Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES ELÍPTICAS NO LINEALES MEDIANTE EL MÉTODO DE LA VARIEDAD DE NEHARI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JONATHAN NAFFRICHOUX

DIRECTOR DE TESIS :

DR. ALBERTO SALDAÑA DE FUENTES

CIUDAD DE MÉXICO 2021

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES ELÍPTICAS NO LINEALES MEDIANTE EL MÉTODO DE LA VARIEDAD DE NEHARI

JONATHAN NAFFRICHOUX

2021

Agradecimientos

Esta tesis de licenciatura fue realizada con el apoyo de una beca de titulación otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM, a través del proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT IN100718.

También le agradezco a mi madre, Frederique Naffrichoux, por apoyarme en todas mis decisiones y siempre esperar lo mejor de mí. Este trabajo va dedicado a ti.

Índice

1. Introducción

Siguiendo el artículo [10], en esta tesis explicaremos el método de la variedad de Nehari aplicado al caso de una no linealidad de potencia supercuadrada y subcrítica. Probaremos a detalle resultados de existencia de soluciones de energía mínima de ecuaciónes elípticas no lineales y modificaremos nuestros argumentos para asegurar existencia de soluciones que cambian de signo. Al final mencionaremos brevemente algunas hipótesis que permiten ampliar el método a no linealidades más generales.

Para ser más precisos, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (un conjunto abierto y conexo) acotado, $N \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $p \in (2, 2^*)$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Podemos estudiar esta ecuación dentro del entorno de métodos variacionales recurriendo a la idea de solución débil. Para explicar mejor este concepto hacemos la siguiente observación: si una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es solución de (1.1) y ϕ es una función infinitamente diferenciable y de soporte compacto sobre Ω (al espacio de todas las funciones de esta forma lo denotaremos $C_c^\infty(\Omega)$), entonces multiplicando (1.1) por ϕ, integrando de ambos lados y aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi = \int_\Omega (-\Delta u\phi - \lambda u\phi) = \int_\Omega \nabla u \nabla\phi - \lambda \int_\Omega u\phi.$$

Con este procedimiento hemos conseguido una expresión que es consecuencia de (1.1) y solamente involucra derivadas de primer orden de u ($\nabla u =$

$(u_{x_1}, ..., u_{x_N})$). A una función u débilmente diferenciable que satisface

$$\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi - \lambda \int_\Omega u\phi \qquad \text{para } \phi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{1.2}$$

la llamaremos *solución débil de* (1.1). Nuestro objetivo es encontrar un planteamiento dentro del marco del análisis funcional o un *planteamiento variacional* que nos permita interpretar las soluciones débiles a (1.1) como puntos críticos de un funcional definido sobre un espacio adecuado.

Denotamos por $H^1(\Omega)$ al espacio de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ que son débilmente diferenciable sobre Ω y cumplen que cada derivada parcial débil $D_i u \in L^2(\Omega), i = 1, 2, ..., n$. Es sencillo notar que cualquier función diferenciable en el sentido usual también es débilmente diferenciable y que sus derivadas usuales coinciden con sus derivadas débiles. Dotemos a $H^1(\Omega)$ de la norma $\|\cdot\|_H$ dada por

$$\|u\|_H = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\right)^{1/2}.$$

Entonces nos interesaremos en el subespacio de $H^1(\Omega)$ que consiste de todas las funciones que se pueden ver como límites de funciones en $C_c^\infty(\Omega)$ según la norma $\|\cdot\|_H$. En otras palabras $H_0^1(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_H$, la cual denotamos por

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}.$$

El funcional que nos conviene considerar, conocido usualmente como el *funcional de energía*, es

$$\Phi : H \to \mathbb{R},\ \Phi(u) = \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda u^2) - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p. \tag{1.3}$$

Esta elección queda justificada por el hecho de que Φ es dos veces continuamente diferenciable y que

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v - \lambda uv) - \int_\Omega |u|^{p-2}uv, \quad \forall u, v \in H.$$

Por densidad (el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en H), (1.2) y

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v - \lambda uv) = \int_\Omega |u|^{p-2}v, \quad \forall u, v \in H, \tag{1.4}$$

son equivalentes, así que las soluciones débiles de (1.1) se corresponden biunívocamente con los puntos críticos de Φ.

Dado que Φ no está acotado (ni por abajo ni por arriba) en H -lo cual hace imposible buscar mínimos o máximos globales-, necesitaremos restringirnos a un subconjunto de H más adecuado conocido como la *variedad de Nehari*,

$$\mathcal{N} := \{u \in H \backslash \{0\} \ : \ \Phi'(u)u = 0\}. \tag{1.5}$$

Sea $\lambda_1 > 0$ el primer valor propio del laplaciano en Ω con condiciones de frontera de Dirichlet y consideremos $\lambda > \lambda_1$. Como veremos más adelante, $\mathcal{N}$ es una variedad diferenciable y contiene todos los puntos críticos no triviales de Φ. Además, demostraremos que $\Phi|_{\mathcal{N}}$ (la restricción de Φ a $\mathcal{N}$) está acotada por abajo y que $\mathcal{N}$ es una restricción natural para Φ, es decir, los puntos críticos de $\Phi|_{\mathcal{N}}$ se corresponden biunívocamente con los puntos críticos no triviales de Φ. Lo sorprendente es que podremos caracterizar a cierta clase especial de soluciones débiles de (1.1) como mínimos de Φ sobre $\mathcal{N}$.

Siguiendo los resultados del artículo [10], en esta tesis se utiliza el método de la variedad de Nehari y sus generalizaciones para estudiar existencia de soluciones de los siguientes problemas.

(I) *Existencia de soluciones de energía mínima para la ecuación* (1.1) *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$. Este problema es particularmente delicado cuando $\lambda \geqslant \lambda_1$, ya que en este caso el operador diferencial Φ no está directamente vinculado a una norma equivalente (como es el caso cuando $\lambda < \lambda_1$). Este tipo de problemas se conocen como *indeterminados*. Para utilizar el método de la variedad de Nehari en este caso, tendremos que servirnos de una descomposición del espacio H diseñado para representar al operador diferencial $-\Delta - \lambda$ como una norma en ese espacio.

(II) *Existencia de soluciones de energía mínima que cambian de signo para* (1.1) *con* $\lambda < \lambda_1$. Aquí utilizaremos teoremas de punto fijo y un conjunto de Nehari especial que sólo consiste de funciones que cambian de signo.

Los resultados principales de esta tesis son los siguientes. Recordemos que el funcional Φ está definido en (1.3).

Teorema 1.1. *Sean* $N \geqslant 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio suave y acotado,* $\lambda < \lambda_1$ *y* $p \in (2, 2^*)$. *Entonces la ecuación* (1.1) *tiene un estado fundamental* $u \in H$, *es decir,*

$$\Phi(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \Phi(v),$$

donde $\mathcal{N}$ *es la variedad de Nehari dada por* (1.5). *Además,* u *es una solución (débil) de energía mínima no negativa de* (1.1).

Teorema 1.2. *Sean* $N \geqslant 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio suave y acotado,* $\lambda \geqslant \lambda_1$ *y* $p \in (2, 2^*)$. *Entonces la ecuación* (1.1) *tiene un estado fundamental* $u \in H$, *es decir,*

$$\Phi(u) = \inf_{v \in \mathcal{M}} \Phi(v),$$

donde $\mathcal{M}$ es la variedad de Nehari generalizada dada por (4.4)*. Además, u es una solución (débil) de energía mínima de* (1.1)*.*

La construcción detallada de la variedad de Nehari generalizada se puede encontrar en la Sección 4 e involucra al espacio generado por las funciones propias del laplaciano con condiciones de frontera de Dirichlet y cuyo valor propio asociado es menor o igual que λ. Esta definición también complica el trabajo de determinar si las soluciones de energía mínima encontradas en la variedad de Nehari generalizada sean no negativas.

El siguiente resultado asegura la existencia de soluciones que cambian de signo con energía mínima. Denotamos por u^+ y u^- a la parte positiva y la parte negativa de u respectivamente.

Teorema 1.3. *Sean $N \geqslant 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado, $\lambda < \lambda_1$ y $p \in (2, 2^*)$. Entonces la ecuación* (1.1) *tiene un solución débil que cambia de signo $u \in H$ tal que*

$$\Phi(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}_{sc}} \Phi(v),$$

donde

$$\mathcal{N}_{sc} := \{u \in H \backslash \{0\} \ : \ u^+, u^- \in \mathcal{N}\}.$$

Este conjunto incluye a todas las soluciones que cambian de signo, y por lo tanto u es la solución que cambia de signo de energía mínima.

La principal complicación en la demostración del Teorema 1.3 es que el conjunto $\mathcal{N}_{sc}$ no es una variedad diferenciable (ya que $u \mapsto u^+$ no es diferenciable) y por tanto se necesitan herramientas diferentes a las utilizadas en el Teorema 1.1, en particular haremos uso de un resultado de deformación y de teoremas de punto fijo.

Como se menciona en [10], el método de la variedad de Nehari puede ampliarse a no linealidades $f(x,u)$ mucho más generales siempre y cuando se cumplan ciertas restricciones en su crecimiento (crecimiento subcrítico). En este caso necesitaremos que el funcional asociado a la no linealidad f, el cual surge del planteamiento variacional, tenga un cierto perfil asintótico y cumpla propiedades que nos permitan obtener una forma de *encaje de Sobolev*. Otra cuestión complicada es que $\mathcal{N}$ podría dejar de ser una variedad de clase C^1, lo cual nos impide definir definir el gradiente y el flujo gradiente sobre ella. Todo esto se describe a detalle en [10], así que nosotros nos limitares a citar los resultados que sean análogos a los que elaboraremos a precisión en este trabajo.

Por último notamos dos aplicaciones de este método al contexto de las ciencias experimentales, la ecuación (1.1) aparece en diversas aplicaciones. Tomando $\lambda = 0$ y $N = 3$ obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d}{d\xi}\theta\right) = -\theta^s, \quad \theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0, \tag{1.6}$$

donde $\theta > 0$, la cual es importante en astrofísica. En este contexto, la presión P y la densidad $\rho = k\theta^s$ satisfacen una relación no lineal $P = c\rho^{\frac{s+1}{s}}$. A una solución θ de (1.6) comúnmente se le conoce como politropo, y contiene información física importante del sistema, tal como el radio de la esfera, la masa total, la presión, y para un gas ideal, ocurre que la temperatura es proporcional a θ. Este modelo puede encontrarse en [1].

La ecuación (1.1) también aparece en biología matemática al momento de estudiar soluciones estacionarias del modelo de Gierer y Meinhardt. Éste consiste en un sistema de ecuaciones parabólicas vinculadas al estudio de la ecuación

$$-\epsilon\Delta u + u = |u|^{p-2}u \quad \text{ en } \Omega.$$

Aquí u denota una sustancia activadora y, conforme $\epsilon \longrightarrow 0$, se obtiene la concentración de dicha sustancia. Para más detalles consulte [5].

Los resultados contenidos en esta tesis se pueden encontrar esencialmente en el artículo [10]. En este trabajo escribimos las pruebas con más detalles y, en algunos casos, simplificamos los argumentos. Por ejemplo, el Teorema 1.3 está basado en [10, Theorem 3.11], el cual se demuestra utilizando herramientas avanzadas como el grado topológico. La prueba que aquí presentamos se basa en el teorema de punto fijo de Brower, el cual es una herramienta más estándar.

2. Preliminares

2.1. Propiedades del espacio $H_0^1(\Omega)$

En este capítulo enunciamos algunas propiedades fundamentales sobre el espacio $H_0^1(\Omega)$ que nos ayudarán en toda clase de argumentos sobre convergencia, siendo el Teorema de Encaje de Rellich-Kondrashov uno de los más importantes. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ y denotemos por $D_i u$ a la i-ésima derivada débil de una función débilmente diferenciable u. Definimos

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \, : \, D_i u \in L^2(\Omega)\},$$
$$H := H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)},$$

donde $\overline{C_c^\infty(\Omega)}$ denota la cerradura del conjunto de funciones suaves con soporte compacto sobre Ω respecto a la norma

$$\|u\|_H := \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

expresión conocida como la norma usual de Sobolev para $H^1(\Omega)$.

Ocuparemos la siguiente notación

$$|u|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad u \in L^p(\Omega), \; p \in [1, \infty),$$
$$|\nabla u|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u \in H.$$

Por la desigualdad de Poincaré, $|\nabla \cdot|_2$ es una norma equivalente a $\| \cdot \|_H$ en $H_0^1(\Omega)$.

A continuación enunciamos el teorema de Rellich-Kondrashov.

Teorema 2.1. *(De Rellich-Kondrashov) Sean $N \geqslant 3$, Ω un subconjunto abierto y acotado, y $p \in [1, 2^*)$, donde $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev. Entonces la inclusión $H \subset L^p(\Omega)$ es compacta, es decir, toda sucesión acotada de H contiene una subsucesión convergente en $L^p(\Omega)$.*

Demostración. Véase [2, Teorema 17.12]. □

Finalizamos este capítulo con un lema de convergencia para los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ con $1 \leqslant p < \infty$.

Lema 2.2. *Si* (f_n) *es una sucesión en* $L^p(\Omega)$ *que converge a una función* $f \in L^p(\Omega)$, *entonces existen una subsucesión* (f_{n_k}) *de* (f_n) *y una función* $g \in L^p(\Omega)$ *tales que*

$$|f_{n_k}(x)| \leqslant |g(x)| \quad \textit{para casi toda } x \in \Omega,$$
$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \textit{para casi toda } x \in \Omega.$$

Demostración. Véase [2, Lema 14.28]. □

2.2. Teoría espectral del laplaciano

Sean $N \geqslant 3$ y Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave. Ahora introduciremos la teoría básica sobre las funciones y valores propios del laplaciano con condiciones de Dirichlet, es decir, las soluciones débiles al problema

$$\begin{cases} \Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Llamaremos *solución débil* de (2.1) a una pareja (u, λ), donde $u \in H := H_0^1(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv \quad \forall v \in H. \tag{2.2}$$

Si (u, λ) es solución débil de (2.1), diremos que u es una función propia de Δ con valor propio λ. De hecho, la colección de funciones propias de Δ forma una base ortonormal para H y sus correspondientes valores propios están ordenados de forma creciente.

Proposición 2.3. *Existe un conjunto* $\mathcal{B} = \{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ *con las siguientes propiedades:*

(a) Cada $e_n \in \mathcal{B}$ *es una función propia de* $-\Delta$ *en* H *con valor propio* λ_n*.*

(b) $\langle e_n, e_m \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ *si* $n \neq m$ *y* $\langle e_n, e_m \rangle_{L^2(\Omega)} = 1$ *si* $n = m$*.*

(c) $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ *y* $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$*.*

(d) $\mathcal{B}$ *es una base de Hilbert de* $L^2(\Omega)$ *y una base ortogonal de* H*.*

Para una prueba de este resultado, véase [2, Teorema 17.18]. También tenemos la siguiente caracterización de los valores propios de Δ.

$$\lambda_n := |\nabla e_n|_2^2 = \inf_{\substack{u \in H \setminus \{0\} \\ \int_\Omega u e_k dx = 0, 1 \leqslant k < n}} \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_2^2} \tag{2.3}$$

Los cocientes que determinan a los λ_k son conocidos como los *cocientes de Rayleigh*. Para tener una idea de cómo se encuentran estos valores propios por medio de minimización consulte [3, Página 399].

2.3. Normas equivalentes

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado, $N \geqslant 3$, $p \in (2, 2^*)$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= |u|^{p-2} u \quad \text{en } \Omega, \qquad u \in H = H_0^1(\Omega), \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \Omega, \end{cases}$$

donde $\lambda < \lambda_1$ y λ_1 es el primer valor propio del laplaciano para el problema de Dirichlet. Una consecuencia inmediata de la definición de los cocientes de

Rayleigh es que la expresión $|\nabla u|^2 - \lambda u$ es no negativa para toda $u \in H$. De hecho la expresión

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

determinará una norma en H equivalente a la norma usual de Sobolev.

Proposición 2.4. $\|\cdot\|$ *define una norma en* H *equivalente a la norma usual de Sobolev.*

Demostración.

1. Que define una norma se sigue de que

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda uv \tag{2.5}$$

es un producto interno en H. La bilinealidad y simetría son claras, así que sólo veamos que es una forma definida positiva. De la definición del cociente de Rayleigh para el primer valor propio del laplaciano tenemos

$$\lambda_1 := \inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_2^2},$$

así que $\lambda |u|_2^2 < \lambda_1 |u|_2^2 \leqslant |\nabla u|_2^2$ si $u \neq 0$, y por tanto $\|u\|^2 = |\nabla u|_2^2 - \lambda |u|_2^2 > 0$ si $u \neq 0$ y es cero si $u = 0$.

2. Para probar que $\|\cdot\|$ y $|\nabla \cdot|_2$ son equivalentes basta encontrar $C > 0$ tal que

$$C^{-1}\|u\|_H < \|u\| < C\|u\|_H.$$

Claramente

$$\|u\|^2 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \leqslant \max\{1, -\lambda\} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx,$$

así que sólo falta probar la otra desigualdad.

Notemos

$$\begin{aligned}\|u\|^2 - C^{-2}\|u\|_H^2 &= |\nabla u|_2^2 - \lambda |u|_2^2 - C^{-2}|\nabla u|_2^2 - C^{-2}|u|_2^2 \\ &= (1 - C^{-2})|\nabla u|_2^2 - (C^{-2} + \lambda)|u|_2^2 \\ &\geqslant (1 - C^{-2})\lambda_1 |u|_2^2 - (C^{-2} + \lambda)|u|_2^2 \\ &= ((\lambda_1 - \lambda) - C^{-2}(\lambda_1 + 1))|u|_2^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

si $C^{-2} < \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 1}$. Tomando $C > \text{máx}\{1, \sqrt{\frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-\lambda}}, -\lambda\}$ llegamos a

$$C^{-1}\|u\|_H \leqslant \|u\| \leqslant C\|u\|_H.$$

□

Cuando tratemos el caso $\lambda \geqslant \lambda_1$ veremos que la forma cuadrática

$$\int_\Omega (|\nabla u|_2^2 - \lambda u^2)$$

no es definida positiva sobre un espacio de dimensión finita de H.

3. Estados fundamentales

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado con $N \geqslant 3$, $p \in (2, 2^*)$ y $\lambda < \lambda_1$, donde λ_1 el primer valor propio del laplaciano para el problema de Dirichlet. En esta sección desarrollaremos un método variacional para garantizar la existencia de una solución débil particular de

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= |u|^{p-2}u \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0, \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1. El funcional de energía

Definimos *el funcional de energía* $\Phi : H \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned}\Phi(u) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p.\end{aligned}$$

Para probar que Φ es de clase C^2 usaremos el concepto de *derivada de Gâteaux*.

Definición 3.1. Decimos que un funcional $F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ es *Gâteaux-diferenciable* si para cada $u \in L^p(\Omega)$ el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}$$

existe y el funcional definido en $L^p(\Omega)$ como

$$\mathcal{G}[F](u)v := \lim_{t\to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}$$

es lineal y continuo. Diremos que $\mathcal{G}[F](u)$ es la derivada de Gâteaux de F en el punto u.

Un resultado utilizado recurrentemente en la literatura que relaciona la derivada (de Fréchet) con la derivada de Gâteaux, y que no probaremos en este trabajo, afirma que, si $F : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ es un funcional Gâteaux-diferenciable con derivada de Gâteaux continua, entonces F es diferenciable en el sentido usual (de Fréchet) y se cumple que $F' = \mathcal{G}[F]$. Para una referencia de este resultado consulte [2, Teorema 9.21].

Más adelante requeriremos una forma alternativa de interpretar la derivada de Frêchet de un funcional $F : H \to \mathbb{R}$ de clase C^1, así que la introducimos en este momento. Sabemos que para cada $u \in H$ el funcional $F'(u) : H \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y continuo, así que, por el *teorema de representación de Fréchet-Riesz* (consulte [2, Teorema 15.19]), se sigue que existe un único $\nabla F(u) \in H$ tal que $F'(u)v = \langle \nabla F(u), v\rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno de H. $\nabla F(u)$ se conoce como el gradiente de F en u.

Es sencillo determinar la derivada de cualquier forma cuadrática definida sobre H.

Lema 3.1. *Sea $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Si $F : H \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática asociada a B (es decir, $F(u) := B(u, u)$), entonces F es de clase C^2 y*

$$F'(u)v = 2B(u, v), \quad F''(u)[v, w] = 2B(v, w).$$

Demostración. Calculando la derivada de Gâteaux obtenemos.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}[F](u)v = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{B(u + tv, u + tv) - B(u, u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 B(v, v) + 2tB(u, v)}{t} \\ &= 2B(u, v).\end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{G}[F](u)$ es lineal y continua. Además, $\mathcal{G}[F]$ es una forma bilineal simétrica, así que también es lineal y continua como función de u. Eso quiere decir que $\mathcal{G}[F](u) = F'(u)$ y por tanto

$$F'(u)v = F'(v)v = 2B(u, v).$$

Como F' es lineal y continua, su derivada es constante: $F''(u) = F'$, y por tanto diferenciable también. $\square$

El siguiente lema indica la forma que tienen las derivadas de la parte no lineal de Φ.

Lema 3.2.

Definiendo el funcional $I : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ *como* $I(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p dx = \frac{1}{p}|u|_p^p$ *tenemos que* I *es de clase* C^2 *y*

$$\text{(a)}\ I'(u)v = \int_\Omega |u|^{p-2}uv,$$

$$\text{(b)}\ I''(u)[v,w] = (p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}vw,$$

con $u, v, w \in L^p(\Omega)$.

Demostración. (a) Sean $s, r \in \mathbb{R}$ fijos y consideremos la función

$$t \longmapsto |r+ts|^p, \quad t \in [0,1].$$

Es fácil ver que esta función es diferenciable en $[0,1]$, salvo cuando $r = -ts$, y que su derivada está dada por la función $t \longmapsto p|r+ts|^{p-2}s$. Por el teorema del valor medio existe una $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} ||r+ts|^p - |r|^p| &= p|r+\xi s|^{p-1}|s||t| \\ &\leqslant p(|r|+|s|)^{p-1}|s||t|. \end{aligned}$$

Para $u, v \in L^p(\Omega)$, con $p \in (2,\infty)$, tenemos $(|u|+|v|)^{p-1}|v| \in L^1(\Omega)$. Luego,

$$\frac{|u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t} \longrightarrow p|u(x)|^{p-2}u(x)v(x) \quad \text{si } t \to 0\ \forall x \in \Omega,$$
$$\frac{||u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p|}{|t|} \leqslant p(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1}|v(x)| \quad \forall t \in (0,1] \text{ y } \forall x \in \Omega,$$

y del teorema de convergencia dominada de Lebesgue se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}[I](u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}dx\\ &= \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx.\end{aligned}$$

De la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx \leqslant |u|_p^{p-1}|v|_p,$$

y por tanto que $\mathcal{G}[I](u)$ es Lipschitz continua con u fija. Como la linealidad de $\mathcal{G}[I](u)$ es evidente, concluimos que I es Gâteaux diferenciable y que su derivada de Gâteaux está dada por

$$I'(u)v = \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx.$$

También tenemos que $\mathcal{G}[I]$ es continua como función de u. En efecto, sea $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ una sucesión tal que $u_n \to u$. Del Lema 2.2 se sigue que existen una subsucesión de u_n y una función $h \in L^p(\Omega)$ tales que

$$u_n(x) \to u(x), \quad |u_n(x)| \leqslant h(x), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega\ .$$

Se sigue

$$\begin{aligned}&|u_n(x)|^{p-2}u_n(x) \to |u(x)|^{p-2}u(x), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega,\\ &|u_n(x)|^{p-1} \leqslant |h(x)|^{p-1}, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.\end{aligned}$$

Como $|u_n|^{p-2}u_n \in L^p/p-1(\Omega)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue nos garantiza que

$$|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u \quad \text{en } L^{p/p-1}(\Omega).$$

Luego

$$\|\mathcal{G}[I](u_n) - \mathcal{G}[I](u)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R})} = \sup_{v \in L^p(\Omega), v \neq 0} \frac{\left|\int_\Omega (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v dx\right|}{|v|_p}$$
$$\leqslant ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|_{p/p-1} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, donde $\mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ denota el espacio de los operadores lineales y continous que van de $L^p(\Omega)$ a $\mathbb{R}$. Concluimos entonces que I es diferenciable y que $I' = \mathcal{G}[I]$.

(b) Para calcular la segunda derivada de I haremos un análisis parecido. Primero sacaremos la derivada de Gâteaux utilizando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue:

Notamos que

$$\frac{|u(x) + tv(x)|^{p-2}(u(x) + tv(x))w(x) - |u(x)|^{p-2}w(x)v(x)}{t}$$

converge a

$$(p-1)|u(x)|^{p-2}v(x)w(x) \quad p.c.t\ x \in \Omega \qquad \text{conforme } t \to 0,$$

y que

$$\frac{||u(x) + tv(x)|^{p-2}(u(x) + tv(x))w(x) - |u(x)|^{p-2}w(x)|}{|t|} \leqslant$$
$$(p-1)(|u(x)| + |v(x)|)^{p-2}|v(x)||w(x)|,$$

donde $(p-1)(|u| + |v|)^{p-2}|v||w| \in L^1(\Omega)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}[I'](u)[v,w] &= \lim_{t\to 0}\frac{I'(u+vt)w - I'(u)w}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|u+tv|^{p-2}(u+tv)w - |u|^{p-2}uw}{t}dx\\
&= \int_\Omega |u|^{p-2}vwdx.
\end{aligned}
$$

De la desigualdad de Hölder y de que $p/2 < p$ se sigue

$$
\begin{aligned}
|\int_\Omega |u|^{p-2}vwdx| \leqslant |u|_p^{p-2}|vw|_{p/2} &\leqslant |u|_p^{p-2}|v|_{p/2}|w|_{p/2}\\
&\leqslant C|u|_p^{p-2}|v|_p|w|_p,
\end{aligned}
$$

donde $C > 0$ es un constante que depende de Ω. Luego $\mathcal{G}[I'](u)$ es Lipschitz continua, y como también es lineal en el argumento v, I' es Gâteaux-diferenciable. La continuidad de $\mathcal{G}[I']$ se prueba de forma parecida a como se hizo en en el inciso anterior, así que I' es diferenciable y $I'' = \mathcal{G}[I']$.

□

De estos dos resultados concluimos que Φ es de clase C^2 y que

$$
\Phi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda uvdx - \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx,
$$

de modo que los puntos críticos de Φ se corresponden biunívocamente con las soluciones débiles a (3.1).

Para estudiar estos puntos críticos resulta útil analizar la gráfica de Φ de la siguiente manera. Fijemos $u \in H\backslash\{0\}$ y definamos $\Phi_u(t) := \Phi(tu)$ con $t > 0$. Luego

$$
\Phi_t(u) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^p}{p}|u|_p^p,
$$

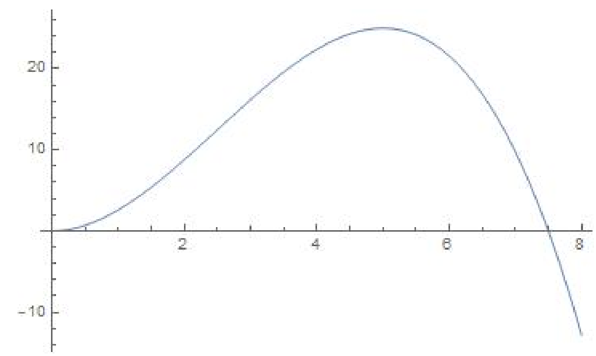

Figura 1: Gráfica de la función $f(t) = 3t^2 - \frac{2}{5}t^3$

y la gráfica de $\Phi_u(t)$ tiene la forma que muestra la Figura 1, donde se observa que $\Phi_u(t)$ alcanza un máximo en un tiempo positivo. Claramente este máximo no tiene porqué ser punto crítico de Φ en un sentido global, pero es mejor candidato que cualquier otro punto sobre el rayo $\{tu \ : \ t \geqslant 0\}$. Es por esto que parece razonable buscar los puntos críticos de Φ sobre el conjunto $\{u \in H\backslash\{0\} \ : \ \sup_{t>0} \Phi(tu) = \Phi(u)\}$.

3.2. La Variedad de Nehari

Definimos la *variedad de Nehari* como

$$\mathcal{N} := \{u \in H\backslash\{0\} \ : \ \Phi'(u)u = 0\}. \tag{3.2}$$

En el Lema 3.3 probaremos que la siguiente igualdad es cierta

$$\{u \in H\backslash\{0\} \ : \ \sup_{t>0} \Phi(tu) = \Phi(u)\} = \{u \in H\backslash\{0\} \ : \ \Phi'(u)u = 0\},$$

pero partir de la definición (3.2) nos facilitará la tarea de probar que $\mathcal{N}$ es una subvariedad de Hilbert de clase C^2 de H. Para ello notemos que

$\Phi'(u)u = \|u\|^2 - |u|_p^p$, así que podemos reescribir $\mathcal{N}$ como

$$\mathcal{N} = \{u \in H\backslash\{0\} \ : \ \|u\|^2 = |u|_p^p\}.$$

Sea $S := \{u \in H \ : \ |u| = 1\}$. Las siguientes propiedades sobre $\mathcal{N}$ son fundamentales.

Lema 3.3. *(a) Existe una constante $d_0 > 0$ tal que $\|u\| \geqslant d_0$ para toda $u \in \mathcal{N}$.*

(b) $\mathcal{N}$ es una subvariedad de Hilbert de clase C^2 de H.

(c) $\mathcal{N}$ es una restricción natural para Φ, es decir, $u \in \mathcal{N}$ es punto crítico no trivial de Φ si y sólo si u es un punto crítico de $\Phi|_{\mathcal{N}}$.

(d) Para cada $u \in H\backslash\{0\}$ existe un único $t_u \in (0, \infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. Más aún, t_u es el único punto en $(0, \infty)$ para el que se cumple

$$\max_{t \geqslant 0} \Phi(tu) = \Phi(t_u u).$$

Demostración. (a) Sea $u \in \mathcal{N}$. Por la desigualdad de Poincaré sabemos que existe $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|^2 = |u|_p^p \leqslant C\|u\|^p,$$

así que

$$1/C^{p-2} \leqslant \|u\|.$$

(b) Sea $\Theta : H \to \mathbb{R}$ el funcional dado por $\Theta(u) = \|u\|^2 - |u|_p^p$. Es fácil notar que Θ es de clase C^2 y que su derivada en cada $u \in H$ es

$$\Theta'(u)v = 2\langle u, v\rangle - p\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx, \quad v \in H.$$

Para cada $u \in \mathcal{N}$ tenemos

$$\Theta'(u)u = 2\langle u, u\rangle - p\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = 2\|u\|^2 - p|u|_p^p \tag{3.3}$$

$$= (2-p)\|u\|^2 \neq 0, \tag{3.4}$$

lo cual es equivalente a decir que $\Theta'(u) : H \to \mathbb{R}$ es un funcional suprayectivo. Se sigue que 0 es un valor regular de Θ, y como $\mathcal{N}$ es cerrada debido a que $\mathcal{N} = \{u \in H : \Phi'(u)u = 0\} \cap \{u \in H : \|u\| \geqslant d_0\}$, concluimos que $\mathcal{N}$ es una subvariedad de Hilbert de clase C^2 de H.

(c) Si $u \in \mathcal{N}$ es un punto crítico de $\Phi|_{\mathcal{N}}$, entonces por definición

$$\Phi'(u)v = 0 \quad \forall v \in T_u\mathcal{N}, \tag{3.5}$$

donde $T_u\mathcal{N} := ker\Theta'(u) = \{v \in H : \nabla\Theta(u) \cdot v = 0\}$ denota el espacio tangente a $\mathcal{N}$ en u. De (3.3) tenemos $u \notin ker\Theta'(u)$, así que el funcional definido sobre $T_u\mathcal{N} \times \mathbb{R}$ por la asignación $(v,t) \longmapsto v + tu$ es un isomorfismo sobre H[1]. Se sigue que para $w \in H$ existen $v \in ker\Theta'(u)$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $w = v + tu$. Luego

$$\Phi'(u)w = \Phi'(u)(v + tu) = \Phi'(u)v + t\Phi'(u)u = 0,$$

y concluimos que u es un punto crítico de Φ sobre H.

(d) Para cada $u \in H\backslash\{0\}$ definamos la función $\Phi_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ como $\Phi_u(t) = \Phi(tu)$. Es fácil notar que Φ_u es diferenciable y su derivada está dada por

$$\Phi_u'(t) = \Phi'(tu)u = t\|u\|^2 - t^{p-1}|u|_p^p = t(\|u\|^2 - t^{p-2}|u|_p^p).$$

[1]La inyectividad de esta asignación es clara. Para probar la suprayectividad tome $w \in H\backslash T_u\mathcal{N}$ y note que $\Phi'(u)w \neq 0$. Luego $w = w - \frac{1}{\Phi'(u)w}w + \frac{1}{\Phi'(u)w}w$ con $w - \frac{1}{\Phi'(u)w}w \in T_u\mathcal{N}$.

Despejando llegamos a que $\Phi_u'(t) = 0$ si

$$t = t_u := \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Dado que

$$\Phi_u''(t) = \|u\|^2 - (p-1)t^{p-2}|u|_p^p$$

implica

$$\Phi_u''(t_u) = (2-p)\|u\|^2 < 0,$$

concluimos que t_u es el único máximo global de Φ_u. Además, $0 = \Phi_u'(t_u) = \Phi'(t_u u)u = \Phi'(t_u u)t_u u$, así que $t_u u \in \mathcal{N}$.

$\square$

Ahora indagamos sobre la topología de la variedad de Nehari. El Lema 3.3 nos arroja mucha luz al respecto, pues de él es sencillo concluir que el funcional

$$m = \widehat{m}|_S : S \to \mathcal{N}, \quad m(u) := t_u u,$$

es en un homeomorfismo, hecho que probamos rigurosamente en la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *El funcional*

$$m : S \to \mathcal{N} \quad \textit{dado por} \quad m := \widehat{m}|_S,$$

es un homeomorfismo y su inversa está dada por $m^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|}$.

Demostración. Ya sabemos que tanto m como m^{-1} son continuas, así que sólo falta verificar que son inversas una de la otra. Evaluando para $u \in S$ obtenemos

$$m^{-1}(t_u u) = \frac{t_u u}{\|t_u u\|} = \frac{u}{\|u\|} = u.$$

Del Lema 3.3(c) se sigue que $t_{\frac{u}{\|u\|}} = \|u\|$ para $u \in \mathcal{N}$, y por tanto,

$$m(m^{-1}(u)) = m\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = t_{\frac{u}{\|u\|}} \frac{u}{\|u\|} = u.$$

□

Este resultado es más desafortunado de lo que parece, pues muestra que $\mathcal{N}$ no es compacta (ninguna esfera en un espacio de Banach de dimensión infinita lo es). Una herramienta que nos ayudará a lidiar con esta dificultad es el concepto de sucesiones de Palais-Smale.

Definición 3.2.

1. Una sucesión (u_n) en H es una *sucesión de Palais-Smale para* Φ si $(\Phi(u_n))$ está acotada y $\nabla\Phi(u_n) \to 0$ en H.

2. Φ satisface la *condición de Palais-Smale* si toda sucesión de Palais-Smale para Φ contiene una subsucesión convergente en H.

Definición 3.3. Una sucesión (u_n) en $\mathcal{N}$ es una *sucesión de Palais-Smale para* Φ *sobre* $\mathcal{N}$ si $(\Phi(u_n))$ está acotada y $\nabla|_{\mathcal{N}}\Phi(u_n) \to 0$, donde

$$\nabla_{\mathcal{N}}\Phi(u) := \nabla\Phi(u) - \frac{\langle \nabla\Phi(u), \nabla\Theta(u)\rangle}{\|\nabla\Theta(u)\|^2}\nabla\Theta(u). \tag{3.6}$$

A su vez, decimos que Φ *satisface la condición de Palais-Smale sobre* $\mathcal{N}$ si toda sucesión de Palais-Smale en $\mathcal{N}$ contiene una subsucesión convergente en H.

Ahora queremos ver que Φ satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{N}$. Para ello probamos el siguiente lema.

Lema 3.5. *Si $(u_n) \in \mathcal{N}$ es una sucesión tal que $\Phi(u_n) \to c$ y $\nabla_{\mathcal{N}}\Phi(u_n) \to 0$, entonces $\nabla\Phi(u_n) \to 0$.*

Demostración. Notemos que

$$\frac{p-2}{2p}\|u_n\|^2 = \Phi(u_n) \to c \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Luego la sucesión (u_n) está acotada en H y

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}}\Phi(u_n), u_n \rangle \to 0. \tag{3.7}$$

De (3.6) se sigue

$$\nabla\Phi(u_n) = \nabla_{\mathcal{N}}\Phi(u_n) + t_n \nabla\Theta(u_n). \tag{3.8}$$

Como $u_n \in \mathcal{N}$, tenemos

$$0 = \langle \nabla\Phi(u_n), u_n \rangle = \langle \nabla_{\mathcal{N}}\Phi(u_n), u_n \rangle + t_n \langle \nabla\Theta(u_n), u_n \rangle,$$

y por (3.7), llegamos a

$$t_n \langle \nabla\Theta(u_n), u_n \rangle \to 0. \tag{3.9}$$

Del Lemma 3.3 se sigue que

$$|\langle \nabla\Theta(u_n), u_n \rangle| = |\Theta'(u_n)u_n| = |2\|u_n\|^2 - p|u_n|_p^p| = (p-2)\|u_n\|^2 \geqslant c > 0, \tag{3.10}$$

debido a que cada $u_n \in \mathcal{N}$, y de (3.9) se sigue $t_n \to 0$.

De la desigualdad de Hölder es sencillo notar

$$
\begin{aligned}
|I'(u)v| = \left|\int |u|^{p-2}uv\right| = \int |u|^{p-1}|v| &\leqslant |u|_p^{p-1}|v|_p \\
&\leqslant C|u|_p^{p-1} \\
&\leqslant C|u|_p^{p-1}\|v\|, \quad u,v \in H. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.11) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|\Theta'(u)\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} := \sup_{v\in H\setminus\{0\}} \frac{|\Theta'(u)v|}{\|v\|} &\leqslant \sup_{v\in H\setminus\{0\}} \frac{2|\langle u,v\rangle| + p|I'(u)v|}{\|v\|} \\
&\leqslant 2\|u\| + Cp|u|_p^{p-1},
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{L}(H,\mathbb{R})$ denota el espacio de funciones continuas y lineales que van de H en $\mathbb{R}$. Así llegamos a que existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$
\|\nabla\Theta(u_n)\| = \|\Theta'(u)\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} \leqslant 2\|u_n\| + pC|u_n|_p^{p-1} \leqslant c_2.
$$

Luego $(\nabla\Theta(u_n))$ está acotada en H y, dado que $\nabla_{\mathcal{N}}\Phi(u_n) \to 0$ y $t_n \to 0$, de la identidad (3.8) se sigue $\nabla\Phi(u_n) \to 0$. □

Proposición 3.6. Φ *satisface la condición de Palais-Smale sobre* $\mathcal{N}$.

Demostración. Sea $(u_n) \subset \mathcal{N}$ una sucesión tal que $\Phi(u_n) \to c$ y $\nabla_{\mathcal{N}}\Phi(u_n) \to 0$. Por el Lema 3.5 se sigue $\nabla\Phi(u_n) \to 0$.

Además, (u_n) debe estar acotada en H, pues $(\Phi(u_n))$ converge y

$$
\Phi(u_n) = \frac{p-2}{2p}\|u_n\|^2
$$

debido a que $u_n \in \mathcal{N}$. Del Teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 2.1) y del Lema 2.2 se sigue entonces la existencia de una subsucesión de (u_n) (que denotaremos igual) tal que

$$\begin{aligned} u_n &\to u \quad \text{en } H, \\ u_n &\to u \quad \text{en } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad (3.11) llegamos a

$$\begin{aligned} |\langle \nabla I(u_n), u_n - u\rangle| &\leqslant |u_n|_p^{p-1} |u_n - u|_p \\ &\leqslant C|u_n - u|_p \to 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \langle \nabla\Phi(u_n), u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, u_n - u\rangle - \lim_{n\to\infty} \langle \nabla I(u_n), u_n - u\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 - \lim_{n\to\infty} \langle u_n, u\rangle = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 - \|u\|^2. \end{aligned}$$

En otras palabras, hay convergencia en norma, así que

$$u_n \to u \quad \text{en } H,$$

y por tanto Φ satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{N}$. □

Ya estamos en condiciones de probar el Teorema 1.1, el cual asegura la existencia de un estado fundamental no negativo para Φ cuando $\lambda < \lambda_1$.

Demostración del Teorema 1.1. Sea (u_n) una sucesión en $\mathcal{N}$ tal que $\Phi(u_n) \to c_0 := \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u)$. Como $u_n \in \mathcal{N}$,

$$\Phi(u_n) = \frac{p-2}{2p}\|u_n\|^2 = \frac{p-2}{2p}|u_n|_p^p.$$

Luego (u_n) está acotada en H, y del teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 2.1) se sigue la existencia de una subsucesión de (u_n) (que denotaremos igual) tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H,$$

$$u_n \to u \text{ fuertemente en } L^p((\Omega).$$

Tenemos que $u \neq 0$ debido a

$$|u|_p^p = \lim_{n\to\infty} |u_n|_p^p = \frac{2p}{p-2} c_0 > 0,$$

así que sólo falta probar que $u \in \mathcal{N}$. Sea $t_u \in (0, \infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. Como $u_n \in \mathcal{N}$, Lemma 3.3 c) implica que $\Phi(t_u u_n) \leqslant \Phi(u_n)$, y tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 < c_0 \leqslant \frac{p-2}{2p}\|t_u u\|^2 = \Phi(t_u u) &= \frac{1}{2}\|t_u u\|^2 - \frac{1}{p}|t_u u|_p^p \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\|t_u u_n\|^2) - \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{p}|t_u u_n|_p^p) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi(t_u u_n) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \frac{p-2}{2p} \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = c_0. \end{aligned}$$

Luego $\|u_n\| \to \|t_u u\|$, y como $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, se sigue que $\|u_n\| \to \|u\|$. Concluimos entonces

$$u_n \to u \quad \text{ en } H.$$

Como $\mathcal{N}$ es cerrada, $u \in \mathcal{N}$. Además, $\Phi(u) = c_0$. Finalmente, notemos que $|u| \in H\backslash\{0\}$ y $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ [6]. Luego

$$0 = \|u\|^2 - |u|_p^p = \||u|\|^2 - ||u||_p^p,$$

y por tanto $|u| \in \mathcal{N}$. Además,

$$\frac{p-2}{2p}\|u\|^2 = \Phi(u) = \Phi(|u|) = \inf_{v\in\mathcal{N}} \Phi(v),$$

por lo que $|u|$ es un estado fundamental no negativo. □

3.3. Una solución de energía mínima que cambia de signo

Ahora nos ocuparemos en encontrar una solución de (3.1) de energía mínima que cambie de signo. Para ello consideramos el conjunto de Nehari con cambio de signo

$$\mathcal{N}_{sc} := \{u \in H \ : \ u^+, u^- \in \mathcal{N}\}.$$

Es importante mencionar $\mathcal{N}_{sc}$ no tiene por qué ser una variedad, lo cual nos impide aplicar las mismas estrategias de la sección anterior para minimizar Φ en $\mathcal{N}_{sc}$.

Primero mostraremos el teorema de Poincaré-Miranda [7, Theorem 4]. Se dará aquí una prueba sencilla utilizando el teorema del punto fijo de Brouwer [7, Theorem 1].

Teorema 3.7. *(Del punto fijo de Brouwer). Si B_R denota la bola cerrada en $\mathbb{R}^N$ de radio $R > 0$ centrada en el origen y $f : B_R \to B_R$ es una función continua, entonces existe al menos un $x^* \in B_R$ tal que $f(x^*) = x^*$.*

Procedemos a probar el teorema de Poincaré-Miranda. Para ello sean $n \in \mathbb{N}$ y para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, $R_i > 0$. También definamos $P := [-R_1, R_1] \times ... \times [-R_n, R_n]$.

Teorema 3.8. *(De Poincaré-Miranda). Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ sea $f_i : P \to \mathbb{R}^n$ una función continua tal que $f_i(x) \leqslant 0$ si $x_i = -R_i$ y $f_i(x) \geqslant 0$ si $x_i = R_i$. Si $f := (f_1, ..., f_n)$, entonces f tiene al menos un cero en P.*

Demostración. Sea $\pi = (p_1, ..., p_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$p_i(x) = \begin{cases} -R_i & \text{si } x_i \in (-\infty, -R_i), \\ x_i & \text{si } x_i \in [-R_i, R_i], \\ R_i & \text{si } x_i \in (R_i, \infty). \end{cases}$$

Luego $\pi(x) = x$ para toda $x \in P$, y como

$$|p_i(x) - p_i(y)| \leqslant |x_i - y_i| \leqslant |x - y|, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

llegamos a que $\pi(\mathbb{R}^n) \subset P$.

Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g = p - \pi \circ p$. Notemos que para toda $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$|g(x)| \leqslant |\pi(x)| + |f(p(x))| \leqslant \sqrt{\Sigma_{i=1}^n R_j^2} + \max_{x \in P} |f(x)|.$$

Sea $R_0 = \sqrt{\Sigma_{i=1}^n R_j^2} + \max_{x \in P} |f(x)|$. Luego $g(\mathbb{R}^n) \subset B_{R_0}$, y por tanto, $g(B_{R_0}) \subset B_{R_0}$. Entonces el teorema del punto fijo de Brouwer nos asegura la existencia de un punto $x^* \in B_{R_0}$ tal que $g(x^*) = \pi(x^*) - (f \circ \pi)(x^*) = x^*$.

Notemos que $x^* \in P$, y por lo tanto, $\pi(x^*) = x^*$. Procediendo por contradicción, si $x^* \notin P$, entonces existe un índice i tal que $x_i^* < -R_i$ o $x_i^* > R_i$. En el primer caso tendríamos que

$$-R_i > x_i^* = p_i(x^*) - f_i(p_i(x^*)) = -R_i - f_i(p(x^*))) \geqslant -R_i,$$

pues $f_i(p_i(x^*)) \leqslant 0$. Esto es absurdo.

En el segundo caso tendríamos

$$R_i < x_i^* = p_i(x^*) - f_i(p_i(x^*)) = R_i - f_i(p_i(x^*)) \leqslant R_i,$$

pues $f_i(\pi(x^*)) \geqslant 0$. Como esto también es absurdo, se sigue que $x^* \in P$, y entonces, $g(x^*) = \pi(x^*) - (f \circ \pi)(x^*) = x^* - f(x^*) = x^*$. En conclusión, $f(x^*) = 0$. $\square$

Antes de probar la existencia de un minimizador de Φ en $\mathcal{N}_{sc}$ necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 3.9. *(De deformación cuantitativo) Sean X un espacio de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $L \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, ϵ, $\delta > 0$ tales que para toda $u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \bigcap B_{2\delta}(L)$ se cumpla $\|\phi'(u)\| \geqslant 8\epsilon/\delta$. Luego existe una deformación $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que*

(a) $\eta(t,u) = u$ si $t = 0$ o si $u \notin \phi^{-1}[c - 2\epsilon, c + 2\epsilon] \bigcap B_{2\delta}(L)$.

(b) $\phi(\eta(1,v)) \leqslant c - \epsilon$ para toda $v \in L$ tal que $\phi(v) \leqslant c + \epsilon$.

(c) $\|\eta(t,u) - u\| \leqslant \delta$ para toda $u \in X$ y para toda $t \in [0,1]$.

(d) $\phi(\eta(\cdot, u))$ es no creciente para toda $u \in X$.

(e) $\phi(\eta(t,u)) < c$ para toda $u \in B_\delta(L)$ tal que $\phi(u) \leqslant c$ y para toda $t \in [0,1]$.

Consulte [4, Theorem 2.2]

Recordemos que $v^+ := \max\{v, 0\}$ y $v^- := \min\{0, v\}$.

Lema 3.10. *Sean Ω un dominio acotado, $u, v \in H^1(\Omega)$ y supongamos que $v^+ \neq 0$. Si $u^+ = 0$ entonces existe $\delta > 0$ que depende de Ω y v tal que $\|u - v\| > \delta$.*

Demostración. Como $v^+ \neq 0$ existe $\eta > 0$ tal que $A := \{x \in \Omega | v(x) > \eta\}$ tiene medida positiva. Como $u^+ = 0$, entonces $u \leqslant 0$ en A y por lo tanto

$|u-v| \geqslant v-u > \eta$ en A. Además, por la desigualdad de Sobolev, existe $C>0$ que depende de Ω tal que

$$\|u-v\| > C\int_\Omega |u-v| > C\int_A |u-v| > C|A|\eta =: \delta > 0.$$

$\square$

Estamos listos para probar el Teorema 1.3 (sobre la existencia de una solución de energía mínima que cambia de signo).

Demostración del Teorema 1.3. La prueba se dividirá en tres partes.

(I) Primero recordemos que para toda $v \in \mathcal{N}$ se cumple

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{p}|v|_p^p = \frac{p-2}{2p}\|v\|^2.$$

Sean $c_{sc} =: \inf_{v\in\mathcal{N}_{sc}} \Phi(v)$ y (u_n) una sucesión en $\mathcal{N}_{sc}$ tal que $\Phi(u_n) \to c_{sc}$. Como

$$\frac{p-2}{2p}\|u_n^\pm\|^2 = \Phi(u_n^\pm) \geqslant c > 0 \text{ debido a que } u_n^\pm \in \mathcal{N},$$

y

$$\begin{aligned}\Phi(u_n^\pm) = \frac{p-2}{2p}\|u_n^\pm\|^2 &\leqslant \frac{p-2}{2p}\|u_n^+\|^2 + \frac{p-2}{2p}\|u_n^-\|^2 \\ &= \Phi(u_n^+) + \Phi(u_n^-) = \Phi(u_n),\end{aligned}$$

entonces $(\|u_n^\pm\|)$ son sucesiones acotadas lejos del cero.

Por este hecho y el Lema 2.2 existen dos subsucesiones de $(u_n^\pm)$, que denotaremos igual, tales que

$$\begin{aligned}
&u_n^+ \rightharpoonup u_1 \neq 0 \quad \text{en } H, \\
&u_n^- \rightharpoonup u_2 \neq 0 \quad \text{en } H, \\
&u_n^+(x) \to u_1(x) \quad \text{casi dondequiera en } \Omega, \\
&u_n^-(x) \to u_2(x) \quad \text{casi dondequiera en } \Omega.
\end{aligned}$$

Así llegamos a

$$u_n(x) \to u_1(x) + u_2(x) \quad \text{y} \quad u_1(x)u_2(x) \equiv 0 \;\text{ casi dondequiera en } \Omega.$$

Notemos que $u := t_{u_1}u_1 + t_{u_2}u_2 = u^+ + u^- \in \mathcal{N}$, pues $t_{u_1}u_1 = u^+$ y $t_{u_2}u_2 = u^-$ son ortogonales en H y pertenecen a $\mathcal{N}$.

u será el candidato a solución de energía mínima de Φ en $\mathcal{N}_{sc}$.

Como

$$\max_{t \geqslant 0} \Phi(tv) = \Phi(t_v v) \qquad \text{para toda } v \in H \backslash \{0\}, \tag{3.12}$$

para $i \in \{1, 2\}$ se sigue

$$\begin{aligned}
\Phi(t_{u_i}u_i) &= \frac{1}{2}\|t_{u_i}u_i\|^2 - \frac{1}{p}|t_{u_i}u_i|_p^p \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla t_{u_i}u_i|^2 - \lambda(t_{u_i}u_i)^2) - \frac{1}{p}|t_{u_i}u_i|_p^p \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \lim_{n\to\infty} (|\nabla t_{u_i}u_n^\pm|^2 - \lambda(t_{u_i}u_n^\pm)^2) - \frac{1}{p}|\lim_{n\to\infty} t_{u_i}u_n^\pm|_p^p \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} (\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla t_{u_i}u_n^\pm|^2 - \lambda(t_{u_i}u_n^\pm)^2) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p}|t_{u_i}u_n^\pm|_p^p \\
&= \liminf_{n\to\infty} \Phi(t_{u_i}u_n^\pm) \leqslant \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n^\pm).
\end{aligned}$$

por la semi-continuidad inferior de la norma $\|\cdot\|$. Luego

$$\Phi(u) = \Phi(t_1 u_1) + \Phi(t_2 u_2) \leqslant \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n^+) + \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n^-) = c_{sc}.$$

Concluimos que $\Phi(u) = c_{sc}$.

(II) Ya vimos que Φ alcanza un mínimo u sobre $\mathcal{N}_{sc}$. Ahora falta ver que este mínimo es un punto crítico de Φ (algo que ya se seguía inmediatamente en el caso de $\mathcal{N}$ pero que no es directo para $\mathcal{N}_{sc}$).

De (3.12) también se puede deducir que, para $s, t > 0$ con al menos uno distinto de 1,

$$\Phi(su^+ + tu^-) = \Phi(su^+) + \Phi(tu^-) < \Phi(u^+) + \Phi(u^-) = c_{sc}. \qquad (3.13)$$

Procediendo por contradicción, supongamos que $\Phi'(u) \neq 0$. Entonces existen $\delta > 0$ y $\mu > 0$ tales que

$$\|u - v\| \leqslant 3\delta \quad \text{siempre que} \quad \|\Phi'(v)\| \geqslant \mu.$$

Sean

$$D := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \quad \text{y} \quad g(s,t) := su^+ + tu^-.$$

De (3.13) se sigue que $\Phi(g(s,t)) = c_{sc}$ si y sólo si $t = s = 1$ y $\Phi(g(s,t)) < c_{sc}$ en otro caso. Luego

$$\beta := \max_{\partial D}(\Phi \circ g) < c_{sc}.$$

Aplicando el lema cuantitativo de deformación para $\epsilon := \min\{\frac{c_{sc}-\beta}{4}, \frac{\mu\delta}{8}\}$ y $L := g(D)$ obtenemos una deformación $\eta : [0,1] \times H \to H$ tal que *a)* $\eta(1,v)=v$ si $v\notin\Phi^{-1}([c_{sc}-2\epsilon,c_{sc}+2\epsilon])\bigcap B_{2\delta}(g(D))$.

b) $\Phi(\eta(1,v))\leqslant c_{sc}-\epsilon$ para todo $v\in H$ tal que $\Phi(v)\leqslant c_{sc}+\epsilon$.

c) $\|\eta(t,v)-v\|\leqslant\delta$ para toda $v\in H$, $t\in[0,1]$.

d) $\Phi(\eta(1,v))\leqslant\Phi(v)$ para toda $v\in H$.

e) $\Phi(\eta(t,v))<c_{sc}$ para toda $v\in B_\delta(L)$ tal que $\Phi(v)\leqslant c_{sc}$ y para toda $t\in[0,1]$.

Primero notemos que

$$\max_{(s,t)\in D}\Phi(\eta(1,g(s,t)))<c_{sc}. \tag{3.14}$$

De lo contrario, $\max_{(s,t)\in D}\Phi(\eta(1,g(s,t)))=c_{sc}$. Por continuidad, existirían s_0,t_0 tales que

$$\max_{(s,t)\in D}\Phi(\eta(1,g(s,t)))=\Phi(\eta(1,g(s_0,t_0))). \tag{3.15}$$

Por *d)*,

$$c_{sc}=\Phi(\eta(1,g(s_0,t_0))\leqslant\Phi(g(s_0,t_0))=\Phi(s_0u^++t_0u^-)\leqslant c_{sc}. \tag{3.16}$$

Luego $\Phi(g(s_0,t_0))=c_{sc}$, lo cual ocurre si y sólo si $s_0=t_0=1$. Pero por b),

$$c_{sc}=\Phi(g(s_0,t_0))=\Phi(\eta(1,g(s_0,t_0))=\Phi(\eta(1,u))\leqslant c_{sc}-\epsilon, \tag{3.17}$$

lo cual es una contradicción y (3.14) se cumple.

(III) Ahora mostraremos $\eta(1,g(D))\bigcap\mathcal{N}_{sc}\neq\varnothing$, lo cual sería una contradicción a la definición de c_{sc}, ya que el nivel $\eta(1,g(D))$ tiene energía menor que c_{sc}, por (3.14).

Para ello definamos $h(s,t) := \eta(1, g(s,t))$. Notemos que, por la propiedad c) y el Lema 3.10 (haciendo δ más pequeña si fuera necesario), $h(s,t)$ siempre tiene sus partes positiva y negativa distintas de cero. Definamos

$$\Psi_1(s,t) := (\frac{1}{s}\Phi'(h^+(s,t))h^+(s,t), \frac{1}{t}\Phi'(h^-(s,t))h^-(s,t)).$$

Tomando

$$f_1(s,t) := \frac{1}{s}\Phi'(h^+(s,t))h^+(s,t) \text{ y } f_2(s,t) := \frac{1}{t}\Phi'(h^-(s,t))h^-(s,t),$$

llegamos a

$$\begin{aligned} f_1(\frac{1}{2},t) &= 2\Phi'(h^+(\frac{1}{2},t))h^+(\frac{1}{2},t) = \Phi'(\frac{1}{2}u^+)u^+ \\ &= \int_\Omega (\nabla(\frac{1}{2}u^+)\nabla u^+ - \lambda(\frac{1}{2}u^+)u^+) - \int_\Omega |\frac{1}{2}u^+|^{p-2}\frac{1}{2}u^+u^+ \\ &= \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla u^+|^2 - \lambda|u^+|^2) - \frac{1}{2^{p-1}}\int_\Omega |u^+|^p \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{p-1}})|u^+|_p^p > 0, \quad \text{ ya que } \frac{1}{2} > \frac{1}{2^{p-1}}. \end{aligned}$$

También se tiene que $f_1(\frac{3}{2},t) = (\frac{3}{2} - \frac{3}{2}^{p-1})|u^+|_p^p < 0$ debido a que $\frac{3}{2} < \frac{3}{2}^{p-1}$. Análogamente se prueba $f_2(s,\frac{1}{2}) > 0$ y $f_2(s,\frac{3}{2}) < 0$.

Luego el Teorema de Poincaré-Miranda nos asegura la existencia de un $(s_0,t_0) \in D$ tal que $f_1(s_0,t_0) = f_2(s_0,t_0) = 0$, lo cual implica que

$$\Phi'(h^+(s_0,t_0))h^+(s_0,t_0) = \Phi'(h^-(s_0,t_0))h^-(s_0,t_0) = 0.$$

Por lo tanto, $h^+(s_0,t_0), h^-(s_0,t_0) \in \mathcal{N}$ y entonces

$$h(s_0,t_0) = h^+(s_0,t_0) + h^-(s_0,t_0) \in \mathcal{N}_{sc}.$$

Pero

$$\Phi(h(s_0,t_0)) = \Phi(\eta(1,g(s_0,t_0)) \leqslant \max_{(s,t)\in D} \Phi(\eta(1,g(s,t))) < c_{sc} = \Phi(u)$$

contradiciendo el hecho de que u es de energía mínima.

Concluimos $\Phi'(u) = 0$ y por tanto u es una solución de energía mínima que cambia de signo.

$\square$

4. La variedad de Nehari generalizada

4.1. Planteamiento

Como ya vimos, el método descrito en el Capítulo 2 funciona para resolver el problema (3.1) cuando $\lambda < \lambda_1$. En este caso, $\|\cdot\|$ define una norma en H equivalente a la norma usual de Sobolev, algo que no ocurre si $\lambda \geqslant \lambda_1$. Sin embargo podremos adaptar el método de la variedad de Nehari para estudiar existencia de soluciones al problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= |u|^{p-2}u \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

cuando $\lambda \geqslant \lambda_1$.

Sea $\mathcal{B} := \{e_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ como en el Lema 2.3, es decir,

1. $e_k \in \mathcal{B}$ es una función propia de $-\Delta$ en H con valor propio λ_k.

2. $\int_\Omega e_k e_m = 0$ si $k \neq m$.

3. $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_k \leqslant ...$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

4. $\mathcal{B}$ es una base de Hilbert de $L^2(\Omega)$.

Como $\lambda \geqslant \lambda_1$, tenemos dos casos, que $\lambda = \lambda_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ o bien $\lambda \neq \lambda_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_k < \lambda_{k+1} = ... = \lambda_m = \lambda < \lambda_{m+1} \leqslant ...$$

entonces definimos los siguientes subespacios de H

$$E := span\{e_1, ..., e_k\}, \quad E^0 := span\{e_{k+1}, ..., e_m\}, \quad F := E \oplus E_0, \quad L := F^{\perp}.$$

En particular, por ortogonalidad,

$$H = E \oplus E_0 \oplus L.$$

Por otro lado, si $\lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_m < \lambda < \lambda_{m+1}$, entonces definimos

$$E := span\{e_1, ..., e_k\}, \quad E^0 := \{0\}, \quad F := E \oplus E_0, \quad L := F^{\perp}.$$

Y también se cumple que

$$H = E \oplus E_0 \oplus L.$$

Dada $u \in H$ podemos escribir $u = u^E + u^0 + u^L$ con $u^E \in E, u^0 \in E^0, u^L \in L$. También denotamos $S^L := \{u \in L \,:\, \|u\|_\lambda = 1\}$.

Ahoras justificamos la elección de estos subespacios de H. Recordemos la caracterización de los valores propios del laplaciano dada por los cocientes de Rayleigh:

$$\lambda_i = \inf_{\substack{u \in H \\ \langle u, e_j \rangle = 0, 1 \leqslant j \leqslant m}} \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_2^2}. \tag{4.2}$$

Como $\lambda < \lambda_{m+1}$, para $u \in H \backslash F$ se sigue que

$$\lambda |u|_2^2 < \lambda_{m+1} |u|_2^2 \leqslant |\nabla u|_2^2,$$

y por tanto

$$|\nabla u|_2^2 - \lambda |u|_2^2 > 0 \quad \text{ para } u \in F^{\perp}.$$

Si ahora tomamos $v = \Sigma_{i=1}^{k} a_i e_i \in E \backslash \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} |\nabla v|_2^2 - \lambda |v|_2^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \lambda v^2 = \int_{\Omega} (\Delta v) v - \lambda v^2 \\ &= \int_{\Omega} \Sigma_{i=1}^{k} a_i^2 e_i^2 (\lambda_i - \lambda) = \Sigma_{i=1}^{k} a_i^2 (\lambda_i - \lambda) < 0. \end{aligned}$$

Para $v = \Sigma_{i=k+1}^{m} a_i e_i \in E^0$ tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \lambda v^2 = 0.$$

Con estos cálculos resultará sencillo probar la siguiente proposición.

Proposición 4.1. *Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_k \leqslant \lambda < \lambda_{k+1}$ y $u \in H$. Entonces*

$$u = u^E + u^0 + u^L \in E \oplus E_0 \oplus L$$

y

$$\|u\|_{\lambda} := \left(|\nabla u^L|_2^2 - \lambda |u^L|_2^2 - |\nabla u^E|_2^2 + \lambda |u^E|^2 + |\nabla u^0|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

define una norma equivalente en $H = H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Para probar que $\| \cdot \|_{\lambda}$ es una norma en H basta notar que lo es si la restringimos a E. Sean $a_i \in \mathbb{R}$ tales que $u^E = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ e integremos por partes para obtener

$$-|\nabla u^E|_2^2 + \lambda |u^E|^2 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i) \int_{\Omega} a_i^2 e_i^2 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i) a_i^2 > 0 \tag{4.3}$$

si $u^E \neq 0$. Usando (4.3) y argumentos similares a los de la Proposición 2.4 obtenemos que $\|\cdot\|_\lambda$ es una norma en H. Ahora veamos que $\|\cdot\|_\lambda$ es equivalente a $|\nabla \cdot|_2$.

Por (4.3) y por ortogonalidad,

$$\begin{aligned}\|u\|_\lambda^2 &\leqslant |\nabla u^L|_2^2 + \sum_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)a_i^2 + |\nabla u^0|_2^2 \\ &\leqslant \max_{i=1,\dots,k}\left\{1, \frac{(\lambda-\lambda_i)}{\lambda_i}\right\}\left(|\nabla u^L|_2^2 + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i^2 + |\nabla u^0|_2^2\right) = C|\nabla u|_2^2.\end{aligned}$$

Para la otra desigualdad notemos que de (4.2) se sigue

$$\frac{\lambda}{\lambda_{m+1}}|\nabla u^L|_2^2 \geqslant \lambda |u^L|_2^2,$$

y entonces

$$\begin{aligned}\|u\|_\lambda^2 &\geqslant \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{m+1}}\right)|\nabla u^L|_2^2 + \sum_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)a_i^2 + |\nabla u^0|_2^2 \\ &\geqslant \min_{i=1,\dots,k}\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{m+1}}, \frac{(\lambda-\lambda_i)}{\lambda_i}\right\}\left(|\nabla u^L|_2^2 + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i^2 + |\nabla u^0|_2^2\right) = c|\nabla u|_2^2.\end{aligned}$$

□

Observación 4.2. *Notemos que $\|\cdot\|_\lambda$ está inducida por un proucto escalar. En efecto, este producto escalar es*

$$\langle u, v\rangle_\lambda := \int_\Omega (\nabla u^L \nabla v^L - \lambda u^L v^L)dx + \int_\Omega (-\nabla u^E \nabla v^E + \lambda u^E v^E)dx + \int_\Omega \nabla u^0 \nabla v^0 dx,$$

con $u, v \in H$. La bilinealidad y la simetría de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ son claras. Que es una *forma definida positiva se debe a que*

$$\int_\Omega |\nabla u^L|^2 - \lambda(u^L)^2 dx > 0$$
$$\int_\Omega -|\nabla u^E|^2 + \lambda(u^E)^2 dx > 0$$
$$\int_\Omega |\nabla u^0|^2 dx > 0$$

siempre que $u^L, u^E, u^0 \neq 0$*, es decir,* $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ *es definida positiva restringida a* E*,*E^0 *y* L*. Concluimos entonces que lo es en todo* H *y por tanto* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$ *es un espacio de Hilbert.*

4.2. El funcional de energía

Introducimos el funcional de energía en términos de nuestra nueva norma

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(\|u^L\|_\lambda^2 - \|u^E\|_\lambda^2) - \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Es sencillo verificar que Φ es de clase C^2 escribiéndola como composición de funcionales de clase C^2. Para empezar tenemos las proyecciones ortogonales

$$\pi^H : H \longrightarrow L, \quad \pi^H(u) = u^L,$$
$$\pi^E : H \longrightarrow E, \quad \pi^E(u) = u^E,$$

las cuales son de clase C^∞ por ser lineales y continuas. Además, del Lema 3.1 se sigue que los funcionales definidos por $u \longmapsto \|u^L\|_\lambda^2$ y $u \longmapsto \|u^E\|_\lambda^2$ son de clase C^2, así que Φ es de clase C^2.

Para entender mejor este funcional estudiemos su gráfica. Sea $u = u^L + u^0 + u^E \in H$ y consideremos la función $\Phi_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi_u(t) := \Phi(tu)$. De la expresión que define al funcional se sigue que

$$\Phi_u(t) = t^2(\frac{1}{2}\|u^L\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\|u^E\|_\lambda^2 - t^{p-2}\frac{1}{p}|u|_p^p).$$

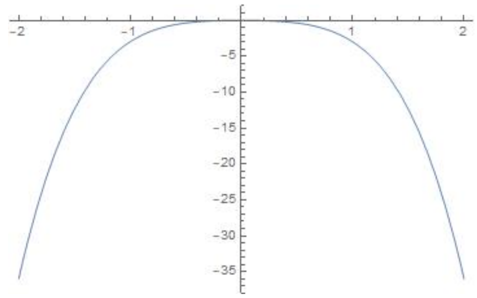

Figura 2: Gráfica de la función $f(t) = -t^2 - 2t^4$

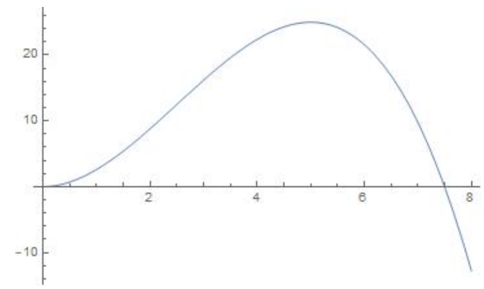

Figura 3: Gráfica de la función $f(t) = 3t^2 - \frac{2}{5}t^3$

Cuando $u^L \equiv 0$ (es decir, $u \in F$), tenemos

$$\Phi_u(t) = t^2(-\frac{1}{2}\|u^E\|_\lambda^2 - t^{p-2}\frac{1}{p}|u|_p^p),$$

y la gráfica alcanza su máximo en cero como lo muestra la Figura 3. Luego el único punto crítico de Φ_u es el cero y, por tanto, la única solución débil al problema (4.1) encontrada en la recta $\{tu \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ es la trivial.

En cambio, si $u^E \equiv 0$, entonces $\Phi_u(t) = t^2(\frac{1}{2}\|u^L\|^2 - t^{p-2}\frac{1}{p}|u|_p^p)$ y la gráfica de Φ_u es de la forma que muestra la Figura 3 y que ya habíamos visto en el Capítulo 2. Buscaremos entonces minimizar Φ en un subconjunto de $H \backslash F$.

Definimos la *variedad de Nehari generalizada*[2] como

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{u \in H\backslash F \,:\, \Phi'(u)u = 0 \text{ y } \Phi'(u)v = 0 \text{ para toda } v \in F\} \qquad (4.4) \\ &= \{u \in H\backslash F \,:\, \|u^L\|_\lambda^2 - \|u^E\|_\lambda^2 - |u|_p^p = 0 \text{ y } \Phi'(u)v = 0 \text{ para toda } v \in F\}. \end{aligned}$$

Para cada $w \in H\backslash F$ ponemos

$$H(w) := \mathbb{R}w^L \oplus F, \quad \widehat{H}(w) := \mathbb{R}^+ w^L \oplus F,$$

[2]Notemos que $\mathcal{M}$ podría no ser una variedad de Hilbert. Sin embargo, aún en este caso, le llamaremos variedad de Nehari generalizada, siguiendo [10].

donde $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$.

En contraste a lo que teníamos en el segundo capítulo, ahora buscamos probar que $\Phi|_{\hat{H}(w)}$ (en vez de $\Phi|_{\mathbb{R}^+ w}$) tiene un único máximo en $\mathcal{M}$ para cada $w \in H \backslash F$. Los siguientes son lemas técnicos que nos ayudarán a este fin.

Lema 4.3. *Sean $u, s, v \in \mathbb{R}$ con $s \geqslant -1$ y sea $w := su + v \neq 0$. Luego*

$$|u|^{p-2}u[s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v] + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{p}|u+w|^p < 0.$$

Demostración. Sean $u, v \in \mathbb{R}$ fijos. Definamos $z(s) = (1+s)u + v$ con $s \geqslant -1$ y

$$g(s) := |u|^{p-2}u[s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v] + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{p}|u+w|^p.$$

En estos nuevos términos, buscamos probar que $g(s) < 0$ siempre que $u \neq z$. Notemos que si $u = 0$, entonces $g(s) = -\frac{1}{p}|w|^p < 0$.

Supongamos pues que $u \neq 0$.

1. **Caso $uz(s) \leqslant 0$.**

   Aquí tenemos que

$$\begin{aligned} g(s) &= |u|^{p-2}u[s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v] + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{p}|u+w|^p \\ &< |u|^{p-2}u[s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v] + \frac{1}{2}|u|^p - \frac{1}{p}|u+w|^p] \\ &= |u|^{p-2}u[u(\frac{s^2}{2}+s) + (1+s)(z(s) - (s+1)u)] \\ &+ \frac{1}{2}(|u|^{p-2}u)(u) - \frac{1}{p}|u+w|^p \\ &= -\frac{1}{2}(s+1)^2|u|^{p-2}u^2 + (1+s)|u|^{p-2}uz(s) - \frac{1}{p}|u+w|^p < 0, \end{aligned}$$

   pues $|u|^{p-2}uz \leqslant 0$ siempre que $uz \leqslant 0$.

2. **Caso** $uz(s) > 0$**.**

   Primero tenemos que si $s = -1$, entonces

$$g(-1) = -\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{p}|v|^p < -\frac{1}{p}|v|^p \leqslant 0.$$

   También notemos que $\lim_{r\to\infty} g(r) = -\infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} g(r) &= |u|^{p-2}u[r(\frac{r}{2}+1)u + (1+r)v] + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{p}|u+w|^p \\ &= |u|^p(\frac{r^2}{2}+r) + |u|^{p-2}uv(r+1) + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{p}|(1+r)u+v|^p. \end{aligned}$$

   Escribiendo

$$A(r) := |u|^p(\frac{r^2}{2}+r) + |u|^{p-2}uv(r+1),$$

   notamos que

$$A(r) \leqslant |u|^p((\frac{1}{2}+1) + |u|^{p-2}uv)r^2 =: cr^2$$

   para r suficientemente grande.

   Por otro lado,

$$|(1+r)u+v|^p \geqslant (1+r)^p\left|u + \frac{v}{1+r}\right|^p \geqslant r^p d > 0$$

   para $d > 0$ y r suficientemente grande. Se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{g(r)}{A(r)} &= 1 - \frac{\frac{1}{p}|(1+r)u+v|^p}{A(r)} \\ &\leqslant 1 - \frac{dr^p}{cr^2} = 1 - \frac{d}{c}r^{p-2} \longrightarrow -\infty \end{aligned}$$

   Como $A(r) \to \infty$, necesariamente $g(r) \to -\infty$.

Además,

$$\begin{aligned} g'(r) &= |u|^{p-2}u(z(r)-u) \\ &= uz(r)\left(\frac{|u|^{p-2}u}{u} - \frac{|u|^{p-2}u}{z(r)}\right). \end{aligned}$$

Si g alcanzara un máximo $s_0 \in [-1, \infty)$ tal que $g(s_0) \geqslant 0$, tendríamos $g'(s_0) = 0$, y por tanto ocurriría $uz(s_0) = 0$ o bien

$$\frac{|u|^{p-2}u}{u} - \frac{|u|^{p-2}u}{z(r)} = 0.$$

Si $uz(s_0) = 0$ estamos en la situación del primer inciso y por tanto $g(s) \leqslant g(s_0) < 0$. El segundo implica $u = z(s_0)$ siempre que $u \neq 0$, por lo cual

$$g(s_0) = -\frac{s_0^2}{2}|u|^p < 0,$$

y nuevamente tenemos $g(s) \leqslant g(s_0) < 0$.

$\square$

El siguiente lema será utilizado ampliamente a lo largo de toda la sección.

Lema 4.4. *(a) Supongamos que $(u_n) \subset H$ es tal que $\Phi(u_n) \geqslant 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\|u_n\|_\lambda \to \infty$. Entonces $v_n := u_n/\|u_n\|_\lambda$ converge débilmente a 0.*

(b) Si (v_n) es como en el inciso anterior, entonces (v_n^L) está acotada lejos del cero.

Demostración. (a) Como (v_n) está acotada en H, entonces pasando a una subsucesión tenemos que $v_n \rightharpoonup v$ para algún elemento $v \in H$. Notemos que

$$0 \leqslant \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|_\lambda^2} \leqslant \frac{1}{2}(\|v_n^L\|_\lambda^2 + \|v_n^E\|_\lambda^2) - \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{\|u_n\|_\lambda^2}dx \tag{4.5}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{\|u_n\|_\lambda^2}dx \tag{4.6}$$

Pero si $v \neq 0$, tendríamos

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{\|u_n\|_\lambda^2} = \int_\Omega \frac{|\|u_n\|_\lambda v_n|^p}{\|u_n\|_\lambda^2} = \|u_n\|_\lambda^{p-2}\int_\Omega |v_n|^p \to \infty,$$

y entonces

$$\frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|_\lambda^2} \to -\infty,$$

lo cual es absurdo, así que $v = 0$.

(b) De (4.5) podemos deducir que $\|v_n^L\|_\lambda \geqslant \|v_n^E\|_\lambda$. Para probar este inciso bastará probar que $v_n^L \nrightarrow 0$. Procediendo por contradicción, si $v_n^L \to 0$, entonces $v_n^E \to 0$, y por tanto

$$\|v_n^0\|_\lambda = 1 - \|v_n^L\|_\lambda^2 - \|v_n^E\|_\lambda^2 \to 1.$$

Además $v_n^0 \to v^0$ porque $dim(E^0) < \infty$. Pero esto implicaría $v \neq 0$, lo cual es absurdo según el inciso (a). Luego $v_n^L \nrightarrow 0$ y $\|v_n^L\|_\lambda \geqslant \alpha > 0$ para toda n pasando a una subsucesión.

□

Ya tenemos las herramientas necesarias para probar que cada $u \in \mathcal{M}$ es el único máximo global de $\Phi|_{\hat{H}(u)}$.

Proposición 4.5. *(a)* $\widehat{H}(w) \cap \mathcal{M} \neq \varnothing$ *para toda* $w \in H \backslash F$.

(b) Si $u \in \mathcal{M}$, entonces

$$\Phi(u+w) < \Phi(u) \qquad \textit{siempre que } u+w \in \widehat{H}(u), w \neq 0.$$

Por tanto u es el único máximo global de $\Phi|_{\hat{H}(u)}$.

Demostración. (a) Primero notemos que $\widehat{H}(w) = \widehat{H}(w^L/\|w^L\|_\lambda)$ para toda $w \in H$, por lo que podemos suponer $w \in S^L$ sin pérdida de generalidad. Requeriremos probar que $\Phi \leqslant 0$ en $\widehat{H}(w)\backslash B_R(0)$ para R suficientemente grande. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una sucesión $(u_n) \subset \widehat{H}(w)$ tal que $\|u_n\|_\lambda \to \infty$ y $\Phi(u_n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos $v_n := u_n/\|u_n\|_\lambda$. Del Lema 4.4 concluimos $v_n \rightharpoonup 0$, y como $\widehat{H}(w)$ es dimensión finita, llegaríamos a que $v_n \to 0$, lo cual es absurdo ya que $\|v_n\|_\lambda = 1$. Luego $\Phi \leqslant 0$ en $\widehat{H}(w)\backslash B_R(0)$.

Sustituyendo tenemos que

$$\Phi(sw) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{p}s^p \int_\Omega |w|^p > 0 \tag{4.7}$$

siempre que s sea suficientemente chica, digamos $s \leqslant s_0$ (esto porque $p \in (2, 2^*)$). Como Φ es continua y $\overline{B_R(0)} \cap \widehat{H}(w)$ es un subconjunto compacto de $H(w)$ por ser $H(w)$ de dimensión finita, Φ alcanza un máximo en $\widehat{H}(w)$ que cumple $0 < \max_{u \in \hat{H}(w)} \Phi(u)$. Además,

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}\|u\|_\lambda - \frac{1}{p}|u|_p^p < 0 \text{ para toda } u \in \widehat{H}(w) \cap F,$$

así que el máximo u_0 que alcanza Φ debe cumplir $u_0^L \neq 0$ y entonces $u_0 \in E\backslash F$. Luego u_0 es un punto crítico de $\Phi|_{\hat{H}(w)}$ y por tanto $u \in \mathcal{M}$.

(b) Para $u \in \mathcal{M}$ sea $w \in H\backslash\{0\}$ tal que $u + w \in \widehat{H}(u)$. Podemos escribir

$u + w = (1+s)u + v$, donde $s \geqslant -1$ y $v = v^E + v^0 \in F$. Denotemos

$$B(a,b) := \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla b - \lambda ab, \qquad a, b \in H.$$

Calculando tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Phi(u+w) - \Phi(u) \\
&= \frac{1}{2}[B(u+w, u+w) - B(u,u)] + \frac{1}{p}\int_\Omega (|u|^p - |u+w|^p) \\
&= \frac{1}{2}[B((1+s)u+v, (1+s)u+v) - B(u,u)] \\
&+ \frac{1}{p}\int_\Omega (|u|^p - |u+w|^p) \\
&= \frac{1}{2}\big([(1+s)^2 - 1]B(u,u) + 2(1+s)B(u,v) + B(v,v)\big) \\
&+ \frac{1}{p}\int_\Omega (|u|^p - |u+w|^p) \\
&= -\frac{\|v^E\|_\lambda^2}{2} + B(u, s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v) \\
&+ \frac{1}{p}\int_\Omega (|u|^p - |u+w|^p) \\
&= -\frac{\|v^E\|_\lambda^2}{2} + A,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde

$$A := \int_\Omega \left(|u|^{p-2}u[s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v] + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{p}|u+w|^p \right)$$

y en el último paso se utilizó

$$0 = \Phi'(u)z = B(u,z) - \int_\Omega |u|^{p-1}uz$$

debido a que $z := s(\frac{s}{2}+1)u + (1+s)v \in H(u)$. Finalmente, como $w \not\equiv 0$ en un conjunto de medida positiva, el Lema (4.3) y (4.8) implican que $\Phi(u+w) < \Phi(u)$.

□

4.3. Teoremas de existencia para el caso indefinido

Una consecuencia de que $\mathcal{M}$ no sea una variedad diferenciable es que los espacios tangentes a $\mathcal{M}$ no están bien definidos, lo cual impide definir el flujo gradiente negativo sobre una variedad y hace imposible aplicar los métodos de minimización introducidos en los capítulos anteriores. Sin embargo, podemos inspirarnos en ellos para encontrar una solución. Dado $u \in H\backslash F$, denotemos por $\widehat{m}(u)$ al único máximo global de $\Phi|_{\hat{H}(u)}$ (recordemos que $\widehat{H}(u) := \mathbb{R}^+ u^L \oplus F$). Queremos probar que

$$\widehat{m} : H\backslash F \to \mathcal{M}$$

es continuo y

$$m := \widehat{m}|_{S^L} : S^L \to \mathcal{M}$$

un homeomorfismo, donde S^L denota la esfera unitaria en L. Esto tiene la ventaja de que S^L es una subvariedad de clase C^∞, pero antes necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.6. *(a) Para cada subconjunto $\mathcal{W} \subset S^L$ compacto existe una constante $C_{\mathcal{W}} > 0$ tal que $\|\widehat{m}(u)\|_\lambda \leqslant C_{\mathcal{W}}$ para toda $u \in \mathcal{W}$.*

(b) Existe $\delta > 0$ tal que $\|m(w)^L\|_\lambda > \delta$ para todo $w \in H\backslash F$.

Demostración. (a) Procediendo por contradicción supongamos que existe una sucesión (u_n) en S^L convergente (con respecto a la norma $\|\cdot\|_\lambda$) a una función $u \in S^L$ y tal que $\|\widehat{m}(u_n)\|_\lambda \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Es claro que pasando a una subsucesión (u_n) también converge a u con respecto a la norma $|\cdot|_p$, ya que $|u_n|_p \leqslant C\|u_n\| = C$ (i.e. (u_n) es acotada en

$L^p(\Omega)$) y la inclusión de $L^p(\Omega)$ en H es compacta. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $s_n \in \mathbb{R}^+$ y $v_n \in F$ tales que $\widehat{m}(u_n) = s_n u_n + v_n$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(\widehat{m}(u_n)) &= \frac{1}{2}(\|\widehat{m}(u_n)^L\|_\lambda^2 - \|\widehat{m}(u_n)^E\|_\lambda^2) - \frac{1}{p}\,|\widehat{m}(u_n)|_p^p \\
&= \frac{1}{2}(s_n^2 - \|v_n\|_\lambda^2) - \frac{1}{p}\,|s_n u_n + v_n|_p^p \\
&= \frac{1}{2}(s_n^2 - \|v_n\|_\lambda^2) - s_n^p \left|u_n + \frac{v_n}{s_n}\right|_p^p \\
&\leqslant s_n^2 \left(\frac{1}{2} - s_n^{p-2}\left|u_n + \frac{v_n}{s_n}\right|_p^p\right).
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$s_n^{p-2}\left|u_n + \frac{v_n}{s_n}\right|_p^p \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Para empezar notemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left|u_n + \frac{v_n}{s_n}\right|_p^p \geqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pues de lo contrario

$$\left|u_n + \frac{v_n}{s_n}\right|_p^p \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

pasando a una subsucesión, y entonces $u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{v_n}{s_n} \notin F$ tomando el límite en $L^p(\Omega)$. Pero F es un subespacio de dimensión finita de $L^p(\Omega)$ y por tanto es cerrado en $L^p(\Omega)$, así que $u \in F$, lo cual es absurdo. Concluimos que dicha constante $C > 0$ existe.

Ahora notemos que para toda $w \in \mathcal{M}$ se cumple

$$\Phi'(w)w = \|w^L\|_\lambda^2 - \|w^E\|_\lambda^2 - |w|_p^p = 0,$$

de modo que $\|w^L\|_\lambda^2 - \|w^E\|_\lambda^2 = |w|_p^p$. Aplicando esto a nuestra situación y notando que $\Phi(\widehat{m}(u_n)) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ llegamos a

$$\begin{aligned}\Phi(\widehat{m}(u_n)) &= \frac{1}{2}(\|\widehat{m}(u_n)^L\|_\lambda^2 - \|\widehat{m}(u_n)^E\|_\lambda^2) - \frac{1}{p}\,|\widehat{m}(u_n)|_p^p \\ &= \frac{p-2}{2p}(\|\widehat{m}(u_n)^L\|_\lambda - \|\widehat{m}(u_n)^E\|_\lambda) \\ &= \frac{p-2}{2p}(s_n^2 - \|v_n\|^2) > 0.\end{aligned}$$

Siguiéndose así que $s_n^2 > \|v_n\|^2$, y como $\|\widehat{m}(u_n)\|^2 = s_n^2 + \|v_n\|^2$, necesariamente $s_n^2 \to \infty$.

Finalmente tenemos

$$s_n^{p-2}\left|u_n + \frac{v_n}{s_n}\right|_p^p \to \infty \quad \text{cuando}\, n \to \infty,$$

y por tanto

$$\Phi(\widehat{m}(u_n)) \leqslant s_n^2\left(\frac{1}{2} - s_n^{p-2}\left|u_n + \frac{v_n}{s_n}\right|_p^p\right) \to -\infty \quad \text{cuando}\, n \to \infty,$$

lo cual es absurdo.

Concluimos que para toda sucesión (u_n) convergente en S^L existe una constante $C > 0$ tal que $\|\widehat{m}(u_n)\| \leqslant C$, lo cual es equivalente a probar este lema.

(b) Sean $\rho > 0$, $w \in L\backslash\{0\}$, y $w_\rho = \frac{w}{\|w\|_\lambda}\rho$. Entonces

$$\Phi\left(w_\rho\right) = \frac{1}{2}\|w_\rho\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|w_\rho|_p^p = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{p}|w_\rho|_p^p.$$

Por las desigualdades de Poincaré y Hölder existe $C > 0$ (que depende sólo de Ω y p) tal que $|w_\rho|_p \leqslant C\|w_\rho\|_\lambda = C\rho$. Luego, $\Phi(w_\rho) \geqslant \frac{1}{2}\rho^2 -$

$\frac{C^p}{p}\rho^p =: C_\rho > 0$ si ρ es lo suficientemente pequeño. Como $w_\rho \in \widehat{E}(w)$, tenemos que $\Phi(\widehat{m}(w)) \geqslant \Phi(w_\rho) \geqslant C_\rho > 0$ y finalmente

$$\|\widehat{m}(w_n)^L\|_\lambda^2 \geqslant \|\widehat{m}(w_n)^L\|_\lambda^2 - \|\widehat{m}(w_n)^E\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|\widehat{m}(w_n)|_p^p = \Phi(\widehat{m}(w_n)) \geqslant C_\rho.$$

$\square$

Ya estamos listos para probar la siguiente proposición.

Proposición 4.7. *El funcional $\widehat{m} : E \backslash F \to \mathcal{M}$ es continuo y el funcional $m : S^L \to \mathcal{M}$ dado por $m(u) = \widehat{m}(u)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea (u_n) una sucesión en $E\backslash F$ tal que $u_n \to u$ con $u \notin F$. Como $\widehat{m}(u) = \widehat{m}(u^L/\|u^L\|)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u_n \in S^L$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Basta probar que toda subsucesión de $(\widehat{m}(u_n))$ tiene una subsucesión (que también denotamos por $\widehat{m}(u_n)$) tal que $\widehat{m}(u_n) \to \widehat{m}(u)$ cuando $n \to \infty$.

Escribamos $\widehat{m}(u_n) = s_n u_n + v_n$, donde $s_n \in \mathbb{R}^+$ y $v_n = v_n^E + v_n^0$ con $v_n^E \in E$ y $v_n^o \in E^0$. Del Lema 4.6 (a) se sigue que $(\widehat{m}(u_n))$ está acotada, así que podemos encontrar subsucesiones tales que $s_n \to s_* \in [0, \infty)$ y $v_n \rightharpoonup v_*$. Escribamos $\widehat{m}(u) = su + v$. De la Proposición 4.5 se sigue que

$$\Phi(\widehat{m}(u_n)) \geqslant \Phi(su_n + v) \to \Phi(su + v) = \Phi(\widehat{m}(u)) \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Escribiendo $I(w) = \frac{1}{p}\int_\Omega |w|^p dx$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(\widehat{m}(u)) \leqslant \lim_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(u_n)) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}(s_n^2 - \|v_n^E\|_\lambda^2 - I(s_n^2 u_n + v_n)\right) \\
&= \frac{1}{2}(s_*^2 - \|v_*\|_\lambda^2) - I(s_*^2 u + v_*) \\
&= \Phi(s_* u + v_*) \leqslant \Phi(\widehat{m}(u)),
\end{aligned}$$

ya que I es continuo. Entonces las desigualdades de arriba se vuelven igualdades y llegamos a que $\Phi(\widehat{m}(u)) = \Phi(su + v) = \Phi(s_* u + v_*)$. De la unicidad de $\widehat{m}(u)$ se sigue que $s = s_*$ y $v = v_*$ y concluimos

$$s_n \to s, \quad v_n^E \to v^E, \quad v_n^0 \to v^0,$$

debido a que E^0 y E son subespacios de H de dimensión finita (y por ende la convergencia débil es equivalente a la convergencia fuerte). Hemos probado que toda subsucesión de $(\widehat{m}(u_n))$ contiene una subsucesión convergente a $\widehat{m}(u)$, así que hemos probado que $(\widehat{m}(u_n))$ converge a $\widehat{m}(u)$,

Por último notemos que el funcional continuo $F : \mathcal{M} \to S^L$ dado por $F(u) = u^L/\|u^L\|$ es inverso de $\widehat{m}$. En efecto, para toda $u \in \mathcal{M}$ tenemos

$$\widehat{m}(F(u)) = \widehat{m}(u^L/\|u^L\|) = \widehat{m}(u) = u.$$

Si $u \in S^L$, entonces $u = u^L$ y entonces

$$F(\widehat{m}(u)) = \widehat{m}(u)^L/\|\widehat{m}(u)^L\| = u^L/\|u^L\| = u.$$

Como F es continua, concluimos que m es un homeomorfismo. $\square$

Consideremos los funcionales

$$\widehat{\Psi} : L\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \, \widehat{\Psi}(u) = \Phi(\widehat{m}(u)) \quad y \quad \Psi(u) := \widehat{\Psi}|_{S^L} : S^L \to \mathcal{M}.$$

Lema 4.8. *El funcional $\widehat{\Psi}$ es continuamente diferenciable en $L\backslash\{0\}$ y su derivada está dada por*

$$\widehat{\Psi}'(u)z = \frac{\|\widehat{m}(u)^L\|_\lambda}{\|u\|_\lambda}\Phi'(\widehat{m}(u))z \quad \textit{para toda } u, z \in L, \; u \neq 0. \tag{4.9}$$

Demostración. Sea $u \in L\backslash\{0\}$, $z \in L$ y escribamos $\widehat{m}(u) = t_u u + v_u$ con $v_u \in F$. Por el Teorema del Valor Medio tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(u+sz) - \widehat{\Psi}(u) &= \Phi(t_{u+sz}(u+sz) + v_{u+sz}) - \Phi(t_u u + v_u)\\ &\leqslant \Phi(t_{u+sz}(u+sz) + v_{u+sz}) - \Phi(t_{u+sz}u + v_{u+sz})\\ &= \Phi'(t_{u+sz}u + v_{u+sz} + \tau_s t_{u+sz}sz))t_{u+sz}sz,\end{aligned}$$

para t suficientemente pequeña y para algún $\tau_s \in (0,1)$.

De forma parecida se puede probar que

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(u+sz) - \widehat{\Psi}(u) &\geqslant \Phi(t_u(u+sz) + v_u) - \Phi(t_u u + v_u)\\ &= \Phi'(t_u u + v_u + \sigma_s t_u sz)t_u sz.\end{aligned}$$

para alguna s pequeña y $\sigma_s \in (0,1)$. Combinando estas dos desigualdades obtenemos

$$\widehat{\Psi}'(u)z = \lim_{s\to 0}\frac{\widehat{\Psi}(u+sz) - \widehat{\Psi}(u)}{s} = t_u\Phi'(t_u u + v_u)z = \frac{\|\widehat{m}(u)^L\|_\lambda}{\|u\|_\lambda}\Phi'(\widehat{m}(u))z.$$

□

Notemos que L es un subespacio cerrado de H porque es el complemento ortogonal de F que es de dimensión finita. Entonces L es un espacio de Hilbert con el producto escalar que induce $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ y por tanto la esfera unitaria $S^L := \{u \in L \ : \ \|u\|_\lambda^2 = 1\}$ en L es una subvariedad de L de clase C^∞. El espacio tangente a S^L en un punto $u \in S^L$ se define como

$$T_u N := ker\rho'(u),$$

donde $\rho : L \to \mathbb{R}$ es el funcional dado por $\rho(v) = \|v\|_\lambda^2$. Del Lema 3.1 se sigue que $\rho'(u)v = 2\langle u, v\rangle_\lambda$, y por tanto, $T_u N = \{v \in L \ : \ \langle u, v\rangle_\lambda = 0\}$ para cada $u \in S^L$.

Sea $u \in S^L$. Entonces

$$\nabla\widehat{\Psi}(u) = \frac{\|m(u)^L\|}{\|u\|_\lambda}\nabla\Phi(m(u)) = \|m(u)^L\|\nabla\Phi(m(u)) \neq 0,$$

por lo que la derivada de Ψ (o de $\widehat{\Psi}|_{S^L}$) existe, es continua y está dada por

$$\nabla\Psi(u) = \nabla_{S^L}\widehat{\Psi}(u) := \nabla\widehat{\Psi}(u) - \frac{\langle\nabla\widehat{\Psi}(u), \nabla\rho(u)\rangle}{\|\nabla\rho(u)\|^2}\nabla\rho(u). \tag{4.10}$$

Ahora podemos enunciar las siguientes definiciones.

Definición 4.1. (a) Diremos que una sucesión $(u_n) \subset S^L$ es de *Palais-Smale para* Ψ si (u_n) es acotada y $\|\nabla\Psi(u)\| \to 0$´cuando $n \to \infty$.

(b) Diremos que Ψ satisface la condición de Palais-Smale si toda sucesión de Palais-Smale para Ψ contiene una subsucesión convergente.

(c) Diremos que una sucesión $(u_n) \subset H$ es de Palais-Smale para Φ si (u_n) es acotada y $\|\nabla\Phi(u)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Cabe recalcar el pequeño abuso de notación que se está haciendo al denominar de la misma manera las sucesiones de Palais-Smale de Ψ y Φ. Recordemos que $\Psi := \widehat{\Psi}|_{S^L}$ por definición, así que cuando hablamos de sucesión de Palais-Smale para Ψ realmente nos referimos a sucesiones de Palais-Smale de $\widehat{\Psi}$ sobre S^L. Para Φ tomamos la definición usual, ya que, por lo que probaremos en la siguiente proposición, las sucesiones de Palais-Smale de $\Phi|_{\mathcal{M}}$ y Ψ se corresponden por medio del homeomorfismo m. Esto nos permite remitir el problema de definir los espacios tangentes a Φ al de definirlos sobre Ψ.

Proposición 4.9. *1. Si (u_n) es una sucesión de Palais-Smale para Ψ en S^L, entonces $(m(u_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para Φ. Si*

$(w_n) \subset \mathcal{M}$ es una sucesión de Palais-Smale acotada para Φ en H, entonces $(m^{-1}(w_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para Ψ en S^L.

2. *u es punto crítico de Ψ en S^L si y sólo si $m(u)$ es un punto crítico de Φ.*

Demostración. 1. Del lema anterior tenemos

$$\widehat{\Psi}'(u) = \frac{\|m(u)^L\|_\lambda}{\|u\|_\lambda}\Phi'(\widehat{m}(u)) = \|m(u)^L\|_\lambda \Phi'(m(u)) \quad \text{si } u \in S^L. \quad (4.11)$$

Sea (u_n) es una sucesión de Palais-Smale para Ψ en S^L, de modo que $(\Psi(u_n))$ está acotada y por tanto $\Phi(m(u_n))$ también.

Además tenemos que $\nabla\Psi(u_n) \to 0$ implica

$$\nabla\widehat{\Psi}(u_n) = \|m(u_n)^L\|_\lambda \nabla\Phi(m(u_n)) \to 0.$$

En efecto, rescatando la prueba del Lema 3.5, de la fórmula (4.10) se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $t_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\Psi(u_n) = \nabla\Psi(u_n) + t_n\nabla\rho(u_n).$$

Además

$$\langle\nabla\Psi(u_n), u_n\rangle_\lambda = \langle\|m(u_n)^L\|_\lambda \nabla\Phi(m(u_n)), u_n\rangle_\lambda = 0$$

porque $m(u_n) \in \mathcal{M}$ y, como $(u_n) \in S^L$,

$$\langle\nabla\Psi(u_n), u_n\rangle_\lambda \leqslant \|\nabla\Psi(u_n)\| \to 0 \text{ si } n \to \infty,$$

y

$$0 = \langle\nabla\Psi(u_n), u_n\rangle_\lambda = \langle\nabla\Psi(u_n), u_n\rangle_\lambda + t_n\langle\nabla\rho(u_n), u_n\rangle_\lambda,$$

concluimos $t_n\langle\nabla\rho(u_n), u_n\rangle_\lambda \to 0$ cuando $n \to \infty$. Claramente

$$\langle\nabla\rho(u_n), u_n\rangle_\lambda = \langle u_n, u_n\rangle_\lambda = \|u_n\|_\lambda^2 = 1,$$

así que $t_n \to 0$, y por tanto

$$\|\nabla\Psi(u_n)\| \leqslant \|\nabla\Psi(u_n)\| + t_n\|\nabla\rho(u_n)\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Prosiguiendo con la prueba notemos que $\|m(u_n)^L\|_\lambda \geqslant c > 0$ en virtud del Lema 4.6 (b), así que concluimos $\Phi'(m(u_n)) \to 0$. Luego $(m(u_n))$ es una sucesión de Palais-Smale para Φ.

Por otro lado, si $(w_n) \subset \mathcal{M}$ es una sucesión de Palais-Smale acotada para Φ en H, entonces aplicando (4.11) a $(m^{-1}(w_n))$ se sigue que

$$\widehat{\Psi}'(m^{-1}(w_n)) = \|w_n\|_\lambda\Phi'(w_n) = \Phi'(u_n) \to 0.$$

Esto implica que $\nabla\Psi(m^{-1}(w_n)) \to 0$.

2. La prueba de este resultado es parecida a la del Lema 3.3(b), así que sólo adaptaremos los argumentos. Supongamos que $u \in S^L$ es un punto crítico de Ψ sobre S^L (o lo que es lo mismo, u es un punto crítico de $\widehat{\Psi}|_{S^L}$), lo que significa

$$\Psi'(u)v = 0 \quad \forall v \in T_uS^L, \tag{4.12}$$

donde $T_uS^L := ker\rho'(u) = \{v \in H \ : \ \nabla\rho(u)\cdot v = 0\}$ denota el espacio tangente a S^L en u y $\rho : H \to \mathbb{R}$ está dado por $\rho(u) = \|u\|_\lambda^2$. Como $u \in S^L$, entonces $\nabla\rho(u)\cdot u = 2\langle u, u\rangle_\lambda = 2$ y $u \notin T_uS^L$, de lo que se sigue que el funcional definido sobre $T_uS^L \times \mathbb{R}$ por la asignación

$(v, t) \longmapsto v + tu$ es un isomorfismo sobre L. Luego para $w \in L$ podemos encontrar $v \in T_u S^L$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $w = v + tu$ y por tanto

$$\widehat{\Psi}'(u)w = \widehat{\Psi}'(u)(v + tu) = \Psi'(u)v + t\widehat{\Psi}'(u)u.$$

Escribiendo $m(u) = su + \overline{v}$ con $s \in \mathbb{R}^+$ y $\overline{v} \in F$, llegamos a

$$\begin{aligned} s\Psi(u)u = \|m(u)^L\|_\lambda \Phi'(m(u))su &= \|m(u)^L\|_\lambda \Phi'(m(u))(su + \overline{v}) \\ &= \|m(u)^L\|_\lambda \Phi'(m(u))m(u) = 0, \end{aligned}$$

dado que $\Phi'(m(u))\overline{v} = 0$ porque $m(u) \in \mathcal{M}$, y entonces $\widehat{\Psi}(u)u = 0$. Luego

$$\|m(u)^L\|_\lambda \Phi'(m(u))w = \widehat{\Psi}'(u)w = \Psi'(u)v + t\widehat{\Psi}'(u)u = 0$$

para toda $w \in L$, y como $\|m(u)^L\| > 0$, llegamos a que $\Phi'(m(u))w = 0$ para toda $w \in L$. Como $\Phi'(m(u))v = 0$ para toda $v \in F$ y $H = L \oplus F$, concluimos que $m(u)$ es un punto crítico de Φ.

Ahora sea $u \in S^L$ y supongamos que $m(u)$ es un punto crítico de Φ. Entonces

$$\widehat{\Psi}'(u) = \|m(u)^L\|_\lambda \Phi'(m(u)) = 0,$$

y como $m(u) \neq 0$, se sigue que $\widehat{\Psi}'(u) = 0$. Luego $\Psi'(u) = 0$ y concluimos que u es un punto crítico de Ψ sobre S^L.

$\square$

4.4. Teoremas de existencia

Proposición 4.10. *Φ satisface la condición de Palais-Smale para elementos de $\mathcal{M}$, es decir, si $(u_n) \subset \mathcal{M}$ es una sucesión de Palais-Smale para Φ en H,* *entonces existe una subsucesión de (u_n) que converge en H y (y por tanto en $\mathcal{M}$).*

Demostración. Sea $(u_n) \subset \mathcal{M}$ una sucesión de Palais-Smale para Φ, es decir, $|\Phi(u_n)| \leqslant d$ para algún $d > 0$ y $\Phi'(u_n) \to 0$.

Si (u_n) no está acotada, entonces $\|u_n\|_\lambda \to \infty$, y como $\Phi(u_n) = \frac{p-2}{2p}|u_n|_p^p \geqslant 0$, del Lema 4.4 se sigue que

(a) la sucesión $v_n := u_n/\|u_n\|_\lambda$ converge débilmente a cero,

(b) existe una $\alpha > 0$ tal que $\|v_n^L\|_\lambda \geqslant \alpha$ (pasando a una subsucesión).

Recordemos de la Proposición 4.5 (b) que cada u_n es un máximo de $\Phi|_{\widehat{H}(u_n)}$, así que

$$d \geqslant \Phi(u_n) \geqslant \Phi(sv_n^L) \geqslant \frac{1}{2}s^2\alpha^2 - \frac{s^p}{p}\int_\Omega |v_n^L|^p.$$

Como $v_n \rightharpoonup 0$, entonces $v_n^L \rightharpoonup 0$, y por el teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 2.1) llegamos a que $v_n^L \longrightarrow 0$ en $L^p(\Omega)$ pasando a una subsucesión. Luego

$$\int_\Omega |v_n^L|^p \to 0,$$

y entonces $d \geqslant \frac{1}{2}s^2\alpha^2$ para toda $s > 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, (u_n) está acotada en H y converge débilmente a algún $u \in H$. De hecho, como E y E^0 son de dimensión finita podemos suponer que $u_n^E \to u^E$ y $u_n^0 \to u^0$ fuertemente, así que basta probar $u_n^L \to u^L$ fuertemente pasando a una subsucesión.

Como $0 = \Phi'(u_n)u_n = \|u_n^L\|_\lambda^2 - \|u_n^E\|_\lambda^2 - |u_n|_p^p$ y (u_n) es una sucesión de Palais-Smale, $\Phi'(u_n)u \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por convergencia débil y

Rellich-Kondrashov, esto implica que $\|u^L\|_\lambda - \|u^E\|_\lambda - |u|_p^p = 0$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^L\|_\lambda = \lim_{n\to\infty} \|u_n^E\|_\lambda^2 + |u_n|_p^p = \|u^E\|_\lambda^2 + |u|_p^p = \|u^L\|_\lambda^2,$$

y como hay convergencia débil y en norma, $u_n^L \to u^L$ fuertemente. Concluimos que $u_n \to u$ pasando a una subsucesión. □

Antes de probar el Teorema 1.2 (el cual asegura la existencia de un estado fundamental para Φ cuando $\lambda \geqslant \lambda_1$), enunciamos una variante del principio variacional de Ekeland que toma en consideración restricciones.

Lema 4.11. *Sea V un espacio de Banach y sean $F : V \to \mathbb{R}$ y $G : V \to \mathbb{R}$ funciones Fréchet-diferenciables tales que*

$$-\infty < \inf_C F, \qquad C := \{v \in V \ : \ G(v) = 0\}$$

y $G'(v) \neq 0$ si $G(v) = 0$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $v_\varepsilon \in C$ tal que

$$F(v_\varepsilon) \leqslant \inf_C F + \varepsilon^2$$

y existe $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|F'(v_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon G'(v_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(V,\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon.$$

Para una prueba de este resultado consulte [4, Corolario 3.4].

Demostración del Teorema 1.2. Sea (w_n) una sucesión minimizante para Ψ. Por el Principio Variacional de Ekeland (Lema 4.11) podemos suponer $\Psi'(w_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En efecto, aplicando el Lema 4.11 con $V = L$, $F = \widehat{\Psi}$, $G(u) = \|u\|_\lambda^2 - 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ tenemos que existen $(w_n) \subset S^L$ y $(\zeta_n) \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\widehat{\Psi}(w_n) - \inf_{S^L} \widehat{\Psi} < \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \left\|\widehat{\Psi}'(w_n) - \zeta_n G'(w_n)\right\|_{\mathcal{L}(L,\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{n}. \qquad (4.13)$$

Notemos que por el Lema 4.8 y las definiciones de $\mathcal{M}$ y m,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &\geqslant \left\| \widehat{\Psi}'(w_n) - \zeta_n G'(w_n) \right\|_{\mathcal{L}(L,\mathbb{R})} \\
&\geqslant \left| \widehat{\Psi}'(w_n) \frac{m(w_n)^L}{\|m(w_n)^L\|_\lambda} - \zeta_n G'(w_n) \frac{m(w_n)^L}{\|m(w_n)^L\|_\lambda} \right| \\
&= \left| \frac{\|m(w_n)^L\|_\lambda}{\|m(w_n)^L\|_\lambda} \Phi'(m(w_n))m(w_n) - \zeta_n G'(w_n) \frac{m(w_n)^L}{\|m(w_n)^L\|_\lambda} \right| \\
&= |\zeta_n| \left| G'(w_n) \frac{m(w_n)^L}{\|m(w_n)^L\|_\lambda} \right|. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Como para $u, v \in L$,

$$G'(u)v = 2 \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda uv \; dx$$

y $m(w_n)^L = \|m(w_n)^L\|_\lambda w_n$, se sigue que

$$G'(w_n) \frac{m(w_n)^L}{\|m(w_n)^L\|_\lambda} = G'(w_n) w_n = 2\|w_n\|_\lambda^2 = 2.$$

Luego (4.14) implica que

$$\zeta_n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \qquad (4.15)$$

Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\|G'(w_n)\|_{\mathcal{L}(L,\mathbb{R})}$ está uniformemente acotada, así que de (4.13) y (4.15) se sigue

$$\widehat{\Psi}'(w_n) \to 0.$$

Como se argumenta en el primer inciso de la Proposición 4.9, esto implica que $\Psi(w_n) \to 0$.

Entonces (w_n) es una sucesión de Palais-Smale para Ψ. Si definimos $u_n := m(w_n)$, entonces (u_n) es una sucesión de Palais-Smale para Φ. Como Φ satisface la condición de Palais-Smale para sucesiones en $\mathcal{M}$, $u_n \to u$

pasando a una subsucesión, y por lo tanto, $w_n \to m^{-1}(u)$. Es decir, Ψ cumple la condición de Palais-Smale (Proposición 4.9). En consecuencia (w_n) es una sucesión de Palais-Smale para Ψ. Luego $w_n \to w \in S^L$ pasando a una subsucesión. Definiendo $u_n := m(w_n)$ obtenemos una sucesión minimizante para Φ, pues $\inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi = \inf_{u \in S^L} \Psi$ debido a que m es un homeomorfismo. Entonces $u_n = m(w_n) \to m(w) =: u \in \mathcal{M}$ y $\Phi(u_n) \to \Phi(u) = \inf_{w \in \mathcal{M}} \Phi$ y, por lo tanto, Φ alcanza un estado fundamental en $\mathcal{M}$. $\square$

5. No linealidades más generales

Mencionamos en la introducción que los resultados obtenidos hasta el momento no son exclusivos de la no linealidad $|u|^{p-2}u$. Hay versiones de los Teoremas 1.1 y 1.2 para no linealidades $f(x,u)$ más generales.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y suave, y consideremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u &= f(x,u) \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

1. $|f(x,u)| \leqslant a(1 + |u|^{p-1})$ para alguna $a > 0$ y $2 < p < 2^*$,
2. $f(x,u) = o(u)$ uniformemente en x conforme $u \longrightarrow 0$,
3. $u \longmapsto \frac{f(x,u)}{|u|}$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$,
4. $\frac{F(x,u)}{u^2} \longrightarrow \infty$ uniformemente en x conforme $|u| \longrightarrow \infty$,

donde $F : \mathbb{R} \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es el funcional dado por

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds.$$

Definamos $\Phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Phi(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) - I(u),$$

donde $I(u) = \int_\Omega F(x,u)$.

Bajo estas hipótesis, se puede adaptar el método de la variedad de Nehari para demostrar la existencia de un estado fundamental para Φ y, si I es par, también se puede demostrar la existencia de una infinidad de soluciones, véase [10, Theorem 12].

Como ejemplos de no linealidades que cumplen estas hipótesis, podemos considerar no linealidades con coeficientes acotados que dependan de la variable espacial x, *i.e.*, $f(x,u) := a(x)|u|^{p-2}u$.

Para cerrar la tesis, mencionamos dos limitantes del método de la variedad de Nehari. Este método no se puede usar si la no linealidad tiene un crecimiento crítico ($p = 2^*$) o supercrítico ($p > 2^*$), por ejemplo,

$$f(u) = |u|^{2^*-2}u, \qquad f(u) = |u|^{2^*}u,$$

o si la no linealidad es subcrítica en un sentido generalizado, por ejemplo,

$$f(u) = \frac{|u|^{2^*-2}u}{\ln(e+|u|)^\alpha}, \quad \alpha \geqslant 0.$$

En estos casos, el método falla debido a la falta de encajes de Sobolev compactos.

Referencias

[1] S. Chandrasekhar: An Introduction to the Study of Stellar Structure. Dover Publications (1939).

[2] M. Clapp: Análisis Matemático. Colección Papirhos, Serie Textos Num. 2, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1a edición (2015).

[3] R. Courant: y D. Hilbert: Methods of mathematical physics Vol. 1. Interscience Publishers, 399 (1953).

[4] I. Ekeland: On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 47: 324–353 (1974).

[5] A. Gierer, H. Meinhardt: A theory of biological pattern formation. Kybernetik 12, 30–39 (1972).

[6] D. Gilbarg, N. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2001).

[7] J. Mawhin: Simple Proofs of the Hadamard and Poincaré–Miranda Theorems Using the Brouwer Fixed Point Theorem. The American Mathematical Monthly, 126:3, 260-263 (2019).

[8] Z. Nehari: On a class of nonlinear second-order differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 95. 101-123 (1960).

[9] Z. Nehari: Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations. Acta Math. 105. 141-175 (1961).

[10] A. Szulkin y T. Weth: The method of Nehari manifold. Handbook of nonconvex analysis and applications, 597–632, Int. Press, Somerville, MA. (2010).