



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO MATEMÁTICO SOBRE LA DISEMINACIÓN  
CULTURAL SEGÚN AXELROD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JOEL VALDIVIA ORTEGA

TUTOR:

DR. FRANCISCO JAVIER SEVILLA PÉREZ

Ciudad de México 2021





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar la diseminación cultural en la sociedad partiendo del modelo basado en agentes hecho por Axelrod en 1997. Dicha modelación consiste en representar la sociedad con una matriz y definir entre sus individuos reglas de interacción, de modo que la dinámica resultante sea consecuencia de la suma de las acciones de cada uno de sus integrantes; esto con el objetivo de responder cuestionamientos sobre la manera en que se comportará la civilización a largo plazo, donde dichas preguntas las plantea el mismo autor.

Tras realizar algunas simulaciones con el algoritmo de Axelrod, comparé las ideas sobre las cuales está fundado y los resultados a los que lleva contra algunas características de la sociedad actual. Esto me hizo notar una gran diferencia entre el modelo en cuestión y la actualidad, por lo que consideré necesario hacer modificaciones a su algoritmo, intentando en primer instancia alterarlo lo menos posible.

De nuevo llevé a cabo algunas simulaciones con el algoritmo modificado, obteniendo resultados cualitativamente diferentes. Buscando una manera cuantitativa de estudiar el fenómeno, noté que tanto el modelo original de Axelrod como las modificaciones realizadas por mí corresponden a una cadena de Markov, por lo cual proseguí a calcular las matrices de transición asociadas a ambos procesos para así poder hacer estimaciones a largo plazo de las sociedades y contestar a las preguntas que Axelrod planteó. Las matrices de transición conseguidas me permitieron afirmar que efectivamente estaba tratando con un comportamiento diferente. Sin embargo, esto a su vez me llevó a la resolución de que no podría obtener un modelo satisfactorio para la sociedad si continuaba con esta metodología.

Intentando expresar matemáticamente el comportamiento humano y tener más libertad de modelación que la ofrecida por el modelo axelrodiano, recurrí a los axiomas de von Neumann y Morgenstern para las loterías para así otorgarle una función de pago a los individuos de mi nuevo modelo. Para asegurar la consistencia y computabilidad de este, probé que dichos axiomas son una propiedad que el espacio de las loterías adquiere al momento de asignar sobre ellas un orden como con el que von Neumann y Morgenstern trabajan. Como consecuencia de esto, logré dotar al espacio de las opiniones sociales y las loterías una topología que me aseguraba su computabilidad.

Con estas herramientas, diseñé un nuevo modelo tal que me permite no sólo incluir características primordiales de las sociedades actuales y recrear comportamientos reconocibles de ellas, sino que encajé el espacio que representa la cultura de esta simulación en una superficie y verifiqué estadísticamente la posibilidad de estudiar su dinámica median-

te los números de Betti de la 2-variedad en cuestión, permitiendo así la utilización de los teoremas de variedades en el estudio de este modelo. Como resultado de esto, fui capaz de definir subgrupos sociales dentro de la misma civilización y discernir si estos prevalecerán o se desintegrarán con el tiempo, así como estimar la cantidad máxima de individuos que los conformarán.

Por último me gustaría agregar que es posible que no haya utilizado los términos sociológicos correctos, por lo cual pido al lector ser indulgente con este aspecto. Para remediar este punto, en el mismo texto defino todo concepto que vaya a utilizar, esperando que esto compense los errores de terminología que pudieran encontrarse.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1 Estudio de la diseminación cultural según Axelrod</b>	<b>1</b>
<b>2 Sociedad modificada de Axelrod</b>	<b>13</b>
§2.1 Estudio estocástico de las sociedades . . . . .	23
§2.2 Conclusiones del estudio estocástico . . . . .	30
<b>3 Construcción de una sociedad de partículas</b>	<b>32</b>
§3.1 Teoría de la utilidad de von Neumann y Morgenstern . . . . .	34
§3.2 Sobre la existencia de la función de pago . . . . .	38
<b>4 Ejemplo de la construcción de una sociedad</b>	<b>55</b>
§4.1 Estudio de los grupos sociales . . . . .	71
<b>Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>Referencias</b>	<b>99</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>102</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>103</b>

# Capítulo 1

## Estudio de la diseminación cultural según Axelrod

En el artículo *The dissemination of culture - A model with local convergence and global polarization* [1], Axelrod define la *Cultura* como el conjunto de atributos individuales susceptibles de ser modificados por interacción social y se plantea las siguientes preguntas: Si mediante interacciones sociales la gente tiende a parecerse más en cuanto a creencias, actitudes y comportamiento ¿Por qué no desaparecen las diferencias en cuanto a estos temas? ¿Es posible que lo único que se requiera para esto sea más tiempo?

Para contestar esta pregunta, modela una sociedad como una matriz con determinadas reglas de actualización y en palabras de él mismo, las ideas pilares que guían su modelo son las siguientes:

- Se tomará explícitamente el hecho de que las características culturales de un individuo dependen de la presencia o ausencia de las características culturales de la sociedad.
- Se tomará en consideración que entre más opiniones compartan dos individuos sobre diversos temas, será más probable que estos interactúen.
- La interacción entre individuos tiende a incrementar la cantidad de opiniones que comparten.
- Los mecanismos que cambian las características culturales de un individuo son especificados para actores locales, de modo que las consecuencias de dichos mecanismos son examinados para descubrir propiedades emergentes del sistema ante la interacción de varios actores. Así mismo, no se considerará la existencia de ninguna autoridad central que coordine la dinámica social, permitiendo que las reglas de interacción individuales y las características específicas de cada individuo sean quienes definan el comportamiento del sistema global. De un modelo que tenga esta característica, se dirá que está *basado en agentes*.

- Los individuos siguen reglas simples a la hora de influir o ser influenciados por otros. Dichas reglas no se siguen de ningún principio de cálculo racional basado en costo o beneficio ni siguiendo una estrategia en el sentido de teoría de juegos.

La simplicidad y elegancia de este planteamiento le ganaron a Axelrod el interés de varios investigadores como Castellano, Fortunato y Loreto en [2] donde usaron sus resultados para estudiar los procesos electorales de algunos países europeos durante el siglo XX o como Gonzáles-Avella, Cosenza y Tucci en [4], quienes incluyen el efecto de los medios masivos de comunicación en el modelo en cuestión.

El principal resultado que el mismo autor reconoce es que su sociedad llega a una polarización global mediante convergencia local. Esto quiere decir que mediante su algoritmo, se es capaz de llegar a la aparición de conjuntos disjuntos de individuos tales que todos sus elementos tengan la misma opinión sobre cada uno de los temas existentes y difiera con todos los agentes sociales que pertenecen a otra zona estable al menos en su opinión sobre algún tema, donde llamará *zona estable* a cada uno de los conjuntos disjuntos y dirá que *convergió de manera local* cuando estas aparezcan. Por otro lado, al decir que la sociedad puede presentar una polarización global, se refiere a la posibilidad de que el conjunto de individuos que conforman una zona estable puede estar contenido propiamente en el conjunto de individuos de la sociedad.

Para dar claridad a lo dicho anteriormente y facilitar la comprensión del modelo de Axelrod, será útil tener las siguientes definiciones.

**Definición:** Sociedad de Axelrod

Diré que  $X$  es una *sociedad de Axelrod* si  $X \in M_{n \times m}(F_{\mathbb{R}^k})$  y llamaré *individuo* a cada una de las entradas de  $X$ , expresadas por un vector de dimensión  $k$  y donde  $F_Y := \{f : \mathbb{R} \rightarrow Y | f \text{ es una variable aleatoria } \}$ . A su vez, si  $X = (x_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}}$  denotaré con  $X^t := (x_{ij}(t))_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}} \in M_{n \times m}(\mathbb{R}^k)$ , es decir como la matriz correspondiente al evaluar todas las funciones que tiene  $X$  como entradas en el  $t$ -ésimo momento.

Así mismo diré que una sociedad es *plana* si dado un individuo con entradas  $(i, j)$ , sus *vecinos*, en caso de existir, se definen como algunos de los siguientes individuos:  $(i - 1, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j - 1)$  y  $(i, j + 1)$ . Cabe mencionar que en caso de que no haya ambigüedades, a una sociedad de Axelrod la llamaré simplemente *sociedad*.

**Definición:** Tema

Dado un individuo de una sociedad de Axelrod  $X \in M_{n \times m}(F_{\mathbb{R}^k})$ , llamaré *tema* a cada una de las entradas del vector que representa a dicho individuo.

**Definición:** Opinión

Dada una sociedad de Axelrod  $X \in M_{n \times m}(F_{\mathbb{R}^k})$ , y denotando  $x_i$  como el  $i$ -ésimo valor de  $x$  entrada de  $X$ , diré que las *opiniones de los individuos sobre el tema  $i$*  son los elementos de  $\{x_i : x \text{ es entrada de } X\}$ .

**Definición:** Similitud

Dados dos individuos  $a$  y  $b$  en una sociedad de Axelrod con  $p$  temas, defino la función de similitud entre  $a$  y  $b$  sobre el tema  $i$  como

$$s_i(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i \neq b_i \\ 1 & \text{si } a_i = b_i \end{cases}$$

y diré que la similitud entre  $a$  y  $b$  será  $\sum_{i=1}^p s_i(a, b)/p$ .

Las reglas de interacción entre individuos que actualizan sus estados, o equivalentemente que actualizan el conjunto de valores de las opiniones sobre cada tema, son:

1. Seleccionar aleatoriamente y con distribución uniforme alguno de los individuos de la sociedad y uno de sus vecinos, los cuales son definidos como se desee.
2. Con probabilidad igual a su similitud, ambos agentes interactuarán. Una interacción consiste en seleccionar de manera aleatoria un tema en el cual ambos sujetos difieran (en caso de existir) y cambiar la opinión del individuo seleccionado por la de su vecino respecto a este tema.
3. Se repite 1 y 2 tantas veces sea requerido.

Usando este algoritmo, redacto el pseudocódigo 1.

```

1 #PSEUDOCODIGO 1
2
3 #Pseudocodigo que implementa las reglas de interaccion de Axelrod (1997)
  para modelar la diseminacion de la cultura usando un modelo matricial
4
5 opiniones=[1,...,k] #valores numericos que representan las diferentes
  opiniones que pueden tomar los individuos sobre los diferentes temas
6
7 A #Matriz de nxm con listas aleatorias de longitud p como entradas.
  Representa una sociedad de nxm individuos donde existen p temas
8
9 def vecinos(A,i,j): #definimos los vecinos del individuo [i,j] de la
  sociedad A
10     v=[]
11     posiciones=[[0,1],[0,-1],[1,0],[-1,0]]
12     for q in posiciones:
13         if [i,j]+q in {1,...,n}x{1,...,m}:

```

```

14     v.append(A[[i,j]+q])
15     return(v)
16
17 for q in numero_deseado_de_iteraciones:
18     [i,j] = valor_aleatorio_en_{1,...,n}x_{1,...,m}
19     v = valor_aleatorio_de_vecinos(A,i,j) #un vecino de [i,j] tomado
    aleatoriamente con distribucion uniforme
20     u= valor_aleatorio_en [0,1] generado de manera uniforme
21     similitud = 0
22
23     for l in {1,...,p}:
24         if A[i,j,l]==v[l]:
25             similitud+=1
26
27     similitud=similitud/p #es la similitud entre A[i,j] y v
28
29     if similitud >=u: #interactúan con una probabilidad proporcional a la
    similitud entre A[i,j] y v
30         k = valor_aleatorio_en_la_lista_de_opiniones_diferentes.
31         A[i,j,k]=A[v[0],v[1],k] #la opinion del individuo [i,j] sobre el tema
    p se iguala a la de su vecino v.

```

En la tabla 1.1 muestro una secuencia de imágenes correspondientes a una sociedad plana de Axelrod en distintas configuraciones generadas por el algoritmo del pseudocódigo 1, es decir, cada una de las siguientes imágenes representa la misma sociedad en una iteración diferente; donde dicha sociedad consta de 400 individuos organizados en una matriz de  $20 \times 20$  con 10 temas presentes sobre los cuales cada sujeto puede escoger entre 10 opiniones diferentes por cada tema.

En dichas imágenes se tiene que cada pequeño cuadrado es un individuo de la sociedad al cual le asigno un tono en función de la similitud de opiniones que tiene con sus vecinos. Si 0 representa el negro y 1 el blanco, entonces a un individuo de la sociedad le asignaré el tono equivalente a la razón entre la suma de las similitudes del individuo y sus vecinos y la cantidad de vecinos que tiene.

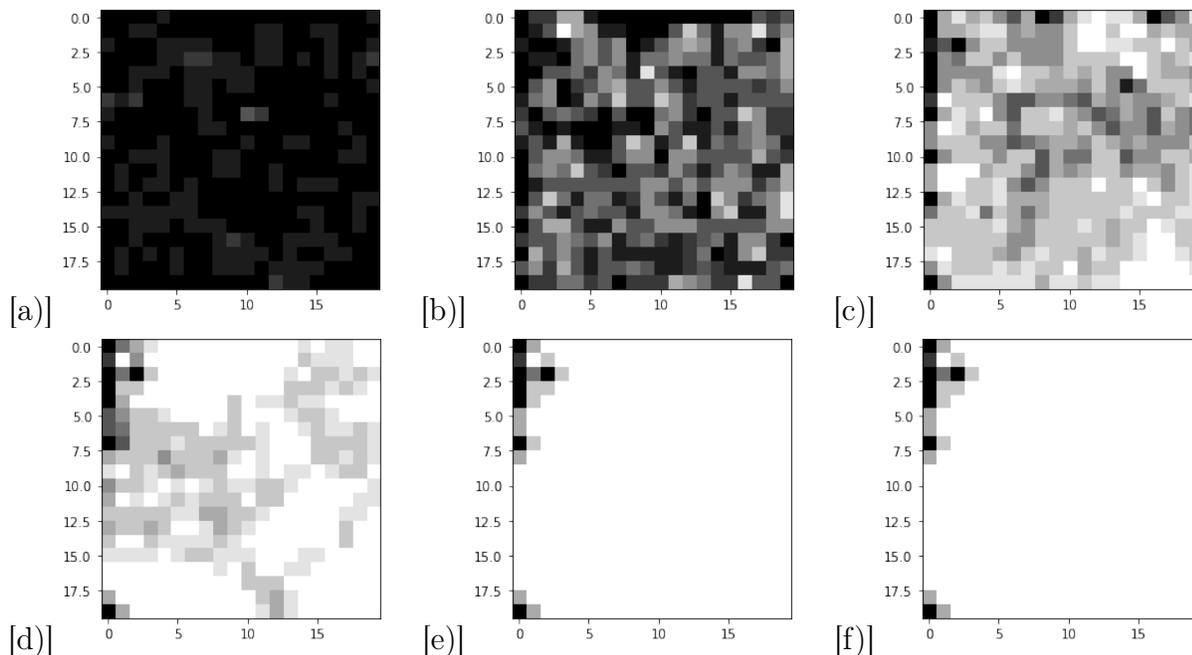


Tabla 1.1: Ejemplos de iteraciones generados mediante el algoritmo de Axelrod de [1]. a) Iteración 0, b) Iteración 100, c) Iteración 1000, d) Iteración 3000, e) Iteración 5000, f) Iteración 80000.

Si bien es cierto que el modelo de Axelrod fue muy citado en su momento e impulsó en gran medida el interés por la modelación de fenómenos sociales, en la tabla 1.1 y en el pseudocódigo anterior se muestran varias características del modelo en cuestión, las cuales no corresponden a situaciones observables en las sociedades reales. Enlisto algunos de estos puntos a continuación:

- **Alcance comunicativo:** Todos los individuos tienen el mismo alcance comunicativo en todo momento, lo cual resulta obsoleto en un mundo como el nuestro donde existen cuentas de Youtube con más de 100 millones de seguidores [6]. Esta restricción se menciona en el artículo de Axelrod y se aplica de modo que los vecinos de un individuo posicionado en  $(i, j)$  son los sujetos localizados en  $(i-1, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j-1)$  y  $(i, j+1)$  en los casos en los que existan.
- **Imposibilidad de movilidad:** Para justificar la falta de movilidad de los integrantes de su modelo, Axelrod propone entenderlos como ciudades, de modo que le asigna un único conjunto de opiniones a todos los integrantes de cada ciudad. Es fácil notar que este sistema tiene el mismo principio que el Colegio Electoral estadounidense, el cual ha sido ampliamente criticado por no ser un sistema que represente correctamente las opiniones de la población con fenómenos como el *gerrymandering* [7] o la victoria del año 2000 de Bush sobre Al Gore, pese a que este último tenía una mayor cantidad de votos [9].

Considero provechoso ahondar un poco en la manera a la que me refiero que el *gerrymandering* puede entrar en el modelo de Axelrod. Ya que en este contexto en-

tenderemos los átomos del modelo como ciudades y que cada sociedad sólo tiene un conjunto de opiniones, todas las personas que habitan en la sociedad deben entrar en un proceso de representación para poder expresar su opinión. De este modo, la capacidad de este modelo para describir la diseminación cultural dentro de una sociedad está limitado por la eficacia del sistema representativo de cada ciudad; sin embargo, se había observado que este sistema tiene el mismo principio que el Colegio Electoral estadounidense, por lo cual es susceptible a sus mismas fallas, dentro de las cuales se encuentra el fenómeno conocido como *gerrymandering*. Este fenómeno, expuesto por primera vez hacia 1812, consiste en “la manipulación de las circunscripciones electorales de un territorio, uniéndolas, dividiéndolas o asociándolas, con el objetivo de producir un efecto determinado sobre los resultados electorales”[8], de modo que podrían encontrarse cambios en la opinión de una ciudad por el simple hecho de cambiar las circunscripciones electorales de la misma, sin que se lleve a cabo ninguna interacción con alguno de sus vecinos, siendo esto un fallo en el modelo a acuerdo de sus propios objetivos.

- **Nula generación intelectual:** Los integrantes de la sociedad son incapaces de dialogar o de negociar sino que en caso de interactuar, aceptarán la opinión del otro sin objeción alguna. Esto lleva a que no se generen nuevas ideas y que por el contrario, la evolución de la cantidad de opiniones sobre determinado tema sea monótonamente decreciente. En mi opinión, una característica social que va en contra de esta esta fenómeno es que el promedio de solicitudes de patente para inventos presentadas ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial supera las 13000 solicitudes anuales [10], denotando así la capacidad creativa de la sociedad.
- **Inmortalidad de los sujetos:** Este modelo no contempla la muerte de sus individuos, independientemente de la cantidad de iteraciones acumuladas, hecho evidentemente ajeno a la realidad.
- **No interacción con ideologías diferentes:** Como se muestra en las figuras *e*) y *f*) de la tabla 1.1, se llega a un punto en que la sociedad permanece inmutable ya que se cumple que para cada individuo de la misma y dado uno de sus vecinos, la similitud entre ellos es nula o unitaria. Una vez más, esta característica va en contra de la realidad ya que como se muestra en la figura 1.1 generada por [11] y respaldada por [12], la cantidad de citas a otras ciencias tanto en ciencias naturales como en ciencias sociales va en aumento, mostrando la capacidad de los integrantes de la sociedad a colaborar aunque sus opiniones sobre cada uno de los temas disponibles sean diferentes.

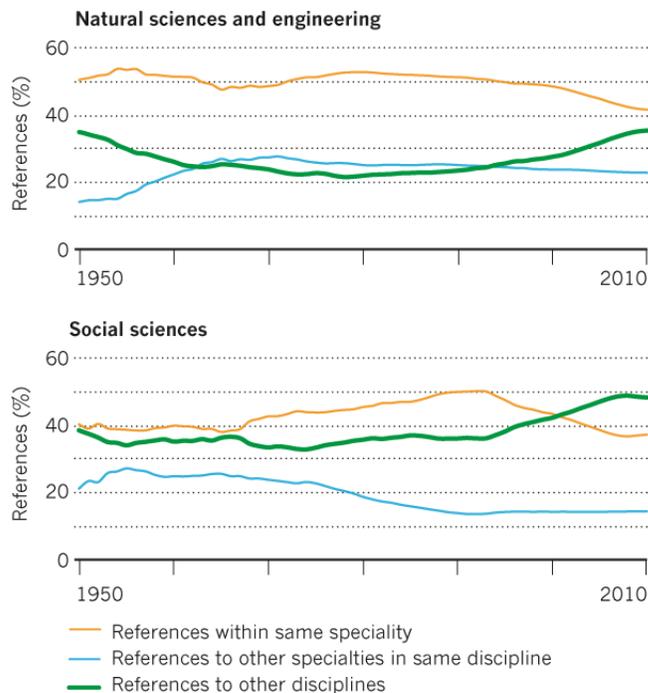


Figura 1.1: Tendencias multidisciplinares en las ciencias según [11]

Ahondando en el punto referente a la fobia de los integrantes de la sociedad hacia la interacción con ideologías diferentes dentro de la sociedad de Axelrod, propongo la siguiente definición.

**Definición:** Zona estable

Dada una sociedad de Axelrod evaluada en el momento  $t$  representada por una matriz en  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , diré que los individuos con entradas  $A \subseteq \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  conforman una zona estable si dado cualquier par de ellos cumplen que su similitud es la máxima posible y es maximal respecto a esta propiedad bajo la contención de conjuntos.

De ahora en adelante, cada que mencione el espacio de individuos me referiré a dicho espacio dotado con la métrica del taxista<sup>1</sup>

Notemos que las figuras e) y f) de la tabla 1.1 muestran que la sociedad ha llegado a estar compuesta íntegramente por zonas estables pues todos los individuos cumplen que dado uno de ellos, la probabilidad de que interactúe con alguno de sus vecinos es cero o uno. Esto me conduce de manera natural a cuestionarme si toda sociedad convergerá eventualmente, siendo esta duda de tal importancia que es la pregunta que lleva a Axelrod a iniciar su trabajo. La respuesta a esto es una negación como se muestra en el siguiente Lema.

<sup>1</sup>La métrica del taxista entre los elementos  $p, q$  de un espacio vectorial encajado en  $\mathbb{R}^n$  es  $\sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$ .

**Lema:** Si  $X$  es una sociedad de Axelrod con geometría plana tal que existen dos individuos que no son vecinos entre sí,  $X$  no llegará necesariamente a estar compuesta de zonas estables únicamente. En caso de que  $X$  estuviera únicamente compuesta de zonas estables, diremos que  $X$  convergió.

*Demostración.* Sean  $a$  y  $b$  dos individuos de la sociedad tales que no son vecinos entre sí. Luego tenemos que si  $V_a$  es el conjunto que contiene a  $a$  y a sus vecinos, entonces  $V_a \neq X$ . Ya que queremos demostrar que  $X$  no necesariamente converge, podemos suponer que  $V_a$  no es una zona estable.

Así, la probabilidad de que en una iteración dada el individuo escogido para actualizar sus opiniones no pertenezca a  $V_a$  es  $\frac{|X \setminus V_a|}{|X|}$ , la cual no es nula pues  $V_a \subsetneq X$ . Por lo tanto la probabilidad de que ninguno de los individuos de  $V_a$  actualice sus opiniones en  $t \in \mathbb{N}$  iteraciones es  $(\frac{|X \setminus V_a|}{|X|})^t$ , lo cual es distinto de cero para todo número natural; i.e. es posible que no se actualicen las opiniones de ningún elemento de  $V_a$  para ninguna cantidad natural de iteraciones.

Leyendo el algoritmo expresado en el Pseudocódigo 1 tenemos que lo anterior implica que  $V_a$  no podrá convertirse en una zona estable, llegando así a la conclusión buscada.  $\square$

Cabe mencionar que en el método que planteo en la demostración anterior para obtener una sociedad no convergente, la probabilidad de que se cumpla tiende a cero conforme la cantidad de iteraciones realizadas tiende a infinito. Esto no es una objeción a la demostración del enunciado en cuestión pues el objetivo de esta sólo es probar que es posible.

Esto es a su vez una explicación de que no haya observado este fenómeno en las simulaciones numéricas, pues por definición de límite tengo que si  $\epsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que si  $t > N$ , entonces  $0 < (\frac{|X \setminus V_a|}{|X|})^t < \epsilon$ . Así, si quisiera recrear este fenómeno dentro de la simulación, necesitaría que la computadora fuera capaz de generar valores infinitamente pequeños, lo cual no ocurre. Es debido a esto que pese a que matemáticamente este fenómeno es posible, numéricamente siempre observé que las sociedades convergían.

Ahora que sé que pese a las suposiciones de Axelrod no necesariamente llegaremos a la convergencia de la sociedad, pondré atención en que las sociedades que elija inicialmente para los cálculos numéricos sean sociedades convergentes.

Siguiendo con el análisis de las características de las sociedades, me pregunto, al igual que Axelrod, por el tamaño que las zonas estables pueden tener en caso de existir, por lo que planteo la siguiente observación, la cual cobrará relevancia en el siguiente capítulo al comparar el comportamiento de esta sociedad vs. la sociedad modificada que propongo.

**Observación:** Las sociedades de Axelrod pueden tener zonas estables de más de un elemento y que no son la sociedad entera.

*Demostración.* Sea una sociedad de Axelrod de  $n \times m$  individuos con  $p$  temas y  $k$  opiniones por cada uno. Denotando con  $\bar{a} := [a, \dots, a]$  a un individuo cuya opinión es  $a$  para todos los temas, notemos que debido a que el estado inicial de la sociedad se escoge con una

distribución aleatoria uniforme, la probabilidad de que un individuo inicie con esta configuración de opiniones es  $k^{-p}$ , mientras que la probabilidad de que todos los individuos de un subconjunto de la sociedad con  $r$  sujetos tengan  $\bar{a}$  como configuración inicial de opiniones es  $1/(rk^p)$ , correspondiente al inverso del número de configuraciones de opiniones posibles, por lo que la probabilidad de que el estado inicial de una sociedad sea

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \cdots & \bar{1} \\ \bar{0} & \cdots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \cdots & \bar{0} \end{pmatrix}$$

es igual a  $1/(nmk^p)$ , lo cual no es nulo.

Evidentemente esta matriz está compuesta por las zonas estables correspondientes a los individuos con posiciones  $\{(0, 0), \dots, (0, k)\}$  y  $\{(a, b) | 1 \leq a \leq n \wedge 0 \leq b \leq m\}$ , las cuales tienen más de un elemento.

□

Continuando con este análisis sobre el comportamiento de las zonas estables, la siguiente pregunta natural que encuentro es ¿Cuántas zonas estables puede tener una sociedad que ha llegado a la convergencia? Para dar una cota mínima, planteo la siguiente afirmación para sociedades con geometría plana pues son en las que Axelrod se enfocó. Cabe mencionar que Axelrod no aborda esta pregunta y él se concentra en la cantidad promedio de zonas estables de una sociedad bajo la variación de parámetros como la cantidad de individuos en la misma, además de que él enfrenta el problema numéricamente.

**Afirmación:** Entiéndase por *configuración de opiniones de un individuo de una sociedad de Axelrod* al vector que tiene por entradas las opiniones sobre cada uno de los temas de dicho individuo. Así, si una sociedad con geometría plana tiene al menos 5 configuraciones de opiniones tales que la similitud entre ellas sea nula, entonces dicha sociedad puede tener tantas zonas estables como individuos.

*Demostración.* Notemos que se puede crear una gráfica a partir de una sociedad de Axelrod tomando como vértices a los individuos y creando aristas entre los individuos  $a$  y  $b$  si y sólo si  $a$  y  $b$  son vecinos.

Es fácil observar que esta es una gráfica plana pues ya que identificamos a los individuos como entradas de una matriz, podemos encajar la sociedad en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  y las aristas corresponderían a los pares no ordenados de los individuos y sus vecinos.

Ya que por hipótesis tenemos 5 configuraciones de opiniones diferentes, podemos asignarla a cada una de ellas un color y por el teorema de los 5 colores tenemos que toda gráfica plana es 5-coloreable, de modo que podemos asignarle a cada uno de los individuos de la sociedad una configuración de opiniones de tal forma que ningún par de vecinos tenga similitud no nula, i.e. tal que se llegue a la estabilidad social con cada individuo opinando de manera diferente a todos sus vecinos.

□

Es de resaltar que en la prueba anterior se usó el teorema de los 5 colores para que la demostración se mantuviera íntegramente matemática, pero que en caso de que se estuviera dispuesto a aceptar demostraciones computacionales, también se podría recurrir al teorema de los 4 colores y la prueba se mantendría igual.

Debido a la gran cantidad de desarrollo computacional que ha habido desde la publicación del artículo en el cual me estoy basando y al rol tan importante que juega la simulación en el trabajo del autor de dicho artículo, compararé mis resultados con los del propio Axelrod.

Axelrod precisa haber realizado sus simulaciones con una Macintosh Quadra 700 usando un código escrito en Pascal. Por otro lado yo usé una Asus con procesador Intel Core i5-8250U y un programa escrito en Python 3.7.4. En la tabla 1.2 muestro una comparación entre los valores obtenidos por Axelrod y los que yo obtuve del número promedio de zonas estables que se obtienen de una sociedad de 10 por 10 individuos cuando se variaba la cantidad de temas y de opiniones, usando 10 simulaciones distintas para cada caso.

Número de temas	Número de opiniones	Valores obtenidos por Axelrod	Valores obtenidos por mi
5	5	1	2.1
5	10	3.2	12.3
5	15	20	28.2
10	5	1	2
10	10	1	2.5
10	15	1.4	4.5
15	5	1	2.01
15	10	1	2.08
15	15	1.2	2.58

Tabla 1.2: Cantidad promedio de zonas estables obtenidas por Axelrod y por mi para una sociedad de 10 por 10 individuos en la que se corrió 10 veces en cada caso.

Así mismo en la a) de la tabla 1.3 se muestra la cantidad promedio de regiones estables variando el *Tamaño del territorio*, lo cual es equivalente a la cantidad de individuos en cada lado de la sociedad cuadrada que utilizamos. En todos los casos, la sociedad tenía 5 temas y 15 opiniones disponibles para cada uno y se corrieron 25 simulaciones para cada tamaño de territorio. En la figura b) de la misma tabla se presentan los resultados obtenidos por Axelrod usando sociedades de 5 temas y 15 opiniones, realizando 40 simulaciones para cada uno de los tamaños de territorio, salvo para 50 y 100, en cuyo caso sólo hizo 10 simulaciones.

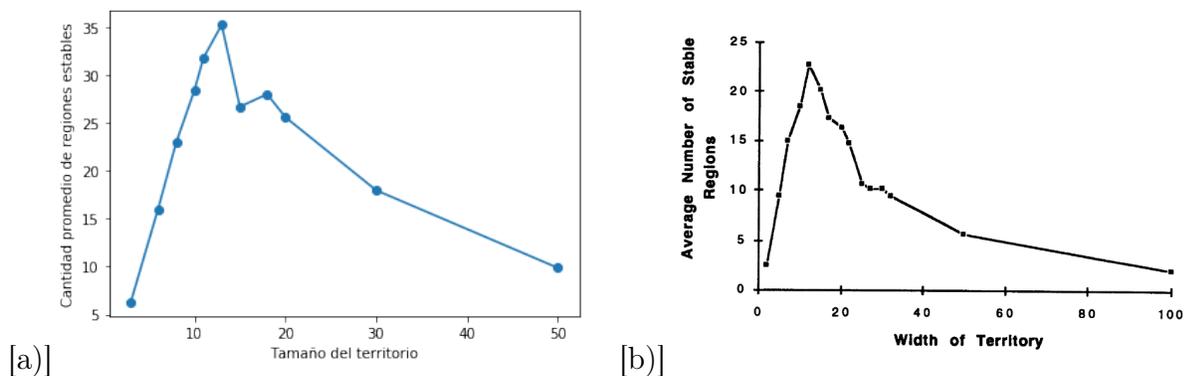


Tabla 1.3: a) Cantidad promedio de zonas estables variando el tamaño del territorio para sociedades cuadradas con 5 temas y 15 opiniones por cada uno. Para cada caso se corrieron 25 simulaciones. b) figura 2 de [1]. Axelrod usó sociedades con 5 temas y 15 opiniones, corriendo 40 simulaciones para todos los tamaños de territorio salvo para 50 y 100, en cuyo caso realizó 10 simulaciones.

De la tabla 1.2 y la tabla 1.3 concluyo que cualitativamente se presenta el mismo comportamiento obtenido con el código escrito por Axelrod que con el código escrito por mi, pero que también es notorio el hecho de que en todos los casos obtuve valores mayores.

A continuación, enlisto algunos puntos en los que los resultados de Axelrod y los míos coinciden:

- El valor mayor de la tabla 1.2 se encuentra para 5 temas y 15 opiniones.
- El segundo valor más grande de la tabla 1.2 se encuentra para 5 temas y 10 opiniones.
- Los valores de la tabla 1.2 correspondientes a 5 opiniones y 5, 10 y 15 temas permanecen casi constantes.
- En ambas figuras de la tabla 1.3 existe un máximo global.
- El máximo de las figuras de la tabla 1.3 se encuentra en tamaños de territorio entre 10 y 20.
- El comportamiento para valores de tamaño de territorio menores al valor en que se encuentra el máximo es similar a una recta y es creciente.
- El comportamiento para valores de tamaño de territorio mayores al valor en que se encuentra el máximo es similar a una exponencial y es decreciente.

Continuando la comparación, menciono algunos puntos en los que mis resultados y los de Axelrod difieren.

- En la entrada correspondiente a 10 temas y 15 opiniones de la tabla 1.2, Axelrod observa un aumento mucho menor al que yo observo respecto a la moda de los valores en cuestión.

- En ninguno de los experimentos reportados en la tabla 1.2 obtuve que la cantidad promedio de zonas estables es uno, mientras que Axelrod lo hizo para más de la mitad de los casos.
- El máximo que obtuve en las simulaciones de la tabla 1.3 es más de 10 unidades mayor que el que obtuvo Axelrod.
- El mínimo que obtuve en las simulaciones de la tabla 1.3 es el doble del que encontró Axelrod.
- La velocidad con la que decrecen los valores de Axelrod en la tabla 1.3 es dos veces mayor a la que yo encontré.

Tras esta comparación, procedí a buscar una explicación para esta diferencia cuantitativa y similitud cualitativa, llegando a la siguiente hipótesis: la fuente de las diferencias entre los resultados de Axelrod y los míos se deben a la procedencia de los números aleatorios involucrados en el algoritmo.

Como mencioné anteriormente, el lenguaje de programación que utilicé para hacer las simulaciones con las cuales obtuve los resultados de las tablas 1.2 y 1.3 fue Python 3.7.4, así que para probar mi hipótesis utilicé Excel 365 como generador de números aleatorios. Lo que hice fue generar suficientes números aleatorios en Excel y usarlos en lugar de los originalmente creados con la librería Numpy de Python, conservando el resto del código intacto. Lo anterior lo repetí para todos los tamaños de territorio que exploré en la figura a) de la tabla 1.3, repitiendo el experimento 5 veces por cada uno de los tamaños. Lo que obtuve en todos los casos fue que la sociedad no presentaba polarización global sino que siempre se llegaba a una sola zona estable.

Esto demuestra que la cantidad de zonas estables es altamente susceptible a variaciones en la aleatoriedad de los números usados, por lo cual los resultados obtenidos mediante este algoritmo deben entenderse como algo meramente cualitativo, mientras que por otro lado corrobora que el origen de las diferencias mencionadas anteriormente se deben a los lenguajes de programación usados.

Pese a los inconvenientes enlistados anteriormente y susceptibilidad que tiene hacia las variaciones numéricas, el modelo de Axelrod rescata una característica vital de lo que definimos como cultura: es transmisible. Es debido a esto que buscaré modificar su algoritmo y revisar si con esto logro una representación más realista de la sociedad. Como mencioné previamente, una de las principales críticas que le encontré al modelo de Axelrod es su nula generación intelectual. Esta será la primera modificación que buscaré hacer y se explorará en el capítulo siguiente.

# Capítulo 2

## Sociedad modificada de Axelrod

En este capítulo trataré las modificaciones que hice al algoritmo de Axelrod para contrarrestar la nula generación intelectual pues esta característica es una de las objeciones al algoritmo de [1] que enlisto en el capítulo anterior. Para esto tomaré el algoritmo original y le agregaré mecanismos que intenten simular la capacidad humana de generar nuevas opiniones basadas en las preexistentes. A las sociedades que siguen el algoritmo expresado en el Pseudocódigo 2 las llamaremos *sociedades de Axelrod modificadas*.

Es importante mencionar que al hacer esto estoy respetando la metodología basada en agentes del trabajo original y que de igual manera los resultados se estudiarán como consecuencias del conjunto de interacciones de los individuos. Lo que haré será dotar a los individuos no con la habilidad de tener opiniones totalmente originales sino que sólo sean capaces de sintetizar las opiniones ya existentes en una nueva mediante el promedio de sus opiniones. El algoritmo que usaré será iterativo y a continuación describo una iteración, donde cada que se menciona que se realizará alguna acción de manera aleatoria, se estará usando una distribución uniforme a menos que se especifique lo contrario:

1. Seleccionar aleatoriamente alguno de los individuos de la sociedad y uno de sus vecinos.
2. Con probabilidad igual a su similitud, ambos agentes interactuarán. Una interacción consiste en seleccionar de manera aleatoria un tema en el cual ambos sujetos difieran (en caso de existir) y cambiar la opinión del individuo seleccionado por la de su vecino respecto a este tema.
3. Seleccionar aleatoriamente un individuo  $x$  de la sociedad al cual se denominará como *pensante* y tomar un número aleatorio  $x_1$  escogido con una distribución normal centrada en 0.75 con desviación estándar de 0.25. Posteriormente aplicar  $y = \max\{0, \min\{1, x_1\}\} \in [0, 1]$  al cual se le llamará *receptividad*.
4. Usando la métrica del taxista en el espacio de los individuos, tomar la bola abierta centrada en el pensante tal que tenga el mayor radio posible que cumpla que los individuos dentro de ella tengan una similitud promedio con el pensante mayor o igual a la receptividad. Se denotará dicha bola como  $B_{\max}(x)$ .

5. Generar un número aleatorio  $z$  con una distribución normal centrada en 0.75 con desviación estándar de 0.25. Calcular  $w = \max\{0, \min\{1, z\}\} \in [0, 1]$ , valor que se llamará *creatividad*.
6. En caso de que la razón entre la cardinalidad de  $B_{\max}(x)$  y el total de individuos en la sociedad sea mayor o igual a la creatividad, tomar aleatoriamente un tema y sustituir la opinión del pensante para dicho tema por la suma de la opinión promedio de los individuos dentro de la bola más dos veces la opinión original del pensante, no sin antes dividir dicha suma entre tres.

Escribo el algoritmo anterior en el pseudocódigo 2.

```

1 #PSEUDOCODIGO 2
2
3 #Modificaciones al pseudocodigo propuesto por Axelrod hechas para simular
  capacidad de creacion de nuevas ideas
4
5 opiniones=[1,...,k] #valores numericos que representan las diferentes
  opiniones que pueden tomar los individuos sobre los diferentes temas
6
7 A=Matriz de nxm con listas aleatorias de longitud p como entradas #
  representa la una sociedad de Axelrod de nxm individuos donde existen p
  temas
8
9 def vecinos(A,i,j): #definimos los vecinos del individuo [i,j] de la
  sociedad A
10     v=[]
11     posiciones=[[0,1],[0,-1],[1,0],[-1,0]]
12     for q in posiciones:
13         if [i,j]+q in {1,...,n}x{1,...,m}:
14             v.append(A[[i,j]+q])
15     return(v)
16
17 def B(A,i,j,r): #definimos la bola de radio r en la sociedad A, centrada en
  el individuo A[i,j]
18     return({[a,b]: sqrt((a-i)**2+(b-j)**2)<r and a in {1,...,n} and b in
  {1,...,m}}) #bola abierta euclidiana restringida al encajamiento de la
  sociedad en  $\mathbb{R}^2$ 
19
20 for q in numero_deseado_de_iteraciones:
21     [i,j] = valor aleatorio de {1,...,n}x{1,...,m}
22     v = valor aleatorio de vecinos(A,i,j) #un vecino de [i,j] tomado
  aleatoriamente con distribucion uniforme
23     u= valor aleatorio en [0,1] generado de manera uniforme
24     similitud = 0
25
26     for l in {1,...,p}:
27         if A[i,j,l]==v[l]:
28             similitud+=1
29
30     similitud=similitud/p #es la similitud entre A[i,j] y v
31

```

```

32  if similitud >=u: #interactúan con una probabilidad proporcional a la
similitud entre A[i,j] y v
33      k = valor aleatorio en {1,...,p} #seleccionamos un tema en la
sociedad con una distribución aleatoria uniforme
34      A[i,j,k]=A[v[0],v[1],k] #la opinión del individuo [i,j] sobre el tema
p se iguala a la de su vecino v
35
36      pensante = entradas en la sociedad de individuo aleatorio de la sociedad
37      L = similitud entre cada individuos de la sociedad y el sujeto pensante
38      receptividad = valor en [0,1] generado aleatoriamente #se uso una
distribucion normal centrada en 0.75 con desviación estándar de 0.25
39
40      r=0
41      B=B(A, pensante [0] , pensante [1] , r)
42
43      sim = promedio de los valores de L con entradas en B
44
45      while sim > receptividad:
46          r+=1
47          B=B(A, pensante [0] , pensante [1] , r)
48          sim = promedio de los valores de L con entradas en B
49
50
51      B_max = B(A, pensante [0] , pensante [1] , r-1) #bola centrada en el sujeto
pensante de radio maximo que cumple que sus individuos tienen una
similitud promedio con el pensante mayor que la receptividad
52
53      creatividad = valor ent [0,1] generado aleatoriamente #se uso una
distribucion normal centrada en 0.75 con desviación estándar de 0.25
54
55      if |B_max|/(nm) >creatividad:
56          tema_seleccionado = tema aleatorio de la sociedad seleccionado de
manera uniforme
57          opinion_publica = opinión promedio sobre el tema tema_seleccionado
de los individuos en A con entradas en B_max
58          A[pensante [0] , pensante [1] , tema_seleccionado]= función de
actualización f tal que f=f(A[pensante [0] , pensante [1] , tema_seleccionado] ,
opinion_publica) #se uso f(A[pensante [0] , pensante [1] , tema_seleccionado] ,
opinion_publica)=(2A[pensante [0] , pensante [1] , tema_seleccionado]+
opinion_publica)/3

```

Cabe resaltar que las modificaciones hechas al algoritmo original no implican que se romperá la estabilidad social de una manera artificial. Si tomamos el caso límite en que todos los integrantes de la sociedad tienen la misma opinión sobre todos los temas, esta seguirá siendo incapaz de romper la estabilidad pues la opinión pública es la misma que la opinión del individuo, resultando así en que la nueva opinión del sujeto será la misma con la que inició.

Por otro lado vale la pena observar que con estos cambios seguimos conservando la idea de Axelrod en que la probabilidad de que dos individuos interactúen es proporcional a la similitud que tienen.

Así mismo es digno de mención el hecho de que la razón por la cual la receptividad y

la creatividad son generadas con una distribución normal es debido a la simetría que esta presenta respecto su media y a que nos permite computar de manera sencilla el intervalo en que se encontrarán la mayoría de estos valores, es decir que nos permite simular que encontrar personas creativas y tener nuevas ideas en nuestra sociedad tenga la probabilidad que se desee.

Del mismo modo, me gustaría hacer notar que se hicieron dos principales modificaciones en al algoritmo original: una consistió en hacer que las opiniones de los individuos puedan tomar valores en todo el  $[0, 1]$  y la segunda se refiere a la introducción de los conceptos de *receptividad* y *creatividad*.

Hegselmann y Krause ya hicieron la primera modificación referente a los valores que pueden tomar las opiniones en [3], encontrando un comportamiento muy similar al hallado por Axelrod siendo esta la mayor diferencia que el encontrado por estos autores, las opiniones podían converger a cualquier subconjunto finito de elementos en el  $[0, 1]$ ; sin embargo esto no presenta una verdadera diferencia respecto al trabajo original pues recordemos que dijimos que las etiquetas que representan las opiniones no tienen significado más allá de diferenciarlas entre sí mismas. Debido a esto, afirmo que los cambios en la dinámica se deben a la introducción de los conceptos de *receptividad* y de *creatividad*, por lo que me enfocaré en el impacto que estos tienen en el comportamiento de la sociedad.

Con tan sólo analizar el pseudocódigo 2 ya podemos notar que estamos frente a un comportamiento diferente al que presentan las sociedades de Axelrod no sólo a nivel individuo sino que también a nivel sociedad. Esta diferencia la expresamos en la siguiente afirmación.

**Lema:**(Clasificación de zonas estables en sociedades modificadas)

Las zonas estables generadas de las sociedades de Axelrod modificadas, en caso de existir, son iguales a la sociedad entera o al escenario en que cada uno de los individuos tiene una similitud nula con todos sus vecinos.

*Demostración.* El caso en que la sociedad entera  $X$  es una zona estable sólo se da cuando todos sus individuos opinan lo mismo para todos los temas, situación en la cual no hay nada que decir.

De este modo, vamos a suponer que  $X$  no es una zona estable y notemos que podemos clasificar el resto de los escenarios posibles de acuerdo si poseen o no la siguiente propiedad:  $\forall x \in X, B_{max}(x) = B_1(x) = \{x\}$  para todo valor de receptividad y creatividad.

Ya que la receptividad y la creatividad, por definición pueden tomar todos los valores en el  $[0, 1]$ , una sociedad posee la propiedad anterior sólo cuando cumple que la similitud entre  $x$  y cualquiera de sus vecinos es nula, con lo cual llegamos a la conclusión de enunciado.

El caso en que la sociedad no posea la propiedad en cuestión se da cuando existe un individuo  $x$  tal que  $B_1(x) \subsetneq B_{max}(x)$ , de modo que si  $A$  es una zona estable que no es toda la sociedad entonces podemos tomar  $y \notin A$  tal que la distancia entre ellos sea 1, i.e. tales que sean vecinos.

De esta forma,  $y \in B_2(x) \subseteq B_{max}(x)$  y por definición existe un tema  $i$  tal que la opinión de  $x$  y sobre  $i$  no es la misma. Así tenemos que  $\forall n \in \mathbb{N}, y \in B_n(x)$  por lo cual la opinión

pública de los individuos en la bola de radio máximo sobre el tema  $i$  no será la de  $x$ , de modo que si se tomara a  $x$  como el sujeto pensante, su opinión sobre el tema  $i$  cambiaría.

Así, notemos que la probabilidad de que esto ocurra es el producto de que  $x$  sea tomado como sujeto pensante por la probabilidad de que se escoja el tema  $i$  por la probabilidad de que la creatividad sea menor a la proporción de individuos en la bola de radio máximo centrada en  $x$  para una receptividad dada y observemos que ninguno de esos factores es nulo, por lo cual la probabilidad de que esto ocurra es mayor a cero; así por definición,  $A$  no es una zona estable, llegando así a una contradicción.

□

El lema anterior genera varios corolarios los cuales son de gran ayuda para entender la dinámica de las sociedades de Axelrod modificadas y compararla con el comportamiento que tratamos en el capítulo 1.

**Corolario:** Las sociedades de Axelrod modificadas no necesariamente convergen.

*Demostración.* Si la sociedad de Axelrod modificada  $X$  tiene dos individuos culturalmente diferentes y dos individuos culturalmente iguales, la sociedad no ha convergido. Notemos que, en caso de que esta situación se cumpla, podemos tomar 3 individuos de esta y ya que sólo buscamos probar que  $X$  no necesariamente converge, supongamos que son vecinos.

Así mismo la probabilidad de que en una iteración dada no se seleccione ninguno de estos 3 individuos es  $(\frac{|X|-3}{|X|})^2$ , de modo que la probabilidad de que no se seleccionen en una cantidad  $t \in \mathbb{N}$  de iteraciones es  $(\frac{|X|-3}{|X|})^{2t}$  lo cual no es nulo, i.e. es posible.

De este modo, es posible jamás seleccionar estos tres individuos preservando el tener un par de vecinos que son culturalmente iguales y donde uno de ellos tiene un vecino al cual es culturalmente diferente.

Así, por el lema anterior, esto no será una sociedad convergente.

□

El siguiente corolario permite distinguir de manera muy sencilla si un conjunto puede o no ser una zona estable de una sociedad de Axelrod modificada.

**Corolario:** Si  $A$  es una zona estable de una sociedad de Axelrod modificada  $X$ , entonces  $|A| = 1$  ó  $|A| = |X|$ .

*Demostración.* Ya que una zona de una sociedad de Axelrod modificada sólo es estable si es la sociedad entera o es un sólo individuo, la conclusión es trivial.

□

El enunciado siguiente es una parafraseo del lema anterior y la definición de zona estable, por lo que la demostración es inmediata.

**Corolario:** A menos que la sociedad entera sea una zona estable o que todos sus individuos tengan similitud nula con sus vecinos, no existen conjuntos en el espacio de individuos que cumplan que la probabilidad de que cambien su opinión sobre algún tema sea nula.

Notemos que el fenómeno que están describiendo la afirmación y el corolario anterior es el de la *emergencia* de nuevas ideas y la inestabilidad que esto genera en las zonas estables de las sociedades de Axelrod modificadas a tal grado que las destruye en casi todos los casos y es fácil de ver, siguiendo la prueba de la última afirmación, que todos los agentes son capaces de generar nuevas ideas.

Del mismo análisis podemos concluir que la propagación (o eliminación) de una opinión nueva se comportará del mismo modo que como se comportan las opiniones originales, siendo esto de vecino a vecino.

En la tabla 2.1 muestro algunas iteraciones para una sociedad de  $15 \times 15$  individuos con 10 temas y 10 opiniones por tema, la cual tiene la capacidad de generar nuevas opiniones de acuerdo al algoritmo descrito en el pseudocódigo 2. El código de tonos es mismo que el usado para las figuras de la tabla 1.1.

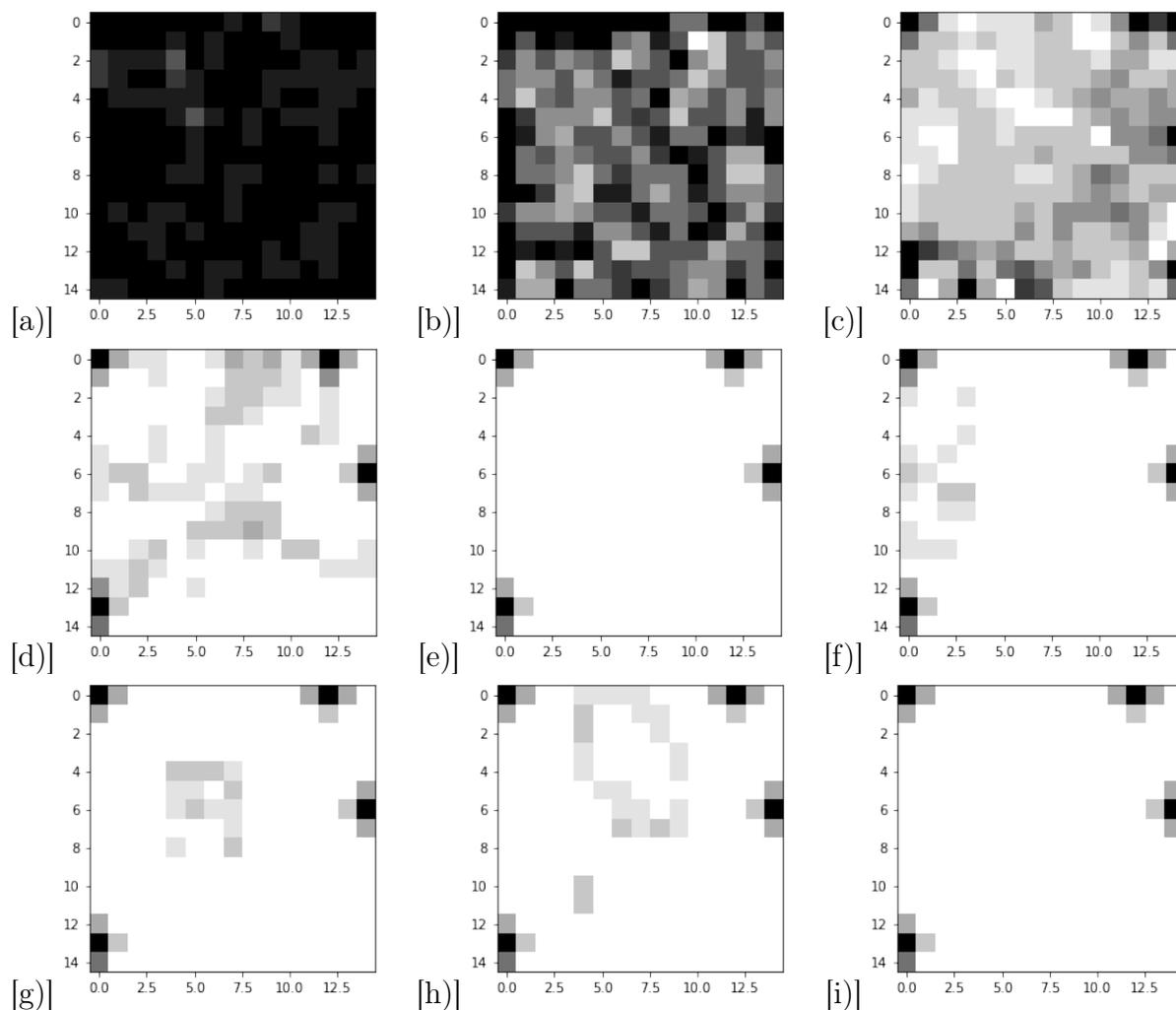


Tabla 2.1: Número de iteración: a) Iteración 0, b) Iteración 100, c) Iteración 1000, d) Iteración 3000, e) Iteración 5600, f) Iteración 5900, g) Iteración 6100, h) Iteración 6200, i) Iteración 6400

En las figuras de la *a)* a la *e)* de la tabla 2.1 se muestra un comportamiento similar al presentado en la tabla 1.1, sin embargo el fenómeno mostrado de las figuras *f)* a la *i)* de la tabla 2.1 en el que se rompe la zona estable de pensamiento sería imposible en el modelo propuesto por Axelrod puesto que en dicho modelo los entes sociales sólo pueden adquirir las ideas que tienen sus vecinos y para la iteración 5600, como lo muestra la figura *e)* de la tabla 2.1, la zona estable de pensamiento abarcaba toda la sociedad salvo 4 individuos.

De los enunciados demostrados en este capítulo es fácil ver que no tiene sentido replicar el trabajo mostrado en la tabla 1.3 para las sociedades de Axelrod modificadas pues los casos en que estas convergen comprenden un tipo muy particular de sociedades. En su lugar, haré un análisis cualitativo de los nuevos fenómenos que este tipo de sistemas presentan, para lo cual propongo la siguiente definición y presento las imágenes de tabla 2.2.

**Definición:** Tiempo de vida de una opinión.

Dada  $X \in M_{n \times m}(F_{\mathbb{R}^k})$  una sociedad de Axelrod modificada,  $T \in \{1, \dots, k\}$  un tema,  $p$  una opinión sobre el tema  $T$  y denotando  $t_{\text{fin}} := \min\{\tau \in \mathbb{N} : \exists(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$  tal que  $X_{ij}^\tau(T) = p \ \& \ X_{ij}^{\tau+1}(T) \neq p \forall(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}\}$  y  $t_{\text{in}} := \min\{\tau \in \mathbb{N} : \exists(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$  tal que  $X_{ij}^\tau(T) = p \ \& \ X_{ij}^{\tau-1}(T) \neq p \forall(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}\}$  diré que el *tiempo de vida de la opinión  $p$  sobre el tema  $T$*  es  $t_{\text{fin}} - t_{\text{in}}$ .

Nótese que el tiempo de vida de una opinión no siempre está definida y eso se da en los casos en que no exista  $t_{\text{fin}}$  o  $t_{\text{in}}$ . En caso de que  $p$  sea una opinión para el tema  $T$  tal que no se pueda definir  $t_{\text{in}}$ , diré que su tiempo de vida es 0 y si es posible calcular  $t_{\text{in}}$ , pero no se puede definir  $t_{\text{fin}}$ , entonces diré que su tiempo de vida es infinito.

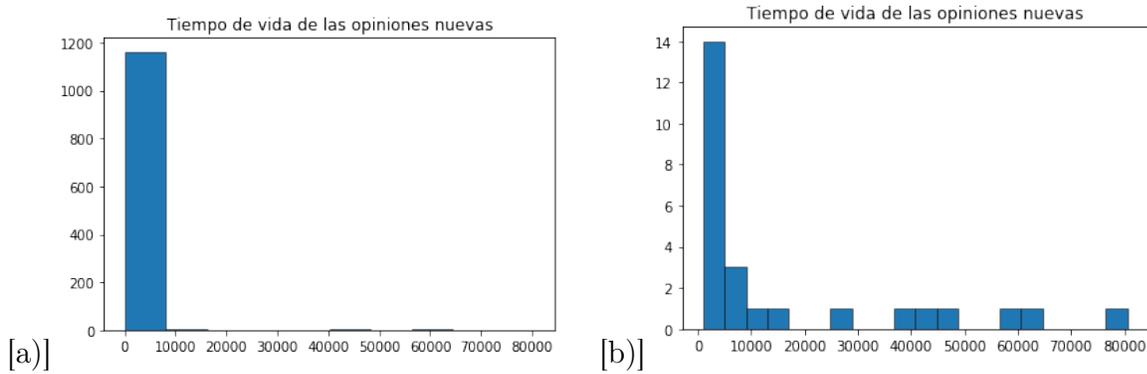


Tabla 2.2: Histogramas de resultados de una simulación de una sociedad de  $15 \times 15$  individuos, 10 temas, 10 opiniones por tema y realizando 100,000 iteraciones del tiempo de vida, usando el pseudocódigo 2 con receptividad y creatividad de 0.75 y de desviación estándar de 0.25. La figura b) es el histograma de los datos de la figura a) cuyo tiempo de vida es mayor a 1000 iteraciones.

Las figuras de la tabla 2.2 no sólo reflejan la efectividad del algoritmo del pseudocódigo 2 a la hora de crear nuevas ideas sino que también refleja que el tiempo de vida de estas no es constante sino que tiene una gran variabilidad.

Teniendo en mente la perspectiva basada en agentes presentada por Axelrod, considero interesante variar los parámetros usados en las simulaciones para estudiar su impacto en la dinámica social. Para esto realizo 15 simulaciones de 5000 iteraciones cada una, mostrando los resultados en las gráficas de la tabla 2.2. Para esto, la manera en que medí la *cantidad de ideas generadas* fue mediante guardar todas las opiniones que algún individuo de la sociedad tuvo en algún momento sobre algún tema y una vez que se terminaron las iteraciones, quitar los elementos repetidos y contar la cantidad de opiniones diferentes a las que se tenían antes de iniciar las iteraciones. Así mismo, el *tiempo de vida promedio* se calcula sobre todos los temas posibles en la sociedad.

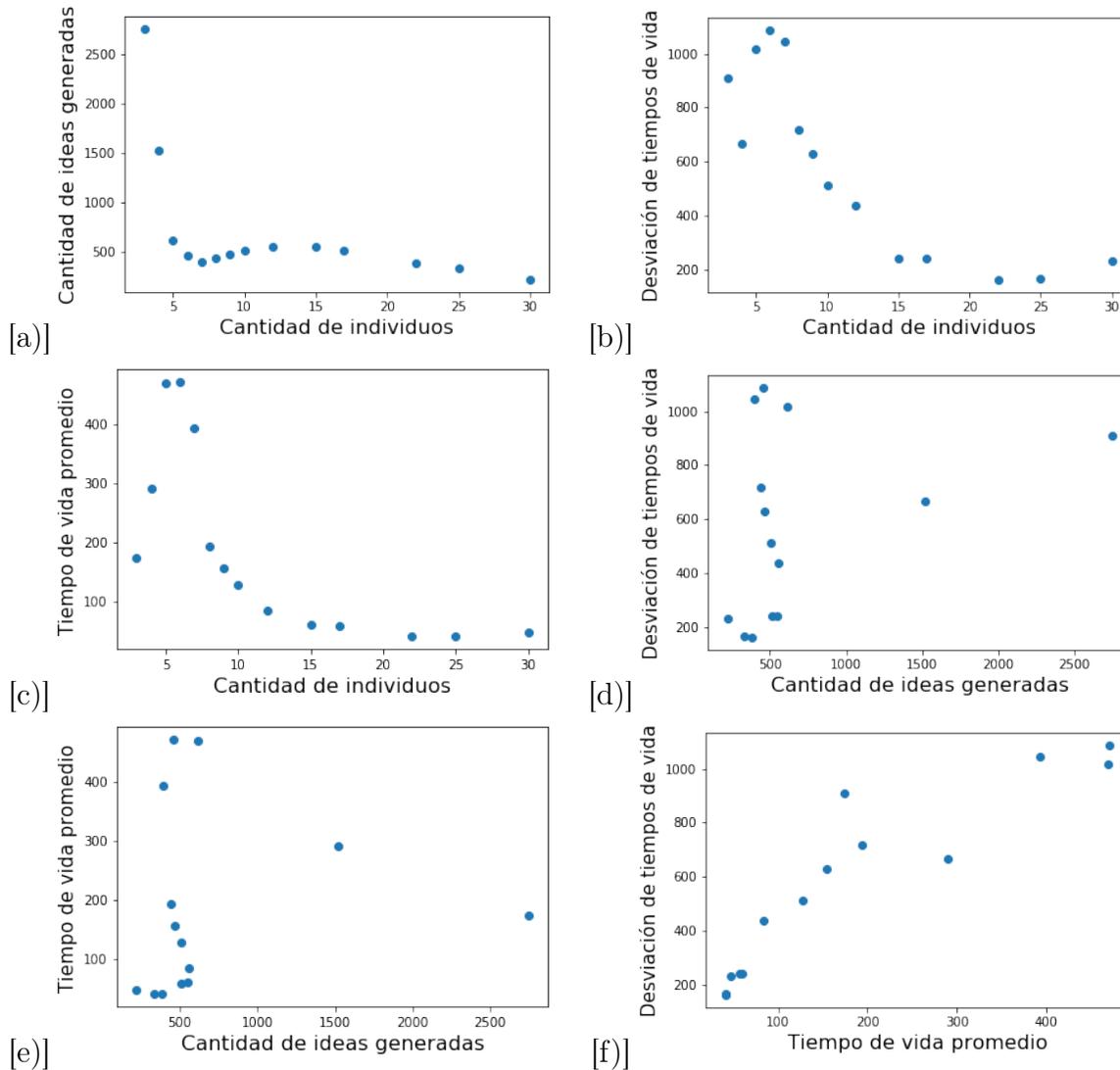


Tabla 2.3: a) Cantidad de individuos vs cantidad de ideas generadas, b) Cantidad de individuos vs desviación estándar en tiempos de vida, c) Cantidad de individuos vs tiempo de vida promedio, d) Cantidad de ideas generadas vs desviación estándar en tiempos de vida, e) Cantidad de ideas generadas vs tiempo de vida promedio, f) Tiempo de vida promedio vs desviación estándar en tiempos de vida

Se observa que en la figuras *b)* y *c)* de la tabla 2.3 se presenta un máximo y un comportamiento asintótico hacia un valor no nulo, lo cual quiere decir que conforme se incrementa la cantidad de individuos de la sociedad, el tiempo de vida promedio que las nuevas ideas presentes en dicha sociedad tenderá a estabilizarse, así como la desviación estándar de dichos datos. Esto me permite asegurar que no es necesario aumentar la cantidad de individuos en nuestra sociedad pasado cierto umbral.

En la figura *a)* de la tabla 2.3 se nota un comportamiento monótonamente creciente cuando la cantidad de individuos en la sociedad es baja, pero conforme se aumenta dicho parámetro, la cantidad de nuevas ideas se estabiliza, permitiéndome llegar a la misma

conclusión que en el párrafo anterior.

La figura *d)* de la tabla 2.3 no presenta, para cantidades grandes de ideas generadas, una relación reconocible entre la cantidad de nuevas ideas generadas por la sociedad y la desviación estándar en los tiempos de vida de dichas ideas. Sin embargo notemos que si la sociedad genera una baja cantidad de ideas, la cantidad de tiempo que esta es capaz de retenerlas se distribuye con una relativamente baja desviación estándar, es decir que la sociedad que no tiene una prolífera actividad intelectual se comportará de tal forma que sus nuevas ideas serán tomadas por ella misma a lo más como modas pasajeras. Esto contrasta cuando la producción de ideas aumenta un poco, pues en este caso la sociedad toma tiempos muy diferentes para el análisis de las ideas emergentes y esto se refleja en el aumento de la desviación estándar de los tiempos de vida.

Por otro lado, la figura *e)* de la tabla 2.3, pese a no ser función, revela que el tiempo de vida promedio de las nuevas ideas decrece conforme la cantidad de estas aumenta. Esto se interpreta como que esta sociedad no es capaz de albergar muchas ideas y en caso de que se presente un incremento notable en la generación de estas, lo que esta hará será olvidarlas. Notemos también que si la producción de ideas de la sociedad es baja, la sociedad las dejará de lado pronto, como si el hecho de que la sociedad se dedicara a actividades no intelectuales o no creativas la predispusiera a no poder retener tampoco la limitada cantidad de propiedad intelectual. Contrariamente observamos que existe un intervalo en el cual la generación de ideas es tal que no satura a la sociedad y de esta manera le permite conservarlas y analizarlas durante un mayor periodo de tiempo.

La figura *f)* de la tabla 2.3 muestra una relación creciente entre el tiempo de vida promedio de las ideas y la desviación estándar de estos datos.

Siguiendo esta idea de variar los parámetros de las simulaciones, a continuación modifiqué la cantidad de iteraciones realizadas sobre una sociedad de 15x15 individuos con 10 temas y 10 opiniones para cada uno. Corrí 15 ciclos para cada una de las cantidades de iteraciones elegidas y grafico los resultados en la tabla 2.4.

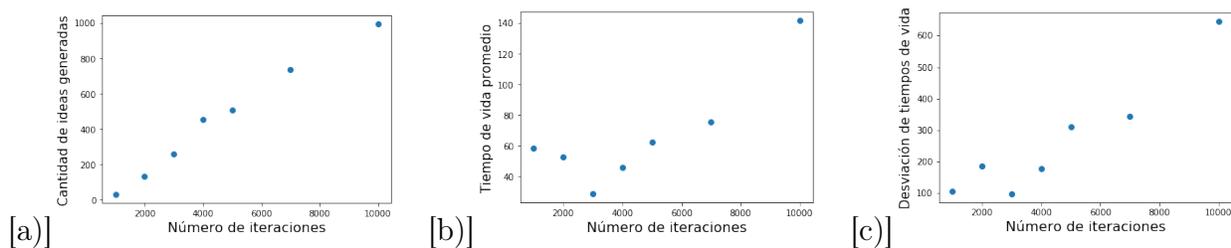


Tabla 2.4: a) Cantidad de ideas generadas vs. número de iteraciones, b) Tiempo de vida promedio de las nuevas ideas generadas vs. número de iteraciones, c) Desviación estándar de los tiempos de vida de las nuevas opiniones generadas vs. Número de iteraciones.

Las figuras de la tabla 2.4 muestran una relación monótonamente creciente respecto a la cantidad de iteraciones que se realizan en el sistema. Esto es una muestra numérica del hecho de que la integración en la sociedad de la capacidad individual de la generación de opiniones nuevas vuelve inestable la presencia de zonas estables de pensamiento,

coincidiendo con el Lema de clasificación de zonas establecen sociedades modificadas.

Así mismo, las figuras de la tabla 2.4 muestran una relación lineal a partir de las 4000 iteraciones, por lo que se puede concluir que el comportamiento de las figuras de la tabla 2.3 para 5000 iteraciones proporciona una buena idea sobre las relaciones que guardan la cantidad de ideas generadas, el tiempo de vida promedio y la desviación estándar de tiempos de vida.

## 2.1. Estudio estocástico de las sociedades

Luis Rincón inicia su libro *Introducción a los procesos estocásticos* [25] con el texto siguiente:

Considere un sistema que pueda caracterizarse por estar en cualquiera de un conjunto de estados previamente especificado. Suponga que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo con una cierta ley de movimiento, y sea  $X_t$  el estado del sistema al tiempo  $t$ . Si se considera que la forma en la que el sistema evoluciona no es determinista, sino provocada por algún mecanismo azaroso, entonces puede considerarse que  $X_t$  es una variable aleatoria para cada valor del índice  $t$ . Esta colección de variables aleatorias es la definición de un proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo.

Y la definición formal que el mismo autor da a los procesos estocásticos la presento a continuación.

**Definición:** Proceso estocástico.

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$  parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado *espacio parametral*, en donde las variables toman valores en un conjunto  $S$  llamado *espacio de estados*.

La afirmación sobre el comportamiento estocástica de las sociedades de Axelrod así como de sus versiones modificadas es natural después de leer la cita de Rincón y su definición de proceso estocástico. Más aún, examinemos la siguiente definición de Cadena de Markov.

**Definición:** Cadena de Markov

Una *Cadena de Markov* es un proceso estocástico a tiempo discreto, i.e. con espacio parametral discreto,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ , con espacio de estados discreto, y que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier entero  $n \geq 0$ , y para cualesquiera estados  $X_0, \dots, X_{n+1}$  se cumple

$$\mathbb{P}(X_{n+1}|X_0, \dots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1}|X_n).$$

Dándole una interpretación a la condición anterior, si pensamos que  $X_{n+1}$  es un estado futuro,  $X_n$  es el estado presente y  $X_0, \dots, X_{n-1}$  son los estados pasados; entonces la propiedad de Markov implica que el futuro inmediato sólo depende del presente, siendo independiente del pasado. Así llego a la siguiente observación.

**Observación:** Las sociedades de Axelrod y las sociedades de Axelrod modificadas son cadenas de Markov.

*Demostración.* Por los pseudocódigos 1 y 2 tenemos por definición que ambos tipos de sociedades son procesos estocásticos a tiempo discreto, pues su espacio parametral es el número de iteraciones hechas.

A su vez, su espacio de estados puede ser descrita de diferentes maneras, por ejemplo por el conjunto de todas las posibles configuraciones de opiniones o simplemente como el conjunto de estados  $\{\textit{estático}, \textit{dinámico}\}$  donde el primero corresponde al caso en que en la iteración en cuestión, el individuo seleccionado no modificara su opinión y el segundo representa el caso en que dicho sujeto sí actualizó alguna de sus opiniones; es decir, si  $X$  es un sociedad de Axelrod o una sociedad de Axelrod modificada, entonces para una iteración  $t$ , se tendrá que la sociedad se encuentra en estado *estático* si  $X^t = X^{t+1}$  y pertenecerá al estado *dinámico* si  $X^t \neq X^{t+1}$ . Para fines de la prueba, es indiferente cual de los dos sea su espacio de estados pues sólo es necesario poderle asociarle uno.

De este modo, de nuevo por los pseudocódigos 1 y 2 tenemos que las probabilidades de que el sistema tome algún valor del espacio de estados depende únicamente del estado actual, por lo que cumple la propiedad de Markov.

□

Esto es de gran relevancia, pues hasta ahora la mayoría de los resultados a los que he llegado hablan de los posibles finales que puede tener alguna sociedad, sin embargo no he dicho nada sobre la evolución que tendrán los sistemas para llegar a dichos estados finales. Habiendo visto que por definición se pueden modelar las sociedades originales y modificadas de Axelrod como cadenas de Markov, utilizaré este formalismo para estudiar su dinámica, pero para esto necesito la siguiente definición.

**Definición:** Matriz de Transición.

Dada una cadena de Markov  $X$  con un conjunto de estados finitos  $S = \{1, \dots, k\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y representando  $p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = j)$ , llamaré *matriz de transición* a la matriz  $M$  tal que

$$M = (p_{ij})_{\{i,j\} \subset S}.$$

Se puede observar que la propiedad de Markov implica que la dinámica de una cadena de Markov está descrita por su matriz de transición. Así, si se representa un estado como un vector normalizado  $v$ , al cual llamaremos *vector de estado*, la manera en la cual puedo obtener una estimación del estado del sistema después de  $n$  iteraciones, lo único que hace falta es calcular  $M^n v$  y normalizarlo, donde la  $i$ -ésima entrada del vector resultado de dicho

producto tendrá por interpretación la probabilidad de que el sistema se encuentre en el  $i$ -ésimo estado para la  $n$ -ésima iteración.

De este modo, calcularé las matrices de transición para los sistemas obtenidos de los pseudocódigos 1 y 2, iniciando con las sociedades de Axelrod. Para esto, tomaré como espacio de estados al conjunto  $\{\text{estático}, \text{dinámico}\}$ , donde el primer elemento significa que el individuo seleccionado en la iteración en cuestión no cambió su opinión, mientras que el segundo significa que sí lo hizo de acuerdo a las reglas de actualización del pseudocódigo 1. Quiero aclarar que sé que el escoger este espacio de estados imprime grandes limitaciones sobre el estudio que estoy haciendo, sin embargo quiero explorar el tipo de dinámica que se puede esperar con estas condiciones para posteriormente tratar el caso general.

Debido a la complejidad del algoritmo en cuestión, estimé la matriz de transición numéricamente, para lo cual realicé 10 simulaciones de 30000 iteraciones cada una, usando siempre sociedades de  $15 \times 15$  individuos con 10 temas por individuo y 10 opiniones iniciales por tema. Para la  $k$ -ésima simulación, conté la cantidad de iteraciones en que la sociedad se encontraba en un estado  $i$  y que cambiaba al estado  $j$ , lo dividí entre la cantidad total de iteraciones de dicha simulación y eso lo consideré como la entrada  $(i, j)$  de la matriz asociada a la  $k$ -ésima simulación. Finalmente conseguí la siguiente matriz como aquella que tiene por valor en la entrada  $(i, j)$  el promedio de las entradas  $(i, j)$  de las 10 simulaciones hechas.

$$M_A := \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{estático} & \text{dinámico} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{estático} \\ \text{dinámico} \end{array} & \begin{pmatrix} 9.99 * 10^{-1} & 2.62 * 10^{-4} \\ 12.09 * 10^{-3} & 9.97 * 10^{-1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Haciendo lo propio para las sociedades de Axelrod modificadas de manera análoga al tratamiento anterior obtuve una estimación para la matriz de transición para este tipo de sistemas que muestro a continuación

$$M_M := \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{estático} & \text{dinámico} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{estático} \\ \text{dinámico} \end{array} & \begin{pmatrix} 9.9966 * 10^{-1} & 8.0336 * 10^{-2} \\ 3.8324 * 10^{-2} & 9.6167 * 10^{-1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Comparando ambas matrices, noto que las modificaciones hechas en el pseudocódigo 2 tienen tal efecto en la dinámica de las sociedades que las matrices de transición cambian sustancialmente pues las entradas correspondientes a cambios de estado del sistema para la matriz  $M_M$  son hasta dos órdenes de magnitud mayores que los valores análogos para  $M_A$ .

De los resultados obtenidos antes de esta subsección, ya podía afirmar que los estados hacia los cuales tienden las sociedades de Axelrod modificadas y las no modificadas son distintos. Sin embargo con este nuevo resultado puedo sostener también que será distinta la manera en que dichos modelos se comportarán para llegar a sus estados de convergencia, en caso de que lo hagan y hace aún más evidente que estamos tratando con sistemas

diferentes.

Naturalmente, la existencia de estas matrices aunado al hecho de haberlas obtenido como la descripción de las probabilidades de transición de una cadena de Markov genera varias preguntas dentro de las cuales destacan las siguientes: ¿Cuáles son las distribuciones de opiniones en la sociedad que permanecen constantes?, ¿Esto puede ser usado para caracterizar un cierto nivel de equilibrio para las zonas que podrían llegar a ser estables de las sociedades de Axelrod modificadas? o ¿Existen distribuciones de opiniones absorbentes?

Ya que la segunda pregunta depende de la primera, me enfocaré en esta primero y afirmo que su respuesta será la solución de las ecuaciones  $M_A v = v$  y  $M_M v = v$ , las cuales pueden ser generalizadas a un problema de valores propios para las matrices de transición.

Antes de hacer los cálculos necesarios para obtener dichos vectores propios, vale la pena hablar sobre las interpretaciones que se les podrían dar para entender la relevancia de esta cuestión. Por construcción, un vector propio para una matriz estocástica de  $2 \times 2$  se puede pensar como un estado del sistema que no cambiará a lo largo del tiempo y un ejemplo de sistemas que podríamos expresar con una cadena de Markov como la que estamos tratando es el caso en que la matriz de transición represente la probabilidad de cambiar de un estado a otro de un individuo cualquiera; así, la interpretación que se le podría dar a las entradas de un vector propio de dicha matriz es la proporción de individuos que están en uno u otro de los estados de la sociedad y su implicación sería que dicha proporción de opiniones permanecería constante a lo largo del tiempo.

Con esta motivación, obtengo que los valores y vectores propios normalizados para  $M_A$  son

$$(1.107796, -0.107796) \text{ con valor propio } 1 \text{ y} \\ (0.414789, 0.58521) \text{ con valor propio } 0.9963,$$

mientras que los valores y vectores propios para  $M_M$  son

$$(1.55691954, 2.55691954) \text{ con valor propio } 1 \text{ y} \\ (0.5607128, 0.4392872) \text{ con valor propio } 0.8813.$$

Teniendo ambos pares de valores y vectores propios es posible notar algunas similitudes entre los resultados, como el hecho de que en ambos casos existe un valor propio unitario y el otro es estrictamente menor a la unidad; por otro lado para cada uno de los pares de vectores propios, existe uno con entradas cercanas a  $1/2$ , mientras que el otro siempre tiene una entrada negativa.

Esto me dice, a priori, que uno de los vectores propios no tendrá un significado en el problema que estoy tratando pues es necesario recordar que la interpretación que le estoy dando a las entradas de los vectores propios es de la probabilidad de que un individuo de la sociedad se encuentre en el estado correspondiente a dicha entrada. Sin embargo para dar una mejor respuesta, haré los siguientes cálculos.

Tomaré una cadena de Markov con espacio de estados de dos elementos, lo cual implica que su matriz de transición será de la forma  $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$  donde  $\{a, b\} \subset [0, 1]$  representan probabilidades.

Así, buscando calcular sus valores y vectores propios obtengo la ecuación

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - (1 - a)(1 - b) = 0$$

la cual tiene por soluciones

$$\lambda = \frac{a + b \pm \sqrt{((a + b) - 2)^2}}{2}.$$

Ya que  $\{a, b\} \subset [0, 1]$ ,  $|a + b - 2| = 2 - a - b$ , con lo cual llego a

$$\lambda \in \{1, a + b - 1\}.$$

Ahora buscaré los vectores propios asociados mediante la solución de la ecuación

$$\begin{pmatrix} a & 1 - a \\ 1 - b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

de donde distingo dos casos:  $a = b$  ó  $a \neq b$ . Primero trabajaré el caso en que  $a \neq b$  de donde obtengo que los vectores propios para  $\lambda = 1$  y  $\lambda = a + b - 1$  cumplen respectivamente que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - a \\ b - 1 \end{pmatrix} \right\},$$

mientras que si  $a = b$ , los vectores propios para  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2a - 1$  son respectivamente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Así termino con una demostración que me permite enunciar la siguiente afirmación, la cual ya empieza a dar información sobre el comportamiento de los vectores propios y de esta forma ya comienza a dar una explicación sobre el fenómeno observado numéricamente para  $M_A$  y  $M_M$ .

**Afirmación:** Toda matriz de transición de una cadena de Markov que sea de la forma  $M = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ 1 - b & b \end{pmatrix}$  tiene valores y vectores propios en  $\mathbb{R}$  y en  $\mathbb{R}^2$  respectivamente. Además uno de los valores propios siempre será la unidad mientras que el otro estará contenido en el  $[-1, 1]$ . Por otro lado, para los vectores propios tendremos que el vector  $(1, 1)$  siempre será vector propio y el otro siempre cumplirá que el producto de sus entradas será negativo.

Antes de darle una interpretación a los resultados numéricos que encontramos para las matrices  $M_A$  y  $M_M$ , presento la siguiente afirmación que habla sobre las distribuciones de probabilidad absorbentes de este tipo de sistemas.

**Afirmación:** Si  $D = (x, 1 - x)$  es una distribución de probabilidad que describe algún estado de una Cadena de Markov con matriz de transición de la forma  $M = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ 1 - b & b \end{pmatrix}$  donde no se cumple que  $a = b = 1$  ni que  $a = b = 0$ . Entonces  $D$  tenderá a  $(1/2, 1/2)$  una vez que se normalice.

*Demostración.* Ya que por hipótesis no se cumple que  $a = b = 1$  ni que  $a = b = 0$ , entonces por la demostración de la afirmación anterior se tiene que  $\lambda := a + b - 1 \in (-1, 1)$ , de modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ .

Ahora, teniendo en mente que para obtener la distribución después de  $n$  pasos basta con calcular  $M^n D$ , busco calcular  $M^n$ , para lo cual construyo  $\Lambda$  la matriz diagonal asociada a  $M$ , la cual es de la forma  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  por lo demostrado anteriormente.

Denotando por  $P$  a la matriz que tiene por vectores columna los vectores propios de  $M$  y calculando, tenemos que

$$M^n = P \Lambda^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 - a \\ 1/2 & b - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \frac{1}{\frac{b-1}{2} + \frac{a-1}{2}} \begin{pmatrix} b - 1 & a - 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{a + b - 2} \begin{pmatrix} b - 1 - \lambda^n(1 - a) & a - 1 + \lambda^n(1 - a) \\ b - 1 - \lambda^n(b - 1) & a - 1 + \lambda^n(b - 1) \end{pmatrix}$$

por lo que

$$M_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \frac{1}{a + b - 2} \begin{pmatrix} b - 1 & a - 1 \\ b - 1 & a - 1 \end{pmatrix}$$

Así,  $M_\infty D = \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b - 1 & a - 1 \\ b - 1 & a - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} x(b - 1) + (1 - x)(a - 1) \\ x(b - 1) + (1 - x)(a - 1) \end{pmatrix}$  lo cual visto como distribución de probabilidad corresponde a  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . □

Teniendo estos dos resultados, puedo empezar a responder las preguntas que surgieron antes y a analizar este comportamiento en el contexto del modelo de Axelrod.

La primera observación que puedo hacer es que no se le puede dar una interpretación a los vectores propios de las matrices de transición que tienen entradas con signos distintos pues no tiene sentido pensar en probabilidades negativas. Sin embargo, estos resultados también me permiten afirmar que esto no constituye ninguna pérdida de información pues siempre se tendrá el vector propio con entradas iguales y será él la distribución de probabilidad hacia la que tiendan los estados de las sociedades.

Por otro lado, el hecho de tener que el vector  $(1/2, 1/2)$  siempre será vector propio de las matrices de transición para cadenas de Markov cuyo espacio de estados es  $\{\text{estático}, \text{dinámico}\}$  reafirma el hecho planteado anteriormente en que afirmaba que ni las sociedades de Axelrod ni sus versiones modificadas convergen necesariamente. Más aún,

esto implica que no existen condiciones iniciales que se le puedan imponer a la sociedad de modo que garanticen que esta converja o no.

Así mismo considero que el hecho de que no importa cuál sea la matriz de transición pues el estado absorbente de distribución de opiniones dentro de la sociedad será siempre el mismo como una característica indeseable en un modelo de este tipo, pues quiere decir que no importa cuántas modificaciones se hagan al algoritmo original de Axelrod ya que siempre nos conducirá a una dinámica similar y tendiente al mismo final. Lo más que se pondrá obtener es un comportamiento distinto referente a las zonas estables; pero en cuanto a dinámica, no se tendrán fenómenos muy distintos.

Si bien es cierto que esto lo hice para una cadena de Markov con un espacio de estados de dos elementos, también es verdadero que toda cadena de este tipo se puede llevar a dicha condición al tratar con estados estáticos y dinámicos. Sin embargo, aún se me podría objetar, y con justa razón, que el hecho de estar considerando espacios de estados de dos elementos puede ser el origen de estos resultados y que cabe la posibilidad de que para espacios con una mayor cantidad de elementos, estos resultados dejen de ser válidos. Para responder a esto, enuncié el siguiente resultado.

**Lema:** Una sociedad  $X$  de  $i$  temas con  $j$  opiniones por tema puede ser expresada como una sociedad  $X'$  con  $ij$  temas y 2 opiniones por cada uno, siempre que compartan la cantidad de individuos y sus conjuntos de vecinos.

*Demostración.* El significado de este enunciado es que se puede obtener la dinámica de la sociedad inicial con la sociedad reinterpretada. Ya que todas las elecciones que incluyen los pseudocódigos 1 y 2 son aleatorias, lo único que hace falta corroborar es que la probabilidad con que interactúan dos individuos dados es la misma.

Así las cosas, se tomarán las opiniones posibles para los temas de  $X'$  como elementos en  $\{0, 1\}$  y el conjunto de opiniones del individuo  $x$  en  $X$  que se le asignará en  $X'$  será tal que su opinión para el tema  $(m, n)$ -ésimo será 1 si  $x$  opina  $n$  para el tema  $m$  y 0 en otro caso.

Así, ya que la función de probabilidad de que dos individuos interactúen toma como argumento la similitud entre dichos individuos, lo único que se debe hacer es cambiar el argumento de dicha función por la diferencia entre la unidad y la cantidad de temas de  $X'$  en los cuales opinan de manera diferente dividido entre  $2i$ .

De este modo, todos los parámetros de ambas sociedades son los mismos y esto implica, dentro de los parámetros estocásticos, que ambas sociedades son iguales. Cabe mencionar que en esta demostración no es necesario el cálculo de la matriz de transición ni de otro elemento de la cadena de Markov ya que la prueba consiste en una manera de modificar el algoritmo que describe al sistema de modo que los resultados de ambos casos sean iguales. Afirmo que debido a eso no es necesario ningún cálculo estocástico puesto que estos se deberían hacer partiendo del algoritmo, de modo que si los algoritmos son equivalentes, el aparato matemático subsecuente también debe serlo.

□

Con este resultado, puedo afirmar que el análisis que hice es válido para sociedades con cualquier espacio de estados pues bastaría con hacer una matriz de transición para cada uno de los temas para tener la dinámica del sistema completo.

## 2.2. Conclusiones del estudio estocástico

En este momento vale la pena retomar las preguntas originales de Axelrod sobre la diseminación cultural: ¿La sociedad se pondrá de acuerdo con suficiente tiempo? Y, en caso de que la razón por la cual las sociedades no se pongan de acuerdo no sea la falta de tiempo, ¿Cuál es entonces?

Tratando de contestar esta pregunta es que dicho autor diseñó su modelo y realizó simulaciones numéricas. Sin embargo con el trabajo que he presentado en las páginas anteriores puedo considerar este modelo como una mala forma de estudiar la sociedad y resumiré el trabajo que hasta ahora he hecho para sustentar esta afirmación.

Inicié con la pregunta fundamental de Axelrod y realicé algunas simulaciones numéricas para observar algunos ejemplos del comportamiento práctico al que nos llevaba su algoritmo.

Posteriormente hice un análisis de dicho algoritmo buscando las limitaciones que éste tenía y comparándolas con algunos fenómenos sociales. Esto nos llevó a una lista de importantes refutaciones que son posibles hacer al trabajo de Axelrod, así que decidí explorar la posibilidad de modificar su modelo de modo que se resolvieran estos problemas sin alterar la base tensorial del mismo.

Con este espíritu, modifiqué el modelo de Axelrod para permitir que los individuos fueran capaces de generar nuevas opiniones, problema fundamental encontrado en el modelo original. Una vez hecho esto, estudié el comportamiento de este nuevo tipo de sociedades, notando que existía una gran cantidad de diferencias respecto al trabajo inicial y evidenciando la gran flexibilidad que la base del modelo en cuestión tiene.

Sin embargo, antes de seguir haciendo modificaciones para corregir las inconsistencias que encontré respecto a la sociedad actual, me pregunté si existía algún aparato matemático con el cual pudiera estudiar la dinámica del sistema.

Tras un breve análisis, demostré que las sociedades de Axelrod siempre corresponderán a una cadena de Markov, sin importar cuantas modificaciones se le hagan debido a que son sus reglas de actualización las que lo hacen entrar en esta clasificación y alterar dichas reglas significaría cambiar la base del modelo.

Es ahora cuando cobra relevancia la pregunta hecha por Axelrod con la que inició esta subsección, pues para responderla es necesario no sólo saber si las sociedades se pondrán de acuerdo o no, sino también hablar de la dinámica de la sociedad. Sin embargo, después demostré que sin importar con qué sociedad iniciara, la cadena de Markov que describe la sociedad en cuestión sería indistinguible, a partir de cierto momento, a cualquier otra y que pese a existir escenarios en los cuales la sociedad no converge, son las limitaciones

computacionales las que llevan a la convergencia las simulaciones realizadas. En otras palabras, los resultados de esta sección afirman que el modelo que propone Axelrod no es capaz de responder las interrogantes planteadas por él mismo.

Ya que un modelo es bueno en tanto que abstrae y permite estudiar las características principales del sistema que se está considerando y responde las preguntas que motivan la investigación, considero que, para responder las preguntas planteadas por Axelrod, debo abandonar su modelo. De este modo, en las siguientes secciones estudiaré la posibilidad de crear un nuevo modelo de la sociedad y estudiar su comportamiento, esperando poder contestar las interrogantes que generaron todo este análisis.

## Capítulo 3

# Construcción de una sociedad de partículas

En esta sección hablaré sobre la posibilidad de crear un nuevo modelo de la sociedad que nos de información sobre la manera en que la cultura se disemina dentro de ella y así poder responder las preguntas planteadas por Axelrod.

Pese a las críticas que le he hecho al trabajo en el cual me estoy basando para hacer esta tesis, hay algunas ideas que valen la pena ser rescatadas, las cuales enlisto a continuación:

- Las características culturales dependen de la presencia o ausencia de otras características culturales.
- Los individuos tienden a interactuar más con aquellos sujetos con los que comparten intereses.
- La interacción entre individuos puede incrementar la cantidad de opiniones que comparten.
- La sociedad es un modelo basado en agentes.

Analizando la construcción de la sociedad de Axelrod, es fácil observar que este autor define una sociedad y deriva el resto de los conceptos como partes de ella; por ejemplo, un individuo es una entrada de la matriz que la representa.

Contrario a este formalismo, adoptaré una corriente opuesta: buscaré una definición para individuo, lo convertiré en el fundamento de mi sistema y todo concepto se derivará de las interacciones entre los sujetos; por ejemplo, definiré una sociedad como una colección de individuos y los fenómenos que emergen de sus comportamientos individuales.

Teniendo esto en mente, añadiré una característica que considero esencial a la lista que recuperamos anteriormente: las personas no son sólo seres culturales, sino que su actuar trasciende la cultura. Con lo anterior me refiero a que las personas no somos seres que se dedican únicamente a intercambiar ideas, como lo sugeriría el modelo de Axelrod, sino

que somos entes tanto biológicos como sociales los cuales tenemos diferentes necesidades, obligaciones y aspiraciones que conducen a responsabilidades como comer, dormir, generar ingresos económicos o sentarse solo durante largas horas a escribir una tesis.

Cabe mencionar que esto es una forma totalmente opuesta de entender la sociedad a como lo hacía Axelrod, pues una de sus ideas pilares, establecida explícitamente, es que los individuos no tienen ningún principio de cálculo racional ni una estrategia. De este modo sus individuos, al carecer de impedimentos para ser seres únicamente culturales, pueden permanecer eternamente intercambiando ideas con sus vecinos.

Para recrear este comportamiento extra-cultural al que me refiero, haré uso de la teoría de juegos, lo cual a su vez me permitirá estudiar directamente los motores de la dinámica social. Con esto en mente, comienzo con la definición de individuo.

**Definición:** Individuo, gustos, opiniones, condiciones y función de pago

Un *individuo* será una partícula descrita por  $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\emptyset\}$  la cual tendrá asociadas  $n$  *opiniones* y  $p$  *gustos* representados por una función  $\omega_\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]^{n+p}$ , donde la  $i$ -ésima entrada será una función interpretada como la afinidad de  $\gamma$  hacia el  $i$ -ésimo tema con la unidad siendo el grado máximo de afinidad y  $m$  *condiciones* las cuales describiremos con  $\kappa_\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow Cl$  donde  $Cl$  es la clase de los conjuntos y la  $j$ -ésima entrada le asignará un conjunto a la condición correspondiente de tal forma que  $\kappa_{\gamma j} = \kappa_{\gamma j}(\omega_\gamma, \kappa_{\gamma 1}, \dots, \kappa_{\gamma j-1}, \kappa_{\gamma j+1}, \dots, \kappa_{\gamma m})$ .

La interpretación que daré a las opiniones será la parte de la personalidad del individuo sobre la que él tiene control, por ejemplo, qué tan frecuentemente duerme ocho horas al día; los gustos serán su postura sobre determinados temas, como puede ser, cuál es la mejor canción de *Oasis* y las condiciones serán escenarios resultado del ambiente en que está inmerso el individuo y sobre las cuales este no tiene un control directo, sino que están determinadas en ocasiones por el azar, otras veces como producto de sus opiniones y en otras como hechos dados e inmutables, por ejemplo su edad o el tiempo que tardará en aparecer una vacuna contra determinada enfermedad.

Puede que estas definiciones puedan parecer algo turbias por el momento, pero a lo largo del texto irán adquiriendo significado y sentido.

Además la *función de pago* será una función a modo de Teoría de juegos que le asignará un valor real a la situación del individuo, es decir, sus gustos, opiniones y condiciones. Además quiero poder interpretar dicho real como la satisfacción del individuo, pero ¿Esto es posible? Y si no, ¿Es posible bajo algunas hipótesis? Exploraré esto en la siguiente subsección.

### 3.1. Teoría de la utilidad de von Neumann y Morgenstern

Como dije anteriormente, buscaré dotar a mis individuos de la capacidad de tener gustos y poder distinguir entre las diferentes circunstancias que se les presenten. Consideraré natural voltrear a ver la teoría de juegos, ya que mi objetivo es la premisa que le da fundamento a dicha área.

Llevado por este pensamiento, pronto deduje que, en caso de que la solución fuera un juego, este debería ser extensivo, por lo cual recordamos brevemente la definición hecha por von Neumann, Morgenstern y Kuhn. [17][18][13]

**Definición:** Juego extensivo

Un juego extensivo con conjunto de jugadores  $N$  consta de:

1. Un conjunto de  $N$  jugadores.
2. Un árbol con raíz  $(\Gamma, U)$ , tal que para cada vértice  $v$ , su conjunto de alternativas tiene más de un elemento o está vacío.
3. Una partición de los vértices no finales en una colección de subconjuntos  $S^0, \{S^j\}_{j \in N}$ , de tal manera que existe una biyección entre dicha colección de subconjuntos y el conjunto  $N \cup \{0\}$ , donde el conjunto  $S^j$  es el conjunto de vértices del jugador  $j$  en  $N$  y  $S^0$  es el conjunto del jugador de azar.
4. Para cada vértice  $v$  de  $S^0$ , una distribución de probabilidad definida en su conjunto de alternativas, a la cual denotaremos por  $P(|v)$ .
5. Para  $j \neq 0$ , una partición de  $S^j$  en una colección de subconjuntos  $\{S_k^j\}$  tales que:
  - a) Si  $Alt(v)$  es el conjunto de alternativas de  $v$ , entonces para  $S_k^j$  existe  $I_k^j$  y para todo  $v \in S_k^j$  existe una biyección  $i : Alt(v) \rightarrow I_k^j$ .
  - b) Si  $\{v, z\} \subseteq S_k^j$ , entonces  $v$  no es mayor que  $z$  y  $z$  no es mayor que  $v$ . A los conjuntos  $S_k^j$  se les llama *conjuntos de información del jugador  $j$*
6. Para cada  $j \in N$ , una función de pago  $\pi_j$  definida del conjunto de partidas en  $\mathbb{R}$ . Al conjunto de partidas de  $\Gamma$  se le denota como  $T$  y es un conjunto de  $n$ -eadas en que se estipula el orden de los jugadores.

Dada la posible complejidad para comprender la definición anterior, en la figura 3.1 presento un ejemplo de un juego extensivo para claridad de los conceptos.

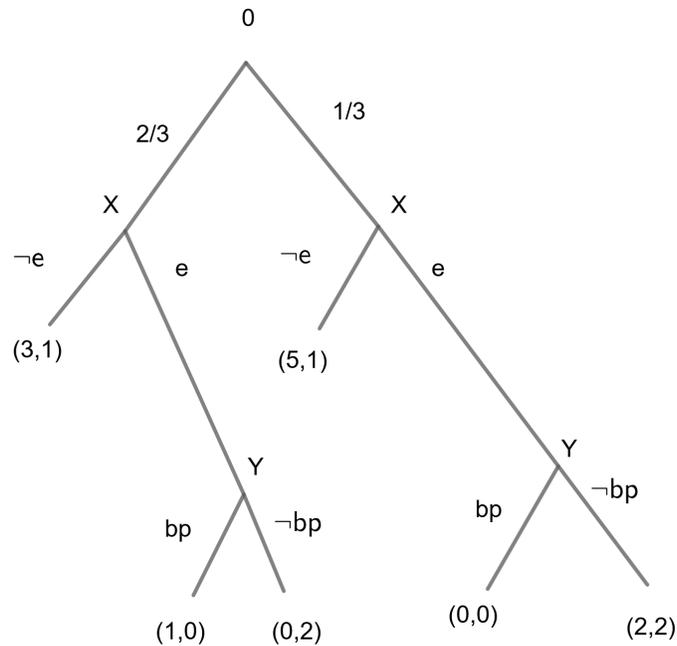


Figura 3.1: Ejemplo de un juego extensivo. Se muestra un árbol con raíz en 0, jugadores 0, X y Y donde 0 es el azar. Las fracciones en las aristas representan probabilidades de que el jugador azar tome cierta decisión y las letras, posibles opciones para los jugadores en turno. Los pares ordenados en los nodos terminales del árbol representan los pagos para los jugadores, siendo la primera entrada la correspondiente a X y la segunda correspondiente a Y.

Ahora realizaré un análisis algo somero de qué tan útil resulta esta definición para el trabajo que me propongo hacer. Cabe mencionar que la razón por la que no ahondaré en la demostración de si puedo representar una sociedad de esta manera es porque aún estoy analizando si esta estructura logra abstraer las características que mencioné anteriormente que quiero que cumpla el modelo y en caso de que así sea, ahondaré en la demostración posteriormente.

Si quiero modelar una sociedad como un juego extensivo, lo primero que necesito es un conjunto de  $N$  jugadores, lo cual es trivial de obtener pues los jugadores serán los individuos de la sociedad, satisfaciendo así el punto 1).

El árbol  $(\Gamma, U)$  en cuestión lo puedo construir discretizando los momentos en los que los jugadores tomarán decisiones y colocando en cada vértice todas las opciones que los jugadores podrán tomar, incluyendo al jugador de azar. De este modo, basta con definir  $U$  como el momento en que comenzaré a estudiar la sociedad dada una configuración inicial

de los individuos. Nótese que esto satisface los puntos 2) y 3) de la definición de juego extensivo de manera inmediata.

En lo referente al punto 4), puedo asignarle diferentes opciones de actuar a cada individuo para cada momento y dotar a cada una de esas opciones con una distribución de probabilidad.

Continuando, el punto 5) es satisfecho con la manera en que le asignaríamos gustos y opiniones a los individuos y la forma en que estas cualidades serían ponderadas por la función de pago.

Finalmente, el punto 6) es aquel al que me refería con la función de pago que se le asignaría a cada jugador. Ya que no se piden mayores especificaciones a dicha función, salvo que exista una para cada jugador, basta con asignar un pago para cada acción que cada jugador tome en todo momento del juego. Esto no significa que le podré dar la interpretación mencionada a la hora de definir al individuo, pues hasta ahora sólo sé que le puedo asignar una función de pago genérica.

De este modo, tengo que es factible pensar la sociedad como un juego extensivo, lo cual trae beneficios como que las decisiones de cada individuo son independientes de las que tome cualquier otro jugador, lo cual da la ventaja de que más de un sujeto puede actuar al mismo tiempo, lo cual no es posible en el modelo axelrodiano.

Por otro lado, este formalismo me permite entender y modelar a los individuos más allá de la dimensión cultural, lo cual dije que sería una de las ideas base en mi concepción de sociedad. Todo esto sin mencionar que ya existe toda una teoría de estos juegos [19][20], lo cual se traduce en que, de usar este formalismo, contaría de inmediato con un aparato matemático bastante desarrollado.

Sin embargo, Paloma Zapata presenta una situación fácilmente modelada con un juego extensivo [14]:

Un jugador tiene que decidir entre participar en una lotería que le permite ganar un millón de pesos con probabilidad de un medio, y no ganar nada con probabilidad también de un medio, o que le entreguen, de forma segura, medio millón de pesos.

El escenario anterior puede ser representado por el diagrama de flujo de la figura 3.2.

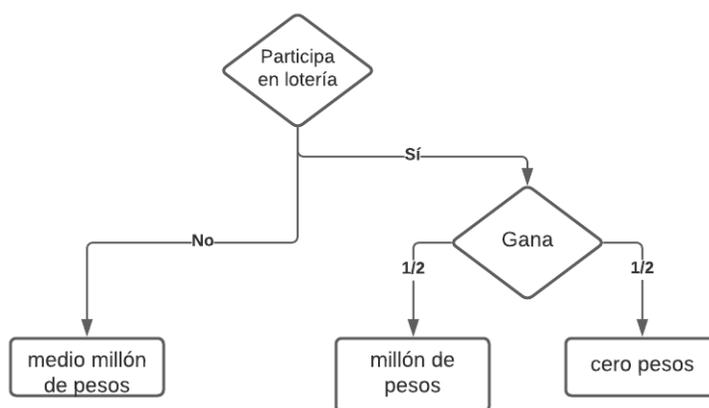


Figura 3.2: Representación del juego extensivo planteado por Paloma Zapata. En caso de que el arista muestre un número, corresponde a la probabilidad con que ocurrirá esa opción; en caso contrario, la probabilidad es igual a la unidad o es decisión del jugador.

El juego presentado por Paloma Zapata en la figura 3.2 representa un juego en el que a los jugadores les sería indistinguible el participar en la lotería o no puesto que la ganancia esperada en ambas situaciones es la misma; sin embargo es irreal pensar que a la mayoría de las personas les resulte igual participar en ella o no. Es claro que en la práctica, a muy pocas personas les daría igual participar o no en ella.

Así, con este ejemplo, resulta evidente que no basta con quedarme en los juegos extensivos sino que falta dotar a los individuos con una verdadera capacidad de decisión que corresponda con su personalidad, para lo cual es necesario extender el espacio de eventos de teoría de probabilidad al espacio de las loterías y desarrollar una teoría de la utilidad que permita a los jugadores tomar decisiones más apegadas a sus convicciones. Para mi suerte, Morgenstern y von Neumann ya desarrollaron esta teoría, la cual analizaré a continuación.

Antes de proseguir, considero importante expresar mi motivación para dotar a los individuos de capacidad de decidir que corresponda con su personalidad puesto que podría no ser clara la obstinación por agregar esta característica al modelo social si el objetivo es estudiar la diseminación cultural. Como lo mencioné anteriormente, la principal adición que hice a las ideas base de Axelrod es que considero que es necesario entender a los sujetos como entes integrales y no solamente como entes culturales.

De este modo, mientras en la estructura axelrodiana eran las decisiones (respecto a si interactuar o no con un vecino dado) lo que afectaba la cultura, quiero que en mi modelo también exista la posibilidad de que sea la personalidad del individuo, en palabras de Axelrod, su cultura, quien altere las decisiones que este toma; es decir que el conjunto de opiniones del individuo tenga un efecto en sus elecciones. Así, habiendo explicado mi motor actual, comienzo el estudio de la teoría de la utilidad de von Neumann y Morgenstern.

## 3.2. Sobre la existencia de la función de pago

A partir de ahora, tomaré como base para el modelo que todo ser humano obrará de manera libre y basándose únicamente en sus preferencias dadas las circunstancias en las que se encuentra.

Sin embargo, a la hora de enfrentarnos ante varias alternativas para una decisión, no les asignamos un valor en los números reales para después elegir, sino que las evaluamos y las ordenamos por la mayor afinidad que estas tienen con nuestros ideales y deseos. A continuación presento la definición de Morgenstern y von Neumann que permite abstraer esta situación.

**Definición:** Preferencia de un individuo dados 2 acontecimientos.[14]

Representaré las condiciones  $A$  y  $B$  como conjuntos y en caso de que el individuo o jugador  $j$  prefiera  $A$  al  $B$  o le sea indiferente, lo denotaré como  $A \preceq^j B$ . Cuando  $j$  no le es indiferente  $A$  y  $B$ , i.e. cuando se da  $A \preceq^j B$  pero no  $B \preceq^j A$ , denotaré esta condición por  $A \prec^j B$ . Si se cumple  $A \preceq^j B$  y  $B \preceq^j A$ , diré que  $A$  y  $B$  son indiferentes para  $j$  y lo representaré con  $A \sim^j B$ .

En este caso, a la relación  $\preceq^j$  la llamaré *relación de preferencia* y si esta permite comparar entre cualesquiera dos estados en que puede habitar un individuo, diré que la relación de preferencia es *total*.

Para cuando no haya lugar para ambigüedades sobre el jugador al que me estoy refiriendo, me limitaré a expresar  $\preceq$ .

**Observación:** Toda relación de preferencia total es tricotómica, es decir que si  $A$  y  $B$  son dos eventos comparables, entonces  $A \prec B$ ,  $B \prec A$  ó  $A \sim B$ .

**Definición:** Jugador racional

Si  $W$  es la clase de las condiciones en que puede habitar un individuo de la sociedad y existe a una relación de preferencia para el jugador  $j$ ,  $\preceq^j$ , diré que  $j$  es un *jugador racional bajo  $\preceq^j$*  si la relación de preferencia es total, reflexiva y transitiva en el sentido de orden.

Nótese que estoy diciendo *clase* puesto que aún no sé si  $W$  es un conjunto en general o si existen premisas no triviales bajo las cuales se pueda afirmar que lo es.

De ahora en adelante me referiré a  $W$  como *la clase de condiciones en que puede habitar un individuo* o como *la clase de resultados de un juego*, ya que como he dicho, se estudiará el sistema desde la perspectiva de teoría de juegos.

**Observación:**

Dado un juego  $\Gamma$  y un jugador racional  $j$ , la relación  $\sim^j$  es una relación de equiva-

lencia sobre la clase  $W$  de resultados del juego.

Ahora puedo proponer la definición de lo que entenderé como función de pago y después exploraré un poco sobre las características que esta tiene y las implicaciones que esta imprime sobre el resto del modelo.

**Definición:** Función de pago que representa a  $\leq^j$ . [14]

Si  $W$  es la clase de todos las condiciones posibles en que un individuo puede habitar y existe una relación de preferencia total  $\leq^j$  para el jugador  $j$ , diremos que la función  $u_j : W \rightarrow \mathbb{R}$  representa a  $\leq^j$  si  $\forall \{A, B\} \subseteq W$  tales que  $A \leq^j B$  entonces  $u_j(A) \leq u_j(B)$ .

Así mismo, a la terna ordenada  $(W, \leq^j, u_j)$  la llamaré *representación del jugador  $j$* .

De este modo, la función de pago constituye una traducción entre los escenarios posibles de las condiciones del individuo y los reales, lo cual amplía en gran medida las operaciones y comparaciones que se pueden hacer en el modelo que estoy construyendo.

Ya se muestra cómo estas representaciones están tomando cierta estructura, por lo cual propongo la siguiente definición para poderla comparar.

**Definición:** Resultados de juego equivalentes y relaciones de preferencia equivalentes. Sea un juego  $\Gamma$  y un jugador  $j$  al cual se pueden asociar dos clases para los resultados del juego  $A$  y  $B$ , las cuales tienen las respectivas relaciones de preferencia  $\leq_a$  y  $\leq_b$  representadas por las funciones de pago  $u_a : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $u_b : B \rightarrow \mathbb{R}$  respectivamente.

Diré que  $A, \leq_a$  y  $u_a$  son equivalentes a  $B, \leq_b$  y  $u_b$  respectivamente si existen  $\phi : A \rightarrow B$  epimorfismo continuo y una constante  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $ku_a = u_b \circ \phi$  o si existen  $\phi_1 : B \rightarrow A$  epimorfismo continuo y una constante  $k_1 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $k_1u_b = u_a \circ \phi_1$ .

En caso de que no haya lugar a confusión, diré únicamente que las representaciones del jugador  $(A, \leq_a, u_a)$  y  $(B, \leq_b, u_b)$  son equivalentes.

En lugar de discutir sobre el significado de esta definición para resultados de juego y relaciones de preferencia equivalentes, propongo el siguiente ejemplo en el cual muestro dos escenarios no equivalentes pues considero que esto será más ilustrativo.

**Ejemplo:** Existen dos resultados de juego con dos relaciones de preferencia que no son equivalentes.

*Demostración.* Consideremos  $A = \mathbb{R}$  y  $B = \mathbb{R}$  representaciones para los resultados de algún juego y un jugador  $j$  que tiene relaciones de preferencia  $\leq_A$  y  $\leq_B$  que son la relación de orden en los reales.

Así mismo, tomemos las funciones de pago  $u_A, u_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $u_A(x) = x$  y  $u_B(x) = 0$ . Es fácil notar que  $u_Y$  es una función de pago que representa a  $\leq_Y$  con  $Y \in \{A, B\}$  ya que si  $\{x, z\} \subseteq Y$  tales que  $x \leq_Y z$ , se cumple que  $u_Y(x) \leq u_Y(z)$  por definición.

Sin embargo, si tomamos un epimorfismo  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $|u_B \circ \phi[\mathbb{R}]| = 1$  por la definición de  $u_B$  y de función, pero  $|u_A[\mathbb{R}]| = |\mathbb{R}|$ , por lo que  $u_A \neq u_B \circ \phi$ .

Análogamente, si tomamos  $u_A \circ \phi = u_B$ , entonces  $|\phi[\mathbb{R}]| = |\mathbb{R}|$  pues  $\phi$  es suprayectiva, mientras que  $|u_B[\mathbb{R}]| = 1$ , de modo que  $u_B \neq u_A \circ \phi$ .

$\therefore (A, \leq_A, u_A)$  y  $(B, \leq_B, u_B)$  no son equivalentes.

□

Equipado con estas definiciones, retomo una interrogante que había quedado sin respuesta: ¿Existen premisas no triviales bajo las cuales la clase de resultados de un juego sea un conjunto? Cabe mencionar que una de las razones por las cuales vale la pena hacer esta pregunta es para empezar a explorar cuál es el alcance que tiene el hecho de contar con una función de pago además de que el hecho de que se tenga un conjunto por clase de resultados de juego, otorga una naturaleza más difundida a la estructura que se está construyendo. Presento ahora una propuesta bajo las cuales esto es cierto.

**Proposición:** El que una relación de preferencia pueda ser expresada mediante una función de pago, permite asociarle al individuo un conjunto como clase de resultados del juego que genera una representación equivalente para el jugador en cuestión. Es decir, sea un juego  $\Gamma$  y un jugador racional  $j$  con una representación  $(W, \leq, u)$ , entonces existe una representación equivalente  $(W', \leq_1, v)$  tal que  $W'$  es un conjunto y bajo la cual  $j$  sigue siendo racional.

*Demostración.* Sea  $W'$  la clase cociente  $W/\sim$  donde  $\sim$  es la relación de equivalencia generada por la relación de preferencia de  $j$ .

De este modo, definamos  $\leq_1$  tal que si  $\{[A], [B]\} \subseteq W'$  y  $A \leq B$ , entonces  $[A] \leq_1 [B]$  y observemos que está bien definida.

Sean  $x \in [A]$  y  $z \in [B] \Rightarrow x \sim A$  y  $z \sim B$ . Ya que  $A \leq B$ , tenemos que  $x \leq z$  pues  $j$  es jugador racional bajo  $\leq$ , por lo cual la relación está bien definida pues no depende de los representantes.

$\therefore \leq_1$  es relación de preferencia para  $W'$ .

Antes de proseguir, notemos que ya que  $\leq_1$  es relación de preferencia, entonces es tricotómica como lo habíamos visto antes. Debido a esto y por la definición de  $\leq_1$ , si es falso que  $[A] \leq_1 [B]$ , entonces  $[B] <_1 [A]$ , por lo cual  $B < A$ ; es decir, si  $[B] \leq_1 [A]$ , entonces  $B \leq A$ .

Para probar que  $j$  es racional bajo  $\leq_1$ , notemos que si  $[X] \in W'$ , entonces  $X \sim X \Rightarrow [X] \leq_1 [X]$ , por lo que es reflexiva.

Ahora tomemos  $\{[X], [Y], [Z]\} \subseteq W'$  tales que  $[X] \leq_1 [Y]$  y  $[Y] \leq_1 [Z]$ . Luego  $X \leq Y$  y  $Y \leq Z$  y como  $j$  es racional bajo  $\leq$ , entonces  $X \leq Z \Rightarrow [X] \leq_1 [Z]$ , de modo que es transitiva.

Por último, tomemos  $\{[X], [Y]\} \subseteq W'$ . Como  $\leq$  es total,  $X$  y  $Y$  son comparables; sin pérdida de generalidad supongamos que  $X \leq Y \Rightarrow [X] \leq_1 [Y]$ , por lo que  $\leq_1$  es total.

$\therefore j$  es un jugador racional bajo  $\leq_1$ .

Ahora definamos  $v : W' \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v([A]) = u(A)$ . Para mostrar que  $v$  está bien definida, tomemos  $\{x, y\} \subseteq [A] \Rightarrow x \sim A \sim y \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x$ , de modo que ya que  $u$  es función de pago,  $u(x) \leq u(y)$  y  $u(y) \leq u(x) \Rightarrow u(x) = u(y)$ , por lo cual  $v$  no depende de los representantes.

Por otro lado, también tenemos que si  $\{[A], [B]\} \subseteq W'$  tales que  $[A] \leq_1 [B]$ , entonces  $v([A]) = u(A)$  y  $v([B]) = u(B)$ . Pero como  $[A] \leq_1 [B]$ , entonces  $A \leq B \Rightarrow u(A) \leq u(B) \Rightarrow v([A]) \leq v([B])$ .

$\therefore v$  es función de pago y representa a  $\leq_1$ .

De este modo, para mostrar que  $W, \leq$  y  $u$  son equivalentes a  $W', \leq_1$  y  $v$ , tenemos de manera evidente que si  $\pi : W \rightarrow W'$  es la proyección, entonces  $u = v \circ \pi$  y  $\pi$  es continua por ser proyección.

$\therefore W, \leq$  y  $u$  son equivalentes a  $W', \leq_1$  y  $v$  respectivamente.

Sólo resta probar que  $W'$  es un conjunto. Para esto, tomemos  $\{[A], [B]\} \subseteq W'$  tales que  $v([A]) = v([B]) \Rightarrow u(A) = u(B) \Rightarrow A \leq B$  y  $B \leq A \Rightarrow A \sim B \Rightarrow [A] = [B]$ , i.e.  $v$  es inyectiva.

Debido a esto, podemos identificar a todo elemento de  $W'$  con un número real, de modo que por el esquema de comprensión de teoría de conjuntos,  $W'$  es un conjunto.

$\therefore W'$  es un conjunto.

□

En este punto ya es visible la gran diferencia que implica el que una relación de preferencia tenga una función de pago o no. Debido a su relevancia, continuaré con el análisis de las características de las funciones de pago y sobre la estructura que le imprime a los individuos.

Prosiguiendo, quiero hacer notar que proponer una relación de preferencia que cumpla con tener una función de pago que la represente es muy sencillo, por ejemplo si  $W = \{A, B, C\}$ ,  $A < B < C$  y  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  cumple que  $u(A) = 1$ ,  $u(B) = 2$  y  $u(C) = 3$ . De este modo aseguro que la definición tiene sentido al no ser vacío el conjunto de relaciones de preferencia que pueden ser representadas por una función de pago.

En este punto ya tengo una definición formal sobre lo que entenderé por la función de pago a la que me refería a la hora de hablar sobre las características que deberán tener los individuos y ya mostré que existen para algunos casos. Sin embargo, ¿Siempre existen estas funciones? Para responder esto, probaré el siguiente lema para tener algo de información sobre su comportamiento.

**Lema:** Si tanto  $W$  como  $\mathbb{R}$  tienen la topología del orden y  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de pago que representa a una relación de preferencia total  $\leq$  sobre  $W$ , entonces  $u$  es continua.

*Demostración.* Ya que  $\mathbb{R}$  tiene la topología de orden, sabemos que una subbase para esta

topología es  $\{(a, \infty) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$  y que basta demostrar que la imagen inversa de los subbásicos bajo  $u$  es abierta para poder asegurar que  $u$  es continua gracias a las propiedades de la imagen inversa de funciones. Así, sea  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $(a, \infty) \cap u[W] \neq \emptyset$  pues en caso contrario la demostración estaría terminada.

Notemos que  $u[W] \cap (a, \infty)$  es acotado inferiormente y dijimos que es no vacío  $\Rightarrow \exists \alpha := \inf(a, \infty) \cap u[W]$  y por definición de ínfimo tenemos que  $\forall \epsilon > 0, \exists w_\epsilon \in W$  tal que  $u(w_\epsilon) \in [\alpha, \alpha + \epsilon)$ .

De este modo, sea  $w_n \in W$  tal que  $u(w_n) \in [\alpha, \alpha + \frac{1}{n})$  y notemos que  $(\alpha, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [\alpha + \frac{1}{n}, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (\alpha + \frac{1}{n}, \infty)$ .

Ahora calculando,  $u^{-1}[(u(w_n), \infty)] = \{x \in W | u(x) \in (u(w_n), \infty)\}$  y como  $u$  representa a  $\leq$ ,  $u(w_n) \leq u(x) \Leftrightarrow w_n \leq x$  por lo que  $u^{-1}[(u(w_n), \infty)] = \{x \in W | w_n < x\}$  que es abierto en  $W$  por definición de la topología de orden.

Así,  $u^{-1}[(\alpha, \infty)] = u^{-1}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (\alpha + \frac{1}{n}, \infty)\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} u^{-1}[(\alpha + \frac{1}{n}, \infty)]$  lo cual también es abierto en  $W$  por ser unión de abiertos.

$\therefore u$  es continua.

□

Sabiendo esto, puedo responder si siempre existen las funciones de pago para cualquier relación de preferencia y se verá que la respuesta es negativa.

**Afirmación:** Si  $W = [0, 1] \times [0, 1]$  es el conjunto de todos los estados en que puede habitar una persona en la sociedad y la relación de preferencia  $\leq$  es el orden lexicográfico, entonces no existe una función de pago que la represente.

*Demostración.* Se demostrará por contradicción, para lo cual supondremos que existe  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  tal que representa a  $\leq$ .

Ahora sea  $(x, 1) \in W$  tal que  $x \neq 1$  y tomemos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de reales decreciente tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  y que  $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, 0) \in W$  y  $x_n \neq x$ .

Así notamos que como  $x_n > x$ ,  $(x, 1) < (x_n, 0) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(x, 1) < u(x_n, 0)$ . Por el lema anterior tenemos que  $u$  es continua, de modo que tenemos que  $u(x, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x, 1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n, 0) = u(x, 0)$ .

Por otro lado, de nuevo por la continuidad de  $u$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n, 0) = u(x, 0) < u(x, 1)$  pues  $u$  representa a  $\leq$  y con el orden lexicográfico  $(x, 0) < (x, 1)$ .

Por lo tanto  $u(x, 0) < u(x, 1) \leq u(x, 0) \Rightarrow u(x, 0) < u(x, 0)$ , lo cual es una contradicción.

$\therefore$  No existe una representación de pago que represente al orden lexicográfico.

□

Vale la pena resaltar que la relevancia de la afirmación anterior radica en que es posible generar un escenario en que un jugador tiene a  $[0, 1] \times [0, 1]$  como resultados de juego y al orden lexicográfico como relación de preferencia. Por ejemplo, podemos pensar que el par  $(x, y)$  representa el escenario en que el jugador tiene una cantidad de dinero  $x$  y una cantidad  $y$  de avance en un trabajo escrito. De este modo, al tomar otro punto del cuadrado lexicográfico  $(w, z)$  tal que  $x = w$ , es decir un escenario en que tuviera la misma cantidad de dinero, el jugador preferiría avanzar en el trabajo en cuestión, pero si por otro lado  $x < w$ , el jugador preferirá conseguir más dinero independientemente de qué tan avanzado esté su escrito.

Ya que tenemos una idea del comportamiento de las estructuras que se están considerando, proseguiré con más definiciones para llegar al teorema de Morgenstern y von Neumann referente a la existencia de las funciones de pago.

**Definición:** Lotería[15]

Si un juego tiene como resultados posibles  $A$  y  $B$  y  $r \in [0, 1]$ , llamaremos *lotería entre  $A$  y  $B$  con probabilidades de ocurrencia  $r$  y  $1 - r$*  al evento consistente en que  $A$  ocurra con probabilidad  $r$  y  $B$  con probabilidad  $1 - r$ .

A dicha lotería la denotaremos como las sumas y productos formales  $rA + (1 - r)B$ , lo cual a su vez conduce a que se le asignen algunos axiomas a las loterías para que las operaciones comiencen a cobrar sentido.

**Axiomas de las loterías**[15] Si  $A, B$  y  $C$  son parte de una lotería, entonces se cumple lo siguiente.

1. Si  $A < B$ , entonces para toda  $r \in [0, 1]$  y cualquier evento  $C$ , se cumple que  $rA + (1 - r)C < rB + (1 - r)C$ .
2. Si  $A \sim B$ , entonces para toda  $r \in [0, 1]$  y cualquier evento  $C$ , se cumple que  $rA + (1 - r)C \sim rB + (1 - r)C$ .
3. **Continuidad.** Si  $A, B$  y  $C$  son eventos tales que  $A < C < B$ , entonces existe  $r \in (0, 1)$  tal que  $rA + (1 - r)B \sim C$ .

El tercer axioma de las loterías lleva a que se diga que una relación de preferencia  $\leq$  es *continua* si se satisface dicho axioma con la relación de preferencia en cuestión.

Analizando los axiomas de las loterías es natural notar cierta similitud entre los primeros dos y el comportamiento de la relación de orden en  $\mathbb{R}$ , mientras que el axioma de continuidad se asemeja al resultado del teorema del valor intermedio. Para sustentar esta intuición, probaré la siguiente proposición.

**Proposición:** Si  $A, B$  y  $C$  son eventos tales que  $A < C < B$  y  $rA + (1 - r)B \sim C$ , entonces  $r \in (0, 1)$  y es única [16].

*Demostración.* Notemos que si  $r \in \{0, 1\}$ , entonces  $B \sim C$  ó  $A \sim C$  respectivamente, por lo tanto  $r \in (0, 1)$ .

Supongamos que existe  $s \in (0, 1)$  tal que  $sA + (1 - s)B \sim C$ , por lo tanto  $sA + (1 - s)B \sim rA + (1 - r)B$ .

Supongamos que  $s < r$ , entonces por el primer axioma de las loterías tenemos que

$$\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B < \frac{r-s}{1-s}B + \frac{1-r}{1-s}B \sim B$$

Además notemos que

$$\begin{aligned} rA + (1-r)B &= rA + sA - sA + (1-r)B \\ &= sA + ((r-s)A + (1-r)B) \\ &= sA + \frac{1-s}{1-s}((r-s)A + (1-r)B) \\ &= sA + \frac{1-s}{1-s} \left( \left( \frac{r-s}{1-s} \right) A + \left( \frac{1-r}{1-s} \right) B \right). \end{aligned}$$

Así por el axioma 1, tenemos que

$$(1-s) \left( \left( \frac{r-s}{1-s} \right) A + \left( \frac{1-r}{1-s} \right) B \right) + sA < (1-s)B + sA$$

Por lo que  $C \sim rA + (1-r)B < (1-s)B + sA \sim C$ , lo cual es una contradicción.

$\therefore r$  es única. □

De este modo, esa aparente similitud que había mencionado entre las loterías y los números reales se acrecenta pues tenemos que la aplicación que toma tres eventos  $A, B$  y  $C$  tales que  $A < C < B$  y a los cuales les asigna un  $r \in (0, 1)$  que cumpla que  $C \sim rA + (1-r)B$ , efectivamente es una función ya que dicha  $r$  es única. Debido a esto, es comprensible cómo fue que von Neumann y Morgenstern llegaron al siguiente teorema.

**Teorema de existencia de la función de pago de von Neumann y Morgenstern[17]**

Si  $W$  es un espacio de eventos con una relación de preferencia  $\leq$  que satisface los axiomas de las loterías, entonces existe una función de pago  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cualesquiera dos eventos  $A$  y  $B$  en  $W$  y para cualquier  $q \in [0, 1]$  se cumple que:

1.  $u(A) \leq u(B) \Leftrightarrow A \leq B$
2.  $u(qC + (1 - q)D) = qu(C) + (1 - q)u(D)$

*Demostración.* Supongamos que existe  $\{A, B\} \subseteq W$  tal que  $A < B$  pues si todos los eventos en  $W$  son indiferentes, la demostración es trivial.

Definamos  $u(A) := 0$  y  $u(B) := 1$ . Cabe mencionar que si  $\{X, Y\} \subseteq W$  tal que  $X \sim Y$ , entonces definiremos  $u(X) = u(Y)$ .

Ahora tomemos  $C \in W$  tal que  $A < C < B$  por lo que  $\exists! r \in (0, 1)$  tal que  $rA + (1 - r)B \sim C$  y definiremos  $u(C) = 1 - r$ , lo cual está bien definido pues  $r$  es única.

Si ahora  $C < A$ , tenemos que  $C < A < B \Rightarrow \exists! s \in (0, 1)$  tal que  $sC + (1 - s)B \sim A$ . Para que cumpla la segunda condición, necesitamos que  $u(sC + (1 - s)B) = su(C) + (1 - s)u(B) = u(A) = 0 \Rightarrow u(C) = \frac{s-1}{s} < 0$ .

Si por el contrario  $B < C$ , tenemos que  $A < B < C$  de modo que existe un único  $t \in (0, 1)$  tal que  $tA + (1 - t)C \sim B$  y por la segunda propiedad,  $u(tA + (1 - t)C) = tu(A) + (1 - t)u(C) = u(B) = 1 \Rightarrow (1 - t)u(C) = 1 \Rightarrow u(C) = \frac{1}{1-t} > 1$ .

Para terminar la prueba, verifiquemos que  $u(C) \leq u(D) \Leftrightarrow C \leq D$  y para esto supongamos que  $C < D$  y notemos que tenemos 3 casos que aún no hemos demostrado:  $C < D < A$ ,  $A < C < D < B$  y  $B < C < D$ , pues el resto de los casos quedan demostrados trivialmente.

Caso 1:  $C < D < A < B$ .

Sean  $\{r, s\} \subset (0, 1)$  tales que  $rC + (1 - r)B \sim A$  y  $sD + (1 - s)B \sim A$ , por lo que tenemos  $u(C) = \frac{r-1}{r}$  y  $u(D) = \frac{s-1}{s}$ .

Además como  $C < D < A$ , existe  $p \in (0, 1)$  tal que  $pC + (1 - p)A \sim D$ , lo cual junto con lo anterior tenemos que  $A \sim spC + s(1 - p)A + (1 - s)B$  que al aplicar la función de pago  $0 = u(A) = spu(C) + s(1 - p)u(A) + (1 - s)u(B) = sp\frac{r-1}{r} + 1 - s$  y al despejar el valor buscado tenemos que  $r = s \left( \frac{p}{1+s(p-1)} \right)$ .

Ahora observemos que  $\frac{p}{1+s(p-1)} < 1 \Leftrightarrow p < 1 + sp - s \Leftrightarrow p(1 - s) < 1 - s$ , lo cual se cumple pues  $p \in (0, 1)$  y de este modo tenemos que  $r < s$  y con algunos cálculos llegamos a que  $\frac{r-1}{r} > \frac{s-1}{s}$ .

$\therefore u(C) < u(D)$ .

Caso 2:  $A < C < D < B$ .

Análogamente a lo hecho antes llegamos a que  $rA + (1 - r)B \sim C$ ,  $sA + (1 - s)B \sim D$  y

$pA + (1 - p)D \sim C$  para algún  $\{p, r, s\} \subset (0, 1)$ . Uniendo esto llegamos a que  $C \sim pA + s(1 - p)A + (1 - p)(1 - s)B$  y una vez que le aplicamos la función de pago tenemos que  $1 - r = (1 - p)(1 - s) \Rightarrow r = p + s(1 - p)$ .

Resolviendo la desigualdad  $r > s$  tenemos que  $r > s \Leftrightarrow 0 < p(1 - s)$  lo cual es cierto pues  $\{p, s\} \subset (0, 1)$ , de modo que llegamos a  $1 - r < 1 - s$ .

$\therefore u(C) < u(D)$ .

Caso 3:  $A < B < C < D$ .

Análogamente tenemos que  $rB + (1 - r)D \sim C$ ,  $sA + (1 - s)C \sim B$  y  $tA + (1 - t)D \sim B$  para algún  $\{r, s, t\} \subset (0, 1)$  y uniendo las relaciones llegamos a que  $B \sim sA + r(1 - s)B + (1 - s)(1 - r)D$  y al utilizar la función de pago obtenemos  $1 = \frac{r(1-s)(1-t)+(1-s)(1-r)}{1-t} \Rightarrow t = \frac{s}{1+rs-r}$ .

Notemos que ya que  $\{r, s\} \subset (0, 1)$  tenemos que  $\frac{1}{1+rs-r} > 1$  por lo que  $t > s \Rightarrow \frac{1}{1-t} > \frac{1}{1-s}$ .

$\therefore u(C) < u(D)$ .

□

Esta prueba devela algunas características importantes sobre la función de pago; por ejemplo, hace evidente la falta de significado para sus imágenes pues la demostración hace evidente que esta se puede construir de una manera totalmente arbitraria.

Es por esto que en su lugar, la función de pago debe ser interpretada de la misma manera que las funciones de potencial de los sistemas físicos, es decir que bien podemos definir para  $\{A, B\} \subset W$  que  $u(A) = 5$  sin que esto tenga significado hasta que definimos  $u(B) = 3$  pues entonces tenemos que  $u(A) - u(B) = 2$ , lo cual en este ejemplo denotaría una inclinación del individuo a tender al estado  $A$  si se encuentra en el estado  $B$ .

A su vez, esto indica que si se pretende que los individuos guíen sus decisiones basándose en los valores de su función de pago, basta con que el evento preferible tenga una imagen bajo la función de pago mayor que la del evento menos preferible, lo cual siempre se cumple por definición de función de pago. De este modo se tiene que, siguiendo la analogía de los potenciales físicos, esta función de pago genera *fuerzas sociales* que guían a los individuos hacia determinados eventos o a tomar ciertas decisiones y los llevan a evitar otros.

Siempre con la premisa en mente y no olvidando la interpretación y funcionalidad que se le quiere dar a la función de pago, me detengo a hacer un análisis de las implicaciones que tendría forzar a los individuos a un comportamiento que siempre maximizara su función de pago, con lo cual llego al siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos un juego  $\Gamma$  en el cual se cumple que todo individuo tiene por objetivo comer, socializar, dormir y reproducirse; donde además los sujetos están confinados a un lugar en donde hay suficiente espacio, comida y parejas para todos. Dadas estas hipótesis, la clase de resultados de juego es igual para todos los jugadores y no es difícil ver que las funciones de pago para cualquier par de jugadores serían equivalentes.

En este caso, si supusiéramos que los individuos tomarán acciones de modo que maximicen sus funciones de pago, se llegaría a que cada uno de los jugadores se dedicaría a comer, socializar, dormir y reproducirse tanto como pudieran. Si bien uno se sentiría

inclinado a decir que esto sería lo que se debería esperar en esta utopía, el etólogo Calhoun realizó este experimento en ratas, publicando sus resultados en su *Population density and social pathology*. En su experimento, Calhoun crea estas *utopías de ratas*, las cuales consistían en espacios cerrados donde las ratas tenían acceso ilimitado a comida, agua y no había restricciones en el crecimiento de la población. A continuación, me permito traducir un fragmento de sus resultados [21]:

Muchas [ratas hembras] fueron incapaces de llevar su embarazo a término o sobrevivir al parto de sus crías en caso de que estas lo hubieran hecho. Un número incluso mayor, después de haber parido, se quedó corta en sus funciones maternas. Entre los machos, las alteraciones en el comportamiento variaban desde desviación sexual hasta canibalismo y desde hiperactividad frenética hasta una abstinencia patológica en la cual los individuos emergerían para comer, tomar agua y moverse sólo cuando el resto de los miembros de la comunidad estuvieran dormidos. La organización social de los animales también sufrió alteraciones.

(...) La fuente en común de estas alteraciones se hizo dramáticamente más aparente en las sociedades de las primeras series de tres experimentos, en las cuales observamos el desarrollo de lo que llamamos *sumidero conductual*. Los animales se concentraban en mayor número en uno de los cuatro corrales interconectados en los que se mantenía la colonia. Hasta 60 de las 80 ratas en cada sociedad experimental se conglomeraría en uno de los corrales durante los periodos en que comían. Era muy raro que ratas individuales comieran si no era en compañía de otras ratas. Como resultado, se desarrollaron densidades de población extremas en el corral seleccionado para comer, dejando el resto con poblaciones escasas.

(...) En los experimentos en los cuales se desarrolló el sumidero conductual, la mortalidad infantil se elevó hasta 96 por ciento dentro de los grupos más desorientados de la sociedad.

Estos abrumadores resultados son un claro contraejemplo para la suposición que había hecho originalmente sobre la manera en que los jugadores toman sus decisiones. Esto me lleva a descartar la opción determinista de toma de decisiones y a buscar una manera probabilística en que la función de pago guíe el actuar de los jugadores, para lo cual propongo la siguiente definición.

**Definición:** Sea un juego  $\Gamma$  con un jugador  $j$ , el cual tiene una representación  $(W, \preceq, u)$  que lo hace racional. Dado un conjunto finito  $A \subseteq W$ , definimos la *función de toma de decisiones*  $\mu_A : A \rightarrow [0, 1]$  como

$$\mu_A(x) = \frac{e^{u(x)}}{\sum_{z \in A} e^{u(z)}}$$

**Afirmación:** La función de toma de decisiones está bien definida y es una función de probabilidad sobre  $A \subseteq W$  finito.

*Demostración.* Como  $\mu_A$  se define sobre un  $A$  conjunto finito y  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $\sum_{z \in A} e^{u(z)} \in \mathbb{R}^+$ , por lo cual  $\mu_A(x) \in [0, 1]$  puesto que la función exponencial es positiva.

$$\text{Por otro lado, } \sum_{x \in A} \mu_A(x) = \sum_{x \in A} \frac{e^{u(x)}}{\sum_{z \in A} e^{u(z)}} = \frac{1}{\sum_{z \in A} e^{u(z)}} \sum_{x \in A} e^{u(x)} = 1.$$

Por último, notemos que como la exponencial es positiva en  $\mathbb{R}$ , si  $\{x, y\} \subseteq A$ , entonces  $\mu_A(x) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$ .

$\therefore \mu_A$  es una función de probabilidad para  $A$ .

□

Naturalmente, es deseable que las funciones de pago equivalentes tengan una función de toma de decisiones equivalente de modo que la interpretación dada tenga algún significado, por lo cual probaremos la siguiente afirmación.

**Proposición:** Dos funciones de pago equivalentes que sean capaces de inducir funciones de toma de decisiones, inducirán funciones de toma de decisiones equivalentes.

*Demostración.* Sean  $(U, \leq_U, f_U)$  y  $(W, \leq_W, f_W)$  representaciones equivalentes de un jugador  $j$  bajo las cuales es racional. Además sea  $A \subset W$  finito y  $\mu_W : A \rightarrow [0, 1]$  la función de toma de decisiones inducida por  $f_W$ .

Ya que son equivalentes, sin pérdida de generalidad existe un epimorfismo  $\phi : W \rightarrow U$  tal que  $f_W = f_U \circ \phi$ . Entonces, tenemos que  $\phi|_A : A \rightarrow \phi[A]$  es epimorfismo.

Así, si  $\mu_U$  es la función de toma de decisiones generada por  $f_U$  sobre  $\phi[A]$ , entonces podemos calcular lo siguiente

$$\begin{aligned} \mu_W(x) &= \frac{e^{f_W(x)}}{\sum_{z \in A} e^{f_W(z)}} = \frac{e^{f_U \circ \phi(x)}}{\sum_{z \in A} e^{f_U \circ \phi(z)}} = \frac{e^{f_U}}{\sum_{z \in A} e^{f_U \circ \phi(z)}} \circ \phi(x) = \\ &= \frac{\sum_{z \in \phi[A]} e^{f_U(z)}}{\sum_{z \in A} e^{f_U \circ \phi(z)}} \frac{e^{f_U}}{\sum_{z \in \phi[A]} e^{f_U(z)}} \circ \phi(x) = \left( \frac{\sum_{z \in \phi[A]} e^{f_U(z)}}{\sum_{z \in A} e^{f_U \circ \phi(z)}} \right) \mu_U \circ \phi(x) \end{aligned}$$

$\therefore \mu_W$  y  $\mu_U$  son equivalentes pues  $\frac{\sum_{z \in \phi[A]} e^{f_U(z)}}{\sum_{z \in A} e^{f_U \circ \phi(z)}} \in \mathbb{R}^+$ .

□

La siguiente afirmación muestra que la función de toma de decisiones respeta las preferencias del jugador, lo cual es muy bueno pues implica que si los jugadores usan la función de toma de decisiones como distribución de probabilidad para escoger entre escenarios, entonces dicho jugador escogerá de acuerdo a sus preferencias.

**Proposición:** Si  $(W, \leq, u)$  es una representación para el jugador  $j$  que lo hace racional y  $\{A, B\} \subseteq W$  son dos eventos tales que  $A \leq B$ , entonces  $\mu$  la función de toma de decisiones sobre  $\{A, B\}$  es tal que  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

*Demostración.* Como  $A \leq B$ , entonces  $u(A) \leq u(B)$  por ser función de pago. Luego, ya que la función exponencial es creciente, entonces

$$e^{u(A)} \leq e^{u(B)} \Rightarrow \mu(A) = \frac{e^{u(A)}}{e^{u(A)} + e^{u(B)}} \leq \frac{e^{u(B)}}{e^{u(A)} + e^{u(B)}} = \mu(B).$$

□

Así, concluyo que la función de toma de decisiones permite sustituir las decisiones deterministas por funciones probabilistas, liberando así al sistema del contraejemplo consistente del experimento de Calhoun. Al decir esto, me refiero a que antes de la función de toma de decisiones, era posible entender a los sujetos como una forma de maximizar la función de pago y las elecciones que tomarían estarían seleccionadas de manera unívoca desde antes que el individuo necesitara hacerlo; por el contrario, una vez que se cuenta con la función de toma de decisiones, los individuos no seleccionarán una opción sino hasta que se encuentren en el escenario correspondiente y realicen la acción de escoger usando dicha función como una distribución de probabilidad. Comparando esta idea con lo dicho al inicio de este capítulo sobre la carencia de un obrar estratégico en el modelo de Axelrod, me gustaría hacer notar que lo anteriormente expuesto implica que los individuos ahora podrán dirigir sus acciones de modo que correspondan con sus preferencias, pero de una manera que no lo predisponga determinísticamente.

Para proseguir, regresaré a estudiar las loterías y sus axiomas, haciendo especial énfasis en el axioma de la continuidad para intentar dar algún significado a los coeficientes que se le colocan a los eventos y dar una interpretación de las combinaciones lineales de eventos. Además, haré este análisis buscando propiedades que garanticen la existencia de una función de pago pues pese a que he hecho notar lo útil que esta resulta para el problema a resolver, no tengo aún condiciones que aseguren que existe.

Como se dijo anteriormente, es evidente que el axioma de continuidad de las loterías busca recuperar la propiedad de las funciones continuas expresada en el teorema del valor intermedio, pero pensando en el espacio de eventos, ¿qué implicaciones topológicas genera el axioma de continuidad sobre dicho espacio?

Es decir, es fácil de notar que para un juego  $\Gamma$  y un jugador  $j$  representado por  $(W, \leq, u)$  tal que haga al jugador racional,  $W$  adquiere automáticamente la topología del orden inducido por  $\leq$ , pero ¿No existe alguna otra propiedad suficiente o necesaria dados los axiomas de las loterías de von Neumann y Morgenstern que permita decir algo sobre la función de pago o sobre la misma relación de preferencia? La importancia de esta pregunta es inmediata, pues hasta ahora no tenemos una forma de determinar los coeficientes planteados por el axioma de continuidad, además de que la prueba de que una relación de preferencia dada lo cumple, puede resultar bastante complicada.

Por otro lado se vio con el ejemplo del cuadrado lexicográfico que no todas las relaciones de preferencia totales garantizan la existencia de una función de pago y ya que evidente-

mente este tipo de relaciones son órdenes lineales y que se sabe que las topologías de orden total son hereditariamente normales, esto hace notar que aún esta riqueza topológica no basta para asegurar la existencia de la función de pago buscada.

Resumiendo, la siguiente pregunta a contestar es: ¿Existe alguna propiedad topológica del espacio de resultados del juego que nos garantice la existencia de una función como la expresada en el teorema de von Neumann Morgenstern sin recurrir a los axiomas de las loterías? Es fácil notar que de contestar esta pregunta, se obtendría un puente entre la topología y la teoría de la utilidad que no fue visualizado en su momento por von Neumann ni Morgenstern y esto proporcionaría a modo de corolario una gran cantidad de ejemplos bastante estudiados de los espacios que se están tratando. Para responderla, planteo el siguiente teorema.

### Teorema de existencia de la función de pago

Sea  $X$  el conjunto de resultados de un juego para un jugador  $j$  con una relación de preferencia  $\leq$  de tal forma que  $(X, \leq)$  es un espacio linealmente ordenado y  $(X, \tau_{\leq})$  con la topología de orden es separable. Si  $\{A, B, C\} \subset X$  tales que  $A \leq C \leq B$ , entonces existe  $r \in [0, 1]$  tal que se puede escribir  $C \sim rA + (1-r)B$  y además existe una función  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que:

1.  $u(A) \leq u(B) \Leftrightarrow A \leq B$ .
2.  $u(C) = ru(A) + (1-r)u(B)$ .

*Demostración.* Primero buscaremos construir una función  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua que preserve el orden de  $X$ .

Como  $X$  es separable,  $\exists D \subset X$  denso numerable, al cual podemos pedir que, en caso de existir  $\sup X$  o  $\inf X$ , se cumpla que  $\{\sup X, \inf X\} \subset D$ .

Por otro lado tomemos  $\{D_i\}_{i \in I}$  a las componentes conexas de  $D$ , donde notamos que  $|I| \leq \aleph_0$  ya que  $D$  es numerable.

Tomemos para algún  $i \in I$  y  $\{a, b\} \subset D_i$  tales que  $a < b$  y supongamos que  $[a, b] = \{a, b\} \Rightarrow \{(\leftarrow, b) \cap D_i, (a, \rightarrow) \cap D_i\}$  es una desconexión de  $D_i$ , i.e.  $D_i$  no es conexo, lo cual es una contradicción pues habíamos dicho que es una componente conexa.

$\therefore$  Si  $\{a, b\} \subset D_i$  con  $a$  y  $b$  puntos distintos tales que  $a < b$ , entonces  $\exists c \in D_i$  tal que  $a < c < b$ , i.e.  $D_i$  tiene un orden denso.

$\therefore$  Si  $D_i$  es una componente conexa de  $D$ , entonces  $D_i$  es un singulete o tiene un orden denso.

Además como  $D_i$  es componente conexa, es cerrada en  $D$ , de modo que  $D_i$  puede sólo puede ser unión finita de elementos de la forma  $X$ ,  $[a_i, b_i]$ ,  $[a_i, \rightarrow)$  ó  $(\leftarrow, b_i]$  para algún  $\{a_i, b_i\} \subset D$ . Esto nos permite reordenar  $I$  de modo que  $\max D_i < \min D_j \Leftrightarrow i \leq j$ .

Por Cantor [22] sabemos que si  $Y$  es un conjunto totalmente ordenado, numerable y tiene un orden denso, entonces existe  $B \subseteq \mathbb{Q}$  tal que  $Y$  es isomorfo a  $B$ .

De este modo, como  $D_i$  es totalmente ordenado, numerable, con orden denso y puede ser unión finita de elementos en  $X$  de la forma  $X$ ,  $[a_i, b_i]$ ,  $[a_i, \rightarrow)$  ó  $(\leftarrow, b_i]$ , entonces  $D_i$  es isomorfo a una unión finita de elementos en  $\mathbb{Q}$  de la forma  $\mathbb{Q}$ ,  $[p_i, q_i]$ ,  $[p_i, \rightarrow)$  ó  $(\leftarrow, q_i]$  donde  $\{p_i, q_i\} \subset \mathbb{Q}$ , donde denotaremos al isomorfismo como  $f_i : D_i \rightarrow B_i \subset \mathbb{Q}$ , el cual preserva el orden.

Así definimos  $f : D \rightarrow \mathbb{Q}$  tal que  $\forall i \in I, f|_{D_i} = f_i$  notando que  $f$  es continua puesto que es continua en cada componente conexa de  $D$  y estas son desconexas. Además,  $f$  preserva el orden pues cuando la imagen de  $D_i$  es acotada, podemos hacer que  $f(\text{máx } D_i) \leq f(\text{mín } D_j) \Leftrightarrow \text{máx } D_i < \text{mín } D_j$  mediante homotecias, recordando que las homotecias en  $\mathbb{R}$  son continuas.

Ahora buscamos definir  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $F|_D = f$ , para lo cual proponemos  $F(x) = \text{ínf}\{f(y)|y \in [x, \rightarrow) \cap D\}$ .

Para probar que  $F$  está bien definida, notemos que como  $D \neq \emptyset$  entonces  $\{f(y)|y \in D\} \neq \emptyset$  y ya que en caso de existir,  $\text{ínf } X \in D$ , entonces  $F(\text{ínf } X) = f(\text{ínf } X)$ , por lo que en este caso está bien definido.

Además notemos que si  $x \neq \text{ínf } X$ ,  $\exists z \in D$  tal que  $z \leq x$  pues  $D$  es denso y en caso de existir,  $\text{ínf } X \in D$ . Luego  $\{f(y)|y \in [x, \rightarrow) \cap D\}$  está acotado inferiormente por  $f(z)$ , de modo que gracias al axioma del ínfimo en  $\mathbb{R}$  podemos afirmar que  $F$  está bien definida.

Más aún, si  $\{x, y\} \subseteq X$  tal que  $x < y$ , como  $f$  preserva el orden entonces  $\text{ínf}\{f(z)|z \in [x, \rightarrow) \cap D\} < \text{ínf}\{f(z)|z \in [y, \rightarrow) \cap D\}$ .

$\therefore F$  está bien definida y preserva el orden.

Por último, tomemos  $(r, \infty) \subset \mathbb{R}$  y calculemos  $F^{-1}[(r, \infty)] = \{x \in X | r < \text{ínf}\{f(y)|y \in [x, \rightarrow) \cap D\}\}$ .

Para probar que esta imagen inversa es un abierto, tomemos  $x \in F^{-1}[(r, \infty)] \Rightarrow r < \text{ínf}\{f(y)|y \in (x, \rightarrow) \cap D\}$ .

Como  $D$  es denso en  $X$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{Q}$  es continua,  $f[D]$  es denso en  $\mathbb{Q} \Rightarrow f[D]$  es denso en  $\mathbb{R} \Rightarrow \exists s \in D$  tal que  $r < f(s) < \text{ínf}\{f(y)|y \in [x, \rightarrow) \cap D\} \Rightarrow x \in (s, \rightarrow) \subseteq F^{-1}[(r, \infty)]$ , i.e.  $F^{-1}[(r, \infty)]$  es abierto.

$\therefore F$  es continua.

$\therefore \exists F : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua que preserva el orden de  $X$ .

Si ahora tomamos  $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$  distintos y definimos  $g_{a,b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g_{a,b}(x) = ax + b(1 - x)$  observamos que  $g_{a,b}$  es continua, que  $g_{a,b}(0) = b$ , que  $g_{a,b}(1) = a$  y que  $g_{a,b}$  es inyectiva.

Así las cosas, tomemos  $\{A, B, C\} \subseteq X$  tales que  $A \leq C \leq B$  y  $g_{F(A), F(B)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow F(C) \in [F(A), F(B)]$  pues  $F$  preserva el orden de  $X$ . Luego por el teorema de valor intermedio existe  $r \in [0, 1]$  tal que  $F(C) = rF(A) + (1 - r)F(B)$  y ya que  $g_{F(A), F(B)}$  es inyectiva, dicha  $r$  es única.

De este modo podemos definir vía  $F$  una combinación lineal de  $C$  respecto a  $A$  y  $B$  de tal forma que  $C \sim rA + (1 - r)B$  y por construcción tenemos que  $F(C) = rF(A) + (1 - r)F(B)$ ,

con lo cual queda demostrado nuestro teorema.

Cabe mencionar que esta prueba también demuestra que esta combinación lineal no es única y depende de  $F$  pues  $r = \frac{F(C)-F(A)}{F(A)-F(B)}$ , pero que igual que en el caso de von Neumann y Morgenstern, esta permanece invariante bajo transformaciones afines pues si  $F' : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F'(x) = aF(x) + b$  para algún  $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$  donde  $a \neq 0$ , entonces

$$r = \frac{F(C)-F(A)}{F(A)-F(B)} = \frac{F'(C)-F'(A)}{F'(A)-F'(B)}. \quad \square$$

El teorema anterior muestra que los axiomas de las loterías propuestas por von Neumann y Morgenstern son en realidad propiedades que surgen de la topología del espacio de eventos, las cuales son infundidas por la relación de preferencia.

Por otro lado, ahora se tiene una forma de expresar eventos como combinación lineal de otros y es evidente que dicha expresión sólo tiene un verdadero significado en tanto que se conozca la función de pago.

Recordando que el objetivo de todo este desarrollo que he hecho es el de responder algunos cuestionamientos sobre la dinámica social, se debe tener en mente que a la hora práctica será necesario poder hacer un modelo computacional que represente lo que se ha dicho. Es aquí donde el teorema anterior adquiere su relevancia, ya que las limitaciones computacionales nos mantendrán en juegos finitos con espacios de resultados finitos, lo cual los convierte en espacios separables, por lo que puedo afirmar que siempre podré asociarles una función de pago a todos mis individuos y que de ella se desprenderá una función de toma de decisiones. Sin embargo no puedo avanzar sin antes preguntarme por el recíproco del teorema anterior. ¿Es cierto? Muestro el siguiente resultado a modo de recíproco parcial.

### Recíproco parcial del teorema de existencia de la función de pago

Sea un juego  $\Gamma$ , un jugador  $j$  y  $(W, \leq, w)$  una representación que hace a  $j$  racional. Entonces existe una representación  $(U, \leq, u)$  de  $j$  equivalente a  $(W, \leq, w)$  tal que  $U$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $W$  es un conjunto puesto que  $w$  es una función de pago asociada a  $\leq$ .

Además, ya que  $\leq$  hace a  $j$  racional,  $\leq$  es total, i.e.  $W$  es un conjunto totalmente ordenado. Luego, por la completación de Dedekind-MacNeille, existe un espacio  $(\overline{W}, \leq)$  completo y totalmente ordenado tal que  $W \subseteq \overline{W}$ , y si  $\{a, b\} \subseteq W$ , entonces  $a \leq b \Leftrightarrow a \leq b$  y tal que  $W$  se puede encajar en  $\overline{W}$  de manera densa.

Recordemos que como  $\overline{W}$  es completo, tiene máximo y mínimo y definamos  $\overline{w} : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  tal que

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in W \\ \sup_{y \in W \cap (\leftarrow, x)} w(y) & \text{si } x \in \overline{W} \setminus W \text{ y } x \neq \text{mín}(\overline{W}) \\ \inf_{y \in W} w(y) & \text{si } x = \text{mín} \overline{W} \end{cases} .$$

Si  $x \in \overline{W} \setminus W$  y  $x \neq \min(\overline{W})$ , entonces  $\exists a \in \overline{W}$  tal que  $a < x \Rightarrow (a, x) \subseteq \overline{W}$  y es no vacío. Además,  $w : W \rightarrow \mathbb{R}$ , por lo que  $\{w(y) | y \in W \text{ \& } y < x\}$  está acotado superiormente en  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ , i.e.  $\overline{w}$  está bien definida para  $x$ .

Análogamente,  $\overline{w}$  está bien definida para el mínimo de  $\overline{W}$  pues  $W \neq \emptyset$  y  $w : W \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada inferiormente en  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

$\therefore \overline{w}$  está bien definida.

Además notemos que si  $\{x, y\} \subseteq \overline{W}$  tal que  $x \leq y$ , entonces  $\overline{w}(x) \leq \overline{w}(y)$  por definición.

Ahora sea  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $(a, b) \cap \overline{w}[\overline{W}] \neq \emptyset$ . Luego  $\overline{w}^{-1}[(a, b)] \neq \emptyset$  y como  $\overline{W}$  es completo, por definición de completez, todo subconjunto no vacío tiene supremo e ínfimo. Entonces  $\overline{w}^{-1}[(a, b)]$  tiene supremo  $\beta$  e ínfimo  $\alpha$ , por lo cual  $\overline{w}^{-1}[(a, b)] \subseteq (\alpha, \beta)$ .

Por otro lado, sea  $\gamma \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \overline{w}(\gamma) > \overline{w}(\alpha)$  y  $\overline{w}(\gamma) < \overline{w}(\beta)$ , pero como  $\alpha$  y  $\beta$  son el ínfimo y el supremo de  $\overline{w}^{-1}[(a, b)]$  respectivamente, entonces  $\overline{w}(\alpha) \leq a$  y  $\overline{w}(\beta) \geq b \Rightarrow \overline{w}(\gamma) \in (a, b)$ .

$\therefore \overline{w}^{-1}[(a, b)]$  es abierto en  $\overline{W}$ .

Notemos que el caso para  $(a, \infty]$  y  $[-\infty, a)$  con  $a \in \mathbb{R}$  es análogo.

$\therefore \overline{w}$  es extensión continua de  $w$ .

Claramente existe un epimorfismo  $\phi : \overline{W} \rightarrow W$ , por lo cual  $(\overline{W}, \leq, \overline{w})$  es equivalente a  $(W, \leq, w)$ .

Por último, denotemos por  $[A] := \{B \in \overline{W} | \overline{w}(A) = \overline{w}(B)\}$  y definamos  $U = \{[A] | A \in \overline{W}\}$ , i.e. el espacio cociente de  $\overline{W}$ .

Entonces, si  $\varphi : \overline{W} \rightarrow U$  es la proyección,  $\varphi$  es un epimorfismo por ser suprayectiva y podemos tomar  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  la función inducida por  $\overline{w}$ , por lo cual  $u$  es continua. Más aún, por construcción,  $u$  es inyectiva y preserva el orden. Para terminar la representación del jugador, notemos que  $\varphi$  induce un orden total  $\leq_1$  sobre  $U$  para el cual  $u$  es función de pago por construcción.

Ya que  $(\overline{W}, \leq)$  es completo,  $(\overline{W}, \tau_{\leq})$  es compacto y como  $\varphi$  es la proyección, es continua, de modo que  $U$  es compacto.

Así, tenemos que  $u$  es una función inyectiva y continua con dominio compacto y contradominio Hausdorff.

$\therefore u$  es encaje.

Como  $W$  es conjunto y  $U$  es un cociente de la completación de  $\overline{W}$ , existe una inclusión entre  $W$  y  $U$  y su dirección dependerá de  $w$ .

$\therefore (W, \leq, w)$  es equivalente a  $(U, \leq_1, u)$  y  $U$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}$ .

□

Esto implica que las loterías de von Neumann y Morgenstern se pueden pensar como subespacios de  $\mathbb{R}$  con algún orden inducido por ella, lo cual da bastante claridad sobre este tema y permite caracterizarlas.

Con todo esto, concluyo que he construido el formalismo matemático necesario para generar simulaciones computacionales y que tengo suficiente entendimiento de dichas estructuras para ser capaz de interpretar los resultados e intentar responder las preguntas de Axelrod. Esto lo haré en el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

## Ejemplo de la construcción de una sociedad

Como se dijo anteriormente, con las herramientas actuales ya puedo definir un ejemplo de sociedad para examinar cómo se comportan las estructuras estudiadas en la práctica y saber si sirven para responder las preguntas planteadas por Axelrod al inicio de su trabajo.

Para esto, tomaré a un individuo  $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\{\emptyset\}\}$  al cual le asignaré 6 opiniones y 10 gustos que serán descritas por la función  $\omega_\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]^{16}$  donde las primeras seis entradas del vector imagen de  $\omega_\gamma$  será el siguiente (simpatía, tenacidad, atención, habilidad adaptativa, habilidad comunicativa, hábitos de salud). No daré interpretación definida a los gustos, pues posteriormente explicaré que estos sólo sirven para que los individuos interactúen entre sí. Sin embargo algunos ejemplos de gustos que se podrían elegir son 10 colores o las últimas 10 canciones del álbum (*What's the story*) *Morning glory?*.

Si se denota por  $\omega_\gamma(t)_i$  a la  $i$ -ésima entrada del vector generado por  $\omega_\gamma$  en  $t$ , la interpretación que se le dará será la afinidad de  $\gamma$  respecto a  $i$  en el tiempo  $t$ , tomando cero como nula afinidad y 1 como totalmente afín.

Para terminar de definir a los individuos, les asignaré una función de condiciones tales que  $\kappa_\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^4$  donde las entradas tendrán un significado tal que  $\kappa_\gamma =$  (edad, cantidad y calidad de relaciones humanas, dinero disponible, salud).

Cuando definí las condiciones de los individuos, dije que estas dependerían de sus gustos, opiniones y del resto de las condiciones. Representando  $\kappa_{\gamma i}$  como la  $i$ -ésima entrada de la función y recordando que estas son formulaciones que yo creé para tratar de representar el fenómeno de la manera en la que yo lo percibo, propongo las siguientes relaciones:

- *Edad* =  $\kappa_{\gamma 1}$

Tomaré simplemente  $\kappa_{\gamma 1}(t) = t$ . Lo que busco expresar con esta función es simplemente el hecho de que la edad es una acumulación lineal de tiempo.

- *Cantidad y calidad de relaciones humanas* =  $\kappa_{\gamma 2}$

Para definir esta entrada, debo aclarar que a la hora de programar la simulación, usé la hora como unidad de tiempo.

Así, contaré la cantidad de veces que  $\gamma$  interactuó con otro individuo  $\delta$  de la sociedad  $\Gamma$  durante las últimas 24 horas, lo cual denotaré por  $c_{t\gamma\delta}$ . Por último, definiré  $\kappa_{\gamma 2}(t) = 1 - e^{-\sum_{\delta \in \Gamma} c_{t\gamma\delta}}$ . Analizando esta expresión es fácil notar que serán más valiosas las interacciones repetidas con un mismo sujeto para recrear la importancia de las relaciones cercanas en la vida de las personas, aunque los encuentros esporádicos también servirán en el incremento de la suma que involucra  $\kappa_{\gamma 2}$ ; continuando con el análisis, hace falta notar que la exponencial es decreciente respecto a dicha suma y por lo tanto el valor de  $\kappa_{\gamma 2}$  aumentará, es decir que entre más interacciones tenga un sujeto con sus personas cercanas, mayor será su segunda condición.

■ *Dinero disponible* =  $\kappa_{\gamma 3}$

Para esta entrada adoptaré la ecuación  $\frac{d\kappa_{\gamma 3}}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Ingresos} - \frac{d}{dt} \text{Egresos}$  y a su vez supondremos que *Ingresos* = *Ingresos*(capacidad, suerte, habilidad, edad,  $\omega_4$ ) mientras que *Egresos* = *Egresos*(poder de ahorro,  $\kappa_{\gamma 2}$ , salud).

Esto vuelve necesario definir estas nuevas relaciones, lo cual haré de la siguiente manera dejando la definición de salud para después.

- *Capacidad* =  $\ln(\kappa_{\gamma 3} + \tan(\omega_2 \frac{\pi}{2}))$ . Esto busca representar que las personas pueden aumentar el dinero que poseen con tenacidad, aunque también la cantidad de dinero que se posee en la actualidad sirve como factor, por ejemplo a modo de una inversión inicial en un negocio o para estudiar un grado.
- *Suerte*  $\sim N(1/2, 1/2)$ . Existe gente que juega lotería o que eventualmente reciben herencias de familiares lejanos, por lo cual consideré importante agregar este aspecto.
- *Habilidad* será una constante  $h$ . Esto busca representar la habilidad comunicativa, intuición, etc. que permite a algunas personas conseguir buenos trabajos o hacer buenos negocios.
- *Poder de ahorro* =  $\text{cte} + \frac{1}{\omega_3}$ . Esto busca tomar en cuenta el hecho de que hay algunas actitudes en las personas, que en este caso llamaré *atención*, las cuales favorecen un ahorro económico.
- *Salario* que es una cantidad que recibe mensualmente dependiendo de su empleo actual.

Así si se supone que la función es la suma de los parámetros, llegamos a que  $\frac{d\kappa_{\gamma 3}}{dt} = \frac{d}{dt} (\ln(\kappa_{\gamma 3} + \tan(\omega_2 \frac{\pi}{2})) + N(1/2, 1/2) + h + \omega_4 - \kappa_{\gamma 1}) - \frac{d}{dt} (\text{cte} + \frac{1}{\omega_3} + \kappa_{\gamma 2} + \frac{1}{\kappa_{\gamma 4}})$ . Lo que busco representar con esta ecuación es una dependencia lineal entre los aspectos que antes establecí y suponer que dichos aspectos tienen una influencia positiva o negativa en la cantidad de dinero disponible para las personas.

■ *Salud* =  $\kappa_{\gamma 4}$

De modo que esta parámetro conserve su aleatoriedad, tomaré una cantidad nume-  
rable de valores aleatorios  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  generados con una distribución Poisson  $\text{Poi}(100)$   
para después definir  $e_n = \sum_{i \leq n} e'_i$ . Además consideraré  $\{\text{mín}\{1, |a_n|\}\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $a_n$  es  
generado con una distribución normal  $N(\mu = 0, \sigma = 0.1)$ . Luego defino  $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
tal que  $E(x) = \sum_{e_n \leq x} a_n$ , la cual corresponde a la función que representará los mo-  
mentos  $e_n$  en que el individuo se enfermará y la intensidad  $a_n$  que tendrán dichas  
enfermedades.

Ya que he definido  $E$  puedo establecer que la función de salud tendrá la forma

$$\kappa_{\gamma 4}(t) = 1 - \frac{1 - \omega_6(t)}{1 + e^{\kappa_{\gamma 3}(t) - E(t) - \kappa_{\gamma 1}(t)}}.$$

Esta expresión busca reflejar que: buenos hábitos de salud tienden a hacer que la  
salud de la persona mejore, que las enfermedades precedentes dejan antecedentes y  
pueden empeorar la salud general de la persona y que la edad tiende a hacer más  
frágil la salud de los individuos. Así mismo utilizo la exponencial en esta función  
para denotar el carácter asintótico de ciertos fenómenos, como el hecho de que si  
bien es cierto que la cantidad de dinero que alguien tiene puede ayudarlo a conseguir  
un mejor tratamiento médico, también es cierto que dichos tratamientos tienen sus  
limitaciones.

Ahora que los individuos están descritos, es necesario definir sus reglas de convivencia  
para terminar de construir la sociedad. Sin embargo cabe mencionar antes de esto que  
en capítulos anteriores no se habló sobre las reglas de convivencia ya que las funciones  
de pago y de toma de decisiones se formaron de manera independiente a ellas, así que se  
tiene la certeza de que la dinámica de los individuos será descrita por sus prioridades y las  
reglas de interacción entre ellos sólo serán el mecanismo que ponga a dichos sujetos ante  
los diferentes escenarios en que deban decidir.

Habiendo dicho esto, distinguiré entre normas impuestas por la naturaleza y la sociedad  
y entre aquellas que son generadas por los individuos. Iniciando por las normas naturales  
y civiles y recordando que la premisa que adopté que dice que las personas no son sólo  
seres culturales, quiero traer a la discusión algo muy humano que debe incluir el modelo:  
los individuos mueren. Además es fácil extraer de la historia hechos que muestren que esta  
no es una mera cuestión biológica sin repercusiones sobre la cultura. Por ejemplo, la Ley  
para la Reforma Política de 1977 impulsada por el rey de España Juan Carlos I que marcó  
el inicio de la transición democrática de dicho país sólo se pudo dar hasta que el príncipe  
designado por Franco, Juan Carlos de Borbón, fuera coronado rey; sin embargo esto no  
pudo pasar sino hasta que Franco murió[27].

Una vez evidenciada la importancia de este fenómeno biológico dentro de la cultura,  
propongo definir a cada individuo una fecha de muerte generada de manera aleatoria  
mediante una distribución Poisson con media en la esperanza de vida actual mexicana,

la cual de acuerdo a la INEGI[23] es de 77.8 años para las mujeres y 72.6 años para los hombres.

Ya que la manera en la que representaré a los individuos será mediante una función  $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\{\emptyset\}\}$ , la manera en que denotaremos la muerte del integrante  $\gamma$  en el momento  $t$  será de tal forma que  $\gamma(x) = \{\emptyset\} \forall x \geq t$ . Pese a que cada individuo tenga definida su fecha de muerte desde su creación, esta información no la conocerá en el sentido de que ninguna de sus decisiones será influenciada por este dato ya que las funciones de pago y de toma de decisiones solo dependen de las prioridades de los individuos.

Aún así, me gustaría recalcar que es la fecha de muerte la que no afecta las decisiones del individuo y no el concepto de muerte. Al definir las condiciones de los sujetos dije que los individuos estarán conscientes de su salud y para guardar correspondencia con la vida real, se considerará que un individuo se muere si llega su fecha de muerte o si su salud se anula debido a sus acciones. A su vez, será el jugador quien le asigne una importancia a seguir viviendo dentro de su clase de condiciones posibles, lo cual implicará que su función de pago y su función de toma de decisiones lo lleve a elegir de modo que siga viviendo o no, dependiendo de lo que él considere mejor para sí mismo.

Al incluir dicho fenómeno en la sociedad, es necesario contemplar el nacimiento de nuevos individuos para que esta perdure. Esto se simulará asignando la cantidad de hijos que un individuo, sin importar el sexo, tendrá en su vida mediante una distribución Poisson con media igual a 1, pues según [24] la fecundidad en México es de 2.3 hijos por mujer. Aunado a esto, se elegirán los momentos en que la persona tendrá un hijo mediante una distribución normal centrada en 27 años y desviación estándar de 2 años, pues según [26] esta es la principal edad en que las personas generan descendencia.

Representaré el nacimiento del hijo de  $\gamma$  en el momento  $t$  con una nueva función, por ejemplo  $\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\{\emptyset\}\}$ , donde  $\forall x \leq t \delta(x) = \{\emptyset\}$ . Así mismo supondré que las condiciones iniciales de  $\delta$  serán las mismas que las que  $\gamma$  posee en el momento en cuestión, mientras que las opiniones y gustos del vástago serán las mismas que las del progenitor multiplicadas por una variable aleatoria uniforme entre 0 y 2, aplicando un máximo y un mínimo adecuado de modo que el resultado siempre quede en el intervalo  $[0, 1]$ . Esto se hará para simular el hecho de que los hijos son capaces de generar su propia personalidad, pero que esta siempre es influenciada por la forma de ser de las personas que lo criaron.

La última norma que introduciré será una de tipo civil y será su *gobierno*. Asumiré que la sociedad tiene un gobierno democrático cuyo regente cambia cada año y tiene la capacidad de reelegirse. Dicho regente será elegido de entre los integrantes de la sociedad y se escogerá de manera aleatoria tomando como distribución la similitud que tiene cada individuo con el resto de los actores sociales.

Ya que busco estudiar la difusión de cultura dentro de las poblaciones, no le otorgaré al gobierno otra capacidad que la mediática y para esto lo pensaré como un integrante más de la sociedad el cual está inmóvil, no es influenciado directamente por el resto de los individuos, tiene los mismos gustos que la persona que encarga al regente en turno, no tiene opiniones y sólo tiene la condición de *popularidad*, la cual será calculada como la fracción de individuos cuyo vector de gustos tiene una distancia euclidiana a los del regente menor

a  $\sqrt{p}/2$ , con  $p$  la cantidad de gustos contemplados en la sociedad. El gobierno tendrá la capacidad de influir en los gustos de todos los individuos de modo que genera una tendencia social hacia los del regente con una intensidad proporcional a su popularidad y a su afinidad con el individuo al que busca influir.

A su vez, el regente cambiará su función de pago a la suma de las funciones de pago de todos los agentes sociales, con lo cual pretendo representar que el objetivo del regente es que la sociedad mejore su satisfacción personal en promedio, donde mediré dicha satisfacción para cada individuo como el promedio de los valores de las últimas 24 horas de la función de pago del mismo.

Afirmo que el usar la función de pago como método para medir numéricamente la satisfacción personal de los individuos es coherente con lo que busco puesto que entre mayor sea el valor que se obtiene de la función de pago, esto implica que las decisiones que pudo tomar el individuo fueron más satisfactorias para él. Es claro que para esto se necesita que las funciones de pago estén estandarizadas puesto que de otro modo, podríamos hacer que una función de pago fuera mayor al real que quisiéramos sin que esto implicara que dicho jugador fuera extremadamente feliz todo el tiempo. Esta estandarización la haré de modo que todas las funciones de pago tengan por contradominio el  $(0, 1)$ , lo cual se puede hacer de manera continua con  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Dejando atrás las normas de convivencia y al gobierno, proseguiré a describir el comportamiento de las funciones que representan a los individuos en el plano pues ya que estoy definiendo a los individuos como partículas que se mueven en él, hace falta asignarles una trayectoria.

Una primera opción sería suponer que las trayectorias son aleatorias, sin embargo esto es bastante alejado de la realidad pues la gente suele tener trabajos o asistir a la escuela que los hace ir al mismo lugar la mayoría de los días de la semana. Inspirado por este fenómeno, asignaré diferentes puntos en el plano como trabajos y como centros recreativos. Así mismo cada individuo tendrá un punto que interpretaré como su casa y su trayectoria dependerá del día y de las condiciones que posee en ese momento.

Todo individuo deberá tener un trabajo en todo momento y por él recibirá un salario mensual. Cada 30 días, la persona podrá cambiar de trabajo si este no le satisface y deberá elegir otro como función tanto de la afinidad entre sus gustos y los ideales del trabajo como del sueldo ofrecido. Los trabajos no negarán la admisión de las personas, pero el sueldo ofrecido será inversamente proporcional a la cantidad de gente que en ellos labora, esto con el fin de evitar un comportamiento poblacional maltusiano y poner un límite en la cantidad de recursos. Así mismo, dentro del poblado habrán centros recreativos a los cuales las personas podrán ir después de sus horarios laborales o en fines de semana y por los cuales deberán pagar una cantidad aleatoria por cada vez que vayan a ellos.

Tanto los trabajos como los centros recreativos tendrán la misma cantidad de gustos que las personas y estos serán fijos. De este modo, a la hora en que una persona escoge algún trabajo o centro recreativo, puede tomar en cuenta su afinidad con el lugar del mismo modo en que lo haría con otro sujeto.

Para finalizar esta descripción de los individuos, sólo falta especificar la manera en

que decidirán con quien convivir y explicar en qué consistirá una interacción. Comenzaré tomando un individuo  $\gamma$  y generando una lista  $A$  con tantas entradas como personas distintas a  $\gamma$  dentro de la sociedad y donde cada entrada consistirá en la suma de la distancia euclidiana entre  $\gamma$  y la posición del individuo que representa dicha entrada más 3 veces la distancia euclidiana entre los gustos de  $\gamma$  y del mismo individuo. Posteriormente definiré una distribución de probabilidad como una lista  $B$  donde su entrada  $i$ -ésima  $B_i$  será proporcional a  $\frac{2}{1+e^{-1/A_i}} - 1$ . Luego utilizaré a  $B$  para escoger un individuo  $j$  y generaré una variable aleatoria  $k$  como el valor absoluto de una distribución normal con centro en cero y con desviación estándar  $1/4$ . En caso de que  $k < B_j$ , seleccionaré el gusto  $d$  de manera uniformemente aleatoria y generaré una nueva variable aleatoria  $i$  como el mínimo entre 1 y el valor absoluto de un valor generado con una distribución normal centrada en cero con desviación de  $1/2$  y si  $G[i][d]$  denota el gusto  $d$  de  $i$ , entonces actualizaré  $G[\gamma][d] = G[\gamma][d] + i(G[j][d] - G[\gamma][d])$ .

A manera de resumen y para precisar algunos puntos, se presentan el pseudocódigo utilizado en la simulación de la sociedad descrita, así como el diagrama de flujo de la figura 4.1 en el que se describe el algoritmo de la sociedad con menor detalle que el pseudocódigo.

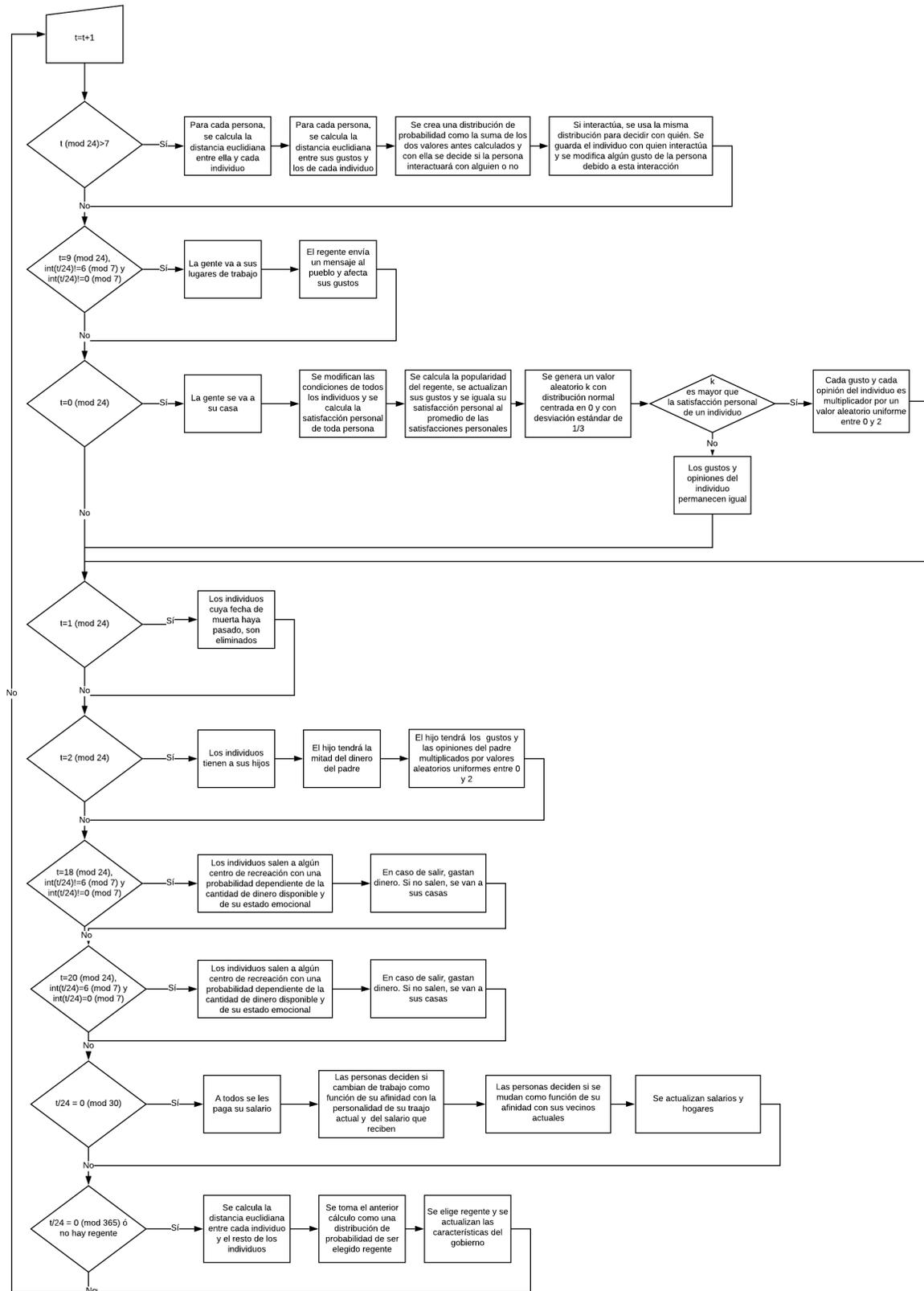


Figura 4.1: Diagrama de flujo del algoritmo usado para simular la dinámica social

```

1 #PSEUDOCODIGO 3
2
3 #Definiendo la estructura social
4
5 T = posiciones de lugares de trabajo
6 R = lugares de recreacion
7 P = Salario que ofrece cada trabajo
8 CR = Costo por estancia en centro de recreacion
9 PT = Personalidades de los trabajos (los trabajos tienen gustos igual que
    las personas)
10 PR = personalidad de centros de recreacion (los centros de recreacion tienen
    gustos igual que las personas)
11
12
13 #Definiendo las condiciones iniciales de los individuos
14
15 C=[] #condiciones
16 O=[] #opiniones
17 G=[] #gustos
18 L=[] #localizacion del individuo
19 EN=[] #encuentros del dia de cada individuo
20 H=[] #casa
21 Enf=[] #momento de enfermedad
22 I=[] #intensidad de enfermedad
23 M=[] #fecha de muerte
24 N=[] #nacimientos de hijos
25 LT=[] #lugar de trabajo
26 ST=[] #salario trabajo
27 NT=[] #numero de trabajo
28 F=[] #funcion de pago
29 SP=np.random.uniform(0,1,numero_habitantes) #satisfaccion personal
30 regente_g=[] #gustos del regente
31 gobierno=np.zeros(numero_habitantes) #indica cual indiviuo es el regente
32 gob_pop=0 #popularidad del gobernante
33 gob_num=0 #numero del gobernante
34
35 for i in range(numero_habitantes):
36     G.append(vector de variables aleatorias uniformes en [0,1])
37     O.append(vector de variables aleatorias uniformes en [0,1])
38     C.append([N(3 decadas, 1 decada) (edad), U(0,1) (condiciones sociales),
39             Poi(10000) (cantidad disponible de dinero), U(0,1) (salud) ])
40     M.append(Poi(esperanza de vida))
41     N.append(vector de valores aleatorios normales con cantidad de entradas
42             igual a valor aleatorio poisson con media en 1)
43     Enf.append(vector de valores monotonamente crecientes cuyas distancias
44             son aleatorias y tienen distribucion normal)
45     I.append(vector de tantas entradas como el ultimo valor de Enf con
46             valores aleatorios uniformes en [0,1])
47     H.append(valor aleatorio uniforme en [0,1]x[0,1])
48     F.append(funci n tal que  $(x,y,z,w) \rightarrow 1/(1+e^{-(k(ax+by+cz+dw)})$  donde a,b,c
49             y d son valores aleatorios representando las preferencias de la persona
50             y k es un factor para disminuir la velocidad de la sigmoide)
51     L.append(H[-1])
52     LT.append(trabajo escogido de manera aleatoria uniforme)

```

```

47 ST.append(Salario que da el trabajo escogido)
48 NT.append(Numero para designar trabajo escogido)
49
50 #Definiendo el modo en que los individuos evolucionaran dia a dia
51
52 #La unidad de tiempo es la hora
53
54 for t in range(numero_horas):
55     if t = 9 (mod 24) and int(t/24) != 6 (mod 7) and int(t/24) != 0 (mod 7):
56         #en caso de que sean las 9 a.m. y que no sea sabado ni domingo
57         L = LT #las personas se van a trabajar
58         W = []
59         for i in range(len(G)): #Por cada uno de los individuos
60             b = distancia euclidiana entre G[i] y gobierno_g
61
62             a = (-1)**min(1, int(2b/sqrt(len(G[i]))) #valor que es
63             #positivo si la distancia de opiniones de la persona
64             #y del gobierno es en promedio menor a 1/4 para cada
65             #entrada y negativo en caso contrario
66             c = N(ab,1/gob_pop)
67             W.append(G[i]+gob_pop*c*(gobierno_g-G[i])
68             G = W #poder mediatico del regente
69
70     if t=0 (mod 24):
71         L = H #la gente se va a sus casas a media noche
72         C se actualiza de acuerdo a lo dicho en la subseccion 4.1.2
73         for i in range(len(F)):
74             EN[i]=[] #se borran los encuentros del dia
75             SP[i] = F[i](C[i])
76             #La satisfaccion personal de los individuos es recalculada con
77             #sus condiciones actuales
78             k =|N(0,1/3)|
79             if k > SP[i]:
80                 #Dependiendo de la satisfaccion personal del individuo, este
81                 #cambia sus gustos y opiniones
82                 G[i] = np.multiply(G[i], vector aleatorio uniforme con
83                 entradas en [0,2])
84                 O[i] = np.multiply(O[i], vector aleatorio uniforme con
85                 entradas en [0,2])
86                 SP[gob_num] = promedio de satisfaccion personal de los ciudadanos
87                 gobierno_g = G[gob_num] #se actualizan los gustos del gobernante
88                 gob_pop = cantidad de personas cuya distancia promedio por entrada
89                 entre sus gustos y los que tiene el gobernante es menor a 1/2, divida por
90                 cantidad de ciudadanos
91
92         if t=1 (mod 24): #Muertes
93             for i in range(len(M)):
94                 if M[i]>=t: #Si ya paso su fecha de muerte
95                     Se elimina su entrada de todos los vectores
96
97         if t=2 (mod 24): #Nacimientos
98             for i in range(len(N)):
99                 for j in range(len(N[i])):
100                     if N[i][j]<=t: #Si ya llego la hora del nacimiento

```

```

96         C[i][2]=C[i][2]/2 #el progenitor pierde la mitad del
dinero y se dan al hijo
97         C.append([t-N[i][j],C[i][1],C[i][2],C[i][3]])
98         O.append(2*O[i]*np.random.rand(len(O[i])))
99         G.append(2*G[i]*np.random.rand(len(O[i])))
100        L.append(L[i])
101        EN.append([]) #sin ecuentros actuales
102        H.append(H[i]) #Misma casa que la del padre
103        Enf.append(fechas de enfermedad)
104        I.apend(intensidades de enfermedad)
105        M.append(~Poi(esperanza de vida))
106        N.append(fechas de nacimiento de hijos)
107        LT.append(se asigna trabajo al azar)
108        ST.append(salario de trabajo seleccionado)
109        NT.append(numero de trabajo seleccionado)
110        F.append(funcion de pago como la de los individuos
originales)
111        SP.append(~ U(0,1)) #satisfaccion personal aleatoria
112        gobierno.append(0) #no es regente
113
114        if t=18 (mod 24) and int(t/24)!=6 (mod 7) and int(t/24)!=0 (mod 7):
115            # Si son las 6 p.m. y es dia laboral
116            W = []
117            for i in range(len(C)):
118                W1 = distancia euclidiana entre G[i] y cada una de PR
119                a ~ U(0,1)
120                if a<(2/(1+e-arctan(C[i][2])+C[i][1]/2))-1)*C[i][2]/10000:
121                    W.append(centro de recreacion escogida aleatoriamente con W1
como distribucion)
122                    C[i][2]=C[i][2]-CR[centro de recreacion escogido]
123                    #El individuo pierde dinero por haber salido
124                else:
125                    W.append(H[i]) #se queda en su casa
126            L = W #actualizacion de lugares actuales
127
128        if t=20 (mod 24) and int(t/24)=6 (mod 7) and int(t/24)=0 (mod 7):
129            # Si son las 8 p.m. y no es dia laboral
130            W = []
131            for i in range(len(C)):
132                W1 = distancia euclidiana entre G[i] y cada una de PR
133                a ~ U(0,1)
134                if a<(2/(1+e-arctan(C[i][2])+C[i][1])-1)*C[i][2]/10000:
135                    W.append(centro de recreacion escogida aleatoriamente con W1
como distribucion)
136                    C[i][2]=C[i][2]-CR[centro de recreacion escogido]
137                    #El individuo pierde dinero por haber salido
138                else:
139                    W.append(H[i]) #se queda en su casa
140            L = W #actualizacion de lugares actuales
141
142        if t (mod 24) >7:
143            for i in range(len(C)):
144                A = 3 veces la distancia euclidiana entre G[i] y cada entrada de G
mas la distancia euclidiana entre L[i] y cada entrada de L

```

```

145     A[i] = max(A) #Se evitan autointeracciones
146     A = 1/(1+e^(-1/A))
147     A=A/np.sum(A) #Normalizacion de A
148     j = entrada de A escogida aleatoriamente usando a A como
distribucion
149     k ~ |N(0, abs(np.cos((np.pi/2)*(C[i][0]-25*365*24)/(100*365*24))))|
150     #La sociabilidad de la gente depende de su edad
151     if k<A[j]:
152         EN[i].append(j) #Se guarda la interaccion
153         d = tema aleatorio uniforme
154         k ~ min(1,|N(0,1/3)|)
155         G[i][d] = G[i][d]+k*(G[j][d]-G[i][d])
156         #Cambio de opinion sobre el tema d
157
158     if t/24 = 0 (mod 30): #Cada mes
159         C = C transpuesta
160         C[2] = C[2] + ST #Los individuos reciben su salario
161         C = C transpuesta
162         for i in range(len(C)):
163             g = salario que el trabajo da al individuo por la distancia
euclidiana entre G[i] y las personalidades de los trabajos
164             a ~ U(0,1)
165             if a < 2/(1+e^(-g/len(T)))-1:
166                 El individuo cambia de trabajo y se actualiza NT[i], LT[i]
y ST[i] con la nueva informacion
167                 En el ejemplo que seguimos, ST[i] = P[trabajo
seleccionado] + max(0,k_3(O[i],C[i])
168                 D1 = distancia euclidiana H[i] y cada entrada de H
169                 G1 = distancia euclidiana entre G[i] y cada entrada de G
170                 D2 = np.multiply(G1,D1<1/4)
171                 D2 = np.sum(D2)/np.sum(D1<1/4)
172                 #promedio de distancia en gustos del individuo con sus
vecinos
173                 a ~ U(0,1)
174                 if a < 1/(1+np.exp(-1/D2)):
175                     El individuo se muda eligiendo su nueva casa con una
distribucion normal centrada en su trabajo.
176
177                 for i in range(len(ST)):
178                     ST[i]=ST[i]/max(1,np.sum(NT=NT[i])) #El salario que recibe
el individuo se divide entre el total de personas en la misma empresa
179
180     if (t/24)=0 (mod 365) or np.sum(gobierno)==0:
181     #Cada 356 dias o en caso de que no haya regente
182     gobierno = vector de ceros con tantas entradas como individuos
183     W = []
184     for i in range(len(C)):
185         a = distancia euclidiana entre G[i] y cada entrada de G
186         a=np.sum(a)/len(a)
187         W.append(1/a)
188         Se escoge un gobernante usando a W como distribucion.
189         gobierno[regente] = 1
190         regente_g = G[regente]
191         gob_num = regente

```

Se agregan algunas gráficas del comportamiento mostrado por los cien individuos que comenzaron en esta sociedad. Es necesario mencionar que en estas iteraciones, los centros de trabajo se encuentran en  $\{(x, y) = (\frac{i}{5}, \frac{j}{5}) : \{i, j\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$  mientras que los diez centros de recreación se colocaron de manera aleatoria dentro de  $[0, 1] \times [0, 1]$ ; por otro lado, los parámetros iniciales para definir las funciones de pago para los individuos fueron seleccionados de manera uniformemente aleatoria. Debido a la disposición de sus trabajos, a esta sociedad la llamaré *sociedad rectangular*.

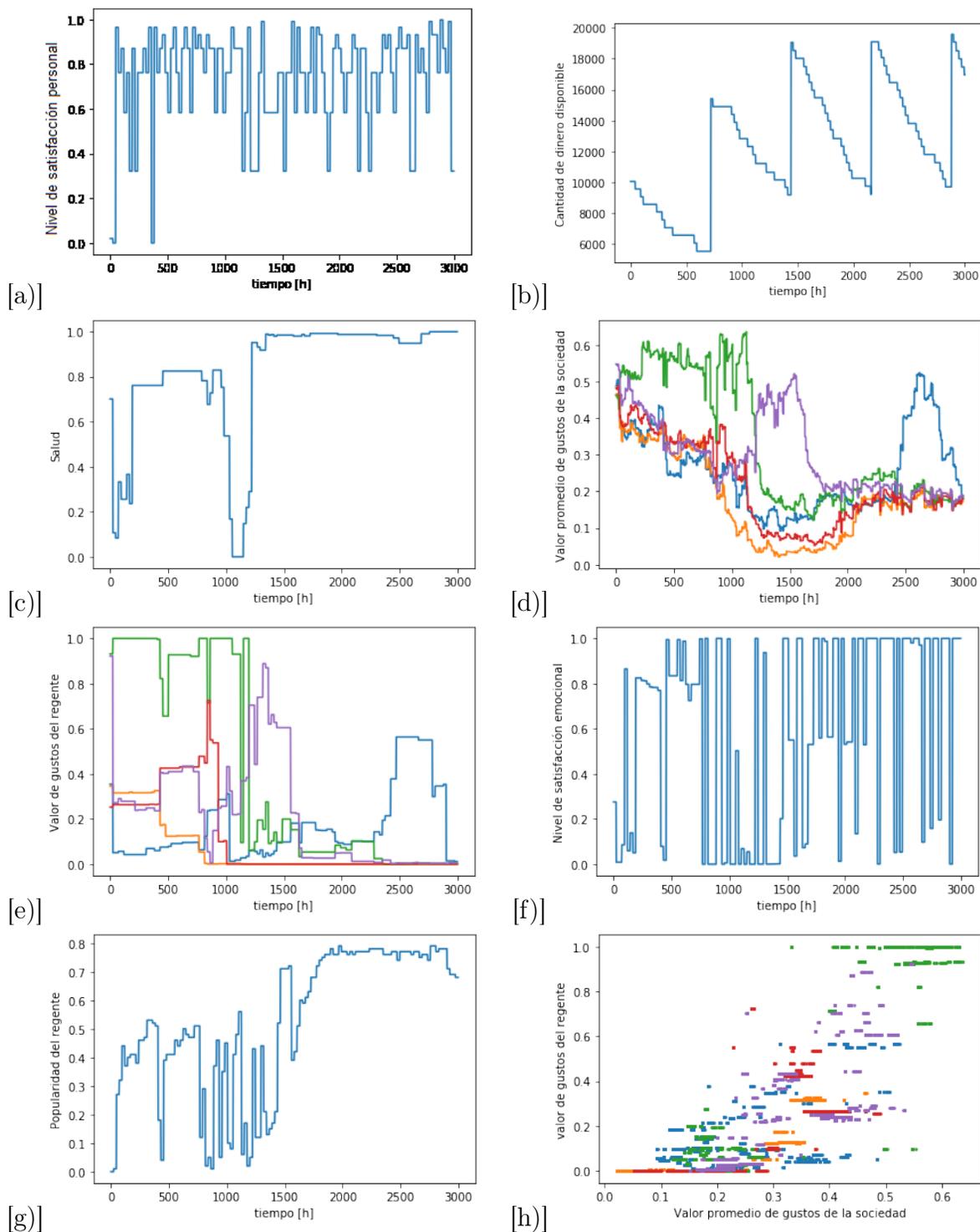


Tabla 4.1: Comportamiento de una sociedad rectangular para un individuo seleccionado  $\gamma$ . En caso de haber más de un color en las gráficas, cada uno corresponde a un gusto fijo. a) Estado emocional de  $\gamma$  vs. tiempo, b) Dinero disponible de  $\gamma$  vs. tiempo, c) Salud de  $\gamma$  vs. tiempo, d) Valor promedio de los gustos de la sociedad vs. tiempo, e) Valor de los gustos del regente vs. tiempo, f) Nivel de satisfacción personal de  $\gamma$  vs. tiempo, g) Popularidad de regente vs. tiempo, h) Gustos del regente vs. gustos promedio de la sociedad.

En las figuras de la tabla 4.1 se muestra un gran dinamismo en la sociedad construida, así como una gran complejidad en sus opiniones.

La figura a) señala que el estado emocional de los individuos es fluctuante y no tiene un patrón definido a simple vista.

La figura b) expone que las personas no sólo son capaces de ahorrar sino que lo prefieren, aunque no lo hagan compulsivamente sino que alcanzan una cantidad de dinero disponible en la cual tienden a permanecer. Cabe mencionar que los incrementos discontinuos corresponden al pago del salario mensual, mientras que las pequeñas disminuciones corresponden a eventos como visitas a centros de recreación.

Con la figura c) se ve que la salud del individuo mejora y empeora conforme pasa el tiempo y en caso de enfermedades, la disminución de la salud tiene valores aleatorios en intensidad y en tiempo, justo como lo especificamos en el pseudocódigo.

La figura d) denota la tendencia de los sujetos a alcanzar un punto a partir del cual los individuos opinan casi igual, sin que esto signifique que permanecerán con una opinión inmutable sino que todos seguirán cambiando sus opiniones de manera unánime.

La figura e) manifiesta una relación entre los gustos del regente y los de la sociedad, lo cuál será motivo para analizar la figura h) de esta tabla.

En la figura f) se refleja que los sujetos cambian su nivel de satisfacción personal conforme el tiempo y se nota una fuerte influencia del estado de la figura a).

La figura g) presenta una clara tendencia de la popularidad del regente, lo cual no es de extrañarse ya que como se ha explicado hasta el momento, la popularidad del gobernante depende de la cantidad de personas que tienen gustos similares a los de él y en la figura d) se observa que los gustos sociales convergieron con el tiempo, incluyendo esto al regente.

Con la figura h) se confirma lo dicho anteriormente: los gustos del regente y los gustos promedio de los ciudadanos están fuertemente relacionados de modo que un aumento en el valor de cierto gusto del regente implica una tendencia social para acrecentar el valor de dicho gusto por parte de los sujetos, siendo esto análogo para cuando el valor de cierto gusto del regente disminuye.

Estos resultados generan algunas preguntas tales como: ¿Qué tan grande es la desviación entre los gustos de los individuos y los gustos promedio? o ¿Cómo influye la localización de los trabajos en el comportamiento de la sociedad? El origen de estos cuestionamientos no sólo se encuentra en la voluntad de modificar parámetros y con esto estudiar el nuevo comportamiento obtenido sino que surge al observar que la convergencia de los gustos de todos los individuos es algo improbable y fue una de motivación para abandonar la propuesta de Axelrod.

La primera de estas preguntas se contesta con la figura 4.2, pues en ella se muestra que el valor promedio puede estar lejos de 0.5 y a la vez existir individuos con valores radicales y opuestos.

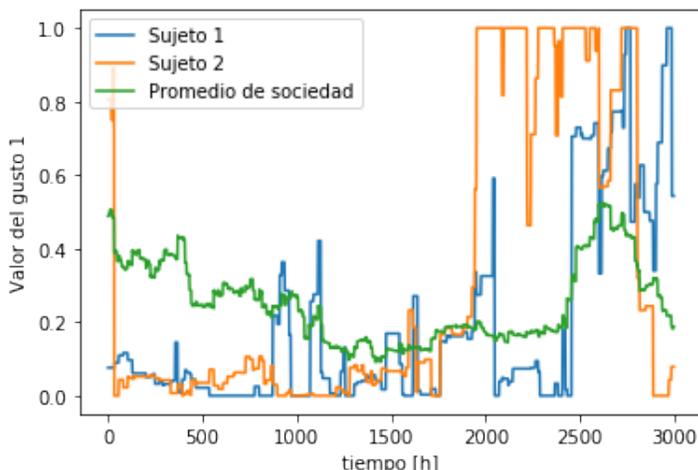


Figura 4.2: Valor del gusto 1 para 2 individuos y para el promedio de la sociedad vs. tiempo.

Para contestar la pregunta referente a la influencia de la ubicación de los empleos sobre el comportamiento de la sociedad se corrió una simulación análoga a la anterior, pero con la diferencia de que esta vez los trabajos se encontraban en  $\{(\sin(2k\pi/10), \cos(2k\pi/10)) : k \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$  mientras que los centros de recreación se localizaban en  $\{\frac{1}{2}(\sin(2k\pi/10), \cos(2k\pi/10)) : k \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$  y los cien individuos originales tenían inicialmente una posición aleatoria en  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Debido al lugar de los trabajos, llamaré a esta sociedad "sociedad circular". A modo de comparación, se agrega la tabla 4.2 con las mediciones hechas para esta simulación. Cabe mencionar que este cambio aparentemente inocente de sólo mover la posición de los centros de trabajo podría usarse para un estudio acerca de los cinturones de miseria, pero por el momento me limitaré a hablar de manera abstracta sobre la dinámica de las sociedades.

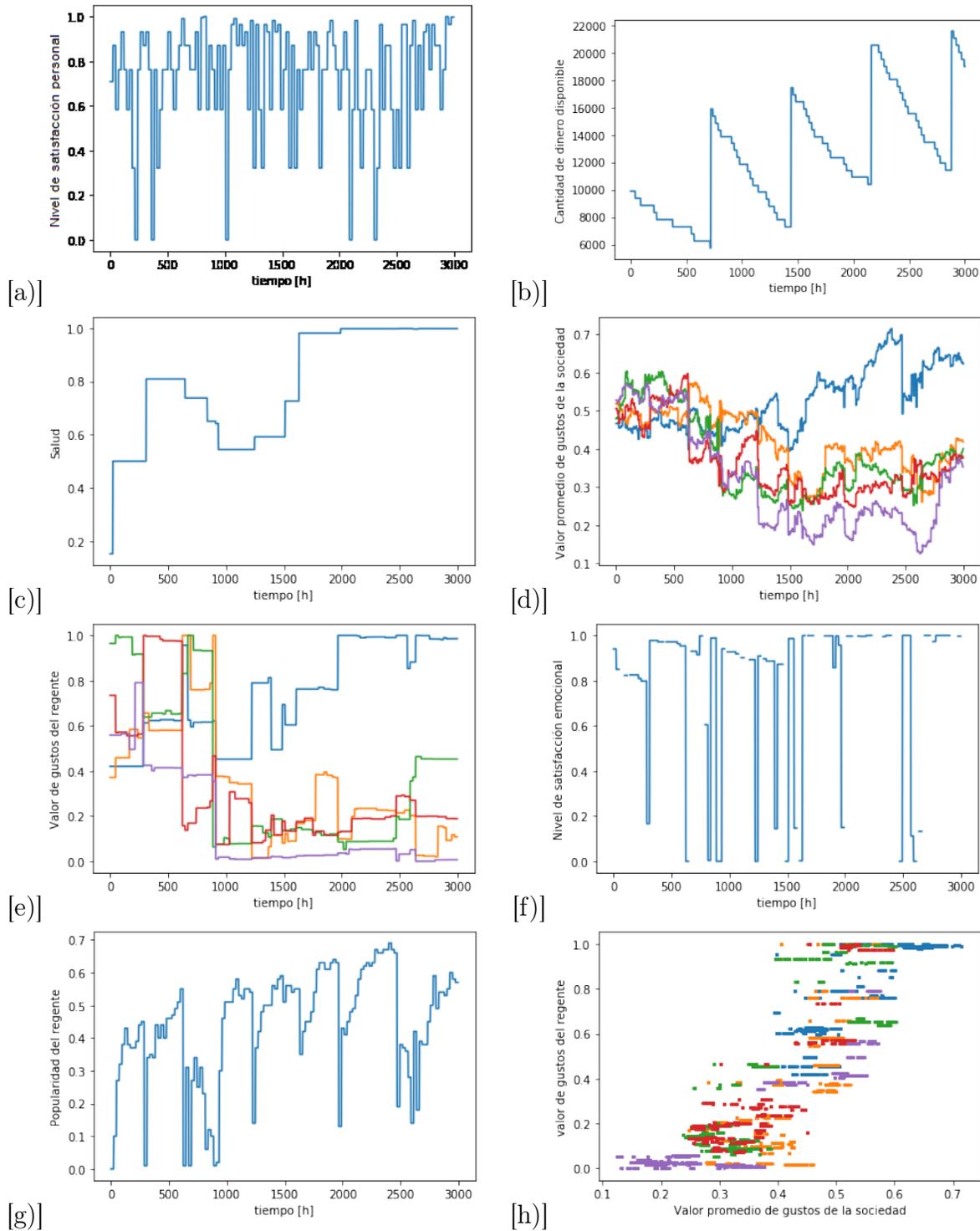


Tabla 4.2: Comportamiento de una sociedad circular, en el que tomamos un individuo  $\gamma$ . a) Estado emocional de  $\gamma$  vs. tiempo, b) Dinero disponible de  $\gamma$  vs. tiempo, c) Salud de  $\gamma$  vs. tiempo, d) Valor promedio de los gustos de la sociedad vs. tiempo, e) Valor de los gustos del regente vs. tiempo, f) Nivel de satisfacción personal de  $\gamma$  vs. tiempo, g) Popularidad de regente vs. tiempo, h) Gustos del regente vs. gustos promedio de la sociedad.

Es de recalcar la diferencia entre la figura d) de la tabla 4.2 y su homóloga en la tabla 4.1 pues en el caso de la sociedad circular se aprecia como el promedio de los valores de los gustos sociales tiende a divergir, contrario al caso de la sociedad rectangular, siendo el mismo fenómeno el que se observa en las figuras e) de ambas tablas. Esto explica los bajos valores presentados en la figura g) de la tabla 4.2 en comparación con su análogo de la tabla 4.1. Así mismo es importante notar que pese a estas diferencias entre ambos fenómenos, el comportamiento reflejado en la figura h) de ambas tablas es similar, implicando que la influencia del regente sobre los ciudadanos es parecido para la sociedad rectangular y la circular. Con esto queda claro que la localización de los centros de trabajo influye sobre el comportamiento de la sociedad como colectivo, pero que la dinámica personal de los individuos sigue siendo similar a la de la tabla 4.1.

Buscando dar una explicación a esta diferencia, analizaré cuál es la dinámica que impone sobre los individuos la manera en que estos interactúan entre sí, enfocándome sobre todo en el comportamiento de la popularidad del regente. Por definición de la distribución de probabilidad con la que los individuos seleccionan con quién interactuarán, la distancia entre sus posiciones conforma un cuarto de esta. Así mismo, por la manera en que la selección de trabajos y hogares está descrita, se tiene que el lugar esperado al que los individuos van a mudarse dentro de la sociedad rectangular será el punto  $(1/2, 1/2)$  y efectivamente se observará una concentración demográfica alrededor de dicho punto. Por el contrario, para la sociedad circular, pese a tener un punto esperado al que los individuos se mudarán, es muy improbable que se genere una concentración demográfica como para la sociedad rectangular, ya que los individuos buscarán reducir la distancia entre sus trabajos y sus hogares.

Estas dos condiciones provocan que para la sociedad rectangular, al regente le baste con mudarse cerca del punto  $(1/2, 1/2)$  para estar cercano a la mayoría de los habitantes de la sociedad y así aumentar sus probabilidades de interacción con cada uno de ellos; entre más interacciones de este tipo existan, mayor es la probabilidad de que los individuos y el regente compartan gustos y por tanto, que su popularidad aumente. En contraposición a este caso, dentro de la sociedad circular no existe esta posibilidad por lo dicho anteriormente, de modo que la mejor estrategia que podría seguir el regente sería mudarse cerca del empleo más concurrido, pero sin que esto asemeje del todo el escenario de la sociedad rectangular, haciéndole más difícil interactuar con el resto de los habitantes y por tanto, siendo más complicado tener un índice alto de popularidad.

## 4.1. Estudio de los grupos sociales

Dejando a un lado el estudio del comportamiento de los individuos, volteo a ver el comportamiento de los grupos sociales que forman las personas basadas en sus gustos y opiniones. Para esto usaré el método de clustering llamado Mean Shift, cuya convergencia fue demostrada en [5] por Li, Hu y Wu. Hace falta recordar que este método de clustering consiste en tomar  $n$  puntos repartidos en el espacio muestral e iterativamente se va asignando una nueva posición a cada punto como el centro de masa de los registros que

existen en la bola de radio  $r$  centrada en el punto en cuestión. A su vez, este radio  $r$  es escogido como el mínimo radio a partir del cual la cantidad de clusters formados se vuelve constante, asegurando así que se ha obtenido persistencia en la agrupación alcanzada. Teniendo este algoritmo, definiré como *grupo social* a los individuos que sean agrupados dentro de un mismo cluster por Mean Shift.

La razón por la cual elegí esta metodología es por su tendencia a buscar puntos cerca de los cuales los registros de nuestro espacio muestral se concentran, lo cual en este caso se puede interpretar como el conjunto de opiniones predominante en un grupo social. Por otro lado, este algoritmo tiene la ventaja de que no es necesario asignar la cantidad de clusters a formar, sino que es determinada por el número de puntos de convergencia. Esto también ofrece una libertad que vale la pena rescatar de la sociedad, pues la cantidad de grupos sociales dependerá únicamente de las opiniones de sus individuos.

La pregunta que se busca responder aquí es: ¿Es posible, partiendo de que tengamos un grupo social, estimar su comportamiento a futuro? Y más específicamente, si es posible saber si un grupo social se disolverá y en caso de prevalecer, cuál será la cantidad de individuos que permanezcan adheridos a él. Es sencillo observar que al contestar estas preguntas, también quedará resuelta una de los principales cuestionamientos de Axelrod: si la sociedad alcanzará la convergencia en su cultura con suficiente tiempo o si permanecerá en constante cambio.

Realizando 100 simulaciones se observó que si  $G$  es un grupo social, la proximidad promedio de los gustos y opiniones entre los individuos de  $G$  y la proporción de personas de la sociedad que pertenecen a dicho grupo guardan una relación cuadrática. Para hacer este análisis y tomando  $p$  como la proximidad entre los individuos de  $G$  y  $N$  la cantidad total de integrantes de la sociedad, se buscaron coeficientes  $a$  y  $b$  tales que  $|G|/N = a + bp - p^2$ . El mínimo valor de correlación  $R^2$  entre esta función y los resultados de la simulación que se encontró en todas las simulaciones fue mayor a 0.9999.

La pregunta sobre el significado que podrían tener los coeficientes  $a$  y  $b$  en la expresión anterior para  $|G|/N$  surge de manera natural y para esto iniciaremos tomando el límite  $\lim_{p \rightarrow 0} |G|/N$ . Por la manera en la que definimos a la variable  $p$ , este límite representa el momento en el que los gustos de los individuos pertenecientes al grupo social  $G$  se vuelven tan parecidos que se vuelvan indistinguibles y por la expresión encontrada empíricamente, tenemos que  $\lim_{p \rightarrow 0} |G|/N = a$ , es decir que  $a$  representa la proporción de la sociedad a la que el grupo social  $G$  tenderá a contener conforme todos sus individuos vayan teniendo gustos muy parecidos entre sí.

Para el caso de  $b$ , no parece que los límites vayan a darnos una interpretación puesto que  $\lim_{p \rightarrow 0} |G|/N$  tiene un resultado independiente de  $b$  y si calculáramos  $\lim_{p \rightarrow \infty} |G|/N$ , esto implicaría que estamos suponiendo que los miembros de  $G$  son totalmente diferentes, lo cual haría que seguir llamando a  $G$  un “grupo social” carezca de significado. Es entonces que se puede notar que su significado radica más bien en medir la capacidad de este grupo social para conservar a sus integrantes y atraer nuevos, lo cual pasará con mayor facilidad entre  $b$  sea más grande.

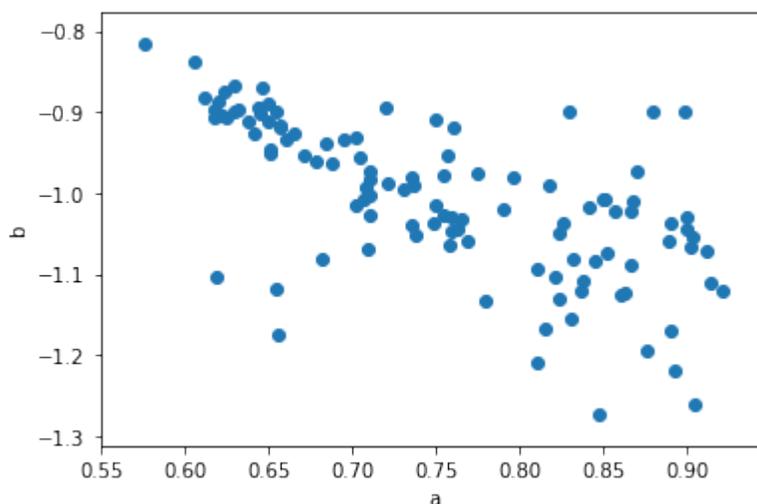


Figura 4.3: Puntos  $(a, b)$  para aproximar  $|G|/N = a + bp - p^2$  donde  $G$  es un grupo social,  $N$  es la cantidad de personas en la sociedad y  $p$  es la proximidad entre integrantes de  $G$ .

En la figura 4.3 se muestra un gráfico de los puntos  $(a, b)$  para las simulaciones anteriores y se observa que no existe una función que describa estos dos parámetros. Así mismo grafiqué las relaciones entre los parámetros  $a$ ,  $b$  y la proximidad inicial entre los individuos de una sociedad, lo cual presento en las figuras 4.4 y 4.5. En estas figuras observamos que tampoco se presenta un comportamiento propio de una función.

Una duda que puede salir al observar estas figuras es si este sistema es sensible a condiciones iniciales. Es decir, ¿gustos y funciones de pago iniciales similares llevan a valores  $a$  y  $b$  similares? Para contestar esto, tomemos le siguiente caso particular.

Supongamos que tenemos una sociedad de cuatro individuos  $q_1, q_2, q_3, q_4$  con solo un gusto y dos trabajos  $T_1, T_2$  y que las condiciones iniciales son que  $q_1$  se encuentra en  $(0, 0)$  y opina 0,  $q_2$  está en  $(1/3, 0)$  y opina  $1/3$ ,  $q_3$  está en  $(2/3, 0)$  y opina  $2/3$  y  $q_4$  se localiza en  $(1, 0)$  y opina 1; por otro lado,  $T_1$  está en  $(0, 0)$  y opina 0, mientras que  $T_2$  se encuentra en  $(1, 0)$  y opina 1. Dadas estas condiciones, supongamos que en la primera iteración,  $q_1$  interactúa con  $q_2$ ,  $q_2$  con  $q_1$  y  $q_3$ ,  $q_3$  con  $q_2$  y  $q_4$  y  $q_4$  sólo con  $q_3$ . Ahora podemos distinguir dos situaciones: en la primera, la interacción entre  $q_1$  y  $q_2$ , así como la de  $q_2$  y  $q_3$  es muy relevante, de modo que los tres individuos quedan con opiniones muy cercanas a 0, mientras que en la segunda opción, las interacciones entre  $q_4$  y  $q_3$  y la de  $q_3$  y  $q_2$  son mucho más significativas que la que existió entre  $q_1$  y  $q_2$ , de modo que al final de esta iteración, las opiniones de  $q_2, q_3$  y  $q_4$  quedan muy cerca de 1. Esto hará que en futuras iteraciones, sea más probable que  $q_1, q_2$  y  $q_3$  interactúen en el primer escenario y que  $q_2, q_3$  y  $q_4$  lo hagan en el segundo; en otras palabras, esto dice que el primer escenario conduce a que los grupos sociales generados sean  $\{q_1, q_2, q_3\}$  y  $\{q_4\}$ , mientras que en el segundo, aparezcan  $\{q_1\}$  y  $\{q_2, q_3, q_4\}$ , lo cual prueba que incluso con condiciones iniciales iguales, el papel que las variables aleatorias juegan en el resultado del cálculo de  $a$  y  $b$  sea muy relevante.

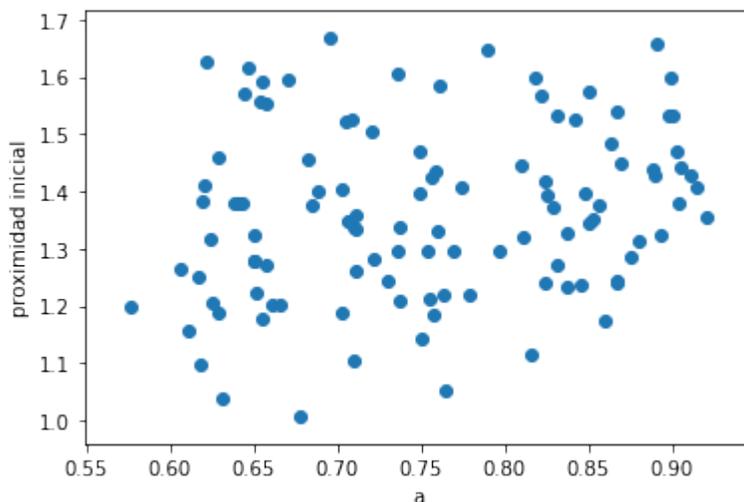


Figura 4.4: Término independiente de la aproximación de la figura 4.3 vs. proximidad inicial entre individuos de  $G$ .

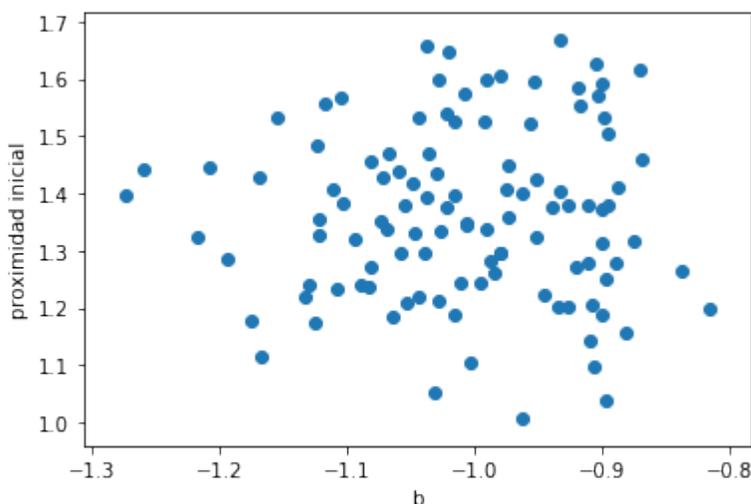


Figura 4.5: Término lineal de la aproximación de la figura 4.3 vs. proximidad inicial entre individuos de  $G$ .

A pesar de no encontrar una relación funcional entre estos parámetros, sí es de notarse que el hecho de que exista una relación con índice de correlación tan elevado, indica que desde los primeros momentos se puede saber cuál será la cantidad máxima de integrantes dentro de un grupo social determinado, así como si prevalecerá o se disolverá pues en aquellos que no guardaban la relación descrita en la figura 4.3, terminaban separándose.

Con lo que se ha visto hasta el momento sobre la dinámica de las subsociedades surge la pregunta de cómo distinguir una sociedad de otra, la cual a su vez genera el cuestionamiento de cómo caracterizar a una sociedad. Es decir, si se tiene una sociedad circular cuyos centros

de trabajo están distribuidos en  $\mathbb{S}^1$ , este conjunto de datos sería diferente de otra cuyos puntos laborales presentarían una homotecia para que ahora se encontraran en  $\{0.9(\sin \theta, \cos \theta) | \theta \in [0, 2\pi]\}$ , sin embargo intuitivamente se estaría hablando de la misma sociedad.

Para esto voy a pensar a los individuos como una nube de puntos  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $n$  es el número de gustos que tienen. Después los agruparé en clusters mediante Mean Shift [5] y, con el objetivo de formar una gráfica, trazaré un arista entre dos individuos  $\{x, y\}$  si y sólo si:

1.  $\{x, y\} \subseteq C$ , con  $C$  un cluster de  $X$ .
2.  $\|x - y\| \leq \min\{\min\{\|x - z\| : z \in X \setminus C\}, \min\{\|y - z\| : z \in X \setminus C\}\}$

notando que esta relación está bien definida.

Esto lo haré ya que la relación anterior implica que la persona con quien es más probable que interactúe se encuentra en su cluster, de modo que esta relación representa el conjunto de sujetos dentro de la subsociedad determinada por el cluster que tenderán a permanecer dentro de ella.

Puesto que toda gráfica finita se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ , interpretaré sus vértices y aristas como partes de un 2-simplejo de modo que estaré recreando una superficie en la cual habré encajado, por construcción, la subsociedad en cuestión. Al tener esta estructura, es natural preguntarse cuáles son sus números de Betti, lo cual genera interés por 2 razones: la primera es que la idea detrás del  $n$ -ésimo número de Betti es la cantidad de cortes que se le deberían hacer a la superficie para separarla en  $n$ -ciclos, lo cual se traduciría en una medida de la cohesión social entre sus habitantes; por su parte, la segunda razón es que sabemos que los números de Betti ayudan a reconocer una superficie, lo que a su vez estaría generando una caracterización del grupo social en cuestión.

Teniendo como objetivo tratar con los número de Betti, comenzaré hablando de los  $n$ -simplejos, pero no sin antes agregar que desde la siguiente definición hasta la demostración del teorema que garantiza la computabilidad de los grupos de homología de complejos finitos se encuentran en [28] y lo que yo hice fue traducirlos y completar algunas demostraciones dejadas al lector.

**Definición:** Independencia geométrica y  $n$ -simplejo

Sea  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$  conjunto de puntos linealmente independientes en el sentido de álgebra lineal, entonces diré que  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es *independiente geoméricamente* si  $\{a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1\}$  es linealmente independiente según el álgebra lineal.

Además diré que  $\sigma$  es un  $n$ -simplejo que *abarca* a  $\{a_1, \dots, a_n\}$  si  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es un conjunto geoméricamente independiente y  $\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i a_i : \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$ .

Rápidamente se pueden identificar diferentes partes de un  $n$ -simplejo, por lo cual se presentan las siguientes definiciones.

**Definición:** Vértices y caras de un  $n$ -simplejo.

Si  $\sigma$  es un  $n$ -simplejo que abarca a  $A := \{a_1, \dots, a_n\}$  entonces llamaré *vértices de  $\sigma$*  a  $A$  y me referiré con el nombre de *cara* a todo simplejo que abarque a un subconjunto de  $A$ , mientras que a los simplejos que abarquen subconjuntos propios de  $A$  los llamaré *caras propias de  $\sigma$* .

**Definición:**  $n$ -simplejo complejo

Un simplejo complejo  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  es una colección de simplejos en  $\mathbb{R}^n$  tales que:

1. Toda cara de  $K$  está en  $K$ .
2. La intersección no vacía de cualesquiera dos simplejos de  $K$  es una cara de ambos.

Para empezar a trabajar con los grupos de homología, antes hablaré sobre la orientación que puede tener un simplejo y para esto probaré la siguiente afirmación.

**Afirmación:** Sean dos listas ordenadas  $a = (a_1, \dots, a_n)$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , donde  $\{a_1, \dots, a_n\} = \{b_1, \dots, b_n\} = \{1, \dots, n\}$ . Entonces es posible pasar de  $a$  a  $b$  mediante permutaciones y la cantidad de transposiciones necesarias para hacerlo está bien definida módulo 2.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, pasemos de  $a$  a  $b$ . Para esto, ya que  $\{a_1, \dots, a_n\} = \{b_1, \dots, b_n\}$ , existe  $i_1 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a_{i_1} = b_1$  y podemos pasar de  $a$  a  $(a_{i_1}, a_2, \dots, a_n) = (b_1, a_2, \dots, a_n)$  mediante transposiciones, siendo posible llegar de manera iterativa a  $b$  con una cantidad finita de permutaciones repitiendo el mismo paso hasta terminar con toda la lista.

Ahora consideremos el grupo  $S_n$  de las permutaciones de  $n$  elementos y sea  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ . Ya que las permutaciones son biyectivas, podemos representar con  $M_\sigma$  a la matriz de cambio de base que manda la base estándar a la lista ordenada  $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$  y de esta manera definir la función  $\phi : S_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$  tal que  $\phi(\sigma) = M_\sigma$ , donde  $GL_n(\mathbb{Z})$  es el grupo de las matrices invertibles de  $n \times n$  con entradas en los enteros.

Notemos que la imagen de  $\phi$  está contenida en su contradominio ya que  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  es la base estándar y que  $\phi$  está bien definida puesto que los cambios de base están bien definidos. Así mismo, por álgebra lineal sabemos que la composición de transformaciones lineales es equivalente a la multiplicación de las matrices que las representan, por lo cual tenemos que  $\phi(\sigma \circ \tau) = M_{\sigma \circ \tau} = M_\sigma M_\tau = \phi(\sigma) \circ \phi(\tau)$ . Más aún, si  $\phi(\sigma) = \phi(\tau)$  entonces  $M_\sigma = M_\tau$ , lo cual implica que  $e_{\sigma(i)} = e_{\tau(i)}$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ , de modo que  $\sigma(i) = \tau(i)$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ , llegando así a que  $\sigma = \tau$ .

$\therefore \phi$  es un homomorfismo de grupos y es inyectivo.

$\therefore \phi[S_n]$  es un subgrupo de  $GL_n(\mathbb{Z})$ .

Por otro lado consideremos al determinante como un homomorfismo de grupos  $\det : \phi[S_n] \rightarrow \{-1, 1\}$ , donde  $\{-1, 1\}$  es un grupo bajo la multiplicación usual. Recordemos

que el determinante está bien definido para todas las matrices con entradas reales y que ya que el determinante abre las multiplicaciones, tenemos que si  $\{A, B\} \subseteq GL_n(\mathbb{Z})$  tales que

$AB = \text{id} \Rightarrow \det(A) \det(B) = \det(AB) = \det(\text{id}) = 1$ . De este modo tenemos que  $\{\det(A) \det(B)\} \subseteq \mathbb{Z}$  y son unidades, por lo cual  $\det(X) \in \{-1, 1\}$  para toda  $X \in GL_n(\mathbb{Z})$ . De esta manera, la forma en que definimos el determinante tiene un contradominio correcto.

Así las cosas, consideremos el homomorfismo  $\det \circ \phi : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ . Por álgebra lineal sabemos que intercambiar el orden de dos elementos de la base cambia el signo del determinante, i.e. si  $\tau \in \mathcal{S}_n$  es una transposición, entonces  $\det \circ \phi(\tau) = -1$ . Luego si tomamos  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , por teoría de grupos podemos descomponerla en una cantidad finita transposiciones de modo que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$  con  $\tau_i$  transposición para toda  $i \in \{1, \dots, m\}$  y así tenemos que  $\det \circ \phi(\sigma) = \det \circ \phi(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_m) = \det(\tau_1) \dots \det(\tau_m) = (-1)^m$ , lo que está bien definido módulo 2 sobre  $m$ .

□

Usando la afirmación anterior puedo proponer la siguiente definición, teniendo en mente que esto genera una clase de equivalencia entre los ordenamientos de los vértices y dicha clase de equivalencia sólo tiene 2 elementos. Esto se sabe por ser las propiedades modulares de  $\mathbb{Z}_2$

**Definición:** orientación de un simplejo.

Si  $\sigma$  es un simplejo con más de un vértice, entonces llamaré *orientación* a cada una de las clases de equivalencia que la afirmación anterior define sobre el ordenamiento de los vértices de  $\sigma$ . De este modo, un simplejo con más de un vértice únicamente tiene 2 orientaciones posibles.

En caso de que  $\sigma$  abarque a  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , también se denotará a  $\sigma$  como  $a_1 \dots a_n$ , mientras que escribiré  $[a_1, \dots, a_n]$  para denotar al simplejo  $a_1 \dots a_n$  cuya orientación pertenece a la clase de equivalencia de  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Para seguir con la construcción, definiré las *p-cadenas*, pero antes probaré la siguiente afirmación.

**Afirmación:** Siendo  $K$  un simplejo complejo y  $p \in \mathbb{N}$ , sea  $G$  el conjunto de las funciones que van del conjunto de los  $p$ -simplejos orientados de  $K$  a  $\mathbb{Z}$  tales que cumplen que si  $f \in G$  y  $\sigma$  es un simplejo orientado entonces  $-f(\sigma) = f(-\sigma)$  y que  $f$  es nula salvo en una cantidad finita de elementos.

Entonces  $G$  es un grupo al usar la suma de funciones como la suma de sus imágenes.

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  funciones como en las hipótesis y  $\sigma$  un simplejo orientado. Entonces  $-(f + g)(\sigma) = -f(\sigma) - g(\sigma) = f(-\sigma) + g(-\sigma) = f + g(-\sigma)$  y será nula salvo en una cantidad finita de complejos orientados pues  $f$  y  $g$  lo son. Por lo tanto,  $f + g \in G$ .

Así mismo la suma será asociativa pues sabemos que la suma en los enteros es asociativa y sabemos que el elemento neutro será la función constante cero.

Por último sabemos que  $-f$  será el elemento inverso de  $f$ .

$\therefore G$  es grupo.

□

**Definición:**  $p$ -cadena

Sea  $p \in \mathbb{Z}$  y  $K$  un simplejo complejo. Llamaré  $p$ -cadena sobre  $K$  y la denotaremos como  $C_p(K)$  al grupo de funciones del conjunto de  $p$ -simplejos ordenados a  $\mathbb{Z}$  tales que cumplen:

1.  $-f(\sigma) = f(-\sigma)$  con  $f$  función y  $\sigma$  simplejo ordenado.
2.  $f(\sigma) = 0$  salvo por una cantidad finita de simplejos ordenados.

En caso de que  $p$  sea negativo o que  $p < \dim K$ , entonces  $C_p(K)$  es el grupo trivial.

**Definición:** Operador frontera

Defino el *operador frontera* como  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  tal que

$$\partial_p[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$$

donde  $\hat{v}_i$  significa que se omite el vértice  $v_i$  del arreglo.

Veamos la primer característica importante del operador frontera.

**Lema:** El operador frontera es un homomorfismo.

*Demostración.* Notemos que el operador frontera está bien definido pues si  $v_0 \dots v_p \in C_p(K)$  y tomamos dos ordenamientos de sus vértices tales que generen la misma orientación  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}]$  y  $[v_{j_0}, \dots, v_{j_p}]$ , entonces

$$\partial_p[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}] = \sum_{k=0}^p (-1)^k [v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, v_{i_p}]$$

y

$$\partial_p[v_{j_0}, \dots, v_{j_p}] = \sum_{k=0}^p (-1)^k [v_{j_0}, \dots, \hat{v}_{j_k}, \dots, v_{j_p}].$$

Como  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}]$  y  $[v_{j_0}, \dots, v_{j_p}]$  tienen la misma orientación, existe una cantidad par de permutaciones  $\{f_k\}_{k=0}^r$  tal que  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}] = f_r \circ \dots \circ f_0([v_{j_0}, \dots, v_{j_p}])$ . De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_p[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}] &= \partial_{p_r} \circ \dots \circ f_0([v_{j_0}, \dots, v_{j_p}]) = \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k f_r \circ \dots \circ f_0([v_{j_0}, \dots, \hat{v}_{j_k}, \dots, v_{j_p}]) = \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k [v_{j_0}, \dots, \hat{v}_{j_k}, \dots, v_{j_p}] = \partial_p[v_{j_0}, \dots, v_{j_p}]\end{aligned}$$

pues  $r$  es par y por lo tanto ambos simplejos forman parte de la misma clase de equivalencia.

$\therefore \partial_p$  está bien definido.

Definiendo una suma formal sobre los simplejos ordenados, tenemos que si  $\{[v_0, \dots, v_p], [w_0, \dots, w_p]\} \subseteq C_p(K)$ , entonces

$$\begin{aligned}\partial_p([v_0, \dots, v_p] + [w_0, \dots, w_p]) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k ([v_0, \dots, v_p] + [w_0, \dots, w_p]) = \\ &= \sum_{k=0}^p ((-1)^k [v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_p] + (-1)^k [w_0, \dots, \hat{w}_k, \dots, w_p]) = \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k [v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_p] + \sum_{k=0}^p (-1)^k [w_0, \dots, \hat{w}_k, \dots, w_p] = \partial_p[v_0, \dots, v_p] + \partial_p[w_0, \dots, w_p]\end{aligned}$$

$\therefore \partial_p$  es un homomorfismo. □

Una vez que sabemos que la frontera es un operador bien definido, podemos probar el siguiente lema que nos permitirá definir finalmente los grupos de homología.

**Lema:** Dado  $K$  un simplejo complejo,  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ .

*Demostración.* Calculando con la definición tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_{p-1} \circ \partial_p[v_0, \dots, v_p] &= \sum_{i=0}^p \partial_{p-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] = \\ &= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j [\dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots] + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^j [\dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots] = \\ &= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j [\dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots] - \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j [\dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots] = 0\end{aligned}$$

pues al permutar el orden de  $v_i$  y  $v_j$  cambia el signo de la orientación. □

Con lo anterior podemos establecer la siguiente definición.

**Definición:**  $p$ -ésimo grupo de homología,  $p$ -ciclos y  $p$ -fronteras.

Llamaré  $p$ -ciclos a los elementos del kernel de  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  y lo denotaré por  $Z_p(K)$ , mientras que llamaré  $p$ -fronteras a los elementos de  $B_p(K) := \partial_p[C_{p+1}]$ .

Por el lema anterior se sabe que  $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$  y definimos

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$$

y lo llamaré  $p$ -ésimo grupo de homología de  $K$ .

Ahora verifiquemos la definición anterior.

**Observación:** Los grupos de homología están bien definidos

*Demostración.* Ya que  $Z_p(K)$  es el kernel de un homomorfismo, es un grupo, mientras que el hecho de que  $B_p(K)$  sea la imagen de un homomorfismo también implica que sea un grupo.

Además notamos que por la definición de la operación en el grupo tenemos que  $C_q(K)$  es abeliano para toda  $q$ , por lo que  $B_p(K)$  es subgrupo normal de  $Z_p(K)$ .

$\therefore$  Los grupos de homología están bien definidos. □

La siguiente definición nos ayudará posteriormente para la demostración de la computabilidad de los números de Betti.

**Definición:** subgrupo de torsión

Sean  $G$  un grupo y  $g \in G$ . Diré que  $g$  tiene *orden finito* si existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $ng = 0$  y llamaré *subgrupo de torsión de  $G$*  a  $T(G) := \{g \in G \mid g \text{ tiene orden finito}\}$ .

Si  $T$  es el grupo trivial, diré que  $G$  es un grupo *libre de torsión* y si  $|T| \in \mathbb{N}$ , diremos que  $|T|$  es el *orden* de  $T$ .

Esta definición contiene algunas afirmaciones que hace falta probar.

**Observación:**  $T(G)$  es un subgrupo de  $G$  y está unívocamente determinado por  $G$ .

*Demostración.* Evidentemente  $T(G) \subseteq G$  y  $0 \in T(G)$ .

Por otro lado si  $\{a, b\} \subseteq T(G)$ , existe  $\{n, m\} \subset \mathbb{Z}^+$  tal que  $na = mb = 0$ . Ahora si tomamos  $p = nm$ , entonces  $pa = nma = m(na) = m0 = 0$  y  $pb = nmb = n(mb) = n0 = 0$  por lo que  $a + b \in T(G)$ .

El hecho de que está unívocamente determinado por  $G$  se debe a que  $T(G)$  fue definido como un conjunto y el axioma de comprensión asegura su unicidad.

$\therefore T(G)$  es un subgrupo de  $G$  y está unívocamente determinado por  $G$ . □

**Afirmación:** Todo grupo abeliano libre es libre de torsión.

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo abeliano libre, entonces existe  $\{b_0, \dots, b_n\}$  base de  $G$  de modo que para todo  $g \in G$ ,  $\exists! \{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$  tal que  $g = \sum_{i=0}^n a_i b_i$ .

Así las cosas, sea  $g \in G$  con orden finito, entonces  $\exists p \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $pg = \sum_{i=0}^n pa_i b_i = 0$ , pero teníamos que los coeficientes de esta suma son únicos para cada elemento de  $G$ , por lo tanto  $pa_i = 0 \forall i$  y como  $p \neq 0$ ,  $a_i = 0 \forall i \Rightarrow g = 0 \Rightarrow T(G) = \{0\}$ .

$\therefore G$  es libre de torsión.

□

**Proposición:** Sea  $S$  un conjunto. El conjunto de las funciones  $G := \{f : S \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) \neq 0 \text{ para una cantidad finita de } S\}$  donde la suma de las funciones es la suma de sus valores es un grupo abeliano libre. A  $G$  lo llamaremos grupo generado por  $S$ .

*Demostración.* Evidentemente  $G$  es un grupo pues si  $\{f, g\} \subseteq G$ , entonces existen  $A \subseteq S$  y  $B \subseteq S$  finitos tales que  $f(x) = 0 \forall x \in S \setminus A$  y  $g(x) = 0 \forall x \in S \setminus B$ . Luego  $f + g(x) = 0 \forall x \in S \setminus (A \cup B)$  donde  $A \cup B$  es finito. El resto de las propiedades necesarias para probar que sea un grupo se garantizan pues  $\mathbb{Z}$  es un grupo y la suma se definió como la suma de las imágenes.

Por otro lado, sabemos que  $G$  es un grupo abeliano pues si  $\{f, g\} \subseteq G$  y  $x \in S$ ,  $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$  donde la conmutatividad de las imágenes se tiene por la conmutatividad de  $\mathbb{Z}$ .

Por último, para demostrar que  $G$  es libre demostraremos que  $B := \{\phi_x\}_{x \in S}$  es una base de  $G$  donde  $\phi_x(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = x \\ 0 & \text{si } z \neq x \end{cases}$ , de modo que es evidente que  $B \subseteq G$ . Para demostrar que  $B$  genera, tomamos  $f \in G$  y notamos que  $f = \sum_{x \in S} f(x) \phi_x$  por definición.

Así mismo para demostrar que los coeficientes de la suma anterior son únicos, notamos que si  $\sum_{x \in S} a_x \phi_x = \sum_{x \in S} b_x \phi_x$  y tomamos  $y \in S$ , entonces  $a_y = \sum_{x \in S} a_x \phi_x(y) = \sum_{x \in S} b_x \phi_x(y) = b_y$ , por lo que sus coeficientes están unívocamente determinados.

$\therefore G$  es un grupo abeliano libre.

□

Presento algunas afirmaciones útiles.

**Afirmación:** Sean  $G$  grupo abeliano tal que  $G = G_1 \oplus G_2$  y  $H_1$  y  $H_2$  subgrupos de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente. Entonces  $G/(H_1 \oplus H_2) \approx (G_1/H_1) \oplus (G_2/H_2)$

*Demostración.* Sea  $a \in G$ , entonces existen  $a_1 \in G_1$  y  $a_2 \in G_2$  tales que  $a = a_1 + a_2$ . Luego por definición

$$a + (H_1 \oplus H_2) = \{a + h_1 + h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\} = \\ \{(a_1 + h_1) + (a_2 + h_2) \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\} = (a_1 + H_1) \oplus (a_2 + H_2).$$

$$\therefore G/(H_1 \oplus H_2) \approx (G_1/H_1) \oplus (G_2/H_2).$$

□

**Afirmación:** Sea  $G$  un grupo,  $T(G)$  su subgrupo de torsión y  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo. Entonces  $f[T(G)]$  es subgrupo del subgrupo de torsión de  $H$ . Además si  $f$  es inyectiva y  $z \in f[G] \cap f[T(G)]$  se cumple que  $\exists x \in T(G)$  tal que  $f(x) = z$

*Demostración.* Sea  $x \in T(G)$ , entonces  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $nx = 0$ . Luego  $nf(x) = f(nx) = f(0) = 0$  por lo que  $f(x)$  pertenece al subgrupo de torsión de  $H$ .

Por otro lado si  $z \in f[G] \cap f[T(G)]$  tenemos que existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $nz = 0$  pues  $z$  pertenece al subgrupo de torsión de  $H$  mientras que como  $z \in f[G]$  entonces  $\exists x \in G$  tal que  $f(x) = z$  de modo que  $0 = nz = nf(x) = f(nx)$  y si  $f$  es inyectiva tenemos que  $nx = 0 \Rightarrow x \in T(G)$ .

□

**Corolario:** Si  $f : G \rightarrow H$  es un isomorfismo y  $T$  es el subgrupo de torsión de  $G$ , entonces  $f[T(G)]$  es el subgrupo de torsión de  $H$ .

*Demostración.* Sea  $x \in T$ , entonces por la afirmación anterior  $f(x)$  está en el subgrupo de torsión de  $H$ , i.e.  $f[T]$  está contenido en el subgrupo de torsión de  $H$ .

Por otro lado, si  $x$  pertenece al subgrupo de torsión de  $H$  entonces  $\exists z \in T$  tal que  $f(z) = x$  pues al  $f$  ser isomorfismo en particular es suprayectivo y  $f[G] = H$ . Así tenemos que el subgrupo de torsión de  $H$  está contenido en  $f[T]$ .

□

**Lema:** Sea  $A$  un grupo abeliano libre de rango  $n$ . Si  $B$  es un subgrupo de  $A$ , entonces  $B$  es un grupo abeliano libre de rango  $r \leq n$ .

*Demostración.* Omitiremos la prueba de que  $B$  es abeliano, pues dicha propiedad es hereditaria de manera trivial.

Ya que  $A$  es grupo abeliano libre, tenemos que es un grupo libre de torsión y generado por  $n$  elementos, de modo que tenemos que es homomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ , modo en el cual lo pensaremos sin pérdida de generalidad.

Sea  $\pi_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  la proyección de la  $i$ -ésima coordenada, la cual sabemos que es un homomorfismo y sea también  $B_m := \{x \in B \mid \pi_i(x) = 0 \forall i \in \{m+1, \dots, n\}\}$ .

Notemos que  $\pi_m[B_m]$  define un subgrupo en  $\mathbb{Z}$ , por lo cual es cíclico desde que los enteros lo son. Así, sea  $x_m \in B_m$  tal que  $\pi_m(x_m)$  genere a  $\pi_m[B_m]$  y construyamos de esta manera a  $\beta := \{x_i | x_i \neq 0 \wedge i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Ahora afirmamos que  $\beta$  es base para  $B$ .

Por construcción tenemos que  $\pi_1(x_1)$  genera a  $\pi_1[B_1]$ , por lo que  $x_1$  genera a  $B_1$ , de modo que para todo  $b \in B_1$ , existe  $\alpha \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = \alpha x_1$ . Ahora como hipótesis de inducción supongamos que  $\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$  genera a  $B_{m-1}$  y tomemos  $x \in B_m$ .

Por los mismos argumentos que antes tenemos que  $\exists \alpha_m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\pi_m(x) = \alpha_m \pi_m(x_m)$ , por lo cual se sigue que  $\pi_m(x - \alpha_m x_m) = 0$ , i.e.  $x - \alpha_m x_m \in B_{m-1}$ .

Así por hipótesis de inducción tenemos que existe  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}\} \subset \mathbb{Z}$  tal que  $x - \alpha_m = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1}$ , concluyendo entonces que  $\{x_1, \dots, x_m\}$  genera a  $B_m$ .

$\therefore \beta$  genera a  $B$  pues  $B_n = B$ .

Usaremos de nuevo la inducción para demostrar que los elementos de  $\beta$  son independientes, notando que es trivial mostrar que  $\lambda x_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ .

Como paso de inducción supongamos que  $\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$  es un conjunto de elementos independientes y consideremos la ecuación  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$ .

A esta ecuación le aplicamos  $\pi_m$  y tenemos que  $\lambda_m \pi_m(x_m) = 0$ . Por construcción tenemos que  $\pi_m(x_m)$  genera a  $\pi_m[B_m]$ , por lo que tenemos dos opciones:  $\pi_m[B_m] = \{0\}$  o no.

Si  $\pi_m[B_m] = \{0\}$ , entonces  $x_m = 0$ , en cuyo caso tenemos que  $0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m-1} x_{m-1}$  de modo que terminamos por hipótesis de inducción.

Si  $\pi_m[B_m] \neq \{0\}$ , entonces  $\pi_m(x_m) \neq 0$  pues por construcción lo genera. Luego  $\lambda_m \pi_m(x_m) = 0 \Rightarrow \lambda_m = 0$ , de modo que de nuevo tenemos  $0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m-1} x_{m-1}$ , con lo cual terminaríamos por hipótesis de inducción.

$\therefore \beta$  es base para  $B$ .

$\therefore B$  es grupo abeliano libre.

□

**Definición:** Sean  $G$  y  $G'$  grupos abelianos libres y  $\{a_1, \dots, a_n\}$  y  $\{a'_1, \dots, a'_m\}$  sus bases respectivamente y sea  $f : G \rightarrow G'$  homomorfismo, entonces existen coeficientes únicos  $\{\lambda_{ij}\}_{i \leq n, j \leq m}$  tales que

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} a'_i$$

A la matriz  $(\lambda_{ij})$  la llamaremos *matriz de f* relativa a las bases dadas para  $G$  y  $G'$ .

Notamos que la matriz de  $f$  está bien definida ya que sus entradas están bien definidas puesto que  $f(a_j) \in G'$  y  $G'$  es un grupo abeliano libre.

**Afirmación:** Sean  $G$  un grupo abeliano libre y  $\{a_1, \dots, a_n\}$  una base. Considerando tres operaciones básicas:

1. Intercambiar  $a_i$  por  $a_j$ .
2. Cambiar  $a_i$  por  $-a_i$ .
3. Sustituir  $a_i$  por  $a_i + qa_j$  con  $i \neq j$  y  $q \in \mathbb{Z}$

y aplicando cualquier combinación finita de estas operaciones a  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , el resultado seguirá siendo una base.

*Demostración.* Notemos que basta con probar que cada una de estas operaciones manda la base en una base, por lo que será lo que hagamos a continuación.

Sea  $g \in G$ , entonces ya que  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es base, existen  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  únicos tales que  $g = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$ . Así si intercambiamos  $a_i$  por  $a_j$ , simplemente cambia el orden de los sumandos, pero ya que  $G$  es abeliano, se preserva la igualdad, por lo que seguimos teniendo una base.

Si ahora cambiamos  $a_i$  por  $-a_i$ , tenemos que  $g = \sum_{k \neq i} \lambda_k a_k - \lambda_i a_i$ , de modo que de nuevo

es una base. Por último notemos que  $\sum_{k \neq i, k \neq j} \lambda_k a_k + \lambda_i(a_i + qa_j) + (\lambda_j - q\lambda_i)a_j = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$ , lo cual equivale a la tercer operación y donde notamos que  $\lambda_j - q\lambda_i$  es único dada la unicidad de los coeficientes originales. De este modo, volvemos a obtener una base con esta operación.  $\square$

**Teorema: (definición de la matriz en forma normal).**

Sean  $G$  y  $G'$  grupos abelianos libres de rangos  $n$  y  $m$  respectivamente y  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo. Entonces existen bases para  $G$  y  $G'$  tales que, relativo a dichas bases, la matriz de  $f$  es de la forma

$$\left[ \begin{array}{cc|c} b_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & b_l & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right]$$

donde  $b_i \geq 1$  y  $b_1 | b_2 | \dots | b_l$ .

Esta matriz está unívocamente determinada por  $f$  pese a que las bases no y se le llama *la forma normal* de la matriz de  $f$ .

*Demostración.* Tomemos bases para  $G$  y  $G'$ , las cuales sabemos que existen pues son grupos abelianos libres y sea  $A = (a_{ij})$  la matriz de  $f$  relativa a estas bases.

Notemos que si aplicamos las operaciones de la afirmación anterior, la manera en la que se reflejarían en  $A$  es:

1. Intercambiar la fila (columna)  $i$  por la fila (columna)  $j$ .
2. Multiplicar la fila (columna)  $i$  por  $-1$ .
3. Reemplazar la fila (columna)  $i$  por  $(\text{fila } i) + q(\text{fila } j)$  ( $(\text{columna } i) + q \text{ columna } j$ ).

Ahora supongamos que  $A \neq 0$  y sea  $\alpha(A)$  el menor elemento no nulo de  $\{|a_{ij}| | a_{ij} \text{ es entrada de } A\}$ . Llamaremos a  $a_{ij}$  la *entrada minimal de A* si  $|a_{ij}| = \alpha(A)$ .

A continuación se presentará el *algoritmo de reducción*, con el cual obtendremos la matriz deseada.

*Paso 1* Buscamos reducir el valor de la entrada minimal de la matriz en cuestión.

Para este paso probaremos lo siguiente: Si  $\alpha(A)$  no divide alguna entrada de  $A$ , entonces es posible disminuir el valor de  $\alpha(A)$  mediante las operaciones básicas antes descritas aplicadas a  $A$ .

Para probar esto, supongamos que  $a_{ij}$  es la entrada mínima de  $A$ , la cual no divide alguna entrada de  $A$ . Supongamos como primer caso que dicha entrada no divide a  $a_{kj}$ . Luego por el algoritmo de la división tenemos que  $a_{kj} = qa_{ij} + r$ , donde  $0 < |r| < |a_{ij}|$ .

De este modo, sustituyendo *fila k* de  $A$  por *fila k - q fila i*, tenemos que la nueva entrada minimal de  $A$  es a lo más  $|r| = |a_{kj} - qa_{ij}|$ . El resultado es análogo en caso de que  $a_{ij}$  no divida alguna entrada de su fila.

Por último supongamos que  $a_{ij}$  divide todas las entradas de su columna y su fila, pero no divide a  $a_{st}$  tal que  $s \neq i$  y  $t \neq j$ . Luego consideremos las entradas de  $A$

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots & a_{it} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{sj} & \cdots & a_{st} \end{array} .$$

Ya que  $a_{ij}$  divide a  $a_{sj}$ , entonces mediante operaciones básicas podemos hacer

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots & a_{it} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{st} + la_{it} \end{array}$$

para alguna  $l \in \mathbb{Z}$ .

Por lo que mediante operaciones básicas llegamos a una matriz que tiene por entradas

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots & a_{it} + a_{st} + la_{it} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{st} + la_{it} \end{array}$$

donde  $a_{ij}$  no divide a  $a_{it} + a_{st} + la_{it}$  pues  $a_{ij}$  no divide a  $a_{st}$  pero si divide al resto de los sumandos. De este modo, mediante operaciones básicas llegamos a que  $a_{ij}$  no divide a todos los elementos de su columna y su fila, lo cual es una contradicción.

$\therefore$  Si  $\alpha(A)$  no divide alguna entrada de  $A$ , entonces es posible disminuir el valor de  $\alpha(A)$  mediante operaciones básicas.

*Paso 2* Supongamos que el valor minimal de  $A$  divide a cada una de sus entradas.

Notemos que mediante operaciones básicas podemos colocar una entrada minimal de  $A$  en la esquina superior izquierda y hacerla positiva. De igual forma, ya que divide a todos los valores de su columna y fila, podemos aplicar operaciones básicas para anular el resto de las entradas de su fila y columna.

Una vez hecho esto, podemos repetir el paso 1 sobre la matriz que obtenemos al omitir la columna y fila en cuestión.

Notemos que esto terminará ya que  $G$  y  $G'$  son finitamente generados.

*Paso 3* El algoritmo termina cuando la matriz resultado del paso 2 es la matriz 0 o desaparece, en cuyo caso la matriz resultante estará en su forma normal. Más aún, notemos que  $b_1 | \dots | b_l$  por construcción.

Ahora probaremos que  $\{b_1, \dots, b_l\}$  están unívocamente determinados por el homomorfismo  $f$ . Notemos que para esto es necesario probar que  $\{b_1, \dots, b_l\}$  no dependen de la base en cuestión.

Para esto observemos que si  $\alpha$  y  $\gamma$  son bases de  $G$ ,  $\beta$  es base de  $G'$  y  $A$  es la matriz asociada a  $f$  para  $\alpha$  y  $\beta$  en su forma normal, entonces la matriz de  $f$  asociada a  $\gamma$  y  $\beta$  es la matriz de  $f \circ g$  donde  $g : G \rightarrow G$  es un isomorfismo tal que  $g(\gamma_i) = \alpha_i$ . Además por álgebra lineal sabemos que la composición de transformaciones lineales puede ser vista como multiplicación de matrices, por lo que buscaremos la matriz de  $g$  en su forma normal.

Sin embargo ya que  $\gamma$  es base de  $G$  y  $\alpha \subseteq G$  tenemos que existen coeficientes  $\{\lambda_{ij}\}_{i \leq n, j \leq n} \subset \mathbb{Z}$  tales que  $\alpha_i = \sum_{j \leq n} \lambda_{ij} \gamma_j$ , suma que notamos que se puede obtener mediante operaciones básicas. De este modo tenemos que la matriz en forma normal de  $g$  respecto a  $\alpha$  y  $\gamma$  es la identidad, por lo que la matriz de  $f \circ g$  es  $A \cdot id = A$ , notando que este resultado es análogo si consideramos diferentes bases para  $G'$ .

$\therefore$  La matriz en forma normal de  $f$  está bien definida.

□

Ahora enunciaremos y demostraremos dos teoremas importantes de los grupos abelianos finitamente generados, los cuales nos permitirán llegar a la definición de los número de Betti.

El primer teorema en realidad es un corolario de los que acabamos de demostrar.

**Corolario:** Sea  $F$  un grupo abeliano libre. Si  $R$  es un subgrupo de  $F$ , entonces  $R$  también es grupo abeliano libre. Si  $F$  tiene rango  $n$ , entonces  $R$  tiene rango  $r \leq n$ ; más aún existe una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $F$  y enteros  $\{t_1, \dots, t_r\}$  mayores o iguales a 1 tales que

1.  $\{t_1 e_1, \dots, t_r e_r\}$  es base para  $R$ .
2.  $t_1 | t_2 | \dots | t_r$ , i.e.  $t_i$  divide a  $t_{i+1}$  para toda  $i$ .

Además  $\{t_1, \dots, t_r\}$  están determinados por  $F$  y  $R$  independientemente de la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

*Demostración.* Ya que  $R$  es subgrupo de un grupo abeliano, es abeliano y ya que  $F$  es libre,  $R$  también es libre por el teorema de Nielsen-Schreier. Más aún, como  $R$  es subgrupo de  $F$ , su rango debe ser menor o igual que el de  $F$ , por lo que  $r \leq n$  con  $r$  y  $n$  los rangos de  $R$  y de  $F$  respectivamente.

Ahora sean  $\{a_1, \dots, a_r\}$  y  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  bases para  $R$  y  $F$  respectivamente y tomemos  $C := \{c_1, \dots, c_m\}$  como los elementos de  $\{b_1, \dots, b_n\}$  tal que no pueden ser expresados en términos de  $\{a_1, \dots, a_r\}$ , es decir que  $x \in \{b_1, \dots, b_n\} \setminus \{c_1, \dots, c_m\} \Rightarrow \exists \{s_1, \dots, s_r\} \subseteq \mathbb{Z}$  tal que  $x = \sum_{i=1}^r s_i a_i$  y  $x \in \{c_1, \dots, c_m\} \Rightarrow \nexists \{s_1, \dots, s_r\}$  tales que  $x = \sum_{i=1}^r s_i a_i$ . Afirmando que  $\{a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_m\}$  es una base para  $F$ .

Sea  $x \in F \Rightarrow \exists \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{Z}$  tales que  $x = \sum_{i=1}^n s_i b_i$  pues  $B$  es base de  $F$  lo cual, después de reindexar los coeficientes con los elementos de  $B$  en lugar de con números naturales, podemos escribir como  $x = \sum_{b \in B \setminus C} s_b b + \sum_{b \in C} s_b b$ . Por lo dicho antes, a su vez podemos escribir  $b = \sum_{i=1}^r t_{bi} a_i$  para todo  $b \in B \setminus C$  para algún único  $\{t_{b1}, \dots, t_{br}\} \subseteq \mathbb{Z}$  pues  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es base de  $R$ ; de este modo tenemos que  $x = \sum_{b \in B \setminus C} s_b b + \sum_{b \in C} s_b b = \sum_{b \in B} s_b \sum_{i=1}^r t_{bi} a_i + \sum_{c \in C} s_c c$ , es decir que pudimos expresar a  $x$  en términos de  $\{a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_m\}$  y la unicidad de los coeficientes usados está garantizada por la correcta definición de la multiplicación y suma en los enteros y por la unicidad de  $\{s_1, \dots, s_n\}$  y de  $\{t_{b1}, \dots, t_{br}\}$  para toda  $b \in B \setminus C$ .

$\therefore \{a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_m\}$  es base para  $F$ .

Ahora definamos  $A = \{a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_m\}$  y a  $\phi : F \rightarrow R$  tal que si expresamos a  $x \in F$  como  $x = \sum_{\alpha \in A} s_\alpha \alpha$  con  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathbb{Z}$ , entonces  $\phi(x) := \sum_{i=1}^r s_i a_i$ . Notemos que  $\phi$  está bien definida puesto que la suma en el grupo está bien definida y si  $\{\sum_{\alpha \in A} s_\alpha \alpha, \sum_{\alpha \in A} t_\alpha \alpha\} \subseteq F$ , entonces

$$\phi \left( \sum_{\alpha \in A} s_\alpha \alpha + \sum_{\alpha \in A} t_\alpha \alpha \right) = \phi \left( \sum_{\alpha \in A} (s_\alpha + t_\alpha) \alpha \right) =$$

$$\sum_{i=1}^r (s_i + t_i)a_i = \sum_{i=1}^r s_i a_i + \sum_{i=1}^r t_i a_i = \phi \left( \sum_{\alpha \in A} s_\alpha \alpha \right) + \phi \left( \sum_{\alpha \in A} t_\alpha \alpha \right)$$

$\therefore \phi$  es un homomorfismo.

Entonces, por el teorema de la definición de la matriz en forma normal, tenemos que existen bases  $\{f_1, \dots, f_n\}$  y  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $F$  y de  $R$  respectivamente tales que la matriz en forma normal de  $\phi$  es

$$\left[ \begin{array}{cc|c} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & t_k \\ \hline & & 0 \\ & 0 & 0 \end{array} \right]$$

donde  $t_i \geq 1$  para toda  $i$ ,  $t_1|t_2|\dots|t_k$  y además  $\{t_1, \dots, t_k\}$  están determinados por  $F$  y  $R$ . Esto quiere decir, por definición de la matriz de un homomorfismo relativa a bases dadas, que respecto a  $\{f_1, \dots, f_n\}$  y  $\{e_1, \dots, e_r\}$ ,  $\phi$  cumple que  $\phi(f_i) = t_i e_i$  para toda  $i$ .

Ahora tomemos  $x \in F$  tal que  $x = \sum_{i=1}^r s_i a_i + \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i$  para algún  $\{s_1, \dots, s_{r+m}\} \subseteq \mathbb{Z}$  único ya que teníamos que  $\{a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_m\}$  es base de  $F$ . Notemos que  $\sum_{i=1}^r s_i a_i = \sum_{i=1}^r s_i a_i + \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i - \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i = x - \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i$ , de modo que otra forma de describir a  $\phi$  es

$$\phi(x) = x - \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i,$$

por lo cual podemos calcular

$$\phi(x) = \phi \left( \sum_{i=1}^r s_i a_i + \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i \right) = \sum_{i=1}^r s_i a_i,$$

pero como  $\{e_1, \dots, e_r\}$  es base de  $R$ , para toda  $i$  existe un único  $\{u_{i1}, \dots, u_{ir}\} \subseteq \mathbb{Z}$  tal que  $a_i = \sum_{j=1}^r u_{ij} e_j$ , de modo que podemos substituir y obtener

$$x - \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i = \phi(x) = \sum_{i=1}^r s_i \sum_{j=1}^r u_{ij} e_j$$

por lo que

$$x = \sum_{i=1}^r s_i \sum_{j=1}^r u_{ij} e_j + \sum_{i=1}^m s_{r+i} c_i$$

donde recordemos que  $\{s_1, \dots, s_{r+m}\}$  y los  $\{u_{i1}, \dots, u_{ir}\}$  son únicos por ser coeficientes para expresar elementos de un grupo en términos de bases.

$\therefore \{e_1, \dots, e_r, c_1, \dots, c_m\}$  es base de  $F$ .

Ahora sea  $z \in R \Rightarrow z \in F$  y por lo tanto  $\exists! \{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{Z}$  tal que

$$z = \sum_{i=1}^n w_i f_i \Rightarrow \phi(z) = \phi\left(\sum_{i=1}^n w_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i \phi(f_i) = \sum_{i=1}^r w_i (t_i e_i) \text{ pues } \phi \text{ es homomorfismo.}$$

Además, como  $z \in R$ , existe un único  $\{\mu_1, \dots, \mu_r\} \subseteq \mathbb{Z}$  tal que  $z = \sum_{i=1}^r \mu_i a_i$  y por definición

$$\text{de } \phi, \phi(z) = \phi\left(\sum_{i=1}^r \mu_i a_i\right) = \sum_{i=1}^r \mu_i a_i = z \text{ de modo que}$$

$$z = \sum_{i=1}^r w_i (t_i e_i)$$

donde  $\{w_1, \dots, w_n\}$  era único.

$\therefore \{t_1 e_1, \dots, t_r e_r\}$  es base de  $R$ .

Así, definiendo a  $e_{r+i} := c_i$  para toda  $i$ , tenemos que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es base de  $F$ ,  $\{t_1, \dots, t_k\}$  es un conjunto de números enteros mayores o iguales a 1 determinados por  $F$  y  $R$  tales que  $t_1 | t_2 | \dots | t_k$  y  $\{t_1 e_1, \dots, t_r e_r\}$  es base para  $R$ , terminando así de demostrar todas las afirmaciones del corolario. □

Como corolario del teorema anterior tenemos el siguiente teorema.

**Teorema:** Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados.

Sea  $G$  un grupo abeliano y  $T$  su subgrupo de torsión. Entonces:

1. Existe un subgrupo abeliano finitamente generado  $H$  de  $G$  con rango  $\beta$  tal que  $G = H \oplus T$ .
2. Existe una cantidad finita de grupos cíclicos  $T_1, \dots, T_k$  tales que si  $t_i$  es el orden de  $T_i$ , entonces es mayor a 1,  $t_1 | t_2 | \dots | t_k$  y  $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$ .
3. Los números  $\beta$  y  $t_1, \dots, t_k$  están determinados por  $G$ .

*Demostración.* Como  $G$  es finitamente generado, tenemos que existe  $S := \{g_i\}_{i \in I}$  conjunto generador de  $G$  con  $I$  finito y sea  $F$  el grupo abeliano libre generado por  $S$ .

Notemos que el mapeo que manda a cada  $g_i$  a sí mismo se puede extender a un homomorfismo de  $F$  en  $G$ . Tomando  $R$  como el kernel de dicho homomorfismo tenemos que  $F/R \approx G$  por el primer teorema de isomorfismos de grupos.

Ahora tomando bases para  $F$  y para  $R$  como en el teorema anterior tenemos que  $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$  donde  $F_i$  es el grupo generado por  $e_i$ , el cual sabemos que es infinito pues anteriormente demostramos que los grupos abelianos libres son libres de torsión por lo que  $\forall n \in \mathbb{Z}^+, ne_i \neq 0$ .

Por otro lado, por la elección de bases tenemos que  $R = t_1F_1 \oplus \dots \oplus t_kF_k \oplus F_{k+1} \oplus \dots \oplus F_r$ . Así mismo por una afirmación demostrada anteriormente tenemos que

$$F/R \approx (F_1/t_1F_1 \oplus \dots \oplus F_k/t_kF_k) \oplus (F_{k+1} \oplus \dots \oplus F_n)$$

notando que  $F_1/t_1F_1 \oplus \dots \oplus F_k/t_kF_k$  es el subgrupo de torsión de  $F/R$ .

Observemos que ya que  $F_i$  es cíclico infinito, entonces  $F_i \approx \mathbb{Z}$  donde el isomorfismo asociado se obtiene al extender el mapeo que manda  $e_i$  a 1.

Ya que  $F/R \approx G$ , existe un isomorfismo  $f : F/R \rightarrow G$  por lo que si  $T$  es el grupo de torsión de  $G$ , entonces  $T \approx \mathbb{Z}/t_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/t_k$ . Por otro lado, definiendo  $H := f[F_{k+1} \oplus \dots \oplus F_n]$  hemos probado los puntos 1 y 2 del teorema.

Para probar el tercer punto, definamos  $\phi : G \rightarrow H$  tal que si escribimos  $g \in G$  como  $g = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  entonces  $\phi(g) = \sum_{i=k+1}^n a_i e_i$ . Notemos que  $\phi$  está bien definido pues los coeficientes de la suma están unívocamente definidos desde que  $G$  es un grupo abeliano libre.

Además tomemos  $\{a, b\} \subseteq G$  tales que  $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  y  $b = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ . Entonces

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= \phi\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=1}^n b_i e_i\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) e_i\right) = \sum_{i=k+1}^n (a_i + b_i) e_i \\ &= \sum_{i=k+1}^n a_i e_i + \sum_{i=k+1}^n b_i e_i = \phi\left(\sum_{i=k+1}^n a_i e_i\right) + \phi\left(\sum_{i=k+1}^n b_i e_i\right) = \phi(a) + \phi(b) \end{aligned}$$

por lo que  $\phi$  es un homomorfismo.

Calculando para  $g \in T$ , entonces  $g = \sum_{i=1}^k a_i e_i$  para algunos coeficientes. Luego

$$\phi(g) = \phi\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right) = 0, \text{ i.e. } \text{Ker}\phi = T.$$

Por último si  $g \in H$ , entonces existen coeficientes tales que  $g = \sum_{i=k+1}^n a_i e_i$  de modo que

su imagen bajo  $\phi$  es  $\phi(g) = \phi\left(\sum_{i=k+1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=k+1}^n a_i e_i$ , por lo que  $\text{Im}\phi = H$ .

$\therefore G/T \approx H$  por el primer teorema de isomorfismos de grupos.

Ya que dado  $G$  un grupo abeliano libre está unívocamente determinado su subgrupo de torsión y el grupo cociente está bien determinado, concluimos que  $H$  está unívocamente determinado por  $G$ . De este modo, ya que el rango de un grupo está bien determinado, tenemos que el rango de  $H$  está unívocamente determinado por  $G$ .

Por último, por el teorema anterior tenemos que  $\{t_1, \dots, t_n\}$  están determinados por  $G$  y por  $T$ , pero desde que  $T$  está determinado unívocamente por  $G$ , los números  $\{t_1, \dots, t_n\}$  también lo están, demostrando así el punto 3 del teorema.

□

**Observación:**  $\beta$  es el rango del grupo abeliano libre  $G/T \approx H$ . Además el rango de  $H$  y los órdenes de  $T_i$  están unívocamente determinados, pero los subgrupos no.

**Definición:** Números de Betti y coeficientes de torsión de un grupo.

Llamaremos a  $\beta$  el *número de Betti de  $G$*  y nos referiremos a los números  $t_1, \dots, t_k$  como *coeficientes de torsión de  $G$* .

Ya que tenemos estos dos teoremas, nos podemos preguntar por la computabilidad de los números de Betti, para lo cual proponemos la siguiente definición.

**Definición:** Cadena compleja

Una *cadena compleja*  $\Gamma$  es una secuencia

$$\dots \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \dots$$

de grupos abelianos  $C_i$  y homomorfismos  $\partial_i$  indexados por enteros tales que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$  para toda  $p$ .

Así mismo definiremos el  *$p$ -ésimo grupo de homología de  $\Gamma$*  como

$$H_p(\Gamma) = \text{Ker} \partial_p / \text{Im} \partial_{p+1}$$

Si  $H_p(\Gamma)$  es finitamente generado, su número de Betti y sus coeficientes de torsión serán llamados *el número de Betti y los coeficientes de torsión de  $\Gamma$  de dimensión  $p$* .

**Teorema:** Existencia de *bases estándar* para cadenas complejas libres.

Sea  $\{C_p, \partial_p\}$  una cadena compleja donde cada  $C_p$  es un grupo libre de rango finito. Entonces para toda  $p$  existen subgrupos  $U_p, V_p, W_p$  tales que

$$C_p = U_p \oplus V_p \oplus W_p$$

donde  $\partial_p(U_p) \subseteq W_{p-1}$ ,  $\partial_p(V_p) = 0$  y  $\partial_p(W_p) = 0$ . Más aún, existen bases para  $U_p$  y  $W_{p-1}$  respecto a las cuales la matriz de  $\partial_p : U_p \rightarrow W_{p-1}$  tiene una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \end{bmatrix}$$

donde  $b_i \geq 1$  y  $b_1|b_2|\dots|b_l$  y a estas bases se les llamarán *bases estándar para cadenas complejas libres*.

*Demostración.* Sean  $Z_p = \text{Ker} \partial_p$ ,  $B_p = \text{Im} \partial_{p+1}$  y  $W_p = \{x \in C_p | \exists z \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z \neq 0 \text{ y } zx \in B_p\}$ .

Notemos que  $W_p$  es un subgrupo de  $C_p$  pues  $\partial_p$  es un homomorfismo y que además  $B_p \subseteq W_p \subseteq Z_p \subseteq C_p$ . Llamaremos a  $W_p$  *subgrupo de fronteras débiles* y demostraremos que es un sumando directo en  $Z_p$ .

Consideremos la siguiente proyección

$$Z_p \xrightarrow{f} H_p(\Gamma) \xrightarrow{g} H_p(\Gamma)/T_p(\Gamma)$$

donde  $T_p(\Gamma)$  es el subgrupo de torsión de  $H_p(\Gamma)$ . Evidentemente es un homomorfismo y ahora buscaremos su kernel.

Sea  $x \in W_p$ , entonces existe  $z \in \mathbb{Z}$  tal que  $zx \in B_p$ , por lo que  $zf(x) = f(zx) = 0 \Rightarrow x \in T_p(\Gamma) \Rightarrow g \circ f(x) = 0$ . Por otro lado, si  $x \notin W_p$  entonces  $\forall z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad zx \notin B_p \Rightarrow zf(x) = f(zx) \neq 0 \Rightarrow g \circ f(x) \neq 0$ . Así tenemos que  $\text{Kerg} \circ f = W_p$ .

$$\therefore Z_p/W_p \approx H_p/T_p$$

Ya que  $C_p$  es libre y libre de torsión,  $H_p/T_p$  es libre. De este modo tenemos que  $Z_p/W_p$  es libre. De igual modo tenemos que  $W_p$  es libre por ser subgrupo de  $C_p$ .

Sean  $\{c_1+W_p, \dots, c_k+W_p\}$  y  $\{d_1, \dots, d_l\}$  bases para  $Z_p/W_p$  y  $W_p$  respectivamente. Entonces tenemos que  $\{c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l\}$  es base para  $Z_p$ , por lo que  $Z_p = V_p \oplus W_p$  con  $V_p$  el grupo generado por  $\{c_1, \dots, c_k\}$ .

Ahora sean  $\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$  bases para  $C_p$  y  $C_{p-1}$  respectivamente tales que la matriz de  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  tiene la forma normal

$$\begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \\ e'_{l+1} \\ \vdots \\ e'_m \end{array} \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_l & e_{l+1} & \cdots & e_n \\ b_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & b_l & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $b_i \geq 1$  y  $b_1|b_2|\dots|b_l$ . Ahora probaremos lo siguiente:

1.  $e_{l+1}, \dots, e_n$  es una base para  $Z_p$ .
2.  $e'_1, \dots, e'_l$  es una base para  $W_{p-1}$ .
3.  $b_1e'_1, \dots, b_le'_l$  es una base para  $B_{p-1}$ .

Para esto tomemos  $c_p = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ , cuya frontera es  $\partial_p c_p = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i$  por la matriz anterior.

Para probar el punto 1 basta notar que desde que  $b_i \neq 0 \forall i$  entonces una p-cadena  $c_p$  es un ciclo si y sólo si  $a_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, l\}$ . Para probar el punto 3, notemos que de la matriz

anterior tenemos que una  $p - 1$  frontera  $\partial_p c_p$  es generada por  $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$ , los cuales a su vez son independientes pues  $b_i \neq 0 \forall i$  y  $e'_1, \dots, e'_l$  es base.

Finalmente para probar el punto 2 notamos que por la forma en que se tomaron las bases,  $e'_i = \partial_p e_i$  por lo que  $\{e'_1, \dots, e'_l\} \subseteq W_{p-1}$ . De igual manera si tomamos  $c_{p-1} = \sum_{i=1}^m d_i e'_i$  una  $p - 1$  cadena y suponemos que  $c_{p-1} \in W_{p-1}$ , entonces existe  $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tal que

$$\lambda c_{p-1} = \partial_p c_p = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i.$$

Luego  $\lambda d_i = 0 \forall i > l \Rightarrow d_i = 0 \forall i > l$ . Así llegamos a que  $\{e'_1, \dots, e'_l\}$  es una base para  $W_{p-1}$ .

En este punto ya podemos probar el teorema en cuestión. Tomemos bases para  $C_p$  y  $C_{p-1}$  como en los párrafos anteriores y sea  $U_p$  el grupo generado por  $\{e_1, \dots, e_l\}$ , entonces  $C_p = U_p \oplus Z_p$ .

De igual manera tenemos que existe  $V_p$  grupo tal que  $Z_p = V_p \oplus W_p$ . Así llegamos a la descomposición buscada tal que  $\partial_p(V_p) = 0$  y  $\partial_p(W_p) = 0$ , donde las bases para  $U_p$  y  $W_{p-1}$  son las que acabamos de elegir.

□

Finalmente enunciaremos y demostraremos un teorema que nos asegure que podremos calcular los números de Betti que estamos buscando, a lo cual nos referiremos con *computar* dichos números.

**Teorema:** Todo grupo de homología de un complejo finito  $K$  es computable.

*Demostración.* Por el teorema anterior tenemos que  $C_p(K) = U_p \oplus V_p \oplus W_p$  donde  $Z_p = V_p \oplus W_p$  es el grupo de  $p$ -ciclos y  $W_p$  es el grupo de las  $p$ -fronteras débiles. Luego

$$H_p(K) = Z_p/B_p \approx V_p \oplus (W_p/B_p) \approx (Z_p/W_p) \oplus (W_p/B_p).$$

Notemos que por pruebas anteriores tenemos que  $Z_p/W_p$  es libre y que  $W_p/B_p$  es un grupo de torsión por construcción. Así, computar  $H_p(K)$  se reduce a computar estos dos grupos.

Escojamos bases para los grupos de la cadena  $C_p(K)$  orientando los simplejos de  $K$  y consideremos la matriz del operador frontera  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  relativa a esta elección de bases y transformémosla a su forma normal mediante el algoritmo de reducción que vimos antes.

De la prueba del teorema anterior tenemos las siguientes afirmaciones:

1. El rango de  $Z_p$  es el número de columnas nulas de la matriz.
2. El rango de  $W_{p-1}$  es la cantidad de filas no nulas.
3. Se tiene el isomorfismo  $W_{p-1}/B_{p-1} \approx \mathbb{Z}/b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/b_l$ .

De esta manera, la forma normal de la matriz de  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  nos da los coeficientes de torsión de  $K$  de dimensión  $p - 1$  como sus entradas mayores a 1, además del rango de  $Z_p$ . Por otro lado, la forma normal de  $\partial_{p+1} : C_{p+1} \rightarrow C_p$  nos da el rango de  $W_p$  y la diferencia de estos dos últimos valores nos da el rango de  $Z_p/W_p$  que es el número de Betti de  $K$  de dimensión  $p$ .

□

Nótese que ya que se está trabajando con una cantidad finita de puntos, todo simplejo complejo que generemos será finito, por lo cual se tiene la seguridad de que tendrá un grupo de homología computable dado que así lo afirma el teorema anterior.

Con esto en mente, realicé simulaciones de una sociedad usando 100 individuos e iterando 4000 veces para posteriormente tomar algún subgrupo social obtenido mediante la separación en clusters y calculando sus números de Betti.

Después obtuve las rectas descritas en la figura 4.3 para estos subgrupos sociales y comparé su ordenada al origen contra el número de Betti de dicho subgrupo dividido entre el número de Betti que tendría una sociedad de 100 individuos tal que todos ellos pertenecieran al mismo subgrupo, a cuyo valor llamé *número de Betti relativo*. Con esto obtuve la figura 4.5, de la cual se puede observar que dichos valores no son correctamente descritos por una recta, sin embargo sí guardan alguna relación lineal.

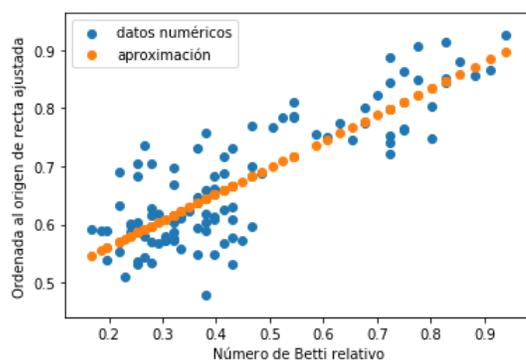


Figura 4.6: Número de Betti relativo vs. ordenada al origen de recta calculada.  $R^2 = 0.7012$  y aproximación  $f(x) = 0.4542x + 0.4706$ .

Convencido de que había una mejor relación entre estos dos fenómenos, hice una partición uniforme del  $[0, 1]$  y luego tomé el máximo de los valores en cada subintervalo, buscando así aproximar una función que fuera cota superior de los datos obtenidos, con lo cual obtuve la figura 4.7.

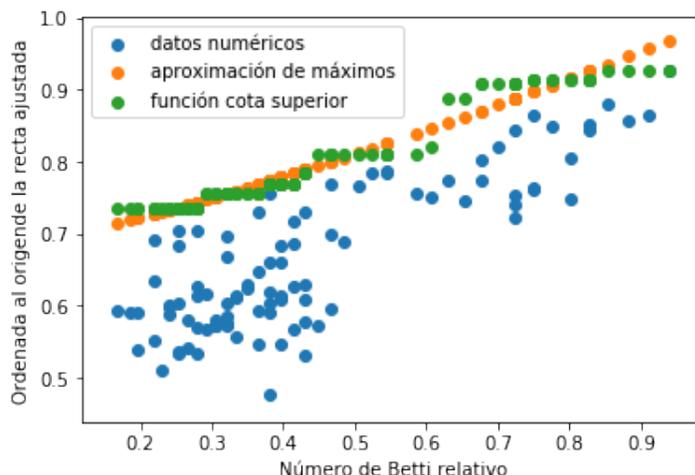


Figura 4.7: Número de Betti relativo vs. ordenada al origen de recta calculada en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5.  $R^2 = 0.9589$  y aproximación  $f(x) = 0.6806 + 1.2491x^{0.3101}$ .

Para hablar un poco sobre la figura 4.7, tratemos la interpretación del número relativo de Betti. Anteriormente dijimos que entenderíamos estos números como una medida de la cohesión entre los individuos de un subgrupo social, por lo cual el número de Betti relativo es un valor en  $[0, 1]$  que se puede pensar como la razón entre la cohesión de dicho grupo social y la cohesión que tendría la misma sociedad si todos sus individuos pertenecieran a este; es decir, este número relativo de Betti se podría pensar como qué tantas modificaciones podrían sufrir los gustos de los integrantes del grupo social en cuestión de modo que el grupo siguiera estando unido y sin perder miembros.

Por otro lado, de la figura 4.7 se puede concluir que el número de Betti que posee el subgrupo social está relacionado con la máxima cantidad de individuos que este va a poder obtener con el paso del tiempo, implicando así que este tipo de sociedades pueden ser estudiadas como superficies, lo cual es relevante ya que existe una gran cantidad de trabajo hecho sobre el tema mientras que, como se mencionó anteriormente, esta es una nueva forma de estudiar las sociedades e incluso para métodos más antiguos como el modelo de Axelrod no existe mucho trabajo matemático hecho.

Antes de finalizar y dadas las características numéricas y computacionales de este trabajo, mencionaré algunas posibles aplicaciones de este en la vida no académica. Anteriormente se mencionó que otros investigadores usaron el modelo de Axelrod en diversas aplicaciones como estudiar el efecto de los medios masivos de comunicación o el reconocimiento de comportamientos que indicaran la existencia de fraude electoral dentro de alguna votación.

En dichos trabajos, se tomó como base el modelo axelrodiano y se realizaron pequeñas modificaciones para adecuarlo al fenómeno a estudiar. Si bien es cierto que yo realicé modificaciones por lo menos substanciales, también es cierto que conservé los pilares usados por Axelrod para realizar su trabajo salvo por la modificación de otorgarle a mis individuos la capacidad de elegir sus acciones basándose en sus preferencias. Debido a esto, yo afirmo

no solamente que se podría usar mi modelo para realizar trabajos como los de [29] o [30] en donde se estudiara la posible aparición de fraude electoral o el efecto de los medios de comunicación respectivamente, si no que el hecho de que en mi trabajo se presenten fenómenos como la aparición de subgrupos sociales hace que dicho análisis se pudiera hacer de manera más detallada y profunda pues permite la libre conglomeración de los individuos basada en sus propias decisiones, característica fundamental en ambos escenarios de estudio propuestos.

# Conclusiones

Las respuestas que se pueden dar a interrogantes sobre el comportamiento social usando el acercamiento de Axelrod son limitados ya que sigue una dinámica que se puede reducir a una cadena de Markov, la cual propicia que se vaya perdiendo la habilidad predictiva conforme incrementa la cantidad de iteraciones realizadas, así como la capacidad de distinguir entre diferentes tipos de sociedades con diferentes reglas de convivencia. Por otro lado, comparado con el modelo social de Axelrod, entender las sociedades como un sistema basado en agentes al cual se le asignan algunas características para guiar sus decisiones ofrece la posibilidad de recrear comportamientos mucho más complejos y de incluir instrumentos matemáticos más robustos para comprender su dinámica y por tanto, la sociedad.

Uno de los constructos matemáticos que se pueden incluir en el sistema de modelación propuesto en esta tesis es la teoría de la utilidad de von Neumann y Morgenstern, con lo cual se puede recrear la capacidad humana de dotar a los sujetos de una toma de decisiones aleatoria basada en sus gustos. Al hacer esto y siempre que la lotería generada por los individuos los haga racionales, se puede pensar que el sistema de preferencias de estos es un conjunto encajado en  $\mathbb{R}$  donde el encaje preserva el orden, lo cual permite tener un mejor entendimiento de la manera en que las decisiones de los individuos serán guiadas por sus gustos y preferencias.

Otra ventaja que se obtiene del modelo propuesto en esta tesis es que los individuos pueden formar subgrupos sociales tanto de gustos como de los lugares en los que habitarán, siendo este un fenómeno *sui generis*. Más aún, en esta tesis se encontró un mecanismo para poder estimar si un determinado grupo social prevalecerá o se desintegrará y en caso de que permanezca unido, qué tantos individuos llegará a tener como miembros suyos, ligando esta cantidad máxima al *número relativo de Betti* que tiene dicho subgrupo social e interpretándolo como un parámetro para la cohesión social entre él.

De este modo, ahora contestaré las preguntas de Axelrod mediante los resultados de este modelo, aclarando que no son afirmaciones desde la sociología sino desde los resultados matemáticos y numéricos del presente trabajo. Ante el cuestionamiento de por que no hemos visto desaparecer las diferencias de opiniones entre los integrantes de una sociedad, mi modelo proporciona varios datos que conllevan a una respuesta: el primero de ellos es que los individuos prefieren cambiar su residencia física a sus opiniones, de modo que la idea de que una sociedad es un conjunto de individuos que habitan en una región geográfica determinada no la refleja correctamente; otro resultado proporcionado por el modelo es que los individuos no van a interactuar con toda la sociedad sino que van a seleccionar

aquellos sujetos con quienes comparten opiniones similares y será con ellos con quienes tiendan a intercambiar ideas, por lo que es poco probable que personas con personalidades opuestas se pongan a conversar, lo cual lleva a la conformación de grupos sociales que casi nunca interactúan, generando una relación inversa entre la cantidad de individuos de la sociedad y la probabilidad de que ocurra la homogeneización de opiniones, contestando así a Axelrod.

La otra pregunta propuesta por dicho autor referente a que si lo único que necesita la sociedad para alcanzar una convergencia de todas las maneras de opinar fue contestada al resolver el cuestionamiento anterior, pues el hecho de que se generen grupos sociales estables con probabilidades casi nulas de interactuar, hace muy improbable que baste con el paso del tiempo para alcanzar una homogeneización social. La única esperanza en este sentido sería que murieran los integrantes de todos los grupos sociales antipodales o que estos fueran teniendo un poder mediático cada vez menor, de modo que la sociedad fuera teniendo opiniones cada vez más neutras o centrales y aumentarían así sus probabilidades de interacción; sin embargo, estas son condiciones muy específicas y que no se dan de manera natural, respondiendo así a Axelrod que no basta sólo con el paso del tiempo para alcanzar dicha situación.

Más aún, una conclusión que no se usó de manera directa para responder los cuestionamientos de Axelrod pero que es digna de ser mencionada por el gran poder de facilitar el entendimiento del tema, es que los axiomas de las loterías de von Neumann y Morgenstern se pueden entender como consecuencias de las propiedades topológicas de la relación de preferencia que tiene el espacio de los posibles resultados de la lotería en cuestión.

Para finalizar, vale la pena pensar en el futuro que este trabajo pudiera tener. Como se vio a lo largo de este texto, uno de los logros que alcancé fue el poder distinguir entre dos sociedades dadas al encajarlas en superficies y usar los números de Betti como un invariante topológico asociado; sin embargo sigo sin ser capaz de afirmar que dos sociedades son equivalentes o de si quiera decir qué es lo significaría que dos de ellas lo fueran. De este modo, un posible camino a seguir sería proponer una definición de equivalencia entre sociedades que implique que estas tendrían dinámicas y resultados similares, lo cual permitiría alcanzar una mayor abstracción del fenómeno y, potencialmente, dar lugar a resultados que amplíen el estudio hecho en esta tesis.

# Bibliografía

- [1] Axelrod R (1997) The dissemination of culture - A model with local convergence and global polarization. *Journal of Conflict Resolution* 41(2), pp. 203-226.
- [2] Castellano, C., Fortunato, S., Loreto, V. (2009). Statistical physics of social dynamics. *Reviews Of Modern Physics*, 81(2), 591-646. doi: 10.1103/revmodphys.81.591
- [3] Hegselmann, R., Krause, U. (2002). Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulation. *Journal Of Artificial Societies And Social Simulation (JASSS)*, 5(3). Retrieved from <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>
- [4] González-Avella, J., Cosenza, M., Tucci, K. (2005). Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. *Physical Review E*, 72(6). doi: 10.1103/physreve.72.065102
- [5] Li, X., Hu, Z., Wu, F. (2007). A note on the convergence of the mean shift. *Pattern Recognition*, 40(6), 1756-1762. doi: 10.1016/j.patcog.2006.10.016
- [6] From PewDiePie to Shane Dawson, these are the 26 most popular YouTube stars in the world. (2020). Retrieved 17 January 2020, from <https://www.businessinsider.com/most-popular-youtubers-with-most-subscribers-2018-2>
- [7] Stewart, A., Mosleh, M., Diakonova, M., Arechar, A., Rand, D., Plotkin, J. (2019). Information gerrymandering and undemocratic decisions. *Nature*, 573(7772), 117-121. doi: 10.1038/s41586-019-1507-6
- [8] Gerrymandering. (2021). Retrieved 10 March 2021, from <https://es.wikipedia.org/wiki/Gerrymandering>
- [9] Schumaker, P. (2005). Why the Electoral College Is Bad for America. *Perspectives on Politics*, 3(2), 373-374. doi:10.1017/S1537592705420150
- [10] Industrial, I. (2020). Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial en Cifras (IMPI en cifras). Retrieved 18 January 2020, from <https://www.gob.mx/impi/documentos/instituto-mexicano-de-la-propiedad-industrial-en-cifras-impi-en-cifras>

- 
- [11] V. Larivière Y. Gingras in *Beyond Bibliometrics* (eds B. Cronin C. R. Sugimoto) 187–200 (MIT Press, 2014)
- [12] Van Noorden, R. (2015). Interdisciplinary research by the numbers. *Nature*, 525(7569), 306-307. doi: 10.1038/525306a
- [13] Zapata Lillo, P. (2007). *Economía, política y otros juegos* (1st ed., p. 64). Ciudad de México: Las prensas de ciencias.
- [14] Zapata Lillo, P. (2007). *Economía, política y otros juegos* (1st ed., p. 150). Ciudad de México: Las prensas de ciencias.
- [15] Zapata Lillo, P. (2007). *Economía, política y otros juegos* (1st ed., p. 152). Ciudad de México: Las prensas de ciencias.
- [16] Zapata Lillo, P. (2007). *Economía, política y otros juegos* (1st ed., p. 153). Ciudad de México: Las prensas de ciencias.
- [17] Von Neumann, J., Morgenstein, O. (1944). *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press.
- [18] H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds., (1953). *Contributions to the Theory of Games, I-II*", *Annals of Mathematics Studies*, 28, Princeton University Press.
- [19] A. E. Roth, I. Erev. (1995). "Learning in extensive-form games: Experimental data and simple dynamic models in the intermediate term". *Games and Economic Behavior*. [https://doi.org/10.1016/S0899-8256\(05\)80020-X](https://doi.org/10.1016/S0899-8256(05)80020-X)
- [20] Y.J. Levy, A. Veiga. (2020). "On the existence of positive equilibrium profits in competitive screening markets". *Games and Economic Behavior*. <https://doi.org/10.1016/j.geb.2020.07.016>
- [21] Calhoun, J. B. (1970). "Population density and social pathology". *California Medicine*. 113 (5): 54. PMC 1501789. PMID 18730425
- [22] Roitman, J (1990), "Theorem 27, p.123", *Introduction to Modern Set Theory*, Pure and Applied Mathematics, ed.8, John Wiley Sons, ISBN 9780471635192.
- [23] Población. Esperanza de vida. (2020). Retrieved 25 April 2020, from <http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/esperanza.aspx?tema=p>
- [24] (INEGI), I. (2020). Natalidad y fecundidad. Retrieved 25 April 2020, from <https://www.inegi.org.mx/temas/natalidad/>
- [25] Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos* (1st ed.). Distrito Federal: Las Prensas de Ciencias.
- [26] (2020). Consultados 25 de abril 2020, from [https://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2019/EstSociodemo/NacimientosRegistrados2019\\_09.pdf](https://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2019/EstSociodemo/NacimientosRegistrados2019_09.pdf)

- [27] Gil Pecharroman, J. (2008). Con permiso de la autoridad. Madrid: Temas de Hoy.
- [28] Munkres, J. (1997). Elements of algebraic topology. Cambridge: Perseus Publ.
- [29] Mebane, W., Blatz, S. and Vasselai, F., 2019. Using Agent-Based Models to Simulate Strategic Behavior in Elections. In: PolMeth XXXVI. MA.
- [30] Rodríguez, A. and Moreno, Y., 2010. Effects of mass media action on the Axelrod model with social influence. Physical Review E, 82(1).

# Índice de figuras

1.1	Tendencias multidisciplinarias en las ciencias según [11] . . . . .	7
3.1	Ejemplo de un juego extensivo. Se muestra un árbol con raíz en 0, jugadores 0, X y Y donde 0 es el azar. Las fracciones en las aristas representan probabilidades de que el jugador azar tome cierta decisión y las letras, posibles opciones para los jugadores en turno. Los pares ordenados en los nodos terminales del árbol representan los pagos para los jugadores, siendo la primera entrada la correspondiente a X y la segunda correspondiente a Y. . . . .	35
3.2	Representación del juego extensivo planteado por Paloma Zapata. En caso de que el arista muestre un número, corresponde a la probabilidad con que ocurrirá esa opción; en caso contrario, la probabilidad es igual a la unidad o es decisión del jugador. . . . .	37
4.1	Diagrama de flujo del algoritmo usado para simular la dinámica social . . .	61
4.2	Valor del gusto 1 para 2 individuos y para el promedio de la sociedad vs. tiempo. . . . .	69
4.3	Puntos (a,b) para aproximar $ G /N = a + bp - p^2$ donde $G$ es un grupo social, $N$ es la cantidad de personas en la sociedad y $p$ es la proximidad entre integrantes de $G$ . . . . .	73
4.4	Término independiente de la aproximación de la figura 4.3 vs. proximidad inicial entre individuos de $G$ . . . . .	74
4.5	Término lineal de la aproximación de la figura 4.3 vs. proximidad inicial entre individuos de $G$ . . . . .	74
4.6	Número de Betti relativo vs. ordenada al origen de recta calculada. $R^2 = 0.7012$ y aproximación $f(x) = 0.4542x + 0.4706$ . . . . .	94
4.7	Número de Betti relativo vs. ordenada al origen de recta calculada en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5. $R^2 = 0.9589$ y aproximación $f(x) = 0.6806 + 1.2491x^{0.3101}$ . . . . .	95

# Índice de tablas

1.1	Ejemplos de iteraciones generados mediante el algoritmo de Axelrod de [1]. a) Iteración 0, b) Iteración 100, c) Iteración 1000, d) Iteración 3000, e) Iteración 5000, f) Iteración 80000. . . . .	5
1.2	Cantidad promedio de zonas estables obtenidas por Axelrod y por mi para una sociedad de 10 por 10 individuos en la que se corrió 10 veces en cada caso. . . . .	10
1.3	a) Cantidad promedio de zonas estables variando el tamaño del territorio para sociedades cuadradas con 5 temas y 15 opiniones por cada uno. Para cada caso se corrieron 25 simulaciones. b) figura 2 de [1]. Axelrod usó sociedades con 5 temas y 15 opiniones, corriendo 40 simulaciones para todos los tamaños de territorio salvo para 50 y 100, en cuyo caso realizó 10 simulaciones.	11
2.1	Número de iteración: a) Iteración 0, b) Iteración 100, c) Iteración 1000, d) Iteración 3000, e) Iteración 5600, f) Iteración 5900, g) Iteración 6100, h) Iteración 6200, i) Iteración 6400 . . . . .	19
2.2	Histogramas de resultados de una simulación de una sociedad de $15 \times 15$ individuos, 10 temas, 10 opiniones por tema y realizando 100,000 iteraciones del tiempo de vida, usando el pseudocódigo 2 con receptividad y creatividad de 0.75 y de desviación estándar de 0.25. La figura b) es el histograma de los datos de la figura a) cuyo tiempo de vida es mayor a 1000 iteraciones. . . . .	20
2.3	a) Cantidad de individuos vs cantidad de ideas generadas, b) Cantidad de individuos vs desviación estándar en tiempos de vida, c) Cantidad de individuos vs tiempo de vida promedio, d) Cantidad de ideas generadas vs desviación estándar en tiempos de vida, e) Cantidad de ideas generadas vs tiempo de vida promedio, f) Tiempo de vida promedio vs desviación estándar en tiempos de vida . . . . .	21
2.4	a) Cantidad de ideas generadas vs. número de iteraciones, b) Tiempo de vida promedio de las nuevas ideas generadas vs. número de iteraciones, c) Desviación estándar de los tiempos de vida de las nuevas opiniones generadas vs. Número de iteraciones. . . . .	22

4.1	Comportamiento de una sociedad rectangular para un individuo seleccionado $\gamma$ . En caso de haber más de un color en las gráficas, cada uno corresponde a un gusto fijo. a) Estado emocional de $\gamma$ vs. tiempo, b) Dinero disponible de $\gamma$ vs. tiempo, c) Salud de $\gamma$ vs. tiempo, d) Valor promedio de los gustos de la sociedad vs. tiempo, e) Valor de los gustos del regente vs. tiempo, f) Nivel de satisfacción personal de $\gamma$ vs. tiempo, g) Popularidad de regente vs. tiempo, h) Gustos del regente vs. gustos promedio de la sociedad. . . . .	67
4.2	Comportamiento de una sociedad circular, en el que tomamos un individuo $\gamma$ . a) Estado emocional de $\gamma$ vs. tiempo, b) Dinero disponible de $\gamma$ vs. tiempo, c) Salud de $\gamma$ vs. tiempo, d) Valor promedio de los gustos de la sociedad vs. tiempo, e) Valor de los gustos del regente vs. tiempo, f) Nivel de satisfacción personal de $\gamma$ vs. tiempo, g) Popularidad de regente vs. tiempo, h) Gustos del regente vs. gustos promedio de la sociedad. . . . .	70