



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA HIPOCICLOIDE TRICÚSPIDE COMO ENVOLVENTE
DE LAS
LÍNEAS DE SIMSON-WALLACE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

NESTOR PEDRAZA CHÁVEZ

DR. JORGE ALONSO SANTOS MELLADO



CIUDAD DE MÉXICO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

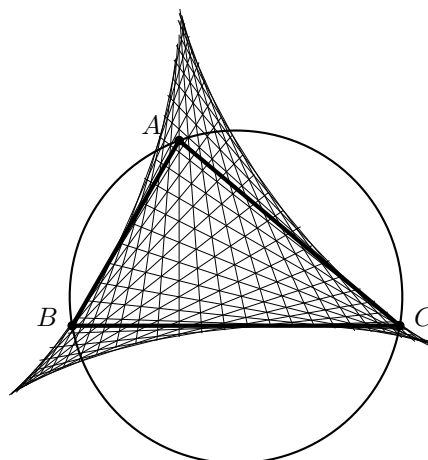
Quisiera agradecer a mi madre, mi padre y mi hermana, quienes siempre me han apoyado durante mi carrera y siempre han confiado que lograré cualquier cosa que me proponga.

Agradecer especialmente a mi asesor por toda su ayuda en este trabajo, así como por su entusiasmo, compromiso y gusto por la enseñanza desde que era mi ayudante de los grupos de Geometría Moderna, quien no solo ha sido una guía, sino un amigo y ha llegado a ser una inspiración de saber que uno puede lograr las cosas con dedicación.

Agradecer al profesor Silvestre que, desde el primer día que tomé clase con él, supe que ese era el salón de clases a donde yo pertenecía. A Leobardo y mis compañeros de Geometría Moderna II, a quienes no nombro por temor a que me faltara alguno, ellos lograron que esa fuera la mejor clase que yo haya tomado; me imprimieron una nueva visión en la carrera, hicieron que no quisiera dejar de disfrutar en esta área de las matemáticas de la que me declaro fiel seguidor y me ayudaron a decidir realizar este trabajo.

Introducción

Esta tesis tiene como objetivo principal demostrar el teorema de la deltoide de Steiner. Dicho teorema habla sobre la figura formada por las líneas de Simson-Wallace de un punto P con respecto a $\triangle ABC$ cuando P se mueve en el circuncírculo de $\triangle ABC$.



La presente tesis está dirigida principalmente a los estudiantes de Geometría Moderna I de la Facultad de Ciencias, así como a todos aquellos entusiastas de la geometría sintética. Tiene como propósito práctico ser un texto complementario en cualquier curso de geometría euclidiana.

Este trabajo escrito pretende no solo presentar la demostración del teorema de la deltoide de Steiner, sino proporcionar las herramientas necesarias para su total entendimiento. Además, se intenta adentrar a los lectores en terrenos diferentes o alternos dentro de esta rama de las matemáticas, por lo que en ocasiones se presentan más de una prueba de los teoremas principales de los capítulos, así como demostraciones que normalmente no se ven en un curso de Geometría Moderna, o bien, temas que difieren a los convencionales dentro del plan de estudio, todo esto sin desviarse del objetivo principal de esta tesis.

El texto se divide en seis capítulos:

En el capítulo uno se trabaja con el triángulo de Morley, triángulo generado a partir de las intersecciones interiores de las trisectrices de un triángulo. El capítulo culmina con una generalización de esta definición.

El capítulo dos presenta la circunferencia de los nueve puntos, además de un par de teoremas extras del tema: teorema de Casey y teorema de Feuerbach.

En el capítulo tres se habla de las líneas de Simson-Wallace, parte esencial de esta tesis.

En el capítulo cuatro se hace una introducción a los conceptos de envolvente, cicloide, hipocicloide y epicicloide. En ocasiones de una forma superficial dadas las herramientas para abordar ciertos temas.

El capítulo cinco es la piedra angular de este trabajo, pues aquí se demuestra el teorema de la deltoide de Steiner.

La sexta y última parte es un anexo, donde se presenta una demostración alterna al teorema principal de esta tesis.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	III
1. Teorema de Morley	1
1.1. Primera demostración del teorema de Morley	2
1.2. Segunda demostración del teorema de Morley	4
1.3. Tercera demostración del teorema de Morley	8
1.4. Una generalización del teorema de Morley	14
2. Circunferencia de los nueve puntos	21
2.1. Línea de Euler	22
2.2. Primera demostración del teorema de la circunferencia de los nueve puntos	23
2.3. Segunda demostración del teorema de la circunferencia de los nueve puntos	24
2.4. Un acercamiento a la circunferencia de los nueve puntos	26
2.5. Teorema de Feuerbach	28
3. Teorema de Simson-Wallace	39
3.1. Demostración del teorema de Simson-Wallace	39
3.2. Primer acercamiento a la línea de Simson-Wallace	40
3.3. Segundo acercamiento a la línea de Simson-Wallace	42
4. Circunferencia como generatriz: cicloide, hipocicloide y epicicloide	47
4.1. Cicloide, tautócrona o braquistócrona	47
4.2. Parametrización de la cicloide	49
4.3. Tangente de una cicloide: método de Roverbal	50
4.4. Hipocicloide y epicicloide	52
4.5. Parametrización de la hipocicloide y epicicloide	54
4.6. Envolverte	55
5. Deltoide de Steiner	59
5.1. Primer lema	61
5.2. Segundo lema	61
5.3. Tercer lema	62
5.4. Cuarto lema	63
5.5. Quinto lema	65
5.6. Demostración de la deltoide de Steiner	68
A. Demostración analítica de la deltoide de Steiner	71
Bibliografía	79

Índice alfabético

80

Capítulo 1

Teorema de Morley

Las construcciones con regla y compás son problemas clásicos en geometría euclidiana, estas construcciones son aquellas que se realizan mediante el trazo de circunferencias, rectas y las intersecciones que generan dos de estas figuras, por ejemplo, dividir un ángulo en dos partes iguales.

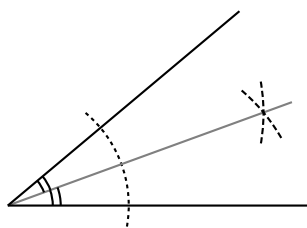


Figura 1.1: División de un ángulo en dos partes iguales con regla y compás

El siguiente paso es dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales, construcción que se puede realizar con el método de construcción llamado *neusis*, tal como en *Neusis solutions to classical constructions problems* (s.f.), sin embargo, construirlo con *regla y compás* es imposible. Pasaron cientos de años e hizo falta el uso de una nueva rama del álgebra para poder probar la imposibilidad de dicha construcción, demostración que se puede consultar en Morandi (1996), p. 145.

A pesar de la imposibilidad de realizar la construcción antes mencionada, el teorema de esta sección habla sobre las trisectrices de un ángulo, es decir, sobre esas rectas que no siempre es posible construir, entonces ¿este teorema está mal? ¿Quiere decir que el teorema solo es válido para algunos casos?

El teorema de Morley trata directamente el concepto de trisectrices, que si bien no ocupa la construcción de ellas, quizá esta imposibilidad de construcción por medio de regla y compás influyó a que este resultado viera la luz hasta 1924, en la publicación *Mathematical Association of Japan for Secondary Mathematics* vol. 51, realizada por Morley¹. Cabe mencionar que dicho resultado fue demostrado por el mismo Morley años atrás y presentado de manera informal «a sus amigos en Cambridge, Inglaterra, alrededor de 1904» (Loria, 1939, p. 367) en palabras del propio Frank Morley.

Existen muchas demostraciones de este teorema, en este capítulo revisaremos tres de ellas que pueden resultar muy ilustrativas para el lector, esperando motivar a buscar más de este tema.

La primera de las pruebas utiliza nociones básicas, ideal para un estudiante que conoce de los temas básicos de la materia. La segunda demostración, si bien comparte el ámbito sintético de la primera, se basa en hileras armónicas. La tercera prueba tiene un enfoque más analítico, al utilizar como herramienta principal la trigonometría.

¹Frank Morley (1860-1937), matemático inglés.

1.1. Primera demostración del teorema de Morley

Esta primera demostración fue realizada por Dan Sokolowsky² (1977), prueba que se basa en la idea de intentar cuadrar las cosas. Específicamente, para solucionar el problema se construye una solución aparte, así, la demostración se reduce a ver que ambos encajen: el problema original y la solución construida. Un ejemplo es la prueba de que las medianas concurren, cuya demostración se puede esbozar así:

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo:

- Dos medianas, desde B y desde C , se intersecan en G ; punto que cumple con la razón $\frac{BG}{GM} = \frac{CG}{GN} = 2$.
- Vemos que la recta AG también cumple esta razón.
- Concluimos que AG es mediana.

□

Esa es la demostración a grandes rasgos y con varios pasos intermedios faltantes, pero con los más importantes retratados en los puntos anteriores. Este tipo de demostraciones tienen esa sensación de ser *artificiales*, ya que no partimos del problema y se le ataca de frente, sino que se le da la vuelta al ejercicio, lo que lleva en muchos casos a demostraciones bastante ligeras y elegantes. Tal como veremos en esta primera prueba del teorema de Morley.

Lema 1.1.1. Sea α un ángulo tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$. Sean S, R, Q, T puntos tales que $SR = RQ = QT$, $\angle SRQ = \angle RQT = \pi - 2\alpha > \frac{\pi}{3}$ entonces S, R, Q, T son concíclicos.

Más aún, si $\angle SAT = 3\alpha$, A está en \mathbf{H}_1 , R en \mathbf{H}_2 entonces A es concíclico con S, R, Q, T ; donde $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ son los semiplanos delimitados por ST .

Demostración. Dado que $\angle SRQ = \angle RQT = \pi - 2\alpha < \pi$, entonces existe O tal que $\triangle RQO$ es un triángulo isósceles de ángulos $\angle ORQ = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle OQR$. Por lo tanto $OR = OQ$. Sea o la circunferencia de centro O que pasa por R , entonces o pasa por Q .

Falta ver que o pasa por S y T .

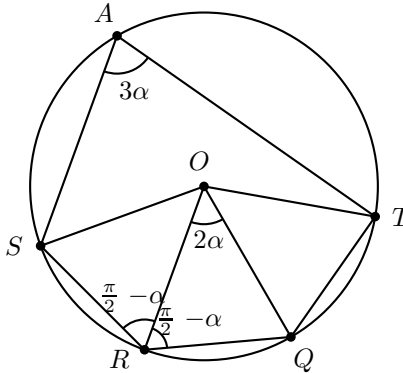


Figura 1.2:

Como $SR = RQ$ y $\angle SRO = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle QRO$, entonces $\triangle ORS$ y $\triangle ORQ$ son triángulos congruentes ($\triangle ORS \cong \triangle ORQ$). Análogamente $\triangle ORQ \cong \triangle OTQ$. Por lo tanto $OS = OQ = OR = OT$.

Por lo que $\angle ROS = \angle ROQ = \angle QOT = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\alpha$. Así que el ángulo central $\angle SOT = 6\alpha$. Por lo tanto $\angle SAT$ es un ángulo inscrito. □

²Profesor emérito de Antioch College.

Teorema 1.1.2 (Morley). *Los tres puntos de intersección de las respectivas rectas adyacentes que trisecan a los tres ángulos de un triángulo determinan un triángulo equilátero.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sean $\angle BAC = 3\alpha$, $\angle ABC = 3\beta$, $\angle BCA = 3\gamma$. Sean P , P' las intersecciones de las trisectrices de los ángulos en B y en C , siendo P la de las adyacentes. Por lo tanto P es el incentro de $\triangle BP'C$.

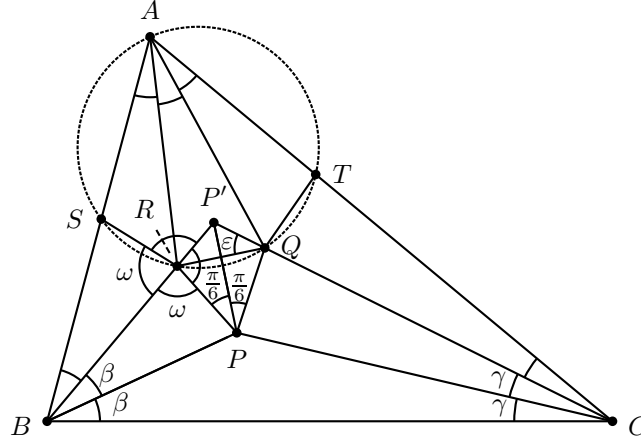


Figura 1.3:

Trácese RP y QP tales que $\angle RPP' = \frac{\pi}{6} = \angle P'PQ$ con R en BP' y Q en $P'C$. Como P es incentro de $\triangle BP'C$, entonces $\angle BP'P = \angle CP'P$. Por lo que:

$$\triangle RP'P \equiv \triangle QP'P. \quad (1.1)$$

Por lo tanto $RP = QP$. Así que $\triangle PQR$ es equilátero.

Basta ver que AR y AQ son las trisectrices en A .

Sean S en AB y T en CA tales que $\angle SRB = \angle PRB$ y $\angle TQC = \angle PQC$. Por lo que $\triangle BRS \equiv \triangle BRP$ y $\triangle CQT \equiv \triangle CQP$. De (1.1) $\triangle RP'Q$ es isósceles. Sean $\varepsilon = \angle P'RQ = \angle P'QR$, $\eta = \angle P'RP = \angle P'QP$, $\omega = \angle SRB = \angle PRB$. Como $\angle PQC$ es suplementario de η al igual que ω lo es, entonces $\omega = \angle PQC = \angle TQC$. Y como $\angle P'RS$ es suplementario de ω entonces $\angle P'RS = \eta$. Análogamente $\angle P'QT = \eta$. Por lo que $\angle SRQ = \eta + \varepsilon = \angle RQT$.

Por último, vamos a utilizar el lema, por lo que se necesita $SR = RQ = QT$ y $\eta + \varepsilon = \pi - 2\alpha$.

El que $SR = RQ = QT$ se obtiene del hecho que $\triangle BRS \equiv \triangle BRP$, $\triangle CQP \equiv \triangle CQT$ y $\triangle PQR$ es equilátero.

Como $\triangle PQR$ es equilátero, entonces $\eta = \frac{\pi}{3} + \varepsilon$, por lo tanto

$$\angle RP'Q + \varepsilon + \eta - \frac{\pi}{3} = \pi. \quad (1.2)$$

Tomando en consideración $\triangle BP'C$, se obtiene

$$\angle RP'Q + 2\beta + 2\gamma = \pi. \quad (1.3)$$

Finalmente, con $\triangle ABC$

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi. \quad (1.4)$$

De (1.2) y (1.3) $\varepsilon + \eta - \frac{\pi}{3} - 2\beta - 2\gamma = 0$, por lo tanto $\varepsilon + \eta = \frac{\pi}{3} + 2\beta + 2\gamma$. De (1.4) $2\beta + 2\gamma = \frac{2\pi}{3} - 2\alpha$. Por lo tanto $\varepsilon + \eta = \pi - 2\alpha$.

Como consecuencia del lema anterior se tiene que A, S, R, Q, T son concíclicos, con lo que $\angle BAR = \angle RAQ = \angle QAC$. Por lo tanto AR y AQ son las trisectrices en A . \square

Definición 1.1.3. *Con la notación anterior. El triángulo $\triangle PQR$ es el triángulo de Morley.*

1.2. Segunda demostración del teorema de Morley

La siguiente demostración, publicada por A. Robson (1923), se basa en las ideas de concurrencia, haces, hileras y razón doble, lo que agregará un sabor diferente a la prueba anterior.

Cabe mencionar que los temas que emplearemos para la demostración no se desarrollarán a profundidad, para no desviarnos del propósito del capítulo. Desde este momento y hasta finalizar esta sección trabajaremos con segmentos dirigidos.

Definición 1.2.1. Dadas cuatro rectas concurrentes en un punto O , se dice forman un **haz** de rectas y al punto O se le llama **centro**.

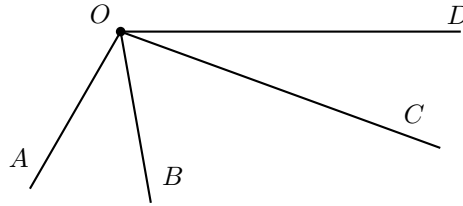


Figura 1.4:

Definición 1.2.2. Dados A, B, C, D cuatro puntos colineales, se dice que forman una **hiler**a de puntos y a la recta sobre la que se encuentran se le llama **eje**.

Dada una hiler de puntos A, B, C, D existen varias maneras de *medirlos*, pero nos interesa una muy en particular, en donde veremos el concepto de *razón doble*.

Definición 1.2.3. Sea A, B, C, D una hiler. Se define a la **razón doble** (o **razón cruzada**) $(ABCD)$ que está dada por

$$(ABCD) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}.$$

Esta misma definición puede ampliarse a los haces con la notación $O(ABCD)$ y dada por

$$O(ABCD) = \frac{\frac{\text{sen}AOC}{\text{sen}COB}}{\frac{\text{sen}AOD}{\text{sen}DOB}}.$$

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en Shively (1953), p. 116.

Teorema 1.2.4. Dadas cuatro rectas concurrentes en un punto O y una recta que las interseca en los diferentes puntos A, B, C, D , se tiene que $(ABCD) = r$ si y solo si $O(ABCD) = r$.

El teorema anterior nos dice que desde una hiler se puede *levantar* un haz con la misma razón doble que la de la hiler, y viceversa. En la figura 1.5, el haz con centro en O y razón doble *lleva* esa razón a la hiler y la hiler, a su vez, *lleva* esa misma razón doble al haz con centro O' .

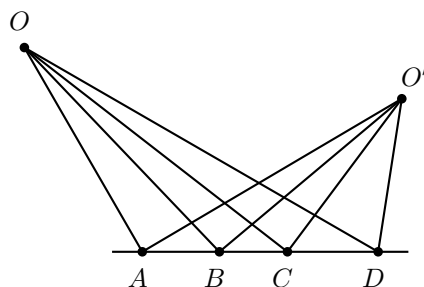


Figura 1.5:

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en Beskin (1976).

Teorema 1.2.5. *Si $(ABCD) = (ABCD')$, entonces $D = D'$*

El siguiente resultado se empleará en la demostración del teorema de Morley, por lo que le daremos la categoría de lema.

Lema 1.2.6. *Si dos haces tienen una recta en común y su razón doble es igual, entonces las intersecciones de rectas correspondientes son colineales.*

Demostración. Sean a, b, c, d y a', b', c', d' las rectas que forman los haces con centros O y O' . Sean B y C las intersecciones respectivas de b con b' y de c con c' . Sea A la intersección de BC con a .

Sea D la intersección de BC con d . Al momento de considerar los haces dados por las rectas OA, OB, OC, OD y $O'A, O'B, O'C, O'D$, por el teorema 1.2.4 se tiene que $O(ABCD) = O'(ABCD)$. La primera razón es la correspondiente a la del haz a, b, c, d ; por lo que únicamente faltaría ver que la razón $O'(ABCD)$ es la misma que la del segundo haz a', b', c', d' . Para esto basta que la recta $O'D$ coincida con d' .

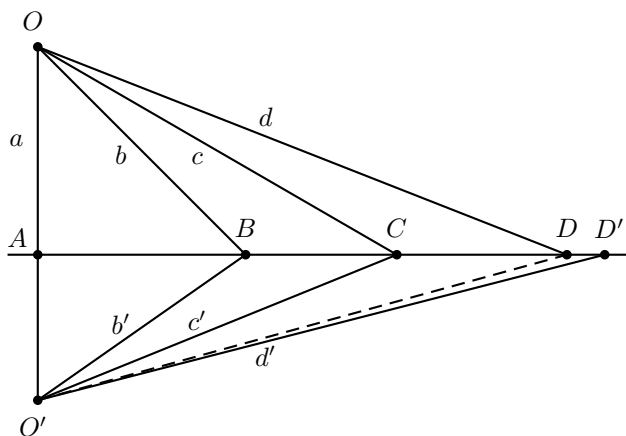


Figura 1.6:

Sea D' la intersección de BC con d' , que forma la hilera con razón doble $(ABCD') = O'(ABCD')$ y esta última a su vez $O'(ABCD') = O(ABCD)$, ya que por hipótesis, los haces con centros en O y O' tienen la misma razón doble. Así que $(ABCD') = O'(ABCD') = O(ABCD) = (ABCD)$, por lo tanto $D = D'$, lo que nos da la colinealidad de las intersecciones. \square

Para llegar al segundo de los lemas, invocaremos uno de los teoremas clásicos de la geometría: el teorema de Ceva, pero en su versión trigonométrica, cuya demostración puede consultarse en Shively (1953), p. 34.

Teorema 1.2.7 (Ceva). *Dadas tres rectas que pasa cada una por los vértices de un triángulo $\triangle ABC$ e intersecciones con los lados opuestos del mismo en los punto L, M, N , respectivamente. Se tiene que las rectas son concurrentes si y solo si*

$$\frac{\text{sen}ACN}{\text{sen}NCB} \frac{\text{sen}BAL}{\text{sen}LAC} \frac{\text{sen}CBM}{\text{sen}MBA} = 1.$$

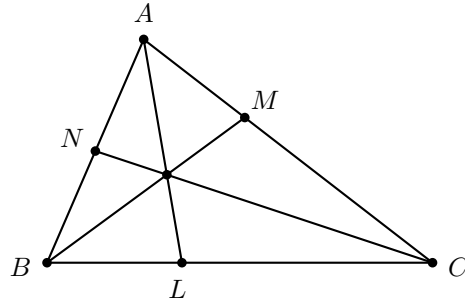


Figura 1.7:

Definición 1.2.8. *Dado un ángulo en A , se dice que dos rectas que pasan por A son **isogonales** si y solo si el ángulo formado entre ellas es bisecado por la bisectriz del ángulo original.*

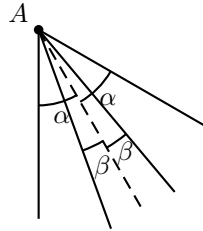


Figura 1.8:

Con esto llegamos a nuestro segundo y último lema.

Lema 1.2.9. *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y desde cada uno de sus vértices tres rectas concurrentes y que intersequen a los respectivos lados opuestos, entonces sus isogonales son también concurrentes.*

Demostración. Sean AL, BM, CN las rectas concurrentes y AL', BM', CN' sus respectivas isogonales.

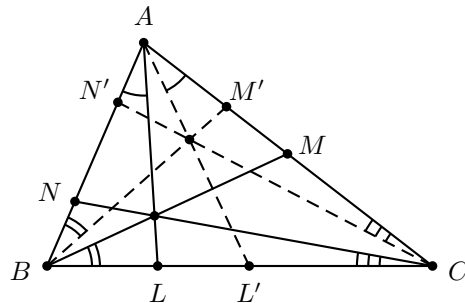


Figura 1.9:

De la definición de isogonales se puede observar que $\angle BAL = \angle L'AC$ así como $\angle BAL' = \angle LAC$. Análogamente $\angle ACN = \angle N'CB$, $\angle ACN' = \angle NCB$ y $\angle CBM = \angle M'BA$, $\angle CBM' = \angle MBA$. Por lo que

$$1 = \frac{\text{sen}ACN \text{ sen}BAL \text{ sen}CBM}{\text{sen}NCB \text{ sen}LAC \text{ sen}MBA} = \frac{\text{sen}N'CB \text{ sen}L'AC \text{ sen}M'BA}{\text{sen}ACN' \text{ sen}BAL' \text{ sen}CBM'}.$$

Por lo tanto

$$1 = \frac{\text{sen}ACN' \text{ sen}BAL' \text{ sen}CBM'}{\text{sen}N'CB \text{ sen}L'AC \text{ sen}M'BA}.$$

Así que, por el teorema de Ceva, las rectas AL' , BM' , CN' concurren. \square

Enunciaremos de nueva cuenta el teorema de Morley, esperando que la siguiente demostración sea del agrado del lector.

Teorema 1.2.10 (Morley). *Los tres puntos de intersección de las respectivas rectas adyacentes que trisecan a los tres ángulos de un triángulo determinan un triángulo equilátero.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ con intersecciones de trisectrices en P , Q , R . Sean L , M , N las intersecciones de BR con CQ , CP con AR y de AQ con BP , respectivamente. Sean D y E las intersecciones de AQ con BR y de AQ con CP . Sea O la intersección de MQ con NR .

Lo primero a demostrar, utilizando los lemas antes vistos, será que P , O , L son colineales.

Observemos que BR y BP son isogonales al igual que CP , CQ . Como L es la intersección de BR con CQ y P la de BP con CP entonces AL y AP son isogonales, como consecuencia del lema 1.2.9. Por lo tanto $A(BRLD) = A(CEPM)$, ya que los ángulos correspondientes son iguales al ser isogonales. De esta última desigualdad obtenemos

$$N(BRLD) = A(BRLD) = A(CEPM) = Q(CEPM) = Q(PMCE)$$

como consecuencia del teorema 1.2.4.

Como $N(BRLD) = Q(PMCE)$ y las rectas ND y QE son iguales, tenemos que las intersecciones correspondientes son colineales por lema 1.2.6. Concretamente las intersecciones de NB con QP , NR con QM y NL con QC , que resultan ser P , O y L , respectivamente.

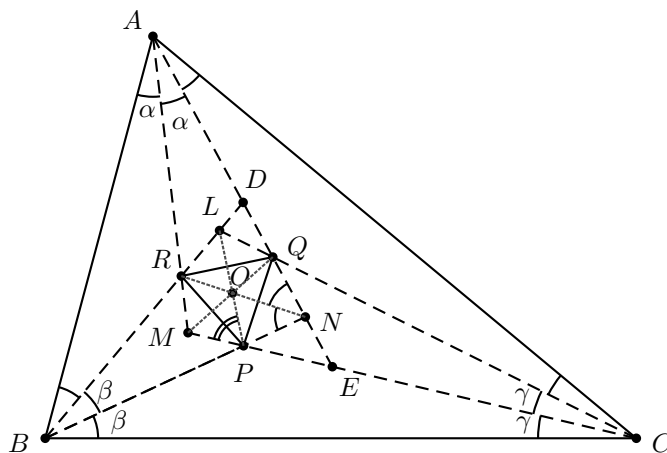


Figura 1.10:

Recordando que $\angle LBP = \angle PBC = \beta$ y que $\angle LCP = \angle PCB = \gamma$, se deduce que P es el incentro de $\triangle LBC$, por lo que $\angle BLC = \pi - 2\beta - 2\gamma$, por lo tanto

$$\angle BLP = \frac{1}{2}\angle BLC = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma.$$

Así

$$\angle BPL = \pi - \beta - \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) = \frac{\pi}{2} + \gamma. \quad (1.5)$$

Análogamente, al ser R incentro de $\triangle NAB$, se obtiene $\angle NRB = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Considerando $\triangle RBN$

$$\angle BNR = \pi - \beta - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha. \quad (1.6)$$

Como $\angle BPL$ es exterior en $\triangle OPN$, $\angle LBP = \angle PON + \angle PNO = \angle PON + \angle BNR$, por lo tanto

$$\angle PON = \frac{\pi}{2} + \gamma - \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha\right) = \gamma + \beta + \alpha = \frac{\pi}{3},$$

por (1.5) y (1.6).

Análogamente $\angle NOQ = \frac{\pi}{3}$ y como $\angle ANR = \angle RNB$, entonces $\triangle OPN \cong \triangle OQN$, en particular $OP = OQ$, es decir, $\triangle OPQ$ es isósceles. Con este último resultado se concluye que $\pi = \angle OPQ + \angle OQP + \angle QOP = 2\angle OPQ + \frac{2\pi}{3}$, por lo tanto

$$\angle OPQ = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}. \quad (1.7)$$

De la misma manera, $\triangle ORP$ es isósceles, y con este se llega a que $\angle OPR = \frac{\pi}{6}$, que junto con (1.7) tenemos $\angle RPQ = \frac{\pi}{3}$.

Análogamente los dos vértices restantes de $\triangle PQR$, por lo que se trata de un triángulo equilátero. \square

1.3. Tercera demostración del teorema de Morley

Hemos llegado a la tercera y última demostración del teorema de Morley, aquí no hay más que decir: se tratará de cuentas. Cuentas que se veían venir desde el momento en que se mencionó que la trigonometría estaría involucrada en esto. Con las desventajas que representan, ya que, en muchos casos, la demostración se reduce a ver que nuestro teorema es válido sin preocuparnos más allá que los signos estén bien, perdiéndose la esencia del problema mismo; así, como las grandes ventajas que eso conlleva, por ejemplo, la posibilidad de generalizar nuestros resultados, cosa que veremos ejemplificada con más detalle al final del capítulo.

Esta demostración fue presentada en 1939 por Loria³, en *Triangles Équilatéraux Dérivés d'un Triangle Quelconque*. En dicha prueba se utilizan los clásicos resultados del cálculo de senos y cosenos de sumas y diferencias de ángulos, así como algunas identidades trigonométricas que se expondrán a continuación:

Teorema 1.3.1. Sean α y β ángulos. Se cumplen las siguientes propiedades:

- a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha$.
- b) $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos} \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$.

Dicha demostración se puede realizar a partir del *teorema de Ptolomeo*⁴ o puede consultarse una prueba en Spivak (1967), p. 444.

Corolario 1.3.2. Dado un ángulo α se tiene que

- a) $\text{sen} 2\alpha = 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha$.
- b) $\text{cos} 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$.

³Gino Loria (1862-1954), matemático e historiador de las matemáticas italiano.

⁴Véase teorema 2.2.1.

$$c) \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}.$$

Demostración. Para a) y b) se aplica directamente el teorema anterior. Para c) se obtiene de $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$, ya que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. \square

Lema 1.3.3. Sean α y β ángulos.

$$a) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

$$b) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

$$c) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

$$d) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Demostración. Sean $\alpha = \gamma + \delta$ y $\beta = \gamma - \delta$, así

$$\sin \alpha = \sin(\gamma + \delta) = \sin \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \gamma, \quad (1.8)$$

$$\sin \beta = \sin(\gamma - \delta) = \sin \gamma \cos \delta - \sin \delta \cos \gamma. \quad (1.9)$$

Además $\alpha + \beta = 2\gamma$ y $\alpha - \beta = 2\delta$, así que

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (1.10)$$

a) Así, al sumar (1.8) con (1.9) se obtiene

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \gamma \cos \delta + \sin \gamma \cos \delta = 2 \sin \gamma \cos \delta.$$

Por lo tanto, $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$, por (1.10).

b) Restando (1.8) con (1.9) se tiene que

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin \delta \cos \gamma + \sin \delta \cos \gamma = 2 \sin \delta \cos \gamma.$$

Por lo que, $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$, por (1.10).

c) Como $\alpha = \gamma + \delta$ y $\beta = \gamma - \delta$, se tiene que

$$\cos \alpha = \cos \gamma \cos \delta - \sin \delta \sin \gamma, \quad (1.11)$$

$$\cos \beta = \cos \gamma \cos \delta + \sin \delta \sin \gamma, \quad (1.12)$$

por lo que, sumando (1.11) con (1.12) se tiene $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \gamma \cos \delta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ al utilizar (1.10).

d) Para concluir, se llega a que $\cos \alpha + \cos \beta = -2 \sin \gamma \sin \delta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ por (1.11), (1.12) y (1.10). \square

Estas propiedades nos serán útiles en el siguiente lema.

Lema 1.3.4. Sea α un ángulo. Se tiene que

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\alpha &= \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) \\ &= \operatorname{sen} 2\alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha \\ &= (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha),\end{aligned}$$

al utilizar el teorema 1.3.1 y su corolario. Continuando, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \\ &= \operatorname{sen} \alpha (2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \\ &= \operatorname{sen} \alpha (3 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \\ &= \operatorname{sen} \alpha (3 \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)) \\ &= \operatorname{sen} \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha),\end{aligned}$$

ya que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Así

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\alpha &= \operatorname{sen} \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1) \\ &= \operatorname{sen} \alpha \left(4 \left(\frac{\cos 2\alpha + 1}{2} \right) - 1 \right),\end{aligned}$$

por corolario 1.3.2. Siguiendo con la expresión

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\alpha &= \operatorname{sen} \alpha (2(1 + \cos 2\alpha) - 1) \\ &= \operatorname{sen} \alpha (2 + 2 \cos 2\alpha - 1) \\ &= \operatorname{sen} \alpha (1 + 2 \cos 2\alpha) \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \left(-\cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2\alpha \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \left(\cos 2\alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \left[-2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\alpha + \frac{2\pi}{3}}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\alpha - \frac{2\pi}{3}}{2} \right) \right],\end{aligned}$$

al ocupar el inciso *d*) del lema anterior. Como seno es una función impar, se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\alpha + \frac{2\pi}{3}}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{2\pi}{3} - 2\alpha}{2} \right) \right] \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \left[2 \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right] \\ &= 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \operatorname{sen} \left(\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right),\end{aligned}$$

ya que $\operatorname{sen}(\varphi) = \operatorname{sen}(\pi - \varphi)$. Por lo tanto, $\operatorname{sen} 3\alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)$. \square

A la propiedad anterior se le llama *fórmula del triple ángulo*.

Teorema 1.3.5 (Ley de senos). *Dado un triángulo de lados a , b , c y ángulos opuestos α , β , γ , se tiene que*

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

Teorema 1.3.6 (Ley de cosenos). *Dado un triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ , se tiene que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Ambas demostraciones, pueden consultarse en Cárdenas (2013), pp. 53-55.

Los siguientes dos lemas servirán para facilitar las cuentas a la hora de la demostración. El primero de ellos se puede encontrar dentro de la demostración de la ley de senos en Cardenas (2013).

Lema 1.3.7. *Sea $\triangle ABC$ con radio de circuncírculo de longitud r . Se cumple $BC = 2r \sin \alpha$, con α el ángulo opuesto al lado BC .*

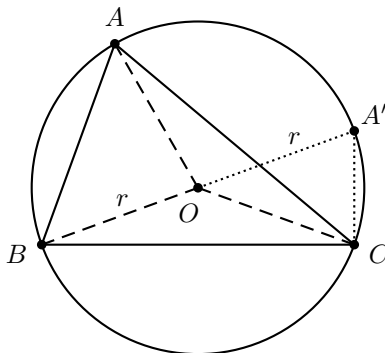


Figura 1.11:

Lema 1.3.8. *Dados $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$, se cumple la siguiente igualdad*

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = (x + y)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (x - y)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Demostración. Como

$$(x + y)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2xy \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

y

$$(x - y)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2xy \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

entonces

$$(x+y)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (x-y)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = x^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + y^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 2xy \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Por lo tanto $(x + y)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (x - y)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = x^2 + y^2 - 2xy(\cos 2\alpha)$, por inciso b) del corolario 1.3.2. \square

Teorema 1.3.9 (Morley). *Los tres puntos de intersección de las respectivas rectas adyacentes que trisecan a los tres ángulos de un triángulo determinan un triángulo equilátero.*

Demostración. La demostración se basa en encontrar la longitud de los lados del triángulo de Morley. Para ello se calcularán los lados del triángulo $\triangle ABC$, seguido de los lados de un triángulo auxiliar, para finalmente llegar a calcular uno de los lados del triángulo de Morley.

Por el lema 1.3.7, $BC = 2r \sin 3\alpha$, así, por lema 1.3.4, se tiene que

$$BC = 2r \left(4 \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) \right),$$

$$BC = 8r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right).$$

Análogamente

$$CA = 8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} + \beta \right), \quad (1.13)$$

$$AB = 8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right). \quad (1.14)$$

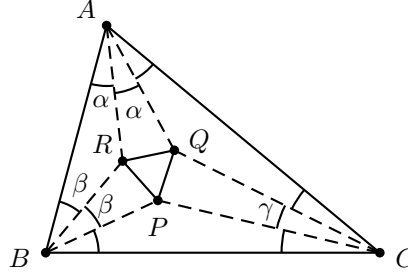


Figura 1.12:

Sean P, Q, R las intersecciones de las trisectrices de $\triangle ABC$. Considerando $\triangle ABR$, se obtiene $\frac{AR}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{AB}{\operatorname{sen} \angle ARB}$ por ley de senos. Por lo tanto, por (1.14), se tiene que

$$AR = \frac{AB \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \angle ARB} = \frac{8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \angle ARB}.$$

Como $\angle ARB = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} - \gamma \right) = \frac{2\pi}{3} + \gamma$, se obtiene

$$AR = \frac{8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right)},$$

$$AR = 8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \beta. \quad (1.15)$$

Análogamente

$$AQ = 8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \operatorname{sen} \gamma. \quad (1.16)$$

Considerando $\triangle AQR$, se obtiene $QR^2 = AR^2 + AQ^2 - 2AR \cdot AQ \cos \alpha$ por ley de cosenos. Por lo tanto, utilizando (1.15) y (1.16), se tiene que

$$\begin{aligned} AR^2 + AQ^2 &= \left(8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \beta \right)^2 + \left(8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \operatorname{sen} \gamma \right)^2 \\ &= 64r^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen}^2 \beta + 64r^2 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \operatorname{sen}^2 \gamma \\ &= 64r^2 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2AR \cdot AQ \cos \alpha &= 2 \left(8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \operatorname{sen} \beta \right) \left(8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \operatorname{sen} \gamma \right) \cos \alpha \\ &= 64r^2 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$QR^2 = 64r^2 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \cos \alpha \right].$$

Así

$$\frac{QR^2}{64r^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) - 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \cos \alpha. \quad (1.17)$$

Por ahora nos centraremos en la parte derecha de la ecuación anterior y veremos que esta es igual a $\sin \alpha$.

Sean $x = \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right)$, $y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right)$. Por lema 1.3.8, se tiene que

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = (x + y)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (x - y)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Al sustituir los valores de x , y

$$\begin{aligned} & \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) - 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \cos \alpha \\ &= \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \right)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Enfoquémonos por ahora en $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right)$ y en $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right)$.

Utilizando el inciso *a*) del lema 1.3.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) &= 2 \sin \left(\frac{\left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right)}{2} \right) \cos \left(\frac{\left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) - \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right)}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} + \beta + \gamma \right) \right) \cos \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left(\frac{1}{2} (\pi - \alpha) \right) \cos \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right), \end{aligned}$$

ya que $\frac{2\pi}{3} + \beta + \gamma = \pi - \frac{\pi}{3} + \beta + \gamma = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) + \beta + \gamma = \pi - \alpha$. Por lo tanto

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right), \quad (1.19)$$

pues $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos(\varphi)$.

Análogamente, utilizando el inciso *b*) del lema 1.3.3, se tiene que

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) = 2 \sin \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1.20)$$

Por lo que, al sustituir (1.19) y (1.20) en (1.18), tenemos que

$$\begin{aligned} & \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) - 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \cos \alpha \\ &= \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \right)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(2 \sin \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left[\sin^2 \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \right] \\ &= 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Así, utilizando el inciso *a*) del corolario 1.3.2, obtenemos

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\cos\alpha = \sin^2\alpha.$$

Por lo tanto (1.17) se ve como

$$\frac{QR^2}{64r^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma} = \sin^2\alpha,$$

$$QR^2 = 64r^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma.$$

Por lo tanto

$$QR = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Análogamente $PQ = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ y $RP = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$. Concluyendo así que $\triangle PQR$ es equilátero. \square

1.4. Una generalización del teorema de Morley

En la sección pasada, utilizamos como herramienta principal la trigonometría. En esta ocasión, se presentará una prueba ligeramente diferente a la hecha en Monteiro, C. (2010), p. 27-37, demostración que a su vez retoma las ideas principales y sigue una línea similar a la hecha en la prueba de Gino Loria.

Sin embargo, la intención de esta sección no es solo generalizar la demostración trigonométrica, sino generalizar en sí el propio teorema de Morley, al dejar atrás el único triángulo de Morley para hablar de hasta 18 triángulos de Morley. Para esto es necesario utilizar las trisectrices interiores y exteriores, e incluso, se pueden considerar a un tercer tipo: las trisectrices *explementarias*. Así, de las diferentes combinaciones, obtenemos un total de 27 triángulos, de los cuales solo 18 cumplirán con el cometido de ser triángulos de Morley.

Nuestra tarea en esta sección será construir el camino restante a la generalización del teorema de Morley, demostrando un par de ellas y resaltando la similitud que tienen entre sí.

Definición 1.4.1. Dado un ángulo λ , decimos que sus **trisectrices interiores** son aquellas rectas que dividen al ángulo λ en tres ángulos de magnitud $\frac{\lambda}{3}$.

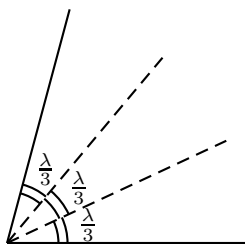


Figura 1.13:

Definición 1.4.2. Dado un ángulo λ , decimos que sus **trisectrices exteriores** son aquellas rectas que dividen al ángulo $\pi - \lambda$ en tres ángulos de magnitud $\frac{1}{3}(\pi - \lambda)$.

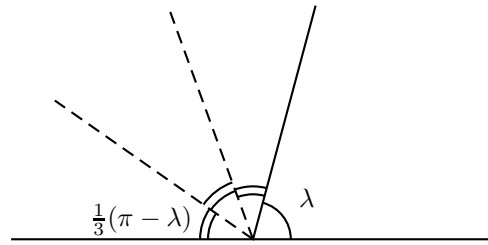


Figura 1.14:

Definición 1.4.3. Dado un ángulo λ , decimos que sus *trisectrices explementarias* son aquellas rectas que dividen al ángulo $2\pi - \lambda$ en tres ángulos de magnitud $\frac{1}{3}(2\pi - \lambda)$.

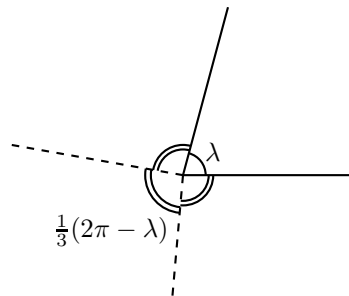


Figura 1.15:

Observación 1.4.4. Sea $3\alpha < \pi$ un ángulo

- a) Las trisectrices exteriores forman un ángulo de $\frac{1}{3}(\pi - 3\alpha) = \frac{\pi}{3} - \alpha$, al que se denotará como $\alpha^- = \frac{\pi}{3} - \alpha$

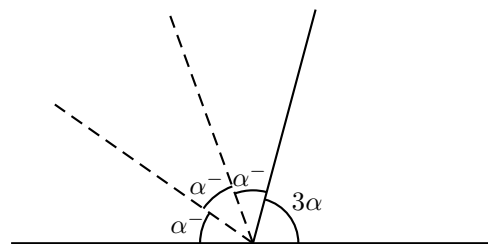


Figura 1.16:

- b) Las trisectrices explementarias forman un ángulo $\varphi = \frac{1}{3}(2\pi - 3\alpha) = \frac{2\pi}{3} - \alpha$, por lo que el ángulo suplementario de este último está dado por $\pi - \varphi = \pi - (\frac{2\pi}{3} - \alpha) = \frac{\pi}{3} + \alpha$. Se denotará $\alpha^+ = \frac{\pi}{3} + \alpha$.

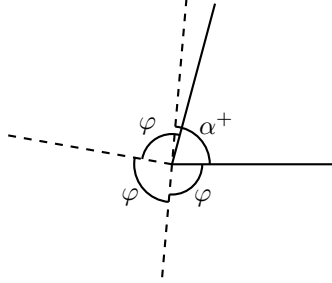


Figura 1.17:

Observemos que $\text{sen } \varphi = \text{sen } \alpha^+$ al ser ambos ángulos suplementarios.

Notación que hace un guiño a la ya clásica demostración de Conway⁵ (2006). Escribir los ángulos de esta manera nos ayudará a la hora de escribir algunas expresiones, por ejemplo:

Proposición 1.4.5. Dado α un ángulo

$$a) \text{ sen } \alpha^+ = \text{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right).$$

$$b) \text{ sen } \alpha^- = \text{sen} \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$c) \text{ sen } \alpha^+ = \text{sen} \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right).$$

$$d) \text{ sen } 3\alpha = \text{sen } \alpha \text{ sen } \alpha^- \text{ sen } \alpha^+.$$

Demostración. Ya que $\text{sen}(\pi - \varphi) = \text{sen } \varphi$, se tiene que

$$b) \text{ sen} \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) = \text{sen} \left(\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right) = \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \text{sen } \alpha^-.$$

$$c) \text{ sen} \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \text{sen} \left(\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \right) = \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \text{sen } \alpha^+.$$

d) Por lema 1.3.4, se tiene que $\text{sen } 3\alpha = \text{sen } \alpha \text{ sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \text{ sen} \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) = \text{sen } \alpha \text{ sen } \alpha^+ \text{ sen } \alpha^-$, por inciso b). \square

Proposición 1.4.6. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ángulos tales que $\alpha + \gamma = \beta + \delta < \pi$. Si $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \delta}$, entonces $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$.

Demostración. Como $\alpha + \gamma < \pi$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha + \gamma + \epsilon = \pi$, con lo que se tiene el triángulo inscriptible en una circunferencia de diámetro 1 cuyos ángulos son α, γ y ϵ . Como $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, entonces también se tiene el triángulo de ángulos β, δ y ϵ inscriptible en una circunferencia de diámetro 1.

Sean a, b, c, d los lados respectivamente opuestos a los ángulos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Por lema 1.3.4 se tiene que $a = \text{sen } \alpha, b = \text{sen } \beta, c = \text{sen } \gamma, d = \text{sen } \delta$. Por lo que

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \delta} = \frac{b}{d},$$

⁵John Horton Conway (1973-2020), matemático inglés.

es decir, ambos triángulos son semejantes, ya que el ángulo entre los lados es ϵ , por lo tanto, los ángulos correspondientes son iguales, es decir, $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$. \square

Lema 1.4.7. Dadas P, Q, R las intersecciones de trisectrices interiores, y Q', R' las intersecciones de trisectrices exteriores (ver figura 1.18), así como Q'', R'' las intersecciones de trisectrices explementarias (ver figura 1.19), se tiene que

- a) $\angle ARQ = \beta^+, \angle AQR = \gamma^+$.
- b) $\angle AR''Q'' = \beta, \angle AQ'R' = \gamma$.
- c) $\angle AR''Q'' = \beta^-, \angle AQ''R'' = \gamma^-$.

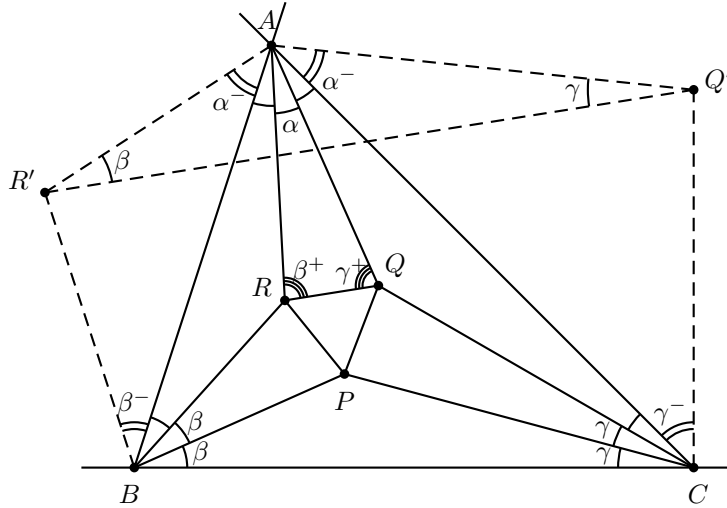


Figura 1.18:

Demostración. Para demostrar los incisos ocuparemos algunos de los resultados vistos en la sección pasada.

- a) Sean $\angle ARQ = \varphi$ y $\angle AQR = \psi$, se demostrará que $\varphi = \beta^+, \psi = \gamma^+$.
Considerando $\triangle ARQ$ y utilizando la ley de senos se tiene que

$$\frac{\text{sen } \varphi}{AQ} = \frac{\text{sen } \psi}{AR}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \psi} = \frac{AQ}{AR} = \frac{8r \text{ sen } \gamma \text{ sen } \beta \text{ sen}(\beta + \frac{\pi}{3})}{8r \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma \text{ sen}(\gamma + \frac{\pi}{3})} = \frac{\text{sen } \beta^+}{\text{sen } \gamma^+},$$

utilizando (1.15) y (1.16). Como $\varphi + \psi < \pi$, entonces $\varphi = \beta^+, \psi = \gamma^+$, por proposición 1.4.6.

- b) Veamos ahora que $\angle AR'Q' = \beta, \angle AQ'R' = \gamma$.

Sean $\angle AR'Q' = \varphi, \angle AQ'R' = \psi$. Considerando $\triangle AR'Q'$ y utilizando la ley de senos

$$\frac{\text{sen } \varphi}{AQ'} = \frac{\text{sen } \psi}{AR'}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \psi} = \frac{AQ'}{AR'}. \tag{1.21}$$

Aquí podemos notar que llegamos a una expresión similar a la del inciso anterior. Lo único que se debe hacer es expresar a AQ' y AR' en términos similares a los de AQ y AR . Para esto conviene repasar la forma en que se hicieron los cálculos para AQ y AR .

Vamos a demostrar que $\varphi = \beta$ y $\psi = \gamma$, para esto veremos que $AQ' = 8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta^- \operatorname{sen} \gamma^-$ y $AR' = 8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma^- \operatorname{sen} \beta^-$.

Utilizando la ley de senos en $\triangle AQ'C$, se tiene que $\frac{\operatorname{sen} \angle AQ'C}{AC} = \frac{\operatorname{sen} \gamma^-}{AQ'}$. Como $\angle AQ'C = \pi - \alpha^- - \gamma^- = \pi - (\frac{\pi}{3} - \alpha) - (\frac{\pi}{3} - \gamma) = \frac{\pi}{3} + \alpha + \gamma = \frac{\pi}{3} + (\frac{\pi}{3} - \beta) = \frac{2\pi}{3} - \beta$, obtenemos

$$AQ' = \frac{AC \operatorname{sen} \gamma^-}{\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3} - \beta)} = \frac{8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta^- \operatorname{sen} \beta^+ \operatorname{sen} \gamma^-}{\operatorname{sen} \beta^+},$$

utilizando la ecuación de la sección anterior (1.13) y los incisos *c*) y *d*) de la proposición 1.4.5. Así, $AQ' = 8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta^- \operatorname{sen} \gamma^-$. Análogamente $AR' = 8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma^- \operatorname{sen} \beta^-$. Por lo tanto, (1.21) queda de esta manera

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \psi} = \frac{8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta^- \operatorname{sen} \gamma^-}{8r \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma^- \operatorname{sen} \beta^-} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Como $\varphi + \psi < \pi$, entonces $\varphi = \beta$, $\psi = \gamma$, por proposición 1.4.6.

c) De forma análoga se puede verificar que $\angle AR''Q'' = \beta^-$, $\angle AQ''R'' = \gamma^-$.

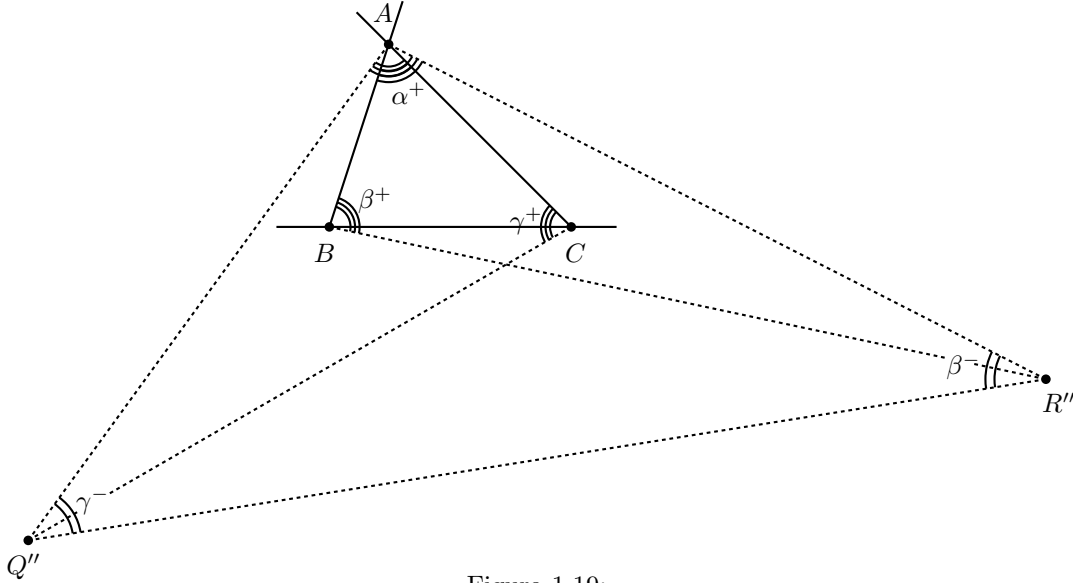


Figura 1.19:

□

Tenemos los preparativos para el propósito principal de esta sección: una generalización del teorema de Morley.

Teorema 1.4.8. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Si se consideran las trisectrices interiores que generan $\triangle PQR$, entonces $\triangle PQR$ es equilátero.*

Demostración. Sea $n = 8r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma$. Por lo tanto $AQ = n \operatorname{sen} \beta^+$.

Como $\pi - (\beta^+ + \gamma^+) = \pi - (\frac{\pi}{3} + \beta) - (\frac{\pi}{3} + \gamma) = \frac{\pi}{3} - \beta - \gamma = \alpha$, entonces se tiene que el tercer ángulo del triángulo de ángulos $\beta^+ = \angle ARQ$, $\gamma^+ = \angle AQR$, es α , por inciso *a*) del lemma 1.4.7.

Utilizando ley de senos en $\triangle ARQ$

$$\frac{RQ}{\text{sen } \alpha} = \frac{AQ}{\text{sen } \beta^+} = \frac{n \text{ sen } \beta^+}{\text{sen } \beta^+} = n.$$

Por lo tanto $RQ = 8r \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$. Análogamente $PQ = RP = 8r \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$. Por lo tanto $\triangle PQR$ es equilátero. \square

El anterior es el teorema de Morley. En este punto nos podemos preguntar ¿por qué esta demostración no la ocupamos antes si es más sencilla? En realidad nos saltamos muchos pequeños pasos intermedios que habíamos realizado antes.

Esta segunda y tercera demostración son casi copias de la anterior.

Teorema 1.4.9. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Si se consideran las trisectrices exteriores que generan $\triangle P'Q'R'$, entonces $\triangle P'Q'R'$ es equilátero.*

Demostración. Sea $n' = 8r \text{ sen } \beta^- \text{ sen } \gamma^-$. Por lo tanto $AQ' = n' \text{ sen } \beta$.

Como $\pi - (\beta + \gamma) = \pi - (\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{2\pi}{3} + \alpha$, por inciso b) del lema 1.4.7.

Utilizando ley de senos en $\triangle AR'Q'$

$$\frac{R'Q'}{\text{sen}(\frac{2\pi}{3} + \alpha)} = \frac{R'Q'}{\text{sen } \alpha^-} = \frac{AQ'}{\text{sen } \beta} = \frac{n' \text{ sen } \beta}{\text{sen } \beta} = n',$$

por inciso b) de la proposición 1.4.5. Por lo tanto $R'Q' = 8r \text{ sen } \alpha^- \text{ sen } \beta^- \text{ sen } \gamma^-$. Análogamente $P'Q' = R'P' = 8r \text{ sen } \alpha^- \text{ sen } \beta^- \text{ sen } \gamma^-$. Por lo tanto $\triangle P'Q'R'$ es equilátero. \square

Teorema 1.4.10. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Si se consideran las trisectrices explementarias que generan $\triangle P''Q''R''$, entonces $\triangle P''Q''R''$ es equilátero.*

Demostración. Sea $n'' = 8r \text{ sen } \beta^+ \text{ sen } \gamma^+$. Por lo tanto $AQ'' = n'' \text{ sen } \beta^-$.

Como $\pi - (\beta^- - \gamma^-) = \pi - (\frac{\pi}{3} - \beta) - (\frac{\pi}{3} - \gamma) = \frac{\pi}{3} + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \alpha = \frac{2\pi}{3} - \alpha$.

Utilizando ley de senos en $\triangle AR''Q''$

$$\frac{R''Q''}{\text{sen}(\frac{2\pi}{3} - \alpha)} = \frac{R''Q''}{\text{sen } \alpha^+} = \frac{AQ''}{\text{sen } \beta^-} = \frac{n'' \text{ sen } \beta^-}{\text{sen } \beta^-} = n'',$$

por inciso c) de la proposición 1.4.5. Por lo tanto $R''Q'' = 8r \text{ sen } \alpha^+ \text{ sen } \beta^+ \text{ sen } \gamma^+$. Análogamente $P''Q'' = R''P'' = 8r \text{ sen } \alpha^+ \text{ sen } \beta^+ \text{ sen } \gamma^+$. Por lo tanto $\triangle P''Q''R''$ es equilátero. \square

Con esto finalizamos la sección y el capítulo, mostrando el potencial que pueden llegar a tener estas demostraciones algebraicas, que si bien uno lo sabe, no está de más recordarlo con un bonito ejemplo.

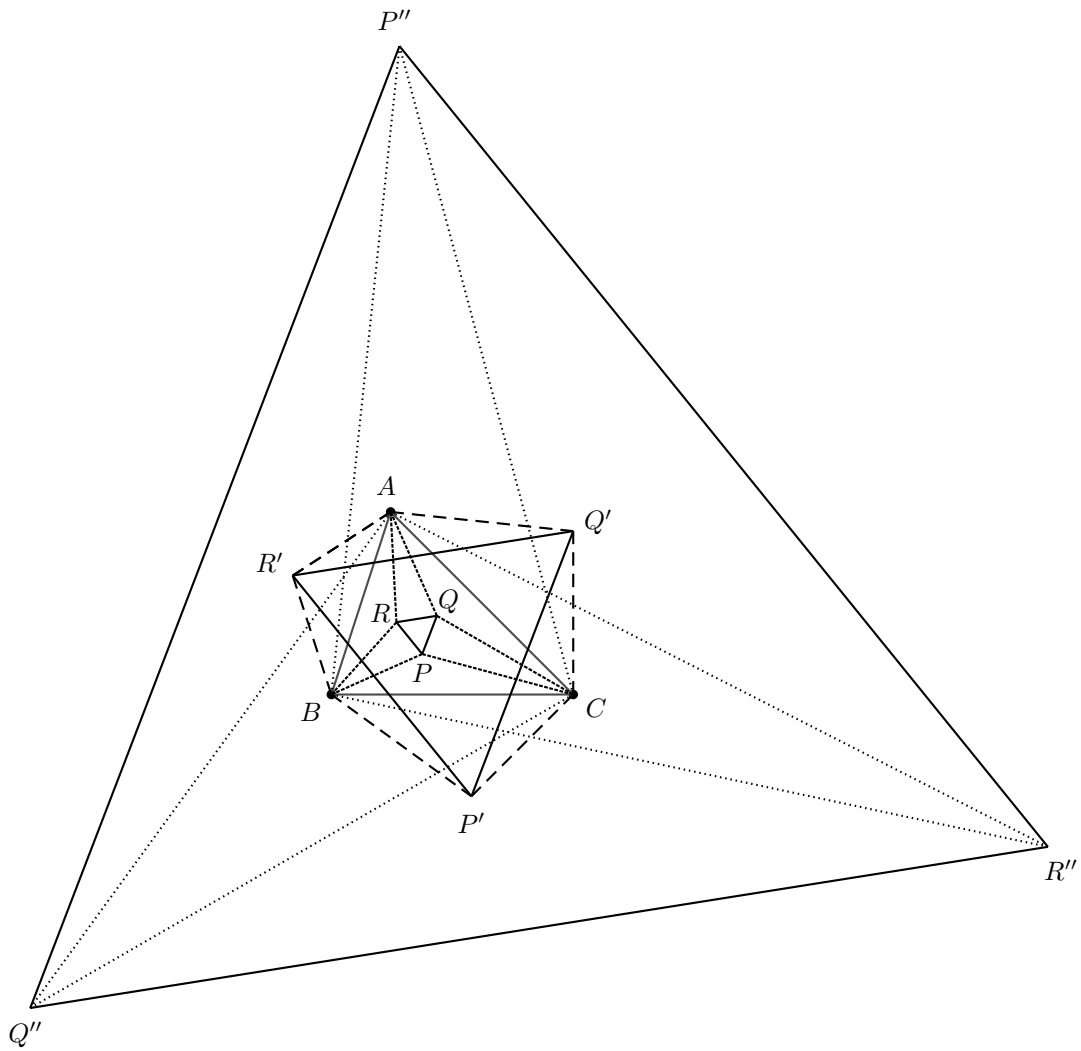


Figura 1.20:

Capítulo 2

Circunferencia de los nueve puntos

La *circunferencia de los nueve puntos* es uno de los temas tradicionales dentro de una clase de geometría euclidiana y sus equivalentes, ya que, desde mi punto de vista, es un tema sencillo, interesante y que puede conducirnos de manera natural a resultados didácticos que engloban diferentes temas.

La circunferencia de los nueve puntos es también conocida como *circunferencia de Feuerbach* e incluso como *circunferencia de Euler*. ¿A qué se deben dichos nombres?

En 1822, Feuerbach¹, en *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, p.48, demostró que la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo, también pasa por sus pies de alturas. Además de un asombroso resultado (que veremos al final de este capítulo) que le llevó a acreditarse el nombre de la circunferencia.

En 1821, Brianchon² y Poncelet³, en *Gergonne's Annales de Mathématiques*, vol. 11, p. 215, probaron que tanto los seis puntos cíclicos antes mencionados como los puntos medios del ortocentro a los vértices están sobre la misma circunferencia.

En 1872, Catalan⁴, en *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire* hace mención del matemático Terquem⁵, quien atribuye a Euler el resultado de esta circunferencia.

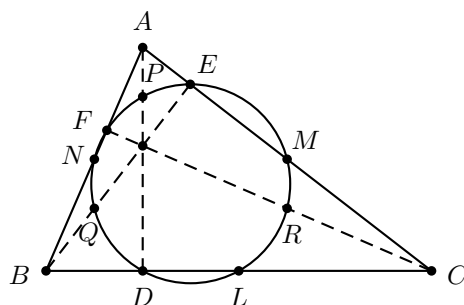


Figura 2.1: Circunferencia de los nueve puntos

Durante parte de este capítulo nos enfocaremos en demostrar que los nueve puntos son concíclicos; resultado que denominaremos el *teorema de la circunferencia de los nueve puntos*, que al igual que en el capítulo anterior, veremos tres demostraciones que bien podrían formar parte de cualquier curso de geometría sintética, dada su sencillez. Trabajaremos con propiedades de esta circunferencia. Hablaremos sobre la recta de Euler. Y culminaremos con el teorema de Feuerbach.

¹Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), matemático alemán.

²Charles Julien Brianchon (1783-1864), matemático, químico y militar francés.

³Jean-Victor Poncelet (1788-1867), matemático e ingeniero francés.

⁴Eugène Charles Catalan (1814-1894), matemático belga.

⁵Orly Terquem (1782-1862), matemático francés.

2.1. Línea de Euler

Leonard Euler (1707-1783) fue un brillante matemático suizo que vivió durante gran parte de su vida en la actual Rusia. Tanto su padre como él llevaron una relación muy cercana con la familia Bernoulli, familia en donde varios de sus miembros a lo largo de las generaciones fueron renombrados científicos.

Euler trabajó en diferentes disciplinas como la cartografía, música, física y matemáticas. Realizó aportaciones en ramas como teoría de números, cálculo, ecuaciones diferenciales y geometría. Siendo el responsable de notaciones comunes hoy en día como e , i , π y Σ .

Aquí, de manera breve, abordaremos un resultado que lleva su nombre: *la línea de Euler*; resultado que se ocupará en este capítulo. Esta recta relaciona tres puntos notables del triángulo (a la que más adelante le sumaremos un cuarto), hablamos del ortocentro, el punto mediano y el circuncentro.

Comencemos recordando una propiedad fundamental en el desarrollo de la sección que nos habla sobre el gravicentro y las medianas, su demostración puede consultarse en Altshiller (2007), p. 65.

Teorema 2.1.1. *Las medianas son cortadas en razón 2 por el gravicentro. Donde el segmento más grande corresponde al que va desde el vértice al gravicentro.*

En la figura 2.2, AG está a razón 2 : 1 con GL , es decir $AG = 2GL$. El siguiente es el teorema de esta sección, el teorema de la línea de Euler.

Teorema 2.1.2. *Si H es el ortocentro, O el circuncentro y G el gravicentro (punto mediano) de $\triangle ABC$, entonces H, G, O son colineales. Además, $HG = 2GO$.*

Demostración. Sea H' la intersección de AD (la altura desde A) y GO . Ya que AD es paralela a OL , se tiene que $\angle H'AG = \angle OLG$, $\angle GH'A = \angle GOL$, con L el punto medio de BC . Por lo tanto, los triángulos $\triangle H'AG$ y $\triangle OLG$ son semejantes ($\triangle H'AG \sim \triangle OLG$).

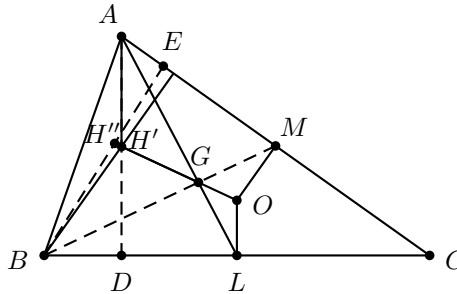


Figura 2.2:

Por lo tanto

$$\frac{GH'}{GO} = \frac{GA}{GL} = \frac{2}{1}, \quad (2.1)$$

por teorema 2.1.1. Análogamente con el vértice B , el pie de la altura E y el punto medio M de CA se tiene que

$$\frac{GH''}{GO} = \frac{2}{1}, \quad (2.2)$$

con H'' la intersección de BE y GO . Por lo que $GH' = GH''$ de (2.1) y (2.2). Por lo tanto $H' = H''$, y como H' está en la altura desde A y desde B , $H' = H$, es decir, H, G, O son colineales y $\frac{GH}{GO} = \frac{2}{1}$. \square

Definición 2.1.3. *A la línea que tiene a H, G y O se le llama **línea de Euler**.*

2.2. Primera demostración del teorema de la circunferencia de los nueve puntos

La primera demostración tiene como idea principal buscar cuadriláteros cíclicos, para ello daremos un breve repaso de un par de criterios que nos ayudarán a determinar cuándo un cuadrilátero es inscriptible. Además, trabajaremos con un polígono que rara vez encontramos: el trapecio.

Recordemos que un cuadrilátero es *inscriptible* si existe una circunferencia que pasa a través de sus vértices. Algunos de las más conocidas condiciones que deben cumplir son las tres siguientes, cuya demostración puede consultarse en Shively (2013), pp. 25 y 26.

Teorema 2.2.1. *Dado un cuadrilátero $\square ABCD$, es inscriptible si y solo si cualquiera de los siguientes incisos se cumple*

- a) $\angle BAC = \angle BDC$.
- b) $\angle BAD + \angle BCD = \pi$.
- c) $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

La última de las condiciones es el *teorema de Ptolomeo*.

Observación 2.2.2. *Un ejemplo de cuadrilátero inscriptible es el rectángulo, por inciso b) del teorema anterior.*

Definición 2.2.3. *Se dice que $\square ABCD$ es un trapecio isósceles si y solo si un par de lados opuestos son paralelos y el otro par de igual magnitud, pero no paralelos.*

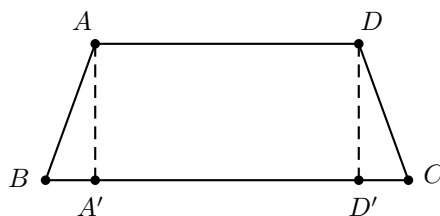


Figura 2.3:

Lema 2.2.4. *En un trapecio isósceles sus ángulos opuestos son suplementarios.*

Demostración. Sea $\square ABCD$ el trapecio isósceles con $AB = CD$. Como las rectas BC y DA son paralelas ($BC \parallel DA$), entonces $\square AA'DD'$ es un rectángulo, donde A' , D' son pies de perpendicular desde A y D , respectivamente. Por lo tanto $AA' = DD'$, y como $AB = CD$ y el ángulo en A' y en D' son rectos, entonces $\triangle ABA' \cong \triangle DD'C$, por lo que $\angle ABC = \angle BCD$.

Finalmente, como $BC \parallel DA$, se tiene que $\angle BAD$ y $\angle ABC = \angle BCD$ son ángulos suplementarios. \square

Observación 2.2.5. *Este lema nos da otro ejemplo de cuadrilátero inscriptible: el trapecio isósceles, como consecuencia del inciso b) del teorema 2.2.1.*

Teorema 2.2.6 (Circunferencia de los nueve puntos). *Dado un triángulo $\triangle ABC$, si D, E, F son los pies de alturas; L, M, N los puntos medios de los lados; H el ortocentro, y P, Q, R los puntos medios de AH, BH, CH , entonces estos nueve puntos están sobre una misma circunferencia.*

Demostración. La idea de esta demostración es, por cuaternas de puntos, ver que son concíclicos. Para esto se demostrará que forman un trapecio isósceles, un caso particular de un cuadrilátero inscriptible.

Por el primer teorema de Tales aplicado a $\triangle ABC$, se tiene que $NM \parallel BC$, por lo que $NM \parallel DL$. Como $\triangle ABD$ es rectángulo, al considerar la circunferencia de diámetro AB , entonces D está sobre dicha circunferencia de centro el punto medio de AB , así, $AN = NB = ND$. Por el primer teorema de Tales, $ML = \frac{1}{2}AB$, por lo tanto $ML = AN = ND$. Con esto tenemos que $\square NMLD$ es un trapecio isósceles, por lo que, es un cuadrilátero inscriptible.

Análogamente $\square MLNF$ y $\square LNME$ son trapecios isósceles, con E, F pies de altura. Por lo tanto N, M, L, D, E, F son concíclicos.

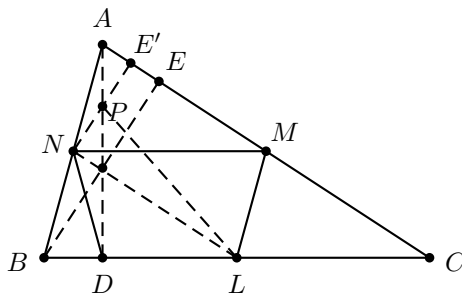


Figura 2.4:

Para los tres puntos restantes, sea P punto medio de AH , con H ortocentro. Sea E' la intersección de NP con CA .

Demostraremos que $\square PNDL$ es inscriptible. Para eso utilizaremos el inciso a) del teorema 2.2.1, por lo que basta ver $\angle PDL = \frac{\pi}{2} = \angle PNL$.

Como N, L son puntos medios en $\triangle ABC$, entonces $NL \parallel AC$. Ya que N, P son puntos medios en $\triangle ABH$, entonces $NE' \parallel BE$. Como BE es altura, entonces BE y AC son perpendiculares, por lo que BE y NL también lo son, es decir, $\angle PNL = \frac{\pi}{2}$. Como D es pie de altura $\angle PDL = \frac{\pi}{2}$. Así, P está sobre la circunferencia. Análogamente los restantes puntos medios de los vértices B, C con el ortocentro. \square

Definición 2.2.7. La circunferencia que pasa por los puntos $L, M, N, D, E, F, P, Q, R$ es la **circunferencia de los nueve puntos** y es denotada como C_9 .

2.3. Segunda demostración del teorema de la circunferencia de los nueve puntos

Esta segunda demostración se basará principalmente en dos teoremas. El primero de ellos trata sobre la relación de las alturas y el triángulo formado por los pies de las alturas⁶. El segundo teorema trata sobre bisectrices, mediatrices, el circuncírculo de un triángulo y cómo todo concurre en algún momento.

Teorema 2.3.1. Las alturas de un triángulo son las bisectrices interiores de su triángulo órtico.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con pies de alturas D, E, F . Como $\angle BFC = \frac{\pi}{2} = \angle BEC$, entonces

$$\angle FEB = \angle FCB, \quad (2.3)$$

por inciso a) del teorema 2.2.1.

Análogamente, como BE y AD son alturas, se tiene que $\square AEDB$ es inscriptible, por lo que

$$\angle BAD = \angle BED. \quad (2.4)$$

⁶A este triángulo se le conoce como triángulo órtico o triángulo pedal de las alturas.

Finalmente, $\square AFDC$ es inscriptible, entonces

$$\angle FAD = \angle FCD. \tag{2.5}$$

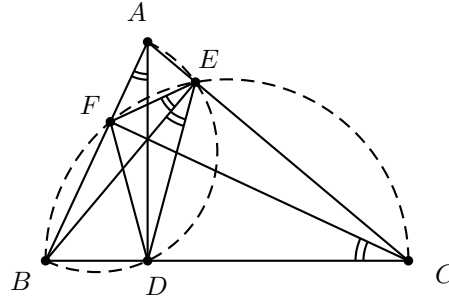


Figura 2.5:

Así, con (2.3), (2.5) y (2.4), se obtiene

$$\angle FEB = \angle FCB = \angle FCD = \angle FAD = \angle BAD = \angle BED.$$

Por lo tanto, la altura BE es bisectriz de $\triangle DEF$ en E . Análogamente AD y CF son bisectrices. \square

Observación 2.3.2. Como los lados son perpendiculares a las alturas, es decir, a las bisectrices interiores de $\triangle DEF$, entonces los lados AB, BC, CA son bisectrices exteriores del triángulo órtico.

Teorema 2.3.3. La mediatriz de un lado de un triángulo interseca a la bisectriz exterior y a la bisectriz interior del vértice opuesto en el circuncírculo del triángulo.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y L el punto medio de BC . Sean U, V las intersecciones de la mediatriz de BC con el circuncírculo. Por lo tanto UV es diámetro y $\angle UAV = \frac{\pi}{2}$.

Como AU, AV son perpendiculares, basta demostrar que una de ellas es bisectriz, por ejemplo, que $\angle BAU = \angle UAC$.

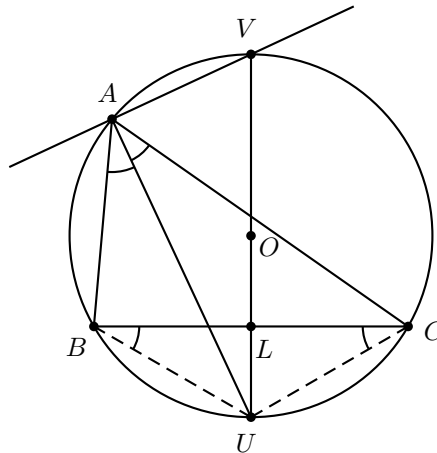


Figura 2.6:

Como $BL = LC$ y $\angle BLU = \frac{\pi}{2} = \angle ULC$, entonces $\triangle BLU \cong \triangle ULC$, por lo que $\angle BCU = \angle CBU$. Por lo tanto, al ser $\square ABUC$ inscrito, se tiene que

$$\angle BAU = \angle BCU = \angle CBU = \angle UAC.$$

Así, AU, AV son bisectrices desde A . \square

Finalmente, el teorema de la circunferencia de los nueve puntos.

Teorema 2.3.4 (Circunferencia de los nueve puntos). *Dado un triángulo $\triangle ABC$, si D, E, F son los pies de alturas; L, M, N los puntos medios de los lados; H el ortocentro, y P, Q, R los puntos medios de AH, BH, CH , entonces estos nueve puntos están sobre una misma circunferencia.*

Demostración. Por teorema 2.3.1 y teorema 2.3.3 para el triángulo $\triangle DEF$, al trazar la mediatriz de DE , esta pasará por los puntos de intersección de las bisectrices AB y CF con el circuncírculo de $\triangle DEF$. Sean N, R esos puntos.

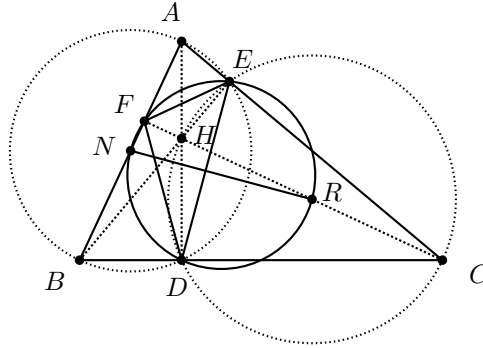


Figura 2.7:

Vamos a probar que el punto medio de AB es N y el punto medio de HC es R .

Como $\angle ADB = \frac{\pi}{2} = \angle AEB$, entonces $\square ABDE$ es inscriptible. Como $\angle HEC + \angle HDC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, se tiene que $\square EHDC$ es inscriptible.

Nótese que DE es cuerda en ambas circunferencias que circunscriben a los cuadriláteros $\square ABDE$ y $\square EHDC$, por lo que el centro de las dos circunferencias están en su mediatriz de DE , es decir, en NR .

Como N está en la mediatriz de DE y en el diámetro AB de la circunferencia que circunscribe a $\square ABDE$, entonces N es el centro de dicha circunferencia. Análogamente, R está en la mediatriz de DE y está en el diámetro HC de la circunferencia que circunscribe a $\square EHDC$, por lo que R es centro de dicha circunferencia. Por lo tanto $AN = NB$, $HR = RC$.

De manera análoga, los otros puntos medios L, M y P, Q son concíclicos con los puntos D, E y F . \square

2.4. Un acercamiento a la circunferencia de los nueve puntos

Como ya sabemos, hay diversas maneras en que podemos caracterizar a una circunferencia, es decir, que conociendo ciertos elementos, existe una única circunferencia que los cumple, por ejemplo, una circunferencia dados tres de sus puntos. Daremos algunas propiedades o características de la circunferencia que, al mismo tiempo, nos ayudarán a definir de otra manera a C_9 y, no solo diferente, sino la forma más elemental que se tiene de definir a una circunferencia: a partir de su centro y su radio.

Si bien algunas propiedades estuvieron ya implícitas en las demostraciones anteriores, vamos a dejarlas en claro en los siguientes resultados.

Proposición 2.4.1. *Sea $\triangle ABC$ con ortocentro H y circuncentro O . Si P es el punto medio de AH , entonces $PH = OL$, con L punto medio de BC .*

Demostración. Sea G el punto mediano de $\triangle ABC$. Al ser AH y OL paralelas, se tiene que $\triangle GHA \sim \triangle GOL$. Por lo que $\frac{HA}{OL} = \frac{GH}{GO} = \frac{2}{1}$, por el teorema 2.1.2. Así, $2PH = AH = 2OL$. \square

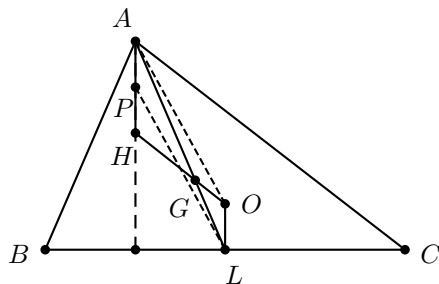


Figura 2.8:

Proposición 2.4.2. $\square APLO$ es un paralelogramo.

Demostración. Esto se debe a que $AP \parallel OL$ y $AP = OL$. \square

Proposición 2.4.3. El segmento PL es diámetro de la circunferencia de los nueve puntos.

Demostración. Esto se debe a que P , L y D son puntos de la circunferencia de los nueve puntos y $\angle PDL$ es recto. \square

Estos resultados estaban ya dentro de las mismas demostraciones del teorema de la circunferencia de los nueve puntos, lo único que hacía falta era clarificarlos. Los siguientes dos teoremas forman la parte central de esta sección.

Teorema 2.4.4. El centro de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio entre el circuncentro y el ortocentro, es decir, en el punto medio del segmento que determina la línea de Euler.

Demostración. Sea J el centro de C_9 . Para ver que J está en la línea de Euler basta mostrar que $\angle PJH = \angle LJO$ (ver figura 2.9).

Ya que J es el centro de C_9 y PL su diámetro, entonces $PJ = JL$. Como $AP \parallel OL$, se tiene que $\angle HPA = \angle LOA$. Por proposición 2.4.1 se tiene que $PH = OL$. Por lo tanto $\triangle HPA \cong \triangle LOA$. Así que $\angle APH = \angle ALO$, además de que $AO = HO$. \square

Teorema 2.4.5. El radio de la circunferencia de los nueve puntos es la mitad del radio del circuncírculo.

Demostración. Como PL es diámetro de C_9 y $AO = PL$ por proposiciones 2.4.3 y 2.4.2, entonces el radio del circuncírculo es igual al diámetro de C_9 , es decir, el radio de la circunferencia de los nueve puntos es la mitad del radio del circuncírculo. \square

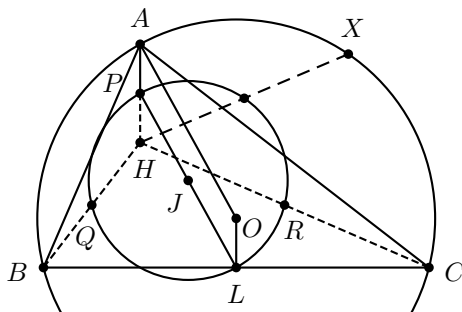


Figura 2.9:

Observación 2.4.6. Notemos que este teorema y el hecho de que P , Q , R son puntos medios de HA , HB , HC , nos da como resultado que el circuncírculo y la circunferencia de los nueve puntos son

homotéticas⁷ con centro de homotecia H y razón 2:1, es decir, que para cualquier punto X sobre el circuncírculo, el punto medio de HX está sobre la circunferencia de los nueve puntos.

2.5. Teorema de Feuerbach

Durante mis años como estudiante en la Facultad de Ciencias, hubo una materia que me impulsó de una manera muy especial, que hizo que diera un paso adelante dentro de las matemáticas, hablo de Geometría Moderna II. Ha sido una de mis clases favoritas, desde mis compañeros de clase, hasta cada uno de los temas del plan de estudios de la materia, sin embargo, existió un resultado en particular, un teorema que me dejó reflexionando desde el momento que escuché de él: el teorema de Feuerbach. Existe algo en su naturaleza que lo hace asombroso, algo que provoca que se gane la categoría de un *bonito teorema*, y estoy seguro que no soy el único a quien le ha sucedido; por ejemplo, J. L. Coolidge⁸ (1929) se pregunta sobre «el teorema más bello en geometría elemental descubierto desde la época de Euclides» (p. 19), al hablar del teorema de Feuerbach. Si bien la cuestión de belleza es algo subjetivo, es innegable que este teorema tiene algo muy especial que llama la atención de todo aquel que guste de la geometría euclidiana.

Teorema (Feuerbach). *La circunferencia de los nueve puntos es tangente al incírculo y a cada uno de los tres excírculos de un triángulo.*

cuya prueba dejaremos para el final de la sección.

Lema 2.5.1. *Sean X, Y, Z puntos de tangencia del incírculo y X', Y', Z' puntos de tangencia del excírculo relativo a A en los lados BC, CA, AB . Si p es el perímetro de $\triangle ABC$, entonces*

a) $AZ = \frac{p}{2} - a.$

b) $AZ' = \frac{p}{2}.$

c) $XL = LX'.$

donde $a = BC, b = CA, c = AB$ y L punto medio de BC .

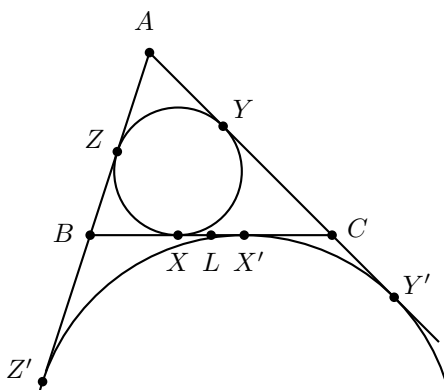


Figura 2.10:

⁷Decimos que dos circunferencias son **homotéticas** si existe un punto H (centro de homotecia) tal que para todo punto P en la primera circunferencia, existe un punto P' en la segunda tal que H, P y P' son colineales y $\frac{HP}{HP'} = k$, con k constante. Puede consultarse Altshiller (2007), p. 38.

⁸Julian Lowell Coolidge (1873-1954), matemático e historiador estadounidense.

Demostración. a) Al ser X, Y, Z puntos de tangencia, $AZ = YA$, $ZB = BX$, $XC = CY$, por lo que

$$\begin{aligned} p &= AB + BC + CA \\ &= AZ + ZB + BX + XC + CY + YA \\ &= 2AZ + 2BX + 2XC. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{p}{2} = AZ + BX + XC = AZ + BC$. Así $AZ = \frac{p}{2} - a$.

b) Como $BX' = BZ'$, $X'C = CY'$, entonces $BC = BX' + X'C = BZ' + CY'$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} p &= AB + BC + AC \\ &= AB + BZ' + CY' + AC \\ &= AZ' + AY'. \end{aligned}$$

Pero al ser AZ' , AY' tangentes al excírculo, $AZ' = AY'$. Por lo tanto $p = 2AZ'$.

c) Como $BX + XL = BL = LC = LX' + X'C$, bastará demostrar que $BX = X'C$.
Por el inciso b), se tiene que

$$X'C = CY' = AY' - AC = \frac{p}{2} - b.$$

Por lo que $X'C = \frac{p}{2} - b = BX$, por inciso a). □

A la mitad del perímetro se le llama **semiperímetro** y se le denota comúnmente con la letra s .

Lema 2.5.2. *Sea c una circunferencia. Sean c_1, c_2 circunferencias tangentes a c , con T_1, T_2 puntos de tangencia, r_1, r_2 sus radios, entonces*

$$t = \frac{T_1 T_2}{r} \sqrt{(r \pm r_1)(r \pm r_2)},$$

donde el signo que acompaña a r_i es positivo si c_i es exterior a c y negativo si es interior. Además, t es la longitud de la tangente⁹ exterior común si c_1, c_2 son ambas exteriores (o interiores), o bien, t es la longitud de la tangente interior común si c_1, c_2 es una exterior y la otra interior.

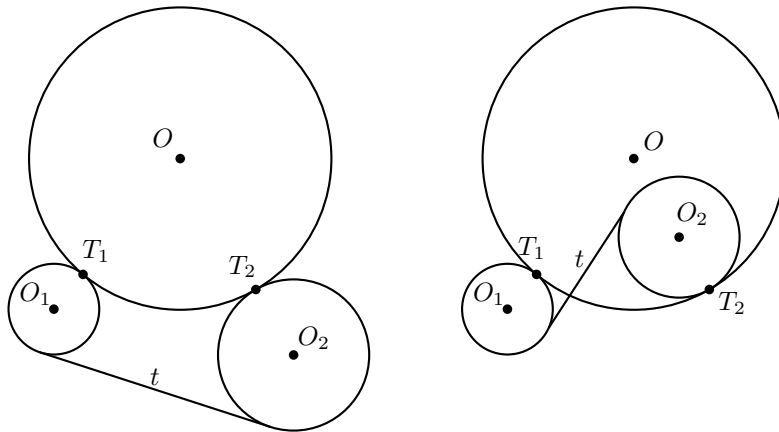


Figura 2.11:

⁹En este texto, cuando decimos *longitud de la tangente*, hacemos referencia a la longitud del segmento comprendido entre los puntos de tangencia de la recta tangente con dos circunferencias, o bien, a la longitud del segmento comprendido entre el punto en cuestión y el punto de tangencia de la recta tangente con una circunferencia (véase figura 2.15).

Demostración. El lema se demostrará para el caso en que las circunferencias tangentes son interiores, los otros casos son análogos.

Sean c_1, c_2 circunferencias tangentes internas a c . Como T_1 es punto de tangencia de c con c_1 , entonces O, O_1, T_1 son colineales. Análogamente O, O_2, T_2 lo son.

Utilizando ley de cosenos en $\triangle OO_1O_2$ tenemos que

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \cos \angle O_1OO_2. \quad (2.6)$$

De manera análoga con $\triangle OT_1T_2$, se obtiene

$$\begin{aligned} T_1T_2^2 &= OT_1^2 + OT_2^2 - 2OT_1 \cdot OT_2 \cos \angle O_1OO_2 \\ &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \angle O_1OO_2 \\ &= 2r^2(1 - \cos \angle O_1OO_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\cos \angle O_1OO_2 = 1 - \frac{T_1T_2^2}{2r^2}$. Por lo que en (2.6) se llega a que

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \left(1 - \frac{T_1T_2^2}{2r^2}\right) \\ &= OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 + 2OO_1 \cdot OO_2 \frac{T_1T_2^2}{2r^2} \\ &= (OO_1 - OO_2)^2 + 2OO_1 \cdot OO_2 \frac{T_1T_2^2}{2r^2} \\ &= ((r - r_1) - (r - r_2))^2 + 2(r - r_1)(r - r_2) \frac{T_1T_2^2}{2r^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$O_1O_2^2 = (r_2 - r_1)^2 + (r - r_1)(r - r_2) \frac{T_1T_2^2}{r^2}. \quad (2.7)$$

Consideremos a la tangente exterior común a las circunferencias c_1, c_2 con sus respectivos puntos de intersección S_1, S_2 .

Vamos a trazar un punto P para generar el rectángulo $\square O_1PS_2S_1$ y con ello tener los pares de lados iguales O_1P, S_1S_2 y O_1S_1, PS_2 .

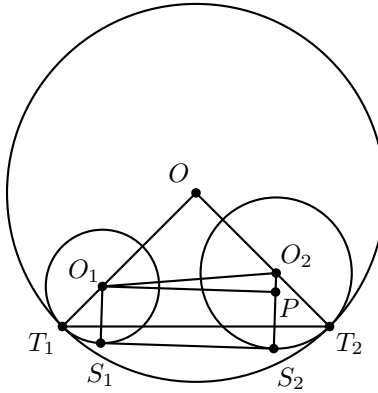


Figura 2.12:

Supongamos que $r_2 > r_1$ y sea P el pie de perpendicular de O_1 hacia O_2S_2 . Utilizando el teorema de Pitágoras en $\triangle O_2O_1P$ se tiene que $O_1O_2^2 = O_1P^2 + PO_2^2$. Por lo tanto

$$O_1O_2^2 = t^2 + (r_2 - PS_2)^2 = t^2 + (r_2 - r_1)^2.$$

Así, utilizando (2.7), se tiene que

$$t^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 - r_1)^2 + (r - r_1)(r - r_2)\frac{T_1T_2^2}{r^2},$$

$$t^2 = (r - r_1)(r - r_2)\frac{T_1T_2^2}{r^2}.$$

Por lo tanto $t = \frac{T_1T_2}{r}\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}$.

Cabe mencionar que si $r_1 = r_2$, entonces $t = O_1O_2$ y la ecuación (2.7) quedaría $t^2 = (r - r_1)^2\frac{T_1T_2^2}{r^2}$, lo que demuestra este caso. □

Notemos que la demostración de este lema también es válida para el caso *degenerado* en que consideremos una circunferencia de radio 0, es decir, si, por ejemplo, la circunferencia c_1 resultara en un solo punto, nos daría como resultado $t = \frac{T_1T_2}{r}\sqrt{r(r - r_2)}$.

El teorema de Casey¹⁰ es una generalización del teorema de Ptolomeo, aunque en vez de cuatro puntos sobre una circunferencia, se trata de cuatro circunferencias tangentes a una.

Teorema 2.5.3 (Casey). *Si cuatro circunferencias c_1, c_2, c_3, c_4 son tangentes a una quinta circunferencia, entonces*

$$t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{24} \pm t_{14}t_{23} = 0,$$

donde t_{ij} es la tangente común de c_i con c_j .

Demostración. En este caso, supondremos que los puntos T_1, T_2, T_3, T_4 están ordenados cíclicamente de esa manera sobre la circunferencia, en este caso demostraremos que $t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} = 0$, es decir, $t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}$.

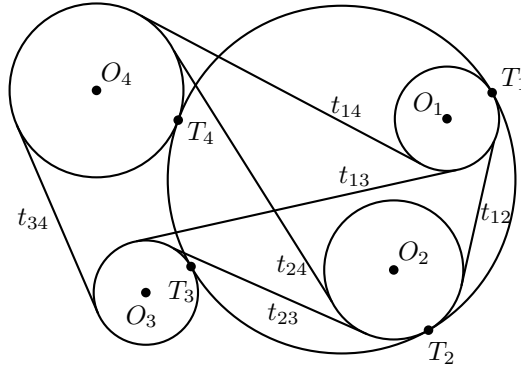


Figura 2.13:

Por el lema anterior se tiene que

$$t_{13}t_{24} = \frac{T_1T_3}{r}\sqrt{(r \pm r_1)(r \pm r_3)} \frac{T_2T_4}{r}\sqrt{(r \pm r_2)(r \pm r_4)}.$$

¹⁰Nombrado así por el matemático irlandés John Casey (1820-1891).

Por lo tanto

$$t_{13}t_{24} = T_1T_3 \cdot T_2T_4 \frac{1}{r^2} \sqrt{(r \pm r_1)(r \pm r_2)(r \pm r_3)(r \pm r_4)}, \quad (2.8)$$

donde los signos de $r \pm r_i$ dependen de la posición de la circunferencia c_i con respecto a c . De igual manera se tiene que

$$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = (T_1T_2 \cdot T_3T_4 + T_1T_4 \cdot T_2T_3) \frac{1}{r^2} \sqrt{(r \pm r_1)(r \pm r_2)(r \pm r_3)(r \pm r_4)}. \quad (2.9)$$

Si queremos que se cumpla la igualdad entre (2.8) y (2.9), bastará que $T_1T_3 \cdot T_2T_4$ y $T_1T_2 \cdot T_3T_4 + T_1T_4 \cdot T_2T_3$ sean iguales.

Como $\square T_1T_2T_3T_4$ es un cuadrilátero inscrito, $T_1T_3 \cdot T_2T_4 = T_1T_2 \cdot T_3T_4 + T_1T_4 \cdot T_2T_3$, por el teorema de Ptolomeo. Por lo tanto

$$t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23},$$

ya que los signos de $r \pm r_i$ son los mismos en ambos lados de la igualdad.

Esto dependió del acomodo de los puntos de tangencia T_i , en caso de que tuvieran un orden diferente daría lugar a las otras combinaciones de signos. \square

Las siguientes proposiciones hablan sobre lugares geométricos, que nos recordarán fácilmente a la circunferencia de Apolonio¹¹.

Proposición 2.5.4. *El lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de las distancias a dos puntos fijos es igual a una constante no negativa, es una circunferencia.*

Demostración. Sean A, B dos puntos dados con M su punto medio. Sea P un punto tal que $PA^2 + PB^2 = \gamma$, con $\gamma > 0$.

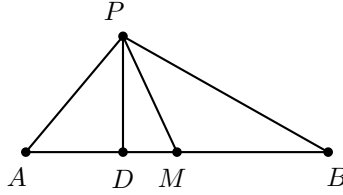


Figura 2.14:

Sea D pie de perpendicular desde P hacia AB . Como $PA^2 = PD^2 + AD^2 = (PM^2 - DM^2) + (AM - DM)^2$ por el teorema de Pitágoras. Por lo que

$$PA^2 = PM^2 - 2AM \cdot DM + AM^2. \quad (2.10)$$

Así mismo

$$PB^2 = (PM^2 - DM^2) + (DM + MB)^2 = PM^2 + 2DM \cdot MB + MB^2. \quad (2.11)$$

Nótese que aún no se ha ocupado que M es punto medio. Por lo tanto

$$PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + AM^2 + MB^2 + 2(DM \cdot MB - AM \cdot DM).$$

Como M es punto medio de AB , entonces $AM = MB$, por lo que

$$\gamma = PA^2 + PB^2 = 2(PM^2 + AM^2),$$

así, $PM^2 = \frac{\gamma}{2} - AM^2$, es decir, PM es una constante. Por lo que, un punto P que cumple las hipótesis es aquel que se encuentra a una distancia constante del punto M , es decir, P es un punto de la circunferencia de radio la constante $\sqrt{\frac{\gamma}{2} - AM^2}$ y centro M . \square

¹¹El lugar geométrico de los puntos cuya razón de las distancias hacia dos puntos fijos es una constante

El siguiente lugar geométrico es una generalización del anterior.

Proposición 2.5.5. *Dados dos puntos A y B , el lugar geométrico de todos los puntos P tales que $\alpha PA^2 + \beta PB^2 = \gamma$, es una circunferencia, con α, β, γ constantes diferentes de cero.*

Demostración. Sea N punto en AB tal que $\frac{AN}{NB} = \frac{\beta}{\alpha}$ y D el pie de perpendicular de P hacia AB . Análogamente a (2.10) y (2.11) obtenemos

$$\begin{aligned} PA^2 &= PN^2 + AN^2 - 2DN \cdot AN, \\ PB^2 &= PN^2 + NB^2 + 2DN \cdot NB, \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 = (\alpha + \beta)PN^2 + \alpha AN^2 + \beta NB^2 + 2DN(\beta NB - \alpha AN).$$

Como $\frac{AN}{NB} = \frac{\beta}{\alpha}$, entonces $\alpha AN = \beta NB$, por lo que

$$\gamma = (\alpha + \beta)PN^2 + \alpha AN^2 + \beta NB^2.$$

Así, $PN^2 = \frac{1}{\alpha + \beta}(\gamma - \alpha AN^2 - \beta NB^2)$, es decir, PN es una constante. Por lo que P es un punto de la circunferencia con radio $\sqrt{\frac{1}{\alpha + \beta}(\gamma - \alpha AN^2 - \beta NB^2)}$ y centro N . \square

Proposición 2.5.6. *Dadas dos circunferencias, el lugar geométrico de los puntos cuya razón de las longitudes de sus tangentes a las circunferencias es constante, es una circunferencia de centro colineal a los centros de las dos dadas.*

Demostración. Sean c_1, c_2 las circunferencias dadas con centro O_1, O_2 ; respectivamente. Sea P un punto cuyas longitudes de sus tangentes hacia c_1, c_2 sean t_{P1}, t_{P2} , tales que $\frac{t_{P1}}{t_{P2}} = \lambda$, con λ constante.

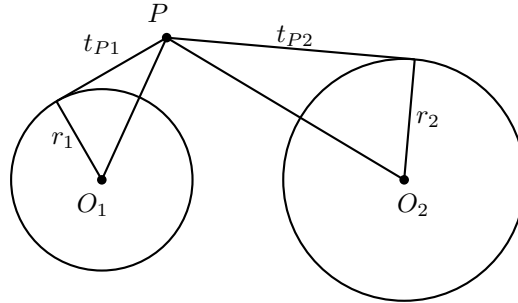


Figura 2.15:

Como $t_{P1}^2 = PO_1^2 - r_1^2$ y $t_{P2}^2 = PO_2^2 - r_2^2$, entonces

$$\lambda^2 = \frac{t_{P1}^2}{t_{P2}^2} = \frac{PO_1^2 - r_1^2}{PO_2^2 - r_2^2},$$

con r_1, r_2 radios de c_1, c_2 . Por lo tanto $\lambda^2 PO_2^2 - \lambda^2 r_2^2 = PO_1^2 - r_1^2$, con lo que

$$PO_1^2 - \lambda^2 PO_2^2 = r_1^2 - \lambda^2 r_2^2,$$

donde $r_1^2 - \lambda^2 r_2^2$ es una constante, así, por la proposición 2.5.5, el lugar geométrico de los puntos P es una circunferencia.

La colinealidad de los centros de las tres circunferencias se sigue de que dado un punto P , su reflejado¹² con respecto a la recta O_1O_2 tiene las mismas longitudes a las tangentes que P . \square

¹²Decimos que A' es un punto **reflejado de A con respecto a una recta l** , si A' es la imagen de A bajo la reflexión con eje l .

Dicho sea de paso, si consideramos la tangente común a ambas circunferencias, un punto P sobre ella tal que $\frac{t_{P1}}{t_{P2}} = \lambda$ será el punto que divida al segmento de los puntos de tangencia de la tangente común en la razón λ , ya sea que P esté en el interior o el exterior del segmento de los puntos de tangencia, es decir, el lugar geométrico es una circunferencia que tiene como interior a una de las circunferencias dadas.

Nos acercamos al final del camino hacia el teorema de Feuerbach. Demostraremos un caso particular al inverso del teorema de Casey, donde tres de las cuatro circunferencias son de radio 0, condiciones suficiente para demostrar el teorema de Feuerbach.

Teorema 2.5.7. Sean c_1 una circunferencia y T_2, T_3, T_4 tres puntos diferentes no colineales fuera de ella. Si $t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{24} \pm t_{14}t_{23} = 0$, entonces existe una circunferencia c tangente a c_1 y que pasa por T_2, T_3 y T_4 . Donde t_{ij} es la longitud de la tangente de T_i a c_1 (o la longitud del segmento T_iT_j).

Demostración. Supongamos que $t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}$. Supongamos que T_2 y T_3 no son colineales con el centro de c_1 y sean d_1, d_2 circunferencias tangentes a c_1 y que pasan por T_2 y T_3 . Si T_2 y T_3 fueran colineales con el centro de c_1 , tomamos dos circunferencias e_1, e_2 tangentes a c_1 y que pasan por T_3 y T_4 .

Por la proposición anterior, el lugar geométrico de los puntos T tales que $\frac{t_{25}}{t_{35}}$ es constante es una circunferencia que tiene como punto interior a T_2 o T_3 , con t_{2T} y t_{3T} las longitudes de los segmentos T_2T y T_3T , respectivamente. Es decir, existen puntos en d_1 que cumplen esa razón.

Sean T_5 y T_6 puntos tales que

$$\frac{t_{25}}{t_{35}} = \frac{t_{26}}{t_{36}} = \lambda = \frac{t_{24}}{t_{34}}, \quad (2.12)$$

con T_5 en d_1 y T_6 en d_2 .

Con esto, construimos dos puntos que cumplen las mismas condiciones que T_4 , pero asegurándonos que están sobre alguna de las futuras circunferencias c . Al final lo único que nos quedará hacer es demostrar que T_4 coincide, o bien con T_5 , o con T_6 , es decir, que T_1, T_2, T_3 y T_4 son concíclicos.

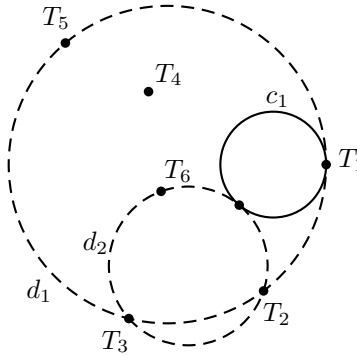


Figura 2.16:

Como $t_{13}t_{24} = t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23}$, entonces $\frac{1}{t_{23}t_{34}}t_{13}t_{24} = \frac{1}{t_{23}t_{34}}(t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23})$. Por lo tanto

$$\frac{t_{13}}{t_{23}} \frac{t_{24}}{t_{34}} - \frac{t_{12}}{t_{23}} = \frac{t_{14}}{t_{34}}. \quad (2.13)$$

Notemos que t_{14}, t_{34} son constantes.

Como T_1, T_2, T_3, T_5 están en d_1 , se tiene que $t_{13}t_{25} = t_{12}t_{35} + t_{15}t_{23}$, entonces, análogamente a (2.13), se tiene que

$$\frac{t_{13}}{t_{23}} \frac{t_{25}}{t_{35}} - \frac{t_{12}}{t_{23}} = \frac{t_{15}}{t_{35}}. \quad (2.14)$$

Así mismo con T_1, T_2, T_3, T_6 en d_2 , obtenemos

$$\frac{t_{13} t_{26}}{t_{23} t_{36}} - \frac{t_{12}}{t_{23}} = \frac{t_{16}}{t_{36}}. \quad (2.15)$$

De (2.13), (2.14), (2.15) y (2.12) tenemos que

$$\mu = \frac{t_{14}}{t_{34}} = \frac{t_{15}}{t_{35}} = \frac{t_{16}}{t_{36}}. \quad (2.16)$$

Donde, tanto λ en (2.12) como μ en (2.16) son constantes, ya que $t_{24}, t_{34}, t_{14}, t_{34}$ lo son.

Por la proposición 2.5.6 y (2.12), sabemos que T_4, T_5, T_6 están en una circunferencia c_λ para el coeficiente λ , por lo que el centro de c_λ es colineal con T_2 y T_3 . Análogamente, por la proposición 2.5.6 y (2.16), los puntos T_4, T_5, T_6 están en una circunferencia c_μ para el coeficiente μ , por lo que el centro de c_μ es colineal con T_3 y el centro de c_1 .

Si T_4 es diferente a T_5 y T_6 , entonces las circunferencias c_λ y c_μ son la misma circunferencia, por lo que el centro de c_1, T_2 y T_3 serían colineales. Por lo tanto $T_4 = T_5$ o $T_4 = T_6$. Así, T_1, T_2, T_3 y T_4 están en d_1 o en d_2 , es decir, son concíclicos. \square

Se puede consultar el caso general de este teorema en Shariguin (1986), demostración que sigue el mismo razonamiento que el aquí presentado más la idea de *dilataciones de circunferencias*¹³.

Llegados a este punto, tenemos listos todos los preparativos para demostrar el teorema de Feuerbach.

Teorema 2.5.8 (Feuerbach). *La circunferencia de los nueve puntos es tangente al incírculo y a los tres excírculos.*

Demostración. Ocuparemos el teorema 2.5.7, por lo que necesitamos tres puntos sobre C_9 y las tangentes desde ellos al incírculo. Estos puntos serán los puntos medios de los lados del triángulo.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo con L, M, N puntos medios de sus lados y X, Y, Z puntos de tangencia del incírculo i .

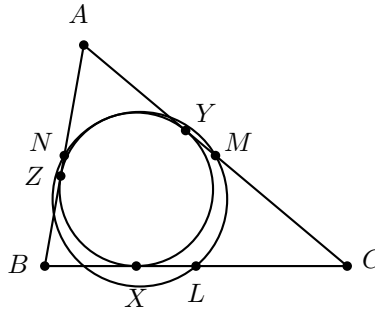


Figura 2.17:

Sean $t_{Li} = LX, t_{Mi} = MY, t_{Ni} = NZ, t_{LM} = LM, t_{MN} = MN, t_{LN} = LN$ tal como en el teorema 2.5.7. Por inciso a) del lema 2.5.1 y al ser N punto medio, obtenemos

$$\begin{aligned} NZ &= AZ - AN \\ &= \left(\frac{p}{2} - a\right) - \frac{c}{2} \\ &= \frac{a + b + c}{2} - a - \frac{c}{2} \\ &= \frac{b - a}{2}, \end{aligned}$$

¹³Sean a, b dos circunferencias de radios r_a y r_b con $r_a < r_b$. La dilatación consiste en considerar nuevas circunferencias a', b' de radios 0 y $r_b - r_a$.

con $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Análogamente $MY = \frac{c-a}{2}$, $LX = \frac{c-b}{2}$. Por lo que

$$\begin{aligned} t_{LM}t_{Ni} &= LM \cdot NZ = \frac{c}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right), \\ t_{MN}t_{Li} &= MN \cdot LX = \frac{a}{2} \left(\frac{c-b}{2} \right), \\ t_{LN}t_{Mi} &= LN \cdot MY = \frac{b}{2} \left(\frac{c-a}{2} \right). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} t_{LM}t_{Ni} + t_{MN}t_{Li} &= \frac{c}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{c-b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4}(bc - ac + ac - ab) \\ &= \frac{1}{4}(b(c-a)) \\ &= \frac{b}{2} \left(\frac{c-a}{2} \right), \end{aligned}$$

con lo que $t_{LM}t_{Ni} + t_{MN}t_{Li} = t_{LN}t_{Mi}$. Por lo tanto el incírculo es tangente a la circunferencia de los nueve puntos, por teorema 2.5.7.

Solo falta la tangencia con los excírculos. Para esto ocuparemos el excírculo tangente a BC internamente.

Sean X' , Y' , Z' los puntos de tangencia del excírculo e .

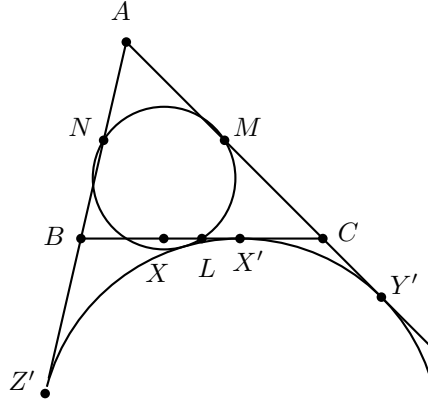


Figura 2.18:

Sean $t_{Le} = LX'$, $t_{Me} = MY'$, $t_{Ne} = NZ'$, $t_{LM} = LM$, $t_{MN} = MN$, $t_{LN} = LN$ tal como en el teorema 2.5.7. Por inciso b) del lema 2.5.1, se tiene que

$$NZ' = AZ' - AN = \frac{p}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Análogamente $MY' = \frac{a+c}{2}$. Además, por inciso c) del lema 2.5.1, se obtiene que $LX' = LX = \frac{c-b}{2}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} t_{LM}t_{Ne} &= LM \cdot NZ' = \frac{c}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right), \\ t_{MN}t_{Le} &= MN \cdot LX' = \frac{a}{2} \left(\frac{c-b}{2} \right), \\ t_{LN}t_{Me} &= LN \cdot MY' = \frac{b}{2} \left(\frac{a+c}{2} \right). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} t_{LN}t_{Me} + t_{MN}t_{Le} &= \frac{b}{2} \left(\frac{a+c}{2} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{c-b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4}(ab + bc + ac - ab) \\ &= \frac{b}{2} \left(\frac{c-a}{2} \right), \end{aligned}$$

con lo que $t_{LN}t_{Me} + t_{MN}t_{Le} = t_{LM}t_{Ne}$. Por lo tanto el excírculo es tangente a la circunferencia de los nueve puntos, por teorema 2.5.7. \square

Con esto terminamos el capítulo, en el que abordamos algunos conceptos elementales sobre esta muy particular circunferencia que, conforme uno se va adentrando más y más en el tema, se da cuenta que hay mucho más por descubrir.

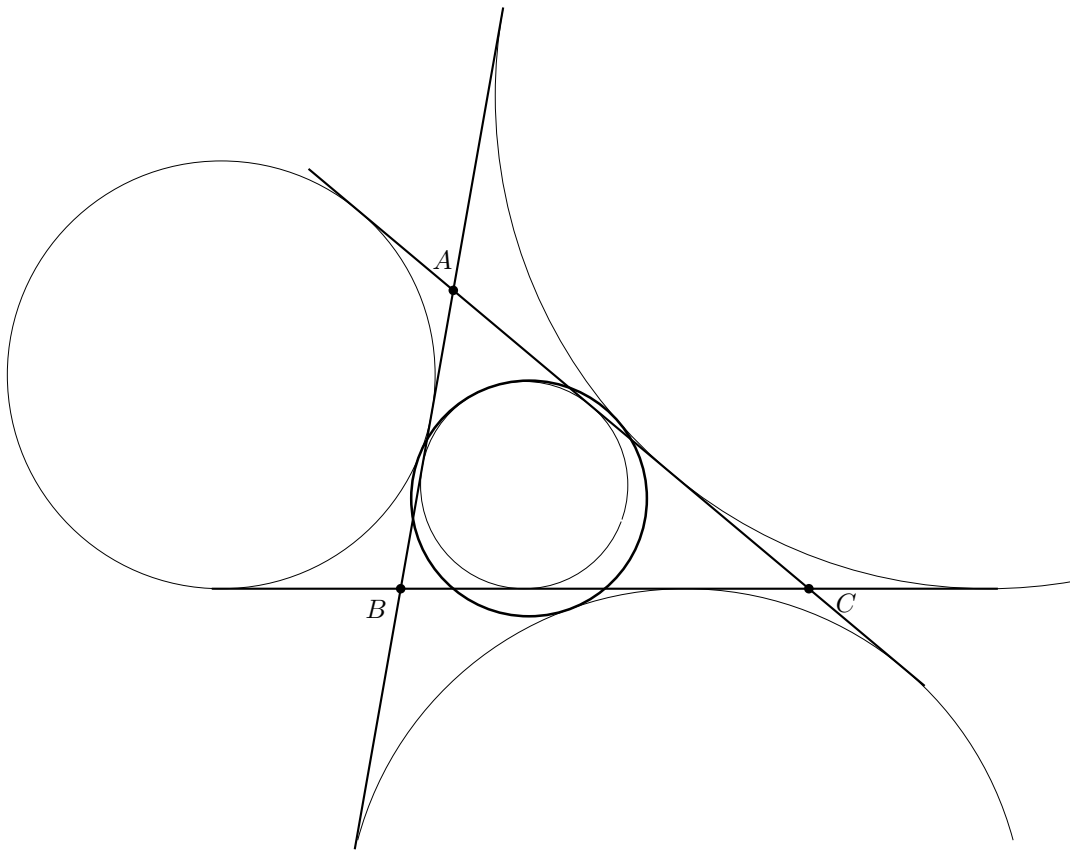


Figura 2.19: Teorema de Feuerbach

Capítulo 3

Teorema de Simson-Wallace

En las matemáticas, existe una gran cantidad de resultados que, debido a su trascendencia, llevan el nombre de quien los planteó, en ocasiones de alguien a quien se le atribuye el resultado o simplemente de quien lo popularizó. En ocasiones se vuelve incierto su origen, sobre todo cuando hablamos de teoremas antiguos en los cuales es difícil seguir su origen.

Hablamos en el capítulo pasado de algunos posibles orígenes de la circunferencia de los nueve puntos, ahora toca el turno de la línea de Simson-Wallace.

J. S. MacKay¹ (1890), busca la procedencia del teorema de Simson-Wallace y escribe sobre los dos posibles autores del teorema. El primero de ellos es Wallace² quien, en 1799, publicó en *Mathematical Repository* dicho resultado. El segundo es Simson³ cuyo nombre como autor del teorema surge por primera vez en *Annales de mathématiques purés et appliquées*, donde Francois-Joseph Servois menciona creer que el teorema se debe a Simson, aunque no se encontrase algún documento que lo respalde.

A veces la historia no recompensa o da crédito a quien lo merece, puede que este sea uno de esos casos. No se trata de desacreditar a Simson, sino de dar crédito a Wallace, ya que, si bien es cierto que el teorema es conocido como *teorema de Simson-Wallace*, hay quien lo conoce únicamente como *teorema de Simson*. En este texto, trataremos de seguir este camino y nombrarlo como Simson-Wallace.

Este capítulo está dividido en tres secciones. La primera de ellas estará centrada en la demostración del teorema de Simson-Wallace. La segunda y la tercera, en el desarrollo de algunos resultados que se derivan de esta recta.

3.1. Demostración del teorema de Simson-Wallace

Antes de demostrar el teorema de Simson-Wallace, cabe mencionar que el teorema, aunque usualmente es solo una *implicación* (la que da como resultado la colinealidad de los pies de perpendicular), en este caso lo enunciaremos como una doble implicación.

Teorema 3.1.1 (Simson-Wallace). *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y P un punto con X, Y, Z sus pies perpendiculares a los lados AB, BC y CA , entonces P está en el circuncírculo si y solo si X, Y, Z son colineales.*

Demostración. Como $\angle PXC = \angle PYC = \frac{\pi}{2} = \angle PYA = \angle PZA$, se tiene que $\square PYXC, \square PZAY, \square PZBX$ son cíclicos. Así, por $\square PYXC$

$$\angle CYX = \angle CPX. \tag{3.1}$$

¹John Sturgeon MacKay (1843-1914), matemático escocés.

²William Wallace (1768-1846), matemático escocés.

³Robert Simson (1687-1768), matemático escocés.

Por $\square PZAY$

$$\angle ZPA = \angle ZYA. \quad (3.2)$$

Y por $\square PZBX$

$$\angle ABC + \angle XPZ = \pi. \quad (3.3)$$

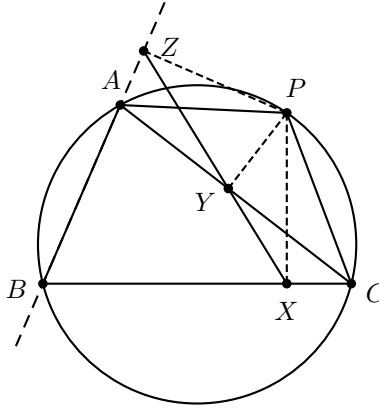


Figura 3.1:

Para la primera implicación vamos a tomar un punto P sobre el circuncírculo y demostraremos que $\angle CYX$, $\angle ZYA$ son ángulos opuestos por el vértice.

Por (3.3) y como P está en o , se tiene que

$$\angle CPA + \angle ABC = \pi = \angle ABC + \angle XPZ.$$

Por lo que $\angle CPA = \angle XPZ$. Así

$$\angle CPX = \angle ZPA.$$

Finalmente, por (3.1) y (3.2) se obtiene $\angle CYX = \angle CPX = \angle ZPA = \angle ZYA$. Con lo que X, Y, Z son colineales.

Para el recíproco vamos a ver que el cuadrilátero $\square ABCP$ es inscriptible.

Como X, Y, Z son colineales, entonces $\angle CYX = \angle ZYA$. Por (3.1) y (3.2), se tiene que

$$\angle CPX = \angle ZPA.$$

Así, $\angle CPA = \angle XPZ$. Y como $\square PZBX$ es cíclico, $\square ABCP$ lo es, es decir, P está en el circuncírculo. \square

Definición 3.1.2. La línea XYZ se llama la **línea de Simson-Wallace** de P con respecto a $\triangle ABC$.

3.2. Primer acercamiento a la línea de Simson-Wallace

En esta sección trabajaremos con teoremas que resultan del teorema de Simson-Wallace, siendo el siguiente esencial en lo que resta de camino.

Teorema 3.2.1. Sea ABC un triángulo y P un punto en su circuncírculo. Si la perpendicular a BC desde P vuelve a intersectar al circuncírculo en P' , entonces AP' es paralela a la línea de Simson-Wallace del punto P .

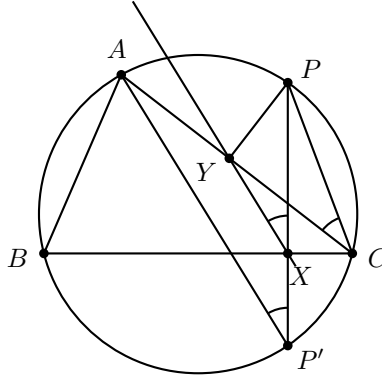


Figura 3.2:

Demostración. Sean X, Y los pies de perpendiculares desde P a BC, CA , respectivamente. Por lo tanto $\square PYXC$ es cíclico. Por lo que

$$\angle PXY = \angle PCY = \angle PCA.$$

Además

$$\angle PCA = \angle PP'A.$$

Por lo tanto $\angle PXY = \angle PP'A$, es decir, AP' es paralela a la línea de Simson del punto P . \square

La importancia de este teorema se debe a la facilidad al encontrar la dirección de la línea de Simson, sin necesidad de recurrir directamente a dos o tres pies de perpendicular.

El siguiente teorema es uno de los más importantes cuando trabajamos con la línea de Simson-Wallace, ya que proporciona una manera de ver cómo se relacionan dos líneas de Simson a partir de los puntos que las generan.

Teorema 3.2.2. Sean P, Q dos puntos en el circuncírculo de $\triangle ABC$. Si α es el ángulo formado entre las líneas de Simson de P y Q entonces el ángulo α depende únicamente de P y Q . Más aún, $\alpha = \frac{1}{2}\angle POQ$, con O el centro del circuncírculo.

Demostración. Sean P', Q' las respectivas intersecciones del circuncírculo con las perpendiculares desde P, Q a BC . Así

$$\angle P'AQ' = \alpha, \tag{3.4}$$

por teorema 3.2.1.

Como el ángulo central $\angle POQ$ es el doble que el inscrito $\angle PP'Q$, se tiene que

$$\angle POQ = 2\angle PP'Q = 2\angle P'QQ' = 2\angle P'AQ' = 2\alpha,$$

por (3.4) y por ser PP' paralela a QQ' . \square

Corolario 3.2.3. Si dos puntos son diametralmente opuestos, sus líneas de Simson-Wallace son perpendiculares.

Otra de las consecuencias directas del teorema 3.2.2 es el siguiente corolario.

Corolario 3.2.4. Para cualesquiera dos puntos distintos P y Q en el circuncírculo de $\triangle ABC$, sus líneas de Simson no son paralelas.

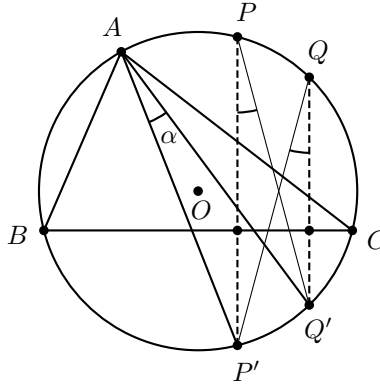


Figura 3.3:

El hecho de que un punto P tenga asociado una recta, da pie a pensar en funciones. Pensemos por un momento en la función donde un punto P sobre el circuncírculo va a su recta de Simson-Wallace, o bien, en la función que manda el punto P al ángulo de inclinación de su línea de Simson-Wallace. Con esto tendríamos una función con dominio los puntos del circuncírculo y contradominio $[0, \pi)$. Así, el corolario 3.2.4 nos da la inyectividad de dicha función. La suprayectividad parece un poco más complicada, ya que implicaría que las líneas de Simson-Wallace adquieren cualquier inclinación al momento de mover el punto P sobre el circuncírculo; imaginar de qué manera se van moviendo las líneas de Simson-Wallace conforme movemos P , es precisamente la finalidad de este trabajo.

3.3. Segundo acercamiento a la línea de Simson-Wallace

Al igual que en la sección anterior, tendremos algunos resultados sencillos derivados del teorema de Simson-Wallace. Comencemos con el siguiente lema.

Lema 3.3.1. *Si K es la intersección del circuncírculo de $\triangle ABC$ y la perpendicular desde A a BC , entonces HK es bisecado por BC , con H el ortocentro de $\triangle ABC$.*

Demostración. Sean D el pie de perpendicular a BC desde A y F el de AB desde C . Como $\triangle FAH$ y $\triangle DCH$ son rectángulos y $\angle FHA = \angle DHC$, entonces

$$\angle FAH = \angle DCH. \quad (3.5)$$

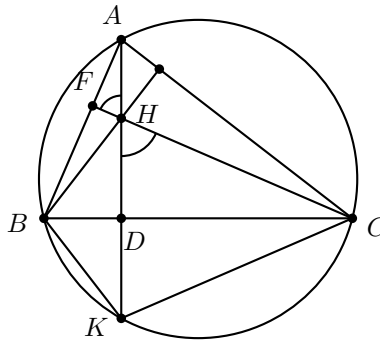


Figura 3.4:

Ya que $\angle BAK$ y $\angle BCK$ subtenden el mismo arco, se tiene que

$$\angle FAH = \angle DCK. \quad (3.6)$$

Así, de (3.5) y (3.6) se obtiene que $\angle DCH = \angle DCK$ y como $\triangle DCH, \triangle DCK$ son rectángulos, entonces son congruentes, en particular $HD = DK$. \square

Teorema 3.3.2. *Si H es el ortocentro de $\triangle ABC$ entonces la línea de Simson de P biseca a PH .*

Demostración. Sean X, Y los pies de perpendiculares desde P a BC, CA , respectivamente. Sea U la intersección de PK y BC . Por lo tanto $\triangle HUK$ es isósceles, por el lema anterior y el hecho de que DU y HK son perpendiculares. Por lo que

$$\angle DHU = \angle DKU = \angle AKP. \quad (3.7)$$

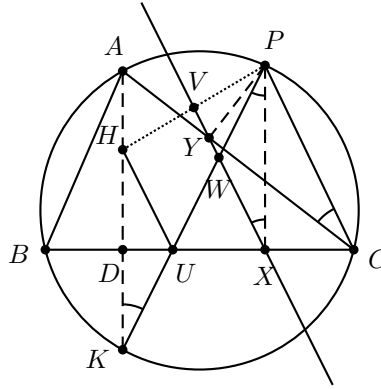


Figura 3.5:

Como $\square PYXC$ es inscriptible, $\angle YXP = \angle YCP = \angle ACP$. Ya que $\angle AKP$ y $\angle ACP$ subtienen el mismo arco, se tiene que

$$\angle YXP = \angle DKU, \quad (3.8)$$

así, $\angle YXP = \angle KHU$ por (3.7). Por lo tanto HU es paralela a la línea de Simson de P al ser AK y PX paralelas entre sí.

Recordemos que lo que se quiere demostrar es que la línea de Simson XY biseca al segmento HP .

Sean V, W las respectivas intersecciones de la línea de Simson con PH, PK . Como $\angle DUK$ y $\angle DKU$ son complementarios, al igual que $\angle UXW$ y $\angle WXP$, entonces

$$\angle DUK = \angle UXW, \quad (3.9)$$

por (3.8). Como $\angle DUK, \angle WUX$ son opuestos por el vértice, entonces $\triangle WUX$ es isósceles.

Análogamente, al ser $\angle DUK$ y $\angle DKU$ complementarios y $\angle PUX$ y $\angle UPX$ también, entonces $\angle DKU = \angle UPX$, por lo tanto $\triangle WXP$ es isósceles por (3.8). Así que $UW = WX = WP$. Finalmente, como la línea de Simson y HU son paralelas, y al ser W punto medio de PU , por el primer teorema de Tales, se tiene que V es punto medio de PH . \square

Como se recordará del capítulo pasado, por la observación 2.4.6, el punto V forma parte de la circunferencia de los nueve puntos. Así que dada una línea de Simson-Wallace, esta siempre va a ser secante (o tangente) a la circunferencia de los nueve puntos, y lo es en el punto medio del segmento HP . Esta idea se retoma en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo o su circuncírculo y P, P' dos puntos diametralmente opuestos sobre o. Si p, p' son las respectivas líneas de Simson desde P, P' , entonces p, p' son perpendiculares. Además, p, p' se intersecan sobre la circunferencia de los nueve puntos.*

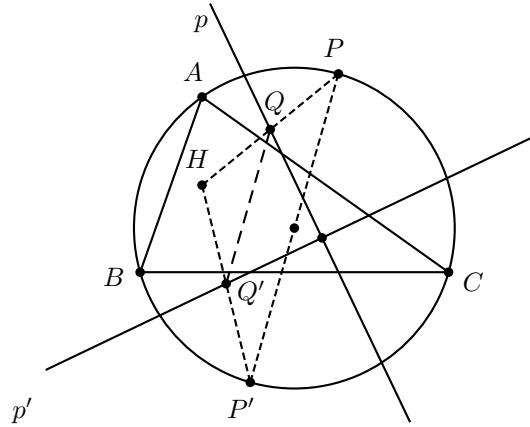


Figura 3.6:

Demostración. La primera parte es inmediata del teorema 3.2.2.

Sean Q, Q' los puntos medios de HP, HP' , respectivamente. Por lo tanto, Q y Q' están sobre C_9 , por observación 2.4.6.

Demostraremos que QQ' es diámetro de C_9 .

Como $2HQ = HP, 2HQ' = HP'$, entonces $\triangle PHP' \sim \triangle QHQ'$ en razón 1:2, en particular $2QQ' = PP'$, por lo tanto QQ' es diámetro de la circunferencia de los nueve puntos por teorema 2.4.5, ya que pasa por los puntos medios de HP, HP' . Ya que las rectas p y p' forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, entonces el punto de intersección de p con p' está sobre C_9 . \square

En otras palabras, el teorema nos dice que las intersecciones de los pares de líneas de Simson-Wallace de los puntos diametralmente opuestos *dibujan* la circunferencia de los nueve puntos al moverse el punto P sobre el circuncírculo.

Los siguientes resultados son consecuencia directa de los anteriores.

Teorema 3.3.4. *Sea P un punto dado y X', Y', Z' los respectivos puntos reflejados de P con respecto a los lados del $\triangle ABC$, entonces P está en el circuncírculo de $\triangle ABC$ si y solo si X', Y', Z' son colineales.*

Demostración. Como X' es el reflejado de P con respecto al lado BC , entonces el pie de perpendicular X es el punto medio de PX' , análogamente con Y, Z puntos medios de PY', PZ' . Por lo que si X, Y, Z son colineales, entonces X', Y', Z' también lo son, por el primer teorema de Tales; y viceversa. Así que este teorema es consecuencia directa del teorema de Simson-Wallace. \square

Definición 3.3.5. *A la línea $X'Y'Z'$ se le llama **línea de Steiner**.*

Notemos que la línea de Steiner y la de Simson-Wallace son paralelas.

Corolario 3.3.6. *Para cualquier punto P en el circuncírculo de $\triangle ABC$, línea de Steiner pasa por el ortocentro.*

Demostración. Basta utilizar el teorema 3.3.2 y que los pies de perpendiculares son puntos medios de los segmentos PX', PY', PZ' . \square

El último de los teoremas de este capítulo será uno que tiene su propio nombre: *teorema de Miquel*⁴. Existen otros resultados que también llevan el nombre de este matemático, por lo que a este teorema se le suele denominar como *primer teorema de Miquel*.

⁴Auguste Miquel (1816-1851), matemático francés.

Teorema 3.3.7. *Dado un cuadrilátero completo⁵, existen cuatro circunferencias que pasan por tres de los vértices cada una de tal manera que las cuatro son concurrentes en un punto.*

Demostración. Sean p, q, r, s los lados del cuadrilátero. Sean A_1, A_2, A_3 las intersecciones de p con q, r, s , respectivamente. Sean A_4, A_5 las intersecciones de q con r, s , respectivamente. Sea A_6 la intersección de r con s .

Para demostrar el teorema vamos a proponer a los triángulos $\triangle A_2A_3A_6$, $\triangle A_5A_6A_4$, $\triangle A_1A_3A_5$, $\triangle A_1A_2A_4$ y ver que para estos sus circuncírculos son los que tienen un punto común.

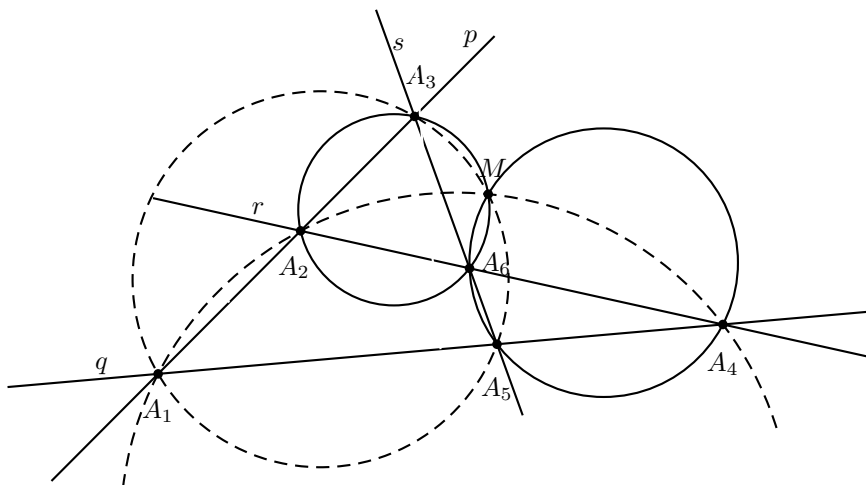


Figura 3.7:

Considerando los circuncírculos de $\triangle A_2A_3A_6$, $\triangle A_5A_6A_4$ tienen a A_6 en común, por lo que hay una segunda intersección M , ya que las rectas no son paralelas por pares.

Sean P, Q, R, S los pies de perpendiculares a p, q, r, s , respectivamente, desde M . Por teorema de Simson-Wallace, P, R, S son colineales y Q, R, S también, pues M está en ambos circuncírculos. Por lo que P, Q, R, S son colineales. Así, M está en los otros dos circuncírculos. \square

El punto M es llamado *punto de Miquel* de p, q, r, s .

⁵Un **cuadrilátero completo** es aquella figura formada por cuatro rectas todas concurrentes por pares y no concurrentes por tercias.

Capítulo 4

Circunferencia como generatriz: cicloide, hipocicloide y epicicloide

En este capítulo se presentarán, a manera de introducción, la cicloide, hipocicloide y epicicloide con un enfoque sintético. Comencemos con la *cicloide*.

4.1. Cicloide, tautócrona o braquistócrona

La cicloide es conocida también con el nombre de tautócrona¹ debido a la propiedad física que posee: el tiempo en que un cuerpo recorre esta curva hasta su punto mínimo, bajo la única acción de la gravedad, sin importar su altura inicial en ella es siempre el mismo.

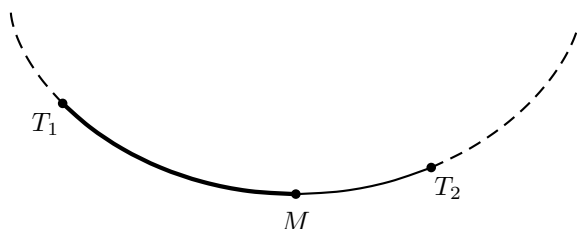


Figura 4.1: Tautócrona

Consideremos la curva con punto mínimo M y dos cuerpos que inician su recorrido en ella desde los puntos T_1 , T_2 , entonces el tiempo que le tomará el cuerpo en T_1 para llegar a M es el mismo que el que hará el punto en T_2 para llegar a M .

Esta propiedad de la cicloide fue demostrada en 1673 por Huygens² en *Horologium oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae* y una de sus principales motivaciones de estudio fue la medición del tiempo. En esta época, los relojes eran aquellos de péndulo (circular simple), cuya exactitud se basa en el periodo de oscilación del péndulo, es decir, en el tiempo en que tarda en realizar un *recorrido completo*. Este periodo de oscilación depende directamente de su amplitud de oscilación, es decir, qué tanto se desplaza horizontalmente, por lo que cualquier movimiento en el mecanismo terminaría por alterar su periodo de oscilación y con ello hacer variar su medición de tiempo. Es así que, con la tautócrona, se comenzó a desarrollar un modelo de reloj de péndulo cicloidal que teóricamente funcionaba bien, sin embargo, en la práctica tenía varios problemas.

¹Del griego *tautos* 'el mismo' y *cronos* 'tiempo'.

²Christiaan Huygens (1629-1695), astrónomo y matemático holandés.

La cicloide también posee el nombre de braquistócrona³, cuyo origen se remonta a la última década del siglo XVII, cuando la reciente creación del cálculo, con los *métodos diferenciales* de Leibniz, revolucionó la forma de enfrentarse a los problemas en matemáticas. Entre los seguidores de esta naciente rama de las matemáticas se encontraba Johann Bernoulli quien lanzó un par de retos a la comunidad matemática del momento, uno de ellos durante 1696, en *Acta Eruditorum*:

Encontrar la curva que une a dos puntos en un mismo plano, pero en diferentes alturas, de tal manera que un cuerpo que rueda por única acción de la gravedad sobre dicha curva haga que el cuerpo realice el menor tiempo posible de un punto a otro.

Dando un primer plazo de medio año, y una prórroga de medio año más, para encontrar la solución a dicho reto. Transcurrido el tiempo, solo tres soluciones se habían recibido: una del propio Johann Bernoulli, la segunda de su hermano Jacob Bernoulli y la tercera de Leibniz. Las tres con justificaciones basadas en el trabajo de los *métodos diferenciales* de Leibniz.

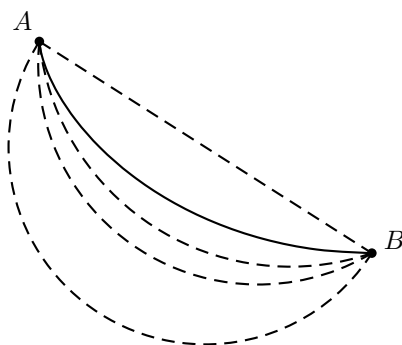


Figura 4.2: Braquistócrona

Cabe mencionar que, décadas atrás, este problema fue estudiado por Galileo Galilei quien dio una aproximación al problema con una media circunferencia.

Después de un poco de la historia de la cicloide, veamos la definición que utilizaremos.

Definición 4.1.1. La **cicloide** es la curva descrita por la trayectoria de un punto fijo sobre una circunferencia llamada **generatriz** que rueda sin resbalar sobre una recta llamada **directriz**.

El diagrama de tal descripción quedaría de esta manera:

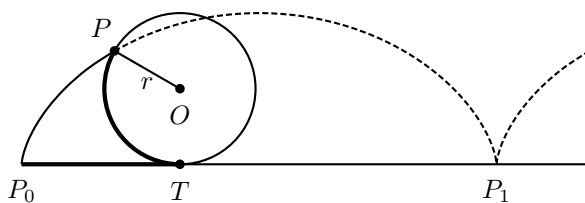


Figura 4.3: Cicloide

La generatriz de la cicloide es una circunferencia tangente a una recta con centro O y radio r , donde el punto que dibuja la curva se va moviendo conforme la circunferencia va avanzando.

Definición 4.1.2. A los puntos P_i de la figura 4.3 se les llama **puntos de retroceso** o **puntos cúspide**.

³Del griego *brachistos* 'el más breve' y *cronos* 'tiempo'.

4.2. Parametrización de la cicloide

En geometría sintética estamos acostumbrados a trabajar con circunferencias y rectas, pero ¿cómo podríamos describir esta curva? La respuesta es *parametrizándola*. Esta curva la representaremos como una función con dominio un número real (que será dado a partir del desplazamiento del centro O) y codominio la curva generada por el punto P . Este método para representar a una curva en el plano (o en \mathbb{R}^n) es a lo que llamamos *parametrización*.

Teorema 4.2.1. *Sea α un ángulo central determinado por A, B puntos sobre la circunferencia, entonces la longitud de arco \widehat{AB} es igual a $r\alpha$, con r el radio de la circunferencia.*

Cuya demostración se puede ver en Delépine (2005). También se puede pensar que si la longitud de arco de un ángulo de 2π (circunferencia completa) es de $2r\pi$, entonces la longitud de arco $\widehat{AB} = \alpha \frac{2\pi}{2r\pi} = r\alpha$.

Para parametrizar la cicloide, si bien no necesitamos tener un sistema coordenado, es más sencillo pensar que estamos en uno. Consideremos un punto P_0 que fungirá como origen y el punto P con coordenadas x, y que dibuja la cicloide.

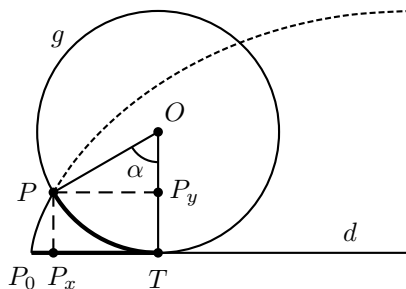


Figura 4.4: Parametrización cicloide

Sea T punto de tangencia de la generatriz g con la directriz d . Por lo que $x = P_0P_x$, $y = TP_y$, con P_x el pie de perpendicular de P hacia P_0T y P_y el pie de perpendicular de P hacia OT .

Notemos que el segmento P_0T y el arco de circunferencia \widehat{PT} miden lo mismo, considerando que P inició en P_0 .

Por lo tanto

$$x = P_0P_x = P_0T - P_xT = \widehat{PT} - P_xT = r\alpha - r \operatorname{sen} \alpha,$$

por el teorema anterior. Además

$$y = TP_y = TO - P_yO = r - r \cos \alpha.$$

Así, las coordenadas del punto P , es decir, la forma de describir la curva, está dada por

$$\begin{aligned} x &= r(\alpha - \operatorname{sen} \alpha), \\ y &= r(1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

O bien, como

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \alpha &\longmapsto (r(\alpha - \operatorname{sen} \alpha), r(1 - \cos \alpha)) \end{aligned}$$

4.3. Tangente de una cicloide: método de Roverbal

Hablar de rectas tangentes a una curva no es poca cosa, durante siglos se han estudiado y poco a poco esto ha llevado a enormes consecuencias. J. L. Coolidge (1929) escribe sobre la historia de las tangentes, una obra que abarca varias épocas en donde se van obteniendo resultados hasta el punto de llegar al inminente inicio del Cálculo.

La primera de estas épocas es de los tiempos de Apolonio y Arquímedes, cuyo trabajo, en parte, estuvo centrado en unas curvas en particular: las cónicas. Apolonio de Perga es un referente, sino es que el mayor, cuando del estudio de cónicas se trata, siendo uno de sus resultados el caracterizar y trazar tangentes a cónicas.

La segunda etapa es una especie de generalización de la anterior, enfocándose en curvas en general. En esta segunda etapa se nos habla sobre Fermat y Descartes, quienes, por cuenta propia, trabajaron en encontrar tangentes a curvas. Fermat presenta en *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* un método geométrico para encontrar una tangente a una parábola, basado en la idea de cantidades infinitamente pequeñas, haciendo que la distancia entre dos puntos de la curva sea *despreciable*. Descartes en *La Géométrie* hace su propio método, pero utilizando las normales a las tangentes, en lugar de directamente a las tangentes.

La tercera etapa trata de Roberval y Torricelli. Siendo Roverbal⁴ en *Obsevationes sur la composition des mouvements* quien propone un método geométrico para encontrar la tangente a la cicloide.

La cuarta nos habla sobre Barrow, quien en *Lectiones Geometricae* hace sus propias mejoras al método propuesto por Fermat, trabajo similar al de Fermat, aunque el de Barrow iba totalmente enfocado a la geometría, este método revolucionaría la manera en que se veía, poniendo un fuerte precedente de lo que posteriormente llevó a la invención del cálculo.

La quinta parte de la obra de Coolidge habla directamente de los inicios del Cálculo con Leibniz y Newton.

Siendo este texto una interesante historia de no solo cómo se fue perfeccionando un método geométrico, sino de los orígenes de un evento que revolucionó las matemáticas; obra que vale la pena su revisión a fondo.

Nosotros nos enfocaremos en buscar la tangente a la cicloide, por lo que utilizaremos el método que propuso Roverbal, que se vale de algunas nociones básicas de mecánica. Este método nos servirá para trazar la tangente a la cicloide desde cualquier punto P sobre ella.

El método de Roverbal depende directamente de la posición de P , por lo que es esencial determinar la posición de P en cualquier momento de su recorrido. Para ello observemos que el recorrido del punto P en la circunferencia generatriz lo podemos descomponer en dos movimientos básicos: uno de traslación y otro de rotación.

El movimiento de traslación lo podemos representar con un vector, el *vector de traslación* que en este caso es paralelo a la directriz; el movimiento de rotación está dado a través del vector tangente en P a la circunferencia, al que se le denomina *vector (de velocidad) tangencial de rotación*.

El movimiento de traslación desde P_0 a T a su vez produce el arco \widehat{PT} que es de la misma longitud, esto significa que tanto el movimiento de traslación como el de rotación poseen magnitudes iguales, por lo que el vector de traslación tendrá la misma magnitud que el de velocidad tangencial de rotación. Y, dado que el movimiento de P está descrito por la suma de ambos movimientos, entonces el vector resultante (suma de ambos vectores) es el vector tangente a la cicloide.

Ya que los dos primeros vectores tienen la misma magnitud y el resultante es la diagonal del paralelogramo formado, se tiene que la tangente es la bisectriz de este paralelogramo.

Conversamente, si una recta es bisectriz del vector de traslación y de velocidad tangencial de rotación, entonces dicha recta es tangente a la cicloide, este es el **método de Roverbal**. Aunque para simplificar este criterio que determina si una recta es tangente a la cicloide, nos vamos a valer de la siguiente definición y teorema, que jugarán un papel muy importante al momento de demostrar uno de los pasos finales en la demostración del teorema de la deltoide de Steiner.

⁴Gilles Personne de Roverbal (1602-1675), matemático francés.

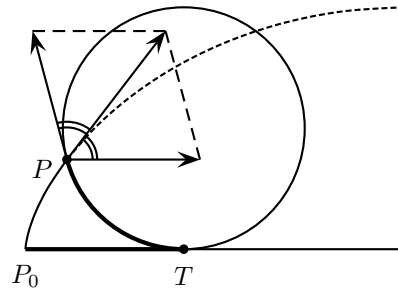


Figura 4.5: Método de Roberval

Definición 4.3.1. En la figura 4.6, el segmento TP es el **radio de rotación instantánea** de P , con T punto de tangencia de la generatriz y la directriz.

Teorema 4.3.2. Una recta es tangente a una cicloide en un punto P si forma un ángulo recto con el radio de rotación instantánea.

Demostración. Sea A sobre la circunferencia tal que AT forme un ángulo recto con PT , por lo que AT es diámetro.

Para demostrar que PA es tangente de la cicloide, hay que considerar las direcciones de los vectores de traslación y de velocidad tangencial de rotación. Las cuales están dadas por la recta paralela a la directriz y la recta tangente en P a la generatriz. Así, basta demostrar que AP es bisectriz de $\angle QPR$, con R punto al que $\angle APR$ es el ángulo semiinscrito de AP y Q la intersección de la circunferencia y la paralela a la tangente en T que pasa por P .

Sea A el punto diametralmente opuesto a T , por lo que PQ y AT son perpendiculares, ya que la directriz es perpendicular a AT .

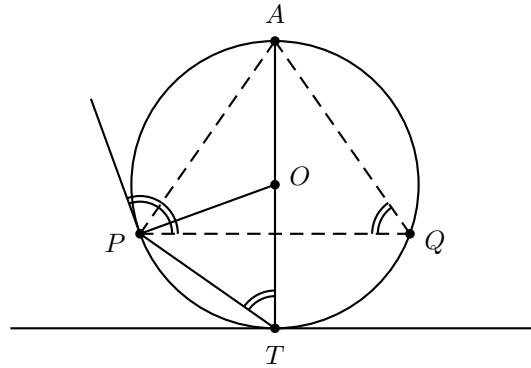


Figura 4.6:

Como $\angle APQ$ y $\angle QPT$ son complementarios, los ángulos $\angle PQA$ y $\angle TAQ$ son complementarios y $\angle QPT = \angle QAT$, entonces

$$\angle APQ = \angle PQA. \tag{4.1}$$

Así, se tiene que $\angle PTA = \angle PQA = \angle APQ$ por (4.1).

Como el ángulo semiinscrito $\angle APR = \angle PTA = \angle APQ$, se tiene que PA es bisectriz del ángulo $\angle QPR$. Por lo tanto PA es tangente a la cicloide, por el método de Roberval. \square

4.4. Hipocicloide y epicloide

Recordemos que una cicloide está generada a partir de una circunferencia que llamamos generatriz y una recta directriz. Para esta sección conservaremos la circunferencia como generatriz, pero cambiaremos de directriz.

Definición 4.4.1. *La hipocicloide es la curva descrita por la trayectoria de un punto fijo sobre una circunferencia generatriz que rueda interiormente sin resbalar sobre una circunferencia directriz.*

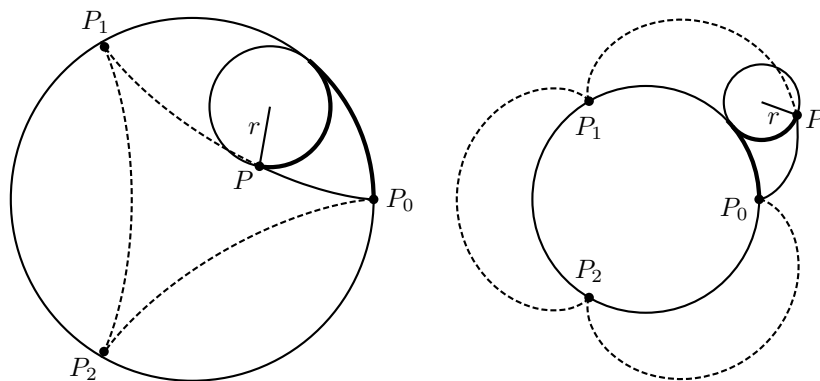


Figura 4.7:

Definición 4.4.2. *La epicloide es la curva descrita por la trayectoria de un punto fijo sobre una circunferencia generatriz que rueda exteriormente sin resbalar sobre una circunferencia directriz.*

Donde podemos ver que la idea de la circunferencia que rueda sin resbalar se mantiene de forma similar, y da lugar a varias opciones interesantes y visualmente atractivas cuando hablamos de la hipocicloide o de la epicloide.

Mientras en la cicloide no importaba el radio de la circunferencia generatriz, aquí será diferente, ya que si queremos construir una hipocicloide de tres picos o *tricúspide*, ¿qué relación deberían de tener la generatriz con la directriz? Ya que la circunferencia interior debe de tener tres cúspides, su perímetro debe de ser de $1/3$ de la circunferencia que lo contiene. El mismo razonamiento aplica para las hipocicloides de los picos que se deseen, por ejemplo, si se desea una hipocicloide de cuatro picos, la razón de sus perímetros debería ser de $1/4$. Y, finalmente, en esta línea de razonamiento, ¿qué sucedería si los perímetros no tuvieran una relación de $1/n$, sino de $2/3$ o $3/4$?, ¿qué sucedería si la razón de sus perímetros ni siquiera fuera un número racional?

Existen casos particulares de hipocicloides y epicloides que, al igual que la cicloide, poseen nombres de acuerdo a sus características, tales como la *deltoide*, *astroide*, *cardioide* o la *nefroide*.

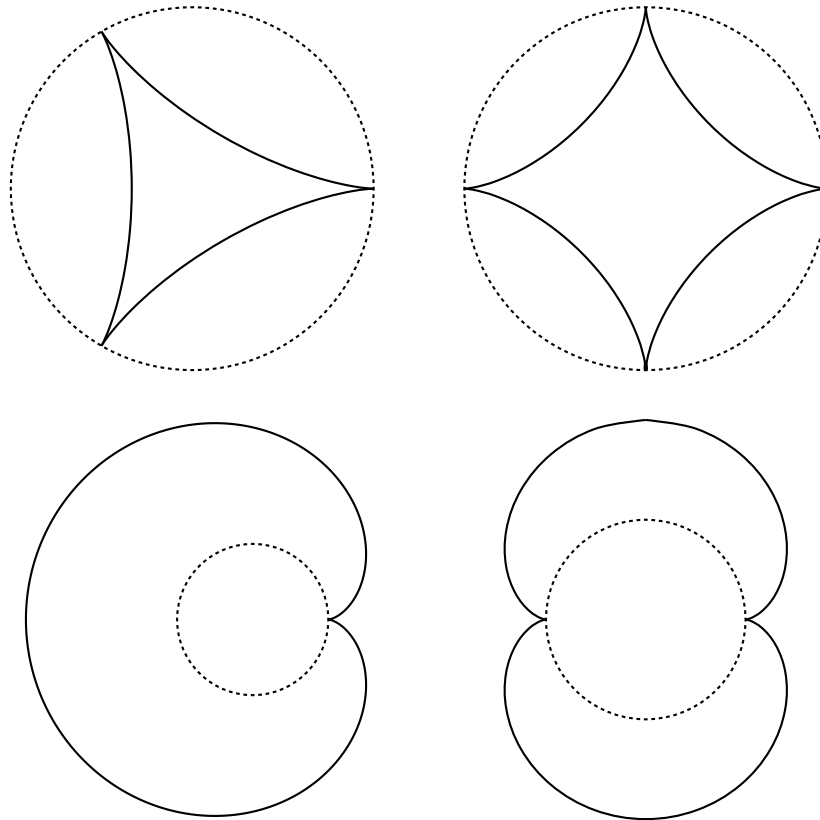


Figura 4.8: De izquierda a derecha y de arriba a abajo: la deltoide, el astroide, la cardioide y la nefroide.

4.5. Parametrización de la hipocicloide y epicloide

Secciones atrás hablamos sobre la forma de representar a la cicloide. La parametrización de la hipocicloide y la epicloide son similares. Iniciemos con la hipocicloide.

Sea R el radio de la circunferencia directriz y r el de la generatriz. Como $\widehat{P_0T} = \widehat{PT}$, entonces $R\beta = r\alpha$, por lo que se obtiene

$$\alpha = \frac{R}{r}\beta. \quad (4.2)$$

En este caso el origen coordenado será O_0 , el centro de la circunferencia directriz, por lo que las coordenadas de P serán $x = O_0P_x$, $y = AP_y$, con A pie de perpendicular de O a O_0P_0 , así como P_x y P_y son pies de perpendiculares desde P a O_0P_0 y a OA respectivamente. Como $\angle O_0OA + \alpha = \pi + \angle POP_y$, entonces $\angle POP_y = \angle O_0OA + \alpha - \pi$. A su vez, $\angle O_0OA = \frac{\pi}{2} - \beta$, por lo que $\angle POP_y = (\frac{\pi}{2} - \beta) + \alpha - \pi = \alpha - \beta - \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= O_0P_x \\ &= O_0A - P_xA \\ &= O_0A - PP_y \\ &= O_0O \cos \beta - r \operatorname{sen} \angle POP_y \\ &= O_0O \cos \beta - r \operatorname{sen}(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}) \\ &= O_0O \cos \beta + r \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Por lo que $x = (R - r) \cos \beta + r \cos(\alpha - \beta) = (R - r) \cos \beta + r \cos(\frac{R}{r}\beta - \beta)$, por (4.2).

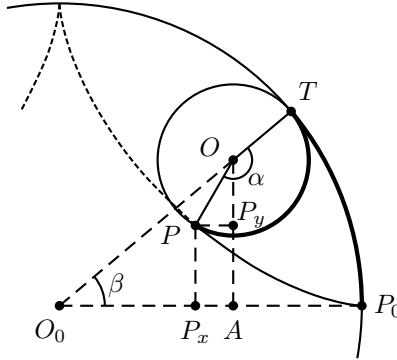


Figura 4.9: Parametrización hipocicloide

Para $y = AP_y$, se tiene que

$$\begin{aligned} y &= AP_y \\ &= OA - OP_y \\ &= O_0O \operatorname{sen} \beta - r \cos(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}) \\ &= O_0O \operatorname{sen} \beta - r \operatorname{sen}(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Por lo tanto $y = (R - r) \operatorname{sen} \beta - r \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (R - r) \operatorname{sen} \beta - r \operatorname{sen}(\frac{R}{r}\beta - \beta)$.

Así, las coordenadas de la hipocicloide están dadas por

$$\begin{aligned} x &= (R - r) \cos \beta + r \cos\left(\frac{R - r}{r}\beta\right), \\ y &= (R - r) \operatorname{sen} \beta - r \operatorname{sen}\left(\frac{R - r}{r}\beta\right). \end{aligned}$$

Análogamente, al parametrizar la epicicloide obtenemos que está dada por

$$x = (R + r) \cos \beta - r \cos \left(\frac{R + r}{r} \beta \right),$$

$$y = (R + r) \sin \beta - r \sin \left(\frac{R + r}{r} \beta \right).$$

Para finalizar, notemos que el método de Roverbal para trazar una tangente a la cicloide aplica también para hipocicloides y epicicloides, ya que la única variante sería el eje donde se desplaza el centro de la circunferencia, reemplazando el *vector de traslación* por la *velocidad tangencial de rotación*. Por lo que la observación 4.3.2 para saber si una recta es tangente a la cicloide, sigue siendo válida para la hipocicloide y la epicicloide.

4.6. Envoltente

Definición 4.6.1. Una *envolvente* o *envoltura* es la curva tangente a cada elemento de una familia de curvas.

Hablar de envolventes, es pensar en curvas a partir de sus tangentes. Veamos algunas:

Teorema 4.6.2. Sea l una recta fija y F un punto fijo fuera de ella. Si L es un punto variable sobre l , entonces la familia de mediatrices de los segmentos FL tiene como envolvente a una parábola de directriz l y foco F .

Demostración. Sea L un punto sobre l . Sea P punto sobre la mediatriz de FL tal que PL sea perpendicular con l . Como P está sobre la mediatriz, se tiene que $PL = PF$, es decir, P es un punto de la parábola de foco F y directriz l , ya que PL es la distancia de P hacia l . \square

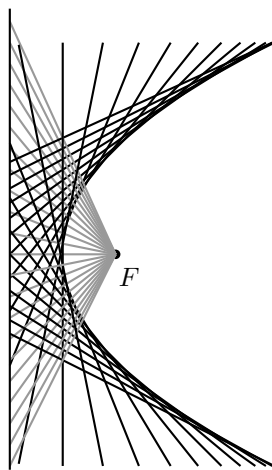


Figura 4.10:

Los siguientes dos teoremas pueden consultarse en Fernández (2007), pp. 27 y 43.

Teorema 4.6.3. Los segmentos de recta de longitud constante que se mueven con sus extremos sobre dos rectas perpendiculares, tienen como curva tangente a una astroide, es decir, la astroide es la envolvente de las rectas que contienen a dichos segmentos.

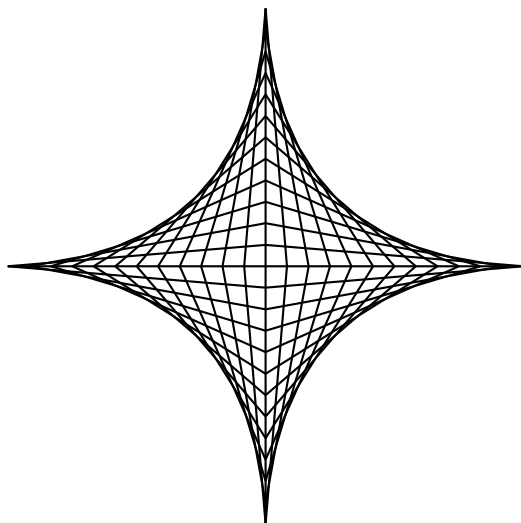


Figura 4.11: Astroide como envolvente

Teorema 4.6.4. *Sea c una circunferencia y L_0 un punto fijo sobre c . Si L_α es el punto sobre c tal que el ángulo formado con respecto a L_0 es α , entonces la envolvente que forman la familia de rectas $L_\alpha L_\beta$ es una cardioide, donde $\beta = 2\alpha \pmod{2\pi}$.*

Pensemos en solo 36 puntos L_i (contando a L_0), entonces tendríamos a las rectas $L_1 L_2, L_2 L_4, L_3 L_6, \dots, L_{17} L_{34}, L_{18} L_0, L_{19} L_2, L_{20} L_4, \dots$

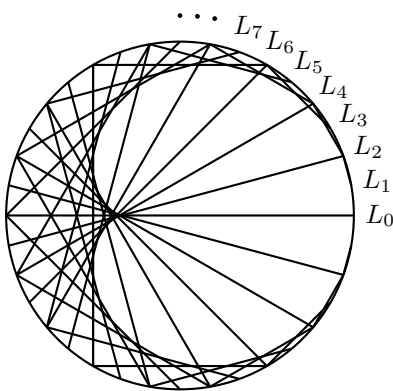


Figura 4.12: Cardioide como envolvente

Recordemos que una cardioide es una epicicloide uno-cúspide. En general, si $\beta = (n+1)\alpha$, entonces la envolvente de las rectas antes descritas son una epicicloide n -cúspide, por ejemplo, si se cumple que $\beta = 3\alpha$, la envolvente es una nefroide (epicicloide dos-cúspide o bicúspide).

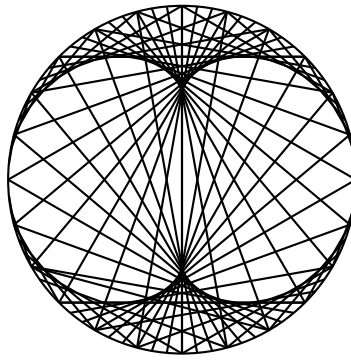


Figura 4.13: Nefroide como envolvente

Capítulo 5

Deltoide de Steiner

Cuando hablamos de geometría sintética, quizá los primeros nombres que vienen a nuestra cabeza son Euclides, Pitágoras, Apolonio, Tales, Menelao o Pascal. Aunque todo aquel seguidor de esta rama de las matemáticas seguramente incluiría a Jacob Steiner, no solo por su particular visión ortodoxa de la geometría euclidiana, sino por el gran número de teoremas que se le atribuyen. Entre sus principales resultados está el *teorema de Poncelet-Steiner*¹, la noción de dualidad y el desarrollo de la geometría proyectiva², donde encontró una manera diferente de definir a las cónicas.

Jakob Steiner (1796-1863) fue un matemático suizo, proveniente de una familia granjera. Quien a pesar de aprender a leer a la edad de 14 años y de comenzar su educación a los 18 años, poseía una única manera de ver y entender la geometría, lo que a la postre lo llevó a ser considerado uno de los mayores geómetras de la historia.

Al iniciar su educación, estuvo asesorado por Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), pedagogo con la ideología de llevar la educación a cualquier población y creyente de la adquisición del conocimiento de manera intuitiva y constructiva, quien tenía como principal meta el desarrollo del estudiante como individuo. Lo que influyó a Steiner en su modo de ver, escribir, entender y enseñar las matemáticas.

Hemos llegado al último capítulo de este trabajo y con ello al teorema que lo motivó, así que comencemos recordando dicho resultado:

Teorema. *La envolvente de las líneas de Simson, con respecto a un triángulo, es una hipocicloide tricúspide.*

Sin embargo, vamos más allá, al extender este teorema con ayuda del teorema de Morley, la circunferencia de los nueve puntos y, claro, la línea de Simson-Wallace. Consiguiendo el siguiente teorema:

Teorema. *La envolvente de las líneas de Simson-Wallace con respecto a un triángulo es una hipocicloide tricúspide tangente a la circunferencia de los nueve puntos, cuyos vértices forman un triángulo equilátero de lados paralelos y de orientación contraria a los del triángulo de Morley.*

¹Establece que todas las construcciones con regla y compás pueden realizarse con solo regla partiendo de un círculo dado y su centro.

²Geometría basada en rectas, puntos y sus incidencias.

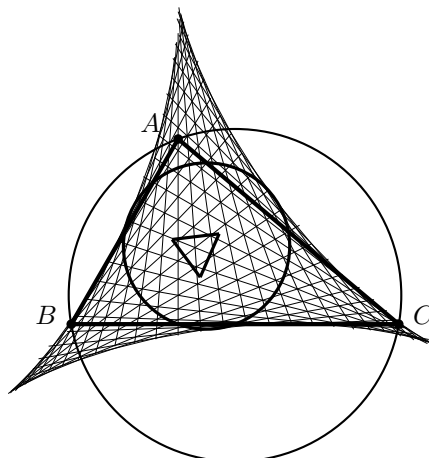


Figura 5.1: Triángulo de Morley, C_9 y envolvente de las líneas de Simson-Wallace de $\triangle ABC$

La demostración del teorema se dividirá en cinco resultados previos que estarán distribuidos en las diferentes secciones del capítulo. También se ocuparán dos *transformaciones*. La primera es una traslación por un vector v . Para la segunda emplearemos la siguiente definición:

Definición 5.0.1. Definimos $v_A(\triangle ABC)$ como el triángulo $\triangle A'B'C'$ que cumple que $A = A'$, BC paralelo a $B'C'$ y circunscrito en la misma circunferencia que $\triangle ABC$, con v un vector perpendicular a BC y de magnitud $d(BC, B'C')$.

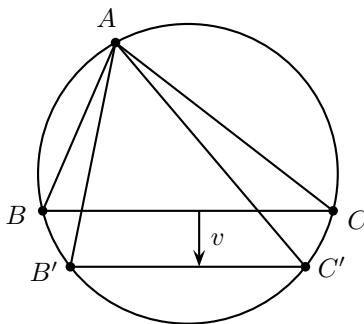


Figura 5.2: $v_A(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$

Donde no necesitamos la regla de correspondencia explícita, la transformación es solo la función que envía el primer triángulo al segundo. Observemos que dicha *función* tiene inversa $v_A^{-1} = u_A$ con u el vector de sentido opuesto a v .

El camino a seguir en este capítulo es el siguiente: En las primeras tres secciones se demostrará la relación que hay entre las dos transformaciones anteriores y las líneas de Simson-Wallace, la circunferencia de Feuerbach y el triángulo de Morley. En la cuarta sección se pasará de un triángulo equilátero a otro cualquiera mediante composiciones del tipo v_A . En la quinta se demostrará el teorema para un triángulo equilátero. Así, en la sexta sección se generalizará el resultado de la quinta sección con ayuda de los cuatro primeros lemas.

5.1. Primer lema

El primero de los lemas tiene como propósito principal ver que si dos triángulos están relacionados mediante la definición 5.0.1, entonces sus líneas de Simson son paralelas, por lo que una se obtiene a partir de la traslación de la otra.

Lema 5.1.1. Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ y v un vector tales que $v_A(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. Si p es la línea de Simson-Wallace desde P con respecto a $\triangle ABC$ y p' lo es con respecto a $\triangle A'B'C'$, entonces p es paralela a p' y p' se obtiene bajo traslación, por v , de p .

Demostración. Sean X , X' los pies de perpendiculares desde P a BC y a $B'C'$, respectivamente. Como BC es paralela a $B'C'$, entonces las rectas PX y PX' coinciden. Sea K la intersección de PX y el circuncírculo.

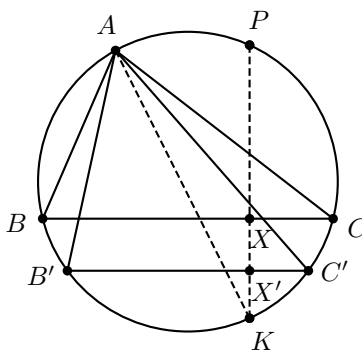


Figura 5.3:

Por teorema 3.2.1, AK es paralela a p y a p' , por lo que las líneas de Simson con respecto a ambos triángulos son paralelas. Además, como p pasa por X y p' pasa por X' , se tiene que al trasladar a p , por v , se llega a p' . \square

La importancia de este lema radica en que, dados $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ ($= v_A(\triangle ABC)$), el conjunto de todas las líneas de Simson-Wallace de $\triangle A'B'C'$ están a una traslación del conjunto de las líneas de Simson-Wallace de $\triangle ABC$, es decir, la envolvente de las líneas de Simson-Wallace de $\triangle A'B'C'$ se obtienen al trasladar por v la envolvente de las líneas de Simson-Wallace de $\triangle ABC$.

5.2. Segundo lema

Este segundo lema es similar al anterior, ya que vamos a obtener un elemento de $\triangle A'B'C'$ a partir de una traslación del correspondiente elemento de $\triangle ABC$.

Lema 5.2.1. Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que $v_A(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. Si C'_9 es la circunferencia de los nueve puntos de $\triangle A'B'C'$, entonces C'_9 se obtiene al trasladar a C_9 por v .

Demostración. Para demostrar esto basta ver que tres puntos de C_9 van a dar a tres puntos de C'_9 bajo la traslación por v , o bien, que dos cumplen con esto y el radio se conserva. Como el radio de C_9 es la mitad que el del circuncírculo y este último es el mismo para $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ entonces los radios de C_9 y de C'_9 son iguales.

Sean M , M' los respectivos puntos medios de BC y $B'C'$. Sean D , D' los pies de altura desde A en BC , $B'C'$, respectivamente.

Como v es un vector perpendicular a BC y $B'C'$, si X está en BC , al trasladar por v , X va a dar a su proyección en $B'C'$. Así que hay que demostrar que M' es la proyección de M y D' la de D .

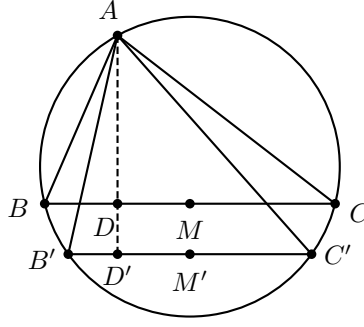


Figura 5.4:

Sea M'' la proyección de M en $B'C'$, por lo tanto MM'' es perpendicular a BC al ser BC y $B'C'$ paralelas. Así que MM'' es la mediatriz de BC , entonces pasa por el circuncentro O de $\triangle ABC$ (y de $\triangle A'B'C'$). Por lo tanto MM'' también es la mediatriz de $B'C'$, con lo que $M' = M''$.

Como AD y AD' son perpendiculares a BC y $B'C'$, respectivamente, y estos dos últimos son paralelos entonces A, D, D' son colineales. Sea D'' la proyección de D en $B'C'$, por lo tanto DD'' es perpendicular a BC , por ser BC paralela a $B'C'$. Como AD y BC son perpendiculares entonces A, D, D'' son colineales, así que AD'' es perpendicular a $B'C'$. Por lo tanto $D'' = D'$, por ser D' pie de altura desde A . \square

Notemos que tanto el primero como el segundo lema son muy parecidos, los correspondientes elementos (líneas de Simson-Wallace y circunferencias de los nueve puntos), en uno y en otro se obtienen a partir de la misma traslación, por lo que, si p es tangente a C_9 , entonces p' será tangente a C'_9 .

5.3. Tercer lema

En las secciones anteriores se ha trabajado con la línea de Simson-Wallace y con la circunferencia de los nueve puntos, ahora toca el turno del triángulo de Morley. Veremos cómo se relaciona el triángulo de Morley de $\triangle ABC$ con el triángulo de Morley de $\triangle A'B'C'$, para esto nos apoyaremos de una proposición y así llegar al lema correspondiente de esta sección.

Proposición 5.3.1. Sean $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ tales que $v_A(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. Sea $\triangle PQR$ el triángulo de Morley de $\triangle ABC$ y $\triangle P'Q'R'$ el de $\triangle A'B'C'$. Si QR es el lado cercano a A (determinado a partir de las trisectrices del ángulo en A) y $Q'R'$ el correspondiente para $\triangle P'Q'R'$, entonces QR es paralela a $Q'R'$.

Demostración. Como BC y $B'C'$ son paralelos, bastará demostrar que el ángulo formado entre BC y QR es el mismo que el formado por $B'C'$ y $Q'R'$.

Sean X la intersección de QR y BC , x el ángulo interno en X . Por lo tanto $x + 2\gamma + \omega + \frac{\pi}{3} = \pi$, esto utilizando la notación usada en Teorema 1.1.2.

Por lo tanto

$$x = \frac{2\pi}{3} - 2\gamma - \omega \quad (5.1)$$

Y como $x + \varepsilon + (\pi - 2\beta) = \pi$, se tiene que $x + \varepsilon - 2\beta = 0$. Por lo que

$$x = 2\beta - \varepsilon \quad (5.2)$$

Además, $\omega + \frac{\pi}{3} + \varepsilon = \pi$. Así que

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{3} - \omega \quad (5.3)$$

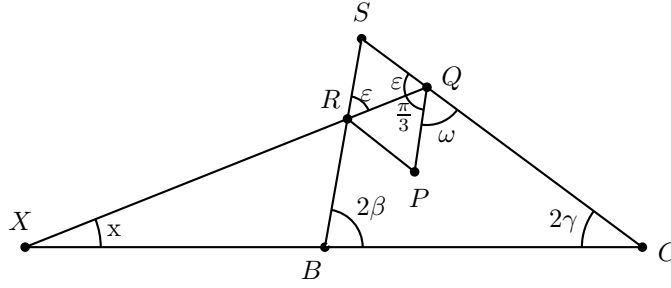


Figura 5.5:

De (5.2) y (5.3), se tiene que $x = 2\beta - \frac{2\pi}{3} + \omega$, y de (5.1), se obtiene que $2x = 2\beta - 2\gamma$. Así $x = \frac{1}{3}(\angle BCA - \angle ABC)$.

Análogamente el ángulo formado por $Q'R'$ y $B'C'$ es de $\frac{1}{3}(\angle B'C'A - \angle AB'C')$.

Tómese el circuncírculo de $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ y sea δ el ángulo formado por BC' y $B'C'$, de igual manera, el ángulo formado por $B'C$ y $B'C'$ es δ , pues BC y $B'C'$ son paralelos y $\angle C'BC = \angle C'B'C$, por lo tanto

$$\angle BCA = \angle BC'A = \angle B'C'A - \delta$$

$$\angle ABC = \angle AB'C = \angle AB'C' - \delta$$

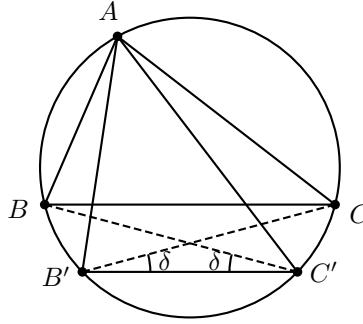


Figura 5.6:

Así que $\frac{1}{3}(\angle BCA - \angle ABC) = \frac{1}{3}(\angle B'C'A - \delta - \angle AB'C' + \delta) = \frac{1}{3}(\angle B'C'A - \angle AB'C')$, es decir, el ángulo formado por QR y BC es el mismo que el formado por $Q'R'$ y $B'C'$. \square

Lema 5.3.2. Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que $v_A(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. El triángulo de Morley de $\triangle ABC$ y el triángulo de Morley de $\triangle A'B'C'$ tienen lados paralelos.

Demostración. Por el teorema de Morley se tiene que los triángulos de Morley $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$, son equiláteros, así que, por la proposición 5.3.1, al ser PQ paralelo a $P'Q'$ los demás lo serán. \square

5.4. Cuarto lema

Este cuarto lema se encargará del *cambio* de un triángulo cualquiera a uno equilaátero usando como base la transformación de la definición 5.0.1. Dichos triángulos están a solo dos composiciones de esta función, es decir, si se quiere pasar de un triángulo $\triangle ABC$ a un triángulo $\triangle A''B''C''$.

Lema 5.4.1. Dado $\triangle ABC$, existen A'' , B'' , C'' en el circuncírculo tales que $\triangle A''B''C''$ es equilátero y $v'_{B'}(v_A(\triangle ABC)) = v'_{B'}(\triangle A'B'C') = \triangle A''B''C''$.

Demostración. Sean $\triangle A'B'C' = v_A(\triangle ABC)$ y $\triangle A''B''C'' = v'_{B'}(\triangle A'B'C')$. Sean α el ángulo del vértice en A , β el de B y γ el de C en $\triangle ABC$. Análogamente α' , β' , γ' en $\triangle A'B'C'$ y α'' , β'' , γ'' en $\triangle A''B''C''$.

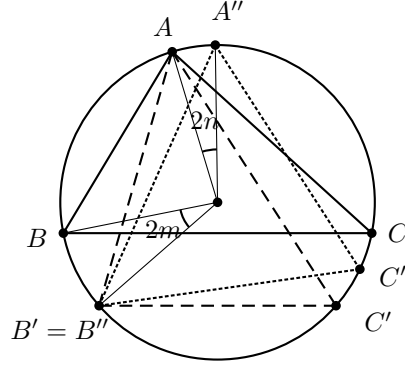


Figura 5.7:

Sea O el centro del circuncírculo. Sean $2m = \angle BOB' = \angle COC'$ y $2n = \angle C'OC'' = \angle A'OA''$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha - \angle BAB' - \angle CAC' \\ &= \alpha - m - m \\ &= \alpha - 2m.\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\beta' &= \beta + \angle CBC' \\ &= \beta + \frac{1}{2}\angle COC' \\ &= \beta + m.\end{aligned}$$

Análogamente

$$\gamma' = \gamma + m.$$

Así, se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \alpha' + n = \alpha - 2m + n, \\ \beta'' &= \beta' - 2n = \beta + m - 2n, \\ \gamma'' &= \gamma' + n = \gamma + m + n.\end{aligned}$$

Como se quiere que $\alpha'' = \beta'' = \gamma'' = \frac{\pi}{3}$, entonces se tiene que $\gamma + m + n = \frac{\pi}{3}$, $\beta + m - 2n = \frac{\pi}{3}$. Por lo que

$$m + n = \frac{\pi}{3} - \gamma. \quad (5.4)$$

Además

$$m = \frac{\pi}{3} - \beta + 2n. \quad (5.5)$$

Así, por (5.4) y (5.5), se tiene que

$$\begin{aligned}n + \frac{\pi}{3} - \beta + 2n &= \frac{\pi}{3} - \gamma, \\ 3n &= \beta - \gamma,\end{aligned}$$

$$n = \frac{1}{3}(\beta - \gamma),$$

Por lo que en (5.5)

$$m = \frac{\pi}{3} - \beta + \frac{2}{3}(\beta - \gamma).$$

Por lo tanto se puede llegar de $\triangle ABC$ a $\triangle A''B''C''$ si se hace $n = \frac{1}{3}(\beta - \gamma)$ y $m = \frac{1}{3}(\pi - \beta - 2\gamma)$. Así mismo de $\triangle A''B''C''$ a $\triangle ABC$. \square

Notemos que el triángulo de Morley $\triangle P''Q''R''$ del triángulo equilátero $\triangle A''B''C''$ tiene lados paralelos (pero orientación contraria) a los de $\triangle A''B''C''$. Así, el triángulo de Morley $\triangle PQR$ de $\triangle ABC$ tiene lados paralelos (y orientación contraria) a $\triangle A''B''C''$, por lema 5.3.2.

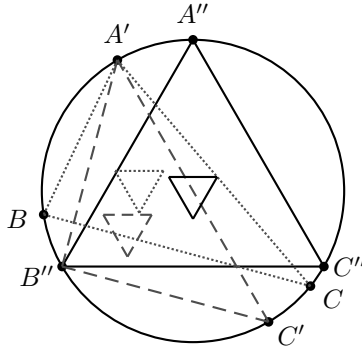


Figura 5.8:

5.5. Quinto lema

Esta sección es la esencia principal del teorema de la deltoide de Steiner, ya que aquí se demostrará el caso particular para un triángulo equilátero.

Para facilitar la demostración de este quinto lema, se empleará el siguiente resultado previo:

Lema 5.5.1. *Sean tres rectángulos sobrepuestos tales que el central tiene diagonal $2r$ y los otros dos base r . Sea t el ángulo en el rectángulo central formado por su diagonal y su base, entonces se tienen las relaciones de ángulos indicadas en la figura 5.9.*

Demostración. Considérese dos circunferencias que inscriban al rectángulo central y al formado por la transposición de los tres rectángulos, por lo que ambas circunferencias tienen centro en Q la intersección de las dos diagonales del rectángulo central. Sea $\angle ROP = t$.

Como $OQ = r = QS$, entonces $\angle OSQ = t$. Además, es ángulo exterior de $\triangle QSR$, por lo tanto $\angle SQR + \angle SRQ = t$. Al ser $\triangle QSR$ isósceles, entonces $\angle SQR = \angle SRQ = \frac{t}{2}$.

Ya que el $\angle POS = t$ es inscrito, se tiene que $\angle PQS = 2t$, con lo que se obtienen los ángulos que se ven en la figura. \square

Este resultado está pensado principalmente para no entorpecer el lema principal, ya que dichas magnitudes saldrán dentro de su demostración.

Lema 5.5.2. *Sea $\triangle ABC$ equilátero. La envolvente de las líneas de Simson-Wallace cumple lo siguiente:*

- a) *Es una hipocicloide tricúspide.*

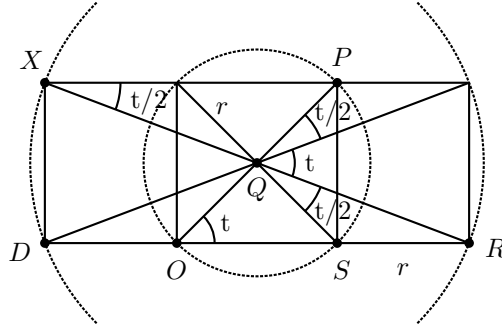


Figura 5.9:

b) Es tangente a la circunferencia de los nueve puntos.

c) Tiene lados paralelos a los de $\triangle ABC$ y tamaño $\frac{3}{2}$ con respecto a $\triangle ABC$.

Demostración. Sea o el circuncírculo de $\triangle ABC$, con centro en O y radio $2r$. Como $\triangle ABC$ es equilátero, su ortocentro es O . Por el lema 3.3.1, BC biseca a $OK = 2r$, donde K es la intersección de AO y o , por lo tanto la distancia del lado BC al punto O es de r .

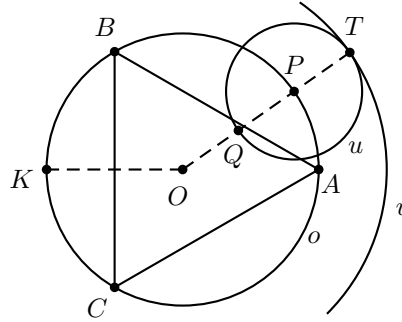


Figura 5.10:

Sean u circunferencia de radio r centrada en un punto cualquiera P en o , y Q la intersección de u con OP . Sea v circunferencia de radio $3r$ centrada en O . Por lo tanto u es tangente a la circunferencia v en el punto T , además de que $OQ = r$.

Así, vamos a utilizar el lema anterior donde el rectángulo central tiene diagonal OP y se ve como en la figura 5.10.

Sea H la intersección de XR con u , por lo que $\angle QHT$ es un ángulo recto, pues QT es diámetro de u .

a) Ya que $\angle TPH$ es exterior en $\triangle PQH$, se obtiene que

$$\angle TPH = \angle PQH + \angle PHQ = \frac{3t}{2} + \frac{3t}{2} = 3t,$$

por lema anterior. De acuerdo a lo visto al inicio de la sección 4.5, H es un punto de la hipocicloide tricúspide generada por u cuando gira dentro de v , ya que el ángulo $\angle ROT = t$.

En este momento, sabemos que el punto H es un punto de la hipocicloide tricúspide, lo que hace falta ver es que la tangente a esta curva en H es la línea de Simson-Wallace del punto P , lo que demostraría que las líneas de Simson son tangentes a la hipocicloide, es decir, que la envolvente de las líneas de Simson-Wallace es una hipocicloide tricúspide.

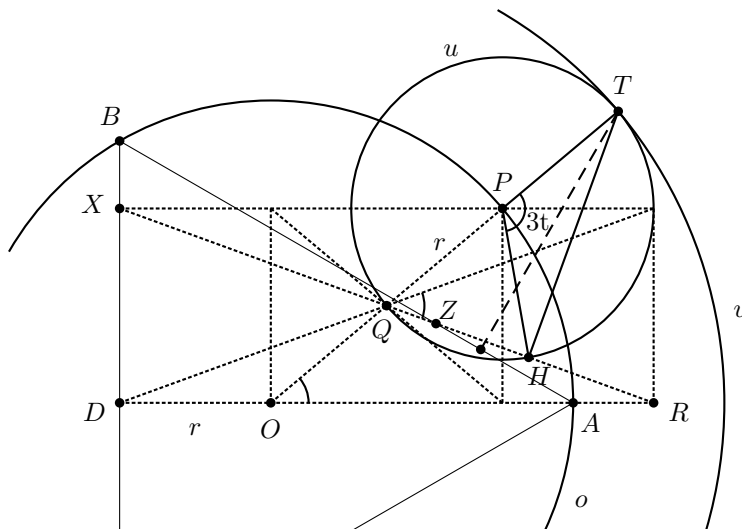


Figura 5.11:

Por las observaciones hechas al final de la sección 4.5, sabemos que la recta tangente a la hipocicloide tricúspide en H es aquella recta perpendicular al radio de rotación instantáneo HT , es decir, XR es la recta tangente a la hipocicloide en H . Por lo que basta demostrar que XR es una línea de Simson-Wallace.

b) Al ser $\triangle ABC$ equilátero, su circunferencia de los nueve puntos tiene centro O y radio r , por teoremas 2.4.4 y 2.4.5, es decir, la circunferencia de radio $OQ = r$ (descrita por Q al desplazarse P sobre o) es la circunferencia de los nueve puntos.

Falta ver que esta circunferencia es tangente a la envolvente. Para esto hay que saber en qué momento el punto H que describe la hipocicloide y el punto Q que describe la circunferencia de los nueve puntos coinciden, es decir, cuando $\angle QPH = 0$.

Si $\angle QPH = 0$, entonces $3t = \pi - \angle QPH = \pi$; por lo tanto $\angle XRD = \frac{t}{2} = \frac{\pi}{6}$. Así que $R = A$ y $X = B$, por lo que se tiene que $Q(= H)$ está sobre AB y $\angle RQP = \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $OQ(= OH)$ es mediatriz de AB , al ser una recta perpendicular a AB que pasa por el circuncentro. Por lo que la circunferencia de los nueve puntos y la hipocicloide se intersecan en el punto medio de AB , punto en donde la tangente XR de la hipocicloide coincide con la tangente AB de la circunferencia de los nueve puntos. Así que, cuando C_9 y la hipocicloide se intersecan lo hacen en un punto de tangencia.

c) La hipocicloide tricúspide tiene como vértices los de un triángulo equilátero, por lo que si uno de dichos vértices está sobre OA , la hipocicloide cumple con la propiedad de los lados paralelos enunciada en el lema.

Para determinar cuándo H es un punto cúspide, o bien, cuándo H está en v , observemos que si $P = A$, entonces $t = 0$, por lo que $\angle TPH = 3t = 0$, es decir, $T = H$. Al ser T intersección de u con v , entonces H está en v . Además, O, A, H son colineales.

Con respecto al tamaño de la hipocicloide, el circuncírculo del triángulo formado por los vértices de la hipocicloide generada por u tiene radio $3r$, mientras que el de $\triangle ABC$ tiene radio $2r$.

□

Aunque este es solo un caso particular, el camino que falta por recorrer está ya trazado. Vamos a hacerlo explícito en la siguiente y última sección de este trabajo.

5.6. Demostración de la deltoide de Steiner

La demostración es un compendio del trabajo de este texto, más puntualmente los lemas 5.1.1, 5.2.1, 5.3.2, 5.4.1 y 5.5.2. Por lo que es conveniente tenerlos presentes a la hora de la demostración, así como entender sus implicaciones, por lo general discutidas al final de cada sección.

Teorema 5.6.1 (Deltoide de Steiner). *La envolvente de las líneas de Simson-Wallace con respecto a un triángulo es una hipocicloide tricúspide tangente a la circunferencia de los nueve puntos, cuyos vértices forman un triángulo equilátero de lados paralelos y de orientación contraria a los del triángulo de Morley.*

Demostración. Dado $\triangle ABC$, se puede pasar a $\triangle A''B''C''$ equilátero (lema 5.4.1), en el que la envolvente de las líneas de Simson con respecto a $\triangle A''B''C''$ es una hipocicloide tricúspide tangente a C_9'' cuyos vértices son los de un triángulo equilátero con lados paralelos a los de $\triangle A''B''C''$ y de tamaño $\frac{3}{2}r$ con respecto a $\triangle A''B''C''$ (lema 5.5.2).

Así, en $\triangle ABC$ la envolvente de las líneas de Simson se trata de una hipocicloide tricúspide tangente a C_9 (lemas 5.1.1 y 5.2.1) cuyos vértices son los de un triángulo equilátero con lados paralelos a los del triángulo de Morley de $\triangle ABC$ (lemas 5.3.2 y 5.4.1) y tamaño $\frac{3}{2}r$ con respecto a $\triangle ABC$ (lemas 5.5.2 y 5.1.1). \square

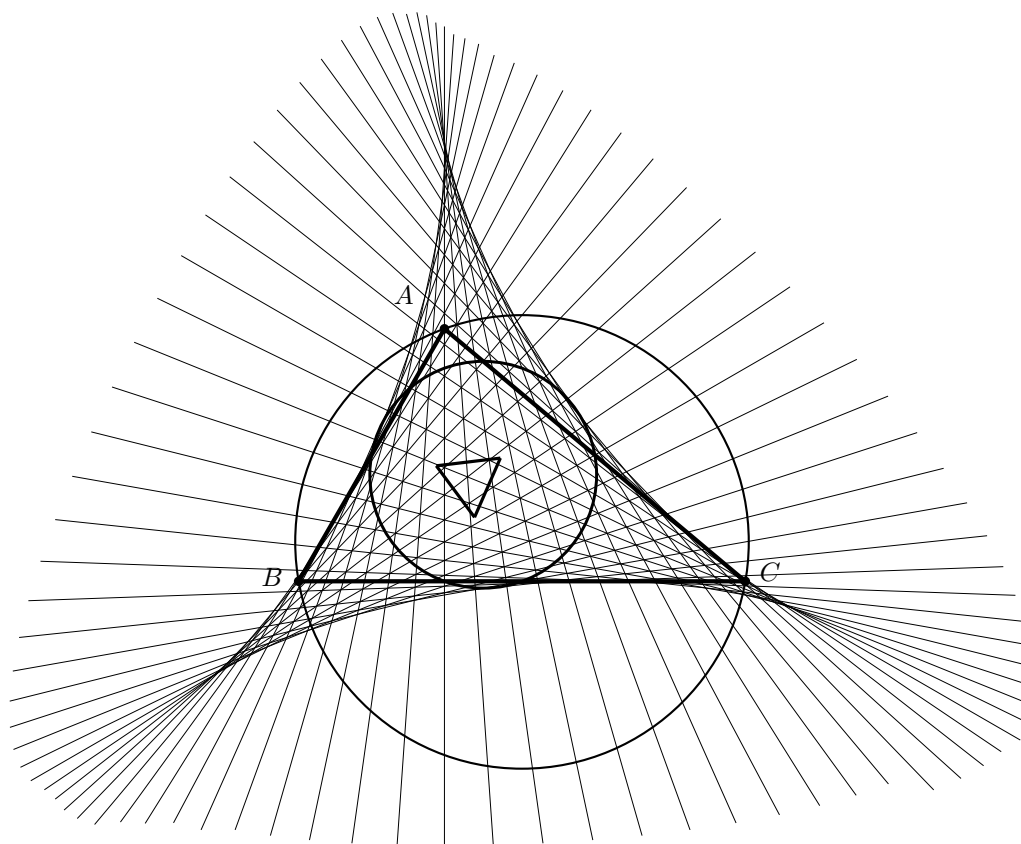


Figura 5.12: Deltoide de Steiner

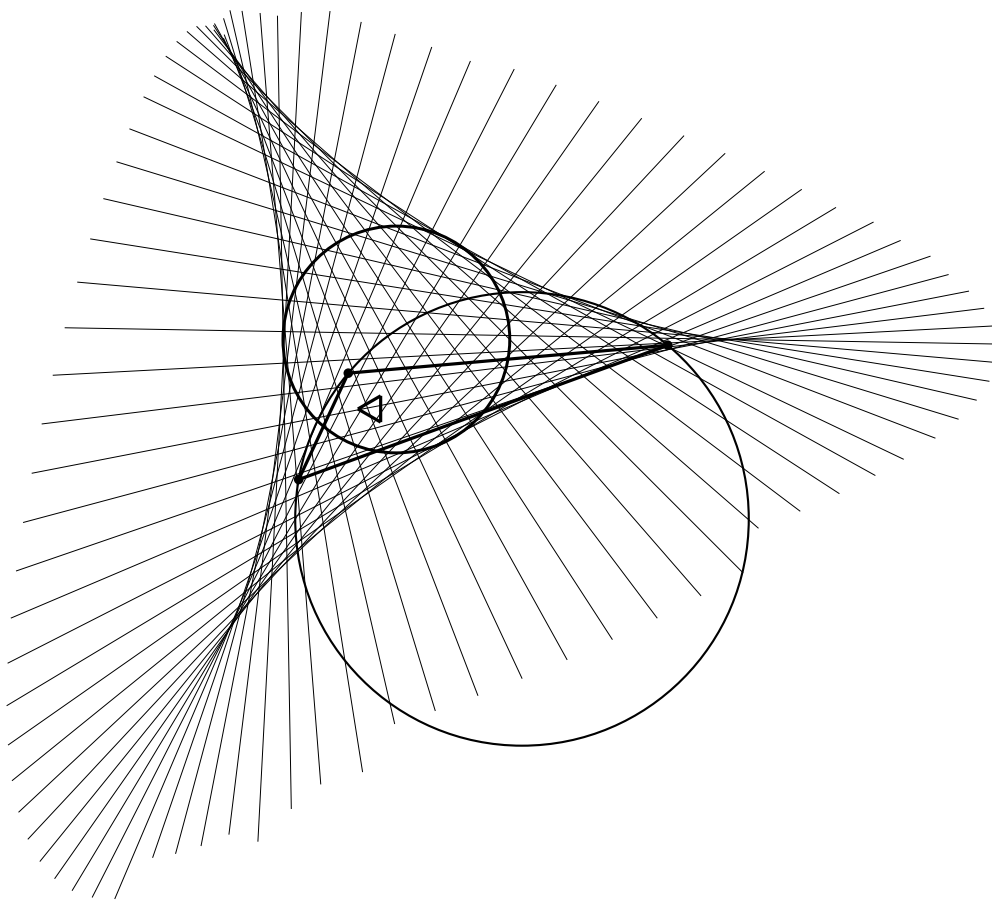


Figura 5.13: Deltoide de Steiner

Apéndice A

Demostración analítica de la deltoide de Steiner

Antes de iniciar, es importante mencionar que en esta demostración se ocupan conceptos básicos de geometría anaítica como representaciones de vectores en el plano y solución de sistemas de ecuaciones, pero sobre todo paciencia y minuciosidad, debido a la cantidad de cuentas que se realizan. Sin embargo, como sucede en muchas demostraciones de este tipo, es realmente satisfactorio ver cómo todo se acomoda y encaja para que al final nuestro esfuerzo se resuma en un par de líneas de ecuaciones.

La demostración está dividida en un par de lemas previos y en el teorema principal, donde la tarea más pesada se realiza en los dos primeros resultados, precisamente para que la demostración del teorema sea fluida, tal como se puede consultar en Dörrie, H. (1965).

Lema A.0.1. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \varphi \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma) &= \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi \\ &\quad - \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 2\beta \operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen}^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi.\end{aligned}$$

Demostración. Como

$$\begin{aligned}\cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) &= \cos(2\beta + 2\gamma) \cos 2\varphi + \operatorname{sen}(2\beta + 2\gamma) \operatorname{sen} 2\varphi \\ &= \cos 2\beta \cos 2\gamma \cos 2\varphi - \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\varphi \\ &\quad + \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi + \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi,\end{aligned}$$

y ya que $\operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma) = \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma - \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma$, entonces

$$\begin{aligned}\cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma) &= \cos 2\beta \cos^2 2\gamma \cos 2\varphi \operatorname{sen} 2\beta - \operatorname{sen}^2 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\varphi \cos 2\gamma \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 2\beta \cos^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi + \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma \\ &\quad - \cos^2 2\beta \cos 2\gamma \cos 2\varphi \operatorname{sen} 2\gamma + \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}^2 2\gamma \cos 2\varphi \cos 2\beta \\ &\quad - \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma - \cos^2 2\beta \operatorname{sen}^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma) &= \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi \cos^2 2\gamma - \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi \operatorname{sen}^2 2\beta \\ &\quad + \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen}^2 2\beta \cos^2 2\gamma \\ &\quad - \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi \cos^2 2\beta + \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi \operatorname{sen}^2 2\gamma \\ &\quad - \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen}^2 2\gamma \cos^2 2\beta.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Vamos a factorizar los términos de la parte derecha de la ecuación A.1, términos numerados del 1 al 6 en el orden en que aparecen.

Tomando el término 1 y 5 se tiene

$$\text{sen } 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi \cos^2 2\gamma + \text{sen } 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi \text{sen}^2 2\gamma = \text{sen } 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi (\cos^2 2\gamma + \text{sen}^2 2\gamma).$$

Por lo tanto

$$\text{sen } 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi \cos^2 2\gamma + \text{sen } 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi \text{sen}^2 2\gamma = \text{sen } 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi. \quad (\text{A.2})$$

Análogamente, factorizando los términos 2 y 4 se obtiene

$$-\text{sen } 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi \text{sen}^2 2\beta - \text{sen } 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi \cos^2 2\beta = -\text{sen } 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi. \quad (\text{A.3})$$

Finalmente, los términos 3 y 6

$$\begin{aligned} & \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\beta \cos^2 2\gamma - \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\gamma \cos^2 2\beta \\ &= \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\beta \cos^2 2\gamma - \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\gamma \cos^2 2\beta \\ & \quad + \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\beta \text{sen}^2 2\gamma - \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\beta \text{sen}^2 2\gamma \\ &= \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\beta (\cos^2 2\gamma + \text{sen}^2 2\gamma) - \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\gamma (\cos^2 2\beta + \text{sen}^2 2\beta). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\beta \cos^2 2\gamma - \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\gamma \cos^2 2\beta = \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\beta - \text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 2\gamma. \quad (\text{A.4})$$

Así, al sumar (A.2), (A.3) y (A.4), la ecuación (A.1) da el resultado deseado. \square

Lema A.0.2. Sean $c^+ = \cos 2\beta + \cos 2\gamma$, $s^+ = \text{sen } 2\beta + \text{sen } 2\gamma$, $c^- = \cos 2\beta - \cos 2\gamma$, $s^- = \text{sen } 2\beta - \text{sen } 2\gamma$. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c^+ x + s^+ y = r(c^+ \cos 2\gamma + s^+ \text{sen } 2\gamma) \\ c^- x + s^- y = r(c^- \cos 2\varphi + s^- \text{sen } 2\varphi) \end{cases}$$

tiene como solución a

$$\frac{r}{2} (\cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi), \text{sen } 2\beta + \text{sen } 2\gamma + \text{sen } 2\varphi - \text{sen}(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)).$$

Demostración. Para resolver el sistema se utilizará la regla de Kramer para encontrar el valor de x , siendo análogo para y . Así, $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, donde la letra Δ hace referencia al determinante. Por lo que

$$\Delta = \begin{vmatrix} c^+ & s^+ \\ c^- & s^- \end{vmatrix},$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} r(c^+ \cos 2\gamma + s^+ \text{sen } 2\gamma) & s^+ \\ r(c^- \cos 2\varphi + s^- \text{sen } 2\varphi) & s^- \end{vmatrix}.$$

Comencemos con el determinante Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos 2\beta + \cos 2\gamma & \text{sen } 2\beta + \text{sen } 2\gamma \\ \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \text{sen } 2\beta - \text{sen } 2\gamma \end{vmatrix} \\ &= \cos 2\beta \text{sen } 2\beta - \cos 2\beta \text{sen } 2\gamma \\ & \quad + \cos 2\gamma \text{sen } 2\beta - \cos 2\gamma \text{sen } 2\gamma \\ & \quad - \cos 2\beta \text{sen } 2\beta - \cos 2\beta \text{sen } 2\gamma \\ & \quad + \cos 2\gamma \text{sen } 2\beta + \cos 2\gamma \text{sen } 2\gamma \\ &= -2 \cos 2\beta \text{sen } 2\gamma + 2 \cos 2\gamma \text{sen } 2\beta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta = 2 \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma). \quad (\text{A.5})$$

Así que basta demostrar que $\Delta x = r \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma)[\cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)]$.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \begin{vmatrix} r(c^+ \cos 2\gamma + s^+ \operatorname{sen} 2\gamma) & s^+ \\ r(c^- \cos 2\varphi + s^- \operatorname{sen} 2\varphi) & s^- \end{vmatrix} \\ &= r[c^+ s^- \cos 2\gamma + s^+ s^- \operatorname{sen} 2\gamma \\ &\quad - s^+ c^- \cos 2\varphi - s^+ s^- \operatorname{sen} 2\varphi]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Comencemos a trabajar con el primero de los términos dentro de los corchetes

$$\begin{aligned} c^+ s^- \cos 2\gamma &= (\cos 2\beta + \cos 2\gamma)(\operatorname{sen} 2\beta - \operatorname{sen} 2\gamma) \cos 2\gamma \\ &= \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma - \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\gamma \\ &\quad + \cos^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\beta - \cos^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Desarrollando el segundo término en (A.11)

$$\begin{aligned} s^+ s^- \operatorname{sen} 2\gamma &= (\operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma)(\operatorname{sen} 2\beta - \operatorname{sen} 2\gamma) \operatorname{sen} 2\gamma \\ &= \operatorname{sen}^2 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma - \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}^2 2\gamma \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\beta - \operatorname{sen}^3 2\gamma \\ &= \operatorname{sen}^2 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma - \operatorname{sen}^3 2\gamma \\ &= \operatorname{sen}^2 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma - \operatorname{sen} 2\gamma(1 - \cos^2 2\gamma) \\ &= \operatorname{sen}^2 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma - \operatorname{sen} 2\gamma + \operatorname{sen} 2\gamma \cos^2 2\gamma \\ &= (\operatorname{sen}^2 2\beta - 1) \operatorname{sen} 2\gamma + \operatorname{sen} 2\gamma \cos^2 2\gamma. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s^+ s^- \operatorname{sen} 2\gamma = -\cos^2 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma + \operatorname{sen} 2\gamma \cos^2 2\gamma. \quad (\text{A.8})$$

Al sumar (A.7) y (A.8) se obtiene

$$\begin{aligned} c^+ s^- \cos 2\gamma + s^+ s^- \operatorname{sen} 2\gamma &= \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma - \cos^2 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \\ &\quad + \cos^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\beta - \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\gamma \\ &= \cos 2\beta(\operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma - \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\beta) \\ &\quad + \cos 2\gamma(\cos 2\gamma \operatorname{sen} 2\beta - \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$c^+ s^- \cos 2\gamma + s^+ s^- \operatorname{sen} 2\gamma = \cos 2\beta \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma) + \cos 2\gamma \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma). \quad (\text{A.9})$$

Recordemos que trabajamos con Δx . Ahora veamos qué pasa con los segundos términos de (A.6). Comencemos con el tercero de ellos

$$\begin{aligned} -s^+ c^- \cos 2\varphi &= -(\operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma)(\cos 2\beta - \cos 2\gamma) \cos 2\varphi \\ &= -\operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi + \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\gamma \cos 2\varphi \\ &\quad - \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\beta \cos 2\varphi + \operatorname{sen} 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente

$$\begin{aligned} -s^+ s^- \operatorname{sen} 2\varphi &= -(\operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma)(\operatorname{sen} 2\beta - \operatorname{sen} 2\gamma) \operatorname{sen} 2\varphi \\ &= -(\operatorname{sen}^2 2\beta \operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen}^2 2\gamma \operatorname{sen} 2\varphi). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Al sumar (A.10) y (A.11), agrupar y factorizar los términos se tiene que

$$\begin{aligned} -s^+c^- \cos 2\varphi - s^+s^- \sin 2\varphi &= -(\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\varphi - \sin 2\gamma \cos 2\gamma \cos 2\varphi \\ &\quad + \sin^2 2\beta \sin 2\varphi - \sin^2 2\gamma \sin 2\varphi) \\ &\quad + (\sin 2\beta \cos 2\gamma - \sin 2\gamma \cos 2\beta) \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Por lo que

$$-s^+c^- \cos 2\varphi - s^+s^- \sin 2\varphi = -\cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) \sin(2\beta - 2\gamma) + \sin(2\beta - 2\gamma) \cos 2\varphi. \quad (\text{A.12})$$

por lema A.0.1.

Por lo tanto, de (A.9) y (A.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta x &= r[\cos 2\beta \sin(2\beta - 2\gamma) + \cos 2\gamma \sin(2\beta - 2\gamma) \\ &\quad + \cos 2\varphi \sin(2\beta - 2\gamma) - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) \sin(2\beta - 2\gamma)]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Así, de (A.5) y (A.13), la ecuación (A.6) se ve como

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{r \sin(2\beta - 2\gamma)[\cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)]}{2 \sin(2\beta - 2\gamma)}. \quad (\text{A.14})$$

Por lo tanto

$$x = \frac{r}{2}[\cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)]. \quad (\text{A.15})$$

Análogamente

$$y = \frac{r}{2}[\sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\varphi - \sin(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)].$$

□

Teorema A.0.3 (deltoide de Steiner). *La envolvente de las líneas de Simson, con respecto a un triángulo, es una hipocicloide tricúspide.*

Demostración. Definimos un sistema de coordenadas con origen el circuncentro O del triángulo $\triangle ABC$. Con base en este sistema, los puntos A, B, C, P tienen las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned} A &= (r \cos 2\alpha, r \sin 2\alpha), \\ B &= (r \cos 2\beta, r \sin 2\beta), \\ C &= (r \cos 2\gamma, r \sin 2\gamma), \\ P &= (r \cos 2\varphi, r \sin 2\varphi). \end{aligned}$$

tal que $\alpha + \beta + \gamma = 2k\pi$ con $k \in 0\mathbb{Z}$ y r el radio del circuncírculo de $\triangle ABC$. Por teorema de Sylvester, se tiene que el ortocentro está dado por

$$H = (r \cos 2\alpha + r \cos 2\beta + r \cos 2\gamma, r \sin 2\alpha + r \sin 2\beta + r \sin 2\gamma).$$

Por lo que, por el teorema 2.4.4, se tiene que el centro de la circunferencia de los nueve puntos tiene coordenadas

$$J = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma, \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Uno de los principales objetivos durante la demostración será dar la ecuación de la línea de Simson-Wallace de P , para ello primero buscaremos los pies de perpendicular desde P hacia los lados del triángulo.

Sea D el pie de perpendicular desde P hacia BC . El punto D es la intersección de la recta BC con la recta perpendicular a BC que pasa por P , es decir, encontrar las coordenadas de D es equivalente a encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones de las rectas antes mencionadas.

Dichas rectas se darán en su forma normal. por lo que se necesita un punto de la recta y la *dirección* perpendicular a la recta. Comencemos con la recta perpendicular a BC desde P cuya ecuación está dada por

$$l_2 : (B - C) \cdot X = (B - C) \cdot P,$$

donde $X = (x, y)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} l_2 : & (\cos 2\beta - \cos 2\gamma)x + (\sin 2\beta - \sin 2\gamma)y \\ & = r[(\cos 2\beta - \cos 2\gamma) \cos 2\varphi + (\sin 2\beta - \sin 2\gamma) \sin 2\varphi]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Para dar la ecuación de la recta BC , vamos a ocupar el teorema de Sylvester en $\triangle PBC$, con el propósito de hallar su dirección perpendicular.

Sea H_p el ortocentro de $\triangle PBC$, por lo que $H_p - P$ da la dirección perpendicular a BC . Por lo que

$$l_1 : (H_p - P) \cdot X = (H_p - P) \cdot C,$$

así, por teorema de Sylvester, $H_p = (r \cos 2\varphi + r \cos 2\beta + r \cos 2\gamma, r \sin 2\varphi + r \sin 2\beta + r \sin 2\gamma)$, entonces $H_p - P = (r \cos 2\beta + r \cos 2\gamma, r \sin 2\beta + r \sin 2\gamma) = (c^+, s^+)$. Por lo que la ecuación del lado BC está dada por

$$\begin{aligned} l_1 : & (\cos 2\beta + \cos 2\gamma)x + (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)y \\ & = r[(\cos 2\beta + \cos 2\gamma) \cos 2\gamma + (\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \sin 2\gamma] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Al colocar (A.17) y (A.16) en los términos ocupados en el lema A.0.2, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} l_1 : & c^+x + s^+y = r(c^+ \cos 2\gamma + s^+ \sin 2\gamma) \\ l_2 : & c^-x + s^-y = r(c^- \cos 2\varphi + s^- \sin 2\varphi) \end{cases}$$

el cual tiene como solución el punto

$$D = \frac{r}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi), \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\varphi - \sin(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)).$$

por lema A.0.2. Análogamente

$$E = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi), \sin 2\alpha + \sin 2\gamma + \sin 2\varphi - \sin(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi)).$$

Con esto podemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por D y E , es decir, la línea de Simson-Wallace. Sin embargo, antes haremos un cambio de origen para simplificar las cuentas.

Sea X el punto del sistema coordenado con origen el circuncentro O . Sea X' un punto del sistema coordenado con origen J , el centro de la circunferencia de los nueve puntos. Por lo tanto $X = X' + J$, así que

$$X' = X - J$$

Por ejemplo, ahora J en el nuevo sistema coordenado está dado por $X' = J - J = 0$, es decir, el origen. De igual manera

$$\begin{aligned} D' &= D - J \\ &= \frac{r}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi), \\ &\quad \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\varphi - \sin(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)) \\ &\quad - \frac{r}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma, \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D' = \frac{r}{2}(\cos 2\varphi - \cos 2\alpha - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi), \sin 2\varphi - \sin 2\alpha - \sin(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)).$$

Análogamente

$$E' = \frac{r}{2}(\cos 2\varphi - \cos 2\beta - \cos(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi), \text{sen } 2\varphi - \text{sen } 2\beta - \text{sen}(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi)).$$

Por lo que la ecuación de la línea de Simson-Wallace está dada por

$$l_s : \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (\text{A.18})$$

donde $D' = (x_1, y_1)$, $E' = (x_2, y_2)$.

Analicemos primero el lado derecho de la ecuación de la línea de Simson-Wallace

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{r}{2}[\text{sen } 2\varphi - \text{sen } 2\beta - \text{sen}(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi) \\ &\quad - \text{sen } 2\varphi + \text{sen } 2\alpha + \text{sen}(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)] \\ &= \frac{r}{2}[\text{sen } 2\alpha - \text{sen } 2\beta - (\text{sen}(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi) - \text{sen}(2\beta + 2\gamma - 2\varphi))] \\ &= \frac{r}{2}[2 \text{sen}(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) - 2 \text{sen}(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta + 2\gamma - 2\varphi)], \end{aligned}$$

por inciso *b*) del lema 1.3.3. Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= r \text{sen}(\alpha - \beta)[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta + 2\gamma - 2\varphi)] \\ &= r \text{sen}(\alpha - \beta)[-2 \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma - \varphi) \text{sen}(-\gamma + \varphi)], \end{aligned}$$

por inciso *d*) del lema 1.3.3. Así

$$y_2 - y_1 = 2r \text{sen}(\alpha - \beta) \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma - \varphi) \text{sen}(\gamma - \varphi). \quad (\text{A.19})$$

Análogamente

$$x_2 - x_1 = 2r \text{sen}(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta + \gamma - \varphi) \text{sen}(\gamma - \varphi), \quad (\text{A.20})$$

al usar los incisos *d*) y *c*) del lema 1.3.3. Con lo que, por (A.19) y (A.20) se tiene que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma - \varphi)}{\cos(\alpha + \beta + \gamma - \varphi)}.$$

Así, al reescribir la ecuación de la línea de Simson-Wallace dada es (A.18)

$$l_s : \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{\text{sen } \psi}{\cos \psi},$$

con $\psi = \alpha + \beta + \gamma - \varphi$, $y_1 = \text{sen } 2\varphi - \text{sen } 2\alpha - \text{sen}(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)$, $x_1 = \cos 2\varphi - \cos 2\alpha - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)$.
O bien

$$l_s : y \cos \psi - x \text{sen } \psi = y_1 \cos \psi - x_1 \text{sen } \psi.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 l_s : \quad y \cos \psi - x \operatorname{sen} \psi &= \frac{r}{2} [\operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen}(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)] \cos \psi \\
 &\quad - \frac{r}{2} [\cos 2\varphi - \cos 2\alpha - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)] \operatorname{sen} \psi \\
 &= \frac{r}{2} [\operatorname{sen} 2\varphi \cos \psi - \cos 2\varphi \operatorname{sen} \psi \\
 &\quad + \cos 2\alpha \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} 2\alpha \cos \psi \\
 &\quad + \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen}(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) \cos \psi] \\
 &= \frac{r}{2} [\operatorname{sen}(2\varphi - \psi) + \operatorname{sen}(\psi - 2\alpha) + \operatorname{sen}(\psi - 2\beta - 2\gamma + 2\varphi)] \\
 &= \frac{r}{2} [\operatorname{sen}(2\varphi - \alpha - \beta - \gamma + \varphi) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma - \varphi - 2\alpha) \\
 &\quad + \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma - \varphi - 2\beta - 2\gamma + 2\varphi)] \\
 &= \frac{r}{2} [\operatorname{sen}(3\varphi - (\alpha + \beta + \gamma)) + \operatorname{sen}(-\alpha + \beta + \gamma - \varphi) \\
 &\quad + \operatorname{sen}(\alpha - \beta - \gamma + \varphi)] \\
 &= \frac{r}{2} \operatorname{sen}(3\varphi - (\alpha + \beta + \gamma)),
 \end{aligned}$$

al ser seno una función impar. Como $\alpha + \beta + \gamma = 2k\pi$, entonces

$$\begin{aligned}
 l_s : \quad y \cos(\alpha + \beta + \gamma - \varphi) - x \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma - \varphi) &= \frac{r}{2} \operatorname{sen}(3\varphi - (\alpha + \beta + \gamma)), \\
 y \cos(2k\pi - \varphi) - x \operatorname{sen}(2k\pi - \varphi) &= \frac{r}{2} \operatorname{sen}(3\varphi - 2k\pi).
 \end{aligned}$$

Así, la línea de Simson-Wallace está dada por

$$l_s : \quad y \cos \varphi + x \operatorname{sen} \varphi = \frac{r}{2} \operatorname{sen} 3\varphi, \quad (\text{A.21})$$

al ser seno función impar y coseno función par.

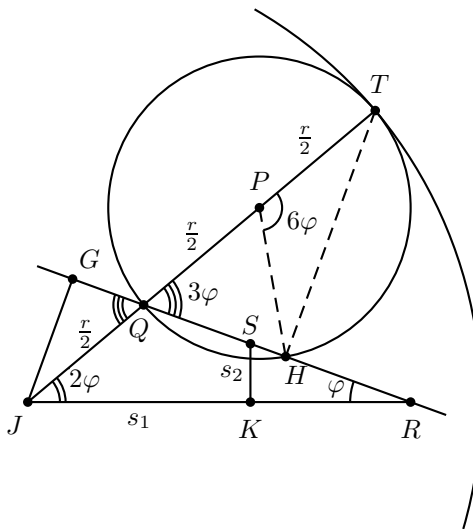


Figura A.1:

Sean Q, R tales que $\triangle JQR$ es un triángulo con ángulos $2\varphi, \varphi$ y lado $\frac{r}{2}$, con JR paralelo al eje X .

Sean T en JQ tal que tal que $JT = \frac{3r}{2}$, G el pie de perpendicular a QR desde J y S un punto cualquiera sobre QR de coordenadas s_1, s_2 . Sean K pie de perpendicular a JR desde H , por lo tanto $JK = s_1$, $HK = s_2$. Por lo que

$$\begin{aligned} JG &= (s_1 + KR) \operatorname{sen} \varphi \\ &= s_1 \operatorname{sen} \varphi + KR \operatorname{sen} \varphi \\ &= s_1 \operatorname{sen} \varphi + (HR \cos \varphi) \left(\frac{s_2}{HR} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $JG = s_1 \operatorname{sen} \varphi + s_2 \cos \varphi$. Por otro lado $JG = JQ \operatorname{sen} 3\varphi = \frac{r}{2} \operatorname{sen} 3\varphi$. Así, el punto $S = (s_1, s_2)$ que describe la recta QR , a su vez describe la ecuación $s_1 \operatorname{sen} \varphi + s_2 \cos \varphi = JG = \frac{r}{2} \operatorname{sen} 3\varphi$, la ecuación de la línea de Simson, es decir, QR es la línea de Simson-Wallace del punto $P = (r \cos 2\varphi, r \operatorname{sen} 2\varphi)$.

Sea H pie de perpendicular a QR desde T , por lo que la circunferencia de diámetro TQ pasa por H y tiene ángulo central $\angle TPH = 6\varphi = 3(2\varphi) = 3\angle TJR$; además esta circunferencia tiene radio $\frac{r}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{3r}{2} \right) = \frac{1}{3} JP$. En otras palabras, al rodar esta circunferencia dentro de la de radio JP , el punto H describe la hipocicloide tricúspide inscrita en la circunferencia de radio JP , además, HT es el radio de rotación instantánea por lo que QR , la línea de Simson-Wallace, es tangente a la hipocicloide por teorema 4.3.2 aplicado a hipocicloides. \square

Bibliografía

- [1] ALTSHILLER, N. (2007). *College Geometry: An introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. (2a ed.). EUA: Dover Publications.
- [2] BESKIN, N. (1976). *División de un segmento en una razón dada*. (p. 16). URSS: Mir.
- [3] BOYER, C. (1986). *Historia de la matemática*. (pp. 189, 193-195). España: Alianza Universidad Textos.
- [4] CARDENAS, S. (2013). *Notas de Geometría*. (pp. 54, 55). México: Prensas de Ciencias.
- [5] COLLETE, J. (2013). *Historia de las matemáticas II* (7a ed.). (pp. 39-41, 187-197, 455-457). México: siglo xxi
- [6] COOLIDGE, J. L. (1929). The heroic age of geometry. *American Mathematical Society*, 35, 19-37.
- [7] CONWAY, J. (2006). *The power of mathematics*. (pp. 38-41). Inglaterra: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511541407.004
- [8] COXETER H. S. M. & GREITZER, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. EUA: The Mathematical Association of America.
- [9] DELÉPINE, D. (2005). *Geometría diferencial I*. (pag. 48). México.
- [10] DOBBS, W. (1938). Morley's Triangle. *The Mathematical Gazette*, 22(248), 50-57. doi:10.2307/3607446
- [11] DÖRRIE, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. (pp. 226-230). EUA: Dover Publications, Inc.
- [12] FERNÁNDEZ, M. (2007). Galería de curvas en el plano. *Foro-Red-Mat*, 24(3), 27 y 43.
- [13] GIBSON, G. (1914). J. S. MacKay. *The Mathematical Gazette*, 7(111), 309-310. doi:10.1017/S0025557200016983

- [14] DE GUZMÁN, M. (1998). *La envolvente de las rectas de Wallace-Simson en un triángulo: una demostración sencilla del teorema de la Deltoide de Steiner*. <http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/geometriahoy/geomtriangulo/deltoide/entornodelt/deltoide/00delt.htm>
- [15] LORIA, G. (1939). Triangles Equilatéraux Dérivés d'un Triangle Quelconque. *The Mathematical Gazette*, 23(256), 364-372. doi: 10.2307/3606165
- [16] MACKAY, J. (1890). The Wallace line and the Wallace point. *Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society*, 9, 83-91. doi:10.1017/S001309150003087X
- [17] MACKAY, J. (1892). History of the nine point circle. *Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society*, 11, 19-57. doi:10.17/S0013091500031163
- [18] MONTEIRO, C. (2010). *Teorema de Morley*. (pp. 27-37). Tesis de Maestría. Universidade de Beira Interior.
- [19] MORANDI, P. (1996). *Field and Galois Theory*. (pag. 145). EUA: Springer.
- [20] Neusis solutions to classical constructions problems (s.f.). <https://math.ucr.edu/res/math153/neusis-geometry.pdf>
- [21] ROBSON, A. (1923). 660. Morley's Theorem (v. note 621). *The Mathematical Gazette*, 11 (164), 310-311. doi: 10.2307/3603768
- [22] SHARIGUIN, I. (1986). *Problemas de geometría: Planimetría*. (pp. 330-334). URSS: Mir.
- [23] SHIVELY, L. (1953). *An introduction to Modern Geometry*. (pp. 116). EUA: John Wiley and Sons.
- [24] SOLOKOWSKY, D. (1977). 660. An elementary proof of the Morley theorem. *Canadian Mathematical Society*, 3 (10), 291-294.
- [25] SPIVAK, M. (1967). *Calculus*. (pp. 444). EUA: W.A. Benjamin.
- [26] STRONACH, G. & PANKETI, M. (2004). Wallace William. *Oxford Dictionary of National Biography*. <https://doi.org/10.1093/ref:odnb/28545>

Índice alfabético

- ángulo (líneas de Simson-Wallace), 41
- Apolonio,
 - circunferencia de, 32
- astroide, 52

- braquistócrona, 48

- cardioide, 52, 56
- Casey,
 - teorema de, 31
 - inverso de, 34
- cicloide, 47
- cuadrilátero
 - completo, 45

- deltoide, 52
- directriz, 48

- envolvente, 55, 59, 61, 65, 68
- epicicloide, 52, 55
- Euler, Leonard, 22
- Euler,
 - línea de, 27
 - línea de, 22
- excírculo, 28, 35

- Feuerbach,
 - circunferencia, 21
 - teorema de, 28, 35

- generatriz, 48

- hipocicloide, 52, 54
 - tricúspide, 59, 65, 68
- homotecia, 28

- identidades trigonométricas, 8
- incírculo, 28, 35

- método de Roverbal, 50, 55
- Miquel,
 - teorema de, 44

- Morley, Frank, 1
- Morley,
 - teorema de, 1, 2, 4, 8, 14
 - triángulo de, 3, 14, 59, 62, 68

- nefroide, 52
- nueve puntos,
 - circunferencia de los, 21, 28, 35, 44, 59, 61, 66, 68
 - centro, 27
 - radio, 27
 - teorema de, 23, 24

- paralelas,
 - rectas, 23
- parametrización, 49, 54
- Pestalozzi, Johann Heinrich, 59
- Ptolomeo,
 - teorema de, 23, 31
- puntos de retroceso o cúspide, 48

- radio de rotación instantánea, 51
- reflejado,
 - punto, 33, 44

- semiperímetro, 29
- Simson, Robert, 39
- Simson-Wallace,
 - línea de, 40, 59, 61, 65, 68
 - teorema de, 39
- Steiner, Jakob, 59
- Steiner,
 - deltoide de, 59, 68
 - línea de, 44

- tangente
 - a la cicloide, 51, 55
 - a la epicicloide, 55
 - a la hipocicloide, 55
 - a una curva, 50
- transformación*

- $v_A(\triangle ABC)$, 60–63
- traslación por v , 60, 61
- triángulo
 - equilátero, 59, 63, 65, 68
- triángulos,
 - congruencia de, 2
 - semejanza de, 22
- trisectrices, 1
- explementarias, 15, 19
- exteriores, 15, 19
- interiores, 18
- vector
 - de traslación, 50, 55
 - tangencial de rotación, 50, 55
- Wallace, William, 39