender el equilibrio térmico, Boltzmann propone usar un método para analizar la estabilidad de la distribución $f_B(r, v, t)$. Dada la evidente complicación para resolver la ecuación de Boltzmann, se usa un funcional o función de Lyapunov ⁴ $H_B(t)$ que depende de $f_B(r, v, t)$, y con ella verificar que:

- (1) $H_B(t)$ es acotada.
- (2) $\frac{dH_B(t)}{dt} \leq 0$, para todo t . La igualdad se da cuando se alcanza el estado de equilibrio, es decir, f_B caracteriza la distribución de equilibrio. ⁵

Si el funcional de Lyapunov cumple estas dos propiedades es posible llegar al estado de equilibrio. La propuesta para funcional de Lyapunov que sirve para este caso es:

$$H_B(t) = \int d^3r \int d^3v f_B(r, v, t) \ln f_B(r, v, t). \quad (5.23)$$

³Se separa al sistema colisional en un sistema con centro de masa y un sistema con masa reducida para demostrar varias simetrías que se usan en el cálculo.

⁴Para hallar una función de Lyapunov adecuada no se tienen fórmulas ni métodos formales, la idea es proponer algún funcional de la función que se analiza y a partir de ella buscar sus propiedades dinámicas.

⁵Para el caso que busca demostrar Boltzmann, la distribución de equilibrio f_B es la distribución de Maxwell.

El funcional de Lyapunov debe obedecer la siguiente ecuación de evolución⁶

$$\begin{aligned} \frac{dH_B(t)}{dt} &= \int d^3r \int d^3v \frac{\partial f_B(r, v, t)}{\partial t} \ln(f_B(r, v, t) + 1) = \\ &\int d^3r \int d^3v \left(\frac{\partial f_B(r, v, t)}{\partial t} \right)_{colisional} \ln(f_B(r, v, t) + 1) + \\ &\int d^3r \int d^3v \left(\frac{\partial f_B(r, v, t)}{\partial t} \right)_{flujo} \ln(f_B(r, v, t) + 1). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Es posible probar que la parte de flujo de la evolución de $H_B(t)$ es nula. Solo quedaría observar que la evolución de la parte colisional es:

$$\frac{dH_B(t)}{dt} = \frac{1}{4} \int d^3v \int d^3r \int d^3v_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |v_1 - v| (f'_1 f' - f_1 f) \ln \frac{f f_1}{f'_1 f'}. \quad (5.25)$$

en donde, $f'_1 = f_B(r, v'_1, t)$, $f' = f_B(r, v', t)$, $f_1 = f_B(r, v_1, t)$ y $f = f_B(r, v, t)$. Notar que en la ec.(5.25) la dependencia de v'_1 y v' es absorbida por la integral sobre todos los ángulos de salida Ω .

No obstante, es útil escribir de esta manera a la ecuación para mostrar el teorema.

Analicemos la ecuación (5.25). Por definición, la sección eficaz es positiva para todo Ω , además el módulo $|v_1 - v|$ siempre es positivo. Entonces, analicemos los siguientes casos

- si $f f_1 > f'_1 f'$, se verifica que $\frac{dH_B(t)}{dt} < 0$,
- si $f'_1 f' > f f_1$, se verifica que $\frac{dH_B(t)}{dt} < 0$,
- si $f'_1 f' = f f_1$, entonces $\frac{dH_B(t)}{dt} = 0$.

Estos casos agotan toda la dinámica de $H_B(t)$, por lo que podemos concluir que:

$$\frac{dH_B(t)}{dt} \leq 0. \quad (5.26)$$

Solo falta mostrar que para el límite $t \rightarrow \infty$, $H_B(t)$ está acotada inferiormente. Para esto, observemos que se tiene que cumplir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dH_B(t)}{dt} = 0. \quad (5.27)$$

Esto es mostrar que se llega a un punto de equilibrio cuando pasa mucho tiempo. Como vimos la función de Lyapunov es monótonamente decreciente, entonces solo basta mostrar que la forma

⁶ $H(t)$ sólo depende de t , por lo que su derivada respecto al tiempo es una derivada total. Si tomamos la derivada total de f_B del lado derecho obtendríamos un resultado nulo en virtud del teorema de Liouville. Hacer que la derivada del lado derecho sea parcial nos asegura que obtendremos un resultado no trivial. Sin embargo, hay razones para dudar de esta igualdad, en el sentido en que no podemos simplemente intercambiar derivadas parciales por derivadas totales.

de $H_B(t)$ permite encontrar un mínimo. De la ecuación (5.23), observamos que se tiene la forma $\int d^3r d^3v f \ln f$. Analicemos el argumento dentro de la integral:

$$F_B = f_B \ln f_B. \quad (5.28)$$

Analicemos la función: $G_B = f_B \ln f_B - f_B$ y obtengamos sus puntos extremales usando la primera derivada respecto a f :

$$G'_B(f_B \ln f_B - f_B)' = f_B/f_B + \ln f_B - 1 = 1 + \ln f_B - 1 = \ln f_B. \quad (5.29)$$

Entonces, G_B tiene un extremo en $f_B = 1$. Comprobemos que este extremo es en efecto un mínimo, usando la segunda derivada respecto a f_B :

$$G''_B = \frac{1}{f_B}, \quad (5.30)$$

si sustituimos f_B por 1, se tiene que la segunda derivada en el extremo local $f_B = 1$ es positiva. Por lo tanto, existe un mínimo de la función G_B en el punto $f_B = 1$. Con esto, podemos acotar a la función F_B gracias a que la función G_B está acotada y que la función f_B está acotada por la regla de normalización (5.3). De hecho, se ha demostrado que la función $H(t)$ no decrece de forma indefinida, y está acotada por una función estacionaria $\phi(v) = \phi(v, \infty)$. La función para el estado de equilibrio se caracteriza por la función de distribución de Maxwell

$$\phi(v) = Ae^{-Bv^2}, \quad (5.31)$$

con A y B constantes.

Boltzmann concluye su trabajo sobre la naturaleza de los gases asegurando que el procedimiento anterior es una prueba de que hay una cantidad que nunca incrementa con el tiempo (siempre disminuye o se mantiene constante), alega que esta cantidad es exactamente la misma, salvo un factor constante, a la conocida cantidad

$$S_B = -kH_B(t) = \int \frac{dQ}{T}. \quad (5.32)$$

en donde k es la constante de Boltzmann. Con esto, Boltzmann asegura que esta es una prueba a la segunda ley de la termodinámica, que incluso va más allá al probar que funciona para sistemas que no están en equilibrio térmico, y por ende, la cantidad $H(t)$ siempre decrece o se mantiene constante [18].

5.1.3 Los retos del teorema-H

Luego de la publicación del trabajo de Boltzmann sobre el comportamiento microscópico de los gases [4], hubo críticas y problemas relacionados a sus ideas, los dos más relevantes se enumeran a continuación [18]:

1. El problema que asume Boltzmann es el de un gas aislado en un contenedor de volumen fijo. Esto quiere decir, por el hecho de que el gas está en aislamiento de su entorno, que no hay intercambios de calor. La integral de Clausius

$$\int \frac{dQ}{T} \quad (5.33)$$

requiere un cambio infinitesimal de calor para ser distinta de cero, por lo que el contexto de su prueba y el contexto de la segunda ley de la termodinámica son completamente distintos.

2. La objeción de reversibilidad. La crítica que hace Loschmidt es acerca de la simetría que tienen las ecuaciones de movimiento clásicas (es decir, las ecuaciones de Hamilton-Jacobi) ante la inversión de las velocidades iniciales y finales, y ante la inversión del tiempo (más conocida como inversión temporal). Dicho de otro modo, el hamiltoniano es invariante ante la inversión de velocidades, lo que produciría que la cantidad H disminuyera con el tiempo en el caso que se desarrolló más arriba, y aumente ante inversión de velocidades. Sin una suposición adicional, es imposible llegar a que H siempre disminuya. Es decir, el teorema-H no es un resultado general para el comportamiento de los gases. Lo que se notó es que la Stosszahlansatz es la responsable de esta asimetría temporal.

5.1.4 Teorema-H a la Gibbs

Para empezar recordemos que la caracterización de Boltzmann es la de un solo sistema con múltiples partículas. La función f_B es una distribución sobre el espacio-fase, es decir, mide una densidad de probabilidad sobre posibles estados del espacio fase. Por último, la caracterización de equilibrio se da en todo el espacio fase y la entropía se define como en la ec.(5.32).

Era necesario hacer esta distinción, ya que el tratamiento de Gibbs difiere principalmente en cómo considerar las probabilidades. Gibbs analiza un ensemble de algún número de copias del mismo sistema en el capítulo XII de [10]. Cada punto del espacio fase no es un posible estado es, en cambio, un estado actual de algún miembro del ensemble. Se define una distribución $\rho_G(x, t)$ sobre el ensemble (no se define sobre el espacio fase). Por último, la caracterización de equilibrio se da cuando ρ_G es

estacionaria. La entropía, en el análisis de Gibbs, se define como:

$$S_G(\rho_G) = -k \int_{\Gamma} \rho_G \ln \rho_G dx. \quad (5.34)$$

Esta forma de escribir la entropía conduce a que S_G es estacionaria. Para poder relacionar el cambio de entropía a la segunda ley de la termodinámica, Gibbs requiere de hacer granos-gruesos. Es decir, tomar regiones delimitadas de volumen constante del espacio-fase y promediar el ensemble dentro de estas regiones. El teorema- H , en el formalismo de Gibbs, funciona en subconjuntos del ensemble usando promedios y otorgando a estas regiones la propiedad de falta de microestructura que abordaremos mejor en la siguiente sección. Solo falta mencionar que los problemas que enfrenta el teorema- H de Boltzmann no son exactamente iguales a los que enfrenta el formalismo de Gibbs, hay ciertas diferencias:

- En el caso de Boltzmann, la entropía no cambia por un intercambio calórico, ya que el sistema de Boltzmann es cerrado. En el caso del formalismo a la Gibbs, no hay un problema en escribir una fórmula como la integral de Claussius para la entropía, ya que las regiones en donde se cumple el teorema- H a la Gibbs no son cerradas, interactúan con el resto del ensemble.
- En el caso de la objeción de reversibilidad, ambos tiene el problema de agregar un concepto ajeno a la teoría que asimetrice la dinámica. Para el caso de Boltzmann el elemento que asimetriza es la Stosszahlansatz. En el caso a la Gibbs, el elemento que asimetriza es la falta de microestructura inicial de los granos-gruesos.

5.2 Analogía para el caso subcuántico del teorema-H

Valentini considera un sistema con un gran número de grados de libertad. El sistema se describe por medio de una función de onda $\Psi(x, t)$, y una densidad de probabilidad $P_V(x, t)$, en donde x representa un punto en el espacio de configuraciones $3N - dimensional$, es decir, se está representando un sistema de N partículas en el espacio tridimensional con un punto $3N - dimensional$ en el espacio de configuraciones. Busca probar que a nivel de grano grueso (coarse-grained) se observa que $P_V = |\Psi|^2$. Por otro lado, es posible escribir a esta función de onda en su forma polar

$$\Psi(x, t) = R(x, t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x, t)}. \quad (5.35)$$

⁷ De este modo, usando los postulados de la mecánica de onda-piloto, se puede escribir la ecuación

⁷notar que Valentini escribe la constante \hbar en la definición de función de onda en su forma polar, mientras que el análisis de la sección anterior se hace sin escribir esa constante en la forma polar de la función de onda

guía para las coordenadas de las partículas como

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = \frac{1}{m} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i}, \quad (5.36)$$

con $i = 1, \dots, 3N$.

Para que $P_V(x, t)$ tenga sentido es necesario considerar un ensemble de partículas. Cada elemento del ensemble se toma con la misma función de onda Ψ , pero no necesariamente la misma posición x .

Al tiempo $t = 0$, se tiene Ψ y una densidad $P_V(x, 0)$ que no está relacionada a priori con $|\Psi(x, 0)|^2$ (se sustituye el postulado estadístico por una propuesta estadística). Sea $f_V(x, t)$ la medida en que difiere P_V de $|\Psi|^2$ al tiempo t y posición x ,

$$P_V(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 f_V(x, t). \quad (5.37)$$

Se sabe que la función de onda Ψ evoluciona según la ecuación de Schrödinger, y se determina por la condición inicial $\Psi(x, 0)$. Debido a que $P_V(x, t)$ es una probabilidad, se debe cumplir la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial P_V(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [P_V(x, t)\dot{x}] = 0. \quad (5.38)$$

Y con la condición inicial dada $P_V(x, 0)$, se determina de forma única la distribución $P_V(x, t)$.

Ahora, recordando que la norma de la función de onda cumple la ecuación de continuidad, y en virtud de la ecuación de continuidad para la distribución $P_V(x, t)$, se puede llegar a que, a lo largo de las trayectorias $x(t)$,

$$\frac{df_V(x, t)}{dt} \equiv \frac{\partial f_V}{\partial t} + \dot{x} \cdot \nabla f_V = 0. \quad (5.39)$$

Según Valentini, en mecánica estadística clásica se define la cantidad ⁸

$$H_{class} = \int d\Omega p \ln p, \quad (5.40)$$

en donde, $\int \Omega$ es una integral sobre el espacio fase, y p es la densidad de probabilidad sobre el espacio fase. Recordando el teorema de Liouville para la distribución p a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico

$$dp/dt = 0, \quad (5.41)$$

se llega a que

$$\frac{dH_{class}}{dt} = 0, \quad (5.42)$$

así, H_{class} es contante en el tiempo. No obstante, si se divide el espacio fase en pequeñas celdas, es

⁸Esta cantidad es proporcional a la entropía de Gibbs de la ec.(5.34).

posible definir una densidad \bar{p} de grano-grueso (coarse-grained) promediando sobre la celda. Para el grano-grueso se define

$$\bar{H}_{class} = \int d\Omega \bar{p} \ln \bar{p} \quad (5.43)$$

que obedece el teorema- H clásico

$$\frac{d\bar{H}_{class}}{dt} \leq 0. \quad (5.44)$$

La demostración descansa en una suposición crucial, que es

$$\bar{p}(0) = p(0), \quad (5.45)$$

i.e., que la densidad inicial de grano-grueso es igual a la densidad inicial de grano-fino. Esto se puede interpretar como un «principio de probabilidad local uniforme» o «falta de microestructura».

Valentini busca calcular la entropía subcuántica tomando la propiedad de Liouville como un rasgo común entre (a) la distribución clásica p con su correspondiente teorema de Liouville $dp/dt = 0$; y (b) la distribución f que surge de la definición subcuántica de la ec.(5.37), y tiene su análogo teorema de Liouville de la ec.(5.39), ambos válidos en las trayectorias del sistema. Desde esta perspectiva, pretende construir una función (o funcional en este caso) de Lyapunov (como se hizo en el caso clásico), que pueda dar alguna condición de equilibrio estable, es decir, construir H_V de origen subcuántico que sea monótonamente decreciente, y que sea inferiormente acotada. Estas dos condiciones sobre el funcional se interpretan como que, independientemente de las condiciones iniciales, H_V tiende a una distribución de equilibrio estable.

Entonces, Valentini intercambia p por f_V . Además, el número de sistemas que ocupan un volumen $d^{3N}x$ debe ser constante en el tiempo, de modo que $P_V d^{3N}x = |\Psi|^2 f_V d^{3N}x$, y $|\Psi|^2 d^{3N}x$ se preservan a lo largo de las trayectorias del sistema. Si se reemplaza $d\Omega$ por $|\Psi|^2 d\Sigma$, donde $d\Sigma = d^{3N}x$ es el elemento de volumen en el espacio de configuraciones entonces,

$$H_V = \int d\Sigma |\Psi|^2 f_V \ln f_V, \quad (5.46)$$

que se puede escribir como

$$H_V = \int d\Sigma P_V \ln \left(\frac{P_V}{|\Psi|^2} \right). \quad (5.47)$$

Dada la analogía, a partir de $df_V/dt = 0$, se sigue que H es constante en el tiempo, al igual que en el caso clásico $dH_V/dt = 0$ en las trayectorias del sistema.

Valentini reproduce el método de grano-grueso dividiendo el espacio de configuraciones en celdas de volumen δV , y define

$$\bar{P}_V = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} d\Sigma P_V, \quad (5.48)$$

así como

$$\overline{|\Psi|^2} = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} d\Sigma |\Psi|^2, \quad (5.49)$$

para poder definir H_V de grano-grueso subcuántico como

$$\overline{H_V} = \int d\Sigma \overline{P_V} \ln \left(\frac{\overline{P_V}}{\overline{|\Psi|^2}} \right). \quad (5.50)$$

Luego define $\tilde{f}_V = \overline{P_V} / \overline{|\Psi|^2}$, para escribir

$$\overline{H_V} = \int d\Sigma \overline{P_V} \ln \tilde{f}_V. \quad (5.51)$$

Lo que busca Valentini es mostrar que esta última cantidad es monótonamente decreciente con respecto al tiempo.

Para probar que H_V es decreciente, se asume que para el estado inicial no hay "microestructura" de la misma forma en que se asumió en el caso clásico el "principio de probabilidad local uniforme". Se asume pues que,

$$\overline{P_V}(0) = P_V(0), \quad (5.52)$$

$$\overline{|\Psi(0)|^2} = |\Psi(0)|^2. \quad (5.53)$$

Se tiene a continuación la diferencia

$$\overline{H_V}(0) - \overline{H_V} = \int d\Sigma \overline{P_V}(0) \ln \tilde{f}_V(0) - \int d\Sigma \overline{P_V} \ln \tilde{f}_V. \quad (5.54)$$

De las condiciones ec.(5.52) y ec.(5.53), y usando el hecho de que H_V es constante en el tiempo, se obtiene

$$\int d\Sigma \overline{P}(0) \ln \tilde{f}(0) = \int d\Sigma P(0) \ln f(0) = H(0) = H(t) = \int d\Sigma P \ln f. \quad (5.55)$$

Después, dado que \tilde{f}_V es constante en cada celda δV , se sigue que

$$\int d\Sigma \overline{P_V} \ln \tilde{f}_V = \int d\Sigma P_V \ln \tilde{f}_V. \quad (5.56)$$

Por lo tanto,

$$\overline{H_V}(0) - \overline{H_V} = \int d\Sigma P_V \ln \frac{f_V}{\tilde{f}_V} = \int d\Sigma |\Psi|^2 f_V \ln \frac{f_V}{\tilde{f}_V}. \quad (5.57)$$

Usando de nuevo el hecho de que \tilde{f}_V es constante en cada celda δV , se puede demostrar que

$$\int d\Sigma |\Psi|^2 (f_V - \tilde{f}_V) = 0, \quad (5.58)$$

por lo que,

$$\bar{H}_V(0) - \bar{H}_V = \int d\Sigma |\Psi|^2 \left[f_V \ln \frac{f_V}{\tilde{f}_V} + \tilde{f}_V - f_V \right]. \quad (5.59)$$

Como $x \ln(x/y) + y - x \geq 0$, para todo x e y , se tiene el teorema H subcuántico

$$\frac{d\bar{H}_V}{dt} \leq 0. \quad (5.60)$$

Para Valentini falta probar que $P_V = |\Psi|^2$ es un punto de equilibrio estable. Dicho de otro modo, si se define a la entropía subcuántica de la forma

$$S_V = -\kappa \int d\Sigma P_V \ln \frac{P_V}{|\Psi|^2}, \quad (5.61)$$

que para grano-grueso se comprueba que

$$\int d\Sigma \left[\bar{P}_V \ln \frac{\bar{P}_V}{|\Psi|^2} + |\Psi|^2 - \bar{P}_V \right] = 0, \quad (5.62)$$

entonces \bar{S}_V tiene un máximo en $\bar{P}_V = |\Psi|^2$.

Valentini concluye que: *Por razones puramente estadísticas, la probabilidad de densidad de grano-grueso \bar{P}_V tiende al valor $|\Psi|^2$, que maximiza la entropía subcuántica.* Por lo tanto, siempre que se realicen mediciones con una precisión suficientemente gruesa con respecto a los volúmenes del espacio de configuraciones, se espera observar la distribución $\bar{P}_V = |\Psi|^2$.

Capítulo 6

Tipicalidad

Para entender de forma clara la propuesta de los tipicalistas daré los puntos más importantes del argumento y después explicaré cada uno de los términos que se usan. Sea un universo Bohmiano (es decir, un universo con función de onda cuya dinámica está dada por la ecuación de Schrödinger (2.1) y partículas cuya dinámica está determinada por la ecuación guía (4.2)) con función de onda universal Ψ ¹ y configuración Q , el argumento de tipicalidad toma en cuenta 2 puntos fundamentales:

- (1) Hay una medida natural que permite el cálculo de probabilidades, y dicha medida es la natural o típica, a saber, la que está dada por $|\Psi|^2$.
- (2) La regla de Born en las mediciones se aplica a subsistemas cuánticos, no al universo completo. Dado (1), si es posible dividir al universo en subsistemas con funciones de onda efectivas $\psi(x, t)$, entonces cada subsistema es independiente uno del otro, con variables aleatorias distribuidas idénticamente, y distribución común $|\psi(x, t)|^2$. En el límite en que el número de subsistemas es grande ($n \rightarrow \infty$), la distribución que se mide (la distribución empírica) tiende a $|\psi|^2$.

Esta propuesta la hicieron Detlef Dürr, Sheldon Goldstein y Nino Zanghí (DGZ) en su artículo de 1992 [7]. En dicho artículo llegan al resultado de que, aunque la teoría de onda-piloto es totalmente determinista, evoluciona de tal manera que emerge el azar, precisamente como lo dicta el formalismo cuántico y dado por $\rho = |\psi|^2$.

Como se puede notar en los puntos principales del argumento, se deben definir algunos elementos para entender el argumento de tipicalidad. Los primeros elementos que hay que definir es la distinción entre la función de onda universal, la función de onda condicionada y la función de onda efectiva.

¹con función de onda universal me refiero a que la función de onda está definida en todo el universo Bohmiano

- Definición. Función de onda universal. Sea un universo Bohmiano con configuración Q , la función de onda universal se define como

$$\Psi(q, t). \quad (6.1)$$

entendiendo que Q es la configuración actual de las partículas (define las posiciones actuales de las partículas) y q es el parámetro de grados de libertad del que depende la función de onda universal, cuya determinación se da resolviendo la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial q} \Psi(q, t) + V(q, t) \Psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t).$$

- Definición. Función de onda condicionada. Supóngase un universo Bohmiano tal que es posible dividirlo en un subsistema de interés (con grados de libertad x) y su medio ambiente (con grados de libertad y), así $q = (x, y)$ y $Q = (X, Y)$. Entonces,

$$\psi(x, t) = \frac{\Psi(x, Y(t), t)}{\int |\Psi(x, Y(t), t)|^2 dx} \quad (6.2)$$

es la función de onda condicional (normalizada) o CWF (por sus siglas en inglés) para el subsistema. Esto permite relacionar probabilidades en los subsistemas con frecuencias empíricas extraídas de los experimentos.

Es razonable pensar, según Norsen [15], a la CWF como una función de onda del subsistema en el contexto de la teoría de onda-piloto por al menos dos razones: (1) la ecuación guía para la configuración del subsistema X puede ser escrita directamente en términos de $\psi(x)$; y (2) la CWF obedece la ecuación de Schrödinger del subsistema cuando este último está adecuadamente desacoplado de su medio ambiente. ²

- Definición. Función de onda efectiva. Supóngase un universo Bohmiano tal que es posible dividirlo en un subsistema de interés (con grados de libertad x) y su medio ambiente (con grados de libertad y), así $q = (x, y)$ y $Q = (X, Y)$, y la función de onda universal tiene la forma

$$\Psi = \psi(x)\phi(y) + \Psi^\perp, \quad (6.3)$$

²Notar, sin embargo, que en general la CWF no obedece una ecuación de Schrödinger simple de un subsistema, sino que evoluciona de una forma más complicada; esto es una característica, no un defecto, dado que la complicada evolución no-lineal de hecho reproduce, de forma precisa y continua, la evolución no-lineal que sería predicha en el contexto de la mecánica cuántica estándar (por la combinación ad hoc de la dinámica de Schrödinger y las intermitentes aplicaciones del postulado de colapso)

donde Ψ^\perp es macroscópicamente disjunto de $\phi(y)$. En la teoría de onda piloto se tienen posiciones bien definidas por la configuración $Q = \{X(t), Y(t)\}$. Si Y es el soporte de $\phi(y)$, entonces Ψ^\perp será irrelevante para el movimiento futuro de las partículas y se puede asignar una función efectiva ψ al subsistema de interés. Es decir, si Y es el soporte de $\phi(y)$ entonces cada $\psi(x)$ es la función de onda efectiva del subsistema con coordenadas x .

En el caso simple en el que la función de onda universal es un producto,

$$\Psi(x, y) = \psi(x)\phi(y), \quad (6.4)$$

la CWF para el subsistema x coincide con $\psi(x)$.

Se observa que la CWF es una generalización de la función de onda en mecánica cuántica estándar: la CWF Bohmiana concuerda con la función de onda que sería atribuida a un sistema en mecánica cuántica estándar en aquellas situaciones donde se atribuiría cualquier función de onda definida al subsistema; pero la CWF Bohmiana, a diferencia de la función de onda en la teoría estándar, siempre existe y no solo provee una interpolación rigurosa (consistente con la dinámica global Bohmiana para las partículas) para tales situaciones, sino también para preparaciones y mediciones. Se debe notar además que, en las situaciones donde la función de onda efectiva en un subsistema existe, está dada por la CWF, así que se usa la intercambiabilidad en este caso.

Ya hecha la distinción entre las funciones de onda, lo segundo que hay que explicar es la noción de tipicalidad que tienen DGZ.

6.1 La gramática de la tipicalidad

El primer reto para entender al tipicalista es entender a lo que se llama típico. Tim Maudlin en [13], busca aclarar el concepto de tipicalidad mencionando que es un requerimiento idealizado para obtener probabilidades en teorías deterministas.

Maudlin dice que la aparición de medidas de probabilidad, o cualquier cosa cercana a las medidas de probabilidad, debe, en última instancia, remontarse a la suposición de alguna medida de probabilidad en los fundamentos de la teoría. Esto puede surgir tanto cuando se especifica la dinámica de la teoría (en caso de ser fundamentalmente estocástica) o tanto como una medida de probabilidad sobre el espacio de estados iniciales de la teoría. La última alternativa es la que nos interesa en el caso de la teoría de Bohm, ya que ésta no es fundamentalmente estocástica y es menester del bohmiano encontrar el origen estadístico de las mediciones en experimentos de naturaleza cuántica.

Según Maudlin, es posible derivar algo cercano a la medida de probabilidad en una teoría determinista sin ponerla directamente, para lo cual hay que usar la noción de tipicalidad. Se necesita algo más que la dinámica determinista para probar una teoría con frecuencias empíricas (que es el caso

de mecánica de onda-piloto), pero se requiere que el ingrediente adicional sea algo menos específico que una medida de probabilidad. Esa información adicional es la noción de tipicalidad. Subraya el hecho de que pedir una medida de tipicalidad es mucho menos que pedir una medida de probabilidad. Sin embargo, proponer una medida de probabilidad conlleva asumir ciertos fundamentos teóricos, así como usar una medida de tipicalidad conlleva asumir otros fundamentos. Es decir, Maudlin cree que usar una medida de tipicalidad es restringir lo menos posible a la teoría, no obstante, se restringe.

Para entender cómo se restringe a una teoría usando la noción o la medida de tipicalidad hay que definir formalmente lo que es la tipicalidad.

Definición. Una medida de tipicalidad es un predicado simple sobre el conjunto de subespacios del espacio muestra que separa los subconjuntos grandes de los subconjuntos pequeños ³ de la siguiente forma:

1. Un subconjunto del espacio muestra es un subconjunto pequeño si y solo si es el complemento de un subconjunto grande.
2. Un subconjunto es indeterminado si y solo si no es grande ni chico.

Maudlin restringe el uso de la noción de tipicalidad para características genéricas, por lo que no lo usa sobre individuos. Una característica genérica es típica si y solo si la extensión de la característica es un conjunto grande de acuerdo a la "medida de tipicalidad" que está siendo usada. Después se pregunta ¿cómo ayuda esto a relacioner la probabilidad desde la dinámica determinista junto con el predicado "subconjunto grande"?

Menciona que la respuesta está en las frecuencias empíricas. Hablar de probabilidad dentro de teorías deterministas es realmente hablar acerca de frecuencias empíricas típicas. Para desarrollar esto, propone el caso del lanzamiento de una moneda usando un modelo determinista. Si nos restringimos a la dinámica determinista, nunca se obtendrá algo parecido a tener $1/2$ de probabilidad de que salga cara o cruz. Lo que hace la conexión con la probabilidad es lanzar una moneda "sin sesgos" (tanto en la moneda como en la forma de ser lanzada) muchas veces, de tal modo que se pueda asociar la frecuencia relativa con la que la moneda cae en cara o cruz con el número $1/2$, más un error ϵ . Según Maudlin, dada una "medida de tipicalidad" sobre el espacio muestra de todas las posibles secuencias de lanzamientos, puede haber una tolerancia ϵ tal que el resultado que muestra una distribución empírica de $1/2 \pm \epsilon$ es un resultado típico. Intuitivamente, la abrumadora mayoría de formas en que se puede lanzar una moneda muchas veces lleva a una distribución empírica alrededor de $1/2$. En este caso lo que da la medida de tipicalidad $1/2 \pm \epsilon$ es el predicado "sin sesgos". Notar que lanzar la moneda muchas veces y que se llegue a un número fijo de la frecuencia, se le llama la ley débil de los grandes números.

³El predicado establece un criterio sobre lo que es típico y lo que no lo es. Se debe entender que la tipicalidad no mide algo, sino que establece el umbral entre lo típico y lo atípico. La medida de probabilidad que resulta de este predicado es la medida de tipicalidad.

En el caso de mecánica de Bohm, los tipicalistas interpretan las mediciones en mecánica cuántica como los resultados típicos de la medida de tipicalidad $|\Psi|^2$ para los estados iniciales de las partículas. Hay que notar que esta medida de tipicalidad está en términos de la función de onda universal, y no de la función de onda efectiva.

Entonces, con esto podemos preguntarnos ¿qué quieren decir los tipicalistas con una medida típica? a lo que podemos responder: que es un predicado que se propone para los subconjuntos del espacio muestra, es decir, se propone que cierto subconjunto es grande, y de este se deriva una forma de asociar probabilidades con frecuencias empíricas. En el caso de la moneda, el predicado "sin sesgos" es lo que produce la asociación de la medida típica o de tipicalidad $1/2 \pm \epsilon$ con los resultados de las frecuencias empíricas de las secuencias de lanzamientos.

En mecánica de onda-piloto, los tipicalistas toman a $|\Psi|^2$ como la medida de tipicalidad, en función del equilibrio cuántico o equivarianza. DGZ en [7], explican: *La tipicalidad debe entenderse aquí en el sentido de equilibrio cuántico: algo es cierto para las configuraciones iniciales típicas si el conjunto de configuraciones iniciales para las que es falso es pequeño en el sentido proporcionado por la distribución de equilibrio cuántico P .*

Para terminar esta sección concluimos que Dürr, et. al, eligen la medida típica de las configuraciones iniciales como $|\Psi|^2$ ya que ésta es equivariante, por lo que, el predicado de tipicalidad lo relacionan directamente con la equiarianza. Es decir, la mayoría de las configuraciones iniciales se comporta como la distribución $|\Psi|^2$. Haciendo una analogía con el lanzamiento de la moneda, el predicado sin "sesgos" se relaciona con que la mayoría de las configuraciones iniciales se distribuyen como la equivariante ($|\Psi|^2$) y la frecuencia empírica $1/2 \pm \epsilon$ se relaciona directamente con la distribución $|\Psi|^2 \pm \epsilon$. Sin embargo, proponer esta medida sobre otras que no son equivariantes es una cuestión totalmente convencional.

6.2 Desarrollo del argumento de tipicalidad en mecánica de Bohm

Según la teoría de onda-piloto el estudio del universo en un momento dado t está definido por la función de onda universal $\Psi(q, t)$ y la configuración de las partículas $Q(t)$. Los autores DGZ defienden que la única medida natural de tipicalidad es la que está dada por

$$\mu = |\Psi|^2. \quad (6.5)$$

Se entiende que esta medida es típica en el sentido mencionado por Maudlin. Es decir, es una convención que toman DGZ en [7] porque es equivariante. Hay que recordar que la propiedad de equivarianza dice que, aunque μ misma sea dependiente del tiempo (dado que Ψ es dependiente del tiempo), la forma de la ec.(6.5) es invariante en el tiempo: si $\mu(q, 0) = |\Psi(q, 0)|^2$, entonces $\mu(q, t) = |\Psi(q, t)|^2$

para todo t .

Supongamos que es posible dividir al universo en un subsistema de interés (con grados de libertad x) y su medio ambiente (con grados de libertad y), y así $q = (x, y)$ y $Q = (X, Y)$. Esto se toma así porque las mediciones que hacemos en los experimentos son sobre subsistemas del universo. Entonces, dice Norsen, es trivial deducir lo que Dürr, et. al., llaman "fórmula fundamental de la probabilidad condicional"

$$\mu(X_t \in dx|Y_t) = |\psi(x, t)|^2 dx, \quad (6.6)$$

donde $\psi(x, t)$ es la función de onda condicional CWF para el subsistema. Esto permite relacionar probabilidades en los subsistemas con frecuencias empíricas extraídas de los experimentos.

Para entender la propuesta de tipicalidad se considera la situación particular en la que el universo puede dividirse en un subsistema de interés y su ambiente. Se toman n copias del subsistema de interés (que pueden considerarse como n subsistemas de interés), con coordenadas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y la función de onda del universo puede escribirse de la forma⁴

$$\Psi = \psi(x_1)\psi(x_2)\dots\psi(x_n)\phi(y) + \Psi^\perp, \quad (6.7)$$

donde y denota las coordenadas del ambiente de la colección de subsistemas, y Ψ^\perp es macroscópicamente disjunto de $\phi(y)$. En la teoría de onda piloto se tienen posiciones bien definidas $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ y $Y(t)$. Si Y es el soporte de $\phi(y)$, entonces Ψ^\perp será irrelevante para el movimiento futuro de las partículas y se puede asignar una función efectiva ψ a cada uno de los n subsistemas. Para el argumento de tipicalidad de DGZ, se supone que tanto Ψ^\perp como ϕ tienen soportes disjuntos a nivel macroscópico y que $Y_t \in \text{supp}(\phi)$, así que cada uno de los n subsistemas tiene una CWF ψ idéntica. Se sigue de la fórmula fundamental de la probabilidad condicional ec. (6.6) que

$$\mu(X_1 \in dx_1, X_2 \in dx_2, \dots, X_n \in dx_n|y) = |\psi(x_1)|^2 |\psi(x_2)|^2 \dots |\psi(x_n)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (6.8)$$

Entonces, las configuraciones X_i de las partículas que componen los miembros del ensamble de subsistemas idénticamente preparados son independientes, con variables aleatorias distribuidas idénticamente, y distribución común $|\psi(x)|^2$.

Esto es esencialmente una aplicación estándar e inmediata de la ley de los grandes números para inferir que, en el límite $n \rightarrow \infty$, la distribución empírica

$$\rho_{emp}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - X_i) \quad (6.9)$$

⁴Esta es una suposición importante sobre cómo interactúan los sistemas de interés, en este caso, interactúan de tal forma que se puede separar la función de onda de esta forma tan simple.

es muy cercana a $|\psi|^2$ para la mayoría descrita por μ de las configuraciones iniciales $Q(0)$. Un postulado un poco más preciso es en el que la medida del conjunto de concordancia para el cual $\|\rho_{emp} - \rho\| \leq \epsilon$, para una noción adecuada de $\|\cdot\|$, alcanza la unidad cuando $n \rightarrow \infty$. Esta ϵ es la tolerancia que debe asociarse a las frecuencias empíricas con la medida de tipicalidad.

Capítulo 7

Enfrentamiento de las perspectivas

Para comenzar esta sección se exponen los argumentos que Callender [5] considera importantes objeciones al trabajo de Valentini, luego se discuten estas críticas desde una perspectiva lo más neutral posible. Además, se establece una crítica muy importante al argumento de typicalidad dada por Norsen [15].

7.1 Crítica de Callender

Según Callender hay tres razones para no estar de acuerdo con el teorema- H de Valentini como la mejor explicación para la regla de Born. Menciona que las dos primeras tienen que ver con la formulación original de Tolman del teorema- H en grano-grueso, y la última tiene que ver únicamente con mecánica de onda-piloto. Para comenzar con sus objeciones hay que analizar el contexto que toma Callender.

- (i) Se tiene que asumir que la distribución inicial de grano-grueso $\overline{\rho_0}$ es igual a la distribución inicial de grano-fino (a esto, Valentini lo llama condición de "no microestructura de grano-fino"). Callender se pregunta si se debería aceptar esta condición, responde que dado el contexto no parece haber una gran ventaja en aceptarla, y vuelve a preguntar: ¿Es obvio que asumir $\overline{\rho_0(x)} = \rho_0(x)$ es menos objetable que asumir el postulado estadístico para una función de onda efectiva? Según Callender, en ambos casos se está asumiendo un perfil especial de la configuración temprana de la distribución.
- (ii) La prueba muestra que $S(\overline{\rho_0}) \leq S(\overline{\rho_1})$ si se da que $\overline{\rho_0(x)} = \rho_0(x)$. Pero de esto no se sigue que $S(\overline{\rho_1}) \leq S(\overline{\rho_2})$. Nada se sigue acerca de los valores relativos de dos entropías si ambos están después de la condición inicial. Para obtener $S(\overline{\rho_1}) \leq S(\overline{\rho_2})$, se necesita $\overline{\rho_1(x)} = \rho_1(x)$. En efecto, se necesita volver a aleatorizar la dinámica. Tal vez haya una forma de ver las cosas en

donde la realeatoriedad sea causada por la preparación de la medición. Si no hay una forma, y si la hay, la realeatoriedad efectiva luce sospechosa. Si no es claro asumir que $\overline{\rho_0(x)} = \rho_0(x)$ es menos objetable que asumir $\rho = |\Psi|^2$, entonces es aun menos claro asumir $\overline{\rho_i(x)} = \rho_i(x)$ una y otra vez.

- (iii) Callender menciona que el artículo de Valentini no distingue entre la función de onda universal y la función de onda efectiva. Como se dijo en la sección sobre tipicalidad, Callender quiere justificar la regla de Born para una función de onda efectiva. $\rho = |\Psi|^2$ no es suficiente para que $\rho = |\psi|^2$ se sostenga en un contexto de medición. Incluso si se prueba que el universo como un todo está en equilibrio cuántico, lo que realmente se quiere probar es que los patrones inherentes a los subsistemas del universo están en equilibrio cuántico.

Una forma de criticar la postura de Valentini es darse cuenta que lo que concluye como: *que por razones puramente estadísticas, la probabilidad de densidad de grano grueso \overline{P} tiende al valor $|\overline{\Psi}|^2$, que maximiza la entropía subcuántica*, no es del todo cierto. Valentini usa una suposición adicional (además de la mecánica de Bohm y estadística), como Boltzmann en la deducción de su ecuación para la distribución de partículas en un gas. Es decir, Valentini asume que en el tiempo inicial $t = 0$, $\overline{P}(0) = P(0)$ y $|\overline{\Psi(0)}|^2 = |\Psi(0)|^2$, esto lo llama suposición de falta de "microestructura" para el estado inicial. Valentini dice que *es esta suposición la que introduce una distinción entre pasado y futuro*. Esta falta de "microestructura" es el análogo subcuántico de la Stosszahlansatz. Entonces, dado que las ecuaciones guía y de Schrödinger son susceptibles de la invariancia ante inversión temporal, es decir, no distinguen entre pasado y futuro en las condiciones iniciales, se prueba que hay un elemento ajeno a la teoría que debe postularse para obtener el equilibrio cuántico. Esto también lo menciona Callender en [5].

7.2 Crítica de Norsen

Existe otro punto de vista sobre lo que Callender discute en (i). Según Norsen en [15], la propuesta de Valentini sobre la ausencia de microestructura es mejor en el sentido de que es una suposición mucho más débil que el postulado estadístico.

En (iii) Callender cree que Valentini no distingue a la función de onda universal de la función de onda efectiva, no obstante, en la cuarta parte del artículo [19], Valentini señala que la singularización de un sistema es "una cosa práctica definida por circunstancias" que no está en la formulación fundamental de la teoría. Para probar que la regla de Born surge también en los subsistemas de medición, representa matemáticamente estas "cosas prácticas definidas por circunstancias" describiendo un estado que se divide en subsistemas que cumplen por sí mismos la ecuación de Schrödinger, y que con cálculos posteriores se llega que a nivel de grano-grueso estos subsistemas cumplen la regla de Born.

Norsen remarca en [15] que si el sistema físico que se está estudiando es el universo completo, entonces $\rho = |\Psi|^2$ (donde Ψ es la función de onda universal) es en cierto sentido una cosa que realmente existe, pero P , entendida como la distribución de probabilidad sobre las configuraciones Q del universo completo, no es algo real. Lo que la teoría de onda-piloto postula como existente además de la función de onda universal, es justo alguna configuración definida $Q(t) = \{X_1(t), \dots, X_N(t)\}$. No es posible probar que "el universo completo está en equilibrio cuántico", porque la distribución P para las configuraciones Q , dicen DGZ, carece de significado físico, en el sentido de que solo hay un universo.

En el mismo trabajo, Norsen hace notar un problema serio en el argumento de typicalidad, y es que este argumento puede parecer circular, en el sentido que para obtener la regla de Born $\rho = |\psi|^2$ de un subsistema, es menester definir la medida natural de typicalidad como $\mu = |\Psi(q, 0)|^2$ con Ψ la función de onda universal. Por otro lado, si se considera otra medida natural de typicalidad como $\mu = |\Psi|^4$, se llega a $\rho = |\psi|^4$ que es distinto a la regla de Born, y así si se define alguna medida natural de typicalidad distinta, se obtiene alguna distribución para la probabilidad distinta. Esto hace notar que la elección de la medida natural es importante para obtener la regla de Born, pero no hay más justificación para el argumento que el que se sustenta en la suposición de que en la práctica se debe observar la regla de Born (por esto el argumento parece circular), incluso que la medida $\mu = |\Psi|^2$ es la natural dada su equivarianza, y no otra.

No obstante, Norsen considera que en cualquier medida en que uno encuentre que el argumento de typicalidad que presentan DGZ es circular, o que se basa demasiado en suposiciones poco convincentes del tipo de "naturalidad", está seguro que la estadística de la regla de Born es típica, es decir, se espera observar la regla de Born en la práctica, no solo de acuerdo con esa medida equivariante especial de typicalidad, sino de acuerdo con prácticamente cualquier medida "razonable" de typicalidad.

Norsen no está diciendo que la regla de Born se sigue necesariamente de la dinámica de la teoría de onda-piloto. Lo que piensa es que el análisis de typicalidad junto al análisis de Valentini y las simulaciones numéricas de su trabajo muestran que cualquier medida "razonable" (suave, simplemente expresable, no artificial) sobre las configuraciones iniciales implicará que debemos esperar ver la regla de Born. Concluye diciendo que si eso no constituye una explicación estadística de la regla de Born, desde los primeros principios dinámicos de la teoría de onda-piloto, no sabe qué sería o podría ser esa explicación.

7.3 Análisis del enfrentamiento de perspectivas

Como se vio anteriormente, Callender quiere hacer notar que no hay ventajas en asumir esta falta de microestructura sobre asumir el postulado estadístico. En ambos casos se está asumiendo un per-

fil especial de la configuración temprana de la distribución. Aunque esto último es cierto, podemos preguntarnos ¿es posible encontrar alguna diferencia entre el postulado estadístico y la falta de microestructura? Esto puede responderse de forma positiva, observando que el postulado estadístico lleva de forma directa al equilibrio cuántico (equivarianza), mientras que la suposición de falta de microestructura necesita un tratamiento no trivial de igual forma que la suposición de la forma específica de la función de Liapunov que lleva al equilibrio cuántico.

Por otro lado, Callender discute en (ii) que si no es claro asumir que $\overline{\rho_0(x)} = \rho_0(x)$ es menos objetable que asumir $\rho = |\Psi|^2$, resulta aun menos claro asumir $\overline{\rho_i(x)} = \rho_i(x)$ una y otra vez. Esta crítica a Valentini es muy razonable, ya que para tener la seguridad de que para todo tiempo t dentro de un intervalo $[t_i, t_j]$ se satisfaga el teorema- H subcuántico, es necesario hacer una infinidad de veces la suposición de falta de microestructura. Esto quiere decir que en todos los tiempos intermedios entre t_i y t_j no hay diferencia entre la distribución de grano-grueso y la distribución de grano-fino. Esto se visualiza haciendo los pasos, es decir, postular primero $\overline{\rho_{t_i}(x)} = \rho_{t_i}(x)$, implica que,

$$\overline{H}(t_i) - \overline{H}(t_i + \delta t_1) = \int d\Sigma |\Psi|^2 f \ln \frac{f}{\overline{f}} \geq 0. \quad (7.1)$$

Luego, postular $\overline{\rho_{t_i+\delta t_1}(x)} = \rho_{t_i+\delta t_1}(x)$ para obtener

$$\overline{H}(t_i + \delta t_1) - \overline{H}(t_i + \delta t_1 + \delta t_2) = \int d\Sigma |\Psi|^2 f \ln \frac{f}{\overline{f}} \geq 0, \quad (7.2)$$

y así sucesivamente. Es fácil darse cuenta que esto no llena todo el continuo del intervalo $[t_i, t_j]$, dado que se usaron índices enteros para los saltos temporales δt_n . Entonces, para garantizar que esta desigualdad se dé en todo el intervalo es necesario considerar la evolución temporal continua (no dar saltos). Tomando el límite en el que $\delta t_m \rightarrow 0$ y el número de sucesiones tiende a infinito, se observa que la distribución de grano grueso es igual a la distribución de grano fino en todo el universo dentro del intervalo continuo $[t_i, t_j]$. Por lo tanto, la prueba del teorema- H subcuántico sobre grano-grueso deja de tener sentido, y resulta ser necesario buscar otra alternativa.

Con todo lo anterior, fue claro que, si lo que se busca es una fundamentación conceptualmente clara y suficientemente simple, es imposible dar respuesta a la cuestión de lo que se observa en los experimentos de mecánica cuántica.

En todos los casos en los que se buscó dar una respuesta a la regla de Born como una herramienta efectiva para relacionar la teoría con la práctica, se cae en suposiciones que exigen mucho al que estudia este fenómeno, por ejemplo, que la medida natural del universo no es otra más que $|\Psi_0|^2$, en el caso de tipicalidad, o que en el universo hay una falta de microestructura para el estado inicial.

El argumento de tipicalidad, como se vio, se critica desde la propuesta de hacer a la medida $|\Psi|^2$ la medida típica o natural, ¿por qué escoger esta medida? los tipicalistas responden con que esta medida

es típica debido a la equivarianza de la distribución $|\Psi|^2$, que, además, es independiente del argumento mismo. Entonces, el tipicalista se escuda en la equivarianza para decir que una distribución específica es la típica o natural del universo. Esto es insuficiente para imponer lo que es natural y es necesario ver al problema con humildad para darse cuenta de esto. Por tanto, el tipicalista debe aceptar que su medida "natural" es un postulado convencional que no surge de forma natural.

En el caso de relajación térmica de Valentini, el hecho de que se pueda hacer una analogía con el equilibrio térmico, con base en la similitud de algunas ecuaciones, es poco convincente. Incluso, aceptar que el estado inicial es de tal forma que la función de distribución para granos-gruesos es indistinguible de la función a nivel de grano-fino resulta en una suposición adicional para la teoría fundamental. En este sentido, la teoría de Valentini no supera en ningún aspecto al tipicalista: la relajación cuántica requiere imponer que las condiciones iniciales son de una forma específica (la falta de microestructura, o como lo escribe Valentini "no hay conspiración en las condiciones iniciales"). Estos puntos del argumento son tan cuestionables como la imposición de la medida típica. Por lo tanto, hay una falta de humildad en decir que no hay conspiración: Valentini postula que el universo es como le conviene para sus cálculos.

Hay que notar que a partir de consideraciones generales para la dinámica de las partículas Bohmianas no es posible llegar a un estado de equilibrio. Para que podamos obtener una dinámica que considere estados fuera del equilibrio y que llegue a un estado de equilibrio, es necesario postular algo acerca del estado inicial, además de imponer una asimetría temporal que permita definir lo que es el equilibrio. Por tanto, la crítica de asimetría temporal que se hizo al trabajo de Boltzmann es análoga a la crítica de una teoría subcuántica que busque el equilibrio.

La búsqueda para establecer la mejor forma de explicar la regla de Born nos llevó a darnos cuenta de que sea cual sea la explicación, deben considerarse elementos teóricos independientes. La explicación de la regla de Born conduce a teorías totalmente independientes, y fundamentos igual de aceptables y cuestionables. Por lo tanto, la mecánica de Bohm se bifurca en teorías completas con explicaciones sobre el mundo y los fenómenos separadas.

En las dos posturas mencioné una falta de humildad. Esta humildad debe entenderse como que las críticas que se hacen los autores son realmente importantes y, como filósofos de la ciencia, tienen la obligación de responder las críticas sin ambigüedad ni criterios como la naturalidad para que su postura prevalezca. Si es el caso que no pueden responder (como se vió, las críticas para ambos son indiscutibles), deben aceptar que la crítica de su contraparte sí tiene consecuencias para su interpretación, y no hay, desde mi perspectiva, una superioridad conceptual en ninguna de las interpretaciones de la regla de Born.

Entendiendo que son teorías separadas, la propuesta de Norsen de reconciliar a Valentini con los tipicalistas se vuelve poco razonable. Como se ha visto, los argumentos trabajan en contextos idealizados de tal forma que se justifiquen adecuadamente cada uno por separado. Es demasiado

pedir, a quien estudia la regla de Born, unir estos contextos y justificarse con decir que si esta unión no constituye una explicación de la regla de Born, entonces no sabe lo que será.

Este trabajo puede entenderse como una crítica general a la teoría de de Broglie-Bohm. Empero, la interpretación de onda-piloto aporta claridad conceptual y resuelve el problema de la medición justificando de forma precisa el comportamiento de sus elementos ontológicos para llegar a las observaciones. Su único punto débil es el postulado estadístico, que como se estudia en la tesis, es un problema importante para la teoría con dos vías conocidas que pueden elegirse o rechazarse según le convenga a quien estudia este problema. Concluyo que en la teoría de de Broglie-Bohm deben tomarse en serio las críticas que se hacen a las justificaciones sobre la regla de Born. Esto sin abandonar la interpretación, ya que el avance conceptual me parece invaluable, a pesar de tener un postulado que incomoda a quien le estudia.

Capítulo 8

Referencias

- [1] ALBERT, D. *Quantum Mechanics and Experience*. Harvard University Press, 2009.
- [2] BOHM, D. *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables. I.*, vol. 85. 1952.
- [3] BOHM, D. *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I.*, vol. 85. American Physical Society, Jan 1952.
- [4] BOLTZMANN, L. *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-molekülen*, vol. 1 of *Cambridge Library Collection - Physical Sciences*. Cambridge University Press, 2012, p. 316–402.
- [5] CALLENDER, C. *The emergence and interpretation of probability in Bohmian mechanics*, vol. 38. Elsevier, 2007.
- [6] CARLESSO, M., AND DONADI, S. Collapse models: main properties and the state of art of the experimental tests.
- [7] DÜRR, D., GOLDSTEIN, S., AND ZANGHI, N. *Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty*, vol. 67. Springer, 1992.
- [8] EVERETT, H. *Relative state formulation of quantum mechanics*, vol. 29. 1957.
- [9] GAO, S. *The Meaning of the Wave Function: In Search of the Ontology of Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [10] GIBBS, J. *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2014.

- [11] GÓMEZ-CALERO, M. J. *De la ecuación de boltzmann a navier-stokes*, 2018.
- [12] MAUDLIN, T. *Three measurement problems*, vol. 14. 1995.
- [13] MAUDLIN, T. *The Grammar of Typicality*. 2019, ch. 7, *Statistical Mechanics and Scientific Explanation*, pp. 231–251.
- [14] NORSEN, T. *Foundations of Quantum Mechanics: An Exploration of the Physical Meaning of Quantum Theory*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2017.
- [15] NORSEN, T. *On the explanation of Born-rule statistics in the de Broglie-Bohm pilot-wave theory*, vol. 20. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2018.
- [16] OKON, E. *El problema de la medición en mecánica cuántica*. *Rev. Mex. Fis.*, 2014.
- [17] TOROŠ, M., AND BASSI, A. *Bounds on quantum collapse models from matter-wave interferometry: calculational details*, vol. A51. 2018.
- [18] UFFINK, J. Boltzmann's work in statistical physics. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, Ed., spring 2017 ed. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017.
- [19] VALENTINI, A. *Signal-locality, uncertainty, and the subquantum H-theorem. I*, vol. A156. 1991.