Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Modelo de riesgo con prima dependiente de la reserva

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Edna Marisol Arreola Silva

TUTORA

Ana Meda Guardiola

Ciudad de México 2021

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del jurado

1. Datos del alumno
   Arreola
   Silva
   Edna Marisol
   5583856743
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   313016282
2. Datos del tutor
   Dra.
   Ana
   Meda
   Guardiola
3. Datos del sinodal 1
   Act.
   Ángel Manuel
   Godoy
   Aguilar
4. Datos del sinodal 2
   Mto. en D.
   José Rubén
   Fernández
   Román
5. Datos del sinodal 3
   Act.
   Edgar Gerardo
   Alarcón
   González

6. Datos del sinodal 4

   Fis.

   Jimmy

   Hernández

   Morales

7. Datos del trabajo escrito

   Modelo de riesgo con prima dependiente de la reserva

   103 pp.

   2021

Dedicación

A mi padre.

Agradecimientos

Sin mi padre no habría alguna historia para contar; gracias Antonio Arreola por estar ahí en los días complicados, en los días tristes, en las madrugadas cuando para nosotros comenzaba el día, en mis desvelos, en mis decisiones, en mis triunfos y alegrías.

Gracias a Victor Chan por ser el más entrañable amigo en mi vida, aquella persona que nunca me dejó rendirme y que siempre veía en mí mucho más de lo que yo veía, gracias por todo tu apoyo, en todos los aspectos.

Gracias a Ana Meda por ser no sólo mi asesora de tesis sino una amiga que me escuchó en mis etapas no tan buenas y no me dejó caer cuando todo parecía muy complicado. Gracias por sus observaciones, por ayudarme a hacer un trabajo de calidad y por ayudarme a sentirme orgullosa de mí misma.

Un eterno agradecimiento con el profesor José Galaviz por ayudarme en la última etapa, creer en mí y motivarme para continuar.

Sobre todo, gracias a la UNAM por todo lo que me ha brindado; por formarme académicamente, permitirme dar clases y ayudarme a ser la persona que soy ahora.

Índice general

I Primera parte **1**

1. Introducción **2**

2. Modelo de riesgo con prima dependiente de la reserva **10**

2.1. Desigualdad de Cramér - Lundberg 15

2.2. Aproximación de Cramér - Lundberg 28

3. Discusión de casos especiales **38**

3.1. Reclamos exponenciales 39

3.2. Un caso más general 57

3.2.1. Probabilidad de extinción en una población 66

4. Cambio de medida **73**

5. Apéndice **82**

5.1. Probabilidad 82

5.2. Procesos estocásticos 86

5.3. Cálculo y análisis real 90

Lista de principales símbolos	
$\psi(u)$	Probabilidad de ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ con capital inicial u, es decir, $R_0 = u$
β	Tasa del proceso Poisson $N(t)$
A_t	Proceso Poisson compuesto, $A_t = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$
$B(x)$	Función de distribución de U_1 evaluada en x
$\bar{B}(x)$	Función de supervivencia de U_1 evaluada en x, es decir, $\bar{B}(x) = 1 - B(x)$
$\hat{B}(x)$	Función generadora de momentos de U_1 evaluada en x
$\psi_p(u)$	Probabilidad de ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ con capital inicial u en el modelo clásico con prima $p > 0$
$\psi_{p:\epsilon}(u)$	Probabilidad de ruina empezando en u en el modelo clásico modificado con prima $p > 0$ (intercambiar β por $\frac{\beta}{\epsilon}$ y U_k por ϵU_k)
γ^*	Coeficiente de ajuste en el modelo clásico
$\gamma^{(\epsilon)}$	Coeficiente de ajuste en el modelo clásico modificado
$u_{k,n}$	$\frac{k}{n}u$
$\bar{p}_{k,n}$	$\sup_{u_{k-1,n}\leq x\leq u_{k+1,n}} p(x)$
$\underline{p}_{k,n}$	$\text{ínf}_{u_{k-1,n}\leq x\leq u_{k+1,n}} p(x)$
R_t^p	Proceso de riesgo con prima constante $p > 0$ cuando se quiere enfatizar que se tiene el modelo clásico
$R_u(t)$	Proceso de riesgo con capital inicial u en el tiempo t cuando se quiere enfatizar el capital inicial

Prólogo

La noción de riesgo es un concepto importante no sólo en el sector económico o financiero sino en todos aquellos sectores donde interesa la probabilidad de ciertos siniestros. En particular, en el caso de una aseguradora, es necesario contar con estrategias y métodos para el buen manejo del capital solvencia. Por lo tanto, uno de los propósitos de este trabajo es estudiar la incertidumbre que existe en las compañías aseguradoras sobre si éstas son capaces de cumplir con sus obligaciones, es decir, si en algún momento la compañía no pueda pagar alguna de las reclamaciones que se le presentan. Específicamente, nos interesa la probabilidad de que la reserva puede ser negativa en algún momento, ya que a ésto último lo consideramos como ruina del proceso. Esto se hace estudiando la dependencia de la ruina de los parámetros del proceso, tales como capital inicial, el número de reclamos y el tamaño de los reclamos, con el propósito de ponderar las consecuencias del riesgo de interés.

De manera general una compañía de seguros opera de la siguiente manera: un grupo de personas que está expuesto a un tipo determinado de accidentes, tales como choques de automóviles, incendios, robos etc., contrata un seguro donde cada una de estas personas paga una cantidad fija de dinero por unidad de tiempo, llamada prima a la compañía aseguradora. Ésta a su vez tiene la obligación de pagar al asegurado el monto total del daño en caso de accidente, en caso de que el siniestro no exceda la suma asegurada. Por lo tanto, aunque no se conozca con certeza cuantas personas requerirán de la protección de la compañía, ni el tamaño total de los daños que ocurrirán, el capital obtenido de las primas colectadas más el capital inicial de la compañía deben ser suficientes para solventar los gastos que se presenten. Sin duda una de las preguntas de mayor interés para la compañía aseguradora es la siguiente: ¿Hasta qué punto la compañía aseguradora puede solventarse?

En este trabajo, nos basaremos principalmente en el artículo Asmussen S., *Ruin probabilities via local adjusments*, [1]. Consideraremos la ruina de la compañia cuando la reserva es negativa, por lo que nos interesa saber con qué probabilidad esto podría suceder y además, conocer una expresión para dicha probabilidad, es por ello que en el capítulo 1, se dará una introducción al proceso de riesgo simple en el que la prima es constante y además, se darán definiciones básicas relacionadas al proceso de riesgo, se establecerá notación que se usará en los siguientes capítulos y se pondrá especial atención en la aproximación y la cota de Cramér-Lundberg terminando con algunos ejemplos de ello. En esta sección se considerarán principalmente Embrechts P., *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance* citada en [3] y Martínez A., *Análisis y simulación de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér - Lundberg*, [4].

En el primer capítulo se considera la prima constante, es decir, debido a que la prima depende del riesgo que se suscribe, el modelo clásico de Cramér - Lundberg puede ser aplicado a una cartera homogénea de riesgo, por ejemplo, una cartera de autos de un modelo específico. Sin embargo, podemos pensar en que el plan de la compañia, para ciertos productos, sea determinar la prima con base en la reserva actual. Esto podría ser, por ejemplo, en el ramo de gastos médicos donde la aseguradora cubre ciertos gastos en hospitales y el precio de algunos tratamientos cambia de acuerdo a la inflación. Así, la compañia aseguradora podría considerar una prima constante más un cierto factor que multiplique a la reserva. También podemos pensar en los seguros de vida que representan cierto ahorro para el asegurado, la prima que el cliente aporta se devalúa con el tiempo si no se invierte, entonces la compañia podría pensar a la prima como una función que represente cierto interés sobre la reserva. Por lo tanto, es muy útil expresar el comportamiento de la prima en una función y, por supuesto, ésta función debería depender de la reserva actual para considerar toda la información disponible al momento del corte del análisis de la reserva, es por ello que el siguiente capítulo es pensado para resolver este tema.

En el capítulo 2, se presenta un proceso de riesgo en el que la prima es dependiente de la reserva y además, se consideran algunos supuestos para la función que determina el comportamiento de la prima. El principal objetivo es obtener fórmulas exactas, aproximaciones y cotas superiores de la probabilidad de ruina del modelo dependiente de la reserva basándose en los resultados principales del modelo de riesgo simple. Se asume también que las distribuciones del tamaño de los reclamos son de cola ligera. Este capítulo se basará principalmente en Asmussen S., *Ruin probabilities* citado en [2].

En el capítulo 3, se discuten y desarrollan algunos casos especiales. El primero de ellos es cuando los reclamos se distribuyen exponencial, lo cual nos permite obtener explícitamente la probabilidad de ruina de este modelo, lo cual se conseguirá utilizando un proceso estocástico auxiliar llamado proceso de almacenamiento. En el segundo caso se considerará un modelo en el que ya no tenemos la particularidad de los saltos en la trayectoria que teníamos con los reclamos, ahora ponemos especial atención en un caso más general en el que si bien se cuentan con algunas suposiciones de las trayectorias, éstas ya no tienen por qué ser discontinuas pero se pretende aplicar la teoría de los dos primeros capítulos para encontrar la probabilidad de rebasar cierto nivel de estado en este modelo. Dentro de éste último caso, se dará un ejemplo en el que se aplicará lo anterior y se buscará encontrar la probabilidad de extinción de una población, bajo ciertas condiciones. Esta sección considerará principalmente Karlin S. y Taylor H. en *A second course in Stochastic Processes*, citado en [5] para la teoría de un caso más general y en Gleason M., *Modelos de Wright- Fisher para poblaciones de genes* para la parte del ejemplo.

Por último, en el capítulo 4 nos basaremos en [2] y se buscará ver a la probabilidad de ruina como la esperanza de una variable aleatoria que dependerá, en particular, del coeficiente de ajuste local que se definirá en el capítulo 2 y del tiempo en el que sucede la ruina. En [2], página 464 se menciona que dicha variable aleatoria se podría pensar como un estimador para la probabilidad de ruina, éste es llamado *estimador del muestro de importancia*, y de esta manera, si se aplica algún método para simular esta variable aleatoria, es posible simular la probabilidad de ruina. Sin embargo, en este trabajo únicamente se encontrará una expresión para la variable aleatoria mencionada, por lo tanto, la silulación se deja como recomendación en un trabajo futuro.

Parte I

Primera parte

Capítulo 1

Introducción

Consideremos un proceso de riesgo $R = \{R_t\}_{t\geq 0}$ para la evolución de la reserva de una compañia de seguros. Denotaremos por $u = R_0$ a la reserva al tiempo 0. A lo largo de este trabajo se considerará $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad para las variables aleatorias definidas.

- $\psi(u)$ denota la probabilidad de que la reserva sea menor estricto que cero en algún momento t.

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 | R_0 = u\right). \tag{1.1}$$

  A partir de ahora, el significado de $\psi(u)$ será la *probabilidad de ruina* del proceso de riesgo $R = \{R_t\}_{t\geq 0}$.

- La probabilidad de ruina antes del tiempo T con capital inicial u es

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}\left(\inf_{0\leq t\leq T} R_t < 0 | R_0 = u\right). \tag{1.2}$$

- El tiempo de ruina del proceso $R = \{R_t\}_{t\geq 0}$ con capital inicial u lo denotaremos por τ_u y está dado por

$$\tau_u = \text{ínf}\{t \geq 0 : R_t < 0 | R_0 = u\} \tag{1.3}$$

si $R_t < 0$ para algún tiempo t finito y $\tau_u = \infty$ si $R_t \geq 0$ para toda $t > 0$.

Sea $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso Poisson homogéneo con tasa $\beta > 0$, es decir, para toda $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \frac{(\beta t)^k e^{-\beta t}}{k!}, \tag{1.4}$$

y el tamaño de los reclamos $U_1, U_2, ..., U_k, ...$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función distribución B y función generadora de momentos $\hat{B}$. Consideramos el monto acumulado de reclamos en $[0, t]$ como $A_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$. Además, la compañía recibe de sus asegurados una prima constante $p > 0$ por unidad de tiempo. Si se denota con R_t, el capital de la compañía al tiempo t y u el capital inicial, entonces

$$R_t = u + pt - A_t. \tag{1.5}$$

El tiempo de la llegada del n-ésimo reclamo en el proceso de riesgo $R = \{R_t\}_{t\geq 0}$ con capital inicial u será denotado por T_n y está definido como:

$$T_n = \text{ínf}\{t > 0 | N(t) = n\} \tag{1.6}$$

si existe $t > 0$ tal que $N(t) = n$, de otra forma, denotaremos $T_n = \infty$. En este modelo asumimos los siguientes supuestos a los que denotaremos por $\mathscr{H}_1$:

(I) $N(t)$ y $\{U_1, U_2, ...\}$ son independientes.

(II) $U_1, U_2, ...$ son independientes.

(III) $U_1, U_2, ...$ tienen la misma distribución B.

(IV) Los reclamos son positivos.

(V) $\mathbb{E}[U_1] < \infty$ y $\mathbb{E}[U_1] \neq 0$.

Al proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ descrito anteriormente con los supuestos asumidos le llamamos *modelo clásico de riesgo*, o modelo de Cramér-Lundberg y denotaremos como $\psi_p(u)$ a la probabilidad

de ruina de este proceso. Para un desarrollo más detallado de este modelo y la explicación de los supuestos, consultar [3].

Claramente, resulta de interés saber en qué momento sucederá la ruina y qué probabilidad existe de que se llegue a este estado en tiempo finito, sin embargo, no siempre es posible encontrar una expresión explícita, es por eso que resulta sumamente útil contar con una cota superior o una aproximación a dicha probabilidad, para ello consideremos el siguiente teorema del cual se puede consultar con detalle la demostración en [4].

Teorema de Cramér - Lundberg. Consideremos el modelo de Cramér - Lundberg expresado en (1.5) con los supuestos $\mathscr{H}_1$, supongamos que se cumple la condición de *beneficio neto*, es decir,

$$\rho = \frac{p}{\beta \mathbb{E}[U_1]} - 1 > 0. \tag{1.7}$$

Supongamos que existe $\gamma > 0$ tal que se cumple

$$\int_0^\infty e^{\gamma u} dF_1(x) = \frac{p}{\beta \mathbb{E}[U_1]} = \rho + 1 \tag{1.8}$$

donde $F_1(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[U_1]} \int_0^x \bar{B}(y)dy$. Entonces, las siguientes relaciones se cumplen

a) Para toda $u \geq 0$,

$$\psi(u) \leq e^{-u\gamma}. \tag{1.9}$$

a) Si además

$$\int_0^\infty x e^{\gamma x} \bar{B}(x)dx < \infty,$$

entonces

$$\lim_{u \to \infty} e^{u\gamma} \psi(u) = C < \infty$$

lo cual denotaremos por

$$\psi(u) \approx Ce^{-\gamma u} \tag{1.10}$$

donde $C = \left[\frac{\gamma}{\rho\mathbb{E}[U_1]} \int_0^\infty xe^{\gamma x}\bar{B}(x)dx\right]^{-1}$. A γ se le conoce como *el coeficiente de ajuste.*

Notemos que (1.8) puede expresarse de otra forma de tal manera que

$$\int_0^\infty e^{\gamma u} dF_1(x) = \frac{1}{\gamma\mathbb{E}[U_1]}\left(\bar{B}(x)e^{\gamma x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{\gamma x} f(x)dx\right)$$

y si se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} \bar{B}(x)e^{\gamma x} < \infty \qquad y \qquad \hat{B}[\gamma] < \infty \tag{1.11}$$

entonces

$$\int_0^\infty e^{\gamma u} dF_1(x) = \frac{1}{\gamma\mathbb{E}[U_1]}(\hat{B}[\gamma] - 1),$$

por lo tanto, la ecuación (1.8) puede escribirse como

$$h(\alpha) = \beta(\hat{B}[\alpha] - 1) - \alpha p = 0, \tag{1.12}$$

y a partir de esto, la hipótesis del Teorema de Cramér - Lundberg supone la existencia de $\gamma > 0$ tal que se cumple

$$\beta(\hat{B}[\gamma] - 1) - \gamma p = 0. \tag{1.13}$$

En conclusión, para asegurar la existencia del coeficiente de ajuste, primero es necesario que se cumplan las condiciones de (1.11), donde la primera de ellas sugiere a la función de distribución B de cola ligera[1]. Segundo, es necesario encontrar una solución positiva de la ecuación de Cramér - Lundberg descrita en (1.12) y además, sería de gran utilidad tener una expresión aritmética

[1]La definición y detalles de este tipo de distribuciones pueden encontrarse en [4]

para la solución, sin embargo, si no es así, podría aproximarse mediante algún método numérico, en el mejor de los casos. A lo largo del siguiente capítulo se considerará el modelo clásico de Cramér - Lundberg localmente, por lo que en ocasiones se usará el coeficiente de ajuste como solución de la ecuación (1.12) y para algunas pruebas será más sencillo utilizar otra manera de encontrar el coeficiente de ajuste. Notemos que si tomamos $\alpha \geq 0$ en la ecuación de Cramér - Lundberg definida en (1.12), es posible obtener una aproximación a $h(\alpha)$, para ello recordemos $\hat{B}$, definida al principio del capítulo, como la función generadora de momentos de U_1. Tomemos $h > 0$ suficientemente pequeña y consideremos la función generadora de momentos del incremento $R_h - u$ evaluada en α como sigue:

$$\mathbb{E}[e^{\alpha(R_h-u)}] = \mathbb{E}[e^{\alpha\left(u+ph-\sum_{k=1}^{N(h)} U_k-u\right)}]$$

luego,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha\left(u+ph-\sum_{k=1}^{N(h)} U_k-u\right)}] = \mathbb{E}[e^{\alpha\left(ph-\sum_{k=1}^{N(h)} U_k\right)}]$$

desarrollando la esperanza del proceso Poisson compuesto,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha\left(ph-\sum_{k=1}^{N(h)} U_k\right)}] = e^{\alpha ph} e^{h\beta\left(\hat{B}[\alpha]-1\right)}$$

agrupando

$$e^{\alpha ph} e^{h\beta\left(\hat{B}[\alpha]-1\right)} = e^{h(p\alpha-\beta\left(\hat{B}[\alpha]-1\right))}$$

así tenemos

$$\mathbb{E}[e^{\alpha(R_h-u)}] = e^{h(p\alpha-\beta\left(\hat{B}[\alpha]-1\right))}.$$

Tomando logaritmo y multiplicando por $\frac{1}{h}$,

$$\frac{1}{h} log(\mathbb{E}[e^{\alpha(R_h-u)}]) = (p\alpha - \beta(\hat{B}[\alpha] - 1))$$

a partir de esto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}log(\mathbb{E}[e^{\alpha(R_h-u)}]) \approx (p\alpha - \beta(\hat{B}[\alpha]-1)).$$

Éste último resultado nos dice que en caso de existir γ, el coeficiente de ajuste para el modelo (1.5), (1.12) no es la única forma de obtenerlo, podemos buscar $\alpha > 0$ de modo que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}log(\mathbb{E}[e^{\alpha(R_h-u)}]) = 0. \tag{1.14}$$

Si γ existe, la función $e^{-\gamma x}$ está bien definida para cada punto $x \geq 0$ que puede representar un nivel de reserva. A continuación ejemplificaremos la utilidad de la aproximación y la cota de Cramér-Lundberg para la probabilidad de ruina de un proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ con capital inicial u en el siguiente caso particular.

Ejemplo 1. Supongamos que los reclamos se distribuyen exponencial con parámetro $\lambda > 0$ entonces

$$B(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad con\ \ x \geq 0 \qquad y \qquad \hat{B}(x) = \frac{\lambda}{\lambda - x} \quad con\ \ x < \lambda.$$

Nuestro primer objetivo es verificar la existencia del coeficiente de ajuste, para esto notemos que $\hat{B}[x] < \infty$ para toda $x < \lambda$ y además, si $\lambda > \alpha > 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\bar{B}(x)e^{\alpha x} = \lim_{x\to\infty} e^{x(\alpha-\lambda)} = 0 < \infty$$

y entonces bajo estas condiciones, el coeficiente de ajuste existe. Para obtener una expresión aritmética, consideremos la ecuación de Cramér - Lundberg, de este modo,

$$\beta\left(\frac{\lambda}{\lambda-\gamma} - 1\right) = \beta(\hat{B}[\gamma]-1) = \gamma p,$$

despejando γ,

$$\gamma = \frac{p\lambda - \beta}{p}.$$

Además,

$$\int_0^\infty xe^{\gamma x}\bar{B}(x)dx = \int_0^\infty xe^{\gamma x}e^{-\lambda x}dx$$

podemos ver el lado derecho de la igualdad como una integral por partes, es decir

$$\int_0^\infty xe^{\gamma x}e^{-\lambda x}dx = \left(\frac{-xe^{-x(\lambda-\gamma)}}{\lambda-\gamma}\right)|_0^\infty + \frac{1}{\lambda-\gamma}\int_0^\infty e^{-x(\lambda-\gamma)}dx$$

y, desarrollando tenemos

$$\left(\frac{-xe^{-x(\lambda-\gamma)}}{\lambda-\gamma}\right)|_0^\infty + \frac{1}{\lambda-\gamma}\int_0^\infty e^{-x(\lambda-\gamma)}dx = 0 + \frac{1}{(\lambda-\gamma)^2} < \infty.$$

Por lo tanto, se cumple que $\int_0^\infty xe^{\gamma x}\bar{B}(x)dx < \infty$.

El teorema de Crámer - Lundberg nos dice que es posible dar una cota superior y una aproximación para $\psi(u)$, la probabilidad de ruina del modelo descrito en (1.5) cuando los reclamos son exponenciales y bajo los supuestos asumidos, específicamente se cumple

$$\psi(u) < e^{-u\left(\frac{p\lambda-\beta}{p}\right)}.$$

Este ejemplo tiene gran importancia en estre trabajo, ya que en el capítulo 3 veremos que para el caso en el que los reclamos se distribuyen exponencial cuando la prima es dependiente de la reserva, se tiene que utilizar otro proceso auxiliar para obtener una expresión explícita para la probabilidad de ruina e incluso dedicamos una sección completa a esta discusión. Así, podemos notar que, aunque es muy útil considerar a la prima como dependiente de la reserva y el tiempo, obtener la probabilidad de ruina requiere más atención.

Ejemplo 2. Ahora supongamos que los reclamos $U_1, U_2, ..., U_k, ...$ se distribuyen Pareto con parámetro $\alpha > 1$, es decir,

$$\bar{B}(x) = \frac{1}{(1+x)^{-\alpha}}, \qquad x \geq 0.$$

En dichas circunstancias, $\mathbb{E}[U_1] = \frac{1}{(\alpha-1)}$ y entonces, la condición de beneficio neto es como

sigue,

$$\rho = \frac{p(\alpha - 1)}{\beta} - 1 > 0$$

lo cual se cumple si $\alpha > \frac{\beta}{p} + 1$. Sea $x \geq 0$, entonces ocurre que

$$\int_0^\infty e^{x\gamma}(1+x)^{-\alpha}dx = \infty,$$

es decir, bajo estos supuestos, no existe el coeficiente de ajuste o *el exponente de Cramér - Lundberg*[2].

¿Cuál es la diferencia entre la distribución exponencial y la distribución Pareto?. La diferencia dentro de este trabajo reside esencialmente en las condiciones de (1.11). En [3] se discute el caso que no se abordará aquí, cuando se tienen colas de distribución pesadas.

¿Por qué son tan importantes la aproximación y la desigualdad de Cramér-Lundberg? A lo largo de este trabajo nos daremos cuenta de que obtener explícitamente la probabilidad de ruina para algún modelo sucede sólo es casos muy particulares, aún en el caso clásico. Es por eso que es sumamente útil aproximarla en cualquier caso, así como tener una cota para ella.

En el siguiente capítulo extenderemos estos dos grandes resultados para el caso en el que la prima al tiempo t depende de la reserva al tiempo t, para esto definiremos un coeficiente de ajuste local y probaremos que funciona para encontrar la cota y la aproximación de Cramér-Lundberg.

[2]En [3], el coeficiente de ajuste es llamado exponente de Cramér - Lundberg

Capítulo 2

Modelo de riesgo con prima dependiente de la reserva

Consideremos un proceso de riesgo descrito en el capítulo 1 en (1.5) con los supuestos $\mathscr{H}_1$ de la página 3 y ahora pensemos que la prima puede depender del nivel de excedente actual, esto puede ser interpretado como una prima modificada $p(r)$ cargada a la reserva actural $R(t) = r$. Por lo tanto, la evolución al tiempo t de la reserva puede ser escrita de la siguiente manera

$$R_t = u + \int_0^t p(R_s)ds - A_t \tag{2.0.1}$$

donde $u > 0$ es la reserva inicial, A_t, como se discutió al definir (1.5), es el tamaño total de reclamos y $\int_0^t p(R_s)ds$ es la tasa cobrada de $[0, t]$ con $p(r)$ una función integrable.

R_t denota la reserva del proceso (2.0.1) con capital inicial u al tiempo t. A partir de ahora, si es necesario enfatizar la reserva inicial del proceso (2.0.1) con capital inicial particular k al tiempo t, lo denotaremos como $R_k(t)$.

Notemos que si tomamos $p(r) = p > 0$ para toda $r \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$R_t = u + \int_0^t p(R_s)ds - A_t = u + \int_0^t pds - A_t = u + pt - A_t,$$

es decir, recuperamos el modelo clásico de Cramér - Lundberg descrito en (1.5).

Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condición inicial que será de gran utilidad para obtener una expresión más manejable, en ciertos casos, de R_t

$$\frac{d}{dt}g(t) = p(g(t)), \qquad g(0) = u \tag{2.0.2}$$

y definimos la función $r_u(t)$ como solución de (2.0.2), es decir,

$$\frac{d}{dt}r_u(t) = p(r_u(t)), \qquad r_u(0) = u. \tag{2.0.3}$$

Afirmación: sea n un entero fijo tal que $n \geq 0$ y sea $0 \leq t < T_{n+1} - T_n$, se cumple

$$R_{T_n+t} = r_{R_{T_n}}(t) \tag{2.0.4}$$

donde recordemos que T_n es el tiempo de llegada del n-ésimo reclamo como se definió en (1.6).

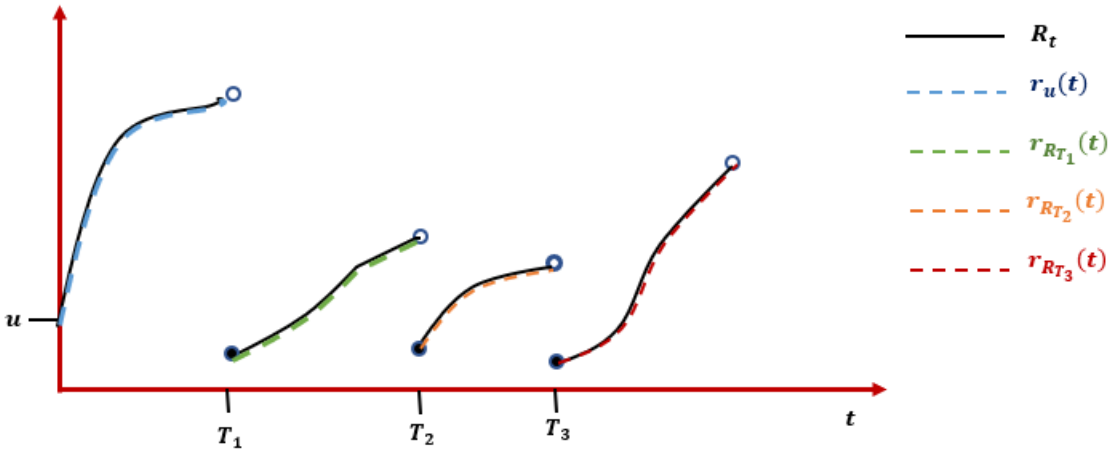

Figura 2-1: Comparación entre el proceso R_t y la función $r_u(t)$.

Demostración:

Sea $0 \leq t < T_{n+1} - T_n$. Basta probar

$$\frac{d}{dt}R_u(T_n + t) = p(R_u(T_n + t)). \tag{2.0.5}$$

Consideremos el lado izquiero de la ecuación (2.0.5),

$$\frac{d}{dt}R_u(T_n + t) = \frac{d}{dt}\left(u + \int_0^{T_n+t} p(R_u(s))ds - \sum_{k=0}^{N(T_n+t)} U_k\right)$$

aplicando la derivada a cada elemento,

$$\frac{d}{dt}\left(u + \int_0^{T_n+t} p(R_u(s))ds - \sum_{k=0}^{N(T_n+t)} U_k\right) = \frac{d}{dt}u + \frac{d}{dt}\int_0^{T_n+t} p(R_u(s)ds - \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{N(T_n+t)} U_k$$

como u es constante y $0 \leq t < T_{n+1} - T_n$,

$$\frac{d}{dt}u + \frac{d}{dt}\int_0^{T_n+t} p(R_u(s)ds - \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{N(T_n+t)} U_k = 0 + p(R_u(T_n + t)) - 0.$$

Por lo tanto, $\frac{d}{dt}R_u(T_n + t) = p(R_u(T_n + t))$.

Así, tenemos (2.0.5). Es decir, entre tiempos de llegada de los reclamos, $r_u(t)$ es una función que cumple (2.0.3) y $r_{R_{T_n}}(t)$ representa la reserva al tiempo t empezando con capital inicial aleatorio R_{T_n} donde R_{T_n} es la reserva definida en (2.0.1) al tiempo T_n con capital inicial u, como se muestra en la figura 2.1.

Notemos que la igualdad de la observación se da porque tomando t tal que $0 \leq t < T_{n+1} - T_n$, la derivada respecto al tiempo de los reclamos se hace cero. Por lo tanto, si ahora consideramos $t = T_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$r_{R_{T_{n-1}}}(T_n) - U_n = R_{T_n}. \tag{2.0.6}$$

Para encontrar una cota para la probabilidad de ruina del proceso de riesgo definido en

(2.0.1), a veces será más sencillo trabajar con la función $r_u(t)$ que con el proceso R_t directamente, es por eso que la expresión dada en (2.0.6) será de gran utilidad.

Nuestro interés es encontrar $\psi(u)$, la probabilidad de ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ descrito en (2.0.1), a continuación, enunciaremos una propiedad que nos dará más información de esta probabilidad.

Proposición 2.0.1. Sea $\{R_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de riesgo de la forma (2.0.1), $\psi(u)$ la probabilidad de ruina de este proceso. Consideremos los supuestos $\mathscr{H}_1$ y que $p(r)$ es no decreciente como función de r, entonces se cumple sólo una de las siguientes dos opciones:

a) $\psi(u) < 1$ para toda $u > 0$

b) $\psi(u) = 1$ para toda $u > 0$

Demostración:

Sea $u > 0$ tal que $\psi(u) < 1$, se probará que para toda $v > 0$, $\psi(v) < 1$. Para tal fin, primero notemos que como $p(r)$ es no decreciente como función de r entonces $r_v(t)$ es creciente como función de v ya que $r_v(t)$ determina el comportamiento del proceso R_t entre saltos.

Aunado a esto, veremos que $\psi(v)$ es no decreciente como función de v. Sean $u < v$, denotaremos por $R_u(t)$ y $R_v(t)$ a los procesos de riesgo con prima dependiente de la reserva, definidos en (2.0.1), con capital inicial u y v, respectivamente. Sea $s < T_1$, como $p(r)$ es no decreciente como función de r y $r_u(t)$ es creciente como función de u para toda $t \geq 0$, entonces

$$R_u(s) = \int_0^s p(r_u(t))dt \leq \int_0^s p(r_v(t))dt = R_v(s),$$

por lo tanto, $R_u(s) \leq R_v(s)$ para toda $s < T_1$. De esta manera, el tamaño de los reclamos no dependen del capital inicial, entonces

$$R_u(T_1) = \int_0^{T_1} p(r_u(t))dt - U_1 \leq \int_0^{T_1} p(r_v(t))dt - U_1 = R_v(T_1)$$

y así concluimos $R_u(s) \leq R_v(s)$ para toda $s \leq T_1$. Ahora considerando como capitales iniciales

$R_u(T_1)$ y $R_v(T_1)$, de la misma forma demostramos que $R_u(s) \leq R_v(s)$ para toda $s \leq T_2$ y en general, $R_u(t) \leq R_v(t)$ para toda $t \geq 0$. En consecuencia, $\psi(u) \geq \psi(v)$.

En el modelo clásico de Cramér-Lundberg, el coeficiente de ajuste γ es definido como la solución de la ecuación (1.12). Nuestro objetivo es extender este resultado para el modelo modificado con prima dependiente de la reserva, por lo que para cada x fija de la reserva, $p(x)$ se pensará constante y determinista, por lo tanto, estamos en el caso clásico y podemos considerar $\gamma(x)$ como en (1.13).

De esta manera, para cada x fija consideremos la siguiente ecuación:

$$\kappa(x, \alpha) = \beta(\hat{B}[\alpha] - 1) - \alpha p(x) = 0. \tag{2.0.7}$$

Así, ya tenemos que $\kappa(x, \alpha) = 0$ tiene como solución el coeficiente de ajuste, es decir

$$\kappa(x, \gamma(x)) = \beta(\hat{B}[\gamma(x)] - 1) - \gamma(x)p(x) = 0. \tag{2.0.8}$$

En términos generales, el coeficiente de ajuste depende de x. Denotaremos $\gamma(x)$ al *coeficiente de ajuste local*. Esto significa que podemos reemplazar γ por $\gamma(x)$ cuando se tiene la reserva x.

Para el modelo modificado (2.0.1) vamos a probar algunos resultados pero antes supondremos los siguientes puntos que denotaremos por $\mathscr{H}_2$:

I) Existencia de $\gamma(x)$ para toda $x \geq 0$ fija. Como se discutió en el capítulo 1, basta pedir que para toda $x \geq 0$ se cumpla (1.11), es decir, $\hat{B}[x] < \infty$ y $\lim\limits_{y\to\infty} \bar{B}(y)e^{xy} < \infty$.

II) $p(x)$ es una función determinista, continua y positiva.

III) $\hat{B}[x]$ es dos veces diferenciable para toda $x \geq 0$ y en una vecindad alrededor de 0.

IV) $\inf\limits_{x\geq 0} p(x) > \beta\mathbb{E}[U_1]$.

Conforme avancemos en el presente trabajo nos daremos cuenta de la necesidad de cada una de estas suposiciones. A continuación, probaremos la desigualdad de Cramér-Lundberg para el caso modificado.

2.1. Desigualdad de Cramér - Lundberg

Como vimos en la página 5 del capítulo 1, la definición del coeficiente de ajuste como solución de la ecuación (1.12) no es nuestra única alternativa ya que para el modelo clásico tenemos la siguiente aproximación a la ecuación de Cramér - Lundberg

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}log\mathbb{E}_u\left[e^{s(R_h-u)}\right]=\beta(\hat{B}[s]-1)-sp(u) \tag{2.1.1}$$

lo cual denotaremos por

$$\frac{1}{h}log\mathbb{E}_u\left[e^{s(R_h-u)}\right]\approx\beta(\hat{B}[s]-1)-sp(u)\qquad h\downarrow 0. \tag{2.1.2}$$

Debido a que $\mathbb{E}_u\left[e^{s(R_h-u)}\right]$ denota la función generadora de momentos de un incremento de la reserva en un pequeño intervalo de tiempo $[0,h]$, evaluada en s, análogamente para el caso modificado podemos también considerar $R_u(T_1)-u$. Por (2.0.6), éste último incremento es equivalente a tomar $r_u(T_1)-U_1-u$ y así definimos $\gamma_0(x)$ como la solución de la ecuación

$$1=\mathbb{E}\left[e^{y(U_1+u-r_u(T_1))}\right]=g(y) \tag{2.1.3}$$

es decir,

$$1=\mathbb{E}\left[e^{\gamma_0(u)(U_1+u-r_u(T_1))}\right]. \tag{2.1.4}$$

De esta manera, para cada x fija de la reserva tenemos $\gamma(x)$ y $\gamma_0(x)$ a considerar como coeficientes de ajuste local. La siguiente proposición nos dará el orden entre estos dos coeficientes en el caso particular cuando $p(x)$ es no decreciente como función de x.

Proposición 2.1.1. Si $p(x)$ es no decreciente como función de x, se cumplen las suposiciones $\mathscr{H}_2$ y $\gamma(x)$ y $\gamma_0(x)$ son soluciones de las ecuaciones (2.0.7) y (2.1.3), respectivamente, entonces:

i) $\gamma(x)$ y $\gamma_0(x)$ son no decrecientes como funciones de x.

II) $\gamma(x) \leq \gamma_0(x)$.

Demostración:

Sean $u, v \geq 0$ tal que $u < v$.

i) Primero demostraremos que si $p(u) \leq p(v)$ entonces $\gamma(u) \leq \gamma(v)$, esto es equivalente a probar que $\gamma(u) > \gamma(v)$ implica $p(u) > p(v)$. Por lo tanto, supongamos que $\gamma(u) > \gamma(v)$. Como $\gamma(u)$ y $\gamma(v)$ cumplen (2.0.7), entonces

$$p(u) = \frac{\beta(\hat{B}[\gamma(u)] - 1)}{\gamma(u)} \qquad y \qquad p(v) = \frac{\beta(\hat{B}[\gamma(v)] - 1)}{\gamma(v)}$$

sustituyendo $p(u)$ y $p(v)$ en $\frac{p(u)-p(v)}{\beta}$,

$$\frac{p(u) - p(v)}{\beta} = \frac{(\hat{B}[\gamma(u)] - 1)}{\gamma(u)} - \frac{(\hat{B}[\gamma(v)] - 1)}{\gamma(v)}. \tag{2.1.5}$$

Definimos la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $g(\alpha) = \frac{\hat{B}[\alpha]-1}{\alpha}$. Veamos que g es una función no decreciente. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{d}{d\alpha} g(\alpha) = \frac{\alpha \frac{d}{d\alpha} \hat{B}[\alpha] - \hat{B}[\alpha] + 1}{\alpha^2} \tag{2.1.6}$$

como $\hat{B}(\alpha)$ es convexa como función de α (ver apéndice 1, proposición 5.1.4.), entonces se cumple

$$\frac{d}{d\alpha} \hat{B}[\alpha](0 - \alpha) + \hat{B}[\alpha] \leq \hat{B}[0] = 1$$

es decir,

$$\alpha \frac{d}{d\alpha} \hat{B}[\alpha] - \hat{B}[\alpha] + 1 \geq 0. \tag{2.1.7}$$

Por (2.1.6) y (2.1.7), concluimos que $g(\alpha)$ es no decreciente como función de α, y por (2.1.5),

$$\frac{p(u) - p(v)}{\beta} \geq 0$$

entonces,

$$p(u) \geq p(v),$$

por lo tanto, $p(r)$ es una función decreciente de r. Así concluimos que si $p(r)$ es no decreciente de r entonces $\gamma(r)$ es no decreciente de r.

ii) Se demostrará que $\gamma_0(x)$ es no decreciente como función de x. Sean $u < v$. Como $\gamma_0(u)$ es solución de (2.1.3), a partir de esto se cumple

$$1 = \mathbb{E}[exp\{\gamma_0(u)(U_1 + u - r_u(T_1))\}]. \tag{2.1.8}$$

Primero probaremos que $r_u(t) - u$ es no decreciente como función de u. Notemos que

$$p(r_u(t) - u) = \frac{d}{dt}(r_u(t) - u) = \frac{d}{dt}(r_u(t)) = p(r_u(t)). \tag{2.1.9}$$

Como $r_u(t)$ es no decreciente como función de u, $r_u(t) \leq r_v(t)$ y como $p(x)$ es no decreciente como función de x, se preserva la monotonicidad, es decir

$$p(r_u(t)) \leq p(r_v(t)),$$

por (2.1.6),

$$p(r_u(t) - u) \leq p(r_v(t) - v).$$

Como $p(r)$ es no decreciente como función de r,

$$r_u(t) - u \leq r_v(t) - v,$$

por lo tanto, $r_u(t) - u$ es una función no decreciente de u. Multiplicando la desigualdad anterior por (-1),

$$u - r_u(t) \geq v - r_v(t).$$

Como la función exponencial es una función creciente y $\gamma_0(u) > 0$ sucede que

$$exp\{\gamma_0(u)(U_1 + u - r_u(T_1))\} \geq exp\{\gamma_0(u)(U_1 + v - r_v(T_1))\}$$

al considerar la esperanza de ambos lados de la desigualdad, ésta se conserva, esto es

$$1 = \mathbb{E}[exp\{\gamma_0(u)(U_1 + u - r_u(T_1))\}] \geq \mathbb{E}[exp\{\gamma_0(u)(U_1 + v - r_v(T_1))\}]. \quad (2.1.10)$$

Sea $\hat{B}_v$ la función generadora de momentos de $U_1 + v - r_v(T_1)$, como se mencionó al principio del capítulo, $\hat{B}_v$ es una función convexa, entonces se cumple

$$\hat{B}_v[\gamma_0(u)] \geq \hat{B}_v[\gamma_0(v)] + \hat{B}'_v[\gamma_0(v)](\gamma_0(u) - \gamma_0(v)). \quad (2.1.11)$$

Como $\hat{B}_v[\gamma_0(v)] + \hat{B}'_v[\gamma_0(v)](\gamma_0(u) - \gamma_0(v)) = 1 + \hat{B}'_v[\gamma_0(v)](\gamma_0(u) - \gamma_0(v))$ y por (2.1.10) tenemos que

$$0 \geq \hat{B}'_v[\gamma_0(v)](\gamma_0(u) - \gamma_0(v)),$$

además, $\hat{B}'_v[\gamma_0(v)] > 0$ implica que $(\gamma_0(u) - \gamma_0(v)) < 0$, entonces,

$$\gamma_0(u) < \gamma_0(v)$$

y así concluimos que $\gamma_0(u)$ es no decreciente como función de u.

iii) Ahora se demostrará que para toda $x \geq 0$, $\gamma(x) \leq \gamma_0(x)$. Notemos que por definición en de $r_u(t)$ en (2.0.3), $r_u(t)$ es una función no decreciente de t ya que suponemos $p(r)$ una función positiva, en particular se cumple

$$r_u(t) \geq r_u(0)$$

para toda $t \geq 0$ y como $p(r)$ es una función no decreciente de r,

$$p(r_u(t)) \geq p(r_u(0)).$$

Debido a que $p(r_u(0)) = p(u) = \frac{d}{dt}(tp(u)) = p(tp(u))$ y por (2.1.5) tenemos que

$$p(r_u(t) - u) \geq p(tp(u))$$

y así concluimos que

$$r_u(t) - u \geq tp(u)$$

lo cual implica que

$$1 = \mathbb{E}[exp\{\gamma_0(u)(U_1 + u - r_u(T_1))\}] \leq \mathbb{E}[exp\{\gamma_0(u)(U_1 - p(u)T_1)\}].$$

En este modelo suponemos que $N(t)$ y $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ son independientes, como lo definimos en el capítulo 1, página 3, en particular el monto del primer reclamo y el tiempo en el que llega el primer reclamo son independientes. Además, por la definición de la función generadora de momentos tenemos:

$$1 \leq \hat{B}[\gamma_0(u)]\mathbb{E}[exp\{-\gamma_0(u)p(u)T_1\}]. \tag{2.1.12}$$

Definimos la función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $h(t) = exp\{-\gamma_0(u)p(u)t\}$. Notemos que el término derecho del producto de (2.1.12) es la esperanza de la variable aleatoria $h(T_1)$ y además sabemos que T_1 se distribuye exponencial con media $\frac{1}{\beta}$, donde recordemos que si $t \geq 0$, βt denota el número promedio de reclamos en el periodo $[0, t]$, entonces

$$\mathbb{E}[h(T_1)] = \int_0^{\infty} h(t)dF_{T_1}$$

desarrollando la esperanza,

$$\int_0^{\infty} h(t)dF_{T_1} = \int_0^{\infty} exp\{-\gamma_0(u)p(u)t\}\beta e^{-\beta t}dt$$

agrupando en la función exponencial,

$$\int_0^\infty exp\{-\gamma_0(u)p(u)t\}\beta e^{-\beta t}dt = \beta\int_0^\infty exp\{-t(p(u)\gamma_0(u)+\beta)\}dt$$

resolviendo la integral,

$$\beta\int_0^\infty exp\{-t(p(u)\gamma_0(u)+\beta)\}dt = \frac{\beta(-1)}{-(p(u)\gamma_0(u)+\beta)}$$

y, por último

$$\frac{\beta(-1)}{-(p(u)\gamma_0(u)+\beta)} = \frac{\beta}{p(u)\gamma_0(u)+\beta}$$

sustituyendo en (2.1.12),

$$1 \leq \hat{B}[\gamma_0(u)]\frac{\beta}{p(u)\gamma_0(u)+\beta}$$

lo cual es equivalente a la siguiente desigualdad

$$0 \leq \beta(\hat{B}[\gamma_0(u)]-1) - \gamma_0(u)p(u). \tag{2.1.13}$$

Definimos la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $g(t) = \beta(\hat{B}[t]-1) - p(u)t$. Primero notemos que g es diferenciable como función de t por el punto *iii)* de los supuestos $\mathscr{H}_2$ y probaremos que además, g es convexa como función de t. Sea $t \in \mathbb{R}^+$, basta demostrar que $g''(t) > 0$, así espezamos notando que

$$g'(t) = \beta\hat{B}'[t] - p(u)$$

y como $\hat{B}$ es convexa

$$g''(t) = \beta\hat{B}''[t] > 0.$$

Por lo tanto, $g(t)$ es convexa como función de t. Además, como $\gamma(u), \gamma_0(u) > 0$, entonces se cumple

$$0 = g(0) \geq g(\gamma_0(u)) + g'(\gamma_0(u))(-\gamma_0(u)). \tag{2.1.14}$$

Recordemos que $\gamma(u)$ es la solución de la ecuación diferencial descrita en (2.0.2), lo cual es equivalente a $g(\gamma(u)) = 0$, entonces también tenemos

$$0 = g(\gamma(u)) \geq g(\gamma_0(u)) + g'(\gamma_0(u))(\gamma(u) - \gamma_0(u)). \tag{2.1.15}$$

Por (2.1.9), $g(\gamma_0(u)) \geq 0$ y debido a (2.1.9) y al hecho $\gamma_0(u) > 0$ tenemos

$$g'(\gamma_0(u)) \geq 0 \tag{2.1.16}$$

y también

$$0 \geq g'(\gamma_0(u))(\gamma(u) - \gamma_0(u)) \tag{2.1.17}$$

y así, por (2.1.16) y (2.1.17), concluimos

$$(\gamma(u) - \gamma_0(u)) \leq 0.$$

Finalmente,

$$\gamma(u) \leq \gamma_0(u)$$

es decir, se cumple la relación de orden entre $\gamma(u)$ y $\gamma_0(u)$.

Ahora que ya contamos con dos alternativas de funciones para el coeficiente de ajuste local y además, una relación de orden entre ellos, ya que recordemos que $\gamma_0(x)$ es solución de la ecuación (2.1.3) la cual surge de una aproximación a la ecuación de Cramér-Lundberg por lo que no se esperaba la igualdad de los coeficientes de ajuste local en cada punto.

Lo siguiente es encontrar una cota para la probabilidad de llegar a la ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ en a lo más los primeros n reclamos, ya que posteriormente realizaremos un proceso límite sobre n para llegar a $\psi(u)$, por ello nos será muy útil el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 Definimos $\psi^{(n)}(u) = \mathbb{P}[\tau_u \leq T_n]$ como la probabilidad de ruina antes de a lo más n reclamos, $n \in \mathbb{N}$. Si $p(r)$ es una función no decreciente de r, entonces

$$\psi^{(n)}(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\}. \tag{2.1.18}$$

Demostración:

La prueba se realizará por inducción sobre n. Para el caso base $n = 0$ tenemos

$$\psi^{(0)}(u) = \mathbb{P}[\tau_u \leq T_0] = \mathbb{P}[\tau_u \leq 0] = 0 < exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\}.$$

Ahora supongamos que (2.1.18) se cumple para $n \in \mathbb{N}$ fija y se demostrará:

$$\psi^{(n+1)}(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\}. \tag{2.1.19}$$

Denotamos por $F_u(x)$ a la función de distribución de la variable aleatoria $u - R_{T_1}$ dado $R_0 = u$, la cual también se puede expresar como $u - r_u(T_1) + U_1$ por (2.0.6), es decir,

$$F_u(x) = \mathbb{P}[u - r_u(T_1) + U_1 \leq x | R_0 = u].$$

Si la ruina ocurre con el primer reclamo entonces $\psi^{(n+1)}(u) = 1 - F_u(u)$ ya que por definición,

$$\psi^{(n+1)}(u) = \mathbb{P}[R_{T_1} < 0 | R_0 = u]$$

multiplicando por (-1) y sumando u a la desigualdad $R_{T_1} < 0$

$$\mathbb{P}[R_{T_1} < 0 | R_0 = u] = \mathbb{P}[u - R_{T_1} > u | R_0 = u]$$

por (2.0.6),

$$\mathbb{P}[u - R_{T_1} > u | R_0 = u] = \mathbb{P}[u - r_u(T_1) + U_1 > u | R_0 = u] = 1 - F_u(u).$$

Por otro lado, si la ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ con capital inicial u no ocurre con el primer reclamo entonces la probabilidad de que la ruina ocurra antes del $(n+1)$ reclamo equivale a la esperanza de la probabilidad de que la ruina ocurra antes del n-ésimo reclamo pero esta vez con capital inicial R_{T_1}, es decir:

$$\psi^{(n+1)}(u) = \mathbb{E}[\psi^{(n)}((R_{T_1} - u) + u)]$$

por lo tanto,

$$\psi^{(n+1)}(u) = \int_{-\infty}^{u} \psi^n(u-x)F_u(dx).$$

Así,

$$\psi^{(n+1)}(u) = 1 - F_u(u) + \int_{-\infty}^{u} \psi^n(u-x)F_u(dx)$$

aplicando la hipótesis de inducción (2.1.19) y el hecho $1 - F_u(u) = \int_u^{\infty} F_u(dx)$,

$$\psi^{(n+1)}(u) \leq \int_u^{\infty} F_u(dx) + \int_{-\infty}^{u} exp\left\{-\int_0^{u-x} \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx). \tag{2.1.20}$$

Para desarrollar la expresión (2.1.20), consideremos las siguientes afirmaciones:

(I) $\int_u^{\infty} F_u(dx) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} \int_u^{\infty} exp\left\{\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx)$.

Demostración:

Como $exp\left\{\int_0^u \gamma_0(y)dy - \int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} = exp(0) = 1$,

$$\int_u^{\infty} F_u(dx) = \int_u^{\infty} exp\left\{\int_0^u \gamma_0(y)dy - \int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx)$$

por propiedades de la función exponencial,

$$\int_u^{\infty} exp\left\{\int_0^u \gamma_0(y)dy - \int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx) = \int_u^{\infty} exp\left\{\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx)$$

y como $exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}$ no depende de x,

$$\int_u^\infty exp\left\{\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} \int_u^\infty exp\left\{\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx).$$

(II) $$\int_{-\infty}^u exp\left\{-\int_0^{u-x} \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} \int_{-\infty}^u exp\left\{\int_{u-x}^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx).$$

Demostración:

Por propiedades de la integral,

$$\int_{-\infty}^u exp\left\{-\int_0^{u-x} \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx) = \int_{-\infty}^u exp\left\{\int_{u-x}^0 \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx)$$

separando la integral,

$$\int_{-\infty}^u exp\left\{\int_{u-x}^0 \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx = \int_{-\infty}^u exp\left\{\int_{u-x}^u \gamma_0(y)dy + \int_u^0 \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx)$$

y como $exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}$ no depende de x, concluimos

$$\int_{-\infty}^u exp\left\{\int_{u-x}^u \gamma_0(y)dy + \int_u^0 \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\} \int_{-\infty}^u exp\left\{\int_{u-x}^u \gamma_0(y)dy\right\} F_u(dx).$$

(III) $\int_{u-x}^u \gamma_0(y)dy \leq x\gamma_0(u)$ para toda x.

Demostración:

- *Caso 1.* $x \geq 0$

  $\int_{u-x}^u \gamma_0(y)dy \leq \int_{u-x}^u \gamma_0(u)dy = x\gamma_0(u)$ dado que γ_0 es no decreciente

- *Caso 2.* $x < 0$

$\gamma_0(y) \geq \gamma_0(u)$ para toda $y \in (u, u-x)$, entonces

$$\int_u^{u-x} \gamma_0(y)dy \geq \int_u^{u-x} \gamma_0(u)dy$$

entonces,

$$-\int_u^{u-x} \gamma_0(y)dy \leq -\int_u^{u-x} \gamma_0(u)dy$$

por lo tanto,

$$\int_{u-x}^{u} \gamma_0(y)dy \leq \int_{u-x}^{u} \gamma_0(u)dy = x\gamma_0(u).$$

(IV) Por (iii) tenemos que para toda $x \geq u$

$$\int_0^u \gamma_0(y)dy \leq u\gamma_0(u) \leq x\gamma_0(u).$$

Regresando a la ecuación (2.1.15), por la afirmación (i),

$$\psi^{(n+1)}(u) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}\left(\int_u^{\infty} exp\left\{x\gamma_0(u)\right\}F_u(dx) + \int_{-\infty}^{u} exp\left\{-\int_0^{u-x}\gamma_0(y)dy\right\}F_u(dx)\right)$$

por por la afirmación (ii),

$$\psi^{(n+1)}(u) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}\int_u^{\infty} exp\{x\gamma_0(u)\}F_u(dx) + exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}\int_{-\infty}^{u} exp\left\{\int_{u-x}^{u}\gamma_0(y)dy\right\}F_u(dx)$$

y por por la afirmación (iii),

$$\psi^{(n+1)}(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}\left(\int_u^{\infty} exp\{x\gamma_0(u)\}F_u(dx) + \int_{-\infty}^{u} exp\{x\gamma_0(u)\}F_u(dx)\right).$$

Por propiedades de la integral,

$$\int_u^\infty exp\{x\gamma_0(u)\}F_u(dx) + \int_{-\infty}^u exp\{x\gamma_0(u)\}F_u(dx) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}$$

por definición de $\hat{F}$,

$$exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}\int_{-\infty}^\infty exp\left\{x\gamma_0(u)\right\}F_u(dx) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}\hat{F}[\gamma_0(u)]$$

por lo tanto,

$$exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}\left(\int_u^\infty exp\{x\gamma_0(u)\}F_u(dx) + \int_{-\infty}^u exp\{x\gamma_0(u)\}F_u(dx)\right) = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}.$$

Así concluimos,

$$\psi^{(n)}(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(y)dy\right\}.$$

Teorema 2.1.2. Supongamos que $p(x)$ es no decreciente como función de x, se cumplen las suposiciones $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$, $\psi(u)$ denota la probabilidad de ruina del proceso definido en (2.0.1), y $\gamma_0(x)$ es la solución de (2.1.3), entonces

$$\psi(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\}. \tag{2.1.21}$$

Demostración:

Notemos que el evento $\{\tau_u < \infty\}$ es el mismo evento que $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{T_k \leq \tau_u < T_{k+1}\}$ entonces,

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left[\tau_u < \infty\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=0}^{\infty}\{T_k \leq \tau_u < T_{k+1}\}\right]$$

como $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{T_k \leq \tau_u < T_{k+1}\}$ es la unión de eventos ajenos,

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=0}^{\infty}\{T_k \leq \tau_u < T_{k+1}\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}[T_k \leq \tau_u < T_{k+1}]$$

la parte derecha de la igualdad puede expresarse como

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}[T_k \leq \tau_u < T_{k+1}] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[T_k \leq \tau_u < T_{k+1}] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=0}^{n}\{T_k \leq \tau_u < T_{k+1}\}\right]$$

es así como,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=0}^{n}\{T_k \leq \tau_u < T_{k+1}\}\right] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[\tau_u < T_n] = \lim_{n\to\infty}\psi_u^{(n)}$$

por lo tanto,

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty}\psi_u^{(n)}$$

por el teorema 2.1.1,

$$\psi(u) \leq \lim_{n\to\infty} exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\} = exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\},$$

así concluimos

$$\psi(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\}.$$

Colorario 2.1.1. Supongamos que $p(x)$ es no decreciente como función de x y que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.1.2; $\psi(u)$ denota la probabilidad de ruina del proceso definido en (2.0.1), y $\gamma(x)$ es la solución de la ecuación de Crámer-Lundberg definida en (2.0.7), entonces

$$\psi(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma(x)dx\right\} \tag{2.1.22}$$

Demostración:

Por la proposición 2.1.1, $\gamma(x) \leq \gamma_0(x)$ para toda $x \geq 0$, en particular, para $0 \leq x \leq u$, entonces

$$\int_0^u \gamma(x)dx \leq \int_0^u \gamma_0(x)dx$$

por lo tanto,

$$\psi(u) \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\} \leq exp\left\{-\int_0^u \gamma(x)dx\right\}. \tag{2.1.23}$$

y así concluimos (2.1.22).

Así tenemos que $\gamma(x)$ y $\gamma_0(x)$ funcionan para crear una cota superior para la probabilidad de ruina de R_t empezando en u. En (2.1.23) podemos notar que $exp\left\{-\int_0^u \gamma_0(x)dx\right\}$ es una mejor cota que $exp\left\{-\int_0^u \gamma(x)dx\right\}$, sin embargo, para obtener $\gamma_0(x)$ para una $x \geq 0$ fija, es necesario conocer la función generadora de momentos de $U_1 + u - r_u(T_1)$, lo que nos lleva a resolver la ecuación diferencial en (2.1.2) o tendríamos que conocer la función generadora de momentos de $U_1 + u - R_{T_1} - U_1 = -\int_0^{T_1} p(R_s)ds - U_1$. Por otro lado, para obtener $\gamma(x)$ únicamente necesitamos conocer $\hat{B}$, $p(x)$ y β, los cuales deberían ser datos dados. En el capítulo 3 veremos ejemplos de ello.

También notemos que si $\gamma(x)$ y $\gamma_0(x)$ no dependen del nivel de reserva actual, es decir, son constantes, los resultados (2.1.21) y (2.1.22) representan la cota superior en el caso clásico de Cramér - Lundberg.

Lo siguiente es probar que $\gamma(x)$ y $\gamma_0(x)$ también son útiles para aproximar a $\psi(u)$, la probabilidad de ruina del proceso R_t con capital inicial u.

2.2. Aproximación de Cramér - Lundberg

En esta sección buscaremos una aproximación asintótica para $\psi(u)$, la probabilidad de ruina del proceso de riesgo (2.0.1), cuando u tiende a infinito. Para nuestro objetivo, para cada nivel de reserva r, veremos qué sucede localmente, es decir, en un intervalo $\left[r(1-\frac{1}{n}), r(1+\frac{1}{n})\right]$ con

$n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para este fin, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos para $k = 0, 1, ..., n, n+1$,

$$u_{k,n} = \frac{k}{n}u,$$

$$\bar{p}_{k,n} = \sup_{u_{k-1},n \leq x \leq u_{k+1},n} p(x) \qquad y \qquad \underline{p}_{k,n} = \inf_{u_{k-1},n \leq x \leq u_{k+1},n} p(x),$$

los cuales serán de gran utilidad para estudiar el comportamiento local de la prima de riesgo a nivel de reserva x.

Resulta más sencillo primero demostrar la aproximación de Crámer-Lundberg para el siguiente proceso de riesgo, al cual denotaremos por $R^\epsilon = \{R_t^\epsilon\}_{t \geq 0}$, donde para cada $t \geq 0$,

$$R_t^\epsilon = u + \int_0^t p(R_s^\epsilon)ds - \sum_{k=1}^{N^\epsilon(t)} \epsilon \cdot U_k \tag{2.2.1}$$

donde $N^\epsilon(t)$ denota un proceso Poisson con tasa $\frac{\beta}{\epsilon}$ y consideramos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Es decir, los tamaños de los reclamos son más pequeños y en promedio, el número de reclamos es mayor, en comparación con el modelo (2.0.1). Sin embargo, notemos que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N^\epsilon(t)} \epsilon \cdot U_k\right] = \epsilon \mathbb{E}[U_1] \cdot \frac{\beta}{\epsilon} = \mathbb{E}[U_1] \cdot \beta = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} U_k\right]$$

es decir, en promedio, el monto total de reclamos en el periodo $[0, t]$ de los procesos de riesgo (2.0.1) y (2.2.1) es el mismo.

Debido a que vamos a comparar el comportamiento local de R_t y R_t^ϵ con procesos de riesgo con prima constante, es necesario establecer la notación R_t^p para el modelo clásico con prima p, definido en (1.5) y $R_t^{p;\epsilon}$ como el modelo R_t^p intercambiando U_k por $\epsilon \cdot U_k$ y $N(t)$ por $N^\epsilon(t)$, es decir

$$R_t^{p;\epsilon} = u + pt - \sum_{k=1}^{N^\epsilon(t)} \epsilon \cdot U_k. \tag{2.2.2}$$

Además, denotamos por $\psi_p(u)$ y $\psi_{p;\epsilon}(u)$ a las probabilidades de ruina de los procesos de riesgo definidos en (1.5) y (2.2.2), respectivamente.

El siguiente teorema estudia el comportamiento asintótico del proceso auxiliar $\{R_t^\epsilon\}_{t\geq 0}$ que definimos en (2.2.1), lo cual será de gran ayuda para encontrar una aproximación para la probabilidad de ruina del proceso de riesgo con prima dependiente de la reserva $\{R_t\}_{t\geq 0}$.

Teorema 2.2.1 Supongamos que para el proceso de riesgo $\{R_t^\epsilon\}_{t\geq 0}$ se cumplen las suposiciones $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$, y que $p(r)$ es no decreciente como función de r. Definimos $I(u) = \int_0^u \gamma(x)dx$ donde $\gamma(x)$ es la solución de la ecuación (2.0.7), entonces se cumple

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} -\epsilon log(\psi_\epsilon(u)) = I(u). \tag{2.2.3}$$

Demostración:

Sea $a \geq 0$. Si existe $t \geq 0$ tal que $R_t^\epsilon = a$ entonces definimos $T_\epsilon(a) = \text{ínf}\{t \geq 0 | R_t^\epsilon = a\}$, de otra forma, denotamos $T_\epsilon(a) = \infty$. $T_\epsilon(a)$ denota el tiempo de cruce del nivel de reserva a del proceso de riesgo, $R_t^\epsilon = a$.

Para que el proceso de riesgo R_t^ϵ, con capital inicial u, llegue a la ruina, es necesario primero pasar por el nivel de reserva $u_{n-1,n}$, a partir de esto podemos escribir a $\psi_\epsilon(u)$ de la siguiente manera:

$$\psi(u) = \mathbb{P}[R_t < 0 | R_0 = u] = \mathbb{P}[R_t < 0 | R_0 = u, T(u_{n-1,n}) < \infty]$$

entonces,

$$\psi(u) = \mathbb{P}[R_t < 0 | R_0 = u, T(u_{n-1,n}) < \infty]\mathbb{P}[T(u_{n-1,n}) < \infty]$$

por suposición I) de $\mathscr{H}_1$ (página 3),

$$\mathbb{P}[R_t < 0 | R_0 = u, T(u_{n-1,n}) < \infty]\mathbb{P}[T(u_{n-1,n}) < \infty] = \mathbb{P}[R_t < 0 | R_0 = u_{n-1,n}]\mathbb{P}[T(u_{n-1,n}) < \infty].$$

Por lo tanto,

$$\psi_\epsilon(u) = \mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty] \cdot \psi_\epsilon(u_{n-1,n}) \tag{2.2.4}$$

donde $\mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty]$ es la probabilidad de que R_t^ϵ cruce el nivel de reserva $u_{n-1,n}$ y, por la

ley de probabilidad total, podemos escribirla como

$$\mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty] = \mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty | A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty | A^c]\mathbb{P}[A^c]$$

donde $A = \{T_\epsilon(u_{n-1,n}) > T_\epsilon(u_{n+1,n})\}$. Es decir, estamos condicionando a que R_t^ϵ cruce primero $u_{n-1,n}$ que $u_{n+1,n}$ o no, como se muestra en la siguiente figura.

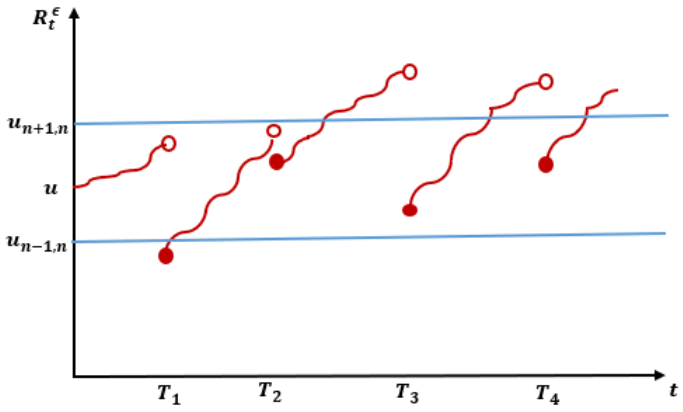

Figura 2-2: Proceso de riesgo R_t^ϵ. cuando se cruza primero el nivel de reserva $u_{n-1,n}$

Denotamos por $\Phi_\epsilon(u)$ a la probabilidad de que el proceso R_t^ϵ empezando en u, cruce el nivel de reserva $u_{n-1,n}$, con la condición de que se tenga este nivel de reserva antes de $u_{n+1,n}$, es decir,

$$\Phi_\epsilon(u) = \mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty | T_\epsilon(u_{n-1,n}) > T_\epsilon(u_{n+1,n})] \cdot \mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) > T_\epsilon(u_{n+1,n})], \quad (2.2.5)$$

por esta razón, la probabilidad de cruzar el nivel de reserva $u_{n-1,n}$ empezando con capital u se puede escribir como

$$\mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty] = \Phi_\epsilon(u) + \mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty | A^c]\mathbb{P}[A^c]$$

entonces,

$$\mathbb{P}[T_\epsilon(u_{n-1,n}) < \infty] \geq \Phi_\epsilon(u) \tag{2.2.6}$$

y por (2.2.4) y (2.2.6)

$$\psi_\epsilon(u) \geq \Phi_\epsilon(u) \cdot \psi_\epsilon(u_{n-1,n}). \tag{2.2.7}$$

Debido a que si $u_{n-1,n} \leq R_s^\epsilon \leq u_{n+1,n}$ con $s \in [0,t]$, entonces

$$R_t^\epsilon = u + \int_0^t p(R_s)ds - \epsilon \sum_{k=1}^{N^\epsilon(t)} U_k \leq u + \bar{p}_{n,n}t - \epsilon \sum_{k=1}^{N^\epsilon(t)} U_k = R_t^{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}$$

por lo tanto,

$$R_t^\epsilon \leq R_t^{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}. \tag{2.2.8}$$

Denotamos por $\Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}(u)$ a la probabilidad de que el proceso $R_t^{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}$, con capital inicial u, cruce el nivel de reserva $u_{n-1,n}$, sin cruzar el nivel de reserva $u_{n+1,n}$ antes. Por (2.2.8) tenemos

$$\Phi_\epsilon(u) \geq \Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}(u). \tag{2.2.9}$$

Por (2.2.8) y (2.2.9)

$$\psi_\epsilon(u) \geq \Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}(u) \cdot \psi_\epsilon(u_{n-1,n}). \tag{2.2.10}$$

Además, en el proceso de riesgo $R_t^{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}$, es igualmente probable pasar del nivel de reserva u a $u_{n-1,n}$, sin pasar antes por $u_{n,n+1}$, que del nivel de reserva $\frac{u}{n} = u_{1,n}$ a 0, sin llegar antes al nivel $u_{2,n}$, es decir $\Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}(u) = \Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}(\frac{u}{n})$. Sustituyendo en (2.2.10), tenemos

$$\psi_\epsilon(u) \geq \Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) \psi_\epsilon(u_{n-1,n}). \tag{2.2.11}$$

Sea $k = 1, 2, ..., n$, intercambiando u por $u_{n-k,n}$, análogamente se cumple

$$\psi_\epsilon(u_{n-k,n}) \geq \Phi_{\bar{p}_{n-k,n}:\epsilon}(\frac{u}{n})\psi_\epsilon(u_{n-k-1,n}),$$

en particular,

$$\psi_\epsilon(u) \geq \Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \psi_\epsilon(u_{n-1,n})$$

y para $k = 1$

$$\Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \psi_\epsilon(u_{n-1,n}) \geq \Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \Phi_{\bar{p}_{n-1,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \psi_\epsilon(u_{n-2,n}).$$

Aplicando este resultado n veces en (2.2.11), tenemos

$$\Phi_{\bar{p}_{n,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \Phi_{\bar{p}_{n-1,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \psi_\epsilon(u_{n-2,n}) \geq ... \geq \prod_{k=1}^{n} \Phi_{\bar{p}_{n-k,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right)$$

por lo tanto,

$$\psi_\epsilon(u) \geq \prod_{k=1}^{n} \Phi_{\bar{p}_{n-k,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \Phi_{\bar{p}_{k,n}:\epsilon}\left(\frac{u}{n}\right). \tag{2.2.12}$$

También, notemos que para cada $k = 1, 2, ..., n$, por la ley de probabilidad total,

$$\psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{u}{n}\right) \leq \psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{2u}{n}\right) + \Phi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{u}{n}\right)$$

por esta razón,

$$\Phi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{u}{n}\right) \geq \psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{u}{n}\right) - \psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{2u}{n}\right)$$

sustituyendo en (2.2.13),

$$\psi_\epsilon(u) \geq \prod_{k=1}^{n} \psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{u}{n}\right) - \psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{2u}{n}\right). \tag{2.2.14}$$

Notemos que $\psi_{\bar{p}_{k,n}}(\frac{u}{n})$ y $\psi_{\bar{p}_{k,n}}(\frac{2u}{n})$ son probabilidades de ruina del modelo clásico $R_t^{\bar{p}_{k,n}:\epsilon}$ definido

en (2.2.2) con capital inicial $\frac{u}{n}$ y $\frac{2u}{n}$, por lo que se cumple la aproximación de Crámer-Lundberg definida en en capítulo 1, (1.10), es decir, $\psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{u}{n}\right) \approx C_{k,n}e^{-\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}\frac{u}{n}}$ y $\psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{2u}{n}\right) \approx C_{k,n}e^{-\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}\frac{2u}{n}}$ donde $\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}$ es el coeficiente de ajuste que resuelve la ecuación

$$\frac{\beta}{\epsilon}(\hat{B}^{\epsilon}[x]-1)-\bar{p}_{k,n:\epsilon}x=0,$$

es decir,

$$\frac{\beta}{\epsilon}(\hat{B}^{\epsilon}[\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}]-1)-\bar{p}_{k,n:\epsilon}\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}=0 \tag{2.2.15}$$

donde $\hat{B}^{\epsilon}$ denota la función generadora de momentos de $\epsilon \cdot U_1$. Veamos la relación entre $\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}$ y $\bar{\gamma}_{k,n}$, el coeficiente de ajuste del proceso de riesgo clásico $R_t^{\bar{p}_{k,n}}$ con prima constante $\bar{p}_{k,n}$ definido en (1.5), para esto notemos que $\hat{B}^{\epsilon}[\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}] = \mathbb{E}\left[e^{\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}\cdot\epsilon\cdot U_1}\right] = \hat{B}[\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}\cdot\epsilon]$, entonces (2.2.15) puede escribirse como

$$\beta(\hat{B}[\epsilon\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}]-1)-\bar{p}_{k,n:\epsilon}\cdot\epsilon\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}=0 \tag{2.2.16}$$

por lo que $\epsilon\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}$ resuelve la ecuación

$$\beta(\hat{B}[x]-1)-\bar{p}_{k,n:\epsilon}\cdot x=0$$

entonces,

$$\epsilon\bar{\gamma}^{\epsilon}_{k,n}=\bar{\gamma}_{k,n}.$$

Por lo tanto, $\psi_{\bar{p}_{k,n}}(u) \approx C_{k,n}e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}}$ y $\psi_{\bar{p}_{k,n}}(\frac{2u}{n}) \approx C_{k,n}e^{-\frac{2u\bar{\gamma}_{k,n}}{n\epsilon}}$, es decir,

$$\psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{u}{n}\right)=\lim_{u\to\infty}C_{k,n}e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}}$$

y también,

$$\psi_{\bar{p}_{k,n}}\left(\frac{2u}{n}\right)=\lim_{u\to\infty}C_{k,n}e^{-\frac{2u\bar{\gamma}_{k,n}}{n\epsilon}},$$

entonces en (2.2.14) tenemos

$$\psi_\epsilon(u) \geq \prod_{k=1}^{n} \lim_{u\to\infty} C_{k,n} e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}} - \lim_{u\to\infty} C_{k,n} e^{-\frac{2u\bar{\gamma}_{k,n}}{n\epsilon}}$$

el lado derecho de la desigualdad puede escribirse como

$$\prod_{k=1}^{n} \lim_{u\to\infty} \left(C_{k,n} e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}} - C_{k,n} e^{-\frac{2u\bar{\gamma}_{k,n}}{n\epsilon}} \right)$$

y agrupando tenemos

$$\prod_{k=1}^{n} \lim_{u\to\infty} C_{k,n} e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}} \left(1 - e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}} \right)$$

por lo tanto,

$$\psi_\epsilon(u) \geq \prod_{k=1}^{n} \lim_{u\to\infty} C_{k,n} e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}} \left(1 - e^{-\frac{\bar{\gamma}_{k,n}\frac{u}{n}}{\epsilon}} \right). \tag{2.2.17}$$

Aplicando logaritmos y multiplicando por -1,

$$-log\left(\psi_\epsilon(u)\right) \leq -\sum_{k=1}^{n} \lim_{u\to\infty} \left(log(C_{k,n}) - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon} + log\left(1 - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon}\right)\right)$$

distribuyendo el límite,

$$-\sum_{k=1}^{n} \lim_{u\to\infty} \left(log(C_{k,n}) - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon} + log\left(1 - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{\epsilon} - \sum_{k=1}^{n} \left(log(C_{k,n}) + \lim_{u\to\infty} log\left(1 - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon}\right)\right)$$

por propiedades de logaritmo,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{\epsilon} - \sum_{k=1}^{n} \left(log(C_{k,n}) + \lim_{u\to\infty} log\left(1 - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon} - \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{u\to\infty} log\left(1 - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon}\right)\right)$$

multiplicando por $\epsilon > 0$,

$$-\epsilon log(\psi_\epsilon(u)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n} - \epsilon \sum_{k=1}^{n} \lim_{u\to\infty} log\left(1 - \frac{\bar{\gamma}_{k,n}u}{n\epsilon}\right). \tag{2.2.18}$$

Por la proposición 2.0.1, si $\bar{p}_{k,n}(x)$ es no decreciente como función de x entonces $\bar{\gamma}_{k,n}(x)$ es no decreciente como función de x, entonces se cumple que $\bar{\gamma}_{k,n}(x) = \sup_{u_{n-1,n} \leq x \leq u_{n,n+1}} \gamma_{k,n}(x)$.

Notemos que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\gamma}_{k,n} u}{n}$ es una suma de Riemann y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\gamma}_{k,n} u}{n} = \int_0^u \gamma(x)dx \tag{2.2.19}$$

entonces tomando el límite cuando n tiende a infinito en (2.2.18) tenemos

$$-\epsilon log(\psi_\epsilon(u)) \leq \int_0^u \gamma(x)dx + 0 = \int_0^u \gamma(x)dx$$

y tomando el límite cuando ϵ tiende a cero obtenemos

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} -\epsilon log(\psi_\epsilon(u)) \leq I(u). \tag{2.2.20}$$

Por otro lado,

$$\psi_\epsilon(u) \leq exp\left(\int_0^u \gamma^\epsilon(x)dx\right) = exp\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^u \gamma(x)dx\right) = exp\left(\frac{1}{\epsilon} I(u)\right),$$

entonces

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} -\epsilon log(\psi_\epsilon(u)) \geq I(u). \tag{2.2.21}$$

Por (2.2.20) y (2.2.21) concluimos (2.2.3).

Por lo tanto, tenemos una aproximación a la probabilidad de ruina del proceso de riesgo con prima dependiente de la reserva actual, reclamos de tamaño ϵU_k e intensidad de la tasa de llegada de los reclamos $\frac{\beta}{\epsilon}$. Este resultado lo obtuvimos de estudiar el comportamiento local de $p(x)$, la función que determina la prima hasta el tiempo t, asumiendo que no varia mucho en una pequeña vecindad, por lo tanto, si consideramos a $p(x)$ como una constante p, $R_{t:u}^{p:\epsilon}$ denota el proceso de riesgo al tiempo t con prima constante p, capital inicial u, definido en (1.5) pero

intercambiando U_k con ϵU_k y β por $\frac{\beta}{\epsilon}$ y $R^p_{\frac{t}{\epsilon}:\frac{u}{\epsilon}}$ denota el proceso de riesgo al tiempo $\frac{t}{\epsilon}$, definido en (1.5) con prima constante p y capital inicial $\frac{u}{\epsilon}$, entonces

$$R^{p:\epsilon}_{t:u} = u+p\cdot t-\epsilon \sum_{k=1}^{N^\epsilon(t)} U_k = \epsilon\cdot\left(\frac{u}{\epsilon}\right)+\epsilon\left(\frac{t}{\epsilon}\right)p-\epsilon \sum_{k=1}^{N(t/\epsilon)} U_k = \epsilon\left[\left(\frac{u}{\epsilon}\right)+\left(\frac{t}{\epsilon}\right)p- \sum_{k=1}^{N(t/\epsilon)} U_k\right] = \epsilon R^p_{\frac{t}{\epsilon}:\frac{u}{\epsilon}}$$

entonces, $\psi_\epsilon(u) = \psi\left(\frac{u}{\epsilon}\right)$, por lo tanto,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} -\epsilon log(\psi_\epsilon(u)) = \lim_{u\to\infty} log(\psi(u))$$

y así concluimos

$$\lim_{u\to\infty} -log(\psi(u)) = I(u)$$

lo cual denotaremos por $\psi(u) \approx e^{-I(u)}$.

Es decir, el comportamiento de la probabilidad de ruina del modelo dependiente de la reserva actual, podemos estudiarlo con los coeficientes de Crámer-Lundberg definidos en el capítulo anterior y a medida que el capital inicial es mayor, la aproximación mejora. En el siguiente capítulo daremos ejemplos explícitos de la probabilidad de ruina y la cota superior y aproximación sobre ella.

Capítulo 3

Discusión de casos especiales

En esta sección se mostrarán ejemplos en los cuales se puede obtener explícitamente $\psi(u)$, la probabilidad de ruina de un proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ con capital (estado) inicial u. En el capítulo 1 notamos que en el modelo clásico es muy útil contar con la desigualdad y la aproximación de Cramér - Lundberg debido a que no resulta sencillo obtener una expresión explícita para la probabilidad de ruina, aún en este caso. Es por ello que en el caso del proceso definido en (2.0.1), cuando la prima es dependiente de la reserva, tampoco resulta una tarea fácil encontrar dichas expresiones, sin embargo, para algunos casos especiales es posible.

En el primero de los casos, consideraremos el proceso de riesgo con prima dependiente de la reserva, definido en (2.0.1), cuando el tamaño de los reclamos se distribuye exponencial. Será necesario tomar en cuenta un proceso auxiliar llamado *proceso de almacenamiento*, se considerará la probabilidad de que dicho proceso rebase cierto estado u y eso será equivalente al evento en el que el proceso de riesgo con prima dependiente de la reserva con capital inicial u sea menor que cero. En este sentido, se encontrará explícitamente la probabilidad de ruina bajo ciertas condiciones.

En el segundo ejemplo, consideraremos un caso más general, es decir, $\{R_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de riesgo de tiempo continuo en $[0,\infty)$ que posee la propiedad fuerte de Markov, y que además, es posible considerar las funciones $\mu(x)$ y $\sigma^2(x)$ que después de un análisis, se pensarán como la esperanza y varianza del proceso en una vecindad de u. La propiedad fuerte de Markov y las

funciones $\mu(x)$ y $\sigma^2(x)$ se definirán posteriormente.

En este caso, nos va a interesar la probabilidad de llegar a cierto estado, suceso que se podría considerar como ruina tal como en el modelo de riesgo definido en (2.0.1) que hemos considerado anteriormente, sin embargo, este modelo no necesariamente tiene la forma de la trayectoria del proceso que teníamos en el proceso de riesgo, debido a los saltos de los reclamos, en tal caso será necesario conocer las trayectorias de la media y la varianza del proceso. Se buscará encontrar la probabilidad de llegar al estado cero, empezando en el estado x, en términos de $\gamma(x)$, el coeficiente de ajuste local que se definirá para este proceso. Posteriormente, se dará una aplicación particular con un proceso que modela la proporción de cierto tipo de individuos en una población, en el cual se aborda el problema de extinción de una población sujeta a selección y nos interesa encontrar la probabilidad de que en algún tiempo t la población resulte extinta. En este capítulo nos basaremos principalmente en [2], [5] y [6].

3.1. Reclamos exponenciales

En esta sección consideraremos el proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ con prima dependiente de la reserva, definido en (2.0.1) con los puntos de $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$, y con la suposición adicional de que el tamaño de los reclamos se distribuye exponencial con tasa $\delta > 0$, es decir,

$$\bar{B}(x) = 1 - B(x) = e^{-\delta x}$$

donde B y $\bar{B}$ denotan las funciones de distribución y de supervivencia asociadas a los reclamos, respectivamente.

Sea T un número real no negativo. Supongamos que el proceso $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$ tiene n reclamos en los tiempos $T_1, T_2, ..., T_n$, definidos en (1.6). Consideremos el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ definido como

$$V_t = A_t^* - \int_0^t p(V_s)ds. \tag{3.1.1}$$

donde $A_t^* = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k^*$ y para cada $k = 1, ...n$, $U_k^* = U_{n-k+1}$, además, el tiempo de llegada del reclamo k lo definimos como $T_k^* = T - T_{n-k+1}$, es decir, el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ está construido de tal manera que sea una reflexión sobre $t = 0$ del proceso $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$. Utilizaremos el proceso auxiliar $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ para determinar la probabilidad de ruina $\psi(u)$ en $(0, T]$ para el proceso $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$ y esto se hará con base en si el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ rebasa el nivel de reserva u al tiempo T o no, es por eso que se usarán las convenciones $V_0 = 0$ y $p(0) = 0$ para que si sucede que el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ llega a 0 en algún tiempo t, por esta razón se mantiene a ese nivel de reserva hasta el siguiente reclamo.

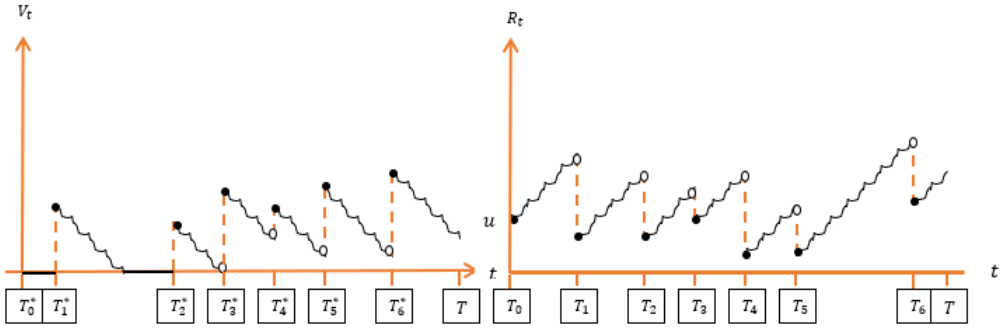

Figura 3-1: Comparación entre los procesos V_t y R_t cuando R_t no llega a la ruina en el intervalo de tiempo $(0, T]$.

Supongamos que el proceso de riesgo $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$ no llega a la ruina en el intervalo de tiempo $(0, T]$, como el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ decrece entre reclamos a una tasa $p(r)$, entonces tenemos dos opciones; la primera es que $V_t \neq 0$ para toda $t \in (0, T]$ y en bajo dichas circunstancias, el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una reflexión sobre $t = 0$ del proceso $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$.

La segunda opción es que $V_t = 0$ para alguna $t \in (0, T]$ y se mantiene en ese nivel de reserva hasta la llegada del siguiente reclamo y así el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ llegará al nivel de reserva igual al tamaño de ese reclamo, tal como se muestra en el ejemplo de la figura 3-1.

Por lo tanto, el valor de V_T será menor o igual a u cuando el proceso $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$ no llega a la ruina en el intervalo de tiempo $(0, T]$.

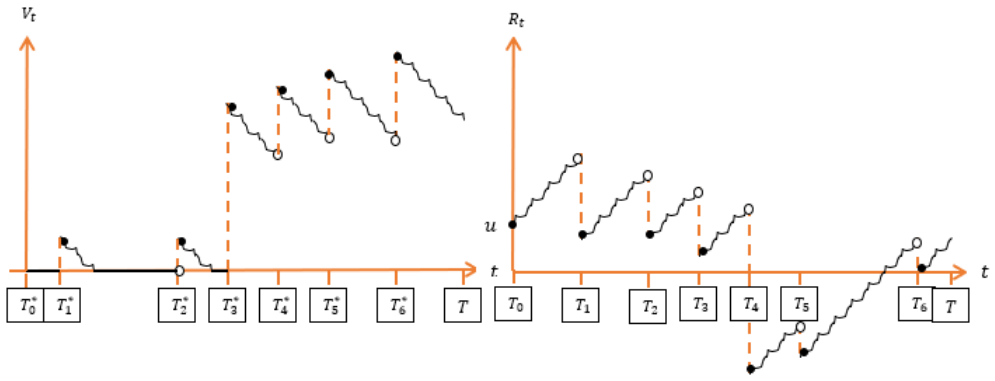

Figura 3-2: Comparación entre los procesos V_t y R_t cuando R_t llega a la ruina en el intervalo de tiempo $(0, T]$.

Ahora consideremos el caso en el que el proceso de riesgo $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$ llega a la ruina en el intervalo de tiempo $(0, T]$ y supongamos que esto sucede en el tiempo T_k con el reclamo U_k, entonces $R_{T_k} < 0$, sin embargo, V_t es siempre positivo y el reclamo U_{k+1} se verá reflejado en un salto positivo en V_t, esto implicará que el proceso V_t llegará al nivel de reserva 0 y se mantendrá en ese estado hasta la llegada de algún reclamo, lo que ocasionará que $V_T \geq u$. Para un ejemplo ilustrativo, ver Figura 3-2.

En la siguiente proposición, se probará formalmente la relación entre la probabilidad de ruina del proceso $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$ y la probabilidad de cruce de nivel de reserva u en el proceso $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ al tiempo T.

Proposición 3.1.1 Para toda $T < \infty$, los eventos $\{\tau(u) < T\}$ y $\{V_T > u\}$ coinciden, en particular, se cumple

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}[V_T > u], \tag{3.1.2}$$

donde $\psi(u, T)$ denota la probabilidad de ruina del proceso de riesgo $\{R_t\}_{t\geq 0}$ en el intervalo de tiempo $(0, T]$.

Demostración:

Sean $u > 0$ y $T < \infty$. Supongamos primero que $V_T > u$ y que hay n reclamaciones en el intervalo de tiempo $[0, T]$ del proceso de riesgo $\{R_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Como en (2.0.2), consideremos la siguiente ecuación diferencial con condición inicial

$$\frac{d}{dt} g(t) = p(g(t)), \qquad g(0) = u \tag{3.1.3}$$

definimos la función $r_u(t)$ como solución de (3.1.3), es decir,

$$\frac{d}{dt} r_u(t) = p(r_u(t)), \qquad r_u(0) = u \tag{3.1.4}$$

y sea T_k el tiempo en el que ocurre el k-ésimo reclamo en el proceso de riesgo $\{R_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Como ya vimos en el capítulo 2, la función $r_u(t)$ describe el comportamiento de $\{R_t\}_{0 \leq t \leq T}$ entre reclamos. En la página 13 se probó que $r_u(t)$ es no decreciente como función de u, para toda $t \geq 0$, entonces

$$V_{T_n^*} = r_{V_T}(T_1) - U_1 > r_u(T_1) - U_1 = R_{T_1}.$$

Si $V_{T_n^*} = 0$ entonces la ruina sucedió con el primer reclamo, de otra forma repetimos el argumento y obtenemos $V_{T_{n-1}^*} > R_{T_2}$. Así, encontraremos k tal que $V_{T_{n-k+1}^*} = 0$, en el peor de los casos, tendríamos que la primera k para lo que se cumple lo anterior es $k = n - 1$, es decir, $T_0 = 0$ y esto implica que la ruina sucede con el (n-1)-reclamo en el proceso $\{R_t\}_{0 \leq t \leq T}$, por lo tanto, $\tau(u) \leq T$.

Ahora supongamos que $V_T \leq u$ y demostraremos que $\tau(u) > T$. Análogo a la prueba anterior, tenemos que

$$V_{T_n^*} = r_{V_T}(T_1) - U_1 \leq r_u(T_1) - U_1 = R_{T_1}$$

y con un argumento similar, probamos que $R_{T_n} \geq 0$ para toda $n \leq N$ ya que el proceso $\{V_t\}_{0 \leq t \leq T}$ siempre es no negativo, por las convenciones $p(0) = 0$ y $V_0 = 0$ y debido a que la ruina sólo puede ocurrir con los reclamos, tenemos que $R_{T_k} \geq 0$ para toda $k = 1, ..., n$, así concluimos que $\tau(u) > T$.

En conclusión, para toda $u \geq 0$ y para toda $T > 0$, los eventos $\{\tau(u) < \infty\}$ y $\{V_T > u\}$

coinciden.

Por la proposición 3.1.1 que se acaba de probar tenemos que, en particular, para toda $u \geq 0$ y para toda $T > 0$

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}[V_T > u]. \tag{3.1.5}$$

Proposición 3.1.2. Sea la función $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de tal manera que $G(u) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}[V_T > u]$ si $u \geq 0$ y $G(u) = 0$ si $u < 0$. Para toda $u \geq 0$,

$$G(u) = 1 - \psi(u) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}[V_T > u] \tag{3.1.6}$$

y además, G es función de distribución si y sólo si $\psi(u) < 1$ para toda $u \geq 0$.

Demostración:

Sea $u \geq 0$. Para cada $T > 0$ definimos el evento $A_T = \{\text{ínf}\{0 < t \leq T : R_t < 0 | R_0 = u\}\}$. Notemos que $A_{T+1} \subset A_T$, es decir, $\{A_T\}_{T\geq 1}$ es una sucesión decreciente de eventos y en consecuencia, $\{A_T^c\}_{T\geq 1}$ es una sucesión creciente de eventos, por el Teorema de continuidad de la probabilidad (ver apéndice, proposición 5.1.2),

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{P}(A_T^c) = \mathbb{P}\left(\lim_{T\to\infty} A_T^c\right).$$

Así, notemos que si $u \geq 0$,

$$G(u) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}[V_T > u] = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}(A_T^c) = \mathbb{P}\left(\lim_{T\to\infty} A_T^c\right) = 1 - \psi(u),$$

lo que implica que si $u \geq 0$

$$G(u) = 1 - \psi(u) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}[V_T > u]. \tag{3.1.7}$$

Ahora supongamos que $\psi(u) < 1$ para toda $u \geq 0$, se demostrará que G es función de distribución de una variable aleatoria no negativa, es decir, se cumplen las siguientes condiciones:

I) Para toda $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq G(u) \leq 1$.

II) $G(u)$ es no decreciente como función de u.

III) $\lim_{u\to\infty} G(u) = 1$.

IV) $\lim_{u\to 0} G(u) = 0$.

V) $\lim_{h\to 0^+} G(u+h) = G(u)$.

Demostración:

I) Sea $u \geq 0$, por (3.1.7), $G(u) = 1 - \psi(u)$ y $0 \leq \psi(u) < 1$, en consecuencia, $0 < G(u) \leq 1$.

II) Para demostrar que $G(u)$ es no decreciente como función de u, consideremos $u, v \geq 0$ tales que $u < v$.

Recordemos de la prueba de la proposición 2.0.1 que $\psi(u) = \mathbb{P}[\text{ínf}\{t > 0 : R_t < 0 | R_0 = u\}]$ es no creciente como función de u y por lo tanto, $G(u)$ es creciente como función de u.

III) Para cada $u \geq 0$, definimos $A_u = \{\text{ínf}\{t > 0 : R_t < 0 | R_0 = u\}\}$. Notemos que dada $u \geq 0$, $A_{u+1} \subset A_u$, lo cual implica $A_u^c \subset A_{u+1}^c$ y por el Teorema de continuidad de la probabilidad.

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(A_u^c) = \mathbb{P}\left(\lim_{u\to\infty} A_u^c\right) \tag{3.1.8}$$

por lo tanto,

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = \lim_{u\to\infty} 1 - \psi(u) = \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(A_u^c) = \mathbb{P}\left(\lim_{u\to\infty} A_u^c\right) = 1$$

y así concluimos,

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = 1$$

IV) Para cada $u \geq 0$, definimos A_u como en el punto anterior, por (3.1.6),

$$\lim_{u\to 0} G(u) = \lim_{u\to\infty} G\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to\infty} 1 - \psi\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(A_{\frac{1}{u}}^c\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{u\to\infty} A_{\frac{1}{u}}^c\right) = 0$$

y así concluimos,

$$\lim_{u\to 0} G(u) = 0$$

v) Para demostrar la continuidad por la derecha de $G(u)$, notemos que para cada $t > 0$ fija, $G_t(u) = \mathbb{P}[V_t \leq u]$ es una función de distribución y por lo tanto, continua por la derecha. Sea $u_0 \geq 0$ tal que $u > u_0$, por (3.1.6) de la proposición 3.1.2 tenemos que

$$\lim_{u\to u_0} G(u) = \lim_{u\to u_0} \lim_{t\to\infty} G_t(u).$$

Además, por lo anterior (ver apéndice, teorema 5.2.1), podemos intercambiar los límites sobre t y u, entonces

$$\lim_{u\to u_0} G(u) = \lim_{t\to\infty} \lim_{u\to u_0} G_t(u)$$

y por (3.1.6),

$$\lim_{u\to u_0} G(u) = \lim_{t\to\infty} \lim_{u\to u_0} G_t(u) = \lim_{t\to\infty} G_t(u_0) = G(u_0).$$

Por lo tanto, G es continua por la derecha y así concluimos que G es una función de distribución si $\psi(u) < 1$ para toda $u \geq 0$.

Ahora supongamos que $G(u)$ es una función de distribución y se probará que $\psi(u) < 1$ para toda $u \geq 0$. Supongamos que $\psi(u) = 1$ para alguna $u \geq 0$, por la proposición (2.0.1), $\psi(u) = 1$ para toda $u \geq 0$. Como G es una función de distribución, en particular se cumple

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = 1$$

y por otro lado,

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = \lim_{u\to\infty} 1 - \psi(u) = 0$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto, $\psi(u) < 1$ para toda $u \geq 0$.

Proposición 3.1.3 Existe una variable aleatoria V tal que $\{V_t\}$ converge en distribución a V

y en particular se cumple

$$\psi(u) = \mathbb{P}[V > u] \tag{3.1.9}$$

si y sólo si $\psi(u) < 1$ para toda $u \geq 0$.

Demostración:

Por la proposición 3.1.1 bastaría encontrar una variable aleatoria V tal que G es función de distribución de V.

Sea U una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$, definimos la variable aleatoria V como

$$V = G^{-1}(U) \tag{3.1.10}$$

donde para cada $x \in (0, 1)$,

$$G^{-1}(x) = \text{ínf}\{y \geq 0 : G(y) \geq x\} = \text{ínf}\{y \geq 0 : 1 - \psi(y) \geq x\}. \tag{3.1.11}$$

Veamos que la variable aleatoria V tiene función de distribución G. Sea $y \geq 0$, primero notemos que los eventos $\{G^{-1}(U) \leq y\}$ y $\{U \leq G(y)\}$ son equivalentes ya que si $x \in (0, 1)$ tal que $G^{-1}(x) \leq y$ implica $G(y) \geq x$ ya que G es no decreciente y por otro lado, si $x \leq G(y)$ entonces $y \geq G^{-1}(x)$ por definición de $G^{-1}(x)$. En consecuencia,

$$\mathbb{P}[V \leq y] = \mathbb{P}[G^{-1}(U) \leq y] = \mathbb{P}[U \leq G(y)] = G(y), \tag{3.1.12}$$

por lo tanto G es función de distribución de $V = G^{-1}(U)$. A este método utilizado para encontrar la variable aleatoria V se le conoce como *método transformado inverso*. Así, por (3.1.10) concluimos que $\{V_t\}$ converge en distribución a V si y sólo si $\psi(u) < 1$ para toda $u \geq 0$.

Ahora veamos que V tiene función de densidad, es decir, existe una función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que cumple:

i) $f(y) \geq 0$ para toda $y \geq 0$.

II) $\int_0^\infty f(y)dy = 1.$

III) $G(y) = \int_0^y f(x)dx$ para toda $y > 0$.

Para ello, supongamos que G es absolutamente continua, es decir, existe una función $g(x)$ definida para toda $x > 0$ y g_0 para $x = 0$ que cumple con los tres puntos anteriores, en particular G es derivable y además, $G'(x) = g(x)$ para toda $x > 0$.

En el siguiente teorema daremos la forma explícita de $g(y)$ y g_0, en particular se cumple

$$1 = g_0 + \int_0^\infty g(y)dy \tag{3.1.13}$$

y además, por (3.1.5) la probabilidad de ruina con capital inicial u del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ puede escribirse de la forma

$$\psi(u) = \int_u^\infty g(y)dy. \tag{3.1.14}$$

Nuestro objetivo ahora es hallar una expresión explícita de $g(y)$, para lo cual tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 Consideremos el proceso de riesgo con prima dependiente de la reserva $\{R_t\}_{t\geq 0}$, definido en (2.0.1). Supongamos que se cumplen las suposiciones $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$, B es la función de distribución correspondiente al reclamo U_1 con tasa $\delta > 0$, $\bar{B}(x) = 1 - B(x) = e^{-\delta x}$ y definimos $w(x) = \int_0^x \frac{1}{p(t)}dt < \infty$ para toda $x > 0$, entonces

$$\psi(u) = \int_u^\infty g(y)dy$$

donde $g(x) = \frac{g_0\beta}{p(x)}exp\{\beta w(x) - \delta x\}$ y $\frac{1}{g_0} = 1 + \int_0^\infty \frac{\beta}{p(x)}exp\{\beta w(x) - \delta x\}dx$.

Demostración:

Para cada $x \geq 0$, consideremos el proceso

$$V_t^* = x + V_t = x + A_t^* - \int_0^t p(V_s)ds, \tag{3.1.15}$$

donde $A_t^* = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k^*$. Notemos que el capital inicial del proceso V_t^* es x, es decir, $V_0^* = x$. Sea $\mathbb{D}$ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\frac{d}{dt}\mathbb{E}_x[f(x)]|_{t=0}$ existe para toda $x \geq 0$ y definimos el operador $\zeta : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ llamado *generador* como

$$\zeta(f(x)) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}_x[f(V_t^*)]|_{t=0}, \qquad V_0^* = x \tag{3.1.16}$$

que será útil para encontrar una expresión que involucrará a $g(x)$ y g_0 tomando $f = G$. De una forma análoga de como se probó en (2.0.4), es posible probar que entre saltos, V_t* puede ser descrito por la función $-r_u(t)$ definida en (3.1.4). Sea $x \geq 0$, por definición de derivada,

$$\zeta(f(x)) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}_x[f(V_t^*)]_{|t=0} = \lim_{t\to 0} t^{-1}[\mathbb{E}_x[f(V_t^*)] - \mathbb{E}_x[f(V_0^*)]]$$

y como $V_0^* = x$,

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}[\mathbb{E}_x[f(V_t^*)] - \mathbb{E}_x[f(V_0^*)]] = \lim_{t\to 0} t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)],$$

por lo tanto, el operador ζ puede escribirse como

$$\zeta(f(x)) = \lim_{t\to 0} t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)]. \tag{3.1.17}$$

Sea $t > 0$ considerada suficientemente pequeña,

$$t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)] = a(t) + b(t) + c(t) \tag{3.1.18}$$

donde establecemos

$$a(t) = t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x); N(t) = 0],$$

$$b(t) = t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x); N(t) = 1]$$

y

$$c(t) = t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x); N(t) \geq 2].$$

Es decir, estamos analizando los casos en los que se tienen cero reclamos, un reclamo y 2 o más reclamos hasta el tiempo t. En el primer caso tenemos que por la regla de Bayes,

$$a(t) = t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x); N(t) = 0] = t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)|N(t) = 0] \cdot \mathbb{P}[N(t) = 0]$$

como no tenemos reclamos al tiempo t, el comportamiento de V_t^* está totalmente descrito por $-r_x(t)$, es decir

$$t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)|N(t) = 0]\mathbb{P}[N(t) = 0] = t^{-1}\mathbb{E}[f(-r_x(t)) - f(x)] \cdot e^{-\beta t}$$

así sucede que $f(-r_x(t)) - f(x)$ es determinista,

$$t^{-1}\mathbb{E}[f(-r_x(t)) - f(x)]e^{-\beta t} = t^{-1}[f(-r_x(t)) - f(x)] \cdot e^{-\beta t}$$

multiplicando por $1 = \frac{-r_x(t)-x}{-r_x(t)-x}$,

$$t^{-1}[f(-r_x(t)) - f(x)]e^{-\beta t} = \left[\frac{f(x + [-r_x(t) - x]) - f(x)}{-r_x(t) - x}\right]\left[\frac{-r_x(t) - x}{t}\right]e^{-\beta t}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt}r_x(t) = p(r_x(t)) \geq 0$ para toda $t > 0$, $r_x(t)$ es no decreciente como función de t y en consecuencia, $-r_x(t)$ es no creciente como función de t. Además, $-r_x(t)$ se aproxima a x cuando t tiende a cero, por tal motivo $-r_x(t) - x$ tiende a cero cuando t se acerca a cero, así

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x + [-r_x(t) - x]) - f(x)}{-r_x(t) - x} = f'(x).$$

Por otra parte,

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{-r_x(t)-x}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{-r_x(t)-(-r_x(0))}{t}=-\lim_{t\downarrow 0}\frac{d}{dt}r_x(t)=-\lim_{t\downarrow 0}p(r_x(t)))=-p(x)$$

y $\lim_{t\downarrow 0} e^{-\beta t}=1$, entonces

$$\lim_{t\downarrow 0} a(t)=-p(x)f'(x). \tag{3.1.19}$$

Ahora consideremos el caso en el que se tiene un sólo reclamo hasta el tiempo t,

$$b(t)=t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*)-f(x);N(t)=1]$$

por la regla de Bayes,

$$t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*)-f(x);N(t)=1]=t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*)-f(x)|N(t)=1]\mathbb{P}[N(t)=1]$$

como sólo estamos considerando un reclamo hasta el tiempo t, podemos escribir a V_t^* como $-r_{-r_x(T_1)+U_1}(t-T_1)$ y por el Lema 5.2.1 del apéndice,

$$t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*)-f(x)|N(t)=1]\mathbb{P}[N(t)=1]=t^{-1}\mathbb{E}[f(-r_{-r_x(T_1)+U_1}(t-T_1))-f(x)|N(t)=1]\cdot\beta te^{-\beta t}$$

de modo que

$$\lim_{t\downarrow 0} b(t)=\mathbb{E}[f(x+U_1)-f(x)]=\beta\int_0^\infty[f(x+y)-f(x)]B(dy)$$

el lado derecho de la igualdad anterior también puede escribirse como

$$\beta\int_0^\infty[f(x+y)-f(x)]B(dy)=\beta\int_0^\infty f(x+y)B(dy)-\beta f(x)$$

realizando el cambio de variable $u = x + y$ en el primer término

$$\lim_{t\downarrow 0} b(t) = -\beta f(x) + \beta \int_x^\infty f(y)B'(y-x)dy.$$

Luego,

$$-\beta f(x) + \beta \int_x^\infty f(y)B'(y-x)dy = -\beta f(x)\bar{B}(y-x)|_x^\infty + \beta \int_x^\infty f(y)B'(y-x)dy$$

que puede simplificarse a

$$-\beta f(x)\bar{B}(y-x)|_x^\infty + \beta \int_x^\infty f(y)B'(y-x)dy = \beta \int_x^\infty \bar{B}(y-x)f'(y)dy$$

por lo tanto,

$$\lim_{t\downarrow 0} b(t) = \beta \int_x^\infty \bar{B}(y-x)f'(y)dy. \tag{3.1.20}$$

Por último, como estamos considerando t un tiempo suficientemente pequeño, la probabilidad de tener dos o más reclamos en el periodo de tiempo $(0, t]$ es muy pequeña. Análogamente como en los casos anteriores,

$$\lim_{t\downarrow 0} c(t) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)|N(t) \geq 2]\mathbb{P}[N(t) \geq 2]$$

por la definición del proceso Poisson (ver apéndice, definición 5.2.5),

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)|N(t) \geq 2]\mathbb{P}[N(t) \geq 2] = \lim_{t\downarrow 0} \mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)|N(t) \geq 2]\frac{o(t)}{t}$$

y ya que $\mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)|N(t) \geq 2]$ es acotada,

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathbb{E}[f(V_t^*) - f(x)|N(t) \geq 2]\frac{o(t)}{t} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\downarrow 0} c(t) = 0. \tag{3.1.21}$$

De (3.1.19), (3.1.20) y (3.1.21), tenemos

$$\zeta(f(x)) = -p(x)f'(x) + \beta \int_x^\infty \bar{B}(y-x)f'(y)dy, \tag{3.1.22}$$

supondremos que para la función de distribución G, existen g_0 y g los términos asociados a la función de densidad, suponemos a G diferenciable y así podemos tomar $f = G$, sustituyendo en (3.1.22) tenemos

$$\zeta(G(x)) = -p(x)G'(x) + \beta \int_x^\infty \bar{B}(x-y)G'(y)dy = -p(x)g(x) + \beta \int_x^\infty \bar{B}(x-y)g(y)dy.$$

Por otro lado, veamos que $G(V_t^*) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[V_t \leq V_t^*]$ donde V_t es el proceso V_t^* con reserva inicial cero. Sea $s < T_1$, como $r_u(t)$ es estrictamente creciente como función de u,

$$V_s^* = -r_x(s) < -r_0(s) = V_s$$

y como los reclamos no dependen del capital inicial,

$$V_{T_1}^* = -r_x(s) + U_1 < -r_0(s) + U_1 = V_{T_1}$$

así, podemos considerar como capitales iniciales $V_{T_1}^*$ y V_{T_1} para en general, demostrar que $V_t < V_t^*$ para toda $t \geq 0$. Por consiguiente,

$$G(V_t^*) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[V_t \leq V_t^*] = \lim_{t\to\infty} 1 - \mathbb{P}[V_t > V_t^*] = \lim_{t\to\infty} 1 - \mathbb{P}[\emptyset] = \lim_{t\to\infty} 1 = 1.$$

y sustituyendo en la definición del operador ζ,

$$\zeta(G(x)) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}_x[G(V_t^*)]|_{t=0} = \frac{d}{dt}1|_{t=0} = 0$$

y así obtenemos

$$\zeta(G(x)) = -p(x)g(x) + \beta \int_x^\infty \bar{B}(x-y)g(y)dy = 0. \tag{3.1.23}$$

También,

$$0 = \int_0^\infty \zeta(G(x))g(x)dx = g_0\beta \int_0^\infty \bar{B}(y)g(y)dy + \int_0^\infty \left[\int_x^\infty \beta\bar{B}(y-x)g(y)dy - p(x)g(x)\right] g(x)dx$$

cambiando los límites de integración del segundo sumando tenemos que

$$g_0\beta \int_0^\infty \bar{B}(y)g(y)dy + \int_0^\infty \left[\int_x^\infty \beta\bar{B}(y-x)g(y)dy - p(x)g(x)\right] g(x)dx$$

puede escribirse como

$$\int_0^\infty \left[g_0\beta\bar{B}(x) + \beta \int_0^x \bar{B}(x-y)g(y)dy - p(x)g(x)\right] g(x)dx.$$

Así, estamos buscando una función de densidad $g(y)$ y un valor $g_0 > 0$ que cumpla

$$\int_0^\infty \left[g_0\beta\bar{B}(x) + \beta \int_0^x \bar{B}(x-y)g(y)dy - p(x)g(x)\right] g(x)dx = 0$$

en particular, podemos buscar una función de densidad $g(y)$ y $g_0 > 0$ tal que para toda $x \geq 0$ cumpla

$$p(x)g(x) = g_0\beta\bar{B}(x) + \beta \int_0^x \bar{B}(x-y)g(y)dy. \tag{3.1.24}$$

Sea $x \geq 0$ y despejando $g(x)$ de (3.1.24) y tomando en cuenta que $\bar{B}(x) = e^{-\delta x}$, obtenemos

$$g(x) = \frac{g_0 \beta e^{-\delta x}}{p(x)} + \frac{\beta}{p(x)} \int_0^x e^{-\delta(x-y)} g(y) dy = \frac{\beta e^{-\delta x}}{p(x)} \left[g_0 + \int_0^x e^{-\delta y} g(y) dy \right] = \frac{\beta e^{-\delta x}}{p(x)} \kappa(x)$$

donde $\kappa(x) = g_0 + \int_0^x e^{-\delta y} g(y) dy$. Por lo tanto,

$$g(x) = \frac{\beta e^{-\delta x}}{p(x)} \kappa(x), \tag{3.1.25}$$

derivando $\kappa(x)$ tenemos

$$\kappa'(x) = e^{\delta x} g(x)$$

y multiplicando por $e^{-\delta x}$ a la ecuación en (3.1.25), tenemos

$$e^{\delta x} g(x) = \frac{\beta}{p(x)} \kappa(x), \tag{3.1.26}$$

así obtenemos la ecuación diferencial

$$\kappa'(x) = \frac{\beta}{p(x)} \kappa(x) \qquad \kappa(0) = g_0, \tag{3.1.27}$$

debido a que suponemos $g_0 \neq 0$, entonces $\kappa(x) \neq 0$ para $x \geq 0$,

$$\frac{d}{dx}(ln(\kappa(x))) = \frac{\kappa'(x)}{\kappa(x)} = \frac{\beta}{p(x)}$$

integrando respecto a x,

$$ln(\kappa(x)) = ln(\kappa(0)) + \int_0^x \frac{\beta}{p(t)} dt = ln(\kappa(0)) + \beta w(x)$$

se sigue que

$$\kappa(x) = \kappa(0) e^{\beta w(x)} = g_0 e^{\beta w(x)}.$$

De las ecuaciones (3.1.26), (3.1.27) y del hecho $w'(x) = \frac{1}{p(x)}$,

$$g(x) = e^{-\delta x}\kappa'(x) = e^{-\delta x}\frac{\beta}{p(x)}\kappa(x) = e^{-\delta x}g_0\beta w'(x)e^{\beta w(x)},$$

es decir,

$$g(x) = e^{-\delta x}g_0\beta w'(x)e^{\beta w(x)}. \tag{3.1.28}$$

Como $1 = g_0 + \int_0^\infty g(y)dy$ entonces

$$\frac{1}{g_0} = 1 + \int_0^\infty \frac{g(y)}{g_0}dy = 1 + \int_0^\infty \frac{\beta}{p(x)}exp\{\beta w(x) - \delta x\}dx = 1 + \int_0^\infty \frac{d(\beta w(x))}{dx}exp\{\beta w(x) - \delta x\}dx,$$

integrando por partes y tomando $u = e^{-\delta x}$ y $v' = \frac{d(\beta w(x))}{dx}exp\{\beta w(x)\}$ obtenemos

$$\frac{1}{g_0} = 1 + e^{-\delta x+\beta w(x)}\ |_0^\infty + \delta\int_0^\infty e^{-\delta x+\beta w(x)} = \delta\int_0^\infty e^{-\delta x+\beta w(x)}$$

y así concluimos,

$$\frac{1}{g_0} = 1 + \int_0^\infty \frac{\beta}{p(x)}exp\{\beta w(x) - \delta x\}dx = \delta\int_0^\infty e^{-\delta x+\beta w(x)}dx. \tag{3.1.29}$$

Proponemos a $g(y)$ y g_0 la función y el número real positivo, respectivamente, que cumplen ser una función de densidad para G, para esto se verificarán los puntos mencionados en la página 45:

I) $g(y) \geq 0$ para toda $y > 0$ y $g_0 \geq 0$. Además, $g_0 = \frac{1}{\delta\int_0^\infty e^{-\delta x+\beta w(x)}dx} > 0$ ya que tenemos que $e^{-\delta x+\beta w(x)} = e^{-\delta x+\beta\int_0^\infty \frac{1}{p(r)}dr} > 0$ para toda $x \geq 0$.

Por otro lado, sea $y > 0$,

$g(y) = e^{-\delta x}g_0\beta w'(x)e^{\beta w(x)} > 0$ ya que $w'(x) = \frac{1}{p(x)} > 0$ para toda $x > 0$ y $\beta > 0$

II) Veamos que $g_0 + \int_0^\infty g(y)dy = 1$.

Denotamos por $a = \int_0^\infty \frac{\beta}{p(x)} e^{-\delta x + \beta w(x)} dx = \int_0^\infty \beta w'(x) e^{-\delta x + \beta w(x)} dx$ y así es posible tener la igualdad

$$g_0 + \int_0^\infty g(x)dx = g_0 + ag_0 = g_0(1+a) = g_0(\frac{1}{g_0}) = 1.$$

III) Por último, notemos que para cada $y > 0$, $G(y) = \int_0^y g(x)dx$ por construcción de g_0 y $g(y)$.

Concluimos que G es absolutamente continua, es decir, tiene función de densidad. Por la proposición 3.1.2,

$$\psi(u) = \mathbb{P}[V > u] = \int_u^\infty g(y)dy$$

es decir, podemos calcular la probabilidad de ruina del proceso de riesgo $\{R_t\}_{t\geq 0}$, dependiente de la prima $p(r)$, tasa de número de reclamos $\beta > 0$ cuando los reclamos se distribuyen exponencial con tasa $\delta > 0$ únicamente con estos datos. La única dificultad podría ser calcular $\int_u^\infty g(y)dy$.

Notemos que la ecuación (3.1.24) resultó de gran importancia para encontrar a g_0 y $g(y)$ y su demostración se basó en [2]. Sin embargo, Asmussen, [2], menciona que G es estacionaria y que la tasa de cruce del nivel x cuando el proceso V_t es decreciente es la misma que la tasa de cruce del nivel x cuando el proceso es creciente. Así notemos que debido a que $\dot{V} = -p(V)$ y que consideramos a $p(x)$ una función no negativa, entonces consideramos a la función $p(x)$ como la función de tasa cuando V_t decrece y $g(x)$ denota la probabilidad de que el proceso $\{V_t\}$ esté cerca de x cuando t es muy grande, por lo tanto, $p(x)g(x)$ representa la tasa de cruce el nivel de reserva x de proceso V_t cuando es decreciente.

Por otro lado, para que V_t sea creciente en un intervalo de tiempo, es necesaria la llegada de un reclamo, por lo tanto si V_t está en el estado de reserva $y \neq 0$, es necesario un reclamo de tamaño, al menos, $x - y$ para lograr cruzar el nivel de reserva x. Así, $\beta \int_0^x \bar{B}(x-y)g(y)dy$ representa $p(x)g(x)$ representa la tasa de cruce el nivel de reserva x de proceso V_t cuando es decreciente y $g_0\beta\hat{B}(x)$ aborda el caso cuando V_t empieza en el estado de reserva $y = 0$.

3.2. Un caso más general

En esta sección, supondremos que tenemos un proceso en el que no necesariamente tenemos los saltos de los reclamos descritos en el modelo de riesgo con prima dependiente de la reserva, en este caso, nos interesará encontrar la probabilidad de que tal proceso llegue a cierto estado. Consideremos las siguientes definiciones:

Definición 3.2.1. Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un espacio medible. Una filtración en $(\Omega, \mathscr{F})$ es una familia no decreciente $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ de sub-σ-álgebras de $\mathscr{F}$.

Afirmación: dado un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ definido en el espacio $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, se tiene que $\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$ con $t \geq 0$ es una filtración en $(\Omega, \mathscr{F})$. *Demostración:* Primero notemos que debido a que $\mathscr{F}_t^X$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene todos los subconjuntos de la familia $\{X_s^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}_{0\leq s\leq t} \subset \mathscr{F}$ entonces sólo falta verificar que $\mathscr{F}_t^X$ es una familia no decreciente, para esto, tomemos $t_1 < t_2$. Como $\{X_s^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}_{0\leq s\leq t_1} \subset \{X_s^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}_{0\leq s\leq t_2}$ entonces $\mathscr{F}_{t_1}^X \subset \mathscr{F}_{t_2}^X$.

A la filtración $\{\mathscr{F}_t^X\}_{t\geq 0}$ le llamaremos *filtración canónica o natural.*

Definición 3.2.2. El proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ es *adaptado* a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, X_t es una variable aleatoria $\mathscr{F}_t$-medible, es decir, para todo $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(A) \in \mathscr{F}_t$.

Observación: todo proceso X es adaptado a la filtración canónica

Definición 3.2.3. Decimos que una función $T : \Omega \to \mathbb{R}$ es un *tiempo de paro* si $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Observación: dado un tiempo de paro T, se afirma que $\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, t \geq 0\}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$.

Demostración:

Como $\{\mathscr{F}_T\}_{T\geq 0} \subseteq \mathscr{F}$, basta probar que $\{\mathscr{F}_T\}_{T\geq 0}$ es una σ- álgebra.

1. Notemos que como $\emptyset \cap \{T \leq t\} = \emptyset \in \mathscr{F}_t$ para toda $t \geq 0$ ya que cada $\mathscr{F}_t$ es una σ-álgebra entonces $\emptyset \in \mathscr{F}_T$.

2. Sean $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathscr{F}_T$. Como $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap \{T \leq t\})$, cada $(A_n \cap \{T \leq$

$t\}) \in \mathscr{F}_t$ y $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una σ-álgebra entonces $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

3. Sea $A \in \mathscr{F}_T$, tenemos que $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ y podemos escribir $A^c \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} - (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathscr{F}_t$.

Así, $\{\mathscr{F}_T\}_{T\geq 0}$ es una sub-σ- álgebra de $\mathscr{F}$ y por lo tanto, una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$.

Informalmente, el espacio de eventos $\mathscr{F}_T$ tiene información hasta el tiempo aleatorio T, es decir, es una colección de conjuntos medibles que son determinados hasta el proceso de tiempo T.

Definición 3.2.4. Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico no negativo. Consideremos la filtración canónica $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ y sea $T : \Omega \to \mathbb{R}$ un tiempo de paro respecto a la filtración natural. Decimos que X posee la *propiedad fuerte de Markov* con respecto a T si las distribuciones X_{T+s} dado $X_T = x$ y X_s dado $X_0 = x$ coinciden para toda $x \geq 0$.

Si $\mathscr{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$ y $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{G}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces diremos que X es $\mathscr{G}$-medible.

Supongamos que $\{R_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico con parámetro de tiempo continuo t que posee la propiedad fuerte de Markov y que tiene trayectorias R_t continuas de t con probabilidad 1. Consideraremos las siguientes suposiciones que llamaremos $\mathscr{H}_3$:

1. El espacio de estados del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ es el intervalo $I = [0, \infty)$.

2. Para toda $u \geq 0$, el proceso es regular en el interior de I, es decir, $\mathbb{P}[T_y < \infty | R_0 = u] > 0$ con $y > 0$.

3. Para cada $h > 0$, denotamos por $\Delta_h R$ al incremento $R_h - R_0$ y supondremos que para toda $u \geq 0$, existen los parámetros $\mu(u)$ y $\sigma^2(u)$ definidos por

$$\mu(u) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\mathbb{E}[\Delta_h R | R_0 = u] \qquad \sigma^2(u) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\mathbb{E}[(\Delta_h R)^2 | R_0 = u]. \quad (3.2.1)$$

4. Las funciones $\mu(u)$ y $\sigma^2(u)$ son continuas de u y doblemente diferenciables en I.

5. $\sigma^2(u) > 0$ para toda $u \geq 0$.

Primero, para ver la información que nos dan los parámetros $\mu(u)$ y $\sigma^2(u)$ recordemos que si f es diferenciable,

$$f(u+h) = f(u) + hf'(u) + o(h)$$

y esta fórmula es llamada *aproximación diferencial de f*.

Dada $u \geq 0$, como suponemos que existe el límite

$$\mu(u) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\mathbb{E}[\Delta_h R | R_0 = u] = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[R_h | R_0 = u] - \mathbb{E}[R_0 | R_0 = u]}{h},$$

eso implica que la función $\mathbb{E}[R_x | R_0 = u]$ es diferenciable en cero y además, su derivada es $\mu(u)$. Lo anterior implica que podemos escribir su aproximación diferencial como,

$$\mathbb{E}[R_h | R_0 = u] = \mathbb{E}[R_0 | R_0 = u] + h\mu(u) + o(h).$$

Por otro lado, por definición de varianza,

$$Var[\Delta_h R | R_0 = u] = \mathbb{E}[(\Delta_h R)^2 | R_0 = u] - (\mathbb{E}[\Delta_h R | R_0 = u])^2$$

en términos de la aproximación diferencial tenemos que

$$\mathbb{E}[(\Delta_h R)^2 | R_0 = u] - (\mathbb{E}[\Delta_h R | R_0 = u])^2 = \sigma^2(u)h + o(h) - (h\mu(u) + o(h))^2$$

y por propiedades de $o(h)$,

$$\sigma^2(u)h + o(h) - (h\mu(u) + o(h))^2 = \sigma^2(u)h + o(h) - (h\mu(u))^2 - 2h\mu(u)o(h) - o(h)^2 = \sigma^2(u)h + o(h).$$

Así, notemos que $\mu(u)$ es la tasa de cambio de la función $\mathbb{E}[R_x | R_0 = u]$ en $x = 0$ y entonces $\mu(u)$ y $\sigma^2(u)$ representan la media y la varianza del proceso de riesgo en una vecindad muy pequeña de u, respectivamente.

El interés será la probabilidad de que el proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ llegue al estado cero, y supondremos a este evento como la ruina del proceso, es decir,

$$\psi(u) = \mathbb{P}[T_0 < \infty | R_0 = u] \tag{3.2.2}$$

donde

$$T_0 = \text{ínf}\{R_t = 0 | R_0 = 0\}$$

es el tiempo en el que se llega por primera vez al estado cero en caso de que esto suceda, de otra manera, denotaremos $T_0 = \infty$.

Suponemos que $\mu(x)$ y $\sigma^2(x)$ son continuas, entonces ya vimos que se cumple:

$$\mathbb{E}[\Delta_h R | R_0 = x] = \mu(x)h + o(h) \tag{3.2.3}$$

$$Var[\Delta_h R | R_0 = x] = \sigma^2(x)h + o(h). \tag{3.2.4}$$

Lo primero es definir un coeficiente de ajuste local, para esto proponemos a $\gamma(x) = \frac{-2\mu(x)}{\sigma^2(x)}$ como candidato y veremos que funciona para crear una cota superior sobre la probabilidad de ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$.

Para un mejor manejo de los calculos que se realizarán a continuación, consideremos las siguientes definiciones:

$$s(x) = exp\left\{\int_0^x \gamma(y)dy\right\} \tag{3.2.5}$$

$$S(x) = \int_0^x s(n)dn \tag{3.2.6}$$

$$S(\infty) = \int_0^\infty s(y)dy. \tag{3.2.7}$$

La idea es primero encontrar una expresión explícita para la probabilidad de que el proceso $\{R_t\}$ llegue primero al estado a que al estado b con $0 < a \leq u \leq b$ para, posteriormente, aplicar un proceso límite para encontrar $\psi(u)$. Para nuestro fin, será útil el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. Sean $0 < a \leq u \leq b$ y definimos $\psi_{a,b}(u)$ la probabilidad de que el proceso $\{R_t\}$ que cumple $\mathscr{H}_3$, con media $\mu(x)$ y varianza $\sigma^2(x)$ para toda $x \geq 0$, llegue al estado $a > 0$ antes del estado $b > 0$ empezando en $u > 0$ al tiempo cero, entonces

$$\psi_{a,b}(u) = \frac{S(u) - S(a)}{S(b) - S(a)}. \tag{3.2.8}$$

Demostración:

Sean $x \geq 0$, definimos T_x como la probabilidad de que el proceso $\{R_t\}$ llegue al nivel de reserva x por primera vez, es decir,

$$T_x = \text{ínf}\{t \geq 0 : R_t = x\}$$

y denotamos por $v(x)$ a la probabilidad de llegar al nivel de reserva a antes de llegar al nivel de reserva b con capital inicial x, esto es

$$v(x) = \mathbb{P}[T_a < T_b | R_0 = x] \qquad a < x < b. \tag{3.2.9}$$

Asumimos los siguientes supuestos que llamaremos $\mathscr{H}_4$:

I) $v(u)$ es continua e infinitamente diferenciable.

II) $v(a) = 1$ y $v(b) = 0$.

III) $v(u)$ es analítica para toda $u \geq 0$.

Para encontrar una expresión que relacione a $\mu(x)$, $\sigma^2(x)$ y la probabilidad de llegar primero al nivel de reserva a que al nivel de reserva b, empezando en x, ahora consideremos h un tiempo suficientemente pequeño tal que la probabilidad de alcanzar a o b al tiempo h sea despreciable,

es decir, $P[\{T_a \leq h\} \cup \{T_b \leq h\}] = o(h)$. Notemos que podemos encontrar esta h debido a que (3.2.2) y (3.2.3) nos dicen que la media y la varianza no varían demasiado en un intervalo pequeño.

Definimos el evento $E = \{T_a \leq h\} \cup \{T_b \leq h\}$. Al tiempo h, condicionando a la posición R_h, la probabilidad de alcanzar b antes de a es $v(R_h)$, por lo tanto, por la ley de probabilidad total

$$v(x) = \mathbb{P}[T_a < T_b | \{R_0 = x\} \cap E^c]\mathbb{P}[E^c] + \mathbb{P}[T_a < T_b | \{R_0 = x\} \cap E]\mathbb{P}[E].$$

Como $\mathbb{P}[T_a < T_b | \{R_0 = u\} \cap E] = \mathbb{P}[T_a < T_b | \{R_0 = u\} \cap (\{T_a \leq h\} \cup \{T_b \leq h\})] < \infty$,

$$v(u) = \mathbb{P}[T_a < T_b | \{R_0 = u\} \cap (\{T_a > h\} \cap \{T_b > h\})]\mathbb{P}[\{T_a > h\} \cap \{T_b > h\}] + o(h),$$

además, $\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}[\{T_a > h\} \cap \{T_b > h\}] = 0$, entonces

$$v(u) = \mathbb{P}[T_a < T_b | \{R_0 = u\} \cap [\{T_a > h\} \cap \{T_b > h\}]].$$

Luego, como $\{R_t\}_{t \geq 0}$ posee la propiedad fuerte de Markov, para todo $t \geq 0$, R_{t+h} dado R_h se distribuye igual que R_t dado R_0 y así, hasta el tiempo h, si aún no se alcanzan los niveles de reserva a o b tenemos que

$$v(x) = \mathbb{E}[v(R_h) | R_0 = x] + o(h).$$

Sea $\Delta R = R_h - x$ y por los supuestos $I), III)$ de $\mathscr{H}_4$, consideramos la serie de Taylor de v en ΔX

$$v(R_x) = v(x + \Delta R) = v(x) + \Delta R v'(x) + \frac{1}{2}(\Delta R)^2 v''(x) + ... \tag{3.2.10}$$

debido a que los términos después del término cuadrático con de orden menor a $(\Delta R)^2$, los denotaremos por $o(h)$.

$$\begin{aligned} v(x) &= \mathbb{E}[v(R_h) | R_0 = x] + o(h) && \text{por (3.2.9)} \\ &= \mathbb{E}[v(\Delta_h R + x) | R_0 = x] + o(h) && \text{por definición de } \Delta_h R \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}[v(x) + \Delta_h R v'(x) + \tfrac{1}{2}(\Delta_h R)^2 v''(x) + o(h) | R_0 = x] + o(h) \qquad \text{por (3.2.10)}$$

$$= v(x) + \mathbb{E}[\Delta_h R | R_0 = x] v'(x) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[(\Delta_h R)^2 | R_0 = x] v''(x) + o(h) \qquad \text{linealidad de } \mathbb{E}$$

$$= v(x) + [\mu(x)h + o(h)]v'(x) + \tfrac{1}{2}[\sigma^2(x)h + o(h)]v''(x) + o(h) \qquad \text{por (3.2.3) y (3.2.4)}$$

$$= v(x) + \mu(x)hv'(x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x)hv''(x) + o(h)[v'(x) + \tfrac{1}{2}v''(x) + 1]$$

$$= v(x) + \mu(x)hv'(x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x)hv''(x) + o(h)$$

por lo tanto,

$$v(x) = v(x) + \mu(x)hv'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)hv''(x) + o(h),$$

entonces

$$0 = \mu(x)hv'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)hv''(x) + o(h)$$

dividiendo entre h y tomando el límite cuando $h \to 0$

$$\mu(x)v'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) = 0. \tag{3.2.11}$$

Sea $C_\infty([0,\infty))$ el conjunto de funciones con dominio en $[0,\infty)$, contradominio en $\mathbb{R}$, infinitamente diferenciables, definimos el operador $L : C_\infty([0,\infty)) \to C_\infty([0,\infty))$ como

$$Lf(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x), \tag{3.2.12}$$

por (3.2.11), buscamos una solución a $Lf = 0$, para ello consideremos el siguiente lema.

Lema 3.2.1 Sea Lf definido como en (3.1.11), $s(x)$ definido como en (3.1.5) entonces

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{s(x)}\frac{df(x)}{dx}\right] \tag{3.2.13}$$

Demostración:

Por definición de Lf,

$$Lf(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

notemos que $\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\left(\frac{-2\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)s(x)}{s(x)} = \frac{-2\mu(x)}{\sigma^2(x)}$, entonces $\mu(x) = -\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{s'(x)}{s(x)}$, sustituyendo ésta

expresión tenemos:

$$\mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) = -\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{s'(x)}{s(x)}f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

factorizando $\frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x)$,

$$-\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{s'(x)}{s(x)}f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x)\left(-\frac{s'(x)}{s^2(x)}f'(x) + \frac{1}{s(x)}f''(x)\right)$$

y, por la regla de la cadena,

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x)\left(-\frac{s'(x)}{s^2(x)}f'(x) + \frac{1}{s(x)}f''(x)\right) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{s(x)}\frac{df(x)}{dx}\right]$$

Así tenemos que nos interesa encontrar una función $f(x)$ tal que:

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{s(x)}\frac{df(x)}{dx}\right] = 0$$

y por ello es suficiente encontrar una función doblemente diferenciable en $[0, \infty)$ tal que

$$\frac{1}{s(x)}\frac{df(x)}{dx} = \beta \tag{3.2.14}$$

para alguna constante $\beta > 0$. Notemos que una función que cumple (3.2.14) es $f(x) = \beta S(x) + \alpha$ donde recordemos que para toda $x \geq 0$, $S(x) = \int_0^x \gamma(y)dy$ y además, notemos que $S(x)$ es doblemente diferenciable en $[0, \infty)$ porque $\gamma(x)$ lo es.

Luego, $f'(x) = \beta S'(x) = s(x)$ entonces,

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m(x)}\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{s(x)}\frac{df(x)}{dx}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m(x)}\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{s(x)}\frac{d\beta S(x) + \alpha}{dx}\right)\right]$$

lo cual se simplifica a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m(x)}\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{s(x)}\frac{d\beta S(x) + \alpha}{dx}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m(x)}\frac{1}{dx}\left(s(x)\frac{1}{s(x)}\right)\right] = 0.$$

Por otro lado, recordemos las condiciones iniciales en los supuestos S_1, $v(a) = 0$ y $v(b) = 1$, así tenemos que $0 = \beta S(a) + \alpha$ entonces $\alpha = -\beta S(a)$ y $1 = \beta S(b) + \alpha$ lo cual implica que $\beta = \frac{1-\alpha}{S(b)} = \frac{1+\beta S(a)}{S(b)}$ entonces,

$$v(u) = \frac{S(x)}{S(b) - S(a)} - \beta S(a) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}.$$

Con el siguiente teorema y con ayuda de (3.2.14) encontraremos una expresión explícita para la probabilidad de ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$.

Teorema 3.2.2 Consideremos un proceso de tiempo continuo $\{R_t\}_{t\geq 0}$ en $[0, \infty)$ que cumple las suposiciones $\mathscr{H}_4$, tal que la media $\mu(x)$ y la varianza $\sigma^2(x)$ son funciones continuas de x y $\sigma^2(x) > 0$ conocidas para toda $x > 0$. Asumamos también que $S(x)$ definida como en (3.2.7) es finita para toda $x > 0$ y que se cumplen las suposiciones del teorema 3.2.1. Si

$$S(\infty) < \infty \tag{3.2.15}$$

entonces $0 < \psi(u) < 1$ para toda $u > 0$ y

$$\psi(u) = 1 - \frac{S(u)}{S(\infty)}.$$

Demostración:

Notemos que la probabilidad de ruina del proceso de riesgo con capital inicial u puede escribirse como la probabilidad de llegar al estado 0 en un tiempo finito, es decir,

$$\psi(u) = \mathbb{P}[T_0 < \infty | R_0 = u]. \tag{3.2.16}$$

Por el Teorema 3.2.1, ya sabemos que si $0 < a \leq u \leq b$, entonces

$$\psi_{a,b}(u) = \mathbb{P}[T_a < T_b | R_0 = u] = \frac{S(u) - S(a)}{S(b) - S(a)},$$

tomando límite cuando $a \downarrow 0$

$$\lim_{a\downarrow 0} \psi_{a,b}(u) = \lim_{b\downarrow 0} \frac{S(u)-S(a)}{S(b)-S(a)} = \lim_{a\downarrow 0} \frac{S(u)-S(a)}{S(b)-\int_0^a s(n)dn} = \frac{S(u)-S(a)}{S(b)} = 1 - \frac{S(u)}{S(a)}$$

Caso 1. $S(\infty) = \infty$

$$\psi(u) = \lim_{a\uparrow\infty} \left(1 - \frac{S(u)}{S(a)}\right) = 1$$

Caso 2. $S(\infty) < \infty$

$$\psi(u) = \lim_{a\uparrow\infty} \left(1 - \frac{S(u)}{S(a)}\right) = 1 - \frac{S(u)}{S(\infty)},$$

en particular, si $u > 0$ entonces, $S(u) > 0$, lo cual implica que $\psi(u) < 1$.

Como en el capítulo 2, Teorema 2.2.1, definimos a $I(u) = \int_0^u \gamma(x)dx$, notemos que

$$\psi(u) = e^{-I(u)} \frac{\int_0^\infty exp\left\{-\int_0^y \gamma(x+u)dx\right\} dy}{\int_0^\infty exp\left\{-\int_0^y \gamma(x)dx\right\} dy} \leq e^{-I(u)}.$$

Por lo tanto, tenemos que $\gamma(x) = \frac{2\mu(x)}{\sigma(x)^2}$ funcionó como coeficiente de ajuste local para encontrar una cota superior de $\psi(u)$, la probabilidad de ruina del proceso $\{R_t\}_{t\geq 0}$ con media $\mu(x)$ y varianza $\sigma^2(x)$, ya que se cumple la desigualdad de Cramér-Lundberg.

A continuación, daremos una aplicación que cumple las suposiciones de este capítulo y para el cual podemos mostrar explícitamente las probabilidades de ruina y la cota superior sobre ellas, encontradas en esta sección.

3.2.1. Probabilidad de extinción en una población

Consideremos una población de tamaño N, compuesta de dos tipos de población: A y B. Supongamos que el tamaño de población de tipo A es i y por lo tanto, el tamaño de la población tipo B es $N - i$. La siguiente generación está sujeta a selección y está formada de elegir N individuos de la población, es decir, la generación $n + 1$ únicamente depende de la generación

n. Estipulamos que no consideraremos la mutación y las habilidades de supervivencia relativas de los tipos A y B en contribución con la siguiente generación están en un radio de $1+s$ a 1 donde s se considera pequeño y positivo. Así, el tipo de población A, es selectivamente superior al tipo B. Tomando en cuenta esta fuerza de selección, la proporción esperada de población tipo A sobre el total está dada por

$$p_i = \frac{(1+s)i}{(1+s)i + (N-i)}. \tag{3.2.2.1}$$

Supongamos que la composición de la siguiente generación está determinada mediante N ensayos binomiales donde la probabilidad de producir un individuo tipo A en cada ensayo es p_i. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el número de individuos de la población de tipo A en la generación número n, este proceso es una cadena de Markov por construcción y su matriz de transición está dada por

$$P_{ij} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = \binom{N}{j} p_i^j (1-p_i)^{N-j} \tag{3.2.2.2}$$

es decir, dado $X_n = i$, la variable aleatoria que denota la proporción del tipo A en una población de N individuos se distribuye binomial con parámetros N y p_i.

Para utilizar el resultado del Teorema 3.2.1, que nos ayuda a encontrar la probabilidad de ruina de un proceso fuerte de Markov con tiempo continuo que cumple las suposiciones $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$, definimos el proceso $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ como

$$Y_N(t) = \frac{X([Nt])}{N} \tag{3.2.2.3}$$

donde $[Nt]$ denota la generación número $[Nt]$, es decir, si $t = 1$, $Y_N(t)$ es el proceso que corresponde al promedio de población de tiempo A en un lapso de N generaciones y es decir, $Y_N(t)$ representa la fracción del tipo A de población en la generación $[Nt]$.

Debido a que nuestro objetivo es encontrar la probabilidad de extinción de los individuos tipo A en la población, para nuestro fin, podemos notar que dada la sucesión $\{X_N\}_{N\geq 0}$ de procesos estocásticos discretos, la cadena $\frac{X_N}{N}$ aporta la misma información que la cadena X_N

y además, en [6] se discuten y demuestran los siguientes puntos:

- $\{X_N\}_{N\geq 0}$ y $\left\{\frac{X_N}{N}\right\}_{N\geq 0}$ son cadenas de Markov.
- La cadena $\left\{\frac{X_N}{N}\right\}_{N\geq 0}$ es una martingala acotada entre 0 y 1 cuando N tiende a infinito.
- $\{Y_N\}_{N\geq 0}$ tiene trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda.
- $\{Y_N\}_{N\geq 0}$ es constante en $[aN,(a+1)N)$ con $a\in\mathbb{N}$.
- $\{Y_N\}_{N\geq 0}$ converge débilmente a un proceso de difusión Z llamado *proceso de difusión de Wright - Fisher*.

Por lo tanto, a esta sucesión de cadenas $\left\{\frac{X_N}{N}\right\}_{N\geq 0}$ se le puede asociar una sucesión de procesos estocásticos de tiempo continuo $\{Y_N(t)\}_{t\geq 0}$ que conserva, para cada N, la información de X_N y además, converge débilmente a un proceso de difusión cuando N tiende a infinito. Dada esta convergencia, el proceso límite resulta ser una excelente aproximación continua al modelo X_N siempre que N sea suficientemente grande, por lo que tenemos dos alternativas:

1. Obtener una expresión para la probabilidad de ruina de Y_N para cada $N\in\mathbb{N}-\{0\}$.
2. Obtener una expresión para la probabilidad de ruina de Z.

La segunda opción resulta tener más ventaja debido a que en ocasiones, la expresión resultante es más sencilla de calcular, sin embargo, con la primera opción obtenemos una expresión exacta, es por ello que consideraremos ésta última alternativa.

Notemos que para toda $N\in\mathbb{N}$, el proceso $\{Y_N(t)\}_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas de t ya que en particular, son funciones a trozos de t y sólo son discontinuas en un conjunto numerable de puntos, es decir, de medida cero. Consideremos los siguientes supuestos que llamaremos $\mathscr{H}_4$:

I) El proceso $\{Y_N(t)\}_{t\geq 0}$ posee la propiedad fuerte de Markov para toda $N\in\mathbb{N}$.

II) El proceso $\{Y_N(t)\}_{t\geq 0}$ cumple los supuestos H y S_1 para toda $N\in\mathbb{N}$.

Sean $h = \frac{1}{N}$, y $\Delta Y_N(t,h)$ definida como

$$\Delta Y_N(t,h) = Y_N(t+h) - Y_N(t) = \frac{X([Nt]+1) - X([Nt])}{N}.$$

Debido a que suponemos que existen los parámetros $\mu_N(x)$ y $\sigma_N^2(x)$ para toda $x \geq 0$, nos basaremos en su interpretación con la aproximación diferencial de las funciones $\mathbb{E}[\Delta Y_N(t,h)|Y_N(0) = u]$ y $Var[\Delta Y_N(t,h)|Y_N(0) = u]$ para obtener una expresión para los parámetros de la media y la varianza en una vecindad pequeña de cada punto en cada proceso $\{Y_N(t)\}_{t\geq 0}$. Así, calculamos la media y la varianza del incremento $\Delta Y_N(t,h)$, sean $s = \frac{\sigma}{N}$ y $u = \frac{i}{N}$ para alguna $i > 0$ y para alguna $\sigma > 0$,

$$\mathbb{E}[\Delta Y_N(t,h)|Y_N(t) = u] = \mathbb{E}\left[Y_N(t+\frac{1}{N}) - Y_N(t)|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right]$$

así pues,

$$\mathbb{E}[\Delta Y_N(t,h)|Y_N(t) = u] = \mathbb{E}\left[Y_N(t+\frac{1}{N}) - \frac{i}{N}|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right].$$

Notemos que si $Y_N(t) = \frac{i}{N}$ entonces, por definición de Y_N en (3.2.2.3), $\frac{X[Nt]}{N} = \frac{i}{N}$ lo cual implica que $X[Nt] = i \leq N$ y así, el número de individuos del tipo A en la generación $X[Nt+1]$ estará dada por p_i, definida en (3.2.2.1). Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right) - \frac{i}{N}|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right] = \left(\mathbb{E}\left[Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right)|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{i}{N}|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right]\right)$$

por definición del proceso $\{Y_N(t)\}_{t\geq 0}$,

$$\left(\mathbb{E}\left[Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right)|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{i}{N}|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right]\right) = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[X\left[N\left(t+\frac{1}{N}\right)\right]|X[Nt] = i\right] - \frac{i}{N}$$

por (3.2.2.2),

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[X\left[N\left(t+\frac{1}{N}\right)\right]|X[Nt] = i\right] - \frac{i}{N} = p_i - \frac{i}{N}.$$

Después, por (3.2.2.1)

$$p_i - \frac{i}{N} = \frac{(1+s)i/N}{(1+s)i/N + (1-i/N)} - \frac{i}{N}$$

como $s = \frac{\sigma}{N}$,

$$\frac{(1+s)i/N}{(1+s)i/N + (1-i/N)} - \frac{i}{N} = \frac{(1+\sigma/N)i/N}{(1+\sigma/N)i/N + (1-i/N)} - \frac{i}{N}$$

debido a que $h = \frac{1}{N}$ y $u = \frac{i}{N}$,

$$\frac{(1+\sigma/N)i/N}{(1+\sigma/N)i/N + (1-i/N)} - \frac{i}{N} = \frac{\sigma h u(1-u)}{1+\sigma h u},$$

multiplicando por $\frac{1}{h}$

$$\frac{1}{h}\mathbb{E}\left[\Delta Y_N(t,h)|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right] = \frac{\sigma u(1-u)}{1+\sigma h u},$$

tomando el límite cuando h tiende a cero,

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}[\Delta Y_N(t,h)|Y_N(t) = u] = \sigma u(1-u)$$

y de aquí podemos concluir que para toda $i \geq 0$, $\mu_N(u) = \sigma u(1-u)$.

Similarmente,

$$\mathbb{E}\left[(\Delta Y_N(t,h))^2|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right] = \mathbb{E}\left[\left(Y_N\left(t+\frac{i}{N}\right) - Y_N(t)\right)^2|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right],$$

$$\mathbb{E}\left[\left(Y_N\left(t+\frac{i}{N}\right) - Y_N(t)\right)^2|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right] = \mathbb{E}\left[\left(Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right) - \frac{i}{N}\right)^2|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right]$$

desarrollando el binomio al cuadrado,

$$\mathbb{E}\left[\left(Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right) - \frac{i}{N}\right)^2|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right] = \mathbb{E}\left[\left(Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right)\right)^2 - 2Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^2|Y_N(t) = \frac{i}{N}\right]$$

por la linealidad de la esperanza tenemos que el lado derecho de la igualdad también puede

verse como

$$\mathbb{E}\left[\left(Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right)\right)^2|Y_N(t)=\frac{i}{N}\right]-\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[2Y_N\left(t+\frac{1}{N}\right)|Y_N(t)=\frac{i}{N}\right]+\left(\frac{1}{N}\right)^2$$

por (3.2.2.2) y por la definición del proceso $\{Y_t\}_{t\geq 0}$, la expresión anterior puede escribirse como

$$Np_i(1-p_i+Np_i)-\frac{2}{N}p_i+\left(\frac{1}{N}\right)^2=\frac{1}{h}p_i\left(1-p_i+\frac{1}{h}p_i\right)-2hp_i+h^2$$

multiplicando por $\frac{1}{h}$,

$$\frac{1}{h}\mathbb{E}\left[(\Delta Y_N(t,h))^2|Y_N(t)=\frac{1}{N}\right]=\frac{1}{h^2}p_i\left(1-p_i+\frac{1}{h}p_i\right)-2p_i+h$$

como $h=\frac{1}{N}$ y $u=\frac{i}{N}$, el lado derecho de la igualdad anterior es

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{h\sigma u(1-u)}{1+\sigma hu}\right)\left[1-\left(\frac{h\sigma u(1-u)}{1+\sigma hu}\right)+\frac{1}{h}\left(\frac{h\sigma u(1-u)}{1+\sigma hu}\right)\right]-2\left(\frac{h\sigma u(1-u)}{1+\sigma hu}\right)+h$$

entonces,

$$\sigma_N^2(u)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}[(\Delta Y_N(t,h))^2|Y_N(t)=h]=u(1-u)$$

por lo tanto,

$$\gamma_N(u)=\frac{-2\sigma u(1-u)}{u(1-u)}=-2\sigma.$$

Recordemos las definiciones (3.2.5), (3.2.6) y (3.2.7), en este caso para toda $x\geq 0$,

$$s(x)=\exp\left\{\int_0^x\gamma_N(s)ds\right\}=\exp\left\{-\int_0^x 2\sigma ds\right\}=\exp\left\{-2\sigma x\right\},$$

$$S(x)=\int_0^x\exp\{-2\sigma y\}dy=\frac{-\exp\{-2\sigma x\}+1}{2\sigma}$$

y

$$S(\infty)=\int_0^\infty\exp\{-2\sigma y\}dy=\frac{1}{2\sigma}<\infty$$

lo que significa que se cumplen las hipótesis del teorema (3.2.1) y así podemos concluir

$$\psi_N(u) = 1 - \frac{\frac{-\exp\{-2\sigma u\}+1}{2\sigma}}{\frac{1}{2\sigma}} = e^{-2\sigma u}$$

donde $\sigma = Ns$. Debido a que $\psi_N(u)$ representa la probabilidad de ruina del proceso estocástico $Y_N(t) = \frac{X[Nt]}{N}$ que denota el promedio de población en $[Nt]$ generaciones, estamos diciendo que la extinción es considerada cuando este promedio es muy cercano a cero.

Capítulo 4

Cambio de medida

Recordemos el proceso de riesgo con prima dependiente de la reserva, $R = \{R_t\}_{t\geq 0}$, definido en (2.0.1) como

$$R_t = u + \int_0^t p(R_s)ds - A_t$$

donde $u \geq 0$ es el capital inicial, $p(r)$ es una función no decreciente que determina la prima y $A_t = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$ es la suma de reclamos acumulados hasta el tiempo t. Además, consideramos las suposiciones $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ mencionadas en la páginas 3 y 14, respectivamente. En esta sección, para cada $u \geq 0$ se buscará ver a la probabilidad de ruina como la esperanza de una variable aleatoria, X_u, que dependerá, en particular, del coeficiente de ajuste definido en el capítulo 2 y del tiempo en el que sucede la ruina, τ_u.

Se podría pensar como un estimador insesgado para la probabilidad de ruina, sin embargo, notemos que debido a que la variable aleatoria buscada dependerá del tiempo en el que sucede la ruina, en este trabajo no se simulará la probabilidad de ruina. En este capítulo únicamente se dará una expresión para dicha variable aleatoria mediante un cambio de medida.

Consideremos las siguientes definiciones preliminares:

Definición 4.1. Sea $R = \{R_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Markov definido en $(\Omega, \mathscr{F})$, adaptado a la filtración natural $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ y no negativo. Decimos que el proceso M es un *funcional multiplicativo*

respecto a R si para toda $t \geq 0$ existe $\theta_t : \Omega \to \Omega$ tal que para toda $s \geq 0$ se cumple

$$M_{t+s} = M_t \cdot (M_s \circ \theta_t)$$

con probabilidad uno respecto a $\{\mathbb{P}_t\}_{t\geq 0}$ donde $\mathbb{P}_t$ es la función de distribución de R_t para toda $t \geq 0$ y además, para toda $\omega \in \Omega$, $(M_s \circ \theta_t)(\omega)$ representa la información de M, hasta $t + s$ a partir de t. A $\theta_t : \Omega \to \Omega$ lo llamaremos el *operador desplazamiento*.

Definición 4.2. Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un espacio de medida. Decimos que un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ es una **martingala** respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ si se cumple lo siguiente:

a) $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una filtración y X está adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$.

b) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ para toda $t \geq 0$.

c) $\mathbb{E}[X_s|\mathscr{F}_t] = X_t$ para toda $s > t$.

Definición 4.3. Una **probabilidad de transición continua** $Q_t(y, B)$ con $t \geq 0$, $y \in S$, el espacio de estados de Y, $B \in \mathscr{B}(S)$, es una función con las siguientes propiedades:

I) $Q_t(y, B)$ es una probabilidad de medida en B para cada t y y fijas;

II) $Q_t(y, B)$ es $B \in \mathscr{B}(S)$ medible en y para t y B fijos;

III) $Q_t(y, B)$ satisface la ecuación de Chapman - Kolmogorov

$$Q_{s+t}(y, B) = \int_S Q_t(y, z)Q_s(z, B)dz$$

para cada $s, t \geq 0$;

IV) $Q_t(y, B) = 1$ si $y \in B$ y $Q_t(y, B) = 0$ en otro caso, cuando $t \to 0+$.

Definición 4.4. Un proceso de Markov Y decimos que es **homogéneo** o tiene probabilidades de transición estacionarias si

$$\mathbb{P}[Y(t) \in B|Y(s) = y] = Q_{t-s}(y, B)$$

para alguna probabilidad de transición $Q_t(y, B)$.

Se utilizará una técnica llamada *muestro de importancia* que consiste en un cambio de medida, es decir un cambio en la distribución de probabilidad por alguna conveniente de tal manera que los eventos raros sucedan más seguido.

Es decir, supongamos que queremos calcular

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

donde X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ y h es una función real que incluso puede ser $\mathbb{1}_{\{X>b\}}$ con b un número real.

Consideremos $g(x)$, otra función de densidad tal que $f(x) = 0$ siempre que $g(x) = 0$, entonces

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[h(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right] g(x)dx = \hat{\mathbb{E}}\left[h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right]$$

donde $\hat{\mathbb{E}}$ denota la esperanza cuando g es tomada como función de distribución de X. En otras palabras, si X tiene función de distribución g, entonces el valor esperado de $h(X)\frac{f(X)}{g(X)}$ es el mismo que el buscado en principio. Por lo tanto, nuestro trabajo es encontrar las características de $g(x)$ para hacer un cambio de medida conveniente.

En este caso, un cambio de medida es realizado de encontrar un proceso estocástico $\{M_t\}_{t\geq 0}$ el cual es una martingala con respecto a cada $\{\mathbb{P}_t\}_{t\geq 0}$, es no negativo y $\mathbb{E}[M_t] = 1$ para toda $t \geq 0$. Así, el problema es encontrar cuáles características deben tener $\{R_t\}_{t\geq 0}$ y $\{M_t\}_{t\geq 0}$ para asegurar dicho cambio de medida. Para ello, en Asmussen, [2], página 43 tenemos el siguiente teorema que nos proporciona un proceso de Markov para dicho cambio de medida.

Teorema 4.1. Sea $\{R_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Markov con respecto a la filtración natural $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$. Sea $\{M_t\}_{t\geq 0}$ una martingala no negativa con $\mathbb{E}[M_t] = 1$ para toda $t \geq 0$ y sea $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[M_t; A] =: \mathbb{E}[M_t\mathbb{I}_A]$, entonces la familia $\{\tilde{\mathbb{P}}_t\}_{t\geq 0}$ define un proceso de Markov con tiempo homogéneo si y sólo si $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es un funcional multiplicativo.

Así, basta encontrar un funcional multiplicativo $\{M_t\}_{t\geq 0}$ que sea una martingala y que además, $\mathbb{E}[M_t] = 1$ para toda $t \geq 0$. Para nuestro fin, para cada $t \geq 0$ definimos

$$M_t = exp\left\{ -\int_0^t \gamma(R_s)p(R_s)ds + \sum_{k=1}^{N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k \right\} \tag{4.1}$$

donde si $s \neq T_k$ para toda $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces $R_{s^-} = R_s$ y si $s = T_k$ para alguna $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces $R_{s^-} = R_{T_k^-} =: R_{T_k} + U_k$. Es decir, estamos considerando el monto del reclamo sobre la reserva justo después del tiempo en el que sucede dicho reclamo como se muestra en la figura 4-1.

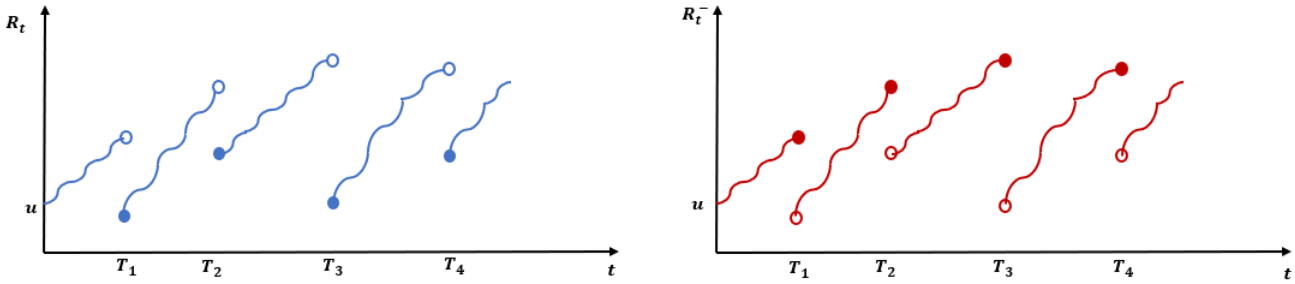

Figura 4-1: Comparación entre los procesos R_t y R_{t^-}.

Por el Teorema 4.1, basta probar la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Sea $\{R_t\}_{t\geq 0}$ el proceso de riesgo con prima dependiente de la reserva, definido en (2.0.1) y M_t definido como en (4.1), ambos procesos de riesgo en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, entonces se cumple:

a) M_t es no negativa para toda $t \geq 0$.

b) M_t es un funcional multiplicativo.

c) $\mathbb{E}[M_t] = 1$ para toda $t \geq 0$.

d) $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala.

Demostración:

El inciso a) se sigue de la definición de M_t.

Para el inciso b), consideremos $s, t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$. Para el vector desplazamiento definimos θ_t tal que se cumple

$$(M_s \circ \theta_t)(\omega) = \exp\left\{ -\int_t^{t+s} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \sum_{k=N(t)}^{N(t+s)-N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k \right\}$$

y notemos que de esta manera, tenemos la información de $\{M_t\}_{t\geq 0}$ desde t hasta $t+s$.

Así, por definición del proceso $\{M_t\}_{t\geq 0}$,

$$M_{t+s} = exp\left\{ -\int_0^{t} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \sum_{k=1}^{N(t+s)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k \right\}$$

separando la suma y la integral en la expresión anterior tenemos

$$exp\left\{ -\int_0^{t} \gamma(R_s)p(R_s)d_s - \int_t^{t+s} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \sum_{k=1}^{N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k + \sum_{k=N(t)}^{N(t+s)-N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k \right\},$$

por conmutatividad

$$exp\left\{ -\int_0^{t} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \sum_{k=1}^{N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k - \int_t^{t+s} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \sum_{k=N(t)}^{N(t+s)-N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k \right\}$$

por propiedades de la exponencial,

$$exp\left\{ -\int_0^{t} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \sum_{k=1}^{N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k \} exp\{ -\int_t^{t+s} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \sum_{k=N(t)}^{N(t+s)-N(t)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k \right\}$$

y lo anterior es exactamente igual a

$$M_t(M_s \circ \theta_t).$$

Por lo tanto, $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es un funcional multiplicativo respecto a $\{R_t\}_{t\geq 0}$.

Para el inciso c) probaremos que para cada $t \geq 0$, la sucesión $\{\mathbb{E}[M_{t\wedge T_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ es constante, igual a 1 y además converge a $\mathbb{E}[M_t]$. Primero probaremos que $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_k}] = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$

con $k \geq 1$ y la prueba se hará por inducción matemática sobre k.

Para el caso base, $k = 1$, demostraremos que $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}] = 1$ para toda $t \geq 0$. Para un mejor entendimiento del comportamiento de $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}] = 1$, analizaremos los casos $t < T_1$ y $t \geq T_1$. Para el primer caso tenemos que si $t < T_1$, entonces aún no tenemos reclamos, lo que quiere decir que el comportamiento de $\{R_t\}_{t\geq 0}$ puede ser descrito por $r_u(t)$, definida en (2.0.3), ya que como se discutió en el capítulo 2, esta función sólo toma en cuenta el capital inicial y la trayectoria de la prima, por lo tanto,

$$M_{t\wedge T_1} = exp\left\{-\int_0^t \gamma(r_u(s))p(r_u(s))d_s\right\}.$$

Por otro lado, si $t \geq T_1$, $t \wedge T_1 = \text{mín}\{t, T_1\} = T_1$ entonces,

$$M_{t\wedge T_1} = exp\left\{-\int_0^{T_1} \gamma(R_s)p(R_s)d_s + \gamma(R_{T_1^-})U_1\right\}.$$

Definimos $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \int_0^x \gamma(r_u(y))p(r_u(y))dy$ y recordemos que por (2.0.8) tenemos que

$$h(x) = \int_0^x \gamma(r_u(y))p(r_u(y))dy = \int_0^x \beta(\hat{B}[\gamma(r_u(y)) - 1])dy.$$

Veamos que

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}|T_1]]$$

por definición de esperanza sobre la variable aleatoria $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}|T_1]$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}|T_1]] = \int_0^t \beta e^{-\beta x}e^{-h(x)}\hat{B}[\gamma(r_u(x))]dx + \mathbb{P}[T_1 > t]\exp\left\{-\int_0^x \gamma(r_u(y))p(r_u(y))dy\right\}$$

como T_1 se distribuye exponencial con media $\frac{1}{\beta}$ (ver apéndice, lema 5.2.1.) entonces

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}|T_1]] = \int_0^t \beta e^{-\beta x}e^{-h(x)}\hat{B}[\gamma(r_u(x))]dx + e^{-\beta t}e^{-h(t)}.$$

Por definición de $\gamma(x)$ en (2.0.8),

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}] = \int_0^t e^{-\beta x}e^{-h(x)}(\beta + \gamma(r_u(t))p(r_u(t))dx + e^{-\beta t}e^{-h(t)}$$

como $h'(x) = \gamma(r_u(t))p(r_u(t)$,

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}] = \int_0^t e^{-\beta x}e^{-h(x)}(\beta + h'(x))dx + e^{-\beta t}e^{-h(t)}.$$

Notemos que $\int_0^t \beta e^{-\beta x}e^{-h(x)}dx - [e^{-\beta x - h(x)}]|_0^t - \int_0^t \beta e^{-\beta x}e^{-h(x)}dx = \int_0^t e^{-\beta x}e^{-h(x)}(\beta + h'(x))dx$, entonces

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_1}] = -e^{-\beta t - h(t)} + 1 + e^{-\beta t}e^{-h(t)} = 1.$$

Ahora tomemos $k \in \mathbb{N}$-$\{0\}$ fija y supongamos que $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_k}] = 1$. Primero notemos que si $x \geq 0$ y definimos $\gamma^* = \sup_{0\leq s\leq r_u(x)} \gamma(s)$ entonces

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq x} M_s\right] \leq exp\left\{\gamma^* \sum_{k=1}^{N(t)} U_k\right\} < \infty \tag{4.3}$$

ya que por las suposiciones $\mathscr{H}_1$ en el capítulo 1, $\mathbb{E}[U_1] < \infty$. Luego,

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_{k+1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t\wedge T_{k+1}}|\mathscr{F}_{t\wedge T_k}]] = \mathbb{E}[M_{t\wedge T_k}] = 1.$$

Se sigue que $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_k}]$ para toda $k \in \mathbb{N}$-$\{0\}$ y por (4.3), podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada (ver apéndice, teorema 5.2.3.), así concluimos $\mathbb{E}[M_t] = 1$. Por último,

$$\mathbb{E}[M_{t+s}|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[M_t \cdot (M_s \circ \theta_t)|\mathscr{F}_t] = M_t \cdot \mathbb{E}[(M_s \circ \theta_t)|\mathscr{F}_t] = M_t \cdot 1 = M_t,$$

utilizando la propiedad multiplicativa y la propiedad de Markov. Por lo tanto, $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala. Por el Teorema 4.1, $\tilde{\mathbb{P}}[A] = \mathbb{E}[M_t; A]$, $A \in \mathscr{F}_t$ define una familia de medidas de probabilidad $\{\tilde{\mathbb{P}}_t\}_{t\geq 0}$ en $\mathscr{F}$ tal que $\{R_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov con tiempo homogeneo

respecto a $\{\tilde{\mathbb{P}}_t\}_{t\geq 0}$.

Finalmente, sólo nos queda ver de qué forma está definida está nueva medida para encontrar el estimador insesgado para la probabilidad de ruina. Para este fin, consideremos el siguiente teorema que se puede consultar en Asmussen, [2], página 41.

Teorema 4.2. Sea $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración natural en Ω, $\mathscr{F}$ una σ-álgebra y $\mathbb{P}$ una probabilidad de medida en $(\Omega, \mathscr{F})$,

I) Si $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala no negativa con respecto a $(\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{E}[M_t] = 1$ para toda $t \geq 0$ eso implica que existe una única probabilidad de medida $\tilde{\mathbb{P}}$ sobre $\mathscr{F}$ tal que

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[M_t; A], \qquad A \in \mathscr{F}_t. \tag{4.4}$$

II) Si τ es un tiempo de paro y $G \in \mathscr{F}_\tau$, $G \subseteq \{\tau < \infty\}$ entonces

$$\mathbb{P}(G) = \tilde{\mathbb{E}}[M_\tau^{-1}; G]. \tag{4.5}$$

Utilizando este último resultado tenemos que si tomamos $G = \{\tau_u < \infty\}$ en efecto se cumple

$$\psi(u) = \mathbb{P}[\tau_u < \infty] = \tilde{\mathbb{E}}[M_{\tau_u}^{-1}; \tau_u < \infty]$$

y utilizando la definición de $\{M_t\}_{t\geq 0}$ concluimos

$$\psi(u) = \tilde{\mathbb{E}}\left[exp\left\{-\int_0^{\tau_u} \gamma(R_s)p(R_s)ds + \sum_{k=1}^{N(\tau_u)} \gamma(R_{T_{k^-}})U_k\right\}; \tau_u < \infty\right].$$

En conclusión, tenemos que mediante un cambio de medida, podemos ver a la probabilidad de ruina como la esperanza de una variable aleatoria. Recordemos que en el capítulo 2, se proporcionó la cota superior para la probabilidad de ruina

$$\psi(u) \leq e^{-\int_0^u \gamma(x)dx}$$

y la aproximación

$$\psi(u) \approx e^{-\int_0^u \gamma(x)dx}.$$

Ahora, notemos que con el cambio de medida realizado, tenemos que la probabilidad de ruina es igual a la esperanza de la exponencial de una expresión que toma en cuenta el coeficiente de ajuste pero que además, pondera sobre el proceso de riesgo que está compuesto por la prima y los reclamos.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Probabilidad

Definición 5.1.1. Una variable aleatoria discreta X decimos que tiene una distribución **Poisson** con parámetro $\lambda > 0$ si su función de probabilidad está dada por

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & si \quad x = 0, 1, 2... \\ \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

La esperanza de X está dada por

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda$$

Definición 5.1.2. Una variable aleatoria continua X decimos que tiene una distribución **exponencial** con parámetro $\beta > 0$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(t) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t} & si \quad t > 0 \\ \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

La esperanza de X está dada por

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty t f_X(t) dt = \int_0^\infty t\beta e^{-\beta t} dt = -te^{\beta t}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta}.$$

Proposición 5.1.2. Si $\{E_n, n \geq 1\}$ es una sucesión creciente o decreciente de eventos entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

Demostración: Supongamos primero que $\{E_n, n \geq 1\}$ es una sucesión creciente y definimos los eventos F_n, $n \geq 1$ por

$$F_1 = E_1$$

y si $n > 1$,

$$F_n = E_n \left(\bigcup_1^{n-1} E_i\right)^c = E_n E_{n-1}^c,$$

donde usamos el hecho $E_{n-1} = \bigcup_1^{n-1} E_i$ ya que los eventos son decrecientes. Además,

$$\bigcup_{i=1}^\infty F_i = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$$

y para toda $n \geq 0$,

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n E_i,$$

entonces

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^\infty F_i\right] = \sum_1^\infty \mathbb{F}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_i^n \mathbb{F}_i = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n F_i\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[E_n].$$

Por otro lado, si $\{E_n, n \geq 1\}$ es una sucesión decreciente entonces la sucesión $\{E_n^c, n \geq 1\}$ es

creciente, por lo anterior se cumple

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{1}^{\infty} E_i^c\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[E_n^c].$$

Debido a que $\bigcup_{1}^{\infty} E_i^c = \left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right)^c = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[E_n^c]$, entonces

$$\mathbb{P}\left[(\bigcap_{1}^{\infty} E_i)^c\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[E_n^c]$$

entonces

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[E_n].$$

Definición 5.1.3. La **función generadora de momentos** de una variable aleatoria X es la función definida por

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

a) X es una variable aleatoria que se distribuye normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, entonces si denotamos por f_X a la función de densidad de la variable aleatoria X,

$$f_X(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

con soporte= $\mathbb{R}$. Veamos como queda la función generadora de momentos,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{e^{\frac{t^2}{2}+tx-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{(x-t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} < \infty.$$

En particular, $\{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < \infty\} = \mathbb{R}$.

b) X es una variable aleatoria que se distribuye exponencial con media $\lambda = 1$, es decir,

$$f_X(x) = e^{-x}$$

con soporte en $(0, \infty)$. Después,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{x(t-1)} dx = \frac{1}{1-t}$$

entonces, $\{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < \infty\} = \mathbb{R} - \{1\}$.

En la siguiente figura notemos que las dos gráficas tienen algo en común: convexidad en el soporte de la variable aleatoria. En la siguiente proposición se concretará este resultado.

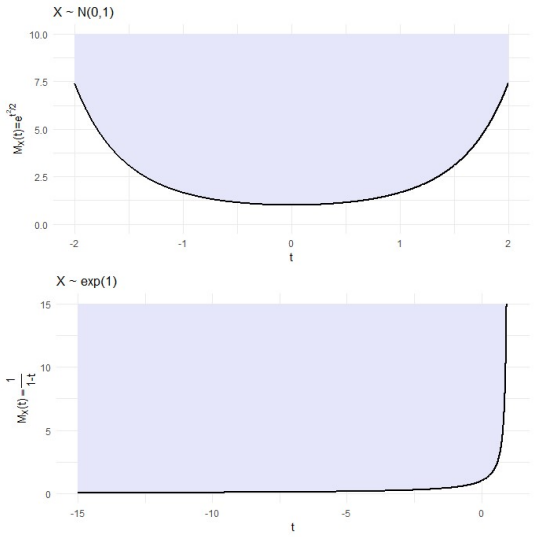

Figura 5-1: Funciones generadoras de momentos.

Proposición 5.1.4. Sea X una variable aleatoria positiva definida en I un intervalo. La función generadora de momentos de X definida como $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ es una función convexa en $A = \{t \in I : M_X(t) < \infty\}$.

Demostración:

Sean $t_1, t_2 \in A$ y $\lambda \in [0,1]$. Como la función exponencial es convexa en $\mathbb{R}$, en efecto se cumple

$$exp(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda exp(t_1) + (1-\lambda)exp(t_2)$$

luego,

$$\mathbb{E}(exp(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)) \leq \mathbb{E}(\lambda exp(t_1)) + \mathbb{E}((1-\lambda)exp(t_2))$$

por último,

$$M_X(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)) \leq M_X(\lambda t_1) + M_X((1-\lambda)(t_2))$$

por lo tanto, M_X, la función generadora de momentos de X es convexa.

5.2. Procesos estocásticos

Definición 5.2.1. Un proceso estocástico $\{A(t) : t \geq 0\}$ decimos que es un **proceso Poisson compuesto** si puede ser representado como

$$A(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad t \geq 0$$

donde $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson y $\{Yi\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas y también independientes de $\{N(t) : t \geq 0\}$.

Definición 5.2.2. Un proceso estocástico $\{N(t)\}$ decimos que es un **proceso de conteo** si $N(t)$ representa el número total de eventos que ocurren hasta el tiempo t. Por lo tanto, este proceso debe satisfacer:

I) $N(t) \geq 0$

II) $N(t) \in \mathbb{Z}$

III) Si $s < t$ entonces $N(s) \leq N(t)$

IV) Para $s < t$, $N(t) - N(s)$ es igual al número de eventos que ocurren en el intervalo $(s, t]$.

Decimos que un proceso de conteo tiene **incrementos independientes** si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo ajenos son independientes.

Definición 5.2.3. Un proceso de conteo $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un **proceso Poisson** con tasa $\lambda > 0$ si

(I) $N(0) = 0$

(II) El proceso tiene incrementos independientes

(III) El número de eventos en cualquier intervalo de longitud t se distribuye Poisson con media λt, esto es, para toda $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}[N(t+s) - N(t) = n] = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2...$$

Notemos que por la condición (III), un proceso Poisson tiene incrementos estacionarios y $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$.

Definición 5.2.4. La función $f(.)$ decimos que es $o(h)$ si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0.$$

Ejemplos:

a) $f(h) = h^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

por lo tanto, $f(h) = h^2$ es $o(h)$.

b) $f(h) = e^h$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h}{h} = +\infty$$

por lo tanto, $f(h) = e^h$ no es $o(h)$.

Con lo anterior, tenemos una definición alternativa del proceso Poisson:

Definición 5.2.5. El proceso de conteo $\{N(t) : t \geq 0\}$ decimos que es un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$ si

I) $N(0) = 0$

II) El proceso tiene incrementos estacionarios e independientes

III) $\mathbb{P}[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$

IV) $\mathbb{P}[N(h) \geq 2] = o(h)$

Lema 5.2.1. Consideremos un proceso Poisson $N(t)$ con tasa $\beta > 0$ y sea T_1 el tiempo de llegada del primer reclamo, entonces T_1 se distribuye exponencial con media $\frac{1}{\beta}$.

Demostración:

Sea $t_1 \in (0, \infty)$,

$\mathbb{P}[T_1 \leq t_1] = 1 - \mathbb{P}[T_1 \geq t_1] = 1 - \mathbb{P}[N(t_1) = 0] = 1 - \frac{(\beta t_1)^0 e^{-\beta t_1}}{0!} = 1 - e^{-\beta t_1}$

por lo tanto, T_1 se distribuye exponencial con media $\frac{1}{\beta}$.

Teorema 5.2.1. Sea $\{f_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a la función f definida en E, entonces

I) Si $\{f_n\}_{n\geq 0} \subseteq B(E)$ entonces $f \in B(E)$

II) Si $\{f_n\}_{n\geq 0} \subseteq C(E)$ entonces $f \in C(E)$

donde $B(E)$ es el conjunto de todas las funciones acotadas sobre E y $C(E)$ es el conjunto de todas las funciones continuas sobre E

Demostración:

I) Sea $\epsilon = 1$. Existe n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon = 1$ para toda $n > n_0$ y para cada $x \in E$, entonces

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + \sup_x |f_{n_0}(x)|$$

por lo tanto f es acotada sobre E.

II) Supongamos que cada f_n es continua sobre E. Sea $\epsilon > 0$ arbitraria y n_1 fija tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$$

para $n > n_1$. Sea $x_0 \in E$. Como f_n es continua para cada $n > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \epsilon/3$$

si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in E$. Por lo tanto,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

y así, probamos que f es continua en x_0 y por lo tanto en E.

Teorema 5.2.2.. Sea $\{f_n\}_{n\geq 0} \subseteq C(E)$ tal que $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente a f definida en E, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Demostración:

Primero,

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

y por el teorema anterior, f es continua, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0).$$

Por otro lado, por la continuidad de cada f_n

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Teorema 5.2.3 (Teorema de la convergencia dominada). Si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de variables aleatorias y X es una variable aleatoria tal que para cada $\omega \in \Omega$, la sucesión $X_n(\omega)$

converge a $X(\omega)$ cuando n tiende a infinito y existe una variable aleatoria Y tal que $|X_n| < Y$ entonces

$$\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$$

cuando $n \to \infty$. La prueba de este teorema así como más detalle del tema se puede consultar en (Karr, 1993, p. 108; Resnick, 1999, p. 133).

5.3. Cálculo y análisis real

Definición 5.3.1. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ definida en $M \subset \mathbb{R}^n$, no vacío, es llamada **convexa** si

I) M es un conjunto convexo

II) Para toda $x, y \in M$ y para toda $\lambda \in [0, 1]$ se cumple,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

.

Proposición 5.3.1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre un dominio convexo y abierto $D \subseteq \mathbb{R}$. f es convexa si y sólo si para toda $x, y \in D$ se cumple $f(x) \geq f'(y)(x-y)+f(y)$.

Demostración:

Primero supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y convexa sobre un dominio convexo y abierto $D \subseteq \mathbb{R}$, se demostrará que para toda $x, y \in D$ se cumple

$$f(x) \geq f'(y)(x - y) + f(y).$$

Sean $x, y \in D$ y $\lambda \in (0, 1]$ tales que $x \neq y$. Como f es convexa en D se cumple lo siguiente

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = \lambda(f(x) - f(y)) + f(y)$$

entonces,

$$(x-y)\frac{f(\lambda(x-y)+y)-f(y)}{\lambda(x-y)} = \frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{\lambda} \leq f(x)-f(y)$$

tomando el límite sobre λ

$$\lim_{\lambda\to 0}(x-y)\frac{f(\lambda(x-y)+y)-f(y)}{\lambda(x-y)} \leq f(x)-f(y)$$

esto es,

$$f'(y)(x-y) \leq f(x)-f(y).$$

Ahora supongamos que para toda $x, y \in D$ se cumple $f(x) \geq f'(y)(x-y)+f(y)$.

Sean $x, y \in D$ y $\lambda \in (0,1]$ y supongamos sin perdida de generalidad que $x < y$. Sea $a = \lambda y + (1-\lambda)x$. Notemos que $\lambda = \frac{a-x}{y-x}$ y $1-\lambda = \frac{y-a}{y-x}$. Además, $x < y$, esto implica que $a < y$ y $x < a$. Ahora consideramos la hipótesis de manera que $f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$ y $f(y) \geq f'(a)(y-a)+f(a)$, entonces

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'(a) \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

luego,

$$(f(x)-f(a))(y-a) \leq (f(y)-f(a))(x-a)$$

entonces,

$$f(a) \leq f(y)\frac{(x-a)}{x-y} + f(x)\frac{(a-y)}{x-y} = f(y)\lambda + f(x)(1-\lambda)$$

es decir,

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x) \leq f(y)\lambda + f(x)(1-\lambda),$$

por lo tanto, f es convexa.

Lema 5.3.2. Consideremos la función $g(\alpha) = \kappa(x,\alpha) = \beta(\hat{B}[\alpha]-1)-\alpha p(x)$, definida en el capítulo 2 en (2.0.7), entonces $g(\alpha)$ es una funcuón convexa para toda $x \geq 0$ y además $g(0) = 0$.

Demostración:

Sean $x, \alpha \geq 0$, entonces

$$g'(\alpha) = \beta \hat{B}'[\alpha] - p(x)$$

luego,

$$g''(\alpha) = \beta \hat{B}''[\alpha] \geq 0$$

ya que $\beta \geq 0$ y como la función generadora de momentos $\hat{B}$ es convexa esto implica que $\hat{B}''[\alpha] \geq 0$, por lo tanto, $g(\alpha)$ es convexa en $[0, \infty)$.

Además,

$$g(0) = \beta(\hat{B}[0] - 1) = \beta(1 - 1) = 0.$$

Referencias

[1] Asmussen S. y Mandrup H. (2016). Ruin Probabilities via Local Adjustment Coefficients. *Journal of Applied Probability*, Vol. 32, pp. 736-755.

[2] Asmussen S. (2000) Ruin probabilities. World Scientific

[3] Embrechts P., Klüppelberg C. y Mikosch T. (2012) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer.

[4] Martínez, A. (2007), *Análisis y simulación de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér-Lundberg* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México], http://132.248.9.195/pd2007/0615114/Index.html, pp. 20-25.

[5] S. Karlin and H. Taylor, "A Second Course in Stochastic Processes," Academic Press, Orlando, FL, 1981, pp.191-195

[6] Gleason M., Modelos de wright-fisher para poblaciones de genes, 2012, pág. 59

[7] Lay, Convex sets and their applications; Yaglom I, Boltianski V, Convex figures; Webster, Convexity.

[8] S. Ross, "Stochastic Processes" Second Edition, John Wiley, New York, 1996, pp. 59-88.

[9] S. Ross, "Introduction to probability models" 10 th edition, John Wiley, Los Angeles, California, 2010, 631-665 pp, 312-316