



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

MÉTODO NUMÉRICO CENTRAL ROBUSTO PARA  
UN MODELO DEL FLUJO SANGUÍNEO

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN TECNOLOGÍA

PRESENTA:

RODRIGO BRITO INTERIANO

ASESORES:

DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

DR. GUILLERMO RAMÍREZ SANTIAGO



JURIQUILLA, QUERÉTARO

SEPTIEMBRE, 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*He sido un trotamundos, pero el camino  
no lo he hecho solo, he sido acompañado de  
muchos amigos.*

—Jaime Cruz Sampedro

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## *Resumen*

Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada  
Instituto de Matemáticas

Licenciado en Tecnología

### **Método numérico central robusto para un modelo del flujo sanguíneo**

por Rodrigo Brito Interiano

En esta tesis se plantea un modelo del flujo sanguíneo a través de las arterias del sistema cardiovascular utilizando un método numérico de tipo *central-upwind* para obtener soluciones computacionales en una dimensión. Este modelo se puede derivar con base en las ecuaciones cilíndricas de Navier-Stokes, como lo hacen Canic y Kim [1], utilizando reducciones asintóticas. El modelo resultante consiste en un sistema hiperbólico de leyes de conservación. El método numérico planteado posee propiedades de estabilidad que previenen las oscilaciones típicas de los esquemas numéricos. Dichas propiedades se comprueban con la implementación del método en tres problemas: el problema de Riemann, la perturbación en estados estacionarios, y el estrechamiento arterial o estenosis. De especial interés para esta tesis es la localización de ondas de choque y ondas de rarefacción en el contexto de las soluciones numéricas obtenidas para estos problemas. **Palabras clave:** sistemas hiperbólicos de leyes de conservación, mecánica de fluidos, flujo sanguíneo.

*In this thesis a model of blood flow through the arteries of the cardiovascular system is proposed using a central-upwind numerical method to obtain computational solutions in one dimension. This model can be derived based on the cylindrical Navier-Stokes equations, as Canic y Kim [1] do, using asymptotic reductions. The resulting model consists of a hyperbolic system of conservation laws. The numerical method presented has stability properties that prevent typical oscillations of numerical schemes. These properties are verified with the implementation of this method in three problems: the Riemann problem, the perturbation of a steady state, and the arterial narrowing or stenosis. Of particular interest for this thesis is the location of shock waves and rarefaction waves in the context of the numerical solutions obtained for these problems.*

**Keywords:** hyperbolic systems of conservation laws, fluid mechanics, blood flow.



## *Agradecimientos*

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por convertirse en mi segundo hogar desde que ingresé al Plantel 6 «Antonio Caso» de la Escuela Nacional Preparatoria.

A mis compañeros de la sexta generación de estudiantes de la Licenciatura en Tecnología, por haber sido los mejores amigos durante esta etapa.

A la planta académica del Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, por proporcionarme las bases necesarias para ser el profesionalista que hoy soy.

A mis asesores, Gerardo Hernández Dueñas y Guillermo Ramírez Santiago, y a la comunidad del Instituto de Matemáticas, Unidad Juriquilla, por recibirme cálidamente y permitirme trabajar con ellos.

A Jorge Velasco, José Luis Aragón, Rafael Quintero, y Beatriz Millán, por participar como sinodales en la revisión de esta tesis.

Esta tesis se elaboró con el apoyo de los proyectos PAPIIT IN113019 y IN108916 de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM y CONACYT A1-S-17634.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La sangre y el sistema cardiovascular . . . . .	1
1.2. Enfermedades cardiovasculares . . . . .	1
<b>2. Dinámica de fluidos</b>	<b>5</b>
2.1. Fluidos en movimiento . . . . .	5
2.2. Ecuaciones de Euler . . . . .	6
2.2.1. Conservación de la masa . . . . .	7
2.2.2. Balance de momento . . . . .	8
2.2.3. Conservación de energía . . . . .	15
2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	16
2.3.1. Fuerzas de superficie . . . . .	16
2.3.2. Tensiones de corte . . . . .	17
2.3.3. Ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales . . . . .	20
2.4. El número de Reynolds . . . . .	21
<b>3. Leyes de conservación hiperbólicas</b>	<b>23</b>
3.1. Teoría matemática de las leyes de conservación . . . . .	23
3.1.1. Problema del tubo de onda de choque . . . . .	24
3.2. Retos de las leyes de conservación . . . . .	26
3.3. Derivación de la leyes de conservación . . . . .	27
3.4. Leyes de conservación escalares . . . . .	28
3.4.1. Ecuación de advección lineal . . . . .	28
3.4.2. Ecuación de Burgers . . . . .	30
3.4.3. Soluciones débiles . . . . .	30
3.4.4. El problema de Riemann . . . . .	32
3.4.5. Velocidad de choque . . . . .	34
3.4.6. Condiciones de entropía . . . . .	35
3.5. Sistemas hiperbólicos lineales . . . . .	36
3.5.1. Variables características . . . . .	36
3.6. Linealización de sistemas no lineales . . . . .	37
3.7. Ondas de choque débiles para sistemas . . . . .	38



<b>4. El modelo de flujo sanguíneo</b>	<b>39</b>
4.1. Derivación de las ecuaciones del modelo	39
4.1.1. Ecuaciones adimensionales	40
4.1.2. Ecuaciones promediadas	42
4.1.3. Ecuaciones promediadas en forma dimensional	44
4.1.4. Viscosidad	44
4.1.5. Ecuaciones de conservación en forma dimensional	45
4.2. Propiedades del modelo de flujo sanguíneo	46
4.3. Solución analítica	46
4.3.1. Aplicación al modelo sanguíneo	47
4.3.2. Solución de onda de rarefacción	49
4.3.3. Solución de onda de choque y matrices de Roe	51
<b>5. Métodos numéricos</b>	<b>55</b>
5.1. Error de truncamiento	57
5.2. Condición CFL	57
5.3. Análisis de von Neumann	57
5.4. Métodos numéricos para la ecuación lineal de transporte	58
5.4.1. Método <i>upwind</i>	58
5.4.2. Método Lax-Wendroff	60
5.4.3. Método de diferencias centradas	61
5.4.4. Método Lax-Friedrichs	61
5.5. Monotonicidad	62
5.6. Métodos de alta resolución	63
5.6.1. Método <i>upwind</i> de alta resolución	63
5.7. Esquema semi-discreto central para leyes de balance hiperbólicas	65
5.7.1. Flujo numérico	65
5.8. Solución numérica	66
<b>6. Resultados numéricos</b>	<b>67</b>
6.1. Problema de Riemann	67
6.2. Perturbación de un estado estacionario	69
6.3. Ciclo cardíaco	70
6.4. Estenosis	72
6.5. Oclusión	74
<b>7. Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>A. Demostraciones</b>	<b>79</b>
A.1. Teorema del cambio de variables	79
A.2. Diferenciación de la matriz jacobiana	80
<b>B. Definiciones</b>	<b>83</b>
B.1. Dominio de dependencia	83
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Índice de figuras

1.1. Esquema del sistema cardiovascular humano. . . . .	2
2.1. Partículas de fluido moviéndose en una región $D$ . . . . .	6
2.2. La masa que atraviesa la frontera $\partial\Omega$ por unidad de tiempo es igual a la integral de superficie sobre $\partial\Omega$ de $\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . . . . .	7
2.3. Fuerzas de presión a través de la superficie $S$ . . . . .	10
2.4. $\Omega_t$ es la imagen de $\Omega$ conforme las partículas de fluido en $\Omega$ se mueven para en un tiempo $t$ . . . . .	12
2.5. Las moléculas más rápidas en $B'$ se pueden difundir a través de $S$ e impartir momento a $B$ . . . . .	16
2.6. La fuerza $d\mathbf{F}$ por el lado (1) sobre el lado (2) de $dA$ está dada por $\Sigma(\mathbf{n}) dA$ . . . . .	17
3.1. Problema del tubo de onda de choque. . . . .	25
3.2. Estructura del flujo para el problema del tubo de onda de choque al tiempo $t = 1$ . . . . .	25
3.3. Onda de choque. . . . .	33
3.4. Onda de choque con violación de entropía. . . . .	33
3.5. Onda de rarefacción. . . . .	34
5.1. Métodos numéricos de diferencias finitas para el problema lineal $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0$ . . . . .	56
5.2. Análisis de von Neumann para el método lateral. . . . .	59
5.3. Comparación de distintos esquemas numéricos. . . . .	62
6.1. Solución a $t = 0.14$ s para el problema de Riemann. . . . .	68
6.2. Perturbación de un estado estacionario. . . . .	70
6.3. Velocidad del flujo sanguíneo impuesta en la frontera izquierda de la arteria en un ciclo cardíaco. . . . .	71
6.4. Solución de un ciclo cardíaco con condiciones iniciales estacionarias. . . . .	72
6.5. Evolución del diámetro de la arteria y la velocidad. . . . .	73
6.6. Evolución del diámetro de la arteria y la velocidad en presencia de estenosis. . . . .	74
6.7. Solución a tiempo $t = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ s con condiciones iniciales dadas en (6.7) y condiciones de frontera libre. . . . .	75



# Abreviaturas

<b>CFL</b>	Condición de Courant-Friedrichs-Lewy
<b>EDO</b>	Ecuación Diferencial Ordinaria
<b>EDP</b>	Ecuación Diferencial Parcial
<b>R-H</b>	Condición de Rankine-Hugoniot
<b>TVD</b>	Métodos Total Variation Diminishing



# Lista de símbolos

$a$	velocidad de advección	$\text{m s}^{-1}$
$\mathbf{a}$	aceleración	$\text{m s}^{-2}$
$A$	área, área transversal de la arteria	$\text{m}^2$
$\mathbf{A}$	matriz de la función de flujo	
$\mathbf{b}$	fuerza de bulto por unidad de masa	$\text{N kg}^{-1}$
$\mathbf{B}$	fuerza de bulto	$\text{N}$
$c$	velocidad del sonido	$\text{m s}^{-1}$
$C$	número de Courant	
$d$	dimensión	
$D$	región en el espacio	
$\mathbf{D}$	tensor de deformación	$\text{m}$
$\mathcal{D}$	dominio de dependencia	
$\mathbf{e}$	vector fijo en el espacio	
$E$	energía	$\text{J}$
$\mathcal{E}$	error local de truncamiento	
$f_\nu$	componente de viscosidad	$\text{m}^3 \text{s}^{-2}$
$\mathbf{f}, \mathbf{F}$	función de flujo	
$\mathbf{F}$	vector de fuerzas	$\text{N}$
$G_0$	coeficiente de elasticidad	$\text{Pa}$
$H$	flujo numérico	
$\mathbf{I}$	matriz identidad	
$J$	determinante de la matriz jacobiana	
$k$	constante de proporcionalidad	
$\ell$	«a la izquierda»	
$L_0$	longitud axial característica de la arteria	$\text{m}$
$m$	masa	$\text{kg}$
$\mathbf{n}$	vector normal unitario	
$\mathcal{O}$	orden	
$p$	presión	$\text{Pa}$
$Q$	flujo volumétrico	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$r$	longitud radial	$\text{m}$
$r$	«a la derecha»	
$\mathbf{r}$	eigenvector derecho	
$R$	radio interno de la arteria	$\text{m}$
$R_0$	radio interno característico de la arteria	$\text{m}$
$\mathcal{R}$	número de Reynolds	
$s$	velocidad de la onda de choque	$\text{m s}^{-1}$

$S$	superficie de un fluido	
$t$	tiempo	s
$T$	tiempo característico	s
$u$	velocidad axial promedio	m
$u_r$	velocidad radial	m
$u_x$	velocidad axial	m
$u_\theta$	velocidad angular	m
$\mathbf{u}$	campo de velocidad, vector de flujo	$\text{m s}^{-1}$
$U$	aproximación numérica de la cantidad $u$	
$U_r$	velocidad radial característica	$\text{m s}^{-1}$
$U_x$	velocidad axial característica	$\text{m s}^{-1}$
$\mathbf{U}$	aproximación numérica del vector $\mathbf{u}$	
$v$	velocidad	$\text{m s}^{-1}$
$V$	volumen	$\text{m}^2$
$\mathbf{W}$	vector de flujo	
$x$	longitud axial	m
$\mathbf{x}$	vector de posición, trayectoria	m
$\alpha$	coeficiente de Coriolis	
$\beta$	parámetro de respuesta de tensión-deformación	
$\gamma$	constante del flujo de Hagen-Poiseuille	
$\varepsilon$	razón radio/longitud de la arteria	
$\zeta$	segundo coeficiente de viscosidad	Pa s
$\eta$	función de entropía	
$\theta$	ángulo azimutal	rad
$\theta_j$	razón de gradientes consecutivos	
$\lambda$	eigenvalor	
$\mu$	coeficiente de viscosidad dinámica	Pa s
$\nu$	coeficiente de viscosidad cinemática	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\xi$	curva característica $x/t$	
$\rho$	densidad de masa	$\text{kg m}^{-2}$
$\sigma$	tensor de esfuerzos	N
$\Sigma$	tensión	N
$\phi$	función de prueba	
$\phi$	función de limitación de flujo	
$\varphi$	trayectoria de una partícula de fluido	
$\psi$	flujo de entropía	
$\Omega$	subregión en $D$	

*A mi mamá, Maru, y mi hermana, Jacqui.*





## Capítulo 1

# Introducción

### 1.1. La sangre y el sistema cardiovascular

La sangre es un fluido complejo que está formado por varios tipos de células (eritrocitos, leucocitos, trombocitos) y elementos suspendidos (proteínas, electrolitos y otros solutos inorgánicos) en un medio acuoso llamado plasma. La sangre fluye a través del sistema cardiovascular con el propósito de transportar y distribuir sustancias esenciales, como el oxígeno y las hormonas, a los tejidos del organismo. La sangre también se encarga de remover productos tóxicos del metabolismo como parte fundamental de la homeostasis<sup>1</sup> de un sistema vivo pluricelular vertebrado.

El corazón y el sistema circulatorio conforman el sistema cardiovascular. El corazón funciona como una bomba que empuja la sangre hacia los órganos, tejidos y células del cuerpo. La sangre entrega oxígeno y nutrientes a cada célula y elimina el dióxido de carbono y los productos de desecho. El corazón y el sistema circulatorio son fundamentales para mantener la comunicación a través del organismo en diferentes situaciones fisiológicas. Para realizar esas tareas, el flujo de la sangre a lo largo de todo el sistema circulatorio debe mantenerse estable. El sistema cardiovascular está formado por dos subsistemas: el sistema distribuidor y el sistema colector. El primero está compuesto de las arterias y arteriolas, que se encargan de enviar la sangre a todos los órganos y células del cuerpo, y desemboca en capilares en donde se lleva a cabo el intercambio de las sustancias esenciales. El segundo es el sistema colector, compuesto por las venas, las cuales regresan la sangre pobre en oxígeno y con productos del proceso metabólico de regreso al corazón, el que a su vez conduce la sangre a los pulmones para su oxigenación y posterior redistribución (Figura 1.1) [2, 3].

### 1.2. Enfermedades cardiovasculares

Los trastornos orgánicos y funcionales del sistema cardíaco y circulatorio, incluidas las lesiones resultantes en otros sistemas orgánicos se conocen como **enfermedades cardiovasculares**. Las enfermedades cardiovasculares son algunas de las causas más frecuentes de morbilidad y mortalidad en la población activa. Entre los 45 y 64 años, más de la tercera parte de las muertes en personas del sexo masculino y más de la cuarta

---

<sup>1</sup>Procesos de autorregulación que contribuyen a mantener constantes la composición y las propiedades del medio interno de un organismo.

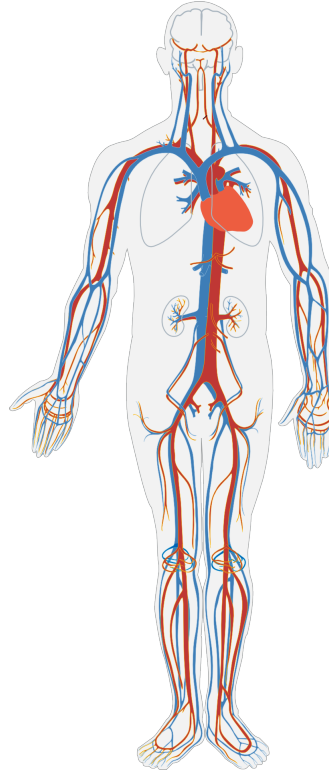


FIGURA 1.1: Esquema del sistema cardiovascular humano. Las arterias (sistema distribuidor) están indicadas con color rojo y las venas (sistema colector) con color azul.

partes de las muertes en personas del sexo femenino están causadas por este grupo de enfermedades [3].

Existe una diversidad de enfermedades cardiovasculares provocadas por varios factores. Las *coronariopatías* que provocan isquemia del miocardio se producen por constricciones del sistema vascular que suministra sangre al músculo cardíaco, causadas principalmente por arterioesclerosis. Las *enfermedades inflamatorias* pueden afectar el endocardio, las válvulas cardíacas, el pericardio o al propio músculo cardíaco. Los *trastornos del ritmo cardíaco*, aunque raros, asintomáticos y transitorios, pueden generar casos de incapacidad y muerte súbita. Las *miocardiopatías* son trastornos en los que se produce un aumento o engrosamiento del músculo cardíaco, con lo que se estrechan los vasos y se debilita el corazón. La *hipertensión* consiste en el incremento de la tensión arterial sistólica y/o diastólica, y es la enfermedad circulatoria más frecuente, pues afecta entre el 15 y 20 por ciento de la población activa. Las *alteraciones ateroscleróticas* afectan a los vasos sanguíneos y suelen causar enfermedad en los órganos a los que aportan suministro sanguíneo; el principal ejemplo de estas es la *enfermedad cerebrovascular* [3].

Tomando en cuenta la relevancia del sistema circulatorio en el funcionamiento de muchos organismos vivos, es importante proponer un modelo matemático que permita describir la dinámica del movimiento de la sangre, mediante la determinación de propiedades como la velocidad de la sangre o el área transversal de un conducto vascular,

para así poder cuantificar y predecir la aparición de algunas enfermedades cardiovasculares de una forma cercana a la realidad.

El uso de un modelo unidimensional para describir el flujo sanguíneo a través de un conducto axisimétrico (con simetría alrededor de un eje) ha sido muy popular para estudiar varios problemas relacionados con el sistema cardiovascular. Dicho modelo ha sido utilizado para reproducir el flujo sanguíneo a través de la aorta y se ha acoplado a modelos tridimensionales para simular el sistema cardiovascular humano en su totalidad, así como en árboles estructurados para calcular numéricamente las ramas arteriales [4-6].

Los modelos propuestos dependen relativamente de pocas variables y pocos parámetros, lo que permite caracterizar de manera sencilla y precisa algunos escenarios fisiológicos. Algunos ejemplos de ello son la introducción de modificaciones al coeficiente de elasticidad del conducto vascular [7] y la variación del área transversal del mismo [1].

En esta tesis se utilizará como antecedente el estudio de los efectos cuasilineales en un modelo de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas (EDPH) que describen el flujo sanguíneo [1]. En dicha referencia se calcularon las soluciones numéricas del conjunto de EDPH usando el método de diferencias finitas del tipo Lax-Wendroff haciendo énfasis en la formación de ondas de choque en el flujo sanguíneo a través de las arterias [8]. De acuerdo con lo anterior, la hipótesis básica del modelo propuesto en esta tesis es que las EDPH que describen el modelo de flujo sanguíneo se pueden resolver mediante la elaboración de un método numérico eficiente con propiedades robustas de estabilidad en varios escenarios fisiológicos.

El modelo describe el flujo de sangre a lo largo de una arteria suponiendo que el flujo es incompresible[9] y axisimétrico. El modelo se obtiene expresando las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y promediando en cada sección transversal. El modelo forma un sistema de leyes de conservación hiperbólicas para las cuales existe una teoría bien establecida en donde se analizan las propiedades comunes que presentan las soluciones a estas ecuaciones, como pueden ser la velocidad finita de la propagación de la información a través de curvas características, la formación en tiempo finito de ondas de choque (discontinuidades), entre otras. Las dificultades teóricas llevan a formulaciones de soluciones débiles (no necesariamente suaves) por una parte, y a la formulación de esquemas numéricos robustos y precisos tanto en regiones suaves como en puntos donde se presentan *brincos* en la solución. Aplicando esta teoría y adaptándola al modelo de flujo sanguíneo, en esta tesis el análisis se enfocará en el estudio de la formación de ondas de choque a lo largo de una arteria del sistema circulatorio. En algunas situaciones se estudiarán ondas de rarefacción en donde la solución es auto-similar y no presenta discontinuidades. Aún cuando la teoría para leyes de conservación ya existe, adaptarla al modelo de flujo sanguíneo no es directo y es necesario analizar las propiedades espectrales del modelo para poder entender el cálculo correcto de las soluciones. (a) Primero se analiza la influencia que tienen las variables del modelo en las soluciones del tipo ondas de choque y rarefacción. (b) Después se presenta un algoritmo numérico para estudiar el efecto que tienen algunas deformaciones de la arteria (estenosis). Algunos de los escenarios que se estudiarán involucran la formación de coágulos sanguíneos dentro de los conductos arteriales y el colapso del área transversal de los canales vasculares debido a la inflamación del revestimiento interno de los

mismos [10].

La tesis comprende los siguientes capítulos. En el capítulo 2 se describen propiedades elementales de dinámica de fluidos. Se discuten y se analizan la conservación de masa y el balance de momento y energía para obtener las ecuaciones de Euler. Tomando en cuenta la viscosidad, se integran fuerzas de superficie y tensiones de corte para llegar a las ecuaciones de Navier-Stokes. En el capítulo 3 se muestra parte de la teoría de leyes de conservación hiperbólicas. Se analizan las dificultades teóricas y numéricas son analizadas y se describe la teoría para solucionar tales dificultades para poder calcular de manera correcta y precisa las soluciones a tales sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. En el capítulo 4 se muestra de manera detallada la derivación del modelo. Se muestran además las propiedades espectrales del mismo, para utilizarlas en el cálculo de las soluciones. En el capítulo 5 se muestran algunas técnicas numéricas básicas para ecuaciones diferenciales parciales lineales de tipo hiperbólico. Se muestra la precisión de los métodos y las condiciones de estabilidad para su generalización a sistemas no lineales. Los resultados numéricos se muestran en el capítulo 6. Se detallan algunas comparaciones con soluciones exactas y se deja en evidencia las ventajas del método numérico implementado. Algunas demostraciones, identidades y definiciones se dejan en los apéndices.

## Capítulo 2

# Dinámica de fluidos

En este capítulo introduciremos los aspectos elementales de la dinámica de fluidos. En particular derivaremos las ecuaciones asociadas a la conservación de masa y los balances de momento y energía.

Un **fluido** es una sustancia que no tiene una forma definida pues adapta su volumen y forma a las fronteras del contenedor en el que se encuentra. Esto se debe a que los fluidos no soportan las fuerzas tangenciales (también conocidas como tensiones de corte) que se ejercen sobre su superficie. No obstante, los fluidos sí son capaces de ejercer y soportar fuerzas en la dirección normal a su superficie. Al movimiento de un fluido se le conoce como **flujo**.

Para estudiar cuerpos sólidos o rígidos, las propiedades relevantes que los caracterizan son de carácter extensivo, por ejemplo, la masa y la fuerza. En el caso de los fluidos, las propiedades intensivas tales como la **densidad** y la **presión** son más útiles para caracterizar su estudio.

Los fluidos más comunes son los **gases** y los **líquidos**. La propiedad que distingue a los gases de los líquidos es la **compresibilidad**; un gas es compresible, mientras que un líquido es incompresible. Por lo anterior, la densidad de un gas varía cuando la presión cambia, mientras que la densidad de un líquido permanece casi constante.

### 2.1. Fluidos en movimiento

La descripción del movimiento de un fluido real es bastante compleja. No obstante, es posible describir el movimiento aproximado de los fluidos introduciendo ciertas simplificaciones. El sistema resultante de dichas simplificaciones se conoce como **fluido ideal**, el cual posee las siguientes características:

- su flujo es **constante** o **laminar**; el flujo es ordenado, estratificado y suave;
- son **incompresibles**; su densidad tiene un valor constante como función de la posición y del tiempo;
- son **no viscosos**, no oponen resistencia al desplazarse; no hay fuerzas de fricción internas que resistan el movimiento de las mismas partículas en el fluido o de objetos externos;
- son **irrotacionales**, el flujo es suave e irrotacional; no presentan turbulencias.

La mecánica de fluidos ideales se describe mediante las ecuaciones de Euler que forman un conjunto de ecuaciones diferenciales hiperbólicas cuasilineales y están basadas en las leyes de **conservación de masa**, **balance de momento** y **conservación de energía**. Por otra parte, las **ecuaciones de Navier-Stokes** consisten en un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que describen la dinámica de los fluidos con viscosidad no despreciable, en presencia de esfuerzos externos y de términos fuente [11].

En esta tesis se estudia un modelo de fluido cuya dinámica se describe mediante un sistema hiperbólico de leyes de balance derivados de las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en cada sección transversal del dominio a considerar, que en ese caso es una arteria con sección transversal circular en cada punto axial de ésta.

## 2.2. Ecuaciones de Euler

*Esta sección está basada en el capítulo 1 de Chorin y Marsden [11].*

Sea una región  $D$  en el espacio (de dimensión 2 o 3) que contiene un fluido ideal y sea  $\mathbf{x} \in D$  la posición de una partícula de fluido al tiempo  $t$ . El vector  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  es la velocidad de la partícula que se mueve con  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$ . Para cada tiempo fijo,  $\mathbf{u}$  —el **campo espacial de velocidad del fluido**— es un campo vectorial en  $D$  (Figura 2.1).

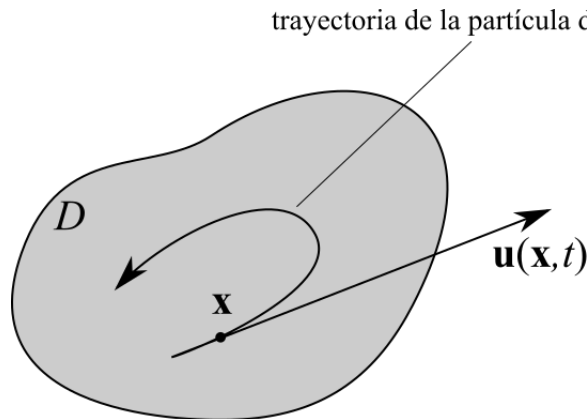


FIGURA 2.1: Partículas de fluido moviéndose en una región  $D$ , donde  $\mathbf{x}$  es la posición de la partícula de fluido y  $\mathbf{u}$  es la velocidad de la partícula.

Para introducir los principios básicos de la dinámica de un fluido ideal es necesario hacer un par de hipótesis preliminares:

- La densidad de masa  $\rho$  y la velocidad  $\mathbf{u}$  son funciones suaves, diferenciables, sin picos ni discontinuidades.
- La densidad  $\rho$  está bien definida en todo punto  $\mathbf{x}$ , consistente con un medio continuo.

De acuerdo a las ecuaciones de Euler, los tres principios básicos en los que se basa la mecánica de fluidos son:

1. la **conservación de la masa**,

2. el **balance del momento**, y
3. la **conservación de la energía**.

En las siguientes subsecciones se presenta la derivación de estos principios.

### 2.2.1. Conservación de la masa

Sea  $\Omega \subseteq D$  una subregión arbitraria de  $D$ . Si la **densidad**  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es una función del tiempo  $t$ , la masa total del fluido contenido dentro de  $\Omega$  a un tiempo  $t$  está dada por

$$m(\Omega, t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV$$

donde  $dV$  es el elemento de volumen en  $\mathbb{R}^d$  (donde  $d = 2$  o  $d = 3$ ). El principio de conservación de masa establece que

*la tasa de cambio de la masa en  $\Omega$  está dada por la cantidad de fluido que entra y/o sale por unidad de tiempo por la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .<sup>1</sup>*

Para calcular la tasa de cambio, se toma una pequeña sección de superficie  $dA$  en la frontera  $\partial\Omega$ , la cual tiene un vector normal unitario  $\mathbf{n}$  apuntando hacia afuera (Figura 2.2). La tasa de flujo volumétrico a través de  $\partial\Omega$  por unidad de área está dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA ,$$

y la tasa de flujo de masa por unidad de área se obtiene multiplicando la cantidad anterior por la densidad,

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA .$$

El punto  $\mathbf{x}$  se encuentra en el centro del elemento de área  $dA$  en  $\partial\Omega$ .

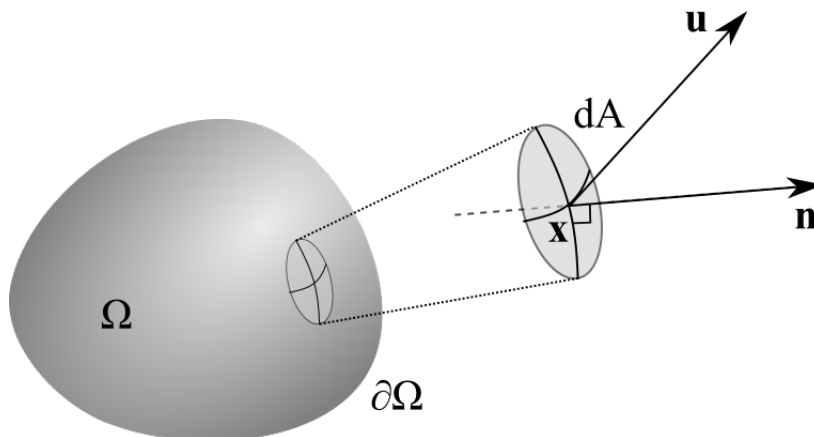


FIGURA 2.2: La masa que atraviesa la frontera  $\partial\Omega$  por unidad de tiempo es igual a la integral de superficie sobre  $\partial\Omega$  de  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ .

Para estimar el volumen de fluido que abandona la región  $\Omega$  por unidad de tiempo, se han considerado las componentes normal ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ) y tangencial de la velocidad  $\mathbf{u}$  en

<sup>1</sup>La frontera  $\partial\Omega$  se considera suave y sin discontinuidades.



el punto  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  al tiempo  $t$ . La única componente que se preserva es la componente normal, pues la componente tangencial sólo desplaza el fluido a través de la superficie; el fluido no entra ni sale de  $\Omega$  en la dirección tangencial.

La tasa de cambio de la masa del fluido en  $\Omega$  está dada por

$$\frac{d}{dt} m(\Omega, t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV .$$

Considerando el enunciado del principio de conservación de masa, junto con la expresión anterior, obtenemos la **forma integral de la ley de conservación de masa**,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA .}$$

La tasa de cambio de masa del fluido en  $\Omega$  es igual a la tasa con la que el fluido atraviesa  $\partial\Omega$  en dirección hacia adentro, es decir, en dirección contraria a  $\mathbf{n}$ , de ahí el signo negativo.

Utilizando el teorema de la divergencia en el lado derecho de la igualdad y suponiendo que la solución en cuestión es suave, se puede obtener una expresión equivalente,

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0 .$$

Debido a que esta expresión es válida para toda región  $\Omega$ , el integrando debe ser igual a cero,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 .} \quad (2.1)$$

Ésta es la **forma diferencial de la ley de conservación de masa**, también conocida como **ecuación de continuidad**.

### 2.2.2. Balance de momento

Sea  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  la trayectoria que sigue una partícula del fluido. El campo vectorial de velocidades está dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} .$$

De manera similar, la aceleración de una partícula de fluido se obtiene derivando de nuevo con respecto al tiempo, y se escribe como

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} ,$$

donde

$$\partial_t \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} .$$

La **derivada material** se define como el operador

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla .$$

Este operador toma en cuenta el hecho de que el fluido se está moviendo y de que las posiciones de las partículas de fluido cambian con el tiempo.

Si  $f(x, y, z, t)$  es cualquier función (escalar o vectorial) que depende de la posición y del tiempo, entonces, utilizando la regla de la cadena se obtiene,

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t), t) = \partial_t f + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{Df}{Dt}(x(t), y(t), z(t), t) .$$

En esta equivalencia se aprecia la relación que existe entre las dos formulaciones disponibles para realizar la descripción del movimiento de un fluido ideal: el lado izquierdo corresponde a la **formulación lagrangiana**, y el lado derecho corresponde a la **formulación euleriana**. La primera toma una perspectiva en donde el observador sigue el movimiento a través del espacio y del tiempo de un paquete individual de partículas del fluido. En la segunda formulación, la observación se realiza en posiciones específicas del espacio por donde pasan distintos paquetes de fluido.

Existen dos tipos de fuerzas que pueden actuar sobre un fluido: las **fuerzas superficiales** y las **fuerzas de bulto**. Las primeras actúan a través de la superficie del fluido mientras que las segundas ejercen una fuerza por unidad de volumen sobre el continuo. Las fuerzas normales y las tensiones de corte son algunos ejemplos de fuerzas superficiales; las fuerzas debidas a la gravedad o a los campos magnéticos y eléctricos son ejemplos de fuerzas de bulto.

Para que un fluido ideal se desplace es necesario aplicar una presión  $p(\mathbf{x}, t)$  sobre la superficie  $S$  del fluido . La fuerza de tensión ejercida a través de la superficie  $S$  por unidad de área en  $\mathbf{x} \in S$  al tiempo  $t$  está dada por

$$\text{fuerza a través de } S \text{ por unidad de área} = p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} ,$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario de la superficie  $S$ . La fuerza se ejerce en la dirección del vector  $\mathbf{n}$  por lo que actúa en dirección ortogonal a la superficie  $S$ , es decir, no se ejercen fuerzas tangenciales sobre  $S$  (Figura 2.3).

Si  $\Omega$  es una región en el fluido a un tiempo  $t$ , la fuerza total ejercida sobre el fluido que se encuentra dentro de  $\Omega$  debido a los esfuerzos aplicados sobre sus fronteras es

$$\mathbf{S}_{\partial\Omega} = \{\text{Fuerza sobre } \Omega\} = - \int_{\partial\Omega} p\mathbf{n} dA .$$

El signo negativo antes de la integral toma en cuenta que  $\mathbf{n}$  apunta hacia el exterior de  $\Omega$ . Sea  $\mathbf{e}$  un vector fijo en el espacio. Utilizando el teorema de la divergencia se establece la siguiente equivalencia,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{S}_{\partial\Omega} = - \int_{\partial\Omega} p\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{\Omega} \text{div}(p\mathbf{e}) dV = - \int_{\Omega} (\text{grad } p) \cdot \mathbf{e} dV .$$

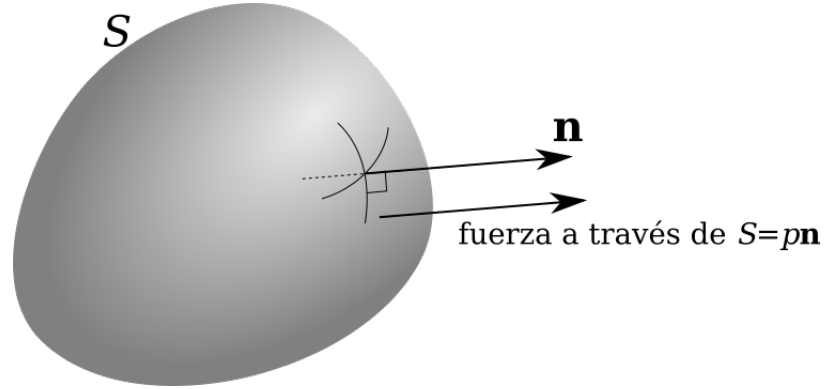


FIGURA 2.3: Fuerzas de presión a través de la superficie S.

Por lo tanto,

$$\mathbf{S}_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} \text{grad } p \, dV .$$

Si  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  es la fuerza de bulto por unidad de masa, entonces la fuerza de bulto total estará dada por la integral,

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \, dV .$$

De tal manera que, para cualquier porción del fluido, la fuerza total por unidad de volumen es la suma de las fuerzas de bulto y los esfuerzos aplicados en las fronteras:

$$\text{fuerza por unidad de volumen} = - \text{grad } p + \rho \mathbf{b} .$$

La fuerza total por unidad de volumen ejercida sobre un fluido está dada por el gradiente de la presión ejercida sobre su superficie ( $\nabla p$ ), y las fuerzas ejercidas sobre el bulto que constituye dicho fluido ( $\rho \mathbf{b}$ ). Utilizando la segunda ley de Newton escrita en términos de la derivada material, podemos llegar a la **forma diferencial del balance de momento**:

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \text{grad } p + \rho \mathbf{b} .} \quad (2.2)$$

La forma diferencial del balance de momento se puede usar para obtener una forma integral si se escribe explícitamente la derivada material,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b} .$$

Considerando que  $\partial(\rho \mathbf{u})/\partial t = \rho \partial \mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u} \partial \rho/\partial t$ , el lado izquierdo de la expresión se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) - \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b} .$$

Usando la ecuación de continuidad sobre el segundo término del lado izquierdo, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

Pasando el término de la divergencia hacia el lado derecho, llegamos a la siguiente expresión,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

Si multiplicamos esta expresión por un vector fijo  $\mathbf{e}$  cualquiera en el espacio, se puede demostrar que

$$\mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = -\operatorname{div}(p\mathbf{e} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})) + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}.$$

Si  $\Omega$  es un volumen fijo en el espacio, la tasa de cambio del momento en la dirección  $\mathbf{e}$  en  $\Omega$  es

$$\mathbf{e} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dV = - \int_{\partial\Omega} (p\mathbf{e} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} dV.$$

Por lo tanto, la **forma integral de la ley de balance de momento** está dada por:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dV = - \int_{\partial\Omega} (p\mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) dA + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV,} \quad (2.3)$$

donde la cantidad  $p\mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  es el **flujo de momento por unidad de área** que atraviesa  $\partial\Omega$ . El vector  $\mathbf{n}$  es normal y apunta hacia afuera de la superficie de  $\partial\Omega$ .

Como se puede observar, la deducción de la forma integral del balance de momento se realizó a partir de la forma diferencial (2.2). Si las hipótesis sobre la *suavidad* de  $\mathbf{u}$  y  $\rho$  no son tan flexibles como para suponer que existe suficiente *diferenciabilidad*, sería más pertinente partir de una forma integral. Para ello, hace falta introducir algunas nociones útiles sobre la trayectoria de una partícula del fluido.

Sea  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  la trayectoria *suave* que sigue la partícula que se localiza en un punto  $\mathbf{x} \in D$  al tiempo  $t$ , con condición inicial  $\varphi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ . Por otra parte,  $\varphi_t$  representa el mapeo  $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, t)$ , que mueve cada partícula de fluido desde su posición inicial al tiempo  $t = 0$  hasta su posición  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$ . El mapeo  $\varphi_t$  se llama **mapa de flujo**. Dada una región  $\Omega$  en  $D$ ,  $\varphi_t(\Omega) = \Omega_t$ , es el volumen  $\Omega$  en movimiento a un tiempo  $t$  (ver Figura 2.4).

Considerando que la tasa de cambio del momento de una porción de fluido en movimiento es igual a la suma de las fuerzas superficiales y fuerzas de bulto que actúan sobre él, se puede establecer una forma integral *primitiva* para el balance de momento,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dV = S_{\partial\Omega_t} + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} dV.} \quad (2.4)$$

Para probar la equivalencia entre las ecuaciones (2.3) y (2.4) basta demostrar la equivalencia entre las expresiones (2.2) y (2.4). Para ello se usa el **teorema de cambio de**

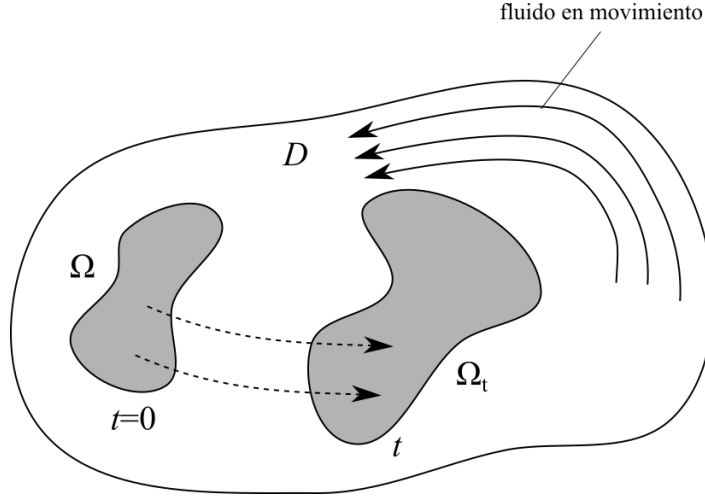


FIGURA 2.4:  $\Omega_t$  es la imagen de  $\Omega$  conforme las partículas de fluido en  $\Omega$  se mueven para en un tiempo  $t$ .

**variables** (ver anexo A.1) para escribir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV ,$$

donde  $J(\mathbf{x}, t) = \det(\nabla \varphi(\mathbf{x}, t))$ , con  $\nabla = \nabla_{\mathbf{x}}$ . Considerando que el volumen en su posición inicial está fijo se puede diferenciar bajo el signo de la integral

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dV &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t)] dV \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t)] J(\mathbf{x}, t) + (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \frac{\partial}{\partial t} [J(\mathbf{x}, t)] \right\} dV \end{aligned}$$

Nótese que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \left( \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{u}) \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t)$$

es la derivada material definida anteriormente. Para diferenciar  $J(\mathbf{x}, t)$  utilizaremos el siguiente lema:

**Lema** (Diferenciación de  $J(\mathbf{x}, t)$ ).

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) .$$

(La demostración de este lema se puede consultar en el anexo A.2).

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dV &= \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{u}) \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t) + (\rho \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \right\} \times J(\mathbf{x}, t) dV \\ &= \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{u}) + (\rho \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} \right\} dV . \end{aligned}$$

En este último paso utilizamos de nuevo el teorema de cambio de variables pero en el sentido contrario. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{u}) + (\rho \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} &= \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \frac{D\rho}{Dt} + (\rho \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left[ \frac{D\rho}{Dt} + (\rho \operatorname{div} \mathbf{u}) \right] \\ &= \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + (\rho \operatorname{div} \mathbf{u}) \right] = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] \stackrel{0}{=} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}. \end{aligned}$$

La cancelación se obtiene al utilizar la ecuación de continuidad (2.1). Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, dV.$$

Como se puede apreciar en la expresión (2.2), el integrando del lado derecho junta las fuerzas superficiales y de bulto que sugiere la forma integral primitiva del balance de momento (2.4). El mismo argumento se puede utilizar de manera similar para demostrar el **teorema de transporte**.

**Teorema** (Teorema de Transporte). *Para cualquier función  $f$  dependiente de  $x$  y de  $t$  tenemos*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f \, dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Df}{Dt} \, dV.$$

*Demostración.* Usando el teorema del cambio de variables podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f \, dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) \, dV.$$

$\Omega$  es una región del fluido al tiempo  $t = 0$  y  $\Omega_t = \varphi(\Omega)$  (el volumen del fluido en movimiento). Del lado derecho, al encontrarse el volumen fijo en su posición inicial, podemos diferenciar bajo el signo de la integral. Nótese que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \left( \frac{D}{Dt} \rho f \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t)$$

es la derivada material. Utilizando este resultado y el lema de diferenciación de la matriz jacobiana, podemos desarrollar la integral del lado derecho de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f \, dV &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \{ (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) \} \, dV \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{D}{Dt} \rho f \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t) + (\rho f)(\operatorname{div} \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \right\} J(\mathbf{x}, t) \, dV \\ &= \int_{\Omega_t} \left\{ \left( \frac{D}{Dt} \rho f \right) + (\rho f)(\operatorname{div} \mathbf{u}) \right\} \, dV. \end{aligned}$$

En este último paso se utilizó de nuevo el teorema de cambio de variables. Utilizando la ley de conservación de masa podemos constatar que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f \, dV = \int_{\Omega_t} \left\{ \left( \frac{D}{Dt} \rho f \right) - f \frac{\partial \rho}{\partial t} - f(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \right\} dV .$$

Desarrollando la derivada material  $D(\rho f)/Dt$ , eliminando términos y simplificando hallamos que

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f \, dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Df}{Dt} \, dV .}$$

■

Si  $\Omega$  y, por lo tanto,  $\Omega_t$  son arbitrarios y los integrandos son continuos, se habrá probado que la forma de la integral primitiva del balance de momento es equivalente a la forma diferencial. Consecuentemente, las tres formas del balance de momento son equivalentes.

### Flujos incompresibles

Trabajando en 3 dimensiones, podemos notar que tenemos 5 variables ( $u, v, w, p, \rho$ ) pero solamente 3 ecuaciones. Necesitamos una condición más para cerrar el sistema. Hay varias maneras de hacer esto, dependiendo de las condiciones del fluido. Mostraremos cómo proceder en caso de contar con un fluido incompresible. En este caso, el lema que muestra la relación  $\partial J / \partial t = (\operatorname{div} \mathbf{u})J$  es muy útil para comprender este concepto. En términos de la notación introducida anteriormente, un fluido es **incompresible** si para cualquier subregión  $\Omega$ ,

$$\text{volumen}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} dV = \text{constante en } t .$$

Así, la incompresibilidad del fluido es equivalente a

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} J \, dV = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) J \, dV = \int_{\Omega_t} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \, dV$$

para cualquier región  $\Omega_t$  en movimiento. Por lo tanto, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *el fluido es incompresible;*
2.  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ;
3.  $J \equiv 1$ .

De la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 ,$$

es decir,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

debido a que  $\rho > 0$ , entonces un fluido es incompresible si y sólo si  $D\rho/Dt = 0$ , es decir, la densidad de masa es constante durante el flujo. Si el fluido es **homogéneo** —la  $\rho$  es la misma en todo el espacio— también se sigue que el flujo es incompresible si y sólo si  $\rho$  es constante en el tiempo.

### 2.2.3. Conservación de energía

Un fluido en movimiento en un dominio  $D$  con un campo de velocidades  $\mathbf{u}$  tiene una **energía cinética**

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \|\mathbf{u}\|^2 dV,$$

donde  $\Omega \subset D$  y  $\|\mathbf{u}\|^2 = (u^2 + v^2 + w^2)$  es la norma al cuadrado de la función vectorial  $\mathbf{u}$ . Se considera que la energía total del fluido posee dos contribuciones,

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{interna}},$$

donde  $E_{\text{interna}}$  es la **energía interna** debida a los potenciales intermoleculares y las vibraciones internas de las partículas que constituyen el fluido. Si inyectamos energía al fluido o si permitimos que el fluido ejerza un trabajo,  $E_{\text{total}}$  cambiará.

Para calcular la razón de cambio temporal de la energía cinética de una porción  $\Omega_t$  de fluido en movimiento haremos uso del **teorema de transporte**. El cambio de la energía cinética con respecto al tiempo está dado por

$$\frac{d}{dt} E_{\text{cinética}} = \int_{\Omega_t} \rho \left( \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \right) dV.$$

Una introducción del principio de conservación de la energía requiere de una profundización más detallada sobre otros conceptos termodinámicos. En nuestro caso, la discusión se limitará al escenario específico de los **fluidos incompresibles** en los que solamente la energía cinética es la que se conserva, es decir,

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}},$$

y en donde la razón de cambio de la energía cinética en una porción de fluido es igual al ritmo con que la presión y las fuerzas de bulto realizan trabajo,

$$\frac{d}{dt} E_{\text{cinética}} = - \int_{\partial\Omega_t} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV.$$

Utilizando el teorema de la divergencia y las fórmulas anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho \left( \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \right) dV &= - \int_{\Omega_t} (\operatorname{div}(p\mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) \\ &= - \int_{\Omega_t} (\mathbf{u} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) dV, \end{aligned}$$



pues  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ . La ecuación anterior también es consecuencia del balance de momento. Adicionalmente podemos observar que si  $E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}}$  entonces el fluido debe ser incompresible (a menos que  $p = 0$ ).

En resumen, las ecuaciones de Euler para el caso de los fluidos incompresibles son

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{grad } p + \rho \mathbf{b}, \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0,$$

con la condición de frontera que impide que haya flujo hacia el exterior,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial D.$$

## 2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

Hasta este punto, hemos definido a un fluido ideal como aquel en donde las fuerzas superficiales son normales a la superficie. Esto descarta la posibilidad de que el momento se transfiera de manera tangencial a la superficie. Sin embargo, en la realidad, las fuerzas superficiales pueden tener componentes en cualquier dirección, por lo cual la fuerza por unidad de área no tiene un origen único en la presión aplicada sobre el fluido.

### 2.3.1. Fuerzas de superficie

Considérese la Figura 2.5. La velocidad  $\mathbf{u}$  —paralela a la superficie  $S$ — correspondiente al cuerpo  $B'$  es más grande que aquella del cuerpo  $B$ . Si todas las fuerzas son normales a  $S$  no habrá ninguna transferencia de momento entre los volúmenes  $B$  y  $B'$ . Sin embargo, en la realidad no todas las fuerzas son normales. Las moléculas más rápidas de  $B'$  arriba de  $S$  se difunden a través de la superficie e imparten momento al fluido que se encuentra debajo, en  $B$ . De la misma manera, las moléculas más lentas de  $B$  frenan a las que vienen arriba de  $S$ . En regiones donde el campo de velocidades del fluido cambia muy rápido a escalas pequeñas, este efecto es muy importante.

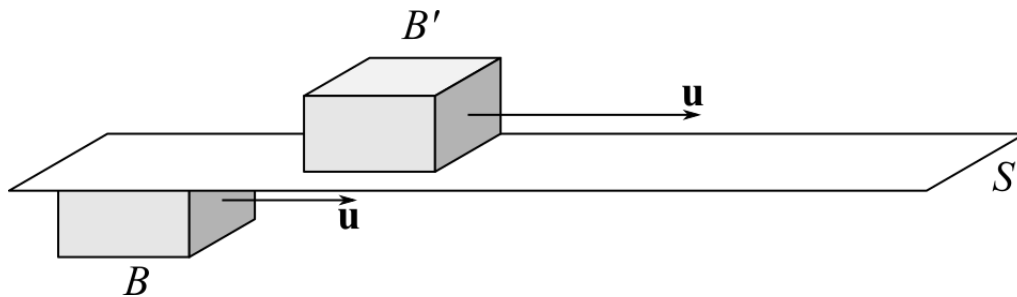


FIGURA 2.5: Las moléculas más rápidas en  $B'$  se pueden difundir a través de  $S$  e impartir momento a  $B$ .

Más formalmente, a la fuerza por unidad de área ejercida a través de la superficie se le llama **tensión**. Considérese una pequeña superficie imaginaria  $dA$  en el fluido centrada en un punto  $\mathbf{x}$  (Figura 2.6). La fuerza  $d\mathbf{F}$  ejercida por el lado (1) sobre el lado

(2) de  $dA$  en un material fluido (o cualquier material en general) está dada por

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}) dA ,$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es la tensión en el punto  $\mathbf{x}$  y es una función vectorial dependiente de la normal  $\mathbf{n}$  de la superficie  $dA$ . Más concretamente  $\boldsymbol{\Sigma}$  está dada por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{n} .$$

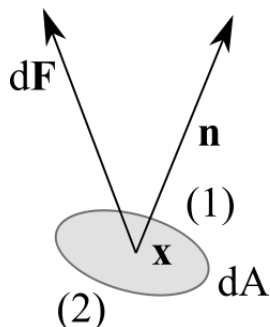


FIGURA 2.6: La fuerza  $d\mathbf{F}$  por el lado (1) sobre el lado (2) de  $dA$  está dada por  $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}) dA$ .

Nótese que  $\sigma = [\sigma_{ij}]$  es una matriz de  $3 \times 3$  conocida como **tensor de esfuerzos** o **tensor tensión**. Las componentes de la diagonal de  $\sigma_{ij}$ , con  $i = j$ , generan **tensiones normales**, mientras que las componentes fuera de la diagonal, con  $i \neq j$ , generan **tensiones de corte** o **tangenciales**. El tensor de esfuerzos  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$  se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \hat{\sigma} ,$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$  y  $p = p(\mathbf{x}, t)$  es la cantidad escalar que representa la presión del fluido, y se define como

$$p \equiv -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) .$$

La parte restante del tensor de esfuerzos  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\mathbf{x})$  se conoce como **tensor de esfuerzos desviadores**. En esta descomposición, el término  $-p\mathbf{I}$  genera las tensiones normales. El tensor de esfuerzos desviadores genera fuerzas o **tensiones de corte**.

### 2.3.2. Tensiones de corte

A continuación tomaremos en cuenta de forma explícita todas las fuerzas superficiales, incluyendo las fuerzas tangenciales o tensiones de corte y, en particular, al tensor de esfuerzos desviadores. Esto lo hacemos con el objetivo de obtener el modelo de un **fluido no-ideal**.

En primer lugar, supondremos que el tensor de esfuerzos desviadores  $\hat{\sigma}$  es una función de los gradientes de velocidad  $\nabla\mathbf{u}$ . Adicionalmente, es necesario realizar algunas suposiciones sobre las propiedades de  $\hat{\sigma}$ :

1. El tensor de esfuerzos  $\hat{\sigma}$  es **lineal** con  $\nabla \mathbf{u}$ ; cada componente de  $\hat{\sigma}$  está linealmente relacionada con el gradiente de velocidades  $\nabla \mathbf{u}$ .
2. El tensor de esfuerzos  $\hat{\sigma}$  es **isotrópico** bajo rotaciones de cuerpo rígido, es decir, no existen desplazamientos relativos entre las partículas del fluido. Si  $\mathbf{U}$  es una matriz ortogonal entonces

$$\hat{\sigma}(\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U} \cdot \hat{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

Esto es razonable ya que cuando un fluido se somete a una rotación de cuerpo rígido no debe haber difusión de momento.

3. El tensor de esfuerzos  $\hat{\sigma}$  es **simétrico**. Esta propiedad es consecuencia del balance de momento angular.

Por lo tanto, la fuerza en  $S$  por unidad de área ya no es  $-p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es normal a la superficie, sino

$$\text{fuerza en } S \text{ por unidad de área} = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} + \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n},$$

donde  $\sigma$  es una matriz de  $3 \times 3$  que recibe el nombre de **tensor de esfuerzos**; el producto  $\sigma \cdot \mathbf{n}$  no necesariamente es paralelo a  $\mathbf{n}$ .

La segunda ley de Newton establece que el ritmo de cambio de cualquier porción  $\Omega_t$  es igual a la fuerza que actúa sobre ella. Por lo tanto,  $\sigma$  modifica el transporte de momento a través de las fronteras de  $\Omega_t$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dV = - \int_{\partial \Omega_t} (p\mathbf{n} - \sigma \cdot \mathbf{n}) dA. \quad (2.5)$$

Considerando las propiedades anteriores se puede concluir que  $\sigma$  depende únicamente de la parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$ , es decir, del **tensor de deformación**  $\mathbf{D}$ . Como  $\sigma$  es una función lineal de  $\mathbf{D}$ ,  $\sigma$  y  $\mathbf{D}$  conmutan y pueden ser diagonalizadas de manera simultánea. Por lo tanto, los eigenvalores de  $\sigma$  son funciones lineales de los eigenvalores de  $\mathbf{D}$ . Por la propiedad 2, también deben ser simétricos pues podemos elegir un  $\mathbf{U}$  tal que permute dos eigenvalores de  $\mathbf{D}$  (por medio de la rotación en un ángulo de  $\pi/2$  alrededor de un eigenvector), y esto debe permutar los eigenvalores correspondientes de  $\sigma$ . Las únicas funciones que son simétricas en este sentido tienen la siguiente forma:

$$\sigma_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde  $\sigma_i$  son los eigenvalores de  $\sigma$  y  $d_i$  son aquellos de  $\mathbf{D}$ . Igualmente se definen las constantes  $\lambda$  y  $\mu$ . Recordando que  $d_1 + d_2 + d_3 = \text{div } \mathbf{u}$ , podemos utilizar la propiedad 2 para expresar  $\sigma_i$  en términos de la base original y deducir que

$$\sigma = \lambda(\text{div } \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. La expresión anterior se puede reescribir poniendo la traza en un sólo término,

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \left[ \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{u})\mathbf{I} \right] + \zeta(\text{div } \mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (2.7)$$

donde a  $\mu$  y  $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  se les llama respectivamente **primer** y **segundo coeficientes de viscosidad**.

Utilizando los teoremas de transporte y de la divergencia, el balance de momento —considerando el tensor de esfuerzos— da paso a las **ecuaciones de Navier-Stokes**,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} \quad (2.8)$$

donde

$$\nabla^2\mathbf{u} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{u}$$

es el laplaciano de  $\mathbf{u}$ .

Junto con las ecuaciones de continuidad y de conservación de energía, las ecuaciones de Navier-Stokes describen completamente el flujo de un fluido viscoso compresible.

Para el caso de un flujo homogéneo incompresible — $\rho = \text{constante}$ —, las ecuaciones de Navier-Stokes se reescriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\text{grad } p' + \nu\nabla^2\mathbf{u} \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\nu = \mu/\rho_0$  es el **coeficiente de viscosidad cinemática** y  $p' = p/\rho_0$ .

Para resolver estas ecuaciones es necesario proveer condiciones de frontera. En el caso de la ecuaciones de Euler para un flujo ideal  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ , es decir, el flujo no cruza las fronteras y sólo se mueve de forma tangencial con respecto a estas. Ya que las ecuaciones de Navier-Stokes incrementan el número de derivadas de una a dos, se necesita aumentar el número de condiciones de frontera tanto por razones matemáticas como experimentales. Por ejemplo, en una pared sólida en reposo podemos añadir la condición de que la velocidad tangencial también sea cero —conocida como condición de no deslizamiento— de manera que las condiciones de frontera quedan simplemente como

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en paredes sólidas en reposo.}$$

La necesidad matemática de la existencia de condiciones de frontera adicionales recae en su papel para probar que las ecuaciones se encuentran bien planteadas, es decir, que existe una solución única que depende de forma continua en la información inicial del problema. Se sabe que en tres dimensiones existen soluciones suaves a las ecuaciones para flujo incompresibles para tiempos cortos que dependen de los datos iniciales. Probar o refutar que existen soluciones para el flujo incompresible para todo tiempo es uno de los principales problemas en el campo de la mecánica de fluidos. En dos dimensiones, existen soluciones para todo tiempo, tanto para el flujo viscoso como para el no

viscoso. En cualquier caso, añadir la condición de frontera tangencial es crucial para describir el flujo viscoso.

La razón física por la cual se requieren condiciones de frontera adicionales proviene de experimentos simples que involucran flujo a través de una pared sólida. Por ejemplo, si se inyecta un tinte en el flujo a través de un conducto y se observa cuidadosamente cerca de la frontera de éste, uno puede observar que la velocidad tiende a cero en dicho límite con un alto grado de precisión. La condición de no deslizamiento también resulta razonable al considerar el mecanismo físico responsable de los términos viscosos como la difusión molecular. El ejemplo inicial indica que la interacción molecular entre la pared sólida con velocidad tangencial nula (o velocidad promedio cero a nivel molecular) debe impartir la misma condición al fluido inmediatamente adyacente.

Otro aspecto crucial de la condición de frontera  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  es que provee un mecanismo mediante el cual una frontera puede producir vorticidad en el fluido.

### 2.3.3. Ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales

Para un problema determinado, podemos elegir una **longitud característica**  $L$  y una **velocidad característica**  $U$ . Dichas cantidades son elegidas un tanto de forma arbitraria y son meramente escalas razonables de longitud y velocidad del problema en cuestión. De manera simultánea, al elegir ambos parámetros, se determina una escala temporal  $T = L/U$ .

Las variables  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  y  $t$  pueden expresarse en términos de dichos parámetros realizando un cambio de variables e introduciendo las siguientes cantidades adimensionales

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t' = \frac{t}{T}.$$

A continuación se muestra el procedimiento para expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de las nuevas variables no dimensionales. La componente  $x$  de la ecuación de Navier-Stokes es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right].$$

El cambio de variables produce

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u'U)}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + Uu' \frac{\partial(u'U)}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + Uv' \frac{\partial(u'U)}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + Uw' \frac{\partial(u'U)}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Lx')^2} + \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Ly')^2} + \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Lz')^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{U^2}{L} \right] \left[ \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right] \\ = - \left[ \frac{U^2}{L} \right] \frac{\partial(p/(\rho_0 U^2))}{\partial x'} + \left[ \frac{U}{L^2} \right] \nu \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right]. \end{aligned}$$

Se obtienen ecuaciones similares para el caso de las componente  $y$  y  $z$  de  $\mathbf{x}$ . Si combinamos las tres componentes y dividimos el resultado entre  $\frac{U^2}{L}$ , obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\text{grad } p' + \frac{\nu}{LU} \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (2.9)$$

donde  $p' = p/(\rho_0 U^2)$ . La condición de incompresibilidad queda como

$$\text{div } \mathbf{u}' = 0.$$

La expresión (2.9) engloba las ecuaciones de Navier-Stokes en variables adimensionales.

## 2.4. El número de Reynolds

El **número de Reynolds** se define como

$$\mathcal{R} = \frac{LU}{\nu},$$

el cual es una cantidad adimensional. En general, a dos fluidos con la misma geometría y el mismo número de Reynolds se les llama **similares**. Más precisamente, sean  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  dos flujos en las regiones  $D_1$  y  $D_2$  que se encuentran relacionadas por un factor de escala  $L_1 = \lambda L_2$ . Sean  $U_1$  y  $U_2$  las velocidades características elegidas para cada fluido y  $\nu_1$  y  $\nu_2$  las respectivas viscosidades. Si

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2, \quad \text{es decir} \quad \frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{L_2 U_2}{\nu_2},$$

entonces los campos de velocidad adimensionales  $\mathbf{u}'_1$  y  $\mathbf{u}'_2$  satisfacen exactamente la misma ecuación en la misma región. Se puede concluir entonces que  $\mathbf{u}_1$  se puede obtener a partir de una solución apropiadamente reescalada de  $\mathbf{u}_2$ , es decir,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son similares. La idea de similaridad de flujos es particularmente útil en el diseño de modelos experimentales.

De especial interés para los propósitos de este trabajo son aquellos casos en donde  $\mathcal{R}$  es grande. Cabe recalcar que comentarios como « $\nu$  es pequeño, por lo que los efectos viscosos no son importantes» no son completamente válidos pues dicha observación deja de lado las otras dimensiones que componen el problema, es decir, « $\nu$  es pequeño» no es una declaración con sentido físico, mientras que « $1/\mathcal{R}$ » sí es un enunciado relevante físicamente hablando.



## Capítulo 3

# Leyes de conservación hiperbólicas

Este capítulo está basado en LeVeque [8].

### 3.1. Teoría matemática de las leyes de conservación

Las leyes de conservación son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas —por lo general, no lineales— que tienen una estructura simple. En una dimensión, las ecuaciones tienen la siguiente forma genérica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un vector  $m$ -dimensional de variables de estado que permanecen constantes en el tiempo. Ejemplos de estas variables de estado son: la masa, el momento lineal, el momento angular y la energía. Específicamente, cada componente  $u_j$  del vector  $\mathbf{u}$  representa la función de densidad de la  $j$ -ésima variable de estado. Las funciones  $u_j$  representan la distribución espacial de las variables de estado a un tiempo  $t$ . La integral  $\int_{x_1}^{x_2} u_j(x, t) dx$  representa la cantidad total de dicha variable de estado en el intervalo  $[x_1, x_2]$  al tiempo  $t$ .

Cuando alguna de estas variables de estado se conserva, su integral  $\int_{-\infty}^{\infty} u_j(x, t) dx$  se mantiene constante con respecto al tiempo. La ecuación (3.1) se basa en la hipótesis de que conociendo el valor de  $\mathbf{u}(x, t)$  en un punto a un tiempo definido es posible determinar el **flujo** de cada variable de estado en el punto  $(x, t)$ . El flujo de la  $j$ -ésima componente está dado por una función  $f_j(\mathbf{u}(x, t))$  que, a su vez, es la  $j$ -ésima componente de la función vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ , llamada **función de flujo**,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Para que la ecuación (3.1) esté bien definida se requiere de una condición inicial y, de ser necesario, de condiciones de frontera en un dominio espacial delimitado. El problema más simple es el **problema de Cauchy**, en donde (3.1) se cumple en todo el espacio,  $-\infty < x < \infty$ , y para  $t \geq 0$ . En este caso, sólo es necesario especificar la condición inicial,

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Se dice que el sistema (3.1) es **hiperbólico** si la matriz jacobiana de  $m \times m$  formada por las derivadas de la función de flujo,  $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ , cumple con la siguiente propiedad: para cada valor de  $\mathbf{u}$ , los eigenvalores de  $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$  son reales y la matriz es diagonalizable, es decir, existe un conjunto completo de  $m$  eigenvectores linealmente independientes.



Para simplificar la notación, la ecuación (3.1) se escribirá

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0. \quad (3.2)$$

Ya que generalmente las funciones de flujo son funciones no lineales de  $\mathbf{u}$ , éstas producen sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) no lineales. A menudo no es posible derivar la solución exacta de estos sistemas y es necesario desarrollar algoritmos numéricos para obtener su solución aproximada. Las excepciones son las soluciones a los problemas de Riemann, en donde se pueden calcular soluciones exactas. Éstas soluciones se utilizan para evaluar las aproximaciones numéricas y verificar la efectividad de los métodos numéricos.

Un ejemplo típico de sistema de leyes de conservación son las ecuaciones de Euler para dinámica de gases que se derivaron en el capítulo 2. En una dimensión, las ecuaciones tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.3)$$

donde  $\rho = \rho(x, t)$  es la densidad,  $v$  es la velocidad,  $\rho v$  es la densidad de momento lineal,  $E$  es la energía y  $p$  es la presión. Ésta última está determinada por la *ecuación de estado* del gas. Las ecuaciones de Euler son versiones simplificadas de las ecuaciones de Navier-Stokes en donde los términos viscosos se desprecian.

### 3.1.1. Problema del tubo de onda de choque

Las leyes de conservación suelen tener soluciones con comportamientos interesantes. Un ejemplo es el problema del tubo de onda de choque. Dicho problema consiste en un tubo cilíndrico lleno de gas, inicialmente dividido en dos secciones por una membrana impermeable (Figura 3.1). La densidad y la presión del gas son mayores en la mitad izquierda del tubo y la velocidad del gas es cero en todo el dominio. A un tiempo  $t = 0$ , la membrana se remueve súbitamente dando lugar a un flujo neto en la dirección donde la presión es menor. Suponiendo que el flujo es uniforme a través del tubo se pueden aplicar las ecuaciones de Euler en una dimensión (3.3). La estructura de este flujo puede dar lugar a tres tipos de ondas en regiones espaciales diferentes:

1. una **onda de choque** se propaga hacia la región de menor presión produciendo un aumento súbito en la presión y la densidad, y todas las variables de estado son discontinuas;
2. una **discontinuidad de contacto** en donde la densidad es una función discontinua de la posición, pero la velocidad y la presión permanecen constantes;
3. una **onda de rarefacción** que se mueve en dirección opuesta; todas las variables de estado son continuas y se produce una transición suave. La densidad del gas disminuye (se enrarece) conforme pasa la onda.

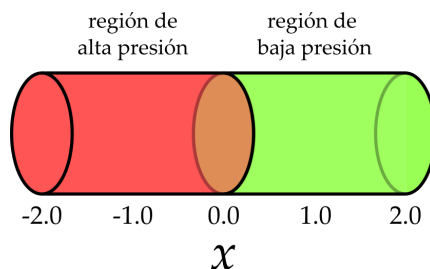
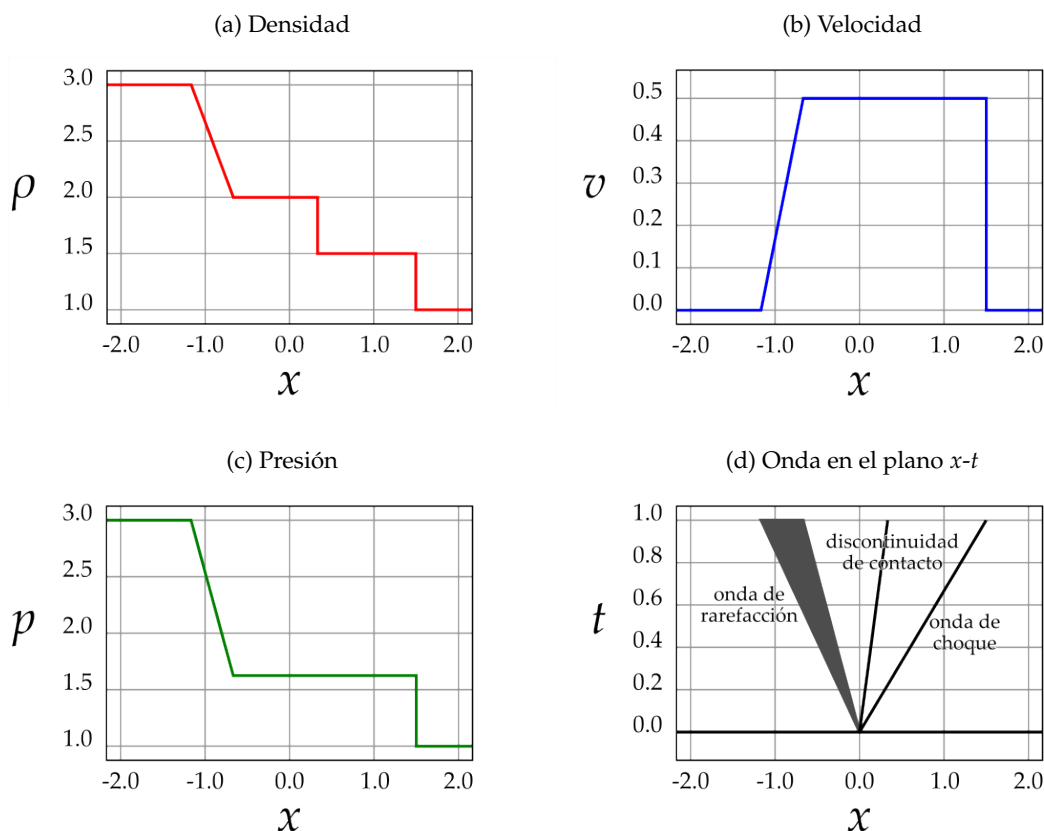


FIGURA 3.1: Problema del tubo de onda de choque.

Si la discontinuidad entre las dos secciones del tubo se encuentra en  $x = 0$ , obtendremos una *solución de similaridad* en la variable  $x/t$ . Esto significa que la solución  $\mathbf{u}(x, t)$  se puede expresar como una función de  $x/t$ ,  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{a}(x/t)$ . De la misma manera, tenemos que  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(kx, kt)$  para  $k > 0$ , por lo cual la solución se ve igual en los tiempos  $t$  y  $kt$  si se re-escala el eje  $x$ . Otra implicación del modelo es que las ondas del flujo se mueven a una velocidad constante y la solución  $\mathbf{u}(x, t)$  es constante a lo largo de todo *rayo*  $x/t = \text{constante}$  en el plano  $x-t$  (Figura 3.2).

FIGURA 3.2: Estructura del flujo para el problema del tubo de onda de choque al tiempo  $t = 1$ .

### 3.2. Retos de las leyes de conservación

Antes de continuar con el estudio de las leyes de conservación hiperbólicas es necesario tomar en cuenta las dificultades tanto matemáticas como numéricas que se presentan en el proceso de obtener una solución.

En el sentido clásico, las derivadas no están definidas en las discontinuidades. Por esta razón es necesario obtener una forma integral de la ley de conservación. A partir de la forma integral es posible obtener una forma diferencial haciendo suposiciones sobre la suavidad de la solución y proveyendo a las ecuaciones diferenciales de condiciones de salto adicionales que satisfagan las discontinuidades.

Otra dificultad matemática es la no-unicidad de la solución débil que se presenta cuando se desprecia algún aspecto físico en la formulación del modelo, como los efectos difusivos o la viscosidad. Para definir una solución débil única para un sistema hiperbólico conservativo es necesario introducir un término difusivo en las ecuaciones y tomar el límite cuando el coeficiente del término tiende a cero [12]. Sin embargo, dicha aproximación viscosa no es óptima pues requiere del análisis de sistemas de ecuaciones más complejos.

Para solventar lo anterior, se pueden derivar **condiciones de entropía** —análogas a la segunda ley de la termodinámica— que permiten reconocer aquellas discontinuidades que son físicamente correctas y conducen a una solución única en el límite no viscoso.

En el aspecto numérico, los retos predominantes son la estabilidad y la precisión de los métodos numéricos cerca de las discontinuidades. Una posible solución comprende el uso de un método estándar de diferencias finitas en las regiones derivables, en conjunto con un procedimiento explícito de monitoreo para localizar las discontinuidades. Este método es conocido como **rastreo de ondas de choque**.

Una aproximación que no necesita realizar algún tipo de rastreo explícito son los métodos de **captura de ondas de choque**. Estos métodos brindan una solución con aproximación de segundo orden en las regiones suaves de la solución y una resolución nítida en las discontinuidades. Estos métodos también eliminan las oscilaciones espurias y son consistentes con la forma débil de la ley de conservación. También proveen límites de estabilidad no lineales que, junto con la consistencia, permiten probar la convergencia conforme se refina la malla. Por último, la captura de ondas de choque posee una forma discreta de la condición de entropía para garantizar la convergencia hacia la solución débil físicamente correcta. Los métodos que poseen estas características de precisión y resolución se conocen como **métodos de alta resolución**.

Para sistemas lineales hiperbólicos, las líneas **características** juegan un papel muy importante. Para sistemas no lineales, la generalización de esta teoría es la solución a un **problema de Riemann**. Éste consiste en la ley de conservación con las siguientes condiciones iniciales separadas por una discontinuidad,

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_r & x < 0, \\ \mathbf{u}_\ell & x > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

En el caso de las ecuaciones de Euler, este es el problema del tubo de ondas de choque que se planteó anteriormente. La solución a este problema tiene una estructura relativamente simple y en muchos casos se puede calcular explícitamente. Mediante un método numérico podemos estimar un conjunto de valores discretos  $\mathbf{U}_j^{(n)}$  que aproxime a  $\mathbf{u}(x_j, t_n)$  en un conjunto de puntos  $\{(x_j, t_n)\}$ . Podemos obtener una gran cantidad de información de la estructura local de la solución cerca de  $(x_j, t_n)$  mediante la resolución del problema de Riemann con datos  $\mathbf{u}_\ell = \mathbf{U}_j^{(n)}$  y  $\mathbf{u}_r = \mathbf{U}_{j+1}^{(n)}$ .

En la mayoría de los métodos numéricos aplicables a sistemas de EDPs no es posible obtener los resultados de estabilidad no lineal para probar su convergencia. Se requiere más análisis en el caso sencillo de una ecuación escalar. En particular, es posible demostrar que en muchos métodos numéricos la variación total de la solución decrece en el tiempo. Esto es suficiente para obtener algunos resultados de convergencia y garantiza que no se generen oscilaciones espurias. Aquellos métodos que cumplen con esta propiedad se conocen como métodos de **Disminución de Variación Total (TVD)**.

### 3.3. Derivación de la leyes de conservación

Para comprender cómo surgen las leyes de conservación a partir de principios físicos, consideramos un fluido moviéndose en un tubo, en donde sus propiedades (densidad de masa, momento, energía, etcétera) se describen mediante un vector de soluciones  $\mathbf{u}(x, t)$ . Supondremos por otro lado que la cantidad de fluido cruzando por unidad de área por unidad de tiempo (en un punto  $x$ ) está dado por  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ . En una sección  $[x_1, x_2]$ ,

$$\text{propiedades en } [x_1, x_2] \text{ a un tiempo } t = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u}(x, t) dx . \quad (3.5)$$

Si suponemos que las paredes del tubo son impermeables y consideramos que no hay creación ni destrucción de masa, entonces el cambio en la sección  $[x_1, x_2]$  está dado por el flujo en los puntos  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u}(x, t) dx = -\mathbf{f}(\mathbf{u})(x_2, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u})(x_1, t) . \quad (3.6)$$

Esta expresión es una **forma integral** de la ley de conservación. Se puede obtener otra expresión integrando esta última en el intervalo  $[t_1, t_2]$ . Esto resulta en una expresión de las propiedades en  $[x_1, x_2]$  al tiempo  $t_2 > t_1$ , en términos de los valores al tiempo  $t_1$  y el flujo total (integrado) en cada frontera durante dicho periodo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u}(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u}(x, t_1) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_2, t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1, t)) dt . \quad (3.7)$$

Para derivar la forma diferencial de la ley de conservación debemos suponer que  $\mathbf{u}(x, t)$  es una función derivable. Considerando que

$$\mathbf{u}(x, t_2) - \mathbf{u}(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) dt , \quad (3.8)$$

y

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_2, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1, t)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)))}{\partial x} dx, \quad (3.9)$$

la ecuación (3.7) se vuelve:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t))) \right\} dx dt = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Debido a que esta expresión es válida para cualquier sección  $[x_1, x_2]$  en cualquier intervalo  $[t_1, t_2]$ , podemos concluir que el integrando en (3.10) debe ser cero:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)))_x = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Para el caso de dinámica de gases y las ecuaciones de Euler correspondientes tenemos que las cantidades conservadas son

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{bmatrix} \rho(x, t) \\ \rho(x, t)v(x, t) \\ E(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

y cuyo flujo es

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + p(\mathbf{u}) \\ u_2(u_3 + p(\mathbf{u}))/u_1 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Aquí  $\rho$  es la densidad,  $v$  la velocidad, y la energía está dada por una ecuación de estado  $E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{p}{\gamma-1}$ , donde  $\gamma$  es una razón de constante de gases.

### 3.4. Leyes de conservación escalares

Muchas de las propiedades de los sistemas hiperbólicos se pueden explicar de manera más sencilla a partir de ecuaciones escalares, las cuales se pueden generalizar de forma directa para sistemas vectoriales. A partir del ejemplo de la ecuación de advección lineal y de la ecuación de Burgers, describiremos las soluciones débiles, ondas de choque, de rarefacción y condiciones de entropía para las ecuaciones hiperbólicas escalares. Como la dimensión de las ecuaciones escalares es 1, éstas se pueden escribir de la siguiente forma:

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (3.14)$$

#### 3.4.1. Ecuación de advección lineal

La ecuación de advección lineal surge al suponer que la velocidad del fluido es constante, dando un flujo lineal  $f(u) = au$ . La ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$u_t + au_x = 0. \quad (3.15)$$

Para esta ecuación, el problema de Cauchy se define en el dominio  $-\infty < x < \infty, t \geq 0$  junto con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.16)$$

Se puede verificar que, si  $u_0$  es diferenciable, la solución es

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (3.17)$$

Conforme transcurre el tiempo, la información inicial simplemente se propaga hacia la derecha con velocidad  $a$  (si  $a > 0$ ) o bien hacia la izquierda (si  $a < 0$ ). La solución  $u(x, t)$  es constante a lo largo de cada rayo  $x - at = x_0$ , los cuales se conocen como **líneas características** de la ecuación.

Las características son curvas en el plano  $x-t$  que son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)  $x'(t) = a, x(0) = x_0$ . Si diferenciamos  $u(x, t)$  a lo largo de una de estas curvas para encontrar la tasa de cambio de  $u$  sobre la característica, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t), \\ &= u_t + au_x, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

con lo cual confirmamos que  $u$  es constante a lo largo de las características.

Asimismo podemos considerar una ecuación con coeficiente de advección que depende de la posición,

$$u_t + (a(x)u)_x = 0, \quad (3.19)$$

donde  $a(x)$  es una función derivable.

La ecuación (3.19) se puede reescribir como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + a(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = -a'(x)u(x, t). \quad (3.20)$$

De lo anterior se sigue que la evolución de  $u$  a lo largo de cualquier curva característica  $x(t)$  definida por

$$x'(t) = a(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (3.21)$$

es solución de la EDO:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = -a'(x(t))u(x(t), t). \quad (3.22)$$

Las curvas determinadas por (3.21) son las características. En este caso, la solución  $u(x, t)$  no es constante a lo largo de dichas curvas, pero se puede determinar fácilmente resolviendo dos conjuntos de EDOs.

### 3.4.2. Ecuación de Burgers

Considérese la ecuación no lineal de tipo escalar,

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (3.23)$$

donde  $f(u)$  es una función no lineal de  $u$ . Supondremos que, en su mayor parte,  $f(u)$  es una función convexa,  $f''(u) > 0$  para toda  $u$ .

En el caso particular en donde  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , la expresión (3.23) se denomina ecuación de Burgers. Esta ecuación —sin términos viscosos— se escribe como

$$u_t + uu_x = 0. \quad (3.24)$$

Considérese la ecuación de Burgers no viscosa (3.24) con valores iniciales derivables. Para un tiempo pequeño, la solución se puede construir siguiendo las características. Se observa que la ecuación (3.24) se parece mucho a la ecuación de advección con la particularidad de que la velocidad de advección  $u$  es igual al valor de la cantidad transportada. Las características son soluciones de la ecuación:

$$x'(t) = u(x(t), t), \quad (3.25)$$

y a lo largo de cada característica  $u$  permanece constante pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t), \\ &= u_t + uu_x, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como  $u$  es constante sobre cada característica, la pendiente  $x'$  (3.25) es constante, y por lo tanto las características son líneas rectas que determinadas por las condiciones iniciales.

Si la información inicial es derivable, entonces ésta se puede utilizar para determinar la solución  $u(x, t)$  para  $t$  suficientemente pequeña de forma que las características no se crucen. Para cada  $(x, t)$  podemos resolver la ecuación

$$x = \xi + u(\xi, 0)t, \quad (3.27)$$

para  $\xi$  y luego  $u(x, t) = u(\xi, 0)$ .

### 3.4.3. Soluciones débiles

Otra forma de definir una solución generalizada de la ecuación no viscosa, sin requerir que sea derivable es utilizando la forma integral de la ley de conservación. Se dice entonces que  $u(x, t)$  es una solución generalizada de la ecuación de conservación si (3.10) se cumple para todo  $x_1, x_2, t_1$  y  $t_2$ .

Otro enfoque que conduce a una formulación integral consiste en multiplicar la EDP por una *función de prueba*, e integrarla una o más veces sobre cierto dominio, para luego

integrar por partes para remover las derivadas de la función  $u$ . El resultado es una ecuación que involucra menos derivadas de  $u$  y requiere de menos suavidad.

Para este caso, utilizaremos funciones de prueba  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .  $C_0^1$  es el espacio de las funciones continuamente derivables con *soporte compacto*. Esto último significa que  $\phi(x, t)$  es igual a cero fuera de algún dominio acotado, garantizando que el soporte de la función esté en un conjunto compacto.

Si multiplicamos (3.23) por  $\phi(x, t)$  y luego integramos sobre  $x$  y  $t$ , obtenemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi u_t + \phi f(u)_x] dx dt = 0. \quad (3.28)$$

Integrando por partes se obtiene

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t u + \phi_x f(u)] dx dt = - \int_{-\infty}^\infty \phi(x, 0) u(x, 0) dx. \quad (3.29)$$

Procediendo de esta forma prácticamente todos los términos de la frontera que normalmente resultan de la integración por partes desaparecen debido a que  $\phi$  tiene soporte compacto, y por lo tanto se anulan en infinito. El límite restante se calcula usando las condiciones iniciales de la EDP.

**Definición.** La función  $u(x, t)$  se llama **solución débil** de la ley de conservación si la ecuación (3.29) se cumple para toda función  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

La ventaja de esta formulación alternativa a la forma integral original (3.7) es que la integración en (3.29) se realiza sobre un dominio fijo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . La forma integral (3.7) se hace sobre un rectángulo arbitrario, y para verificar que  $u(x, t)$  es una solución es necesario probar que esto se cumple para cualquier elección de los intervalos,  $x_1, x_2, t_1, t_2$ . La nueva forma (3.29) tiene una propiedad similar con una mayor facilidad de verificación; debemos comprobar que (3.29) se cumple para toda  $\phi \in C_0^1$ .

Matemáticamente, las dos formas integrales son equivalentes y es razonable esperar que ambas se conecten de manera más directa sin involucrar la ecuación diferencial. Esto se puede lograr considerando las funciones de prueba especiales  $\phi(x, t)$  que tienen la siguiente propiedad,

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{para } (x, t) \in [x_1, x_2] \times [t_1, t_2], \\ 0 & \text{para } (x, t) \notin [x_1 - \epsilon, x_2 + \epsilon] \times [t_1 - \epsilon, t_2 + \epsilon], \end{cases} \quad (3.30)$$

con  $\phi$  derivable en la franja intermedia de ancho  $\epsilon$ . Entonces,  $\phi_x = \phi_t = 0$  excepto en esta franja y por lo tanto la integral (3.29) se reduce a una integral sobre esta franja. Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\phi_x$  y  $\phi_t$  aproximan a funciones delta que muestrean  $u$  o  $f(u)$  a lo largo de los límites del rectángulo  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ , de manera que (3.29) se aproxima a (3.7). Haciendo esto de manera rigurosa, podemos demostrar que cualquier solución débil suave satisface la ecuación original de la ley de conservación. **Nota:** Una solución fuerte es una solución suave que satisface la forma diferencial de la ley de conservación; cualquier solución débil suave es también solución fuerte.

La solución generalizada con viscosidad decreciente definida anteriormente es una solución débil en el sentido establecido por (3.29), y por lo tanto incluye la solución



buscada. Desafortunadamente, las soluciones débiles no son únicas, por lo que surge el problema de identificar la solución débil que tiene sentido físico. No obstante, se pueden introducir otras condiciones en las soluciones débiles que son más fáciles de verificar y permiten identificar la solución débil correcta. Estas condiciones se denominan **condiciones de entropía**, de las cuales la solución de viscosidad decreciente forma parte. (Ver subsección 3.4.6).

### 3.4.4. El problema de Riemann

El problema de Riemann consiste en una ley de conservación con condiciones iniciales constantes por intervalos separados por una sola discontinuidad. Como ejemplo, considérese la ecuación de Burgers  $u_t + uu_x = 0$  con

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_\ell & x < 0, \\ u_r & x > 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

La forma de la solución depende de la relación entre  $u_\ell$  y  $u_r$ .

**Caso 1:**  $u_\ell > u_r$ .

En este caso, existe una solución débil única,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_\ell & x < st, \\ u_r & x > st, \end{cases} \quad (3.32)$$

donde

$$s = \frac{u_\ell + u_r}{2} \quad (3.33)$$

es la **velocidad de choque** que corresponde a la velocidad con la cual viaja la discontinuidad. Las *características* en cada una de las regiones donde  $u$  es constante *chocan* conforme transcurre el tiempo (Figura 3.3).

**Caso 2:**  $u_\ell < u_r$ .

En este caso existe un número infinito de soluciones débiles. Una de éstas es una onda de choque definida por las expresiones (3.32) y (3.33), en donde la discontinuidad se propaga con velocidad  $s$  (Figura 3.4). Las características *salen* de la región de choque, pero la solución no es estable ante la aplicación de perturbaciones. Si la información se suavizara un poco o si se añadiera una viscosidad pequeña a la ecuación, la solución cambia completamente.

Una solución débil, estable ante la aplicación de perturbaciones, es la **onda de rarefacción** (Figura 3.5) y es de hecho la solución generalizada de viscosidad decreciente,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_\ell & x < u_\ell t, \\ x/t & u_\ell/t \leq x \leq u_r t, \\ u_r & x > u_r t. \end{cases} \quad (3.34)$$

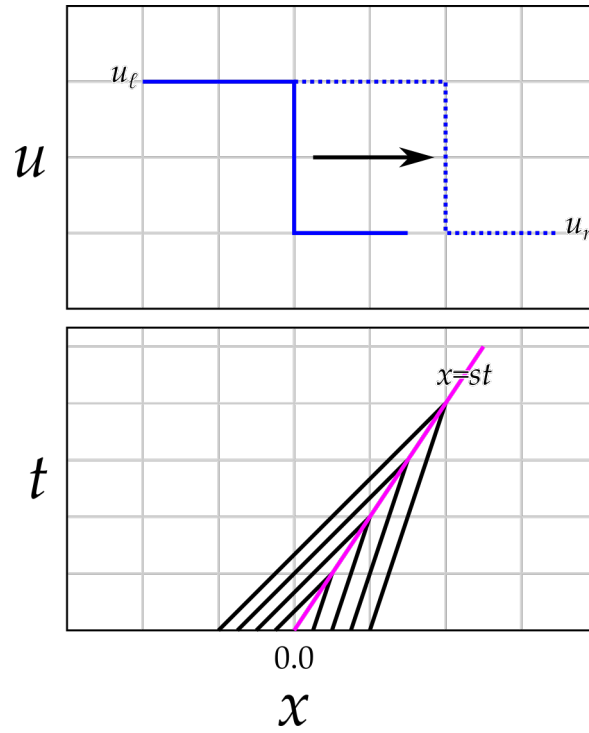


FIGURA 3.3: Onda de choque.

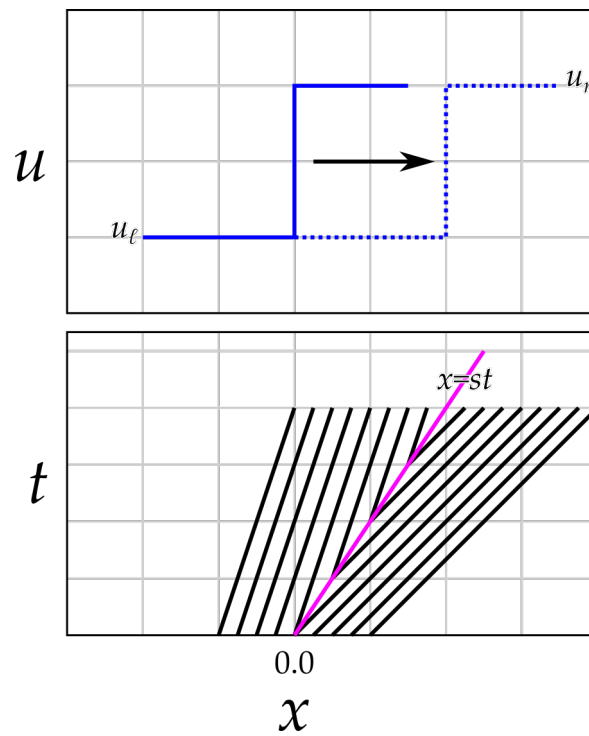


FIGURA 3.4: Onda de choque con violación de entropía.

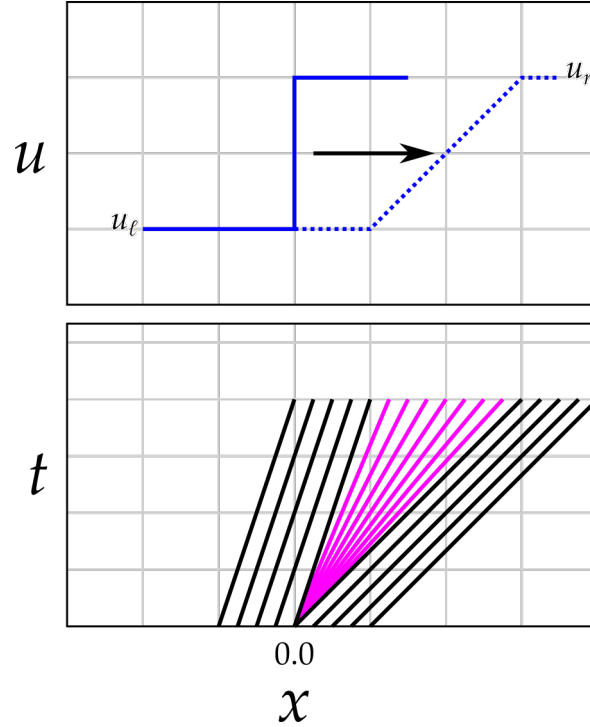


FIGURA 3.5: Onda de rarefacción.

### 3.4.5. Velocidad de choque

La velocidad de propagación se puede determinar mediante una ecuación de conservación. Para la ecuación de Burgers, si  $M$  es grande en comparación con  $st$ , entonces, de acuerdo con (3.7),  $\int_{-M}^M u(x, t) dx$  debe aumentar a una tasa

$$\frac{d}{dt} \int_{-M}^M u(x, t) dx = f(u_\ell) - f(u_r) = \frac{1}{2}(u_\ell + u_r)(u_\ell - u_r). \quad (3.35)$$

Por otro lado, la solución (3.32) cumple con

$$\int_{-M}^M u(x, t) dx = (M + st)u_\ell + (M - st)u_r, \quad (3.36)$$

de tal forma que

$$\frac{d}{dt} \int_{-M}^M u(x, t) dx = s(u_\ell - u_r). \quad (3.37)$$

Comparando las ecuaciones (3.35) y (3.37), obtenemos la ecuación (3.33).

Para una función de flujo arbitraria  $f(u)$  este mismo argumento conduce a la relación entre la velocidad de choque  $s$  y los estados  $u_\ell$  y  $u_r$ . Dicha relación se denomina **condición de salto de Rankine-Hugoniot (R-H)**:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) = s(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r). \quad (3.38)$$

Para problemas escalares,

$$s = \frac{f(u_\ell) - f(u_r)}{u_\ell - u_r} = \frac{[f]}{[u]}, \quad (3.39)$$

donde  $[\cdot]$  indica el salto de cierta cantidad a través de la discontinuidad. Cualquier condición de salto es permitida siempre que la velocidad satisfaga la ecuación (3.39).

Para sistemas de ecuaciones, las cantidades  $\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r)$  son vectores, mientras que  $s$  continúa siendo una cantidad escalar. No siempre es posible resolver  $s$  para que la ecuación (3.38) sea válida; sólo están permitidos aquellos saltos para los cuales los vectores  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r)$  y  $\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r$  son linealmente dependientes.

Por ejemplo, para el sistema lineal con  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ , con la condición (3.38) se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) = s(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r), \quad (3.40)$$

es decir,  $\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r$  debe ser un eigenvector de la matriz  $\mathbf{A}$  y  $s$  su eigenvalor correspondiente. Para un sistema lineal, estos eigenvalores son las velocidades características. Por tanto, las discontinuidades sólo se pueden propagar a lo largo de dichas características.

Las condiciones de R-H (3.38), en general se cumplen a través de cualquier onda de choque que se propaga, donde  $\mathbf{u}_\ell$  y  $\mathbf{u}_r$  denotan los valores inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la discontinuidad y  $s$  es la velocidad instantánea correspondiente, que varía junto con  $\mathbf{u}_\ell$  y  $\mathbf{u}_r$ .

### 3.4.6. Condiciones de entropía

Como ya se ha mencionado, existen situaciones en donde la solución débil no es única y se requiere de una condición adicional para elegir la solución viscosa físicamente relevante. Si bien podemos encontrar la solución en el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , esta no es una opción fácil de trabajar. Afortunadamente, se pueden encontrar condiciones más sencillas. A continuación se enuncian cuatro versiones de la **condición de entropía**:

**Condición de entropía (versión I):** Una discontinuidad que se propaga con velocidad  $s$  dada por la ecuación (3.38) cumple con la condición de entropía si

$$f'(u_\ell) > s > f'(u_r). \quad (3.41)$$

donde  $f'(u)$  es la velocidad característica.

**Condición de entropía (versión II):** La función  $u(x, t)$  es la solución de entropía si todas las discontinuidades tienen la siguiente propiedad,

$$\frac{f(u) - f(u_\ell)}{u - u_\ell} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r}, \quad (3.42)$$

para toda  $u$  que se encuentre entre  $u_\ell$  y  $u_r$ .

**Condición de entropía (versión III):** La función  $u(x, t)$  es la solución de entropía si existe una constante  $E > 0$  tal que

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{E}{t}. \quad (3.43)$$

para toda  $a > 0, t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ .

**Condición de entropía (versión IV):** La función  $u(x, t)$  es una solución de entropía si para toda función convexa de entropía  $\eta(u)$  y sus correspondientes flujos de entropía  $\psi(u)$  se satisface *débilmente* la desigualdad

$$\eta(u)_t + \psi(u)_x \leq 0. \quad (3.44)$$

### 3.5. Sistemas hiperbólicos lineales

Consideraremos el sistema lineal conservativo con función de flujo  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad (3.45)$$

donde  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz constante. Este sistema se llama **hiperbólico** si  $\mathbf{A}$  es diagonalizable con eigenvalores reales,

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \quad (3.46)$$

donde  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  es una matriz diagonal con eigenvalores reales y  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 | \dots | \mathbf{r}_m]$  es una matriz conformada por eigenvectores derechos. Podemos observar que  $\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}$ , es decir,

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_p = \lambda_p \mathbf{r}_p \quad \text{para } p = 1, 2, \dots, m. \quad (3.47)$$

El sistema es **estrictamente hiperbólico** si todos los eigenvalores son distintos.

#### 3.5.1. Variables características

Podemos resolver (3.45) utilizando la representación de **variables características**,

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}. \quad (3.48)$$

Multiplicando (3.45) por  $\mathbf{R}^{-1}$  y utilizando (3.46) obtenemos

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}, \quad (3.49)$$

o bien, debido a que  $\mathbf{R}^{-1}$  es constante,

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{v}_x = \mathbf{0}. \quad (3.50)$$

Como  $\mathbf{\Lambda}$  es diagonal, esta matriz se puede desacoplar en  $m$  ecuaciones escalares linealmente independientes,

$$(v_p)_t + \lambda_p(v_p)_x = 0 \quad p = 1, 2, \dots, m. \quad (3.51)$$

Cada una es una ecuación de advección lineal con coeficiente constante con solución

$$3v_p(x, t) = v_p(x - \lambda_p t, 0). \quad (3.52)$$

Ya que  $\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$ , la condición inicial para  $v_p$  es la  $p$ -ésima componente del vector

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_0(x). \quad (3.53)$$

La solución al sistema original se recupera finalmente por medio de la ecuación (3.48):

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{R}\mathbf{v}(x, t). \quad (3.54)$$

Obsérvese que el valor  $v_p(x, t)$  es el coeficiente de  $\mathbf{r}_p$  en un desarrollo de eigenvectores del vector  $\mathbf{u}(x, t)$ , es decir, la ecuación (3.54) se puede escribir como

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^m v_p(x, t)\mathbf{r}_p. \quad (3.55)$$

Lo anterior, combinado con las soluciones de las ecuaciones (3.52) resulta en

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^m (x - \lambda_p t, 0)\mathbf{r}_p. \quad (3.56)$$

Podemos observar que  $\mathbf{u}(x, t)$  depende solamente de la información inicial en los  $m$  puntos  $x - \lambda t$ , de manera que el dominio de dependencia está definido por  $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{t}) = \{x = \bar{x} - \lambda \bar{t}, p = 1, 2, \dots, m\}$ .

Las curvas  $x = x_0 + \lambda_p t$  que satisfacen  $x'(t) = \lambda_p$  se llaman **características de la  $p$ -ésima familia**, o  **$p$ -características**. Éstas son líneas rectas en el caso de un sistema con coeficiente constante. Para un sistema estrictamente hiperbólico,  $m$  características distintas pasan a través de cada punto en el plano  $x-t$ . El coeficiente  $v_p(x, t)$  de  $\mathbf{r}_p$  en (3.55) es constante a lo largo de cualquier  $p$ -característica.

### 3.6. Linealización de sistemas no lineales

Considérese el sistema no lineal de leyes de conservación

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (3.57)$$

donde  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La forma cuasi-lineal del sistema es

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0, \quad (3.58)$$

donde  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u})$  es la matriz jacobiana de tamaño  $m \times m$ .

Podemos definir las características integrando los eigenvalores de  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ , recordando que existen  $m$  curvas características a través de cada punto. Las curvas  $x(t)$  en la  $p$ -ésima familia satisfacen

$$x'(t) = \lambda_p(\mathbf{u}(x(t), t)), \quad x(0) = x_0, \quad (3.59)$$

para alguna  $x_0$ . En este caso  $\lambda_p$  depende de  $\mathbf{u}$  —la solución al problema—, y por lo tanto no es posible resolver el sistema determinando primero las características y luego resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a lo largo de las características. Sin embargo, las características proveen de información valiosa acerca de lo que sucede localmente. En particular, si linealizamos el problema alrededor de un estado constante  $\bar{\mathbf{u}}$  obtenemos un sistema lineal de coeficientes constantes, con una matriz jacobiana fija,  $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}})$ . A partir de esto, la solución se puede desarrollar de la forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \bar{\mathbf{u}} + \epsilon \mathbf{u}^{(1)}(x, t) + \epsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(x, t) + \dots, \quad (3.60)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}$  es constante y  $\epsilon$  es pequeña. Podemos encontrar que  $\mathbf{u}^{(1)}(x, t)$  satisface

$$\mathbf{u}_t^{(1)} + \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{u}_x^{(1)}(x, t) = 0. \quad (3.61)$$

Perturbaciones pequeñas se propagan (de forma aproximada) a lo largo de las curvas características, es decir,  $x_p(t) = x_0 + \lambda_p(\bar{\mathbf{u}})t$ . Se pueden obtener correcciones de orden superior mediante la retención de más términos en el desarrollo. La propagación de las discontinuidades y otras singularidades se puede estudiar mediante el uso de expresiones similares.

### 3.7. Ondas de choque débiles para sistemas

Para un sistema lineal las singularidades se propagan sólo a lo largo de las características, sin embargo, esto no ocurre en problemas no lineales. En su lugar, la condición de salto de Rankine-Hugoniot (3.38) se debe satisfacer para una discontinuidad que se propaga, es decir,

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) = s(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r), \quad (3.62)$$

donde  $s$  es la velocidad de propagación. Sin embargo, para discontinuidades muy débiles, aún se puede hacer uso de la teoría lineal. Supongamos que

$$\|\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell\| \equiv \epsilon < 1. \quad (3.63)$$

En este caso, el desarrollo de  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell)$  alrededor de  $\mathbf{u}_r$  resulta en

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_r) + \mathbf{f}'(\mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.64)$$

de manera que (3.62) implica que  $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) = s(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . En el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , el vector normalizado  $(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_r)/\epsilon$  debe aproximarse a un eigenvector de  $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_r) = \mathbf{A}(\mathbf{u}_r)$  con  $s$  acercándose al eigenvalor correspondiente.

## Capítulo 4

# El modelo de flujo sanguíneo

### 4.1. Derivación de las ecuaciones del modelo

*Esta sección está basada en Canic y Kim [1].*

La sangre fluye hacia todo punto del cuerpo humano a través de los vasos sanguíneos. Estos se pueden aproximar mediante canales cilíndricos estrechos en la escala de distancias del orden de 10 cm, con simetría alrededor de un eje, y por ello se les conoce como **conductos axisimétricos**. Debido a esto, las ecuaciones del modelo del flujo sanguíneo, resultan de expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y desarrollarlas en potencias del parámetro  $\varepsilon = R_0/L_0$ , que representa la razón del radio ( $R_0$ ) con respecto a la longitud de la arteria ( $L_0$ ). En esta tesis se realiza la aproximación de las ecuaciones de Navier-Stokes a orden  $\varepsilon$ . Dicha aproximación se denomina **método de la reducción asintótica**. Todas las ecuaciones se escribirán en términos de las coordenadas cilíndricas,  $(x, r, \theta)$ , donde  $x$  es la coordenada axial,  $r$  es la coordenada radial y  $\theta$  es la coordenada azimutal. Las componentes de la velocidad del fluido en estas coordenadas son  $\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\theta)$ . No hay que confundir esta notación con la notación de derivadas parciales. Se estudiará la dinámica de flujo sin vorticidad y en consecuencia la componente angular de la velocidad fluido se considerará nula, ( $u_\theta = 0$ ). Partiendo de lo anterior, las ecuaciones de movimiento del fluido son:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right]. \quad (4.2)$$

Además, se considera que el fluido es incompresible[9], es decir,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} = 0. \quad (4.3)$$

Para facilitar el análisis de las ecuaciones de movimiento, éstas se expresarán en términos de variables adimensionales.



### 4.1.1. Ecuaciones adimensionales

Para obtener las ecuaciones (4.1) y (4.2) en su forma adimensional, se consideran las siguientes **cantidades características**:

$U_x$ : velocidad axial característica (a lo largo de  $x$ ).

$U_r$ : velocidad radial característica (a lo largo de  $r$ ).

$L_0$ : longitud axial característica de la arteria.

$R_0$ : radio interno característico de la arteria.

Con base en éstas se definen las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} x &= L_0 \tilde{x}, & u_x &= U_x \tilde{u}_x, \\ r &= R_0 \tilde{r}, & u_r &= U_r \tilde{u}_r, \\ t &= \frac{L_0}{U_x} \tilde{t}, & p &= \rho U_x^2 \tilde{p}. \end{aligned}$$

El parámetro  $\varepsilon$  se puede reescribir en términos del cociente de velocidades,

$$\varepsilon = \frac{R_0}{L_0} = \frac{U_r}{U_x} \quad (4.4)$$

que se obtienen dividiendo  $R_0$  y  $L_0$  entre el *tiempo característico*  $T$ , el cual debe ser consistente con todas las coordenadas del sistema, es decir,

$$\frac{R_0}{U_r} = \frac{L_0}{U_x} = T.$$

La forma adimensional de la condición de incompresibilidad (4.3) se obtiene aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (R_0 \tilde{r} U_r \tilde{u}_r) + \frac{1}{L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (R_0 \tilde{r} U_x \tilde{u}_x) = 0.$$

Como las cantidades características son constantes, las podemos factorizar de las derivadas parciales. Dividiendo la ecuación entre  $U_r$  obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r) + \frac{U_x R_0}{U_r L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{r} \tilde{u}_x) = 0. \quad (4.5)$$

Debido a que  $U_x R_0 / U_r L_0 = 1$ , tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{r} \tilde{u}_x) = 0. \quad (4.6)$$

De manera similar, se puede escribir la versión adimensional de cada una de las ecuaciones de Navier-Stokes (4.1) y (4.2). La ecuación (4.1) en variables no dimensionales se

escribe

$$\begin{aligned} \frac{U_x}{L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (U_x \tilde{u}_x) + \frac{U_r \tilde{u}_r}{R_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (U_x \tilde{u}_x) + \frac{U_x \tilde{u}_x}{L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (U_x \tilde{u}_x) + \frac{1}{\rho} \frac{U_x^2 \rho}{L_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \\ = \nu \left[ \frac{U_x}{R_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{U_x}{R_0 \tilde{r}} \frac{1}{R_0} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} + \frac{U_x}{L_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}^2} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando toda la ecuación por  $L_0/U_x^2$ , obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \frac{U_r L_0}{R_0 U_x} \tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\nu L_0}{U_x R_0^2} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} + \frac{R_0^2}{L_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}^2} \right].$$

El coeficiente del segundo término del lado izquierdo es  $U_r L_0 / R_0 U_x = 1$ . El último término del lado derecho es de orden  $\varepsilon^2$  y por lo tanto se considera despreciable. Después de realizar las manipulaciones anteriores y multiplicar por  $\tilde{r}$  se obtiene

$$\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \tilde{r} \tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} + \tilde{r} \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\nu L_0}{U_x R_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} \right) \right],$$

donde el segundo y tercer términos del lado izquierdo pueden reescribirse considerando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r \tilde{u}_x) &= \tilde{u}_x \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r) + \underbrace{\tilde{r} \tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}}}_{\text{subrayado}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{r} \tilde{u}_x^2) &= \tilde{u}_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{r} \tilde{u}_x) + \underbrace{\tilde{r} \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}}}_{\text{subrayado}}. \end{aligned}$$

Despejando los términos subrayados en las fórmulas anteriores y sustituyéndolos en la ecuación de interés obtenemos

$$\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r \tilde{u}_x) - \tilde{u}_x \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{r} \tilde{u}_x^2) - \tilde{u}_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{r} \tilde{u}_x) + \tilde{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\nu L_0}{U_x R_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} \right) \right].$$

El tercer y quinto términos (con signo negativo), al sumarse, constituyen la condición de incompresibilidad (4.6), por lo que se eliminan. De esta forma, la ecuación (4.1) en variables adimensionales se vuelve

$$\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r \tilde{u}_x) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{r} \tilde{u}_x^2) + \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{p})}{\partial \tilde{x}} = \frac{\nu L_0}{U_x R_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Al igual que la ecuación (4.1), la ecuación (4.2) en variables adimensionales se obtiene aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{U_x}{L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (U_r \tilde{u}_r) + \frac{U_r}{R_0} \tilde{u}_r \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (U_r \tilde{u}_r) + \frac{U_x}{L_0} \tilde{u}_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (U_r \tilde{u}_r) + \frac{1}{\rho R_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\rho U_x^2 \tilde{p}) \\ = \nu \left[ \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} (U_r \tilde{u}_r) + \frac{1}{R_0 \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (U_r \tilde{u}_r) - \frac{U_r \tilde{u}_r}{R_0^2 \tilde{r}^2} + \frac{1}{L_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (U_r \tilde{u}_r) \right]. \end{aligned}$$

Factorizando los términos constantes de las derivadas parciales y multiplicando toda la ecuación por  $R_0/U_x^2$  obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{R_0 U_r}{L_0 U_x} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{u}_r) + \frac{U_r^2 \tilde{u}_r}{U_x^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{u}_r) + \frac{R_0 U_r \tilde{u}_x}{L_0 U_x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{u}_r) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} \\ = \nu \left[ \frac{U_r}{R_0 U_x^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} (\tilde{u}_r) + \frac{U_r}{R_0 U_x^2 \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (U_r \tilde{u}_r) - \frac{U_r \tilde{u}_r}{R_0 U_x^2 \tilde{r}^2} + \frac{R_0 U_r}{L_0^2 U_x^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (U_r \tilde{u}_r) \right]. \end{aligned}$$

Todos los términos, excepto el de la presión  $\tilde{p}$  son de orden  $\varepsilon^2$ . Por lo tanto, la forma adimensional de la ecuación (4.2) es

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = 0. \quad (4.8)$$

La expresión anterior sugiere que la presión permanece constante a través de toda la sección transversal del conducto, es decir,  $\tilde{p}$  no depende de  $\tilde{r}$ . Es importante recalcar que éste resultado parte de la suposición de que los coeficientes que multiplican cada una de las derivadas en la ecuación son tan pequeños que dichas componentes se pueden despreciar. Hay que tener presente que en este caso estamos suponiendo que el largo y el radio del conducto arterial tienen una diferencia de varios grados de magnitud (Canic y Kim [1] considera, por ejemplo, el caso específico de la aorta abdominal, que se encuentra entre las arterias renal e ilíaca y cuyas dimensiones características son  $R_0 = 0.1$  m y  $L_0 = 0.0082$  m). Otros escenarios en donde la dependencia entre la presión y el radio tiene otra forma se tendrían que analizar caso por caso, pero en principio, considerando la geometría del sistema arterial (conductos largos y estrechos), la ecuación (4.8) es válida para la mayoría de los problemas de este tipo.

#### 4.1.2. Ecuaciones promediadas

Las ecuaciones (4.7) y (4.8) se pueden expresar en términos de cantidades promedio. Para ello es necesario introducir un par de variables adicionales. Sean  $\tilde{R}$  el radio interior del conducto en forma adimensional y  $\langle \tilde{u}_x \rangle$  la velocidad axial promedio a través del área transversal del conducto, entonces,

$$\langle \tilde{u}_x \rangle = \frac{1}{\tilde{R}^2} \int_0^{\tilde{R}} 2\tilde{u}_x \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (4.9)$$

De manera similar, definimos a  $\alpha$  como

$$\alpha = \frac{\langle \tilde{u}_x^2 \rangle}{\langle \tilde{u}_x \rangle^2} = \frac{1}{\tilde{R}^2 \langle \tilde{u}_x \rangle^2} \int_0^{\tilde{R}} 2\tilde{u}_x^2 \tilde{r} d\tilde{r}, \quad (4.10)$$

que representa el término de corrección conocido como **coeficiente de Coriolis**. Este coeficiente es un ajuste que toma en cuenta la diferencia que existe entre el momento real y el momento promedio. Cuando el perfil de velocidades  $\tilde{u}_x$  es independiente de  $x$ ,  $\alpha$  adquiere un valor constante.

Para expresar las ecuaciones de momento (4.7) y (4.8) en términos de  $\langle \tilde{u}_x \rangle$  y  $\alpha$  es necesario integrarlas entre los límites  $\tilde{r} = 0$  a  $\tilde{r} = \tilde{R}$ . Supondremos que la condición de frontera en  $\tilde{r} = \tilde{R}$  cumple con las propiedades de un **flujo laminar**, es decir

$$[\tilde{u}_r]_{\tilde{r}=\tilde{R}} = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{x}} [\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{t}}. \quad (4.11)$$

Las propiedades del flujo sanguíneo permiten estimar un número de Reynolds bajo (normalmente menor a 2500), lo cual caracteriza a este flujo como laminar o no turbulento.

Al integrar la condición de incompresibilidad (4.3), resulta

$$[\tilde{r}\tilde{u}_r]_{\tilde{r}=\tilde{R}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_0^{\tilde{R}} (\tilde{r}\tilde{u}_x) d\tilde{r} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{x}} [\tilde{r}\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}} = 0.$$

Utilizando la definición de  $\langle \tilde{u}_x \rangle$  y evaluando en  $\tilde{r} = \tilde{R}$  se obtiene

$$\tilde{R}[\tilde{u}_r]_{\tilde{r}=\tilde{R}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \langle \tilde{u}_x \rangle \frac{\tilde{R}^2}{2} \right) - \tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{x}} [\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}} = 0. \quad (4.12)$$

Sustituyendo la condición de flujo laminar en esta ecuación obtenemos

$$\tilde{R} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \langle \tilde{u}_x \rangle \frac{\tilde{R}^2}{2} \right) = 0.$$

Podemos reescribir el resultado anterior en forma conservativa:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{R}^2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{R}^2 \langle \tilde{u}_x \rangle) = 0.} \quad (4.13)$$

De manera similar, al integrar la primer ecuación de momento, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_0^{\tilde{R}} \tilde{r}\tilde{u}_x d\tilde{r} - \underbrace{\tilde{R}[\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}}}_{\tilde{R}[\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{t}} + \underbrace{\tilde{R}[\tilde{u}_r\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}}}_{\tilde{R}[\tilde{u}_r\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}}} \\ + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_0^{\tilde{R}} \tilde{r}\tilde{u}_x^2 d\tilde{r} - \underbrace{\tilde{R}\tilde{u}_x^2}_{\tilde{R}\tilde{u}_x^2} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{x}} + \int_0^{\tilde{R}} \tilde{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\nu L_0}{U_x R_0^2} \tilde{R} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} \right]_{\tilde{r}=\tilde{R}}. \end{aligned}$$

Nótese que al factorizar  $\tilde{R}[\tilde{u}_x]_{\tilde{r}=\tilde{R}}$  de los términos subrayados en la ecuación anterior, estos se cancelan, pues constituyen los términos de la condición de flujo laminar (4.11). Adicionalmente, la integral que involucra a la presión puede resolverse ya que  $\tilde{p}$  es independiente de  $\tilde{r}$  (ver ecuación (4.8)),

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_0^{\tilde{R}} \tilde{r}\tilde{u}_x d\tilde{r} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_0^{\tilde{R}} \tilde{r}\tilde{u}_x^2 d\tilde{r} + \frac{\tilde{R}^2}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\nu L_0}{U_x R_0^2} \tilde{R} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} \right]_{\tilde{r}=\tilde{R}}.$$

Finalmente, utilizando las definiciones de  $\langle \tilde{u}_x \rangle$  y  $\alpha$  (y multiplicando por 2), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( \frac{\tilde{R}^2 \langle \tilde{u}_x \rangle}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\langle \tilde{u}_x \rangle^2 \tilde{r}^2 \alpha}{2} \right) + \frac{\tilde{R}^2}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\nu L_0}{U_x R_0^2} \tilde{R} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{r}} \right]_{\tilde{r}=\tilde{R}}. \quad (4.14)$$

### 4.1.3. Ecuaciones promediadas en forma dimensional

Utilizando las relaciones entre cantidades adimensionales y dimensionales, podemos obtener la velocidad axial promedio  $\langle \tilde{u}_x \rangle$  en términos de las cantidades dimensionales, es decir,

$$\langle \tilde{u}_x \rangle = \frac{R_0^2}{R^2} \int_0^R 2 \frac{u_x}{U_x} \frac{r}{R_0} \frac{1}{R_0} dr = \frac{2}{U_x R^2} \int_0^R r u_x dr ,$$

La velocidad axial promedio en forma dimensional se define como

$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{R^2} \int_0^R 2r u_x dr ,$$

la cual establece una relación entre  $\langle \tilde{u}_x \rangle$  y  $\langle u_x \rangle$ ,

$$\langle u_x \rangle = U_x \langle \tilde{u}_x \rangle ,$$

consistente con la transformación de la componente axial de la velocidad ( $u_x = U_x \tilde{u}_x$ ).

De manera similar, podemos reescribir el coeficiente de Coriolis en términos de variables dimensionales,

$$\alpha = \frac{R_0^2 U_x^2}{R^2 U^2} \int_0^R 2 \frac{u_x^2}{U_x^2} \frac{r}{R_0^2} dr = \frac{1}{R^2 U^2} \int_0^R 2u_x^2 r dr . \quad (4.15)$$

Con la finalidad de simplificar la notación utilizada reescribiremos la velocidad promedio  $\langle u_x \rangle$  simplemente como  $u$ . Teniendo en cuenta lo anterior, la condición de incompresibilidad y la primera ecuación de momento se pueden escribir en términos de cantidades promediadas y variables dimensionales de la siguiente forma

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (R^2 u) = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^2 u) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha R^2 u^2) + \frac{R^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 2\nu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (4.17)$$

### 4.1.4. Viscosidad

Como el objetivo consiste en escribir ecuaciones en términos de las cantidades promediadas es necesario especificar el perfil de velocidad axial  $u_x$ . El perfil de velocidad más simple es cuando no depende de  $x$  por lo que el término viscoso es homogéneo, obteniendo que  $\alpha$  es constante.

Una aproximación típica para  $u_x$  es el flujo de Hagen-Poiseuille,

$$u_x = \frac{\gamma + 2}{\gamma} u \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (4.18)$$

Con  $\gamma = 2$ , la ecuación anterior describe el flujo de un líquido newtoniano. Por otro lado, se ha reportado que  $\gamma = 9$  es un valor que se ajusta de manera apropiada a los datos experimentales [14]. Este valor de  $\gamma$  corresponde al flujo de un líquido no newtoniano,

que aproxima razonablemente bien el flujo sanguíneo considerando que la sangre es una suspensión de elementos celulares —predominantemente, glóbulos rojos— en plasma.

Al sustituir la expresión para  $u_x$  (4.18) en  $\alpha$  (4.15) se obtiene

$$\alpha = \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1},$$

de donde se obtiene la siguiente relación

$$\gamma = \frac{2 - \alpha}{\alpha - 1}$$

Nótese que para el valor  $\gamma = 9$  se obtiene un valor  $\alpha = 1.1$ . Diferenciando el término de viscosidad (lado derecho) de la primera ecuación de momento (4.17) tenemos que

$$f_v = 2\nu R \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_{r=R} = 2\nu R \left( -\frac{(\gamma + 2)u}{R} \right) = -2(\gamma + 2)\nu u \quad (4.19)$$

#### 4.1.5. Ecuaciones de conservación en forma dimensional

Después de sustituir el término de viscosidad (4.19) en el lado derecho de (4.17) podemos expresar las ecuaciones (4.16) y (4.17) en términos del área transversal de la arteria  $A = \pi R^2$  y el flujo volumétrico  $Q = Au$ . Las ecuaciones de conservación de masa y momento resultan

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -2 \frac{\alpha}{\alpha - 1} \nu \frac{Q}{A}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde se ha escalado la viscosidad  $\nu$  con  $\pi$ , ( $\pi\nu \rightarrow \nu$ ). Podemos notar que el escalamiento  $A = \pi R^2$  no afecta el modelo debido a que la forma del sistema de ecuaciones se preserva.

Para tener un sistema completo de ecuaciones es necesario especificar la presión, que esta relacionada con la distensibilidad (propiedad que permite el alargamiento de una estructura) de los vasos sanguíneos. La ecuación que define la presión es la siguiente [15]:

$$p(A) = G_0 \left( \left( \frac{A}{A_0} \right)^{\beta/2} - 1 \right). \quad (4.21)$$

donde  $A_0$  representa el área de la sección transversal característica (sin estar sometida a estrés). El parámetro  $G_0$  es el coeficiente de elasticidad, proporcional al módulo de Young. Cuando  $\beta = 2$ , se obtiene una relación lineal entre la presión y el área, y proporciona un buen ajuste con datos experimentales. Cuando  $\beta > 2$  la relación es no-lineal y en el límite cuando  $\beta \rightarrow \infty$  corresponde a paredes del conducto rígidas.

## 4.2. Propiedades del modelo de flujo sanguíneo

Las ecuaciones que definen el modelo de flujo sanguíneo (4.20) se pueden escribir en forma conservativa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha Q^2 \\ \frac{\beta}{\rho(\beta+2)} A[p(A) + G_0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{\alpha}{\alpha-1} \nu \frac{Q}{A} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En términos de  $A$  y  $u$ , la ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha Au^2 \\ \frac{\beta}{\rho(\beta+2)} A[p(A) + G_0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{\alpha}{\alpha-1} \nu u \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

La forma **cuasilineal** del modelo es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \frac{Q^2}{A^2} + \frac{A}{\rho} p'(A) & \frac{2\alpha Q}{A} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{\alpha}{\alpha-1} \nu \frac{Q}{A} \end{pmatrix}; \quad (4.24)$$

en términos de  $A$  y  $u$  tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha u^2 + \frac{A}{\rho} p'(A) & 2\alpha u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{\alpha}{\alpha-1} \nu u \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

donde

$$p'(A) = \frac{\partial p(A)}{\partial A} = \frac{G_0 \beta}{2A_0} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{\frac{\beta}{2}-1}. \quad (4.26)$$

En la siguiente sección se plantea la solución analítica correspondiente.

## 4.3. Solución analítica

Esta sección se basa en las técnicas descritas en [8]. El sistema de conservación hiperbólico (4.25), se puede escribir en forma compacta como:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = \mathbf{0}, \quad (4.27)$$

(donde  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$  es la matriz jacobiana de la función de flujo  $\mathbf{f}$ ). Tomando en cuenta la relación que existe entre la función de flujo  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  y las curvas características de la solución  $\mathbf{u}(x, t)$  en el plano  $x-t$ , buscaremos una solución de la forma,

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{a}(x/t), \quad (4.28)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t &= \mathbf{a}' \cdot [-x/t^2], \\ \mathbf{u}_x &= \mathbf{a}' \cdot [1/t].\end{aligned}\quad (4.29)$$

Reescribiendo la ecuación (4.27) en términos de  $\mathbf{a}$ , sus derivadas y de la nueva variable  $\xi = x/t$ , se obtiene:

$$-\xi \mathbf{a}'(\xi) + \mathbf{A}(\mathbf{a}(\xi)) \mathbf{a}'(\xi) = \mathbf{0}, \quad (4.30)$$

de tal forma que

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}(\xi)) \mathbf{a}'(\xi) = \xi \mathbf{a}'(\xi), \quad (4.31)$$

es decir, para cada  $\xi = x/t$ , la matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{a}(\xi))$  (al ser de  $2 \times 2$ ) tiene dos eigenvalores  $\xi$  con correspondientes eigenvectores  $d\mathbf{a}/d\xi$ . Esto es,

$$\mathbf{a}'(\xi) = \alpha(\xi) \mathbf{r}_p(\mathbf{A}(\mathbf{a}(\xi))), \quad (4.32)$$

donde  $\mathbf{a}'(\xi)$  es un múltiplo del  $p$ -ésimo eigenvector derecho  $\mathbf{r}_p$  de la matriz  $\mathbf{A}$  ( $p = 1, 2$ ) y  $\alpha(\xi)$  es un escalar. De esta manera, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} &= \alpha(\xi) \mathbf{r}_p(\mathbf{a}(\xi)), \\ \xi &= \lambda_p(\mathbf{a}(\xi)).\end{aligned}\quad (4.33)$$

Si derivamos la segunda ecuación (4.33) con respecto a  $\xi$  y sustituyendo  $\mathbf{a}'(\xi)$  con (4.32), obtenemos

$$1 = \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_p \cdot \alpha(\xi) \mathbf{r}_p. \quad (4.34)$$

Resolviendo para  $\alpha(\xi)$ ,

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_p \cdot \mathbf{r}_p}. \quad (4.35)$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación en (4.33) se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} = \frac{\mathbf{r}_p(\mathbf{a}(\xi))}{\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_p(\xi) \cdot \mathbf{r}_p(\xi)}. \quad (4.36)$$

La parte de abajo se anula cuando  $\lambda_p(\xi)$  no depende de  $\xi$  (es decir  $\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_p(\xi) \equiv 0$  para todo  $\xi$ ) o cuando su gradiente es perpendicular a  $\mathbf{r}_p(\xi)$  (**campos degenerados**[8]).

#### 4.3.1. Aplicación al modelo sanguíneo

Se define la velocidad del sonido como:

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho} p'(A)} = \sqrt{\frac{G_0 \beta}{2\rho} \left(\frac{A}{A_0}\right)^{\beta/2}}.$$



Los dos eigenvalores de la matriz en (4.24) son

$$\lambda_{1,2} = \alpha u \mp \sqrt{\alpha(\alpha - 1)u^2 + c^2}. \quad (4.37)$$

Los eigenvectores derechos que corresponden a estos eigenvalores son:

$$\mathbf{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha u \mp \sqrt{\alpha(\alpha - 1)u^2 + c^2} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Con la información anterior se puede construir una solución exacta de dos estados conectados por una onda de rarefacción en la  $p$ -ésima familia, con  $p = 1, 2$ . Para ello, se considera el caso particular con  $\alpha = 1$  (coeficiente de Coriolis) y  $\nu = 0$ , de forma que los eigenvalores y los eigenvectores ahora se expresan como

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= u \mp c, \\ \mathbf{r}_{1,2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u \mp c \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Sea  $\mathbf{a}(\xi) = \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix}$ . Obsérvese que, de acuerdo con la ecuación (4.33), la cantidad  $d\mathbf{a}/d\xi$  es paralela al eigenvector  $\mathbf{r}_{1,2}$ , es decir

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ u \mp c \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dAu}{d\xi} = (u \mp c) \frac{dA}{d\xi}. \quad (4.41)$$

Desarrollando la derivada del lado izquierdo y distribuyendo el producto del lado derecho de esta última expresión, se obtiene,

$$\frac{du}{d\xi} = \mp \frac{c}{A} \frac{dA}{d\xi}, \quad (4.42)$$

o bien, escribiendo  $c$  de manera explícita,

$$\frac{du}{d\xi} = \mp \sqrt{\frac{p'(A)}{\rho A}} \frac{dA}{d\xi}, \quad (4.43)$$

donde

$$p'(A) = \frac{G_0 \beta}{2A_0} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{\frac{\beta}{2} - 1}. \quad (4.44)$$

Para hallar  $u$  se partirá de la siguiente relación que utiliza la regla de la cadena y que tiene una forma similar a (4.43):

$$\frac{dg(A)}{d\xi} = g'(A) \frac{dA}{d\xi}. \quad (4.45)$$

Se busca una función  $g(A) = u$  que sea la antiderivada de  $g'(A) = \mp \sqrt{\frac{p'(A)}{\rho A}}$ . La función  $g(A)$  que cumple con tal requisito de forma satisfactoria es

$$g(A) = \mp \frac{4}{\beta} c. \quad (4.46)$$

Expresado de otra forma, si se cumple la siguiente relación

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( \mp \frac{4}{\beta} c \right),$$

entonces

$$\frac{d}{d\xi} \left( u \pm \frac{4}{\beta} c \right) = 0, \quad (4.47)$$

es decir,  $u \pm \frac{4}{\beta} c$  se preserva en ondas de rarefacción asociadas, respectivamente a  $\lambda_1$  (signo positivo) y a  $\lambda_2$  (signo negativo),

$$u \pm \frac{4}{\beta} c = \text{constante}. \quad (4.48)$$

A este resultado se le conoce como **invariante de Riemann**. Se trata de valores que permanecen constantes a lo largo de la evolución del sistema y son útiles para determinar secciones desconocidas del mismo en el transcurso del tiempo.

### 4.3.2. Solución de onda de rarefacción

A partir de las consideraciones anteriores, ahora se construye la solución al problema de Riemann con condiciones iniciales en donde la solución corresponde a una **onda de rarefacción**. Las condiciones iniciales están dadas por

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix}_0 = \begin{cases} \mathbf{a}_\ell = \begin{pmatrix} A_\ell \\ A_\ell u_\ell \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_r = \begin{pmatrix} A_r \\ A_r u_r \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (4.49)$$

donde  $\ell$  y  $r$  se refieren respectivamente a los lados izquierdo y derecho del sistema, los cuales están conectados por una onda de rarefacción en la  $p$ -ésima familia (donde  $p = 1, 2$  es cada uno de los índices de los eigenvalores de la matriz que define el sistema). La solución tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_\ell & \text{si } x/t \leq \lambda_p^\ell \\ \mathbf{a}(x/t) & \text{si } \lambda_p^\ell < x/t < \lambda_p^r \\ \mathbf{u}_r & \text{si } x/t \geq \lambda_p^r \end{cases} \quad (4.50)$$

donde  $\lambda_p^\ell$  es el  $p$ -ésimo eigenvalor del lado izquierdo del problema de Riemann y  $\lambda_p^r$  es el  $p$ -ésimo eigenvalor del lado derecho.

**Paso 1.** El procedimiento consiste en obtener el estado de la izquierda  $\mathbf{a}_\ell = (A_\ell, A_\ell u_\ell)$  a partir del estado de la derecha  $\mathbf{a}_r = (A_r, A_r u_r)$ . Consideramos entonces que la invariante de Riemann (4.48) establece

$$u_r \pm \frac{4}{\beta} c_r = u_\ell \pm \frac{4}{\beta} c_\ell, \quad (4.51)$$

donde  $c_r$  y  $c_\ell$  son la velocidad del sonido evaluada con  $A_r$  y  $A_\ell$ , respectivamente. Específicamente,  $c_r$  está dada por

$$c_r = \sqrt{\frac{G_0 \beta}{2\rho} \left(\frac{A_r}{A_0}\right)^{\beta/2}}. \quad (4.52)$$

**Paso 2.** Tomando en cuenta que  $\lambda_p^r = u_r \mp c_r$ , se elige una  $\lambda_p^\ell < \lambda_p^r$ . Este requisito es indispensable para satisfacer la condición de entropía en el contexto de las ondas de rarefacción.

**Paso 3.** Las variables  $A_\ell$  y  $u_\ell$  deben satisfacer las siguientes invariantes de Riemann,

$$u_\ell \pm \frac{4}{\beta} c_\ell = u_r \pm \frac{4}{\beta} c_r \quad (4.53)$$

$$u_\ell \mp c_\ell = \lambda_p^\ell, \quad (4.54)$$

en donde, el lado derecho de este par de ecuaciones se conoce en este punto, por lo cual sólo queda despejar las incógnitas  $c_\ell$ ,  $u_\ell$  y, consecuentemente,  $A_\ell$ ,

$$c_\ell = \pm \left(\frac{\beta}{4 + \beta}\right) \left(u_r \pm \frac{4}{\beta} c_r - \lambda_p^\ell\right), \quad (4.55)$$

$$u_\ell = \left(\frac{4}{\beta + 4}\right) \lambda_p^\ell + \left(\frac{\beta}{\beta + 4}\right) \left(u_r \pm \frac{4}{\beta} c_r\right), \quad (4.56)$$

$$A_\ell = A_0 \left[ \frac{2\beta\rho}{G_0(\beta + 4)^2} \left(u_r \pm \frac{4}{\beta} c_r - \lambda_p^\ell\right)^2 \right]^{2/\beta} \quad (4.57)$$

**Paso 4.** Recordando que  $\lambda_p = \xi = x/t$ , con la información recién obtenida podemos determinar la solución  $\mathbf{a}(x/t)$  que se encuentra entre los estados  $\mathbf{a}_\ell$  y  $\mathbf{a}_r$ . Dicho de otra

manera, rellenaremos la solución para los casos en donde  $\lambda_p^\ell \leq x/t \leq \lambda_p^r$ , es decir,

$$A(x, t) = \begin{cases} A_\ell & \text{si } x/t \leq \lambda_p^\ell \\ A_0 \left[ \frac{2\beta\rho}{G_0(\beta+4)^2} \left( u_r \pm \frac{4}{\beta} c_r - \frac{x}{t} \right)^2 \right]^{2/\beta} & \text{si } \lambda_p^\ell \leq x/t \leq \lambda_p^r \\ A_r & \text{si } x/t \geq \lambda_p^r \end{cases} \quad (4.58)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_\ell & \text{si } x/t \leq \lambda_p^\ell \\ \left( \frac{4}{\beta+4} \right) \frac{x}{t} + \left( \frac{\beta}{\beta+4} \right) \left( u_r \pm \frac{4}{\beta} c_r \right) & \text{si } \lambda_p^\ell \leq x/t \leq \lambda_p^r \\ u_r & \text{si } x/t \geq \lambda_p^r \end{cases} \quad (4.59)$$

### 4.3.3. Solución de onda de choque y matrices de Roe

En esta subsección se construye la solución al problema de Riemann con condiciones iniciales en donde la solución corresponde a una **onda de choque**, considerando el problema en donde el término fuente es nulo y  $\alpha = 1$ .

Sean  $\mathbf{a}_\ell = (A_\ell, A_\ell u_\ell)$  y  $\mathbf{a}_r = (A_r, A_r u_r)$  dos estados de un problema de Riemann conectados por una onda de choque que se propaga con velocidad  $s$ . Para ello es necesario que se satisfaga la condición de Rankine-Hugoniot (3.38),

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= s \Delta \mathbf{a}, \\ \Delta \left( \begin{array}{c} Au \\ Au^2 + \frac{\beta}{\rho(\beta+2)} A [p(A) + G_0] \end{array} \right) &= s \Delta \left( \begin{array}{c} A \\ Au \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

La condición de estabilidad del sistema para el caso de las ondas de choque establece que  $\lambda_p^\ell > \lambda_p^r$ , donde  $p = 1, 2$ .

Considérese la siguiente ecuación de eigenvalores,

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_r) \Delta \mathbf{a} = s \Delta \mathbf{a}, \quad (4.61)$$

donde  $s$  es el eigenvalor y  $\Delta \mathbf{a}$  es el eigenvector correspondiente. Obsérvese que, de acuerdo con las ecuaciones (4.60) y (4.61), es necesario encontrar la matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_r)$  que cumpla con la ecuación de eigenvalores y, por extensión,

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_r) \Delta \mathbf{a}. \quad (4.62)$$

Dicha matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_r)$  recibe el nombre de **matriz de Roe**. (Ver [16] para más detalles). Para simplificar el ejemplo con el que obtendremos la matriz de Roe de este sistema, consideraremos  $\beta = 2$ , de tal forma que,

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \Delta \left( \begin{array}{c} Au \\ Au^2 + \frac{G_0}{2\rho A_0} A^2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Delta \left( \begin{array}{c} A \\ Au \end{array} \right). \quad (4.63)$$

donde  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) representan los elementos de la matriz de Roe  $\mathbf{A}(\mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_r)$  que es necesario encontrar. Por inspección,  $a_{11} = 0$  y  $a_{12} = 1$ .

Para obtener el elemento  $a_{21}$  de la matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_r)$  se considera primero el segundo término de la segunda componente del vector  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{u})$ , es decir,

$$\Delta \left( \frac{G_0}{\rho A_0} \frac{A^2}{2} \right) = \frac{G_0}{\rho A_0} \frac{A_\ell + A_r}{2} \Delta A = \frac{G_0}{\rho A_0} \bar{A} \Delta A = \hat{c}^2 \Delta A, \quad (4.64)$$

donde  $\bar{A} = (A_\ell + A_r)/2$  es el promedio entre los estados a la derecha y a la izquierda de la onda de choque, y  $\hat{c} = \sqrt{\frac{G_0}{\rho A_0} \bar{A}}$  es una *linealización* de  $c$ .

Ahora pasamos a examinar los términos que contienen a la variable  $u$ :

$$\frac{\partial(Au^2)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(Au)^2}{A} \right) = 2u(Au)_x - u^2 A_x. \quad (4.65)$$

La expresión anterior se puede escribir en términos de diferencias finitas utilizando una linealización para  $u$ , que llamaremos  $\hat{u}$ ,

$$\Delta(Au^2) = 2\hat{u}\Delta(Au) - \hat{u}^2\Delta A. \quad (4.66)$$

Pasando todos los términos al lado izquierdo de la ecuación obtenemos,

$$\Delta A \hat{u}^2 - 2\Delta(Au)\hat{u} + \Delta(Au^2) = 0, \quad (4.67)$$

que es una ecuación cuadrática cuya solución en términos de la fórmula general es

$$\hat{u} = \frac{\Delta(Au) \pm \sqrt{(\Delta(Au))^2 - \Delta A \Delta(Au^2)}}{\Delta A}. \quad (4.68)$$

El término dentro de la raíz cuadrada se puede simplificar de la siguiente forma,

$$(\Delta(Au))^2 - \Delta A \Delta(Au^2) = A_r A_\ell \Delta u^2. \quad (4.69)$$

donde  $\Delta u^2 = (u_r - u_\ell)^2$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{\Delta(Au) \pm \sqrt{A_r A_\ell} (u_r - u_\ell)}{\Delta A} \\ &= \frac{A_r u_r - A_\ell u_\ell \pm \sqrt{A_r A_\ell} u_r \mp \sqrt{A_r A_\ell} u_\ell}{\Delta A} \\ &= \frac{\sqrt{A_r} u_r (\sqrt{A_r} \pm \sqrt{A_\ell}) \mp \sqrt{A_\ell} u_\ell (\sqrt{A_r} \pm \sqrt{A_\ell})}{\Delta A}. \end{aligned}$$

El término del denominador,  $\Delta A$ , se puede expresar como

$$\Delta A = (\sqrt{A_r})^2 - (\sqrt{A_\ell})^2 = (\sqrt{A_r} - \sqrt{A_\ell})(\sqrt{A_r} + \sqrt{A_\ell}).$$

Teniendo en cuenta esto último, se obtiene:

$$\boxed{\hat{u} = \left( \frac{\sqrt{A_r}}{\sqrt{A_r} \mp \sqrt{A_\ell}} \right) u_r \mp \left( \frac{\sqrt{A_\ell}}{\sqrt{A_r} \mp \sqrt{A_\ell}} \right) u_\ell}. \quad (4.70)$$

A partir de la ecuaciones (4.64) y (4.66) (con la linealización definida en la ecuación anterior), se hallan las componentes restantes de la matriz de Roe,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hat{c}^2 - \hat{u}^2 & 2\hat{u} \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

cuyos eigenvalores son  $\lambda_{1,2} = \left( \hat{u} \mp \hat{c} \right)$ . Se dice entonces que los estados  $\mathbf{a}_\ell = \begin{pmatrix} A_\ell \\ A_\ell u_\ell \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{a}_r = \begin{pmatrix} A_r \\ A_r u_r \end{pmatrix}$  están conectados por una onda de choque en la  $p$ -ésima familia si

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_r - A_\ell \\ A_r u_r - A_\ell u_\ell \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} \mp \hat{c} \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

donde  $p = 1, 2$ , y  $k$  es una constante de proporcionalidad. La velocidad de la onda de choque  $s$  está dada por

$$s = \hat{u} \mp \hat{c}. \quad (4.73)$$

La construcción de la solución se realiza siguiendo los pasos que se enumeran a continuación. Tomaremos como ejemplo el caso del eigenvalor  $\lambda_2 = \hat{u} + \hat{c}$ .

**Paso 1.** Elegimos  $A_r$  y  $u_r$  dados y tomamos en cuenta el eigenvalor  $\lambda_2^r = u_r + c_r$ .

**Paso 2.** Escogemos  $\lambda_2^\ell > \lambda_2^r$  tal que  $\lambda_2^\ell = u_\ell + c_\ell$ . Hacemos esto porque queremos satisfacer la condición  $A_\ell > A_r$ .

**Paso 3.** A partir de la definición de  $\Delta \mathbf{a}$  en (4.72), se puede escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_r - A_\ell &= k \\ A_r u_r - A_\ell u_\ell &= k(\hat{u} + \hat{c}) = (A_r - A_\ell)(\hat{u} + \hat{c}). \end{aligned}$$

A su vez, podemos descomponer  $\Delta(Au)$  de la siguiente forma:

$$\Delta(Au) = u_\delta \Delta A + A_\delta \Delta u,$$

donde

$$\begin{aligned} u_\delta &= \delta u_\ell + (1 - \delta) u_r, \\ A_\delta &= (1 - \delta) A_\ell + \delta A_r, \\ \delta &= \frac{\sqrt{A_\ell}}{\sqrt{A_\ell} + \sqrt{A_r}}. \end{aligned}$$

Considerando que  $\Delta(Au) = \Delta A(\hat{u} + \hat{c})$  y tomando  $u_\delta = \hat{u}$ , tenemos que

$$\hat{u} \Delta A + A_\delta \Delta u = \hat{u} \Delta A + \hat{c} \Delta A.$$

Por lo tanto,

$$A_\delta \Delta u = \hat{c} \Delta A.$$

Desarrollando  $A_\delta$  tenemos que

$$A_\delta = (1 - \delta)A_\ell + \delta A_r = \sqrt{A_r} \sqrt{A_\ell},$$

y, consecuentemente,

$$\sqrt{A_\ell A_r} \Delta u = \hat{c} \Delta A.$$

Despejando  $u_\ell$  de la ecuación anterior, tenemos que

$$u_\ell = u_r - \frac{\hat{c} \Delta A}{\sqrt{A_\ell A_r}},$$

donde

$$\frac{\hat{c} \Delta A}{\sqrt{A_\ell A_r}} = \sqrt{\frac{G_0}{\rho A_0} \frac{A_\ell + A_r}{2} \frac{(A_r - A_\ell)}{\sqrt{A_r A_\ell}}}.$$

Tomando en cuenta que  $\Delta u < -\Delta c$ , equivalentemente tenemos que

$$\frac{\hat{c} \Delta A}{\sqrt{A_\ell A_r}} < -\Delta c.$$

Si  $\Delta A < 0$  entonces  $A_\ell > A_r$  y por lo tanto  $c_\ell > c_r$ , con  $\Delta c < 0$ . De otra forma, si  $\Delta A > 0$  entonces  $A_r > A_\ell$  y por lo tanto  $c_r > c_\ell$ , con  $\Delta c > 0$ , lo cual es una contradicción.

## Capítulo 5

# Métodos numéricos

En este capítulo se analizan varios algoritmos numéricos para resolver las ecuaciones para el flujo de sanguíneo. Específicamente, se consideran métodos apropiados de diferencias finitas para leyes de conservación hiperbólicas. También se analizará la robustez de los distintos algoritmos tanto en sistemas de ecuaciones lineales y en sistemas de ecuaciones no-lineales.

Empezaremos considerando un sistema hiperbólico lineal de dimensión  $m$ , en donde  $\mathbf{u}(x, t) = (u_1, \dots, u_m)$  es el vector de cantidades conservadas y  $\mathbf{A}$  es la matriz de coeficientes de la función de flujo,

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0, \quad (5.1)$$

o bien, la expresión equivalente

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0, \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{f}(x, t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(x, t)$ . La condición de hiperbolicidad exige que la matriz  $\mathbf{A}$  sea constante con eigenvalores reales y que sus eigenvectores formen una base.

El dominio se discretiza en celdas  $I_j = [x_j - \Delta x/2, x_j + \Delta x/2]$ , donde  $x_j$  es el centro de la celda  $j$ , y  $\Delta x$  es el tamaño de la celda que se está relacionado con la resolución del método. El tiempo se discretiza como  $t_n = n\Delta t$  y en donde  $\Delta t$  representa el tamaño del paso del tiempo y  $n = 1, 2, \dots$ . Se desea aproximar la solución verdadera en  $(x_j, t_n)$  y las distintas aproximaciones numéricas se denotarán por

$$\mathbf{U}_j^{(n)} \approx \mathbf{u}(x_j, t_n).$$

Existen diversos métodos numéricos disponibles para discretizar el sistema (5.1). (Ver [8] para más detalles). A continuación describiremos algunos de estos métodos, ilustrándolos con sus plantillas (*stencils*, Figura 5.1), las cuales son figuras que resumen los puntos desde los que se actualiza la solución en el siguiente paso del tiempo. En la siguiente sección analizaremos la precisión y estabilidad de algunos de ellos.

**Método de Euler hacia atrás (*backward Euler*)** (Figura 5.1a),

$$\mathbf{U}_j^{(n+1)} = \mathbf{U}_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{A} \left( \mathbf{U}_{j+1}^{(n+1)} - \mathbf{U}_{j-1}^{(n+1)} \right).$$



**Método de Euler hacia adelante (*forward Euler*)** (Figura 5.1b),

$$\mathbf{U}_j^{(n+1)} = \mathbf{U}_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{A} \left( \mathbf{U}_{j+1}^{(n)} - \mathbf{U}_{j-1}^{(n)} \right).$$

**Método lateral por la izquierda (*one-sided left*)** (Figura 5.1c),

$$\mathbf{U}_j^{(n+1)} = \mathbf{U}_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \left( \mathbf{U}_j^{(n)} - \mathbf{U}_{j-1}^{(n)} \right).$$

**Método lateral por la derecha (*one-sided right*)** (Figura 5.1d),

$$\mathbf{U}_j^{(n+1)} = \mathbf{U}_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A} \left( \mathbf{U}_{j+1}^{(n)} - \mathbf{U}_j^{(n)} \right).$$

**Método Lax-Friedrichs** (Figura 5.1e),

$$\mathbf{U}_j^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}_{j-1}^{(n)} + \mathbf{U}_{j+1}^{(n)} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{A} \left( \mathbf{U}_{j+1}^{(n)} - \mathbf{U}_{j-1}^{(n)} \right)$$

**Método Lax-Wendroff** (Figura 5.1f),

$$\mathbf{U}_j^{(n+1)} = \mathbf{U}_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{A} \left( \mathbf{U}_{j+1}^{(n)} - \mathbf{U}_{j-1}^{(n)} \right) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \mathbf{A}^2 \left( \mathbf{U}_{j+1}^{(n)} - 2\mathbf{U}_j^{(n)} + \mathbf{U}_{j-1}^{(n)} \right)$$

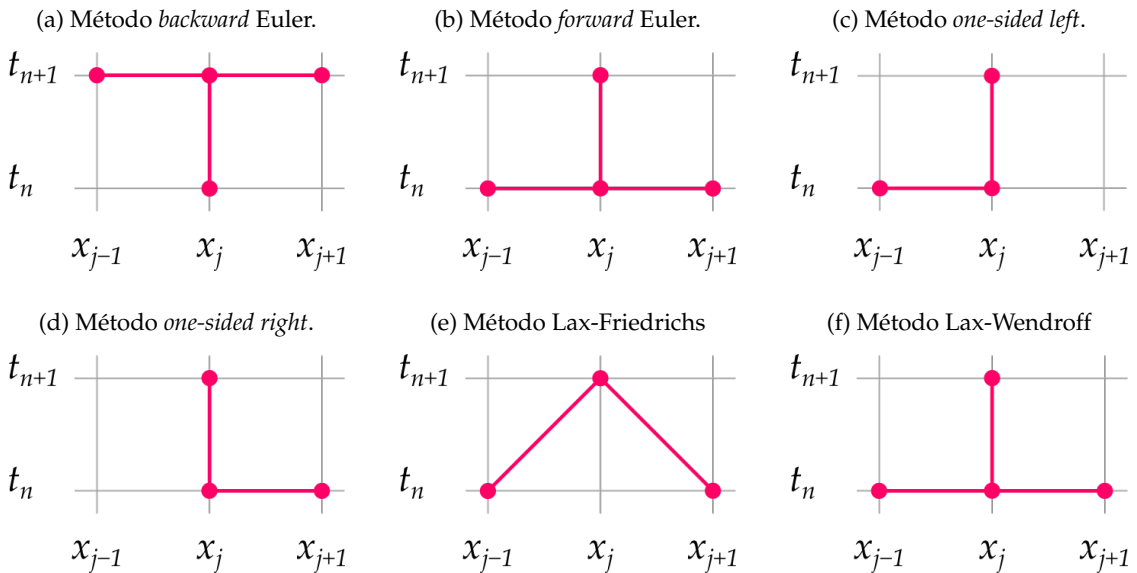


FIGURA 5.1: Métodos numéricos de diferencias finitas para el problema lineal  $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0$ .

## 5.1. Error de truncamiento

El **error local de truncamiento**  $\mathcal{E}$  es una medida para saber qué tan bien modela el método de diferencias finitas a la ecuación diferencial. El error de truncamiento se define reemplazando la solución aproximada  $\mathbf{U}_j^{(n)}$  en la ecuación de diferencias finitas por la solución verdadera  $\mathbf{u}(x_j, t_n)$ .

**Definición.** Para un método general de dos niveles, el **error local de truncamiento** se define por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{u}(x, t + \Delta t) - \mathcal{H}(\mathbf{u}(\cdot, t); x)], \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{H}$  es un operador que representa al método de diferencias finitas que se está analizando,

$$\mathbf{U}_j^{(n+1)} = \mathcal{H}(\mathbf{U}^{(n)}; j). \quad (5.4)$$

En referencia al error de truncamiento, nos será útil recordar las siguientes expansiones de Taylor en el espacio y el tiempo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{u}_t(x, t)\Delta t + \mathbf{u}_{tt}(x, t)\frac{\Delta t^2}{2} + \mathbf{u}_{ttt}(x, t)\frac{\Delta t^3}{6} + \dots, \\ \mathbf{u}(x + \Delta x, t) &= \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{u}_x(x, t)\Delta x + \mathbf{u}_{xx}(x, t)\frac{\Delta x^2}{2} + \mathbf{u}_{xxx}(x, t)\frac{\Delta x^3}{6} + \dots, \\ \mathbf{u}(x - \Delta x, t) &= \mathbf{u}(x, t) - \mathbf{u}_x(x, t)\Delta x + \mathbf{u}_{xx}(x, t)\frac{\Delta x^2}{2} - \mathbf{u}_{xxx}(x, t)\frac{\Delta x^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

## 5.2. Condición CFL

Courant, Frierichs y Lewy descubrieron que una condición necesaria para la estabilidad de cualquier método numérico es que el dominio de dependencia del método de diferencias finitas incluya al dominio de dependencia de la EDP, al menos en el límite cuando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ . Esta condición es conocida como **condición CFL**.

La condición CFL establece que la distancia que viaja la información durante cada intervalo de tiempo a través de la malla, debe ser menor a la distancia entre los elementos de la malla. En otras palabras, la información de una celda debe propagarse sólo hacia sus vecinos inmediatos.

La condición CFL sólo es una condición necesaria para la estabilidad, mas no suficiente. La condición CFL toma distintas formas dependiendo del método numérico y la estructura de sistema hiperbólico.

## 5.3. Análisis de von Neumann

En una dimensión, el análisis de estabilidad de von Neumann consiste en buscar soluciones numéricas de la forma

$$U_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikx_j}, \quad (5.5)$$

cuya norma es simplemente

$$|U_j^{(n)}| = |\lambda|^n.$$

Dicha solución crece o decrece bajo circunstancias específicas, lo cual indica la **condición de estabilidad** del método numérico aplicado al sistema,

$$U_j^{(n)} = \begin{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty & \text{si } |\lambda| > 1 \text{ (inestable)} \\ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 & \text{si } |\lambda| < 1 \text{ (estable)} \\ \text{constante} & \text{si } |\lambda| = 1 \text{ (neutral)} \end{cases} \quad (5.6)$$

## 5.4. Métodos numéricos para la ecuación lineal de transporte

En esta sección analizaremos el desempeño de los métodos arriba descritos. Por un lado, analizaremos la precisión del método; en el límite cuando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  y las diferencias finitas se vuelven derivadas, el error de truncamiento debe converger a cero si la discretización es consistente con la ecuación. Para  $\Delta t, \Delta x$  fijos, se puede utilizar la expansión de Taylor para medir el *orden* del error de truncamiento.

Por otro lado, se ha observado en la literatura que las soluciones numéricas pueden crecer de manera exponencial en el tiempo si no se toma un tamaño del paso lo suficientemente pequeño, dependiendo del método. Mediante el análisis de estabilidad de von Neumann para la ecuación de transporte lineal, se pueden llegar a condiciones específicas que garantizan que tal problema no exista.

Considérese la ecuación de advección lineal como un problema de valores iniciales

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{constante}, \quad (5.7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (5.8)$$

Sabemos que la solución consiste en un desplazamiento espacial de la información a velocidad  $a$ ,

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (5.9)$$

A continuación se presenta el análisis de estabilidad de algunos métodos numéricos tomando como base la ecuación de advección.

### 5.4.1. Método *upwind*

El primer método a analizar está dado por la siguiente fórmula

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - C(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}), \quad (5.10)$$

donde  $C = a\Delta t/\Delta x$  se conoce como el **número de Courant**. Este método tiene un error de truncamiento,  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$ , de primer orden en el espacio y en el tiempo.

Con el fin de encontrar expresiones para  $|\lambda|$ , sustituimos (5.5) en la fórmula anterior para obtener,

$$\lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} - C\lambda^n (e^{ikx_j} - e^{ikx_{j-1}}).$$

Dividiendo la ecuación anterior entre  $\lambda^n e^{ikx_j}$  tenemos,

$$\lambda = 1 - C(1 - e^{ik(-\Delta x)}) = 1 - C + Ce^{-ik\Delta x}. \quad (5.11)$$

Esta expresión describe un círculo de radio  $|C|$ , con centro en  $(1 - C, 0)$  (Figura 5.2). Las condiciones de estabilidad se reducen a las siguientes:

si  $0 \leq C \leq 1 \implies$  estable,

si  $C > 1 \implies$  inestable,

si  $C < 0 \implies$  inestable.

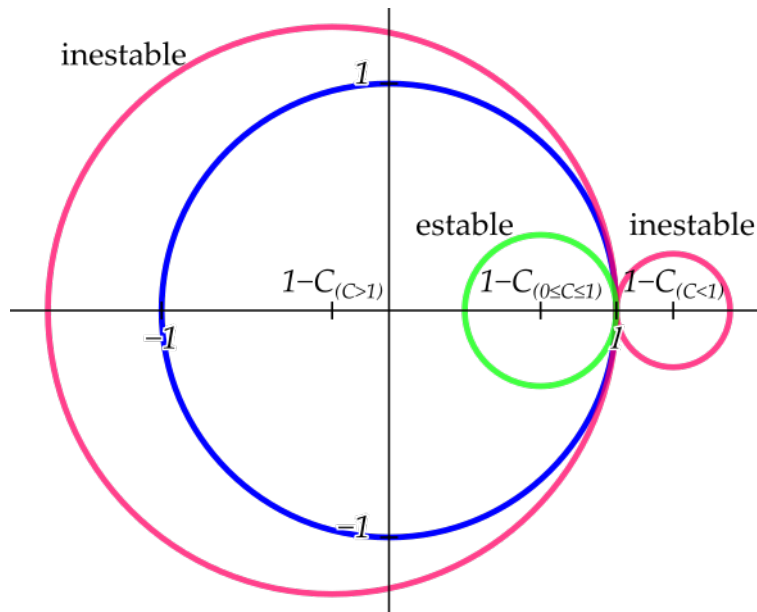


FIGURA 5.2: Análisis de von Neumann para el método lateral.

El valor de la función en el nodo  $(j, n + 1)$  se representa como  $U_j^{(n+1)}$  y se puede expresar como una combinación lineal convexa:

$$U_j^{(n+1)} = \underbrace{(1 - C)}_{[0,1]} U_j^{(n)} + \underbrace{C}_{[0,1]} U_{j-1}^{(n)}, \quad (5.12)$$

y por lo tanto, no se generan nuevos máximos en la solución numérica si la condición  $0 \leq C \leq 1$  se cumple (**condición CFL**). Para  $a > 0$  y con una resolución dada, la restricción de estabilidad en el tamaño del paso en el tiempo está dada por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Esta restricción es razonable en el sentido de que  $\Delta t$  decrece linealmente con respecto a la resolución  $\Delta x$ . Dado que  $\Delta t, \Delta x > 0$ , el método numérico (5.10) nunca será estable si

$a < 0$ . Para este caso,

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - C \left( U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)} \right),$$

la condición de estabilidad está dada por  $-1 \leq C \leq 0$ .

Entonces, para la versión del esquema *upwind* de primer orden, se considera

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - |C| \left( U_{j-\text{sgn}(C)}^{(n)} - U_j^{(n)} \right) = \begin{cases} U_j^{(n)} - C \left( U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)} \right) & \text{si } a > 0, \\ U_j^{(n)} - C \left( U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)} \right) & \text{si } a < 0, \end{cases} \quad (5.13)$$

con  $|C| \leq 1$ .

### 5.4.2. Método Lax-Wendroff

La precisión del método numérico definido por la ecuación (5.10) se puede estimar al evaluar el error de truncamiento del desarrollo en serie de Taylor a primer orden de la siguiente expresión:

$$\mathcal{E} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + a \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x}.$$

Como se mencionó anteriormente, el error de truncamiento es de orden  $\mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$ . La precisión del método se puede mejorar al considerar términos de orden superior en el desarrollo de la serie de Taylor,

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + \Delta t u_t + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + \dots = u + \Delta t(-au_x) + \frac{\Delta t^2}{2}(a^2 u_{xx}) + \dots \\ &\approx U_j^{(n)} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \left( U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left( U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Este esquema numérico se conoce como Método Lax Wendroff y es de segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo,  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$ ,

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{C}{2} \left( U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right) + \frac{C^2}{2} \left( U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right). \quad (5.15)$$

Para poder relacionar esta extensión con el esquema numérico de primer orden, notemos que si  $a > 0$ ,

$$U_j^{(n+1)} = \underbrace{U_j^{(n)} - C \left( U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right)}_{\text{upwind}} - \underbrace{\frac{1}{2} C(1-C) \left( U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right)}_{\text{viscosidad decreciente}}. \quad (5.16)$$

El método Lax-Wendroff se puede ver como un esquema de diferencias finitas hacia la izquierda (o hacia la derecha), más un error que se asocia con el término de viscosidad:

$$-\frac{1}{2} C(1-C) \left( U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right) \approx -\frac{1}{2} C(1-C) u_{xx}(x_j, t_n) \Delta x^2.$$

Este error disminuye al aumentar la resolución espacial,  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Al igual que en casos anteriores, es necesario implementar un análisis del tipo von Neumann para el esquema Lax-Wendroff. Para ello se buscan soluciones de la forma  $U_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikx_j}$ . Sustituyendo en el esquema, se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 - C^2(1 - \cos(k\Delta x) + iC \sin(k\Delta x)), \\ |\lambda|^2 &= (1 - C^2(1 - \cos(k\Delta x)))^2 + C^2 \sin^2(k\Delta x).\end{aligned}\quad (5.17)$$

La condición de estabilidad se satisface cuando  $|C| \leq 1$ , sin importar el signo de  $a$ .

### 5.4.3. Método de diferencias centradas

Debido a que el método de diferencias centradas es de segundo orden en el espacio, es pertinente cuestionar cuándo se usa este método.

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \approx u_x + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Para responder, se usa la aproximación de Euler en el tiempo, obteniendo el siguiente esquema,

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{C}{2} (U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}). \quad (5.18)$$

Repitiendo el análisis de estabilidad de von Neumann se puede demostrar que el método siempre es inestable,

$$|\lambda|^2 = 1 + C \sin^2(k\Delta x) \geq 1. \quad (5.19)$$

### 5.4.4. Método Lax-Friedrichs

Una forma de resolver el problema de estabilidad de las diferencias centradas es mediante el método Lax-Friedrichs definido por el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}U_j^{(n+1)} &= \frac{1}{2} (U_{j-1}^{(n)} + U_{j+1}^{(n)}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}) \\ &= \frac{1}{2} U_{j-1}^{(n)} (1 + C) + \frac{1}{2} U_{j+1}^{(n)} (1 - C).\end{aligned}\quad (5.20)$$

donde  $C$  representa la viscosidad del sistema que en el siguiente párrafo se demuestra que es pequeña comparada con la unidad.

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{C}{2} (U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{(U_{j-1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j+1}^{(n)})}{\Delta x^2}.$$

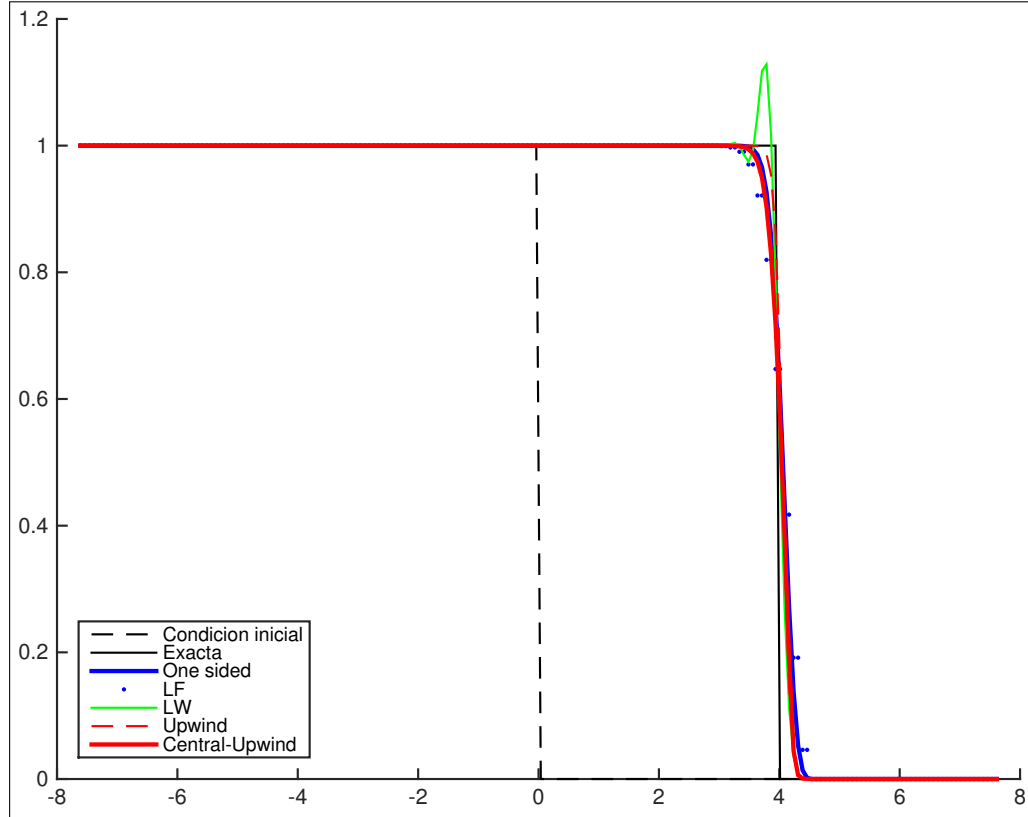


FIGURA 5.3: Comparación de distintos esquemas numéricos.

Como es de esperarse, el término regulador  $C$  tiene su efecto en la estabilidad. El análisis de von Neumann establece que, para  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}e^{ikx_j} &= \frac{1}{2}\lambda^n(e^{ikx_{j-1}} + e^{ikx_{j+1}}) - C\lambda^n(e^{ikx_{j-1}} - e^{ikx_{j+1}}), \\ \lambda &= \frac{1}{2}(e^{-ik\Delta x_j} + e^{ik\Delta x}) - \frac{C}{2}(e^{ik\Delta x_j} - e^{-ik\Delta x}) \\ &= \cos(k\Delta x) - iC \sin(k\Delta x).\end{aligned}\tag{5.21}$$

Así pues, la condición de estabilidad se reduce a  $|C| < 1$ .

La Figura 5.3 muestra la solución numérica de una solución de Riemann de la ecuación de advección lineal. Como se observa, el método de Lax-Wendroff, de segundo orden, presenta oscilaciones cerca de las discontinuidades.

## 5.5. Monotonicidad

Para eliminar la posibilidad de oscilaciones cerca de las discontinuidades, un requerimiento adicional para el método numérico es que preserve la **monotonicidad**. Un método **monótono** es aquel en donde, si tenemos dos soluciones posibles  $V$  y  $U$ , entonces,

$$V_j^{(n)} \geq U_j^{(n)} \quad \text{y} \quad V_j^{(n+1)} \geq U_j^{(n+1)},$$

para todo par de soluciones  $V$  y  $U$ . Éstos métodos tienen la característica de prevenir oscilaciones numéricas, como aquellas que se pueden observar en métodos de segundo orden. La norma  $\ell_1$  de dichos métodos va disminuyendo conforme avanza el tiempo

$$\|V_j^{(n)} - U_j^{(n)}\|_{\ell_1} \geq \|V_j^{(n+1)} - U_j^{(n+1)}\|_{\ell_1}.$$

Se sabe que cualquier método **monótono** es a lo más de primer orden (ver teorema 15.6 de [8]).

Si bien un método de segundo orden proporciona mayor precisión cuando las soluciones son suaves, éstos no son monótonos y por lo tanto son altamente inestables y generan oscilaciones en soluciones discontinuas (no suaves). Por lo tanto, es necesario introducir un método que combine las propiedades de precisión de un método de segundo orden y de estabilidad y monotonicidad de un método de primer orden. A continuación se presentan un par de métodos que cumplen con estas propiedades.

## 5.6. Métodos de alta resolución

### 5.6.1. Método upwind de alta resolución

La idea de este método consiste en combinar los métodos *one-sided* y Lax-Wendroff.

**One-sided** Método de primer orden en el espacio y el tiempo,  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$ ,

$$U_{j,\text{one-sided}}^{(n+1)} = U_j^{(n)} - C(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}). \quad (5.22)$$

El método es estable cuando  $a > 0$  y  $0 \leq C \leq 1$ .

**Lax-Wendroff** Método de segundo orden en el espacio y el tiempo,  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$ ,

$$U_{j,\text{LW}}^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{C}{2}(U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}) + \frac{C^2}{2}(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}). \quad (5.23)$$

El método es estable si  $|C| \leq 1$ , no obstante, presenta oscilaciones cerca de las discontinuidades.

La idea de combinar ambos métodos consiste en tomar la técnica de Lax-Wendroff y reescribirlo como *one-sided* más una corrección. Para ejemplificar se considera el caso  $a > 0$ .

$$\begin{aligned} U_{j,\text{LW}}^{(n+1)} &= U_{j,\text{one-sided left}}^{(n+1)} - \frac{C}{2}(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}) + \frac{C^2}{2}(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}) \\ &= U_j^{(n)} - C(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}) - \frac{1}{2}C(1-C)(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

El método anterior resulta de alta resolución al incluir las siguientes modificaciones,

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - C(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}) - \frac{1}{2}C(1-C)(\Delta x D_j - \Delta x D_{j-1}), \quad (5.25)$$



donde

$$\Delta x D_j = (U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)}) \phi(\theta_j). \quad (5.26)$$

Nótese que cuando  $\phi = 1$  se obtiene el método original de Lax-Wendroff. El parámetro  $\theta_j$  es una medida de las discontinuidades de la solución,

$$\theta_j = \frac{U_{j'+1} - U_{j'}}{U_{j+1} - U_j}, \quad (5.27)$$

donde  $j' = j - 1$ .

Si  $U_j$  es suave, entonces  $\theta \rightarrow 1$ . La función  $\phi(\theta_j)$  está definida por pedazos de la siguiente manera:

$$\phi(\theta_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_j < 0 \\ \theta_j & \text{si } 0 \leq \theta_j \leq 1 \\ 1 & \text{si } \theta_j > 1. \end{cases} \quad (5.28)$$

Entonces, el método se reduce a

$$\Delta x D_j = \text{minmod}(U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)}, U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}), \quad (5.29)$$

donde

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

En el caso cuando  $a < 0$ ,

$$\begin{aligned} U_{j,\text{LW}}^{(n+1)} &= U_{j,\text{one-sided right}}^{(n+1)} + \frac{C}{2} (U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}) + \frac{C^2}{2} (U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}) \\ &= U_j^{(n)} - C(U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)}) + \frac{1}{2}C(1 + \nu)(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Sin importar el signo de  $a$ , el método upwind de alta resolución se reduce a la siguiente expresión:

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \text{sgn}(a)C(U_j^{(n)} - U_{j-\text{sgn}(a)}^{(n)}) - \frac{1}{2}C(\text{sgn}(a) - C)(\Delta x D_j^{(n)} - \Delta x D_{j-1}^{(n)}), \quad (5.32)$$

con  $j' = j - \text{sgn}(a)$ .

## 5.7. Esquema semi-discreto central para leyes de balance hiperbólicas

A continuación se presenta el esquema a utilizar para la solución numérica del sistema de leyes de conservación hiperbólicas de interés,

$$\mathbf{W}_t + (\mathbf{F}(\mathbf{W}))_x = \mathbf{S}. \quad (5.33)$$

Sea  $\mathbf{A}$  la matriz de coeficientes de  $\mathbf{F}$ . En forma cuasilineal, la ecuación anterior se escribe como

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A}\mathbf{W}_x = \mathbf{S}. \quad (5.34)$$

Para el esquema numérico semi-discreto central se define una malla con celdas

$$I_j := \left[ x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right],$$

en donde el centro de la celda es  $x_j$ , con interfaces en  $x_{j\pm 1/2} = x_j \pm \Delta x/2$ . El promedio de las cantidades en cada celda  $I_j$  se obtiene integrando con respecto a  $x$ ,

$$\overline{(\cdot)}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (\cdot) dx$$

De esta forma, el promedio de  $\mathbf{W}(x, t)$  en la celda  $I_j$  está definido por

$$\overline{\mathbf{W}}_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{W}(x, t) dx \approx \mathbf{W}_j, \quad (5.35)$$

y equivale a una versión semi-discreta de la solución, pues sólo se discretiza en  $x$ .

### 5.7.1. Flujo numérico

El objetivo es obtener una aproximación de segundo orden en el espacio y segundo orden en el tiempo (esto último utilizando un esquema Runge-Kutta). Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \overline{\mathbf{W}}_j + \frac{1}{\Delta x} \left( \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \right) = \overline{\mathbf{S}}. \quad (5.36)$$

En principio, el flujo  $\mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{j\pm \frac{1}{2}}))$  se desconoce considerando que en cada celda de la discretización, la solución es constante por pedazos, por lo que tenemos discontinuidades en la interfaz entre cada par de celdas. Teniendo en cuenta lo anterior, el flujo en la interfaz se reemplaza por un flujo numérico de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \overline{\mathbf{W}}_j + \frac{\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \overline{\mathbf{S}}, \quad (5.37)$$

donde

$$\mathbf{H}_{j\pm\frac{1}{2}}(t) = \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ \mathbf{F}(\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^-(t)) - a_{j\pm\frac{1}{2}}^- \mathbf{F}(\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^+(t))}{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ - a_{j\pm\frac{1}{2}}^-} + \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ a_{j\pm\frac{1}{2}}^-}{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ - a_{j\pm\frac{1}{2}}^-} (\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^+(t) - \mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^-(t)), \quad (5.38)$$

y donde

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{j-\frac{1}{2}}^- &= \bar{\mathbf{W}}_{j-1} + \frac{\Delta x}{2} \mathbf{W}'_{j-1}, & \mathbf{W}_{j-\frac{1}{2}}^+ &= \bar{\mathbf{W}}_j - \frac{\Delta x}{2} \mathbf{W}'_j, \\ \mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^- &= \bar{\mathbf{W}}_j + \frac{\Delta x}{2} \mathbf{W}'_j, & \mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^+ &= \bar{\mathbf{W}}_{j+1} - \frac{\Delta x}{2} \mathbf{W}'_{j+1}, \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{W}'_j = \frac{1}{\Delta x} \text{minmod}(\alpha \Delta_- \bar{\mathbf{W}}_j, \Delta_0 \bar{\mathbf{W}}_j, \alpha \Delta_+ \bar{\mathbf{W}}_j),$$

con  $1 \leq \alpha < 2$ . La función minmod tiene la siguiente forma,

$$\text{minmod}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} \min_j(x_j) & \text{si } x_j > 0 \forall j \\ \max_j(x_j) & \text{si } x_j < 0 \forall j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (5.39)$$

y los argumentos que utilizaremos son

$$\Delta_0 \bar{\mathbf{W}}_j = \frac{\bar{\mathbf{W}}_{j+1} - \bar{\mathbf{W}}_{j-1}}{2\Delta x}, \quad \Delta_- \bar{\mathbf{W}}_j = \frac{\bar{\mathbf{W}}_j - \bar{\mathbf{W}}_{j-1}}{\Delta x}, \quad \Delta_+ \bar{\mathbf{W}}_j = \frac{\bar{\mathbf{W}}_{j+1} - \bar{\mathbf{W}}_j}{\Delta x}. \quad (5.40)$$

Por último,

$$a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ = \max(\lambda_{j\pm\frac{1}{2},2}^+, \lambda_{j\pm\frac{1}{2},2}^-, 0), \quad a_{j\pm\frac{1}{2}}^- = \max(\lambda_{j\pm\frac{1}{2},1}^+, \lambda_{j\pm\frac{1}{2},1}^-, 0),$$

recordando que  $\lambda_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm$  son los eigenvalores de las matrices asociadas al sistema.

## 5.8. Solución numérica

Para el caso que nos atañe, utilizaremos una versión simplificada del flujo numérico,

$$\mathbf{H}_{j\pm\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^+(t)) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^-(t))}{2} - \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}}{2} (\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^-). \quad (5.41)$$

El segundo término del flujo numérico (la componente de segundo orden) se *sustituye* por un término de viscosidad decreciente de forma  $\frac{a}{4} \Delta x \mathbf{W}_{xx}$ . El término viscoso introducido por conveniencia está determinado por

$$a_{j\pm\frac{1}{2}} = \max_j \left| \lambda_{j\pm\frac{1}{2}}^p \right|.$$

## Capítulo 6

# Resultados numéricos

En este capítulo se presentan los resultados del análisis numérico del modelo descrito en el Capítulo 4. Se usará un esquema de tipo **central-upwind** como se describe en el Capítulo 5. En cada ejemplo numérico se trata de verificar distintas propiedades del modelo y se intenta comprobar la robustez del esquema numérico. En particular, en aquellos casos en donde se tienen soluciones exactas para problemas de Riemann, es de interés comparar las aproximaciones numéricas propuestas con la solución exacta. De esta forma se tendrá confianza en aquellos casos en donde no existe una solución exacta disponible con la cual comparar. También se analizan las perturbaciones a los estados estacionarios para observar la transición de dicho desequilibrio. Finalmente, y una vez verificada la robustez del esquema numérico, se consideran casos más realistas relacionados con el ciclo cardíaco y la oclusión de una arteria.

### 6.1. Problema de Riemann

En la práctica, y debido a la no linealidad de las ecuaciones de flujo, no es posible obtener soluciones exactas del modelo. Es por ello que necesitamos hacer uso de las aproximaciones numéricas, las cuales si bien no satisfacen estrictamente la forma diferencial de la ecuación hiperbólica, sí satisfacen su forma integral. No obstante hay una excepción que no requiere de aproximaciones numéricas, pues se puede obtener de manera analítica. El problema de Riemann, en forma vectorial, consiste en la ecuación  $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0$  (donde  $\mathbf{u} = (A, u)$ ), en conjunto con las condiciones iniciales que se definen como constantes por pedazos,

$$(A, u)[x, 0] = \begin{cases} (A_\ell, u_\ell) & \text{si } x_0 \leq x < x_{\text{disc}}, \\ (A_r, u_r) & \text{si } x_{\text{disc}} \leq x < 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

donde  $x_{\text{disc}}$  es el punto en el espacio donde se encuentra la discontinuidad y los subíndices  $\ell$  y  $r$  denotan el valor de los parámetros de interés a la izquierda y a la derecha de dicha discontinuidad.

En este caso se usaron condiciones de frontera libres, es decir, se toman condiciones de frontera del tipo Neumann con derivada cero en los extremos. Es bien conocido que en estas situaciones, la solución físicamente relevante consiste de una propagación, ya sea de ondas de choque u ondas de rarefacción, cada una de ellas asociada con cada eigenvalor de la matriz de coeficientes de la forma cuasilineal (4.24). Como primer

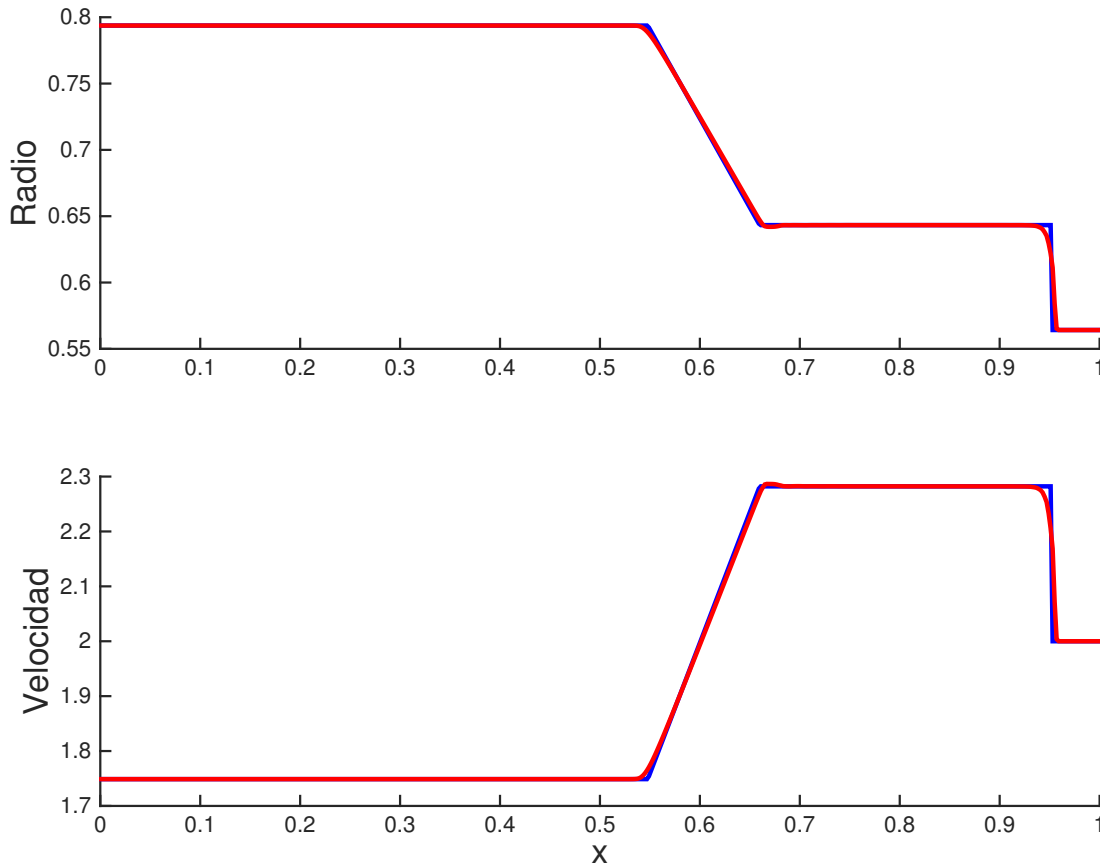


FIGURA 6.1: Solución a  $t = 0.14$  s para el problema de Riemann (6.1) con parámetros dados en (6.2). La solución exacta se muestra con la línea azul y la numérica con la línea roja.

ejemplo numérico, se eligen los parámetros

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad G_0 = 1, \quad A_0 = 1, \quad \rho_0 = 1, \quad \nu = 0.$$

Como se observa, no se han especificado las unidades y se interpreta el modelo como adimensional. El único propósito es analizar la estructura de la solución analítica y compararla con su aproximación numérica. El dominio está definido por  $[x_0 = 0, x_1 = 1]$ . Las condiciones iniciales para este problema de Riemann son

$$A_\ell = 1.9792, \quad u_\ell = 1.7488, \quad A_r = 1, \quad u_r = 2. \quad (6.2)$$

La solución al problema se construye de acuerdo a (6.1). Se inicia comenzando con el estado en la derecha  $(A_r, u_r)$ , se encuentra un estado intermedio conectado por una onda de choque  $(A_m = 1.3, u_m = 2.2822)$ , y a su vez, un estado a la izquierda conectado por una onda de rarefacción  $(A_\ell, u_\ell)$ .

La Figura 6.1 muestra la solución numérica usando una malla con resolución de 500 puntos,  $\Delta x = (x_1 - x_0)/500$ . Como es evidente, la solución numérica representa una

muy buena aproximación a la solución exacta, pues los puntos que conforman ésta última se encuentran muy cercanos a la primera. Se observa que la aproximación es muy precisa, incluso cerca de la onda de choque. El método numérico captura muy bien la posición de la discontinuidad conforme avanza el tiempo. En situaciones en donde el método numérico no es robusto o no es conservativo, la captura de las ondas de choque suele ser muy deficiente. El perfil viscoso que se observa cerca de la discontinuidad es típico de cualquier algoritmo numérico. Finalmente, se observa que la onda de rarefacción es también precisa, no obstante, los efectos de la **viscosidad numérica** se acentúan solamente cerca de los extremos.

## 6.2. Perturbación de un estado estacionario

La segunda prueba numérica se enfoca en la perturbación de un estado estacionario. Si la condición inicial para el flujo sanguíneo tiene un radio constante y una velocidad constante cero, el flujo no varía en el tiempo (con las condiciones de frontera adecuadas). Los estados estacionarios se generan cuando hay un equilibrio entre los gradientes de flujo y los términos fuente. Cuando un método numérico no es robusto, se podrían generar errores significativos al no reconocer tal equilibrio. Se espera entonces que para perturbaciones de estados estacionarios, la perturbación evolucione de forma transitoria y se propague por todo el dominio. Una vez que la perturbación salga de éste, se espera recuperar el estado estacionario original, sin la presencia de ruido numérico.

Los parámetros del modelo en este ejemplo están dados por

$$\begin{aligned} \alpha = 1.1, \quad \beta = 2, \quad G_0 = 4 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad R_0 = 0.0082 \text{ m}, \\ A_0 = \pi R_0^2, \quad \rho_0 = 1050 \text{ kg m}^{-3}, \quad \nu = 3.2\pi \times 10^{-6}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

El dominio de este modelo es  $[0, 1]$  y  $x$  está dado en metros. La condición inicial está dada por  $u(x, 0) = 0$ , y

$$A(x, 0) = \begin{cases} A_0 + \epsilon & \text{si } 0.4 \text{ m} \leq x \leq 0.5 \text{ m}, \\ A_0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (6.4)$$

donde la perturbación inicial es  $\epsilon = 0.1 \times A_0$ .

Cada renglón de la Figura 6.2 muestra la solución a  $t = 0.0, 0.01, 0.02, 0.05$  s. Se han usado condiciones de frontera libre. La columna de la izquierda muestra el radio de la arteria y la columna de la derecha muestra la velocidad, ambos como funciones de la posición dentro del conducto. Se observa que la perturbación inicial se propaga a lo largo de la arteria, debido a la presión. Una vez que la perturbación sale del dominio a tiempo  $t = 0.1$  s, se recupera el estado estacionario original. Si el método no fuera robusto se observaría ruido numérico espurio. Dicho ruido suele violar las leyes de conservación de Euler, por lo que el modelo resultante sería físicamente inválido.

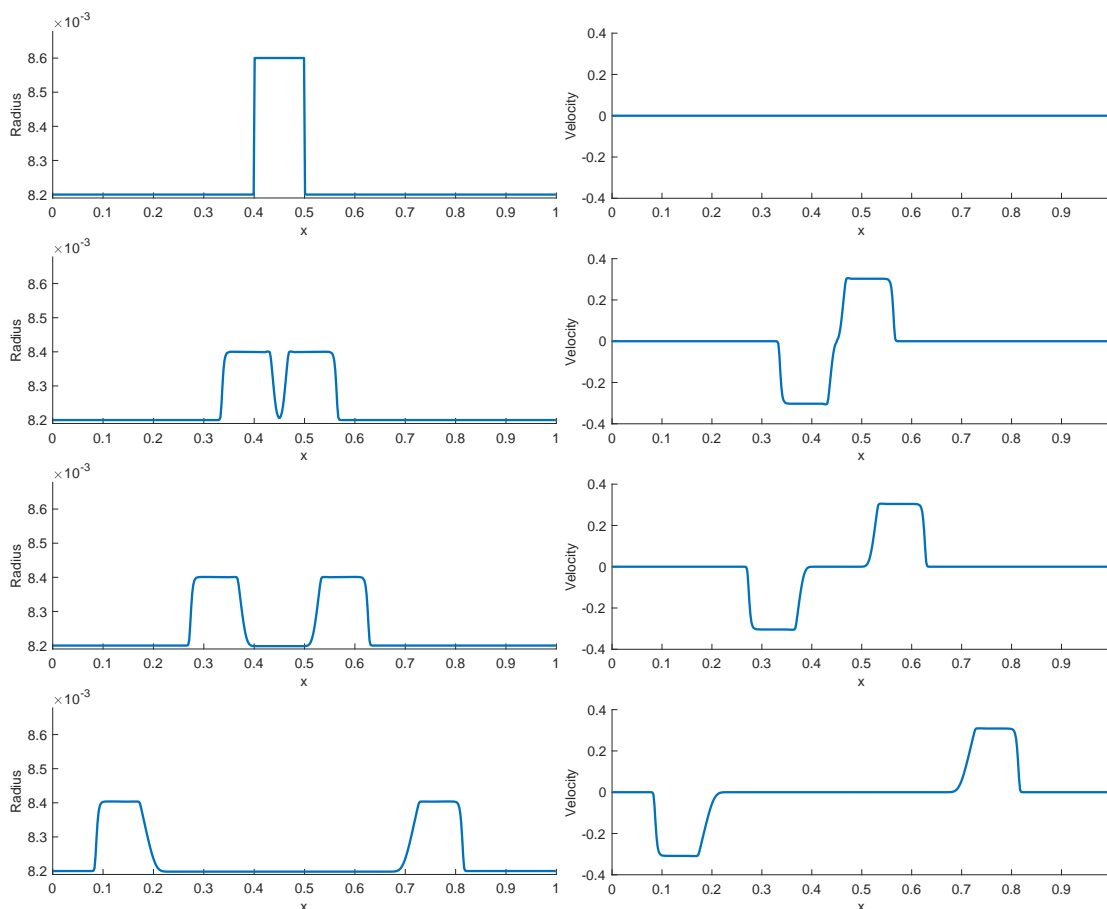


FIGURA 6.2: Perturbación de un estado estacionario. Cada renglón representa la solución a los tiempos  $t = 0.0, 0.01, 0.02, 0.05$  s, respectivamente. La columna de la izquierda muestra el radio de la arteria y la columna de la derecha muestra la velocidad del flujo, ambas en función de la posición dentro del conducto. Las condiciones iniciales están dadas en (6.4), con los parámetros especificados en (6.3).

### 6.3. Ciclo cardíaco

El ciclo cardíaco es la secuencia de eventos que ocurre cuando el corazón palpita para hacer circular la sangre a través del sistema circulatorio del cuerpo. Existen dos fases del ciclo cardíaco. En la **fase diastólica**, los ventrículos del corazón se relajan y el corazón se llena de sangre. En la **fase sistólica**, los ventrículos se contraen y bombean la sangre fuera del corazón y hacia las arterias. Un ciclo cardíaco se completa cuando las cámaras cardiacas se llenan de sangre y la sangre es luego bombeada fuera del corazón.

Considerando las características del ciclo cardíaco, se puede inferir que la velocidad con la que el corazón bombea la sangre no es constante. Es por eso que para modelar un sistema arterial, las condiciones de la frontera de dicho sistema se tienen que variar de acuerdo con las propiedades de este ciclo.

Siguiendo una de las aplicaciones del modelo, se considera el ejemplo que se analiza

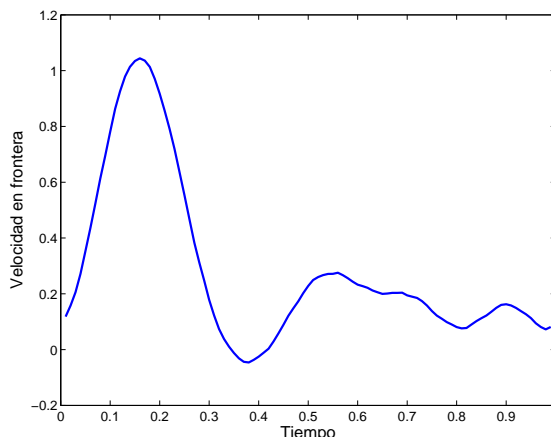


FIGURA 6.3: Velocidad del flujo sanguíneo impuesta en la frontera izquierda de la arteria en un ciclo cardíaco.

en [1] para el estudio de los ciclos cardíacos. En tal ejemplo, se analizó la aparición (bajo ciertos parámetros) de ondas de choque en una arteria durante un ciclo cardíaco. Para tal efecto, se considera un flujo de sangre en la frontera izquierda de la arteria con una velocidad variable en el tiempo como se muestra en la gráfica en la Figura 6.3. Inicialmente se impone una descarga de flujo que resulta en un aumento significativo de la velocidad de 0 a  $1.05 \text{ m s}^{-1}$ , disminuyendo de nuevo y oscilando hacia el final del ciclo cardíaco. El área transversal  $A$  en la frontera izquierda se considera con condiciones de frontera libre cuando el flujo va hacia afuera y se fija a su valor,  $A_0$ , en el caso contrario. En la frontera derecha de la arteria se consideran condiciones de frontera libre.

Además de las condiciones de frontera descritas arriba, se considerarán condiciones iniciales estacionarias  $A(x, 0) = A_0$ ,  $u(x, 0) = 0$  con los mismos parámetros descritos en (6.3). La solución se muestra en la Figura 6.4 a  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.51, 0.6 \text{ s}$ . Solo se muestra la evolución del radio de la arteria en los distintos tiempos. En [1] se reporta la existencia de una onda de choque a tiempo  $t = 0.51 \text{ s}$ . En la Figura se muestran los primeros tres estados en orden descendiente en la columna de la izquierda, y los últimos tres en la columna de la derecha. Como se puede observar, la descarga de flujo de sangre en la parte inicial de la arteria empuja el flujo hacia la derecha. Tal efecto genera la acumulación de fluido, dando lugar a una onda de choque dentro de la arteria. En la secuencia se evidencia un flujo suave hasta antes del tiempo reportado de  $0.51 \text{ s}$ . Una vez formada la onda de choque, esta se propaga dentro de la arteria, de acuerdo con la dinámica del fluido descrita por el modelo. Se puede notar que la arteria se muestra intacta en su extremo derecho. Esto se debe a que la perturbación no ha llegado a ese extremo ya que se están utilizando condiciones de frontera libres en esa región. De esta manera se supone que no hay ningún efecto significativo que cause un cambio en el extremo derecho de la arteria.



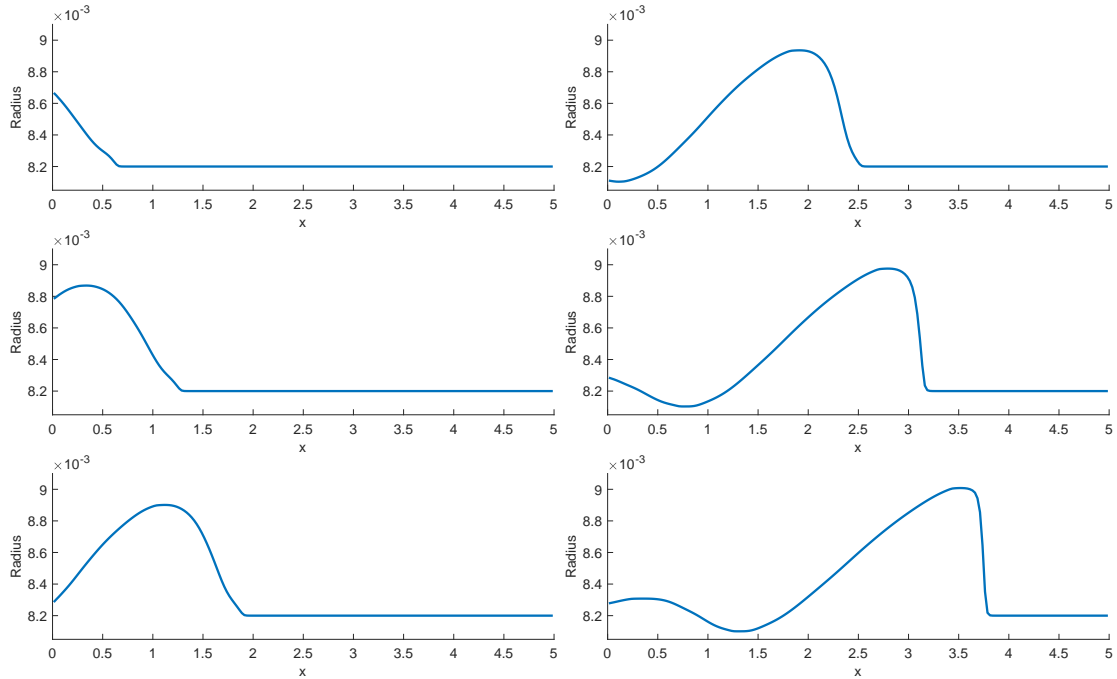


FIGURA 6.4: Solución a los tiempos  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.51, 0.6$  s de un ciclo cardíaco con condiciones iniciales estacionarias  $A(x,0) = A_0$ ,  $u(x,0) = 0$  y condiciones de frontera izquierdas dadas por la velocidad en la Figura 6.3.

## 6.4. Estenosis

La **estenosis** es el término médico para nombrar al estrechamiento de un conducto corporal. En las arterias, la estenosis disminuye el flujo de la sangre hacia los órganos del cuerpo, causando padecimientos importantes como la isquemia cerebral. Este tipo de lesiones sigue siendo un problema médico relevante, especialmente en la población de la tercera edad.

En [17] se estudió cómo la estenosis en la arteria carótida afecta la oxigenación del cerebro. Para ese fin, se tomó en cuenta un modelo más extenso en donde la concentración de distintas sustancias se transportan en la arteria por advección. En el presente modelo no se consideran estas extensiones. Sin embargo, se incorporan algunas de las especificaciones de dicho artículo para apreciar como un estrechamiento da lugar a ondas de choque y como se afecta la dinámica del flujo sanguíneo. En particular, en esta prueba numérica se consideran condiciones de frontera en donde se impone una descarga de fluido en la frontera izquierda,

$$Q = \begin{cases} 485 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \times \sin\left(\frac{\pi t}{0.3T_p}\right) & \text{si } t \leq 0.3T_p, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (6.5)$$

Aquí  $T_p = 1.0$  s es la duración de un periodo. Los parámetros del modelo están dados en (6.3).

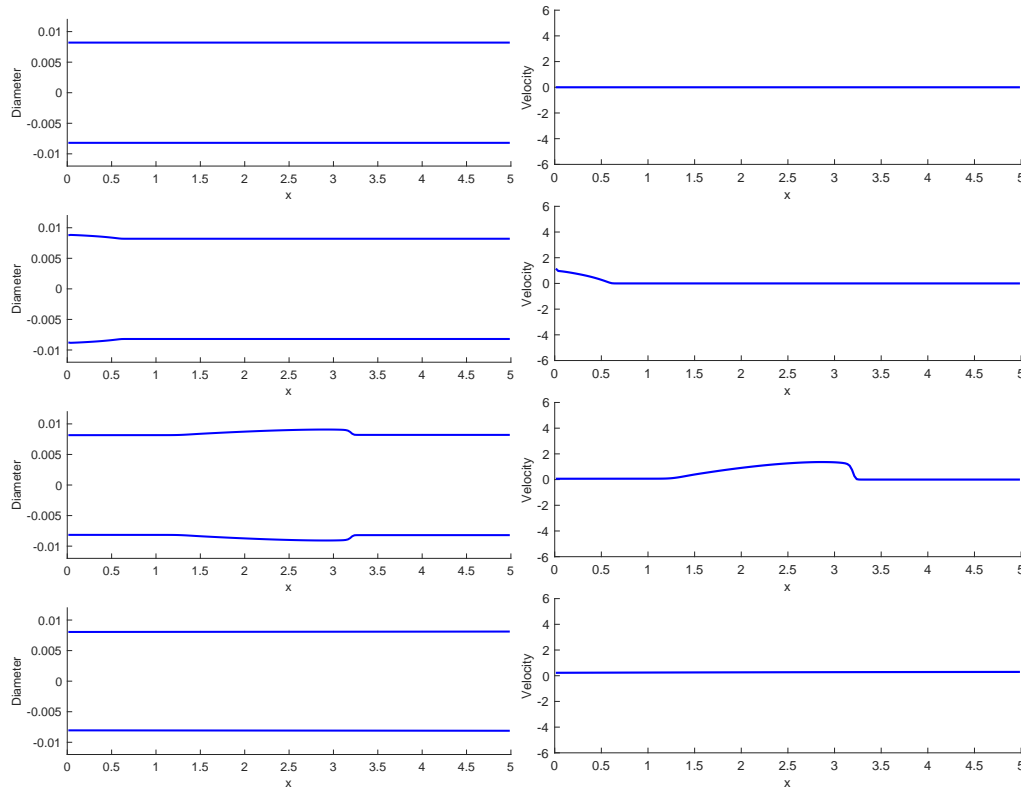


FIGURA 6.5: Evolución del diámetro de la arteria (izquierda) y la velocidad (derecha) para  $t = 0.0, 0.1, 0.5, 2.0$ s. Se usan las condiciones de frontera en donde se impone una descarga de fluido en la izquierda dada por (6.5). Las condiciones iniciales son  $u = 0$  y  $R = R_0$ .

En la Figura 6.5 se considera una área transversal  $A = A_0$  constante, es decir, no hay estrechamiento. En la columna izquierda se muestra el diámetro de la arteria, para  $t = 0.0, 0.1, 0.5, 2.0$ s. En la columna derecha se muestra la velocidad, para los mismos tiempos. Se observa que la velocidad máxima del fluido es razonable, menor que  $2 \text{ m s}^{-1}$ . Tampoco se observa la presencia de ondas de choque. En contraste, en la Figura 6.6 se muestra la evolución para las condiciones iniciales

$$R = \begin{cases} R_0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ m,} \\ (1 - 0.9 \sin(\pi x))R_0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (6.6)$$

La evolución de las variables se muestra en los mismos tiempos y en el mismo orden que en la Figura 6.5. El efecto del estrechamiento en la formación de ondas de choque es evidente, pues aparece de forma casi inmediata. La velocidad también aumenta hasta por un factor de 3. En ambos casos se observa que la forma inicial de la arteria se recupera después de cierto tiempo.

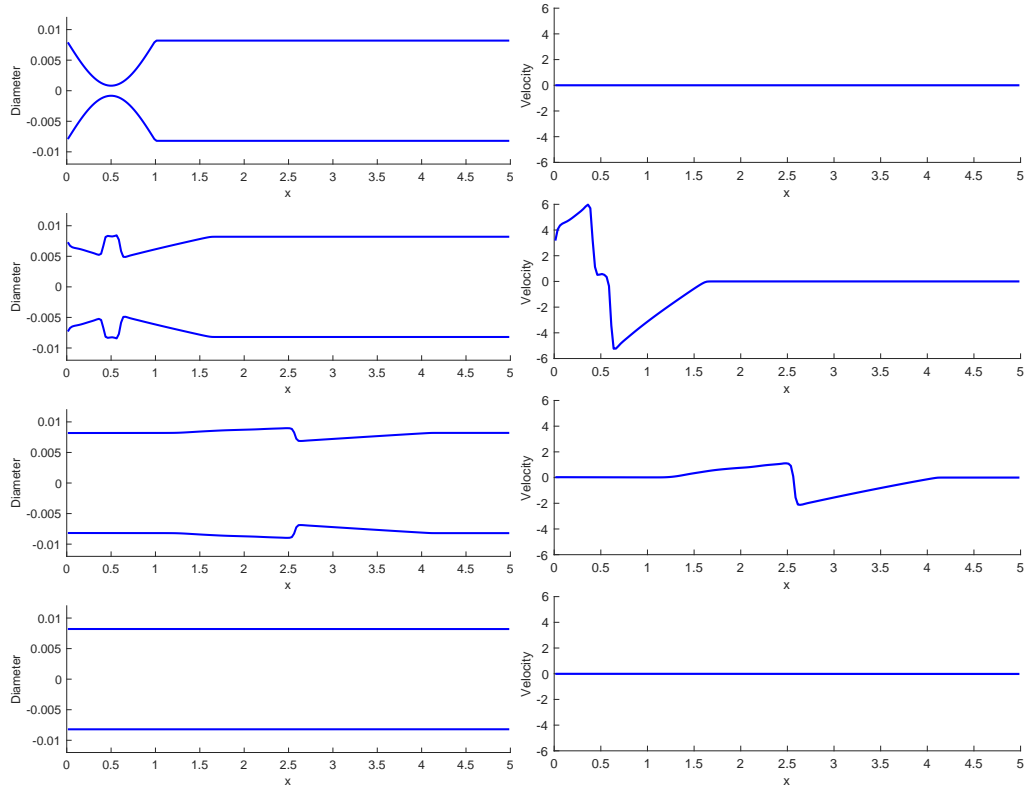


FIGURA 6.6: Evolución del diámetro de la arteria (izquierda) y la velocidad (derecha) para  $t = 0.0, 0.1, 0.5, 2.0$ s. Se usan las condiciones de frontera en donde se impone una descarga de fluido en la izquierda dada por (6.5). Las condiciones iniciales son  $u = 0$  y  $R$  dadas por (6.6).

## 6.5. Oclusión

En la última prueba numérica, se considera el caso de una arteria en el dominio  $[0.0, 5.0]$ m en donde el fluido se acumula de manera importante cerca del extremo izquierdo de la arteria y hay menos fluido en el resto de ésta. Este caso es similar al de estenosis, pero sin la descarga de fluido que se impuso anteriormente en la frontera izquierda de la arteria. Se estudia la evolución del fluido cuando se empuja hacia la derecha liberando la oclusión. En particular, se consideran los mismos parámetros (6.3), no obstante, las condiciones iniciales son  $u(x, 0) = 0$  y

$$A(x, 0) = \begin{cases} A_0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{10}A_0 & \text{si } 1 \leq x < 5. \end{cases} \quad (6.7)$$

El dominio es particularmente largo, y se escogió así con la intención de analizar la evolución del fluido a tiempos largos. La solución (radio y velocidad) se muestran en la Figura 6.7 a tiempos  $t = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ s. Los cambios significativos de presión generan perfiles de velocidad bastante drásticos y elevados. La velocidad se eleva hasta casi los  $14 \text{ m s}^{-1}$  y el radio de la arteria se incrementa al moverse el fluido de hacia la

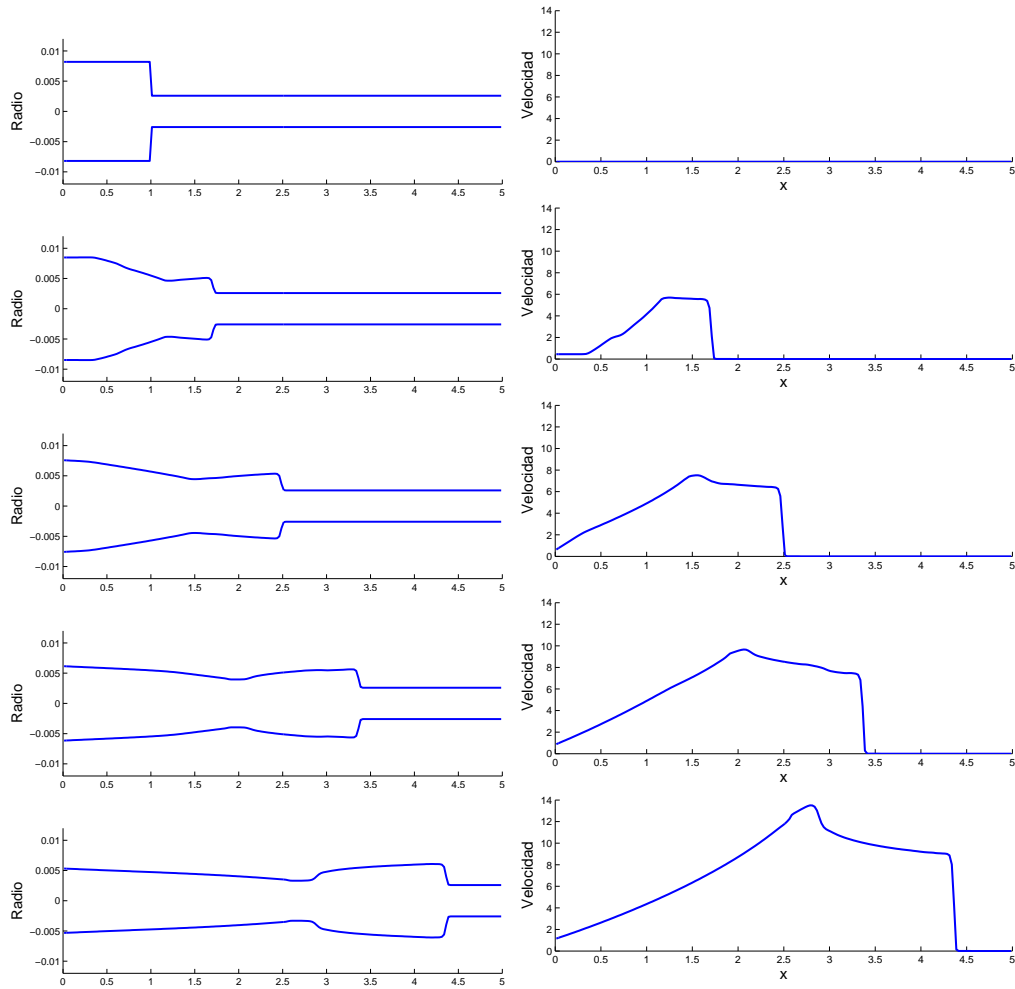


FIGURA 6.7: Solución a tiempo  $t = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  s con condiciones iniciales dadas en (6.7) y condiciones de frontera libre.

derecha. Además se observa la formación de una región detrás de la onda de choque en donde el radio de la arteria alcanza un mínimo. En la región en donde la arteria se estrecha el fluido tiene que viajar más rápido, coincidiendo con las velocidades máximas del flujo.



## Capítulo 7

# Conclusiones

A partir de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos, en esta tesis se consideró un modelo unidimensional del flujo sanguíneo a través de las arterias del sistema cardiovascular [1]. El modelo obtenido cumple con las características de un sistema hiperbólico de leyes de conservación, en donde las variables de interés son el área de la sección transversal de la arteria  $A$  y la velocidad  $u$  de la sangre. Se implementó un método numérico computacional de diferencias finitas de tipo *central-upwind* para evaluar la evolución temporal de dichas variables. La robustez y estabilidad del método se comprobó mediante la ejecución del algoritmo en el contexto de varios escenarios.

En primer término, las condiciones iniciales que configuran el problema de Riemann permiten obtener una solución analítica al sistema de ecuaciones que atañe a esta tesis. Esta solución analítica se pudo comparar directamente con la solución numérica arrojada por el algoritmo, demostrando una muy buena aproximación; la posición de las ondas de choque y de rarefacción es capturada de manera fidedigna. Adicionalmente, se pudieron capturar los beneficios de la combinación de la precisión del método de segundo orden con la estabilidad del método de primer orden; no se presentaron inestabilidades y la masa y el momento se conservan en todos los pasos de la simulación.

El caso de la perturbación en un estado estacionario permitió constatar la robustez del método para preservar el estado de equilibrio entre los gradientes de flujo y los términos fuente. La introducción de una perturbación, en conjunto con las condiciones de frontera libre, permitieron apreciar cómo es que el sistema es capaz de regresar a su estado de equilibrio sin violar las leyes de conservación de masa, momento y energía. La perturbación se comporta como un estado transitorio que sale del dominio de la simulación, tras lo cual el sistema regresa a su estado estacionario.

Tras constatar la robustez del método numérico, se introdujeron las perturbaciones típicas de un ciclo cardíaco en un conducto arterial en estado estacionario. La transmisión de la información ocurre en dirección contraria al origen del pulso cardíaco y se puede observar la formación de una onda de choque.

Con la información anterior, se procedió a estudiar el caso particular de la estenosis arterial, cuyo efecto más notorio fue la formación de ondas de choque por efecto del estrechamiento inicial del conducto. Este es un caso que claramente genera una perturbación del flujo sanguíneo, modificando la velocidad, e inclusive la dirección del flujo de la sangre en el dominio estudiado.

Al conocer la estructura del modelo, sus variables y la relación que existe entre ellas, es posible producir más escenarios de anomalías cardiovasculares. El método numérico

propuesto cumple con las características necesarias para evitar el ruido numérico propio de un método de diferencias finitas y preservar las cantidades conservadas.

## Apéndice A

# Demostraciones

### A.1. Teorema del cambio de variables

El teorema de cambio de variables describe de forma efectiva la distorsión que sufren las longitudes, las áreas y, en general, los volúmenes  $n$ -dimensionales por efecto de una función diferenciable. En particular, dicho teorema reduce todo el problema de encontrar la distorsión del volumen a comprender la distorsión a nivel infinitesimal, es decir, la distorsión de la derivada, la cual está dada por el determinante del mapeo lineal.

El mapeo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal con preservación de área si y sólo si  $|\det(f')| = 1$ , y en general, si  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , el volumen de su imagen está dado por  $|\det(f')|$  multiplicado por el volumen original. El teorema de cambio de variables toma esta información infinitesimal y aplica el cálculo para deshacer el dominio en piezas pequeñas, añadiendo al final, pedazo por pedazo, el cambio en el área.

En una dimensión, la enunciación explícita del teorema para una función continua  $f$  dependiente de  $y$  es

$$\int_S f(\phi(x)) \frac{d\phi}{dx} dx = \int_{\mathcal{T}} f(y) dy ,$$

donde  $y = \phi(x)$  es un mapeo diferencial sobre el intervalo  $[c, d]$  y  $\mathcal{T}$  es el intervalo  $[a, b]$  con  $\phi(c) = a$  y  $\phi(d) = b$ . En dos dimensiones, el teorema tiene la siguiente forma,

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_{R^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv ,$$

y en tres dimensiones,

$$\int_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_{R^*} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw ,$$

donde  $R = f(R^*)$  es la imagen de la región original  $R^*$ . Por otro lado,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$$

es el determinante de la matriz jacobiana y  $f$  es el **difeomorfismo** global con preservación de orientación de  $R$  y  $R^*$ , los cuales son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .



## A.2. Diferenciación de la matriz jacobiana

**Lema** (Diferenciación de  $J(\mathbf{x}, t)$ ).

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) [\operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t)].$$

*Demostración.* Las componentes de  $\varphi$  pueden escribirse como  $\xi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\eta(\mathbf{x}, t)$  y  $\zeta(\mathbf{x}, t)$ . Obsérvese que, de acuerdo con la definición del campo de velocidad del fluido,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t).$$

La matriz jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$  correspondiente al mapeo  $\varphi_t$  es

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta la expresión anterior, el determinante jacobiano  $J(\mathbf{x}, t)$  está dado por

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, t) &= \det[\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)] \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Al derivar la expresión anterior con respecto al tiempo para obtener  $\partial J / \partial t$  obtendremos 18 términos surgidos a partir de la regla para la diferenciación de productos triples. Dichos términos se pueden acomodar de manera simplificada en una suma de tres determinantes, a saber

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde las líneas verticales a los lados de cada matriz denotan el determinante de las mismas. A esta propiedad del determinante se le llama **multilinealidad**. La diferenciación temporal  $\partial / \partial t$  se puede «transportar» a cada una de las columnas (o filas) de la

matriz y luego sumar los resultados individuales. Nótese que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} w(\varphi(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z},\end{aligned}$$

donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son funciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y denotan a las componentes de la velocidad  $\mathbf{u}$ . Al sustituir estas equivalencias en la expresión (A.1), podemos descomponer cada uno de los tres determinantes de manera que, por ejemplo, para el primer determinante

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} J(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Algo similar ocurre con los dos determinantes restantes de forma que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial u}{\partial \xi} J(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v}{\partial \eta} J(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial w}{\partial \zeta} J(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) J(\mathbf{x}, t) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

■



## Apéndice B

# Definiciones

### B.1. Dominio de dependencia

La ecuación de advección posee la siguiente propiedad: la solución  $u(x, t)$  en algún punto  $(\bar{x}, \bar{t})$  depende de la información inicial  $u_0$  en el punto  $\bar{x}_0$  de tal manera que  $(\bar{x}, \bar{t})$  se encuentra sobre la característica que pasa por  $\bar{x}_0$ . Si la información inicial cambia en otros puntos distintos a  $\bar{x}_0$ , la solución  $u(\bar{x}, \bar{t})$  no se verá afectada.

Al conjunto  $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{t}) = \{\bar{x} = 0\}$  se le conoce como **dominio de dependencia** del punto  $(\bar{x}, \bar{t})$ . En este caso, el dominio consiste en un sólo punto. Para un sistema de ecuaciones, este dominio suele ser un intervalo. Para ecuaciones hiperbólicas, dicho intervalo siempre está acotado.

La solución en el punto  $(\bar{x}, \bar{t})$  se determina por medio de la información inicial que se encuentra a una cierta distancia de  $\bar{x}$ . El tamaño del dominio suele aumentar conforme  $\bar{t}$  avanza, pero la frontera tiene la forma  $\mathcal{D} \subset \{x : |x - \bar{x}| \leq a_{\max} t\}$  para algún valor  $a_{\max}$ .

Las ecuaciones hiperbólicas tienen **velocidad de propagación finita**; la información puede viajar a lo más con velocidad  $a_{\max}$ .



# Bibliografía

- (1) Canic, S. y Kim, E. H. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **2003**, 26, 1161-1186.
- (2) Mazumdar, J., *An Introduction to Mathematical Physiology and Biology*; Cambridge University Press: Cambridge, 1999.
- (3) *Enciclopedia de salud y seguridad en el trabajo*; Stellman, J. M., ed.; Organización Internacional del Trabajo: 1998; vol. 1.
- (4) Anliker, M.; Rockwell, R. L. y Ogden, E. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* **1971**, 22, 217-246.
- (5) Formaggia, L.; Nobile, F.; Quarteroni, A.; Veneziani, A. y Zunino, P. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000*, 11-14.
- (6) Olufsen, M. S.; Peskin, C. S.; Kim, W. Y.; Pedersen, E. M.; Nadim, A. y Larsen, J. *Annals of Biomedical Engineering* **2000**, 28, 1281-1299.
- (7) Barnard, A. C. L.; Hunt, W. A.; Timlake, W. P. y Varley, E. *Biophysical Journal* **1966**, 6, 717-724.
- (8) LeVeque, R. J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, 1992; vol. 57, pág. 875.
- (9) Wang, S.; Lee, L. y Lee, J. *The Journal of the Acoustical Society of America* **2001**, 109, 390-6.
- (10) Canic, S. *Computing and Visualization in Science* **2002**, 4, 147-155.
- (11) Chorin, A. J. y Marsden, J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*; Texts in Applied Mathematics, vol. 4; Springer New York: New York, NY, 1993.
- (12) Oleinik, O. A. *Amer. Math. Soc. Transl.* **1963**, 26, 95-172.
- (13) Castañeda, P. *Miscelánea Matemática* **2016**, 62, 63-80.
- (14) Smith, N. P.; Pullan, A. J. y Hunter, P. J. *Annals of Biomedical Engineering* **2000**, 28, 14-25.
- (15) Smith, N. P.; Pullan, A. J. y Hunter, P. J. *Siam J Appl Math* **2002**, 62, 990-1018.
- (16) Roe, P. L. *Journal of computational physics* **1981**, 43, 357-372.
- (17) Koppl, T.; Schneider, M.; Pohl, U. y Wohlmuth, B. *Medical Engineering and Physics* **2014**, 36, 905-914.
- (18) Weis, S. M. y Cheresch, D. A. *Nat Med* **2011**, 17, 1359-1370.
- (19) Ku, D. N.; Giddens, D. P.; Zarins, C. K. y Glagov, S. *Arterioscler Thromb Vasc Biol* **1985**, 5, 293-302.

- (20) Hulsing, H.; Smith, W. y Cobb, E. D. *Velocity-Head Coefficients in Open Channels; inf. téc.*; 1966, pág. 56.
- (21) Hillen, F. y Griffioen, A. W. *Cancer and Metastasis Reviews* **2007**, 26, 489-502.
- (22) Canic, S.; Lamponi, D.; Mikelic, A. y Tambaca, J. *Multiscale Modeling & Simulation* **2005**, 3, 559-596.
- (23) Peiró, J. y Veneziani, A. *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory systems* **2009**, 347-394.
- (24) Formaggia, L.; Nobile, F.; Quarteroni, A. y Veneziani, A. *Computing and Visualization in Science* **1999**, 2, 75-83.
- (25) Ziyad, S. e Iruela-Arispe, M. L. *Genes & cancer* **2011**, 2, 1085-96.
- (26) Peterson, L. H. *Circulation Research* **1954**, 2, 127-139.
- (27) Carmeliet, P. y Jain, R. K. *Nature* **2011**, 473, 298-307.
- (28) Lutsenko, S. V.; Kiselev, S. M. y Severin, S. E. *Biochemistry (Moscow)* **2003**, 68, 286-300.
- (29) Carmeliet, P. *Nature medicine* **2000**, 6, 389-395.
- (30) Marinis, A. Some Mathematical Models of Cancer Tumors.
- (31) Rideout, V. C. y Dick, D. E. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* **1967**, BME-14, 171-177.
- (32) Balbás, J. y Hernández-Duenas, G. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **2014**, 48, 665-696.
- (33) Peskin, C. S. Partial differential equations in biology, Lecture Notes, 1975.