



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

La aplicación de Gauss de superficies en \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
Mariana Costa Villegas

DIRECTOR
Dr. Federico Sánchez Bringas
Facultad de Ciencias, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, septiembre 2021.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa DGAPA-PAPIIT IN 121020, “Geometría diferencial de subvariedades” y al proyecto CONACYT 283017, “Teoría de singularidades aplicada a la geometría extrínseca de subvariedades”. Agradezco a CONACYT por la beca de maestría.

Gracias al Dr. Federico Sánchez Bringas por todo el trabajo y el apoyo; gracias por la orientación y la confianza que me ha brindado siempre. Gracias a los sinodales Dr. Pierre Bayard, Dra. Ivonne Hernández, Dr. Vinicio Gómez y Dr. Luis García Naranjo por sus comentarios, por todo el apoyo y la confianza. Gracias a la Dra. Silvia Ruiz y a Ma. Inés León por todo.

Gracias a Ale por su paciencia, consejos y compañía durante la realización de esta tesis. Gracias a Gabriel por el apoyo y los favores infinitos. Gracias a Catsup por ser el mejor. Gracias a mi familia y a mis amigas por acompañarme siempre.

Índice

1. Introducción	3
2. Superficies orientadas en \mathbb{R}^n	4
2.1. Construcción	5
2.1.1. Modelo de la grassmaniana	5
2.1.2. Aplicación de Gauss	6
2.1.3. Representación local	7
2.2. Teorema de existencia	8
2.3. Teoremas de representación	18
3. Superficies orientadas en \mathbb{R}^3	20
3.1. Aplicación de Gauss	20
3.2. Teorema de existencia	21
3.3. Representación de Kenmotsu	25
3.4. Invariantes	26
4. Superficies orientadas en \mathbb{R}^4	27
4.1. Aplicación de Gauss	27
4.2. Teorema de existencia	29
4.3. Curvaturas totales	34
4.4. Invariantes	41

1. Introducción

La aplicación de Gauss clásica la introdujo Gauss en su artículo sobre la teoría de superficies y, desde ese momento, se ha convertido en una herramienta fundamental en el estudio de superficies inmersas. Para superficies de codimensión mayor, tenemos una generalización natural de la aplicación de Gauss, donde la imagen está contenida en una grassmanniana, descrita en [1].

La aplicación de Gauss clásica asocia a cada punto de una superficie orientada inmersa en \mathbb{R}^3 el vector normal unitario a la superficie en ese punto, mientras que la aplicación de Gauss generalizada para superficies orientadas inmersas en \mathbb{R}^n asocia a cada punto de la superficie su espacio tangente en ese punto.

Formalmente, sea $G_{k,n}$ la grassmanniana de k -planos orientados en \mathbb{R}^n . Sea M una subvariedad de \mathbb{R}^n , orientada, k -dimensional, $2 \leq k \leq n - 1$. La aplicación $g : M \rightarrow G_{k,n}$ definida por $g(p) = T_p M$ donde $T_p M$ es el espacio tangente a M en p , con la orientación dada por la orientación de M , es la aplicación de Gauss generalizada.

En el caso $k = n - 1$, $G_{n-1,n}$ se puede identificar con la esfera unitaria S^{n-1} , donde a cada hiperplano le corresponde su vector normal unitario (con la orientación inducida de \mathbb{R}^n). La aplicación g entonces se reduce a la aplicación de Gauss clásica que a cada punto p de una hipersuperficie M le asigna el vector normal a M en p .

En este trabajo vamos a enfocarnos en la aplicación de Gauss de superficies de dimensión 2 en \mathbb{R}^n . La imagen de la aplicación de Gauss está contenida en la grassmanniana $G_{2,n}$, que se puede identificar con un subespacio del espacio proyectivo complejo de dimensión $n-1$, $\mathbb{C}P^{n-1}$, las cuádricas complejas Q_{n-2} .

En este texto, como en [2] y [3], nos referimos a una superficie S en \mathbb{R}^n como el par (S_0, X) donde S_0 es una superficie de Riemann y $X : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación conforme. Como cualquier superficie de dimensión 2 y de clase C^k tiene estructura compleja [4], si S es una superficie orientada inmersa en \mathbb{R}^n , se puede ver que S es la inmersión conforme de una superficie de Riemann. Por lo tanto, siempre que hablemos de superficies, hablamos de superficies orientadas. Localmente no hay ninguna restricción. Por otro lado, observa-

mos que todas nuestras superficies son inmersas, por lo tanto tienen un plano tangente bien definido en cada punto.

En el primer capítulo seguiremos los pasos de Osserman y Hoffman en [2] para estudiar la aplicación de Gauss de superficies inmersas en \mathbb{R}^n y en los siguientes seguiremos [3] para estudiar los casos de superficies orientadas inmersas en \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 . En estos casos, también encontramos los invariantes geométricos de segundo orden de las superficies en términos de su aplicación de Gauss.

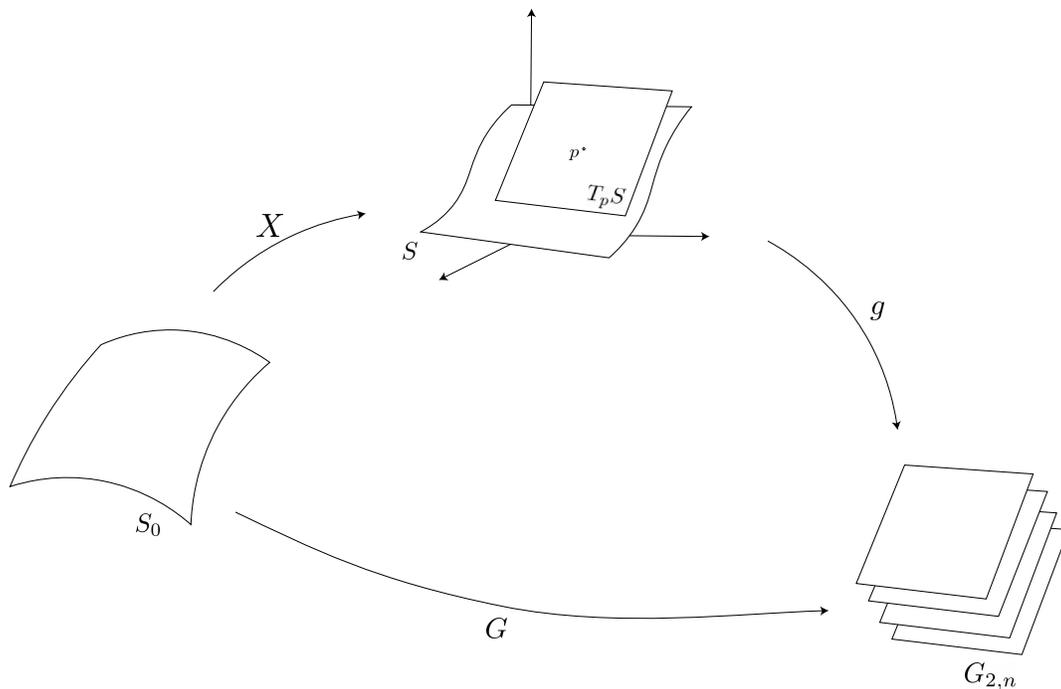
2. Superficies orientadas en \mathbb{R}^n

Sea S una superficie de dimensión 2 inmersa en un espacio euclidiano de dimensión n , \mathbb{R}^n . Denotamos por $g : S \rightarrow G_{2,n}$ a la aplicación de Gauss generalizada, donde $G_{2,n}$ es la grassmaniana de 2-planos orientados en \mathbb{R}^n y para cada punto p de S , $g(p)$ es el plano tangente a S en p .

El objetivo de esta sección es estudiar las propiedades de la aplicación g , particularmente las propiedades relacionadas con la geometría de S en \mathbb{R}^n y la estructura conforme de S . Los principales problemas que consideramos son los siguientes:

1. Sea S_0 una superficie de Riemann y $X : S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ una inmersión conforme que realiza a S . ¿Qué propiedades tiene $G = g \circ X : S_0 \rightarrow G_{2,n}$ por estar definida a través de la aplicación de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^n ?
2. Dada una aplicación $G : S_0 \rightarrow G_{2,n}$, ¿cuándo existe una inmersión conforme X de S_0 en una superficie S en \mathbb{R}^n tal que G es de la forma $G = g \circ X$ donde g es la aplicación de Gauss de S ?
3. ¿Qué tanto está determinada una superficie S por su aplicación de Gauss g ?

A lo largo de este capítulo responderemos las tres preguntas. Para eso, introducimos la construcción y la notación necesaria.



2.1. Construcción

En esta primera sección realizaremos las construcciones que se utilizarán a lo largo de la tesis y que serán necesarias para poder responder formalmente a las preguntas que hemos planteado. Daremos un modelo para la grassmanniana, veremos cómo, con ayuda de ese modelo, podemos escribir localmente a la aplicación de Gauss y desarrollaremos algunas propiedades.

2.1.1. Modelo de la grassmanniana

Para empezar a estudiar la aplicación de Gauss de superficies en \mathbb{R}^n , buscamos un modelo apropiado para el contradominio de la aplicación de Gauss, la grassmanniana $G_{2,n}$. Como un modelo de la grassmanniana de dos-planos orientados en \mathbb{R}^n usamos la cuádrica Q_{n-2} en $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ definidas por la ecuación

$$\sum_{k=1}^n z_k^2 = 0.$$

Identificamos a un punto en la cuádrica con un punto en la grassmanniana de la siguiente manera. Para cualquier punto $P = (z_1, \dots, z_n)$ en Q_{n-2} , si

$z_k = a_k + ib_k$, obtenemos los vectores $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$ que satisfacen $|A| = |B| \neq 0$ y $A \cdot B = 0$ ya que

$$0 = \sum_{k=1}^n z_k^2 = \sum_{k=1}^n (a_k + ib_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^2 - b_k^2) + 2ia_k b_k = |A|^2 - |B|^2 + 2iA \cdot B.$$

Por lo tanto, A y B forman una base ortogonal del 2-plano orientado Π . Observamos que diferentes coordenadas homogéneas de P determinan el mismo plano. Inversamente, para cualquier 2-plano Π en $G_{2,n}$ podemos elegir una base ortogonal $\{A, B\}$ de Π y hacer $z_k = a_k + ib_k$, obteniendo un punto P en Q_{n-2} . Así, obtenemos una identificación del punto $P = (z_1, \dots, z_n)$ en Q_{n-2} con el plano Π en $G_{2,n}$.

Usamos la notación $P = [Z]$ para denotar al punto en $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ correspondiente al punto $z = (z_1, \dots, z_n)$ en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. La aplicación de $G_{2,n}$ a Q_{n-2} definida por $\Pi \rightarrow P$ es independiente de la elección de base orientada $\{A, B\}$ y se puede ver que determina una correspondencia suave y biyectiva entre las dos variedades. Por lo tanto, podemos identificar a la grassmanniana $G_{2,n}$ con Q_{n-2} .

2.1.2. Aplicación de Gauss

Sea S_0 una superficie de Riemann y sea $X : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación localmente conforme. Si $z = \xi + i\eta$ es un parámetro local en S_0 y si (x_1, \dots, x_n) son coordenadas en \mathbb{R}^n , la aplicación X se puede ver localmente como $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Así el plano tangente a S es generado por $\left\{ \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\}$ y, gracias a la identificación descrita anteriormente, corresponde al punto $\left[\frac{\partial X}{\partial \xi} + i \frac{\partial X}{\partial \eta} \right]$ en Q_{n-2} . Por lo tanto, la aplicación de Gauss G de S es la aplicación de S_0 en Q_{n-2} definida por $\left[\frac{\partial X}{\partial \xi} + i \frac{\partial X}{\partial \eta} \right]$.

Ahora, usando las derivadas complejas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} - i \frac{\partial f}{\partial \eta} \right], \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} + i \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \end{aligned}$$

podemos escribir la aplicación de Gauss como

$$G(z) = \left[\frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \right].$$

Por razones históricas, trabajamos con la conjugada compleja

$$\bar{G}(z) = \left[\frac{\partial X}{\partial z} \right]$$

que también tiene imagen en Q_{n-2} .

Por otro lado, como X es una aplicación conforme entonces satisface las siguientes ecuaciones,

$$\left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right| = \left| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right| \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0.$$

Por lo tanto, podemos expresar la métrica de la siguiente manera

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 \quad \text{con} \quad \lambda^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right|^2 = 2 \left| \frac{\partial X}{\partial z} \right|^2,$$

donde

$$\left| \frac{\partial X}{\partial z} \right|^2 = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial x_k}{\partial z} \right|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \right|^2.$$

También, tenemos la relación

$$\left(\frac{4}{\lambda^2} \right) X_{z\bar{z}} = 2H, \tag{1}$$

donde H es el vector de curvatura media (ver Sec 4, [5]).

2.1.3. Representación local

Ahora, si tenemos una aplicación cualquiera de S_0 en Q_{n-2} , la podemos representar localmente de la forma $[\Phi]$ donde $\Phi(z) = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ toma valores en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ y satisface $\sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) = 0$. Queremos realizar a Φ como aplicación

de Gauss de una inmersión; es decir, encontrar $X(z) = (x_1, \dots, x_n)$ tal que cumpla $\bar{G} = [\frac{\partial X}{\partial z}]$. Esto implica

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \psi \Phi \quad (2)$$

para alguna función $\psi : S_0 \rightarrow \mathbb{C}$. La superficie es regular cuando $\psi \neq 0$.

Por (1), $(\frac{4}{\lambda^2}) X_{z\bar{z}} = 2H$ y por (2), $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi \Phi$ entonces tenemos

$$\frac{\lambda^2}{2} H = X_{z\bar{z}} = (\psi \Phi)_{\bar{z}} = \psi_{\bar{z}} \Phi + \psi \Phi_{\bar{z}}. \quad (3)$$

Por otro lado, usando que $\lambda^2 = 2 \left| \frac{\partial X}{\partial z} \right|^2$ y que $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi \Phi$, obtenemos

$$\frac{1}{2} \lambda^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial z} \right|^2 = |\psi|^2 |\Phi|^2. \quad (4)$$

Por lo tanto, sustituyendo (4) en la ecuación (3), nos queda

$$|\Phi|^2 |\psi|^2 H = \psi_{\bar{z}} \Phi + \psi \Phi_{\bar{z}}.$$

Y dividiendo entre ψ tenemos que

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} H = \Phi_{\bar{z}} + (\log \psi)_{\bar{z}} \Phi \quad (5)$$

cuando $\psi \neq 0$. La ecuación (5) es una condición necesaria para que Φ sea localmente la aplicación de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^n . En la siguiente sección daremos las condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación Φ sea aplicación de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^n únicamente en términos de Φ .

2.2. Teorema de existencia

En esta sección vamos a dar las respuestas explícitas a las preguntas que hemos planteado. Dada una superficie de Riemann S_0 , ¿cómo podemos caracterizar a las aplicaciones de S_0 en Q_{n-2} que surgen, como hemos descrito, como la aplicación de Gauss de una superficie S en \mathbb{R}^n ? Para responder esta pregunta, empezamos encontrando condiciones necesarias para G y después veremos hasta qué punto son suficientes. También vamos a discutir la

unicidad, es decir, hasta qué punto la superficie S está determinada por su aplicación de Gauss. Localmente podemos ver el problema como un problema de existencia y unicidad de factores de integración.

Los primeros resultados surgen de la sección anterior y de aplicar los siguientes lemas.

Lema 1. *Sea D un dominio simplemente conexo en \mathbb{C} y sea $\Phi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación C^1 . Una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X_z = \Phi$ es que Φ cumpla $Im(\Phi_{\bar{z}}) = 0$.*

Demostración. Supongamos que existe $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X_z = \Phi$. Entonces,

$$\Phi_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + i \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_z}{\partial \xi} + i \frac{\partial X_z}{\partial \eta} \right).$$

Como $X_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} - i \frac{\partial X}{\partial \eta} \right)$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} - i \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) + i \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} - i \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} \right) + i \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Im(\Phi_{\bar{z}}) = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta} \right) = 0.$$

Por otro lado, supongamos que $Im(\Phi_{\bar{z}}) = 0$.

Como $\Phi_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + i \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)$, entonces $Im \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + Re \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = 0$. Podemos escribir la ecuación $X_z = \Phi$ como

$$X_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} - i \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) = Re(\Phi) + iIm(\Phi)$$

y nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales parciales,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi} &= 2Re(\Phi) \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} &= -2Im(\Phi). \end{aligned}$$

Hacemos

$$p = \frac{\partial X}{\partial \xi} \quad y \quad q = \frac{\partial X}{\partial \eta},$$

y definimos

$$u(\xi, \eta, X, p, q) = p - 2\operatorname{Re}(\Phi) \quad y \quad v(\xi, \eta, X, p, q) = q + 2\operatorname{Im}(\Phi).$$

Podemos establecer una ecuación de compatibilidad, (ver Cap. 2 Sec. 9, [6]),

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, p)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(\eta, q)} + p \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, p)} + q \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, q)} = 0.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, p)} &= \begin{vmatrix} u_\xi & u_p \\ v_\xi & v_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\frac{\partial \operatorname{Re}(\Phi)}{\partial \xi} & 1 \\ 2\frac{\partial \operatorname{Im}(\Phi)}{\partial \xi} & 0 \end{vmatrix} = -2\operatorname{Im}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right), \\ \frac{\partial(u, v)}{\partial(\eta, q)} &= \begin{vmatrix} u_\eta & u_q \\ v_\eta & v_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\frac{\partial \operatorname{Re}(\Phi)}{\partial \eta} & 0 \\ +2\frac{\partial \operatorname{Im}(\Phi)}{\partial \eta} & 1 \end{vmatrix} = -2\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right), \\ \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, p)} &= \begin{vmatrix} u_X & u_p \\ v_X & v_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, q)} &= \begin{vmatrix} u_X & u_q \\ v_X & v_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición de compatibilidad, que garantiza la existencia de una solución del sistema anterior, es

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right) = 0,$$

que es equivalente a pedir $\operatorname{Im}(\Phi_{\bar{z}}) = 0$. □

Lema 2. Sea W un vector en \mathbb{C}^n de la forma $W = A + iB$, donde A y B son vectores reales distintos de cero que satisfacen $|A| = |B|$ y $A \cdot B = 0$. Sea Π el plano generado por A y B . Para cualquier vector C en \mathbb{R}^n , sea C^Π la proyección de C en Π . Para cualquier par de vectores C, D en \mathbb{R}^n , si $Z = C + iD \in \mathbb{C}^n$, definimos $Z^\Pi = C^\Pi + iD^\Pi$. Entonces

$$Z^\Pi = \langle Z, W \rangle \frac{W}{|W|^2} + \langle Z, \bar{W} \rangle \frac{\bar{W}}{|W|^2}$$

donde \langle, \rangle denota al producto hermitiano usual en \mathbb{C}^n .

Aplicamos el lema 2 a $W = \Phi$, de manera que Π es el plano tangente a la superficie, y a $Z = \Phi_{\bar{z}}$. Podemos escribir la ecuación $\sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) = 0$ como $\Phi \cdot \Phi \equiv 0$ y así

$$0 = (\Phi \cdot \Phi)_{\bar{z}} = 2\Phi \cdot \Phi_{\bar{z}} = 2\langle \Phi_{\bar{z}}, \bar{\Phi} \rangle.$$

Por el lema 2, $(\Phi_{\bar{z}})^\Pi = \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle \frac{\Phi}{|\Phi|^2} + \langle \Phi_{\bar{z}}, \bar{\Phi} \rangle \frac{\bar{\Phi}}{|\Phi|^2} = \langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle \frac{\Phi}{|\Phi|^2} = \eta\Phi$ donde

$$\eta = \Phi_{\bar{z}} \cdot \frac{\bar{\Phi}}{|\Phi|^2}.$$

Ahora, denotamos por V a la componente de $\Phi_{\bar{z}}$ ortogonal a Π , de manera que

$$V = \Phi_{\bar{z}} - (\Phi_{\bar{z}})^\Pi = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi.$$

Por (5), $|\Phi|^2 \bar{\psi} H = \Phi_{\bar{z}} + (\log \psi)_{\bar{z}} \Phi$, y sustituyendo la ecuación anterior nos queda

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} H = V + \eta\Phi + (\log \psi)_{\bar{z}} \Phi.$$

Como el vector de curvatura media H es ortogonal al plano tangente Π y V es ortogonal a Π , obtenemos dos ecuaciones tomando la componente normal y la componente tangencial:

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} H = V \tag{6}$$

$$(\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta. \tag{7}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (6) y (7) son las condiciones necesarias para que Φ sea aplicación de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^n . Buscamos las condiciones necesarias y suficientes que solo dependan de Φ . En el siguiente teorema vemos las propiedades que tiene una aplicación Φ como consecuencia de haber sido definida como aplicación de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^n expresadas en términos de V y η .

Teorema 3. *Sea D un dominio en el plano complejo y sea S una superficie en \mathbb{R}^n definida localmente por una aplicación conforme $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea Φ la aplicación de Gauss de S . Si definimos*

$$\eta = \Phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\Phi} / |\Phi|^2, \tag{8}$$

$$V = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi \tag{9}$$

entonces para cada $z \in D$ tenemos

$$V(z) = e^{i\alpha(z)} R(z) \quad (10)$$

donde $R(z)$ es un vector real; más aún, en el conjunto donde $V(z) \neq 0$, la función $\alpha(z)$ está definida únicamente módulo π y satisface

$$\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z). \quad (11)$$

Demostración. Sea $\rho = |\psi|$ y escribamos $\psi = \rho e^{-i\alpha}$, donde α está determinada módulo 2π cuando $\rho \neq 0$. Entonces por (6), $|\Phi|^2 \bar{\psi} H = V$,

$$V = |\Phi|^2 \bar{\psi} H = \rho |\Phi|^2 e^{i\alpha} H.$$

Como $\rho |\Phi|^2 H$ es un vector real entonces podemos expresar a V como $V = e^{i\alpha(z)} R(z)$ donde $R(z)$ es un vector real.

Ahora, cuando $V \neq 0$, tenemos que $\rho \neq 0$ y por lo tanto, por (7), $-\eta = (\log \psi)_{\bar{z}} = (\log \rho)_{\bar{z}} - i\alpha_{\bar{z}}$. Así,

$$(\log \rho)_{z\bar{z}} = i\alpha_{z\bar{z}} - \eta_z.$$

Como $(\log \rho)_{z\bar{z}}$ y $\alpha_{z\bar{z}}$ son reales entonces $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$. □

Ahora exploramos qué tanto una superficie conformemente inmersa está determinada por su aplicación de Gauss. Para superficies mínimas, tenemos el siguiente resultado.

Como se puede ver a detalle en [5] y para el caso particular de \mathbb{R}^3 en [7] y [8], cualquier superficie mínima orientada S en \mathbb{R}^n se puede representar por una aplicación conforme $X : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $X = \text{Re}(\int \alpha_1, \dots, \int \alpha_n)$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son diferenciales holomorfas en la esfera de Riemann S_0 . La aplicación de Gauss está determinada por $\Phi : S_0 \rightarrow Q_{n-2}$, donde localmente $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, con $\alpha_k = \phi_k dz$. Si $\psi(z)$ es una función holomorfa que nunca es cero en S_0 , entonces $\hat{\Phi} = \psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$ define la misma aplicación de Gauss y corresponde a la superficie $\hat{X} = \text{Re}(\int \hat{\alpha}_1, \dots, \int \hat{\alpha}_n)$, con $\hat{\alpha}_k = \psi \alpha_k$.

Por lo tanto, el conjunto de superficies mínimas con la misma aplicación de Gauss de S tiene una correspondencia uno a uno con el conjunto de funciones

holomorfas ψ en S_0 . Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 se puede ver que existe una aplicación isométrica entre el catenoide y el helicoide que preserva planos tangentes y no es una congruencia.

Con el siguiente teorema vemos que las superficies mínimas son un caso particular. Cualquier otra superficie está esencialmente determinada únicamente por su aplicación de Gauss.

Teorema 4. *Sea S una superficie definida por una inmersión conforme $X : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de una superficie de Riemann S_0 . Si la curvatura media de S es distinta de cero en algún punto, entonces X está determinada únicamente por la aplicación de Gauss G , salvo traslaciones y homotecias.*

Demostración. Dadas las aplicaciones $X, Y : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, hacemos $Y_z = \Phi$ en términos de un parámetro local conforme z en S_0 . Haciendo

$$\alpha_k = \phi_k dz = \frac{\partial y_k}{\partial z} dz,$$

vemos que α_k son diferenciales del tipo $(0, 1)$ definidas globalmente en S_0 .

Similarmente, podemos definir

$$\beta_k = \hat{\phi}_k dz = \frac{\partial x_k}{\partial z} dz.$$

El hecho de que X y Y induzcan la misma aplicación de Gauss es equivalente a la existencia de una función compleja distinta de cero, ψ , en S_0 tal que

$$\beta_k = \psi \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

En términos de una coordenada local z , esto quiere decir que

$$\frac{\partial x_k}{\partial z} = \psi \phi_k \quad \text{o} \quad X_z = \psi \Phi.$$

Podemos definir a η y V en términos de Φ por (8) y (9). También, por (7), tenemos $(\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta$. Pero como Y satisface la ecuación $Y_z = \hat{\psi} \alpha_k$, entonces $\hat{\psi} \equiv 1$, y tenemos $\eta = (\log \hat{\psi})_{\bar{z}} \equiv 0$. Se sigue que $\log \psi$ es una función

holomorfa de z y por lo tanto ψ es una función holomorfa global en S_0 .

Como $X_z = \psi Y_z$, vemos que dos superficies con la misma aplicación de Gauss están relacionadas por una función holomorfa, como en el caso de superficies mínimas. Ahora notamos que aplicando la ecuación (6), $|\Phi|^2 \bar{\psi} H = V$, a las superficies, y considerando que $\eta = 0$, tenemos

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} H = V = |\Phi|^2 \bar{\hat{\psi}} \hat{H}.$$

Supongamos que tenemos un punto z_0 donde $H \neq 0$. Entonces $V \neq 0$ y $\hat{H} \neq 0$ en ese punto, y lo mismo es cierto en una vecindad U de z_0 . Pero como $\hat{\psi} \equiv 1$, V es un vector real distinto de cero en cada punto de U y por lo tanto es real en U . Pero una función holomorfa que es real en un conjunto abierto es constante. Por lo tanto, $\psi \equiv c$ una constante real y en cada vecindad de z_0 tenemos que $X_z = cY_z$. Se sigue que $X - cY$ es un vector constante. \square

A continuación vemos en qué medida las condiciones necesarias del teorema 3 para que una aplicación Φ sea aplicación de Gauss son también suficientes. Observamos que la condición (10) se debe de satisfacer en todos los puntos y que es trivial cuando $V = 0$, mientras que la condición (11) sólo tiene sentido en el conjunto en el que $V \neq 0$.

Teorema 5. *Sea S_0 una superficie de Riemann simplemente conexa y sea $G : S_0 \rightarrow G_{n,2}$ una aplicación. Representamos a G localmente por la aplicación Φ en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, de la forma $\bar{G} = [\Phi]$.*

Caso 1: *Si $V = 0$ en S_0 y S_0 no es compacta, entonces G es la aplicación de Gauss de una superficie mínima en \mathbb{R}^n .*

Caso 2: *Si V nunca es cero en S_0 entonces una condición suficiente para que G sea aplicación de Gauss de una superficie S dada por una aplicación conforme $X : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es que las condiciones necesarias del teorema 3,*

$$V(z) = e^{i\alpha(z)} R(z) \quad \text{y} \quad \alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z),$$

donde $R(z)$ es un vector real distinto de cero para cada z , se cumplan.

Demostración. En ambos casos hay que resolver un problema local y un problema global. El problema local se puede escribir de la siguiente manera: sea D un dominio de S parametrizado por el disco $|z| < 1$, tal que en D la

aplicación G se puede representar como $\overline{G} = [\Phi]$ con $\Phi(z) = (\phi_1(z), \dots, \phi_n(z))$.

Queremos una aplicación $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una función $\psi : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que cumplan $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi \Phi$.

Sabemos que la función ψ debe satisfacer $(\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta$. Observamos que esta ecuación siempre tiene una solución distinta de cero. Podemos primero resolver para Ψ la ecuación $\Psi_{\bar{z}} = -\eta$ en el disco $|z| < 1$ y después hacer $\psi = e^{\Psi}$. Ahora hacemos cada caso por separado.

Caso 1: Como $V = \Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi$, la condición $V \equiv 0$ implica $\Phi_{\bar{z}} \equiv \eta \Phi$. Usando una solución ψ de la ecuación $(\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta$,

$$(\psi \Phi)_{\bar{z}} = \psi \Phi_{\bar{z}} + \psi_{\bar{z}} \Phi = \psi(\Phi_{\bar{z}} + (\log \psi)_{\bar{z}} \Phi) = \psi(\Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi) = \psi V \equiv 0.$$

Por lo tanto todas las componentes $\psi \phi_k$ de la aplicación $\hat{\Phi} = \psi \Phi$ son holomorfas en D y así, el Caso 1 corresponde precisamente a la condición de que la aplicación de Gauss $G : S_0 \rightarrow Q_{n-2}$ sea anti-holomorfa

$$X = \operatorname{Re} \int \hat{\Phi} dz = \operatorname{Re} \int \psi \Phi dz.$$

Para resolver el problema global del Caso 1, notamos que no todas las funciones ϕ_k pueden ser idénticamente cero. Suponemos $\phi_1 \not\equiv 0$. Entonces $\hat{\phi}_1 = \psi \phi_1$ es holomorfa y tiene ceros bien definidos con orden bien definido (independiente de la representación particular de Φ de \overline{G}).

Suponiendo que S_0 es no compacta, entonces es conformemente el disco o el plano. Por lo tanto, podemos encontrar una función holomorfa f definida globalmente en S_0 cuyos ceros coincidan, en orden y en posición, con los ceros de ϕ_1 . Es decir, si \overline{G} está representada localmente por Φ , f/ϕ_1 es suave y distinta de cero. Además, las funciones ϕ_k/ϕ_1 son funciones meromorfas globalmente definidas en S_0 , por lo tanto, $[\Phi] = [\frac{f}{\phi_1} \Phi] = [\hat{\Phi}]$. Se sigue que la aplicación \overline{G} puede ser representada globalmente en S_0 por

$$\hat{\Phi} = \frac{f}{\phi_1} \Phi = \left(f, f \frac{\phi_2}{\phi_1}, \dots, f \frac{\phi_n}{\phi_1} \right).$$

Así, la superficie $X = \operatorname{Re} \int \hat{\Phi} dz$, donde S_0 corresponde a $|z| < R \leq \infty$, resuelve el problema global en el Caso 1.

Caso 2: Empezamos nuevamente con el problema local. Escribiendo el factor de integración como $\psi = \rho e^{i\theta}$, tenemos

$$-\eta = (\log\psi)_{\bar{z}} = (\log\rho)_{\bar{z}} + i\theta_{\bar{z}}. \quad (12)$$

Por el lema 1, si $Im(\psi\Phi)_{\bar{z}} \equiv 0$, entonces podemos resolver la ecuación $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi\Phi$ para X en el dominio simplemente conexo D .

Para probar este caso vamos a ver que la ecuación $Im(\psi\Phi)_{\bar{z}} \equiv 0$ es equivalente a la ecuación $\theta + \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$. Así podemos reescribir la ecuación (12) como $(\log\rho)_{\bar{z}} = -\eta + i\alpha_{\bar{z}}$ y entonces, como $\alpha_{z\bar{z}} = Im(\eta_z)$, tenemos que $Im((\log\rho)_{\bar{z}z}) = -Im(\eta_z) + \alpha_{z\bar{z}} = 0$. Usando otra vez el lema 1, con $\Phi = (\log\rho)_{\bar{z}}$, podemos concluir que la ecuación $(\log\rho)_{\bar{z}} = -\eta + i\alpha_{\bar{z}}$ tiene solución.

Primero veamos que la ecuación $Im(\psi\Phi)_{\bar{z}} \equiv 0$ es equivalente a la ecuación $\theta + \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.

$$\begin{aligned} Im(\psi\Phi)_{\bar{z}} &= Im(\psi\Phi_{\bar{z}} + \psi_{\bar{z}}\Phi) \\ &= Im\left(\psi\left(\Phi_{\bar{z}} + \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi}\Phi\right)\right) \\ &= Im(\psi(\Phi_{\bar{z}} + (\log\psi)_{\bar{z}}\Phi)) \end{aligned}$$

como $-\eta = (\log\psi)_{\bar{z}}$

$$= Im(\psi(\Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi))$$

y como $V = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi$ y $\psi = \rho e^{i\theta}$

$$= Im(\rho e^{i\theta} V)$$

usando $V = e^{i\alpha} R$

$$= \rho Im(e^{i(\theta+\alpha)})R,$$

donde R es un vector real. Así, la ecuación $Im(\psi\Phi)_{\bar{z}} \equiv 0$ es equivalente a $\theta + \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Entonces podemos escribir la ecuación (12) como

$$(\log \rho)_{\bar{z}} = -\eta - i\theta_{\bar{z}} = -\eta + i\alpha_{\bar{z}}.$$

Notamos que el lado derecho de la ecuación está determinado por Φ en el conjunto donde $V \neq 0$.

Otra vez por el lema 1, si

$$0 = \text{Im}((- \eta + i\alpha_{\bar{z}})_z) = -\text{Im}(\eta_z) + \alpha_{z\bar{z}},$$

podemos resolver la ecuación $(\log \rho)_{\bar{z}} = -\eta + i\alpha_{\bar{z}}$ para ρ en D . Derivando con respecto a z , tenemos

$$(\log \rho)_{\bar{z}z} = -\eta_z + i\alpha_{z\bar{z}},$$

como $(\log \rho)_{\bar{z}z}$ y $\alpha_{z\bar{z}}$ son reales, la ecuación se reduce a $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$.

Por lo tanto, la condición $V \neq 0$ permite definir una función α a través de $V = e^{i\alpha}R$ que determina a θ por la ecuación $\theta + \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$ y a ρ por $(\log \rho)_{\bar{z}} = -\eta + i\alpha_{\bar{z}}$. Así, la función $\psi = \rho e^{i\theta}$ satisface $-\eta = (\log \rho)_{\bar{z}} + i\theta_{\bar{z}}$ y satisface la condición de integrabilidad $\text{Im}(\psi\Phi)_{\bar{z}} \equiv 0$. Por lo tanto el problema local tiene una solución.

Para obtener la solución global en el Caso 2, observamos que la condición $V \neq 0$ significa que la superficie obtenida localmente por el argumento anterior tiene curvatura media distinta de cero. Se sigue del teorema 4 que la superficie obtenida es única salvo homotecias y traslaciones. Por lo tanto, si fijamos cualquier punto p_0 de S_0 y definimos una superficie S en una vecindad de p_0 con la aplicación de Gauss, entonces S puede ser continuada con unicidad a lo largo de cualquier camino que empieza en p_0 pegando soluciones locales.

Finalmente, como S_0 es simplemente conexa, el teorema de monodromía garantiza que la superficie resultante es independiente de trayectorias y está globalmente bien definida sobre S_0 .

□

Observamos que las condiciones (10) y (11) y la condición $V = 0$ del Caso 1 dependen solamente de G aunque estén expresadas en términos de Φ .

2.3. Teoremas de representación

Como último resultado de este enfoque, damos los teoremas de representación para superficies mínimas en \mathbb{R}^n y para superficies con vector de curvatura media distinto de cero en \mathbb{R}^n . El teorema de representación para superficies mínimas en \mathbb{R}^n , teorema 6 (Teorema 3.1 en [1]), se puede considerar como una generalización del teorema de Enneper-Weierstrass para superficies de codimensión mayor. A su vez, el teorema de representación para superficies no mínimas en \mathbb{R}^n , teorema 7, se puede considerar como una generalización del teorema de representación de Kenmotsu, [9], para superficies en \mathbb{R}^3 . La principal diferencia es que Kenmotsu usa la aplicación de Gauss y la función de curvatura media, mientras que esta representación, como consecuencia del teorema de unicidad, teorema 4, está descrita totalmente por la aplicación de Gauss.

Teorema 6. *Sea D un dominio simplemente conexo en \mathbb{C} . Definimos la aplicación $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ en las siguiente manera:*

Sea ψ una función analítica arbitraria en D , $\psi \neq 0$ y sean g_1, \dots, g_{n-2} funciones meromorfas arbitrarias en D . Para cualquier punto $p \in D$, sea μ_p el orden de ceros de ψ en p y ν_p el máximo orden de polos en p de g_1, \dots, g_{n-2} . Hacemos

$$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) = \frac{\psi}{2} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2, i(1 + \sum_{k=1}^{n-2} g_k^2), 2g_1, \dots, 2g_{n-2} \right)$$

y

$$x_k = \operatorname{Re} \int \phi_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Entonces la aplicación $X = (x_1, \dots, x_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ define una superficie mínima en \mathbb{R}^n si $\mu_p = \nu_p$ para todo $p \in D$. Inversamente, toda superficie mínima en \mathbb{R}^n se puede obtener por la construcción anterior.

Ahora vemos el caso de superficies no mínimas. Sea S una superficie simplemente conexa en \mathbb{R}^n tal que su vector de curvatura media nunca es cero y sea G la aplicación de Gauss de S en Q_{n-2} representada localmente por $\Phi(z)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en términos de un parámetro conforme z , i.e., $[\Phi(z)] = \left[\frac{\partial X}{\partial z} \right]$. Si escribimos la ecuación anterior en la forma

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \psi(z)\Phi(z), \quad (13)$$

donde ψ es una función compleja que nunca es cero, entonces se puede ver que ψ está determinada, salvo por el producto con una constante real, por Φ y la aplicación $X(z)$ está determinada, salvo por homotecias y traslaciones, por (13). Esto es, el gradiente de cada función coordenada x_k se puede obtener a partir de las funciones coordenadas de (13), y por lo tanto cada x_k está determinado salvo por la suma de una constante. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7. *Sea S una superficie simplemente conexa en \mathbb{R}^n tal que su vector de curvatura media nunca es cero y sea la aplicación de Gauss de S en Q_{n-2} representada localmente por $\Phi(z)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces las funciones coordenadas de la inmersión X , x_k están determinadas salvo por la suma de una constante y podemos escribir*

$$x_k = \int \operatorname{Re}(2\psi\phi_k dz), \quad k = 1, \dots, n \quad (14)$$

donde las integrales se toman de un punto fijo a un punto variable y son independientes de la trayectoria.

Más aún, si partimos de una aplicación arbitraria de una superficie de Riemann simplemente conexa, S_0 , en la grassmanniana, representada por una aplicación Φ en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ y Φ satisface las condiciones necesarias del teorema 3 para una aplicación de Gauss con $V \neq 0$, entonces hay una función compleja que nunca es cero, ψ , únicamente determinada por Φ , salvo por una constante de multiplicación, tal que las diferenciales $\operatorname{Re}(\psi\phi_k)$, $k = 1, \dots, n$ son todas exactas y las ecuaciones (14) definen una inmersión de S_0 en \mathbb{R}^n como una superficie S cuya aplicación de Gauss está dada por Φ .

Demostración. La observación principal es que para cualquier Φ que satisface las condiciones (10), (11) de una aplicación de Gauss con $V \neq 0$, hay esencialmente una única función ψ que hace que las diferenciales $\psi\phi_k dz$ sean exactas. Además, ψ se puede determinar explícitamente a partir de Φ de la siguiente manera. A partir de Φ definimos a η y a V . Después, ψ es de la forma $\rho e^{-i\alpha}$, donde α es el argumento de una componente distinta de cero de V y $\log \rho$ está determinada salvo la suma de una constante, ya que su gradiente está dado explícitamente en términos de α y η por $(\log \rho)_{\bar{z}} = -\eta + i\alpha_{\bar{z}}$. Por lo tanto, la prueba del teorema 5 muestra que hay una función X que satisface $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi(z)\Phi(z)$ o equivalentemente, $x_k = \int \operatorname{Re}(2\psi\phi_k dz)$. \square

A continuación veremos la forma que toman los resultados de este capítulo cuando nos enfocamos en los casos especiales de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 , siguiendo a Osserman y Hoffman en [3].

3. Superficies orientadas en \mathbb{R}^3

En el caso de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 , es más conveniente trabajar con la aplicación de Gauss clásica que va a la esfera unitaria en lugar de la aplicación de Gauss generalizada en la cuádriga Q_1 . A continuación presentamos la relación entre las dos.

3.1. Aplicación de Gauss

La aplicación $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ definida por $\phi : w \rightarrow (1 - w^2, i(1 + w^2), 2w)$ satisface $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2(w) = 0$ y por lo tanto define una aplicación

$$[\phi] : \mathbb{C} \rightarrow Q_1 \subset \mathbb{C}P^2$$

que se puede extender a una equivalencia biholomorfa $\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{C} \cup \{\infty\} \sim \mathbb{C}P^1 \leftrightarrow Q_1$. Como la grassmanniana de planos en \mathbb{R}^3 se puede identificar con Q_1 , entonces tenemos una identificación de la grassmanniana con $\mathbb{C}P^1$ donde a cada $w \in \mathbb{C}$ le corresponde el plano con la base orientada $\{Re(\phi(w)), Im(\phi(w))\}$.

Por otro lado, consideramos la inversa de la proyección estereográfica $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$w \mapsto N(w) = \frac{1}{1 + |w|^2} (2Re(w), 2Im(w), |w|^2 - 1)$$

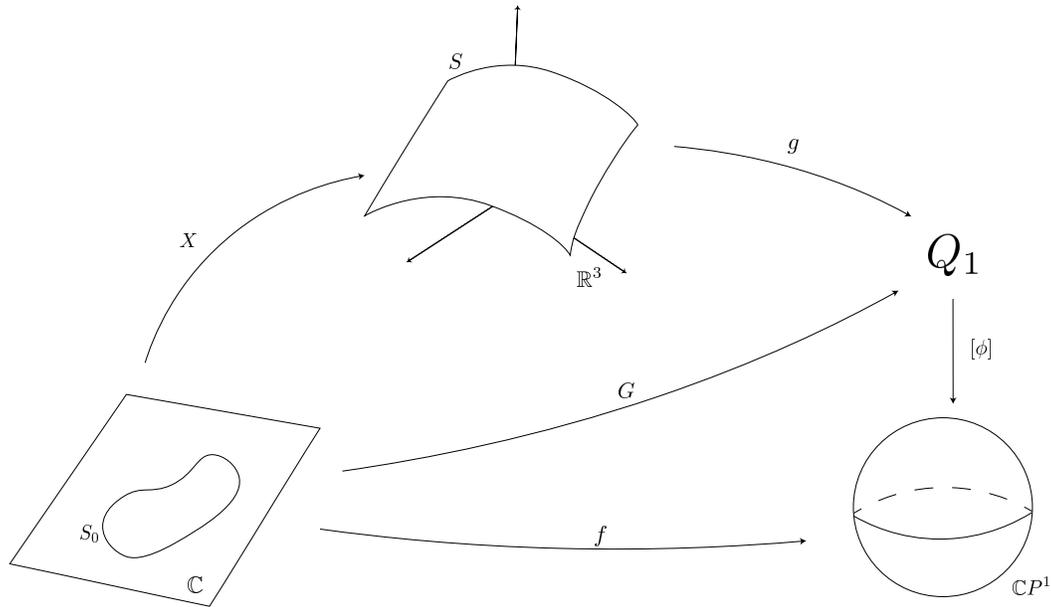
que se puede extender a la representación usual de la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \leftrightarrow \mathbb{S}^2(1)$. Observamos que

$$N(w) \cdot \phi(w) = \frac{1}{1 + |w|^2} (2Re(w), 2Im(w), |w|^2 - 1) \cdot (1 - w^2, i(1 + w^2), 2w) \equiv 0.$$

Por lo tanto $N(w)$ es \pm el vector normal al plano orientado $[\phi(w)]$ en Q_1 .

Como $N(0) = (0, 0, -1)$ y $[\phi(0)]$ corresponde al plano orientado con base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ entonces $N(w)$ es menos el vector normal orientado del plano $[\phi(w)]$.

Así, si queremos encontrar la superficie cuya aplicación de Gauss es $G : S_0 \rightarrow Q_1$, podemos expresar a G de la forma $\bar{G} = [\phi \circ f] = [(1 - f^2, i(1 + f^2), 2f)]$



3.2. Teorema de existencia

Ahora podemos traducir los resultados del capítulo anterior a superficies en \mathbb{R}^3 usando a la función f . Podemos escribir a f localmente como una función compleja $f(z) = w$ en términos de una coordenada local compleja z en la superficie de Riemann S_0 . Así, considerando

$$\Phi(z) = \phi \circ f = (1 - f^2, i(1 + f^2), 2f) \quad (15)$$

podemos encontrar la expresión de η y V para el caso de \mathbb{R}^3 en términos de f

$$\eta = \frac{2\bar{f}f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2} \quad (16)$$

y

$$V = \frac{-2f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2}(2\operatorname{Re}(f), 2\operatorname{Im}(f), |f|^2 - 1) = -2f_{\bar{z}}N. \quad (17)$$

Como N es un vector real entonces tenemos el siguiente resultado.

Lema 8. *Sea $\Phi(z)$ una aplicación C^1 en Q_1 . Si definimos $\eta = \Phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\Phi}/|\Phi|^2$ y $V = \Phi_z - \eta\Phi$, entonces la condición (10) del teorema 3 siempre se cumple.*

Por lo tanto, una de las condiciones para que una función $G : S_0 \rightarrow Q_{n-1}$ sea la aplicación de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^n siempre se cumple cuando $n = 3$. Vamos a ver la forma que toma la condición (11) del teorema 3 en este caso.

Ahora, para una función $f(z) = w$ suficientemente diferenciable, definimos

$$F = \frac{f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2}, \quad \widehat{F} = \frac{f_z}{1 + |f|^2} \quad \text{y} \quad L = f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2}$$

y donde $f_{\bar{z}} \neq 0$ definimos

$$S = L(f)/f_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad T = \frac{\partial S}{\partial \bar{z}}.$$

Establecemos la propiedad de invarianza de estas cantidades en el siguiente lema.

Lema 9. *$|F|, |\widehat{F}|, S$ y T son invariantes bajo rotaciones de la esfera de Riemann.*

Es decir, $|F|, |\widehat{F}|, S$ y T son invariantes cuando sustituimos $f(z)$ por $R(f(z))$ donde $R(w)$ es una transformación de Möbius que corresponde a una rotación de la esfera de Riemann,

$$R(w) = \frac{aw + b}{-\bar{b}w + \bar{a}} \quad \text{donde } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Teorema 10. *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 y $f(z) = w$ la representación de la aplicación de Gauss de S en la esfera unitaria, donde z es un parámetro conforme en S_0 . Entonces, en cada punto de S_0 se debe cumplir una de las siguientes condiciones*

1. $F = 0$ o
2. $F \neq 0$ y $\operatorname{Im}(T) = 0$

Demostración. Podemos elegir un parámetro w en la esfera unitaria de forma que $f(z) \neq \infty$ en una vecindad de un punto en S_0 . Por el lema 9, los resultados que obtengamos sobre T son invariantes.

Como $F = \frac{f_{\bar{z}}}{1+|f|^2}$ y $T = \frac{\partial S}{\partial \bar{z}}$ con $S = \frac{L}{f_{\bar{z}}}$ y $L = f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1+|f|^2}$ entonces

$$T(f) = \left(\frac{L}{f_{\bar{z}}} \right)_{\bar{z}} = \left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2\bar{f}f_z}{1+|f|^2} \right)_{\bar{z}}$$

Por lo tanto,

1. $F = 0$ o
2. $F \neq 0$ y $Im(T) = 0$

es equivalente a

1. $f_{\bar{z}} = 0$ o
2. $f_{\bar{z}} \neq 0$ y $Im\left(\left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2\bar{f}f_z}{1+|f|^2}\right)_{\bar{z}}\right) = 0$.

Afirmamos que la segunda ecuación es la forma que toma la ecuación (11), $\alpha_{z\bar{z}} = Im(\eta_z)$, en \mathbb{R}^3 .

Para probarlo, primero observamos que como $\eta = \frac{2\bar{f}f_{\bar{z}}}{1+|f|^2}$ y $F = \frac{f_{\bar{z}}}{1+|f|^2}$ entonces $\eta = 2\bar{f}F$ y por lo tanto, $Im(\eta_z) = 2Im((\bar{f}F)_z)$. Así, la ecuación $\alpha_{z\bar{z}} = Im(\eta_z)$ toma la forma $\alpha_{z\bar{z}} = 2Im((\bar{f}F)_z)$.

Ahora comparamos

$$V = e^{i\alpha(z)}R(z) \quad \text{con} \quad V = \frac{-2f_{\bar{z}}}{1+|f|^2}(2Re(f), 2Im(f), |f|^2 - 1)$$

y como $\frac{-2}{1+|f|^2}(2Re(f), 2Im(f), |f|^2 - 1) \in \mathbb{R}^3$, observamos que cuando $f_{\bar{z}} \neq 0$ tenemos que

$$f_{\bar{z}} = e^{i\alpha(z)} \quad \text{y entonces} \quad \alpha(z) = arg(f_{\bar{z}}) \quad (mod \pi).$$

Por lo tanto,

$$\alpha_{z\bar{z}} = (arg(f_{\bar{z}}))_{z\bar{z}} = (Im(\log f_{\bar{z}}))_{z\bar{z}} = Im((\log f_{\bar{z}})_{z\bar{z}}) = Im\left(\left(\frac{f_{\bar{z}z}}{f_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}}\right).$$

Así la ecuación

$$\operatorname{Im} \left(\left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2\bar{f}f_z}{1+|f|^2} \right)_{\bar{z}} \right) = 0$$

es equivalente a la ecuación

$$\alpha_{z\bar{z}} = \operatorname{Im} \left(\left(\frac{2\bar{f}f_z}{1+|f|^2} \right)_{\bar{z}} \right) = 2\operatorname{Im}((\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}}).$$

Finalmente, con un cálculo directo se puede ver que

$$(\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f}F)_z = \frac{|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2}{(1+|f|^2)^2} = |\hat{F}|^2 - |F|^2$$

y por lo tanto

$$\operatorname{Im}((\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}}) = \operatorname{Im}(\bar{f}F)_z.$$

□

Podemos reescribir el teorema 10 de la siguiente manera:

Dada una superficie S en \mathbb{R}^3 , si expresamos a la aplicación de Gauss clásica de S con una función compleja $f(z) = w$, donde z es un parámetro local isotérmico en S y w se obtiene con la proyección estereográfica de la esfera unitaria, entonces en cada punto de S , f satisface

1. $f_{\bar{z}} = 0$ o
2. $f_{\bar{z}} \neq 0$ y $\operatorname{Im} \left(\left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2\bar{f}f_z}{1+|f|^2} \right)_{\bar{z}} \right) = 0$.

Como $V = |\Phi|^2 \bar{\psi} H$, el vector V es cero si y sólo si $\psi = 0$ o $H = 0$. Para una superficie regular, $\psi \neq 0$, por lo tanto,

$$H = 0 \Leftrightarrow V = 0 \Leftrightarrow f_{\bar{z}} = 0.$$

Por lo tanto, el primer caso se cumple en los puntos de S donde la curvatura media es cero y el otro caso se cumple cuando la curvatura media es distinta de cero. Ahora formulamos el teorema de existencia, teorema 5, en términos de la aplicación de Gauss clásica en \mathbb{R}^3

Teorema 11. *Sea S_0 una superficie de Riemann simplemente conexa y sea $g : S_0 \rightarrow S^2$ una aplicación suave de S_0 en la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 .*

Caso 1: Si $|F||dz| \equiv 0$ en S_0 y si S_0 es no compacta entonces existe una superficie mínima definida por una inmersión conforme $X : S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $g = G \circ X$ donde $G : S \rightarrow S^2$ es la aplicación de Gauss de S .

Caso 2: Si $|F||dz|$ nunca es cero en S_0 entonces existe una inmersión conforme $X : S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $g = G \circ X$ donde $G : S \rightarrow S^2$ es la aplicación de Gauss de S si y sólo si

$$\text{Im}(T|dz|^2) = 0. \quad (18)$$

Demostración. Por el teorema 10, la condición (11) del teorema 3 toma la forma de la ecuación $\text{Im}(T|dz|^2) \equiv 0$. Por el lema 8, la condición (10) del teorema 3 siempre se cumple en \mathbb{R}^3 . Por lo tanto el teorema de existencia en \mathbb{R}^n , teorema 5, se reduce al teorema 11 en el caso de \mathbb{R}^3 . \square

3.3. Representación de Kenmotsu

El enfoque de Kenmotsu fue trabajar con la aplicación de Gauss y con la función de curvatura media para obtener una ecuación que las relaciona y que sirve como condición de integrabilidad para la existencia de una superficie con aplicación de Gauss y curvatura media dadas.

Dada una aplicación $g : S_0 \rightarrow S^2$ y una función $h : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, si representamos a g por una función compleja $w = f(z)$, entonces la ecuación de Kenmotsu está dada por

$$h \left(f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2} \right) = h_z f_{\bar{z}}.$$

En los puntos donde $f_{\bar{z}} \neq 0$ y $h \neq 0$, podemos escribir esta ecuación como

$$S(f) = (\log h)_z$$

y por lo tanto

$$T(f) = (\log h)_{z\bar{z}}.$$

Así, tenemos $\text{Im}(T(f)) = 0$ que es la condición del segundo caso del teorema 11.

Sea H el vector de curvatura media de una superficie en \mathbb{R}^3 en la forma $H = hN$ donde N es el vector normal unitario y h es el escalar de la curvatura

media. Comparando (17) y (6) tenemos que

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} h = -2f_{\bar{z}}.$$

Y considerando (15) tenemos $|\Phi|^2 = 2(1 + |f|^2)^2$. Por lo tanto,

$$\bar{\psi} h = -\frac{f_{\bar{z}}}{(1 + |f|^2)^2}.$$

En particular, si $h \neq 0$, se puede expresar a ψ explícitamente como:

$$\psi = -\frac{\bar{f}_z}{h(1 + |f|^2)^2}. \quad (19)$$

Entonces si h y f satisfacen la ecuación de Kenmotsu, la condición de integrabilidad (18) se satisface y por el teorema de existencia general, teorema 5, existe una superficie definida por una inmersión conforme $X : S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \psi \Phi = \frac{-\bar{f}_z}{h(1 + |f|^2)^2} (1 - f^2, i(1 + f^2), 2f).$$

Como $\psi = -\frac{\bar{f}_z}{h(1 + |f|^2)^2}$, entonces las diferenciales

$$\omega_1 = \operatorname{Re}(\psi(1 - f^2)dz) \quad \omega_2 = \operatorname{Re}(i\psi(1 + f^2)dz) \quad \omega_3 = \operatorname{Re}(2\psi f dz)$$

son cerradas y podemos definir una superficie S por

$$X = \left(\int \omega_1, \int \omega_2, \int \omega_3 \right).$$

Esta es la representación de Kenmotsu, es una representación análoga a la representación de Weierstrass para superficies mínimas. Por el teorema general de unicidad, si $h \neq 0$, entonces la superficie S está determinada, salvo traslaciones y homotecias, por la aplicación de Gauss y la función de curvatura media h está determinada salvo por un factor constante distinto de cero.

3.4. Invariantes

Como se hizo en [8], se pueden encontrar los invariantes de segundo orden de superficies en \mathbb{R}^3 descritas con la representación de Enneper-Weierstrass en

términos de la aplicación de Gauss f de la superficie.

Primero calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental. Como es una inmersión isotérmica,

$$E = G = \frac{\lambda^2}{2} \quad \text{y} \quad F = 0.$$

Y calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental,

$$\begin{aligned} l &= -4\operatorname{Re}(\psi(f_z + f_{\bar{z}})), \\ m &= 4\operatorname{Im}(\psi(f_z - f_{\bar{z}})), \\ n &= -4\operatorname{Re}(\psi(f_{\bar{z}} - f_z)). \end{aligned}$$

Con ellos, calculamos la curvatura gaussiana y la curvatura media.

$$K = \frac{4}{\lambda^2}(|F|^2 - |\hat{F}|^2) \quad \text{y} \quad H = -\frac{4}{\lambda^2}(1 + |f|^2)\operatorname{Re}(\psi F).$$

Finalmente, encontramos la ecuación de líneas asintóticas,

$$\overline{\psi\hat{F}}dz^2 + \psi F dz d\bar{z} + \psi\hat{F}d\bar{z}^2 = 0.$$

4. Superficies orientadas en \mathbb{R}^4

Para superficies en \mathbb{R}^4 , la grassmanniana tiene una estructura riemanniana como el producto de dos esferas de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y la aplicación de Gauss G de la superficie induce una aplicación de la superficie de Riemann S_0 en el producto de esferas, g . La aplicación g se puede representar por un par de aplicaciones $g_k : S_0 \rightarrow S_k$. En esta sección vemos la forma que toman los resultados anteriores cuando nos enfocamos en el caso de \mathbb{R}^4 y estudiamos algunos resultados adicionales sobre los invariantes de segundo orden de superficies en \mathbb{R}^4 .

4.1. Aplicación de Gauss

Ya sabemos que podemos identificar a la grassmanniana de planos en \mathbb{R}^4 con una cuádrica $Q_2 \subset \mathbb{C}P^3$. Por otro lado, la grassmanniana $G_{2,4}$ se puede

ver representada como el producto de dos esferas. Este hecho nos permite expresar los resultados de una manera particularmente útil.

La aplicación $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ definida por

$$\phi : (w_1, w_2) \mapsto (1 + w_1 w_2, i(1 - w_1 w_2), w_1 - w_2, -i(w_1 + w_2))$$

satisface $\phi^2 = \sum_{k=1}^4 \phi_k^2 = 0$. Por lo tanto, $[\phi]$ toma valores en Q_2 y es un biholomorfismo de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en Q_2 .

Si consideramos $(w_1, w_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ como coordenadas homogéneas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ el biholomorfismo $[\phi]$ se extiende a un biholomorfismo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ en Q_2 . Si consideramos a $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ con la métrica de Fubini-Study (pág. 7, [10]) de curvatura holomorfa 2, la métrica inducida en Q_2 se puede expresar en términos de (w_1, w_2) como

$$ds^2 = \frac{2|dw_1|^2}{(1 + |w_1|^2)^2} + \frac{2|dw_2|^2}{(1 + |w_2|^2)^2}.$$

Así podemos concluir que Q_2 es el producto de dos esferas de curvatura gaussiana igual a 2, [1].

Ahora usamos los resultados obtenidos anteriormente para encontrar las condiciones necesarias para la aplicación de Gauss de una superficie orientada inmersa en \mathbb{R}^4 de forma explícita.

Sea $S \subset \mathbb{R}^4$ una superficie cuya aplicación de Gauss está dada por $G : S \rightarrow Q_2$. Describimos a Q_2 como $Q_2 = S_1 \times S_2$ donde cada S_k es la esfera de radio $1/\sqrt{2}$. Denotamos π_k la proyección de Q_2 a S_k para $k = 1, 2$.

Vemos que si G es la aplicación de Gauss, podemos expresar \overline{G} en términos de un parámetro local conforme z en S por las funciones $f_1(z) = w_1$ y $f_2(z) = w_2$. Podemos escribir $\overline{G}(z) = [\Phi(z)]$ donde

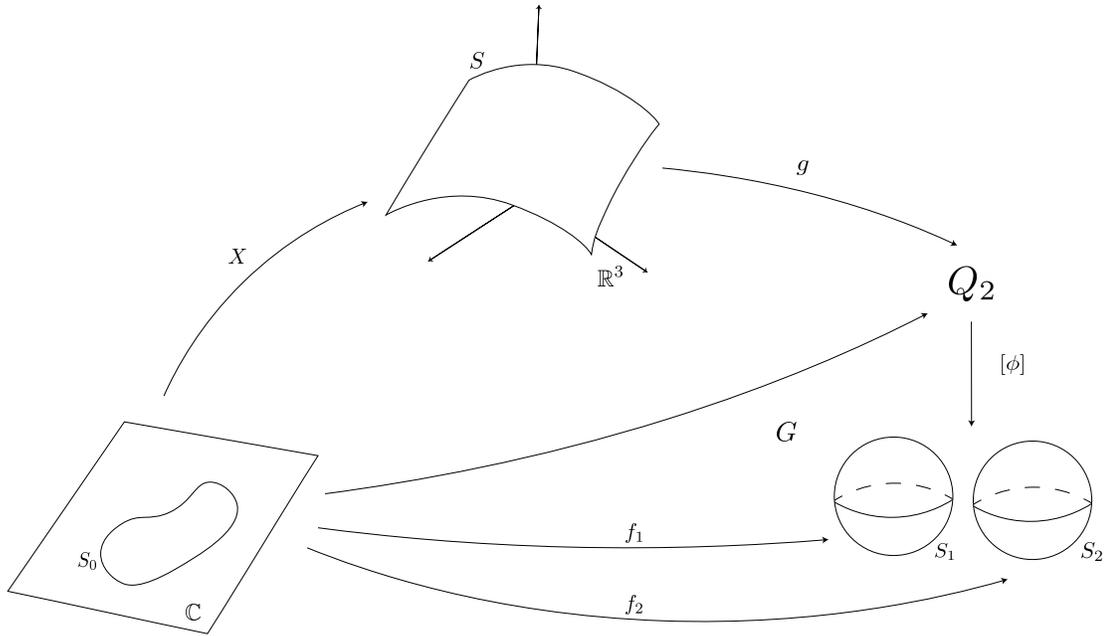
$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \phi(f_1(z), f_2(z)) \\ &= (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), i(f_1(z) + f_2(z))). \end{aligned}$$

Análogamente a como lo hicimos en nuestra discusión de superficies en \mathbb{R}^3 , definimos

$$F_i = \frac{(f_i)_{\bar{z}}}{1 + |f_i|^2} \quad \widehat{F}_i = \frac{(f_i)_z}{1 + |f_i|^2}, \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (20)$$

y donde $(f_i)_{\bar{z}} \neq 0$,

$$T_i = [(f_i)_{z\bar{z}}/(f_i)_{\bar{z}} - 2\bar{f}_i\widehat{F}_i]_{\bar{z}}, \quad \text{para } i = 1, 2.$$



4.2. Teorema de existencia

Teorema 12. *Sea S una superficie orientada inmersa en \mathbb{R}^4 cuya aplicación de Gauss G está dada localmente por $\bar{G}(z) = [\Phi(z)]$ con las funciones $f_1(z), f_2(z)$, donde z es un parámetro local conforme en S . Entonces*

$$|F_1| \equiv |F_2|$$

y cuando $(f_1)_{\bar{z}} \neq 0$ y $(f_2)_{\bar{z}} \neq 0$,

$$Im(T_1 + T_2) = 0.$$

Demostración. La demostración consiste en expresar a η y a V para el caso de \mathbb{R}^4 en términos de f_j y F_j y a partir de esas expresiones ver que la condición $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ donde $R(z)$ es un vector real (condición (10) del teorema 3) es equivalente a la ecuación $|F_1| \equiv |F_2|$ y que la condición $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$ (condición (11) del teorema 3) es equivalente a $\text{Im}(T_1+T_2) = 0$. Demostrar la equivalencia de la condición $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ donde $R(z)$ es un vector real y la ecuación $|F_1| \equiv |F_2|$ se hace en tres partes. Primero vemos que $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ donde $R(z)$ es un vector real se cumple si y sólo si la matriz $V^T\bar{V}$ es una matriz real. Después vemos que $V^T\bar{V}$ es una matriz real si y sólo si se satisface la ecuación (24). Finalmente se ve que esa ecuación es equivalente a pedir que $|F_1| \equiv |F_2|$

Primero expresamos la función $\eta = \Phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\Phi}/|\Phi|^2$ y la función $V = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi$ en términos de las funciones f_j y F_j . Como

$$\Phi_{\bar{z}} = (f_1)_{\bar{z}}(f_2, -if_2, 1, -i) + (f_2)_{\bar{z}}(f_1, -if_1, -1, -i)$$

y

$$|\Phi|^2 = 2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2),$$

entonces

$$\eta = \bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2. \quad (21)$$

Ahora definimos el campo de marcos

$$A = (f_2 - \bar{f}_1, -i(f_2 + \bar{f}_1), 1 + \bar{f}_1 f_2, -i(1 - \bar{f}_1 f_2)). \quad (22)$$

y verificamos que

$$V = F_1 A - F_2 \bar{A}.$$

Este campo de marcos tiene un significado geométrico importante que se verá más adelante en la observación 1. Vemos que $A \cdot A \equiv 0$ y

$$|A|^2 = 2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2) = |\Phi|^2.$$

Por lo tanto, A no puede ser cero nunca.

Haciendo $V = (V_1, \dots, V_4)$ y $A = (A_1, \dots, A_4)$, calculamos

$$\begin{aligned} V_j \bar{V}_k &= (F_1 A_j - F_2 \bar{A}_j)(\bar{F}_1 \bar{A}_k - \bar{F}_2 A_k) \\ &= |F_1|^2 A_j \bar{A}_k + |F_2|^2 \bar{A}_j A_k - 2\text{Re}(F_1 \bar{F}_2 A_j A_k) \\ &= (|F_1|^2 + |F_2|^2)\text{Re}(A_j \bar{A}_k) - 2\text{Re}(F_1 \bar{F}_2 A_j A_k) + i(|F_1|^2 - |F_2|^2)\text{Im}(A_j \bar{A}_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|V|^2 &= \sum_{j=1}^4 V_j \overline{V_j} = (|F_1|^2 + |F_2|^2) |A|^2 \\
&= 2(|F_1|^2 + |F_2|^2)(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2) \\
&= 2(|F_1|^2 + |F_2|^2) |\Phi|^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

Así, concluimos que $V(z) = 0$ si y sólo si $F_1(z) = F_2(z) = 0$ o equivalentemente $(f_1)_{\bar{z}}(z) = (f_2)_{\bar{z}}(z) = 0$. En particular, cuando $V(z) \neq 0$, la condición $V(z) = e^{i\alpha(z)} R(z)$ donde $R(z)$ es un vector real es equivalente a pedir que la matriz hermitiana de 4×4 , $V^T \overline{V}$, sea una matriz real. Las componentes $V_j \overline{V_k}$ son reales si y sólo si

$$(|F_1|^2 - |F_2|^2) \operatorname{Im}(A_j \overline{A_k}) = 0 \quad j, k = 1, \dots, 4. \tag{24}$$

Claramente $|F_1| \equiv |F_2|$ implica (24). Para probar que (24) implica $|F_1| \equiv |F_2|$ suponemos que $|F_1| \neq |F_2|$ en algún punto $z_0 \in D$ donde $V(z_0) \neq 0$. Entonces, como $V^T \overline{V}$ es una matriz hermitiana simétrica, en z_0 (24) es equivalente a las seis ecuaciones

$$\operatorname{Im}(A_j(z_0) \overline{A_k}(z_0)) = 0 \quad 1 \leq j < k \leq 4. \tag{25}$$

Ahora usamos la definición de A para mostrar que (25) no es posible. Por la definición de A tenemos que

$$\operatorname{Im}(A_1 \overline{A_2}) = |f_2|^2 - |f_1|^2, \quad \operatorname{Im}(A_3 \overline{A_4}) = 1 - |f_1|^2 |f_2|^2.$$

Por lo tanto, (25) implica que

$$|f_1(z_0)| = |f_2(z_0)| = 1.$$

Así, podemos escribir las otras cuatro ecuaciones de (25),

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A_1 \overline{A_3}) &= 2 \operatorname{Im}(f_1 + f_2) = 0 \\
\operatorname{Im}(A_1 \overline{A_4}) &= 2 \operatorname{Re}(f_2 - f_1) = 0 \\
\operatorname{Im}(A_2 \overline{A_3}) &= -2 \operatorname{Re}(f_1 + f_2) = 0 \\
\operatorname{Im}(A_2 \overline{A_4}) &= 2 \operatorname{Im}(f_2 - f_1) = 0 \quad \text{en } z_0
\end{aligned}$$

Pero esto implica que $f_1(z_0) + f_2(z_0) = f_2(z_0) - f_1(z_0) = 0$. Esto contradice $|f_1(z_0)| = |f_2(z_0)| = 1$. Así, concluimos que (24) implica $|F_1| \equiv |F_2|$ y por lo tanto son equivalentes cuando $V(z) = 0$.

Para demostrar la segunda parte del teorema, encontramos una expresión para el argumento de V . Cuando $V(z) \neq 0$ podemos escribir $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ donde $R(z)$ es un vector real distinto de cero. Como $V = F_1A - F_2\bar{A}$ y $|F_1| \equiv |F_2|$ entonces

$$\overline{F_1F_2}V = |F_1|^2\overline{F_2}A - |F_2|^2\overline{F_1}\bar{A} = |F_1|^2(\overline{F_2}A - \overline{F_1}\bar{A}) = -|F_1|^2\bar{V}.$$

Como estamos suponiendo que $V \neq 0$, tenemos alguna componente V_j de V distinta de cero que satisface

$$\overline{F_1F_2}V_j = |F_1|^2\bar{V}_j.$$

Entonces $\arg V_j = \alpha \pmod{\pi}$. También sabemos que $V \neq 0$ implica $F_1 \neq 0$ y $F_2 \neq 0$. Como $\arg(F_k) = \arg(f_k)_{\bar{z}}$, $k = 1, 2$ entonces

$$-(\arg(f_1)_{\bar{z}}) - (\arg(f_2)_{\bar{z}}) + \alpha = -\alpha \pmod{\pi}$$

o

$$\alpha = \frac{1}{2}((\arg(f_1)_{\bar{z}}) + (\arg(f_2)_{\bar{z}})) \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2}(Im(\log(f_1)_{\bar{z}}) + Im(\log(f_2)_{\bar{z}}))_{z\bar{z}} \\ &= \frac{1}{2}Im\left(\left(\frac{(f_1)_{z\bar{z}}}{(f_1)_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}} + \left(\frac{(f_2)_{z\bar{z}}}{(f_2)_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}}\right) \\ &= \frac{1}{2}Im(T_1 + T_2) + Im((\overline{f_1}\hat{F}_1)_{\bar{z}} + (f_2F_2)_{\bar{z}}). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(\overline{f_k}\hat{F}_k)_{\bar{z}} - (\overline{f_k}F_k)_z = |\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2, \quad (26)$$

por lo tanto

$$Im((\overline{f_k}\hat{F}_k)_{\bar{z}}) = Im((\overline{f_k}F_k)_z), \quad k = 1, 2.$$

Finalmente, como $\eta = \overline{f_1}F_1 + \overline{f_2}F_2$,

$$Im(\eta_z) = Im((\overline{f_1}F_1)_z + (\overline{f_2}F_2)_z).$$

Así, obtenemos que

$$\alpha_{z\bar{z}} - \text{Im}(\eta_z) = \frac{1}{2}\text{Im}(T_1 + T_2).$$

Pero nuestra condición de integrabilidad básica (11) nos dice que el lado izquierdo de la ecuación es cero. Por lo tanto, vemos que para superficies en \mathbb{R}^4 , la condición $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$ se reduce a $\frac{1}{2}\text{Im}(T_1 + T_2) = 0$. \square

A partir de este teorema se pueden encontrar ejemplos de aplicaciones en la grassmanniana que no pueden ser aplicaciones de Gauss de ninguna superficie inmersa conformemente en \mathbb{R}^4 . Por ejemplo, si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones holomorfas no constantes entonces $|F_1| \neq |F_2|$.

Ahora nos enfocamos en la pregunta sobre si las condiciones necesarias del teorema 3 para que una aplicación Φ sea aplicación de Gauss son también suficientes. Notamos que la ecuación $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ se debe satisfacer siempre y que es trivial cuando $V = 0$, mientras que la ecuación $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$ sólo tiene sentido en el conjunto donde $V \neq 0$.

Teorema 13. *Sea S_0 una superficie de Riemann simplemente conexa y sea $G : S_0 \rightarrow Q_2$ una aplicación en la cuádrica compleja. Representamos G localmente por un par de funciones complejas $f_1(z), f_2(z)$ a través de $\bar{G}(z) = [\phi(z)] = [\varphi(f_1(z), f_2(z))]$. Entonces tenemos las siguientes posibilidades:*

Caso 1. *Si $F_1 = F_2 = 0$ y S_0 no es compacta, entonces G es la aplicación de Gauss de una superficie mínima S en \mathbb{R}^4 .*

Caso 2. *Si F_1 y F_2 nunca son cero, entonces G es la aplicación de Gauss de una superficie S en \mathbb{R}^4 dada por una inmersión conforme de S_0 si y sólo si*

$$|F_1| \equiv |F_2| \quad \text{y} \quad \text{Im}(T_1 + T_2) \equiv 0.$$

Más aún, S es determinada únicamente módulo traslaciones y homotecias en \mathbb{R}^4 .

Demostración. Para el caso 1, observamos que, por (23), $|V|^2 = (|F_1|^2 + |F_2|^2)|\Phi|^2$, entonces $V = 0$ si y sólo si $F_1 = F_2 = 0$ y por lo tanto este

caso se reduce al caso 1 del teorema 5. Como se cumple que S_0 no es compacta entonces G es la aplicación de Gauss de una superficie mínima S en \mathbb{R}^4 .

Para el caso 2, las ecuaciones

$$|F_1| \equiv |F_2| \quad y \quad Im(T_1 + T_2) \equiv 0$$

son las condiciones del teorema 12 que, como se vio en la demostración de ese teorema, son equivalentes a las condiciones (10) y (11) del teorema 3. Por lo tanto, la existencia de S se sigue del caso 2 del teorema 5. La afirmación sobre la unicidad se sigue del teorema 4.

□

4.3. Curvaturas totales

El siguiente objetivo es relacionar propiedades analíticas de las componentes de la aplicación de Gauss, f_1 y f_2 , con propiedades geométricas de la superficie S . En esta sección interpretaremos el significado geométrico del campo A y encontramos expresiones explícitas para tres de los invariantes geométricos de superficies en \mathbb{R}^4 siguiendo los pasos de Osserman y Hoffman en [3]. Finalmente encontramos expresiones para las curvaturas totales de superficies en \mathbb{R}^4 en términos del grado de la aplicación de Gauss.

Observación 1. El campo vectorial

$$A = (f_2 - \bar{f}_1, -i(f_2 + \bar{f}_1), 1 + \bar{f}_1 f_2, -i(1 - \bar{f}_1 f_2))$$

tiene un significado geométrico importante en varias aplicaciones. En la prueba del teorema 12 se vió que A cumple

$$A \cdot A = 0 \quad y \quad |A|^2 = |\Phi|^2$$

donde Φ está dada por

$$\Phi(z) = (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), i(f_1(z) + f_2(z))). \quad (27)$$

Además, se puede ver que $A \cdot \Phi = \Phi \cdot A = 0$. Por lo tanto, $Re(A)$ y $Im(A)$ son normales al plano generado por $\{Re(\Phi), Im(\Phi)\}$ que es el plano tangente a S . Combinando estos hechos, concluimos que

$$e_3 = \frac{Re(\bar{A})}{\|A\|}, \quad e_4 = \frac{Im(\bar{A})}{\|A\|}$$

forman un marco del haz normal a S .

Definimos

$$e_1 = \frac{Re(\Phi)}{\|\Phi\|}, \quad e_2 = \frac{Im(\Phi)}{\|\Phi\|}$$

y concluimos el siguiente resultado.

Proposición 14. *Sea S una superficie en \mathbb{R}^4 , definimos la aplicación de Gauss G de S por $\overline{G}(z) = [\Phi(z)]$ donde Φ está definida por (27) en términos de las funciones complejas f_1 y f_2 . Si definimos el vector A por (22) Entonces en cualquier dominio de S donde f_1, f_2 son finitas, tenemos el campo de marcos adaptados $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dado por*

$$e_1 = \frac{Re(\Phi)}{\|\Phi\|}, \quad e_2 = \frac{Im(\Phi)}{\|\Phi\|}, \quad e_3 = \frac{Re(\overline{A})}{\|A\|}, \quad e_4 = \frac{Im(\overline{A})}{\|A\|}.$$

Observación 2. A partir de la definición de A en (22) podemos ver que

$$\frac{1}{f_2}\overline{A} = \left(1 - \frac{1}{f_2}f_1, i\left(1 + \frac{1}{f_2}f_1\right), f_1 + \frac{1}{f_2}, -i\left(f_1 - \frac{1}{f_2}\right)\right).$$

Comparando con la definición de Φ en (27),

$$\Phi = (1 + f_1f_2, i(1 - f_1f_2), f_1 - f_2, i(f_1 + f_2)),$$

podemos ver que $\frac{1}{f_2}\overline{A}$ se puede obtener a partir de Φ dejando a f_1 igual y reemplazando a f_2 por $-\frac{1}{f_2}$. Podemos ver a $[\overline{A}]$ como un punto en $\mathbb{C}P^3$ que está en la cuádrlica Q_2 , y por lo tanto corresponde a un 2-plano en \mathbb{R}^4 . Sabemos que los vectores e_3 y e_4 son normales al plano definido por $\{Re(\Phi), Im(\Phi)\}$. Por lo tanto, la aplicación

$$(w_1, w_2) \mapsto \left(w_1, -\frac{1}{w_2}\right)$$

de $S_1 \times S_2$ en $S_1 \times S_2$ que es la identidad en S_1 y la aplicación antípoda en S_2 , vista como una aplicación de la grassmanniana en la grassmanniana manda a cada plano orientado Π en el plano ortogonal orientado positivamente Π^\perp .

Recordando la notación del capítulo 1 podemos encontrar una expresión para el cuadrado de la norma del vector de curvatura media en términos de la aplicación de Gauss y de la función λ de la siguiente manera.

Sea S definida localmente por $X(z)$, con z un parámetro conforme. Entonces la métrica en S es de la forma $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$, donde $\lambda^2 = 2|X_z|^2$. Por otro lado, $X_z = \psi\Phi$ para alguna función compleja ψ distinta de cero. Así

$$\lambda^2 = 2|\psi|^2|\Phi|^2.$$

Como $|\Phi|^2 = 2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)$, entonces

$$\lambda^2 = 4|\psi|^2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2). \quad (28)$$

Como $V = |\Phi|^2\psi H$, entonces

$$|H|^2 = \frac{|V|^2}{|\psi|^2|\Phi|^4}$$

y como $|V|^2 = (|F_1|^2 + |F_2|^2)|\Phi|^2$, entonces

$$|H|^2 = \frac{|F_1|^2 + |F_2|^2}{|\psi|^2|\Phi|^2} = \frac{2(|F_1|^2 + |F_2|^2)}{\lambda^2}.$$

Ahora, buscamos una expresión para el jacobiano de las proyecciones de la aplicación de Gauss G , g_k de la superficie en la esfera S_k en términos de las funciones f_k . A partir de esta expresión vamos a encontrar fórmulas para la curvatura normal y la curvatura gaussiana de la superficie.

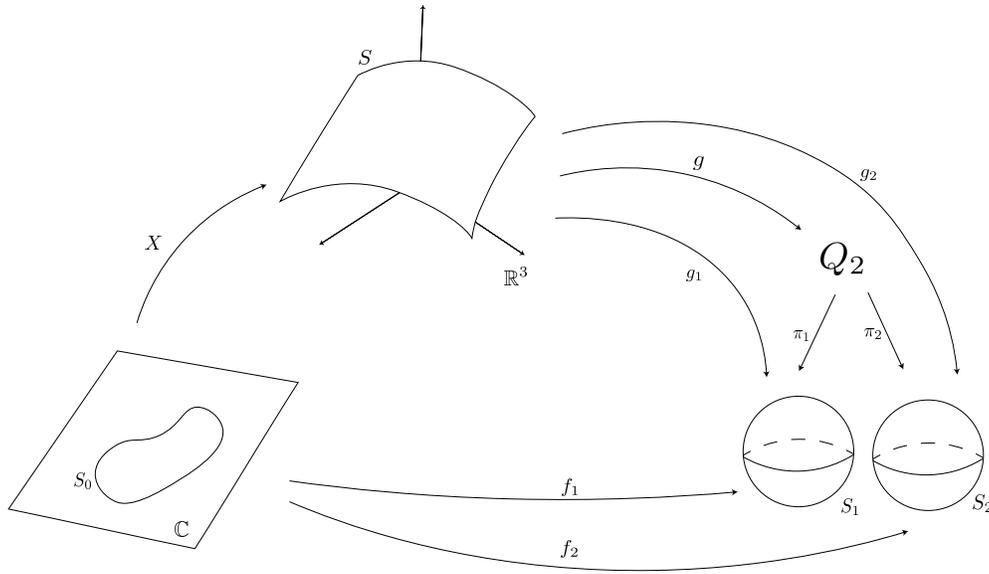
Sea $f(z) = w$ una función compleja, entonces su jacobiano es $Jf = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$. Por lo tanto el jacobiano de f_k es $Jf_k = |(f_k)_z|^2 - |(f_k)_{\bar{z}}|^2$ para $k = 1, 2$.

Sea g_k la aplicación de S en S_k , donde S_k es la esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, definida por $g_k = \pi_k \circ G$ donde $\pi_k : Q_2 \rightarrow S_k$ es la proyección de las cuádricas en la esfera S_k y G es la aplicación de Gauss de la superficie S .

Sea J_k el Jacobiano de g_k , entonces

$$J_k = -\frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{1}{1 + |f_k|^2} \right)^2 Jf_k = \frac{2}{\lambda^2} (|F_k|^2 - |\widehat{F}_k|^2). \quad (29)$$

El cambio de signo surge porque la proyección estereográfica invierte la orientación usual de la esfera, el término $1/\lambda^2$ corresponde al jacobiano de la parametrización conforme de la superficie y el término $\frac{2}{(1+|f_k|^2)^2}$ corresponde al jacobiano de la parametrización conforme de la esfera S_k .



Proposición 15. Sea S una superficie en \mathbb{R}^4 . La curvatura de Gauss K y la curvatura normal K_N de S están dadas por las fórmulas:

$$K = J_1 + J_2$$

$$K_N = J_1 - J_2.$$

Demostración. La ecuación $K = J_1 + J_2$ se puede deducir de la fórmula para curvatura gaussiana en términos de parámetros isotérmicos ((9.5) en [7]),

$$K = -\frac{2}{\lambda^2}(\log \lambda^2)_{z\bar{z}}.$$

Por (28) tenemos que $\lambda^2 = 4|\psi|^2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K &= -\frac{2}{\lambda^2}(\log(4|\psi|^2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)))_{z\bar{z}} \\ &= -\frac{2}{\lambda^2}(\log 4 + \log \psi + \log \bar{\psi} + \log(1 + |f_1|^2) + \log(1 + |f_2|^2))_{z\bar{z}} \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \left((\log \psi)_{z\bar{z}} + (\log \bar{\psi})_{z\bar{z}} + \left(\frac{(f_1)_z \bar{f}_1 + f_1 (\bar{f}_1)_z}{1 + |f_1|^2} \right)_{\bar{z}} + \left(\frac{(f_2)_z \bar{f}_2 + f_2 (\bar{f}_2)_z}{1 + |f_2|^2} \right)_{\bar{z}} \right) \end{aligned}$$

usando la definición de F_i y \hat{F}_i en (20),

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{\lambda^2} \left((\log \psi)_{z\bar{z}} + (\log \bar{\psi})_{z\bar{z}} + \left(\bar{f}_1 \hat{F}_1 + f_1 \bar{F}_1 \right)_{\bar{z}} + \left(\bar{f}_2 \hat{F}_2 + f_2 \bar{F}_2 \right)_{\bar{z}} \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \left((\log \psi)_{z\bar{z}} + (\log \bar{\psi})_{z\bar{z}} + \left(\bar{f}_1 \hat{F}_1 + \bar{f}_2 \hat{F}_2 \right)_{\bar{z}} + (f_1 \bar{F}_1 + f_2 \bar{F}_2)_z \right) \end{aligned}$$

por (12) tenemos que $\eta = -(\log \psi)_z$, por lo tanto $\bar{\eta} = -(\log \bar{\psi})_z$ y por (21) tenemos que $\eta = \bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2$ y por lo tanto, $\bar{\eta} = f_1 \bar{F}_1 + f_2 \bar{F}_2$ entonces

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{\lambda^2} \left(-\eta_z - \bar{\eta}_z + \left(\bar{f}_1 \hat{F}_1 + \bar{f}_2 \hat{F}_2 \right)_{\bar{z}} + \bar{\eta}_z \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \left(-\eta_z + \left(\bar{f}_1 \hat{F}_1 + \bar{f}_2 \hat{F}_2 \right)_{\bar{z}} \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \left(-(\bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2)_z + \left(\bar{f}_1 \hat{F}_1 + \bar{f}_2 \hat{F}_2 \right)_{\bar{z}} \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \left(-(\bar{f}_1 F_1)_z - (\bar{f}_2 F_2)_z + \left(\bar{f}_1 \hat{F}_1 \right)_{\bar{z}} + \left(\bar{f}_2 \hat{F}_2 \right)_{\bar{z}} \right) \end{aligned}$$

por (26) tenemos que $(\bar{f}_k \hat{F}_k)_{\bar{z}} - (\bar{f}_k F_k)_z = |\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2$,

$$= \frac{2}{\lambda^2} \left(|F_1|^2 - |\hat{F}_1|^2 + |F_2|^2 - |\hat{F}_2|^2 \right)$$

por (29)

$$= J_1 + J_2.$$

La ecuación de la curvatura normal se puede obtener observando lo siguiente. Dado un campo de marcos orientados $\{e_3, e_4\}$ del haz normal a la superficie S , si ω_3, ω_4 son las 1-formas duales en S , definimos la forma de conexión $\omega_{3,4}$ del haz normal como $\omega_{3,4}(\nu) = \langle \nabla_\nu^N e_3, e_4 \rangle$ para cualquier vector tangente ν .

Como la conexión ∇^N en el haz normal es simplemente la proyección en el espacio normal a S de la conexión estándar $\bar{\nabla}$ en \mathbb{R}^4 , entonces

$$\omega_{3,4}(\nu) = (\bar{\nabla}_\nu e_3) \cdot e_4$$

en términos del producto punto en \mathbb{R}^4 . Así, para cualquier marco ortonormal orientado $\{e_1, e_2\}$ en el espacio tangente de S ,

$$K_N = -d\omega_{3,4}(e_1, e_2).$$

Análogamente $K = -d\omega_{1,2}(e_3, e_4)$ donde $\omega_{1,2}(\nu) = (\bar{\nabla}_\nu e_3) \cdot e_4$. Como notamos en la observación 2, podemos obtener e_3, e_4 de e_2, e_2 reemplazando f_2 por $-\frac{1}{f_2}$. Como la aplicación $f_2 \mapsto -\frac{1}{f_2}$ corresponde a la aplicación antípoda en la esfera S_2 , que es una isometría que invierte orientación con jacobiano -1 en todos los puntos, entonces a partir de $K = J_1 + J_2$ obtenemos que

$$K_N = J_1 - J_2.$$

□

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior tenemos un teorema para superficies compactas que utiliza la definición del grado de una función entre superficies.

Definición 1. Si $f : S \rightarrow S'$ es una aplicación diferenciable entre superficies orientadas compactas, el grado de f es $\deg f = \frac{1}{A(S')} \int_S Jf$, donde $A(S')$ es el área de S' .

Teorema 16. Sea S una superficie compacta y orientada en \mathbb{R}^4 . Entonces la curvatura total está dada por:

$$\int_S K dA = \int_S J_1 dA + \int_S J_2 dA = 2\pi(d_1 + d_2),$$

donde d_j es el grado de la aplicación g_j , y la curvatura normal total está dada por la diferencia de áreas:

$$\int_S K_N dA = \int_S J_1 dA - \int_S J_2 dA = 2\pi(d_1 - d_2).$$

Más aún, si $\int_S K_N dA = 0$, entonces

$$d_1 = d_2 = \chi(S)/2$$

donde $\chi(S)$ denota a la característica de Euler de S .

Demostración. Como $K = J_1 + J_2$ entonces

$$\int_S K dA = \int_S J_1 dA + \int_S J_2 dA$$

donde J_k es el jacobiano de $g_k : S \rightarrow S_k$. Como $A(S_k) = 2\pi$ entonces el grado de g_k es $d_k = \frac{1}{2\pi} \int_S J_k$. Por lo tanto,

$$\int_S J_1 dA + \int_S J_2 dA = 2\pi(d_1 + d_2).$$

Análogamente para $\int_S K_N dA$. □

Lema 17. Para una superficie S en \mathbb{R}^4 , las siguientes son equivalentes:

1. $K_N = 0$,
2. $J_1 = J_2$,
3. $K = 2J_1$,
4. $|\hat{F}_1| = |\hat{F}_2|$.

Demostración. Como $K_N = J_1 - J_2$ entonces $K_N = 0$ si y sólo si $J_1 = J_2$. Por lo tanto 1 es equivalente a 2.

Como $K = J_1 + J_2$ entonces $J_1 = J_2$ si y sólo si $K = 2J_1$. Por lo tanto 2 es equivalente a 3.

Como $J_k = \frac{2}{\lambda^2}(|F_k|^2 - |\hat{F}_k|^2)$ y $|F_1| = |F_2|$ entonces

$$J_1 = J_2 \iff \frac{2}{\lambda^2}(|F_1|^2 - |\hat{F}_1|^2) = \frac{2}{\lambda^2}(|F_2|^2 - |\hat{F}_2|^2) \iff |\hat{F}_1| = |\hat{F}_2|.$$

Por lo tanto, 2 es equivalente a 4. □

4.4. Invariantes

La geometría de segundo orden de superficies inmersas en \mathbb{R}^4 se estudia a profundidad en [11], [12] y [13]. Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una inmersión. Los coeficientes de la primera forma fundamental están definidos como

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v$$

Una inmersión es isotérmica si y sólo si $E = G$ y $F = 0$.

Denotamos a la segunda forma fundamental en un punto p por

$$II_p : T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow N_p\mathbb{R}^2.$$

Si $\{\nu_1, \nu_2\}$ es una familia de vectores reales ortonormales, normales a la inmersión, entonces los coeficientes de la segunda forma fundamental ν_i se definen como

$$e_i = X_{uu} \cdot \nu_i, \quad f_i = X_{uv} \cdot \nu_i, \quad g_i = X_{vv} \cdot \nu_i.$$

Little estudia los invariantes de superficies en \mathbb{R}^4 . Los invariantes son la curvatura gaussiana K , la curvatura normal K_N , el cuadrado de la norma del vector de curvatura media $|H|^2$ y el resultante Δ . En el caso de superficies parametrizadas con coordenadas isotérmicas, los invariantes se pueden expresar en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental, considerando $E = G$ y $F = 0$, y los coeficientes de la segunda forma fundamental, $e_1, f_1, g_1, e_2, f_2, g_2$, de la siguiente manera:

$$K = \frac{e_1g_1 - f_1^2 + e_2g_2 - f_2^2}{E^2}, \quad (30)$$

$$K_N = \frac{1}{(E^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} E & 0 & E \\ e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{vmatrix}, \quad (31)$$

$$|H|^2 = \left(\frac{Eg_1 - 2Ff_1 + Ge_1}{E^2} \right)^2 + \left(\frac{Eg_2 - 2Ff_2 + Ge_2}{E^2} \right)^2 \quad y \quad (32)$$

$$\Delta = \frac{1}{4E^4} \begin{vmatrix} e_1 & 2f_1 & g_1 & 0 \\ e_2 & 2f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 2f_1 & g_1 \\ 0 & e_2 & 2f_2 & g_2 \end{vmatrix}. \quad (33)$$

A partir de la inmersión en términos de la aplicación de Gauss que hemos estudiado, podemos encontrar los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales y encontrar los invariantes de las superficies en \mathbb{R}^4 en términos de su aplicación de Gauss.

Tenemos que la inmersión $X : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^4$ satisface

$$X_z = \psi \Phi$$

donde Φ está dada en (27) por

$$\Phi = (1 + f_1 f_2, i(1 - f_1 f_2), f_1 - f_2, i(f_1 + f_2)).$$

Además, sabemos que

$$\left\{ \frac{Re(\Phi)}{\|\Phi\|}, \frac{Im(\Phi)}{\|\Phi\|}, \frac{Re(\bar{A})}{\|A\|}, \frac{Im(\bar{A})}{\|A\|} \right\}$$

forma un marco ortonormal a la superficie. Donde A está definida en (22) como

$$A = (f_2 - \bar{f}_1, -i(f_2 + \bar{f}_1), 1 + \bar{f}_1 f_2, -i(1 - \bar{f}_1 f_2)).$$

Para facilitar la notación, definimos

$$\hat{\Phi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)}} \right) \Phi$$

y

$$N = \left(\frac{1}{\sqrt{2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)}} \right) A$$

Observamos que $\{Re(\hat{\Phi}), Im(\hat{\Phi})\}$, también es una base del plano tangente de la superficie y que $\{Re(N), Im(N)\}$ es una base del plano normal a la

superficie.

Como $X_z = \psi\Phi$, entonces si

$$\hat{\psi} = \sqrt{2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)}\psi,$$

tenemos que

$$X_z = \hat{\psi}\hat{\Phi}.$$

Ahora, podemos calcular los coeficientes de la primera forma fundamental en coordenadas complejas como lo hace [14].

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_z, X_z \rangle = |\hat{\psi}|^2, & g_{12} &= \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = 0, \\ g_{21} &= \langle X_{\bar{z}}, X_z \rangle = 0, & g_{22} &= \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle = |\hat{\psi}|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Usando que $X_z = \frac{1}{2}(X_x - iX_y)$ y $X_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(X_x + iX_y)$ podemos obtener los coeficientes de la primera forma fundamental en coordenadas reales.

$$\begin{aligned} E &= 2g_{11} = 2|\hat{\psi}|^2 \\ F &= 0 \\ G &= 2g_{22} = 2|\hat{\psi}|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $EG - F^2 = E^2 = 4|\hat{\psi}|^4$.

Tambi3n podemos encontrar los coeficientes de la segunda forma fundamental. Para esto, primero encontramos las derivadas parciales del marco $\{Re(\hat{\Phi}), Im(\hat{\Phi}), Re(N), Im(N)\}$.

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_z &= \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\hat{\Phi} && +\hat{F}_1N - \hat{F}_2\bar{N}, \\ \hat{\Phi}_{\bar{z}} &= -\frac{1}{2}(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)\hat{\Phi} && +F_1N - F_2\bar{N}, \\ N_z &= -\bar{F}_1\hat{\Phi} + \hat{F}_2\bar{\hat{\Phi}} - \frac{1}{2}(M_1 - M_2)N, \\ N_{\bar{z}} &= -\bar{F}_1\hat{\Phi} + \hat{F}_2\bar{\hat{\Phi}} + \frac{1}{2}(\bar{M}_1 - \bar{M}_2)N, \end{aligned} \quad (36)$$

donde

$$M_i := \frac{\bar{f}_i f_{iz} - f_i \bar{f}_{iz}}{1 + |f_i|^2} = \bar{f}_i \hat{F}_i - f_i \bar{F}_i, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (37)$$

Ahora calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental en coordenadas complejas.

$$\begin{aligned} m_{11} &= \langle X_{zz}, A \rangle = \hat{\psi} \hat{F}_1, & m_{12} &= \langle X_{z\bar{z}}, A \rangle = \hat{\psi} F_1, \\ m_{21} &= \langle X_{\bar{z}z}, A \rangle = -\overline{\hat{\psi} \hat{F}_2}, & m_{22} &= \langle X_{\bar{z}\bar{z}}, A \rangle = -\overline{\hat{\psi} \hat{F}_2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Y en coordenadas reales

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\psi}(F_1 - F_2 + \hat{F}_1 - \hat{F}_2) + \overline{\hat{\psi}}(\overline{F_1 - F_2 + \hat{F}_1 - \hat{F}_2}) \right), \\ f_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{\psi}(\hat{F}_1 - \hat{F}_2) - \overline{\hat{\psi}}(\overline{\hat{F}_1 - \hat{F}_2}) \right), \\ g_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\psi}(F_1 - F_2 - \hat{F}_1 + \hat{F}_2) + \overline{\hat{\psi}}(\overline{F_1 - F_2 - \hat{F}_1 + \hat{F}_2}) \right), \\ e_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{\psi}(F_1 + F_2 + \hat{F}_1 + \hat{F}_2) - \overline{\hat{\psi}}(\overline{F_1 + F_2 + \hat{F}_1 + \hat{F}_2}) \right), \\ f_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\psi}(\hat{F}_1 + \hat{F}_2) + \overline{\hat{\psi}}(\overline{\hat{F}_1 + \hat{F}_2}) \right), \\ g_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{\psi}(F_1 + F_2 - \hat{F}_1 - \hat{F}_2) - \overline{\hat{\psi}}(\overline{F_1 + F_2 - \hat{F}_1 - \hat{F}_2}) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales (35) y (39) en las fórmulas de los invariantes (30), (31), (32) y (33), podemos obtener los invariantes de una superficie inmersa en \mathbb{R}^4 en términos de su aplicación de Gauss.

$$K = \frac{2}{\lambda^2} (|F_1|^2 + |F_2|^2 - |\hat{F}_1|^2 - |\hat{F}_2|^2),$$

$$K_N = \frac{2}{\lambda^2} (|\hat{F}_2|^2 - |\hat{F}_1|^2),$$

$$|H|^2 = \frac{2}{\lambda^2} (|F_1|^2 + |F_2|^2),$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{K_N}{2} \right)^2 - \frac{4}{\lambda^4} |F_1 \hat{F}_2 - F_2 \hat{F}_1|^2 \\ &= \frac{4}{\lambda^4} \left(|\hat{F}_2|^2 - |\hat{F}_1|^2 - |F_1 \hat{F}_2 - F_2 \hat{F}_1|^2 \right). \end{aligned}$$

Finalmente, usando que las líneas asintóticas de una superficie S se pueden definir en términos de los coeficientes de la segunda forma fundamental como las soluciones de la siguiente ecuación diferencial,

$$\begin{vmatrix} du^2 & -dudv & dv^2 \\ e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{vmatrix} = 0$$

podemos encontrar la expresión de las líneas asintóticas de una superficie S en \mathbb{R}^4 en términos de su aplicación de Gauss.

$$\begin{aligned} & (F_1 \overline{\hat{F}_1} + \overline{F_1} \hat{F}_1 - F_2 \overline{\hat{F}_2} - \overline{F_2} \hat{F}_2) du^2 \\ & + 2i(F_1 \overline{\hat{F}_1} - \hat{F}_1 \overline{F_1} - F_2 \overline{\hat{F}_2} + \overline{F_2} \hat{F}_2) dudv \\ & - (F_1 \overline{\hat{F}_1} + \overline{F_1} \hat{F}_1 - F_2 \overline{\hat{F}_2} - \overline{F_2} \hat{F}_2) dv^2 = 0. \end{aligned}$$

Referencias

- [1] David A Hoffman and Robert Osserman. *The geometry of the generalized Gauss map*, volume 236. American Mathematical Soc., 1980.
- [2] David A Hoffman and Robert Osserman. *The Gauss map of surfaces in \mathbb{R}^n* , volume 18. 1983.
- [3] David A Hoffman and Robert Osserman. *The Gauss map of surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4* , volume 3. Wiley Online Library, 1985.
- [4] D Varolin. *Riemann surfaces by Way of Complex Analytic Geometry*. AMS: Graduate Studies in Mathematics, 2011.
- [5] Shiing-shen Chern and Robert Osserman. Complete minimal surfaces in euclidean-space. *Journal d'Analyse Mathématique*, 19(1):15–34, 1967.
- [6] Ian N Sneddon. *Elements of partial differential equations*. Courier Corporation, 2006.
- [7] Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Courier Corporation, 2013.
- [8] Mariana Costa Villegas. *La geometría extrínseca de superficies vía la representación de Enneper-Weierstrass*. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, febrero 2019.
- [9] Katsuei Kenmotsu. Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature. *Mathematische Annalen*, 245(2):89–99, 1979.
- [10] Gábor Székelyhidi. *An Introduction to Extremal Kahler Metrics*, volume 152. American Mathematical Soc., 2014.
- [11] John A Little. On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean spaces. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 83(1):261–335, 1969.
- [12] Shyuichi Izumiya, Maria del Carmen Romero Fuster, Maria Aparecida Soares Ruas, and Farid Tari. *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*. World Scientific, 2016.

- [13] Pierre Bayard and Federico Sanchez-Bringas. Geometric invariants of surfaces in \mathbb{R}^4 . *Topology and its Applications*, 159(2):405–413, 2012.
- [14] Juan Monterde. Construction of non-hyperspherical immersions. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 43(2):303–332, 2012.