

NO PDF



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE QUIMICA**

**DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES**

**Estimación de las Propiedades de Transporte de Fluidos  
No-newtonianos en Régimen Turbulento**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
Maestro en Ciencias Químicas**

**(Ingeniería Química)**

**P R E S E N T A**

**José Rodolfo García Rosas**

1972



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PRESIDENTE  
PRIMER VOCAL  
SECRETARIO  
PRIMER SUPLENTE

DR. RAFAEL MORONES ESCOBAR  
DR. SERGIO TREJO MARTINEZ  
DR. FRANCISCO LOZANO GARCIA  
DR. CESAR GARCIA FRANCO

ASESOR DEL TEMA

DR. RAFAEL MORONES ESCOBAR

## INDICE

	página
I. Introducción	2
II. Teoría de entidades	4
III. Transferencia de momentum	8
IV. Transferencia de calor	23
V. Transferencia de masa	28
VI. Relaciones de difusividades turbulentas	30
VII. Análisis y resultados	31
VIII. Conclusiones	48
Glosario	49
Bibliografía	53
Apéndice	55

## I . INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades de transporte en fluidos no - Newtonianos debe su importancia al creciente desarrollo de las industrias en donde se manejan estos fluidos.

Dada la diversidad de comportamientos que presentan los materiales que se han agrupado bajo el nombre de no-Newtonianos, el tratamiento que se les da va desde el meramente empírico, por lo regular específico para un material determinado, que se encuentra difundido a nivel industrial debido a su aplicación directa aunque muy restringida; hasta el tratamiento teórico que emplea ecuaciones constitutivas bastante complejas, pero que en muchos de los casos no llega a resultados que puedan compararse de alguna manera con los obtenidos experimentalmente.

El presente trabajo tiene la intención de servir de unión entre ambos tratamientos y tiene la particularidad de que puede servir para cualquier modelo reológico del que se parta, pues en la deducción no se hace mención ni se limita a alguno específico. De aquí que se pueda hablar de la generalidad del tratamiento que se va a exponer.

Los resultados obtenidos se presentan en forma de relaciones de difusividades turbulentas de momentum, calor y masa. Estas expresiones, dada la naturaleza compleja del problema matemático, son soluciones aproximadas a las ecuaciones derivadas de la teoría de entidades.

Cuando se realiza la sustitución en las expresiones de los

- 3 -

parámetros apropiados se obtiene el valor numérico de la propiedad, lo cual permite su comparación directa con resultados experimentales.

## II. TEORÍA DE ENTIDADES

A través de los años, varios modelos conceptuales se han propuesto para tomar en cuenta el comportamiento de un fluido turbulento. En general estos modelos han probado ser de un cierto valor en ingeniería y no precisamente porque describan con exactitud los detalles microscópicos de un fluido turbulento, sino porque permiten que ciertos fenómenos masivos sean discutidos en términos de un simple parámetro escalar cuyo valor puede encontrarse experimentalmente y usarse para predicciones posteriores. Los conceptos como la longitud de mezclado de Prandtl y el flux de Reynolds, son ejemplos típicos de tales modelos. Sin embargo, ni uno ni otro modelo es en sí capaz de predecir cualquiera de las propiedades globales del fluido sin recurrir a resultados experimentales.

En el flujo de un gas perfecto el comportamiento masivo es el resultado de un gran número de movimientos fluctuantes individuales. En este caso el desarrollo de la Termodinámica Estadística proveyó un marco dentro del cual las predicciones del efecto cumulativo del movimiento molecular pudieran hacerse a partir de un conocimiento de las moléculas individuales.

El hecho de que estas predicciones hayan probado ser exactas se debe esencialmente a la fidelidad con que el modelo molecular representa los detalles microscópicos de las sustancias.

En la turbulencia en fluidos existen fenómenos más complejos que en el movimiento molecular en un gas perfecto. Los métodos usuales de la Termodinámica Estadística son difíciles de emplear ya que no existe una entidad permanente comparable con la molécula; pero si se pudiera tener un modelo conveniente, en principio no hay razón por la que un tipo de estudio similar no pudiera hacerse. La teoría de las entidades representa un estudio de este tipo y parte de un modelo simple para representar el movimiento turbulento (1).

Esta teoría se basa en la forma de los resultados obtenidos en la medición del tensor de correlación de velocidades entre dos puntos. Este tensor se define como

$$R_{ij} = \frac{\langle v_i' v_j'' \rangle}{\langle v'^2 \rangle}$$

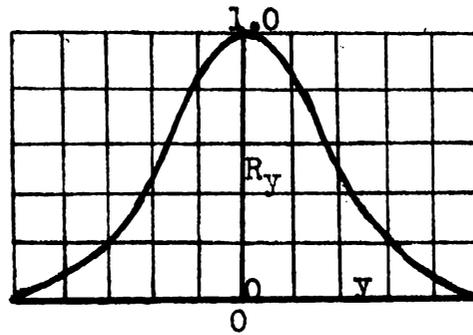
donde

$v_i'$  , componente de la velocidad fluctuante en la dirección  $i$  en el punto  $p'$

$v_j''$  , componente de la velocidad fluctuante en la dirección  $j$  en el punto  $p''$

$\langle v'^2 \rangle$ , promedio del cuadrado de las fluctuaciones de la velocidad en el punto  $p'$

En la siguiente figura se presenta una gráfica típica de la correlación transversal  $R(y)$  contra la distancia  $y$  que separa los puntos  $p'$  y  $p''$  .



La curva muestra que  $R_y$  disminuye hasta cero dentro de ciertas dimensiones bien definidas, lo cual demuestra que aunque no hay entidades permanentes en el fluido ( como las moléculas en un gas) , existe ciertamente una zona distinguible donde las componentes de la velocidad fluctuante en distintas direcciones son correlacionables. Esto sugiere como un límite la posibilidad de que se considere al fluido como un conjunto de regiones distintas, cada una comportándose al menos temporalmente como una entidad. Un tipo similar de curva de correlación se obtiene para otras clases de flujo turbulento y para cualquier dirección relativa al flujo.

Ahora bien, la noción de dividir a un fluido turbulento en regiones, sugiere inmediatamente un modelo en el cual el campo de flujo esté construido por una serie de entidades tridimensionales vagamente colocadas con varios tamaños y formas. Dentro de cada entidad, la velocidad del fluido está correlacionada, pero hay una frontera más bien indistinta a través de la cual la correlación media es cero

Este modelo, aunque es difícilmente manejable desde un

punto de vista de análisis, satisface las condiciones requeridas y es en principio, una descripción exacta de la turbulencia siempre y cuando se tome en cuenta que la masa, forma y velocidad de la entidad cambien con el tiempo, esto es, que la entidad no tiene una identidad permanente.

Se asume que son necesarias tres variables o parámetros para la descripción de una entidad individual: una escala, una forma y una velocidad. La interdependencia entre estos parámetros se supone que es débil y podrán variar sus valores promedio en diferentes posiciones del flujo.

El comportamiento del fluido puede entonces determinarse del efecto colectivo del movimiento de las entidades. Para esto, es necesario primeramente analizar el movimiento de una entidad que tenga parámetros conocidos y después sumar para todos los valores posibles de los parámetros. De este modo, se verá que las difusividades turbulentas de momentum, calor y masa aparecen en forma por demás natural y podrán ser evaluadas como funciones de los valores medios de los parámetros.

### III. TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

La inclusión de la forma de la entidad como una variable presenta dificultades cuando se discute su movimiento. Sin embargo, una buena aproximación puede hacerse si se considera el movimiento lento de un elipsoide en un volumen grande de fluido.

La fuerza  $F^i$  que actúa sobre un elipsoide de semiejes  $(a, b, c)$  que se mueve como un sólido con velocidad  $V^i$  relativa a un sistema fijo de coordenadas, en el seno de un fluido con una velocidad  $v^i$ , también relativa a un sistema fijo de coordenadas, tiene la siguiente forma de acuerdo con Caswell y Schwarz (2)

$$-F^i = 6\pi r \eta (V^i - v^i) + \frac{\pi B}{r} g_{jk} (V^j - v^j)(V^k - v^k)(V^i - v^i) \quad \text{--- (1)}$$

en donde  $\eta$  es la viscosidad aparente,  $r$  es una función de los semiejes  $(a, b, c)$  de tal manera que cuando se trata de una esfera ( $a = b = c$ ) entonces  $r = a$ .  $B$  es un parámetro no-Newtoniano;  $g_{ij}$  es el tensor métrico y se sigue la convención de la suma.

La ecuación de movimiento del elipsoide puede escribirse como

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \psi \left( \frac{dV^i}{dt} \right) = -6\pi r \eta (V^i - v^i) - \frac{\pi B}{r} g_{jk} (V^j - v^j)(V^k - v^k)(V^i - v^i) \quad \text{--- (2)}$$

o

$$r^2 \psi \left( \frac{dV^i}{dt} \right) = -\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} (V^i - v^i) - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho r^2} g_{jk} (V^j - v^j)(V^k - v^k)(V^i - v^i)$$

en donde  $\rho$  es la densidad y  $\Psi^0$  es una función de (a, b, c) de valor unidad cuando  $a = b = c = r$ .  $\Psi^0$  puede considerarse como un factor de distorsión a partir de la forma esférica.

Dado que r y  $\Psi^0$  no son independientes, es conveniente definir un nuevo factor de distorsión  $\Psi$  tal que el volumen de la entidad sea  $4/3\pi R^3$ , siendo R un nuevo parámetro de escala, y  $\Psi = 1$  siempre que la entidad se comporte como una esfera.

Una suposición implícita en el modelo de entidades es que las velocidades de las entidades adyacentes constituyen el movimiento de la masa fluida. Como resultado, la ecuación de movimiento para una entidad particular queda como

$$R^2 \Psi \left( \frac{dv^i}{dt} \right) = - \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} (v^i - \bar{v}^i) - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} g_{jk} (v^j - \bar{v}^j) (v^k - \bar{v}^k) (v^i - \bar{v}^i) \quad \text{--- (3)}$$

donde  $\bar{v}^i$  es la velocidad promedio de las entidades que rodean a la entidad particular considerada.

Si ahora se considera una entidad en general, el movimiento esperado estará descrito por

$$R^2 \Psi \left( \frac{dv^i}{dt} \right) = - \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} (v^i - \langle \bar{v}^i \rangle) - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} g_{jk} (v^j - \langle \bar{v}^j \rangle) (v^k - \langle \bar{v}^k \rangle) (v^i - \langle \bar{v}^i \rangle) \quad \text{--- (4)}$$

en donde ahora  $\langle \bar{v}^i \rangle$  es la velocidad de la masa del fluido.

#### Disipación de Energía.-

Si se toma el producto escalar de la ecuación (4) con la velocidad de la entidad  $v^i$ , se obtiene

$$- R^2 \Psi \left( \frac{dV^2}{dt} \right) = \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} (V^2 - g_{ij} \langle \bar{v}^i \rangle v^j) + \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} g_{jk} (v^j - \langle \bar{v}^j \rangle) (v^k - \langle \bar{v}^k \rangle) (V^2 - g_{il} \langle \bar{v}^i \rangle v^l) \quad \text{--- (5)}$$

en donde  $V^2 = g_{ij} V^i V^j$  --- (5.a)

Ahora bien, el valor esperado o promedio  $\langle \rangle$  de alguna propiedad o característica de flujo  $p$  que varíe con el tiempo, está dado por

$$\langle p \rangle = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} p dt$$

siendo  $t_0$  el intervalo de tiempo sobre el cual se tome el promedio de  $p$ .

De esta forma, si se toma el valor esperado de ambos lados de la ecuación (5), para contar por todos los valores posibles de  $R, \Psi$  y  $V^i$ , se obtiene

$$-\langle R^2 \Psi \frac{d(\frac{1}{2} V^2)}{dt} \rangle = \left\langle \frac{g}{2} \frac{\eta}{\rho} (V^2 - g_{ij} \langle \bar{v}^i \rangle V^j) + \left\langle \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} g_{jk} (V^j \langle \bar{v}^i \rangle) (V^k \langle \bar{v}^i \rangle) (V^2 - g_{il} \langle \bar{v}^i \rangle V^l) \right\rangle \right\rangle \quad \text{--- (6)}$$

Si se supone que las correlaciones entre  $R, \Psi$  y  $V^i$  son despreciables, la ecuación anterior se simplifica a

$$-\langle R^2 \rangle \langle \Psi \rangle \left\langle \frac{d(\frac{1}{2} V^2)}{dt} \right\rangle = \frac{g}{2} \frac{\eta}{\rho} (\langle V^2 \rangle - g_{ij} \langle \bar{v}^i \rangle \langle V^j \rangle) + \frac{3}{4} \frac{B}{\rho \langle R^2 \rangle} \left( \langle V^2 - 2g_{jk} \langle \bar{v}^j \rangle V^k + \langle \bar{v} \rangle^2 \rangle (V^2 - g_{il} \langle \bar{v}^i \rangle V^l) \right) \quad \text{--- (7)}$$

en donde  $\langle \bar{v} \rangle^2 = g_{ij} \langle \bar{v}^i \rangle \langle \bar{v}^j \rangle$  --- (7.a)

Como  $\langle V^i \rangle$ , la velocidad promedio de las entidades es precisamente la velocidad promedio del fluido  $\langle \bar{v}^i \rangle$ , se tiene

$$\Phi \equiv \left\langle \frac{d(\frac{1}{2} V^2)}{dt} \right\rangle = - \frac{g}{2} \frac{\eta}{\rho} \frac{\langle V_r^2 \rangle}{\langle R^2 \rangle \langle \Psi \rangle} - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho} \frac{\langle V_r^4 \rangle}{\langle R^2 \rangle^2 \langle \Psi \rangle} \quad \text{--- (8)}$$

donde

$$\langle V_r^2 \rangle = \langle V^2 \rangle - \langle \bar{v} \rangle^2 \quad \text{y} \quad \langle V_r^4 \rangle = \langle V^4 \rangle - \langle V^2 \rangle \langle \bar{v} \rangle^2 \quad \text{--- (8.a)}$$

Si  $B = 0$ , como es el caso de los materiales Newtonianos, se tiene

$$\Phi_N = - \frac{g}{2} \frac{\eta}{\rho} \frac{\langle V_r^2 \rangle}{\langle R^2 \rangle \langle \Psi \rangle} \quad \text{--- (9)}$$

que es la expresión obtenida por Tyldesley y Silver (1) y que además es totalmente análoga a la relación que para disipación de energía bajo condiciones isotrópicas de turbulencia obtuvieron Von-Kármán y Howarth (3). Esta relación puede escribirse

como

$$\Phi_N = \left\langle \frac{d(\frac{1}{2}V^2)}{dt} \right\rangle = -G \frac{\mu \langle V_r^2 \rangle}{\rho_N \delta^2} \quad \text{--- (10)}$$

en donde

G es una constante numérica

$\delta$  es la microescala de turbulencia

$\mu, \rho_N$  son la viscosidad y la densidad del material Newtoniano respectivamente

De aquí que para turbulencia isotrópica, el producto  $\langle R^2 \rangle \langle \Psi \rangle$  sea proporcional a la microescala al cuadrado,  $\delta^2$ .

Hay que hacer notar, que en la deducción de las ecuaciones (8) y (9) no se hizo mención alguna de la condición de isotropía y que por tanto son expresiones más generales.

La expresión

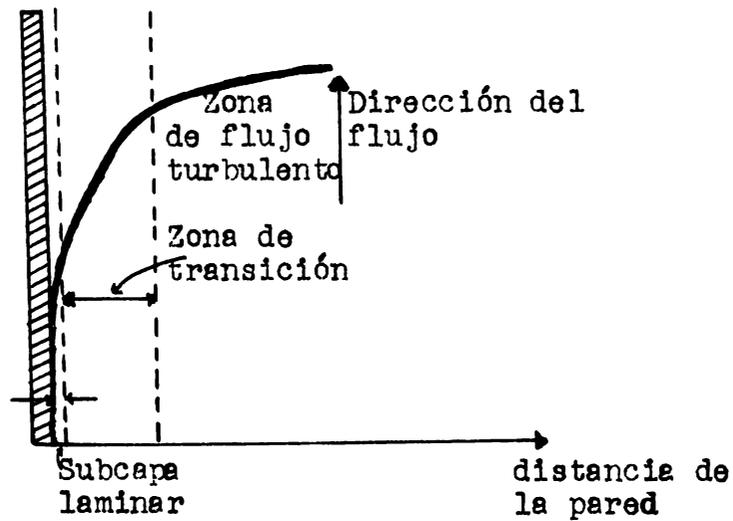
$$\frac{\Phi}{\Phi_N} = \frac{\eta/\rho}{\mu/\rho_N} + \frac{B/\rho}{6\mu/\rho_N} \frac{\langle V_r^4 \rangle}{\langle R^2 \rangle \langle V_r^2 \rangle} \quad \text{--- (11)}$$

nos muestra que la relación de energía de disipación de un fluido no-Newtoniano a aquella de un fluido Newtoniano no sólo depende de las propiedades moleculares de los materiales, sino también de las características turbulentas del flujo.

Difusividad Turbulenta de Momentum.-

Para el caso de flujo turbulento en un ducto, Bird et al.

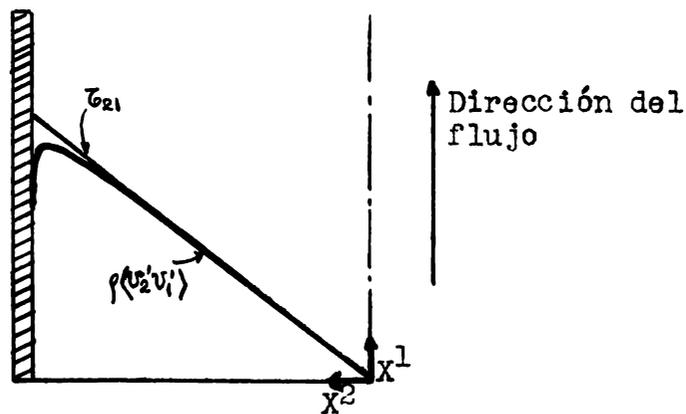
(4) muestran la siguiente distribución de velocidades



Distribución de velocidades para flujo turbulento en tubos.-  
Región cercana a la pared del tubo.

---

Una gráfica del esfuerzo cortante promedio contra la distancia de la pared presenta la forma siguiente



Esfuerzo cortante contra distancia.-  $\tau_{21}$  es el esfuerzo cortante turbulento, también referido como uno de los componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds. Está dado por

$$\tau_{21} = \rho \langle u'_2 v'_1 \rangle$$

en donde las  $u'_i$  son las componentes (físicas) de las fluctuaciones de la velocidad.

---

Para este tipo de casos en los que el movimiento de la masa del fluido es unidireccional y se puede considerar un gradiente de velocidad constante en la región francamente turbulenta, el vector velocidad de la masa del fluido relativo a un plano  $y=0$  está dado por (componentes físicas)

$$\langle \bar{v}_f \rangle = \left( y \frac{d\langle u \rangle}{dy}, 0, 0 \right)$$

en donde  $\frac{d\langle u \rangle}{dy}$  es el gradiente de la velocidad de la masa fluida.  $\langle u \rangle$  es la velocidad promedio de la masa del fluido en un punto dado; así, por ejemplo, en tuberías  $\langle u \rangle$  es cero en la pared y toma un valor máximo en el centro del tubo.

Las componentes físicas de  $V^i$  son  $(V_1, V_2, V_3)$ ; de aquí que la ecuación (4) desarrollada para cada componente queda como

$$R^2 \psi \left( \frac{dV_1}{dt} \right) = -\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} (V_1 - y \frac{d\langle u \rangle}{dy}) - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} (V_1 - y \frac{d\langle u \rangle}{dy})^3 \quad \text{--- (12)}$$

$$R^2 \psi \left( \frac{dV_2}{dt} \right) = -\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} V_2 - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} V_2^3 \quad \text{--- (13)}$$

$$R^2 \psi \left( \frac{dV_3}{dt} \right) = -\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} V_3 - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} V_3^3 \quad \text{--- (14)}$$

en donde se ha supuesto que

$$\frac{d(V^i - \langle \bar{v}^i \rangle)}{dt} = f(V^i - \langle \bar{v}^i \rangle)$$

siempre que la velocidad de la masa fluida sea estacionaria. Esto es, que el cambio de la componente  $i$  de la velocidad relativa de la entidad con respecto al tiempo es únicamente función de esa componente  $i$  y por supuesto, también de los parámetros que describen las características del material.

Bajo las condiciones  $(V_1, V_2, V_3) = (V_{10}, V_{20}, V_{30})$  cuando  $y = 0$ , se resuelven las ecuaciones diferenciales (12), (13) y (14) para  $V_1, V_2$  y  $V_3$  respectivamente.

Resolución para  $V_2$  .-

La ecuación (13) puede escribirse como

$$R^2 \Psi \left( \frac{dV_2}{dy} \frac{dy}{dt} \right) = - \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} V_2 - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} V_2^3$$

y puesto que  $V_2 = \frac{dy}{dt}$ , la ecuación anterior queda como

$$R^2 \Psi \frac{dV_2}{dy} = - \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho} V_2 - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} V_2^3$$

o bien

$$\frac{dV_2}{dy} = -A(V_2^2 + a^2) \quad \text{--- (15)}$$

en donde

$$A = \frac{3B}{4\rho R^4 \Psi} \quad \text{--- (15.a)}$$

$$a = \left( \frac{6\eta R^2}{B} \right)^{1/2} \quad \text{--- (15.b)}$$

Integrando

$$\int_{V_2=V_{20}}^{V_2} \frac{dV_2}{V_2^2 + a^2} = -A \int_{y=0}^y dy$$

de donde

$$V_2 = V_{20} \left( \frac{1 - \frac{a}{V_{20}} \tan Aay}{1 + \frac{V_{20}}{a} \tan Aay} \right) \quad \text{--- (16)}$$

La expresión anterior se hace cero cuando

$$Aay = \tan^{-1} \frac{V_0}{a}$$

y si se llama  $\lambda^*$  a la distancia correspondiente a la cual  $V_2 = 0$ , es decir,

$$\lambda^* = \frac{1}{Aa} \tan^{-1} \frac{V_0}{a} \quad \text{--- (17)}$$

esto es,  $\lambda^*$  es la distancia media viajada por la entidad antes de que su momentum se disipe totalmente por acción viscosa, pues como se mostrará más adelante, no solamente a  $y = \lambda^*$   $V_2$  se hace cero, sino también  $V_1$  y  $V_3$  son cero. Como la disminución del momentum de la entidad es exponencial(1), se requiere un tiempo infinito para que la entidad viaje la distancia  $\lambda^*$ . Por tanto, esta distancia representa un límite al cual se acerca rápidamente, pero que nunca es alcanzado. En el análisis subsecuente se supondrá que la diferencia entre  $\lambda^*$  y cualquier límite real es despreciable.

Si se expanden en series de Taylor las funciones tangente de la ecuación (16) se obtiene

$$V_2 = V_{20} \left[ \frac{1 - \frac{a}{V_0} (Aay) + \frac{a^2 (Aay)^3}{3 V_0} + \frac{2 a^4 (Aay)^5}{15 V_0} + \dots}{1 + \frac{V_0}{a} (Aay) + \frac{V_0^2 (Aay)^3}{3 a} + \frac{2 V_0^4 (Aay)^5}{15 a} + \dots} \right], \quad (Aay)^2 < \frac{\pi^2}{4} \quad \text{--- (18)}$$

esto es,

$$V_2 = V_{20} \left[ \frac{1 - \frac{a^2 A Y}{V_0} - \frac{a^4 (AY)^3}{3 V_0} - \frac{2 a^6 (AY)^5}{15 V_0} - \dots}{1 + V_0 A Y + \frac{V_0 a^2 (AY)^3}{3} + \frac{2 V_0 a^4 (AY)^5}{15} + \dots} \right] \quad \text{--- (19)}$$

o si se substituyen los términos que representan A y a,

$$V_2 = V_{2_0} \left[ \frac{1 - \frac{y}{\lambda_N^*} - \frac{V_{2_0}^2 B}{18\eta R^2} \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right)^3 - \frac{V_{2_0}^4 B^2}{270\eta^2 R^4} \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right)^5 - \dots}{1 + \frac{V_{2_0}^2 B}{6\eta R^2} \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right) + \frac{V_{2_0}^4 B^2}{108\eta^2 R^4} \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right)^3 + \frac{V_{2_0}^6 B^3}{1620\eta^3 R^6} \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right)^5 + \dots} \right] \quad \text{--- (20)}$$

en donde

$$\lambda_N^* = \frac{2\rho R^2 V_{2_0} \Psi}{g\eta}$$

$\lambda_N^*$  es la distancia media viajada, en un material para el cual B sea igual a cero (como en un fluido Newtoniano), por la entidad desde el plano  $y=0$  antes de que su momentum sea disipado enteramente por la acción de fuerzas viscosas. En efecto, si  $B=0$

$$V_2 = V_{2_0} \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^*}\right) \quad \text{--- (21)}$$

que es la expresión obtenida por Tyldesley y Silver (1) para fluidos Newtonianos.

Esta misma expresión debe también obtenerse si se expande la ecuación (17), que define  $\lambda^*$ , en series y después se considera el caso  $B = 0$ . Así,

$$\lambda^* = \frac{1}{Aa} \tan^{-1} \frac{V_{2_0}}{a} = \frac{1}{Aa} \left[ \frac{V_{2_0}}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{V_{2_0}}{a}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{V_{2_0}}{a}\right)^5 - \dots \right], \quad \left(\frac{V_{2_0}}{a}\right) < 1$$

$$= \frac{V_{2_0}}{Aa^2} - \frac{V_{2_0}^3}{3Aa^4} + \frac{V_{2_0}^5}{5Aa^6} - \dots$$

$$\lambda^* = \lambda_N^* - \frac{BV_{2_0}^2}{18\eta R^2} \lambda_N^{*3} + \frac{B^2 V_{2_0}^4}{180\eta^2 R^4} \lambda_N^{*5} - \dots \quad \text{--- (22)}$$

De aquí que

$$\lim_{B \rightarrow 0} \lambda^* = \lim_{a \rightarrow \infty} \lambda^* = \lambda_N^*$$

En conclusión, se ha introducido un nuevo concepto :  $\lambda^*$  , la distancia máxima viajada por la entidad en un material no-Newtoniano y que dependiendo del signo de B cumple necesariamente

$$\lambda^* < \lambda_N^* \quad \text{si } B > 0$$

$$\lambda^* > \lambda_N^* \quad \text{si } B < 0$$

Resolución para  $V_1$  .-

De la ecuación (12) ,

$$R^2 \psi \frac{dV_1}{dy} \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{2} \frac{\eta}{\rho} (V_1 - y \frac{d\langle u \rangle}{dy}) - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} (V_1 - y \frac{d\langle u \rangle}{dy})^3$$

$$R^2 \psi V_2 \frac{dV_1}{dy} = -\frac{g}{2} \frac{\eta}{\rho} (V_1 - y \frac{d\langle u \rangle}{dy}) - \frac{3}{4} \frac{B}{\rho R^2} (V_1 - y \frac{d\langle u \rangle}{dy})^3 \quad \text{--- (23)}$$

Una solución para esta ecuación se deduce en el Apéndice , obteniéndose

$$V_1 = V_{10} \frac{(1 - \frac{a}{V_{20}} \tan Aay)}{(1 + \frac{V_{20}}{a} \tan Aay)} + \frac{d\langle u \rangle}{dy} \left[ y + \lambda_N^* \frac{(\cos Aay - \frac{a}{V_{20}} \text{Sen} Aay)}{\sqrt{1 + 2 \frac{V_{20}^2}{a^2}}} \ln \frac{2 - (1 + \sqrt{1 + 2 \frac{V_{20}^2}{a^2}}) \frac{y}{\lambda_N^*}}{2 - (1 - \sqrt{1 + 2 \frac{V_{20}^2}{a^2}}) \frac{y}{\lambda_N^*}} \right] \quad \text{--- (24)}$$

la cual se reduce para el caso  $B = 0$  a

$$V_1 = V_{10} \left( 1 - \frac{y}{\lambda_N^*} \right) + \frac{d\langle u \rangle}{dy} \left[ y + \lambda_N^* \left( 1 - \frac{y}{\lambda_N^*} \right) \ln \left( 1 - \frac{y}{\lambda_N^*} \right) \right]$$

que es precisamente la solución obtenida por Tyldesley y Silver(1) para el caso Newtoniano.

Las expresiones hasta aquí obtenidas para  $V_1$  y  $V_2$  son bastante complejas como para ser usadas en el análisis subsecuente; por ello se harán las siguientes simplificaciones.

Si de la ecuación (18) para  $V_2$ , se desprecian los términos de orden mayor que tres, se tiene

$$V_2 = V_{2_0} \left[ \frac{1 - \frac{y}{\lambda_N^2} - \frac{\alpha V_{2_0}^2}{3} \left(\frac{y}{\lambda_N^2}\right)^3}{1 + \alpha V_{2_0}^2 \left(\frac{y}{\lambda_N^2}\right) + \frac{\alpha^2 V_{2_0}^4}{3} \left(\frac{y}{\lambda_N^2}\right)^3} \right] \quad \text{--- (25)}$$

en donde

$$\alpha = \frac{B}{6\eta R^2} \quad \text{--- (25.a)}$$

Sin embargo, la ecuación (25) es aún una expresión complicada. Por tanto se tendrá que suponer que la norma del parámetro  $B$  es lo suficientemente pequeña como para que se cumpla

$$\left[ \alpha V_{2_0}^2 \left(\frac{y}{\lambda_N^2}\right) \right]^2 \ll 1$$

Con esta suposición, la ecuación (25) puede aproximarse a la solución simplificada que da Morones (5)

$$V_2 = V_{2_0} \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^2}\right) + \frac{\alpha V_{2_0}^3}{3} \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^2}\right)^3 \quad \text{--- (26)}$$

Con esto, la ecuación (24) para  $V_1$  quedará como

$$V_1 = V_{1_0} \left[ \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^2}\right) + \frac{\alpha V_{2_0}^2}{3} \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^2}\right)^3 \right] + \quad \text{--- (27)}$$

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \left[ y + \lambda_N^2 \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^2}\right) \ln \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^2}\right) \right]$$

Resolución para  $V_3$  .-

La forma de la ecuación (14) es totalmente análoga a la de la ecuación (13) . De aquí que la solución sea

$$V_3 = \frac{V_{30} - a \tan A a y}{1 + \frac{V_{30}}{a} \tan A a y} \quad \text{--- (28)}$$

O en la forma simplificada correspondiente

$$V_3 = V_{30} \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^*}\right) + \frac{\alpha V_{30}^3}{3} \left(1 - \frac{y}{\lambda_N^*}\right)^3 \quad \text{--- (29)}$$

Claramente se ve que

$$\lim_{y \rightarrow \lambda^*} (V_1, V_2, V_3) = \langle \bar{v}_f \rangle$$

o bien, como las aproximaciones hechas han conducido a considerar

$\lambda^* \approx \lambda_N^*$  , se tiene

$$\lim_{y \rightarrow \lambda_N^*} (V_1, V_2, V_3) = \langle \bar{v}_f \rangle$$

lo cual significa que en el límite la entidad pierde su identidad y pasa a formar parte de la masa del fluido, esto es, pasa a tomar las características de la masa del fluido, lo que es bastante congruente con el modelo físico propuesto.

Considérese ahora el flujo de entidades que cruzan el plano  $y = 0$  y en particular una entidad que haya sido creada a una distancia  $\lambda$  del plano y que ahora lo cruce. Si  $\Delta V_1$  y  $\Delta V_2$  son las componentes de la velocidad de la entidad relativas a la velocidad promedio del fluido en el plano  $y = 0$ , entonces la contribución al esfuerzo cortante cinemático de esta entidad,

$\sigma_{21}$  , está dado por

$$\sigma_{21} = - \rho \Delta V_1 \Delta V_2 \quad \text{--- (30)}$$

$\Delta V_1$  y  $\Delta V_2$  estarán dadas por las siguientes expresiones (si  $\lambda^* \approx \lambda_n^*$ ). De aquí en adelante se mantendrá esta aproximación y se escribirá simplemente  $\lambda^*$ ):

$$\Delta V_1 = V_{10} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + \frac{\alpha V_{20}^2}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^3 \right] + \frac{d\langle u \rangle}{dy} \left[ \lambda^* \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \right] \quad \text{--- (31)}$$

$$\Delta V_2 = V_{20} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + \frac{\alpha V_{20}^2}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^3 \right] \quad \text{--- (32)}$$

Aquí  $V_{10}$  y  $V_{20}$  son los valores de  $V_1$  y  $V_2$  relativos a la velocidad media del fluido en la región, al momento de crearse las entidades.

Sustituyendo las ecuaciones (31) y (32) en la ecuación (30) y tomando el valor esperado de  $\tau_{21}$  para obtener el valor promedio del esfuerzo cortante  $\bar{\tau}_{21}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{21} = \langle \tau_{21} \rangle = & - \left\langle \rho V_{10} V_{20} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + \frac{\alpha V_{20}^2}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^3 \right]^2 \right\rangle \\ & - \left\langle \left[ \rho V_{20} \lambda^* \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \right] \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right\rangle \quad \text{--- (33)} \\ & - \left\langle \left[ \rho \frac{\alpha V_{20}^3}{3} \lambda^* \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^4 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \right] \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right\rangle \end{aligned}$$

Si se considera que el proceso de creación de las entidades no favorece a valores positivos ni negativos de  $V_{10}$  y que además al momento de crearse la entidad, la componente en la dirección del flujo de su velocidad es independiente de la componente normal  $V_{20}$ , se tiene  $\langle \rho V_{10} V_{20} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + \frac{\alpha V_{20}^2}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^3 \right]^2 \rangle =$

$$\rho \langle V_{10} \rangle \left\{ \langle V_{20} \rangle \left\langle \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{2}{3} \alpha V_{20}^3 \right\rangle \left\langle \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^4 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{9} \alpha^2 V_{20}^5 \right\rangle \left\langle \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^6 \right\rangle \right\} = 0$$

puesto que la función de densidad de probabilidad de  $V_{10}$  es simétrica, esto es

$$\langle V_{10} \rangle = 0$$

La sustitución en la ecuación (33) de las expresiones para  $\alpha$  y  $\lambda^*$  y si se hace  $N_{Re} = \frac{R V_{20} \rho}{\eta}$  y además considerando que

$$\langle \eta \rangle = \eta \quad , \quad \langle \rho \rangle = \rho \quad , \quad \left\langle \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right\rangle = \frac{d\langle u \rangle}{dy}$$

son los valores medios macroscópicos de la viscosidad, la densidad y el gradiente de velocidades respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \tau_{e1} = & -\frac{2}{9} \eta \langle \Psi N_{Re}^2 \rangle \left\langle \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \right\rangle \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad \text{--- (34)} \\ & - \frac{B \eta^2}{81 \rho^2} \left\langle \frac{\Psi}{R^4} N_{Re}^4 \right\rangle \left\langle \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^4 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \right\rangle \frac{d\langle u \rangle}{dy} \end{aligned}$$

en donde se han separado las partes consideradas independientes en una que es función de las condiciones iniciales de la entidad y la otra que es función de  $\frac{\lambda}{\lambda^*}$ , la proporción de la distancia máxima viajada por la entidad. Al valor  $\frac{\lambda}{\lambda^*}$ , según muestran Tyldesley y Silver (1), se le puede asignar una densidad de probabilidad y de esta forma se toman en cuenta todos los valores posibles (recordar:  $0 \leq \frac{\lambda}{\lambda^*} < 1$ ) que pueden tomar las funciones de  $\frac{\lambda}{\lambda^*}$ . Los valores esperados de estas funciones son, entonces

$$\left\langle \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \right\rangle = \int_0^1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) d\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) = -\frac{1}{9}$$

$$\left\langle \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^4 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \right\rangle = \int_0^1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^4 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) d\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) = -\frac{1}{25}$$

Si se sustituyen los valores anteriores en la ecuación

(34) se obtiene

$$\tau_{21} = \left[ \frac{2}{81} \eta \langle \Psi N_{Re}^2 \rangle + \frac{1}{2025} \frac{B \eta^2}{\rho^2} \left\langle \frac{\Psi}{R^4} N_{Re}^4 \right\rangle \right] \frac{d\langle u \rangle}{dy} = \epsilon'_\mu \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad \text{--- (35)}$$

en donde

$$\epsilon'_\mu = \frac{2\eta}{81} \langle \Psi N_{Re}^2 \rangle + \frac{1}{2025} \frac{B \eta^2}{\rho^2} \left\langle \frac{\Psi}{R^4} N_{Re}^4 \right\rangle \quad \text{--- (36)}$$

Como se ve del análisis precedente, el concepto de viscosidad turbulenta surge de una manera natural del modelo de entidades de un fluido turbulento.

La ecuación (36) se reduce para materiales Newtonianos a

$$\epsilon'_{\mu N} = \frac{2\mu}{81} \langle \Psi N_{Re}^2 \rangle \quad \text{--- (37)}$$

que es la obtenida por Tyldesley y Silver (1).

Finalmente, se puede obtener la relación de difusividades turbulentas cinemáticas de momentum entre un fluido no-Newtoniano y un fluido Newtoniano,

$$\frac{\epsilon_\mu}{\epsilon_{\mu N}} = \frac{\epsilon'_\mu / \rho}{\epsilon'_{\mu N} / \rho_N} = \frac{\nu_N}{\nu} \left[ 1 + \frac{1}{50} \frac{B}{\eta} \frac{\langle \nu_{20}^4 \rangle}{\langle \nu_{20}^2 \rangle} \frac{1}{\langle R^2 \rangle} \right] \quad \text{--- (38)}$$

esto es, la relación  $\epsilon_\mu / \epsilon_{\mu N}$  depende de la relación de viscosidades cinemáticas moleculares  $\nu_N / \nu$  y del grupo adimensional

$$\frac{B}{\eta} \frac{\langle \nu_{20}^4 \rangle}{\langle \nu_{20}^2 \rangle} \frac{1}{\langle R^2 \rangle} \quad \text{al cual se le denotará con la letra griega } \Lambda .$$

Por tanto,

$$\frac{\epsilon_\mu}{\epsilon_{\mu N}} = \frac{\nu_N}{\nu} \left[ 1 + \frac{1}{50} \Lambda \right] \quad \text{--- (39)}$$

#### IV. TRANSFERENCIA DE CALOR

El proceso de difusión de energía térmica se lleva a cabo mediante la migración de las entidades entre regiones de diferente energía. El análisis de este proceso es bastante parecido al que se hizo en transferencia de momentum, en donde se hacía la suposición de la existencia de uniformidad de momentum. Aquí se supondrá la uniformidad interna de temperatura. De esta forma se guarda consistencia con el modelo.

El flujo de calor  $\dot{q}$  a través de la superficie de una entidad particular que posee una temperatura uniforme  $T$ , rodeada por un fluido de temperatura  $T_f$ , está dado por (véase por ejemplo Bird et al. (4), p. 329)

$$\dot{q} = 4\pi a_0 K (T - T_f) \quad \text{--- (40)}$$

en donde  $K$  es la conductividad térmica del fluido y  $a_0$  es el radio de la entidad.

Como en el caso de transferencia de momentum, se supone un proceso cuasi-estático, de tal manera que la ecuación (40) es válida aún cuando la temperatura de los alrededores esté cambiando. De aquí que, despreciando los términos de disipación viscosa, el balance de calor quede como

$$\dot{q} = -\frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho C_p \left(\frac{dT}{dt}\right) = 4\pi a_0 K (T - T_f) \quad \text{--- (41)}$$

en donde  $C_p$  es el calor específico a presión constante del fluido.

De lo anterior se deduce que en el modelo se está suponiendo implícitamente:

a) que el proceso de transferencia de calor entre el fluido y las entidades, cada vez que éstas pasan de una región a otra de diferente temperatura, alcanza rápidamente el estado estacionario y

b) que a medida que pasa el tiempo, las entidades se desplazan cambiando su temperatura.

Si se introduce un factor de distorsión  $\Psi'$  que cuente por la desviación de la forma esférica, se tiene, de la ecuación (41),

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{3K}{\rho C_p R^2 \Psi'} (T - T_f) \quad \text{--- (42)}$$

Si  $\langle T_f \rangle$  es el valor esperado o promedio de  $T_f$ , la ecuación que describe el comportamiento de la entidad es

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{3k}{\rho C_p R^2 \Psi'} (T - \langle T_f \rangle) \quad \text{--- (43)}$$

Para el caso simple en el que la temperatura en planos perpendiculares al eje Y es uniforme, el gradiente de temperatura es constante y las temperaturas se refieren a la del plano  $y = 0$ , la ecuación (43) queda como

$$\frac{dT}{dt} = - \Theta (T - y \frac{d\langle T_f \rangle}{dy}) \quad \text{--- (44)}$$

en donde

$$\Theta = \frac{3k}{\rho C_p R^2 \Psi'} \quad \text{--- (44.a)}$$

La ecuación (44) puede transformarse a

$$\frac{dT}{dy} = - \frac{\Theta}{V_2(y)} (T - y \frac{d\langle T_f \rangle}{dy}) \quad \text{--- (45)}$$

Si se sustituye la expresión (26) para la velocidad  $V_2$ , que es función de la posición y se resuelve para T, se obtiene una función

$$T = T(y) \quad \text{--- (46)}$$

De esta forma, la diferencia de temperatura promedio de una entidad que ha viajado una distancia  $y = \lambda$  desde su creación y que cruza el plano  $y = 0$  está dada por

$$\Delta T = \Delta T(\lambda) \quad \text{--- (47)}$$

Entonces el flux de energía térmica en la dirección del eje  $x^2$ ,  $q_2$ , estará dado por

$$q_2 = \rho C_p \Delta V_2 \Delta T$$

El flux esperado o promedio de energía  $Q_2$  puede encontrarse siguiendo el mismo procedimiento que se hizo para el caso de transferencia de momentum; esto es

$$Q_2 = \langle q_2 \rangle = \epsilon_H \frac{d\langle T_f \rangle}{dy} \quad \text{--- (48)}$$

en donde  $\epsilon_H$  es la difusividad turbulenta de calor.

Ahora bien, Morones (5) presenta la expresión final de  $\epsilon_H$  a la que llega. Sin embargo, esta expresión conduce a problemas serios en su "parte Newtoniana" ( término en el que no aparece el parámetro no-Newtoniano B) ya que sólo va de acuerdo con los resultados reportados (1) en un rango muy pequeño de números de Prandtl, entre 2 y 3 aproximadamente, siendo que generalmente los fluidos no-Newtonianos presentan números de Prandtl muy elevados. Todo esto es resultado de las expresiones y métodos aproximados que se emplean para la resolución de las ecuaciones diferenciales, debido a la complejidad matemática que presentan.

Para corregir este problema, se llevó a cabo el siguiente método que condujo a una expresión para la relación de difusividades  $\epsilon_H/\epsilon_{\mu N}$  (y posteriormente, aplicado a transferencia de masa, para la relación  $\epsilon_M/\epsilon_{\mu N}$ ) que es bastante congruente con la realidad física.

Si se escribe, de acuerdo a la forma general que tiene la expresión obtenida por Morones (op.cit.)

$$\frac{\epsilon_H}{\epsilon_{\mu N}} = \frac{\rho}{\rho_N} \frac{\mu}{\eta} (f_1 + f_1 f_2 + f_1 f_2 f_3) \quad \text{--- (49)}$$

en donde  $f_2$  y  $f_3$  son las únicas funciones que dependen del parámetro B y que cumplen que si  $B = 0$  entonces  $f_2 = f_3 = 0$ .

Tyldesley y Silver (1) obtienen de la resolución exacta de las ecuaciones diferenciales para fluidos Newtonianos

$$\frac{\epsilon_{HN}}{\epsilon_{\mu N}} = \frac{9 N_{Pr}}{2 + 6 N_{Pr}} \quad \text{--- (50)}$$

en donde  $N_{Pr}$  es el número de Prandtl molecular.

Ahora bien, igualando estas dos últimas expresiones para el caso de materiales Newtonianos ( $B = 0$ ,  $\beta = \rho_N$ ,  $\eta = \mu$ ), se obtiene

$$f_1 = \frac{9 N_{Pr}}{2 + 6 N_{Pr}}$$

Las funciones  $f_2$  y  $f_3$  se toman como las mismas que en la expresión original (recordar que las incongruencias eran sobre la función o "término Newtoniano"). De esta forma, la expresión corregida para la relación  $\frac{\epsilon_H}{\epsilon_{\mu N}}$  queda como

$$\frac{\epsilon_H}{\epsilon_{\mu N}} = \frac{v_N}{v} \left[ P_1 + \frac{1}{6} \Lambda P_1 P_2 F_1 + \frac{1}{54} \Lambda^2 \frac{\langle V_{20}^6 \rangle \langle V_{20}^8 \rangle}{\langle V_{20}^4 \rangle^2} P_1 P_2 P_3 F_2 \right] \quad \text{--- (51)}$$

en donde

$$P_1 = \frac{9 N_{Pr}}{2 + 6 N_{Pr}}, \quad P_2 = \frac{1 - 3 N_{Pr}}{2 - 9 N_{Pr}}, \quad P_3 = \frac{1 - 6 N_{Pr}}{2 - 15 N_{Pr}} \quad \text{--- (51.a)}$$

$$N_{Pr} = \frac{C_p \eta}{K}$$

$$F_1 = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(7/2)} F(1, 5/2; 7/2; -Z) \quad \text{--- (51.b)}$$

$$F_2 = \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(9/2)} F(2, 7/2; 9/2; -Z)$$

$\Gamma(x)$ , la función gamma

$F(a, b; c; -Z)$ , la función hipergeométrica

$$Z = \frac{1}{18} \Lambda \quad \text{--- (51.c)}$$

Los demás términos son los mismos definidos anteriormente.

## V. TRANSFERENCIA DE MASA

El proceso de transferencia de masa también se lleva a cabo mediante la migración de las entidades entre regiones de diferente concentración. Puesto que el proceso de transferencia de masa por movimiento molecular es descrito por la misma ecuación fundamental que para transferencia de calor por conducción en un material homogéneo, el análisis que se hizo de este último es válido para el primero; únicamente los gradientes de temperatura son remplazados por los de concentración y la difusividad térmica es sustituida por una difusividad de masa. Como consecuencia, el flujo másico de un componente A,  $\dot{m}_A$ , a través de la superficie de una entidad estará dado por (ver Bird et al., op.cit.)

$$\dot{m}_A = 4\pi a D_A (C_A - C_{Af}) \quad \text{--- (52)}$$

en donde:  $C_A$  y  $C_{Af}$  son las concentraciones del componente A en la entidad y en el fluido circundante respectivamente y  $D_A$  es la difusividad de masa molecular de este componente en el medio.

La suposición del estado cuasi-estático conduce a

$$\dot{m}_A = -\frac{4}{3}\pi a^3 \frac{dC_A}{dt} = 4\pi a D_A (C_A - C_{Af})$$

y a la ecuación análoga a la ecuación (42)

$$\frac{dC_A}{dt} = -\frac{3D_A}{R^2\psi'} (C_A - C_{Af}) \quad \text{--- (53)}$$

que bajo la misma suposición de una distribución simple de concentraciones se transforma a

$$\frac{dc_A}{dt} = - \frac{3D_A}{R^2\Psi'} (c_A - y \frac{d\langle C_{Af} \rangle}{dy}) \quad \text{--- (54)}$$

debiéndose resolver para  $C_A$  .

Posteriormente se obtiene el flux másico en la dirección del eje Y ,  $m_{2A}$ , y su valor promedio o esperado  $M_{2A}$

$$M_{2A} = \langle m_{2A} \rangle = \epsilon_{MA} \frac{d\langle C_{Af} \rangle}{dy} \quad \text{--- (55)}$$

en donde  $\epsilon_{MA}$  es la difusividad turbulenta de masa del componente A.

Finalmente, bajo las correcciones correspondientes, análogas a las mostradas para el caso de transferencia de calor, se obtiene la relación de difusividades

$$\frac{\epsilon_{MA}}{\epsilon_{\mu N}} = \frac{v_N}{\nu} \left[ S_1 + \frac{1}{6} \Lambda S_1 S_2 F_1 + \frac{1}{54} \Lambda^2 \frac{\langle v_{20}^6 \rangle \langle v_{20}^2 \rangle}{\langle v_{20}^4 \rangle^2} S_1 S_2 S_3 F_2 \right] \quad \text{--- (56)}$$

en donde

$$S_1 = \frac{9 N_{Sc}}{2 + 6 N_{Sc}} , \quad S_2 = \frac{1 - 3 N_{Sc}}{2 - 9 N_{Sc}} , \quad S_3 = \frac{1 - 6 N_{Sc}}{2 - 15 N_{Sc}} \quad \text{--- (56.a)}$$

$N_{Sc} = \frac{\eta}{\rho D_A}$  , es el número de Schmidt molecular .

Los demás parámetros son los mismos definidos anteriormente.

## VI. RELACIONES DE DIFUSIVIDADES TURBULENTAS

Las relaciones  $\frac{\epsilon_H}{\epsilon_\mu}$  y  $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_\mu}$  que son el inverso del número de Prandtl turbulento y el número de Schmidt turbulento respectivamente pueden obtenerse de las ecuaciones (39), (51) y (56). De esta forma, si se toma el mismo orden de aproximación que tiene la expresión para la difusividad turbulenta de momentum para las difusividades de calor y de masa, se obtiene

$$\frac{1}{N_{Pr_T}} = \frac{\epsilon_H}{\epsilon_\mu} = \frac{P_1 + \frac{1}{6} \Lambda P_1 P_2 F_1}{1 + \frac{1}{50} \Lambda} \quad \text{--- (57)}$$

$$\frac{1}{N_{Sc_T}} = \frac{\epsilon_M}{\epsilon_\mu} = \frac{S_1 + \frac{1}{6} \Lambda S_1 S_2 F_1}{1 + \frac{1}{50} \Lambda} \quad \text{--- (58)}$$

En conclusión, se puede afirmar que las relaciones de difusividades turbulentas son funciones no sólo de los parámetros que cuentan por los efectos de esfuerzos normales en materiales no-Newtonianos del tipo de los viscoelásticos y de otras propiedades moleculares, sino también del número adimensional  $\Lambda$  que cuenta por las características turbulentas del flujo. Este resultado está en concordancia, al menos cualitativamente, con la evidencia experimental disponible; (6), (7) por ejemplo.

## VII. ANALISIS Y RESULTADOS

Para aplicar los resultados teóricos obtenidos, es conveniente hacer un análisis de los parámetros que intervienen y de la forma en que se pueden determinar.

Viscosidad aparente  $\eta$  .-

La relación del esfuerzo cortante  $\tau_{yx}$  a la rapidez de corte  $-\frac{du_x}{dy}$  es lo que se llama viscosidad aparente. Esto es,

$$\tau_{yx} = \eta \left( -\frac{du_x}{dy} \right)$$

De esta forma, dependerá del modelo que mejor describa esta relación esfuerzo cortante-rapidez de corte, es decir, se debe tomar aquel que mejor se ajuste a los datos experimentales. Así se tienen, por ejemplo,

Modelo Newtoniano:  $\tau_{yx} = \mu \left( -\frac{du_x}{dy} \right)$

en donde  $\eta = \mu =$  constante.

Modelo de la potencia de Ostwald de Waale:

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{du_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{du_x}{dy}$$

en donde  $m$  y  $n$  son constantes características del material.

Este es un ejemplo de un modelo en donde la viscosidad es función de la rapidez de corte. Otros modelos de este tipo son:

Modelo de Ellis:

$$\frac{du_x}{dy} = - \left[ \frac{1}{\eta_0} + m_1 \tau_{yx}^{(1/n_1)-1} \right] \tau_{yx}$$

en donde  $\eta_0$  es la viscosidad a corte cero y  $m_1$  y  $n_1$  son constantes.

Modelo plástico de Bingham:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} - \tau_0 &= -\mu' \left( \frac{du_x}{dy} \right) & , \tau_{yx} \geq \tau_0 \\ \frac{du_x}{dy} &= 0 & , \tau_{yx} < \tau_0 \end{aligned}$$

en donde  $\mu'$  es una constante y  $\tau_0$  es el valor crítico del esfuerzo cortante por debajo del cual no existe deformación.

Podría seguirse enumerando toda una gama de modelos que algunas veces son combinación de los anteriores y que otras veces involucran parámetros en gran cantidad y que muchas veces son difíciles de medir o de ajustar.

Parámetro no-Newtoniano B.-

Caswell y Schwarz derivaron una expresión para B, (2) ,

$$B = 27 \left[ A_1 \left( 1 + A_2 \frac{\phi_2}{\phi_3} \right) \left( 1 + \frac{\phi_2}{\phi_3} \right) \frac{\phi_2}{\eta_0} + A_3 (\phi_5 + \phi_6) - A_4 \phi_4 - A_5 \phi_5 \right]$$

en donde  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  son constantes numéricas conocidas y  $\phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$  son parámetros que resultan de la expansión del tensor de esfuerzos cortantes del fluido de Rivlin-Ericksen en términos de los gradientes de velocidad, aceleración, segunda aceleración, ... , (n - 1)ésima aceleración y que se determinan experimentalmente de mediciones de

esfuerzos normales.

En un flujo cortante simple en estado estacionario, se puede caracterizar a un fluido no-Newtoniano por tres funciones materiales  $\tau$ ,  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ . Si el eje  $X^1$  es el que está paralelo a las líneas de corriente y el eje  $X^2$  es el eje normal a los planos de corte, las funciones materiales están dadas por

$$\begin{aligned} \tau(K) &= \tau_{21} & , & \text{función del esfuerzo cortante} \\ \left. \begin{aligned} \Delta_1(K) &= \tau_{11} - \tau_{33} \\ \Delta_2(K) &= \tau_{22} - \tau_{33} \end{aligned} \right\} & \text{funciones de los esfuerzos normales} \end{aligned}$$

todas las cuales son determinadas por la rapidez de deformación  $k$ . A partir de esto, Caswell y Schwarz (2) obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tau(k)}{k} = \eta_0 & , \text{ la viscosidad a corte cero} \\ \phi_2 &= \lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{\Delta_2(k) - \Delta_1(k)}{2k^2} \\ \phi_3 &= \lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{\Delta_1(k)}{k^2} \\ (\phi_5 + \phi_6) &= \lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{\left\{ \tau(k)/k \right\} - \eta_0}{2k^2} \end{aligned}$$

Muchas de las mediciones reportadas hasta la fecha, indican la existencia en flujos cortantes simples de la simetría

$$\tau_{22} = \tau_{33}$$

lo cual permitiría escribir entonces

$$\phi_2 = -\frac{1}{2} \phi_3$$

Más aún, la teoría molecular de Lodge(8) favorece esta simetría de esfuerzos normales, al menos en la región de pequeñas velocidades de deformación.

Como se ve, Caswell y Schwarz no dan las expresiones para  $\phi_4$  ni para  $\phi_5$  o  $\phi_6$  por separado y explican que estos parámetros no pueden obtenerse de mediciones en flujos cortantes simples. Por ello, se propone una aproximación de segundo orden en las perturbaciones de la velocidad en lugar de una de tercer orden como los autores antes mencionados utilizan en su deducción. De esta forma, se puede demostrar recurriendo a la fuente original, que los términos en  $\phi_4$ ,  $\phi_5$  y  $\phi_6$  desaparecen quedando la siguiente expresión para B

$$B = 27 \left[ 4.5278 \left( 1 + 2.4528 \frac{\phi_2}{\phi_3} \right) \left( 1 + \frac{\phi_5}{\phi_3} \right) \frac{\phi_3^2}{\eta_0} \right]$$

Un ejemplo de cálculo sería el siguiente:

Material: Solución 12% de poliestireno en Aroclor.

Datos experimentales reportados : Doughty y Bogue (9) presentan las siguientes mediciones experimentales:

$\eta_0$  , viscosidad a corte cero = 237 poises

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{\tau_{22} - \tau_{11}}{k^2} = 5 \frac{\text{din-seg}^2}{\text{cm}^2} \quad (\text{extrapolando de acuerdo al modelo de tres constantes de Oldroyd})$$

Utilizando la relación de simetría  $\tau_{22} = \tau_{33}$  , se obtienen

$$\phi_3 = 5 \quad \text{y} \quad \phi_2 = -2.5 \quad . \quad \text{De aquí que } B = -1.5 \frac{\text{g-seg}}{\text{cm}} .$$

Otras expresiones para B se pueden obtener según el modelo reológico del que se parta. Este puede ser el modelo de Maxwell o algún otro modelo simplificado, o bien, modelos más complejos como el que se usó de Rivlin-Ericksen, o el del fluido de Oldroyd, etc., según se quiera tener una mayor o menor exactitud en la descripción del comportamiento físico del material.

Leslie (10) llega a una expresión para la fuerza de arrastre a partir del modelo del fluido de Oldroyd que es semejante a la obtenida por Caswell y Schwarz (2). De ahí se puede obtener una expresión para el parámetro B en función de las constantes de la ecuación que describe al modelo de Oldroyd y que son características del material. Lo importante es que predice una reducción en el arrastre para fluidos viscoelásticos, esto es, predice

$$B < 0 \quad \text{en fluidos viscoelásticos}$$

lo cual se obtiene precisamente en el ejemplo citado. Más aún, es bien conocido el efecto de reducción de arrastre que produce el agregar un polímero soluble a un fluido, lo cual resulta en una disminución del factor de fricción. Y estas soluciones presentan un comportamiento viscoelástico. Últimamente se ha escrito una abundante literatura acerca de estas soluciones diluidas de polímeros que ocasionan una disminución en el arrastre; ver por ejemplo a Hershey y Zakin (11).

Para materiales puramente viscosos en el sentido de Metzner y Park (12), es decir, aquellos para los cuales los términos de esfuerzos normales del tensor de esfuerzos son idénticamente cero en flujos cortantes estacionarios, el pa -

rámetro B será igual a cero. Esto significa, de acuerdo a los resultados teóricos que se obtuvieron en los capítulos anteriores, que las características en flujo turbulento de fluidos no-Newtonianos puramente viscosos son similares a aquellas de los fluidos Newtonianos, lo cual va de acuerdo a lo observado experimentalmente (12). Las expresiones para fluidos Newtonianos servirán entonces también para los materiales no-Newtonianos puramente viscosos, siempre y cuando para determinar la viscosidad aparente se tome el modelo correcto de la relación esfuerzo cortante-rapidez de corte.

Parámetro de escala R .-

Si se considera que la forma de la entidad no se aleja mucho de la forma esférica, las expresiones (9) y (10) pueden considerarse prácticamente las mismas puesto que la constante numérica G es igual a 5 en el trabajo original de Von-Kármán y Howarth (3). Por tanto, la microescala de turbulencia  $\delta$  y el parámetro de escala R pueden identificarse plenamente

$$\langle R^2 \rangle \approx \delta^2$$

La microescala corresponde a un tamaño medio de la entidad. En los tratamientos que correlacionan este parámetro, se dice que representa un tamaño medio de remolino. De aquí que haya una correspondencia entre las "entidades" y los usuales "remolinos".

La microescala de turbulencia se puede obtener de los espectros de distribución de energía turbulenta. Así, Hinze (13) propone la siguiente expresión

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{5} \frac{\int_0^{\infty} k_i^2 E(k_i) dk_i}{\int_0^{\infty} E(k_i) dk_i}$$

en donde  $E(k_1)$  es la fracción de energía turbulenta asociada con el número de onda  $k_1$ , la cual es necesario determinar experimentalmente.

Para medios no isotrópicos, habrá una microescala para cada dirección. Este es el caso de flujo en tuberías o en canales rectangulares que presenta Laufer (14), (15) para fluidos Newtonianos. En este caso, la microescala de turbulencia apropiada para ser usada en las expresiones será la transversal a la dirección del flujo, pues es en ese sentido en el que se ha supuesto que tiene lugar el transporte de la propiedad (momentum, calor o masa).

Se han hecho mediciones de la intensidad turbulenta y de los espectros de distribución de energía turbulenta como los que presentan Wells (16) y Virk (17) en fluidos viscoelásticos y se ha visto que son muy similares a las mediciones hechas en materiales Newtonianos. Esto permite suponer que el mecanismo turbulento en no-Newtonianos y en Newtonianos es en realidad el mismo; lo que varía es nada más su comportamiento reológico.

Para tener una idea del orden de magnitud de la microescala, se puede uno referir a las mediciones de Laufer (14) en canales rectangulares. Aquí la microescala de turbulencia transversal va de 0.1 cm a 1 cm dependiendo de la distancia a la pared y del número de Reynolds basado en la velocidad media máxima y en la mitad del ancho del canal.

Grupo adimensional  $\Lambda$  .-

De los parámetros que forman este grupo, sólo queda por analizar la relación  $\frac{\langle V_{20}^4 \rangle}{\langle V_{20}^2 \rangle}$  . Ahora bien, puesto que  $V_{20}$  es una velocidad de la entidad relativa a la de la masa del fluido, no es nada ilógico asociar  $\langle V_{20}^4 \rangle$  con el cuadrado de la intensidad turbulenta en el sentido transversal a la dirección del flujo, es decir, con el promedio de las fluctuaciones de la velocidad al cuadrado en la dirección transversal a la del flujo  $\langle v'^2 \rangle$  . Por tanto

$$\langle V_{20}^2 \rangle \approx \langle v'^2 \rangle$$

En efecto, la velocidad relativa que aparece en la ecuación de disipación de energía turbulenta (10) es precisamente la componente fluctuante de la velocidad en el modelo original de Von-Kármán y Howarth.

De acuerdo a lo anterior,  $\langle V_{20}^4 \rangle$  se podrá asociar con la cuarta correlación  $\langle v'^4 \rangle$  ( que físicamente está relacionada con la curtosis de la distribución de velocidades) :

$$\langle V_{20}^4 \rangle \approx \langle v'^4 \rangle$$

Laufer(15) mide la relación  $\frac{\langle v'^4 \rangle}{\langle v'^2 \rangle^2}$  para flujo en tuberías y encuentra que es prácticamente constante e independiente de la distancia a la pared y del Número de Reynolds basado en el diámetro del tubo y en la velocidad en el centro del tubo. El valor que da de esta relación es

$$\frac{\langle v'^4 \rangle}{\langle v'^2 \rangle^2} \approx 0.35$$

(Rango del Número de Reynolds: 50000 a 500000).

Aquí es importante recalcar la necesidad que se tiene de determinar experimentalmente los diferentes parámetros que intervienen en el cálculo de las relaciones de difusividades turbulentas. En particular se pueden mencionar tanto la microescala como las correlaciones de velocidades, que son características del flujo turbulento.

La microescala de turbulencia depende de la posición y del número de Reynolds. Lo mismo puede decirse de las correlaciones de velocidades; así, se tendrán que medir la segunda y cuarta correlación y aún la sexta, si se va a determinar la relación (51) o la (56), a diferentes posiciones y números de Reynolds, aunque esta dependencia disminuye, para el caso de flujo en tuberías, a medida que se acerca al centro del tubo (15), (16).

Una vez descritos los parámetros que intervienen en las distintas expresiones, a continuación se presenta un análisis de los resultados obtenidos mediante estas expresiones comparándolas de alguna forma con la evidencia experimental disponible, ya sea de tipo cuantitativo o meramente cualitativo.

Transferencia de Momentum .-

La ecuación (39)

$$\frac{\epsilon_M}{\epsilon_{MN}} = \frac{\nu_N}{\nu} \left[ 1 + \frac{1}{50} \Lambda \right]$$

predice una disminución en la relación  $\epsilon_M/\epsilon_{MN}$  para materiales viscoelásticos con respecto a los fluidos puramente viscosos, puesto que  $\Lambda$  se ha visto que toma valores negativos. Experimentalmente se ha observado, como apunta Fredrickson (18), que efectivamente hay una tendencia hacia la supresión de la turbulencia en el flujo de fluidos viscoelásticos.

A continuación se presenta una gráfica de esta relación  $\frac{\epsilon_M}{\epsilon_{MN}}$  contra  $1 / (\frac{\nu}{\nu_N})$  para diferentes valores de  $\Lambda$  (Fig.1).

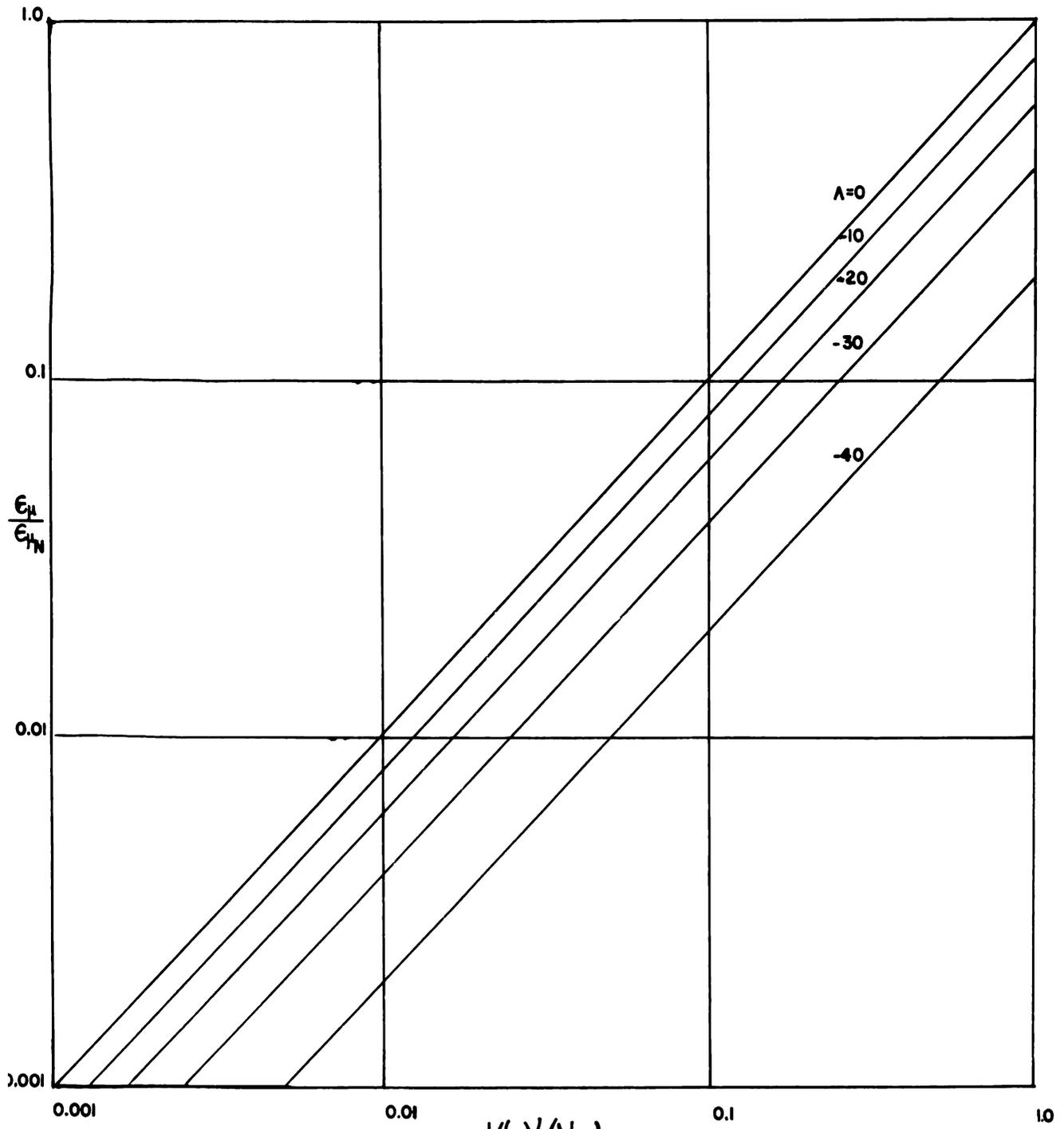


FIG. 1

Transferencia de Calor y de Masa.-

La ecuación (57) para el inverso del número de Prandtl turbulento

$$\frac{1}{N_{Pr_T}} = \frac{E_H}{E_\mu} = \frac{P_1 + \frac{1}{6} \Lambda P_1 P_2 F_1}{1 + \frac{1}{50} \Lambda}$$

y la ecuación (58) para el inverso del número de Schmidt turbulento

$$\frac{1}{N_{Sc_T}} = \frac{E_M}{E_\mu} = \frac{S_1 + \frac{1}{6} \Lambda S_1 S_2 F_1}{1 + \frac{1}{50} \Lambda}$$

se encuentran graficadas a continuación. En la gráfica 2, se muestra el caso de fluidos puramente viscosos junto con algunos resultados experimentales reportados en la literatura para materiales Newtonianos, que son un caso especial de los puramente viscosos. La teoría predice que para un mismo número de Prandtl (o de Schmidt) la relación  $\frac{1}{N_{Pr_T}} = \frac{E_H}{E_\mu}$  (o  $\frac{1}{N_{Sc_T}} = \frac{E_M}{E_\mu}$ ) es la misma en un Newtoniano que en un no-Newtoniano puramente viscoso. Esto significa una similitud de comportamiento de ambos materiales para las mismas condiciones de flujo turbulento, lo cual está perfectamente de acuerdo a lo observado experimentalmente (12) .

En la gráfica 3, las relaciones  $\frac{E_H}{E_\mu}$  y  $\frac{E_M}{E_\mu}$  se presentan como funciones del número de Prandtl molecular  $N_{Pr}$  y del número de Schmidt molecular  $N_{Sc}$  respectivamente. Puesto que es el caso más general, se incluye como tercer parámetro a  $\Lambda$  . Hasta ahora, no se encontró dato experimental alguno reportado en la literatura que pudiera ser comparado con lo que predice la teoría. Sin embargo, los experimentos que se

han hecho sobre transferencia de calor y de masa en fluidos viscoelásticos y en particular en soluciones de polímeros (19), (20), (21), (22) permiten concluir que la eficiencia en la transferencia de calor y de masa en los viscoelásticos con respecto a los Newtonianos disminuye marcadamente, siendo esta disminución aún mayor que la que corresponde al fenómeno de reducción de arrastre. En otras palabras, aunque el término en el denominador para transporte de momentum disminuya para materiales viscoelásticos, el término en el numerador para transporte de calor (o de masa) en la relación  $\frac{\epsilon_H}{\epsilon_\mu}$  (o  $\frac{\epsilon_m}{\epsilon_\mu}$ ) debe disminuir aún más; y esto es precisamente lo que sucede en las expresiones (57) y (58) derivadas de la teoría. De esta forma, como se muestra en la gráfica, para un mismo  $N_{Pr}$  o  $N_{Sc}$  la relación  $\frac{\epsilon_H}{\epsilon_\mu}$  o  $\frac{\epsilon_m}{\epsilon_\mu}$  es menor en un fluido viscoelástico que en un fluido Newtoniano.

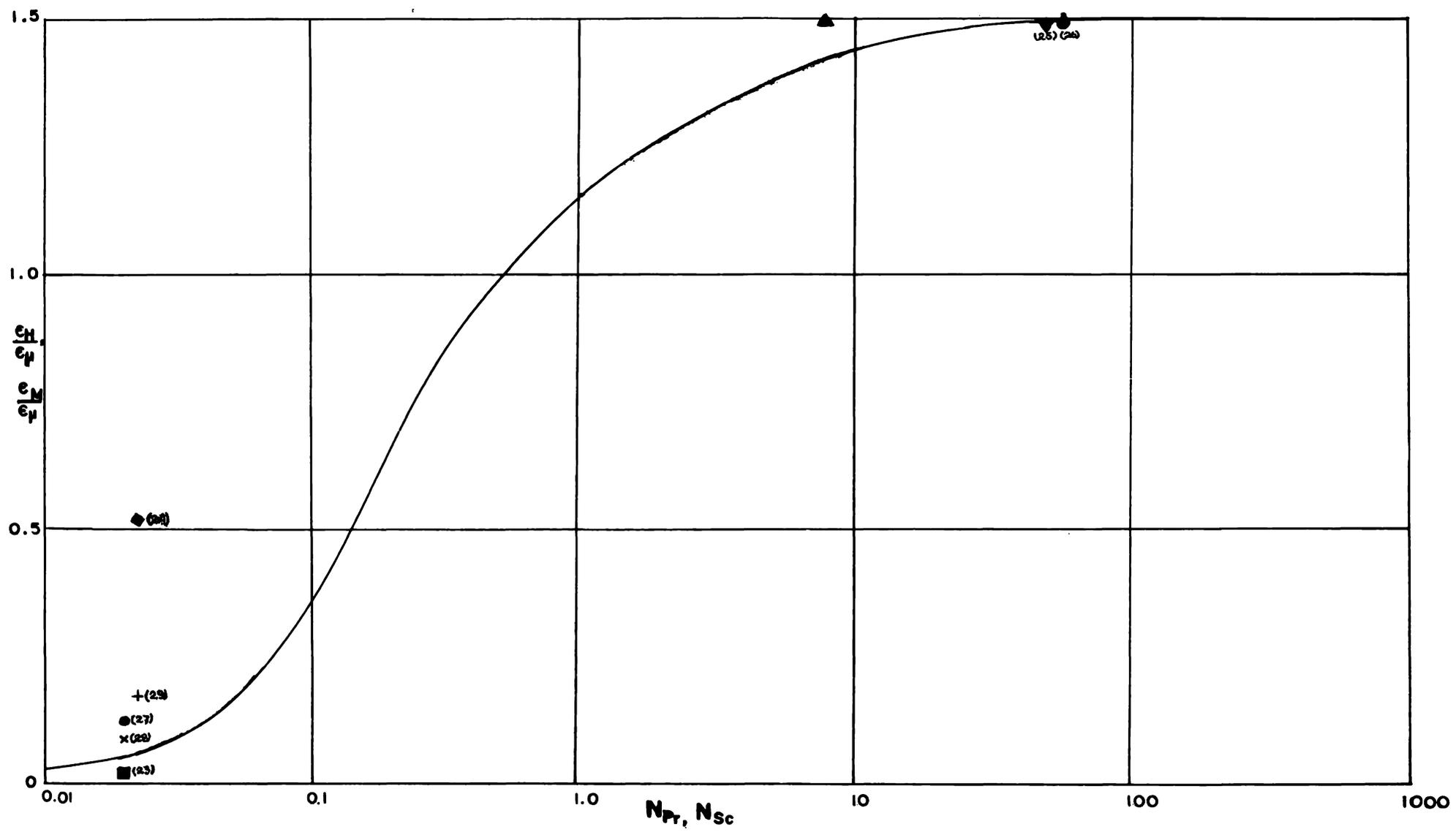


FIG. 2

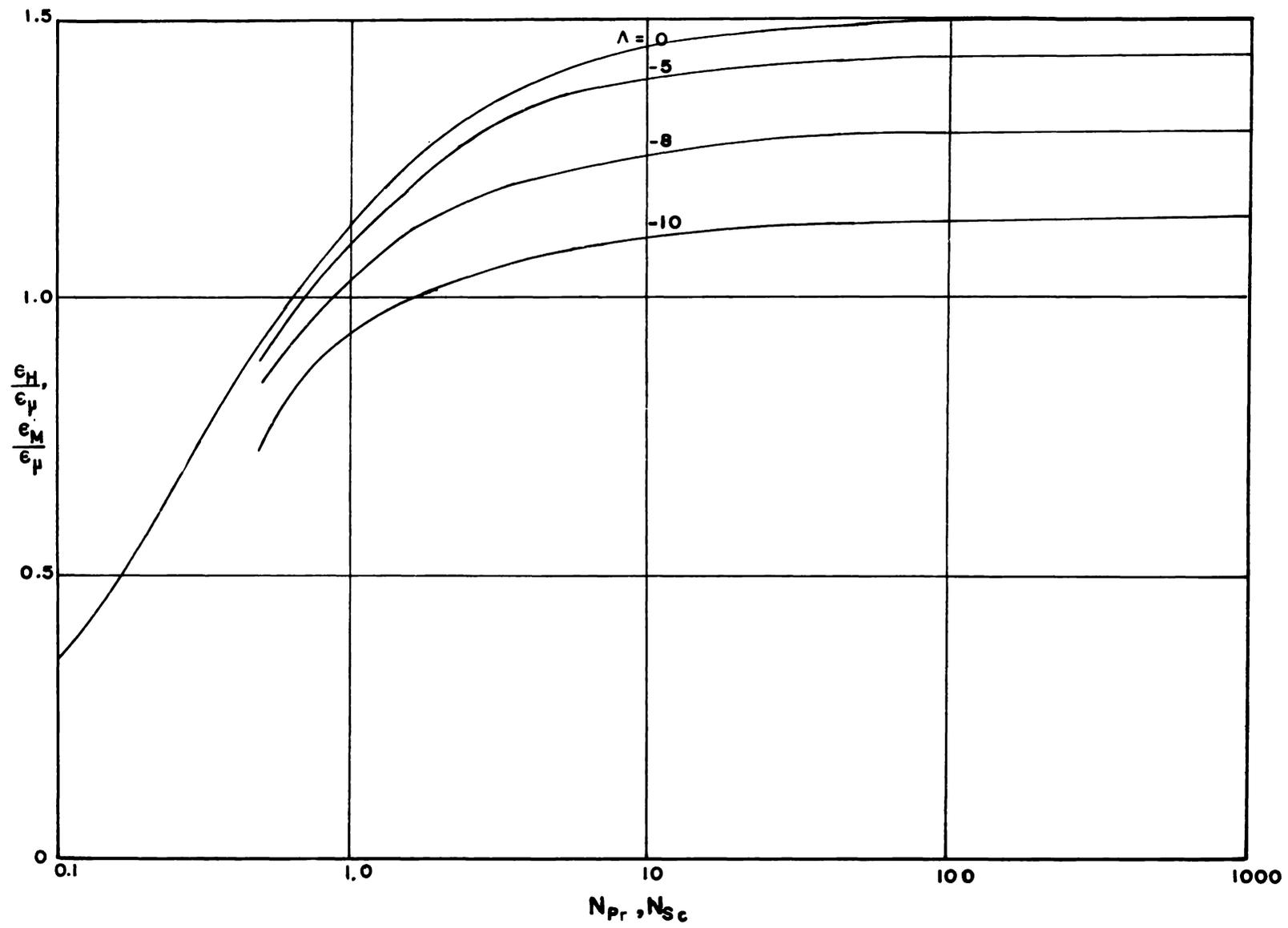


FIG. 3

Disipación de Energía .-

La ecuación (11) puede escribirse como

$$\frac{\Phi}{\Phi_N} = \frac{\nu}{\nu_N} \left( 1 + \frac{1}{6} \Lambda \right)$$

que para el caso de fluidos puramente viscosos se reduce a

$$\frac{\Phi}{\Phi_N} = \frac{\nu}{\nu_N}$$

esto es, que la relación de disipación de energía es igual a la relación de viscosidades cinemáticas moleculares de un fluido no-Newtoniano puramente viscoso respecto a un Newtoniano. Esto va de acuerdo a lo que predicen otras expresiones deducidas por caminos totalmente diferentes; por ejemplo Patterson y Zakin (30) llegan a este resultado. Más aún, estos autores muestran que para fluidos viscoelásticos, la relación  $\Phi/\Phi_N$  es una función tanto de las propiedades moleculares y reológicas del material : viscosidad, densidad, módulo de rigidez (ellos toman el modelo de Maxwell), como de las características turbulentas del flujo: intensidad turbulenta, espectro de energía, escalas de longitud, todo lo cual está de acuerdo con lo obtenido a partir de la teoría expuesta. La gráfica 4 muestra la relación  $\Phi/\Phi_N$  en función de  $\nu/\nu_N$  para diferentes valores de  $\Lambda$  .

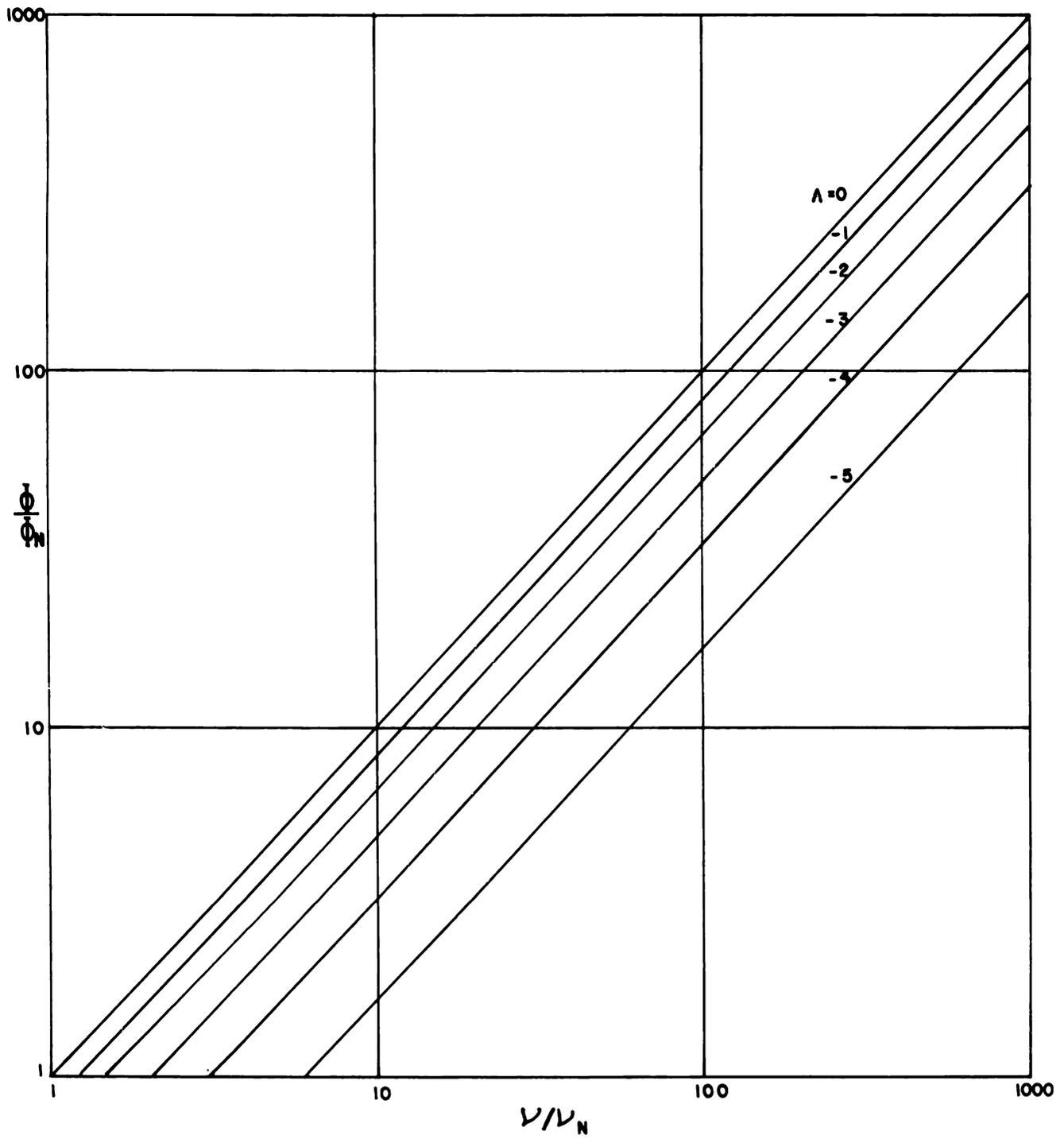


FIG. 4

## VIII. CONCLUSIONES

El modelo de la teoría de entidades para un fluido Newtoniano en régimen turbulento ha sido extendido para el caso más general de un fluido. Comprende, de hecho, cualquier material no-Newtoniano puesto que no se hace referencia específica a algún modelo reológico determinado, siendo las únicas limitaciones las que surgen como consecuencia de la resolución aproximada del complejo problema matemático. El caso Newtoniano se obtiene como un caso especial al cual se reducen las expresiones cuando el parámetro no-Newtoniano  $B$  se hace idénticamente cero. Lo mismo sucede para los fluidos no-Newtonianos puramente viscosos.

Hasta donde es posible comparar, los resultados obtenidos concuerdan con lo observado experimentalmente, lo cual puede ya considerarse bastante bueno si se toma en cuenta lo muy poco que está estudiado este campo.

Finalmente puede decirse, que la estimación de las propiedades de transporte en fluidos no-Newtonianos en régimen turbulento está, por el momento, lejos de hacerse experimentalmente con cierta certeza y quizá pase un buen tiempo antes de que los problemas mismos de su determinación experimental puedan ser resueltos. De aquí que el tratamiento teórico cobre vigencia y sea muchas veces el único medio de obtener información con ayuda de parámetros determinados experimentalmente.

## GLOSARIO

- $a$  definida por la ecuación (15.b)
- (a,b,c) semiejes del elipsoide
- $a_0$  radio de la entidad
- $A$  definida por la ecuación (15.a)
- $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  constantes numéricas de la expresión de Caswell y Schwarz para B
- $B$  parámetro no-Newtoniano
- $C$  concentración
- $C_p$  calor específico a presión constante
- $D$  difusividad másica molecular
- $E(k_1)$  fracción de energía turbulenta asociada con el número de onda  $k_1$
- $F$  función hipergeométrica
- $F_1, F_2$  funciones definidas por las ecuaciones (51.b)
- $F^i$  fuerza de arrastre
- $\varepsilon_{ij}$  tensor métrico
- $k$  rapidez de deformación
- $k_1$  número de onda
- $K$  conductividad térmica
- $m, n$  parámetros de la ecuación de Ostwald de Waale
- $m$  flux másico
- $\dot{m}$  flujo másico a través de la superficie de una entidad
- $m_1, n_1$  parámetros de la ecuación de Ellis
- $M$  flux másico promedio
- $N_{Pr}$  número de Prandtl molecular =  $\frac{C_p \eta}{K}$

- $N_{Re}$  número de Reynolds =  $\frac{RV_{20}\rho}{\eta}$
- $N_{Sc}$  número de Schmidt molecular =  $\frac{\eta}{\rho D}$
- $P_1, P_2, P_3$  funciones del  $N_{Pr}$  definidas por las ecuaciones (51.a)
- $q$  flux de energía térmica
- $\dot{q}$  flujo de calor a través de la superficie de una entidad
- $Q$  flux promedio de energía térmica
- $r$  función de los semiejes
- $R$  parámetro de escala
- $R_{ij}$  tensor de correlación de velocidades entre dos puntos
- $\Delta_1, \Delta_2$  funciones de los esfuerzos normales
- $S_1, S_2, S_3$  funciones del  $N_{Sc}$  definidas por las ecuaciones (56.a)
- $t$  tiempo
- $t_0$  intervalo de tiempo
- $T$  temperatura de la entidad
- $T_f$  temperatura del fluido
- $\langle u \rangle, u_x$  velocidad promedio en la dirección del flujo de la masa del fluido en un punto dado
- $v$  velocidad definida por la ecuación (17.a)
- $\langle \vec{v} \rangle$  vector velocidad de la masa del fluido relativo a un plano  $y=0$
- $v^i$  componentes de la velocidad del fluido relativa a un sistema fijo de coordenadas
- $v_i^j, v_i^{j'}$  componentes de las fluctuaciones de la velocidad en los puntos  $p^j$  y  $p^{j'}$  respectivamente
- $\langle v'^2 \rangle$  promedio de las fluctuaciones de la velocidad al cuadrado
- $V$  velocidad definida por la ecuación (5.a)
- $V^i$  velocidad de la entidad relativa a un sistema fijo de coordenadas
- $(V_1, V_2, V_3)$  componentes físicas de  $V^i$
- $V_r$  velocidad relativa definida por la ecuación (8.a)
- $x^1$  eje coordenado en la dirección del flujo

$x^2, x^3$  ejes coordenados normales a la dirección del flujo

y coordenada normal a la dirección del flujo

z definida por la ecuación (51.c)

$\alpha$  definida por la ecuación (25.a)

$\Gamma$  función gamma

$\delta$  microescala de turbulencia

$\epsilon_\mu, \epsilon_n, \epsilon_m$  difusividades turbulentas de momentum, calor y masa respectivamente

$$\epsilon'_\mu = \rho \epsilon_\mu$$

$\eta$  viscosidad aparente

$\eta_0$  viscosidad a corte cero

$\theta$  definida por la ecuación (44.a)

$\lambda$  distancia a la que fue creada la entidad respecto al plano  $y=0$

$\lambda^*$  distancia máxima viajada por la entidad

$$\Lambda = \frac{\theta \langle v_{e_0}^4 \rangle}{\eta \langle R^2 \rangle \langle v_{e_0}^2 \rangle}, \text{ grupo adimensional}$$

$\mu$  viscosidad del material Newtoniano

$\mu'$  parámetro de la ecuación de Bingham

$\nu$  viscosidad cinemática molecular

$\rho$  densidad

$\tau_{ij}$  tensor de esfuerzos cortantes

$\bar{\tau}_{ij}$  valor promedio del tensor de esfuerzos cortantes

$\tau_0$  parámetro de la ecuación de Bingham

$\phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$  parámetros de la expresión de Caswell y Schwarz para B

$\Phi$  disipación de energía

$\psi, \psi', \psi''$  factores de distorsión

$\langle \quad \rangle$  valor promedio o esperado

Subíndices

A	especie A
f	fluido
N	material Newtoniano
T	condición de flujo turbulento
x,1	dirección del flujo
y,2,3	dirección normal al flujo
0	condición al momento de crearse las entidades

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Tyldesley J.R. y Silver R.S.- Int. J. Heat & Mass Transfer.- 11, 1325 (1968) .
- (2) Caswell B. y Schwarz W.- J. of Fluid Mech.-13,417(1962) .
- (3) Kármán T. y Howarth L.- Proc. Roy. Soc. (London).- A164, 192 (1938) .
- (4) Bird R.,Warren S. y Lightfoot E.- "Transport Phenomena".- J. Wiley , 1960.
- (5) Morones R.E.- Tesis Ph.D.,U.of Glasgow, 1972.
- (6) Poreh M. y Paz U.- Int. J. Heat & Mass Transfer.- 11 , 805 (1968) .
- (7) Wells C.S.,Jr.- A.I.Ch.E. J.- 14, 407 (1968) .
- (8) Lodge A.S.- Trans. Faraday Soc.- 52, 120 (1956) .
- (9) Doughty J.O. y Bogue D.C.- I.& E.C. Fundam.- 6,388 (1967) .
- (10) Leslie F.M.- Quart. J. Mech. Appl. Math.- 14, 36 (1961) .
- (11) Hershey H.C. y Zakin J.L.- I. & E.C. Fundam.- 6, 381 (1967) .
- (12) Metzner A.B. y Park M.G.- J. Fluid Mech.-20,291 (1964) .
- (13) Hinze J.O.-"Turbulence".- Mc.Graw-Hill , 1959.
- (14) Laufer J.- National Advisory Comitee for Aeronautics.- Report 1053 (1951) .
- (15) Laufer J.- National Advisory Comitee for Aeronautics.- Report 1174 (1953) .
- (16) Wells C.S.,Jr.,Harkness J. y Meyer W.A.- A.I.A.A. J.- 6, 250 (1968) .

- (17) Virk P.S.- A.I.Ch.E. J.- 21, 625 ( 1975) .
- (18) Fredrickson A.G.- "Principles and Applications of Rheology".- Prentice Hall .-
- (19) Wells C.S.,Jr.- A.I.Ch.E. J.- 14, 406 (1968) .
- (20) Marrucci G. y Astarita G.- I.& E.C. Fundam.-6,470(1967) .
- (21) Wu Jin.- A.I.Ch.E. J.- 17, 1408 (1971) .
- (22) Sidahmed G.H. y Griskey R,G.-A.I.Ch.E. J.-18,138 (1972) .
- (23) Mizushina T. y Sasano T.- Proceedings of the Int. Heat Transfer Conference.- Am.Soc.Mech.Eng.-N.Y.(1961) .
- (24) Isokoff S.E. y Drew T.B.-General Discussions on Heat Transfer.-Inst.Mech.Eng.,London (1951) .
- (25) Evans G.V.-J.Bas. Eng.- 89, 624 (1967) .
- (26) Bonnin J.,Dumas H. y Lievre R.- Hydraulics Research Congress.- Lisboa (1957).Int. Ass. Hydr. Res.,Delft (1957) .
- (27) Seban R.A. y Doughty D.L.-Trans. Am. Soc. Mech. Eng.- 78, 217 (1956) .
- (28) Stromquist W.K.- U.S. Atomic Energy Commision-Report (Marzo 1953) .
- (29) Trefethen L.- Oak Ridge Nat. Lab.-NP 1788 (1950) .
- (30) Patterson G.K. y Zakin J.L.- A.I.Ch.E. J.- 14 , 434 (1968) .
- (31) Batchelor G. K.- "Theory of Homogeneous Turbulence".- Cambridge U.P.,N.Y.,1953 .

## APÉNDICE

Resolución de la ecuación (23) para  $V_1$  .-

Con el cambio de variable

$$V_1' = V_1 - y \frac{d\langle u \rangle}{dy}$$

y sabiendo que

$$V_2 = \frac{dy}{dt} \quad ,$$

se obtiene la ecuación

$$\frac{dV_1'}{dy} + \frac{Aa^2}{V_2(y)} (V_1' + \alpha V_1'^3) = - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad \text{--- (A.1)}$$

en donde

$$\alpha = \frac{1}{a^2}$$

Solución al caso homogéneo de la ecuación (A.1) :

La ecuación homogénea

$$\frac{dV_1'}{dy} + \frac{Aa^2}{V_2(y)} (V_1' + \alpha V_1'^3) = 0 \quad \text{--- (A.2)}$$

puede integrarse bajo las condiciones  $(V_{10}', V_1')$  a  $(0, y)$

$$\int_{V_1'}^{V_1'} \frac{dV_1'}{V_1' (1 + \alpha V_1'^2)} = - Aa^2 \int_0^y \frac{dy}{V_2(y)}$$

Si se sustituye la expresión (16) para  $V_2$  en función de  $y$  ,  
se obtiene

$$\int_{V'_{10}}^{V'_1} \frac{dV'_1}{V'_1 (1 + \alpha V'^2_1)} = - \frac{Aa^2}{V_{20}} \int_0^y \frac{1 + \frac{V_{20}}{a} \tan Aay}{1 - \frac{a}{V_{20}} \tan Aay} dy$$

Realizando la integración y resolviendo para  $V'_1$ , se obtiene

$$V'_1 = \frac{V'_{10} \left(1 - \frac{a}{V_{20}} \tan Aay\right)}{\left[ \sec^2 Aay + V'^2_{10} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{V_{20}^2}\right) \tan^2 Aay + 2 \frac{V'_{10}}{aV_{20}} \tan Aay \right]^{1/2}} \quad \text{--- (A.3)}$$

Si se asume  $|V'_{10}| \approx |V_{20}|$  (o equivalentemente  $V'^2_{10} \approx V^2_{20}$ ), lo cual no es nada improbable, sobre todo si se toman en cuenta los órdenes de magnitud, se tiene finalmente

$$V'_{1\text{hom}} = V'_{10} \frac{\left(1 - \frac{a}{V_{20}} \tan Aay\right)}{\left(1 + \frac{V_{20}}{a} \tan Aay\right)} = \frac{V'_{10}}{V_{20}} V_2 \quad \text{--- (A.4)}$$

Solución al caso no-homogéneo, ecuación (A.1) :

Se supone una solución de la forma

$$V'_1 = V'_{1\text{hom}} + c(y) \quad \text{--- (A.5)}$$

entonces

$$\frac{dV'_1}{dy} = \frac{dV'_{1\text{hom}}}{dy} + \frac{dc(y)}{dy} \quad \text{--- (A.6)}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.1)

$$\frac{dc(y)}{dy} + \frac{dV'_{1\text{hom}}}{dy} + \frac{Aa^2}{V_2(y)} \left\{ c(y) + V'_{1\text{hom}} + \alpha [c(y) + V'_{1\text{hom}}]^3 \right\} = - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad \text{--- (A.7)}$$

Si se desarrollan los términos en la ecuación (A.7), se

obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dc(y)}{dy} + \frac{dV'_{i, \text{hom}}}{dy} + \frac{V_{20}}{\lambda_N^* V_2(y)} c(y) + \frac{V'_{i0}}{\lambda_N^*} + \frac{\alpha V_{20}}{\lambda_N^* V_2(y)} c^3(y) + \frac{3\alpha V'_{i0}}{\lambda_N^*} c^2(y) \\ + \frac{3\alpha V'_{i0}}{\lambda_N^*} V'_{i, \text{hom}} c(y) + \frac{\alpha V'_{i0}}{\lambda_N^*} V_{i, \text{hom}}'^2 = - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \end{aligned} \quad \text{--- (A.8)}$$

en donde se ha utilizado el resultado de la ecuación (A.4) y el hecho de que

$$Aa^2 = \frac{V_{20}}{\lambda_N^*}$$

Si se asume que la magnitud del parámetro no-Newtoniano B es lo suficientemente pequeña para que  $\alpha V'_{i0} \rightarrow 0$ , entonces la ecuación (A.8) puede escribirse como

$$\frac{dc(y)}{dy} + \frac{V_{20}}{\lambda_N^* V_2(y)} c(y) + \left[ \frac{dV'_{i, \text{hom}}}{dy} + \frac{V'_{i0}}{\lambda_N^*} + \frac{\alpha V'_{i0}}{\lambda_N^*} V_{i, \text{hom}}'^2 \right] = - \frac{d\langle u \rangle}{dy}$$

Pero los términos que están entre corchetes constituyen precisamente la ecuación homogénea (A.2). Por tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{dc(y)}{dy} + \frac{1}{\lambda_N^* \frac{V_2(y)}{V_{20}}} c(y) = - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad \text{--- (A.9)}$$

que es una ecuación lineal no homogénea en la función C(y).

La solución a la ecuación (A.9) está dada por

$$C(y) = - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \left( \int_0^y \frac{dy}{\cos Ay - \frac{a}{V_{20}} \sin Ay} \right) \left( \cos Ay - \frac{a}{V_{20}} \sin Ay \right) \quad \text{--- (A.10)}$$

Para resolver la integral que aparece en la ecuación (A.10), se hará una expansión en series; así



$$\int_0^y \frac{dy}{\cos Ay - \frac{a}{V_2} \operatorname{Sen} Ay} = \int_0^y \frac{dy}{1 - \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right) - \frac{\alpha V_2^2}{2!} \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right)^2 + \dots} \quad \text{--- (A.11)}$$

Bajo las suposiciones que se han venido haciendo, se tomarán únicamente los tres primeros términos de la serie, por lo que la integral se reduce a

$$\int_0^y \frac{dy}{1 - \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right) - \frac{\alpha V_2^2}{2!} \left(\frac{y}{\lambda_N^*}\right)^2} = - \frac{\lambda_N^*}{\sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}} \ln \frac{2 - (1 + \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}}{2 - (1 - \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.10)

$$c(y) = \frac{d\langle u \rangle}{dy} \left[ \frac{\lambda_N^*}{\sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}} \ln \frac{2 - (1 + \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}}{2 - (1 - \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}} \right] \left( \cos Ay - \frac{a}{V_2} \operatorname{Sen} Ay \right) \quad \text{--- (A.12)}$$

De esta forma  $V_1'$  queda como

$$V_1' = V_{i_0}' \frac{(1 - \frac{a}{V_2} \tan Ay)}{(1 + \frac{V_2}{a} \tan Ay)} + \frac{d\langle u \rangle}{dy} \left[ \frac{\lambda_N^*}{\sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}} \ln \frac{2 - (1 + \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}}{2 - (1 - \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}} \right] \left( \cos Ay - \frac{a}{V_2} \operatorname{Sen} Ay \right)$$

y  $V_1$  será entonces

$$V_1 = V_1' + y \frac{d\langle u \rangle}{dy} = V_{i_0}' \frac{(1 - \frac{a}{V_2} \tan Ay)}{(1 + \frac{V_2}{a} \tan Ay)} + \frac{d\langle u \rangle}{dy} \left[ y + \frac{\lambda_N^*}{\sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}} \frac{(\cos Ay - \frac{a}{V_2} \operatorname{Sen} Ay)}{\ln \frac{2 - (1 + \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}}{2 - (1 - \sqrt{1 + 2\alpha V_2^2}) \frac{y}{\lambda_N^*}}} \right]$$

--- (A.13)

ó  
ec. (24)