



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Un estudio de la teoría de filas y algunas de sus
aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Miguel Angel González Trejo

DIRECTORA DE TESIS

Eliane Regina Rodrigues





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a mis padres Teodoro y Juliana,
gracias a su amor, paciencia y esfuerzo, he logrado
llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy.*

Me gustaría agradecer a todos mis maestros quienes, por su dedicación y amistad, hicieron que pudiera crecer cada día como profesional. De manera especial a mi asesora, la Doctora Eliane Regina Rodrigues por estar a mi lado en todo el proceso de titulación.

Índice general

Introducción	1
1. Resultados preliminares	3
1.1. Procesos Estocásticos	3
1.2. Procesos Semi-Markov	3
1.3. Cadenas de Markov en Tiempo Continuo	4
1.4. Procesos de Nacimiento y Muerte	12
1.5. Estadística Bayesiana	16
1.6. Selección del Modelo más adecuado	17
1.7. Métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov	18
1.7.1. Algoritmo de Metropolis	19
1.7.2. Algoritmo de Metropolis - Hastings	20
1.7.3. El Muestreador de Gibbs	21
2. Sistemas de Filas	23
2.1. Resultados de Little	23
2.2. El Sistema de Fila M/M/1/∞	26
2.3. El Sistema de Fila M/M/1/k	36
2.4. El Sistema de Fila M/M/s/∞	40
2.5. El Sistema de Fila M/M/s/k	52
2.6. El Sistema de Fila M/G/1/∞	56
2.7. El Sistema de Fila M/G/s/s	59
2.8. El Sistema de Fila G/M/1/∞	59
3. Ejemplos de Sistemas de Filas	66
3.1. Ejemplo 1	66
3.2. Ejemplo 2	68
3.3. Ejemplo 3	71
3.4. Ejemplo 4	72
3.5. Ejemplo 5	74
3.6. Ejemplo 6	75

4. La contaminación en la CDMX	77
4.1. Introducción al problema	77
4.2. Descripción del modelo	79
4.3. Formulación bayesiana de un modelo adecuado	84
4.4. Datos de contaminación en la CDMX	91
4.5. Proceso de elección del modelo y valores estimados	93
4.5.1. La función de tasa de llegadas	94
4.5.2. La distribución del tamaño de los grupos	95
4.6. Información proporcionada por el modelo seleccionado	97
4.7. Conclusión	100
5. Conclusión	101
Bibliografía	103

Introducción

Esta tesis se basará en el estudio de la teoría de filas, así como también en sus aplicaciones a la vida real. La teoría surgió en el trabajo *The Theory of Probabilities and Telephone Conversations* en el año 1909, hecho por el danés Agner Kraup Erlang, cuando se presentaba el problema de la congestión de tráfico en las redes telefónicas. Esta teoría ha tenido un fuerte impacto por su utilidad en el modelado del comportamiento estocástico de un gran número de fenómenos, tanto naturales como creados por el hombre.

El estudio de la teoría de filas proporciona tanto una base teórica del tipo de servicio que se puede esperar de un determinado recurso, como la forma en la cual puede ser diseñado, por lo que es utilizada para determinar la forma más efectiva de gestionar un sistema de líneas de espera. Para aterrizar esta idea se presentan en este trabajo ejemplos explícitos donde la teoría de filas brinda información para administrar mejor los recursos de cada sistema. Además de los ejemplos convencionales que podemos encontrar en la literatura, en este trabajo también se presentará otro tipo de fenómeno que podemos modelar con un sistema de filas y nos servirá para abrir la mente y atrevernos a usar esta teoría en contextos más complejos. Este ejemplo especial es la descripción de la contaminación en la Ciudad de México, en este podemos observar que en un sistema de filas no necesariamente las llegadas son de individuos a un establecimiento o llamadas telefónicas entrando a un servidor, sino que también las llegadas se pueden interpretarse como conjuntos de días de contaminación que entran al ambiente de una ciudad. Obteniendo con esta teoría un modelo que utiliza un sistema de filas para analizar su comportamiento para predecir cual será su impacto.

A continuación, se hará una breve descripción del contenido de este trabajo. En el primer capítulo se encontrarán las definiciones y teoremas básicos para poder desarrollar el tema principal. Entre las definiciones que más destacan esta la definición de cadena de Markov a tiempo continuo dada su utilidad para analizar varios tipos de aplicaciones. El proceso Poisson también aparece aquí gracias a que este proceso da una muy buena descripción de muchos fenómenos de la vida real. El proceso de nacimiento y muerte también es una definición importante, dado que este se refiere al modelo probabilístico que describe las llegadas (naci-

mientos) y las salidas (muertes) de individuos que entran a un sistema de filas. Gracias a este proceso se puede saber a cualquier instante de tiempo cuantos individuos se encuentran dentro del sistema, el tiempo medio que hay entre la llegada de un individuo con su sucesor, y el tiempo medio que tarda un individuo de salir del sistema. Más aún, en este primer capítulo se encontrarán definiciones y procedimientos de la estadística bayesiana, como lo son el algoritmo de Metropolis - Hastings y el muestreo de Gibbs. Estos son métodos vía cadenas de Markov de simulación para generar muestras de distribuciones y estimar cantidades de interés como la media, mediana, entre otras. Con estos métodos se generan valores sucesivamente de una densidad propuesta, formando una cadena de Markov cuya distribución estacionaria es la distribución de interés. De ahí viene la denominación de vía cadenas de Markov.

En el segundo capítulo se encuentra la teoría de distintos sistemas de filas que podemos encontrar. En este capítulo se explica la descripción de cada sistema, así como la información que se puede obtener haciendo los cálculos señalados. En este, daremos a conocer sistemas de filas, los cuales podrán simular fenómenos de la vida cotidiana. El reto es elegir con conciencia el sistema a utilizar y hacer los cálculos, con el objetivo de reducir o maximizar la frecuencia de ciertos eventos de nuestro interés.

En el tercer capítulo se encuentran los ejemplos. Estos ayudaran a tener una visión más clara, de casos particulares donde se puede utilizar la teoría presentada en el capítulo dos. Más aún, se muestra cómo utilizar los teoremas, como hacer los cálculos explícitamente en ejemplos más concretos y de esta manera obtener resultados en concreto, los cuales se puedan interpretarse a la vida real.

En el cuarto y último capítulo de esta tesis, se encuentra la descripción de un trabajo de Barrios y Rodrigues (2015). En este trabajo se utiliza directamente tanto la teoría de filas como la estadística bayesiana para explicar y estudiar el problema de la contaminación en la Ciudad de México. Se describirá el procedimiento que se puede hacer con las herramientas presentadas en los capítulos anteriores, para poder dar estrategias de cómo solucionar la problemática, con el objetivo de minimizar la frecuencia de la ocurrencia de días con altos niveles de contaminación en la Ciudad de México.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo se presentarán algunas definiciones y resultados preliminares, necesarios para desarrollar el trabajo de tesis. Entre los conceptos básicos que se presentarán en este capítulo, están la definición de procesos estocásticos, las cadenas de Markov en tiempo continuo y el proceso Poisson.

El material presentado se basa en Ross (1996 y 2010) y en Cooper (1981).

1.1. Procesos Estocásticos

Definición 1.1.1. Un proceso estocástico es un conjunto $X = \{X_t : t \in T\}$ de variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad, con un mismo espacio de estados S , e indizada por un conjunto de índices T . En general $T = \mathbb{R}_+$ e indicará el tiempo. Así, X_t denotará el estado en el que se encuentra el proceso al tiempo t , $t \in T$.

Cuando pensamos en un proceso estocástico que describe un evento de la vida cotidiana, tenemos el supuesto que el proceso este en tiempo continuo, es decir, que t no solo pertenezca a los naturales, sino que también pueda tomar fracciones de minutos, días u horas. Como puede ser el caso en una carretera, que conecta dos ciudades y queramos predecir el número de autos averiados a la hora t del día, para así poder solucionar el problema lo más rápido posible para el bienestar de los afectados y de los que transiten la carretera.

1.2. Procesos Semi-Markov

Definición 1.2.1. Un proceso semi-Markov $X = \{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico, con espacio de estados $S = \{1, 2, \dots\}$, en el cual, cada vez que el proceso

entra a un estado i , $i \in S$, se cumple con lo siguiente:

- (i) El siguiente estado en el que entrará el proceso será al estado $j \neq i$, con probabilidad P_{ij} , $j \in S$, con $\sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$.
- (ii) Contando que el siguiente estado será el estado j , el tiempo que permanece el proceso en estado i antes de estar en el estado j , tiene una distribución F_{ij} , $i, j \in S$.

A un proceso semi-Markov $X = \{X_t : t \geq 0\}$, se le puede asociar un proceso a tiempo discreto $X^S = \{X_n^S : n = 0, 1, \dots\}$, que registra la sucesión de diferentes estados visitados por X . Este proceso es conocido como la cadena de saltos asociada a X . La definición está dada a continuación.

Definición 1.2.2. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un proceso semi-Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, \dots\}$. La cadena de saltos asociada a X es la cadena $X^S = \{X_n^S : n = 0, 1, \dots\}$, donde $X_n = X_{t_n}$, $n \geq 0$ y t_n es el tiempo en el cual el n -ésimo cambio de estado ocurrió.

La cadena de saltos $X^S = \{X_n^S : n \geq 0\}$ también tiene espacio de estados S y es una cadena de Markov cuyas probabilidades de transición son las $P_{ij} \in S$, dadas en la definición 1.2.1.

1.3. Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

Definición 1.3.1. Un proceso estocástico $X = \{X_t : t \in T\}$, con espacio de estados S y $T = \mathbb{R}_+$, es una cadena de Markov a tiempo continuo, si cumple con la propiedad Markoviana, es decir, para cualesquiera estados $k, j, j_0, j_1, \dots, j_n \in S$ y tiempos $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t < s$, se tiene que

$$P(X_s = k \mid X_t = j, X_{t_n} = j_n, \dots, X_{t_0} = j_0) = P(X_s = k \mid X_t = j).$$

Una cadena de Markov a tiempo continuo también puede ser visto como un proceso semi-Markov, así que, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.2. Un proceso semi-Markov $X = \{X_t : t \geq 0\}$, con espacio de estados S , con distribución de permanencia en un estado i antes de cambiar a un estado $j \neq i$, $i, j \in S$, F_{ij} y con cadena de saltos $X^S = \{X_n^S : n \geq 0\}$ con probabilidades de transición P_{ji} , $i, j \in S$, es una cadena de Markov a tiempo continuo, si F_{ij} es una distribución exponencial con parámetro $\gamma_i > 0$, $i \in S$, es decir

$$F_{ij} = \exp(\gamma_i), i, j \in S.$$

Definición 1.3.3. La probabilidad de transición al tiempo t de una cadena de Markov $X = \{X_t : t \geq 0\}$, la cual indica la probabilidad que el proceso cambia de un estado i al tiempo t , a un estado j en un tiempo $(t+s)$, indicada por $P_{ij}(t, t+s)$, está dada por

$$P_{ij}(t, t+s) = P(X_{t+s} = j | X_t = i), i, j \in S, t, s \geq 0.$$

Observación. Cuando $P_{ij}(t, t+s)$ no depende de t , entonces tenemos una cadena de Markov homogénea en el tiempo y esta probabilidad de transición se le indica por $P_{ij}(s) = P(X_{t+s} = j | X_t = i)$, con $i, j \in S$ y $t, s \geq 0$. De ahora en adelante, solo consideraremos cadenas homogéneas.

Definición 1.3.4. La matriz de transición de la cadena de Markov a tiempo continuo se define como $P(t) = \{P_{ij}(t)\}_{i,j \in S}$. En el caso $t = 0$, la probabilidad de transición, para todo $i, j \in S$ se define como

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j, \\ 0 & , \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Definición 1.3.5. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ una cadena de Markov a tiempo continuo, con S su espacio de estados, se define la tasa de transición instantánea de un estado i al j como q_{ij} , dada por

$$q_{ij} = v_i P_{ij}, i, j \in S,$$

siendo v_i la tasa de cambio del estado i a cualquier otro en S y P_{ij} la probabilidad de transición del estado i al j de la cadena de saltos $X^S = \{X_n^S : n \geq 0\}$ asociada a X .

De la definición 1.3.5, se sigue la siguiente proposición.

Proposición 1.3.1. Para $X = \{X_t : t \geq 0\}$, una de una cadena de Markov a tiempo continuo, se cumple lo siguiente:

$$(a) v_i = \sum_{j \neq i} v_i P_{ij} = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

$$(b) P_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_{j \neq i} q_{ij}}.$$

Demostración.

(a) Note que de la definición 1.3.5, se tiene que $q_{ij} = v_i P_{ij}$. Entonces

$$\sum_{i \neq j} q_{ij} = \sum_{i \neq j} v_i P_{ij} = v_i \sum_{j \neq i} P_{ij}.$$

Por las definiciones 1.3.1, y 1.3.2, se tiene que $\sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$. Por lo tanto, $\sum_{j \neq i} q_{ij} = v_i$, y el resultado sigue.

(b) Teniendo en cuenta que $q_{ij} = v_i P_{ij}$, por la definición 1.3.5, se tiene que $P_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i}$. De esta forma, usando (a) en el denominador se tendrá lo buscado. \square

De esta forma, especificando las tasas de transición instantáneas, se determinan los parámetros de la cadena de Markov a tiempo continuo.

Observación: Cuando tenemos una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados S , cada vez que el proceso entra a un estado, digamos al estado $i \in S$, se tiene que:

- La cantidad de tiempo que el proceso tarda para a pasar de un estado es exponencialmente distribuida con tasa γ_i entonces su media es $1/\gamma_i$.
- Para todo $i, j \in S$ y $t \in \mathbb{R}^+$ se cumple $P_{ij}(t) \geq 0$.
- Para todo $i, j \in S$ y $t \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\sum_{i \neq j} P_{ij} \leq 1$. La desigualdad ocurre cuando S es infinito y cuando S es finito se tiene la igualdad (ver en Ross (1996)).

Definición 1.3.6. La matriz de tasas de transición $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in S}$ de una cadena de Markov a tiempo continuo, con S su espacio de estados, es la matriz Q , donde cada q_{ij} indicará la tasa de cambio del estado i al j , dadas en la definición 1.3.5, y donde $q_{ii} = -v_i$.

Proposición 1.3.2. En una cadena de Markov a tiempo continuo $X = \{X_t : t \in T\}$, con matriz de transición $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in S}$, para todo $i, j, k \in S$, $k \neq i, j$, y $t, s \geq 0$, se cumple

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación de Chapman Kolmogorov.

Demostración. Por propiedades de probabilidad de transición, la ley de la probabilidad total y propiedad de Markov se tiene que,

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+s) &= P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{t+s} = j \mid X_t = k) P(X_t = k \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s). \end{aligned}$$

□

Ahora se presentarán definiciones y teoremas de las cadenas de Markov discretas, que no se demostrarán, ya que nos desviaríamos del tema de la tesis pero se puede encontrar en Ross (1996). El motivo de ver esta parte de cadenas de Markov discretas es la aplicación de algunos teoremas en la teoría de filas, que es el objetivo de la tesis.

Definición 1.3.7. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ una cadena de Markov homogénea en el tiempo y con espacio de estados S , tal que $T \subseteq \mathbb{N}$, se dice, que X es una cadena de Markov discreta. En este caso, la probabilidad de transición de $m \geq 0$ pasos está definida por

$$P_{ij}(m) = P(X_m = j \mid X_0 = i), i, j \in S.$$

Cuando $m = 1$, entonces tenemos la llamada probabilidad de transición en un paso o probabilidad de transición y se denotara como P_{ij} , $i, j \in S$.

Definición 1.3.8. En una cadena de Markov discreta el periodo de un estado $i \in S$, es el valor $d(i)$, dado por

$$d(i) = \text{m.d.c. } \{n \geq 0 : P_{ii}^{(n)} > 0\},$$

donde m.d.c. indica el máximo común divisor. Si $d(i) = 1$, decimos que el estado i es llamado aperiódico.

Definición 1.3.9. Una cadena de Markov discreta $X = \{X_t : t \geq 0\}$, se dice que es irreducible, si para toda $i, j \in S$, existen $n, m \geq 0$, tales que, $P_{ij}(m) > 0$ y $P_{ji}(n) > 0$.

Definición 1.3.10. En una cadena de Markov discreta $X = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$, definimos a $\pi_j^{(n)}$, como la probabilidad de que el proceso en el paso n está en el estado j , dicho de otra forma $P(X_n = j)$, $j \in S$, $n \geq 0$.

Definición 1.3.11. En una cadena de Markov discreta $X = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$, decimos que tiene una distribución de probabilidades estacionaria $\pi = \{\pi_x, x \in S\}$, si para toda $i > 0$, $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$, se cumple que

$$\pi = \pi P,$$

donde P es la matriz de transición en un paso de la cadena, es decir,

$$P = (P_{ij})_{i,j \in S}.$$

Definición 1.3.12. La cadena $X = \{X_n : n \geq 0\}$, se llama estacionaria si $\pi_i^{(0)} = \pi_i$, $i \in S$, entonces $\pi_j^{(n)} = \pi_j$, para toda $n > 0$, $j \in S$. De esta forma, se entiende que cada $\pi_j^{(n)}$ no cambia con el tiempo, es decir son estacionarias.

Definición 1.3.13. Una cadena de Markov discreta $X = \{X_n : n \geq 0\}$, con espacio de estados S , tiene una distribución límite $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$, si el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = k)$$

existe. Cuando este existe es igual a π_k , es decir, para una cadena de Markov ergódica se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = k) = \pi_k, \quad k \in S.$$

Definición 1.3.14. Una cadena de Markov se dice que es ergódica si es irreducible, aperiódica y para todo estado i , la probabilidad de regresar al estado i es igual a uno.

Definición 1.3.15. Sea $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ una cadena de Markov, con espacio de estados S , matriz de transición $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$, y distribución estacionaria $\{\pi_i : i \in S\}$. Suponga que X está en estado estacionario, es decir, $P(X_n = j) = \pi_j$, donde $j \in S$. Considere ahora la cadena de Markov $X^* = \{X_n^* : n \in \mathbb{Z}\}$, donde si $X_n^* = X_n$, entonces $X_{n+1}^* = X_{n-1}$. La cadena X^* tendrá el mismo espacio de estados S , y su matriz de transición $P^* = (P_{ij}^*)_{i,j \in S}$, está dada por

$$P_{ij}^* = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i},$$

para todo $i, j \in S$. Adicionalmente, X^* también tiene distribución estacionaria $\{\pi_i : i \in S\}$. Definimos la cadena X^* como la cadena de Markov reversa en el tiempo con respecto a P . Más aún, si $P_{ij}^* = P_{ij}$, entonces la cadena X es llamada reversible en el tiempo, es decir, se tendrá que

$$\pi_i = P_{ij} = \pi_j P_{ji}, i, j \in S.$$

Definición 1.3.16. Sea $X = \{X_t : t \in T\}$, tal que, X_t indique el número de eventos que han ocurrido hasta el tiempo t . Este tipo de proceso es llamado proceso de conteo.

Observación. Un ejemplo de proceso de conteo es aquel que cuenta en un partido de futbol el número de goles al minuto t o también podría contar el número total de tarjetas amarillas al minuto t .

Formalizando a continuación, la definición de proceso de conteo.

Definición 1.3.17. Un proceso estocástico $X = \{X_t : t \in T\}$, se dice que es de conteo, si cumple:

- (i) $X_t \geq 0$.
- (ii) $X_t \in \mathbb{Z}^+$.
- (iii) Si $s < t$ entonces $X_s \leq X_t$.
- (iv) Para toda $s < t$, $X_t - X_s$ es el número de eventos ocurridos en el intervalo de tiempo $(s, t]$, donde $s, t \in \mathbb{R}^+$.

Notación. Denotamos por $o(h)$, a una función tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Definición 1.3.18. Un proceso de conteo $X = \{X_t : t \in T\}$, es llamado proceso Poisson con tasa λ , $\lambda > 0$, si su espacio de estados es $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ y se cumple

- (i) $X_0 = 0$.
- (ii) Es estacionario, es decir, la distribución de probabilidad en un instante de tiempo fijo es la misma para todos los instantes de tiempo.
- (iii) Tiene incrementos independientes, dicho de otra manera, el número de sucesos que tienen lugar en intervalos de tiempo que no se interceptan son variables aleatorias independientes.
- (iv) $P(X_{t+h} = i + 1 | X_t = i) = \lambda h + o(h)$.
- (v) $P(X_{t+h} = i + 2 | X_t = i) = o(h)$.
- (vi) $P(X_{t+h} = i | X_t = i) = 1 - \lambda h + o(h)$.

(vii) La probabilidad de ocurrencia de k eventos en el intervalo de tiempo $[t+s, t)$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda > 0$, es decir

$$P(X_{t+s} - X_t = k) = \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}, \quad t, s \geq 0, k = 0, 1, \dots$$

Definición 1.3.19. Sea $X = \{X_t : t \in T\}$ un proceso de Poisson, indicamos el tiempo hasta que ocurra el primer evento por Y_1 . Además, para $n > 1$, Y_n representa el tiempo transcurrido entre la ocurrencia del $(n-1)$ -ésimo y el n -ésimo eventos.

Lema 1.3.1. Si una variable aleatoria X , se distribuye de manera exponencial con tasa λ , donde $\lambda > 0$, entonces para todo s y $t > 0$ se tiene que

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s).$$

Demostración. Suponga que X tiene distribución exponencial con tasa $\lambda > 0$. Por propiedades de probabilidad condicional tenemos

$$\begin{aligned} P(X > s+t \mid X > t) &= \frac{P(X > s+t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s). \end{aligned}$$

□

Observación. El lema 1.3.1. es conocido como la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial.

Lema 1.3.2. Las variables aleatorias Y_n , $n = 1, 2, \dots$, son independientes y tienen distribución exponencial con tasa $\lambda > 0$, y media $1/\lambda$.

Demostración. Esta demostración puede encontrarse en Ross (2010).

□

Definición 1.3.20. Sea $X = \{X_t : t \in T\}$ un proceso de Poisson, se define a el tiempo de llegada del n -ésimo evento como S_n , dado por

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad n \geq 1.$$

Proposición 1.3.3. Si se tiene un proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Poisson con tasa $\lambda > 0$, entonces la probabilidad de que haya n ocurrencias en un intervalo de tiempo $[0, t)$, es una Poisson con tasa λt .

Demostración. Sabemos que para $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim \text{Gama}(n, \lambda)$ (gama con parámetros n y λ), dado que S_n es suma de n variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$. Entonces si X_t indica el número de eventos en $[0, t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_t = n) &= P(S_n \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} e^{\lambda s} \frac{\lambda (\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t s^{n-1} ds \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \left[\frac{s^n}{n} \right]_0^t = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \left(\frac{t^n}{n} - \frac{0^n}{n} \right) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \left(\frac{t^n}{n} \right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

□

El siguiente modelo puede verse como una cadena de Markov a tiempo continuo. Para tanto debemos asignar adecuadamente el espacio de estados y deducir correctamente las probabilidades de transición.

Ejemplo. Suponga que un taller mecánico es famoso por su servicio de postura completa de un auto en completo desuso ya sea por un gran golpe o falla. Este servicio consiste en tres pasos bien definidos. Por hipótesis tenemos que los tiempos de servicio de los tres pasos se distribuyen como variables aleatorias exponenciales independientes con tasas $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ respectivamente.

Lamentablemente el taller tiene mecánicos limitados y por ello no puede asumir una responsabilidad de ingresar a este proceso a más de un auto a la vez. Por último, suponga que los clientes entran a este servicio de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$. Se puede notar que, ya que no habrá más de un cliente a la vez, siempre que halla un cliente o ninguno. Además, si el taller tiene un cliente, nos gustaría saber en cuales de los tres pasos del servicio está su auto.

Por lo tanto, se puede definir los estados del proceso como 0, 1, 2, 3 donde tendrán la interpretación siguiente:

0: cuando el taller no tiene cliente,

1: cuando el taller tiene cliente y está en el paso uno,

2: cuando el taller tiene cliente y está en el paso dos,

3: cuando el taller tiene cliente y está en el paso tres.

Las probabilidades de transición son fáciles de deducir, pues $P_{01} = P_{12} = P_{23} = 1$, y son cero en otro caso. Esto se debe al hecho que la probabilidad de que el proceso pase del estado uno al tres es cero, pues ningún automóvil puede pasar del paso uno al tres sin tomar el paso dos.

El tiempo de permanencia en el estado cero antes del pasar al estado uno, como ya se mencionó, tiene una distribución exponencial con tasa λ , dado que los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con esta tasa.

El tiempo de permanencia en el estado uno antes de pasar al dos y del dos al tres se distribuyen exponencialmente con tasas μ_1 y μ_2 , respectivamente. Adicionalmente, la tasa con la que el cliente deja el sistema es μ_3 dado que es el tiempo de servicio en el tercer y último paso.

Definición 1.3.21. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ una de una cadena de Markov a tiempo continuo, se define $\frac{d}{dt}P(X_t = n)$, para $n = 0, 1, \dots$, como su ecuación diferencial asociada, donde

$$\frac{d}{dt}P(X_t = n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+h} = n) - P(X_t = n)}{h}.$$

1.4. Procesos de Nacimiento y Muerte

Definición 1.4.1. Un proceso de nacimiento y muerte es una cadena de Markov a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$, con espacio de estados $S \subseteq \mathbb{Z}$, donde si $X_t = i$ entonces $X_{t+1} \in \{i+1, i-1\}$. Suponiendo que $X_t = n$, el tiempo hasta el cambio al estado $n+1$, se distribuye exponencial con tasa $\lambda_n > 0$. Por otro lado, el tiempo hasta el cambio al estado $n-1$, tiene distribución exponencial con una tasa $\mu_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, con $\mu_0 = 0$.

Definición 1.4.2. Una forma equivalente de definir un proceso $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ de nacimiento y muerte es:

- (i) Para cualquier instante de tiempo $t \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $X_t \in \mathbb{N}$.
- (ii) Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $P(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = n) = \lambda_n h + o(h)$.
- (iii) Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $P(X_{t+h} - X_t = -1 \mid X_t = n) = \mu_n h + o(h)$.
- (iv) $P(|X_{t+h} - X_t| \geq 2) = o(h)$.

Observación. El tiempo promedio de espera para la ocurrencia de un evento de nacimiento y muerte, dado que se tiene n eventos son de $1/\lambda_n$ y $1/\mu_n$, respectivamente. Esto se debe que al hecho que la esperanza de una variable aleatoria que se distribuye exponencial con parámetro λ es $1/\lambda$.

Definición 1.4.3. Los parámetros $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ son llamados, respectivamente tasas de nacimiento de muerte del proceso.

De esta forma, usando la definición 1.3.6, se tiene que la matriz de tasas Q , donde cada una de sus entradas q_{ij} indica la tasa de cambio del estado i al j , está dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.4.1. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de nacimiento y muerte, con tasa de nacimiento $\lambda_n > 0$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, y con tasa de muerte $\mu_n > 0$, para $n = 1, 2, \dots$, con $\mu_0 = 0$, entonces para $n = 0$

$$-\lambda_0 P(X_t = 0) + \mu_1 P(X_t = 1) = 0, \quad (1.1)$$

y para toda $n \geq 1$

$$\lambda_{n-1} P(X_t = n-1) - (\lambda_n + \mu_n) P(X_t = n) + \mu_{n+1} P(X_t = n+1) = 0. \quad (1.2)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son llamadas ecuaciones diferenciales de un proceso de nacimiento y muerte.

Demostración. Para obtener las ecuaciones diferenciales generales de un proceso de nacimiento y muerte, debemos analizar dos casos: cuando en el sistema no haya individuos y cuando haya uno o más.

Iniciando cuando $X_{t+h} = 0$, teniendo en cuenta la condición (iv) de la definición 1.4.2, si se tiene que en el intervalo de tiempo $[t, t+h)$, no hay ningún individuo en el sistema. Entonces, solo debemos analizar dos casos, los cuales son

- (i) Al tiempo t no había ningún individuo y no ocurrió ningún nacimiento.

- (ii) Al tiempo t había un individuo en el sistema, pero después ocurrió una muerte y ni un nacimiento.
- (iii) Por último, cuando ocurrió más de una muerte en el sistema y al tiempo $t + h$ no hay ningún nacimiento.

Traduciendo esto a probabilidades y por la definición 1.3.18, se sigue que

$$\begin{aligned} P(X_{t+h} = 0) &= P(X_{t+h} = 0 \mid X_t = 0)P(X_t = 0) + P(X_{t+h} = 0 \mid X_t = 1)P(X_t = 1) \\ &\quad + P(X_{t+h} = 0 \mid X_t \geq 2)P(X_t \geq 2) \\ &= (1 - \lambda_0 h + o(h))P(X_t = 0) + (\mu_1 h + o(h))P(X_t = 1) + o(h). \end{aligned}$$

Por lo que,

$$P(X_{t+h} = 0) - P(X_t = 0) = (-\lambda_0 h + o(h))P(X_t = 0) + (\mu_1 h + o(h))P(X_t = 1) + o(h)$$

Dividiendo entre h por ambos lados, tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ y por la definición 1.3.21, se tiene que

$$\frac{d}{dt}P(X_t = 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+h} = 0) - P(X_t = 0)}{h} = -\lambda_0 P(X_t = 0) + \mu_1 P(X_t = 1).$$

Concluyendo, notamos que la ecuación diferencial asociada es

$$\frac{d}{dt}P(X_t = 0) = -\lambda_0 P(X_t = 0) + \mu_1 P(X_t = 1).$$

Ahora, siguiendo con el caso $X_{t+h} = n$, con $n > 0$, notamos que tenemos cinco casos:

- (i) Al tiempo t , hay n individuos en el sistema y no ha ocurrido ningún nacimiento ni muerte.
- (ii) Al tiempo t , hay $n - 1$ individuos en el sistema y ocurrió un nacimiento y ni una muerte.
- (iii) Al tiempo t , hay $n + 1$ individuos en el sistema y ocurrió una muerte y ni un nacimiento.
- (iv) Los dos últimos casos son cuando ocurren más de un nacimiento o más de una muerte en el sistema, pero de igual manera al tiempo $t + h$ hay n individuos.

Se sigue con las probabilidades que

$$\begin{aligned}
P(X_{t+h} = n) &= P(X_{t+h} = n \mid X_t = n)P(X_t = n) \\
&+ P(X_{t+h} = n \mid X_t = n-1)P(X_t = n-1) \\
&+ P(X_{t+h} = n \mid X_t = n+1)P(X_t = n+1) \\
&+ P(X_{t+h} = n \mid X_t \geq n+2)P(X_t \geq n+2) \\
&+ P(X_{t+h} = n \mid X_t \leq n-2)P(X_t \leq n-2) \\
&= (1 - \lambda_n h + o(h))(1 - \mu_n h + o(h))P(X_t = n) \\
&+ (\lambda_{n-1} h + o(h))(1 - \mu_{n-1} h + o(h))P(X_t = n-1) \\
&+ (1 - \lambda_{n+1} h + o(h))(\mu_{n+1} h + o(h))P(X_t = n+1) + o(h) + o(h) \\
&= P(X_t = n)(1 - \lambda_n h)(1 - \mu_n h) + P(X_t = n-1)\lambda_{n-1} h(1 - \mu_{n-1} h) \\
&+ P(X_t = n+1)(1 - \lambda_{n+1} h)\mu_{n+1} h + o(h) + o(h).
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
P(X_{t+h} = n) - P(X_t = n) &= -P(X_t = n)(\mu_n h + \lambda_n h - \lambda_n h \mu_n h) \\
&+ P(X_t = n-1)\lambda_{n-1} h(1 - \mu_{n-1} h) \\
&+ P(X_t = n+1)\mu_{n+1} h(1 - \lambda_{n+1} h) \\
&+ o(h) \\
&+ o(h).
\end{aligned}$$

De la misma forma, dividiendo por h , haciendo $h \rightarrow 0$, y usando la definición 1.3.21, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(X_t = n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+h} = n) - P(X_t = n)}{h} \\
&= \lambda_{n-1}P(X_t = n-1) - (\lambda_n + \mu_n)P(X_t = n) + \mu_{n+1}P(X_t = n+1).
\end{aligned}$$

□

Definición 1.4.4. Un proceso de nacimiento puro es un proceso de nacimiento y muerte, donde para toda $n \geq 0$ se tiene que $\mu_n = 0$, y $\lambda_n > 0$.

Observaciones.

(i) El proceso de nacimiento puro se interpreta como, un proceso donde el tiempo de las sucesivas llegadas se distribuyen exponenciales con media $1/\lambda_n$ pero las salidas en ningún tiempo ocurren.

(ii) Un proceso Poisson es un proceso de nacimiento puro.

Definición 1.4.5. Un proceso de muerte puro es un proceso de nacimiento y muerte, donde para toda $n \geq 0$ se tiene que $\mu_n > 0$, y $\lambda_n = 0$.

1.5. Estadística Bayesiana

Definición 1.5.1. Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria obtenida de un conjunto de variables aleatorias $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, con función de distribución conjunta $f_{\bar{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$, donde θ es un vector de la forma $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, representando los parámetros de la densidad conjunta. Por ejemplo, θ puede contener la media y la varianza de la función de densidad. Definimos la función de verosimilitud de \bar{x} , como la función $L(\bar{x} | \theta)$ proporcional a la función de densidad conjunta de \bar{x} evaluada en (x_1, \dots, x_n) , es decir

$$L(\bar{x} | \theta) = L(x_1, \dots, x_n | \theta) \propto f(x_1, \dots, x_n | \theta).$$

Definición 1.5.2. Sea $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria e independiente de X con función de densidad $f(\cdot | \theta)$. Definimos a $f_{x_i}(\cdot | \theta)$, como la función de densidad marginal de X , es decir,

$$f_{x_i}(x_i) = \int_{x_k \neq x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Ejemplo. Podemos tomar una muestra aleatoria e independiente $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X con función de densidad normal de parámetros μ y σ , por lo que $\theta = (\mu, \sigma)$. De esta manera se obtiene la función de verosimilitud está dada por:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n | \mu, \sigma) \propto f(x_1, \dots, x_n | \theta) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i | \mu, \sigma) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}. \end{aligned}$$

Definición 1.5.3. Sea θ el parámetro de un modelo describiendo un conjunto de datos D , cuya función de verosimilitud es $L(D | \theta)$. Si consideramos θ una entidad aleatoria, entonces la distribución a priori de θ , indicada por $p(\theta)$ es la

distribución de θ sin tomar en cuenta la información proporcionada por D , y su distribución a posteriori, indicada por $p(\theta | D)$, es su distribución cuando ya se incorpora la información proporcionada por los datos D .

Proposición 1.5.1. Sea θ el parámetro del modelo, que describe un conjunto de datos D , se tiene la relación,

$$P(\theta | D) \propto L(D | \theta)p(\theta).$$

Demostración. Primero se observará cual es la relación entre los datos D y el parámetro θ , para esto, se usa la probabilidad conjunta, es decir, $P(\theta, D)$. Aplicando la definición de probabilidad condicional, se tiene que

$$P(\theta, D) = P(D | \theta)p(\theta),$$

donde $P(D | \theta)$ es la distribución conjunta de X y esta es proporcional a la función de verosimilitud $L(D | \theta)$, y el término $p(\theta)$ es la distribución a priori del parámetro θ . Por lo tanto,

$$P(\theta | D) \propto L(D | \theta)p(\theta).$$

Es decir, probabilidad a posteriori de θ es proporcional al producto de su probabilidad a priori y la función de verosimilitud. □

1.6. Selección del Modelo más adecuado

Cuando dos o más modelos son considerados para describir algún fenómeno, es interesante usar algún método para seleccionar el que mejor representa el fenómeno en estudio. Dos de estos métodos son dados a seguir.

Definición 1.6.1. La suma de las diferencias absolutas (SAD), está definida por

$$SAD = \sum_i |p(i) - \hat{p}(i)|,$$

donde $\hat{p}(i)$ es el valor estimado de la $p(i)$ observada.

El SAD nos da el desempeño global de cada conjunto de datos estimados y con eso podemos realizar un análisis preliminar de la idoneidad de un modelo dado.

Definición 1.6.2. El método de discriminación de Bayes (BDM), está descrito de la siguiente manera, tenemos de Raftery (1996) que la función de probabilidad marginal (MLF) para un conjunto de datos D para el modelo l , está dado por

$$V_l = \int L(D | \theta^{[l]})P(\theta^{[l]})d\theta^{[l]}, l = 1, 2, \dots$$

donde $\theta^{[l]}$ es el vector de parámetros para el modelo l y $P(\theta^{[l]})$ es la distribución a priori conjunta de $\theta^{[l]}$. El BDM determina que es mejor el modelo i que el modelo j si

$$\frac{V_i}{V_j} < 1.$$

1.7. Métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov

El método de Monte Carlo surgió con Ulam (1949) mientras trabajaba en el proyecto Manhattan en los Álamos en Estados Unidos. Él jugaba solitario y pensó algo que muchos nos preguntamos al jugar este juego, ¿cuál es la probabilidad de que al repartir las cartas se consiga terminar el juego? Lo que observo es que era más fácil jugar 100 veces solitario y ver después cuantas partidas había ganado que calcular la probabilidad matemáticamente a lápiz y papel.

La base del método de Monte Carlo es obtener la media de ocurrencia de algún evento (o esperanza de alguna variable aleatoria) usando la generación aleatoria. El método fue llamado así, en referencia al Casino Monte Carlo al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios.

Se conoce como muestreo a la técnica para la selección de una muestra a partir de una población de nuestro interés. Al elegir una muestra aleatoria se espera conseguir que sus propiedades sean extrapolables a la población, es decir si seleccionamos una buena muestra, la información obtenida de esta será la misma que si se considerara toda la población. Muestrear correctamente una población depende del tamaño de la muestra y de la técnica de muestreo.

Los métodos de Monte Carlo son utilizados cuando queremos obtener una muestra de valores generados a partir de una función de densidad que es de la forma

$$\pi(x) = \frac{h(x)}{c}, \tag{1.3}$$

teniendo como dominio un conjunto S , donde $h(\cdot)$ es una función de densidad conocida, y c es la constante normalizadora, es decir, c hace cumplir que

$$\int_S \pi(x) dx = 1.$$

Los casos donde los métodos de Monte Carlo son de utilidad son cuando el espacio de estados S es muy grande haciendo que la constante normalizadora c , no sea fácil de calcularse, o cuando $h(\cdot)$ es multidimensional y no existe un algoritmo implementado en algún paquete que se pueda usar para simular valores, o cuando la forma de $h(\cdot)$ es conocida pero no puede ser identificada con alguna función de densidad conocida que se pueda utilizar como forma de obtener valores muestreados que simulan los que son producidos por la función $h(\cdot)$.

En los llamados métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov el objetivo es construir una cadena de Markov ergódica (definición 1.3.14.) con espacio de estados S y distribución límite estacionaria $\{\pi(x) : x \in S\}$ que es la distribución (1.3) de la cual queremos obtener una muestra.

Por lo tanto, lo que tiene que ser construido es una cadena de Markov $X = \{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ donde su espacio de estados es el dominio de $h(\cdot)$, es decir, el conjunto S , con X ergódica y tal que para $P_{xy}(n)$, $x, y \in S$ las probabilidades de transición en n pasos de X , tengamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{xy}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = y \mid X_0 = x) = \pi(y), x, y \in S.$$

De esta forma, tenemos que existe una n^* tal que

$$P(X_n = x) \approx \pi(x), x \in S,$$

para toda $n > n^*$.

Con esto surge un nuevo problema que es estimar el valor de n^* adecuado, pero esto no es el objetivo de la tesis. El algoritmo de Monte Carlo vía cadenas de Markov más conocido y utilizado es el de Metropolis - Hastings (Hastings 1970) que es una generalización del algoritmo de Metropolis (Metropolis et al. 1953), el cual se describe a seguir.

1.7.1. Algoritmo de Metropolis

El algoritmo de Metropolis es un método de Monte Carlo vía cadenas de Markov para obtener una secuencia de muestras aleatorias a partir de una distribución de probabilidad cuyo muestreo directo no es simple. El algoritmo genera una cadena de Markov, que cumple con ser ergódica cuya distribución límite es la distribución de donde queremos muestrear valores. En términos generales, cada iteración del algoritmo de Metrópolis consiste de dos pasos: proponer un nuevo

estado del sistema y aceptarlo o rechazarlo, con cierta probabilidad. En caso de rechazarlo, se mantiene el estado actual.

El procedimiento del algoritmo de Metropolis es el siguiente: sea S el espacio de estados de la función $h(\cdot)$, considerada en (1.3). Este conjunto S será el espacio de estados de la cadena de Markov ergódica que se construirá. Sea $\{\pi(x) : x \in S\}$ definida en (1.3) la distribución de la cual queremos simular valores.

Continuando, debemos considerar la matriz de transición $R = (R_{xy})_{x,y \in S}$, con $R_{xy} > 0$, $x, y \in S$, es decir será posible la transición de un estado $x \in S$, a un estado $y \in S$, a esto se le suele llamar que todos los estados estén comunicados. Se debe cumplir de igual manera que si tenemos $x \in S$, debe ser fácil generar $y \in S$ a partir de R_x . Por último esta matriz de transición debe ser simétrica, es decir, debe cumplir que $R_{xy} = R_{yx}$.

Después seguir los pasos siguientes (ver, por ejemplo, en Rodrigues 2013):

- (a) Tome $X_0 = x^{(0)} \in S$ generado de acuerdo a alguna función de distribución,
- (b) Para cada $n = 1, 2, \dots$, suponga que el estado de la cadena es $X_{n-1} = x^{(n-1)}$,

- (i) generar $y \in S$ a partir de $R_{x^{(n-1)}}$.

- (ii) calcular

$$\alpha(x^{(n-1)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)}{\pi(x^{(n-1)})} \right\}$$

- (iii) hacer

$$X_n = x^{(n)} = \begin{cases} y & , \text{ con probabilidad } \alpha(x^{(n-1)}, y) \\ x^{(n-1)} & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Notar que en el algoritmo de Metropolis, la constante normalizadora c , de la ecuación (1.3) no aparece en la construcción de la cadena de Markov ergódica. Por lo que, para utilizar este algoritmo basta tener $h(\cdot)$ y la matriz R .

1.7.2. Algoritmo de Metropolis - Hastings

El método de Metropolis - Hastings es el método de Monte Carlo más utilizado. La idea de este algoritmo es también la construcción de una cadena de Markov para generar valores de una distribución que será su distribución estacionaria.

Esta generalización del algoritmo de Metropolis fue propuesta por Hastings (1970), y considera una matriz de transición $R = (R_{ij})_{i,j \in S}$ (donde S es el espacio donde se requiere generar valores) tal que sus componentes sean valores positivos y que sea fácil generar valores a partir de ella.

Indicaremos por $\{\pi(x) : x \in S\}$ la distribución de la cual queremos simular valores. Sea $R = (R_{xy})_{x,y \in S}$, una matriz de transición con $R_{xy} > 0$, $x, y \in S$, y tal que dado $x \in S$, es relativamente fácil generar valores $y \in S$ a partir de R_x .

Construya una cadena de Markov $X = \{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ de forma similar a la que fue construida usando el algoritmo de Metropolis, pero ahora la probabilidad de aceptación $\alpha(x, y)$ está dada de la siguiente forma: sea $X_{n-1} = x^{(n-1)}$ si el valor propuesto generado es $y \in S$, entonces haga $X_n = y$ con probabilidad

$$\alpha(x^{(n-1)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)R_{yx^{(n-1)}}}{\pi(x^{(n-1)})R_{x^{(n-1)}y}} \right\},$$

caso contrario haga $X_n = x^{(n-1)}$.

Observaciones. La cadena de Markov $X = \{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ generada es una cadena de Markov ergódica por la construcción del algoritmo. También será reversible en el tiempo (definición 1.3.15.), con espacio de estados S y la distribución estacionaria de X será $\{\pi(x) : x \in S\}$.

El algoritmo permite que $X_{n+1} = X_n$, por lo tanto la cadena es aperiódica. La irreducibilidad es satisfecha al tenernos $R_{xy} > 0$ para todas $x, y \in S$ (dado que $R_{xy} > 0$ para todas $x, y \in S$). La recurrencia positiva viene de que el espacio de estados es finito y de la propiedad de irreducibilidad.

1.7.3. El Muestreador de Gibbs

El muestreador de Gibbs (Geman y Geman 1984; Gelfand y Smith 1990) se descubre a seguir.

El proceso inicia con tomar el vector aleatorio (X_1, X_2, \dots, X_d) , $d \geq 1$, con distribución conjunta $\pi((x_1, x_2, \dots, x_d))$. Para $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, definimos por $\bar{x}_{(-i)}$ el vector \bar{x} sin la i -ésima coordenada, es decir,

$$\bar{x}_{(-i)} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Las distribuciones marginales condicionales completas de $\pi(\cdot)$ son las distribuciones definidas como

$$\pi_i(\cdot \mid \bar{x}_{(-i)}), \text{ para } i = 1, 2, \dots, d.$$

Suponga que sea posible generar valores a partir de las distribuciones marginales condicionales completas $\pi_i(\cdot \mid \bar{x}_{(-i)})$, $i = 1, 2, \dots, d$. El algoritmo de Gibbs continua de la siguiente forma:

(a) tomar $\bar{X}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_d^{(0)}) = \bar{x}^{(0)}$ de acuerdo a alguna distribución inicial,

(b) para toda $n = 1, 2, \dots$, sea $X_{n-1} = (x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_d^{(n-1)}) = \bar{x}^{(n-1)}$,

(i) generar $x_1^{(n)}$, utilizando la distribución marginal condicional completa

$$\pi_1(\cdot | x_2^{(n-1)}, x_3^{(n-1)}, \dots, x_d^{(n-1)})$$

• para toda $i = 2, 3, \dots, d-1$, generar $x_i^{(n)}$, utilizando la distribución marginal condicional completa

$$\pi_i(\cdot | x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_{i+1}^{(n-1)}, \dots, x_d^{(n-1)}).$$

(ii) Calcule $x_d^{(n)}$, utilizando la distribución marginal condicional completa

$$\pi_d(\cdot | x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{d-1}^{(n)}).$$

(c) Hacer $\bar{X}_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_d^{(n)}) = \bar{x}^{(n)}$.

La cadena $\bar{X} = \{\bar{X}_n = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_d^{(n)}) : n = 1, 2, \dots\}$ construida de esta forma es una cadena de Markov. Más aún, en el caso que X sea ergódica y su distribución límite es

$$\pi(\bar{x}) = \pi((x_1, x_2, \dots, x_d)).$$

Observación. Notemos que X tiene como probabilidades de transición (Rodriguez 2013)

$$P_{\bar{x}^{(n-1)}\bar{x}^{(n)}} = P(X_n = \bar{x}^{(n)} | X_{n-1} = \bar{x}^{(n-1)}) = \pi_1(x_1^{(n)} | x_2^{(n-1)}, \dots, x_d^{(n-1)}) \left[\prod_{i=2}^{d-1} \pi_i(x_i^{(n)} | x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_{i+1}^{(n-1)}, \dots, x_d^{(n-1)}) \right] \pi_d(x_d^{(n)} | x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{d-1}^{(n)}).$$

Por último, una de las condiciones para que se pueda utilizar el muestreador de Gibbs es que sea posible generar valores de las probabilidades condicionales marginales completas. Si no es posible calcular estas probabilidades, una solución para este problema es utilizar el algoritmo de Metropolis-Hastings dentro del muestreador de Gibbs. También recalcar la importancia de que X cumpla con ser ergódica cuando utilicemos el algoritmo de Gibbs, ya que de lo contrario el algoritmo puede dejar de funcionar (Robert y Casella 1999).

Capítulo 2

Sistemas de Filas

El objetivo de este capítulo es describir algunos tipos de sistemas de filas que comúnmente se encuentran en la literatura, así como algunas de sus propiedades. Estos sistemas de filas serán procesos de nacimiento y muerte con propiedades específicas, las cuales serán detalladas cuando se consideren los diferentes sistemas. El material presentado se basa en Bhat (2015) y en Ross (1996).

Primero vamos a dar algunas definiciones y notaciones que serán utilizadas a lo largo de este capítulo.

2.1. Resultados de Little

Considere el proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila, donde cada X_t , indica el número de individuos en el sistema al tiempo t . Lo que se busca, es relacionar a la media del número de usuarios en un sistema de fila con la tasa de llegada y el tiempo de espera. Esto, se hará a seguir.

Definición 2.1.1. Definimos a las variables $L(t)$, $L_q(t)$, $L_s(t)$, A_t , $W(t)$, $W_q(t)$ y $W_s(t)$ que participan en cualquier sistema como:

- $L(t)$: La esperanza del número de individuos en el sistema al tiempo t .
- $L_q(t)$: La esperanza del número de individuos en la fila al tiempo t .
- $L_s(t)$: La esperanza del número de individuos en los servidores al tiempo t .
- A_t : El número total de individuos que han ingresado al sistema al tiempo t .
- $W(t)$: La esperanza del tiempo de un individuo en el sistema al tiempo t .

- $W_q(t)$: La esperanza del tiempo de un individuo en la fila al tiempo t .
- $W_s(t)$: La esperanza del tiempo de un individuo en el servidor al tiempo t .

Definición 2.1.2. En un sistema de fila $X = \{X_t : t \geq 0\}$, que es un proceso de nacimiento y muerte, para λ_t definida como la tasa promedio de llegada de individuos en el sistema al tiempo t y para $W(t)$ definida como el tiempo medio de espera de cada cliente en un sistema al tiempo t , tenemos

$$\lambda_t = \frac{A_t}{t}, t > 0,$$

$$W(t) = \frac{\int_0^t X_s ds}{A_t}, t > 0.$$

Teorema 2.1.1. En un sistema de fila $X = \{X_t : t \geq 0\}$, con tasa promedio de llegada al sistema λ_t , se cumplen las siguientes igualdades

$$(a) L(t) = \lambda_t \times W(t),$$

$$(b) L_q(t) = \lambda_t \times W_q(t),$$

$$(c) L_s(t) = \lambda_t \times W_s(t),$$

donde $L_q(t)$ es la media del número de clientes en la fila de espera al tiempo t , $W_q(t)$ es la media del tiempo que permanece cada cliente en la fila de espera al tiempo t , $L_s(t)$ es la media del número de clientes en el servidor al tiempo t , y $W_s(t)$ la media del tiempo de servicio en el servidor al tiempo t .

Demostración.

(a) Por la definición de la media, se tiene que la esperanza del número de individuos en el sistema al tiempo t , es igual a

$$L(t) = \frac{\int_0^t X_s ds}{t},$$

donde X_s indica el número de individuos en el sistema al tiempo s . Multiplicando y dividiendo por A_t , tenemos que

$$L(t) = \frac{A_t}{t} \frac{\int_0^t X_s ds}{A_t} = \lambda_t \times W(t).$$

(b) Ahora, por la definición de la media, se tiene que la esperanza del número de individuos en la fila de espera al tiempo t , es igual a

$$L_q(t) = \frac{\int_0^t X_s ds}{t},$$

donde X_s indica en este caso el número de individuos en la fila de espera al tiempo s . Multiplicando y dividiendo por A_t , tenemos que

$$L_q(t) = \frac{A_t}{t} \frac{\int_0^t X_s ds}{A_t} = \lambda_t \times W_q(t).$$

(c) Finalmente, por la definición de la media, se tiene que la esperanza del número de individuos en el servidor al tiempo t , es igual a

$$L_s(t) = \frac{\int_0^t X_s ds}{t},$$

donde X_s indica en este caso el número de individuos en el servidor al tiempo s . Multiplicando y dividiendo por A_t , tenemos que

$$L_s(t) = \frac{A_t}{t} \frac{\int_0^t X_s ds}{A_t} = \lambda_t \times W_s(t).$$

□

Lema 2.1.1. En un sistema de fila $X = \{X_t : t \geq 0\}$, se tiene que

$$W(t) = W_q(t) + W_s(t),$$

es decir, el tiempo medio de un individuo en el sistema es igual al tiempo medio en la fila de espera más el tiempo medio en el servidor.

Demostración. Dado que el tiempo de un individuo en el sistema es igual al tiempo que el individuo permanece en la fila de espera más el tiempo que pasa en el servidor, denotando a estos tiempos como R_t , B_t , C_t respectivamente, aplicando la esperanza, se tiene:

$$E[R_t] = E[B_t + C_t] = E[B_t] + E[C_t].$$

Por lo tanto, como por definición $E[R_t] = W(t)$, $E[B_t] = W_q(t)$ y $E[C_t] = W_s(t)$ se tiene la igualdad buscada.

□

2.2. El Sistema de Fila M/M/1/∞

En esta sección se definirá un sistema de fila M/M/1/∞, y también se presentarán algunas de sus propiedades.

Definición 2.2.1. Un sistema de fila M/M/1/∞ es una cadena de Markov a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$, la cual X_t indica el número de individuos que hay en un sistema al tiempo t . El sistema tiene un solo servidor. Así, si un individuo llega al sistema tendrá dos opciones las cuales serán, ingresar al servidor si este está vacío o ir a una fila de espera. Esta fila de espera tendrá capacidad infinita. Este sistema de filas recibe clientes de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$. Por otro lado, si el sistema está ocupado, la salida de los individuos (es decir, el tiempo de servicio) es de acuerdo a un proceso Poisson de tasa $\mu > 0$.

Este sistema de filas se indica por M/M/1/∞ pues la primera M indica la distribución de tiempos de llegada al sistema, que por ser un sistema Poisson, cumple la propiedad Markoviana, es decir, es un proceso sin memoria (lema 1.3.1). La segunda M corresponde a la distribución de tiempo de servicio en el sistema o tiempo de salida que es también una distribución exponencial, la cual también cumple la propiedad Markoviana. Finalmente, el número "1" indica el número de servidores que tiene el sistema y ∞ indica que el tamaño de la fila es ilimitado.

Definición 2.2.2. Definimos a los intervalos de tiempo que hay entre las llegadas consecutivas de los individuos al sistema como $U = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada U_i indica el tiempo que transcurrió entre las llegadas $(i - 1)$ -ésima y la i -ésima.

Observación. Notar que por definición, en un sistema de filas M/M/1/∞, el tiempo que hay entre la llegada consecutiva de dos individuos al sistema tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$, y los tiempos de servicio tiene distribución exponencial con tasa $\mu > 0$, como se demostrara en el teorema 2.2.1, dado a seguir.

Teorema 2.2.1. Sea un sistema de fila M/M/1/∞, entonces la llegada de clientes es de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ si y solo si el tiempo de la llegada consecutiva de dos individuos al sistema se distribuye exponencial con tasa λ .

Demostración.

(a) Suponga que el sistema recibe individuos de acuerdo a un proceso Poisson. De esta forma, por el lema 1.3.2, se tiene que los tiempos entre llegadas son independientes e idénticamente distribuidas exponencial con parámetro $\lambda > 0$, y de media $1/\lambda$.

(b) Ahora, suponga que los U_i , $i = 1, 2, \dots$, son independientes y con la distribución exponencial con parámetro λ . De esta forma, dado que $\sum_{i=1}^n U_i$, la suma de las variables aleatorias con distribución $\exp(\lambda)$ tiene distribución $\text{gama}(n, \lambda)$, se tiene que

$$P(X_t \leq n) = P(U_1 + U_2 + \dots + U_{n+1} > t) = \int_t^\infty e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} dx.$$

Haciendo el cambio de variable $v = x - t$, se tiene $dv = dx$, y los intervalos de integración 0 y ∞ . De esta forma,

$$\begin{aligned} P(X_t \leq n) &= \int_0^\infty e^{-\lambda(v+t)} \frac{(v+t)^n \lambda^{n+1}}{n!} dv = \int_0^\infty e^{-\lambda(v+t)} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i v^{n-i} \right] dv \\ &= \sum_{i=0}^n \int_0^\infty e^{-\lambda(v+t)} \frac{\lambda^{n+1} t^i v^{n-i}}{i!(n-i)!} dv = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^{n+1} t^i}{i!(n-i)!} e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\lambda v} v^{n-i} dv. \end{aligned}$$

Utilizando otro cambio de variable $u = \lambda v$, se tiene que $du = \lambda dv$, y se obtiene que $dv = \frac{du}{\lambda}$, entonces

$$\begin{aligned} P(X_t \leq n) &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^{n+1} t^i}{i!(n-i)!} e^{-\lambda t} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{n-i}}{\lambda^{n-i} \lambda} du \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^{n+1} t^i}{i!(n-i)!} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^{n-i} \lambda} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-i} du \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i t^i}{i!(n-i)!} e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-i} du. \end{aligned}$$

Para resolver la integral $\int_0^\infty e^{-u} u^{n-i} du$, se usara el siguiente resultado. Para cualquier número $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!,$$

La demostración se basa en hacer n veces la integración por partes, tomando a $u = x^n$ y $dv = e^{-x} dx$, ver, por ejemplo, en Spivak (1967). Aplicando el resultado se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_t \leq n) &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i t^i}{i!(n-i)!} e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-i} du \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i t^i}{i!(n-i)!} e^{-\lambda t} (n-i)! = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i t^i}{i!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

□

Observaciones.

- (i) Dado que en el sistema de fila M/M/1/∞ cada U_i tiene distribución exponencial con tasa λ_i , entonces por propiedades de esta distribución, la esperanza de cada U_i es $1/\lambda$.
- (ii) Si $\lambda < \mu$ entonces no se tendrá una fila de espera, dado que, si un cliente entrara al sistema, como la tasa de salida es mayor a la de llegada, entonces antes de que llegue otro cliente al sistema el primero ya habrá salido y así sucesivamente. Si $\lambda = \mu$ entonces no se formara una cola, ya que cada vez que llegue un cliente entonces el cliente en servicio, en ese mismo momento saldrá del sistema. Este proceso sería el sistema ideal pues el servidor siempre estaría ocupado y no tendríamos una fila de espera en el sistema. Por último, si $\lambda > \mu$ entonces conllevaría a tener en el sistema una fila de espera.

Definición 2.2.3. Definimos el coeficiente ρ de intensidad de tráfico de la fila como la tasa de llegada entre la tasa de salida, es decir

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Definición 2.2.4. Se dice que el sistema es estable si la tasa de llegada es menor que la tasa de salida, o sea

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Teorema 2.2.2. En un sistema de fila M/M/1/∞ representado por el proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$, con tasas de llegada y salida $\lambda > 0$ y $\mu > 0$, respectivamente, tales que $\lambda < \mu$, se tiene que

$$P(X_t = n) = \rho^n P(X_t = 0),$$

donde

$$P(X_t = 0) = 1 - \rho.$$

Demostración. La demostración será usando inducción matemática. Usando las ecuaciones diferenciales obtenidas en el teorema 1.4.1, la definición 2.2.3 y el hecho que $\lambda_i = \lambda$ y $\mu_i = \mu$. Se puede escribir

$$-\lambda P(X_t = 0) + \mu P(X_t = 1) = 0,$$

y para $n \geq 1$

$$\lambda P(X_t = n-1) - (\lambda + \mu)P(X_t = n) + \mu P(X_t = n+1) = 0.$$

Dividimos entre μ y sustituyendo a $\frac{\lambda}{\mu}$ por ρ , se tiene

$$-\rho P(X_t = 0) + P(X_t = 1) = 0 \quad (2.1)$$

y para $n \geq 1$

$$\rho P(X_t = n-1) - (1 + \rho)P(X_t = n) + P(X_t = n+1) = 0 \quad (2.2)$$

Empezando con inducción, demostramos para $n = 1$. Por (2.1) se tiene que

$$P(X_t = 1) = \rho P(X_t = 0).$$

Supongamos que la igualdad sea válida para $k < n$, es decir, supongamos que $P(X_t = k) = \rho^k P(X_t = 0)$. Demostremos que vale para $k = n$. De (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_t = n) &= (1 + \rho)P(X_t = n-1) - \rho P(X_t = n-2) \\ &= (1 + \rho)[\rho^{n-1}P(X_t = 0)] - \rho[\rho^{n-2}P(X_t = 0)] \\ &= (\rho^{n-1} + \rho^n)P(X_t = 0) - \rho^{n-1}P(X_t = 0) \\ &= \rho^{n-1}P(X_t = 0) + \rho^n P(X_t = 0) - \rho^{n-1}P(X_t = 0) \\ &= \rho^n P(X_t = 0). \end{aligned}$$

Ahora para saber quién es $P(X_t = 0)$, hacemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) &= P(X_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n P(X_t = 0) = P(X_t = 0) + P(X_t = 0) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \\ &= P(X_t = 0) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \right) = P(X_t = 0) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right). \end{aligned}$$

Dado que $\rho < 1$, tenemos que la suma $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ converge y es igual a $1/1 - \rho$ (ver Spivak 1967), por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) = P(X_t = 0) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) = \frac{P(X_t = 0)}{1 - \rho}.$$

Como, la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1 por ser una función de distribución, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) = 1,$$

se tiene que,

$$\frac{P(X_t = 0)}{1 - \rho} = 1,$$

por lo que,

$$P(X_t = 0) = 1 - \rho.$$

□

Corolario 2.2.1. En un sistema de fila M/M/1/∞ representado por el proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$, donde la tasa de llegada λ es menor a la tasa de salida μ , la variable X_t sigue una distribución geométrica, con parámetro $1 - \rho$.

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 2.2.2, vemos que $P(X_t = n) = \rho^n P(X_t = 0)$, donde $P(X_t = 0) = 1 - \rho$. Por lo tanto,

$$P(X_t = n) = (1 - \rho)\rho^n, \quad n \geq 0.$$

□

Dado que X_t tiene distribución geométrica con parámetro $1 - \rho$, la esperanza y varianza del número de individuos en el sistema de fila M/M/1/∞, son

$$E[X_t] = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

y

$$Var(X_t) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2},$$

respectivamente.

Definición 2.2.5. El número de individuos en la fila del sistema M/M/1/∞, denotado por la variable aleatoria Y_t , es

$$Y_t = \begin{cases} 0 & , \text{ si } X_t = 0 \text{ o si } X_t = 1 \\ X_t - 1 & , \text{ si } X_t \geq 2. \end{cases}$$

Proposición 2.2.1. Para un sistema de fila M/M/1/∞, con $\lambda < \mu$, la variable Y_t es tal que

$$P(Y_t = n) = \begin{cases} 1 - \rho^2 & , \text{ si } n = 0 \\ (1 - \rho)\rho^{n+1} & , \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Por la definición de Y_t y por el teorema 2.2.2, se cumple que sí $n = 0$, entonces

$$P(Y_t = 0) = P(X_t = 0) + P(X_t = 1) = [1 - \rho] + [(1 - \rho)\rho] = 1 - \rho^2.$$

Suponga ahora que $n \geq 1$, entonces

$$P(Y_t = n) = P(X_t - 1 = n) = P(X_t = n + 1) = (1 - \rho)\rho^{n+1}.$$

□

Proposición 2.2.2. Para un sistema de fila M/M/1/∞, si $\lambda < \mu$. La esperanza de la variable Y_t es $\rho^2/1 - \rho$, dicho en otras palabras, usando la variable $L_q(t)$ dada en la definición 2.1.1, se tiene

$$L_q(t) = E[Y_t] = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Demostración. Usando la proposición 2.2.1 y el hecho de que la esperanza de una variable geométrica de parámetro ρ es $\rho/1 - \rho$, tenemos que

$$E[Y_t] = \sum_{n=1}^{\infty} nP(Y_t = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^{n+1} = \rho \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

□

Proposición 2.2.3. En un sistema de fila M/M/1/∞ representado por el proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$, con $\lambda < \mu$ la esperanza del número de individuos en el sistema al tiempo t está dada por

$$L(t) = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Demostración. Por definición se tiene que

$$L(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}.$$

Notamos que la expresión $n\rho^{n-1}$ es la derivada de ρ^n con respecto a ρ , y además notamos que las sumas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n\rho^{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\rho} \rho^n \right),$$

y

$$\frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right),$$

convergen. La primera converge, pues $\rho < 1$, entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\rho^{n-1} = 0$$

(ver, por ejemplo, en Spivak 1967). La segunda converge, pues por Spivak (1967) se tiene que si $\rho < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}.$$

Por lo tanto, por Friedberg (2000), podemos hacer la siguiente sustitución

$$\begin{aligned} L(t) &= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\rho} \rho^n \right) \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right), \end{aligned}$$

que usando Spivak (1967), se convierte en

$$\begin{aligned} L(t) &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = (1-\rho)\rho \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} \right] \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu} \right)} = \frac{\lambda\mu}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}. \end{aligned}$$

□

Definición 2.2.6. Definimos a el tiempo de espera de un individuo en el sistema de fila M/M/1/∞, indicado por la variable aleatoria W_t , de la siguiente forma,

$$W_t = \begin{cases} 0 & , \text{ si } X_t = 0, \\ \sum_{i=1}^n S_i & , \text{ si } X_t = n, n \geq 1, \end{cases}$$

donde cada S_i se distribuye de manera exponencial con parámetro μ_i y representa el tiempo de servicio en el sistema de i -ésimo individuo atendido.

Proposición 2.2.4. En un sistema de fila M/M/1/∞, con $\lambda < \mu$, la función de distribución asociada a la variable W_t , está dada por

$$F_{W_t}(x) = P(W_t \leq x) = 1 - \rho e^{(\lambda - \mu)x}, x \geq 0.$$

Demostración. Si $x = 0$, tenemos

$$F_{W_t}(0) = P(X_t = 0) = 1 - \rho.$$

Ahora suponiendo que $x > 0$ y como sabemos que la suma de n variables aleatorias de distribución exponencial, de parámetro μ , tiene a una función de distribución *Gama*, de parámetros n y μ , es decir, $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ tiene distribución *Gama*(n, μ), entonces

$$\begin{aligned} F_{W_t}(x) &= P(W_t \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(W_t \leq x | X_t = n)P(X_t = n) \\ &= P(W_t \leq x | X_t = 0)P(X_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(W_t \leq x | X_t = n)P(X_t = n) \\ &= 1(1 - \rho) + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq x)(1 - \rho)\rho^n \\ &= 1 - \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho)\rho^n \int_0^x e^{-\mu t} \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt. \end{aligned}$$

Dado que la expresión $(1 - \rho)$ no depende de t y n por la integral y por la suma, respectivamente, puede salir de estas. Usando el mismo razonamiento, la expresión $e^{-\mu t}$ puede salir de la suma. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
F_{W_t}(x) &= 1 - \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n \int_0^x e^{-\mu t} \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
&= (1 - \rho) + (1 - \rho) \int_0^x e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
&= (1 - \rho) + (1 - \rho) \int_0^x e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
&= (1 - \rho) + (1 - \rho) \int_0^x e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$F_{W_t}(x) = (1 - \rho) + \lambda(1 - \rho) \int_0^x e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} dt. \quad (2.3)$$

Usando el hecho que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(ver, por ejemplo, en Spivak 1967) y notando que es la misma suma con $x = \lambda t$, la que aparece en la integral en (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
F_{W_t}(x) &= (1 - \rho) + \lambda(1 - \rho) \int_0^x e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
&= (1 - \rho) + \lambda(1 - \rho) \int_0^x e^{-\mu t} e^{\lambda t} dt = (1 - \rho) + \lambda(1 - \rho) \int_0^x e^{(\lambda - \mu)t} dt \\
&= (1 - \rho) + \lambda(1 - \rho) \left[\frac{e^{(\lambda - \mu)t}}{\lambda - \mu} \right]_0^x = (1 - \rho) \left(1 + \lambda \left[\frac{e^{(\lambda - \mu)x}}{\lambda - \mu} - \frac{1}{\lambda - \mu} \right] \right) \\
&= (1 - \rho) \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu} + \frac{\lambda e^{(\lambda - \mu)x}}{\lambda - \mu} - \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda - \mu + \lambda e^{(\lambda-\mu)x} - \lambda}{\lambda - \mu}\right) = \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right) \left(\frac{-\mu + \lambda e^{(\lambda-\mu)x}}{\lambda - \mu}\right) \\
&= \frac{(\mu - \lambda)(-\mu + \lambda e^{(\lambda-\mu)x})}{\mu(\lambda - \mu)} = \frac{-\mu^2 + \mu\lambda e^{(\lambda-\mu)x} + \lambda\mu - \lambda^2 e^{(\lambda-\mu)x}}{\mu(\lambda - \mu)} \\
&= \frac{\mu(-\mu + \lambda e^{(\lambda-\mu)x}) + \lambda(\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)x})}{\mu(\lambda - \mu)} = \frac{(\lambda - \mu)(\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)x})}{\mu(\lambda - \mu)} \\
&= \frac{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)x}}{\mu} = 1 - \rho e^{(\lambda-\mu)x}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.5. En el sistema de fila M/M/1/∞, con $\lambda < \mu$, las siguientes fórmulas también son válidas y se pueden encontrar en Bhat (2015).

(a) La esperanza del número de individuos en el sistema al tiempo t , indicado por $L(t)$, es

$$L(t) = L_q(t) + \rho, \quad (2.4)$$

donde $L_q(t)$ es el número de individuos en la fila al tiempo t , y $\rho = \lambda/\mu$.

(b) La esperanza del tiempo de un individuo en la fila de espera al tiempo t , indicado por $W_q(t)$, es

$$W_q(t) = \frac{L_q(t)}{\lambda}. \quad (2.5)$$

(c) La esperanza del tiempo de un individuo en el sistema al tiempo t , indicado por $W(t)$, es

$$W(t) = W_q(t) + \frac{1}{\mu}. \quad (2.6)$$

Observación. La matriz de tasas del sistema de filas M/M/1/∞, usando la definición 1.3.6, es

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

2.3. El Sistema de Fila M/M/1/k

Definición 2.3.1. Un sistema de fila M/M/1/k, $k \in \mathbb{N}$, es una cadena de Markov a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$, donde las llegadas de clientes ocurren de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$, y el tiempo de salida de clientes es exponencial con tasa $\mu > 0$. Este sistema cuenta con un solo servidor y tiene la característica que la capacidad del sistema tiene un límite, es decir, si en el sistema hay k individuos entonces no podrá entrar al sistema ningún otro.

Teorema 2.3.1. En un sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de fila M/M/1/k, suponiendo que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \leq 1$, se tiene que para $n = 0, 1, 2, \dots$

$$P(X_t = n) = \begin{cases} \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} & , \text{ si } \rho < 1 \\ \frac{1}{k+1} & , \text{ si } \rho = 1. \end{cases}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 1.4.1, observamos que las ecuaciones diferenciales asociadas al sistema M/M/1/k son

$$\lambda P(X_t = 0) = \mu P(X_t = 1),$$

para $n = 1, 2, \dots, k-1$

$$(\lambda + \mu)P(X_t = n) = \lambda P(X_t = n-1) + \mu P(X_t = n+1)$$

y para $n = k$

$$\lambda P(X_t = k-1) = \mu P(X_t = k).$$

Usando el teorema 2.2.2, se tiene que

$$P(X_t = n) = \rho^n P(X_t = 0), \quad n = 1, 2, \dots, k.$$

Ahora, como la suma de la probabilidad de todos los estados es 1, por ser función de probabilidad, se sigue que

$$1 = \sum_{n=0}^k P(X_t = n) = \sum_{n=0}^k \rho^n P(X_t = 0) = P(X_t = 0) \sum_{n=0}^k \rho^n.$$

Por lo tanto, como tenemos $\rho < 1$,

$$\sum_{n=0}^k \rho^n = \frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho},$$

pues es una suma geométrica (ver, por ejemplo, en Spivak 1967). Cuando $\rho = 1$, se tiene que

$$\sum_{n=0}^k \rho^n = (k+1).$$

De esta forma,

$$1 = P(X_t = 0) \sum_{n=0}^k \rho^n = \begin{cases} P(X_t = 0) \frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho} & , \text{ si } \rho < 1 \\ P(X_t = 0)(k+1) & , \text{ si } \rho = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene

$$P(X_t = 0) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}}, \text{ si } \rho < 1,$$

y

$$P(X_t = 0) = \frac{1}{k+1}, \text{ si } \rho = 1.$$

Sustituyendo, $P(X_t = 0)$ en $P(X_t = n) = \rho^n P(X_t = 0)$, concluimos que para $n = 0, 1, 2, \dots, k$

$$P(X_t = n) = \begin{cases} \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} & , \text{ si } \rho < 1 \\ \frac{1}{k+1} & , \text{ si } \rho = 1. \end{cases}$$

□

Definición 2.3.2. En un sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de fila M/M/1/k, definimos el número de individuos en la fila al tiempo t , como una variable aleatoria Y_t , dada por

$$Y_t = \begin{cases} 0 & , \text{ si } X_t = 0, 1 \\ n-1 & , \text{ si } X_t = n \geq 2. \end{cases}$$

Teorema 2.3.2. En un sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de fila M/M/1/k, donde las llegadas de clientes son de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$ y el tiempo de salida es exponencial con tasa $\mu > 0$, suponiendo que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, se tiene que

$$P(Y_t = 0) = \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho^{k+1}},$$

y para $n = 1, 2, \dots, k - 1$,

$$P(Y_t = n) = \rho^{n+1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}}.$$

Demostración. Usando la definición 2.3.2, para calcular $P(Y_t = 0)$, y el teorema 2.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} P(Y_t = 0) &= P(\{X_t = 0\} \cup \{X_t = 1\}) \\ &= P(X_t = 0) + P(X_t = 1) \\ &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} + \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{k+1}} = \frac{1 - \rho + \rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{k+1}} \\ &= \frac{1 - \rho + \rho - \rho^2}{1 - \rho^{k+1}} = \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho^{k+1}}. \end{aligned}$$

Ahora para $n = 1, \dots, k - 1$ tenemos que

$$P(Y_t = n) = P(X_t = n + 1) = \rho^{n+1} P(X_t = 0) = \rho^{n+1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}}.$$

□

Teorema 2.3.3. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila M/M/1/k, donde las llegadas de clientes son de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$ y el tiempo de servicio es exponencial con tasa $\mu > 0$, suponiendo que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, se tiene que la esperanza del número de individuos en este sistema de fila es

$$L(t) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} \frac{1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}}{(1 - \rho)^2}.$$

Demostración. Si X_t indica el número de individuos en el sistema al tiempo t , entonces por definición de esperanza se tiene que

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \sum_{n=0}^k nP(X_t = n) = \sum_{n=0}^k n\rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} \\ &= \sum_{n=1}^k n\rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} \sum_{n=1}^k n\rho^n \\ &= \frac{(1 - \rho)\rho}{1 - \rho^{k+1}} \sum_{n=1}^k n\rho^{n-1} = \rho \sum_{n=1}^k \left(\frac{d\rho^n}{d\rho} \right) \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}}. \end{aligned}$$

Se sabe que, la derivada es una transformación lineal, ver por ejemplo, en Friedberg (2000), es decir, se cumple que para toda función f que depende de x , se tiene

$$\sum_i \frac{df_i(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_i f_i(x).$$

Entonces,

$$E[X_t] = \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=1}^k \rho^n \right) \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}.$$

Como además, se sabe que,

$$\sum_{n=1}^k r^n = \frac{r(1-r^k)}{1-r},$$

si $r < 1$, ver por ejemplo Spivak (1967), aplicando este resultado se tiene que,

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=1}^k \rho^n \right) \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho} \right) \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \\ &= \rho \left(\frac{[(1-\rho^k) - (k\rho^{k-1})(\rho)](1-\rho) + \rho(1-\rho^k)}{(1-\rho)^2} \right) \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \\ &= \rho \left(\frac{(1-\rho^k - k\rho^k)(1-\rho) + \rho(1-\rho^k)}{(1-\rho)^2} \right) \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \\ &= \rho \left(\frac{1-\rho^k - k\rho^k - \rho + \rho^{k+1} + k\rho^{k+1} + \rho - \rho^{k+1}}{(1-\rho)^2} \right) \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \\ &= \frac{\rho [1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}]}{(1-\rho)^2} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{\rho [1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})}. \end{aligned}$$

□

Teniendo en este sistema de filas su matriz de tasas, es la siguiente, tomando en cuenta la definición 1.3.6, donde esta contara solamente con k renglones.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \\ & & & \mu & -\mu & \end{pmatrix}.$$

2.4. El Sistema de Fila M/M/s/∞

Definición 2.4.1. Se le llama sistema de fila M/M/s/∞ a la cadena de Markov a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$, donde los individuos llegan al sistema de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$, a una única fila. Este sistema no tiene límite en su capacidad dentro la fila de espera. Además, tiene s servidores, los cuales brindan un servicio independiente con un tiempo de servicio de acuerdo a una distribución exponencial de parámetro $\mu > 0$.

Supongamos que tenemos n individuos en el sistema, entonces en este sistema de fila se cumple lo siguiente

- Para cada servidor se tiene la siguiente probabilidad
 $P(\text{finalizar un servicio en un intervalo de tiempo } [t, t+h]) = \mu h + o(h)$.
- $P(\text{finalizar un servicio entre todos los servidores en un intervalo de tiempo } [t, t+h]) = s\mu h + o(h)$.
- Si $n \leq s$ entonces n servidores estarán ocupados y como se tiene que la tasa de salida de cada servidor es μ entonces
 $P(\text{la salida de un individuo del sistema}) = n\mu h + o(h)$.
- Si $n > s$ entonces todos los servidores estarán ocupados y habrá clientes en la fila y
 $P(\text{la salida de un individuo del sistema}) = s\mu h + o(h)$.

Definición 2.4.2. En el sistema de fila M/M/s/∞, se define el coeficiente ρ como

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Observación. Si suponemos que en este sistema de fila $\lambda < \mu$, entonces el coeficiente ρ es menor a uno.

Lema 2.4.1. En el sistema de fila M/M/s/∞, con tasas λ y μ de llegadas y salidas, respectivamente, se tiene que

$$\lambda_n = \lambda, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \text{ si } n \leq s-1 \\ s\mu & , \text{ si } n \geq s, \end{cases}$$

donde λ_n y μ_n son las tasas de nacimiento y muerte, respectivamente, dadas en la definición 1.4.1.

Demostración. Iniciando con la tasa de llegadas al sistema, notamos que, la tasa no cambia con el número de clientes en el sistema, es decir, es la tasa de llegada constante. Por lo que, para $n = 0, 1, 2, \dots$, se tiene que $\lambda_n = \lambda$.

Ahora, para la tasa de salidas del sistema, debemos considerar los dos casos a seguir. Cuando hay $n \leq s$ clientes en el sistema, cada cliente recibirá el servicio (es decir, no irán a la fila de espera) y, por lo tanto, el tiempo hasta una salida será el mínimo de n exponenciales independientes, cada uno con una tasa μ , por lo que será exponencial con una tasa $n\mu$. Por otro lado, si hay $n > s$ clientes en el sistema, entonces solo s de los n estarán en servicio, por lo que la tasa de salida en este caso es $s\mu$.

□

Teorema 2.4.1. La probabilidad que haya n individuos en el sistema de fila M/M/s/∞, es

$$P(X_t = n) = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n \leq s \\ \frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n > s, \end{cases}$$

donde

$$P(X_t = 0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)}},$$

con $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Demostración. Por el teorema 1.4.1, para el sistema de fila M/M/s/∞ tendremos que las ecuaciones diferenciales asociadas a este sistema son

$$\lambda P(X_t = 0) = \mu_1 P(X_t = 1), \text{ si } n = 0$$

y

$$\lambda_{n-1} P(X_t = n-1) - (\lambda_n + \mu_n) P(X_t = n) + \mu_{n+1} P(X_t = n+1) = 0, \text{ si } n \geq 0,$$

que para nuestro caso $M/M/s/\infty$, y como $\mu_1 = 1 \times \mu = \mu$, por el lema 2.4.1, se puede escribir

$$\lambda P(X_t = 0) = \mu P(X_t = 1) \quad (2.7)$$

y

$$(\lambda + n\mu)P(X_t = n) = \lambda P(X_t = n-1) + (n+1)\mu P(X_t = n+1), \quad (2.8)$$

dado que $\lambda_n = \lambda$ por el lema 2.4.1. De esta forma, de (2.7) se tiene

$$P(X_t = 1) = \frac{\lambda}{\mu} P(X_t = 0) = \rho P(X_t = 0). \quad (2.9)$$

Aplicaremos inducción para la fórmula cuando $n \leq s$. Iniciamos en el caso $n = 1$, entonces de (2.8) se tiene que

$$(\lambda + \mu)P(X_t = 1) = \lambda P(X_t = 0) + 2\mu P(X_t = 2)$$

donde sustituyendo $P(X_t = 1)$, dada por (2.9), se tiene

$$(\lambda + \mu)\rho P(X_t = 0) = \lambda P(X_t = 0) + 2\mu P(X_t = 2)$$

$$\mu\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)\rho P(X_t = 0) = \lambda P(X_t = 0) + 2\mu P(X_t = 2)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)\rho P(X_t = 0) = \frac{\lambda}{\mu} P(X_t = 0) + \frac{2\mu}{\mu} P(X_t = 2)$$

$$\rho(1 + \rho)P(X_t = 0) = \rho P(X_t = 0) + 2P(X_t = 2)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} P(X_t = 2) &= \frac{1}{2} [\rho(1 + \rho)P(X_t = 0) - \rho P(X_t = 0)] \\ &= \frac{1}{2} \rho P(X_t = 0) [1 + \rho - 1] = \frac{\rho^2}{2} P(X_t = 0) \\ &= \frac{\rho^2}{2!} P(X_t = 0). \end{aligned}$$

Ahora, suponga que la fórmula siguiente vale para $n < s$

$$P(X_t = n) = \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0).$$

Veamos que vale para $n = s$. Por (2.8) se tiene que

$$(\lambda + (s-1)\mu)P(X_t = s-1) = \lambda P(X_t = s-2) + s\mu P(X_t = s) \quad (2.10)$$

como la fórmula vale, por hipótesis para $X_t = s-1$ y para $X_t = s-2$, se tiene que

$$P(X_t = s-1) = \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} P(X_t = 0)$$

$$P(X_t = s-2) = \frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} P(X_t = 0).$$

Sustituyendo estas probabilidades en (2.10), tenemos que

$$(\lambda + (s-1)\mu) \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} P(X_t = 0) = \lambda \frac{\rho^{s-2}}{(s-2)!} P(X_t = 0) + s\mu P(X_t = s).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X_t = s) &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[\frac{(\lambda + (s-1)\mu)\rho^{s-1}}{(s-1)!} P(X_t = 0) - \frac{\lambda\rho^{s-2}}{(s-2)!} P(X_t = 0) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[P(X_t = 0) \left(\frac{(\lambda + (s-1)\mu)\rho^{s-1}}{(s-1)!} - \frac{\lambda\rho^{s-2}}{(s-2)!} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[P(X_t = 0) \left(\frac{\lambda\rho^{s-1} + (s-1)\mu\rho^{s-1} - (s-1)\lambda\rho^{s-2}}{(s-1)!} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[P(X_t = 0) \left(\frac{\lambda\rho^{s-1} + (s-1)\mu\rho^{s-1} - s\lambda\rho^{s-2} + \lambda\rho^{s-2}}{(s-1)!} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{s-2}(\lambda\rho + (s-1)\mu\rho - s\lambda + \lambda)}{(s-1)!} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{s-2}(\lambda\rho + s\mu\rho - \mu\rho - s\lambda + \lambda)}{(s-1)!} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{s-2}(\lambda\rho + s\lambda - \lambda - s\lambda + \lambda)}{(s-1)!} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left[P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{s-2}(\lambda\rho)}{(s-1)!} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s\mu} \right) \left(\frac{\lambda\rho^{s-1}}{(s-1)!} \right) P(X_t = 0) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\rho^{s-1}}{s(s-1)!} \right) P(X_t = 0) \\ &= (\rho) \left(\frac{\rho^{s-1}}{s!} \right) P(X_t = 0) = \frac{\rho^s}{s!} P(X_t = 0). \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos demostrado que para $n \leq s$ se tiene que

$$P(X_t = n) = \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0).$$

Ahora, si $n > s$, haremos la demostración por inducción. Primero demostrando la base, cuando $n = s + 1$, por (2.8) se tiene

$$(\lambda + s\mu)P(X_t = s) = \lambda P(X_t = s - 1) + s\mu P(X_t = s + 1).$$

Dado que se sabe que

$$P(X_t = s) = \frac{\rho^s}{s!} P(X_t = 0)$$

y que

$$P(X_t = s - 1) = \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} P(X_t = 0).$$

Usando el lema 2.4.1, tenemos que

$$(\lambda + s\mu) \frac{\rho^s}{s!} P(X_t = 0) = \lambda \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} P(X_t = 0) + s\mu P(X_t = s + 1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(X_t = s + 1) &= \frac{(\lambda + s\mu)\rho^s}{s!} P(X_t = 0) - \frac{\lambda\rho^{s-1}}{(s-1)!} P(X_t = 0) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{(\lambda + s\mu)\rho^s}{s!} - \frac{\lambda\rho^{s-1}}{(s-1)!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{(\lambda + s\mu)\rho^s - s\lambda\rho^{s-1}}{s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\lambda\rho^s + s\mu\rho^s - s\lambda\rho^{s-1}}{s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{s-1}(\lambda\rho + s\mu\rho - s\lambda)}{s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{s-1}(\lambda\rho + s\lambda - s\lambda)}{s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\lambda\rho^s}{s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^s}{ss!} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(X_t = s + 1) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^s}{s s!} \right) (\rho) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{s+1}}{s s!} \right).$$

Ahora, suponga válido para $n > s$. Veamos que vale para $n + 1$, por (2.8) se tiene que

$$(\lambda + s\mu)P(X_t = n) = \lambda P(X_t = n - 1) + s\mu P(X_t = n + 1). \quad (2.11)$$

Por hipótesis se tiene que

$$P(X_t = n) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} \right)$$

$$P(X_t = n - 1) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{n-1}}{s^{n-1-s} s!} \right).$$

Sustituyendo estas probabilidades en (2.11), tenemos

$$(\lambda + s\mu)P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} \right) = \lambda P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{n-1}}{s^{n-1-s} s!} \right) + s\mu P(X_t = n + 1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X_t = n + 1) &= (\lambda + s\mu)P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} \right) - \lambda P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{n-1}}{s^{n-1-s} s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{(\lambda + s\mu)\rho^n}{s^{n-s} s!} - \frac{\lambda\rho^{n-1}}{s^{n-1-s} s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\lambda\rho^n + s\mu\rho^n}{s^{n-s} s!} - \frac{\lambda\rho^{n-1}}{s^{n-1-s} s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{n-1}(\lambda\rho + s\mu\rho - s\lambda)}{s^{n-s} s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{n-1}(\lambda\rho + s\lambda - s\lambda)}{s^{n-s} s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\frac{\lambda\rho^n}{s^{n-s} s!} \right) \left(\frac{1}{s\mu} \right) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^n}{s^{n-s} s s!} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Por lo que,

$$P(X_t = n + 1) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^n}{s^{n-s} s s!} \right) (\rho) = P(X_t = 0) \left(\frac{\rho^{n+1}}{s^{n+1-s} s!} \right).$$

De esta forma, en general se tiene que

$$P(X_t = n) = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n \leq s \\ \frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n > s. \end{cases}$$

Notar que debemos tener $\sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) = 1$. Suponiendo que $\frac{\rho}{s} < 1$, se puede calcular $P(X_t = 0)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) &= \sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0) + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) \\ &= P(X_t = 0) \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+s}}{s^n s!} \right) \\ &= P(X_t = 0) \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) = P(X_t = 0) \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)} \right).$$

Por lo tanto

$$P(X_t = 0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)}}.$$

□

Definición 2.4.3. En un sistema de fila M/M/s/∞, definimos a la variable aleatoria V_t , el número de servidores ocupados al tiempo t , como

$$V_t = \begin{cases} k & , \text{ si } X_t = k, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, s-1 \\ s & , \text{ si } X_t \geq s. \end{cases}$$

Corolario 2.4.1. Para $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila M/M/s/∞, la probabilidad de que en el sistema haya n servidores ocupados es

$$P(V_t = n) = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n < s \\ \frac{\rho^n}{(s - \rho)(s - 1)!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n = s. \end{cases}$$

Demostración. Usando el teorema 2.4.1, tenemos las probabilidades de que en el sistema haya $n < s$ servidores ocupados. Solo se debe obtener la probabilidad cuando haya s servidores ocupados. Eso ocurre cuando $X_t \geq s$. Por el teorema 2.4.1, tenemos que para $n > s$

$$P(X_t = n) = \frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0),$$

entonces,

$$P(X_t \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+s}}{s^n s!} P(X_t = 0) = \frac{\rho^s}{s!} P(X_t = 0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{s^n}.$$

Como se sabe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{s^n} = \frac{s}{s - \rho}$$

(ver, Spivak 1967), tenemos

$$P(V_t = s) = P(X_t \geq s) = \frac{\rho^s}{s!} P(X_t = 0) \frac{s}{s - \rho} = \frac{\rho^s}{(s - \rho)(s - 1)!} P(X_t = 0).$$

□

Proposición 2.4.1. Para $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila M/M/s/∞, con tasas de llegada y salida $\lambda > 0$, y $\mu > 0$, respectivamente, la esperanza del número de servidores ocupados es $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Demostración. Sea V_t el número de servidores ocupados al tiempo $t \geq 0$. De esta forma, por el corolario 2.4.1, se tiene que

$$\begin{aligned} E[V_t] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(V_t = n) = \sum_{n=0}^s nP(V_t = n) = \sum_{n=0}^{s-1} nP(V_t = n) + sP(V_t = s) \\ &= \sum_{n=0}^{s-1} n \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0) + s \frac{\rho^n}{(s - \rho)(s - 1)!} P(X_t = 0) \\ &= P(X_t = 0) \left[\sum_{n=1}^{s-1} \frac{n\rho^n}{n!} + \frac{s\rho^s}{(s - \rho)(s - 1)!} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_t = 0)\rho \left[\sum_{n=1}^{s-1} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{s\rho^{s-1}}{(s-\rho)(s-1)!} \right] \\
&= P(X_t = 0)\rho \left[\sum_{n=1}^{s-1} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} - \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{s\rho^{s-1}}{(s-\rho)(s-1)!} \right] \\
&= P(X_t = 0)\rho \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} - \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{s\rho^{s-1}}{(s-\rho)(s-1)!} \right] \\
&= P(X_t = 0)\rho \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{s\rho^{s-1} - (s-\rho)\rho^{s-1}}{(s-\rho)(s-1)!} \right] \\
&= P(X_t = 0)\rho \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{s\rho^{s-1} - s\rho^{s-1} + \rho^s}{(s-\rho)(s-1)!} \right] \\
&= P(X_t = 0)\rho \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-\rho)(s-1)!} \right] = P(X_t = 0)\rho P(X_t = 0)^{-1} = \rho.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.4.4. Para $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila M/M/s/ ∞ , definimos el número de individuos en la fila de espera al tiempo t , como la variable aleatoria Y_t , dada por

$$Y_t = \begin{cases} 0 & , \text{ si } X_t \leq s \\ X_t - s & , \text{ si } X_t > s. \end{cases}$$

Teorema 2.4.2. Para $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila M/M/s/ ∞ , con tasas de llegada y salida $\lambda > 0$, y $\mu > 0$, respectivamente, la probabilidad de tener n individuos en la fila de espera es

$$P(Y_t = n) = \begin{cases} \sum_{x=0}^s \frac{\rho^x}{x!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n = 0 \\ \frac{\rho^{n+s}}{s^n s!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Si $Y_t = 0$, es decir, cuando no haya nadie en la fila de espera es porque $X_t \leq s$, dicho de otra forma, es cuando en el sistema haya $0, 1, \dots, s$ individuos. Por el teorema 2.4.1, se tiene la probabilidad de que haya n usuarios en el sistema. Por otro lado, la probabilidad de que $Y_t = 0$ es

$$\begin{aligned}
P(Y_t = 0) &= P(\cup_{e=0}^s \{X_t = e\}) \\
&= \sum_{e=0}^s P(X_t = e) \\
&= \sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0).
\end{aligned}$$

Si $Y_t = n$, con $n > 0$, usamos nuevamente el teorema 2.4.1, y se tiene que

$$P(Y_t = n) = P(X_t - s = n) = P(X_t = n + s) = \frac{\rho^{n+s}}{s^n s!} P(X_t = 0).$$

□

Proposición 2.4.2. En un sistema de fila M/M/s/∞, con tasas de llegada y salida $\lambda > 0$, y $\mu > 0$, respectivamente, la esperanza del número de individuos en la fila al tiempo t es,

$$L_q(t) = E[Y_t] = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0).$$

Demostración. Por la definición de la esperanza y usando el resultado dado por el teorema 2.4.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
E[Y_t] &= \sum_{n=0}^{\infty} n P(Y_t = n) = (0) \left(\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^{n+s}}{s^n s!} P(X_t = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^{s+1} \rho^{n-1}}{s s^{n-1} s!} P(X_t = 0) = \left(\frac{1}{s} \right) P(X_t = 0) \frac{\rho^{s+1}}{s!} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Primero se resolverá la suma. Aplicando la sustitución $m = \frac{\rho}{s}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n m^{n-1}.$$

Notar que el termino $n m^{n-1}$, es la derivada de m^n , con respecto a m , y además notar que las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} n m^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d m^n}{d m} \right)$$

y

$$\frac{d}{dm} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m^n \right)$$

convergen. La primera suma converge, dado que $m < 1$, pues $\rho < 1$, y s es un número entero positivo, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nm^{n-1} = 0$$

(ver, por ejemplo, Spivak 1967). La segunda suma converge dado que $m < 1$, por lo que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n = \frac{1}{1-m},$$

ver por ejemplo en Spivak (1967). Por lo tanto, por Friedberg (2000), podemos hacer la siguiente sustitución

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nm^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dm^n}{dm} \right) = \frac{d}{dm} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m^n \right),$$

que por Spivak (1967), es equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-1} &= \frac{d}{dm} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m^n \right) \\ &= \frac{d}{dm} \left(\frac{1}{1-m} \right) = \frac{1}{(1-m)^2} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{s}\right)^2} = \frac{s^2}{(s-\rho)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= \left(\frac{1}{s} \right) P(X_t = 0) \frac{\rho^{s+1}}{s!} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\rho^{s+1}}{ss!} \frac{s^2}{(s-\rho)^2} P(X_t = 0) \\ &= \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.4.3. En un sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de fila M/M/s/∞, con tasas de llegada y salida $\lambda > 0$, y $\mu > 0$, respectivamente, se tiene que el número medio de individuos en el sistema al tiempo t , el tiempo medio de un individuo en la fila de espera y en el sistema al tiempo t , son respectivamente

$$L(t) = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0) + \rho \quad (2.12)$$

$$W_q(t) = \frac{\frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0)}{\lambda} \quad (2.13)$$

$$W(t) = \frac{\frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0)}{\lambda} + \frac{1}{\mu}. \quad (2.14)$$

Demstración. Dado que ya conocemos el valor de $L_q(t)$ por la proposición 2.4.2, y por (2.4) se tiene que

$$L(t) = L_q(t) + \rho = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0) + \rho.$$

Ahora para calcular $W_q(t)$, usando (2.5) y la proposición 2.4.2, se tiene que

$$W_q(t) = \frac{L_q(t)}{\lambda} = \frac{\frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0)}{\lambda}$$

Por último, para calcular $W(t)$, usamos (2.6) y (2.13), para obtener

$$W(t) = W_q(t) + \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0)}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

□

En este caso, de acuerdo con la definición de matriz de tasas dada por la definición 1.3.6, la matriz asociada a el sistema de filas M/M/s/∞, es la siguiente

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & & \\ & & & & & \\ & & s\mu & -(\lambda + s\mu) & \lambda & \\ & & & s\mu & -(\lambda + s\mu) & \lambda \end{pmatrix}.$$

Notar a partir renglón s la matriz cambia el parámetro μ por $s\mu$.

2.5. El Sistema de Fila M/M/s/k

Definición 2.5.1. Se le llama sistema de fila M/M/s/k, a la cadena de Markov a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$, donde los individuos llegan al sistema de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$. El sistema cuenta s servidores, los cuales brindan un servicio independiente, en un tiempo de servicio de acuerdo a una distribución exponencial de parámetro $\mu > 0$, con $\lambda < \mu$. Este sistema, además, no puede tener más de k individuos.

Definición 2.5.2. En el sistema de fila M/M/s/k, definimos a la tasa de tráfico ρ y a la variable α como

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \text{ y } \alpha = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Proposición 2.5.1. En un sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de fila M/M/s/k, la probabilidad de que haya n individuos en el sistema al tiempo t , es

$$P(X_t = n) = \begin{cases} \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) & , \text{ si } 0 < n < s, \\ \frac{\alpha^s}{s!} \rho^{n-s} P(X_t = 0) & , \text{ si } s \leq n \leq k, \end{cases}$$

donde

$$P(X_t = 0) = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^s}{s!} \sum_{n=s}^k \rho^{n-s} \right)^{-1}.$$

Demostración. Utilizando el teorema 2.4.1, para $n < s$, se tiene que

$$P(X_t = n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P(X_t = 0) = \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0).$$

Por el mismo teorema 2.4.1, para $n > s$, en particular para $n > s$ y $k \geq n$, se cumple que

$$\begin{aligned} P(X_t = n) &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) = \frac{\lambda^n}{s^{n-s} s! \mu^n} P(X_t = 0) = \frac{\lambda^s \lambda^{n-s}}{s^{n-s} s! \mu^s \mu^{n-s}} P(X_t = 0) \\ &= \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} P(X_t = 0) = \frac{\alpha^s}{s!} \rho^{n-s} P(X_t = 0). \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar $P(X_t = 0)$, se sabe que $\sum_{n=0}^k P(X_t = n) = 1$, pues por ser función de distribución debe cumplir esta propiedad. Por lo que

$$1 = \sum_{n=0}^k P(X_t = n) = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) + \frac{\alpha^s}{s!} \sum_{n=s}^k \rho^{n-s} P(X_t = 0).$$

Entonces,

$$1 = \sum_{n=0}^k P(X_t = n) = P(X_t = 0) \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^s}{s!} \sum_{n=s}^k \rho^{n-s} \right).$$

Por lo tanto,

$$P(X_t = 0) = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^s}{s!} \sum_{n=s}^k \rho^{n-s} \right)^{-1}.$$

□

Proposición 2.5.2. En un sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de fila M/M/s/k, con tasa de llegada y de salida, $\lambda > 0$ y $\mu > 0$, respectivamente, con $\lambda < \mu$, se tiene que el número medio de individuos en la fila de espera al tiempo t , es

$$L_q(t) = \frac{P(X_t = 0)(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{k-s+1} - (k-s+1)\rho^{k-s}(1-\rho) \right].$$

Demostración. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ el proceso representando el sistema de fila. Notar que $L_q(t)$, está dada por

$$L_q(t) = \sum_{n=s+1}^k (n-s)P(X_t = n).$$

Esto se debe a que X_t indica el número de individuos en el sistema al tiempo t , y se necesitan $s+1$ individuos en el sistema para que s individuos estén siendo servidos por los s servidores mientras que el individuo restante debe entrar en la fila de espera. De esta forma, si $X_t = s+1$ entonces en la fila de espera habrá un individuo, esto hasta que se alcance el límite k de individuos en el sistema. La expresión $(n-s)P(X_t = n)$ se debe a que si $n = s+1$ la expresión se convierte en $1 \times P(X_t = s+1)$, que indica 1 por la probabilidad de que haya 1 individuo en la fila de espera, que es el inicio de la definición de esperanza. En la demostración de la proposición 2.5.1, se vio que si $n > s$, se tiene que

$$P(X_t = n) = \frac{\alpha^s}{s!} \rho^{n-s} P(X_t = 0) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0),$$

por lo que,

$$\begin{aligned} L_q(t) &= \sum_{n=s+1}^k (n-s) P(X_t = n) = \sum_{n=s+1}^k (n-s) \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) \\ &= \sum_{n=s+1}^k (n-s) \frac{\alpha^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) = \frac{\alpha^s}{s!} P(X_t = 0) \sum_{n=s+1}^k (n-s) \frac{\alpha^{n-s}}{s^{n-s}} \\ &= \frac{\alpha^s}{s!} P(X_t = 0) \sum_{n=s+1}^k (n-s) \rho^{n-s} = \frac{\alpha^s \rho}{s!} P(X_t = 0) \sum_{n=s+1}^k (n-s) \rho^{n-s-1} \\ &= \frac{\alpha^s \rho}{s!} P(X_t = 0) \sum_{n=1}^{k-s} n \rho^{n-1}. \end{aligned}$$

Notar que el termino $n\rho^{n-1}$, es la derivada de ρ^n , con respecto a ρ , y se sabe que, la derivada es una transformación lineal, ver por ejemplo en Friedberg (2000). Es decir, se cumple que para toda función f que depende de x , se tiene

$$\sum_i \frac{df_i(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_i f_i(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L_q(t) &= \frac{\alpha^s \rho}{s!} P(X_t = 0) \sum_{n=1}^{k-s} n \rho^{n-1} = \frac{\alpha^s \rho}{s!} P(X_t = 0) \sum_{n=1}^{k-s} \left(\frac{d}{d\rho} \rho^n \right) \\ &= \frac{\alpha^s \rho}{s!} P(X_t = 0) \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=1}^{k-s} \rho^n \right). \end{aligned}$$

Ahora, como se sabe que

$$\sum_{n=1}^{k-s} \rho^n = \frac{1 - \rho^{k-s+1}}{1 - \rho},$$

ver por ejemplo Spivak (1967). Por lo que,

$$L_q(t) = \frac{\alpha^s \rho}{s!} P(X_t = 0) \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=1}^{k-s} \rho^n \right) = \frac{\alpha^s \rho}{s!} P(X_t = 0) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - \rho^{k-s+1}}{1 - \rho} \right).$$

Calculando la derivada tenemos que

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - \rho^{k-s+1}}{1 - \rho} \right) = \frac{1 - \rho^{k-s+1} - (k-s+1)\rho^{k-s}(1-\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

Por lo tanto,

$$L_q(t) = \frac{P(X_t=0)\alpha^s\rho}{s!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{k-s+1} - (k-s+1)\rho^{k-s}(1-\rho) \right].$$

□

Proposición 2.5.3. En un sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de fila M/M/s/k, con tasa de llegada y de salida, $\lambda > 0$ y $\mu > 0$, respectivamente, con $\lambda < \mu$, se tiene que el número medio de individuos en el sistema al tiempo t es,

$$\begin{aligned} L(t) &= L_q(t) + \frac{\lambda(1 - P(X_t = k))}{\mu} = L_q(t) + \alpha(1 - P(X_t = k)) \\ &= \frac{P(X_t=0)\alpha^s\rho}{s!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{k-s+1} - (k-s+1)\rho^{k-s}(1-\rho) \right] + \alpha(1 - P(X_t = k)). \end{aligned}$$

El tiempo medio de un individuo en la fila de espera al tiempo t es,

$$\begin{aligned} W_q(t) &= \frac{L_q(t)}{\lambda(1 - P(X_t = k))} \\ &= \frac{\frac{P(X_t=0)\alpha^s\rho}{s!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{k-s+1} - (k-s+1)\rho^{k-s}(1-\rho) \right]}{\lambda(1 - P(X_t = k))}, \end{aligned}$$

y el tiempo medio de un individuo en el sistema al tiempo t es,

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{L(t)}{\lambda(1 - P(X_t = k))} \\ &= \frac{\frac{P(X_t=0)\alpha^s\rho}{s!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{k-s+1} - (k-s+1)\rho^{k-s}(1-\rho) \right] + \alpha(1 - P(X_t = k))}{\lambda(1 - P(X_t = k))}. \end{aligned}$$

Demostración. Esta demostración puede encontrarse en Gross (2008), o usar la proposición 2.5.2, y las definiciones de $L(t)$, $W_q(t)$, y $W(t)$.

□

De acuerdo con la definición 1.3.6 de matriz de tasas, la matriz asociada a el sistema de filas M/M/s/k tiene la característica de que a partir renglón s cambia el parámetro μ por $s\mu$ y tiene k renglones, es decir

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & s\mu & -(\mu + s\mu) & \lambda - s\mu \\ & & & & & s\mu & \end{pmatrix}.$$

2.6. El Sistema de Fila M/G/1/∞

Este sistema generalizará el tiempo de servicio para funciones de distribución que no sean exponenciales, es decir, no necesariamente el tiempo de servicio irá de acuerdo a una función de distribución exponencial de parámetro $\mu > 0$.

Definición 2.6.1. El sistema de fila M/G/1/∞, es una cadena de Markov a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$, con X_t como el número de individuos en el sistema al tiempo t , donde los individuos llegan al sistema de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$. El sistema cuenta con un servidor y no tiene límite en su capacidad. Sea $\{S_n : n \geq 0\}$, el conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas a una variable aleatoria S , donde cada S_n , indica el tiempo de servicio del n -ésimo individuo en el sistema. Sean $f_S(\cdot)$ y $F_S(\cdot)$, la función de densidad y de distribución de S .

Suponga que se sabe o se llega a estimar la esperanza y la varianza de la función de distribución del tiempo de servicio, denotadas respectivamente como, $\frac{1}{\mu}$ con $\mu > 0$, y σ^2 .

Definición 2.6.2. En el sistema de fila M/G/1/∞ se define a ρ como la intensidad de tráfico en el sistema o la utilidad que se le da al sistema, definido por

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Observación. Suponiendo que $\rho < 1$ se puede deducir la probabilidad de que no haya ningún individuo en el sistema usando la propiedad del complemento, es decir

$$P[X_t = 0] = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

Definición 2.6.3. En un sistema de fila M/G/1/∞, definimos $\{t_n : n \geq 0\}$, como el conjunto de t_n indicando el tiempo donde se produce la n -ésima salida de sistema.

Definición 2.6.4. En un sistema de fila M/G/1/∞, definimos $\{N_n : n \geq 0\}$, como el conjunto de los N_n , indicando el número de individuos dentro del sistema justo después de t_n , es decir, justo después de que se produzca la n -ésima salida de sistema. Por lo tanto, N_n toma la siguiente forma

$$N_{n+1} = \begin{cases} N_n + A - 1 & , \text{ si } N_n \geq 1 \\ A & , \text{ si } N_n = 0, \end{cases}$$

donde A es una variable aleatoria, la cual indicará el número de individuos que ingresen al sistema en un tiempo de servicio.

Observación. A solo depende de t_{n+1} , y N_{n+1} por definición solo depende de N_n y de A . Entonces $N = \{N_n : n \geq 0\}$ es una cadena de Markov.

En el sistema de fila M/G/1/∞, las llegadas van de acuerdo a un proceso Poisson de tasa $\lambda > 0$. Sin embargo, el tiempo de servicio será de acuerdo a una función de distribución general, no necesariamente exponencial de parámetro $\mu > 0$. De manera que la variable aleatoria A también será descrita por una función de distribución general. Usando la propiedad de la probabilidad total, para $n = 0, 1, 2, \dots$, se tiene que

$$P(A = n) = \int_0^{\infty} P(A = n | t = t_{n+1}) f_S(t) dt,$$

donde esta integral es la de Stieltjes, $f_S(t)$ es la función de densidad del tiempo de servicio y $P(A = n | t = t_{n+1})$ indica la probabilidad de que $A = n$, en el tiempo donde se produce la $(n + 1)$ -ésima salida del sistema, es decir, $t = t_{n+1}$.

Ahora, usando la proposición 1.3.3, se cumple que dado que el número de llegadas si esta descrito por un proceso Poisson de tasa $\lambda > 0$, el número de ocurrencias (llegadas) en el tiempo que ocurra la $(n + 1)$ -ésima salida del sistema es

$$P(A = n | t = t_{n+1}) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Si se tuviera la distribución con la que se describe las salidas del sistema se conocería $f_S(t)$, y de esta forma se solucionará la integral que aparece en la definición de $P(A = n)$, y de este modo, se podría obtener la función de distribución de la variable A .

Teorema 2.6.1. En un sistema de fila M/G/1/∞, la esperanza del número de individuos en la fila de espera al tiempo t , es

$$L_q(t) = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2)}. \quad (2.15)$$

Demostración. Esta demostración se encuentra en Bhat (2015). □

Proposición 2.6.1. En un sistema de fila M/G/1/∞, se tiene que el número medio de individuos en el sistema al tiempo t , el tiempo medio de un individuo en la fila de espera y en el sistema al tiempo t , son respectivamente

$$L(t) = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2)} + \rho \quad (2.16)$$

$$W_q(t) = \frac{\frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2)}}{\lambda} \quad (2.17)$$

$$W(t) = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2)} + \frac{1}{\mu}. \quad (2.18)$$

Demostración. Usando $L_q(t)$, dada por el teorema 2.6.1, podremos calcular $L(t)$, que indica la esperanza del número de individuos en el sistema y por (2.4), se tiene que

$$L(t) = L_q(t) + \rho = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2)} + \rho.$$

Continuando, podemos calcular a $W_q(t)$ y $W(t)$ utilizando (2.5) y (2.6), es decir,

$$W_q(t) = \frac{L_q(t)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2) \lambda},$$

y

$$W(t) = W_q(t) + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q(t)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2) \lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

□

2.7. El Sistema de Fila M/G/s/s

Definición 2.7.1. Se le llama sistema de fila M/G/s/s, al sistema $X = \{X_t : t \geq 0\}$, donde cada X_t indica el número de individuos en el sistema al instante t , las llegadas van de acuerdo a un proceso Poisson de tasa $\lambda > 0$. Este sistema cuenta con s servidores disponibles. El sistema tiene el límite de aceptar a s individuos antes de que este se cierre. Sea $\{S_n : n \geq 0\}$, el conjunto de variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes, donde cada S_n , indica el tiempo de servicio del n -ésimo individuo en el sistema, con $f_S(x)$ y $F_S(x)$ su función de densidad y de distribución, respectivamente.

Suponga que se sabe o se pueda estimar la esperanza y la varianza de la función de distribución del tiempo de servicio, denotadas respectivamente como $\frac{1}{\mu}$, con $\mu > 0$, y σ^2 , entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.1. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila M/G/s/s, la probabilidad de que j de sus s servidores estén ocupados es

$$P(X_t = j) = \frac{(\lambda/\mu)^j / j!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i / i!}. \quad (2.19)$$

Demostración. Este resultado puede encontrarse en Anderson (1976).

Proposición 2.7.1. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de fila M/G/s/s, la esperanza del número de individuos en el sistema que es igual a la esperanza del número de servidores ocupados al tiempo t es

$$L(t) = \frac{\lambda}{\mu} [1 - P(X_t = s)].$$

Demostración. Este resultado puede encontrarse en Anderson (1976).

2.8. El Sistema de Fila G/M/1/ ∞

Definición 2.8.1. El proceso $X = \{X_t : t \geq 0\}$ es un sistema de filas G/M/1/ ∞ , con cada X_t , indicando el número de individuos en sistema al instante t , donde el tiempo entre llegadas sucesivas poseen una distribución general G , con parámetro $\lambda > 0$, el tiempo de servicio se distribuye exponencialmente con tasa $\mu > 0$. El sistema cuenta con un servidor y no tiene límite en su capacidad.

Definición 2.8.2. En un sistema de fila $G/M/1/\infty$, el proceso $\{R_n : n \geq 0\}$, con R_n indicando el número de individuos en el sistema a la llegada n -ésima, se define como,

$$R_{n+1} = \begin{cases} R_n - A + 1 & , \text{ si } R_n \geq 1 \\ A & , \text{ si } R_n = 0, \end{cases}$$

donde A es una variable aleatoria, indicando el número de individuos que salgan del sistema en el lapso de tiempo que ocurra una llegada.

Definición 2.8.3. Para el proceso $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$, con S , su espacio de estados, se define a $P_{ij}^{(R)}(t)$, $i, j \in S$, como la probabilidad de transición de un estado i al estado j , en un tiempo t .

Teorema 2.8.1. Para el proceso $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$, se tiene que la probabilidad de que el proceso salte del estado i al estado $i + 1 - j$, para $j = 0, 1, 2, \dots, i$, en un tiempo t , es

$$P_{i,i+1-j}(t) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dG(t). \quad (2.20)$$

Demostración. Primero hay que notar que el número de servicios en un intervalo de tiempo t es una variable aleatoria de Poisson con esperanza μt . Esto se debe a que el tiempo entre servicios sucesivos es exponencial de tasa μ y por la proposición 1.3.4. Por lo que, usando la definición de la función de probabilidad, tenemos que

$$P(\text{número de servicios al tiempo } t = j) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!}. \quad (2.21)$$

Esto nos da la probabilidad de que tengamos j número de servicios en el intervalo de tiempo t .

Dado que, si ocurre una llegada al sistema y se encuentra que hay i individuos en él, entonces en la próxima llegada encontrará $i + 1$ individuos menos el número de individuos que hayan sido servidos. Por lo tanto si queremos $P_{i,i+1-j}$ entonces debemos integrar (2.20) con respecto al tiempo, esto debe ser con respecto a la distribución que describe las llegadas al sistema, es decir, G . Por lo que,

$$P_{i,i+1-j}(t) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dG(t).$$

□

Observación. Si $G(\cdot)$ es diferenciable y sea $g(\cdot)$ su función de densidad, entonces se tiene

$$P_{i,i+1-j}(t) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} g(t) dt.$$

Corolario 2.8.1. En el proceso $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$, se tiene que la probabilidad $P_{i0}(t)$, para $i = 1, 2, \dots$, en un tiempo t , es

$$P_{i0}(t) = 1 - \sum_{j=0}^i P_{i,i+1-j}(t). \quad (2.22)$$

Demostración. Dado que

$$P_{i0}(t) = 1 - \sum_{j=0}^i P_{i,i+1-j}(t),$$

por el teorema 2.8.1 podemos calcular $P_{i0}(t)$. □

Definición 2.8.4. En un sistema de filas G/M/1/∞, se define a π_n como la probabilidad de que al llegar un individuo al sistema encuentre n individuos dentro.

Teorema 2.8.2. El proceso $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$, tiene la distribución de probabilidades estacionaria, es decir, π_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, dada por

$$\pi_k = \left(1 - \int_0^\infty e^{-\mu t(1-\beta)} dG(t) \right) \left(\int_0^\infty e^{-\mu t(1-\beta)} dG(t) \right)^k.$$

Demostración. Por la definición 1.3.11, tenemos que π_k , es tal que

$$\pi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ik}(t)$$

con la propiedad que su suma es igual a uno, es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1.$$

Ahora, por el teorema 2.8.1, se conoce el valor de $P_{ik}(t)$, entonces se tiene que

$$\pi_k = \sum_{i=k-1}^{\infty} \pi_i \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} dG(t). \quad (2.23)$$

Para resolver la ecuación (2.23), se hará la siguiente sustitución: $\pi_k = c\beta^k$. Así,

$$\begin{aligned} c\beta^k &= c \sum_{i=k-1}^{\infty} \beta^i \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} dG(t) \\ &= c \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \beta^{k-1} \sum_{i=k-1}^{\infty} \frac{(\beta \mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} dG(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Sin embargo,

$$\sum_{i=k-1}^{\infty} \frac{(\beta \mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta \mu t)^j}{j!}.$$

Como se sabe que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

(ver, por ejemplo, Spivak 1967). Por lo que, si tomamos $x = \beta \mu t$, tenemos que

$$\sum_{i=k-1}^{\infty} \frac{(\beta \mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta \mu t)^j}{j!} = e^{\beta \mu t},$$

que sustituyendo en la ecuación (2.24), nos da

$$c\beta^k = c \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \beta^{k-1} e^{\beta \mu t} dG(t).$$

Entonces

$$c\beta^k = c \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-\beta)} \beta^{k-1} dG(t),$$

es equivalente a

$$\beta^k = \beta^{k-1} \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-\beta)} dG(t),$$

que es equivalente a

$$\beta = \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-\beta)} dG(t). \quad (2.25)$$

Ahora, para obtener el valor de la constante c , usaremos el hecho de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1.$$

Pero como $\pi_k = c\beta^k$, implica que

$$c \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = 1.$$

Para $\beta < 1$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta}$$

(ver, por ejemplo, en Spivak 1967). Por lo que

$$\frac{c}{1-\beta} = 1,$$

entonces

$$c = 1 - \beta.$$

Por lo tanto, para cada $k \geq 0$, se tiene que

$$\pi_k = c\beta^k = (1 - \beta)\beta^k,$$

y el resultado sigue. □

Definición 2.8.5. Para un sistema de filas G/M/1/∞ se define a T_k , como el tiempo hasta que un individuo entre al sistema encuentre a k individuos dentro.

Teorema 2.8.3. Para el proceso $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$, se tiene que la esperanza del tiempo de espera de un individuo en el sistema, $W(t)$, es

$$W(t) = \frac{1}{\mu(1-\beta)},$$

donde β esta dado en la demostración del teorema 2.8.2, en (2.25).

Demostración. Dado que π_k es la probabilidad de que haya k individuos en el sistema cuando ocurre una llegada, entonces

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E[T_k] \pi_k.$$

Dado que si ocurre una llegada y hay k individuos en el sistema, ese individuo esperara $k + 1$ servicios en el sistema, y como el tiempo de servicio se distribuye exponencialmente con tasa $\mu > 0$, entonces,

$$E[T_k] = \frac{k+1}{\mu}.$$

Usando también que

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

(ver, por ejemplo, en Spivak 1967). Por lo tanto, como se conoce a π_k por el teorema 2.8.2, tenemos que

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} E[T_k] \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\mu} (1-\beta) \beta^k = \frac{(1-\beta)}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \beta^k \\ &= \frac{(1-\beta)}{\mu} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \beta^k + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \right] = \frac{(1-\beta)}{\mu} \left[\frac{\beta}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{1-\beta} \right] \\ &= \frac{(1-\beta)}{\mu} \left[\frac{\beta + 1 - \beta}{(1-\beta)^2} \right] = \frac{(1-\beta)}{\mu} \left[\frac{1}{(1-\beta)^2} \right] = \frac{1}{\mu(1-\beta)}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.8.2. En un sistema de filas G/M/1/ ∞ , el tiempo medio de un individuo en la fila de espera al tiempo t , el número medio de individuos en el sistema y en la fila de espera al tiempo t , son respectivamente

$$W_q(t) = \frac{\beta}{\mu(1-\beta)} \quad (2.26)$$

$$L(t) = \frac{\lambda}{\mu(1-\beta)} \quad (2.27)$$

$$L_q(t) = \frac{\lambda\beta}{\mu(1-\beta)}. \quad (2.28)$$

Demostración. Usando el teorema 2.8.3, podemos obtener el valor de $W(t)$, que indica el tiempo promedio de un individuo en este sistema al tiempo t , usando las fórmulas de Little, que indican que

$$(a) W_q(t) = W(t) - \frac{1}{\mu}$$

$$(b) L(t) = \lambda W(t)$$

$$(c) L_q(t) = \lambda W_q(t).$$

Así, sustituyendo el valor de $W(t)$, se tiene lo que se quiere demostrar para las ecuaciones (2.26) y (2.27). Para la ecuación (2.28), solo debemos sustituir el valor de $W_q(t)$, obtenido con la ecuación (2.26).

□

Teorema 2.8.4. Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un sistema de filas G/M/1/∞, con $\lambda < \mu$, la probabilidad de que haya k individuos en el sistema al tiempo t , es decir, $P(X_t = k)$, $k = 1, 2, \dots$, es

$$P(X_t = k) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - \beta) \beta^{k-1}, \quad (2.29)$$

donde

$$P(X_t = 0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \quad (2.30)$$

con β dado en (2.25).

Demostración. Esta demostración se puede encontrar en Ross (2010).

□

Capítulo 3

Ejemplos de Sistemas de Filas

En este capítulo se presentarán ejemplos, con el fin de ilustrar algunas de las aplicaciones que puede tener la teoría de filas presentada en los capítulos anteriores. Cada ejemplo dará uso a un distinto tipo de sistema de fila, esto nos ayudará a saber que fila utilizar en el caso que queramos utilizar esta teoría para otro problema.

3.1. Ejemplo 1

Considere establecimiento de comida rápida en la Ciudad de México, cuya especialidad sean las hamburguesas. Este tiene solamente una caja para dar servicio a cada cliente que llegue. El gerente al querer optimizar el negocio observa que, con tasa $\lambda = 0.75$ los clientes llegan por cada minuto y con tasa $\mu = 1$ por minuto los clientes son servidos. Notamos que este negocio puede ser bien simulado por el sistema de filas $M/M/1/\infty$ al cumplirse la condición de la definición 2.2.4. Adicionalmente, se tiene $\lambda < \mu$. Por lo tanto la teoría vista en el capítulo 2, y todas sus fórmulas estarán disponibles. De tal forma, tenemos:

(a) El valor del coeficiente que indica la intensidad de tráfico en la fila, dada en la definición 2.2.3, es

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1} = 0.75.$$

(b) La probabilidad de que no haya ningún individuo en el sistema, dada por el teorema 2.2.2, es

$$P(X_t = 0) = 1 - \rho = 1 - 0.75 = 0.25.$$

(c) La esperanza del número de individuos en la fila de espera al tiempo t , dada por la proposición 2.2.2, es

$$L_q(t) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.75^2}{1-0.75} = 2.25.$$

(d) La esperanza del número de individuos en el sistema al tiempo t , dada por la proposición 2.2.3, es

$$L(t) = L_q(t) + \rho = 2.25 + 0.75 = 3.$$

(e) La esperanza del tiempo de un individuo en la fila de espera al tiempo t , dada en (2.5), es

$$W_q(t) = \frac{L_q(t)}{\lambda} = \frac{2.25}{0.75} = 3 \text{ min.}$$

(f) La esperanza del tiempo de un individuo en el sistema al tiempo t , dada en (2.6), es

$$W(t) = W_q(t) + \frac{1}{\mu} = 3 + \frac{1}{1} = 4 \text{ min.}$$

Continuamos con la probabilidad de que haya n clientes en el sistema, es decir, en el negocio de hamburguesas. Por el teorema 2.2.2, sabemos que

$$P(X_t = n) = (1 - \rho)\rho^n,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} P(X_t = 0) &= (1 - 0.75)0.75^0 = 0.25, \\ P(X_t = 1) &= (1 - 0.75)0.75^1 = 0.1875, \\ P(X_t = 2) &= (1 - 0.75)0.75^2 = 0.1406, \\ P(X_t = 3) &= (1 - 0.75)0.75^3 = 0.1055, \\ P(X_t = 4) &= (1 - 0.75)0.75^4 = 0.0791, \\ P(X_t = 5) &= (1 - 0.75)0.75^5 = 0.0593, \\ P(X_t = 6) &= (1 - 0.75)0.75^6 = 0.0445, \\ P(X_t \geq 7) &= 1 - \sum_{n=0}^6 P(X_t = n) = 0.1335. \end{aligned}$$

Note que a la medida que el número de clientes en el sistema crece la probabilidad disminuye. Esto se debe al hecho que la tasa de salida es mayor que la tasa de llegada. Por lo tanto, la probabilidad de que se acumulen muchas personas dentro del sistema es baja.

3.2. Ejemplo 2

Tomando de nuevo el negocio de comida rápida del ejemplo 1, con tasa de llegada y de salida por minuto $\lambda = 0.75$ y $\mu = 1$, respectivamente. Dado que el número de clientes ha aumentado el gerente decide aumentar el número de servidores a dos, con el fin de seguir creciendo y observar el comportamiento del negocio. Ahora lo podremos usar un sistema de filas M/M/s/ ∞ , con $s = 2$. Entonces se obtienen los siguientes datos utilizando la teoría vista en el capítulo 2. Empezando por el coeficiente de intensidad de tráfico ρ , dado en la definición 2.4.2.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1} = 0.75.$$

Se sabe por el teorema 2.4.1 que la probabilidad de que haya n individuos en el sistema es

$$P(X_t = n) = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n \leq s - 1, \\ \frac{\rho^n}{s^{n-s} s!} P(X_t = 0) & , \text{ si } n \geq s, \end{cases}$$

donde

$$P(X_t = 0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)}}.$$

De tal forma, con $s = 2$, tenemos que

$$P(X_t = 0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{0.75^n}{n!} + \frac{0.75^2}{(2-1)!(2-0.75)}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{0.75^n}{n!} + \frac{0.75^2}{1.25}} = 0.4545,$$

$$P(X_t = 1) = \frac{0.75^1}{1!} (0.4545) = 0.3408,$$

$$P(X_t = 2) = \frac{0.75^2}{2!} (0.4545) = 0.1278,$$

$$P(X_t = 3) = \frac{0.75^3}{2^3 - 2!} (0.4545) = 0.0479,$$

$$P(X_t = 4) = \frac{0.75^4}{2^4 - 2!} (0.4545) = 0.0179,$$

$$P(X_t = 5) = \frac{0.75^5}{2^5 - 2!} (0.4545) = 0.0067,$$

$$P(X_t = 6) = \frac{0.75^6}{2^6 - 2!} (0.4545) = 0.0025,$$

$$P(X_t \geq 7) = 1 - \sum_{n=0}^6 P(X_t = n) = 0.0016.$$

(a) La esperanza del número de individuos en la fila de espera al tiempo t , dada en la proposición 2.4.2, es

$$L_q(t) = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} P(X_t = 0) = \frac{0.75^{2+1}}{(2-1)!(2-0.75)^2} (0.4545) = 0.1227.$$

(b) La esperanza del número de individuos en el sistema al tiempo t , dada en (2.12), es

$$L(t) = L_q(t) + \rho = 0.1227 + 0.75 = 0.8727.$$

(c) La esperanza del tiempo de un individuo en la fila de espera al tiempo t , dada en (2.13), es

$$W_q(t) = \frac{L_q(t)}{\lambda} = \frac{0.1227}{0.75} = 0.1636 \text{ min.}$$

(d) La esperanza del tiempo de un individuo en el sistema al tiempo t , dada en (2.14), es

$$W(t) = W_q(t) + \frac{1}{\mu} = 0.1636 + \frac{1}{1} = 1.1636 \text{ min.}$$

Observaciones. Comparaciones con uno y dos servidores en el negocio.

- (i) En el sistema M/M/2/ ∞ al tener dos servidores el número de clientes en el sistema será menor que solo tener un servidor tanto en términos de la esperanza del número de individuos en la fila de espera al tiempo t , $L_q(t)$, como en términos del valor esperado de número de individuos en el sistema al tiempo t , $L(t)$.
- (ii) En términos de la esperanza del tiempo de un individuo en el sistema y en la fila de espera, $W(t)$ y $W_q(t)$, respectivamente, la cantidad del tiempo de espera de un individuo en el sistema M/M/1/ ∞ es mucho mayor que en el sistema M/M/2/ ∞ , dado que con dos servidores el cliente no espera más de un minuto y medio para irse mientras que con solo uno espera cuatro.
- (iii) En el caso M/M/2/ ∞ , la distribución del número de clientes en el sistema también muestra una tendencia a decrecer a la medida que el número de individuos crece. Este decrecimiento es todavía más rápido que en el caso

$M/M/1/\infty$, dado que para el sistema $M/M/2/\infty$ en el caso $n = 3$, la probabilidad es bastante baja mientras que en el caso $M/M/1/\infty$, este comportamiento solo aparece para $n = 6$. Este comportamiento es esperado dado que el sistema $M/M/2/\infty$ el número de servidores es el doble del número en el sistema $M/M/1/\infty$ y las tasas de llegada y servicio son las mismas en ambos sistemas.

- (iv) La figura 3.1 muestra que en el sistema de fila $M/M/2/\infty$, la probabilidad de que haya 1 o 2 individuos en el sistema es mayor que en el sistema de fila $M/M/1/\infty$. Para $n \geq 3$, la probabilidad de que haya n individuos en el sistema de fila $M/M/1/\infty$, es mayor que en el sistema $M/M/2/\infty$. Esto es una indicación que el sistema de fila $M/M/2/\infty$, es menos probable que se tenga más de 3 individuos en el sistema que en el sistema $M/M/1/\infty$, ya que el sistema $M/M/2/\infty$ tiene dos servidores.

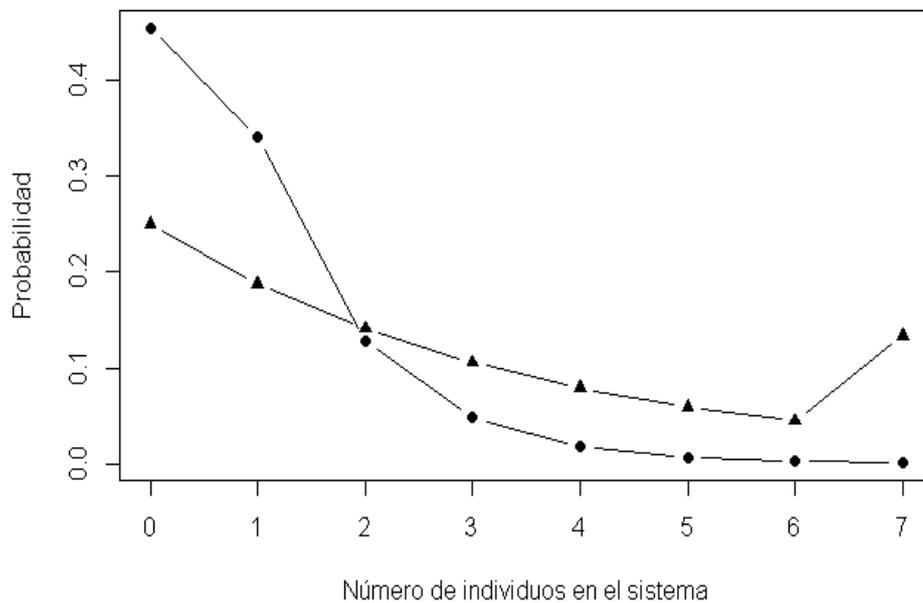


Figura 3.1: Probabilidad de que haya n individuos en el sistema, donde ● indica el sistema de fila $M/M/2/\infty$ y ▲ indica el sistema de fila $M/M/1/\infty$.

3.3. Ejemplo 3

En el Banco de México para solicitar un préstamo, hay un trabajador designado para dar el servicio a clientes que tengan un buen historial crediticio. Suponga que los clientes llegan al banco con tasa $\lambda = 40$ por hora y que la capacidad de la sala para solicitar el préstamo es de 4 clientes, contando al que está siendo atendido por el trabajador del banco. El trabajador da servicio con tasa μ de 4 minutos a cada cliente. Se pide obtener la siguiente información para así, optimizar esta área del banco:

- (i) La probabilidad de que al tiempo t el sistema este vacío y lleno.
- (ii) La esperanza del número de clientes en el sistema al tiempo t .

Por la descripción del problema podemos describirlo como un sistema de filas M/M/1/k, donde $k = 4$. De esta forma, podemos usar la teoría del capítulo 2. En el presente caso tiene $\lambda = 40$, y tomando en cuenta que a cada cuatro minutos se termina el servicio de un cliente entonces la tasa de servicio por cada hora es

$$\mu = \frac{60}{4} = 15.$$

De esta forma, el coeficiente de intensidad de tráfico ρ , dada en el teorema 2.3.1, es,

$$\rho = \frac{40}{15} = 2.66.$$

La probabilidad de que el sistema este vacío, dada por el teorema 2.3.1, es

$$P(X_t = 0) = \rho^0 \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} = 2.66^0 \frac{1 - 2.66}{1 - 2.66^{4+1}} = 0.01245$$

y la probabilidad de que el sistema este lleno, dada por el teorema 2.3.1, es

$$P(X_t = 4) = \rho^4 \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} = 2.66^4 \frac{1 - 2.66}{1 - 2.66^{4+1}} = 0.6295.$$

Así mismo, la esperanza del número de clientes en el sistema, dada por el teorema 2.3.3, es

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} \frac{1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{1 - 2.66}{1 - 2.66^{4+1}} \frac{1 - (4+1)2.66^4 + (4)(2.66^{4+1})}{(1 - 2.66)^2} = 3.437. \end{aligned}$$

3.4. Ejemplo 4

Suponga que, en un taller mecánico para vehículos, los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con tasa $\lambda = 15$ por hora, también suponga que el taller cuenta con 4 mecánicos para dar servicio y tiene capacidad para admitir a 3 autos en espera. Además, suponga que las leyes municipales no permiten que los demás autos esperen en la vía pública. Por ello, el taller avisa que no puede admitir a más de 4 autos para evitar una posible multa. Suponga que el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial de tasa $\mu = 12$ minutos por servicio. Para mejorar el servicio, el jefe del taller comienza con cuestionarse las siguientes probabilidades

- (i) La esperanza de autos en el taller.
- (ii) La esperanza del tiempo de un auto en el taller.
- (iii) La probabilidad de que el taller este lleno, es decir, que haya 7 autos.

Nótese que el sistema descrito puede ser modelado por un sistema de fila M/M/s/k, donde $s = 4$ y $k = 7$. Usando la teoría vista en el capítulo 2, se comienza por calcular la intensidad de tráfico del sistema, es decir, ρ . El valor de λ es 15, y tomando en cuenta que a cada doce minutos se termina el servicio de un cliente entonces la tasa de servicio por cada hora es

$$\mu = \frac{60}{12} = 5.$$

Así, se tiene que, el coeficiente de intensidad de tráfico ρ , dada en la definición 2.5.2, es

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{15}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4},$$

y el coeficiente α , dado en la definición 2.5.2, es

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{5} = 3.$$

La probabilidad de que no haya ningún auto en el taller, dada por la proposición 2.5.1, es

$$\begin{aligned} P(X_t = 0) &= \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^s}{s!} \sum_{n=s}^k \rho^{n-s} \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{4-1} \frac{3^n}{n!} + \frac{3^4}{4!} \sum_{n=4}^7 (3/4)^{n-4} \right)^{-1} \\ &= \left[1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2} + \frac{3^3}{4^3} \right) \right]^{-1} = 0.0263, \end{aligned}$$

y la probabilidad de que haya 7 autos en el taller, dada por la proposición 2.5.1, es

$$P(X_t = 7) = \frac{\alpha^s}{s!} \rho^{7-s} P(X_t = 0) = \frac{3^4}{4!} 3/4^{7-4} (0.0263) = 0.0374.$$

Así mismo, la esperanza del número de autos en la fila de espera, dada en la proposición 2.5.2, es

$$\begin{aligned} L_q(t) &= \frac{P(X_t = 0)(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{k-s+1} - (k-s+1)\rho^{k-s}(1-\rho)] \\ &= \frac{(0.0263)(15/5)^4 3/4}{4!(1-3/4)^2} [1 - 3/4^{7-4+1} - (7-4+1)3/4^{7-4}(1-3/4)] \\ &= 0.2788. \end{aligned}$$

La esperanza del número de autos en el taller, dada en la proposición 2.5.3, es

$$\begin{aligned} L(t) &= L_q(t) + \alpha(1 - P(X_t = k)) \\ &= 0.2788 + 3(1 - P(X_t = 7)) = 3.1665. \end{aligned}$$

Por la proposición 2.5.1, podemos obtener la probabilidad de tener 1, 2, 3, 4, 5 y 6 individuos en el sistema de la siguiente manera,

$$P(X_t = 1) = \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) = \frac{3^1}{1!} (0.0263) = 0.0789.$$

$$P(X_t = 2) = \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) = \frac{3^2}{2!} (0.0263) = 0.1183.$$

$$P(X_t = 3) = \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) = \frac{3^3}{3!} (0.0263) = 0.1183.$$

$$P(X_t = 4) = \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) = \frac{3^4}{4!} (0.0263) = 0.0887.$$

$$P(X_t = 5) = \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) = \frac{3^5}{5!} (0.0263) = 0.0532.$$

$$P(X_t = 6) = \frac{\alpha^n}{n!} P(X_t = 0) = \frac{3^6}{6!} (0.0263) = 0.0266.$$

La esperanza del tiempo de un auto en el sistema (en horas), dada en la proposición 2.5.3, es

$$W(t) = \frac{L(t)}{\lambda(1 - P(X_t = 7))} = \frac{3.1665}{15(1 - 0.0374)} = 0.2193 \text{ h.}$$

La esperanza del tiempo de un auto en la fila de espera (en horas), dada en la proposición 2.5.3, es

$$W_q(t) = \frac{L_q(t)}{\lambda(1 - P(X_t = 7))} = \frac{0.2788}{15(1 - 0.0374)} = 0.0193 \text{ h.}$$

3.5. Ejemplo 5

Suponga que, en una aseguradora muy exitosa de la Ciudad de México especializada en seguros de automóviles, el tiempo de llegada de los clientes son aleatorias con una tasa de llegada de 21 clientes por hora o $\lambda = \frac{21}{60} = 0.35$ clientes por minuto. La aseguradora solo tiene por el momento un empleado para dar servicio.

Un estudio basado en las firmas de salida de los clientes muestra que el tiempo de servicio es de 2 minutos por cliente, con una desviación estándar de $\sigma = 1.2$ minutos. El tiempo medio de 2 minutos por cliente muestra que el empleado tiene una tasa de servicio de $\mu = \frac{1}{2} = 0.5$ clientes por minuto.

Notamos que podemos usar un sistema de filas M/G/1/ ∞ para modelar a este sistema. Por ello podremos usar la teoría desarrollada en el capítulo 2. Así, tenemos que el coeficiente de intensidad de tráfico ρ , dada en la definición 2.6.2, es

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.35}{0.50} = 0.70.$$

Dado que el coeficiente ρ indica lo cuanto se utiliza el sistema, utilizamos la probabilidad del complemento para saber la probabilidad de que no haya ningún individuo en el sistema, es decir,

$$P(X_t = 0) = 1 - \rho = 1 - 0.70 = 0.30.$$

La esperanza del número de individuos en la fila de espera al tiempo t , dada en el teorema 2.6.1, es

$$L_q(t) = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho^2)} = \frac{(0.35)^2 (1.2)^2 + (0.70)^2}{2[1 - (0.70)^2]} = 1.1107.$$

La esperanza del número de individuos en el sistema al tiempo t , dada en (2.16), es

$$L(t) = L_q(t) + \rho = 1.1107 + 0.70 = 1.8107.$$

La esperanza del tiempo de un individuo en la fila de espera al tiempo t , dada en (2.17), es

$$W_q(t) = \frac{L_q(t)}{\lambda} = \frac{1.1107}{0.35} = 3.1733 \text{ min.}$$

La esperanza del tiempo de un individuo en el sistema al tiempo t , dada en (2.18), es

$$W(t) = W_q(t) + \frac{1}{\mu} = 3.1733 + \frac{1}{0.50} = 5.1733 \text{ min.}$$

3.6. Ejemplo 6

Considere una compañía que vende un Software muy exitoso, el cual, cada usuario lo podrá adquirir, si se llama por teléfono a hacer el pedido. Supongamos que la tasa de llamadas de usuarios es de $\lambda = 12$ llamadas por hora. El tiempo de servicio para procesar cada orden en cada llamada varía, pues cada usuario puede hacer un pedido diferente. Sin embargo, se puede esperar que cada representante de ventas de la compañía $\mu = 6$ llamadas por hora. El número de teléfono de la compañía cuenta con tres líneas para admitir llamadas de los clientes, donde cada una es operada por un representante de ventas por separado. Las llamadas recibidas en el número se transfieren automáticamente a una línea, si está disponible. Cuando las tres líneas están ocupadas, los usuarios que llaman reciben una señal de ocupado y se les recomendara llamar más tarde, es decir, no podrán ingresar al sistema.

Cuando esto pasa un número considerable de usuarios no vuelven a llamar y por consecuente se pierden pedidos. Por lo que la gerencia de la compañía solicitó un análisis del sistema de pedidos por teléfono. Específicamente, la gerencia quería saber el porcentaje de personas que llaman que reciben señales de ocupado y por lo tanto están bloqueadas del sistema.

Si el objetivo de la administración es proporcionar la capacidad suficiente para atender al 90 por ciento de las personas que llaman, ¿cuántas líneas telefónicas y representantes de ventas deben usar la compañía para maximizar las ganancias?

Podemos ajustar el sistema de filas M/G/s/s y calcular la probabilidad de que las tres líneas telefónicas estén en uso y las llamadas adicionales se bloqueen, dada por el teorema 2.7.1, es decir

$$P(X_t = 3) = \frac{(\lambda/\mu)^3/3!}{\sum_{i=0}^3 (\lambda/\mu)^i/i!} = \frac{(12/6)^3/3!}{\sum_{i=0}^3 (12/6)^i/i!} = \frac{1.33}{6.33} = 0.2105.$$

Por lo tanto, el 79 por ciento de las llamadas totales se están atendiendo, mientras que las demás se ponen en espera. Ahora supongamos que se tienen 4 líneas telefónicas para atender a los usuarios que llaman por el Software. Por el teorema 2.7.1, continuamos por calcular

$$P(X_t = 4) = \frac{(\lambda/\mu)^4/4!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i/i!} = \frac{(12/6)^4/4!}{\sum_{i=0}^4 (12/6)^i/i!} = \frac{0.667}{7} = 0.0952.$$

De esta manera al tener 4 líneas telefónicas notamos que el 9.52 por ciento de las llamadas serán bloqueadas, por lo tanto, se obtendrá lo que se buscaba, que era atender a más del 90 por ciento de las llamadas entrantes.

La esperanza de llamadas entrantes al sistema de cuatro líneas y por lo tanto, el número esperado de líneas y representantes de ventas que estarán ocupados, está dada por la proposición 2.7.1, es decir

$$L(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - P(X_t = 4)) = \frac{12}{6} (1 - 0.0952) = 1.8095.$$

Entonces al ver este análisis la compañía deberá tener cuatro líneas telefónicas para así, cubrir con el 90 por ciento de las llamadas entrantes y de esta manera no perder ganancias. Finalizamos con las probabilidades que indican que las líneas 0, 1, 2, 3 y 4 estén ocupadas, con 4 servidores. Por el teorema 2.7.1, tenemos

$$P(X_t = 0) = \frac{(\lambda/\mu)^0/0!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i/i!} = \frac{(12/6)^0/0!}{\sum_{i=0}^4 (12/6)^i/i!} = \frac{1}{7} = 0.1429,$$

$$P(X_t = 1) = \frac{(\lambda/\mu)^1/1!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i/i!} = \frac{(12/6)^1/1!}{\sum_{i=0}^4 (12/6)^i/i!} = 0.2857,$$

$$P(X_t = 2) = \frac{(\lambda/\mu)^2/2!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i/i!} = \frac{(12/6)^2/2!}{\sum_{i=0}^4 (12/6)^i/i!} = 0.2857,$$

$$P(X_t = 3) = \frac{(\lambda/\mu)^3/3!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i/i!} = \frac{(12/6)^3/3!}{\sum_{i=0}^4 (12/6)^i/i!} = 0.1905.$$

Naturalmente, la probabilidad de tener 3 líneas ocupadas es menor si se tiene 4 servidores en vez de 3.

Capítulo 4

La contaminación en la CDMX

En este capítulo se verá cómo se puede usar la teoría de filas ante un fenómeno del mundo real. La diferencia con los ejemplos del capítulo anterior es que en esta aplicación se usa herramientas de estadística bayesiana. Se presentará aquí la descripción del problema y describirá los modelos que pueden simular el fenómeno y la selección del modelo que tenga un mejor ajuste a este. Esto con el objetivo predecir el comportamiento del fenómeno en estudio y así tomar medidas para que este cambie su comportamiento.

El modelo descrito aquí es el presentado por Barrios y Rodrigues (2015).

4.1. Introducción al problema

En las grandes ciudades del mundo, los altos niveles de contaminación en el aire es actualmente un fenómeno que aumenta día a día y que se busca resolver, dado que, el peligro para la salud de sus habitantes no es insignificante. Dentro de las ciudades más grandes del mundo se encuentra la Ciudad de México que está considerada como una de las ciudades más pobladas del planeta y con una gran cantidad de contaminación en el aire.

Uno de los contaminantes que afectan a la salud es el ozono, por lo que, este contaminante no es algo que se quiera con abundancia dentro del ambiente, pues si su concentración sobrepasa el nivel de 0.11 partes por millón (ppm), la población de cualquier megaciudad estará expuesta a un ambiente dañino para su salud. Los más afectados ante este fenómeno son los recién nacidos y ancianos, ya que estos son más propensos a desarrollar problemas cardiorrespiratorios.

Sabiendo esto, las megaciudades deben tener demasiado cuidado con el medio ambiente, dado que si las mediciones del ozono sobrepasan el umbral de 0.11 ppm,

la contaminación tendrá un alto impacto ante la población y sus actividades como ya fue mencionado.

Por ello, dos cuestiones importantes en cualquier megaciudad, como lo es la Ciudad de México, es el poder estimar cuando pueda ocurrir un aumento en la cantidad de ozono en el aire. Dicho de otra forma, cuando la ciudad cambia de un estado ambiental saludable a un estado ambiental dañino para la población. La segunda a ser estudiada es estimar el periodo de tiempo en el que la ciudad permanece en un estado ambiental con altas concentraciones de ozono en el aire.

De esta forma, la información obtenida podrá ser utilizada para tomar medidas de prevención y a su vez poder hacer un estudio en el impacto económico que sufre la ciudad al ocurrir este fenómeno.

Sin embargo, el objetivo principal es evitar que la población permanezca en un estado dañino para su salud, por lo que el evento de interés es el cambio de un estado ambiental saludable a uno dañino, es decir, cuando los niveles del ozono superen el umbral de 0.11 ppm. Esto se puede entender mejor observando la figura 4.1.

Se sabe que, el grupo de días con exceso de ozono en la ciudad se puede presentar en cualquier momento y esto se produce con mayor frecuencia si no se toman medidas preventivas. Por lo que un proceso a tiempo continuo será lo más adecuado para simular la llegada de los grupos de días con superación del umbral considerado. El tiempo de servicio seguirá una distribución discreta, dado que en el estudio que realizamos se basa en determinar el número de días que el grupo de días con excedencia de ozono permanece en el ambiente. Por ejemplo, el grupo numero 1 puede ser de 7 días y no consideramos que pueda permanecer 7.5 días, por esto, se considera una distribución discreta. Por lo tanto, se considerará el sistema de filas será con tasas de llegadas de acuerdo a un proceso Poisson no homogéneo y los tiempos de servicios siguen una distribución discreta.

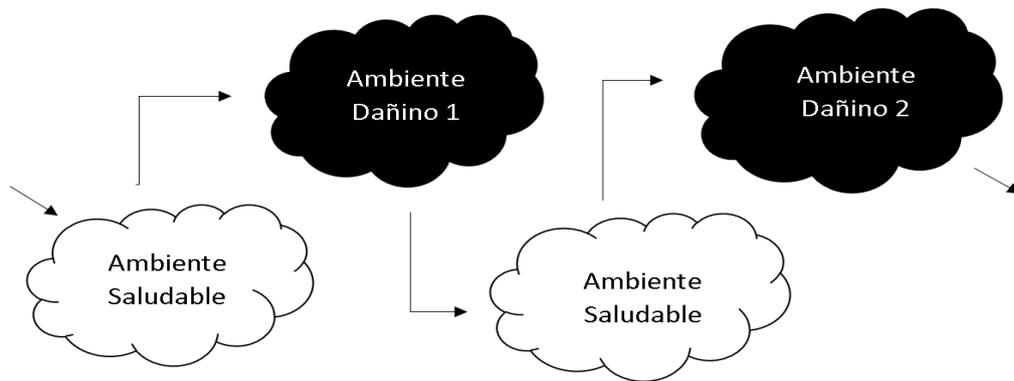


Figura 4.1: Esta figura muestra dos tipos de nubes, las cuales representan los estados que puede tomar el ambiente de una ciudad. El ambiente dañino 1 indica el grupo número 1 de días con superación de ozono que se presenta en la ciudad, análogamente con el ambiente dañino 2. Notar que los ambientes dañino 1 y 2 no necesariamente son de la misma longitud.

4.2. Descripción del modelo

Sea un sistema de filas, donde las llegadas de individuos al sistema se pueden identificar como las ocurrencias de excedencia de ozono en el ambiente. Dicho de otra forma, cada que llegue un individuo al sistema es como si llegara un grupo de días con excedencia de ozono al ambiente. Los tiempos de servicio a cada individuo que ingrese al sistema se pueden interpretar como el número de días consecutivos con exceso de ozono.

Empecemos a nombrar a las variables presentes en el modelo. Definimos:

- (a) T como un número natural fijo mayor a cero representando el número de días en que se tomaron las mediciones de contaminantes en el aire de la ciudad.
- (b) L como un número real fijo mayor a cero representando el valor considerado como el umbral referente al estado ambiental saludable. En este caso, como ya fue mencionado $L = 0.11\text{ppm}$.
- (c) K como un número natural fijo mayor a cero y dentro del intervalo $[0, T]$, que representa el número de días en el que la concentración del ozono excede el valor L , siempre que el día anterior haya estado debajo de él. Dicho de otra forma, K indica el número de días en el que empieza una secuencia de días con ambiente dañino para la población.

Sea Z_i la concentración del ozono en el día i -ésimo, $i = 1, 2, \dots, T$. También debemos saber si en el día i -ésimo la concentración Z_i supera el umbral L , por ello, definamos a X_i como la variable que indique si en el i -ésimo día se supera el valor L , es decir

$$X_i = \begin{cases} 0 & , \text{ si } Z_i < L \\ 1 & , \text{ si } Z_i \geq L. \end{cases}$$

También nos interesa saber qué día se empieza las ocurrencias de las excedencias del ozono y cuantos días permanece en ese estado dañino. Por lo que definimos para cada $i = 1, 2, \dots$, a la variable Y_i , que indica el número de días en el que la concentración de contaminante se mantiene por encima de L , que fue excedida el día i y estaba por debajo del valor L en el día $(i - 1)$, es decir, $Y_i = k$, si $X_i = X_{i+1} = \dots = X_{i+k-1} = 1$ y $X_{i-1} = X_{i+k} = 0$. Esto se puede ver más claro en la figura 4.2.

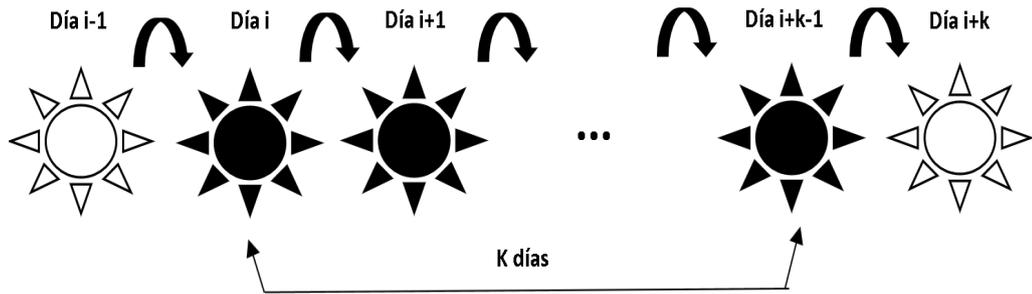


Figura 4.2: Esta figura muestra una sucesión de días con mediciones de ozono en el ambiente. Cada sol indica un día. Si el sol no se encuentra negro indica que en ese día la medición del ozono no superó el umbral y si está en color negro la medición del ozono supero el umbral de 0.11 ppm.

Supongamos que los grupos de días de excedencias de ozono en el ambiente, llegan de acuerdo a un proceso Poisson no homogéneo, con función de tasa $\lambda(t)$ positiva, localmente integrable y media $\mu(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$, $t \geq 0$. Denotamos a este proceso por $N = \{N_t : t \geq 0\}$. Se sabe además por Achcar et al. (2008, 2011, 2012) que los modelos de Poisson no homogéneos explican bastante bien el comportamiento de los excesos de ozono cuando el objetivo implica estimar el número de superaciones en un intervalo de tiempo dado.

Por lo dicho anteriormente este problema puede ajustarse a el sistema de fila $M/G/1/k$, M es porque el proceso de llegada de los agrupamientos es de acuerdo a

un proceso de Poisson, G es una distribución discreta, 1 porque el sistema tiene un único servidor y $k = 1$ pues solamente puede haber un individuo en sistema. Este sistema de filas fue introducido por Omosigho (1985). En la presente notación X_i es 0 o 1, así que el número máximo de clientes en el sistema es 1. También suponemos que las llegadas de grupos de excedencias y su longitud son independientes, aunque en general no lo son. Esta suposición es una forma de simplificar el problema para estudiarlo.

Definimos la siguiente cadena de Markov bivariada

$$(X, Y) = \{(X_n, Y_n) : n \geq 0\},$$

donde X_n indica el estado del n -ésimo día, es decir, si ocurrió un exceso de contaminación o no y Y_n indica, en el caso de que haya una superación, el tiempo hasta que la concentración de ozono regrese a un nivel por debajo del umbral L .

Proposición 4.2.1. La cadena bivariada de Markov (X, Y) , tiene como espacio de estados el conjunto

$$S = \{(0, 0)\} \cup \{(1, k) : k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Demostración. El estado $(0, 0)$ se presenta en el proceso cuando no ocurre un exceso de ozono, por lo que $X_n = Y_n = 0$. Por hipótesis, en el proceso no puede ocurrir que $X_n > 1$, es decir, no puede ocurrir varios excesos de ozono en el mismo día. Si ocurre un exceso de ozono en el día n -ésimo entonces $X_n = 1$ y este exceso puede durar 0 días o más, es decir, Y_n puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números naturales. De esta forma se tiene los estados $(X_n = 1, Y_n = k)$, $k = 0, 1, \dots$

□

Teorema 4.2.1. En el sistema de fila $M/G/1/k$, se tiene que la probabilidad de que ocurra cada estado del conjunto S , es

$$P(X_n = 0, Y_n = 0) = e^{-[m(n) - m(n-1)]} [P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0) + P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = 1)] \quad (4.1)$$

y para $k = 0, 1, 2, \dots$, se tiene

$$P(X_n = 1, Y_n = k) = e^{-[m(n) - m(n-1)]} P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = k + 1) + (1 - e^{-[m(n) - m(n-1)]}) P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0) p(k), \quad (4.2)$$

donde $p(\cdot)$ es la distribución del tamaño del grupo de días con contaminación y $p(k)$ indica la probabilidad de que el tamaño del grupo sea k .

Demostración. Defina los siguientes conjuntos:

$$A_{00} = \{\text{no hay excedencias en el intervalo de tiempo } [n-1, n) \text{ y no hay excedencias al instante de tiempo } (n-1)\}$$

y

$$B_{00} = \{\text{no hay excedencias en el intervalo de tiempo } [n-1, n) \text{ y hay una superación al instante de tiempo } (n-1) \text{ con una duración restante de solo un día}\}.$$

Por la teoría vista en los sistemas de filas que tienen un solo servidor, con llegadas que siguen un proceso Poisson no homogéneo y un tiempo de servicio de acuerdo a una distribución discreta, tomando en cuenta la ecuación (4.1), se debe notar que el evento $\{X_n = 0, Y_n = 0\}$, indica que el ambiente no tiene exceso de ozono, el cual es la unión de los eventos disjuntos A_{00} y B_{00} .

Se encuentra en Omosigho (1985), que la probabilidad de que ocurra A_{00} y B_{00} son

$$P(A_{00}) = e^{-[m(n)-m(n-1)]}P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0),$$

y

$$P(B_{00}) = e^{-[m(n)-m(n-1)]}P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = 1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X_n = 0, Y_n = 0) &= e^{-[m(n)-m(n-1)]}P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0) \\ &\quad + e^{-[m(n)-m(n-1)]}P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = 1) \\ &= e^{-[m(n)-m(n-1)]}[P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0) \\ &\quad + P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = 1)]. \end{aligned}$$

Ahora para demostrar (4.2), defina los conjuntos:

$$A_{1k} = \{\text{no hay excedencias en el intervalo de tiempo } [n-1, n) \text{ y hay una superación que comienza antes del tiempo } (n-1) \text{ con la duración restante de } k \text{ días}\}$$

y

$B_{0k} = \{\text{no hay superaciones en el momento } (n-1) \text{ y se produce una superación en el intervalo } [n-1, n) \text{ con la duración restante de } k \text{ días}\}.$

Notamos que (4.2) es la unión de los eventos disjuntos denotados por A_{1k} y B_{0k} . Se encuentra en Omosigho (1985), que las probabilidades de que ocurra A_{1k} y B_{0k} son

$$P(A_{1k}) = e^{-[m(n)-m(n-1)]}P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = k+1)$$

y

$$P(B_{0k}) = (1 - e^{-[m(n)-m(n-1)]})P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0)p(k).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X_n = 1, Y_n = k) &= e^{-[m(n)-m(n-1)]}P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = k+1) \\ &+ (1 - e^{-[m(n)-m(n-1)]})P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0)p(k). \end{aligned}$$

□

Habiendo terminado de demostrar las probabilidades (4.1) y (4.2), de aquí en adelante se puede saber cuál es la probabilidad de que cuando ocurra una superación de ozono en el ambiente dure exactamente k días.

Se dijo anteriormente que las llegadas al sistema seguirá un proceso Poisson no homogéneo con tasa $\lambda(t)$. Esta función $\lambda(t)$ se puede considerar de formas varias. Aquí tomaremos la función de Weibull, indicada por W , dada en Muldholkar (1995) y la función de Musa – Okumoto, indicada por MO , dada en Musa (1984). Estas funciones son respectivamente, son dadas por

$$\lambda^{(W)}(t) = (\alpha/\beta)(t/\beta)^{\alpha-1},$$

y

$$\lambda^{(MO)}(t) = \beta/(t + \alpha),$$

donde las funciones de medias correspondientes son, respectivamente

$$m^{(W)}(t) = (t/\beta)^\alpha,$$

y

$$m^{(MO)}(t) = \beta \log(1 + t/\alpha),$$

donde $t \geq 0$ y $\alpha, \beta \in (0, \infty)$.

Observación. Los autores decidieron usar esas funciones porque se ha demostrado en Achcar et al. (2012), que ellas proporcionan un buen ajuste para los datos del ozono de la Ciudad de México.

Con respecto a la distribución discreta que indica el tamaño del grupo de días de superación de ozono. Se supone que para $i = 1, 2, \dots$, cada Y_i son independientes y tienen como distribución común una función de distribución geométrica con parámetro $p \in (0, 1)$, es decir, para cada $k = 1, 2, \dots$, se tiene que

$$p(k) = P(Y_i = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

O también cada Y_i , pueden tener como distribución común a $Y^\sim + 1$, con Y^\sim , una variable aleatoria con una distribución binomial negativa generalizada, con parámetros $p \in (0, 1)$, y $r \geq 0$. Es decir, para $k = 0, 1, 2, \dots$, se tiene

$$P(Y^\sim = k) = [\Gamma(r + k) / (\Gamma(r)k!)] p^r (1 - p)^k,$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gama.

Por lo tanto, para la distribución discreta que indica el tamaño del grupo de días de superación de ozono se usaran dos distribuciones (geométrica y binomial negativa generalizada) y veremos cual se ajusta mejor.

Observación. Los autores decidieron tomar Y_i como una distribución negativa generalizada de esta forma se tiene una cola más pesada en comparación a la de la distribución geométrica. Una función de distribución con cola más pesada nos favorece, ya que, hay algunos grupos de días con longitud grande de superaciones de ozono con una probabilidad de ocurrencia no tan pequeña. Dicho de otra forma, el hecho de que el ambiente dañino permanezca en la ciudad por un largo periodo es un posible caso y no se puede descartar.

A seguir se presenta el modelo bayesiano usando la estimación de los parámetros del modelo.

4.3. Formulación bayesiana de un modelo adecuado

Los datos observados pueden ser representados por el conjunto

$$\mathbf{D}' = \{(t_i, n_i) : i = 1, 2, \dots, K\},$$

donde t_i representa el día en que comenzó el i -ésimo grupo de días con excedencia del contaminante y n_i indica el número de días, comenzando en el día t_i , en el que la superación continúa permaneciendo en el ambiente, es decir, n_i indica el tamaño del grupo, y K indica el número de grupos de excedencia.

El conjunto \mathbf{D}' puede considerarse como una realización de la cadena de Markov bivariada (X, Y) , donde si hay alguna superación en el día n , es decir, $X_n = 1$ entonces $Y_n = n_i - (n - t_i)$, con $t_i \leq n < t_i + n_i$. Sin olvidar el caso donde no ocurre ninguna superación de ozono en el ambiente, el cual será $(X_n, Y_n) = (0, 0)$.

La estimación de los parámetros del modelo se realiza utilizando una muestra extraída de la distribución posteriori, que por la proposición 1.5.1, puede escribirse como

$$P(\theta | \mathbf{D}') \propto L(\mathbf{D}' | \theta)P(\theta),$$

donde $L(\mathbf{D}' | \theta)$ es la función de verosimilitud de describiendo el conjunto \mathbf{D}' y $P(\theta)$ es la distribución a priori de θ .

En este caso, el vector de parámetros a estimar es $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, donde θ_1 es el vector de parámetros de los modelos relacionados con la función de tasa de llegada del proceso Poisson y θ_2 es el relacionado con la distribución del tamaño del grupo de días con superación. Por lo que, $\theta_1 = (\alpha, \beta)$, en ambas funciones de tasas de llegadas al sistema y θ_2 es $\theta_2 = p$, cuando se considera la distribución geométrica y $\theta_2 = (p, r)$ cuando se usa la distribución binomial negativa generalizada. Esto se debe a que la distribución geométrica solo depende de un parámetro y la binomial negativa generalizada de dos.

Supongamos a priori una independencia entre los parámetros θ_1 y θ_2 . Los cuales uno depende solo del proceso de llegada, es decir, cuando ocurre una excedencia y el otro solo del tiempo de servicio o dicho de otra forma, el tamaño del grupo de días con excedencias. Este hecho es una consecuencia del supuesto de independencia entre los procesos de llegada y del servicio.

Sea $L_A(\mathbf{D}' | \theta)$ y $L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta)$ las funciones de verosimilitud de la llegada de los grupos de días con excedencias y el de tamaño del grupo, respectivamente. Por lo tanto, podemos escribir

$$L(\mathbf{D}' | \theta) = L_A(\mathbf{D}' | \theta) \times L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta).$$

Sean los conjuntos $t = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ y $n = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$, donde t_i representa el día en que comenzó el i -ésimo grupo de días con contaminación y n_i indica el número de días, comenzando en el día t_i , en el que la superación continua permaneciendo en el ambiente.

Proposición 4.3.1. Las funciones de verosimilitud $L_A(\mathbf{D}' | \theta)$ y $L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta)$, son respectivamente,

$$L_A(\mathbf{D}' | \theta) = e^{-m(t_1-1|\theta)} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[m(t_i|\theta) - m(t_{i-1}|\theta)])} \right] \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[m(t_{i+1}-1|\theta) - m(t_i|\theta)]} \right] e^{-[m(T|\theta) - m(t_K|\theta)]} \quad (4.3)$$

y

$$L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta) = L_{CS}(n | \theta) = \prod_{i=1}^K p(n_i), \quad (4.4)$$

donde $p(\cdot)$ es la distribución del tamaño del grupo de días con contaminación.

Demostración. La función de verosimilitud $L_A(\mathbf{D}' | \theta)$ se puede demostrar de la siguiente manera. Primero notar que es lo mismo

$$L_A(\mathbf{D}' | \theta) = L_A(t | \theta),$$

dado que t es el conjunto que contiene a los t_i , los cuales indican el día en que comenzó el i -ésimo grupo de días con contaminación.

Después, tomar $t_1 = 0$, y tener en cuenta que la distribución inicial de la cadena de Márkov (X, Y) es $\delta_{(0,0)}(\cdot)$, es decir, con probabilidad uno empieza en el punto $(0, 0)$, dado que no hay individuos en el sistema hasta el momento t_1 . Dicho de otra manera no llega un día con excedencia de ozono hasta el momento t_1 . Por lo tanto, (4.1) nos dice que

$$P(X_n = 0, Y_n = 0) = e^{-[m(n) - m(n-1)]} [P(X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0) + P(X_{n-1} = 1, Y_{n-1} = 1)],$$

tenemos que el primer término de la función de verosimilitud $L_A(\mathbf{D}' | \theta)$, es

$$\prod_{k=1}^{t_1-1} e^{-[m(k|\theta) - m(k-1|\theta)]} = e^{-m(t_1-1|\theta)}.$$

Más aún, si un individuo llega al tiempo t_1 , este necesita n_1 unidades de tiempo para ser atendido, ya que solo se permite un individuo en el sistema, es decir, solo puede haber un grupo de días con exceso de ozono, entonces $t_1 + n_1 < t_2$. Por lo que, no llega ningún individuo al sistema en el intervalo de tiempo (t_1, t_2) , después, usando (4.1) y (4.2), encontramos que el segundo término de la función de verosimilitud $L_A(\mathbf{D}' | \theta)$, es

$$\begin{aligned}
& (1 - e^{-[m(t_1|\theta) - m(t_1-1|\theta)]})p(n_1) \prod_{k=t_1+1}^{t_2-1} e^{-[m(k|\theta) - m(k-1|\theta)]} \\
& = (1 - e^{-[m(t_1|\theta) - m(t_1-1|\theta)]})p(n_1)e^{-[m(t_2-1|\theta) - m(t_1|\theta)]}.
\end{aligned}$$

En general, si un individuo llega al tiempo t_k y n_k unidades de tiempo son necesarias para atenderlo, tenemos ahora que

$$\begin{aligned}
& (1 - e^{-[m(t_k|\theta) - m(t_k-1|\theta)]})p(n_k) \prod_{j=t_k+1}^{t_{k+1}-1} e^{-[m(j|\theta) - m(j-1|\theta)]} \\
& = (1 - e^{-[m(t_k|\theta) - m(t_k-1|\theta)]})p(n_k)e^{-[m(t_{k+1}-1|\theta) - m(t_k|\theta)]}.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
L_A(\mathbf{D}' | \theta) = L_A(t | \theta) & = e^{-m(t_1-1|\theta)} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[m(t_i|\theta) - m(t_i-1|\theta)]}) \right] \\
& \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[m(t_{i+1}-1|\theta) - m(t_i|\theta)]} \right] e^{-[m(T|\theta) - m(t_K|\theta)]}.
\end{aligned}$$

Ahora, para la función de verosimilitud $L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta)$, notar que

$$L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta) = L_{CS}(n | \theta),$$

dado que n es el conjunto que contiene a los n_i , los cuales indican el número de días, comenzando en el día t_i , en el que la superación continua permaneciendo en el ambiente. De esta manera, usando que $p(\cdot)$ es la distribución del tamaño del grupo de días con contaminación, tenemos que

$$L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta) = L_{CS}(n | \theta) = \prod_{i=1}^K p(n_i).$$

□

Las distribuciones posteriores de los parámetros a estimar pueden obtenerse de la siguiente manera

$$P(\theta | \mathbf{D}') \propto L_A(t | \theta) \times L_{CS}(n | \theta) \times P(\theta_1) \times P(\theta_2).$$

Los valores muestreados, utilizados en la estimación de los parámetros, se obtienen utilizando el algoritmo de muestreo de Gibbs con el software OpenBugs, como se muestra en Lunn et al. (2009). La convergencia del algoritmo se controla

mediante el análisis de los trazados y la prueba Gelman-Rubin, ver por ejemplo Gelman y Rubin (1992).

Como estamos considerando dos funciones de tasas para indicar el proceso de llegadas al sistema, dependiendo de sus expresiones, la función de verosimilitud $L_A(\mathbf{D}' | \theta)$ puede tomar una forma diferente. A seguir se presentan las formas que esta puede tomar.

Teorema 4.4.1. La función de verosimilitud $L_A(\mathbf{D}' | \alpha, \beta)$, usando la tasa de Weibull es

$$L_A^{(W)}(\mathbf{D}' | \alpha, \beta) = e^{-((t_1-1)/\beta)^\alpha} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[(t_i/\beta)^\alpha - ((t_i-1)/\beta)^\alpha]}) \right] \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[(t_{i+1}-1)/\beta)^\alpha - (t_i/\beta)^\alpha]} \right] e^{-[(T/\beta)^\alpha - (t_K/\beta)^\alpha]}. \quad (4.5)$$

Demostración. Dado que sabemos que la función de tasa de llegada de Weibull, con su respectiva función de media son

$$\lambda^{(W)}(t) = (\alpha/\beta)(t/\beta)^{\alpha-1},$$

y

$$m^{(W)}(t) = (t/\beta)^\alpha,$$

$t \geq 0$ y $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Ahora, usando el resultado (4.3), con $\theta = (\alpha, \beta)$, se sabe que

$$L_A(\mathbf{D}' | \theta) = e^{-m(t_1-1|\theta)} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[m(t_i|\theta) - m(t_i-1|\theta)]}) \right] \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[m(t_{i+1}-1|\theta) - m(t_i|\theta)]} \right] e^{-[m(T|\theta) - m(t_K|\theta)]}.$$

Calculemos el primer término, usando la función de media de Weibull, $m^{(W)}(t)$, (los otros términos se obtienen de manera similar)

$$e^{-m(t_1-1|\theta)} = e^{-((t_1-1)/\beta)^\alpha}$$

y así obtenemos que

$$L_A^{(W)}(\mathbf{D}' | \alpha, \beta) = e^{-((t_1-1)/\beta)^\alpha} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[(t_i/\beta)^\alpha - ((t_i-1)/\beta)^\alpha]}) \right] \\ \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[((t_{i+1}-1)/\beta)^\alpha - (t_i/\beta)^\alpha]} \right] e^{-[(T/\beta)^\alpha - (t_K/\beta)^\alpha]}.$$

□

Teorema 4.4.2. La función de verosimilitud $L_A(\mathbf{D}' | \alpha, \beta)$, usando la tasa de Musa-Okumoto, es

$$L_A^{(MO)}(\mathbf{D}' | \alpha, \beta) = e^{-(\beta \log(1 + \frac{t_1-1}{\alpha}))} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[(\beta \log(1 + \frac{t_i}{\alpha})) - (\beta \log(1 + \frac{t_i-1}{\alpha}))]}) \right] \\ \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[(\beta \log(1 + \frac{t_{i+1}-1}{\alpha})) - (\beta \log(1 + \frac{t_i}{\alpha}))]} \right] e^{-[(\beta \log(1 + \frac{T}{\alpha})) - (\beta \log(1 + \frac{t_K}{\alpha}))]}.$$

(4.6)

Demostración. Dado que sabemos que la función de tasa de llegada de Musa-Okumoto, con su respectiva función de media son

$$\lambda^{(MO)}(t) = \beta / (t + \alpha)$$

y

$$m^{(MO)}(t) = \beta \log(1 + t/\alpha),$$

$t \geq 0$ y $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Usando el resultado (4.3), con $\theta = (\alpha, \beta)$, se sabe que

$$L_A(\mathbf{D}' | \theta) = e^{-m(t_1-1|\theta)} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[m(t_i|\theta) - m(t_i-1|\theta)]}) \right] \\ \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[m(t_{i+1}-1|\theta) - m(t_i|\theta)]} \right] e^{-[m(T|\theta) - m(t_K|\theta)]}.$$

Calculemos el primer término, usando la función de media de Musa-Okumoto, $m^{(MO)}(t)$, los otros se obtienen de forma similar

$$e^{-m(t_1-1|\theta)} = e^{-(\beta \log(1 + \frac{t_1-1}{\alpha}))}$$

y así obtenemos que

$$L_A^{(MO)}(\mathbf{D}' | \alpha, \beta) = e^{-(\beta \log(1 + \frac{t_1-1}{\alpha}))} \left[\prod_{i=1}^K (1 - e^{-[(\beta \log(1 + \frac{t_i}{\alpha})) - (\beta \log(1 + \frac{t_{i-1}}{\alpha}))]}) \right] \\ \times \left[\prod_{i=1}^{K-1} e^{-[(\beta \log(1 + \frac{t_{i+1}-1}{\alpha})) - (\beta \log(1 + \frac{t_i}{\alpha}))]} \right] e^{-[(\beta \log(1 + \frac{T}{\alpha})) - (\beta \log(1 + \frac{t_K}{\alpha}))]}.$$

□

Teorema 4.4.3. La función de verosimilitud para el tamaño de grupo usando la distribución geométrica de parámetro p y la binomial negativa generalizada de parámetros p y r , son respectivamente,

$$L_{CS}^{(geo)}(\mathbf{D}' | p) = p^K (1 - p)^{\sum_{i=1}^K n_i - 1} \quad (4.7)$$

y

$$L_{CS}^{(gnb)}(\mathbf{D}' | p, r) = \prod_{i=1}^K \frac{\Gamma(r + n_i - 1)}{\Gamma(r)(n_i - 1)!} p^r (1 - p)^{n_i - 1}. \quad (4.8)$$

Demostración. Por (4.4), sabemos que

$$L_{CS}(\mathbf{D}' | \theta) = L_{CS}(n | \theta) = \prod_{i=1}^K p(n_i),$$

donde $p(\cdot)$ es la distribución del tamaño del grupo. Por lo que, para $L_{CS}^{(geo)}(\mathbf{D}' | \theta)$, se tiene $\theta = p$, usando que la función de probabilidad de una distribución geométrica de parámetro p , tenemos

$$p(n_i) = p(1 - p)^{n_i - 1}.$$

Por lo tanto,

$$L_{CS}^{(geo)}(\mathbf{D}' | p) = \prod_{i=1}^K p(n_i) = \prod_{i=1}^K p(1 - p)^{n_i - 1} = p^K (1 - p)^{\sum_{i=1}^K n_i - 1}.$$

Para $L_{CS}^{(gnb)}(\mathbf{D}' | \theta)$, se tiene $\theta = (p, r)$, y después usamos que la función de densidad de una distribución binomial negativa generalizada de parámetros p y r , es

$$p(n_i) = \frac{\Gamma(r + n_i - 1)}{\Gamma(r)(n_i - 1)!} p^r (1 - p)^{n_i - 1}.$$

Por lo tanto,

$$L_{CS}^{(gnb)}(\mathbf{D}' | \theta) = \prod_{i=1}^K p(n_i) = \prod_{i=1}^K \frac{\Gamma(r + n_i - 1)}{\Gamma(r)(n_i - 1)!} p^r (1 - p)^{n_i - 1}.$$

□

4.4. Datos de contaminación en la CDMX

Aquí se describirán los resultados obtenidos por Barrios y Rodrigues (2015) cuando el modelo de filas descrito al principio de este capítulo son aplicados a datos reales de contaminación de la Ciudad de México.

La Ciudad de México se divide en cinco secciones, estas son, el noreste, el noroeste, el centro, el sureste y el suroeste, indicados respectivamente por NE, NO, CE, SE y SO (ver por ejemplo en Achcar et al. (2008), Álvarez et al. (2005) y <http://www.sma.df.gob.mx>). Los datos que los autores utilizaron corresponden a las mediciones diarias máximas de ozono tomadas desde el 1 de enero del 2003 hasta el 31 de diciembre del 2010 y pueden obtenerse en www.sma.df.gob.mx/sima t2. Las mediciones en cada estación de monitoreo se obtienen minuto a minuto y el resultado promedio por hora se informa en cada estación. El dato máximo diario para cada región es la medida máxima de todos los valores promedios registrados aquel día. Por lo tanto, los autores tomaron cada día el valor máximo que alcanzó el ozono por región. Dado que las alertas de emergencia en la Ciudad de México se declaran regionalmente, se analizó cada región por separado.

Durante el período de observación aclarado, obtuvieron un total de $T = 2,922$ observaciones. Con estos datos los autores calcularon, la media, la desviación estándar, el número de días que la concentración del ozono en el ambiente superó el umbral, el número de grupos, el tamaño medio de los grupos y su desviación estándar, por cada región. Estas cantidades se muestran en la tabla 4.1.

Con estos datos se tiene un análisis exploratorio y se da una idea de cómo son los grupos de días con excedencias de ozono en cada región de la ciudad. Por ejemplo, se nota que la región con más días de superación del umbral es al suroeste de la ciudad, mientras que la región con menos días de contaminación es al noreste. Con esto se toma un grado más de atención a las regiones más afectadas a la hora de ver los resultados para tomar las medidas preventivas necesarias.

Tabla 1	Media	SD	Días L	Grupos	Media G	SD G
NE	0.078	0.028	389	23	1.66	1.26
NO	0.094	0.035	944	441	2.14	1.76
CE	0.096	0.035	999	426	2.35	2.21
SE	0.098	0.032	1124	465	2.42	2.6
SO	0.109	0.038	1510	466	3.24	3.38

Tabla 4.1: Esta tabla presenta la media, la desviación estándar, el número de días que la concentración del ozono en el ambiente superó el umbral, el número de grupos, el tamaño medio de los grupos y su desviación estándar, por cada región, donde SD indica la desviación estándar, Días L indica el número de días que superaron el umbral L, Grupos indica el número de grupos que ocurrieron en el lapso de tiempo considerado, Media G y SD G indican el tamaño medio de los grupos y su desviación estándar, respectivamente.

Para utilizar el punto de vista bayesiano, se deben asignar distribuciones a priori a los parámetros del modelo. Por lo tanto, las distribuciones a priori que se consideran para los parámetros del proceso de Poisson no homogéneo se mencionan a continuación.

Al considerar el modelo de Weibull para la tasa de llegadas, para todas las regiones, los parámetros α y β tienen como distribuciones a priori distribuciones uniformes $U(0,2)$ y $U(0,100)$, respectivamente. En el caso del modelo de Musa–Okumoto, para todas las regiones, los parámetros α y β tienen como distribuciones a priori una distribución Gama (160,1) y una Gama (64,1), respectivamente, donde se toma la parametrización de la distribución Gama de tal forma que si ella tiene parámetros (a,b) , entonces su media y varianza son, respectivamente, a/b y a/b^2 .

La selección de las distribuciones anteriores y sus parámetros en el modelo de Poisson no homogéneo se basó en estudio de Achcar et al. (2012), donde no se consideraron grupos de días con excedencias de ozono.

En el caso de la distribución del tamaño de los grupos, que para la distribución geométrica, el parámetro p tiene como distribución a priori una distribución uniforme $U(0,1)$ en todas las regiones. Los parámetros p y r de la distribución binomial negativa generalizada tienen como distribuciones a priori una distribución $U(0,1)$ y una Gamma (1,1), respectivamente. Los parámetros de estas distribuciones se basaron en un análisis de la distribución empírica del tamaño del grupo.

La estimación de los parámetros en el caso de cualquiera de las funciones de tasas de llegada y con una distribución binomial negativa generalizada para los tamaños de los grupos se realizó, utilizando una muestra de tamaño 3,234,

4.5. PROCESO DE ELECCIÓN DEL MODELO Y VALORES ESTIMADOS 93

recolectada de la distribución posteriori condicional marginal completa respectiva, después de un período de 3,000 iteraciones y con un intervalo de muestreo de 30 pasos.

En el caso de la distribución geométrica, el tamaño de la muestra fue de 2,000 y los valores muestreados se extrajeron directamente de la distribución marginal posteriori del parámetro p , que es una distribución Beta de parámetros $K + 1$ y $\sum_{i=1}^K n_i - K + 1$, donde para la distribución Beta de parámetros (a, b) , su media y varianza son, respectivamente, $(a - 1)/(a + b - 2)$ y $ab/[(a + b)^2(a + b + 1)]$. Los valores de los parámetros estimados explícitamente se encuentran en Barrios y Rodrigues (2015).

4.5. Proceso de elección del modelo y valores estimados

En el caso del proceso de llegada, la selección del modelo que mejor se ajusta a los datos se realiza mediante inspección visual de las gráficas de las medias observadas y estimadas con el proceso Poisson. En el caso de la distribución del tamaño de los grupos de días con excedencias de ozono, se requiere la inspección visual entre las funciones de probabilidad estimadas y observadas.

También se utiliza la suma de los valores absolutos de las diferencias para esas probabilidades, indicado por SAD. En ambos casos, también se utilizará el método de discriminación de Bayes, indicado por BDM.

Es muy importante tener siempre presente el objetivo, este fue ajustar un sistema de filas adecuado al fenómeno de la presencia del exceso de ozono en la Ciudad de México. Se consideró que las llegadas al sistema van de acuerdo a un proceso Poisson no homogéneo. A continuación, se dirá que función de tasa se ajustó más a los datos observados, si la función de Weibull o la de Musa - Okumoto y se explicará la razón de esta decisión. De igual manera que distribución elegir para los tiempos de servicio, ya sea una distribución geométrica o una binomial negativa generalizada.

4.5.1. La función de tasa de llegadas

Se ha hablado de un sistema de filas con llegadas de acuerdo a un Poisson no homogéneo. El modelo considerado fue una adaptación del propuesto por Omosigho y Worthington (1985), donde los autores demuestran que el modelo discreto puede usarse para aproximar el sistema continuo. Las funciones de tasa de Weibull y de Musa-Okumoto son las funciones que fueron consideradas como la tasa para el proceso de llegada del proceso Poisson no homogéneo.

Al obtener el logaritmo de los valores de la respectiva MLF utilizada en el criterio BDM, se inició a seleccionar al mejor modelo. Por lo tanto, al observar los resultados y en base al BDM, se puede ver que los modelos de Poisson elegidos fueron el modelo de Weibull para la región NE y el modelo de MO para las regiones NO, CE, SE y SO.

Los autores notaron también que con el proceso Poisson no homogéneo que describe las llegadas al sistema para todas las regiones con las funciones de tasas consideradas, aunque para las regiones NO, CE, SE y SO, el modelo seleccionado era el de Musa-Okumoto, el modelo de Poisson con una función de tasa de Weibull es el que proporcionó el mejor ajuste gráfico para todas las regiones de la ciudad.

Las gráficas que realizaron de las medias acumuladas observadas y estimadas del proceso de llegada de Poisson mostraron que el modelo que mejor se ajusta a los datos observados es el que asume la función de tasa de Weibull. Por otro lado, se observó que, si se usa el criterio de discriminación bayesiano, este sugiere que el modelo elegido puede variar, dependiendo la región.

Por ejemplo, se vio el caso de la región SO, se consideró el modelo con un proceso Poisson no homogéneo que supone una función de tasa de Weibull. Por lo que, la tasa $\lambda = 1/\beta$ del proceso Poisson fue aproximadamente, 0.21. Lo cual indica que, el tiempo medio entre llegadas de grupos es aproximadamente $1/\lambda = 4.76$. días para esa la región. Así de forma análoga, para las otras regiones y se obtiene la tabla 4.2 así se da cuenta de cómo va tiempo medio entre llegadas de grupos para todas las regiones de la ciudad.

Una razón para tener ese comportamiento homogéneo podría ser el hecho de que la región SO es la que tiene el problema de ozono más grave, es decir, el umbral de 0.11 ppm se supera con mayor frecuencia allí. Por lo tanto, se espera un comportamiento más homogéneo en términos de llegadas de grupos de días con excedencias. En las otras regiones, se tuvo un proceso de Poisson con una función de tasa decreciente, es decir, se calculó un $\alpha < 1$, en la función Weibull, ver figura en <https://sites.google.com/site/jmbarrios/recursos/jas-Supplemental>.

4.5. PROCESO DE ELECCIÓN DEL MODELO Y VALORES ESTIMADOS⁹⁵

Tabla 4.2	α	β
NE	0.79	3.03
NO	0.87	2.54
CE	0.87	2.66
SE	0.89	2.69
SO	0.96	4.74

Tabla 4.2: Esta tabla presenta para cada región los parámetros estimados de Weibull α y β .

Por lo tanto, el tiempo medio entre llegadas de grupos es de tres días en general, es decir, si se considera toda la Ciudad de México.

4.5.2. La distribución del tamaño de los grupos

En el caso de la distribución elegida para los tamaños de los grupos, las opciones consideradas fueron los modelos que suponen una distribución geométrica o una binomial negativa generalizada.

Al obtener los valores estimados de los parámetros en los modelos para el proceso de tamaño de los grupos, el valor del logaritmo de la MLF para cada modelo y la SAD en cada caso, se inició a seleccionar al mejor modelo. Por lo que, al observar los resultados y en base al BDM, los autores pudieron ver que, en todas las regiones, el modelo elegido es el que utilizó una distribución binomial negativa generalizada.

Los autores también hicieron la gráfica que muestra la raíz cuadrada de las distribuciones binomiales negativas generalizadas y geométricas estimadas, y de la distribución de tamaño del grupo observado. Esto se hizo con el fin de ver el ajuste que hay entre el tamaño de grupo estimado y el tamaño del grupo observado. Todo esto para cada una de las regiones de la ciudad. Por lo que se pudo concluir, se tienen las siguientes observaciones:

(i) Los autores observaron que existen algunos grupos muy pequeños y otros que son muy grandes, donde el ajuste para los tamaños de grupos pequeños es mejor que el de los tamaños grandes. Esto implicó la posible existencia de más de un comportamiento para el proceso de tamaño del grupo. Por lo que, es posible pensar en utilizar un modelo mixto en el caso de las distribuciones binomiales negativas generalizadas y geométricas que describen el tamaño de los grupos, pero este caso no se tratará en este trabajo.

(ii) Para los grupos grandes, tanto las distribuciones geométricas como las binomiales negativas generalizadas proporcionaron un ajuste similar, si se comparan con los valores observados. Por ello, se pudo elegir una distribución geométrica o una binomial negativa generalizada para el tamaño de grupos grandes.

(iii) En el caso de los grupos pequeños, la distribución binomial negativa generalizada proporcionó un ajuste ligeramente mejor en la mayoría de las regiones. Eso se concluyó gracias al SAD entre las funciones de probabilidad estimadas y observadas de los tamaños de los grupos.

(iv) Se notó que los valores de SAD, en el caso de la distribución binomial negativa generalizada, a veces son la mitad que los de la distribución geométrica, como, por ejemplo, en el caso de la región NO. Sin embargo, en el caso de las regiones SE y SO, los valores son los mismos y son muy similares en el caso de las regiones NE y CE.

Teniendo en cuenta que el modelo seleccionado es el que asume una distribución binomial negativa generalizada para todas las regiones, dado que la media de una variable aleatoria con una distribución binomial negativa generalizada con parámetros p y r es $[(1-p)r/p]$. Usando los parámetros p y r que se calcularon en Barrios y Rodrigues (2014), se puede calcular el tamaño medio estimado de los grupos para todas las regiones como se muestra en la tabla 4.3 (recordar que en nuestro caso la media del tamaño de grupo es la media de la distribución binomial negativa generalizada más uno).

Tabla 4.3	p	r	$[(1-p)r/p]$	Media
NE	0.48	0.63	0.6825	1.6825
NO	0.38	0.72	1.1747	2.1747
CE	0.37	0.81	1.3791	2.3791
SE	0.28	0.56	1.44	2.44
SO	0.23	0.66	2.2095	3.2095

Tabla 4.3: Esta tabla presenta para cada región la media de la distribución binomial negativa generalizada y el tamaño medio estimado de los grupos de días con contaminación en la ciudad.

Por lo tanto, se notó que cuando ocurre una superación del umbral 0.11 en la Ciudad de México, esta excedencia permanece aproximadamente dos días.

4.6. Información proporcionada por el modelo seleccionado

Por el análisis realizado, se concluyó que un modelo con tasa de llegadas de Weibull y una distribución binomial negativa generalizada para el tamaño de los grupos con el modelo seleccionado se puede ahora estimar algunas cantidades que pueden dar información sobre la calidad del aire.

Usando los parámetros α y β estimados y las ecuaciones (4.1) y (4.2) es posible calcular tanto la probabilidad que el próximo grupo de días de contaminación ocurrirá en una fecha en específico, como también el tamaño que este puede llegar a tener.

Por ejemplo, si se considera la región del centro de la ciudad, es decir, CE, en ese caso se obtuvo que los parámetros estimados de la función media son $\alpha = 0.87$ y $\beta = 2.66$, y el último grupo en el período de observación comenzó el día $t = 2909$, el siguiente comenzó, de hecho, 55 días después, ya en el año 2011.

Los autores tienen interés en saber la probabilidad de tener una superación en el día 2914 y que dicho grupo dure k días, es decir, $Y_{2914} = k$. Por lo que, por (4.2) es posible en calcular

$$P(X_{2914} = 1, Y_{2914} = k) = e^{-[m(2914) - m(2913)]} P(X_{2913} = 1, Y_{2913} = k + 1) \\ + (1 - e^{-[m(2914) - m(2913)]}) P(X_{2913} = 0, Y_{2913} = 0) p(k), \quad (4.9)$$

donde la función de media de Weibull es

$$m(t) = (t/\beta)^\alpha$$

y

$$p(k) = [\Gamma(r + k - 1) / \Gamma(r)(k - 1)!] p^r (1 - p)^{k-1},$$

$k = 1, 2, \dots$, y $P(X_{2913} = 0, Y_{2913} = 0)$ dado por la ecuación (4.1). Por lo tanto, el valor de la probabilidad puede ser obtenido de forma recursiva.

Tener en cuenta que el último grupo finalizó el día 2,910. Por lo que, los datos mostraron que $X_{2911} = 0$, también se tuvo que $P(X_{2911} = 0, Y_{2911} = 0) = 1$, y en este caso los parámetros estimados para la distribución binomial negativa generalizada son $p = 0.37$, $r = 0.81$. Por lo tanto,

$$P(X_{2914} = 1, Y_{2914} = 2) = e^{-[(2914/2.66)^{0.87} - (2913/2.66)^{0.87}]} P(X_{2913} = 1, Y_{2913} = 2 + 1)$$

$$\begin{aligned}
&+(1 - e^{-[(2914/2.66)^{0.87} - (2913/2.66)^{0.87}]})P(X_{2913} = 0, Y_{2913} = 0) \\
&\times [\Gamma(0.81 + 2 - 1)/\Gamma((0.81)(2 - 1)!)] 0.37^{0.81} (1 - 0.37)^{2-1} \approx 0.02,
\end{aligned}$$

que es comprensible con la rareza del evento, pues el próximo grupo ocurre 55 días después de que el último finalizó.

El número medio de superaciones en un intervalo de tiempo en específico es una información que se puede obtener y puede ser de utilidad si queremos saber, por ejemplo, el número esperado de grupos con excedencias en el mes de junio. Para obtener esta información, considere un intervalo de tiempo $(t, t + s)$, con $t, s > 0$. El número de grupos de excedencias en ese período de tiempo viene dado por $N_{t+s} - N_t$, donde $N = \{N_t : t \geq 0\}$ es el proceso Poisson no homogéneo que indica las llegadas del sistema. Sea D_i la longitud del i -ésimo grupo de excedencias en el intervalo de tiempo $(t, t + s)$, $i = 1, 2, \dots, N_{t+s} - N_t$. Recordar que, por hipótesis, las variables aleatorias D_i son independientes e idénticamente distribuidas, es decir, todas tienen la misma distribución.

Sea $W_{t,t+s}$ el número de días en que ocurrió una superación durante el intervalo de tiempo $(t, t + s)$, por lo que, el número medio de superaciones en ese intervalo de tiempo está dado por

$$\begin{aligned}
E(W_{t,t+s}) &= E\left(\sum_{i=1}^{N_{t+s}-N_t} D_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N_{t+s}-N_t} D_i \mid N_{t+s}, N_t\right)\right] \\
&= E[N_{t+s} - N_t]E(D),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde D es una variable aleatoria con la misma distribución que D_i .

Al tener la expresión (4.10), se puede utilizar para cualquier región de la Ciudad, por ejemplo, los autores consideran el caso de la región CE, se sabe que el último día en que ocurrió una superación fue el 19 de diciembre de 2010, que corresponde a la observación 2910. Considere el intervalo de tiempo que va del 20 de diciembre de 2010 al 28 de febrero de 2011. Por lo que, se tiene $t = 2911$ y $s = 71$. Como el modelo seleccionado para el tamaño del grupo es el que supone una distribución binomial negativa generalizada, por lo que

$$E(D) = [r(1 - p)/p] + 1.$$

También se sabe que el modelo de Poisson para el proceso de llegada que ofrece el mejor ajuste gráfico es el que asume una función de tasa Weibull. Por lo que,

4.6. INFORMACIÓN PROPORCIONADA POR EL MODELO SELECCIONADO 99

$$E(N_t) = m(t) = (t/\beta)^\alpha.$$

Usando los valores estimados de los parámetros por los autores, se tiene que

$$\begin{aligned} E(W_{t,t+s}) &= [E(N_{2982}) - E(N_{2911})] \left[\frac{r(1-p)}{p} + 1 \right] \\ &= \left[\left(\frac{2982}{2.66} \right)^{0.87} - \left(\frac{2911}{2.66} \right)^{0.87} \right] \left[\frac{0.81(1-0.37)}{0.37} + 1 \right] \approx 22.21. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en teoría se debe esperar aproximadamente 22 días con superaciones de ozono dentro del ambiente entre el 20 de diciembre de 2010 y el 28 de febrero de 2011, tenga en cuenta que el número observado de superaciones durante ese tiempo fue de cuatro días. Por lo que, el modelo predijo un valor mayor en comparación del número medio de días con excedencia de ozono observado en los primeros dos meses del año 2011, pero esto puede servir como algo favorable dado que se podría tomar alguna acción para evitar que las excedencias ocurran y que la población se exponga a niveles dañinos de contaminación.

En conclusión, los autores obtuvieron que el modelo que presenta el mejor ajuste, para la llegada de los grupos de días de contaminación es el proceso de Poisson no homogéneo que supone una función de tasa Weibull para todas las regiones de la ciudad de México. Mas aun, se observó que el tiempo medio entre llegadas de grupos en la ciudad es de tres días.

En el caso del tamaño de los grupos, la distribución que mejor se ajustó al fenómeno es la distribución binomial negativa generalizada para todas las regiones de la ciudad. Se obtuvo que el tamaño promedio de los grupos es de aproximadamente dos días, eso indica que, en promedio, cuando se produce una superación del umbral de 0,11 ppm, es probable que dure solo dos días.

Utilizando la expresión $P(N_{t+s} - N_t = k)$, con $t, s \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, y tomando $k = 1$, se puede calcular la probabilidad de que ocurra un grupo de días de contaminación en el intervalo de tiempo $[t, t+s)$. Esto puede servir, en el caso de los días festivos del año, dado que esos días la mayor parte de la población se mueve más y por lo tanto más expuesta a exteriores, por lo que sería interesante no tener un ambiente dañino para la salud. También usando la expresión $E(W_{t,t+s})$ dada por (4.10), se puede calcular el tamaño medio del grupo de excedencias.

La importancia del modelo descrito aquí es que proporciona información sobre la velocidad a la que se producen grupos de días de contaminación, junto con su distribución de tamaños. Por lo tanto, utilizando esa información, las autoridades ambientales pueden implementar medidas con el fin de para aumentar el tiempo entre la llegada de los grupos y disminuir sus tamaños, dicho en otras palabras, disminuir la contaminación en la Ciudad de México.

4.7. Conclusión

Esta sección es para resumir el trabajo hecho por Barrios y Rodrigues (2015), remarcar la información capturada por éste.

Los autores estudiaron el fenómeno de la contaminación en la Ciudad de México, observaron que la clave de tener un estado ambiental saludable es tener un nivel menor o igual a 0.11 ppm de ozono en el ambiente. Continuaron con utilizar las mediciones del ozono cada día durante un periodo de tiempo y anotaban si cada día excedía el umbral de 0.11 o no. Con esto se define una cadena de Markov bivariada (X_n, Y_n) , donde X_n indica el estado de n -ésimo día (es decir, estado ambiental saludable o dañino) y Y_n indica en el caso que haya un exceso de ozono en el ambiente el tiempo hasta que la concentración de ozono regrese a un nivel por debajo del umbral. Notaron que este proceso encaja con el sistema de fila M/G/1/k.

Se consideraron las llegadas con respecto a un proceso Poisson no homogéneo con tasa de Weibull o de Musa - Okumoto. Los tiempos de servicio que pueden seguir una distribución geométrica o una binomial negativa generalizada.

Los autores formularon el modelo que puede describir el fenómeno de la contaminación en la ciudad utilizando herramientas de la estadística bayesiana. Dando pie a utilizar las distribuciones a priori, posteriori y la función de verosimilitud con el objetivo de estimar los parámetros de las distribución geométrica y binomial negativa generalizada para los tiempos de servicios. También los autores utilizaron estas herramientas para estimar los parámetros de la tasa de Weibull o Musa - Okumoto del proceso Poisson no homogéneo para las llegadas al sistema. Esto con el fin de ver que distribución y tasa se ajusta más a los datos observados.

Obteniendo que para las llegadas al sistema se concluyó que el proceso de Poisson no homogéneo que supone una tasa Weibull es el que mejor se ajusta a las llegadas observadas, esta tasa para todas las regiones de la ciudad, según el criterio BDM. Para los tiempos de servicio del sistema la distribución seleccionada es la binomial negativa generalizada, esta para todas las regiones de la ciudad, según el criterio BDM. Al tener completo el modelo que describe al fenómeno, con su tasa para el proceso de llegadas y la distribución para los tiempos de servicio, se continuó con obtener la información que puede ayudar a entender el fenómeno de la contaminación en la Ciudad de México con respecto a los datos observados.

Por ejemplo, se utilizaron las fórmulas para saber la cantidad de días que se pueden esperar con excedencias en un periodo de tiempo y la probabilidad que hay de que en un día en específico se tenga altos niveles del contaminante. Naturalmente si se quiere saber la cantidad de días que se esperan para otro periodo de tiempo, debemos calcular según la fórmula, como lo muestra el ejemplo. Y con esto finaliza este capítulo, con la aplicación de la teoría antes vista y la información que se puede capturar e interpretar.

Capítulo 5

Conclusión

En este capítulo haremos una recapitulación de lo que vimos en este trabajo. En el primer capítulo vimos las definiciones y teoremas necesarios para desarrollar el tema principal. Presentamos las definiciones de cadenas de Markov a tiempo continuo, el proceso Poisson y los procesos de nacimiento y muerte que posteriormente vimos que son conceptos de suma importancia para la noción de teoría de filas.

En el segundo capítulo vimos que existen distintos sistemas de filas y esto se debe a que los fenómenos de la vida real no siempre tienen las mismas características. Observamos que, aunque hay distintos sistemas de filas, la información que se obtiene de ellos normalmente es la misma, por ejemplo, la probabilidad de tener n individuos en el sistema o el tiempo medio de un individuo que entra al sistema, ambos a un cierto tiempo t .

En el tercer capítulo comenzamos a ver cómo la teoría desarrollada servía y cómo podemos obtener conclusiones de la información calculada. Esta parte es importante, pues es donde realmente observamos a la teoría en acción.

En el cuarto capítulo nos adentramos a un problema donde podemos pensar que las llegadas al sistema de filas que normalmente es de individuos que entran a algún negocio, ahora se trata de un grupo de días de contaminación. De esta forma abrimos un poco más la mente a que esta teoría se puede aplicar a distintos fenómenos.

Finalmente notar que esta tesis consta de dos capítulos de parte teórica y dos capítulos de parte aplicada, esto con el fin de ilustrar cómo las matemáticas no solamente quedan en los pizarrones de clases, sino que podemos darle un uso en distintos fenómenos de la vida cotidiana. Dejando en claro que el objetivo de la tesis es un trabajo realizado para mostrar que la probabilidad y estadística junto a la programación en softwares estadísticos pueden ser una gran herramienta para el estudio de cualquier fenómeno que sea de nuestro interés.

Naturalmente no siempre es fácil analizar, extraer la información que la teoría nos puede brindar y más aún tener que interpretar los resultados para darles un uso adecuado. Sin embargo, esperamos que esta tesis sea de ayuda a la hora de estudiar un determinado fenómeno.

Bibliografía

J.A. Achcar, A.A. Fernández-Bremauntz, E.R. Rodrigues, y G. Tzintzun. 2008. Estimating the number of ozone peaks in Mexico City using a non - homogeneous Poisson model. *Environmetrics* 19.

J.A. Achcar, E.R. Rodrigues, y G. Tzintzun. 2011. Using non-homogeneous Poisson models with multiple change-points to estimate the number of ozone exceedances in Mexico City. *Environmetrics* 22.

J.A. Achcar, J.M. Barrios, y E.R. Rodrigues. 2012. Comparing the adequacy of some non-homogeneous Poisson models to estimate ozone exceedances in Mexico City. *Environ. Protect.* 3 (Special Issue Air Pollution).

L.J. Álvarez, A.A. Fernández-Bremauntz, E.R. Rodrigues, y G. Tzintzun. 2005. Maximum a posteriori estimation of the daily ozone peaks in Mexico City. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* 10.

D.R. Anderson, D.J. Sweeney, T.A. Williams, J.D. Camm, y K. Martin. 1976. *An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making*, Thirteenth Edition. Ed. South-Western Cengage Learning. USA.

J.M. Barrios, y E.R. Rodrigues. 2015. A queueing model to study the occurrence and duration of ozone exceedances in Mexico City. Ed. Taylor and Francis, *Journal of Applied Statistics*, 42 : 1, 214 – 230.

N.U. Bhat 2015. *An Introduction to Queueing, Second Edition*. Ed. Advisory Board. Southern Methodist University, Dallas, Texas, USA.

R.B. Cooper 1981. *Introduction to Queueing Theory, Second Edition*. Ed. Elsevier North Holland Inc: USA. University Boca Raton, Florida.

H.S. Friedberg, A. Insel, y L. Spence. 2000. *Linear Algebra*. Ed. Pearson Education, Inc. United States of America.

A.E. Gelfand, y A.F.M. Smith. 1990. Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities. Ed. Breakthroughs in Statistics, Springer-Verlag New York.

S. Geman, y D. Geman. 1984. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. Ed. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, USA.

A. Gelman, y D.B. Rubin. 1992. Inference from iterative simulation using multiple sequences, *Stat. Sci.* 7, pp. 457–511.

D. Gross, J.F. Shortle, J.M. Thompson, y C.M. Harris. 2008. Fundamentals of Queueing Theory, Fourth Edition. Ed. A. John Wiley and Sons Inc: USA.

W.K. Hastings. 1970, Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika* 57.

D. Lunn, D. Spiegelhalter, A. Thomas y N. Best. 2009. The BUGS project: Evolution, critique and future directions (with discussion). *Stat. Med.* 28.

N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller y E. Teller. 1953. Equations of state calculations by fast computing machine, *J. Chem. Phys.* 21.

N. Metropolis y S. Ulam. 1949. The Monte Carlo method, *Journal of the American Statistical Association* 44.

J.D. Musa, y K. Okumoto. 1984. A Logarithmic Poisson Execution Time Model for Software Reliability Measurement. *Proceedings of Seventh International Conference on Software Engineering*, Orlando, FL.

G.S. Muldholkar, D.K. Srivastava, y M. Friemer 1995. The exponentiated-Weibull family: a reanalysis of the bus-motor failure data. *Technometrics* 37 : 436–445.

S.E. Omosigho, y D.J. Worthington. 1985. The single server queue with inhomogeneous arrival rate and discrete service time distribution. *Eur. J. Oper. Res.* 22.

A.E. Raftery, W. Gilks, S. Richardson, y D.J. Spiegelhalter. 1996. Hypothesis testing and model selection, in *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Eds. Chapman and Hall, London.

C.P. Robert, y G. Casella. 1999. Monte Carlo statistical methods. Springer Text in Statistics. Springer. Estados Unidos.

E.R. Rodrigues. 2013. Introducción a los Métodos de Monte Carlo. Escuela de Matemáticas de América Latina y del Caribe Morelia, México.

S.M. Ross. 1996. Stochastic Processes, Second Edition. Ed. John Wiley and Sons Inc: USA. University of California, Berkeley.

S.M. Ross. 2010. Introduction to Probability Models, Tenth Edition. Ed. Academic Press is an Imprint of Elsevier. University of Southern California.

M. Spivak. 1967. Cálculo infinitesimal, Segunda Edición. Ed. Reverté, S.A. Universidad de Brandeis, USA.