



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Transporte por fluctuaciones electrostáticas  
en plasmas magnetizados con flujo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

PRESENTA:

Carolina Andrea Tafoya Turner

TUTOR

Dr. Julio Javier Martinell Benito

Ciudad Universitaria, CD.MX., 2021





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos de la alumna

Tafoya  
Turner  
Carolina Andrea  
Universidad Nacional Autónoma de México  
México  
Facultad de Ciencias  
Física  
310264831

2. Datos del Tutor

Dr.  
Julio Javier  
Matinell  
Benito

3. Datos del sinodal 1

Dr.  
José Julio Emilio  
Herrera  
Velázquez

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Mayo  
Villagrán  
Muniz

5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Arturo  
Olvera  
Chávez

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Leopoldo  
Carbajal  
Gómez

7. Datos del trabajo escrito

Transporte por fluctuaciones electrostáticas en  
plasmas magnetizados con flujo  
99p  
2021

# Agradecimientos

Esta tesis hasta ahora es el trabajo de mi vida, la licenciatura que siempre soñé. Me siento muy orgullosa de lo que soy y logré.

Los siguientes párrafos son un agradecimiento hacia las personas de mi vida, que sin ellas haber llegado hasta acá no hubiera sido posible.

A mi papá, Carlos F. Tafoya Echavarría, por ser mi principal motivación en las matemáticas desde la secundaria. Y en la universidad aun más, sin su presencia y figura no habría tenido la entereza para terminar la carrera. Mi mamá, Rebeca Turner Espinosa, que siempre me impulsó a ser una buena estudiante y persona y porque sé que siempre me ha apoyado a pesar de que cree que me complico la vida todo el tiempo. Gracias a los dos por haberme dado todo lo que pudieron para que lograra llegar hasta donde estoy ahora. A mi hermana Claudia K. Tafoya Turner por apoyarme en todo.

A mi perrito Bebé, siendo mi amor e inspiración desde 2012.

A mis amigos para siempre, Néstor y Rafa, porque ustedes siempre han estado conmigo para aconsejarme y apoyarme; en la felicidad, tristeza y demás emociones nunca me han dejado sola. A mis mejores amigas desde preparatoria Kenia y Gaby. Gracias.

A Jorge Torres Ramos por explicarme la física, ser la persona más inteligente del mundo, apoyarme en este trabajo y querer lo mejor para mi aunque sea difícil sobrellevarlo.

A todos gracias, los amo muchísimo.

A mi asesor Dr. Julio Javier Martinell Benito, por su confianza y paciencia desde que comencé el servicio social con él y hasta ahora. Sin duda no habría sido posible mi tesis sin sus consejos y apoyo. Muchas gracias.

A mis sinodales: Dr. Julio Herrera, Dr. Mayo Villagrán, Dr. Arturo Olvera y Dr. Leopoldo Carbajal por tomarse el tiempo de revisar este trabajo y nutrirlo con sus valiosos comentarios.

A CONACYT por sus becas de apoyo para culminar la licenciatura.

A la Facultad de Ciencias y los profesores por proporcionarme todo el conocimiento que tengo hasta ahora. Los estudiantes no somos nada sin los profesores y ayudantes (que no son de base), todo mi apoyo y agradecimiento para ellos.

Y por supuesto a la Universidad Nacional Autónoma de México que me ha otorgado el honor de cursar en sus aulas desde que entré a mi prepa 7, hasta llegar a la Facultad de Ciencias. Nunca olvidaré los conocimientos, logros, grandes momentos y buenas personas que me ha permitido tener y conocer esta gran Universidad.



# Resumen

A través de un método teórico basado en dinámica Hamiltoniana, se intenta mantener el confinamiento de partículas de plasma dentro del aparato estudiando el movimiento de partículas prueba por medio de las características de transporte anómalo.

El problema consiste en simular un espectro discreto de ondas de deriva en dos dimensiones, al que se le agregan flujos con cizalla del plasma de fondo. Se simula el movimiento de partículas prueba a través de mapeos simplécticos obtenidos con un método que parte de las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas, cuyos resultados son estudiados en espacios fase.

Bajo el supuesto de que cuando se pierde confinamiento de partículas se establece caos global en el sistema se determinan las condiciones para que sobreviva la última superficie KAM que actúa como una barrera de transporte, el análisis consiste en detectar bajo un método visual el rompimiento de estas barreras, que se forman debido a los flujos con cizalla agregados que se dirigen sólo hacia una dirección. Estos flujos van a depender de la velocidad de las partículas, cuando la velocidad incrementa linealmente con el radio menor del toro, el mapeo será con flujo lineal (monótono); si la velocidad varía radialmente en una región localizada se le llamará flujo zonal (no monótono).

A través de un estudio paramétrico se encuentran los valores de la amplitud de ondas, radio de Larmor y flujo zonal agregado, de los cuales depende el mapeo para los que las barreras se rompen o se vuelven a reconstruir. Con base en estos valores se presentan diagramas con estilo *ala de pájaro* y de ruptura única de ruptura única, que son analizados para la detección rápida de umbrales de barreras de transporte.

Esta tesis tiene como finalidad contribuir a la investigación de fusión nuclear controlada porque al parecer de la autora es la mejor opción ambiental que existe hasta ahora y que podría llevar al planeta Tierra a lograr producir y ocupar toda la energía que lo lleve a evolucionar tecnológicamente en el futuro.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Fusión Nuclear</b>	<b>8</b>
2.1	Principios físicos . . . . .	8
2.2	Plasma . . . . .	10
2.2.1	Criterios para plasmas . . . . .	11
2.2.2	Parámetros de los plasmas para reacciones de fusión . . . . .	12
2.3	Confinamiento magnético . . . . .	15
2.3.1	Aparatos de confinamiento magnético . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Transporte en Plasmas</b>	<b>21</b>
3.1	Difusión . . . . .	21
3.2	Transporte Clásico . . . . .	22
3.3	Transporte Neoclásico . . . . .	23
3.3.1	Régimen de alta colisionalidad . . . . .	24
3.3.2	Régimen de baja colisionalidad . . . . .	25
3.4	Transporte Anómalo . . . . .	28
3.4.1	Ondas de deriva . . . . .	29
3.4.2	Cizallamiento . . . . .	30
3.4.3	Flujos zonales . . . . .	31
3.4.4	Barreras de Transporte . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Aproximación de centro guía <math>\vec{E} \times \vec{B}</math> con efectos de radio finito de Larmor y sistemas Hamiltonianos</b>	<b>32</b>
4.1	Ecuaciones de sistemas Hamiltonianos . . . . .	32
4.1.1	Sistemas Hamiltonianos y mapeos simplécticos . . . . .	37
4.1.2	Modelo de partícula prueba con Hamiltoniano giropromediado . . . . .	39
4.1.3	Transformación de las ecuaciones de movimiento a mapeos simplécticos . . . . .	44
4.1.4	Sistema Hamiltoniano giro-promediado . . . . .	49
4.1.5	Sistema Hamiltoniano con un flujo de fondo . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Topología de los espacios fase modelados en Mathematica</b>	<b>55</b>
5.1	Mapeos en Mathematica . . . . .	55
5.1.1	Espacios fase de mapeo con flujo lineal . . . . .	55
5.1.2	Espacios fase de mapeo con flujo Gaussiano . . . . .	61
5.1.3	Exponentes de Lyapunov . . . . .	68
5.1.4	Determinando con exponentes de Lyapunov el establecimiento de caos global en algunos espacios fase. . . . .	68
5.1.5	Exponentes de Lyapunov en el Mapeo con Flujo Gaussiano . . . . .	70

5.1.6	Exponentes de Lyapunov en el Mapeo con Flujo Lineal . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Barreras de Transporte</b>	<b>73</b>
6.1	Barreras de transporte en mapeo con flujo lineal (con torsión) . . . . .	73
6.1.1	Procedimiento para la detección de barreras de transporte en mapeo con flujo lineal . . . . .	77
6.1.2	Discusión de los resultados . . . . .	79
6.2	Barreras de transporte en mapeo con flujo Gaussiano . . . . .	80
6.2.1	Procedimiento para la detección de barreras de transporte en mapeo con flujo Gaussiano . . . . .	82
6.2.2	Discusión de los resultados . . . . .	85
6.3	Ruptura de Barrera de Transporte . . . . .	86
6.3.1	Diagrama estilo ala de pájaro . . . . .	86
6.3.2	Anexo de Ruptura de barrera de transporte . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>95</b>
<b>9</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>98</b>

# Introducción

El planeta entero ha empezado a resentir los efectos del cambio climático en parte debido al uso excesivo de combustibles fósiles que se han usado desde hace ya más de dos siglos como la principal fuente de energía y cuya producción de dióxido de carbono  $CO_2$  ha sido imparable, lo cual no permite aligerar el efecto invernadero.

Por supuesto existen muchas alternativas energéticas que son indispensables hoy en día; entre ellas están las renovables como la hidroeléctrica, la solar o la eólica, cuya obtención es relativamente sencilla y además no contaminan del todo al medio ambiente debido a su principal ventaja que es no emitir gases de efecto invernadero. Pero a pesar de esto también tienen desventajas muy considerables. Entre ellas está que no son lo suficientemente duraderas y tampoco pueden ser reservadas o transportadas por un periodo largo de tiempo. Es por eso que también son llamadas fuentes de energía intermitentes ya que su obtención depende del medio en el que se desarrollen el cual siempre va a ser imposible de determinar con seguridad.

En cambio, existe otra alternativa energética muy prometedora, la energía nuclear, o más específicamente, la energía de *fusión nuclear* y la energía de *fisión nuclear* que podrían llegar a ser insustituibles debido a la enorme cantidad de potencial y utilidades ambientales que traen consigo.

La energía de fisión nuclear surge a mediados del siglo XX debido a las investigaciones realizadas y experimentos logrados de mecánica cuántica. Científicos de esos tiempos lograron separar núcleos de uranio y plutonio y obtener una cantidad de energía excesivamente grande. Básicamente lograron una reacción en donde un núcleo de algún elemento pesado de la tabla periódica se pudiera separar en núcleos de elementos más ligeros a través de colisiones con neutrones energéticos, y que a su vez se liberara una cantidad de energía mayor a la que se utilizó en hacer la reacción.

La energía nuclear por medio de reacciones de fisión nuclear ya ha sido desarrollada con éxito y aunque se propone como una opción muy viable por ser menos contaminante, hasta ahora no ha resultado ser una opción tan aplaudida por algunos países debido a que su obtención ha llegado a traer consecuencias mortales para algunos de ellos. Pero en realidad estos accidentes nucleares han sido producto de errores humanos o negligencias.

La fusión nuclear, por el contrario, consiste en unir dos núcleos de elementos ligeros de la tabla periódica para formar un núcleo más pesado y que a su vez logre liberar una enorme cantidad de energía. Desde los años 50 del siglo pasado se han realizado investigaciones sobre la fusión que han llevado a conocer bastante bien el tema pero aun falta porque aunque sí se han podido llevar a cabo algunos experimentos de fusión como tal, aun no se logra que sea autosostenible y por tanto eficiente como para lograr ser el recurso energético limpio y natural que el planeta necesita.

# Fusión Nuclear

## 2.1. Principios físicos

Para entender en qué consiste la fusión nuclear hay que tener en cuenta los principios físicos que la rigen. Lo primero es tomar en cuenta la composición y comportamiento de los núcleos atómicos. Los núcleos están formados por protones y neutrones con carga eléctrica positiva y neutra, respectivamente. La forma en la que estos nucleones se pueden mantener unidos es a través de la fuerza nuclear o fuerza fuerte. Esta fuerza sólo actúa a nivel nuclear y con acción a corta distancia, es por eso que los protones se mantienen unidos entre sí a pesar de todos tener la misma carga eléctrica. A estas escalas, la fuerza electrostática es dominada por la fuerza nuclear. Ver Figura 2.1.

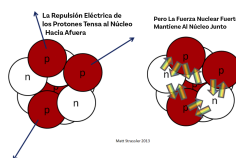


Figura 2.1: Fuerza eléctrica es superada, a escalas nucleares, por la fuerza nuclear fuerte. Fuente: [1].

### Energía de enlace y defecto de masa

La energía de enlace de un núcleo es una medida de la energía que se requiere para separar al núcleo en cada uno de sus nucleones, y como, experimentalmente se tienen los datos de la masa de cualquier núcleo conocido y de sus núcleos por separado, se sabe que la masa del conjunto siempre es menor que la de sus componentes. A esta masa faltante se le llama *defecto de masa* y corresponde a la energía de enlace, que es la misma que se libera durante la reacción, ya sea de fisión o fusión.

Estos conceptos se relacionan a través de la ecuación de Einstein sobre la equivalencia entre masa y energía,  $E = mc^2$ .

La Figura 2.2 es una gráfica de la energía de enlace por nucleón en función de su masa atómica. Puede verse que la cantidad de energía de enlace varía por cada elemento.

Se observa un máximo en el que sobresale el elemento Hierro,  $^{56}\text{Fe}$ , que es el núcleo cuyos componentes están más unidos que todos los demás, es decir, requeriría un proceso muy energético para separarlo o fusionarlo con otro debido a que es el más estable. Ahora, el lado derecho del máximo de  $^{56}\text{Fe}$  se encuentran los elementos que sería relativamente más fácil *fisionarlos* ya que se obtendrían núcleos más ligeros y esto a su vez liberaría mayor energía que la que se aplica al inicio. Del lado izquierdo del máximo los núcleos son más efectivos al fusionarlos entre sí ya que formarían un núcleo mayor y liberarían mucha más energía por nucleón que la aplicada e incluso más energía que los

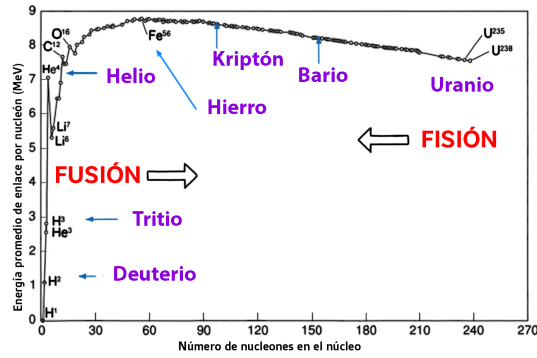


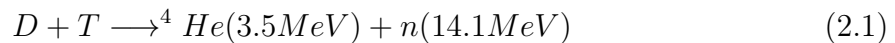
Figura 2.2: Energías de enlace por nucleón. Fuente: [2].

núcleos que se pueden fisionar [2].

A la probabilidad de que dos núcleos se acerquen tanto como pueden y esto resulte en fusión se llama sección eficaz [3].

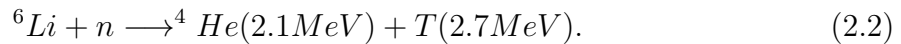
Las reacciones de fusión nuclear más energéticas son las que contienen isótopos de hidrógeno. Esto tiene que ver con la probabilidad de que los nucleones lleguen a colisionar y producir una reacción nuclear, En otras palabras, estas reacciones son las que tienen la mayor sección eficaz y que a su vez se invierte menos energía para que se logre.

La reacción de fusión más probable es la reacción Deuterio - Tritio (D-T),



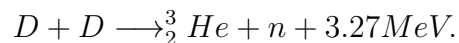
En donde los reactantes son dos isótopos de hidrógeno, el deuterio D con un neutrón y un protón, el tritio T son dos neutrones con un protón y cuyo producto resulta ser un núcleo isótopo del helio (partícula  $\alpha$ ), un neutrón y libera 17.58 MeV de energía.

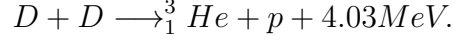
Esta reacción, además de ser la más probable, sus componentes son más fáciles de conseguir. Porque el deuterio se puede obtener naturalmente del agua ( $D_2O$ , agua pesada), y el tritio, aunque no se da naturalmente, se sabe que es radiactivo con una vida media de 12.3 años y que se puede producir en reacciones nucleares de fusión como ésta [2],



Esta reacción es muy conveniente porque se obtiene en un reactor D-T y ahí mismo se pueden usar los neutrones que resultaron de reacciones previas.

Existe también otra reacción con menor sección eficaz que se da a partir de la fusión de dos D y en la que pueden resultar dos productos diferentes:





Estas reacciones producen menos energía que la D-T, pero son muy importantes porque el D tiene una abundancia natural muy grande en la Tierra pudiendo satisfacer el consumo por millones de años más [3].

La Figura 2.3 muestra las reacciones que se pueden realizar de acuerdo a su sección eficaz en función de la energía cinética que tienen antes de fusionarse. Se puede notar que la reacción D-T es la más probable [3].

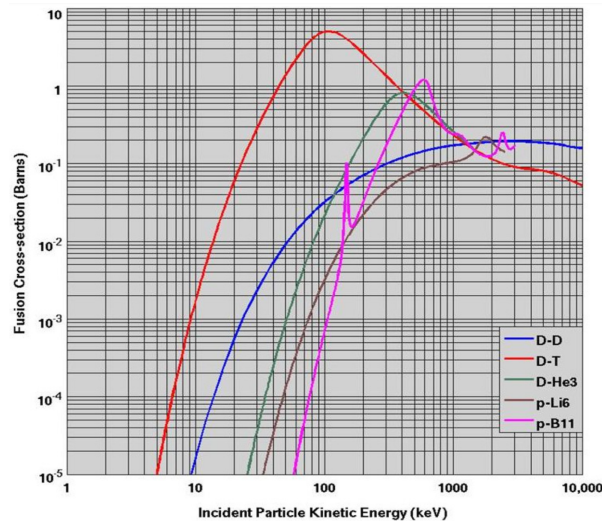


Figura 2.3: Sección eficaz de fusión nuclear para diferentes reacciones. Fuente: [4]

Con base en las reacciones ya descritas, se tiene que encontrar la forma de generar mayor energía que la que se le aplique.

## 2.2. Plasma

Como la probabilidad de que absolutamente todos los núcleos den lugar a reacciones de fusión es demasiado baja, la solución encontrada ha sido calentar un gas de isótopos de hidrógeno (núcleos de D y T) a altas temperaturas al punto en que se ioniza. Así, los iones de hidrógeno y electrones resultantes son acelerados a velocidades suficientemente altas y al colisionar los núcleos puedan lograr reacciones de fusión D-T con alta probabilidad. Este gas es llamado **plasma**.

El plasma es un gas ionizado, sus componentes son iones de carga  $q_i$ , electrones de carga  $q_e$  y átomos neutros. Idealmente se considera que la densidad de partículas cargadas positiva y negativamente dentro del gas debe ser aproximadamente igual,  $n_e \approx n_i \approx n$ ,

para que no se creen campos eléctricos macroscópicos y así poder ver al gas en conjunto como neutro o mejor llamado *gas cuasineutral*.

## 2.2.1. Criterios para plasmas

Hay que tomar en cuenta que no cualquier gas ionizado puede considerarse plasma, existen tres criterios para considerarlos así:

### Longitud de Debye

Se tiene un sistema de tamaño  $L$  que contiene un gas cuasineutral y en su interior las fuerzas electromagnéticas sobre las partículas se encuentran en equilibrio, al agregarse una carga de prueba  $Q$  positiva, ésta modificará el potencial entre las cargas ya existentes [5].

La carga  $Q$  atraerá hacia ella electrones que la van a rodear por completo formando en conjunto una especie de esfera, y que si no se mueven lo suficiente por efectos de temperatura baja, lograrán apantallar completamente los campos eléctricos que pudiera formar esta nueva carga y así el potencial eléctrico debido a  $Q$  sería nulo. El sistema se mantendría cuasineutral todavía.

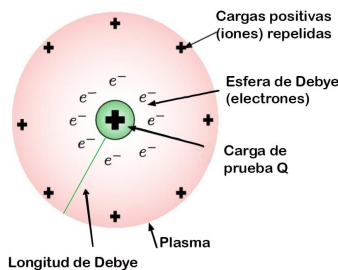


Figura 2.4: Carga  $Q$  rodeada por cargas negativas, esta configuración es llamada *esfera de Debye*. Fuente: Schaub, Hanspeter, Parker, Gordon, King, Lyon. (2006). Coulomb Thrusting Application Study. 120.

Esta configuración de los electrones rodeando a  $Q$  se le llama *esfera de Debye* y su radio es la *longitud de Debye*,  $\lambda_D$ . Ver Figura 2.4.

Y la condición de apantallamiento de Debye ocurre cuando las partículas actúan en conjunto para reducir la influencia de la perturbación, pero sólo se pueden observar si el radio de Debye es lo suficientemente pequeño comparado con el tamaño del sistema [6]:

$$\lambda_D \ll L$$

### Número de partículas dentro del plasma

Las partículas deben presentar comportamiento colectivo. Para esto se define como  $N_D$  al número de partículas dentro de una esfera de radio  $\lambda_D$ . Lo cual quiere decir que



dentro del gas las partículas deben moverse libremente y que haya una suficiente cantidad de ellas  $N_D \gg 1$  para que puedan actuar en conjunto.

Como el comportamiento de las partículas es electrostático, se espera que se mantengan creando constantemente campos eléctricos y como además se mueven y chocan entre sí se generan corrientes eléctricas dan lugar a campos magnéticos [6].

### Frecuencia del plasma

En el análisis anterior se supuso que el plasma estaba en equilibrio, pero es más requerido estudiar el comportamiento colectivo dinámico de los plasmas [6].

Así que, suponiendo que en el plasma se mueven libremente los electrones y que el medio que los rodea es estático, al producirse una perturbación en la densidad, éstos tenderán a moverse hacia los lados, en donde la densidad es más baja, debido a la fuerza del campo eléctrico que se crea entre ellos y los iones, que por ser mucho más grandes se suponen estáticos respecto a los electrones. Esto hace que los electrones empiecen a oscilar. De aquí se deduce una relación entre la frecuencia de oscilación los electrones, o como se conoce mejor, *frecuencia del plasma*  $\omega_p$ , y el tiempo promedio entre colisiones de electrones con iones  $\tau$ , de esta forma:  $\omega_p \tau > 1$ , indicando que las oscilaciones que deben tener los electrones dentro de un gas para ser considerado plasma deberán ocurrir en tiempos mucho más cortos que el tiempo de interacción por colisiones [6].

Sin embargo esto es sólo para la definición de un plasma no colisional. En el plasma hay muchos regímenes espacio-temporales, así que esta definición solo se usa para plasmas no colisionales.

### 2.2.2. Parámetros de los plasmas para reacciones de fusión

Existen varios métodos para llevar a cabo reacciones de fusión nuclear usando gases de los elementos D-T. Algunos de ellos son: 1) producir descargas eléctricas dentro de un gas; 2) incidir radiación electromagnética de alta energía sobre las moléculas o átomos o bien lo que interesa más a esta tesis; 3) calentar un gas a temperaturas muy altas hasta que se vuelva un plasma termonuclear [3].

Se describirán ahora las condiciones que debería de tener un plasma para lograr reacciones de fusión dentro de un reactor nuclear.

### Temperatura del plasma

Las estrellas logran transformar núcleos de hidrógeno en helio por medio de temperaturas muy elevadas, lo que se traduce en una gran cantidad de energía, y a la vez esta energía que producen en las reacciones les sirve para mantenerse activas y brillando por billones de años. Este proceso es llamado *autosostenible* al no dejar escapar el plasma del interior de la estrella debido al confinamiento ejercido por su propio campo gravitacional,

el cual impide que la materia escape [3]. Esto es un modelo a seguir para las reacciones que se han descrito, pero tiene sus inconvenientes. Uno es la autosostenibilidad del plasma, porque es realmente imposible confinar estas reacciones gravitacionalmente aquí en la Tierra; y por supuesto las altas temperaturas que serían muy difíciles de imitar en nuestro planeta.

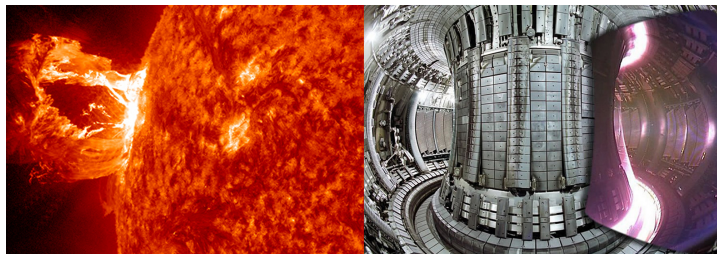


Figura 2.5: Plasma formado en el Sol, el cual permite la fusión nuclear en la estrella; y plasma formado dentro de un dispositivo diseñado por científicos para crear fusión nuclear en la Tierra.

- Distribución de velocidades maxwellianas

Al crear un plasma hay que considerar que dentro del gas las partículas no se acercan mucho en las colisiones debido a sus cargas eléctricas. Para lograr que venzan la barrera electrostática las partículas deben llevar una energía cinética muy alta. Al calentar el plasma a altas temperaturas es como se puede lograr esto.

Como la velocidad que llevan las partículas no es la misma para todas, al graficar el número de partículas que llevan cierta velocidad contra esa velocidad, se observa que el comportamiento del gas en equilibrio térmico es representado por una distribución maxwelliana, como la de la Figura 2.6.

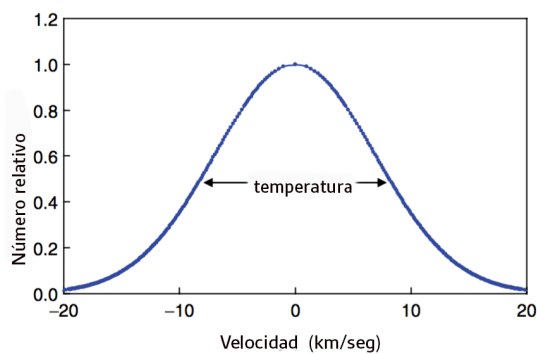


Figura 2.6: Distribución de velocidades para un gas en equilibrio térmico. Fuente: [2].

La gráfica muestra que la temperatura del gas es proporcional al ancho de la distribución y el pico representa cuántas partículas se mueven con la velocidad más frecuente. De esta forma las velocidades son más altas a temperaturas más altas [3].

## Densidad de iones

Debe haber una densidad mínima de iones para que la probabilidad de colisión con los demás núcleos o partículas sea lo suficientemente alta para que la energía producida por las reacciones sea mayor que la invertida.

## Tiempo de confinamiento

Para que plasma produzca más energía de fusión que la que se invirtió al calentarlo, la temperatura requerida para la fusión deberá de mantenerse por un periodo mínimo de tiempo. Esto pone límite a las inevitables pérdidas de energía térmica. Este periodo mínimo se le llama tiempo de confinamiento de energía  $t_E$  [3].

Los **criterios de balance de energía** sirven para establecer que la ganancia de energía (la cual corresponde sólo a la que se produce en la fusión) se empareje con la energía perdida (plasma auto sostenido).

En el primer criterio toda la energía ganada y perdida tendría que ser convertida de alguna manera por el reactor en energía útil con una eficiencia  $e$  y así mantener el proceso de fusión [3].

Se llama *Criterio de Lawson* y se expresa como,

$$nt_E \geq \frac{3T}{[P_F(\frac{e}{1-e} - P_R)]/n^2}. \quad (2.3)$$

Con  $P_F$  y  $P_R$  las potencias de fusión y radiación,  $n$  densidad del plasma y  $T$  la temperatura en unidades de energía eV.

Se consideran dentro de la expresión a las potencias de fusión y radiación necesarias para mantener el combustible a la temperatura de fusión requerida. El resultado del periodo mínimo de confinamiento de energía  $t_E$  tiene que ser mayor o igual para asegurar que haya un emparejamiento de energía durante la fusión [3].

La siguiente es el *Criterio de encendido* y es cuando el plasma alcanza el estado ignición porque la energía de fusión que produjo (o parte de ella) ya puede ser reabsorbida y así mantener una temperatura constante. Ya no necesitará que se le suministre más energía del exterior y por tanto el plasma entrará en un estado de autosostenimiento.

Y se expresa como:

$$nt_E \geq \frac{3T}{[P_\alpha - P_R]/n^2}. \quad (2.4)$$

Con  $P_\alpha$  la potencia de las partículas  $\alpha$  (aquí se hace la suposición de que estas partículas son las únicas que quedan en el plasma y pueden darle energía) [3].

En la Figura 2.7 hay una gráfica que compara la densidad de plasma  $n$  por el tiempo de confinamiento de energía  $t_E$  para el balance de pérdidas y ganancias entre los criterios de *Lawson* y de *encendido* [3].

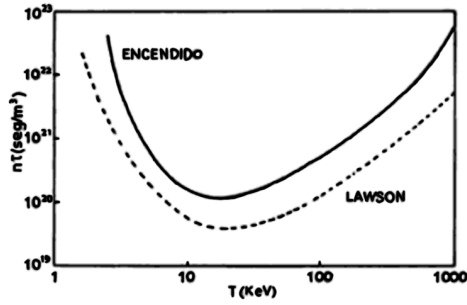


Figura 2.7: Comparación entre los criterios de *Lawson* y de *encendido* para el balance de pérdidas y ganancias de energía. Fuente: [3].

Para alcanzar la ignición D-T es requerido al menos un valor del criterio de Lawson de  $nt_E = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}\text{s}$  con una temperatura de 15-25 keV [7].

### Tipos de confinamiento

Los criterios de balance de energía anteriores se pueden alcanzar por medio de dos tipos de confinamiento para la fusión: confinamiento inercial y magnético.

*Confinamiento inercial* consiste en lograr tiempos de confinamiento de energía pequeños con densidades muy grandes, con lo que se obtienen plasmas muy calientes confinados por su propia inercia de movimiento compresivo.

*Confinamiento magnético* se basa en mantener tiempos de confinamiento largos con densidades moderadas. Para esto se requieren campos magnéticos que sirvan como guía de las partículas cargadas y eviten que se lleguen a salir del reactor o aparato. Es este tipo de confinamiento el que interesa estudiar.

Este equilibrio entre temperaturas altas y tiempos largos con densidades relativamente altas es posible de lograr pero también es muy difícil por las inestabilidades internas del plasma que crean el llamado transporte anómalo (más adelante se verá con más detalle), que en algunos casos provoca pérdida de energía y limita el tiempo de confinamiento [3].

## 2.3. Confinamiento magnético

Un buen modelo de aparato de confinamiento sería un dispositivo que no contenga extremos para que el plasma no pueda escapar tan fácilmente. Las investigaciones coincidieron en que la forma ideal tendría que ser cilíndrica pero con los extremos unidos, es decir, un toroide. Con esta geometría, las líneas de campo magnético circularían alrededor del toroide y así las partículas recorrerían esa trayectoria cerrada moviéndose principalmente a lo largo de las líneas de campo. También experimentan un movimiento a través de las líneas que tiende a hacer que escapen pero no del todo.

En la Figura 2.8 se muestra un diagrama de la geometría del dispositivo. La dirección que va alrededor de la forma circular del toro se le llama toroidal y la que rodea el camino corto circular del toro sin encerrar el agujero central es la poloidal [2].

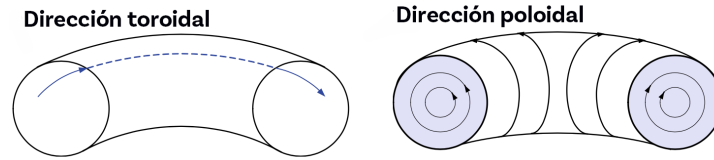


Figura 2.8: Sección transversal que muestra la dirección toroidal y la dirección poloidal de un toroide. Fuente:[2].

El que las partículas se puedan mover a través de las líneas de campo se debe a que realizan un movimiento perpendicular a las líneas de campo magnético, o movimiento de *deriva*  $\vec{E} \times \vec{B}$ , que aparece ante la presencia de una fuerza con componente perpendicular al campo [3].

Esta *deriva* se debe a la existencia de campos cuyas configuraciones generan la deriva de cualquier partícula cargada. Cuando hay esta velocidad de deriva ocurre una superposición de dos movimientos, uno circular alrededor de las líneas de campo, y el otro del centro de giro que lleva una velocidad, y se le llama *centro guía*. Para el caso de una fuerza producida por un campo eléctrico  $\vec{E}$ , la velocidad de deriva es  $\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ . Ver Figura 2.9.

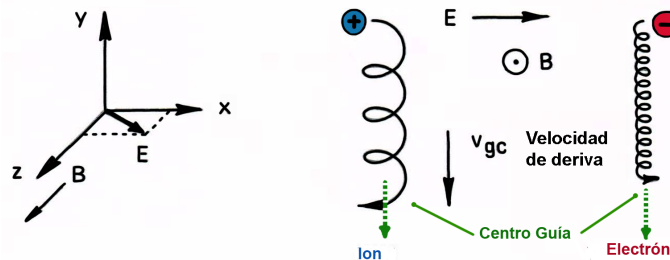


Figura 2.9: Espacio de coordenadas que ubica la dirección del movimiento de las cargas bajo la aplicación de un campo eléctrico y un campo magnético (lado izquierdo). Dirección del campo eléctrico y magnético, del centro guía de las partículas y de su velocidad de deriva (lado derecho). Fuente: [5].

Este confinamiento todavía no está completo porque ahora aparece otro problema. El que la trayectoria de las líneas de campo sea toroidal provoca que el campo magnético no sea del todo homogéneo, por lo que ahora se producirá otra deriva vertical respecto al toroide (que se supone está colocado horizontalmente). Esta velocidad de deriva se debe a la curvatura y al gradiente del campo magnético y depende de la carga de las partículas.

Esta deriva provoca una separación de cargas, los iones y electrones se mueven en direcciones contrarias, creándose una acumulación de cargas positivas en la parte superior y de cargas negativas en la parte inferior del toroide. Este acomodamiento crea un

campo eléctrico cuya fuerza eléctrica,  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ , producirá otra deriva y ahora todas se van a mover en dirección de  $\vec{E} \times \vec{B}$ , que va hacia las afueras del aparato y el buen confinamiento se perdería de nuevo. Ver Figura 2.10.

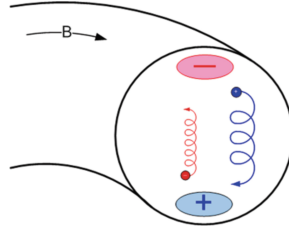


Figura 2.10: Deriva de las partículas en el toro, los iones se acumulan en la parte inferior y los electrones en la parte superior del toroide. Fuente: [2].

El problema aquí es la separación de las cargas, que se puede evitar si las líneas de campo formarían una hélice alrededor del toro y así las partículas recorrerían obligatoriamente tanto la parte superior como la inferior del toroide.

Las líneas de campo tendrán que acomodarse unas alrededor de otras para formar la hélice y así cubrir todo el toroide. De esta forma se crearán diferentes superficies (llamadas superficies magnéticas) sobre el toro, anidadas unas dentro de otras, en las que se van a ir alojando las líneas de campo, que ahora tienen una componente poloidal, además de la componente toroidal.

Estas superficies magnéticas se encierran dentro del eje magnético. Y la distancia de cada superficie a este eje se le llama radio menor. Ver Figura 2.11.

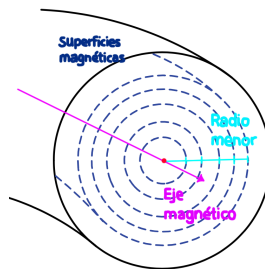


Figura 2.11: Sección transversal del toroide, que muestra la dirección del eje magnético, las superficies magnéticas y los radios menores de estas superficies.

A partir de esto se han desarrollado aparatos de confinamiento que se pueden clasificar de acuerdo a cómo pueden configurarse las líneas de campo magnéticas.

Hay dos aparatos que destacan, los Tokamak y los Stellarator.

### 2.3.1. Aparatos de confinamiento magnético

#### - Tokamak

El nombre viene de las palabras en ruso **Toroidalnaya kamera magnitnaya katushka** que significan cámara toroidal y bobina magnética [2].

Es un toroide grueso, que contiene un plasma por el que se pasa una corriente eléctrica en dirección toroidal que a su vez crea un campo magnético poloidal. Contiene además una serie de bobinas que rodean los tubos del toro para crear un campo magnético toroidal muy intenso. Las componentes de los dos campos dentro del toroide forman un campo magnético resultante que se enreda sobre el toro y sus líneas se enroscan en forma de hélice dentro del aparato. Ver Figura 2.12.

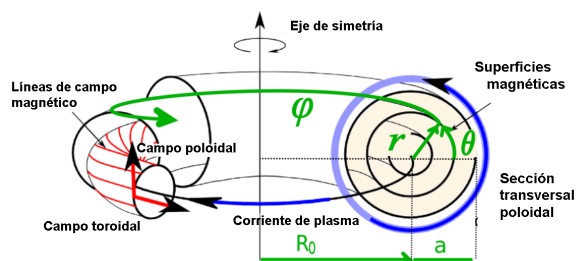


Figura 2.12: Coordenadas toroidales dentro de un tokamak. Fuente: [8].

En el interior del toro existe una infinidad de superficies magnéticas en las que las líneas magnéticas que alojan son todas paralelas. La razón entre las componentes del campo determina qué tanto se van a enroscar las líneas de la hélice, el factor de seguridad  $q$  es el que mide esta torsión.

El factor  $q$  varía con el radio menor indicando la variación de la dirección de campo magnético para las diferentes superficies magnéticas del toro. Esta variación es llamada *cizallamiento magnético*. Y sirve para evitar inestabilidades en el dispositivo y separación de carga discutida anteriormente.

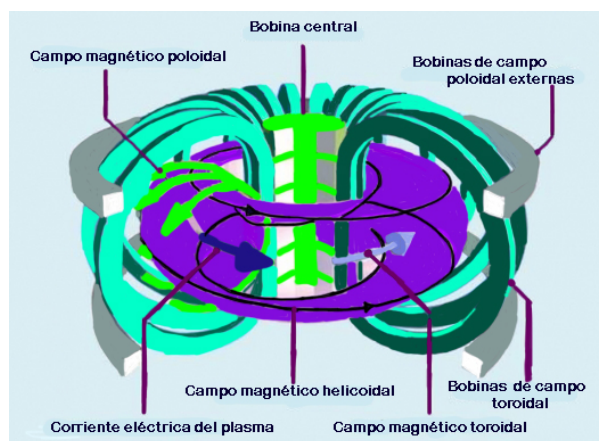


Figura 2.13: Esquema de la configuración de bobinas en un tokamak. Fuente: EFDA-JET (ahora EUROfusion).

La corriente del plasma se crea por el principio de inducción de Faraday aplicado a un transformador. En donde se tienen dos bobinas con núcleo compartido y a una de ellas se le induce una corriente variable entonces generará un flujo magnético variable

en el núcleo que a su vez inducirá una corriente en la otra bobina. En el tokamak la primera bobina sería una corriente que rodea al toroide en el interior y la segunda sería el plasma, el núcleo compartido sería el agujero del toroide, en donde se puede colocar un núcleo de hierro o de aire [3]. Ver Figura 2.13.

Como el plasma debe estar a una temperatura suficientemente alta para que se puedan dar las condiciones de fusión, el plasma utilizado en los tokamaks es en parte calentado óhmicamente por la corriente que se le induce, dado por el efecto Joule.

Para producir las corrientes eléctricas en las bobinas del campo toroidal y la corriente del plasma para el campo poloidal son necesarias fuentes de alimentación que descargan su energía sobre las mismas.

### - Stellarator

Esta configuración consiste en rodear la cámara interna (de vacío) con bobinas externas sobre el toroide y cuyas líneas de campo magnético van a ser helicoidales en las superficies magnéticas. De esta forma siempre habrá campo magnético poloidal y toroidal haya o no haya plasma dentro del dispositivo. En este caso, como no se necesita una corriente inducida, se puede operar con DC y no de manera pulsada como el tokamak [3]. Ver Figura 2.14.

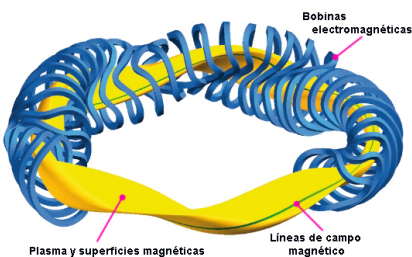


Figura 2.14: Modelo computarizado de un stellarator. Fuente: Max-Planck Institut für Plasmaphysik - Max-Planck Institut für Plasmaphysik. Retomado de <https://www.ipp.mpg.de/w7x> .

### Leyes de escalamiento y confinamiento en tokamaks

El estudio, diseño y mejoramiento de los tokamaks se ha basado en los parámetros que se pueden medir directamente.

Siendo los siguientes:

- Dimensiones del aparato (radio mayor y radio menor)
- Corriente del plasma y densidad de electrones
- Temperatura de iones
- Campo magnético toroidal y campo magnético poloidal



Con base en estos parámetros se pueden predecir valores de una variable, que será el tiempo de confinamiento del sistema, en función de las otras variables. Esta forma de predicción son las *leyes de escalamiento*. Y se usan para hacer cálculos relacionados con el confinamiento magnético, que están basados en mediciones experimentales de diferentes aparatos, pero aun así ayudan a predecir el arreglo que deben tener los dispositivos, o hacer predicciones relativas a los mecanismos de transporte local en plasmas.

De acuerdo en esto, la ley de escalamiento para calcular el tiempo de confinamiento de energía más usada hasta ahora y que depende del tipo de calentamiento empleado (en este caso, calentamiento óhmico) es,

$$\tau_E = 0.031 I^{0.95} B^{0.25} P^{-0.67} n^{0.35} R^{1.92} \epsilon^{0.08} \kappa^{0.63} M^{0.42}. \quad (2.5)$$

Se obtiene empíricamente a partir de datos obtenidos de una base que incluye una gran cantidad de experimentos en tokamaks alrededor del mundo, y se ha empleado para el diseño del International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER) [9].

Para mayor profundidad en cuanto a las variables ver directamente en [10].

Pero con los años la comunidad de investigadores de plasmas de fusión se han dado cuenta que este escalamiento no es confiable ya que no considera muchos factores de ingeniería como por ejemplo los materiales que se usan para las paredes, el tipo de calentamiento y su funcionamiento al momento de realizar descargas en el plasma, etc. Debido a esto se intenta no usar el escalamiento y en su lugar realizar simulaciones numéricas de varios tipos para obtener datos predictivos.

# Transporte en Plasmas

Estudiar los diferentes movimientos y trayectorias de las partículas del plasma dependiendo de la geometría del dispositivo sirve como contexto para el tema de esta tesis. Es muy importante entender el **transporte en plasmas** para mejorar el diseño y optimización de futuros aparatos de confinamiento. Aquí las descripciones serán enfocadas en los Tokamak.

El transporte en plasmas describe de manera estadística el movimiento continuo y aleatorio de moléculas o partículas. Estudia a las partículas como un todo así que usualmente se consideran como si fueran un fluido. Se toma en cuenta a los gradientes ya sean de densidad, concentración, presión o temperatura, y posteriormente se calculan los coeficientes de difusión para el tipo de transporte que se requiera estudiar.

## 3.1. Difusión

De calcular los momentos estadísticos de la función de distribución de partículas del plasma se obtiene que el flujo de partículas es proporcional al gradiente de densidad, así que cuando  $\text{dim} \geq 2$ :

$$\vec{\Gamma} = -D\vec{\nabla}n. \quad (3.1)$$

En donde la constante de proporcionalidad es el coeficiente de difusión  $D$ .

El cambio de densidad en el tiempo sobre algún punto del espacio es proporcional a la divergencia del flujo de partículas en ese mismo punto,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}. \quad (3.2)$$

Esta es la ecuación de continuidad para partículas.

Uniando las expresiones anteriores se obtiene la ecuación de difusión para la evolución de densidad de partículas

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\vec{\nabla}^2n. \quad (3.3)$$

Estas ecuaciones dicen que si la densidad de partículas cambia linealmente con la posición, la densidad en cada punto del espacio no va a cambiar incluso aunque el flujo fuera diferente de cero. Por tanto, para que la densidad en cada punto del espacio cambie con el tiempo, se necesita que haya un cambio no lineal de la densidad respecto a la posición [11].

El coeficiente de difusión  $D$ , que aquí se asume constante, se puede calcular de la siguiente forma. Suponiendo que las partículas se muevan en una caminata aleatoria, a

pasos de tamaño  $\Delta x$ , con  $x \in \mathbb{R}$ , en alguna dirección en pasos de tiempo  $\Delta t$ . La expresión general aproximada para el coeficiente será,

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \rightarrow D. \quad (3.4)$$

Aquí  $D$  tiene dimensiones  $\frac{[L^2]}{[T]}$ , el ancho promedio del grupo de partículas,  $\sigma$ , crece como,

$$\sigma \rightarrow \sqrt{\langle x^2 \rangle} \sim \sqrt{2Dt}. \quad (3.5)$$

Si una sola partícula se está moviendo aleatoriamente, después de un tiempo  $t$  podemos esperar que la partícula se encuentre aproximadamente a una distancia  $\sim \sqrt{2Dt}$  medida desde donde comenzó a moverse [11].

Hay tres tipos de transporte en plasmas magnetizados toroidales que se tienen que estudiar: *clásico*, *neoclásico* (que sólo se aplica a plasmas toroidales) y *anómalo*.

## 3.2. Transporte Clásico

El transporte debido a las colisiones entre partículas cuando el plasma está confinado por un campo magnético es conocido como transporte clásico. Se va a suponer que la geometría del aparato es cilíndrica. Las partículas del plasma, que está confinado magnéticamente en el cilindro van a realizar trayectorias circulares alrededor de las líneas de campo, siguiendo su centro guía.

Usando la aproximación de deflexiones de ángulo pequeño para el modelo de colisiones, al momento de colisionar van a modificar la posición de su centro guía tal que la distancia entre el centro inicial y el final sea del orden de un radio de Larmor.

Para calcular el coeficiente de difusión, se debe considerar que las colisiones entre ion-electrón son más importantes (en el sentido que el tipo de transporte que interesa estudiar aquí involucra estas dos especies) que ion-ion o electrón-electrón, porque al momento de chocar ion con ion (o electrón con electrón) los centros guías de ambas partículas van a intercambiar sus posiciones sin producir un cambio en la distribución de sus partículas, a diferencia de las colisiones entre ion y electrón cuyo desplazamiento de los centros guías va a ser hacia la misma dirección en algunas ocasiones.

El coeficiente de difusión clásico se puede obtener de varias maneras: usando argumentos heurísticos, bajo el modelo de multifluidos o con el modelo magnetohidrodinámico (MHD) que surge de la teoría cinética. Bajo las suposiciones de que el plasma no tenga perturbaciones u ondas, que esté confinado magnéticamente dentro de un cilindro de longitud infinita, cuyas componentes  $\theta$  y  $z$  sean simétricas, y que  $r$  sea la variable de la que depende la densidad y los otros parámetros del plasma. Así, a la función  $n(r)$  se le

llama *perfil de densidad* [11].

Hay que relacionar el flujo de partículas  $\vec{\Gamma}$  con el gradiente de densidad, en una geometría cilíndrica y así encontrar la ecuación para el flujo radial  $\Gamma_r$ , lo que resultará en que se pueda encontrar el coeficiente de transporte perpendicular al campo magnético,  $\Gamma_r \equiv nv_r$  [11].

Con el modelo MHD se puede obtener una relación que expresa el flujo radial de partículas en términos del gradiente de presión combinando las ecuaciones que rigen este modelo. La constante de proporcionalidad da el coeficiente de difusión. El mismo resultado se puede obtener también de manera más sencilla con argumentos heurísticos considerando que las partículas se van a desplazar radialmente al colisionar, teniendo un avance del orden del radio de Larmor,  $\rho_L$ , en cada colisión.

Usando el modelo de caminata aleatoria, la ecuación (3.4), en donde el paso  $\Delta x = \rho_e$  y  $\Delta t$  es el tiempo entre colisiones, que es el inverso de la frecuencia de colisiones  $\nu$ , se obtiene,

$$D_{class} = \frac{\rho_e^2 \nu_{ei}}{2}. \quad (3.6)$$

con  $\rho_e^2 = \frac{m_e^2 v_{Te}^2}{e^2 B^2}$ ,  $v_{Te}^2 = \frac{2k_B T_e}{m_e}$  y con  $\nu_{ei}$  la frecuencia de colisión ion-electrón.

Y finalmente el flujo de partículas del modelo clásico es,

$$\Gamma_r = -2D_{class} \vec{\nabla} n. \quad (3.7)$$

Este coeficiente de difusión resulta ser demasiado bajo comparado con las mediciones experimentales. Es decir, en teoría es tan pequeño que la pérdida de plasma no resulta un problema serio dentro del sistema de confinamiento. Sin embargo, se ha mostrado experimentalmente que la pérdida de plasma a través del campo magnético es considerablemente más rápida que la que predice el  $D_{class}$ . Las causantes son las inestabilidades del plasma que hacen que entre rápidamente en un estado de turbulencia. Por eso es necesario un coeficiente de difusión más cercano a lo que se observa experimentalmente.

### 3.3. Transporte Neoclásico

El modelo que describe la ecuación (3.6) sólo toma en cuenta uno de los procesos que causa el desplazamiento de una partícula cargada desde una superficie magnética, que está asociada con el giro de Larmor.

Por eso ahora se va a tomar en cuenta una configuración más realista en donde el plasma ahora esté confinado magnéticamente dentro de un aparato con geometría toroidal.

El transporte neoclásico se presenta bajo dos regímenes; el altamente colisional que describe al plasma como si fuera un fluido y el de baja colisionalidad que toma en cuenta el movimiento de las partículas individuales usando un modelo cinético.

### 3.3.1. Régimen de alta colisionalidad

Se puede calcular el coeficiente de difusión de distintas formas. Al igual que en la sección de transporte clásico, con el modelo heurístico, el modelo de multifluidos, el modelo MHD o usando teoría cinética. A continuación se describirán los coeficientes de difusión en distintos regímenes de colisionalidad de manera heurística [11].

#### Heurístico:

Dentro de un toroide las partículas orbitarán en dirección poloidal al tiempo que derivarán radialmente. La velocidad de deriva radial, que es debida a la curvatura y al gradiente del campo magnético, multiplicada por el tiempo que le toma a la partícula recorrer la longitud de conexión del toroide (la longitud efectiva recorrida para volver a la misma posición poloidal) da el desplazamiento radial  $\Delta x$ . La longitud de conexión es proporcional al factor de seguridad  $q$ . Así, mediante la ecuación (3.4) y una serie de cálculos se obtiene el coeficiente de difusión neoclásico heurístico,

$$D_{neo} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \sim \nu_{ei} \rho_e^2 q^2 = D_{class} q^2. \quad (3.8)$$

#### MHD:

Se calcula la velocidad radial promediada sobre una superficie de flujo magnético usando una geometría toroidal y tomando en cuenta las fuerzas paralelas al campo magnético. Así se obtiene,

$$D_{neo} = \nu_{ei} \rho_e^2 (1 + q^2). \quad (3.9)$$

Ambos coeficientes son mayores que (3.6) debido a que se toma en cuenta la longitud efectiva radial que realiza la partícula sobre el tiempo en que derivan por los gradientes de densidad. Cabe hacer notar que la ecuación (3.9) incluye el transporte clásico además de neoclásico, dado por el factor 1 en el paréntesis [11].

Pero en realidad los análisis anteriores no son del todo correctos. Una de las razones se debe a que al considerar cualquier rango de temperatura, el plasma nunca va a ser colisional para todas las partículas. Resulta que cuando las partículas casi no colisionan sus trayectorias pueden acelerar la difusión de manera importante. Por eso es mejor analizarlo con un modelo cinético en vez del de fluidos para entender mejor la transferencia difusiva de calor y energía dentro del tokamak [11].

### 3.3.2. Régimen de baja colisionalidad

#### Coefficiente de difusión de Banana:

En los modelos anteriores no se tomó en cuenta que no todas las partículas son pasantes, es decir, no completan una órbita sobre el eje  $\theta$  (ver Figura 2.12). Más bien esas partículas son reflejadas por el  $\nabla B$ , como en un espejo magnético. A las partículas que no completan la órbita se les llama “partículas atrapadas” y las que sí la completan se les llama “partículas pasantes”.

Estas partículas son una fracción muy pequeña en comparación a todo el conjunto pero pueden representar una contribución muy grande para el transporte. En el transporte las partículas atrapadas importan mucho porque su componente de velocidad paralela al campo magnético,  $v_{\parallel}$ , es muy pequeña o nula. Así tienen más tiempo para orbitar radialmente y de esta forma su excursión radial  $\zeta_B$  (ancho de la excursión radial de las partículas atrapadas) es mayor [11]. Ver Figura 3.1.

En la parte interna del toroide, las líneas de campo magnético se encuentran más cerca del centro del toro, es por eso que el campo es más intenso ahí que en la parte externa del aparato. Esta diferencia hace que el campo magnético no sea uniforme en todo el espacio. Las partículas deberían recorrer las líneas magnéticas helicoidales por completo alrededor de todo el toroide. Pero debido al campo magnético no uniforme, estas partículas se desplazarán siguiendo una línea de campo, de débil a fuerte, y pueden llegar a reflejarse dependiendo de la intensidad en la componente paralela de velocidad que lleven.

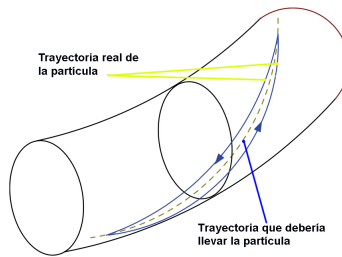


Figura 3.1: Trayectoria que debería llevar la partícula VS la que lleva en realidad (teóricamente) debido a la velocidad de deriva vertical. Fuente: [2].

Para los iones, su órbita debería verse como la de la Figura 3.1, es decir siguiendo la trayectoria helicoidal, pero por el efecto de la deriva vertical y por el efecto de espejo magnético será reflejada y regresará pero por un camino (o línea) diferente. Esto quiere decir que sólo los iones con velocidad paralela suficientemente grande llegarán a la parte interna del toro y recorrerán toda la superficie magnética correspondiente. De lo contrario formarán una trayectoria en forma de banana. La trayectoria que recorren estas partículas, viéndolas sobre una sección transversal se observan así:

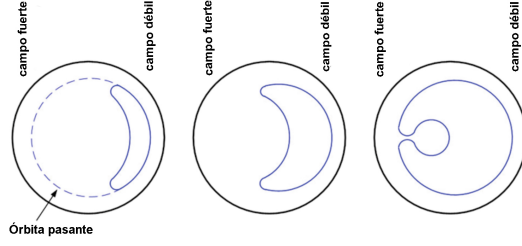


Figura 3.2: Vista transversal de la trayectoria de “banana ” que realiza la partícula. Fuente: [2].

Considerando además que las partículas que realizan su viaje de una órbita de banana pueden experimentar una colisión y brincar a otra órbita de banana (ver Figura 3.2). Se puede calcular la frecuencia con la que realizan estos saltos. Y se les llama órbitas de banana porque las partículas que las realizan semejan su trayectoria al de esta fruta.

Como ya se sabe la frecuencia se define como  $\frac{2\pi}{\tau_B}$ , con  $\tau_B$  el periodo de rebote. Y así finalmente se obtiene la frecuencia de rebote, que es:

$$\omega_B \sim \frac{V_T \epsilon^{\frac{1}{2}}}{qR_0}. \quad (3.10)$$

con  $V_T$  la velocidad paralela típica que llevan las partículas y  $R_0$  el radio mayor dentro del tokamak. Donde  $\epsilon$  es el inverso de la razón de aspecto  $r/R$  (cociente de los radios menor y mayor).

Falta tomar en cuenta el ancho del camino que toman las partículas atrapadas,  $\zeta_B$ , que básicamente es el ancho de la órbita de banana. La velocidad de deriva radial multiplicada por el periodo de rebote, resulta ser aproximadamente,  $\zeta_B = \frac{\rho_e q}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}$ .

Para calcular un coeficiente de difusión para estas partículas,  $D_{ban}$ , sólo se multiplica el coeficiente de difusión de partículas atrapadas, usando que  $\Delta x = \zeta_B$ , por la fracción de partículas que están atrapadas, que es,

$$D_{ban} \sim \langle f_T \rangle \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \sim \rho_e^2 \nu_{ei} \frac{q^2}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.11)$$

Aquí claramente el coeficiente es mucho mayor que el clásico, e incluso el neoclásico colisional. Esto sucede porque el transporte colisional no toma en cuenta a las partículas en las órbitas de banana [11].

En términos generales el transporte neoclásico se puede dividir en tres regímenes basados en la razón entre la frecuencia de colisión efectiva y la de rebote para partículas atrapadas (ec. (3.10)), que es  $\nu_e^*$ . Este parámetro es adimensional y es,

$$\nu_e^* = \frac{\nu_{eff,e}}{\omega_B} = \frac{\nu_{ei} q R_0}{V_T \epsilon^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.12)$$

## Régimen de Banana

Es el menos colisional, en donde las partículas pueden brincar entre órbitas de banana al ir experimentando las pocas colisiones que tienen. Se necesita que el parámetro cumpla  $\nu_e^* \ll 1$ , y así las partículas atrapadas rebotarán muchas veces antes de salirse de la órbita. Aquí el coeficiente de difusión es del orden del obtenido en la ecuación (3.11).

## Régimen de Plateau

Las frecuencias de colisión aumentan, las partículas atrapadas van a ser menos capaces de rebotar entre órbitas sin colisionar alguna vez y las que no están atrapadas todavía van a poder completar órbitas poloidales sin llegar a colisionar [11]. Aquí el coeficiente de difusión es independiente de la frecuencia de colisiones.

## Régimen de Pfirsch-Schluter (P-S)

Con una mayor colisionalidad, las partículas van a ser incapaces de completar órbitas poloidales sin colisionar. Aquí  $\nu_e^* \gg \epsilon^{-\frac{3}{2}}$  y como  $\epsilon \ll 1$  entonces la frecuencia de colisión normalizada en este régimen debe ser mucho mayor que 1 [11]. El coeficiente de difusión es del orden del de la ecuación (3.8).

Resumiendo, los coeficientes de difusión para cada régimen son:

- Banana:

$$D_{Ban} \sim \rho_e^2 V_{Te} \frac{q}{R_0} \nu_e^*. \quad (3.13)$$

En la transición del régimen de Banana al de Plateau se tiene que  $\nu_e^* = 1$ , al usar ec. (3.12), y se obtiene  $D = \rho_e^2 V_{Te} \frac{q}{R_0}$ .

- P-S:

$$D_{P-S} \sim \rho_e^2 V_{Te} \frac{q}{R_0} \nu_e^* \epsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (3.14)$$

En la transición de Plateau a P-S se tiene  $\nu_e^* = \epsilon^{-\frac{3}{2}}$ , usando ec. (3.12) y se obtiene  $D = \rho_e^2 V_{Te} \frac{q}{R_0}$ .

- Plateau:

$$D_{Plateau} \sim \rho_e^2 V_{Te} \frac{q}{R_0}. \quad (3.15)$$

Para estar en el régimen de Plateau los parámetros límites tendrían que ser  $\nu_e^* = 1$  y  $\nu_e^* = \epsilon^{-\frac{3}{2}}$ . [11]

En conclusión, el coeficiente de difusión neoclásico es el mismo en el extremo de baja colisionalidad del régimen de Banana que en el extremo de alta colisionalidad en el régimen P-S, por lo que el coeficiente  $D_{Plateau}$  es constante a lo largo de todo su régimen [11].



Graficando las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15) en función de  $\frac{\nu_e R_0 q}{V_{Te}}$ . Se obtiene la figura 3.3 que indica que el coeficiente de difusión es mayor en el régimen de alta colisionalidad (P-S) y se mantiene constante a lo largo del régimen Plateau, mientras que disminuye al llegar al de baja colisionalidad (Banana) [11].

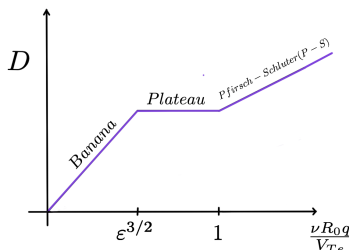


Figura 3.3: Regímenes de transporte neoclásico.

### 3.4. Transporte Anómalo

Este tipo de transporte se debe a la turbulencia producida por las inestabilidades que surgen en el plasma a pequeña escala dentro del sistema. Aunque algunas de las inestabilidades son muy débiles, que hasta pueden evitarse, hay otras que son demasiado complicadas de manejar.

Al tratar de describir mejor el transporte de plasmas se han descubierto fenómenos y configuraciones interesantes dentro de los mismos tokamaks. Algunos de ellos son: fenómenos de auto-organización en los tokamaks, islas magnéticas y oscilaciones de dientes de sierra (observadas a través de aparatos que miden los rayos X emitidos por el plasma), pozos magnéticos, el entender la evolución de la sección transversal poloidal del plasma de una forma circular a una forma en “D” en los tokamaks, corrientes autogeneradas (bootstrap), efectos isotópicos, deriva radial de Ware, y los más importantes para esta tesis, los flujos zonales y barreras de transporte.

En el centro de los tokamaks el plasma es muy denso y en las paredes la densidad disminuye lo que hace que haya una presión que empuja sobre el campo magnético aplicado. Puede pensarse que las partículas de plasma se van a quedar unidas a las líneas de campo pero esto no ocurre cuando hay resistividad eléctrica u otros efectos que pueden producir campos eléctricos, pues éstos lo hacen moverse a través del campo magnético hacia donde lo empuja la presión. Esto es un efecto resistivo que puede causar que las ondas de deriva se vuelvan inestables en el plasma [2].

Muchas de las micro inestabilidades que hay son causadas por un mismo tipo de efecto en el plasma, el de las *ondas de deriva*.

### 3.4.1. Ondas de deriva

Para describir el mecanismo de estas ondas hay que fijarse sólo en la parte transversal (o sección poloidal) del tokamak, en donde el plasma es más denso en el centro que en las orillas. El gradiente de densidad produce una velocidad de deriva en dirección poloidal, que es en sentidos opuestos para iones y electrones. En esta suposición los electrones irán hacia la derecha y los iones a la izquierda, (ver Figura 3.4). A la vez podrían verse como dos fluidos interpenetrantes, cada uno con su propia velocidad de deriva  $v_{De}$  y  $v_{Di}$ . Al haber una ligera perturbación en el plasma, una ondulación de la densidad en la dirección poloidal, un pico de ésta se encontrará más cerca del centro y provocará una acumulación de cargas positivas debido a la deriva diamagnética de los iones del lado izquierdo, y una acumulación de cargas negativas por la deriva diamagnética de los electrones del lado derecho (ver Figura 3.5), lo que hace que se cree un campo eléctrico poloidal y así una velocidad de deriva eléctrica  $v_E = \vec{E} \times \vec{B}$  dirigida hacia la parte menos densa.

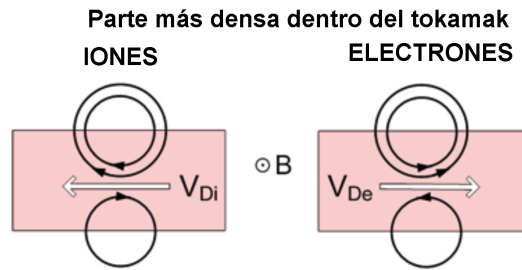


Figura 3.4: Deriva diamagnética de los iones y los electrones en la parte de mayor densidad en el tokamak. Fuente:[2].

Como la densidad de fondo es más grande en el centro, la velocidad de deriva hará más densa la parte de la oscilación del plasma que ya era densa y adquirirá mayor densidad, lo cual hará que la onda se haga más alta en esa parte.

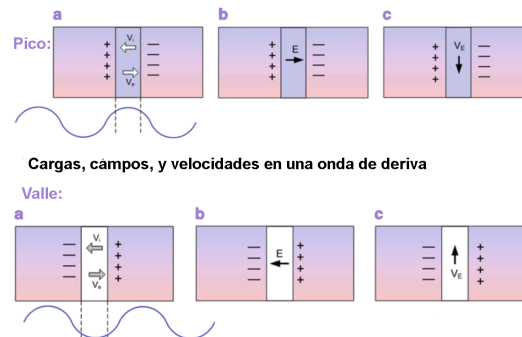


Figura 3.5: Movimiento de las cargas, campos y velocidades en una onda de deriva. En el pico de una onda (arriba), en el valle de una onda (abajo). La región más densa del plasma (la parte del centro) se encuentra arriba y la menos densa (el borde) se encuentra abajo. Fuente:[2].

Cuando pase un valle de la onda las derivas diamagnéticas producirán una acumulación de cargas opuestas que en el caso anterior, así el campo eléctrico que se cree será en la otra dirección y por tanto la velocidad de deriva ahora se dirigirá hacia la parte interna del plasma, causando ahora que el valle de onda se haga mucho más abajo, con la densidad siendo más baja lo cual se sumará al crecimiento de la onda. Esto es una **onda de deriva**. Ver Figura 3.5.

Al promediarse los ciclos de la onda, se verá que se mueve más densidad hacia abajo, cuando está en las crestas, que la que se pierde cuando está en los valles y provocará que la onda mueva a esa parte del plasma hacia lo menos denso, alejándose del centro, y por tanto hacia la pared. [2]

Las ondas de deriva son una inestabilidad muy importante porque provocan pérdidas enormes de plasma.

Cuando la onda de deriva inestable provoca turbulencia se produce transporte anómalo. Existen métodos para tratar de estabilizar al plasma viendo qué fluctuaciones se pueden suprimir, pero no es tan sencillo. Métodos computarizados pueden ser de mucha ayuda, ya que como hay turbulencia las ecuaciones que se tendrían que resolver siempre van a ser no lineales. En ocasiones se pueden hacer cálculos que no necesitan resolver ecuaciones ya que se puede lograr algo con tan sólo seguir las trayectorias de las partículas para ver hasta donde pueden llegar [2].

### 3.4.2. Cizallamiento

En la sección que describe a los aparatos de confinamiento magnético se mencionó al factor de seguridad  $q$ . Las derivas verticales surgen cuando se le da la forma toroidal al aparato de confinamiento, y además la corriente que circula toroidalmente en el tokamak genera un campo magnético poloidal que hace que las líneas se tuerzan. El factor de seguridad  $q$  indica qué tanto enrollamiento o torsión tienen las líneas de campo y muestra qué tan estable es el plasma en el tokamak. Si  $q > 1$  el plasma es estable, si  $q < 1$  será inestable.

Para ver más claro lo anterior, si  $q = 1$  una línea de campo va a enrollarse alrededor del toro en dirección poloidal exactamente una vez pero no sin antes haber dado una vuelta completa toroidalmente hasta llegar al mismo punto en el que comenzó la vuelta. Y así, si  $q = 2, 3, 4$  o las que sean, le tomará ese mismo número de vueltas toroidalmente para volver a donde comenzó.

En los aparatos reales  $q$  casi nunca es un número racional, lo que querrá decir que una línea de campo casi nunca va a enrollarse otra vez sobre sí misma, más bien dará muchas vueltas y éstas no se podrán numerar porque irá recorriendo la superficie magnética cubriéndola densamente.

Las líneas de campo no son paralelas entre sí al encontrarse en diferentes superficies magnéticas, o lo que es lo mismo, el campo magnético debe ser “cizallado”. El factor de

seguridad está en función del radio menor,  $q(r)$ . Esta cizalla magnética logra detener un poco las inestabilidades del plasma.

Para reducir las inestabilidades que llegan a producir turbulencia, el ángulo de torsión de las líneas de campo debe variar rápidamente con el radio y así aumentar la cizalla [2].

### 3.4.3. Flujos zonales

Las micro inestabilidades en el aparato se pueden desarrollar en un estado turbulento formado por flujos zonales, que son un tipo de turbulencia autolimitante en los tamaños de los remolinos que se forman [2].

Los campos que crean las ondas de deriva causan flujo hacia adentro y afuera del tokamak en dirección radial. Como la turbulencia toma diferentes formas, estas derivas adicionales se crean en diferentes capas radiales formando así los flujos zonales en dirección poloidal. Estos flujos son derivas  $\vec{E} \times \vec{B}$  impulsadas por las cargas contrarias en los límites de cada zona, que se rompen para formar pequeñas celdas convectivas y son aproximadamente del tamaño de un radio de Larmor de ancho. La turbulencia por tanto es la que crea los flujos [2].

### 3.4.4. Barreras de Transporte

El logro de descubrir las barreras de transporte dentro de los tokamaks es de gran beneficio. Ya que son un concepto teórico que sirve para, de alguna manera, detener eficazmente el transporte de plasmas hacia las paredes que se localizan en una región específica. Como ya se vio estas pérdidas las causan las inestabilidades y turbulencia. Hay diferentes maneras de producir barreras de transporte. Las dos más importantes son: debidas a flujos zonales y produciendo un cizallamiento negativo (implicando que  $q(r)$  pasa por un mínimo o máximo)

Cuando la función  $q(r)$  llega a un mínimo, la cizalla tanto del campo magnético como en la deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  poloidal, es tan fuerte que la mayoría de las inestabilidades junto con la difusión anómala se detienen, como si hubiera una pared en medio del plasma [2].

Para crear una buena barrera la corriente debe manipularse tal que no alcance un pico en el centro. Así se puede ir ajustando la corriente en las bobinas a través del calentamiento óhmico y usando ondas para impulsar corrientes adicionales [2].

Es así como se pudo predecir teóricamente que el cizallamiento y las barreras de transporte pueden reducir significativamente la pérdida de plasma.

El propósito de esta tesis es justamente ver cómo las barreras de transporte ayudan a reducir la turbulencia, o en términos más específicos, reducir la difusión global que pueda presentarse cuando un plasma bajo ciertas condiciones es sometido a diferentes niveles de turbulencia [2].

# Aproximación de centro guía $\vec{E} \times \vec{B}$ con efectos de radio finito de Larmor y sistemas Hamiltonianos

El estudio del transporte anómalo en plasmas confinados en intensos campos magnéticos se puede tratar de diferentes maneras. Esta tesis se basa en el trabajo de los artículos [12] y [13], en donde se utiliza el modelo de partícula de prueba. Además las partículas siguen la aproximación  $\vec{E} \times \vec{B}$  de su centro guía. Como es importante tomar en cuenta a las partículas muy energéticas, a los cálculos del modelo mencionado se le agregan también los efectos que se crean debido al radio finito de Larmor en la trayectoria que llevan.

Ya que el plasma se supondrá como una colección de partículas que se mueven en dos dimensiones, la dinámica descrita por sus ecuaciones de movimiento se puede expresar con sistemas Hamiltonianos [14].

En esta sección se hará una breve descripción de las propiedades de sistemas Hamiltonianos para luego aplicarlo al problema de interés a este trabajo, que es la dinámica de partículas bajo la influencia de campos eléctricos fluctuantes, asociados a la turbulencia y a campos eléctricos radiales que producen flujos poloidales en una geometría toroidal. Aunque el interés es en plasmas toroidales se tomará la aproximación de geometría de placa (cartesiana).

## 4.1. Ecuaciones de sistemas Hamiltonianos

La dinámica de los sistemas Hamiltonianos se basa en encontrar las ecuaciones y las respectivas soluciones de sistemas mecánicos clásicos. A continuación se describirán brevemente algunos conceptos de sistemas Hamiltonianos.

El estado de un sistema Hamiltoniano se puede observar en un espacio al que se le llama *espacio fase*. Todos los posibles estados de las variables de posición y momento corresponden a un punto único en el espacio fase del sistema en cuestión y su evolución en el tiempo se representa por una curva en este espacio.

Se tiene un sistema mecánico que se describe usando las coordenadas del espacio fase  $\vec{r} = (q, p)$ , con  $q$  siendo las coordenadas generalizadas del sistema y  $p$  el momento conjugado. Con  $p, q \in \mathbb{R}^n$ .

Y se tiene que,

$$H = H_0(q, p). \tag{4.1}$$

describe un sistema Hamiltoniano integrable de un grado de libertad,  $n = 1$ .

Que sea integrable significa que existen constantes de movimiento (o integrales primeras). Y además, todos los sistemas autónomos de 1 grado de libertad (que no dependen del

tiempo) son integrables.

Pero si ahora se tiene el sistema Hamiltoniano de 1 grado y medio de libertad:

$$H = H_0(q, p) + H_1(q, p, t). \quad (4.2)$$

con  $H_1$  siendo una perturbación dependiente del tiempo, el sistema ya no va a ser integrable y por tanto su comportamiento se volvería globalmente caótico. Hay varios métodos que permiten encontrar las soluciones a estos sistemas no integrables, y así entender la dinámica de su transición al caos [12].

Se puede hacer un cambio a coordenadas con variables de acción-ángulo  $(J, \theta)$  en  $H_0$ . Este cambio, dentro de un sistema Hamiltoniano cerrado y acotado, sirve para encontrar un par de variables tal que las coordenadas conjugadas,  $\theta$ , incrementen por  $2\pi$  después de cada periodo de movimiento [15].

Mediante una serie de cálculos, la transformación ya integrable se reduce a un cambio canónico (de variables de ángulo y acción), es decir,  $H_0(q, p) \rightarrow H_0(J)$ , ya que:

$$\dot{J} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = \Omega(J) \quad (4.3)$$

De esta forma

$$J = J_0, \quad \theta = \theta_0 + \Omega(J_0)t \quad (4.4)$$

Donde  $(J_0, \theta_0)$  es la condición inicial y  $\Omega$  la frecuencia sin perturbación.

Finalmente, el Hamiltoniano perturbado en las nuevas variables es:

$$H = H_0(J) + H_1(J, \theta, t). \quad (4.5)$$

El espacio donde están las soluciones se encuentra dentro de una variedad topológica toroidal, que son representadas a través de curvas que se encuentran sobre toros invariantes anidados. Por el teorema de Liouville-Arnold el espacio fase de  $H_0$  son una foliación de toros. Los sistemas dinámicos cuyas soluciones no pueden obtenerse directamente de integrar las ecuaciones se pueden resolver gracias al trabajo de Poincaré (1892), que dio con la forma de describir estos sistemas que son llamados no integrables. Con lo mencionado anteriormente se puede decir que al observar la sección de Poincaré de algunos de estos toros, se pueden ver los puntos que cada curva deja, en forma de espacio fase [16]. Como en la Figura 4.2.

El movimiento de  $H_0$  representado por las trayectorias que forman las curvas confinadas en el espacio fase es periódico en cada coordenada, ya que regresan al mismo punto del espacio fase (donde  $p$  y  $q$  son las coordenadas) después de un periodo de  $2\pi/\omega$ , siendo  $\omega$  la frecuencia de movimiento para completar un ciclo. Para dos o más grados de

libertad las trayectorias del sistema integrable se puede mostrar, a través del Teorema de Liouville-Arnold, que están sobre toros (o hipertoros) invariantes y, si el espacio es acotado, para visualizar la dinámica se toma el producto directo de toros,  $\mathbb{T}^2 = S_1 \times S_2$ , o en otras palabras se toma la intersección del toro con el espacio fase de uno de los grados de libertad. El que el toro sea invariante significa que cada punto en el espacio fase sobre el toro permanecerá todo el tiempo en ese mismo toro. De esta forma, las variables de acción-ángulo, (4.4) son el par de variables conjugadas tales que en las variables de ángulo  $(J_i, \theta_i)$ , incrementen  $\theta_i$  en  $2\pi$  cada que se completa un periodo de movimiento [15].

Considerando ahora dos grados de libertad (o pudiendo ser más) en el sistema integrable, es decir, cuando  $H_0(J_1, J_2)$ , ocurre que similar a las ecuaciones (4.3), se pueden obtener las frecuencias  $\omega_i$  para cada grado de libertad independiente:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \omega_1, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \omega_2 \quad (4.6)$$

Y de acuerdo a esto se obtiene la frecuencia  $\Omega$ , que es la pendiente de las líneas rectas que forman las  $\omega_i$  en su respectivo espacio fase. Entonces:

$$\Omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (4.7)$$

Para un toro con una órbita que tiene un conjunto de frecuencias  $\omega_i$  (para cada grado de libertad), si la razón entre frecuencias, sea  $\omega_1/\omega_2$  es irracional, entonces el movimiento nunca se va a repetir sobre la misma órbita, o sobre sí mismo. A estas órbitas se les llama “cuasiperiódicas”. De esta forma, una sola órbita va a cubrir densamente (por completo) al toro.

Pero si la razón entre las frecuencias resulta ser racional, el movimiento eventualmente se repetirá a sí mismo, llamándoles a estas “órbitas cerradas” (o periódicas).

Así que, al agregar diferentes perturbaciones al sistema, como en la ecuación (4.2), hay que considerar dos efectos posibles: 1) que la perturbación sólo deforme al toro. 2) que la perturbación rompa al toro, lo que puede originar movimiento irregular se vuelva caótico (globalmente) ya que presenta fenómenos homoclínicos y heteroclínicos, lo cual se explicará más adelante [16].

### **Teorema de KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) explicado**

El teorema expresa que si la perturbación es lo suficientemente pequeña, algunos toros invariantes persistirán en el espacio fase del sistema Hamiltoniano perturbado, en el caso de (4.2), la perturbación es  $H_1$ . Siempre y cuando se cumpla la condición de no degeneración, es decir,  $\frac{d\Omega}{dJ}$  diferente de cero. Además, los toros invariantes que primero se van a romper son los que tienen número de rotación  $(\frac{\omega_1}{\omega_2})$  racional [16]. Los toros siempre se van a romper, no importa qué tan pequeña sea la perturbación que se le agregue.

Los toros que van a persistir bajo perturbaciones son los que contienen órbitas cuasiperiódicas [15].

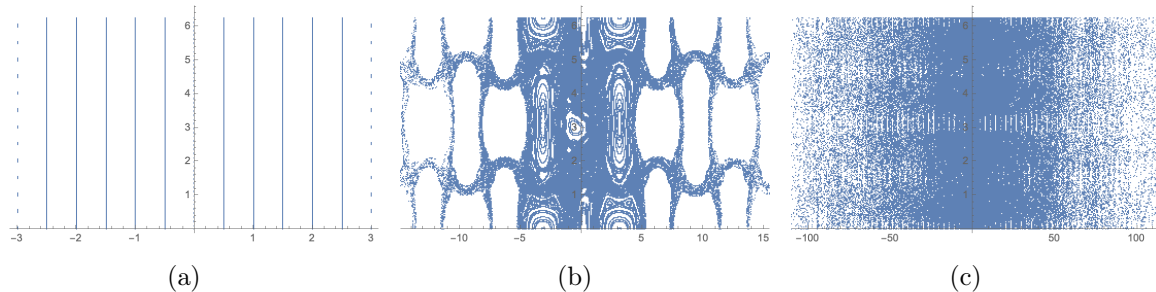


Figura 4.1: Espacios fase que muestran el comportamiento de un sistema en tres distintas condiciones. (a) Sistema Hamiltoniano sin perturbación. (b) Sistema Hamiltoniano en el umbral de perturbación, inicia la estocasticidad. (c) Sistema Hamiltoniano perturbado, en donde se observa la región completamente caótica.

El teorema de KAM no menciona nada acerca del cómo se van a comportar los toros con razón de frecuencia irracional, que son los que de alguna forma van a ser destruidos bajo la perturbación. Estos toros son la clave para entender a los sistemas no integrables que tiendan al comportamiento caótico [15]. Los toros con frecuencia racional se convierten en resonancias.

Dentro de un espacio fase, si se representa algún sistema descrito por las ecuaciones (4.4), las líneas que arroja son las curvas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) que son círculos, órbitas o líneas invariantes.

### Transición al caos y sistemas Hamiltonianos con y sin torsión

La transición al caos consiste en determinar cómo evolucionan las órbitas o toros invariantes hasta el momento en que se deforman o terminan rompiéndose debido a la perturbación que se le agregó al sistema. Como ejemplo se puede observar la Figura 4.1 que muestra el comportamiento de un sistema Hamiltoniano, convertido a mapeo simpléctico (más adelante se explicará esto) en tres diferentes casos. a) Cuando el sistema no tienen ninguna perturbación, b) cuando está en el umbral de perturbación y al final c) cuando la región ya se volvió globalmente caótica.

La determinación de las órbitas que serán deformadas o destruidas conforme evoluciona el sistema es uno de los problemas que tratarán de resolverse en este trabajo. El que los círculos invariantes se mantengan o se lleguen a romper depende del grado de irracionalidad de  $\Omega(J_0)$ . Hay métodos para resolver este problema, los cuales dependen de las características del Hamiltoniano respecto a su variación con  $J$ . En el caso más



sencillo de analizar se cumple la condición de no degeneración, también conocida como condición de *torsión* (es muy común llamarle también por su nombre en inglés: condición de twist), que es, para toda  $J$ :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial J} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \neq 0. \quad (4.8)$$

Esta ecuación quiere decir que un cambio en la energía implica un cambio en la frecuencia de perturbación y por tanto en el periodo. Se le llama de no degeneración porque básicamente garantiza que el punto en el se evalúe no hay un máximo o mínimo en el número de rotación,  $\Omega$ , por lo que éste varía de manera monótona y no habrá dos coordenadas  $J$  que tengan el mismo valor de  $\Omega$ .

Existen Hamiltonianos que sí cumplen con la condición (4.8), llamados **Hamiltonianos de torsión** (Hamiltonianos twist, en inglés) pero también hay muchos otros que no, a estos se les llama **Hamiltonianos sin torsión** (o Hamiltonianos nontwist).

Este último tipo de Hamiltonianos ayudan a resolver problemas de transporte relevantes a los plasmas porque están caracterizados por tener un curvas de cizalla nula (donde  $\frac{\partial \Omega}{\partial J} = 0$ , aquí el cambio de energía no implica un cambio en la perturbación), que son barreras muy robustas de transporte y surgen a partir de la existencia de flujos no monótonos (de los que se hablará más adelante) que se producen en los plasmas y ayudan de alguna forma a reducir el transporte caótico en el sistema.

En donde ocurren las curvas de cizalla nula, que es donde se viola la condición de torsión, están las curvas KAM que son más resistentes a romperse. Ahí puede tenerse una región caótica en cada lado de la curva, donde ya se han roto todas las curvas KAM pero no se mezclan las dos regiones caóticas, mientras la curva de cizalla nula se mantenga íntegra.

La presencia de curvas sin cizalla puede dar pie a la aparición de bifurcaciones, lo cual consiste en la aparición de nuevas curvas de cizalla nula al variar algún parámetro. En secciones más adelante se describirán con detalle las implicaciones de tener flujos zonales no monótonos en el mapeo.

La robustez de la curva sin cizalla y las barreras de transporte que forman son fundamentales para el estudio del transporte en Hamiltonianos sin torsión [12]. Esto ocurre en 2 grados de libertad, pues para 3 o más grados de libertad los toros no son barreras ya que no separan al espacio en 3 o más dimensiones.

Cuando el Hamiltoniano es de torsión, la barrera de transporte la determina la última curva KAM que se rompe debido a la perturbación.

Para ambos tipos de Hamiltonianos existen métodos para encontrar las barreras de transporte. Esta tesis trata justamente de eso, describir un método para la determinación de los parámetros en que se forman las barreras de transporte para dos tipos de mapeos.

### 4.1.1. Sistemas Hamiltonianos y mapeos simplécticos

Los mapeos son en esencia transformaciones discretas de un dominio de dos dimensiones hacia el mismo y que se llevan a cabo dentro de los espacios fase y son generados por flujos Hamiltonianos en los que se toma un punto, digamos  $x_i$  y la transformación lo lleva a un nuevo punto  $x_{i+1}$ .

Para un mapeo  $M$ , en dos dimensiones, la transformación se representa así:

$$\bar{x}_{i+1} = M(\bar{x}_i)$$

donde  $\bar{x}_i = (x_i, y_i)$  denota algún punto del dominio sobre la  $i$ -ésima iteración.

Para que preserven áreas se necesita que el Jacobiano de la transformación de  $x_i$  a  $x_{i+1}$  sea igual a 1 [17].

Es decir,

$$\left| \frac{\partial \bar{x}_{i+1}}{\partial \bar{x}_i} \right| = 1. \quad (4.9)$$

A estas transformaciones que preservan áreas se les llama “mapeos simplécticos”, y son muy útiles porque exhiben un gran número de propiedades de los sistemas Hamiltonianos no integrables [15].

Un mapeo con una perturbación  $(f, g)$  se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Omega(y_{i+1}) + f(x_i, y_{i+1}). \\ y_{i+1} &= y_i + g(x_i, y_{i+1}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

En este caso,  $\Omega$ , de forma similar que en (4.8), dependiendo si es monótona o no, determinará si el mapeo es con torsión o sin torsión.

La ecuación de no degeneración para sistemas Hamiltonianos se describió en (4.8), análogamente para mapeos , como (4.10), la ecuación que aplica en este caso sería:

$$\frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \neq 0. \quad (4.11)$$

la cual satisface la condición de torsión.

## Mapeos con torsión

Los sistemas Hamiltonianos que son integrables indican que sus ecuaciones siempre podrán integrarse directamente y así representarse mediante curvas invariantes en alguna variedad topológica del espacio fase. La topología que tendrán será la de un toroide en donde las órbitas o curvas que representan a las soluciones se enredarán alrededor del toro.

Aunque el espacio fase para un sistema de 2 grados de libertad es de cuatro dimensiones, las trayectorias se pueden visualizar en un plano de dos dimensiones como puntos de la trayectoria que intersectan una superficie donde dos de las coordenadas del espacio fase son constantes. Estas superficies se les llama “secciones de Poincaré”.

En cada toro, las órbitas lo recorren dando un cierto número de vueltas en la dirección larga,  $n_1$ , por un número de vueltas en la dirección corta,  $n_2$ . El cociente se llama *número de rotación* y puede ser racional o irracional. En el primer caso las órbitas se cierran pero en el segundo cubren al toro densamente. En cada toro el número de rotación es constante pero cambia de toro en toro. Cuando esta variación es monótona el mapeo se dice que tiene torsión.

En  $\mathbb{R}^4$ , la superficie de energía constante es una variedad de dimensión 3, de esta forma el mapeo de Poincaré se hace sobre esta variedad. Si se denotan las condiciones iniciales de una órbita como  $p_x, x, E$  y  $y = 0$ , entonces en la superficie se denotará como un punto  $X_0$  y las siguientes intersecciones serán  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Que serán representados como puntos en la sección de Poincaré, correspondientes a cada vez que la órbita pasa por  $y = 0$ . [15] Ver Figura 4.2.

## Mapeos sin torsión

En los mapeos sin torsión,  $\Omega$  no es monótona y esto implica que puede haber dos o más toros con el mismo número de rotación. Esta degeneración permite que se tengan órbitas similares en toros alejados. A las superficies donde se viola la condición (4.8) se les llama curva o superficie de cizalla nula.

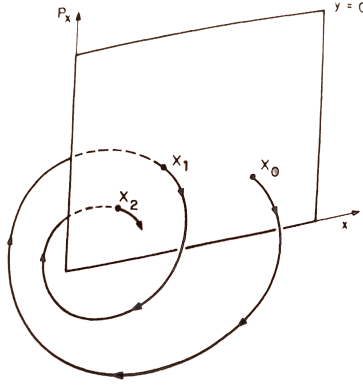


Figura 4.2: Sección de Poincaré que representa las intersecciones de la órbita en el plano siguiendo las condiciones iniciales aplicadas.

## De sistemas Hamiltonianos a mapeos simplécticos

Se asocian las variables  $p$  y  $q$ , vía una transformación simpléctica a las de acción-ángulo  $J$  y  $\theta$ , respectivamente, en un sistema Hamiltoniano. El mapeo se genera al ir evolucionando las trayectorias, la secuencia temporal es la que se identifica con los índices  $i$  en el mapeo  $(x_i, y_i)$ .

La función  $\Omega$  es la frecuencia del Hamiltoniano  $H_0$ , es decir, la ec. (4.8). Las funciones  $f$  y  $g$  representan la perturbación  $H_1$  [17].

### 4.1.2. Modelo de partícula prueba con Hamiltoniano giropromediado

El sistema Hamiltoniano que se tratará en este trabajo consiste en describir el transporte de una partícula de prueba dentro de un plasma fuertemente magnetizado y por el momento se ignorarán los efectos del radio finito de Larmor en primera aproximación. La dinámica será determinada por la ecuación del centro guía con la deriva eléctrica,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (4.12)$$

En donde el centro guía de la partícula en coordenadas cartesianas es  $\vec{r} = (x, y)$ , con un campo magnético constante  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  y un campo electrostático  $\vec{E} = -\nabla\phi'(x, y, t)$ .

Resolviendo la ecuación (4.12), vemos que del lado izquierdo tendríamos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x, y)}{dt}. \quad (4.13)$$

y del lado derecho

$$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{-\nabla\phi'(x, y, t) \times B_0\hat{z}}{B^2} = \frac{-\nabla\phi'(x, y, t) \times \hat{z}}{B_0} \quad (4.14)$$

Y al resolver el producto cruz, considerando que  $\frac{-\partial\phi'}{\partial z} = 0$ , se tiene:

$$\frac{-\nabla\phi'(x, y, t) \times \hat{z}}{B_0} = \frac{1}{B_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{\partial\phi'}{\partial x} & -\frac{\partial\phi'}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{B_0} \left( -\frac{\partial\phi'}{\partial y}\hat{x} + \frac{\partial\phi'}{\partial x}\hat{y} \right) \quad (4.15)$$

Juntando las expresiones (4.13) y (4.15), tendremos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (4.16)$$

por conveniencia el potencial se normalizó tal que  $\phi = \frac{\phi'}{B}$ .

La expresión anterior es equivalente a un sistema dinámico Hamiltoniano, en donde el potencial electrostático juega el papel del Hamiltoniano del sistema y las coordenadas  $(x, y)$  el de las variables canónicas conjugadas del espacio fase [12].

El espectro de ondas escogido para el potencial llevará toda la información de la dinámica de las partículas, considerando sólo la interacción onda-partícula.

En este trabajo se va a considerar un espectro de ondas que consiste en un número infinito de ondas de deriva que se propagan en la dirección  $y$ , cuya dirección se puede asociar con la dirección poloidal en un tokamak, y una variación oscilatoria sobre el eje  $x$ , asociada con la dirección radial en un tokamak.

El potencial electrostático será,

$$\phi(x, y, t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \cos(y + \theta_n - nt). \quad (4.17)$$

Para introducir un desfase de  $\frac{\pi}{2}$  entre las ondas, tendremos que [18],

$$\theta_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par.} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Las ondas tendrán el mismo número de onda  $k$ , misma amplitud  $A$  y diferentes velocidades de fase que van a ser múltiplos de la frecuencia fundamental  $\omega_c$ . De esta forma se normalizarán las variables:  $\phi_1$  es la amplitud de onda del potencial eléctrico,  $x$  y  $y$  son  $kx$  y  $ky$  y  $t$  es  $\omega_0 t$ .

Este potencial puede dar lugar a un mapeo procediendo de la siguiente forma.

En los siguientes cálculos se hará uso de las siguientes identidades trigonométricas,

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y). \quad (4.19)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y). \quad (4.20)$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \quad (4.21)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(nt) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m). \quad (4.22)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos(nt) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m+1)\pi). \quad (4.23)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(nt) = 0. \quad (4.24)$$

Partimos del potencial (4.17) que al usar la identidad (4.19),

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) [\cos(y + \theta_n) \cos(nt) + \sin(y + \theta_n) \sin(nt)] \\ &= A \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \cos(y + \theta_n) \cos(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \sin(nt) \sin(y + \theta_n) \right]. \end{aligned}$$

La segunda parte de la suma se vuelve cero por la identidad (4.24) y usando (4.21)

$$\begin{aligned} &= A \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\cos(x+y+2\theta_n) + \cos(x-y)}{2} \right) \cos(nt) \right] \\ &= \frac{A}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x+y+\theta_n) \cos(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x-y) \cos(nt) \right] \end{aligned}$$

Usando la condición (4.18), ocurre que  $\cos(x + y + \theta_n)$  cuando  $n$  es par,  $\cos(x + y)$  y cuando  $n$  es impar es  $\cos(x + y + \pi) = -\cos(x + y)$ , por tanto:

$$= \frac{A}{2} [\cos(x + y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos(nt) + \cos(x - y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(nt)]$$

Y sustituyendo por las identidades (4.22) y (4.23) tenemos:

$$= \frac{A}{2} [\cos(x + y) 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) + \cos(x - y) 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m)]$$

Finalmente se llega a la expresión del potencial electrostático en términos de sumas de saltos por periodos de la frecuencia fundamental  $\omega_0$ , usando funciones delta de Dirac,

$$\phi(x, y, t) = \pi A \cos(x + y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) + \pi A \cos(x - y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m). \quad (4.25)$$

El siguiente paso es sustituir esta expresión en las ecuaciones de movimiento (4.16). Primero se resolverá  $\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} [\pi A \cos(x + y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) + \pi A \cos(x - y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m)] \\ &= -[\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \frac{\partial}{\partial y} (\cos(x + y)) + \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \frac{\partial}{\partial y} (\cos(x - y))]. \end{aligned}$$

La derivada queda como,

$$\frac{dx}{dt} = +\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \operatorname{sen}(x + y) - \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \operatorname{sen}(x - y). \quad (4.26)$$

La siguiente ecuación a resolverse es  $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ .

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\pi A \cos(x + y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) + \pi A \cos(x - y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m)]$$

$$= \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x + y)) + \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x - y))$$

La derivada queda como,

$$\frac{dy}{dt} = -\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \operatorname{sen}(x + y) - \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \operatorname{sen}(x - y). \quad (4.27)$$

Al sumar las expresiones (4.26) y (4.27) se tendrá,

$$\begin{aligned} \frac{d(x + y)}{dt} &= +\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \operatorname{sen}(x + y) - \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \operatorname{sen}(x - y) \\ &\quad - \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \operatorname{sen}(x + y) - \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \operatorname{sen}(x - y). \end{aligned}$$

Y al restar las mismas expresiones se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{d(x - y)}{dt} &= +\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \operatorname{sen}(x + y) - \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \operatorname{sen}(x - y) \\ &\quad + \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m + 1)\pi) \operatorname{sen}(x + y) + \pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \operatorname{sen}(x - y). \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cambio,

$$x_{\pm} = x \pm y.$$

Y reducir las dos ecuaciones anteriores, quedarán en su forma final así,

$$\frac{d(x_+)}{dt} = -2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x_-) \delta(t - 2\pi m). \quad (4.28)$$

$$\frac{d(x_-)}{dt} = 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x_+) \delta(t - (2m + 1)\pi). \quad (4.29)$$

Las ecuaciones de movimiento en términos de las funciones de Dirac permite reducir las a mapeos de dos pasos, uno por cada ecuación.



### 4.1.3. Transformación de las ecuaciones de movimiento a mapeos simplécticos

#### Ecuaciones de movimiento a mapeo de 1 paso

La función delta de Dirac se utiliza para describir saltos, es por eso que da lugar a variaciones discretas que se pueden representar por mapeos iterativos.

Para la ec. (4.28), el que la función sea  $\delta(t - 2\pi m)$  quiere decir que al tiempo  $t = t_{2m} = 2\pi m$ ,  $x_-$  de la ec. (4.29) se quedará constante mientras que  $x_+$  dará un salto. Estos saltos se calculan mediante integrales que en seguida se calcularán.

El diagrama de la figura 4.3 muestra explícitamente los saltos que dan las funciones delta cada que se encuentra en algún múltiplo entero par de  $\pi$  (en líneas rojas).

Para integrar sobre cada salto se toman los tiempos:

$$\begin{aligned} t_{2m}^+ &= t_{2m} + \varepsilon. \\ t_{2m}^- &= t_{2m} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Donde  $\varepsilon$  indica la longitud infinitesimal a cada lado del salto de la función delta.

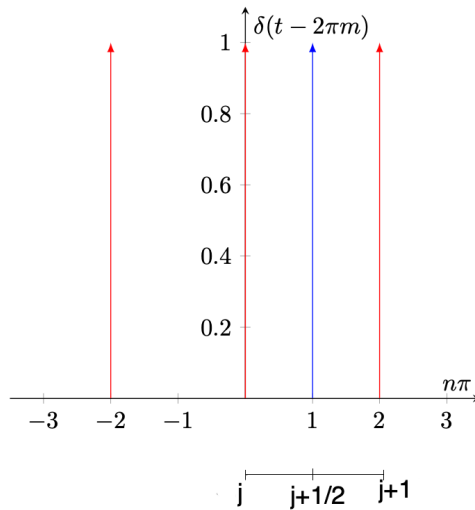


Figura 4.3: Esquema que muestra los saltos de la función  $\delta(t - 2\pi m)$  con base en la ecuación (4.28).

La integral de la función constante cuando  $t_{2m}$  será,

$$\int_{t_{2m}^-}^{t_{2m}^+} \frac{d(x_-)}{dt} dt = 2\pi A \int_{t_{2m}^-}^{t_{2m}^+} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin(x_+) \delta(t - (2m + 1)\pi) dt \Rightarrow \int_{t_{2m}^-}^{t_{2m}^+} d(x_-) = 0$$

$$\Rightarrow x_-(t_{2m} + \epsilon) - x_-(t_{2m} - \epsilon) = 0. \quad (4.30)$$

La integral de  $x_+$  de (4.28) será,

$$\int_{t_{2m}-\epsilon}^{t_{2m}+\epsilon} \frac{d(x_+)}{dt} dt = -2\pi A \int_{t_{2m}-\epsilon}^{t_{2m}+\epsilon} \text{sen}(x_-) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) dt. \quad (4.31)$$

El lado izquierdo de (4.31) será,

$$\int_{t_{2m}-\epsilon}^{t_{2m}+\epsilon} \frac{d(x_+)}{dt} dt = x_+(t_{2m} + \epsilon) - x_+(t_{2m} - \epsilon) \quad (4.32)$$

Y del lado derecho de (4.31),

$$-2\pi A \int_{t_{2m}-\epsilon}^{t_{2m}+\epsilon} \text{sen}(x_-) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) dt = -2\pi A \int_{t_{2m}-\epsilon}^{t_{2m}+\epsilon} \text{sen}(x_-) [\delta(0) + \delta(t + 2\pi) + \delta(t - 2\pi) + \delta(t + 4\pi) + \delta(t - 4\pi) + \dots] dt = -2\pi A \text{sen}(x_-(t_{2m})) \quad (4.33)$$

$$\delta(t + 2\pi) + \delta(t - 2\pi) + \delta(t + 4\pi) + \delta(t - 4\pi) + \dots] dt = -2\pi A \text{sen}(x_-(t_{2m})) \quad (4.34)$$

La última igualdad se debe a las propiedades de la función delta.

Igualando ecuaciones (4.32) y (4.33) se tendrán las primeras ecuaciones del nuevo mapeo,

$$x_+(t_{2m} + \epsilon) - x_+(t_{2m} - \epsilon) = -2\pi A \text{sen}(x_-(t_{2m})).$$

El mapeo completo, con (4.30) y una notación más reducida, se tendrá,

$$x_+(t_{2m}^+) - x_+(t_{2m}^-) = -2\pi A \text{sen}(x_-(t_{2m}^-)). \quad (4.35)$$

$$x_-(t_{2m}^+) - x_-(t_{2m}^-) = 0. \quad (4.36)$$

El procedimiento será similar ahora para la ecuación (4.29), pero ahora con los saltos en tiempos igual a  $t = t_{2m+1} = (2m + 1)\pi$ . Ver figura 4.4. Así:

$$t_{2m+1}^+ = t_{2m+1} + \epsilon.$$

$$t_{2m+1}^- = t_{2m+1} - \epsilon.$$

La integral de la función constante cuando  $t_{2m+1}$  será,

$$\int_{t_{2m+1}-\epsilon}^{t_{2m+1}+\epsilon} \frac{d(x_+)}{dt} dt = 2\pi A \int_{t_{2m+1}-\epsilon}^{t_{2m+1}+\epsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_+) \delta(t - 2\pi m) dt \quad \Rightarrow$$

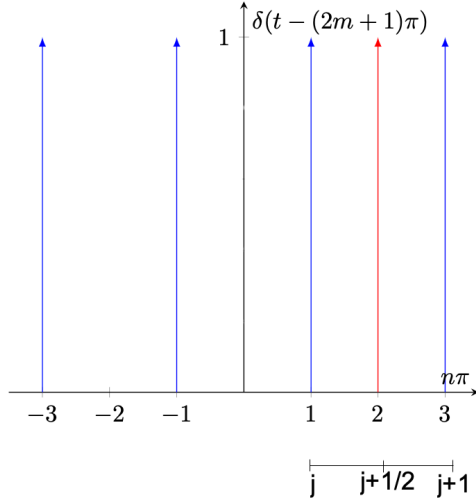


Figura 4.4: Esquema que muestra los saltos de la función  $\delta(t - (2m + 1)\pi)$  con base en la ecuación (4.29).

$$\Rightarrow x_+(t_{2m+1} + \epsilon) = x_+(t_{2m+1} - \epsilon). \quad (4.37)$$

La integral de  $x_-$  en ec. 4.29 será,

$$\int_{t_{2m+1}-\epsilon}^{t_{2m+1}+\epsilon} \frac{d(x_-)}{dt} dt = 2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_+) \delta(t - (2m + 1)\pi)$$

El lado izquierdo quedará,

$$\int_{t_{2m+1}-\epsilon}^{t_{2m+1}+\epsilon} \frac{d(x_-)}{dt} dt = x_-(t_{2m+1} + \epsilon) - x_-(t_{2m+1} - \epsilon) \quad (4.38)$$

Y del lado derecho,

$$2\pi A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_+) \delta(t - (2m + 1)\pi) = 2\pi A \int_{t_{2m+1}-\epsilon}^{t_{2m+1}+\epsilon} \text{sen}(x_+) [\delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi) + \delta(t + 3\pi) \quad (4.39)$$

$$+ \delta(t - 5\pi) + \delta(t + 5\pi) + \dots] dt \quad (4.40)$$

$$= 2\pi A \int_{t_{2m+1}-\epsilon}^{t_{2m+1}+\epsilon} \text{sen}(x_+(t)) \delta(t - (2m + 1)\pi) dt. \quad (4.41)$$

$$= 2\pi A \text{sen}(x_+(t_{2m+1})) \quad (4.42)$$

La última igualdad se debe a las propiedades de la función delta.

Igualando ecuaciones (4.38) y (4.39), las otras ecuaciones del nuevo mapeo serán,

$$x_-(t_{2m+1} + \varepsilon) - x_-(t_{2m+1} - \varepsilon) = 2\pi A \text{sen}(x_+(t_{2m+1})).$$

Junto a (4.37) y con una notación más reducida, se tendrá,

$$x_-(t_{2m+1}^+) - x_-(t_{2m+1}^-) = 2\pi A \text{sen}(x_+(t_{2m+1}^+)). \quad (4.43)$$

$$x_+(t_{2m+1}^+) - x_+(t_{2m+1}^-) = 0. \quad (4.44)$$

### Transformación del mapeo de 2 pasos a mapeo de 1 paso

El mapeo que se acaba de obtener, que es de dos pasos, puede reducirse a un mapeo con ecuaciones más directas, que es al que se le llamaría de 1 paso.

A continuación se hará la reducción para obtener el mapeo de un paso.

#### MAPEO DE 2 PASOS

$$\left. \begin{aligned} x_+(t_{2m}^+) - x_+(t_{2m}^-) &= -2\pi A \text{sen}(x_-(t_{2m}^-)) \\ x_-(t_{2m}^+) - x_-(t_{2m}^-) &= 0 \\ x_-(t_{2m+1}^+) - x_-(t_{2m+1}^-) &= 0 \\ x_+(t_{2m+1}^+) - x_+(t_{2m+1}^-) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Movimiento sobre } x - y = \text{cte} \quad (4.45)$$

$$\left. \begin{aligned} x_-(t_{2m+1}^+) - x_-(t_{2m+1}^-) &= 2\pi A \text{sen}(x_+(t_{2m+1}^+)) \\ x_+(t_{2m+1}^+) - x_+(t_{2m+1}^-) &= 0 \\ x_+(t_{2m}^+) - x_+(t_{2m}^-) &= 0 \\ x_-(t_{2m}^+) - x_-(t_{2m}^-) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Movimiento sobre } x + y = \text{cte} \quad (4.46)$$

En donde es importante notar lo siguiente,

$$x_{\pm}(t_{2m}^+) = x_{\pm}(t_{2m+1}^-). \quad (4.47)$$

Este mapeo puede convertirse a uno de un paso, mediante los siguientes cálculos.

Se hará una nueva sustitución,

$$t_{2m}^- = j. \quad (4.48)$$

$$t_{2m+1}^+ = j + 1. \quad (4.49)$$

Enumerando cada sustitución se tendrá,

1.- De la primera y segunda ecuación de (4.45) se obtendrán las siguientes,

$$x_+(t_{2m}^+) = -2\pi A \operatorname{sen}(x_-(j)) + x_+(j) \quad (4.50)$$

$$x_-(t_{2m}^+) = x_-(j) \quad (4.51)$$

2.- La ecuación (4.50) se sustituye en la tercer ecuación de (4.45), obteniéndose,

$$x_+(t_{2m+1}^-) = -2\pi A \operatorname{sen}(x_-(j)) + x_+(j) \quad (4.52)$$

De igual forma (4.51) se sustituye en la cuarta ecuación de (4.45),

$$x_-(t_{2m+1}^-) = x_-(j) \quad (4.53)$$

3.- La ecuación (4.53) se sustituye en la primer ecuación de (4.46), obteniéndose,

$$x_-(t_{2m+1}^+) = 2\pi A \operatorname{sen}(x_+(t_{2m+1}^-)) + x_-(j) \quad (4.54)$$

De igual forma (4.52) se sustituye en la segunda ecuación de (4.46),

$$x_+(t_{2m+1}^+) = x_+(j) - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-(j)) \quad (4.55)$$

4.- Sustituyendo (4.55) y  $x_+(t_{2m+1}^-) = x_+(j + 1)$  en la tercer ecuación de (4.46),

$$x_+(j + 1) - x_+(j) + 2\pi A \operatorname{sen}(x_-(j)) = 0 \quad (4.56)$$

Y finalmente, sustituyendo (4.54) y  $x_-(t_{2m+1}^-) = x_-(j + 1)$  en la cuarta ecuación de (4.46),

$$x_-(j + 1) - x_-(j) = 2\pi A \operatorname{sen}(x_+(j + 1)) \quad (4.57)$$

Con las ecuaciones (4.56) y (4.57), que ya están en términos de  $j$  el mapeo de 1 paso queda así:

$$x_+(j + 1) = x_+(j) - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-(j)). \quad (4.58)$$

$$x_-(j + 1) = x_-(j) + 2\pi A \operatorname{sen}(x_+(j + 1)). \quad (4.59)$$

Si al ponerlo en pasos  $j$  se pone en pasos de  $n$ , el mapeo finalmente queda así:

### MAPEO DE 1 PASO

$$x_+^{n+1} = x_+^n - 2\pi A \operatorname{sen}(x_-^n). \quad (4.60)$$

$$x_-^{n+1} = x_-^n + 2\pi A \operatorname{sen}(x_+^{n+1}). \quad (4.61)$$

Escribir el mapeo de esta forma servirá más adelante para poder variar los parámetros en los espacios fase numéricamente en el programa de Mathematica.

#### 4.1.4. Sistema Hamiltoniano giro-promediado

##### Potencial electrostático giro-promediado sobre el radio finito de Larmor

Se intenta considerar el efecto en los tokamaks de las partículas altamente energéticas, como las partículas alfa, es por eso que se tienen que considerar radios de Larmor diferentes de cero. Los campos que experimentan estas partículas en sus órbitas son muy diferentes a los que se encuentran en sus centros guía. Es por esta razón que ahora se tomará en cuenta el radio finito de Larmor de las partículas. Una manera de incluirlo en los cálculos es promediando el movimiento de la partícula sobre la órbita en la que da un giro. [12] Las ecuaciones de movimiento (4.16) se modificarán ya que la velocidad de deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  se reemplazará por el promedio sobre un círculo de radio  $\rho$ , que es el radio de Larmor. La contribución de la fase giro-promediada sobre cada partícula individual se puede ver como un anillo cargado uniformemente, con su centro en  $R$  y radio  $\rho$ .

El promedio de la giro-fase se calcula así:

$$\langle \rangle_x \equiv \oint \frac{d\chi}{2\pi}. \quad (4.62)$$

Se define la función  $\langle \Psi \rangle_\theta$  que promedia la giro-fase, que se da por hecho que barre un movimiento circular (en coordenadas polares):

$$\langle \Psi \rangle_\theta \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) d\theta. \quad (4.63)$$

Donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas que aparecen en la ec. de movimiento (4.13), y  $r$  aquí nos referimos a ella como  $\rho$ , el radio de Larmor.

Y las ecuaciones (4.16) quedarán de la siguiente forma,

$$\frac{dx}{dt} = - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle_\theta = - \frac{\partial \langle \phi \rangle_\theta}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle_\theta = \frac{\partial \langle \phi \rangle_\theta}{\partial x} \quad (4.64)$$

Lo siguiente es calcular el promedio (4.63) del potencial electrostático (4.17). Por

tanto,

$$\langle \phi \rangle_\theta = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \rho \cos \theta + \theta_n) \cos(y + \rho \sen \theta + \theta_n - nt) \right] d\theta. \quad (4.65)$$

Usando la identidad (4.19)

$$= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \rho \cos \theta + \theta_n) [\cos(y + \rho \sen \theta + \theta_n) \cos(nt) + \sen(y + \rho \sen \theta + \theta_n) \sen(nt)] \right\} d\theta$$

El término  $\sen(y + \rho \sen \theta + \theta_n) \sen(nt)$  se hace cero por (4.24) y entonces,

$$= A \int_0^{2\pi} (\cos(x + \rho \cos \theta + \theta_n) \cos(y + \rho \cos \theta + \theta_n) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(nt)) d\theta$$

Usando la identidad (4.21),

$$= \frac{A}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + y + \rho(\cos \theta + \sen \theta) + 2\theta_n) + \cos(x - y + \rho(\cos \theta - \sen \theta)) [\cos(nt) d\theta]$$

Con (4.19) tenemos,

$$= \frac{A}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(nt) d\theta] [\cos(x + y + 2\theta_n) \cos(\rho(\cos \theta + \sen \theta)) - \sen(x + y + 2\theta_n) \sen(\rho(\cos \theta + \sen \theta))] \\ + [\cos(x - y) \cos(\rho(\cos \theta - \sen \theta)) - \sen(x - y) \sen(\rho(\cos \theta - \sen \theta))] \quad (4.66)$$

Para resolver esta integral, hay que notar en particular que algunos términos de la misma se pueden resolver mediante la función de Bessel de orden 0,  $J_0$ , que con base en su función generadora, toma la forma  $J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sen \theta) d\theta$ . Por tanto, de la ecuación anterior tendremos que,

$$2\pi J_0(\sqrt{2}\rho) = \int_0^{2\pi} \cos(\rho(\cos \theta + \sen \theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\rho(\cos \theta - \sen \theta)) d\theta \quad (4.67)$$

y como:

$$\int_0^{2\pi} \sen(\rho(\cos \theta + \sen \theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} \sen(\rho(\cos \theta - \sen \theta)) d\theta = 0. \quad (4.68)$$

El giro-promedio quedará de la siguiente forma,

$$\langle \phi \rangle_\theta = \frac{2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho)}{4\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos(x+y) + \cos(x-y) \right) \cos(nt). \quad (4.69)$$

$$= \frac{A J_0(\sqrt{2}\rho)}{2} (2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2m+1)\pi) \cos(x+y) + 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) \cos(x-y)) \quad (4.70)$$

Usando las identidades con las funciones de Dirac,

Y finalmente, el potencial electrostático giro-promediado queda como,

$$\langle \phi \rangle_\theta = \pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\cos(x+y)\delta(t - (2m+1)\pi) + \cos(x-y)\delta(t - 2\pi m)). \quad (4.71)$$

Como en la sección anterior, ahora hay que sustituir este giro-promedio en las ecuaciones de movimiento (4.64).

Primero con  $-\frac{\partial \langle \phi \rangle_\theta}{\partial y}$ :

$$\frac{dx}{dt} = \pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\text{sen}(x+y)\delta(t - (2m+1)\pi) - \text{sen}(x-y)\delta(t - 2\pi m)]. \quad (4.72)$$

Y ahora  $\frac{\partial \langle \phi \rangle_\theta}{\partial x}$ ,

$$\frac{dy}{dt} = \pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} [-\text{sen}(x+y)\delta(t - (2m+1)\pi) - \text{sen}(x-y)\delta(t - 2\pi m)]. \quad (4.73)$$

Al sumar las expresiones (4.72) y (4.73) se tendrá,

$$\begin{aligned} \frac{d(x+y)}{dt} &= \pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} -2 \text{sen}(x-y)\delta(t - 2\pi m) \\ \frac{d(x-y)}{dt} &= \pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2 \text{sen}(x+y)\delta(t - (2m+1)\pi). \end{aligned}$$

Las expresiones finales de estas derivadas van a ser,

$$\frac{d(x_+)}{dt} = -2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_-)\delta(t - 2\pi m). \quad (4.74)$$

$$\frac{d(x_-)}{dt} = -2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sen}(x_+)\delta(t - (2m+1)\pi). \quad (4.75)$$



Estas ecuaciones de movimiento en términos de las funciones de Dirac permitirá reducirlas a mapeos de dos pasos, uno por cada ecuación.

Como ya se desarrolló en la sección anterior los pasos para llegar a los mapeos, aquí el único cambio que habrá será agregar el término con la función de Bessel a las constantes que acompañan a las amplitud  $A$ , es decir,

## MAPEO DE 1 PASO GIROPROMEDIADO

$$\begin{aligned}x_+^{n+1} &= x_+^n - 2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \text{sen}(x_-^n). \\x_-^{n+1} &= x_-^n + 2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho) \text{sen}(x_+^{n+1}).\end{aligned}\tag{4.76}$$

### 4.1.5. Sistema Hamiltoniano con un flujo de fondo

El modelo de espectro de ondas para el potencial electrostático con flujo  $\vec{E} \times \vec{B}$  de fondo es,

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x) + A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \cos(y + \theta_n - nt).\tag{4.77}$$

Con  $\phi_0(x)$  un flujo zonal agregado y cizallado, que como está en función de  $x$  entonces irá en la dirección de  $y$  y con una velocidad  $v_0 = \frac{d\phi_0}{dx}$  [12].

Al giro-promediar este potencial y con los efectos de radio de Larmor finito agregados, el potencial a analizar será el siguiente:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi_0(x) \rangle + A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(x + \theta_n) \cos(y + \theta_n - nt).\tag{4.78}$$

Siguiendo los pasos de las secciones anteriores se calcularán las derivadas de las ecuaciones de movimiento.

Primero con  $-\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial y}$ :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi_0(x)}{\partial y} + A J_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\text{sen}(x + y)\delta(t - (2m + 1)\pi) - \text{sen}(x - y)\delta(t - 2\pi m)].\tag{4.79}$$

Y ahora  $\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x}$ ,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x} - AJ_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\text{sen}(x+y)\delta(t - (2m+1)\pi) + \text{sen}(x-y)\delta(t - 2\pi m)]. \quad (4.80)$$

Finalmente, como  $\frac{\partial \phi_0(x)}{\partial y} = 0$ , las ecuaciones finales van a quedar de la siguiente manera:

$$\frac{d(x_+)}{dt} = -AJ_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin(x_-)\delta(t - 2\pi m) + \frac{\partial \phi_0}{\partial x}. \quad (4.81)$$

$$\frac{d(x_-)}{dt} = AJ_0(\sqrt{2}\rho) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin(x_+)\delta(t - (2m+1)\pi) - \frac{\partial \phi_0}{\partial x}. \quad (4.82)$$

Para pasar estas ecuaciones a mapeos seguiremos los mismos cálculos que para el mapeo anterior de dos pasos.

El mapeo se queda como:

$$\begin{aligned} x_+^{n+1} &= x_+^n + 2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho) \sin(x_-^n) - \Omega\left(\frac{x_+^n + x_-^n}{2}\right), \\ x_-^{n+1} &= x_-^n - 2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho) \sin(x_+^{n+1}) + \Omega\left(\frac{x_+^{n+1} + x_-^{n+1}}{2}\right). \end{aligned}$$

donde  $\Omega(x^n) = \pi[\langle \phi_0' \rangle^{n+1/2} + \langle \phi_0'^n \rangle]$  es la velocidad promedio.

Dependiendo de  $\phi_0$  el flujo será monótono o no monótono

Para el caso de mapeo con flujo de 1 paso, éste sólo es válido para cuando el flujo agregado es lineal, pero para casos generales, el mapeo de 2 pasos es el idóneo, es por eso que es el que se describirá a continuación.

El mapeo de dos pasos se calcula con saltos de deltas de Dirac, similar al procedimiento de la sección 5.1.3.

## MAPEOS CON FLUJO ARBITRARIO

- Flujo Lineal: Cuando la variación es monótona y por tanto  $\Omega(x)$  es lineal, el mapeo es de torsión, simpléctico y de 1 paso, entonces sí  $\Omega(x) = Cx$ , queda:

$$\begin{aligned} x_+^{n+1} &= x_+^n + 2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(x_-^n) - \frac{C}{2}(x_+^n + x_-^n) \\ x_-^{n+1} &= \frac{1}{1 - C/2} [x_-^n - 2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(x_+^{n+1}) + \frac{C}{2}x_+^{n+1}] \end{aligned} \quad (4.83)$$

- Flujo Gaussiano: Cuando la variación es no monótona, el mapeo es sin torsión. Cuando  $\Omega(x) = Ce^{-(x^2)}$ , el mapeo para ser simpléctico debe ser de 2 pasos, queda así:

$$\begin{aligned} x'_+ &= x_+^n + \pi\Omega(x^n) \\ x'_- &= x_-^n + 2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(x'_+) - \pi\Omega(x^n) \\ x_-^{n+1} &= x'_- - \pi\Omega(x') \\ x_+^{n+1} &= x'_+ - 2\pi AJ_0(\sqrt{2}\rho) \operatorname{sen}(x_-^{n+1}) + \pi\Omega(x') \end{aligned} \quad (4.84)$$

# Topología de los espacios fase modelados en Mathematica

## 5.1. Mapeos en Mathematica

Los espacios fase presentados a partir de ahora se realizaron en el programa *Wolfram Mathematica 12*. En esta sección se explicará cómo funciona el código y los parámetros para los mapeos con y sin flujo, usando de ejemplo el mapeo con flujo lineal descrito en la sección anterior.

### 5.1.1. Espacios fase de mapeo con flujo lineal

En la Figura 5.1 se muestra el mapeo (4.83) escrito en Mathematica, con el que se genera la geometría de las trayectorias de las partículas en el espacio fase. Éste se obtiene con la función de la figura 5.3.

```
Points[x_, y_, ρ_, A_, c_, n_] := ReleaseHold[Hold[points := {}];
|desbloquea eva... |impide evaluación

xplus0 = x + y;
xminus0 = x - y;
Do[points = Append[points, {xplus0, xminus0}];
|repite |añade

xplus0 = xplus0 + 2 π A BesselJ[0, √2 ρ] Sin[xminus0] -  $\frac{c}{2}$  (xplus0 + xminus0);
|J de Bessel |seno

xminus0 =  $\frac{2}{2 - c}$  (xminus0 - 2 π A BesselJ[0, √2 ρ] Sin[xplus0] +  $\frac{c}{2}$  xplus0), {n}];
|J de Bessel |seno

Table[{{ $\frac{\text{points}[[i]][1] + \text{points}[[i]][2]}{2}$ ,  $\frac{\text{points}[[i]][1] - \text{points}[[i]][2]}{2}$ }, {i, Length[points]}}]]
|tabla |longitud
```

Figura 5.1: Mapeo con flujo lineal

Con el siguiente código se grafican los espacios fase en un plano  $x$  vs  $y$ ,

```
PhaseSpaceNeg[ $\rho_$ ,  $A_$ ,  $c_$ ,  $n_$ ] := (points = Flatten[Table[Points[x0, y0,  $\rho$ , A, c, n], {x0, -3, 0, 0.5}, {y0, 0, 6, 0.5}], 2];
points1 = Table[{points[[i]][1], Mod[points[[i]][2], 2 $\pi$ ]}, {i, Length[points]}];
ListPlot[points1, PlotStyle -> PointSize[0.001]]{1}
```

Figura 5.2: Código para graficar los puntos en una malla del mapeo.

El código de a continuación, se usa en las secciones posteriores, ya que sirve para trazar la trayectoria de una sola partícula,

```
PhaseSpacePoint[x_, y_,  $\rho_$ , A_, c_, n_, color_] := (points = Points[x, y,  $\rho$ , A, c, n];
points1 = Table[{points[[i]][1], Mod[points[[i]][2], 2 $\pi$ ]}, {i, Length[points]}];
ListPlot[points1, PlotStyle -> Directive[PointSize[0.001], color], PlotRange -> {{-1, 6}, {0, 6.5}},
PlotLabel -> HoldForm[" $\rho$  = " $\rho$  ", A=" A ", c=" c "]]
```

Figura 5.3: Código para arrojar las órbitas de las partículas distribuidas en una malla.

La diferencia entre las dos últimas funciones es que 5.2 es la que da la topología del espacio fase y 5.3 sirve para seguir una sola partícula y darle color a los puntos en el espacio fase.

La figura 5.1 muestra que el mapeo depende de 6 parámetros, que son  $x$ ,  $y$ ,  $\rho$ ,  $A$ ,  $c$  y  $n$  (número de iteraciones). El movimiento dentro del espacio fase funciona tal que una partícula inicia su recorrido desde el punto  $(x, y)$ , y comenzará a evolucionar temporalmente de acuerdo a los pasos del mapeo y tras de ésta continuarán saliendo aleatoriamente las demás partículas (que en total van a ser  $n$ ), y moviéndose una tras otra de acuerdo al mapeo y cuyas condiciones iniciales cambian para cada partícula.

Recordar que, cuando hay flujo, el movimiento es como si estuvieran dentro de toros anidados. Si no hay flujo, la trayectoria de movimiento son lazos que se ven como las órbitas en cuadrícula en la sección de Poincaré, ver figuras 5.4(b) y 5.4(c). Así, cada que una partícula recibe un empujón de la onda se marcará como un punto en el diagrama de espacio fase, generando una órbita cerrada que representa que las partículas estén atrapadas en el potencial periódico de la onda.

## Parámetros a modificar dentro del mapeo

Una vez que empiezan a evolucionar las partículas se pueden ir modificando los siguientes parámetros, que sirven para cambiar la configuración del espacio fase:

- $\rho$ , el radio de Larmor
- $A$ , amplitud de las ondas
- $C$ , valor constante para el flujo agregado, por ejemplo para  $\Omega(x) = Cx$

Algunos de los espacios fase que arroja el mapeo (4.83) calculado por medio del código de la Figura 5.1, con diferentes parámetros, se muestran y analizan cualitativamente a continuación, con la intención de conocer a profundidad la dinámica del mapeo con flujo lineal.

El número de iteraciones para todos los espacios fase que se van a mostrar en esta sección fueron igual a  $n = 1000$ . El movimiento en el espacio fase funciona tal que una partícula inicia su recorrido desde el punto  $(x, y)$  y evoluciona temporalmente de acuerdo a los pasos del mapeo y tras de ésta continúan saliendo aleatoriamente las demás partículas. En este caso se sigue el movimiento de una población de partículas que inician en un cuadrícula de tamaño  $0.01 \times 0.01$  centrado en un la posición de un punto hiperbólico y se dejan evolucionar dentro del espacio fase [19].

## Comportamiento del mapeo lineal en los espacios fase

### Cuando $A = 0$

- Si el parámetro de amplitud de ondas  $A$  es nulo, la trayectoria de las partículas sólo se desplazará hacia arriba sin formar curvas u órbitas que describan líneas continuas.

Bajo esta amplitud nula, si se agrega un pequeño flujo únicamente se verán líneas o curvas rectas, esto es debido a que las partículas simplemente son llevadas o arrastradas por el flujo en la dirección  $y$ . Este movimiento se observa en la Figura 5.4(b) y 5.4(d). Las líneas que forman las partículas bajo estos parámetros son los toros KAM pero desplegados sobre un plano (si se unen los extremos de  $\theta$ , que son  $y$ , se forman círculos).

En cuanto a 5.4(a) y 5.4(c), ya que no hay ni ondas ni flujo, no hay nada que afecte a las partículas; por eso no se mueven quedándose solo en sus puntos iniciales.

Para 5.4(b) y 5.4(d), hay que percatarse que el aumentar el radio de Larmor  $\rho$ , no hace ninguna diferencia en cuanto a las trayectorias cuando  $\mathbf{A} = 0$ .

Relacionando las partículas del plasma con el mapeo se puede decir que el que no se mueva la partícula, es porque en la ecuación (4.13) es sólo para la velocidad de deriva, sin considerar la velocidad de la partícula que es la que tiene que ver con la temperatura de la distribución de las partículas y no de las derivas.

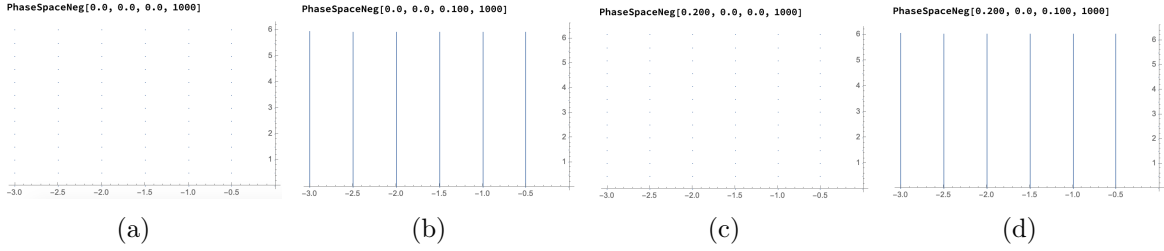


Figura 5.4: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando (a)  $\rho = 0$ ,  $A = 0$ ,  $C = 0$ ; (b)  $\rho = 0$ ,  $A = 0$ ,  $C = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ ,  $A = 0$ ,  $C = 0$ ; (d)  $\rho = 0.200$ ,  $A = 0$ ,  $C = 0.100$ .

### Cuando $A = 0.100$

- En la figura 5.5 no hay flujo agregado, pero si hay ondas con una amplitud de  $A = 0.100$  para tres diferentes radios de Larmor. Respecto al radio de Larmor, no se puede afirmar nada aun debido a que  $A$  aun es muy pequeña.

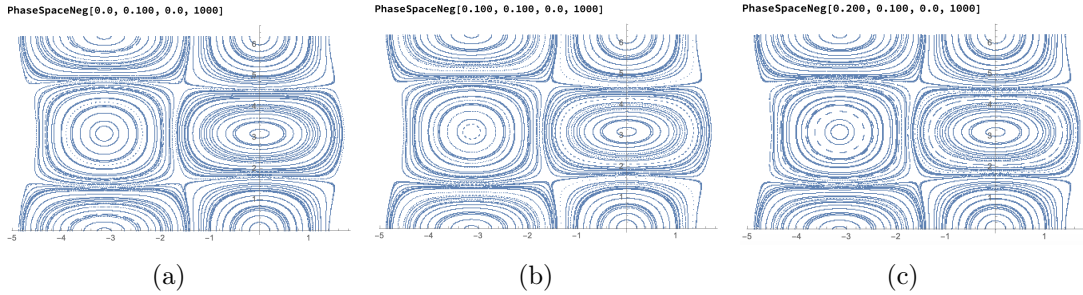


Figura 5.5: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 0$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Las trayectorias se mantienen circulares ya que no hay flujo de fondo, sólo una ligera amplitud en las ondas.

- En 5.6 hay desplazamiento de órbitas en la dirección positiva del eje  $y$  debido al flujo agregado  $C$  y sin cambiar la amplitud, haciendo que del lado izquierdo las órbitas se abran y a la vez creándose pequeñas órbitas dentro de las que persisten todavía. Si tomamos en cuenta que son partículas de plasma, en sistemas dinámicos a las órbitas que muestran geometría de círculos anidados se les llama “órbitas alrededor del punto o” o puntos elípticos. Por ejemplo, en la figura 5.5(b) alrededor de

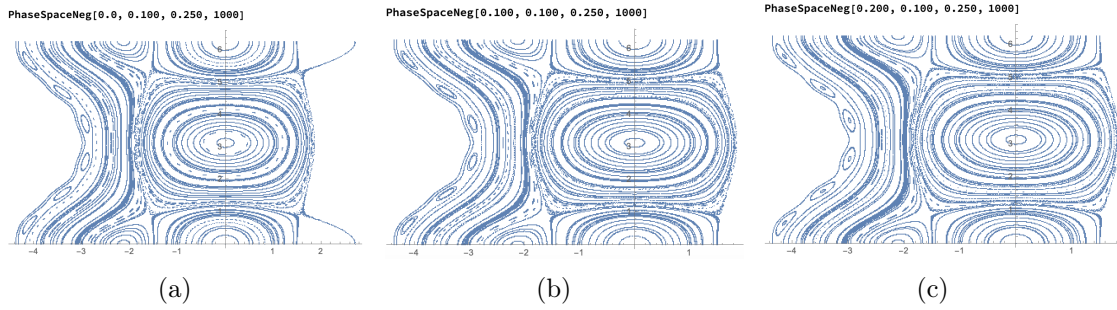


Figura 5.6: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 0.250$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Las líneas se abren y se forman pequeñas órbitas dentro de las que aun están cerradas y dentro del flujo que se va desplazando en dirección del eje  $y$  positivo.

$(x, y) = (0, \pi)$ , se tiene un “o - point” y alrededor de  $(x, y) = (-1.5, \pi/2)$  se tiene un “x - point ” o punto hiperbólico que son los puntos que separan una órbita de otra. Esta zona de puntos hiperbólicos siempre contiene caos localizado que al aumentar los valores de los parámetros se irá extendiendo hasta llegar al llamado caos global.

- En 5.7, aunque la amplitud no ha cambiado, el flujo ya es demasiado grande. Ahora aparecen órbitas que no son regulares, volviéndose caóticas y sólo permanecen órbitas cerradas cerca del punto  $(0, \pi)$ . Fuera de las órbitas cerradas, las partículas pueden llenar el espacio entre ellas. Esta es la llamada *zona ergódica o caótica*. Aquí el aumento en el radio de Larmor sí provoca un alargamiento en las órbitas y un aumento en la región con órbitas regulares (o disminución de la zona caótica).

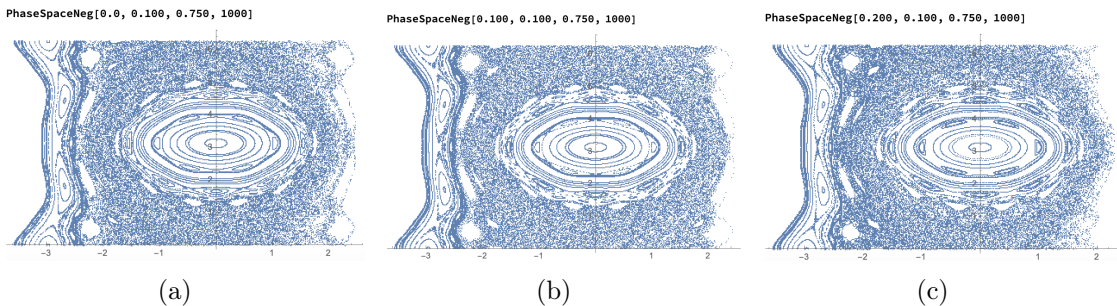


Figura 5.7: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 0.750$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Con un flujo demasiado grande las pequeñas órbitas comienzan a multiplicarse cada vez más, creciendo y formándose nuevas.

- En la figura 5.8, para un flujo igual o cercano a  $C = 1.0$  el comportamiento caótico ya es global. Con caos global se quiere decir que las partículas ya cruzaron cierta barrera marcada arbitrariamente. Más adelante se explicará con detalle este hecho.



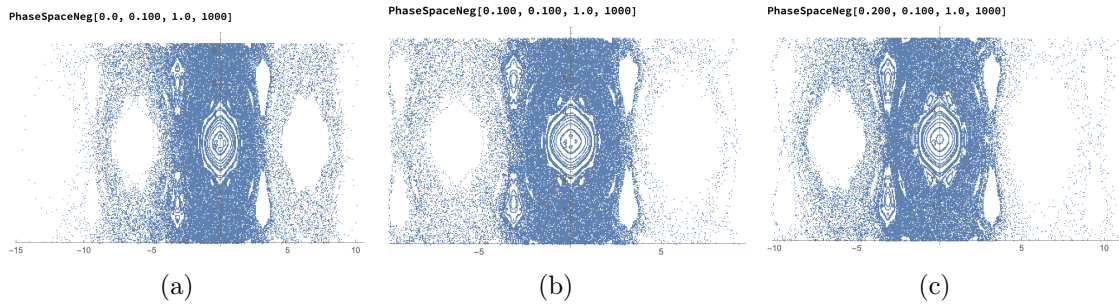


Figura 5.8: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 1.0$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Las órbitas definidas se comienzan a romper causando un comportamiento caótico de las partículas.

Físicamente, dentro de un tokamak se podría decir que las partículas definitivamente ya perdieron el confinamiento que se deseaba mantener. En el sentido de que las partículas que se quiere confinar en el centro del plasma, que es la región de la izquierda, pueden llegar al borde, que es la región de la derecha, por medio de órbitas caóticas. Y nuevamente, estas afirmaciones sólo aplican sobre el movimiento de las partículas con la deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$ .

### Cuando $A = 0.200$

- En la figura 5.9, como la amplitud de las ondas es grande, las órbitas ya están formadas, pero como el flujo es nulo, permanecen estáticas en el mismo lugar.

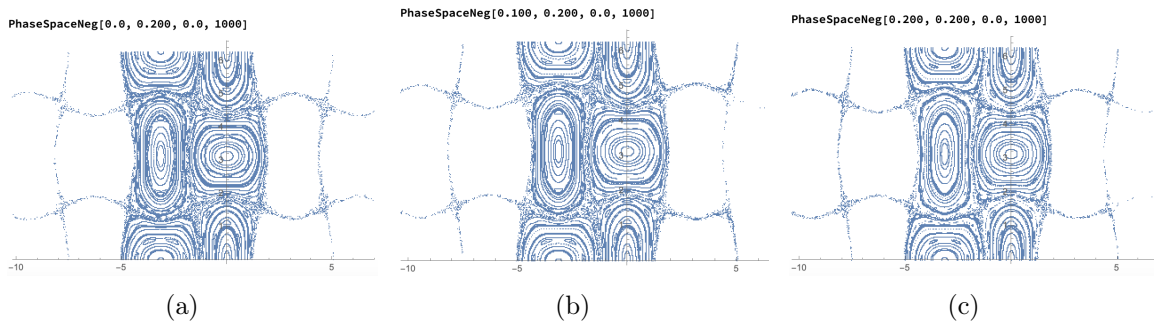


Figura 5.9: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.200$ ,  $C = 0$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Las órbitas que están dentro de la separatriz se mantienen cerradas porque aun no hay flujo agregado.

- En 5.10, cuando el flujo aumenta se observa un desplazamiento hacia arriba en dirección poloidal  $y$  y la apertura principal de las órbitas del lado izquierdo, co-

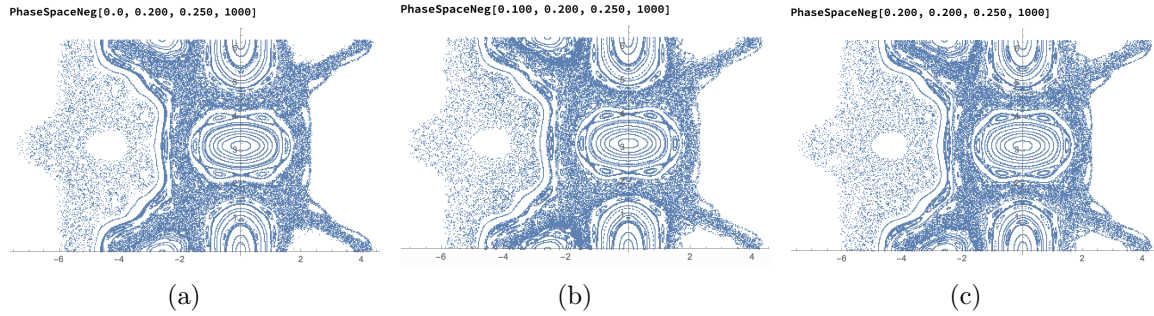


Figura 5.10: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.200$ ,  $C = 0.250$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Las órbitas laterales se abren y dentro de las que aun están cerradas se forman otras pequeñas al tiempo que el flujo desplaza las ondas hacia arriba en dirección de  $y$ .

menzándose a ver un ligero comportamiento caótico. Sin ser del todo evidente los cambios que genera el aumento en el radio de Larmor.

- En la figura 5.11 el comportamiento caótico se expande a una mayor área del espacio fase.

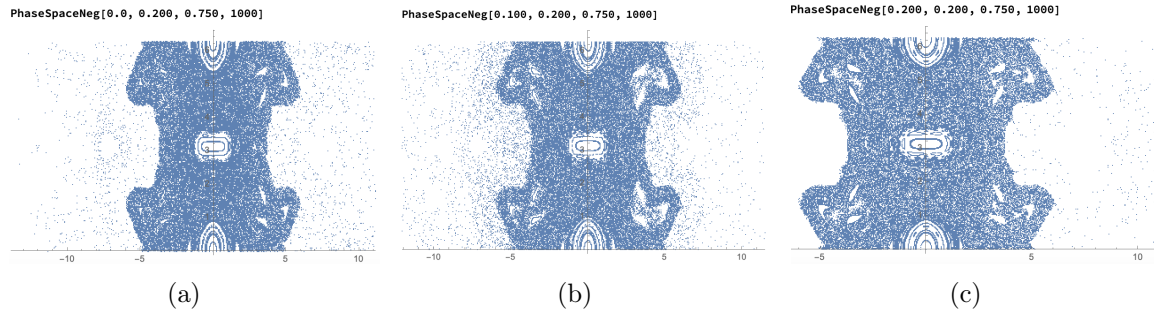


Figura 5.11: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 0.750$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . El comportamiento es caótico dentro de las órbitas que aun quedan cerradas.

- Comportamiento caótico global en la figura 5.12.

**Cuando  $A = 0.300, 0.400, \dots$**

- Cuando es demasiado grande la amplitud junto con el flujo agregado, como los casos de la figura 5.13, el comportamiento siempre es caótico.

### 5.1.2. Espacios fase de mapeo con flujo Gaussiano

El segundo mapeo a analizar será el que se mostró en (4.84), cuyo perfil de velocidad o flujo es Gaussiano. Este flujo zonal Gaussiano es continuo y derivable pero no se

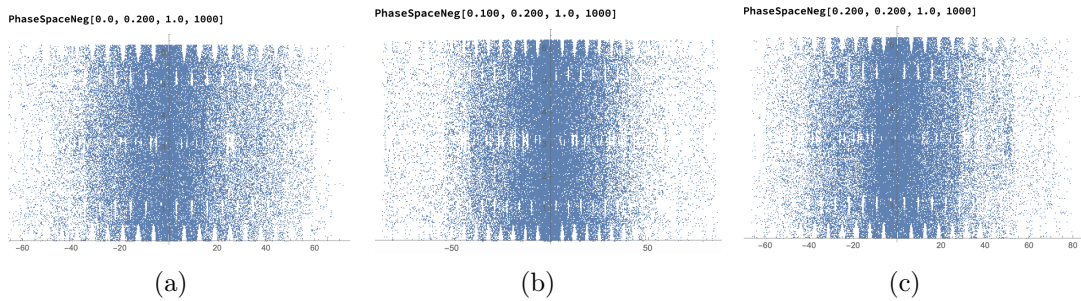


Figura 5.12: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 1.0$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . El comportamiento es caótico, ya no se distinguen las pequeñas órbitas que quedan todavía.

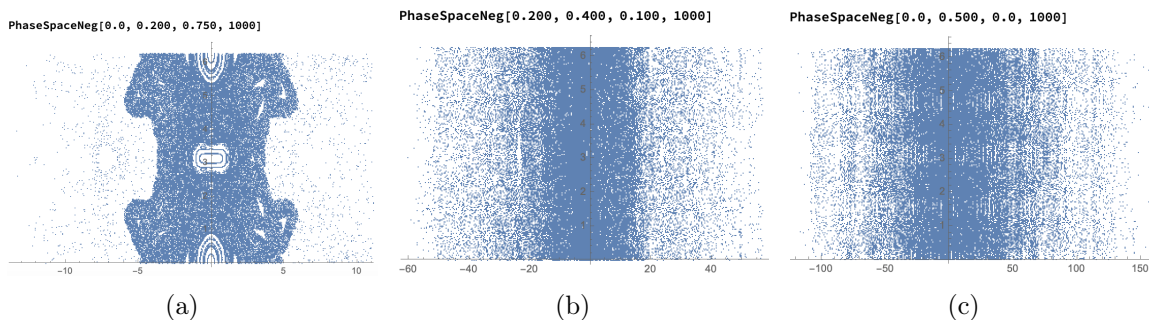


Figura 5.13: Trayectorias del espacio fase para el mapeo lineal cuando (a)  $\rho = 0$ ,  $A = 0.200$ ,  $C = 0.750$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ,  $A = 0.400$ ,  $C = 0.100$ .; (c)  $\rho = 0$ ,  $A = 0.500$ ,  $C = 0$ .

cumple la condición de torsión cuando  $J = 0$  en  $x = 0$ , entonces es no monótono y es:  $\Omega(x) = Ce^{-x^2}$ . Se puede observar el perfil de velocidad en la figura 5.14  
 Para obtener los espacios fase se escribió el código en Mathematica, tal y como se muestra en la figura 5.15.

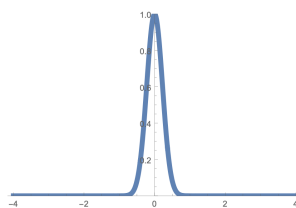


Figura 5.14: Perfil de velocidad gaussiano

Con el código que se muestra a continuación se grafican los espacios fase en el plano  $x$  vs  $y$ ,

A este mapeo se le pueden modificar los mismos parámetros que al anterior.

```

In[*]:= Points[x_, y_, ρ_, A_, c_, n_] := (points := {}); xplus0 = x + y;
xminus0 = x - y;
Do[points = Append[points, {xplus0, xminus0}];
  {repite, añade}

  xplus1 = xplus0 + π Ω[(xplus0 + xminus0) / 2, c];
  xminus1 = xminus0 - π Ω[(xplus0 + xminus0) / 2, c] + 2 π A BesselJ[0, Sqrt[2] ρ] Sin[xplus1];
  {J de Bessel, raíz cuadrada, seno}

  xminus0 = xminus1 - π Ω[(xplus1 + xminus1) / 2, c];
  xplus0 = xplus1 + π Ω[(xplus1 + xminus1) / 2, c] - 2 π A BesselJ[0, Sqrt[2] ρ] Sin[xminus0],
  {J de Bessel, raíz cuadrada, seno}

  {n}];
Table[{(points[[i]][[1]] + points[[i]][[2]]) / 2,
  {tabla

  (points[[i]][[1]] - points[[i]][[2]]) / 2}, {i, Length[points]}}]
  {longitud}

In[*]:= Ω[x_, c_] := c E^x - x^2

```

Figura 5.15: Mapeo con flujo Gaussiano

```

PhaseSpace2[ρ_, A_, c_, n_] := {points = Flatten[Table[Points2[x0, y0, ρ, A, c, n], {x0, -3, 3, 0.5}, {y0, 0, 6, 0.5}], 2];
  {aplana, tabla}

  points1 = Table[{points[[i]][[1]], Mod[points[[i]][[2]], 2 π]}, {i, Length[points]};
  {tabla, operación módulo, longitud}

  ListPlot[points1, PlotStyle → PointSize[0.001], PlotRange → {{-4, 4}, {0, 6.5}}][[1]]

```

Figura 5.16: Código para arrojar las partículas aleatorias del mapeo gaussiano.

## Comportamiento del mapeo gaussiano en los espacios fase

Cuando  $A = 0.100$

- En la figura 5.17, como no hay flujo de fondo, se tiene lo mismo que en el mapeo anterior de la figura 5.5.

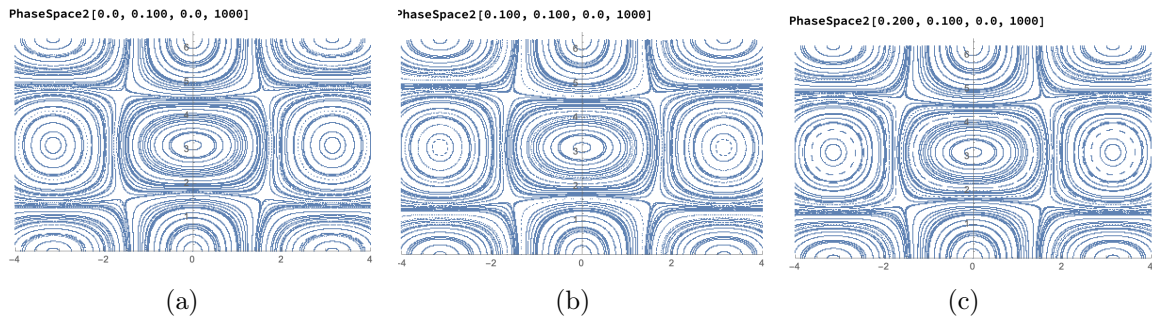


Figura 5.17: Trayectorias del espacio fase para el mapeo gaussiano cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 0$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Sólo hay amplitud de ondas, por lo tanto se mantienen estáticas.

- En 5.18 el flujo agregado hace que las ondas que se encuentran a la mitad del espacio fase se abran y junten tal que se forme una especie de columna serpenteante que





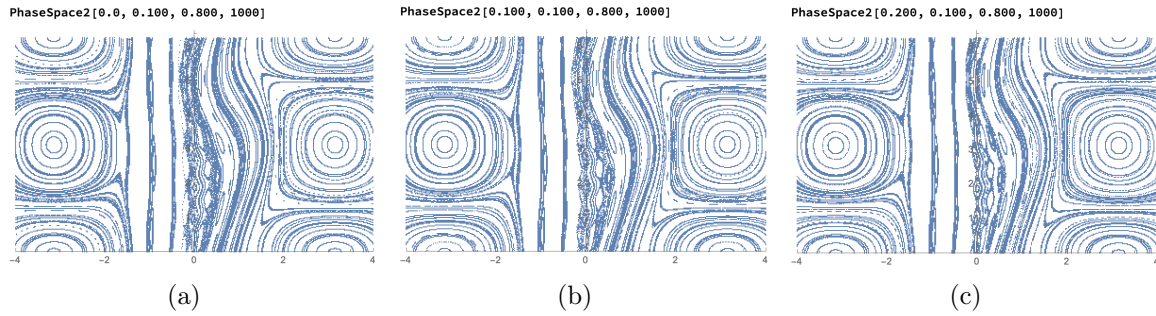


Figura 5.20: Trayectorias del espacio fase para el mapeo gaussiano cuando  $A = 0.100$ ,  $C = 0.800$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . El flujo lleva a las partículas de la columna serpenteante sobre la dirección positiva del eje  $y$ .

El flujo  $C$  parece que sólo afecta a las ondas intermedias, las ondas de los extremos no se ven afectadas. Y el radio de Larmor, para el rango de variación mostrado, no genera ningún cambio importante en el tamaño o forma de las órbitas.

### Cuando $A = 0.200$

- En la figura 5.21 la amplitud de las ondas se aumentó, no hay flujo de fondo. De esta forma, las ondas se observan un poco alargadas y además permanecen estacionarias. Es un caso idéntico al que se muestra en la figura 5.9 porque en ninguno hay flujo de fondo.

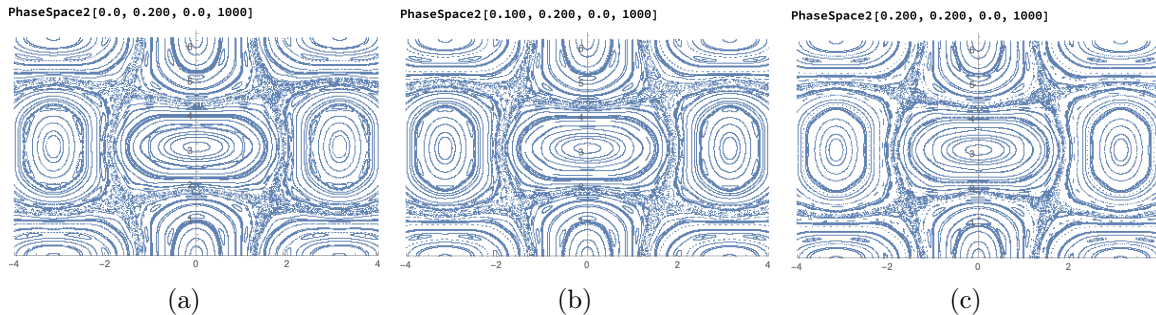


Figura 5.21: Trayectorias del espacio fase para el mapeo gaussiano cuando  $A = 0.200$ ,  $C = 0$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Amplitud de ondas es mayor, pero no hay flujo de fondo, por tanto se mantienen estacionarias.

- En la figura 5.22 le fue agregado flujo, así que como en el caso anterior, se formó una columna serpenteante de “corriente” de partículas, la diferencia es que aquí se formaron una especie de órbitas u hoyos continuos. Y a los alrededores se observan regiones prácticamente caóticas.

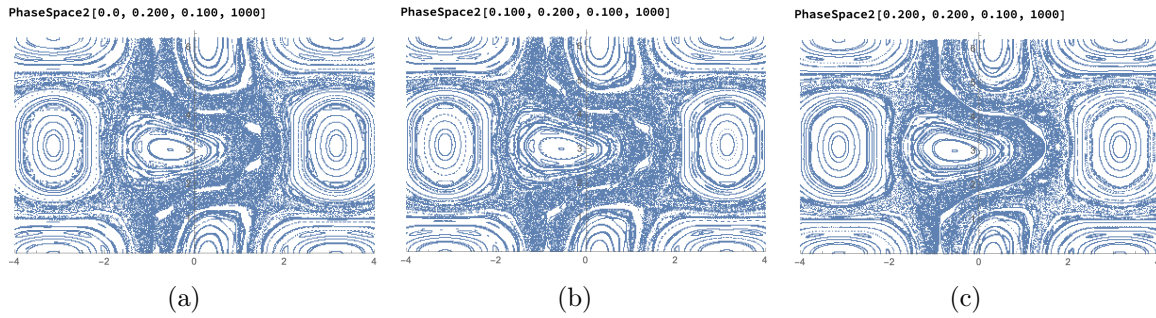


Figura 5.22: Trayectorias del espacio fase para el mapeo gaussiano cuando  $A = 0.200$ ,  $C = 0.100$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Con el aumento del flujo se volvió a formar la columna serpenteante.

- En la figura 5.23 se observa la misma dinámica pero ahora con caos en prácticamente toda la zona intermedia. Siguiendo muy ligeramente la trayectoria serpenteante que se había descrito antes.

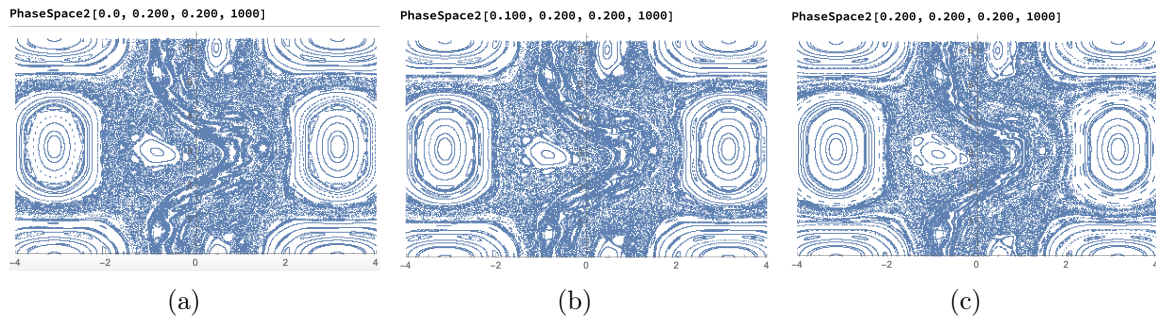


Figura 5.23: Trayectorias del espacio fase para el mapeo gaussiano cuando  $A = 0.200$ ,  $C = 0.200$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Continúa la trayectoria serpenteante pero con más regiones siendo ya caóticas

La curva de cizalla nula, que es el máximo de  $\Omega(x)$ , es la curva serpenteante dentro de la zona caótica.

- En la figura 5.24 hay caos en toda la zona intermedia.

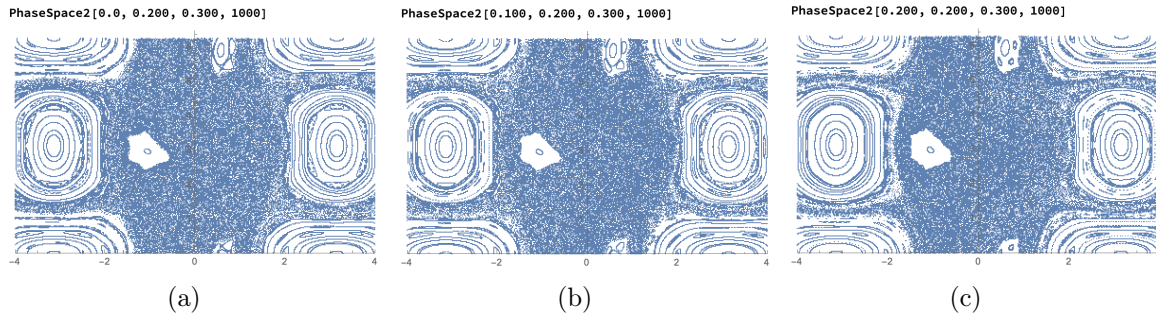


Figura 5.24: Trayectorias del espacio fase para el mapeo gaussiano cuando  $A = 0.200$ ,  $C = 0.300$ . (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = 0.100$ ; (c)  $\rho = 0.200$ . Toda la zona intermedia ya es caótica.

Se puede observar cómo el radio de Larmor, para las figuras 5.21, 5.22 y 5.23 logró cambios notables para  $\rho = 0.200$ , en cuanto a la reducción de caos respecto a una fracción de los espacios fase. Como en el caso anterior, las órbitas cerradas de los extremos debidas a las ondas no se vieron para nada afectadas. Este cambio se observa con más claridad en las figuras 6.13 y 6.14, que son diagramas que mostrarán el rompimiento de barreras de transporte para cada una de las  $\rho$  mencionadas.

### Cuando $A = 0.300$

- Se observa en la figura 5.25 que para una amplitud demasiado grande, el caos es inminente en la zona intermedia, para  $\rho$  mayores la zona caótica disminuye de tamaño.

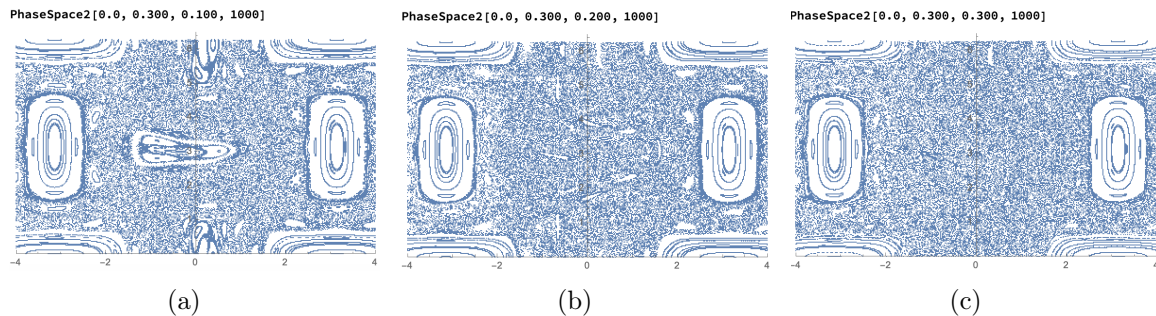


Figura 5.25: Trayectorias del espacio fase para el mapeo gaussiano cuando (a)  $\rho = 0$ ,  $A = 0.300$ ,  $C = 0.100$ ; (b)  $\rho = 0$ ,  $A = 0.300$ ,  $C = 0.200$ ; (c)  $\rho = 0$ ,  $A = 0.300$ ,  $C = 0.300$ . Zonas caóticas en toda la parte intermedia del espacio fase.



## Efectos de Radio de Larmor

Los efectos del radio de Larmor son el de estabilizar las órbitas, y esto se observa claramente en las figuras 5.26, que ocurre para los dos tipos de flujo.

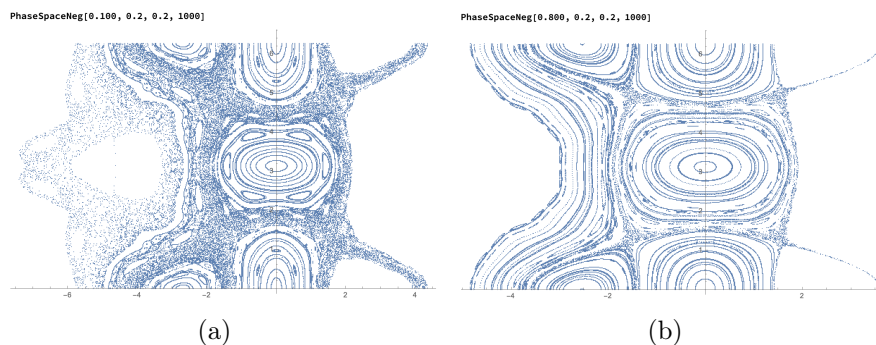


Figura 5.26: Espacios fase de mapeo con flujo lineal que muestran cómo al aumentar el valor de  $\rho$  las órbitas se estabilizan (a)  $\rho = 0.100$ ; (b)  $\rho = 0.800$ .

Ahora que ya se conoce la dinámica de ambos mapeos, en la sección posterior corresponde describir lo que son y qué significa que se creen barreras de transporte en los espacios fase cuando se modifican los parámetros de amplitud de ondas, radio de Larmor y flujo zonal agregado.

### 5.1.3. Exponentes de Lyapunov

Una de las características del caos es que dos puntos inicialmente muy cercanos se van alejando al pasar el tiempo de forma de su distancia crece exponencialmente:  $D = D_0 \exp(\lambda t)$  y a la constante  $\lambda$  se le llama coeficiente de Lyapunov y éste determina qué tan caótico es un sistema. Así que se va a calcular los coeficientes de Lyapunov para algunos casos con el propósito de cuantificar el nivel del caos.

### 5.1.4. Determinando con exponentes de Lyapunov el establecimiento de caos global en algunos espacios fase.

Se realizó un código en el programa de Mathematica para calcular los exponentes de Lyapunov para los valores de parámetros indicados en las figuras 5.11 y 5.24.

El código describe dos puntos iniciando su movimiento alejados una distancia, se iteran  $n$  veces, y se revisa en donde terminan esos puntos. Se calcula el exponente de

Lyapunov. Se regresan los puntos iniciales para volver a realizar la iteración y calcular de nuevo el exponente de Lyapunov. Esto se realiza un número definido de veces, y finalmente promediando los exponentes de Lyapunov obtenidos para cada iteración.

El cálculo de los exponentes de Lyapunov se basa en seguir dos puntos muy cercanos entre sí dentro de la región caótica mientras se calcula la distancia,  $D$ , entre ellos a cada paso. Se grafica el  $\log(D)$  contra cada iteración  $n$ . Se ajusta una recta a esos puntos y toma la pendiente de la ecuación como el coeficiente de Lyapunov,  $\lambda$ . Si se hace para diferentes valores de  $\rho$  y se ve que  $\lambda$  se reduce al aumentar  $\rho$ , entonces se probaría que la región sí se volvió caótica.

### Código para calcular el exponente de Lyapunov

En la figura 5.1 y 5.15 se muestra el código que corre el mapeo para el flujo lineal y gaussiano, respectivamente.

En la figura 5.27 se muestra el código para calcular el exponente de Lyapunov para una región en específica del espacio fase.

El código primero define las variables, que van a ser:

- $dx$ : separación entre los puntos iniciales;
- $\rho$ : radio de Larmor;
- $A$ : amplitud de ondas;
- $C$ : constante de velocidad de flujo;
- $n$ : número de iteraciones;
- $x1$ : punto inicial en  $x$ ;
- $y1$ : punto inicial en  $y$ .

El cálculo de los exponentes de Lyapunov se basa en seguir dos puntos muy cercanos entre sí dentro de la región caótica mientras se calcula la distancia,  $D$ , entre ellos a cada paso. Se grafica  $\log(D)$  contra el número de iteración  $n$ , que es equivalente al tiempo, y se le ajusta una recta cuya pendiente se identifica como el coeficiente de Lyapunov,  $\lambda$ . Sin embargo para evitar grandes errores se sigue un procedimiento más cuidadoso. En el código usado se toman dos puntos alejados una distancia muy pequeña ( $dx = 10^{-10}$ ) y se inicia su movimiento iterando  $n$  veces. Se registra en donde termina uno de esos puntos. Se calcula el exponente de Lyapunov para esa etapa. A partir de la posición final registrada se vuelven a iniciar dos puntos separados por  $dx$  para volver a realizar la iteración y calcular de nuevo el exponente de Lyapunov de la siguiente etapa. Esto se realiza un número definido de veces, y finalmente se promedian los exponentes de Lyapunov obtenidos para cada etapa.

```

dx = 10-10 ;
rho = 0.0;
A = 0.200;
c = 0.300;
n = 40;
x1 = -1;
y1 = 1;
Lyapunovs := {};
Do[Points1 = Points[x1, y1, rho, A, c, n];
|repite
  Lognormadist = Log[Map[Norm, Points1 - Points[x1 + dx, y1, rho, A, c, n]]];
|log...|apl...|norma

  Exponente = Fit[Lognormadist, {1, x}, x, "BestFitParameters"][[2]];
|ajusta
  Lyapunovs = Append[Lyapunovs, Exponente];
|añade
  x1 = Points1[[n]][[1]]; y1 = Points1[[n]][[2]]; {100 000} ]

Mean[Cases[Lyapunovs, _Real]]
|media |casos

```

Figura 5.27: Código para calcular exponentes de Lyapunov

### 5.1.5. Exponentes de Lyapunov en el Mapeo con Flujo Gaussiano

Para las figuras 5.24 se realizó el siguiente análisis. En la figura 5.28 se muestran específicamente las tres regiones en donde se colocaron los puntos iniciales y se corrió el código de la figura 5.27.

Con lo que se obtuvieron tres exponentes de Lyapunov diferentes para tres diferentes radios de Larmor  $\rho$ .

		Puntos iniciales.		
		$(-1, 1)$	$(0, 3)$	$(-1, 5)$
$\rho$	0	0.185383	0.197413	0.19746
	0.1	0.193757	0.188618	0.198641
	0.2	0.183217	0.185934	0.180985

Tabla 5.1: Exponentes de Lyapunov para tres  $\rho$  distintas y en tres regiones diferentes. Gaussiano

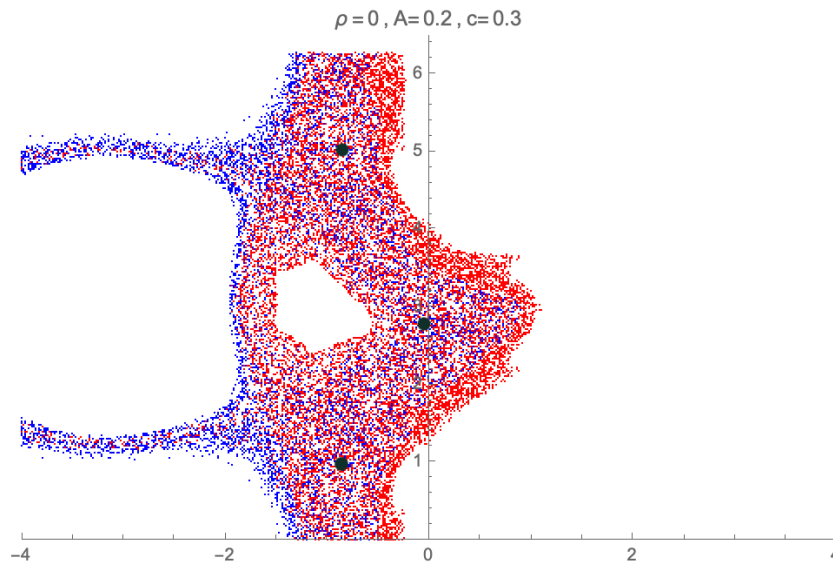


Figura 5.28: Espacio fase de Mapeo con flujo gaussiano que muestra los tres puntos en donde se inicio el código para calcular  $\lambda$ .

Pero para realizar mejor la comparación entre los exponentes para cada  $\rho$ , lo mejor fue calcular el promedio de los tres valores. Entonces:

$\rho$	$\lambda$
0	0.193419
0.1	0.193672
0.2	0.183380

Con lo que se puede concluir analíticamente que ya que el exponente de Lyapunov disminuyó al aumentar el radio de Larmor, entonces el nivel de caos en los espacios fase que está representado por el exponente de Lyapunov sí se vio reducido.

### 5.1.6. Exponentes de Lyapunov en el Mapeo con Flujo Lineal

Para las figuras 5.24 se realizó el siguiente análisis. En la figura 5.29 se muestran específicamente las tres regiones en donde se colocaron los puntos iniciales y se corrió el código de la figura 5.27.

PhaseSpaceNeg[0.0, 0.200, 0.750, 1000]

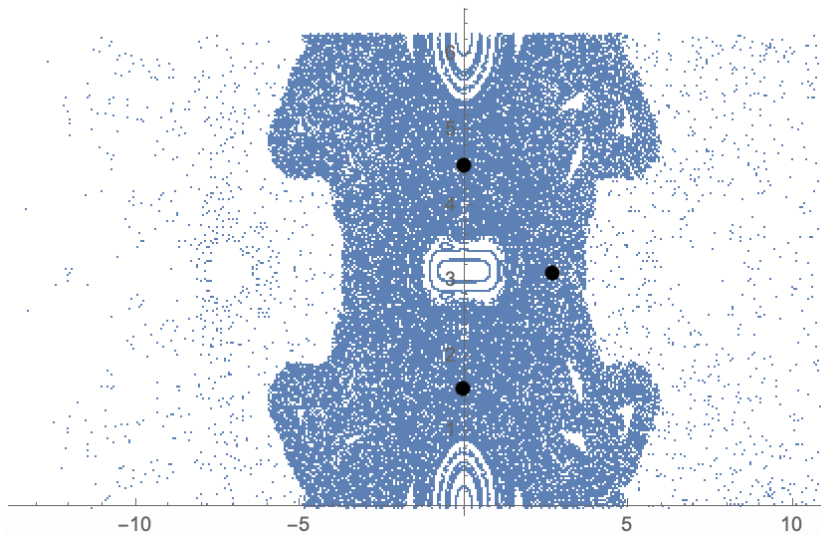


Figura 5.29: Espacio fase de Mapeo con flujo lineal que muestra los tres puntos en donde se inicio el código para calcular  $\lambda$ .

Y con esto, se obtuvieron tres exponentes de Lyapunov diferentes para tres diferentes radios de Larmor  $\rho$ :

		Puntos iniciales.		
		(0, 1.5)	(0, 4.5)	(3, 3)
$\rho$	0	0.408967	0.414147	0.39954
	0.1	0.412588	0.409136	0.412201
	0.2	0.398319	0.394021	0.405204

Tabla 5.2: Exponentes de Lyapunov para tres  $\rho$  distintas y en tres regiones diferentes. lineal

Pero para realizar mejor la comparación entre los exponentes para cada  $\rho$ , lo mejor era promediar los valores. Entonces:

$\rho$	$\lambda$
0	0.407551
0.1	0.411310
0.2	0.399181

Con lo que se concluye analíticamente que ya que el exponente de Lyapunov disminuyó al aumentar el radio de Larmor, entonces el nivel de caos en los espacios fase que está representado por el exponente de Lyapunov se redujo.

# Barreras de Transporte

La principal motivación, en fusión nuclear, para estudiar el transporte de partículas es para evitar que aumente, lo que provocaría que las partículas pierdan el confinamiento que se requiere.

Esta tesis presentará un método sencillo para encontrar curvas o mejor llamadas barreras de transporte en espacios fase, sólo para 2 grados de libertad. Los toros KAM son órbitas que se van destruyendo al aumentar la perturbación, que en este caso es la amplitud de la onda. Los toros más resistentes que sobreviven al caos son los que se identifican como barreras de transporte.

Como se mostró en la sección anterior, en el espacio se marcan las trayectorias de movimiento dentro de toros invariantes anidados con movimientos periódicos o cuasiperiódicos, que dependen de las frecuencias de movimiento  $\omega_i$ . De acuerdo a esto, el momento en el que ocurre la transición al caos de cada mapeo se muestra a través del rompimiento de la o las barreras de transporte que corresponden a los toros KAM más robustos, al aumentar los valores en los parámetros aplicados, los de amplitud, radio de Larmor y flujo zonal.

Las barreras de transporte son curvas con distinto origen dependiendo del tipo de flujo que se le aplique al mapeo. Esta diferencia radica en si el Hamiltoniano o mapeo es de torsión o no.

## 6.1. Barreras de transporte en mapeo con flujo lineal (con torsión)

Cuando el flujo o la variación es lineal, el mapeo correspondiente es de torsión. Cuando este flujo y la amplitud van aumentando su valor, los toros o curvas KAM se van a ir rompiendo; el último en romperse es el que va a determinar la barrera de transporte. Existen métodos para identificar esta curva, uno de ellos es el Método de Greene que permite encontrar los valores umbrales de los parámetros en los que se establece el caos global y por lo tanto, el rompimiento de la barrera de transporte (predice los parámetros en los que se va a romper el último toro).

Aunque es certero, en esta tesis no se va a utilizar para determinar las barreras, más bien se ocupará un criterio visual para la determinación de estas curvas.

Este criterio se basa en un código escrito en Mathematica, en el que se deja evolucionar dos puntos iniciales, uno en cada lado de donde se piensa que está la barrera. Los dos puntos iniciales son de color rojo y azul.

La determinación radica en ver para qué parámetros específicos los puntos iniciales caen del lado contrario de la barrera en el que iniciaron. Es decir, para asegurar que la barrera se rompió, todo el espacio fase tiene que estar lleno de puntos azules y rojos.

A continuación se muestran ejemplos de cómo se observan los espacios fase antes y después de romperse la barrera.

En las figuras 5.1 y 5.3 fueron mostrados los códigos utilizados primero para correr el mapeo con flujo lineal, (4.83), y después para obtener sus espacios fase. Primero hay que observar cómo funciona el código 5.3 para una sola partícula, de color rojo, en el que se le asigna los puntos iniciales  $x$  y  $y$  y los parámetros  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  que se quieran observar. Y el resultado, en particular para un conjunto de parámetros se observa en figura 6.1.

El número de iteraciones usado para detectar la barrera, en ambos mapeos, fue de  $n = 10,000$ .

Para los parámetros asignados en la figura 6.1(a), la partícula inició en un punto en donde jamás pudo salir de la órbita que se observa. Pero si se modifica, los puntos iniciales así como la amplitud y el flujo, resulta una trayectoria más amplia indicando que no está confinada en una órbita cerrada, como en 6.1(b). En cambio, si los parámetros amplitud y flujo se aumentan exageradamente, el espacio fase que aparece ahora se muestra ya caótico, como en 6.1(c). Para todos estos cambios  $\boldsymbol{\rho}$  se mantuvo igual a cero.

La prueba se realizó con diversos valores de parámetros para ver cómo variaba el espacio fase de este mapeo (como se puede constatar en la sección 6 en donde se describió el comportamiento dinámico de forma más completa del mapeo con flujo lineal), y se encontró que la última curva KAM en romperse, es decir la que sería la barrera de transporte se encuentra un tanto serpenteada y aproximadamente en las coordenadas (4.5,0), (2.7,2), (2.7,4.5), (4.5,6).

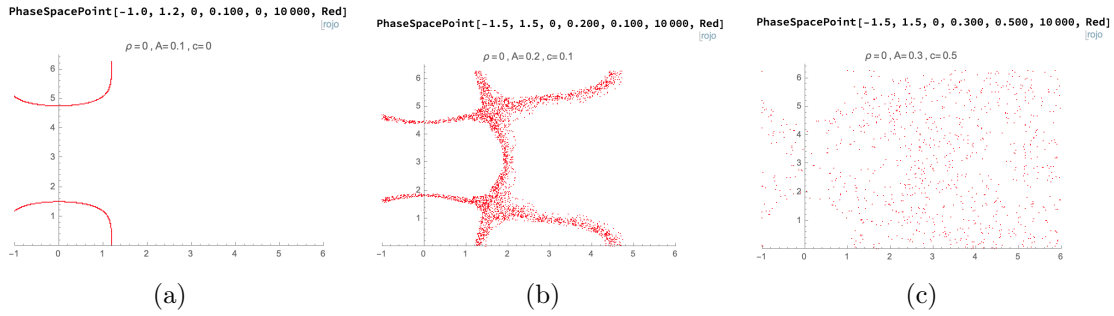


Figura 6.1: Espacios fase con parámetros distintos que muestran la aparición de la barrera de transporte cuando sólo se corre una partícula en el código. (a) La partícula se quedó dentro de la misma órbita todo el tiempo que se dejó correr el código; (b) La partícula recorrió muchas trayectorias de forma que se observa el umbral de la barrera de transporte; (c) Los parámetros fueron tan altos que la barrera de transporte se rompió y la zona se volvió completamente caótica.

Como se muestra en la figura 6.2 que se delinea de negro en donde debería permanecer la última curva KAM del mapeo o mejor llamada en este caso, la barrera de transporte que interesa conocer.

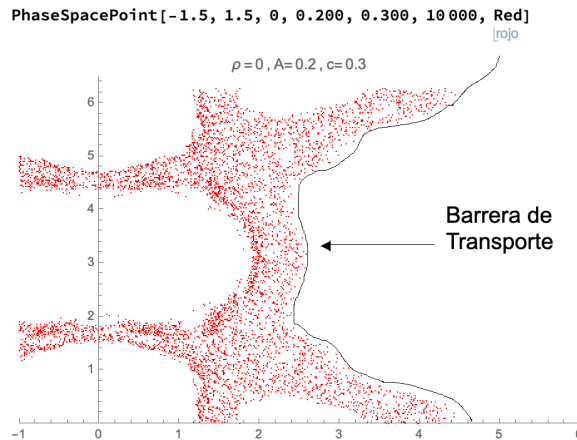


Figura 6.2: Barrera de transporte determinada a través de una serie completa de observaciones en la topología de los espacios fase para el mapeo con flujo lineal.

Bajo esta determinación, el método mencionado de los dos puntos iniciales, rojo y azul, se describe a continuación con imágenes.

Cuando se asignan diferentes parámetros como en la figura 6.3(a), la partícula que comenzó en el lado izquierdo es la de color rojo, y del lado derecho es la de color azul. El movimiento de la partícula se quedó atrapado en una de las órbitas que formó un toro en el espacio fase, y obviamente la barrera no está rota aun para esos parámetros.

Para la siguiente figura 6.3(b), aquí las partículas lograron salir de las órbitas anteriores llenando muchos espacios del plano, y a pesar de esto para los parámetros asignados, la barrera final aun no se rompe. A diferencia de las anteriores, en la figura 6.3(c), la



barrera ya se rompió, de forma que las partículas ya se encuentran en ambos lados. Es por esto que el espacio ya está lleno y mezclado de azul y rojo. Lo que quiere decir que se tiene caos global.

Los puntos en donde iniciaron las partículas fueron modificados debido a que es importante donde se van a poner porque pueden quedar siempre dentro de una zona sin caos y entonces nunca van a cruzar aunque ya no haya barrera.

Así que la elección manual de puntos iniciales fue esencial para seguir estos comportamientos y hallar las barreras de transporte.

Lo más importante a notar es el cambio que se aprecia al modificar los parámetros de amplitud y flujo. En este ejemplo se puede ver que cuando esos parámetros llegaron a ser demasiado grandes, la barrera de transporte se rompió.

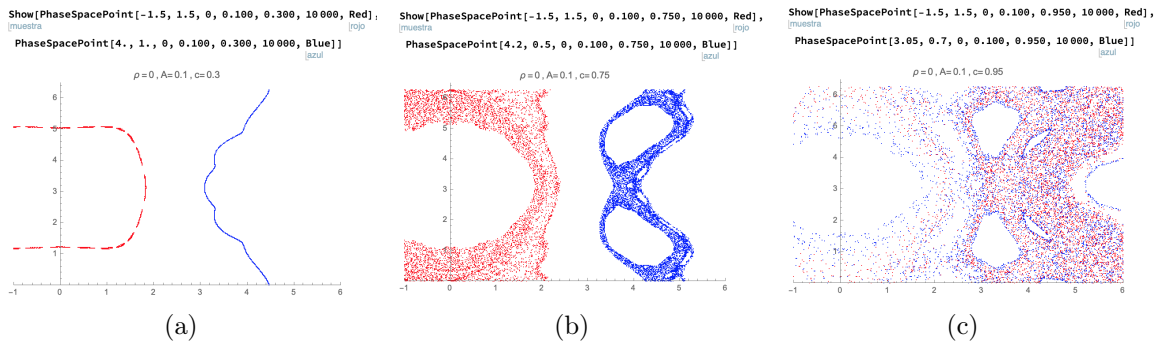


Figura 6.3: Espacios fase con diferentes parámetros, y donde se corren dos partículas (azul y roja), que muestran el umbral de la barrera de transporte de interés. (a) Ambas partículas quedaron atrapadas en una misma órbita dentro del espacio fase; (b) Bajo los parámetros dados, las partículas lograron llenar muchas partes del espacio fase, sin romperse la barrera de transporte todavía; (c) La barrera de transporte se rompió y el comportamiento en el espacio fase se volvió caótico.

Como el hecho de cambiar los parámetros uno por uno y observar lo que pasaba en cada uno iba a ser muy tardado de realizar, se implementó una pequeña modificación a la entrada para correr el código de las figuras 6.3, haciendo un barrido de parámetros.

Aquí, las partículas se inician en unos puntos  $x$  y  $y$  dados, con amplitud  $A$  también dada,  $\rho = 0$  y lo que varía (y es lo que hace que se desplieguen tantos espacios fase) es el flujo lineal agregado  $C$ .

Es decir para cada punto inicial, amplitud y radio de Larmor, el código le asignará una  $C$  distinta.

### 6.1.1. Procedimiento para la detección de barreras de transporte en mapeo con flujo lineal

En seguida se muestra un ejemplo específico, mediante una Tabla en Mathematica, de esta función donde se despliegan espacios fase para los siguientes parámetros específicos:

- Partícula roja:  $x = -1.5, y = 1.5, \rho = 0, \mathbf{A} = 0.100$ .
- Partícula azul:  $x = 2.05, y = 0.7, \rho = 0, \mathbf{A} = 0.100$ .

Para la figura 6.4(a) el parámetro  $\mathbf{C}$  se dejó correr de 0 hasta 0.500 en pasos de 0.001. Y para la figura 6.4(b),  $\mathbf{C}$  desde 0.801 hasta 0.900 en pasos de 0.001. Lo que resultó en 900 espacios fase desplegados tan sólo para estos parámetros.

La figura 6.4 sólo muestra unos cuantos espacios fase de los que realmente se corrieron, es decir, aquí no se muestran los espacios para el parámetro  $\mathbf{C}$  desde 0.501 hasta 0.800. Pero eso no quiere decir que no fueran realizados. Sólo se omitieron por falta de espacio. Dicho esto, el trabajo fue encontrar visualmente el momento en el que se mezclaban los dos colores.

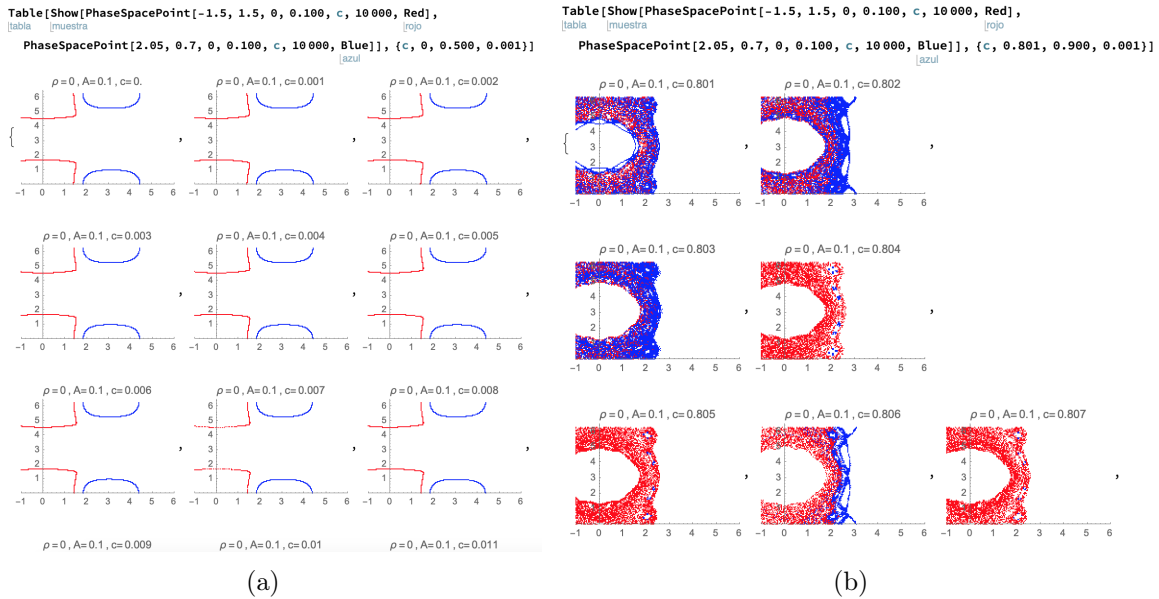


Figura 6.4: Despliegue de espacios fase con dos partículas para diferentes parámetros, dados los mismos puntos  $x$  y  $y$  de inicio. (a) Para  $A = 0.100$  y  $C$  de 0 a 0.500 en pasos de 0.001; (b)  $A = 0.100$  y  $C$  de 0.801 a 0.900 en pasos de 0.001.

Se acaba de mencionar algo no del todo aplicable, porque no es tal cual así. Por ejemplo, en la figura 6.4(b), en donde ya se ven mezclados los colores podría pensarse que la barrera se rompió, pero como ya se remarcó en la figura 6.2, la barrera se encuentra mucho más adelante de lo que se puede observar en 6.4(b). Entonces no, en ninguno de

los espacios fase de 6.4 la barrera se ha roto. El mezclado observado de los puntos se debe a la aleatoriedad de las condiciones iniciales, pudiendo ocurrir que las condiciones iniciales para los dos puntos estuvieran del mismo lado de la barrera, por ejemplo en la partícula azul, que aunque debería haber iniciado en un punto del lado derecho, estaba tan cerca de la barrera que en realidad su movimiento ocurrió ya en el lado izquierdo, mezclándose con la roja, pero como del lado derecho no se observa ningún punto, se puede decir que la barrera determinada aun no se ha roto, a pesar de dicha mezcla.

Una vez que los 900 espacios fase fueron desplegados, como primer método de prueba se intentó resaltar el primer espacio en el que se observara que, efectivamente, la barrera se había roto, pero parecía ser no tan confiable, debido a la aleatoriedad de los puntos iniciales cada que se corre una segunda o tercera vez la entrada individual como el de las figuras 6.3. Es por esta razón que se optó mejor por destacar absolutamente todos los parámetros para los que la barrera ya se hubiera roto.

De esta forma, para los parámetros dichos arriba, la primer barrera rota detectada se encontró en  $C = 0.843$ , figura 6.5(a), y a partir de esta primer barrera se fueron encontrando aleatoriamente espacios fase en donde si se rompía y adonde no se rompía, como en la figura 6.5(b).

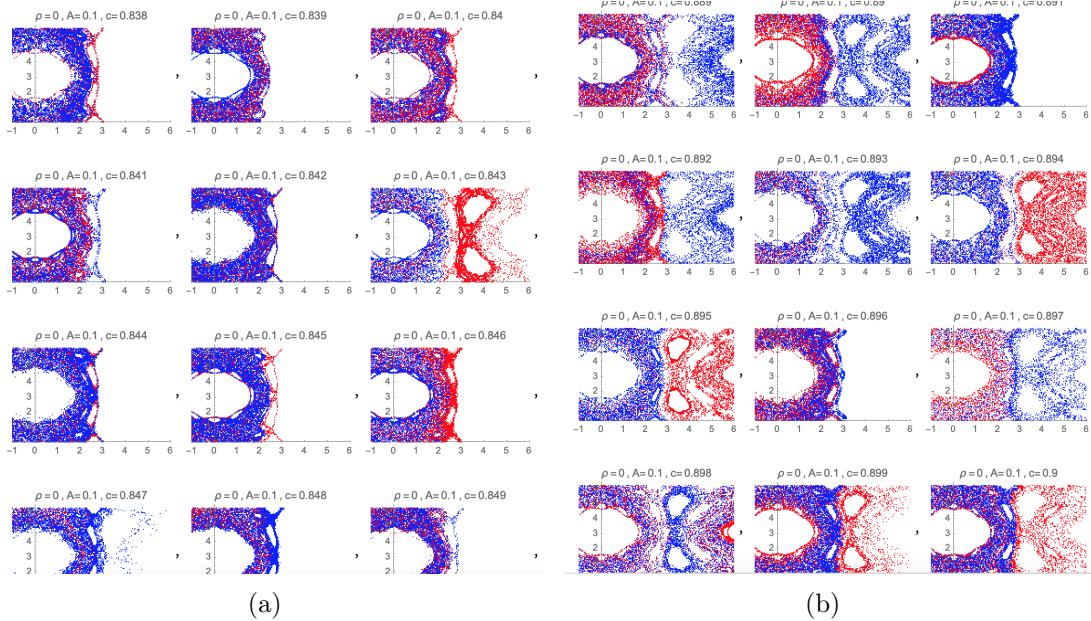


Figura 6.5: Despliegue de espacios fase con dos partículas para diferentes parámetros similar a la figura 6.4, pero aquí ya ocurrió el rompimiento de la barrera de transporte. (a) Cuando  $C = 0.843$  ocurre el primer rompimiento de barrera de transporte; (b) La barrera de transporte se rompe y restaura de forma aleatoria.

Este procedimiento fue realizado para amplitudes igual a  $\mathbf{A} \in \{0.100, 0.300\}$  en intervalos de 0.005. Cada una de las amplitudes para radios de Larmor igual a  $\rho = 0, 0.100, 0.200$ .

Y por supuesto para cada uno de estos parámetros  $\mathbf{C}$  se corrió desde 0 hasta 0.900 en pasos de 0.001.

Considerando estos números, el número total de espacios fase para el mapeo con flujo lineal que se obtuvieron fue de 110,700.

### 6.1.2. Discusión de los resultados

Las curvas KAM son las trayectorias que llevan las partículas y se mueven sobre el eje  $y$ . Que es la misma dirección que recorre el flujo, así que como se puede ver en los diagramas de la sección 6, si un espacio presenta líneas bien formadas, se puede decir que estas actúan como barreras de transporte porque impiden que las partículas se salgan hacia la dirección del eje  $x$ .

Al aumentar la amplitud de las ondas, las órbitas se alargan, haciendo que el caos se haga más grande, como se observa en toda la serie de figuras de la sección 6.1.1. Sólo dejando algunas órbitas aun cerradas. Pero al aumentar el tamaño de  $\mathbf{C}$  ocurre lo mismo, pero de una forma más rápida, porque transporta a las partículas a lo largo de la dirección poloidal  $y$ .

Cuando  $A$  aumenta las curvas KAM se van rompiendo, es por esto que la forma de las órbitas se va deformando o incluso desapareciendo.

Así mismo, al aumentar tanto  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{C}$ , las órbitas se rompen casi súbitamente, iniciando la zona caótica más rápido.

Respecto al radio de Larmor, parece que al ir aumentándolo fuera restaurando las órbitas rotas, hay que observar las figuras 5.11 en donde a través del análisis de los exponentes de Lyapunov de la sección 6.1.3 se puede afirmar que el caos se extendió el espacio fase.

Las curvas o barreras se van rompiendo, conforme  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  aumentan, siempre resistiendo hasta el último momento la curva más gruesa, que es la que se le llamará *barrera de transporte central* y es la que se pudo localizar al correr diferentes valores (o iterarlos de nuevo) y ver que era la que siempre resistía parámetros muy altos. Esta barrera se mostró en la figura 6.2.

También se mencionó que dada la primer ruptura, para los siguientes valores de parámetros podía ocurrir que se volviera a reconstruir o a destruir aleatoriamente. La explicación para este hecho se basa en el teorema de Aubry-Mather, el cual dice que las superficies KAM que se rompen se convierten en superficies Cantori, y estas permiten que algún número pequeño de puntos las cruce. De esta forma parece que las barreras se vuelven

a reconstruir, pero es debido a las excepciones que logran hacer las superficies Cantori [19].

Pero para adentrarse más en esta teoría de Aubry-Mather se va a referir al artículo [20] el cual contiene una explicación mucho más detallada y teórica del teorema mencionado.

La destrucción y aparición de barreras fue reflejada en varias gráficas donde aparecen los diferentes valores de amplitud contra los de flujo. Que dependen de los datos que ya se mencionaron en la subsección anterior.

Estas gráficas se muestran más adelante en las figuras 6.12, 6.13 y 6.14.

## 6.2. Barreras de transporte en mapeo con flujo Gaussiano

Cuando la variación del flujo agregado (zonal) es no monótona, o el flujo no es lineal, el mapeo correspondiente será ahora el que no tiene torsión. A diferencia del de torsión, las barreras de transporte en éste ya no son solamente el último toro KAM en romperse.

Volviendo al mapeo (4.10), hay que observar que cuando la función  $g(x_i, y_{i+1}) = 0$  las iteraciones de las condiciones iniciales van a permanecer en líneas o curvas que se envuelven en el dominio que está en  $x$ . Bajo este supuesto, la línea formada en  $y = 0$  será llamada la *curva de cizalla nula*, y se le llama de esa forma porque en esa parte no se cumple la condición de torsión, es decir (4.11) va a ser igual a cero. La cizalla aquí es la variación de la velocidad  $\Omega$  con  $x$ . [17]

Debido a que falla la condición de torsión, la teoría de KAM no se aplica en este tipo de mapeos. [17]

Por esta razón, en el umbral de caos, las barreras de transporte se asocian a la curva de cizalla nula.

La curva de cizalla nula es una superficie robusta que se localiza en el máximo de velocidad, o flujo zonal agregado. Así, la destrucción de la superficie de cizalla nula es la que determina el caos global, cuando las barreras de transporte desaparecen [17].

En la vecindad de la barrera central de transporte se crean bifurcaciones (o aberturas en las curvas) que cambian la topología del espacio fase, y éstas son las llamadas *separatrices* [17].

Las separatrices son las órbitas que separan los puntos hiperbólicos de las regiones donde existen curvas KAM externas a las islas o puntos hiperbólicos.

A causa de la degeneración del mapeo o Hamiltoniano, hay dos o más regiones en las que el flujo o perturbación puede tener resonancias creando pares de cadenas de islas delimitadas por las separatrices. Se ha observado que si la amplitud crece se tiene el fenómeno de reconexión de separatrices, creándose una sola separatriz a partir de las dos cadenas de islas que pueden ser de tipo homoclínico o heteroclínico según sea que la separatriz cruce sobre sí misma o no.

Así que en este sistema, las curvas de cizalla nula van a producir barreras de transporte robustas. Decir robustas significa que los círculos o curvas invariantes van a persistir a pesar de que las curvas invariantes a su alrededor se hayan destruido ya, a causa de la intensidad de la perturbación. [12]

Después de esta breve explicación, se procede ahora a analizar los espacios fase del mapeo (4.84) arrojados por los códigos mostrados en las figuras 5.15 y 5.16.

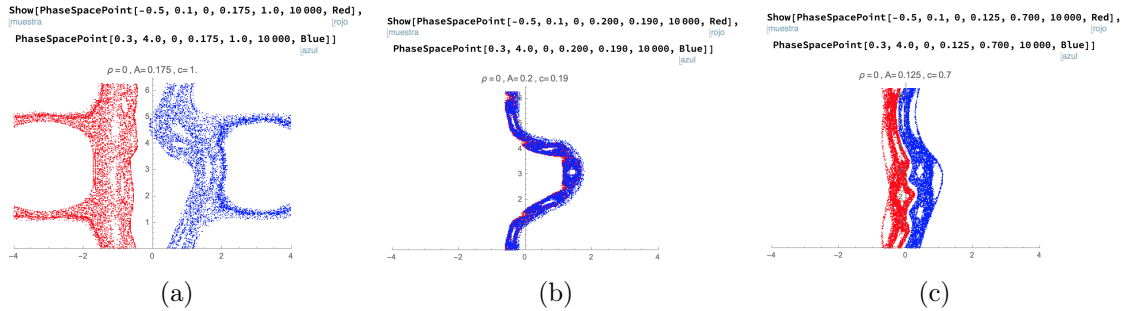


Figura 6.6:

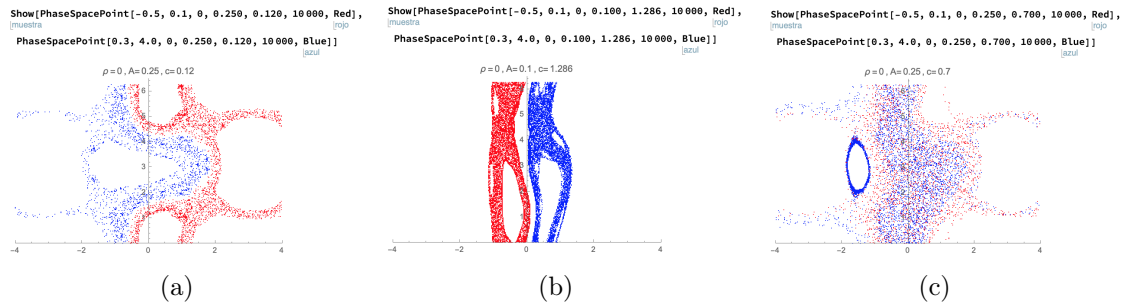


Figura 6.7:

La serie de figuras 6.6 y 6.7 muestran que en este mapeo la separación debida a la barrera puede verse muy diversa, pero finalmente la curva de cizalla nula, que se puede asociar a la barrera de transporte última se ve en la figura 6.8.

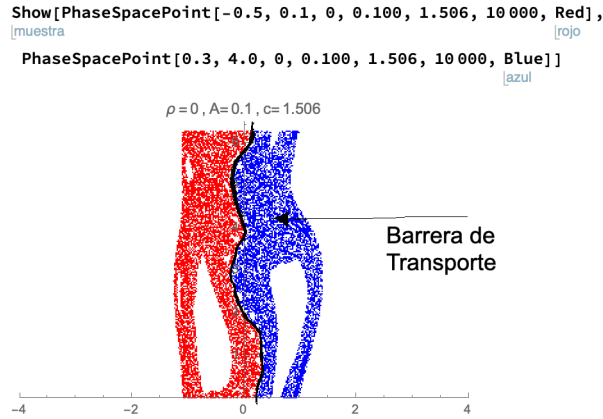


Figura 6.8: Barrera de transporte determinada a través de una serie completa de observaciones en la topología de los espacios fase para el mapeo con flujo gaussiano.

### 6.2.1. Procedimiento para la detección de barreras de transporte en mapeo con flujo Gaussiano

Se siguió el mismo procedimiento descrito en la sección 7.1.1, y se muestra un ejemplo en específico, mediante la Tabla en Mathematica, cuya función despliega espacios fase para los siguientes parámetros.

- Partícula de color rojo:  $x = -0.5, y = 0.1, \rho = 0, \mathbf{A} = 0.100$ .
- Para la partícula de color azul:  $x = 0.3, y = 4.0, \rho = 0, \mathbf{A} = 0.100$ .

Para la figura 6.9 el parámetro  $\mathbf{C}$  dejándose correr desde 0 hasta 1.0 en pasos de 0.001. Y para el siguiente conjunto se dejó correr de 1.0 hasta 2.0 en pasos de 0.001.

Como en la descripción anterior se dijo, no se pueden mostrar absolutamente todos los espacios fase que se obtuvieron, pero se muestran en las figuras 6.9, 6.10 y 6.11 algunos de los espacios en donde aun no se rompe la barrera, y otros en los que la barrera ya se rompió. Las barreras de transporte rotas para este tipo de flujo fueron mucho más claras de detectar. Más adelante se explicará con detalle la razón de este hecho.

Ya que los 2000 espacios fase fueron desplegados para la amplitud dada, se intentó realizar el mismo procedimiento inicial de detectar la primer barrera rota, pero, aunque sí fue más sencillo ubicar esta barrera que en la del flujo lineal, tampoco fue totalmente claro decidir cuál era la primera de todas; Por lo que se procedió a realizar lo mismo,

detectar todos los parámetros en los que se veía que la barrera ya se había roto. De esta forma, para los parámetros que se acaban de mencionar arriba, la primer barrera rota fue encontrada cuando  $C = 0.523$ , que se puede observar en la figura 6.9(b) y al igual que en el flujo lineal, a partir de esta primer ruptura se fueron encontrando casi aleatoriamente más espacios fase con barreras rotas y reconstruidas.

Para este mapeo pareciera que hubo más variaciones en cuanto a la apariencia de la ruptura de barreras de transporte, como en 6.10, en donde aleatoriamente los colores del mapeo se ven o rojos o azules, pero ambos mostrando evidentemente la ruptura de la barrera. Aquí ya es más clara la ruptura porque se ve la mezcla de colores en el espacio fase, ver figura 6.11.

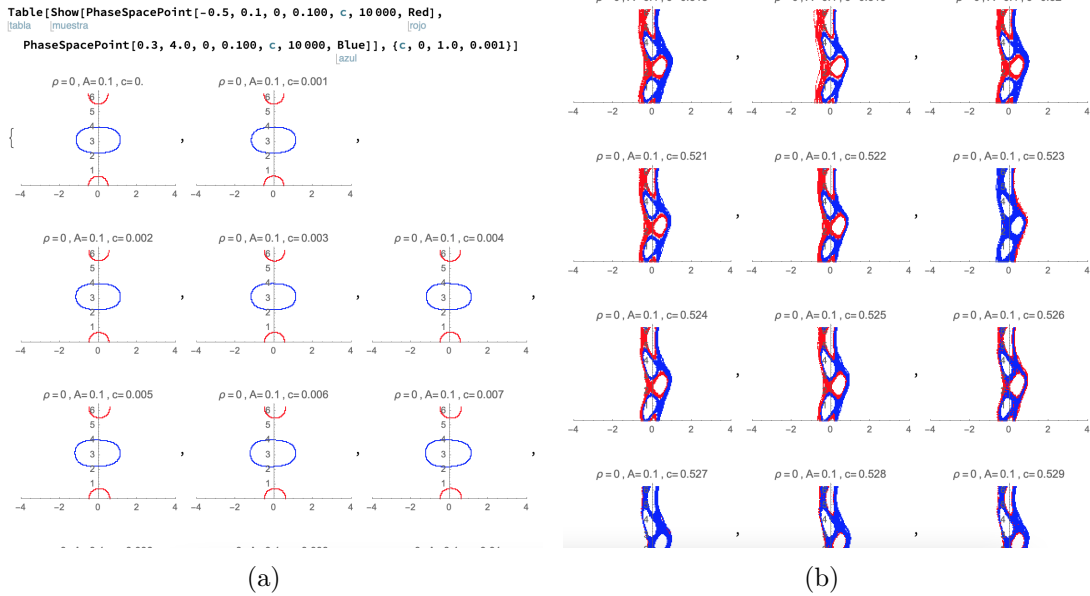


Figura 6.9: Despliegue de espacios fase con dos partículas para diferentes parámetros cuyos puntos de inicio  $x$  y  $y$  son los mismos en todos. (a) Las partículas aun se mantienen dentro de sus órbitas. (b) La barrera de transporte se rompió por primera vez cuando  $C = 0.523$  y a partir de ese momento las barreras se rompen y restauran (supuestamente) de forma aleatoria.

Este procedimiento fue realizado para amplitudes igual a  $A \in \{0.100, 0.300\}$  en intervalos de 0.005. Cada una de las amplitudes para radios de Larmor igual a  $\rho = 0, 0.100, 0.200$ . El parámetro  $C$  se corrió desde 0 hasta 2.0 en pasos de 0.001. Considerando estos valores, el número total de espacios fase para el mapeo con flujo gaussiano que se obtuvieron fue de 246,000.



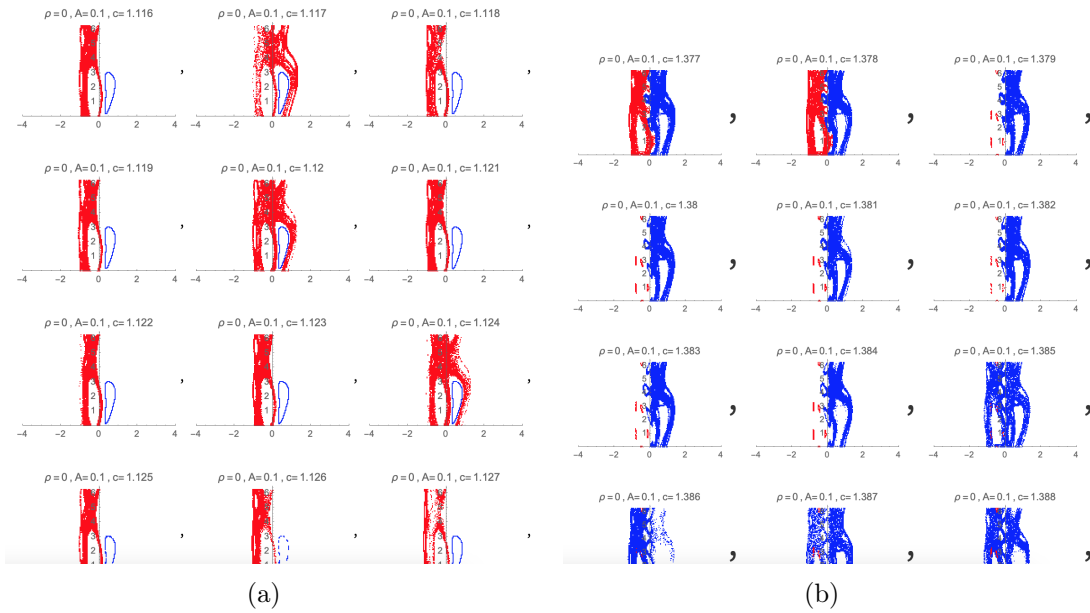


Figura 6.10: Despliegue de espacios fase con dos partículas para diferentes parámetros similar a la figura 6.9, pero aquí ya ocurrió el rompimiento de la barrera de transporte tanto en (a) como en (b).

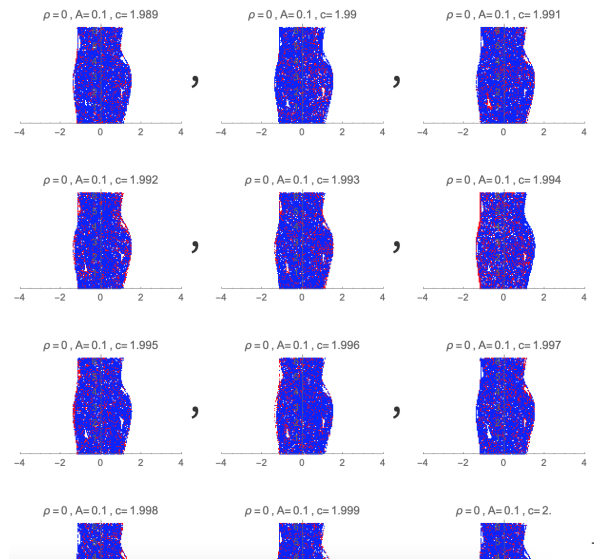


Figura 6.11: Despliegue de espacios fase en donde se observa zona caótica, es decir, ambas partículas ya cruzaron la barrera de transporte (central) y además, para estos parámetros tan grandes, esta barrera ya no se vuelve a restaurar como en el caso del mapeo anterior.

El comportamiento de la barrera de transporte para cada uno de los parámetros se ilustró en las gráficas 6.15, 6.16 y 6.17, su explicación y discusión se tratarán más adelante.

## 6.2.2. Discusión de los resultados

La teoría de KAM no aplica en este mapeo porque la condición de torsión no se cumple (porque se hace cero) en la superficie más robusta, que es en donde se localiza el máximo de la velocidad.

Entonces es sobre las destrucciones de éstas curvas en las que hay que poner atención porque son las que determinarán el inicio del caos

Estas barreras parecen ser más robustas y además traen consigo un efecto que no se vio en el caso anterior. Hay que fijarse en las figuras 6.6 y 6.7 en las que se muestran las diferentes formas en que las barreras más robustas se pueden presentar. En todas se ven diferentes separaciones entre ambos lados. Sólo en 6.7(c) se muestra una de las muchas formas en las que el caos se expandió globalmente. Pero en general, la superficie más robusta y duradera que se pudo observar en todas las corridas o iteraciones realizadas fue la que se mostró en la figura 6.8. Esta barrera es la que se piensa que es la más resistente a romperse debido a que era la que más se mantenía ahí a pesar del aumento gradual en los valores de los parámetros.

Además de esta barrera escogida, existen otras dos, podría llamárselas *barreras laterales*, que son las que se encuentran a los lados extremos de ambos colores, que de igual forma persisten aunque los parámetros aumenten cada vez más. Esto se ve claro en las figuras 6.11, donde la barrera central ya se ha roto, pero las laterales siguen ahí a pesar de que los valores de los parámetros ya están muy altos. El rompimiento de la barrera central ocurre porque el flujo gaussiano es zonal, es decir es localizado, y tiene su mínimo justamente alrededor del 0. En donde se encuentran las barreras laterales el flujo no afecta, por esta razón ahí no se rompen las barreras.

Respecto al radio de Larmor, parece que al ir aumentándolo fuera restaurando las órbitas rotas, hay que observar las figuras 5.24 en donde a través del análisis de los exponentes de Lyapunov de la sección 6.1.3 se puede afirmar que el caos se extendió el espacio fase.

Se había dicho que el rompimiento de las barreras era más evidente en este tipo de mapeos, esto se puede ver gráficamente al comparar las figuras 5.12 y 5.13 con 5.23 y 5.24. A pesar de que ya el caos se extendió en las cuatro imágenes, en los últimos dos, se alcanza a ver todavía las líneas que conformaron a las barreras más robustas. En cambio en el primer par ya no se ve absolutamente ningún rastro de las barreras ya destruidas. Este comportamiento matemáticamente se explica porque en el mapeo con torsión se comporta más regular debido a la no existencia de derivadas singulares. [19]

## 6.3. Ruptura de Barrera de Transporte

Para determinar cómo afectan los parámetros del mapeo a la ruptura de las barreras de transporte se graficaron con puntos los valores de los parámetros de amplitud y flujo,  $\mathbf{C}$  vs  $\mathbf{A}$ , para los casos descritos en la sección anterior, en los que la barrera se rompía. Cada diagrama se realizó para tres valores de radio de Larmor:  $\rho = 0, 0.100, 0.200$ .

### 6.3.1. Diagrama estilo ala de pájaro

Este tipo de diagrama se realizó con la intención de localizar con exactitud el umbral de rompimiento de barreras, para el caso que se describió donde las barreras alterna o aleatoriamente se rompían y se volvían a reconstruir, recorriendo el espacio entero de parámetros ya mencionados. La gráfica es un primer intento por mostrar el umbral lo más exacto posible. No se puede decir *exactitud* con toda la seguridad, justamente por la aleatoriedad de las implicaciones del cálculo numérico, los parámetros podrían variar en algunos decimales cada que se vuelva a iterar, pero lo que sí se puede asegurar es que el error no puede ser nada significativo.

A este estilo de gráfica se le suele llamar de *ala de pájaro* debido a la similitud con las plumas de las alas de un pájaro. Tienen una estructura tipo fractal muy interesante, la referencia [21] detalla más al respecto.

El diagrama muestra  $\mathbf{A}$  vs  $c$  (en esta subsección  $c = \mathbf{C}$  de la sección anterior) en la que se hizo un barrido sobre  $c$  manteniendo fija la amplitud y luego barriendo  $\mathbf{A}$ , es por eso que en el diagrama se ven líneas verticales perpendiculares al eje de  $\mathbf{A}$ . Al ir variando  $c$ , los puntos rojos indican que la barrera se rompió, es decir la parte blanca indica que hay barrera. Este procedimiento fue para ambos mapeos. Que en seguida se describirán a fondo.

## Mapeo con flujo lineal

Para  $\rho = 0$  :

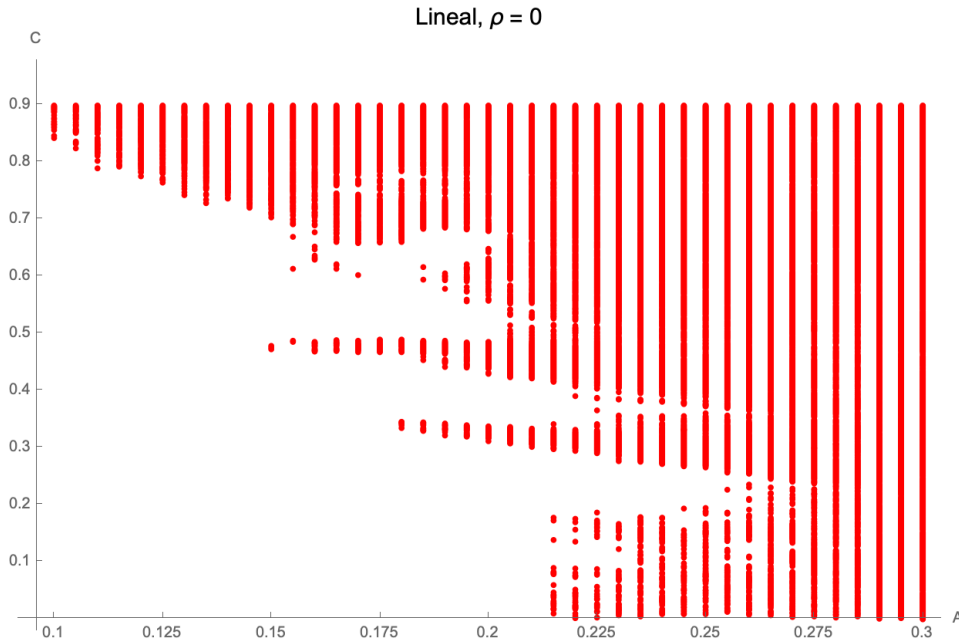


Figura 6.12: Diagrama fractal del mapeo con flujo lineal de  $c$  vs  $A$ ,  $\rho = 0$ . La zona en rojo se mantiene la barrera central, en la zona blanca ocurrió el rompimiento de la barrera central.

En el diagrama 6.12, fueron graficados 16,788 puntos o parámetros para los que la barrera se rompió. Se observa que para la primer amplitud,  $A$ , la primera vez que se rompe la curva KAM o barrera, es aproximadamente para un flujo  $c = 0.840$ . A partir de ahí ocurren casi de corrido los demás rompimientos. Para las siguientes amplitudes, el primer rompimiento ocurre a cada vez menor flujo  $c$ . Notar que cuando aproximadamente  $c = 0.480, 0.330, 0.190$  (dentro del diagrama se ven como “picos” que sobresalen del área color blanco), la barrera se rompe por primera vez, pero se vuelve a restaurar varias iteraciones después, hasta que se rompe definitivamente y sólo para contados parámetros se restaura una sola vez después de esto. Los parámetros correspondientes a la amplitud para los mencionados de  $c$ , están en  $A = 0.150, 0.175, 0.220$ . Con base en estos picos, ocurre otra cosa interesante, ya que en aproximadamente  $c = 0.660, 0.5, 0.360, 0.250, 0.100$ , la curva KAM no se rompe aun a pesar de que alrededor de esas líneas ‘blancas’ las barreras ya están completamente rotas. Para un trabajo posterior podría realizarse el mismo procedimiento pero para valores aun más pequeños dentro de esas zonas; o bien revisar cuidadosamente si estos valores tienen algo que ver con el inverso de la razón áurea, y mediante el método de Greene ver si efectivamente estos son los parámetros teóricos exactos de rompimiento de barrera de transporte para este mapeo.

Para  $\rho = 0.100$  :

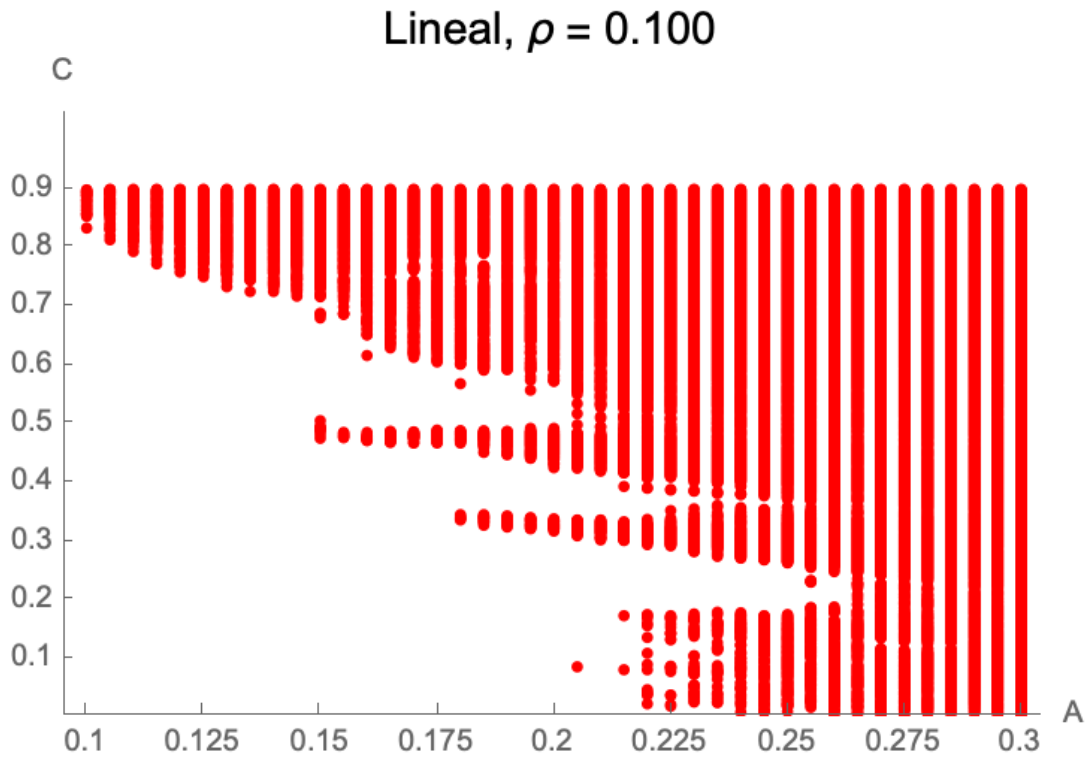


Figura 6.13: Diagrama fractal del mapeo con flujo lineal de  $c$  vs  $A$ ,  $\rho = 0.100$ . La zona en rojo se mantiene la barrera central, en la zona blanca ocurrió el rompimiento de la barrera central.

En el diagrama 6.13, se graficaron 17,591 puntos de parámetros en donde la barrera ya se había roto. Para la primer amplitud, la primer barrera se rompió aproximadamente en  $c = 0.820$ , se restaura después algunos valores, y posteriormente se volvió a romper. Y de igual forma, la barrera se fue rompiendo más rápido mientras el flujo  $c$  iba disminuyendo y  $A$  aumentando. Los picos sobresalientes de color rojo se encontraron ahora en aproximadamente  $c = 0.900, 0.510$  y  $0.150$ , y amplitud  $A = 0.150, 0.175$  y  $0.205$ . Mientras que las líneas blancas donde la barrera no se rompe aun a pesar de que en sus alrededores ya ocurrió es para  $c = 0.820, 0.350, 0.190$  y  $0.050$ . Estos espacios en blanco parecen ser menos que en el diagrama anterior. Una razón podría deberse al aumento en el radio de Larmor, que como ya se mencionó, estos dentro de los espacios fase ayudan a restaurar las órbitas rotas.

Para  $\rho = 0.200$  :

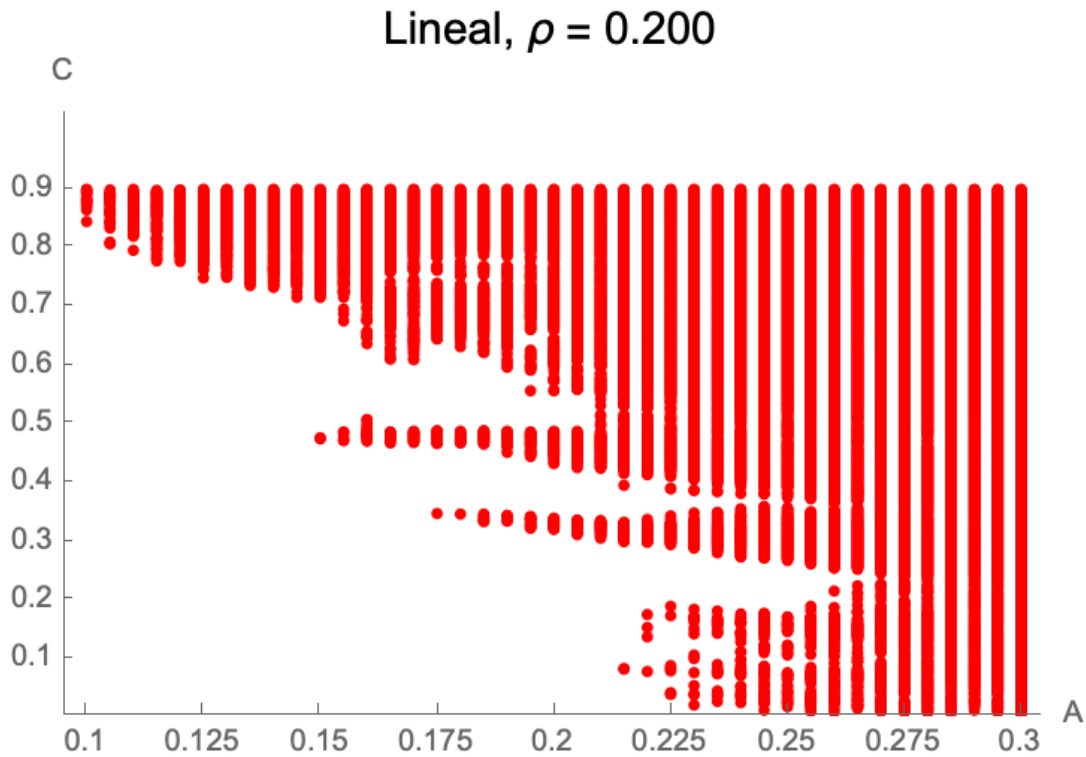


Figura 6.14: Diagrama fractal del mapeo con flujo lineal de  $c$  vs  $A$ ,  $\rho = 0.200$ . La zona en rojo se mantiene la barrera central, en la zona blanca ocurrió el rompimiento de la barrera central.

En este diagrama 6.14, se graficaron 16,474 puntos donde los parámetros mostraron barreras de transporte rotas. Y al igual que los dos anteriores, se sigue la misma tendencia de picos sobresalientes. Pero los parámetros para este caso son en aproximadamente  $c = 0.480, 0.340, 0.090$ , en amplitud corresponden a  $A = 0.150, 0.175, 0.220$ . Y las líneas en blanco se encuentran en  $c = 0.505, 0.350, 0.220$  y  $0.110$ . Aquí parecería, si es que es la razón, que el aumento en el radio de Larmor no causó algún efecto reparador de barreras, ya que no se distingue disminución considerable de puntos rojos.

Finalmente, se puede decir que como en este mapeo la última curva en romperse es la que determina la barrera de transporte que se rompe, y esta curva es la más irracional. Entonces, mediante trabajos posteriores se podrían usar métodos más avanzados para poder ubicar los valores exactos de los parámetros para los que esta curva se rompe.

## Mapeo con flujo gaussiano

Para  $\rho = 0$  :

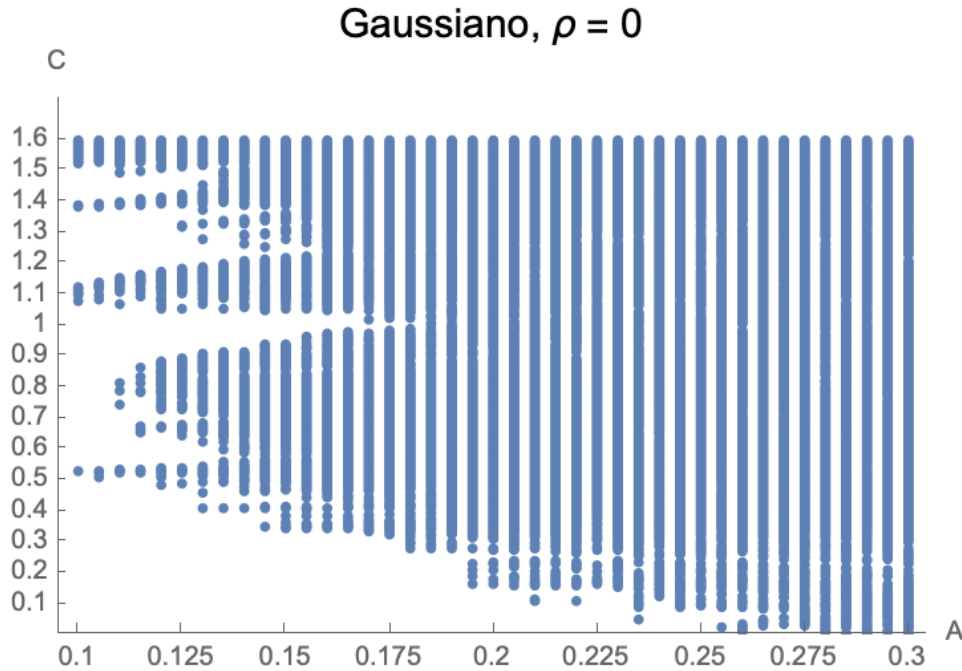


Figura 6.15: Diagrama fractal del mapeo con flujo gaussiano de  $c$  vs  $A$ ,  $\rho = 0$ . La zona en azul se mantiene la barrera central, en la zona blanca ocurrió el rompimiento de la barrera central.

El diagrama de la figura 6.15, se graficaron 9,012 puntos cuyos valores de parámetros indicaron barrera rota. El rango de  $c$  fue aumentado hasta 1.6, a diferencia de los de flujo lineal, que sólo llegaron hasta 0.9. De igual forma se observan los picos sobresalientes pero se alcanzan a ver menos agudos que los anteriores, aquí se encuentran aproximadamente en  $c = 1.390$ ,  $1.100$ ,  $0.780$  y  $0.520$ , que corresponden a amplitudes pequeñas de entre  $A = 0.100$  y  $0.125$ . Hay dos líneas blancas que están en  $c = 1$  y  $0.250$  aproximadamente. Estas líneas blancas dan a pensar que de igual forma podrían encontrarse en parámetros más pequeños de los ya graficados, valores para los cuales la barrera se destruyera o se volviera a restaurar. Se ha mostrado que la frontera umbral para el rompimiento de las barreras de transporte es de tipo fractal y por eso muestra esa forma tan irregular. los diagramas de alas de pájaro (para mayor detalle y explicación de los mismos se puede revisar la referencia [21]) son muy usados por la variedad de información que pueden proporcionar.

Para  $\rho = 0.100$  :

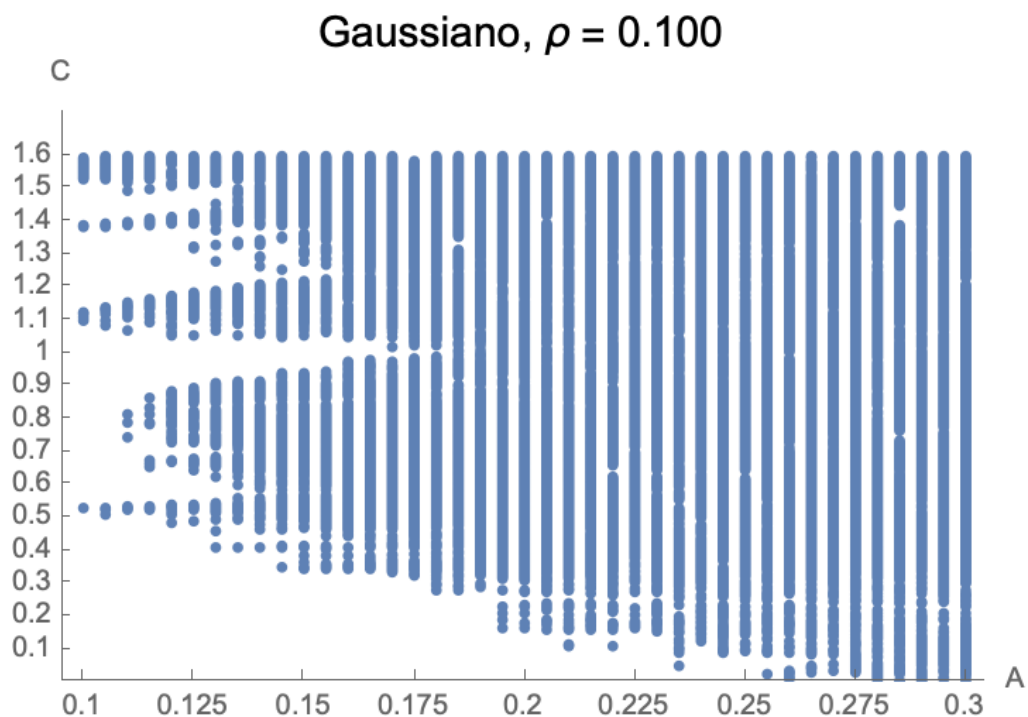


Figura 6.16: Diagrama fractal del mapeo con flujo gaussiano de  $c$  vs  $A$ ,  $\rho = 0.100$ . La zona en azul se mantiene la barrera central, en la zona blanca ocurrió el rompimiento de la barrera central.

En el diagrama de la figura 6.16 se graficaron 8,887 puntos de parámetros donde la barrera ya se había roto. Los picos sobresalientes realmente no cambiaron mucho a los del anterior diagrama. A excepción de que en el área azul se ven muchos puntos blancos distribuidos aleatoriamente. Es decir, hubo más intermitencia en cuanto a la restauración momentánea de barreras de transporte. Pudiéndose deber al aumento en el radio de Larmor.



Para  $\rho = 0.200$  :

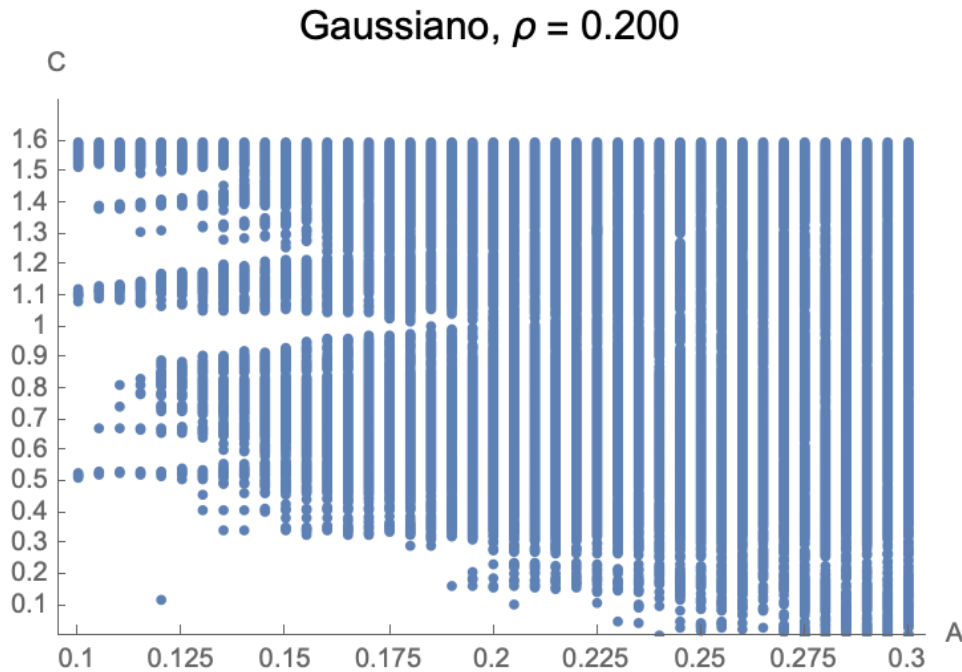


Figura 6.17: Diagrama fractal del mapeo con flujo gaussiano de  $c$  vs  $A$ ,  $\rho = 0.200$ . La zona en azul se mantiene la barrera central, en la zona blanca ocurrió el rompimiento de la barrera central.

En el diagrama de la figura 6.17 se graficaron 8,916 puntos para los que los parámetros indicaron rompimiento de barrera. Los picos prácticamente se mantuvieron igual que en los anteriores, a excepción de que surgió uno nuevo en  $c = 0.690$ , y aunque pudiera parecer insignificante, surgió un rompimiento extraño en aproximadamente  $c = 0.110$  y  $A = 0.120$ . Esto cualitativamente no tiene significado alguno, más que atribuirlo a la aleatoriedad de los puntos. Y comparado con el caso anterior, donde  $\rho = 0.100$ , los puntos blancos intermitentes dentro de la zona azul ya no aparecen con este nuevo radio de Larmor.

Finalmente, como ya se había mencionado, la barrera que se intenta hallar es la curva de cizalla nula, que es la más robusta. Esta podría ser la razón por la que en los tres diagramas azules, la zona azul, o donde la barrera se rompió, se ve mucho mayor que los diagramas rojos del mapeo con flujo lineal. Es decir, una vez rota la barrera, difícilmente se pudo volver a restaurar. Esta es la principal diferencia entre ambos mapeos.

### 6.3.2. Anexo de Ruptura de barrera de transporte

El trabajo de la sección anterior sirvió para conocer cualitativamente la dinámica en la ruptura de barreras de transporte al modificar los parámetros de flujo  $C$  (aquí  $C = \mathbf{C} = c$ , por la notación usada en secciones anteriores), respecto a la amplitud  $A$ , dejando siempre fijo un valor para el radio de Larmor  $\rho$ . Pero la dinámica no está completa hasta conocer cómo varían esos mismos parámetros entre sí pero de distinta forma a la ya realizada.

De acuerdo a esto, el último diagrama se pudo elaborar realizando las mismas corridas o iteraciones en el mapeo con flujo gaussiano, pero ahora variando  $C$  respecto a diferentes radios de Larmor  $\rho$ , y dejando constante el valor de la amplitud.

Es decir, para un valor fijo de  $A = 0.5$ , se corrió  $C$  desde 0.015, hasta 1.605 en pasos de 0.015 (siendo 106 espacios fase sólo para un valor de  $\rho$ ), y para  $\rho$  se iteró desde 0 hasta 2.7 en pasos de 0.025.

Se utilizaron los mismos códigos que para los diagramas anteriores, únicamente cambiando  $\rho$ ,  $A$  y  $C$  del anterior, por  $A$ ,  $C$  y  $\rho$ , respectivamente.

En total se obtuvieron 11,448 espacios fase para poder realizar el diagrama que se muestra a continuación.

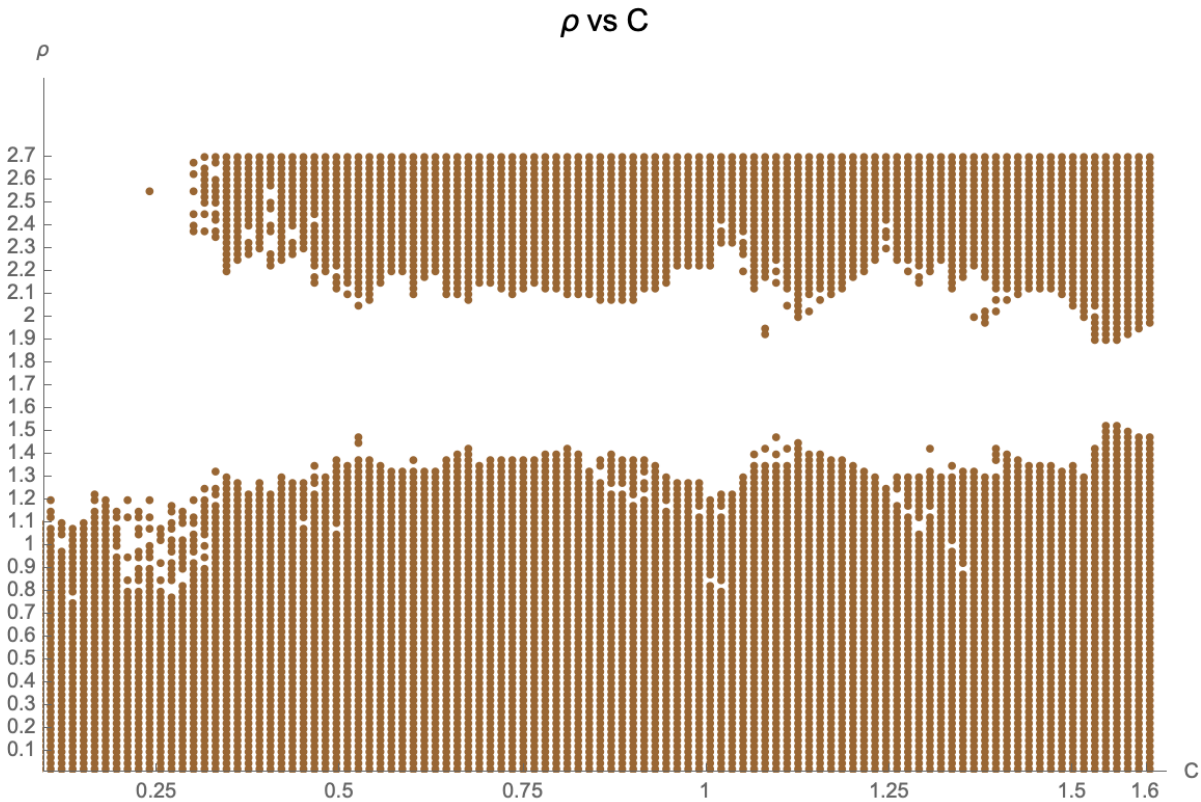


Figura 6.18: Diagrama fractal del mapeo con flujo gaussiano de  $\rho$  vs  $C$ , con  $A = 0.5$  constante. La zona en dorado cuando la barrera de transporte ya se rompió, y en la blanca se mantiene la barrera.

En el diagrama 6.18, al igual que los anteriores que tienen estilo de *ala de pájaro*, la barrera se mantiene en el espacio en blanco, y se rompe donde están los puntos dorados. Pero ocurre una configuración que podría parecer extraña, pero se logra explicar con base en la función de Bessel de orden 0,  $J_0$ , cuyo argumento es  $\sqrt{2}\rho$ , que aparece en el mapeo gaussiano (4.84). La brecha blanca intermedia existe debido a los ceros de la función  $J_0$ . Al graficar los ceros de la función de Bessel, se nota siempre que el primer cero de  $J_0$  se encuentra en aproximadamente 2.4. De acuerdo a esto, al graficar ahora la función  $2\pi A J_0(\sqrt{2}\rho)$ , con  $A = 0.5$ , ahora el máximo cambia, y el primer cero es aproximadamente en 1.7. Es por eso que la brecha blanca en el diagrama aparece alrededor de 1.7, debido a que en ese intervalo es en donde dicha función se hace cero o casi cero. Es por eso que la amplitud se haría cero o casi cero y en esa parte las barreras aun no se rompen porque la amplitud resulta ser muy pequeña para llegar al umbral de rompimiento de la barrera de transporte. Ver el diagrama 6.18.

Intuitivamente se puede señalar que por la oscilación de la función de Bessel, el patrón de puntos donde aparece y desaparece la barrera debería repetirse para los siguientes ceros de la función Bessel, es decir, habría otra brecha blanca si el diagrama llegara más allá de 6 en el eje  $\rho$ , porque el siguiente cero aparece en  $\rho = 5.552$ , y así sucesivamente para los otros ceros. De acuerdo a esto se ve que si la iteración se hubiera continuado hasta C y  $\rho$  más grandes, este diagrama tendría una forma muy particular que dependería de los ceros de la función Bessel y el flujo, el cual serviría para describirse en un trabajo posterior. Sin embargo, desde el punto de vista físico, no tiene gran interés porque el radio de Larmor no se puede hacer arbitrariamente grande pues esas partículas se saldrían del aparato de confinamiento.

Respecto al tipo de partículas confinadas, de acuerdo a este diagrama 6.18, se puede decir algo muy específico de las partículas alfa o impurezas que se encuentran dentro del plasma confinado en el tokamak. Ya que estas partículas, una vez que entregaron toda su energía al proceso de fusión, terminan sobrando dentro del plasma, el diagrama mencionado muestra la solución para dejar escapar esas partículas sobrantes. Y esto es que para lograr que ahora éstas se muevan hacia los bordes del aparato deben disminuir su radio de Larmor, y de acuerdo a la ecuación del radio de Larmor que va como:

# Conclusiones

Se explicó de manera concisa la teoría detrás de la fusión nuclear, entendiendo en principio a los plasmas, que son el elemento principal para llevar a cabo la fusión nuclear controlada. Posteriormente al explicar brevemente el funcionamiento del aparato de confinamiento magnético con el que se pretende realizar este proceso, el tokamak. Se decidió que la manera de abordar teóricamente el problema planteado, que es lograr el buen confinamiento de las partículas de fusión dentro del tokamak sería estudiándolo a través del transporte anómalo o turbulento. Para obtener buen confinamiento se requiere, en parte, que el transporte de partículas sea pequeño.

Para estudiar el transporte turbulento de partículas en el plasma se asumió que la turbulencia consiste en un espectro discreto de ondas de deriva de dos dimensiones a la que se le agregan flujos con cizalla provocados por el modelo de partícula de prueba.

Por otro lado, la dinámica de las partículas se resolvió usando dinámica Hamiltoniana y mapeos discretos resultantes de las ecuaciones de movimiento de las partículas. Las ecuaciones de movimiento que involucran a la deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$ , se pudieron transformar a mapeos simplécticos iterativos que fueron usados para simular evolutivamente a un ensamble grande de partículas dentro del programa de Mathematica en tiempos relativamente pequeños, cuyos resultados se mostraban a través de espacios fase.

Los mapeos seleccionados fueron con dos tipos de flujos de fondo, uno lineal, donde la velocidad incrementa linealmente con el radio (monótono) y el otro gaussiano, donde la velocidad tiene un máximo ya que se encuentra en una posición radial (no monótono) y constituye un flujo zonal, ya que es localizado. Esta diferencia de flujos se puede asociar a la teoría de KAM, cuyas características se asemejan en gran forma a la manera en la que se mueven las partículas dentro de los tokamaks.

Al agregar los flujos de plasma, y bajo la suposición de estudiar este problema como transporte anómalo, se esperaba un comportamiento caótico en varias zonas de los espacios fase. Y en efecto, se encontró visual y cualitativamente la manera en que estos flujos cambiaban la dinámica de las partículas. Los espacios fase resultantes muestran que los flujos agregados arrastran a las partículas poloidalmente (a lo largo del eje  $y$ ), esto provoca que el movimiento caótico se mantenga solamente sobre regiones delimitadas por superficies a lo largo de ese eje. Esta reducción de caos disminuye significativamente el transporte a través de algunas de estas superficies. Las superficies en cuestión son las barreras de transporte, que fueron el objetivo de análisis de este trabajo.

La reducción de caos con el radio de Larmor se analizó con un código que calculara los exponentes de Lyapunov en ciertas regiones de los espacios fase y se encontró que en

efecto, el caos se veía reducido al aumentar el radio de Larmor de 0 a 0.200.

El origen de estas barreras de transporte depende de si el mapeo es con torsión o sin torsión. Las barreras de mapeos con torsión son las superficies, curvas o toros KAM, que son más difíciles de romperse dado un flujo aplicado y una amplitud de ondas demasiado altos. En cambio, como en el mapeo sin torsión surgen las curvas de cizalla nula, estas son las barreras de transporte, unas superficies extremadamente robustas, que son las que terminan rompiéndose al último. Finalmente las barreras de transporte se rompen y la región caótica se vuelve global dentro del espacio fase. Físicamente el establecimiento del caos ocurre cuando las partículas del plasma se salen del confinamiento y llegan a los bordes del tokamak.

Dada la diferencia entre los flujos, el objetivo de la tesis fue describir un método para encontrar visualmente donde se rompían estas barreras de transporte, es decir, primero se observó la separación entre regiones donde no había caos total de las que si había, a través de iteraciones en los mapeos, realizadas en Mathematica, y posteriormente identificar con detalle el momento en el que se rompieran. Estas barreras fueron identificadas a través de tres parámetros importantes de los mapeos, la amplitud de las ondas  $A$ , el radio de Larmor  $\rho$  y el la magnitud del flujo  $C$ . El proceso de detección visual de rompimiento de barreras consistió en encontrar los valores “exactos” de los parámetros para los que la barrera desaparecía.

Lo que indicaron estos parámetros fue que las barreras aparecen cuando el flujo,  $c$ , va en aumento, y desaparecen o se rompen cuando  $c$  llega a un valor umbral. Este valor umbral fue el que se mostró en los diagramas de la sección 7.3.1, para ambos mapeos, cada que la barrera se rompía se graficaba el valor de esos parámetros como un punto. Al igual que la amplitud de las ondas,  $A$ , cuando se aumenta el caos se vuelve global aunque no forzosamente se crean barreras de transporte tan sólo modificando este parámetro. La relación entre aumento de amplitud contra el flujo, con radio de Larmor variando sólo en tres valores, se mostró en los diagramas mencionados, cuyo estilo de *ala de pájaro* refleja un comportamiento tipo fractal el cual incentiva a pensar que el rompimiento de barreras se puede encontrar cuando los valores se vuelven más exactos (agregando más decimales a los valores de parámetros). Para estos diagramas, el cambio en el valor de radio de Larmor no pareció que causara un gran efecto. Aunque si parecería que logra un efecto estabilizador cuando  $\rho$  cambia de 0 a 0.100, pero de 0.100 a 0.200 no se percibe notablemente ningún cambio. Lo único seguro que puede decirse sobre el aumento en  $\rho$  es que si logra visualmente restaurar órbitas que se habían roto antes, dentro de los espacios fase. Para el mapeo con flujo gaussiano se observó que aparecieron dos diferentes tipos de barrera, primero la barrera central, que fue la que se describió y mostró en los diagramas, y las barreras laterales que son las que persisten mucho más allá de que la barrera central se hubo roto. Y que no se llegan a romper debido a que los flujos no se localizan en esas partes, el flujo solo se localiza en el mínimo de la función de velocidad de flujo, que es en 0.

Por último se presentó un diagrama de *ala de pájaro* de  $\rho$  vs  $C$ , y el comportamiento resultó muy dependiente de la función de Bessel de orden cero. Ya que consistió en lo

mismo que las anteriores, marcar el valor para el que se rompía la barrera cuando  $\rho$  y  $C$  cambiaban y  $A = 0.5$ . Pero esta vez el comportamiento fue muy distinto ya que la gráfica presentó una brecha blanca en medio de las doradas, es decir donde había y no había barrera de transporte. Todo debido al comportamiento oscilatorio de la función. Como se mencionó ya, este diagrama resulta muy interesante por el hecho de que al continuar detectando barreras de transporte bajo esos parámetros, se puede encontrar que habría más brechas blancas intermedias entre las doradas, justo donde esta función de Bessel se volviera a hacer cero.

Respecto al diagrama de *ala de pájaro* de  $\rho$  vs  $C$ , en donde los valores de  $\rho$  son muy grandes, se concluyó que las partículas alfa pueden perder su confinamiento al entregar toda su energía en el proceso de fusión, debido a la relación de la energía que llevan (o velocidad) con el radio de Larmor, es decir al disminuir la velocidad disminuye el radio de Larmor, lo que hace que las barreras de transporte se rompan más fácil y por tanto se muevan hacia los bordes más rápidamente.

Finalmente cabe recalcar que el método presentado en esta tesis no se puede decir que es exacto debido al sesgo visual y a la aleatoriedad de las iteraciones dentro de Mathematica, pero de igual forma este trabajo ayuda para futuros análisis que se requieran hacer con métodos más directos como el de Greene para el mapeo con flujo lineal, o el de puntos indicadores para el mapeo con flujo gaussiano, al ya tener identificados muchos parámetros o las zonas en donde ocurre el rompimiento de las barreras de transporte.

Y en general hay que tomar en cuenta que el problema de confinamiento de plasmas de fusión nuclear no sólo depende del transporte de partículas, ya que están involucrados los materiales usados en el tokamak, la eficiencia de los aparatos auxiliares, etc. Pero sin duda alguna el trabajo presentado es una gran contribución dentro de las muchas que hay ya para lograr la tan limpia y anhelada obtención de energía a través de la fusión nuclear.

# Bibliografía

- [1] Strassler M. What holds nuclei together? *Of particular Significance. Conversations about science with theoretical physicist Matt Strassler*, 2013.
- [2] F.F. Chen. *An Indispensable Truth. How Fusion Power Can Save the Planet*. Springer-Verlag New York, 2011.
- [3] J. Martinell Benito. *Los prometeos modernos o el esfuerzo para controlar la fusión nuclear*. Fondo de Cultura Económica, 1993.
- [4] Quang M. Kikuchi M., Lackner K. *Fusion Physics*. International Atomic Energy Agency, 2012.
- [5] F.F. Chen. *Introduction to Plasma Physics*. Springer US, 2012.
- [6] M. Gedalin. *Lecture Notes in Physics Introduction to Plasma Physics*.
- [7] C.W. Horton and W. Horton. *Turbulent Transport in Magnetized Plasmas*. World Scientific, 2012.
- [8] François Orain. Edge localized mode control by resonant magnetic perturbations in tokamak plasmas. (tesis doctoral). *Université d'Aix-Marseille*, 2014.
- [9] VITELA Javier and Julio Martinell. Robust stabilization of burn conditions in subignited fusion reactors using artificial neural networks. 01 2000.
- [10] ITER Confinement Database and Modelling Working Group (presented Cordey). Energy confinement scaling and the extrapolation to ITER. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 39(12B):B115–B127, dec 1997.
- [11] Nick McGreivy. *Classical, Neoclassical, and Anomalous Transport. Notes AST 568*. Princeton University, Spring, 2018.
- [12] JJ Martinell D del Castillo-Negrete. Gyroaverage effects on nontwist hamiltonians: Separatrix reconnection and chaos suppression. *Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation*, 17(5):2031–2044, May 2012/5/1.
- [13] D del-Castillo-Negrete N Kryukov, Julio J Martinell. Finite larmor radius effects on  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  weak turbulence transport. *Journal of Plasma Physics*, 84(3):905840301, 2018/6.

- [14] Diego del Castillo-Negrete. Chaotic transport in zonal flows in analogous geophysical and plasma systems. *Physics of Plasmas*, 7(5):1702–1711, May 2000.
- [15] M. Tabor. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. Wiley, 1989.
- [16] A. Morbidelli. An introduction to hamiltonian dynamical systems and practical perturbation methods: New insight by successive elimination of perturbation harmonic. *Celestial Mech Dyn Astr*, 56:177–190, 1993.
- [17] PJ Morrison D del Castillo-Negrete, JM Greene. Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 91:1–23, March 1996/3/1.
- [18] Drake JF. Kleva RG. Stochastic  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  particle transport. *Physics of Fluids*, 27(7):1686–1698, 1984.
- [19] Carolina A. Tafoya Julio J. Martinell and Jorge Torres. *Proceedings of the 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, CHAOS2020, en prensa.*, 2020.
- [20] R de La Llave. C Falcolini. A rigorous partial justification of greene’s criterion. *Journal of Statistical Physics*, 67(3):609–643, 1992.
- [21] Y. Shinohara, S.; Aizawa. The breakup condition of shearless kam curves in the quadratic map. *Progress of Theoretical Physics*, 97(3):379–385, 1997.