



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN

**ESTUDIO DEL FRENTE DE ONDA Y SUPERFICIES CÁUSTICAS
CONSIDERANDO UN FRENTE DE ONDA INCLINADO A TRAVÉS DE
DOBLETES CEMENTADOS**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

ISMAEL VELÁZQUEZ GÓMEZ

TUTOR PRINCIPAL:

MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, septiembre de 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dra. Rosete Aguilar Martha

Secretario: Dr. Izazaga Pérez Rafael

1 er. Vocal: Dr. Avendaño Alejo Maximino

2 do Vocal: Dr. Rendón Garrido Pablo Luis

3 er Vocal: Dr. Alvarez Núñez Luis Carlos

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT).

TUTOR DE TESIS:

Dr. Maximino Avendaño Alejo

FIRMA

A MI FAMILIA, POR DARME LA FORTALEZA CUANDO MÁS LO NECESITÉ.

A LA MEMORIA DE MÓNICA NALLELY ELENES VALENZUELA,
QUIÉN POR SIEMPRE ESTARÁ PRESENTE EN MIS RECUERDOS,
DURANTE TODA MI VIDA.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor Dr. Maximino Avendaño Alejo, principal colaborador durante todo este proceso, quien con su dirección y conocimientos compartidos permitió el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a mi jurado por sus valiosos comentarios, aportaciones y correcciones durante la realización de este trabajo de investigación.

Agradezco particularmente a la Dra. María del Carmen López Bautista, por su colaboración durante el desarrollo de este trabajo, y también al M. I. Hesiquio Vargas Hernández del Instituto de Física, por apoyar en la reparación de una platina de desplazamiento lineal, diseñando piezas dañadas y la implementación de un circuito electrónico alterno.

Agradezco al Programa de Posgrado de Ingeniería Eléctrica, con opción en Instrumentación Óptica de la Universidad Nacional Autónoma de México, por el apoyo y las oportunidades brindadas durante mis estudios de Maestría.

Agradezco al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, ICAT-UNAM, como miembro del grupo de metrología óptica, adscrito al departamento de óptica, microondas y acústica, por brindarme el apoyo durante mi estancia en el laboratorio de Pruebas Ópticas.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca otorgada para realizar mis estudios de Maestría, No. CVU 1004490.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica/Universidad Nacional Autónoma de México (PAPIIT/UNAM), bajo el proyecto número IN116420, así como por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), con el proyecto A1-S-44220.

Resumen

En este trabajo se estudia la formación de superficies cáusticas y frentes de onda empleando el Principio de Huygens en dobletes cementados, considerando un frente de onda plano propagándose a lo largo del eje óptico e incidiendo sobre la lente. Por un lado se desarrolla una expansión en series de Taylor a segundo orden del frente de onda exacto obteniendo un frente de onda parabólico, por otra parte se realiza una aproximación alterna considerando la involuta de la superficie cáustica a tercer orden empleando el teorema de Malus-Dupin, que nos permite obtener una segunda aproximación del frente de onda a tercer orden. Seguidamente se diseña una pantalla nula de fase con un degradado de grises previamente calculado, que compense el retardo de fase generado por el doblete cementado. Adicionalmente se realiza el trazo exacto de rayos en tres dimensiones, suponiendo un frente de onda plano incidiendo en dobletes cementados con superficies esféricas, con un ángulo de oblicuidad respecto al eje óptico, para proporcionar las ecuaciones de las superficies cáusticas sagital y tangencial. Asimismo se obtiene de forma analítica la ecuación que describe la evolución del frente de onda refractado en función del ángulo de oblicuidad. Finalmente realizando una expansión en series de Taylor a segundo orden alrededor del rayo principal, se obtiene la aproximación del frente de onda en función del ángulo de oblicuidad y de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción.

Índice General

Índice General	xi
Índice de Figuras	xiii
Índice de tablas	xvii
1 Introducción	1
2 Trazo exacto de rayos en dobletes cementados en un plano meridional	5
2.1 Obtención del frente de onda exacto para dobletes cementados	6
2.2 Aproximación a segundo orden del frente de onda exacto	15
2.3 Aproximación del frente de onda exacto considerando la superficie cáustica	16
2.4 Comparación de los frentes de onda para evaluar dobletes cementados	22
2.5 Ejemplo: Corrección de la aberración cromática	24
3 Diseño de pantallas nulas de fase para un doblete cementado a incidencia normal	29
3.1 Preliminares	29
3.2 Implementación del interferómetro Twyman-Green y análisis del interferograma nulo .	31
3.3 Metodología	34
3.4 Configuración experimental	37
3.5 Resultados de la prueba interferométrica	40
4 Trazo exacto de rayos en dobletes cementados a incidencia oblicua	45
4.1 Obtención de la superficie cáustica a través de dobletes cementados	46
4.2 Obtención del frente de onda refractado a través de dobletes cementados	54
4.3 Aproximación a segundo orden del frente de onda refractado a incidencia oblicua . . .	56
4.4 Ecuación generalizada para describir la aproximación de las superficies cáusticas sagital y tangencial	61

5 Conclusiones y trabajo a futuro	65
Bibliografía	67
A Ecuación de dispersión de Sellmeier	71
A.1 Coeficientes de dispersión	71
B Coeficientes de la aproximación a segundo orden del frente de onda exacto a incidencia oblicua	73

Índice de Figuras

1.1	Fotografías de interferogramas obtenidos para un doblete.	1
1.2	Diagrama de Abbe [1], diferencia entre la aberración cromática longitudinal y transversal e intersecciones meridionales de las superficies cáusticas sagital y tangencial [2].	2
2.1	Frente de onda plano incidente en un doblete cementado y sus parámetros asociados a la primer superficie.	7
2.2	Proceso para describir el frente de onda propagado de los medios n_1 a n_2 en la segunda superficie del doblete cementado	11
2.3	Trazo exacto de rayos a través de un doblete cementado mostrando un zoom de las superficies cáusticas cerca del foco paraxial centrado en λ_D	12
2.4	Proceso para propagar el frente de onda de los medios n_2 a n_i en la tercer superficie del doblete cementado.	13
2.5	Propagación del frente de onda a lo largo del eje óptico para un doblete cementado centrado en λ_D	14
2.6	Propagación del frente de onda paralelo aproximado a segundo orden para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$	15
2.7	Aproximación de la superficie cáustica a tercer orden para un doblete cementado centrado en λ_D	16
2.8	Involuta de la superficie cáustica obtenida por el teorema de Malus-Dupin para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$	18
2.9	Propagación del frente de onda paralelo aproximado generado por la superficie cáustica de un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$	19
2.10	Propagación de los frentes de onda exacto y aproximados a lo largo del eje óptico para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$	20
2.11	Acercamiento en la región del punto focal, considerando distancias arbitrarias para un doblete cementado centrado en λ_D	21

2.12	Diferencias entre los frentes de onda exacto, aproximado a segundo orden y generado por la superficie cáustica para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, con una diferencia del frente de onda exacto $\Delta_D = 7.2651\mu\text{m}$	23
2.13	Frente de onda propagado a distancias arbitrarias a lo largo del eje óptico para un doblete cementado centrado en λ_D	25
2.14	<i>DFP</i> en función de la longitud de onda y acercamiento de los frentes de onda propagados cerca de la <i>DFP</i> para un doblete cementado centrado en λ_D	26
2.15	Aberración Esférica Longitudinal (AEL) y Aberración Esférica Transversal (AET) para un doblete cementado centrado en λ_D	26
2.16	Diferencias entre los frentes de onda exacto, aproximado a segundo orden y generado por la superficie cáustica para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.5876\mu\text{m}$, con una diferencia del frente de onda exacto $\Delta_D = 18.5728\mu\text{m}$	27
3.1	Diagrama del interferómetro para evaluar un doblete cementado, utilizando pantallas nulas de fase.	30
3.2	Interferogramas obtenidos por el doblete cementado AC127-019-A , variando la distancia $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$	31
3.3	Interferogramas de referencia generados por el doblete cementado AC127-019-A para diferentes distancias $\pm\mathcal{Z}_{\mathcal{L}} + \Delta\mathcal{Z}$	32
3.4	Fotografía capturada para obtener la posición de diseño $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$ entre el espejo parabólico y el doblete cementado AC127-019-A	32
3.5	Interferogramas de referencia para el diseño de las pantallas nulas de fase.	33
3.6	Imagen capturada del sustrato del SLM.	34
3.7	Diferencia de <i>LCO</i> entre el frente de onda exacto y el espejo parabólico cóncavo en la posición de diseño $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$	35
3.8	Pantallas nulas de fase con diferentes números de anillos para un doblete cementado centrado en $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$	36
3.9	Modulador espacial de luz por reflexión de la marca Hamamatsu LCoS X10468 Series e interferómetro de desplazamiento lateral Thorlabs®.	37
3.10	Fotografía del arreglo experimental para la prueba de pantallas nulas de fase para un doblete cementado.	38
3.11	Interferogramas asociados a la alineación del SLM y el espejo parabólico.	39
3.12	Interferogramas asociados al cambio de fase del SLM.	39
3.13	Interferogramas obtenidos para la prueba de pantallas nulas de fase para un doblete cementado AC127-019-A	41

3.14	Interferogramas binarizados para diferentes números de anillos asociados a las pantallas nulas de fase para un doblete cementado AC127-019-A	42
4.1	Proceso de refracción a través de un doblete cementado suponiendo un frente de onda plano incidiendo de forma oblicua y sus parámetros asociados a la primer y segunda superficie esférica.	47
4.2	Proceso de refracción a través de un doblete cementado suponiendo un frente de onda plano incidiendo de forma oblicua y sus parámetros asociados a la segunda y tercer superficie esférica.	50
4.3	Trazo exacto de rayos considerando un frente de onda plano incidiendo de forma oblicua respecto al eje óptico, propagándose a través de un doblete cementado centrado en λ_D . En particular, el diafragma de abertura está localizado en la tercer superficie de la lente.	52
4.4	Representación gráfica de las superficies cáusticas tangenciales y sagitales mostradas en un plano meridional de un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, suponiendo diferentes ángulos de oblicuidad $\theta = 10^\circ$ para un frente de onda plano inclinado, considerando el diafragma de abertura localizado en la tercer superficie de la lente.	54
4.5	Propagación del frente de onda exacto para diferentes distancias arbitrarias, a un ángulo de oblicuidad $\theta = 10^\circ$, donde el diafragma de abertura está localizado en la tercer superficie para un doblete cementado centrado en λ_D	55
4.6	Propagación del frente de onda refractado aproximado a segundo orden a un ángulo de oblicuidad $\theta = 10^\circ$, para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, cuyo diafragma de abertura está localizado en la tercer superficie de la lente.	59
4.7	Comparación entre el frente de onda exacto y aproximado a segundo orden para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, cerca de la región del punto focal para diferentes ángulos de oblicuidad.	60
4.8	Diferentes configuraciones para un doblete cementado centrado en λ_E , y comparación de las superficies cáusticas sagital y tangencial como del frente de onda exacto.	63
4.9	Comparación entre las superficies focales sagital y tangencial exactas para modelar la retina del ojo humano considerándolo como un doblete cementado.	64
A.1	Índice de refracción en función de la longitud de onda para los vidrios N-BAF10 y N-SF6HT	72
A.2	Índice de refracción en función de la longitud de onda para los vidrios N-BAF10 y N-SF5	72
B.1	Coeficiente \mathcal{A}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$	73
B.2	Coeficiente \mathcal{B}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$	74
B.3	Coeficiente \mathcal{C}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$	74

B.4	Coeficiente \mathcal{D}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$	75
B.5	Coeficiente \mathcal{E}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$	76
B.6	Coeficiente \mathcal{F}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$	77
B.7	Coeficiente \mathcal{G}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$	79
B.8	Coeficiente \mathcal{H}_0	80

Índice de tablas

2.1	Parámetros del doblete cementado AC127-019-A hecho con un vidrio óptico N-BAF10 y N-SF6HT centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$	14
2.2	Parámetros del doblete cementado hecho con un vidrio óptico N-BK7 y SF5 centrado en $\lambda_D = 0.5876\mu\text{m}$ [3].	24
3.1	Especificaciones del LCoS-SLM X10468 Series.	30
3.2	Parámetros del espejo parabólico cóncavo CM508-038-P01	31
3.3	Parámetros para el diámetro del máximo central de interferograma nulo de referencia, área y porcentaje compensado, y el coeficiente de aberración esférica b_1	40
3.4	Resultados para el máximo central del interferograma nulo, en función del número de anillos de las pantallas nulas de fase.	41
A.1	Coefficientes de dispersión para los vidrios N-BAF10 y N-SF6HT	71
A.2	Coefficientes de dispersión para los vidrios N-BK7 y SF5	72

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad se observa a nivel internacional una tendencia a desarrollar materiales con características ópticas diferentes a la de los materiales existentes, tales como lentes, espejos, prismas, etc, con propiedades de transmisión y/o reflexión diferentes a la de los sistemas ópticos convencionales. La refractometría de materiales isotrópicos es una de las ramas más antiguas de la óptica. En particular la determinación del índice de refracción, a partir de la detección de la deflexión que sufre la luz al interaccionar con la muestra bajo prueba [4]. Entre las técnicas para medir el índice de refracción lineal existen los deflectométricos y también los interferométricos [5]. En las técnicas deflectométricas permiten métodos de medida directa y la interferométrica métodos de medida indirecta [6].

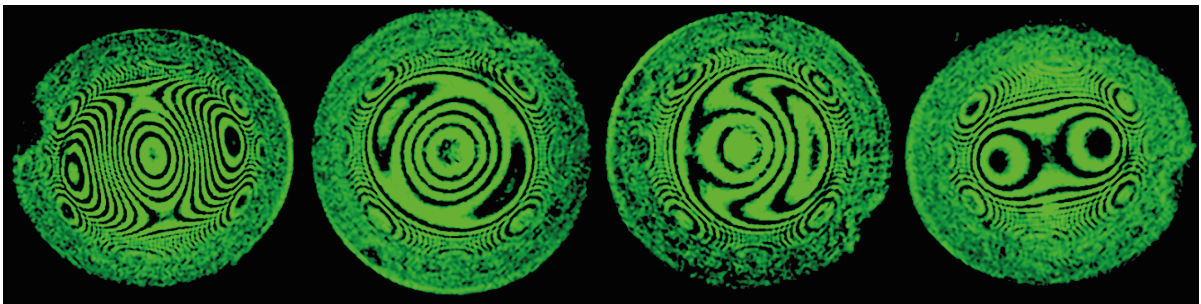
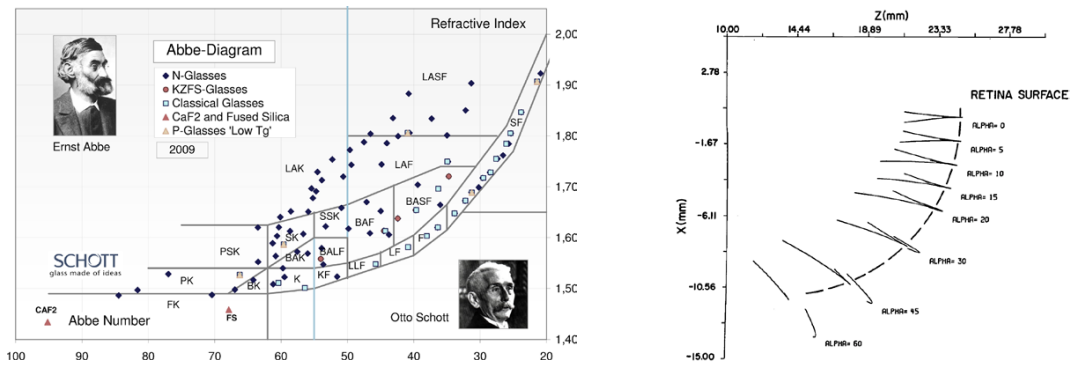


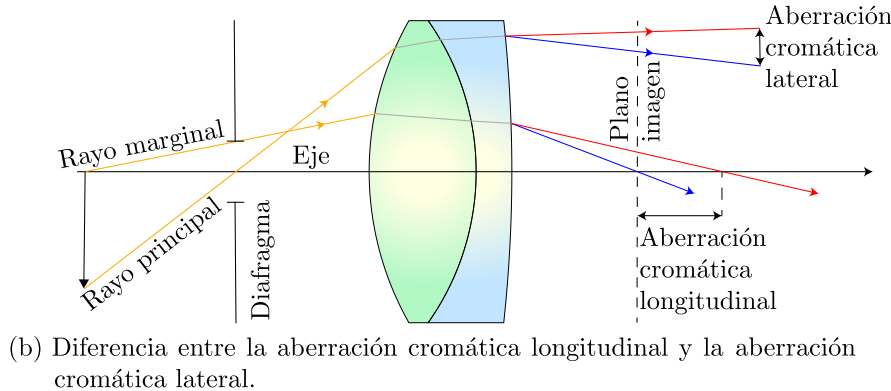
Fig. 1.1 Fotografías de interferogramas obtenidos para un doblete (Autoría propia).

La *superficie cáustica* se define como el lugar de los principales centros de curvatura de la familia de frentes de onda refractados [7, 8], y toma un papel importante en la formación de imágenes [9]. En particular para el caso de la refracción, muchos trabajos explican algunas propiedades cuando el sistema óptico se ilumina considerando una fuente puntual colocada en una posición arbitraria [10, 11], obteniendo propiedades de las lentes como la distancia focal efectiva (*DFE*), superficies principales, coeficientes de aberración esférica, etc. Por otro lado, los frentes de onda sólo pueden verse de manera indirecta en experimentos interferométricos tales como los de la Fig. 1.1. Ejemplo al respecto, Shealy y

colaboradores [12–14] desarrollaron procedimientos satisfactorios para obtener fórmulas analíticas para el frente de onda y las superficies cáusticas refractadas a través de lentes simples y sistemas ópticos, utilizando tanto la técnica analítica de iluminación como la función "K", ambas formulaciones tratan de la formación y propagación de superficies cáusticas y del frente de onda refractado, considerando un frente de onda plano incidiendo en las superficies ópticas. Recientemente se obtuvieron fórmulas analíticas para las *cáusticas sagital* y *tangencial* considerando un plano meridional, producido por una onda plana refractada a través de lentes biconvexas positivas [15, 16].



(a) Número de Abbe para medir la dispersión de un vidrio. (c) Intersecciones meridionales de las superficies cáusticas.



(b) Diferencia entre la aberración cromática longitudinal y la aberración cromática lateral.

Fig. 1.2 (a) Diagrama de Abbe del portafolio de vidrio de SCHOTT [1]. (b) Ilustración de la diferencia entre la aberración cromática longitudinal y transversal. (c) Intersecciones meridionales de las superficies cáusticas sagital y tangencial [2].

Los dobletes acromáticos cementados tienen la propiedad de reducir la aberración cromática producida por efectos de dispersión de los materiales utilizados en lentes simples [1], muestra de ello se presenta en la Fig. 1.2(a). A partir de la forma de la superficie cáustica, podemos representar las aberraciones cromáticas tales como la *aberración cromática longitudinal* y *lateral* [17], las cuales son comparables en magnitud con las aberraciones de Seidel y han sido objeto de investigación para la comunidad óptica,

como ejemplo se ilustra en la Fig. 1.2(b). En la literatura existen varios métodos para diseñar dobletes o tripletes que reducen considerablemente la cantidad de aberración cromática [18–20].

Cuando un haz de luz incide oblicuamente en una superficie refractante esférica, se introduce *astigmatismo* y la imagen de una fuente puntual formada por una pequeña apertura de lente, se convierte en un par de líneas focales: la primer línea focal se denomina comúnmente *foco sagital* y se encuentra en un plano transversal al plano de incidencia, y la segunda línea focal se llama *foco tangencial*, que se encuentra en un plano perpendicular al rayo principal, como se muestra en la Fig. 1.2(c) [2, 21]. Sus ubicaciones se calculan utilizando las ecuaciones de Coddington, derivados en varios libros de texto y artículos clásicos sobre óptica [21–23], considerando una superficie esférica inmersa en dos medios diferentes. Partiendo de las ecuaciones de las cáusticas exactas, es posible obtener aproximaciones de las cáusticas a tercer orden, donde las cúspides de las cáusticas estarán asociadas a los focos sagital y tangencial, permitiendo estimar la aberración de astigmatismo a tercer orden para dobletes cementados. En este trabajo consideraremos un trazo exacto de rayos en un plano meridional, para obtener la ecuación de la cáustica por el método de las envolventes, y su frente de onda refractado empleando el Principio de Huygens para dobletes cementados, suponiendo un frente de onda plano a incidencia normal, es decir los rayos propagados inciden sobre la superficie de manera paralela con respecto al eje óptico. Realizaremos una expansión en series de Taylor para obtener una aproximación a tercer orden de la superficie cáustica, con base en lo anterior diseñaremos pantallas nulas de fase con un degradado de grises para compensar el retardo de fase y emplearlo en una prueba interferométrica [24]. Adicionalmente, seguiremos un procedimiento similar explicado en [25], consideraremos un trazo exacto de rayos en tres dimensiones representando un frente de onda plano inclinado, con un ángulo de oblicuidad respecto al eje óptico, y obtendremos las superficies cáusticas sagital y tangencial. Asimismo, describiremos la propagación del frente de onda refractado a través del doblete cementado, en función del ángulo de oblicuidad y los parámetros de diseño. Por último, realizaremos una expansión en series de Taylor a segundo orden alrededor del rayo principal para obtener una aproximación del frente de onda refractado.

Capítulo 2

Trazo exacto de rayos en dobletes cementados en un plano meridional

En la óptica geométrica, comúnmente se puede proporcionar una expresión analítica para el trazo de rayos que esté directamente relacionada con la densidad de flujo de energía y la propagación de los frentes de onda a través de un sistema óptico [26, 27]. Es necesario conocer el trazo exacto de rayos para un estudio cuantitativo de la formación de imágenes, y normalmente se puede obtener mediante el uso de un software de diseño óptico, y los diagramas de manchas para la predicción del desempeño del doblete diseñado. Con esto, la forma de la superficie cáustica puede representar aberraciones cromáticas, las cuales en óptica clásica son conocidas como la *aberración cromática longitudinal* y la *aberración cromática lateral* [17].

En este capítulo estudiaremos la evolución de los frentes de onda propagados a través de dobletes cementados, considerando un frente de onda plano incidente que se propaga en paralelo al eje óptico, que incide en la primer superficie de la lente y finalmente se refracta fuera del doblete cementado, dicha propagación de la luz se puede explicar en términos de frentes de onda, según el *Principio de Huygens*. Así, proporcionaremos fórmulas analíticas para el frente de onda de fase cero, empleando dicho principio y, adicionalmente obtendremos fórmulas para representar la forma de los frentes de onda refractados propagados a distancias arbitrarias a lo largo del eje óptico, en función de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción. Por último, presentaremos un ejemplo mostrando el desarrollo gradual de los frentes de onda que se propagan a distancias arbitrarias, con el fin de comparar los efectos de dispersión producidos cerca de la distancia focal posterior (*DFP*) del doblete cementado.

2.1 Obtención del frente de onda exacto para dobletes cementados

En esta sección se define que el eje \mathbf{Z} es paralelo al eje óptico, suponiendo que el plano $\mathbf{Y-Z}$ es el plano de incidencia, que es una sección transversal de un doblete cementado con parámetros arbitrarios, y el origen del sistema \mathcal{O} , se coloca en el vértice de la primer superficie cónica, suponiendo simetría rotacional sobre el eje \mathbf{Z} . Dicho esto, se seguirá un procedimiento semejante de acuerdo a las Refs. [11, 28], supondremos que una onda plana se propaga a lo largo del eje óptico e incide en la primer superficie cónica, se desvía y se propaga hasta la segunda superficie cónica, consecuentemente el frente de onda es refractado y propagado hasta la tercera superficie, y finalmente se refracta fuera de la lente. La idea principal es encontrar la familia de ondas que están centradas en la primer superficie refractora, representada paramétricamente por

$$[\bar{z}_j, \bar{y}_j] = [c_j h^2 / [1 + \sqrt{1 - (1 + k_j) c_j^2 h^2}] + t_{j-1}, h] \text{ con } j = \{1, 2, 3\}, \quad (2.1)$$

donde $c_j = 1/\mathcal{R}_j$ es la curvatura paraxial, k_j son las constantes de conicidad, t_{j-1} son los espesores axiales y hemos definido a $t_0 = 0$ para la primer superficie refractora, considerado la convención de signos de acuerdo a la Ref. [17], y h representa la altura de un rayo incidente arbitrario o la altura de cada centro a lo largo del eje \mathbf{Y} . Es fácil ver que las onduletas son formadas por una familia de círculos centrados a lo largo de la primer superficie refractora, como se muestra en la Fig. 2.1(a) y están descritas por

$$(Z - \bar{z}_1)^2 + (Y - \bar{y}_1)^2 = [(n_o/n_1)(\bar{z}_1^H - \bar{z}_1)]^2, \quad h \in [-H, H], \quad (2.2)$$

donde H es el semidiámetro de la púpila de entrada, n_1 el índice de refracción de la primer lente para una longitud de onda predefinida, inmersa en un medio con índice de refracción n_o . Entonces, \bar{z}_1^H representa la distancia a lo largo del eje óptico, desde \mathcal{O} a \bar{z}_1 evaluado en H utilizando la Ec. (2.1), siendo un valor constante, suponiendo en esta configuración que $c_1 > 0$ y $n_1 > n_o$.

Sustituyendo $h = Y = 0$ en la Ec. (2.2), se obtiene $\bar{z}_1 = 0$, y se simplifica a $n_1 Z = n_o \bar{z}_1^H$ como se aprecia en la Fig. 2.1(a). Para obtener la envolvente de las onduletas representadas por la Ec. (2.2), se deriva la Ec. (2.2) con respecto a h , y resolviendo para Z y Y utilizando la Ec. (2.2) y su respectiva primer derivada, produce una ecuación cuadrática obteniendo dos soluciones para las envolventes, de tal manera que el signo con subíndice (+) proporciona la ecuación de un frente de onda propagado en la dirección hacia atrás y es ignorado, y para el signo (-) produce un frente de onda propagado en la dirección hacia adelante como se muestra en la Fig. 2.1(b). Ambos frentes de onda son tangentes a cada una de las onduletas centradas a lo largo de la primer superficie refractora del doblete cementado. Se considerara exclusivamente el frente de onda propagándose hacia adelante, renombrando $[Z_{1-}, Y_{1-}]$ como $[Z_{1in}, Y_{1in}]$, se obtiene

$$[Z_{1in}, Y_{1in}] = \left[\bar{z}_1^H + \frac{(n_o^2 - n_1^2)(\bar{z}_1^H - \bar{z}_1)\sqrt{n_1^2 + (n_1^2 - n_o^2)\bar{z}_{1h}^2}}{n_1^2 \left[n_o + \sqrt{n_1^2 + (n_1^2 - n_o^2)\bar{z}_{1h}^2} \right]}, h + \frac{n_o(n_o^2 - n_1^2)(\bar{z}_1^H - \bar{z}_1)\bar{z}_{1h}}{n_1^2 \left[n_o + \sqrt{n_1^2 + (n_1^2 - n_o^2)\bar{z}_{1h}^2} \right]} \right], \quad (2.3)$$

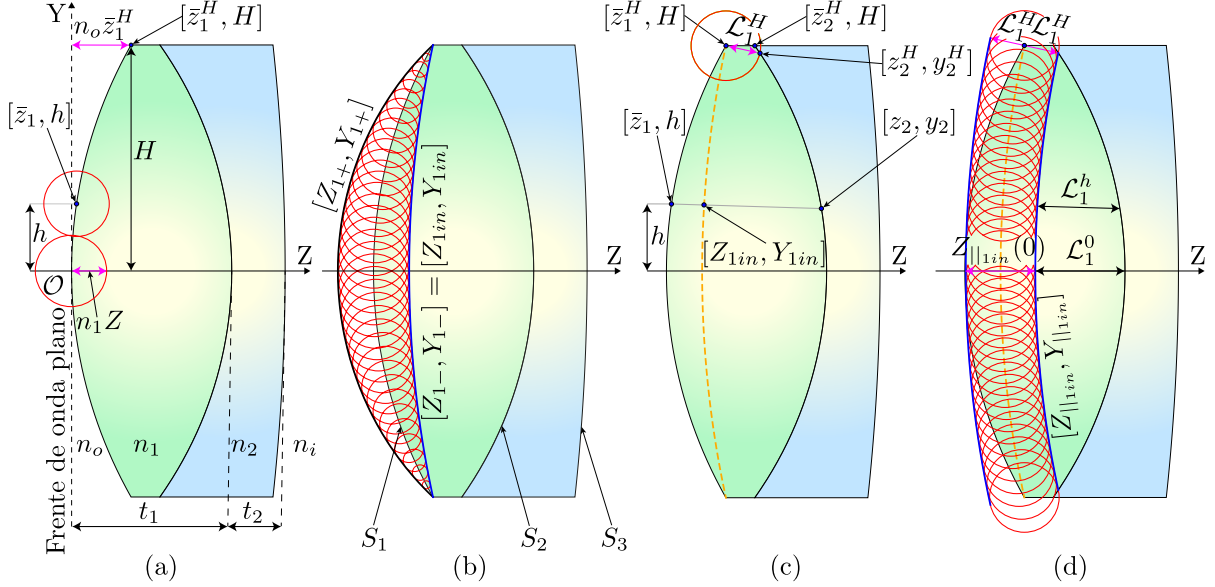


Fig. 2.1 (a) Frente de onda plano incidente en un doblete cementado y sus parámetros asociados. (b) Onduletas centradas a lo largo de la primer superficie y sus envolventes asociadas. (c) Proceso para propagar el primer frente de onda hacia adelante a la distancia \mathcal{L}_1^H . (d) Onduletas centradas a lo largo de $[Z_{1in}, Y_{1in}]$ y sus envolventes propagadas a la distancia \mathcal{L}_1^H .

donde \bar{z}_{1h} es la primer derivada con respecto de h de la Ec. (2.1), considerando $j = 1$. Es fácil observar que la Ec. (2.3), representa paraméricamente el frente de onda refractado dentro de la primer lente en función de h , tal que consideramos una nueva familia de círculos centrados a lo largo del frente de onda $[Z_{1in}, Y_{1in}]$, y propagándolo dentro de la lente hasta que la onduleta marginal toca la segunda superficie de la lente, a lo largo del rayo refractado evaluado en H en lugar de la onduleta marginal tocando el borde de la lente en $[\bar{z}_2^H, H]$, como se muestra en la Fig. 2.1(c). En otras palabras, se obtiene la longitud \mathcal{L}_1^H desde el punto $[\bar{z}_1^H, H]$ a \mathbf{P}_2^H . Para obtener dichas coordenadas para el punto \mathbf{P}_2^H , se considera un haz de rayos que se propagan paralelos al eje óptico incidiendo en $[\bar{z}_1, \bar{y}_1]$, siendo desviados y propagados hasta la segunda superficie refractora $[\bar{z}_2, \bar{y}_2]$, representada como función de y , está descrita por la Ec. (2.1), considerando $j = 2$.

Considerando la ley de Snell, la ecuación para los rayos refractados en la primer superficie de la lente en función de h está dada por

$$y = h[1 - \sigma_1(z - \bar{z}_1)], \quad \text{para} \quad \sigma_1 = \frac{c_1(n_1^2 - n_o^2)}{n_1^2 \sqrt{1 - (1 + k_1)c_1^2 h^2 + n_o \sqrt{n_1^2 - (n_o^2 + k_1 n_1^2)c_1^2 h^2}}}. \quad (2.4)$$

Entonces, resolviendo para z y y empleando las Ecs. (2.1) y (2.4), se obtienen dos soluciones para $[z_{2\pm}, y_{2\pm}]$, y sin pérdida de generalidad renombramos la coordenada $[z_{2-}, y_{2-}]$ simplemente como $[z_2, y_2]$, que proporciona una solución exacta para los rayos refractados en la segunda superficie, como se aprecia en la Fig. 2.1(c), cuyas coordenadas corresponden a

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1 + c_2 [t_1(1 + k_2) + h^2\sigma_1(1 + \sigma_1\bar{z}_1)] - \sqrt{\Gamma_1}}{c_2(1 + k_2 + h^2\sigma_1^2)}, \\ y_2 &= \frac{h [c_2(1 + k_2) (1 - \sigma_1[t_1 - \bar{z}_1]) - \sigma_1 (1 - \sqrt{\Gamma_1})]}{c_2(1 + k_2 + h^2\sigma_1^2)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde está definido $\Gamma_1 = 1 - c_2h^2 (1 - \sigma_1 [t_1 - \bar{z}_1]) (c_2 (1 + k_2) (1 - \sigma_1 [t_1 - \bar{z}_1]) - 2\sigma_1)$.

Reemplazando $h \rightarrow H$ en la Ec. (2.5), se calcula la distancia a lo largo del rayo refractado marginal simplemente como

$$\mathcal{L}_1^H = \sqrt{(y_2^H - H)^2 + (z_2^H - \bar{z}_1^H)^2}, \quad (2.6)$$

donde \bar{z}_1^H está dado por la Ec. (2.1) evaluado en H , y se puede notar que \mathcal{L}_1^H es un valor constante y depende de todos los parámetros asociados a la primer lente. Por otro lado, el frente de onda refractado puede ser propagado considerando el concepto de curvas paralelas, suponiendo el hecho que la energía es propagada en una dirección normal a los frentes de onda, todos los frentes de onda subsecuentes son paralelos en el sentido geométrico de acuerdo al Principio de Huygens [29]. Sea \mathcal{W}_0 un punto en un frente de onda cuyo perfil está dado paraméricamente por $\mathcal{W}_0 = [U(h), V(h)]$, entonces \mathcal{W} estará en un frente de onda paralelo a una distancia arbitraria \mathcal{L} , de acuerdo con la siguiente expresión

$$\mathcal{W} = \left[U \pm \frac{(\partial V/\partial h) \mathcal{L}}{\sqrt{(\partial U/\partial h)^2 + (\partial V/\partial h)^2}}, V \mp \frac{(\partial U/\partial h) \mathcal{L}}{\sqrt{(\partial U/\partial h)^2 + (\partial V/\partial h)^2}} \right]. \quad (2.7)$$

De la Ec. (2.7) se tiene $\mathcal{W}_{(+,-)}$ proporciona el frente de onda propagado en dirección hacia adelante, entonces de sustituir las Ecs. (2.3) y (2.6) en la Ec. (2.7) para $U \rightarrow Z_{1in}$, $V \rightarrow Y_{1in}$ y $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1^H$, se obtiene

$$Z_{\parallel 1in} = Z_{1in} + \frac{[n_1^2 + n_o \sqrt{n_1^2 + (n_1^2 - n_o^2) \bar{z}_{1h}^2}] \mathcal{L}_1^H}{[n_o + \sqrt{n_1^2 + (n_1^2 - n_o^2) \bar{z}_{1h}^2}] n_1}, \quad Y_{\parallel 1in} = Y_{1in} - \frac{[(n_1^2 - n_o^2) \bar{z}_{1h}^2] \mathcal{L}_1^H}{[n_o + \sqrt{n_1^2 + (n_1^2 - n_o^2) \bar{z}_{1h}^2}] n_1}. \quad (2.8)$$

Entonces, la Ec. (2.8) proporciona el frente de onda que será refractado a través de la segunda lente. Sustituyendo $h \rightarrow 0$ en la Ec. (2.8), se obtiene la distancia entre el vértice \mathcal{O} de la primer lente y el frente de onda trasladado a lo largo del eje óptico, así tenemos que: $Z_{\parallel 1in}(0) = (n_o/n_1) \bar{z}_1^H + \mathcal{L}_1^H$, $Y_{\parallel 1in}(0) = 0$. Para obtener la distancia remanente para refractar el frente de onda trasladado a la

segunda superficie de la lente, substraemos la distancia $Z_{||1in}(0)$ desde el espesor axial de la lente t_1 , como se muestra en la Fig. 2.1(d), y se reduce a $\mathcal{L}_1^0 = t_1 - Z_{||1in}(0) = t_1 - (n_o/n_1) \bar{z}_1^H - \mathcal{L}_1^H$. Alternativamente, proporcionamos la distancia entre la segunda superficie del doblete cementado y el frente de onda $[Z_{||1in}, Y_{||1in}]$ para alturas arbitrarias h

$$\mathcal{L}_1 = t_1 - (n_o/n_1) \bar{z}_1 - \mathcal{L}_1^h, \quad (2.9)$$

donde \bar{z}_1 y \mathcal{L}_1^h , se definieron anteriormente sutituyendo $H \rightarrow h$. Subsecuentemente para obtener el frente de onda refractado dentro de la segunda lente, consideramos que la longitud de camino óptico, $LCO = n_1 \mathcal{L}_1 + n_2 \mathcal{L}_2$ es nula. Así, se tiene que $\mathcal{L}_2 = -(n_1/n_2) \mathcal{L}_1$, representado en la Fig. 2.2(a), entonces la nueva familia de onduletas para el frente de onda refractado en la segunda superficie refractora es representada por

$$(Z - z_2)^2 + (Y - y_2)^2 = [(n_1/n_2) \mathcal{L}_2]^2, \quad (2.10)$$

donde las coordenadas $[z_2, y_2]$ y \mathcal{L}_1 están dadas por las Ecs. (2.5) y (2.9), respectivamente. Siguiendo los pasos explicados anteriormente, se obtienen las envolventes de las onduletas representadas por la Ec. (2.10), derivando la Ec. (2.10) respecto al parámetro h , y resolviendo para Z y Y de la Ec. (2.10) y su derivada, se obtienen dos soluciones para las envolventes de la familia de onduletas propagándose en dirección hacia atrás ($-$) y hacia adelante ($+$), como se muestra en la Fig. 2.2(b). Sin pérdida de generalidad consideramos exclusivamente un frente de onda propagado en dirección hacia adelante, por simplicidad renombramos $[Z_{2+}, Y_{2+}]$ como $[Z_{2in}, Y_{2in}]$ presentados en las Figs. 2.2(b) y 2.2(c), y simplificando términos se obtiene

$$\begin{aligned} Z_{2in} &= z_2 - \frac{n_1 \mathcal{L}_1 [n_1 (\partial \mathcal{L}_1 / \partial h) (\partial z_2 / \partial h) - (\partial y_2 / \partial h) \Delta_1]}{n_2^2 [(\partial z_2 / \partial h)^2 + (\partial y_2 / \partial h)^2]}, \\ Y_{2in} &= y_2 - \frac{n_1 \mathcal{L}_1 [n_1 (\partial \mathcal{L}_1 / \partial h) (\partial y_2 / \partial h) + (\partial z_2 / \partial h) \Delta_1]}{n_2^2 [(\partial z_2 / \partial h)^2 + (\partial y_2 / \partial h)^2]}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde se ha definido $\Delta_1^2 = n_2^2 [(\partial z_2 / \partial h)^2 + (\partial y_2 / \partial h)^2] - n_1^2 (\partial \mathcal{L}_1 / \partial h)^2$. Cabe mencionar que la Ec. (2.11) proporciona la posición de puntos que paraméricamente representan el frente de onda refractado dentro de la segunda lente, siendo parte del doblete cementado como función de h . Subsecuentemente, consideramos una nueva familia de onduletas centradas a lo largo del frente de onda refractado $[Z_{2in}, Y_{2in}]$, y propagándolo dentro de la segunda lente, hasta que la onduleta marginal alcanza la tercer superficie del doblete cementado, extendiendo la onduleta a lo largo del rayo refractado evaluado en H , en lugar de la onduleta que coincide con el borde de la tercer superficie refractora en $[\bar{z}_3^H, H]$, como se aprecia en la Fig. 2.2(c). Así, para obtener la distancia \mathcal{L}_2^H desde el punto $[Z_{2in}^H, Y_{2in}^H]$ al punto \mathbf{P}_3^H , cuyas coordenadas están dadas por el rayo refractado marginal incidiendo en la tercer superficie

del doblete. La tercer superficie refractora como función de y está representada por la Ec. (2.1), considerando $j = 3$. Entonces la ecuación del rayo refractado desde $[z_2, y_2]$ a $[z_3, y_3]$ de acuerdo a la Ref. [8], se tiene

$$y = y_2 - \tan[\delta_2](z - z_2). \quad (2.12)$$

donde se ha definido

$$\delta_2 = \arcsen \left\{ \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \sen \left[\sigma_1 h - \arctan \left(\frac{c_2 y_2}{\sqrt{1 - (1 + k_2)c_2^2 y_2^2}} \right) \right] \right\} + \arctan \left(\frac{c_2 y_2}{\sqrt{1 - (1 + k_2)c_2^2 y_2^2}} \right).$$

Resolviendo para z y y de acuerdo a las Ecs. (2.12) y (2.1), se obtienen dos soluciones para $[z_{3\pm}, y_{3\pm}]$, y sin pérdida de generalidad renombramos $[z_{3-}, y_{3-}]$ como $[z_3, y_3]$, de acuerdo a

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1 + c_3 [(1 + k_3)(t_1 + t_2) + (y_2 + z_2 \tan \delta_2)] - \sqrt{\Gamma_2}}{c_3(1 + k_3 + \tan^2 \delta_2)}, \\ y_3 &= \frac{c_3(1 + k_3)[y_2 - (t_1 + t_2 - z_2) \tan \delta_2] - \tan \delta_2(1 - \sqrt{\Gamma_2})}{c_3(1 + k_3 + \tan^2 \delta_2)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde está definido $\Gamma_2 = 1 + c_3[y_2 - (t_1 + t_2 - z_2) \tan[\delta_2]]\{2 \tan[\delta_2] - c_3(1 + k_3)[y_2 - (t_1 + t_2 - z_2) \tan[\delta_2]]\}$, como se muestra en la Fig. 2.2(c). Además, al imponer $\Gamma_2 = 0$ se obtienen las alturas críticas generando la condición de reflexión total interna (RTI). Asimismo, a partir de la ley de Snell, se obtiene la ecuación del rayo refractado fuera del doblete cementado, y está descrito de acuerdo con la siguiente ecuación

$$y = y_3 - \tan[\delta_3](z - z_3) \quad (2.14)$$

donde se ha definido

$$\delta_3 = \arcsen \left\{ \left(\frac{n_2}{n_i} \right) \sen \left[\delta_2 - \arctan \left(\frac{c_3 y_3}{\sqrt{1 - (1 + k_3)c_3^2 y_3^2}} \right) \right] \right\} + \arctan \left(\frac{c_3 y_3}{\sqrt{1 - (1 + k_3)c_3^2 y_3^2}} \right).$$

La Ec. (2.14) es la familia paramétrica de los rayos refractados en función de h , como se muestra en la Fig. 2.3. Después se deriva respecto al parámetro h de la Ec. (2.14), y resolviendo para z y y de la Ec. (2.14) y su respectiva derivada, se obtiene

$$[z_c, y_c] = \left[z_3 + \mathcal{M}_c \cos[\delta_3], y_3 - \mathcal{M}_c \sen[\delta_3] \right], \quad (2.15)$$

donde está definido $\mathcal{M}_c = \left(\left[\frac{\partial y_3}{\partial h} \right] \cos[\delta_3] + \left[\frac{\partial z_3}{\partial h} \right] \sen[\delta_3] \right) / \left[\frac{\partial \delta_3}{\partial h} \right]$.

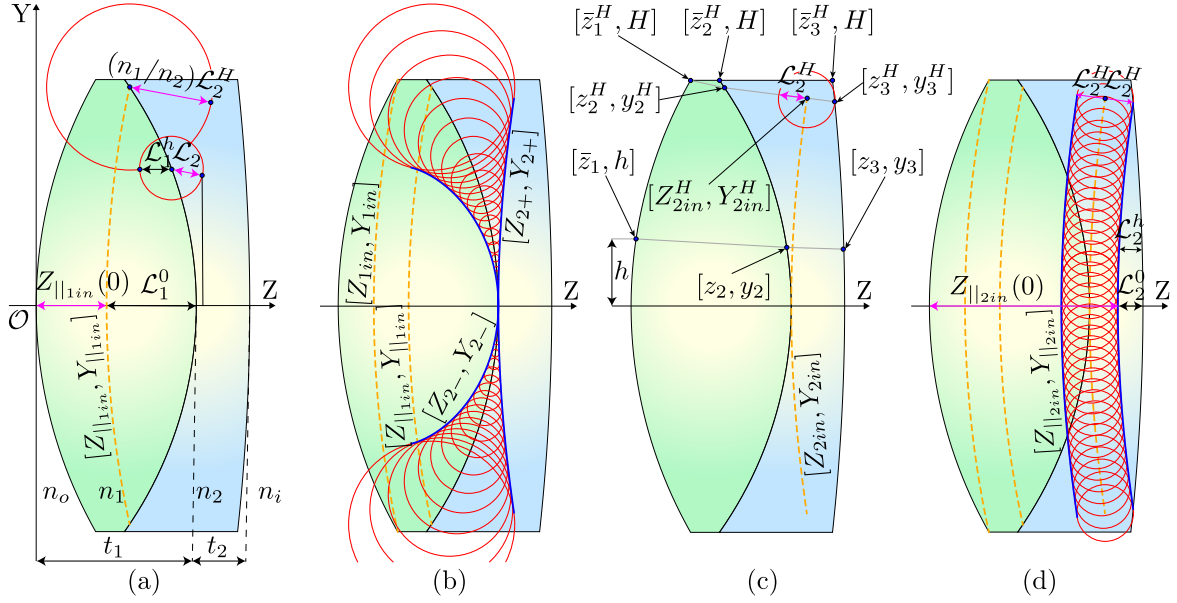


Fig. 2.2 (a) Proceso para describir el frente de onda propagado de los medios n_1 a n_2 en la segunda superficie del doblete cementado. (b) Onduletas centradas a lo largo de la segunda superficie y sus envolventes asociados a los frentes de onda. (c) Proceso para propagar el segundo frente de onda en dirección hacia adelante a una distancia \mathcal{L}_2^H . (d) Onduletas centradas a lo largo de $[Z_{2in}, Y_{2in}]$ propagado a la distancia \mathcal{L}_2^H .

Además se ha realizado el cambio $z \rightarrow z_c$ y $y \rightarrow y_c$, y el subíndice c significa cáustica para un doblete cementado, considerando rayos propagándose desde el espacio objeto al espacio imagen. Cabe mencionar que la Ec. (2.15), proporciona las coordenadas de la posición de puntos que paraméricamente representan la cáustica producida por dobletes cementados en un plano meridional como función de h , cuando la fuente puntual está localizada en infinito, es decir, un frente de onda plano como se observa en la Fig. 2.3. Por lo anterior, sustituyendo $h \rightarrow H$ en la Ec. (2.13), se calcula la distancia a lo largo del rayo refractado marginal dado por

$$\mathcal{L}_2^H = \sqrt{(y_3^H - Y_{2in}^H)^2 + (z_3^H - Z_{2in}^H)^2}, \quad (2.16)$$

donde $[z_2^H, y_2^H]$ y $[z_3^H, y_3^H]$ están evaluadas en H , y definidas por las Ecs. (2.11) y (2.13), respectivamente. Además, se puede notar en la Fig. 2.2(d), que \mathcal{L}_2^H es también un valor constante, que depende de todos los parámetros involucrados en el proceso de refracción. El frente de onda dado por la Ec. (2.11), se propaga empleando el concepto de curvas paralelas, y sustituyendo las Ecs. (2.11) y (2.16) en la Ec. (2.7), considerando $U \rightarrow Z_{2in}$, $V \rightarrow Y_{2in}$ y $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_2^H$, se obtiene

$$[Z_{||2in}, Y_{||2in}] = \left[Z_{2in} + \frac{(\partial Y_{2in}/\partial h) \mathcal{L}_2^H}{\sqrt{(\partial Z_{2in}/\partial h)^2 + (\partial Y_{2in}/\partial h)^2}}, Y_{2in} - \frac{(\partial Z_{2in}/\partial h) \mathcal{L}_2^H}{\sqrt{(\partial Z_{2in}/\partial h)^2 + (\partial Y_{2in}/\partial h)^2}} \right]. \quad (2.17)$$

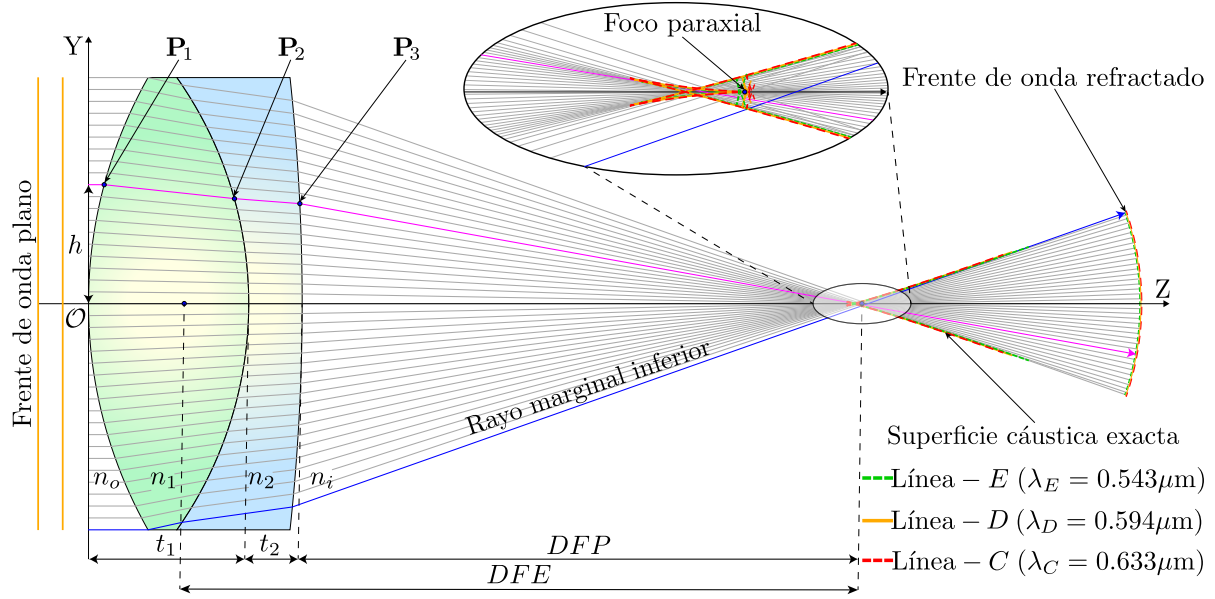


Fig. 2.3 Trazo exacto de rayos a través de un doblete cementado mostrando un zoom de las superficies cáusticas cerca del foco paraxial centrado en λ_D .

Finalmente, se observa que la Ec. (2.17) proporciona el frente de onda que será refractado fuera del doblete cementado. De esta forma, sustituyendo $h \rightarrow 0$ en la Ec. (2.17), proporcionamos la distancia cubierta entre el vértice \mathcal{O} de la segunda lente y el frente de onda trasladado a lo largo del eje óptico, obteniendo $Z_{\parallel 2in}(0) = t_1 + \mathcal{L}_2^H$, $Y_{\parallel 2in}(0) = 0$. Asimismo, se obtiene la distancia remanente para refractar el frente de onda trasladado fuera de la lente, substrayendo la distancia $Z_{\parallel 2in}(0)$, desde el espesor axial de la lente t_1 y t_2 , como se aprecia en la Fig. 2.2(d), se llega a $\mathcal{L}_2^0 = (t_1 + t_2) - Z_{\parallel 2in}(0) = t_2 - \mathcal{L}_2^H$. Es importante mencionar que la distancia entre la tercer superficie de la lente y el frente de onda $[Z_{\parallel 2in}, Y_{\parallel 2in}]$ para alturas arbitrarias h , puede ser escrita simplemente como

$$\mathcal{L}_2 = t_2 - \mathcal{L}_2^h = t_2 - \sqrt{(y_3 - Y_{2in})^2 + (z_3 - Z_{2in})^2}, \quad (2.18)$$

donde las coordenadas $[Z_{2in}, Y_{2in}]$ y $[z_3, y_3]$ como función de h , fueron definidas anteriormente en las Ecs. (2.11) y (2.13), respectivamente. Entonces, se obtiene el frente de onda refractado fuera de la lente considerando que la longitud de camino óptico, $LCO = n_2 \mathcal{L}_2 + n_i \mathcal{L}_i$ es nula; de aquí se tiene que $\mathcal{L}_i = -(n_2/n_i) \mathcal{L}_2$, tal que las onduletas para el frente de onda refractado fuera de la lente son representados por

$$(Z - z_3)^2 + (Y - y_3)^2 = [(n_2/n_i) \mathcal{L}_2]^2, \quad (2.19)$$

donde n_i es el índice de refracción en el espacio imagen representado en la Fig. 2.4(a). Siguiendo los pasos anteriormente descritos, se obtiene la envolvente para la familia de círculos centrados a lo largo de la tercer superficie, proporcionando el frente de onda, comúnmente llamado el frente de onda de fase

ceros, el cual es el primer frente de onda refractado fuera del sistema óptico, y en nuestro caso el doblete cementado. Entonces, derivando la Ec. (2.19) con respecto a h , y resolviendo el par de ecuaciones para Z y Y , considerando las Ecs. (2.19) y su respectiva derivada, se obtienen dos envolventes, omitiendo las ondulitas propagándose en dirección hacia atrás $[Z_{3-}, Y_{3-}]$ y escogiendo el frente de onda propagándose en dirección hacia adelante $[Z_{3+}, Y_{3+}] = [Z_0, Y_0]$, se obtiene

$$Z_0 = z_3 - \frac{n_2 \mathcal{L}_2 [n_2 (\partial \mathcal{L}_2 / \partial h) (\partial z_3 / \partial h) - (\partial y_3 / \partial h) \Delta_2]}{n_i^2 [(\partial z_3 / \partial h)^2 + (\partial y_3 / \partial h)^2]},$$

$$Y_0 = y_3 - \frac{n_2 \mathcal{L}_2 [n_2 (\partial \mathcal{L}_2 / \partial h) (\partial y_3 / \partial h) + (\partial z_3 / \partial h) \Delta_2]}{n_i^2 [(\partial z_3 / \partial h)^2 + (\partial y_3 / \partial h)^2]},$$
(2.20)

donde se ha definido $\Delta_2^2 = n_i^2 [(\partial z_3 / \partial h)^2 + (\partial y_3 / \partial h)^2] - n_2^2 (\partial \mathcal{L}_2 / \partial h)^2$.

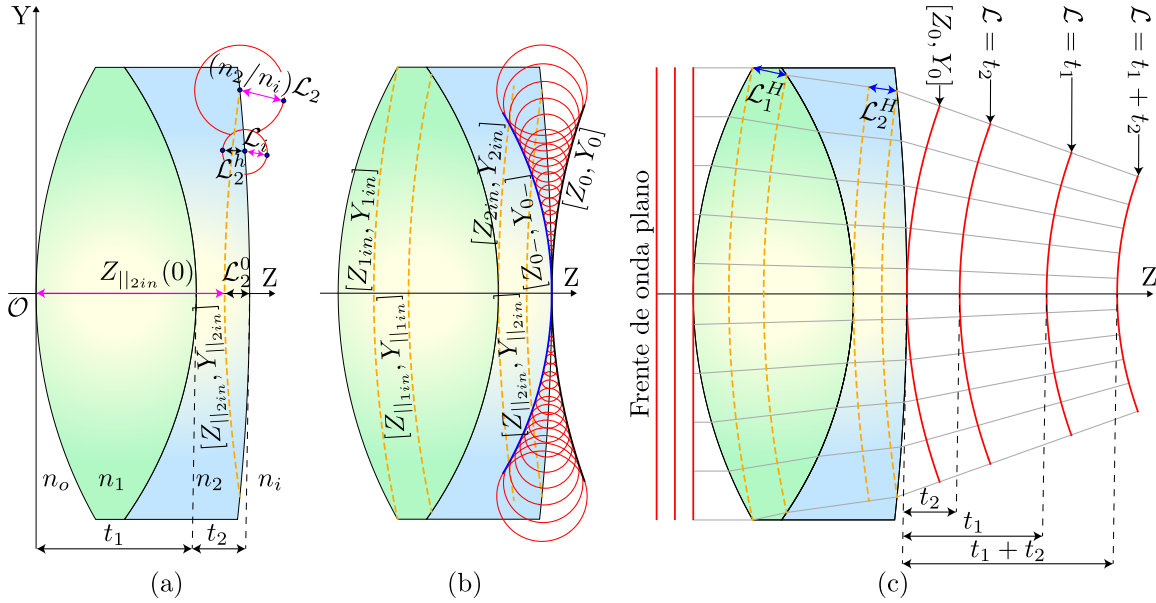


Fig. 2.4 (a) Proceso para propagar el frente de onda de los medios n_2 a n_i en la tercer superficie del doblete cementado. (b) Ondulitas centradas a lo largo de la tercer superficie y sus envolventes asociados a los frentes de onda, mostrando el frente de onda de fase cero (*archetype*). (c) Proceso para propagar el frente de onda de fase cero a distancias arbitrarias \mathcal{L} a lo largo del eje óptico .

La Ec. (2.20) representa paraméricamente el frente de onda de fase cero, es decir, el primer frente de onda que deja el sistema óptico. Así la Ec. (2.20) puede ser comparada contra la esfera de referencia, para obtener la cantidad de aberraciones introducidas por el doblete cementado en función del parámetro h . Una representación gráfica del frente de onda de fase cero llamado *archetype wavefront* en inglés, se muestra en la Fig. 2.4(b). Por tanto, sustituyendo la Ec. (2.20) en la Ec. (2.7), se obtiene el frente de onda exacto propagado a distancias arbitrarias \mathcal{L} a lo largo del eje óptico, medido desde el vértice de la

tercer superficie refractora representado en la Fig. 2.4(c), de esta forma se expresa simplemente como

$$\left[Z_{\parallel 0}, Y_{\parallel 0} \right] = \left[Z_0 + \frac{(\partial Y_0 / \partial h) \mathcal{L}}{\sqrt{(\partial Z_0 / \partial h)^2 + (\partial Y_0 / \partial h)^2}}, Y_0 - \frac{(\partial Z_0 / \partial h) \mathcal{L}}{\sqrt{(\partial Z_0 / \partial h)^2 + (\partial Y_0 / \partial h)^2}} \right]. \quad (2.21)$$

Se proporciona una formulación exacta para propagar los frentes de onda fuera del doblete cementado a distancias arbitrarias medidas a lo largo del eje óptico, donde el frente de onda pasa de ser cóncavo antes del foco y convexo después de dicho punto, como se muestra en la Fig. 2.5. Los cálculos presentados, fueron realizados para longitudes de onda de fuentes que se cuentan en el Laboratorio de Pruebas Ópticas (ICAT-UNAM). Asimismo, se consideró un doblete cementado **AC127-019-A** de Thorlabs® para el trazo de rayos, cuyos demás parámetros de diseño se muestran en la Tabla 2.1.

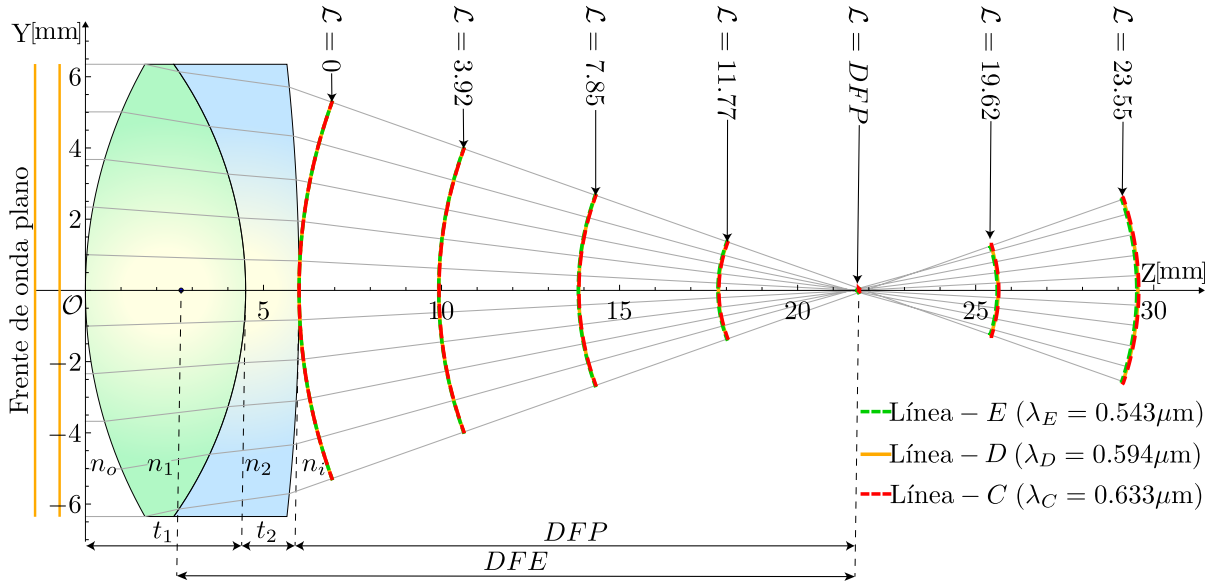


Fig. 2.5 Propagación del frente de onda a lo largo del eje óptico para diferentes distancias \mathcal{L} [mm] para un doblete cementado centrado en λ_D .

Líneas espectrales para el doblete cementado AC127-019-A							
		$\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$	$\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$	$\lambda_C = 0.633\mu\text{m}$			
		N-BAF10			N-SF6HT		
$n_o = n_i$	n_1^E	n_1^D	n_1^C	n_2^E	n_2^D	n_2^C	$DFPD$ [mm]
1.0	1.6737	1.6696	1.6671	1.8133	1.8042	1.7988	15.7
D [mm]	$k_1 = k_2 = k_3$	\mathcal{R}_1 [mm]	\mathcal{R}_2 [mm]	\mathcal{R}_3 [mm]	t_1 [mm]	t_2 [mm]	$F/\#$
12.7	0	12.9	-11.0	-59.3	4.5	1.5	1.7

Tabla 2.1 Parámetros del doblete cementado **AC127-019-A** hecho con un vidrio óptico **N-BAF10** y **N-SF6HT** centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$.

2.2 Aproximación a segundo orden del frente de onda exacto

En óptica comúnmente se limita a trabajar en la región paraxial, considerando alturas pequeñas, es decir muy cercanas al eje óptico de la lente bajo prueba. Entonces restringiendo las ecuaciones del frente de onda propagado de la Ec. (2.21) a la zona cercana de la región paraxial, se realiza una expansión en series de Taylor a segundo orden [30]. Suponiendo $c_1h < 1$, $c_2h < 1$ y $c_3h < 1$, se obtiene una aproximación alterna al frente de onda exacto, simplificando se obtiene

$$\left[\tilde{Z}_{||0}, \tilde{Y}_{||0} \right] \approx \left[\mathcal{L} + (t_1 + t_2) + \frac{h^2}{2DFE} \left(1 - \frac{\mathcal{L}}{DFP} \right) \left(\frac{DFP}{DFE} \right), h \left(1 - \frac{\mathcal{L}}{DFP} \right) \left(\frac{DFP}{DFE} \right) \right], \quad (2.22)$$

donde la tilde de $\left[\tilde{Z}_{||0}, \tilde{Y}_{||0} \right]$ significa *Frente de Onda Paralelo Aproximado* a segundo orden, y que es independiente de las constantes de conicidad k_j . La *Distancia Focal Posterior* $DFP = F - (t_1 + t_2)$ es la distancia desde la tercer superficie refractora a la cúspide de la superficie cáustica, y la *Distancia Focal Efectiva* $DFE = [DFP - PPP]$ es la distancia desde el punto focal F al *Punto Principal*; PS es el *Plano Secundario*, el *Plano Principal Primario* PPP , define la *Distancia Focal Frontal* DFF . En la Ref. [8] se encuentran definidas PPP y PS explícitamente. Por lo anterior, las distancias DFP y DFE están relacionadas como

$$DFP = n_i [1 - (d_1 + d_2)P_1 - d_2(1 - P_1d_1)P_2] DFE, \quad DFE = DFE_o/n_o = DFE_i/n_i, \quad \text{donde} \\ DFE = 1/[P_3(1 - P_1d_1) + (P_1 + P_2 - P_1P_2d_1)(1 - P_3d_2)], \quad (2.23)$$

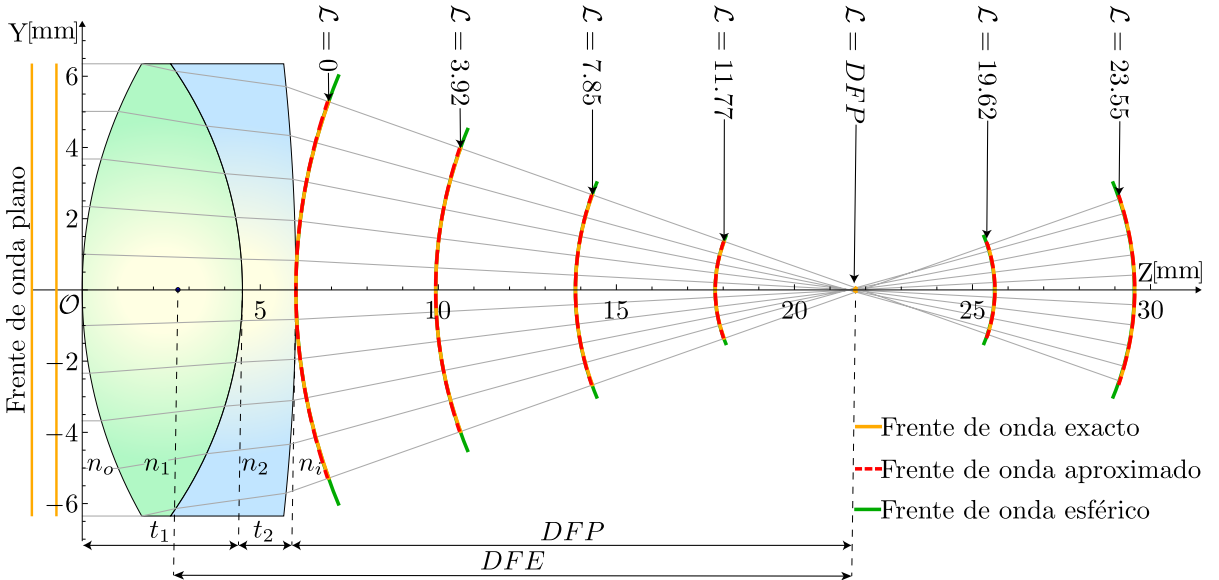


Fig. 2.6 Propagación del frente de onda paralelo aproximado a segundo orden a lo largo del eje óptico para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594 \mu\text{m}$.

donde $P_1 = c_1(n_1 - n_o)$, $P_2 = c_2(n_2 - n_1)$, $P_3 = c_3(n_i - n_2)$ son las potencias correspondientes para cada superficie del doblete cementado, y los valores reducidos de espesor definidos como $d_1 = t_1/n_1$ y $d_2 = t_2/n_2$. La Ec. (2.22) representa un frente de onda parabólico a segundo orden, cuyas coordenadas del vértice y foco se encuentran localizadas en $[(t_1 + t_2) + \mathcal{L}, 0]$ y $[(t_1 + t_2) + (DFP + \mathcal{L})/2, 0]$, respectivamente. Esto permite notar que cerca de la región paraxial el frente de onda propagado tiene una forma parabólica, es decir para $\mathcal{L} < DFP$ los frentes de onda son convexos, $\mathcal{L} > DFP$ son cóncavos y en $\mathcal{L} = DFP$, se obtienen las coordenadas del vértice $[(t_1 + t_2) + DFP]$, como se observa en la Fig. 2.6.

2.3 Aproximación del frente de onda exacto considerando la superficie cáustica

En algunos casos es conveniente proporcionar una representación polinómica de la superficie cáustica, desarrollando una expansión en series de Taylor a tercer orden de la Ec. (2.15), en términos de DFE [30], y suponiendo que $c_1h < 1$, $c_2h < 1$ y $c_3h < 1$, se obtiene

$$[\tilde{z}_c, \tilde{y}_c] \approx \left[(t_1 + t_2) + DFP + \left[\frac{3DFE^2\mathcal{G}_3}{2n_i^3n_1^4n_2^4} \right] h^2 + \mathcal{O}[h]^4, \left[\frac{DFE\mathcal{G}_3}{n_i^2n_1^4n_2^4} \right] h^3 + \mathcal{O}[h]^5 \right], \quad (2.24)$$

donde la tilde de $[\tilde{z}_c, \tilde{y}_c]$ significa *Cáustica Aproximada* para rayos propagándose hacia adelante, como se observa en la Fig. 2.7 para un doblete cementado.

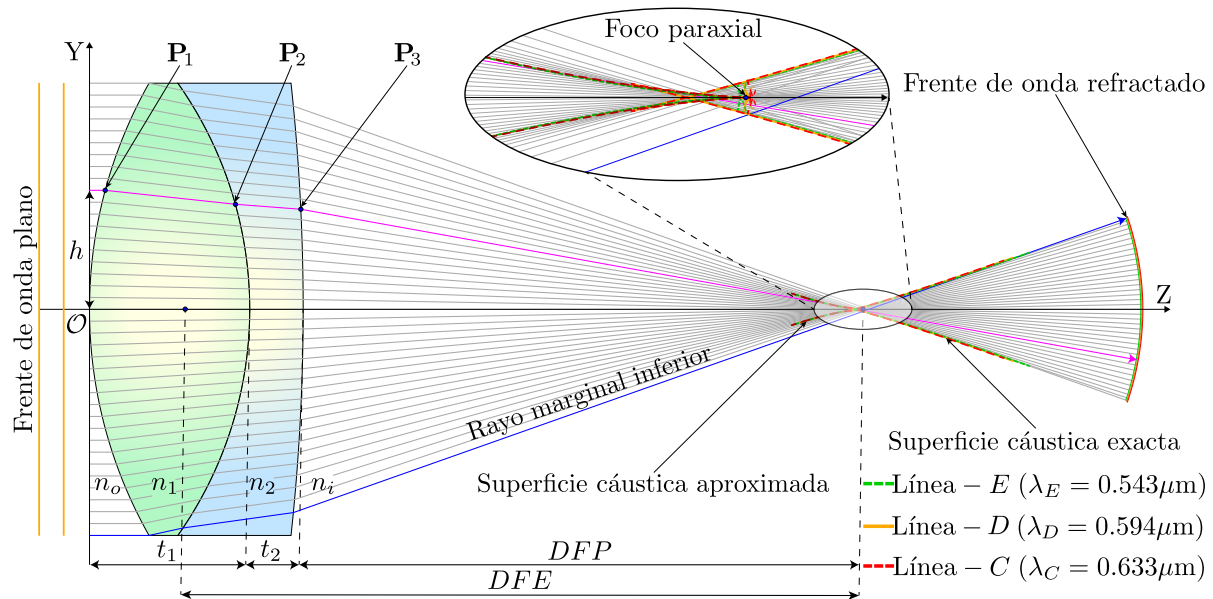


Fig. 2.7 Trazo exacto de rayos a través de un doblete cementado centrado en λ_D , mostrando un acercamiento de las superficies cáusticas aproximadas a tercer orden cerca del foco paraxial.

Se observa de la Ec. (2.24) que la coordenada \tilde{z}_c incluye términos de orden par, y \tilde{y}_c los términos de orden impar para el parámetro h , la DFE está definida en la Ec. (2.23), y \mathcal{G}_3 está en función de todos los parámetros de diseño del doblete cementado, directamente relacionado con el coeficiente de aberración esférica a tercer orden, de esta forma se define como

$$\mathcal{G}_3 = \mathcal{H}_3 k_3 + \mathcal{H}_2 k_2 + \mathcal{H}_1 k_1 + \mathcal{H}_0, \quad (2.25)$$

donde los espesores axiales del doblete cementado t_1 y t_2 son de suma importancia, ya sea para reducir o aumentar la aberración esférica, y los coeficientes \mathcal{H}_j , con $j = \{0, 1, 2, 3\}$, están definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 &= -c_3^2 n_i^2 P_3 [n_1 [n_2 - [P_1 + P_2] t_2] - [n_2 - P_2 t_2] P_1 t_1]^4, \\ \mathcal{H}_2 &= -c_2^2 n_2^4 n_i^2 P_2 [n_1 - P_1 t_1]^4, \\ \mathcal{H}_1 &= -c_1^2 n_1^4 n_2^4 n_i^2 P_1, \\ \mathcal{H}_0 &= n_2 [c_1^2 n_1^3 n_2^3 P_1 [2n_o [n_1^2 - n_i^2] - n_1 [n_o^2 - n_i^2] - n_1^3] + c_2 n_2^2 n_i^2 [4n_1^4 P_1 P_2 + c_2 [n_1^4 P_2 [n_2 - 2n_1] \\ &\quad + 4n_1^3 P_1 t_1 [n_1 [3P_1 + 2P_2] - n_2 [3P_1 + P_2]] + 6n_1^2 P_1^2 t_1^2 [n_2 [2P_1 + P_2] - 2n_1 [P_1 + P_2]] + 4n_1 \\ &\quad \times P_1^3 t_1^3 [n_1 [P_1 + 2P_2] - n_2 [P_1 + P_2]] + [n_2 - 2n_1] P_1^4 P_2 t_1^4] - n_1^4 [n_2^2 [n_2 P_2 [3P_1 [P_1 + P_2] \\ &\quad + P_2^2] + [3n_2 + 2n_i] [P_1 + P_2]^2 P_3] - t_2 [P_1 + P_2]^2 [[n_2 + n_i] [P_1 + P_2] - [3n_2 + n_i] c_3 n_2] \\ &\quad \times [3n_2 P_3 + [n_2 - n_i] [P_1 + P_2]] + [P_1 + P_2]^3 [[3n_2 + 2n_i] [P_1 + P_2] - 3[3n_2 + n_i] c_3 n_2] P_3 t_2^2] \\ &\quad + n_1^2 P_1^2 t_1 [n_2^2 [4n_i^2 P_1 P_2 - [3n_2 P_2 [P_1 + P_2] [P_1 + 2P_2] + [6P_2 [P_1 + P_2] + P_1^2] [3n_2 + 2n_i] P_3] \\ &\quad \times t_1] + 6P_2 [P_1 + P_2] [[n_2^2 - n_i^2] [P_1 + P_2] P_2 + n_2 P_3 [3n_2 + 2n_i] [P_1 + 2P_2]] t_1 t_2 - 6[3n_2 + 2n_i] \\ &\quad \times [P_1 + P_2]^2 P_2^2 P_3 t_1 t_2^2] + [n_2^2 [[P_1 + P_2] [n_2 [P_1 + P_2] [P_1 + 4P_2] + 2[3n_2 + 2n_i] [P_1 + 2P_2] P_3] \\ &\quad \times t_1 - 2n_i^2 P_1 P_2] - 2[P_1 + P_2]^2 [2P_2 [P_1 + P_2] [n_2^2 - n_i^2] + n_2 P_3 [3n_2 + 2n_i] [P_1 + 4P_2]] t_1 t_2 \\ &\quad + 4[3n_2 + 2n_i] [P_1 + P_2]^3 P_2 P_3 t_1 t_2^2] n_1^3 P_1 + n_1 P_1^3 t_1 [n_2^2 [P_2 t_1^2 [2[3n_2 + 2n_i] [P_1 + 2P_2] P_3 + n_2 \\ &\quad \times P_2 [3P_1 + 4P_2]] - n_i^2 P_1 [n_2 + 2P_2 t_1]] - 2P_2^2 [2P_2 [P_1 + P_2] [n_2^2 - n_i^2] + n_2 [3n_2 + 2n_i] [3P_1 \\ &\quad + 4P_2] P_3] t_1^2 t_2 + 4[3n_2 + 2n_i] [P_1 + P_2] P_2^3 P_3 t_1^2 t_2^2] + P_1^4 P_2^2 t_1^4 [n_2 P_2 P_3 t_2 [4n_i - 3P_2 t_2] - n_2^3 \\ &\quad \times [P_2 + 3P_3] - n_i P_2^2 t_2 [n_i + 2P_3 t_2] + n_2^2 [P_2 t_2 [P_2 + 6P_3] - 2n_i P_3]] + c_3 [P_3 [3n_2 + n_i] [P_1^4 \\ &\quad \times P_2 t_1^4 [n_2 - P_2 t_2]^3 - n_1 P_1^3 t_1^3 [n_2 - P_2 t_2]^2 [n_2 [P_1 + 4P_2] - 4P_2 t_2 [P_1 + P_2]] - n_1^3 P_1 t_1 [n_2 \\ &\quad - [P_1 + P_2] t_2]^2 [n_2 [3P_1 + 4P_2] - 4P_2 [P_1 + P_2] t_2] + 3n_1^2 P_1^2 t_1^2 [n_2 - P_2 t_2] [n_2 - [P_1 + P_2] t_2] \\ &\quad \times [n_2 [P_1 + 2P_2] - 2[P_1 + P_2] P_2 t_2] + n_1^4 [n_2^3 P_2 - [P_1 + P_2]^4 t_2^3]] + c_3 n_2 [n_1^4 [4[P_1 + P_2]^3 n_2 P_3 \\ &\quad \times t_2^3 - n_2^4 [3P_1 + P_3] - P_3 [P_1 + P_2]^4 t_2^4 + 2n_2^3 [n_i P_1 + 2[P_1 + P_2] P_3 t_2] + n_2^2 [n_i^2 P_1 - 6[P_1 \\ &\quad + P_2]^2 P_3 t_2^2]] - P_1^4 P_3 t_1^4 [n_2 - P_2 t_2]^4 - 6n_1^2 P_1^2 P_3 t_1^2 [n_2 - P_2 t_2]^2 [n_2 - [P_1 + P_2] t_2]^2 - 4n_1 P_1^3 \\ &\quad \times P_3 t_1^3 [n_2 - P_2 t_2]^3 [[P_1 + P_2] t_2 - n_2] - 4P_1 P_3 t_1 [n_2 - P_2 t_2] [n_1 t_2 [P_1 + P_2] - n_1 n_2]^3]]]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Cabe mencionar que la Ec. (2.25), \mathcal{G}_3 es una función lineal para las constantes de conicidad k_j . Así, de la Ec. (2.24) se obtiene una expresión de la superficie cáustica aproximada independiente del parámetro h , es decir de \tilde{z}_c se despeja h , y sustituyéndola en \tilde{y}_c , se tiene

$$\mathcal{Y}_c = \sqrt{\frac{8n_i^3 n_1^4 n_2^4}{27DFE^4 \mathcal{G}_3}} \mathcal{Z}_c^{3/2}, \quad (2.27)$$

donde $\mathcal{Z}_c = \tilde{z}_c - (t_1 + t_2 + DFP)$ y $\mathcal{Y}_c = \tilde{y}_c$. Si se considera solamente la aberración esférica, que es simétrica sobre el rayo principal [27], entonces se relaciona la superficie cáustica asociada al frente de onda refractado. Siguiendo los pasos propuestos en la Ref. [31], se obtiene

$$\eta = -\left(\frac{\zeta^{3/2}}{3\mathcal{R}^2}\right) \sqrt{-\frac{n}{3b_1}}, \quad (2.28)$$

donde \mathcal{R} es el radio de la esfera de referencia, n es el índice de refracción en el espacio imagen y b_1 es el coeficiente de aberración esférica de Seidel a tercer orden. De sustituir $n = n_a$, $\mathcal{R} = DFE$ y $\eta = \mathcal{Y}_c$, $\zeta = \mathcal{Z}_c$ en la Ec. (2.28), se resuelve para b_1 de las Ecs. (2.27) y (2.28), obteniendo así

$$b_1 = \frac{\mathcal{G}_3}{8n_a^2 n_1^4 n_2^4}, \quad (2.29)$$

donde \mathcal{G}_3 está en función de todos los parámetros de diseño del doblete cementado a evaluar, definido en la Ec. (2.25), n_1 y n_2 son los índices de refracción, y n_a es el índice de refracción donde está inmerso.

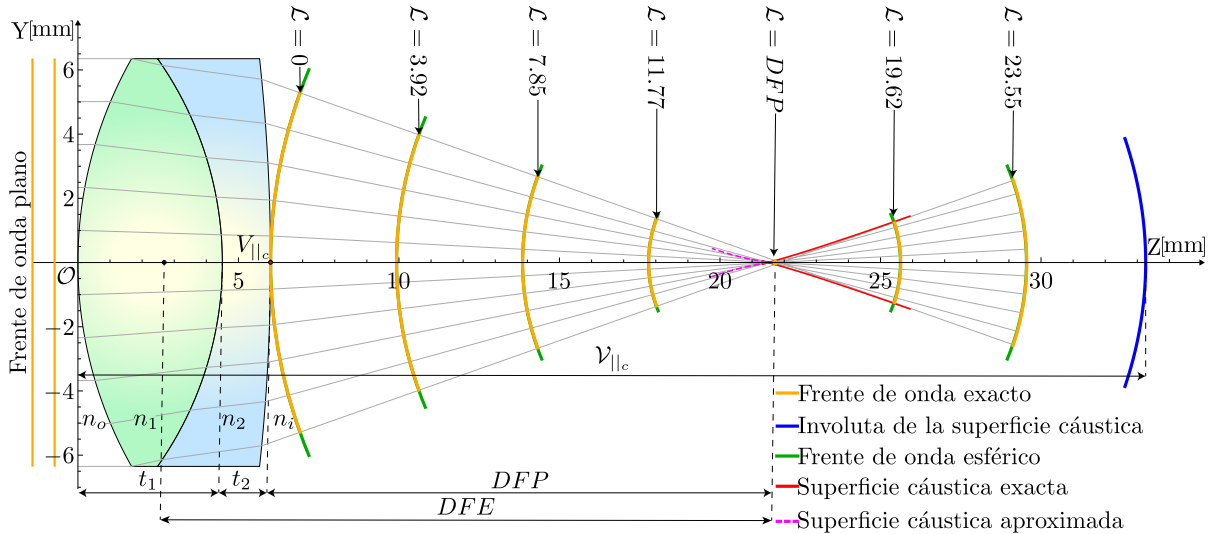


Fig. 2.8 Involuta de la superficie cáustica obtenida por el teorema de Malus-Dupin para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$.

El *teorema de Malus-Dupin* establece que cuando el frente de onda se propaga en un medio isotrópico, conserva la propiedad de ser ortogonal a los rayos refractados. Debido que la cáustica está formada por los centros de curvatura del frente de onda, también es la evoluta del frente de onda de fase cero, es decir el frente de onda de fase cero es la involuta de la cáustica. En términos matemáticos, si una curva \mathcal{A} es la involuta de una curva \mathcal{B} , entonces \mathcal{B} es la evoluta de \mathcal{A} , y viceversa [29]. Sea \mathcal{C} una curva paramétrica $\mathcal{C} = [U(h), V(h)]$ con parámetro h , entonces la ecuación de la involuta se define como

$$[U, V] = [u, v] - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial h} [u, v]\right) \int \sqrt{(\partial u/\partial h)^2 + (\partial v/\partial h)^2} dh}{\sqrt{(\partial u/\partial h)^2 + (\partial v/\partial h)^2}}. \quad (2.30)$$

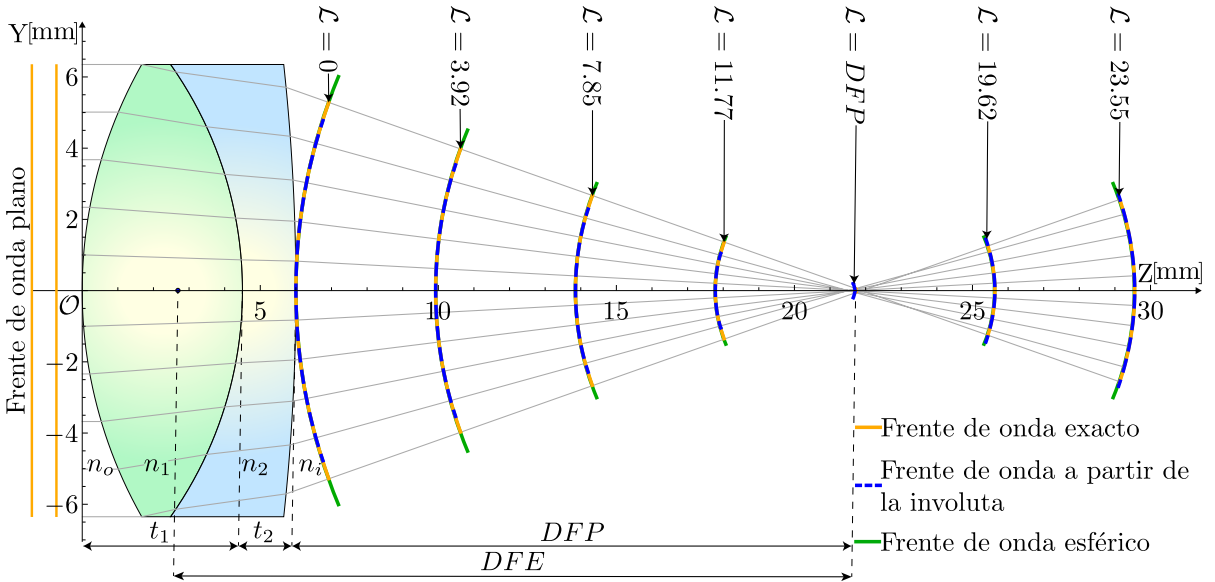


Fig. 2.9 Propagación del frente de onda paralelo aproximado generado por la superficie cáustica a lo largo del eje óptico para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$.

En particular, la cáustica es la evoluta del frente de onda de fase cero y el frente de onda de fase cero es la involuta de la cáustica, como se aprecia en la Fig. 2.8. Considerando la aproximación a tercer orden de la cáustica de la Ec. (2.24), se sustituye en la Ec. (2.30) para $[u, v] \rightarrow [\tilde{z}_c, \tilde{y}_c]$, obteniendo

$$[\tilde{Z}_{i_c}, \tilde{Y}_{i_c}] \approx \left[(t_1 + t_2) + DFP - \frac{DFE^4 \mathcal{G}_3}{n_a^5 n_1^4 n_2^4} + \left(\frac{DFE^2 \mathcal{G}_3}{2n_a^3 n_1^4 n_2^4} \right) h^2, - \left(\frac{DFE^3 \mathcal{G}_3}{n_a^4 n_1^4 n_2^4} \right) h \right], \quad (2.31)$$

donde la tilde $[\tilde{Z}_{i_c}, \tilde{Y}_{i_c}]$ significa *Frente de Onda Aproximado desde la Superficie Cáustica*, representando un frente de onda parabólico, cuyas coordenadas del vértice son $\mathcal{V}_{||c} = (t_1 + t_2) + DFP - [DFE^4 \mathcal{G}_3 / (n_a^5 n_1^4 n_2^4)]$ y del foco $\mathcal{F}_{||c} = (t_1 + t_2) + DFP - [DFE^4 \mathcal{G}_3 / (2n_a^3 n_1^4 n_2^4)]$, como se ob-

serva en la Fig. 2.8. Entonces sustituyendo en la Ec. (2.7) para diferentes distancias arbitrarias \mathcal{L} , y realizando una translación del vértice de la involuta hacia la tercer superficie refractora $[\bar{z}_3, \bar{y}_3]$ definida en la Ec. (2.1), definimos el origen en $(t_1 + t_2) = 0$, entonces las coordenadas del vértice son $V_{||c} = DFP - [DFE^4 \mathcal{G}_3 / (n_a^5 n_1^4 n_2^4)]$ para este sistema de referencia, como se muestran en las Figs. (2.8) y (2.9), obteniendo

$$\tilde{Z}_{||c} = \mathcal{V}_{||c} + \left[\frac{DFE^2 \mathcal{G}_3}{2n_a^3 n_1^4 n_2^4} \right] h^2 + \frac{DFE}{\sqrt{DFE^2 + h^2 n_a^2}} (\mathcal{V}_{||c} - [t_1 + t_2] - \mathcal{L}), \quad (2.32)$$

$$\tilde{Y}_{||c} = \left[-\frac{DFE^3 \mathcal{G}_3}{n_a^4 n_1^4 n_2^4} + \frac{n_a}{\sqrt{DFE^2 + h^2 n_a^2}} (\mathcal{V}_{||c} - [t_1 + t_2] - \mathcal{L}) \right] h.$$

Para evaluar el coeficiente de aberración esférica b_1 , se reescribe la Ec. (2.32) en función de b_1

$$\tilde{Z}_{||c} = \mathcal{V}_{b_1} + \left[\frac{4b_1 DFE^2}{n_a} \right] h^2 + \frac{DFE}{\sqrt{DFE^2 + h^2 n_a^2}} (\mathcal{V}_{b_1} - [t_1 + t_2] - \mathcal{L}), \quad (2.33)$$

$$\tilde{Y}_{||c} = \left[-\frac{8b_1 DFE^3}{n_a^2} + \frac{n_a}{\sqrt{DFE^2 + h^2 n_a^2}} (\mathcal{V}_{b_1} - [t_1 + t_2] - \mathcal{L}) \right] h,$$

donde $\mathcal{V}_{b_1} = (t_1 + t_2) + DFP + (8b_1 DFE^4) / n_a^3$ es el vértice en términos de b_1 . La constante de integración se consideró nula en la Ec. (2.30), debido a la translación realizada del vértice de la involuta a lo largo del eje óptico obtenidos en las Ecs. (2.31-2.33).

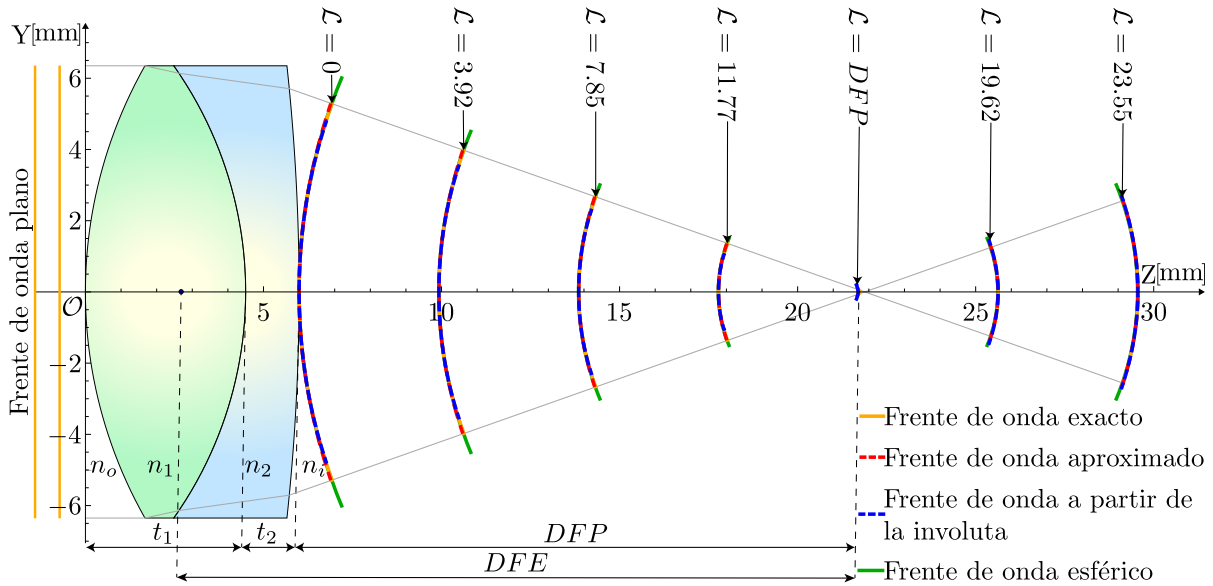
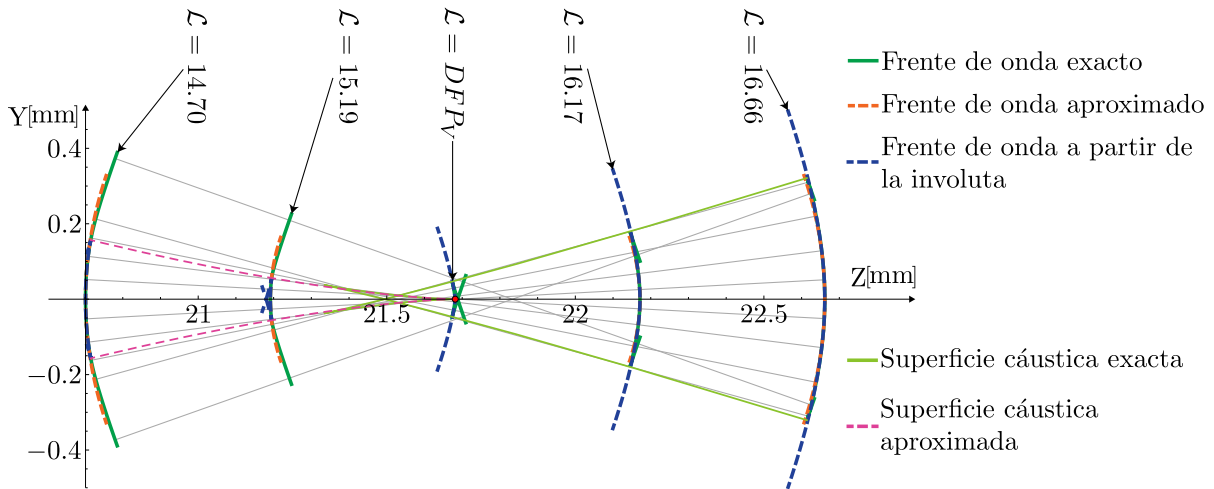
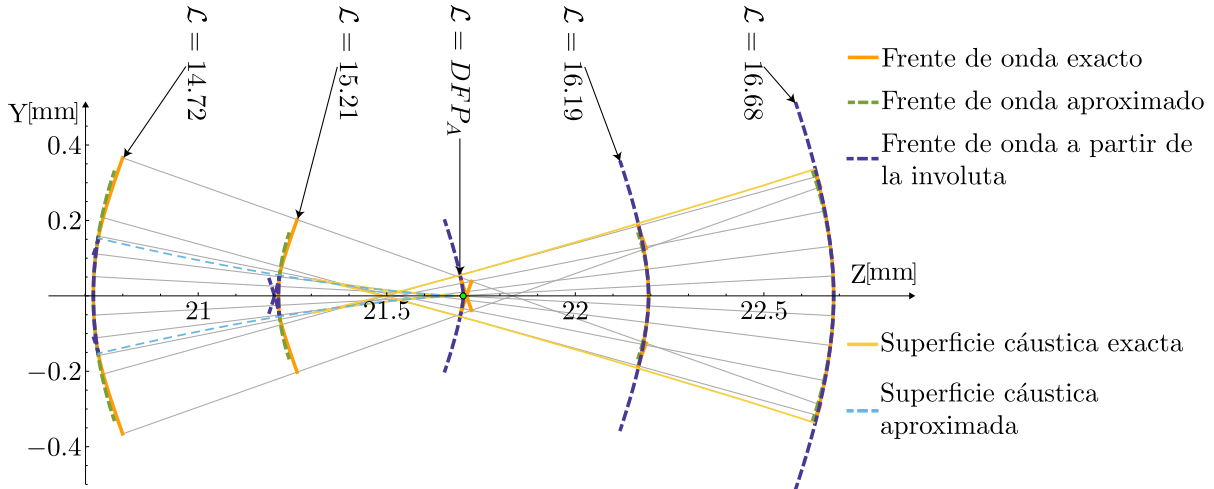


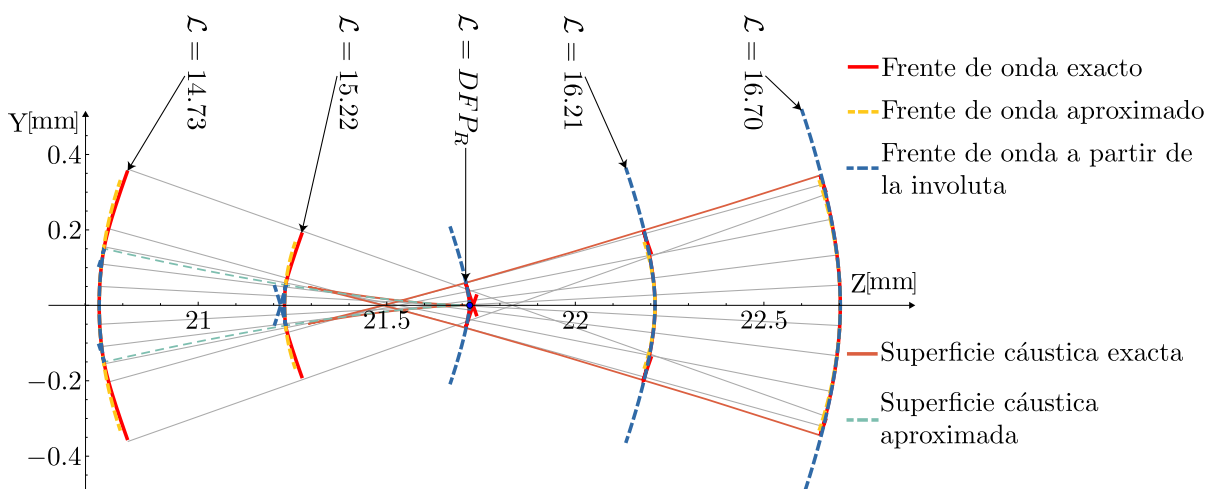
Fig. 2.10 Propagación de los frentes de onda exacto y aproximados a lo largo del eje óptico para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594 \mu\text{m}$.



(a) $DFP_E = 15.68\text{mm}$ para la Línea-E ($\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$).



(b) $DFP_D = 15.70\text{mm}$ para la Línea-D ($\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$).



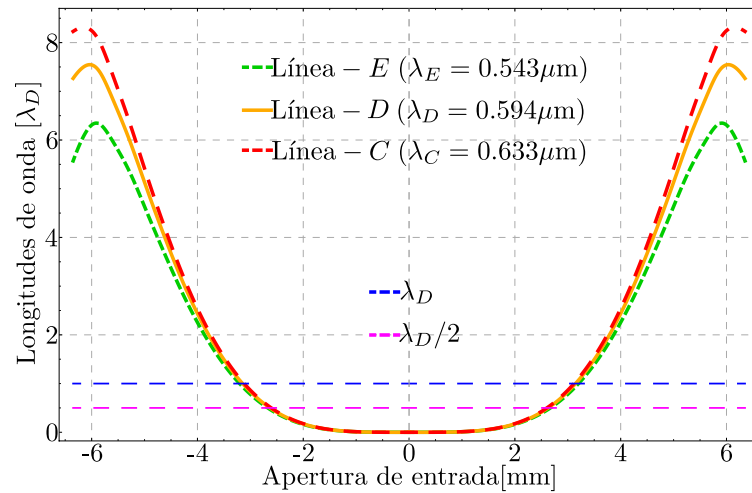
(c) $DFP_C = 15.72\text{mm}$ para la Línea-C ($\lambda_C = 0.633\mu\text{m}$).

Fig. 2.11 Comparación de los frentes de onda refractados por un doblete cementado cerca de la región del punto focal, considerando distancias arbitrarias $\mathcal{L}[\text{mm}]$ para: (a) Línea-E ($\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$), (b) Línea-D ($\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$) y (c) Línea-C ($\lambda_C = 0.633\mu\text{m}$).

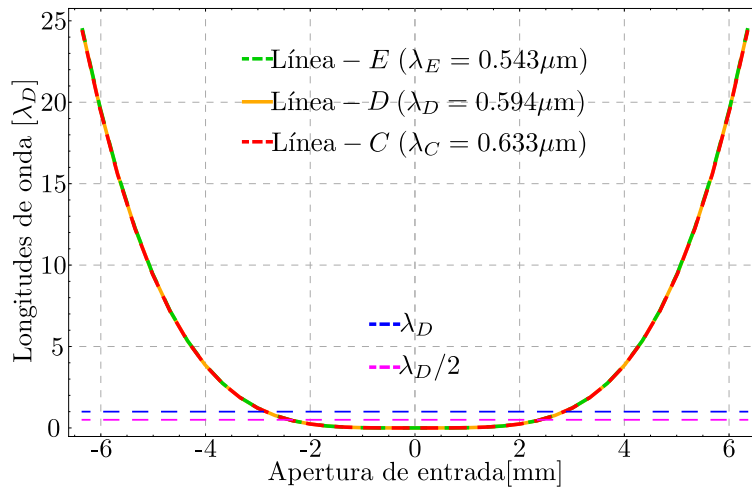
De la Fig. 2.10, si $\mathcal{L} < DFP$, las aproximaciones obtenidas son subestimadas sobre el frente de onda exacto, siendo la aproximación $[\tilde{Z}_{||o}, \tilde{Y}_{||o}]$ ligeramente mejor que la Ec. (2.33). En contraparte, si $\mathcal{L} > DFP$ la aproximación de la Ec. (2.22) es sobreestimada, mientras que la aproximación de la Ec. (2.33) es subestimada sobre al frente de onda exacto, por lo que la aproximación $[\tilde{Z}_{||c}, \tilde{Y}_{||c}]$ es ligeramente mejor con respecto a la aproximación de la Ec. (2.22). Adicionalmente, si se realiza una expansión en series de Taylor a segundo orden, suponiendo $h < DFE$, ya sea para la Ec. (2.32) ó (2.33), se obtiene la aproximación $[\tilde{Z}_{||o}, \tilde{Y}_{||o}]$ de la Ec. (2.22), independiente de las constantes de conicidad y del coeficiente de aberración esférica. Por lo tanto, ambas aproximaciones se comportan de manera similar al frente de onda exacto, como se muestra en la Fig. 2.11, donde se realizó un acercamiento dentro de la superficie cáustica para: $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$ - $DFP_E = 15.68\text{mm}$, $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$ - $DFP_D = 15.70\text{mm}$ y $\lambda_C = 0.633\mu\text{m}$ - $DFP_C = 15.72\text{mm}$.

2.4 Comparación de los frentes de onda para evaluar dobletes cementados

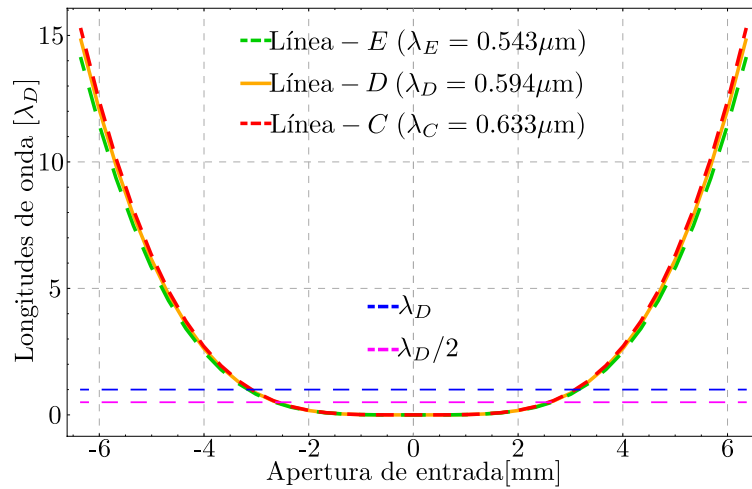
Es bien conocido cómo evaluar superficies ópticas en pruebas interferométricas, utilizando superficies de referencia como un espejo esférico convexo o cóncavo, tal que su centro de curvatura coincida con la distancia focal de la lente bajo estudio [17]. Con base en esto, se consideraron las aproximaciones de las Ecs. (2.22) y (2.33) del frente de onda exacto, y se compararon con la esfera de referencia, cuyo radio está asociado con la DFP . Se obtuvo un conjunto de puntos sobre el frente de onda de fase cero en función del parámetro h (apertura de entrada) y de la longitud de onda, y se midió la distancia euclidiana con la DFP sobre el eje óptico de la esfera de referencia. Se graficó en el eje de las abscisas el parámetro h y en el eje de las ordenadas la diferencia entre la DFP y la distancia euclidiana previamente calculada. Se consideró el doblete cementado **AC127-019-A**, cuyos parámetros están en la Tabla 2.1, y se obtuvieron las diferencias de los frentes de onda para cada longitud de onda utilizada, como se muestra en la Fig. 2.12. El objetivo de presentar estas diferencias de los frentes de onda, es para evaluar cualitativamente aquella aproximación del frente de onda, que contenga menor cantidad de aberración, en comparación con el frente de onda de la esfera de referencia. En particular se distingue fácilmente que la aproximación a segundo orden de la Fig. 2.12(b), tiene mayor contribución en las diferencias del frente de onda ($\approx 25\lambda_D$), en comparación con el frente de onda aproximado de la superficie cáustica a tercer orden ($\approx 15\lambda_D$), como se muestra en la Fig. 2.12(c). Si se diseñara un doblete cementado corregido en aberración esférica, entonces las diferencias de frente de onda disminuirían e incrementaría la apertura de entrada de la Fig. 2.12(c). Con esto, se puede evaluar dobletes cementados en una prueba interferométrica, tal que compense el frente de onda en una determinada región en la apertura de entrada, ya sea utilizando un espejo esférico o en su defecto un espejo parabólico, como primera aproximación. A partir de la Fig. 2.12(a), se puede interpretar idealmente el número de franjas del interferograma compensado para la apertura de entrada del doblete cementado.



(a) Diferencia entre la esfera de referencia y el frente de onda exacto.



(b) Diferencia entre la esfera de referencia y el frente de onda aproximado a segundo orden.



(c) Diferencia entre la esfera de referencia y el frente de onda a partir de la superficie caústica.

Fig. 2.12 Diferencias entre la esfera de referencia y (a) el frente de onda exacto, (b) frente de onda aproximado a segundo orden y (c) frente de onda a partir de la superficie cáustica aproximada a tercer orden, considerando un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, con una diferencia del frente de onda exacto $\Delta_D = 7.2651\mu\text{m}$.

Si consideramos que una longitud de onda (λ_D -azul) tiene una franja clara y una oscura, entonces podemos pensar que en media longitud de onda ($\lambda/2$ -magenta) corresponde a una franja clara, asociada al interferograma que compense una determinada región para la apertura de entrada. Es decir, la diferencia de los frentes de onda es mínima en el centro, en comparación con los bordes de la apertura de entrada, donde hay un mayor número de franjas, debido a que la diferencia numérica entre la esfera de referencia y el frente de onda propagado es muy grande, $\Delta = DFE - ([Z_{||0}(h) - (t_1 + t_2 + DFP)]^2 + [Y_{||0}(h) - 0]^2)^{1/2}$, lo que implica que existen muchos números enteros de longitudes de onda, entre más separación existe en la diferencia de Δ , como se mencionó anteriormente. En resumen, para interferogramas con menor número de franjas, esto quiere decir que la diferencia Δ , es pequeña, de unas unidades de longitud de onda, dependiendo del número de franjas en el interferograma. En particular, el frente de onda puede ser compensado, en un arreglo interferométrico, utilizando un espejo ya sea esférico o parabólico, colocando a lo largo del eje óptico como se muestran en las Figs. 2.12(a), 2.12(b) y 2.12(c), reduciendo el número de franjas en el interferograma. Además estimamos cual es la mejor aproximación del frente de onda exacto, tomando en cuenta la diferencia de la esfera de referencia con el frente de onda exacto de la Fig 2.12(a) ($\approx 8\lambda_D$), considerando el número de longitudes de onda que tendría el interferograma, y se puede determinar cual tendría mayor apertura de entrada o menor número de franjas sin exceder una longitud de onda. En otras palabras, en la aproximación a segundo orden del frente de onda de la Ec. (2.22), se pierde información de las constantes de conicidad, en contraparte con la aproximación a partir de la superficie cáustica a tercer orden de la Ec. (2.33), se recupera esta información en el coeficiente de aberración esférica a tercer orden, b_1 .

Líneas espectrales para el doblete cementado							
$\lambda_E = 0.5461\mu\text{m}$		$\lambda_D = 0.5876\mu\text{m}$		$\lambda_C = 0.6328\mu\text{m}$			
N-BK7				SF5			
$n_o = n_i$	n_1^E	n_1^D	n_1^C	n_2^E	n_2^D	n_2^C	$F/\#$
1.0	1.5187	1.5167	1.5150	1.6776	1.6726	1.6684	2.05
$D[\text{mm}]$	$\mathcal{R}_1[\text{mm}]$	$\mathcal{R}_2[\text{mm}]$	$\mathcal{R}_3[\text{mm}]$	$t_1[\text{mm}]$	$t_2[\text{mm}]$	$DFP_D[\text{mm}]$	$DFP_{C,E}[\text{mm}]$
50.0	42.0168	-42.0168	-526.3157	20.0	3.0	79.987	80.0

Tabla 2.2 Parámetros del doblete cementado hecho con un vidrio óptico **N-BK7** y **SF5** centrado en $\lambda_D = 0.5876\mu\text{m}$ [3].

2.5 Ejemplo: Corrección de la aberración cromática

Consideramos el diseño de un doblete cementado tomado de la Ref. [3], cuyos parámetros están en la Tabla 2.2, y las constantes de conicidad son: $k_1 = -0.602$, $k_2 = -3.779$ y $k_3 = -3.255$. Calculamos varios frentes de onda propagados a distancias arbitrarias a lo largo del eje óptico considerando las longitudes de onda para la Línea- E , D y C , como se muestra en la Fig. 2.13. Los frentes de onda para las Líneas- C y E coinciden en el plano imagen donde se sitúa la DFP , sin embargo para la Línea- D , está ligeramente separada con respecto a las demás, lo que se corroboró numéricamente con la DFP .

La idea principal es hacer coincidir los extremos de longitudes de onda de una cierta banda espectral en una sola *DFP*, y una longitud de onda intermedia en otra *DFP* para el doblete cementado, de esta forma, a la diferencia axial entre estas dos distancias se le conoce como espectro secundario. En la Fig. 2.14(a) se tiene la Línea-*D* con las dos longitudes de onda extremas, las Líneas-*C* y *E*, respectivamente. Gráficamente se muestra que en el eje horizontal la longitud de onda para la Línea-*C* y la Línea-*E*, están en la parte superior y coinciden para la misma *DFP* en el eje vertical, y para la longitud de onda de la Línea-*D*, en la parte inferior en medio, está ligeramente separada, cuya diferencia con las Líneas-*C* y *E*, está asociada al espectro secundario. Además, se muestra el comportamiento alrededor de la longitud de onda ideal del doblete cementado, si se consideran otras longitudes de onda que no sean las de diseño. Además, podemos ver en la Fig. 2.14(b) un acercamiento a la *DFP*, donde el efecto de dispersión está presente en la propagación de los frentes de onda, en efecto podemos ver claramente la coincidencia de los frentes de onda para las Líneas-*C* y *E* para diferentes distancias de propagación, y para la Línea-*D* está ligeramente separada con respecto a las otras longitudes de onda.

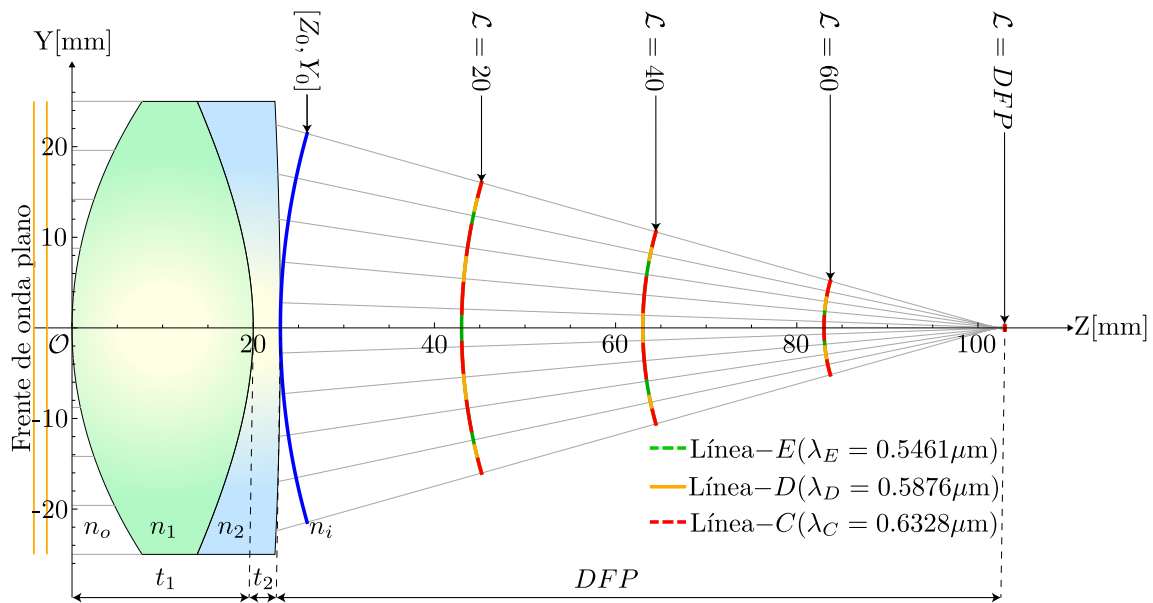


Fig. 2.13 Frente de onda propagado a distancias arbitrarias L [mm] a lo largo del eje óptico para un doblete cementado centrado en λ_D .

Además representamos gráficamente las curvas de aberración esférica longitudinal AEL y aberración esférica transversal AET. En la Fig. 2.15(a) observamos la similitud de la *DFP* para las Líneas-*C* y *E* en el mismo plano imagen, mostradas en verde y rojo, respectivamente. Además, en la Fig. 2.15(b), observamos este comportamiento similar en el mismo plano imagen para la aberración esférica transversal, en función del parámetro h para las Líneas-*C* y *E*. De esta forma, se corrige la aberración esférica longitudinal y transversal de un objeto axial, para las longitudes de onda extremas de diseño del doblete

cementado en un mismo punto focal. Con base en lo anterior, se puede obtener la variación cromática de la aberración esférica simultáneamente, en otras palabras el esferocromatismo de un doblete cementado, de acuerdo al procedimiento descrito en la Ref. [21]. Por último, se muestra la comparación de los frentes de onda asociados a las longitudes de onda de la Tabla. 2.2, mostrados en las Figs. 2.16(a), 2.16(b) y 2.16(c). En particular para este doblete cementado, como se esperaba, se obtuvieron diferencias muy pequeñas para cada línea espectral asociadas a la aproximación del frente de onda exacto, previamente calculados en la Fig. 2.13.

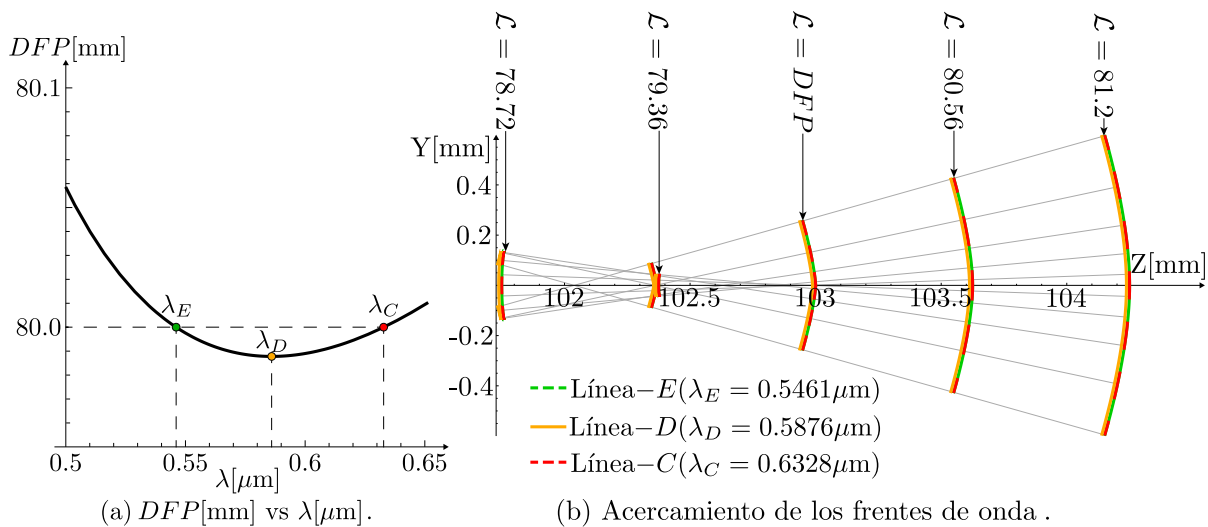


Fig. 2.14 (a) DFP en función de la longitud de onda para un doblete cementado centrado en λ_D . (b) Acercamiento de los frentes de onda propagados cerca de la DFP .

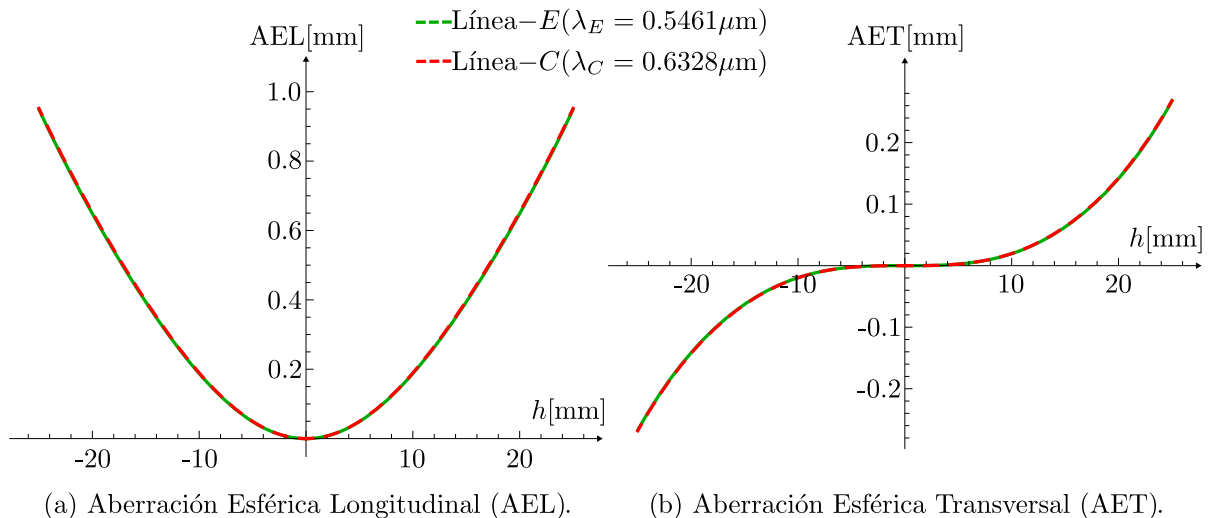
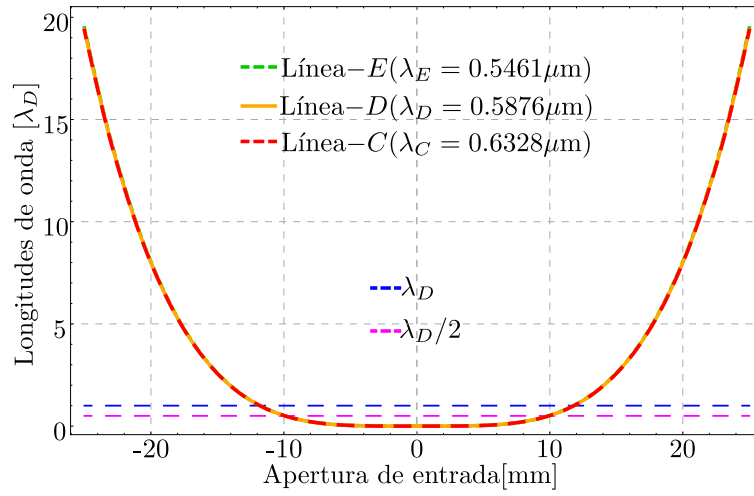
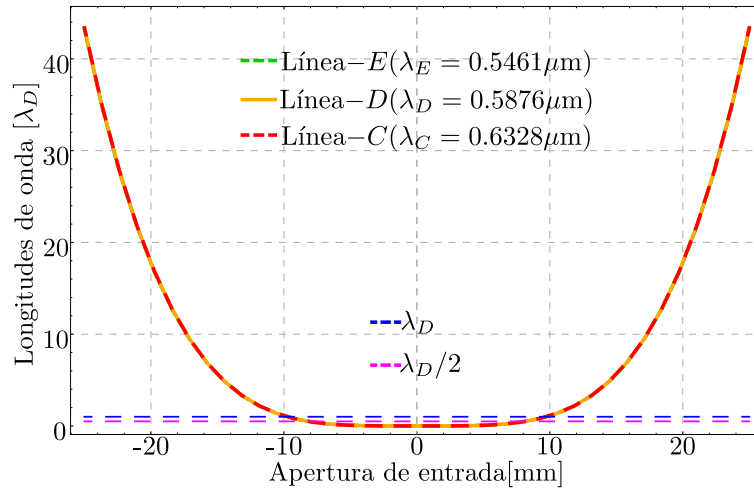


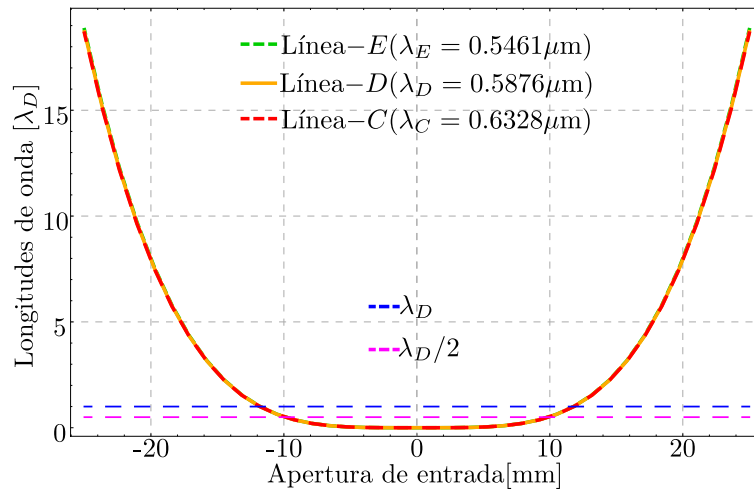
Fig. 2.15 (a) Aberración Esférica Longitudinal (AEL). (b) Aberración Esférica Transversal (AET) para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$.



(a) Diferencia entre la esfera de referencia y el frente de onda exacto.



(b) Diferencia entre la esfera de referencia y el frente de onda aproximado a segundo orden.



(c) Diferencia entre la esfera de referencia y el frente de onda a partir de la superficie caústica.

Fig. 2.16 Diferencias entre la esfera de referencia y (a) el frente de onda exacto, (b) frente de onda aproximado a segundo orden y (c) frente de onda a partir de la superficie cáustica aproximada a tercer orden, considerando un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.5876\mu\text{m}$, con una diferencia de frente del onda exacto $\Delta_D = 18.5728\mu\text{m}$.

Capítulo 3

Diseño de pantallas nulas de fase para un doblete cementado a incidencia normal

Comúnmente se realiza la prueba de pantallas nulas por transmisión y/o reflexión para cuantificar superficies ópticas [32], las cuales son de tipo geométrico y son empleadas para evaluar la calidad óptica, y cuantificar las deformaciones que pudieran presentar las superficies bajo prueba. La idea principal para el diseño de pantallas, es considerar un patrón, ya sean gotas ó líneas no uniformes, los cuales después de la refracción y/o reflexión a través de un objeto bajo prueba, formarán una imagen ordenada en el plano de detección predefinido, y serán desplegados en el plano de observación al interactuar con el sistema óptico bajo prueba, produciendo un patrón ordenado en el plano de detección[33–35].

En las pruebas por refracción las pantallas son planas e impresas sobre acetatos comerciales, considerando el tamaño de la pupila de entrada del elemento óptico bajo prueba, y en las pruebas por reflexión, las pantallas son impresas en papel común y envueltos en una superficie cilíndrica colocada en paralelo al eje óptico. Estas pruebas tienen la ventaja en ser factibles de implementar experimentalmente. No obstante, la precisión de la prueba requiere de una alta densidad de los patrones a considerar en la pantalla, limitada por la resolución del sensor CCD (Charge Coupled Device) con el cual se recopilarán los datos de la misma. Además, cada pantalla es única ya que depende de la superficie que se desea probar, las condiciones experimentales y las posiciones del sensor CCD [36].

3.1 Preliminares

El diseño de pantallas nulas de fase se basan en la ecuación del frente de onda exacto propagado para distancias arbitrarias \mathcal{L} a lo largo del eje óptico, considerando un frente de onda en un plano meridional obtenido en el Capítulo 2. Estas pantallas serán desplegadas sobre un Modulador Espacial de Luz de Fase por reflexión de la marca Hamamatsu, SLM (Spatial Light Modulator), cuyas especificaciones se muestran en la Tabla 3.1. Con esto, es posible cambiar los diseños de las pantallas para diferentes

niveles de gris en tiempo real, sin desplegarlas sobre acetatos como se realizaba anteriormente [32]. De esta forma se obtiene un retraso de fase del frente de onda refractado similar al frente de onda teórico [37]. Se empleará un interferómetro del tipo Twyman-Green ligeramente modificado, donde el SLM tomará lugar de uno de los espejos en el brazo de referencia, y un espejo parabólico cóncavo en frente de la lente bajo prueba como se observa en la Fig. 3.1.

Parámetro	No. píxeles	Tamaño de píxeles	Área	Factor de llenado	Nivel de gris	Peso
Valor	792×600	20	16	95	255	350
Unidad	ppx^2	μm	mm^2	%	nivel	g

Tabla 3.1 Especificaciones del LCoS-SLM X10468 Series.

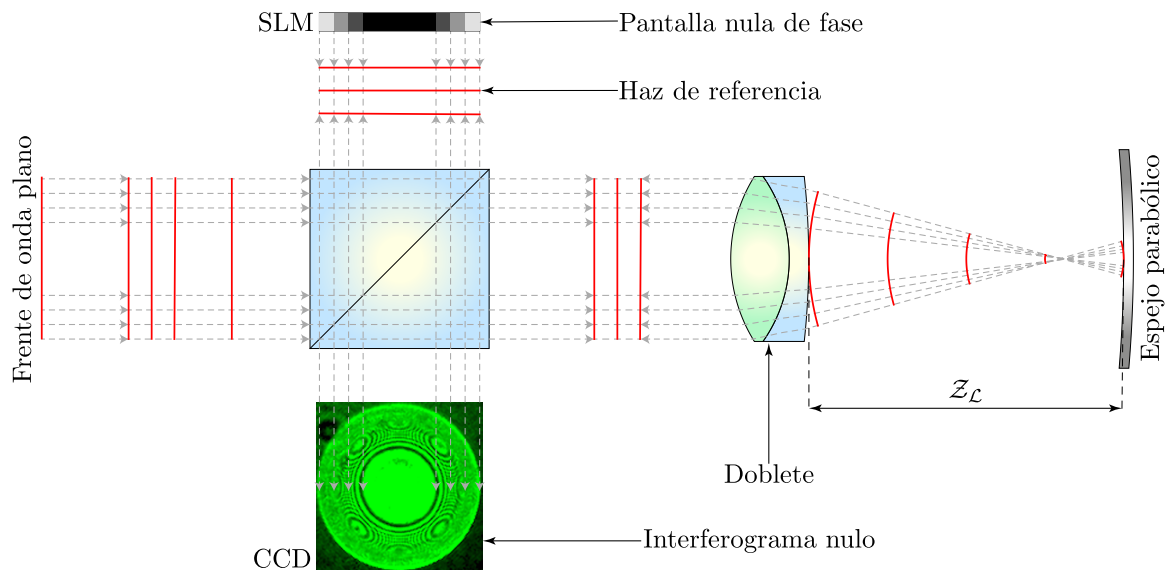


Fig. 3.1 Diagrama del interferómetro para evaluar un doblete cementado, utilizando pantallas nulas de fase.

Se diseñará una pantalla nula de fase con un degradado de gris desde 0-255, donde el 0 corresponde a un tono negro sin retraso de fase y el 255 a un tono blanco, con un máximo en retraso de fase de $15\pi/8$, linealmente para una longitud de onda $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$, demostrado en la caracterización del SLM en la Ref. [37]. Como el doblete cementado cuenta con simetría de revolución a incidencia normal, entonces la forma de las pantallas nulas de fase formarán anillos concéntricos. Con base en esto, colocaremos un espejo parabólico cóncavo a una distancia mayor al foco, porque el frente de onda exacto para $\mathcal{L} > DFP$ es cóncavo, como se demostró en la Fig. 2.10. Esta distancia la definiremos como Z_C , medida desde el tercer vértice de la superficie refractora S_3 , evaluada en $y = 0$ para $(t_1 + t_2) = 0$ del doblete cementado, hasta el vértice del espejo parabólico cóncavo, que hemos definido como V_E .

3.2 Implementación del interferómetro Twyman-Green y análisis del interferograma nulo

El método consistió en obtener el máximo central del interferograma nulo, como el de la Fig. 3.1, utilizando una fuente de luz láser de $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$, para evaluar el doblete cementado **AC127-019-A**, empleando el espejo parabólico cóncavo **CM508-038-P01**, cuyos parámetros se muestran en las Tablas 2.1 y 3.2, respectivamente. Se realizó un muestreo posicional a lo largo del eje óptico entre el espejo parabólico y el doblete, utilizando una platina de desplazamiento. Se posicionó en una distancia $Z_L > DFP$, desplazándose en intervalos de $100\mu\text{m}$ para capturar diferentes interferogramas conforme incrementaba el diámetro del máximo central del interferograma nulo, como se presenta en la Fig. 3.2.

Catálogo Thorlabs®	\mathcal{R}_E [mm]	k_E	D_E [mm]	t_E [mm]	DFE [mm]
CM508-038-P01	-76.2	-1.0	50.8	9.0	38.1

Tabla 3.2 Parámetros del espejo parabólico cóncavo **CM508-038-P01**.

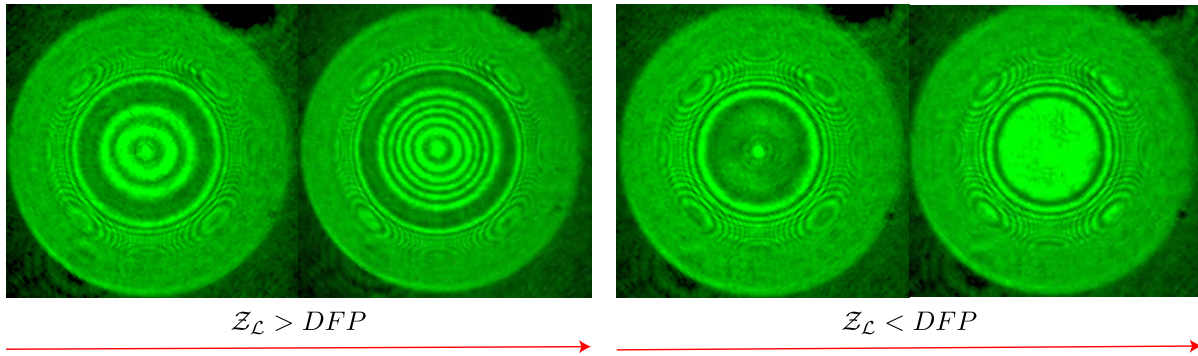


Fig. 3.2 Interferogramas obtenidos para una distancia inicial de $Z_L > DFP$ entre el doblete cementado **AC127-019-A** y el espejo parabólico, hasta una distancia final de $Z_L < DFP$ en desplazamientos de $100\mu\text{m}$.

En la distancia $Z_L < DFP$, se obtiene una cantidad conglomerada de anillos alrededor del máximo central del interferograma nulo, conforme aumenta, es decir para distancias $Z_L > DFP$, la conglomeración de anillos decrece en la parte central, porque la diferencia de LCO entre el espejo parabólico y el frente de onda exacto es menor, como se observa en la Fig. 3.2, corroborando así los resultados previamente obtenidos en el Capítulo 2, Sección 2.4. Por otra parte, se aprecian varios anillos cuando decrece el máximo central del interferograma nulo para $Z_L < DFP$. Con base en lo anterior, se posicionó en la distancia donde se obtuvo el máximo central del interferograma nulo para el intervalo $Z_L \in (-[Z_L + \Delta Z], [Z_L + \Delta Z])$, donde $\Delta Z = 0.5\mu\text{m}$ es el desplazamiento mínimo permitido por la platina de desplazamiento. Por medio del software del CCD, se colocó una referencia para obtener un número de píxeles del diámetro para el interferograma nulo. Así se obtuvo el interferograma nulo de referencia como se observa en la Fig. 3.3.

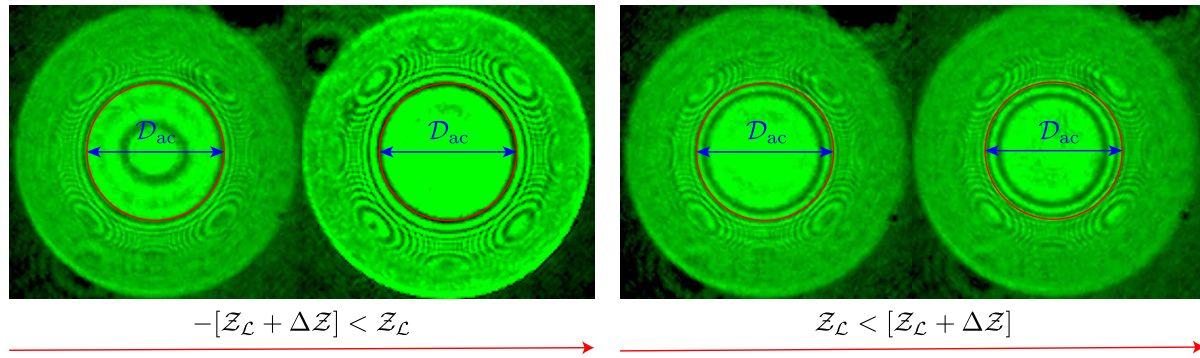


Fig. 3.3 Interferogramas de referencia generados por el doblete cementado **AC127-019-A**, para diferentes desplazamientos de $\Delta Z = 0.5 \mu\text{m}$ en el intervalo $\pm [Z_L + \Delta Z]$.

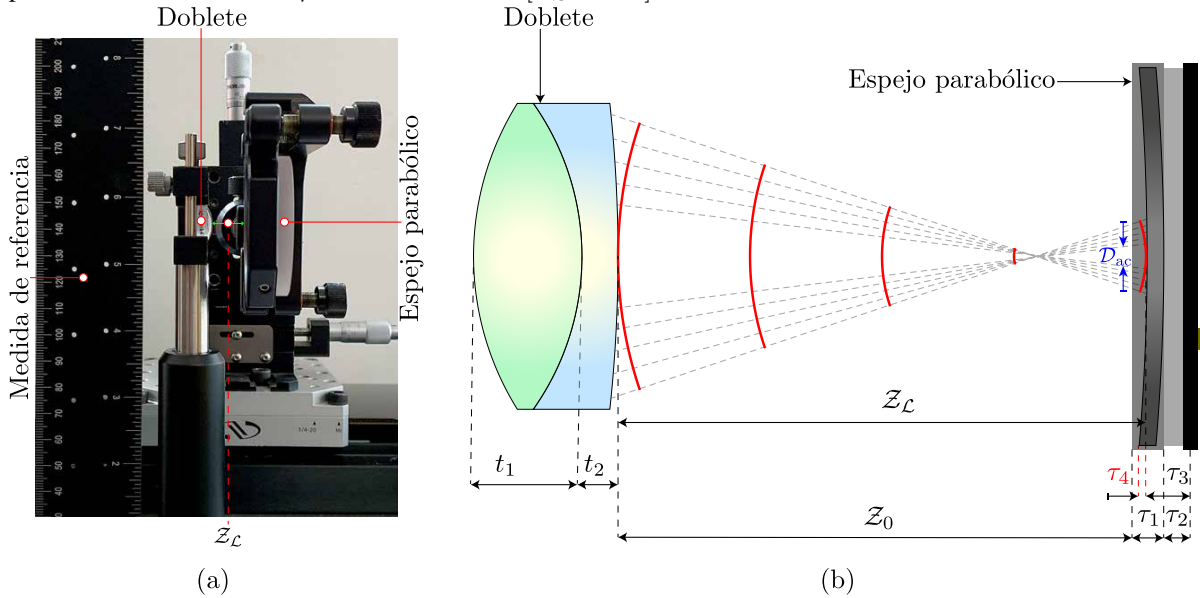


Fig. 3.4 (a) Fotografía capturada para caracterizar la posición de diseño Z_L , entre el espejo parabólico y el doblete cementado **AC127-019-A**. (b) Diagrama esquemático para obtener la posición de diseño Z_L .

Se obtuvo el máximo central del interferograma nulo empleando el SLM en el brazo de referencia del interferómetro, y se definió la posición de diseño Z_L en el brazo de prueba del interferómetro. Se calculó numéricamente la posición de diseño utilizando el software Tracker, y se analizó la fotografía presentada en la Fig. 3.4(a), definiendo las distancias correspondientes de la Fig. 3.4(b). Se redefinió el espesor del doblete cementado como $Z_D = (t_1 + t_2)$, el espesor del espejo parabólico $Z_E = (\tau_1 + \tau_2) - (\tau_3 - \tau_4)$, donde $\tau_3 = 13.3\text{mm}$ y $\tau_4 = 4.3\text{mm}$ corresponden a los parámetros de diseño del espejo parabólico, y Z_0 es la distancia definida entre el espejo parabólico y el doblete cementado. Se obtuvo la posición de diseño $Z_L = [21.51 \pm 0.5]\text{mm}$ a partir de la ecuación

$$Z_L = Z_0 + (Z_D + Z_E). \quad (3.1)$$

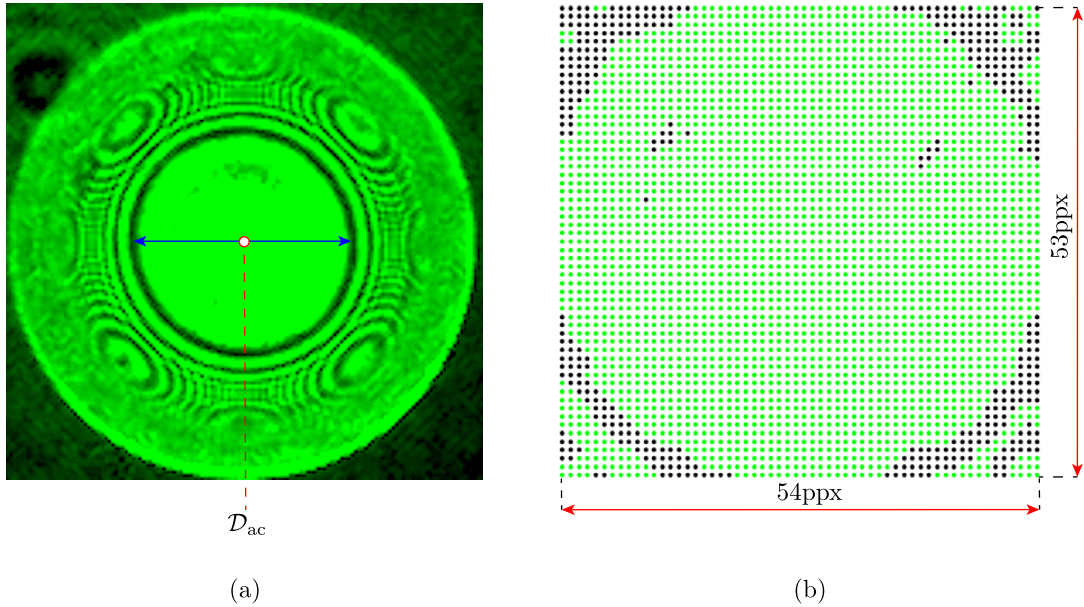


Fig. 3.5 (a) Interferograma de referencia para el diseño de las pantallas nulas de fase. (b) Interferograma generado mediante análisis de imágenes.

Se realizó un programa para el análisis de imágenes del máximo central del interferograma nulo, donde se obtuvo la posición de diseño $Z_{\mathcal{L}}$. Se empleó el software Mathematica donde se importó el interferograma nulo de referencia presentado en la Fig. 3.5(a), y se realizó la conversión en escala de grises, binarizándolo entre valores de 0 y 1 (negro-blanco). Después se procesó la imagen para extraer el número de píxeles del diámetro del máximo central del interferograma nulo, el cual hemos definido como $\mathcal{D}_{\text{máx}} = 54\text{ppx}$ presentado en la Fig. 3.5(b). Se realizó una correspondencia entre el número de píxeles y milímetros para evaluar el área del máximo central del interferograma nulo, cuando se compensó el frente de onda. Se capturó una fotografía de referencia en la posición de diseño en el espacio objeto, y se binarizó el área iluminada de la pantalla de cristal líquido del SLM (sin interferencia), como se muestra en la Fig. 3.6(a). Es decir, se obstruyó el brazo de prueba del interferómetro. Se calculó el número de píxeles en el espacio imagen del SLM, para el lado mayor $L = 371\text{ppx}$ y para el lado menor $l = 284\text{ppx}$ de la imagen procesada de la Fig. 3.6(b). Es importante mencionar que el *ruido* en el centro de la Fig. 3.6(a), corresponde a los anillos de interferencia generados por múltiples reflexiones de las diversas capas que componen el sustrato del SLM [37]. En otras palabras, las franjas de interferencia son formadas por la interferencia entre los haces reflejados de las dos capas internas dentro del sustrato del SLM, comportándose de manera similar a un interferómetro de Fabry-Perot [38].

Con base en lo anterior, se definió la relación entre píxeles y milímetros, considerando el tamaño de píxel del SLM, que está directamente relacionado con el número de píxeles como

$$\text{milímetros[mm]} \rightarrow \left(\text{tamaño píxel [mm/ppx]} \right) \left(\# \text{píxeles[ppx]} \right). \quad (3.2)$$

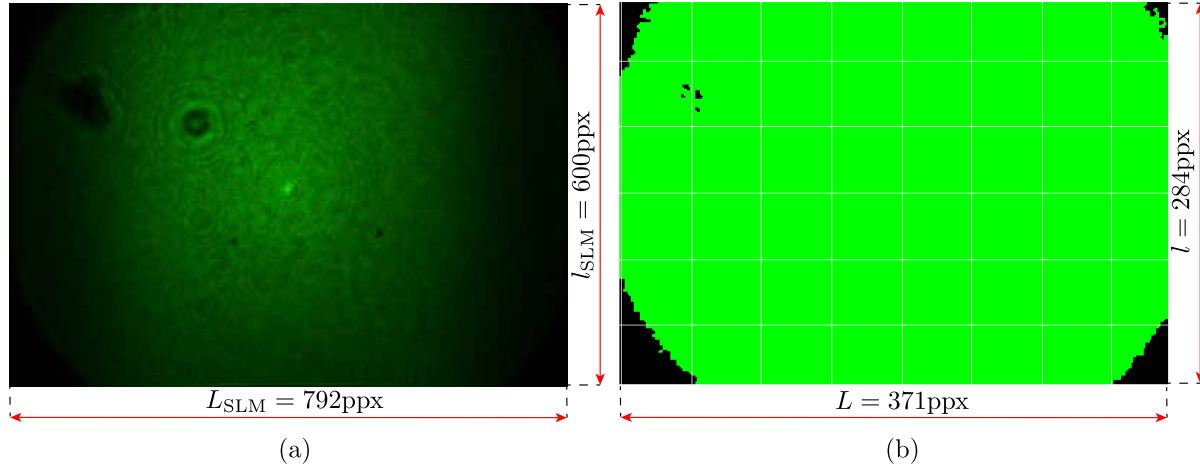


Fig. 3.6 (a) Imagen capturada del sustrato del SLM. (b) Imagen binarizada.

Se calculó el diámetro del máximo central del interferograma nulo de referencia de la Ec. (3.2), $\mathcal{D}_{ac} = [1.07 \pm 0.5]\text{mm}$. Se utilizó el lado menor $l = 284\text{ppx}$ asociado a la sección transversal del doblete cementado en la posición de diseño del interferograma nulo. Se definió l_{mm} (ppx \rightarrow mm) como la cantidad sustraída al tamaño del máximo central del interferograma nulo, obteniéndose así $l_{mm} = [5.68 \pm 0.5]\text{mm}$. Por último se calculó el máximo central del interferograma nulo de referencia utilizando la siguiente ecuación

$$\mathcal{D}_{m\acute{a}x} = 2(l_{mm} - \mathcal{D}_{ac}). \quad (3.3)$$

Se obtuvo $\mathcal{D}_{m\acute{a}x} = [9.22 \pm 0.5]\text{mm}$ representado en la Fig. 3.7, como el parámetro para diseñar las pantallas nulas de fase, donde la diferencia de LCO es nula. Con base en esto, el objetivo es compensar los anillos externos desplegando las pantallas nulas de fase en el SLM para diferentes niveles de gris, considerando que la púpila de salida corresponde en mayor parte al área de la pantalla de cristal líquido del SLM, asociado al lado menor del mismo.

3.3 Metodología

Se calcula el frente de onda exacto que incide en el espejo parabólico cóncavo a partir de la Ec. (2.21), sustituyendo la distancia $\mathcal{L} = \mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$, como la posición de diseño y los parámetros del doblete cementado. Se calcula analíticamente el conjunto de puntos incidentes \mathbf{P}_E en la superficie del espejo parabólico, de acuerdo con la aproximación a segundo orden del frente de onda exacto de la Ec. (2.22), representa paramétricamente un frente de onda parabólico. Se define la ecuación paramétrica del espejo parabólico, considerando la ecuación de las cónicas definida en la Ec. (2.1), suponiendo $k_E = -1$ y una traslación del vértice en la coordenada \mathbf{Z} , evaluado en $h = 0$, esto es $\mathcal{V}_E = \mathcal{Z}_{||0}(0)$ en la posición de diseño, y sustituyéndola en la Ec. (2.21). La ecuación paramétrica está descrita como

$$[Z_E, Y_E] = \left[\mathcal{V}_E + \frac{1}{2} (c_E h^2), h \right]. \quad (3.4)$$

donde el subíndice E indica *Espejo Parabólico*, $c_E = 1/\mathcal{R}_E$ el radio de curvatura, k_E la constante de conicidad, \mathcal{V}_E es el vértice y $h \in [-D_E, D_E]$, donde D_E corresponde al diámetro del espejo parabólico. Utilizando las Ecs. (2.14) y (3.4), se resolvió para $[z, y]$, obteniendo el conjunto de puntos definidos como $\mathbf{P}_E = [z_E(h_i), y_E(h_i)]$, simplificando términos

$$[z_E, y_E] = \left[\frac{(\pm\alpha - 1)}{c_E \tan[\delta_3]}, \mathcal{V}_E + \frac{(\pm\alpha - 1)^2}{2c_E \tan^2[\delta_3]} \right], \quad (3.5)$$

donde se ha definido $\alpha^2 = 1 + 2 [c_E \tan[\delta_3] (y + \tan[\delta_3] [z - \mathcal{V}_E])]$, y se consideró el signo (+) porque el frente de onda se propaga hacia adelante de acuerdo al sistema de referencia empleado. Las coordenadas $[z_3, y_3]$ y δ_3 están definidos en la Ec. (2.13), respectivamente. A partir de la Ec. (2.21), se obtiene el conjunto de puntos de intersección entre los rayos refractados fuera del doblete cementado con el frente de onda exacto, definido como $\mathbf{P}_{Z_L} = [Z_{||0}(h_i), Y_{||0}(h_i)]$, considerando la posición de diseño donde se obtuvo el interferograma nulo de referencia. Después definimos las alturas incidentes a partir del máximo central del interferograma nulo $\mathcal{D}_{\text{máx}}$, dado por la Ec. (3.3). Con base en esto, las alturas iniciales están dadas por $h_i \in [\pm\mathcal{D}_{\text{máx}}, \pm H]$ con $i = \{1, \dots, n\}$, donde n es el número de anillos, y $H \in [-\mathcal{D}_{\text{SLM}}/2, \mathcal{D}_{\text{SLM}}/2]$, donde $\mathcal{D}_{\text{SLM}} = 12\text{mm}$ está limitado por el lado menor del SLM, como se observa en la Fig. 3.7.

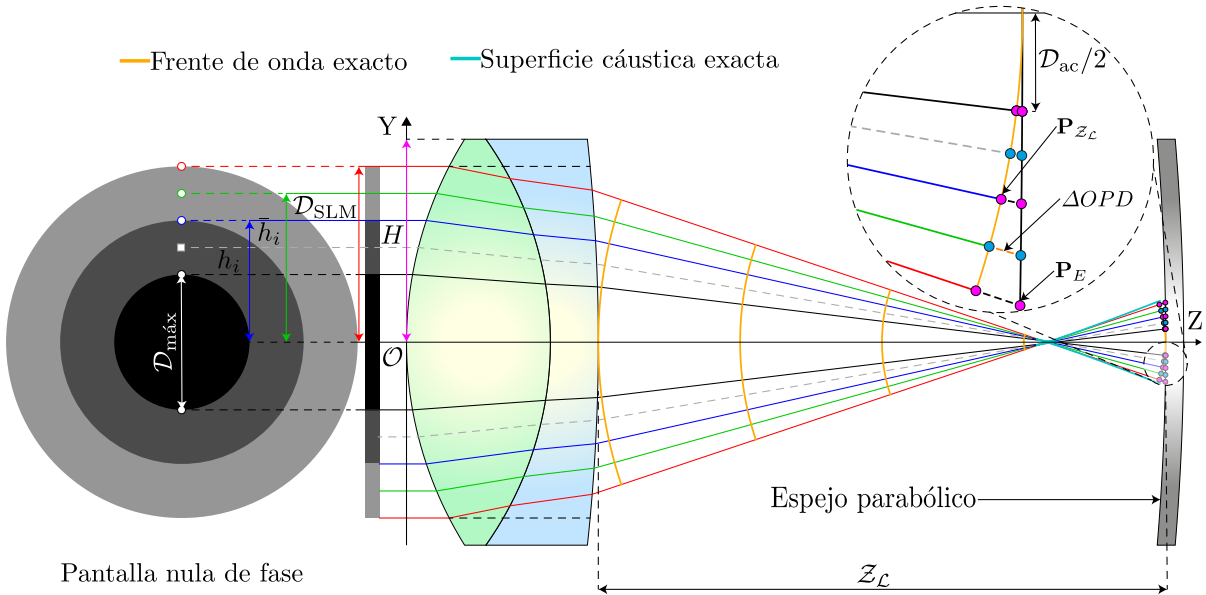


Fig. 3.7 Diferencia de LCO entre el frente de onda exacto y el espejo parabólico cóncavo en la posición de diseño Z_L .

Definidos los puntos \mathbf{P}_{Z_L} y \mathbf{P}_E , se obtiene la diferencia de LCO entre el frente de onda exacto y el espejo parabólico cóncavo, es decir $\Delta LCO[\mathbf{P}_{Z_L}, \mathbf{P}_E] = 2n_a d([\mathbf{P}_{Z_L}, \mathbf{P}_E])$, cuya longitud es el doble de la distancia que recorre el haz incidente y reflejado en el espejo parabólico cóncavo, como se observa en la Fig. 3.7. Adicionalmente la diferencia de fase correspondiente para cada anillo de la pantalla nula de fase está asociada a la distancia euclidiana $\Delta LCO[\mathbf{P}_{Z_L}, \mathbf{P}_E]$, y es directamente proporcional a la intensidad correspondiente al retraso de fase para el nivel de gris $I_{\text{máx}}$, donde se obtiene el máximo retraso de fase característico por el SLM Φ_{SLM} e inversamente proporcional para cierta longitud de onda λ [37], matemáticamente se describe como

$$\Phi_{ng} = \left[\frac{n_a I_{\text{máx}} \Phi_{\text{SLM}}}{\lambda} \right] \Delta LCO, \quad (3.6)$$

donde ΔLCO , está dada explícitamente por la siguiente ecuación

$$\Delta LCO = 2\|\mathbf{P}_E - \mathbf{P}_{Z_L}\|. \quad (3.7)$$

En particular, se supone el índice de refracción del aire $n_i = n_a = 1$, $I_{\text{máx}} = 255$ asociado al retraso de fase para el nivel de gris $ng = 255$, y $\Phi_{\text{SLM}} = 15\pi/8$ representa el máximo retraso de fase del SLM para la longitud de onda $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$, como se describe explícitamente en la Ref. [37]. La idea principal para diseñar las pantallas nulas de fase, consiste en definir dos rayos contiguos para formar un píxel, asignando el centro del píxel, considerando los puntos promediados del frente de onda exacto $\bar{\mathbf{P}}_{Z_L}$ y del espejo parabólico cóncavo $\bar{\mathbf{P}}_E$, tomando en cuenta el diámetro del máximo central del interferograma nulo de referencia $\mathcal{D}_{\text{máx}}$, donde $\Delta LCO = 0$ indica interferencia constructiva. Se realiza una partición promediando las alturas incidentes como $\bar{h}_i = (h_{i-1} + h_i)/2$, donde $h_i \in [\pm\mathcal{D}_{\text{máx}}, \pm H]$, y H es el semidiámetro del doblete cementado. Con base en lo anterior, se obtiene un tercer rayo entre los dos rayos contiguos asociados al centro de un píxel, como se muestra en la Fig. 3.7. En la posición de diseño definimos un nivel de gris entre 0-1, o de forma equivalente de 0-255 niveles de gris, asociados al SLM, considerando la Ec. (3.6) para $\Delta LCO[\bar{\mathbf{P}}_{Z_L}, \bar{\mathbf{P}}_E]$, dado por la Ec. (3.7).



Fig. 3.8 Pantallas nulas de fase con diferentes números de anillos para un doblete cementado centrado en $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$.

En la Fig. 3.8 se muestran los diseños de las pantallas nulas de fase, considerando la longitud de onda $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$ en la posición $Z_{\mathcal{L}} = [21.51 \pm 0.5]\text{mm}$, para probar el doblete cementado **AC127-019-A**, cuyos parámetros están en la Tabla 2.1.

3.4 Configuración experimental

Se utilizó un láser Helio-Neón (He-Ne) de $0.543\mu\text{m}$ modelo 30972 (Newport®), una montura para el filtraje espacial (Edmund Optics®), un objetivo de microscopio de $10\times$ (Newport®), un pinhole de $35\mu\text{m}$, un diafragma, un doblete acromático para colimar el haz láser cuya $DFE = 400\text{mm}$ y 25.4mm de diámetro (Thorlabs®), un divisor de haz no polarizado con razón 50:50 (Edmund Optics®). El SLM de la marca Hamamatsu mostrado en la Fig. 3.9(a) y un espejo parabólico cóncavo (Thorlabs®), cuyos parámetros se muestran en las Tablas 3.1 y 3.2, respectivamente. Y un sensor CCD con una resolución de $[1280 \times 1024]\text{ppx}^2$ y $[5.95 \times 4.76]\text{mm}^2$, con una lente de $F = 25\text{mm}$ (Computar®). Se llevó a cabo la alineación de todos los elementos ópticos, para garantizar la propagación paralela del haz a la mesa óptica que conformó el eje óptico. Después se alineó el divisor de haz, de tal forma que en el brazo de referencia, perpendicular al eje óptico, incidiera en el centro de la pantalla de cristal líquido del SLM, y en el brazo de prueba, paralelo al eje óptico, incidiera en el centro del espejo parabólico cóncavo. Por último se alineó el doblete cementado en el brazo de prueba, de tal forma que la línea del haz láser incidiera en el centro.

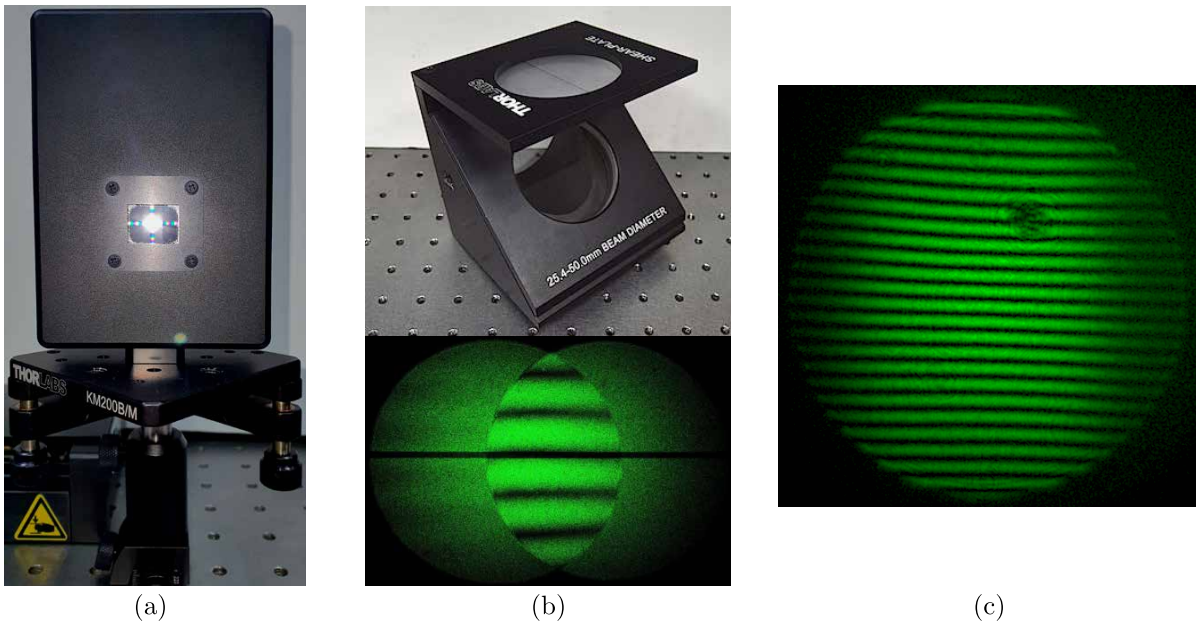


Fig. 3.9 (a) Modulador espacial de luz por reflexión de la marca Hamamatsu LCoS X10468 Series, (b) Interferómetro de desplazamiento lateral (Thorlabs®). (c) Fotografía de la planicidad del frente de onda plano.

Se hizo pasar el haz láser por el filtraje espacial, por medio del pinhole, y después se colocó el doblete acromático a su DFE para garantizar el frente de onda plano, comprobándolo con el interferómetro de desplazamiento lateral de la Fig. 3.9(b), observando un arreglo de franjas de mismo tamaño, al hacerle incidir un haz colimado como se observa en la Fig. 3.9(c). Para regular la intensidad del láser, se ocupó el filtro de densidad neutro para evitar que el sensor CCD se saturara. Se colocó el espejo cóncavo en la posición de diseño Z_L , donde el doblete se situó a una distancia fija de 100mm con respecto el divisor de haz, de igual forma, a esta distancia se colocó el SLM en el brazo de referencia.

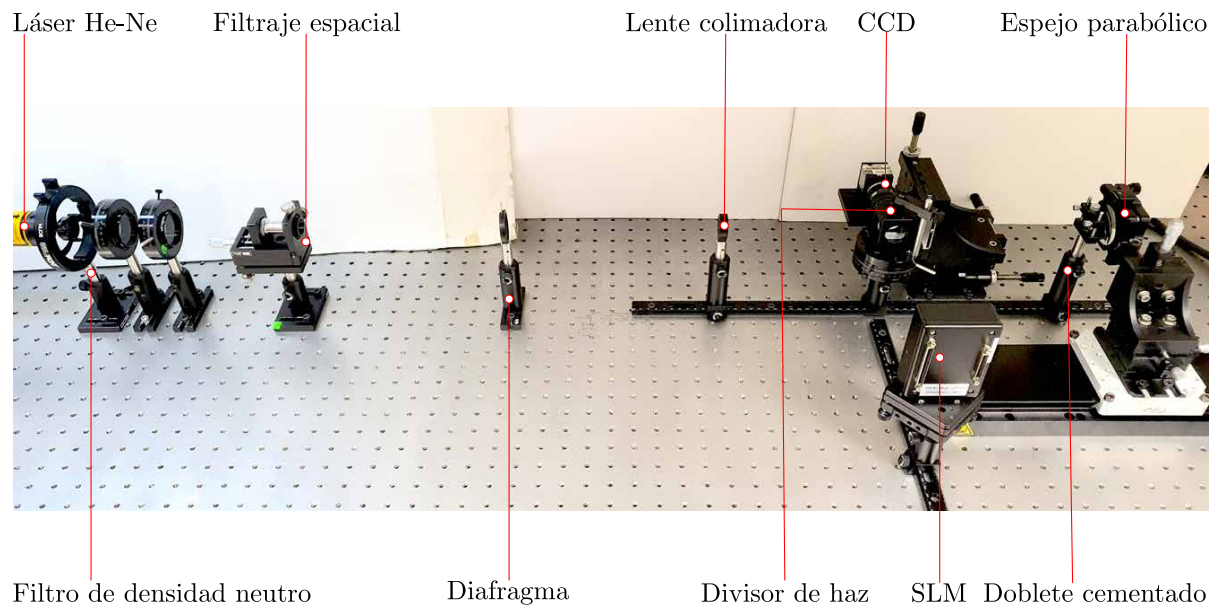


Fig. 3.10 Fotografía del arreglo experimental para la prueba de pantallas nulas de fase para un doblete cementado.

Como la prueba es muy sensible, se utilizaron instrumentos de precisión para manipular los elementos ópticos, en particular el espejo parabólico cóncavo, se colocó sobre una platina de desplazamiento con dos grados de libertad X - Y con una resolución mínima de $0.5\mu\text{m}$, y a su vez sobre otra platina mecánica (Newport®), que permitió el desplazamiento paralelo del eje óptico Z . Se obtuvieron diferentes interferogramas desalineados a lo largo del eje óptico, como los de las Figs. 3.11(a.1) y 3.11(a.2). Se colocó el sensor CCD sobre una platina de desplazamiento con tres grados de libertad, como se observa en la fotografía de la Fig. 3.10. Se alineó el SLM utilizando los tornillos micrométricos de la base donde se colocó, permitiendo la alineación en $\pm X$, como se muestra en las Figs. 3.11(b.1) y 3.11(b.2). Es importante mencionar que la alineación del interferograma nulo, se llevó a cabo de forma conjunta con el espejo parabólico y el SLM previamente alineado a una distancia cercana de la posición de diseño. Resultando así la desalineación mostradas en las Figs. 3.11(c.1) y 3.11(c.2), particularmente están relacionadas con la desalineación del espejo parabólico.

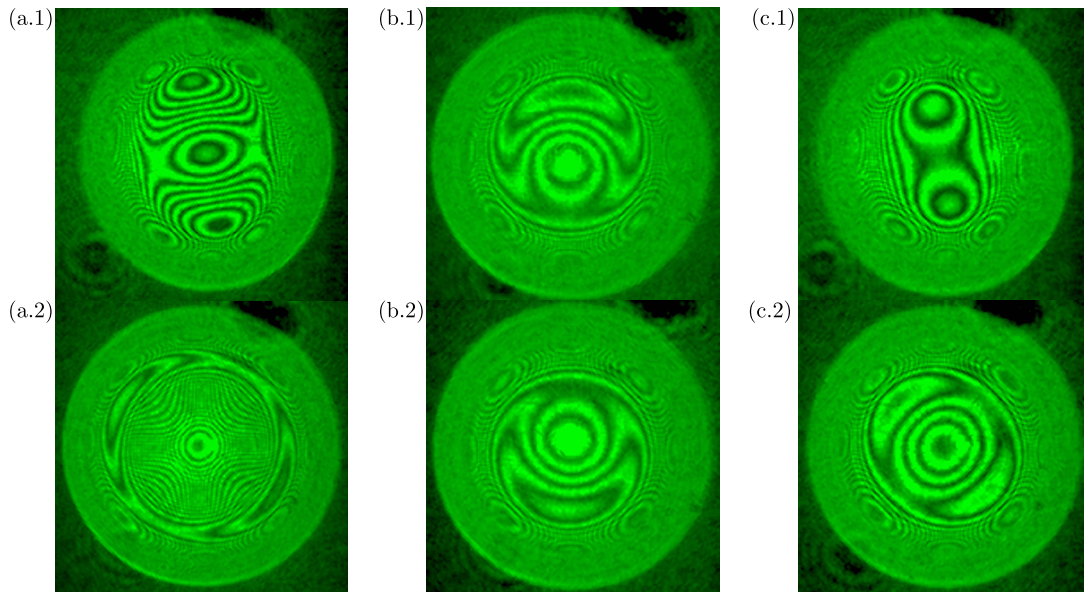


Fig. 3.11 (a) Desalineación del espejo parabólico para diferentes distancias a lo largo del eje óptico. (b) Desalineación del SLM en la posición de diseño Z_L . (c) Desalineación del espejo parabólico en la posición de diseño.

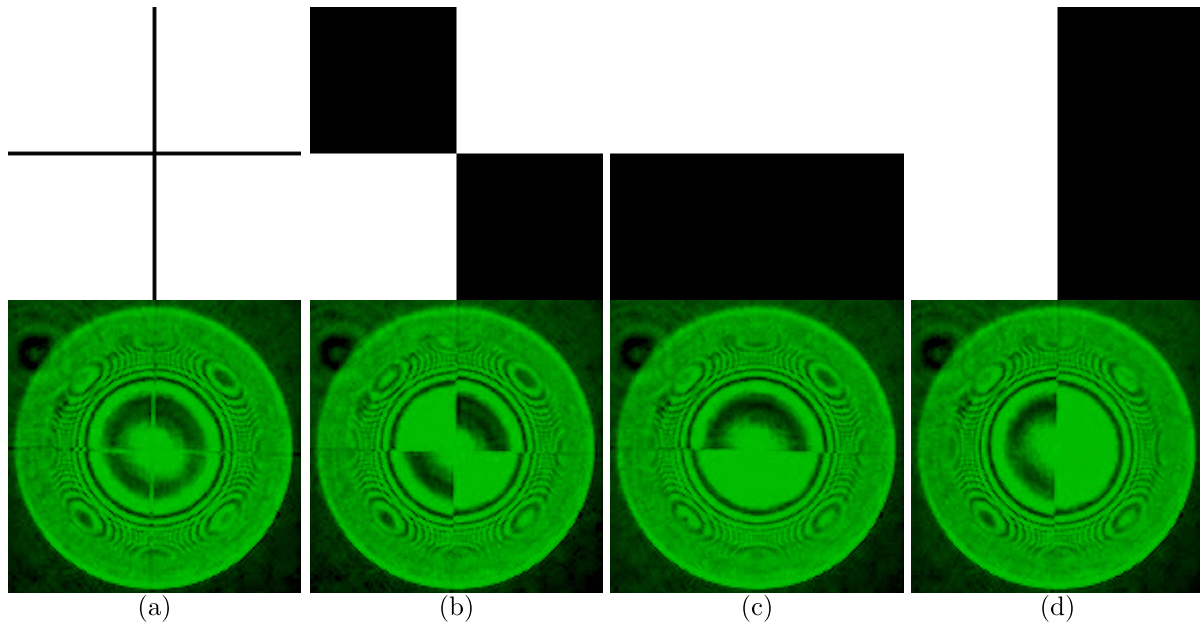


Fig. 3.12 (a) Pantalla en forma de cruz para la alineación en **X-Y** del interferograma nulo. (b) Pantalla en forma de tablero de ajedrez para el cambio de fase en **X-Y** del interferograma nulo. (c) y (d) Cambio de fase para un nivel de gris $ng = 255$ en dirección **X** e **Y**, respectivamente.

Se diseñaron diferentes pantallas binarias con los niveles de gris $ng = \{0, 1\}$, para la alineación en **X-Y** del interferograma nulo, y se desplegaron máscaras en el SLM de tipo cruz y en forma de tablero de ajedrez, como se presentan en las Figs. 3.12(a) y 3.12(b), respectivamente. Se comprobó el cambio de fase del SLM para el máximo central del interferograma nulo, diseñando máscaras binarias en la dirección **X-Y**, como se observa en las Figs. 3.12(c) y 3.12(d). Con base en lo anterior, se aseguró la alineación del sistema óptico, considerando el despliegue de las diferentes pantallas previamente diseñadas. Además se corroboró el funcionamiento correcto del SLM, desplegando las pantallas para diferentes valores de nivel de gris, y permitiendo el cambio de fase para cuando las zonas blancas cambiaron a negras.

3.5 Resultados de la prueba interferométrica

Se implementaron las pantallas nulas de fase para probar un doblete cementado, cuyos parámetros de diseño se encuentran en la Tabla 2.1. Se calculó el área proveniente del doblete cementado, donde la fase es compensada por el espejo parabólico cóncavo, generando el máximo central del interferograma nulo. Asimismo el diámetro de máximo central del interferograma nulo $\mathcal{D}_{\text{máx}}$, el área compensada del doblete cementado $\mathcal{A}_{\text{máx}} = [D - \mathcal{D}_{\text{máx}}]$, porcentaje, evaluado y el coeficiente de aberración esférica b_1 , proporcionado por la Ec. (2.29), se muestran en la Tabla 3.3.

Catálogo Thorlabs®	$[\mathcal{D}_{\text{máx}} \pm 0.5]\text{mm}$	$[\mathcal{A}_{\text{máx}} \pm 0.5]\text{mm}$	%	$b_1[\mu\text{m}]$
AC127-019-A	9.22	3.48	27.40	-0.011041

Tabla 3.3 Parámetros para el diámetro del máximo central de interferograma nulo de referencia, área y porcentaje compensado, y el coeficiente de aberración esférica b_1 .

Si las condiciones son óptimas en la implementación del interferómetro Twyman-Green, la *LCO* estaría asociada a una franja central de interferencia muy grande, donde las diferencias del frente de onda para el área compensada por el espejo parabólico, es aproximadamente λ_D , como se demostró en el Capítulo 2, Sección 2.4, Fig. 2.12. Así, se definió el nivel de gris $ng = 0$ para no obtener un retraso de fase en el máximo central del interferograma nulo, porque la fase es compensada por el espejo parabólico. A partir de las pantallas diseñadas presentadas en la Fig. 3.8, el objetivo es incrementar el diámetro del máximo central del interferograma nulo, definido como $\mathcal{D}_{\text{máx}}$. Con base en lo anterior se obtuvieron los interferogramas nulos para cada pantalla nula de fase diseñada para el doblete cementado **AC127-019-A**. Cabe mencionar que se optó por la cantidad de 6 anillos para las pantallas nulas de fase, por un lado se tiene la condición asociada a la diferencia entre la esfera de referencia y el frente de onda exacto anteriormente calculados, y por otra parte el software del SLM necesita un cierto número de píxeles para desplegar los anillos de las pantallas, debido a la baja resolución del SLM, porque el tamaño de píxel es grande en comparación con el sensor CCD.

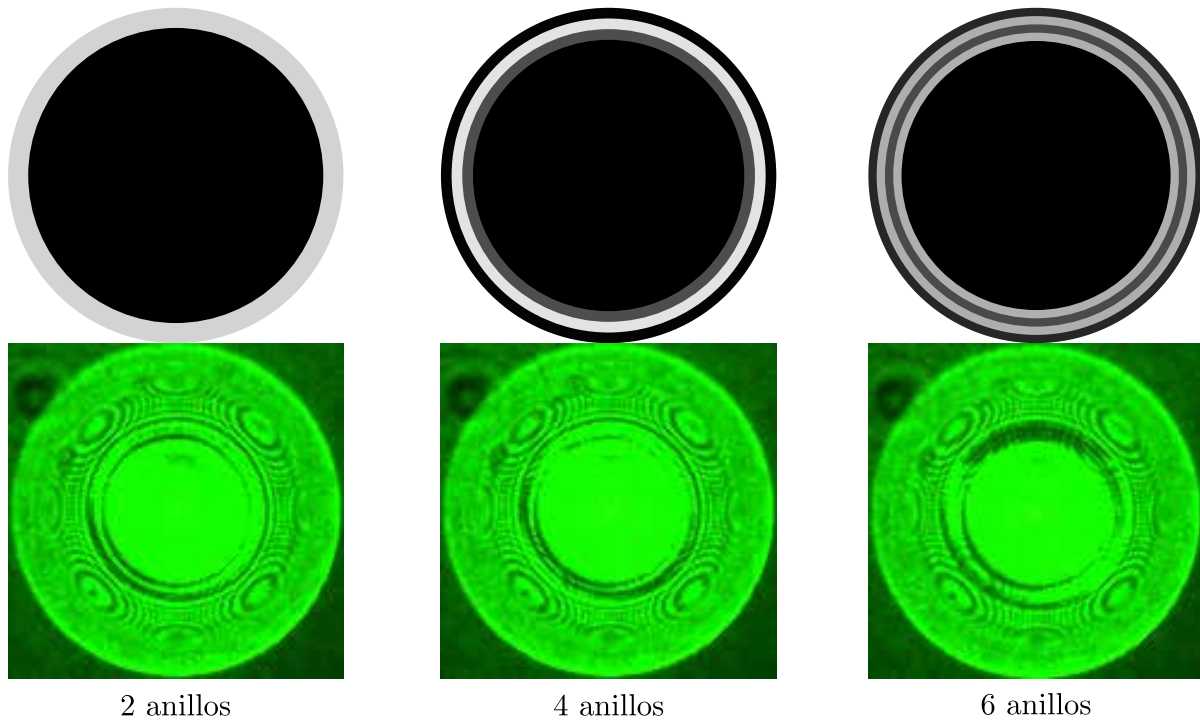


Fig. 3.13 Interferogramas obtenidos para la prueba de pantallas nulas de fase para un doblete cementado **AC127-019-A**, en la posición de diseño $Z_L = [21.51 \pm 0.5]\text{mm}$.

No. Anillos	$[D_{ac} \pm 0.5]\text{mm}$	$[D_{m\acute{a}x} \pm 0.5]\text{mm}$	$[A_{m\acute{a}x} \pm 0.5]\text{mm}$	%
2	1.06	9.24	3.46	27.24
4	1.11	9.14	3.56	28.03
6	1.08	9.20	3.5	27.55

Tabla 3.4 Resultados para el máximo central del interferograma nulo, en función del número de anillos de las pantallas nulas de fase.

Se observó una contribución significativa en el diámetro del máximo central del interferograma nulo, al desplegar las pantallas nulas de fase en el SLM, para 2, 4, y 6 anillos, como se observa en la Fig. 3.13. Aunque fueron imperceptibles para el tamaño de $D_{m\acute{a}x}$. Entonces para cuantificarlo, se realizó el análisis de imágenes, como se presentó anteriormente. Se obtuvieron las imágenes procesadas para determinar el número de píxeles asociados al máximo central para cada interferograma con la pantalla desplegada en el SLM. Se obtuvieron los parámetros definidos como D_{ac} y $D_{m\acute{a}x}$, como se observa en la Fig. 3.14. Se realizó la conversión de $\text{ppx} \rightarrow \text{mm}$ de acuerdo a la Ec. (3.2), para determinar si el diámetro del máximo central del interferograma nulo aumentó ó disminuyó, y se comparó con

respecto al interferograma nulo de referencia, mostrado en la Fig. 3.5. En la Tabla 3.4, se presentan los parámetros calculados para \mathcal{D}_{ac} , $\mathcal{D}_{m\acute{a}x}$, $\mathcal{A}_{m\acute{a}x}$ y el % compensado del frente de onda refractado a través del doblete cementado.

Se obtuvo para la pantalla nula de fase de 2 anillos un valor de $\mathcal{D}_{m\acute{a}x} = [9.24 \pm 0.5]\text{mm}$ para el anillo central, es decir aumentó 0.02mm, en comparación con el máximo central del interferograma nulo de referencia presentado en la Fig. 3.5. Por otra parte, para la pantalla nula de fase de 4 anillos disminuyó 0.08mm, debido que el cambio de fase para el nivel de gris del segundo anillo para la pantalla es mínimo, como se muestra en la Fig. 3.14. Asimismo para la pantalla nula de fase de 6 anillos el cambio de fase para el máximo central del interferograma nulo es mínimo, puesto que se calculó una disminución de 0.02mm para $\mathcal{D}_{m\acute{a}x}$, con respecto al interferograma nulo de referencia, y asociado el nivel de gris del cambio de fase para los anillos externos de la pantalla. Siendo así la pantalla de 2 anillos la que compensa la fase de sobremanera al tener menor cantidad de anillos y un nivel de gris asociado a la fase, resultando un aumento significativo en el diámetro del máximo central del interferograma nulo de referencia, demostrando así los cálculos obtenidos de la diferencia entre los frentes de onda presentados en el Capítulo 2, Sección 2.4, Fig. 2.12.

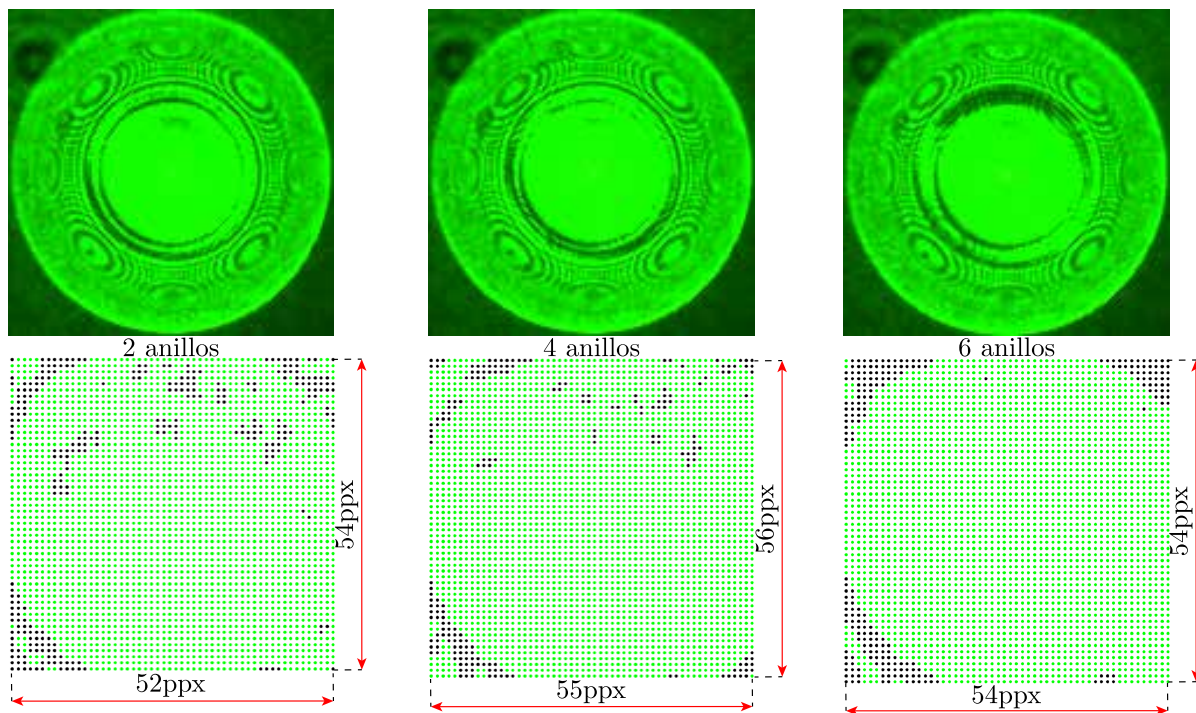


Fig. 3.14 Interferogramas binarizados para diferentes números de anillos asociados a las pantallas nulas de fase para un doblete cementado **AC127-019-A**.

Es importante señalar que el píxel está asociado a dos rayos contiguos, en el plano de incidencia y en el plano donde es reflejado el frente de onda, sobre la superficie del espejo parabólico para el diseño de las pantallas nulas de fase, como se muestra en la Fig. 3.7. El posicionamiento es importante en la prueba interferométrica, porque si el espejo parabólico es ligeramente desplazado, entonces se situará en una distancia donde no se compense la fase, debido que dos rayos contiguos estarían ligeramente separados, y como consecuencia no formarían un píxel entero, si no fracciones de píxel, como un muestreo discreto. Adicionalmente el tamaño de los interferogramas obtenidos con respecto al diseño de las pantallas desplegadas en el SLM, está relacionado con la posición de diseño Z_L , donde la diferencia de LCO es muy pequeña tendiendo cercanamente a cero, es decir no hay retraso de fase para el nivel de gris asignado en las pantallas nulas de fase.

Por último, los movimientos mecánicos de las platinas de desplazamiento en el interferómetro, tienden a un cambio de fase en el interferograma nulo, por muy pequeño que sea el desplazamiento alrededor de la posición de diseño, esto es del orden de longitudes de onda. En otras palabras el máximo central del interferograma nulo cambia de una mancha blanca a una negra. Además, el funcionamiento de la platina de desplazamiento donde se colocó el espejo parabólico, no es un paso continuo, sino que es un retroceso en el mecanismo causado por espacios entre los engranajes que conforman a la platina de desplazamiento, es decir desplazamientos discretos. Por lo tanto, los interferogramas obtenidos no eran constantes debido a la sensibilidad del interferómetro implementado presentado en la Fig. 3.10.

Capítulo 4

Trazo exacto de rayos en dobletes cementados a incidencia oblicua

Históricamente, cuando un haz de luz incide oblicuamente en una superficie esférica refractante, el astigmatismo se introduce debido al proceso de refracción del sistema óptico, por consiguiente la imagen de una fuente puntual formada por una pequeña apertura de la lente, resulta en un par de líneas focales o puntos focales. La primer línea focal se denomina comúnmente *foco sagital*, localizada en un plano transversal al plano de incidencia y apunta hacia el eje de la lente. La segunda línea focal es el *foco tangencial*, que se sitúa en un plano perpendicular al rayo principal. Ambas superficies focales se pueden calcular empleando las ecuaciones de Coddington, que se han derivado en diferentes libros de texto y artículos sobre óptica [21–23, 39–41], considerando una superficie esférica inmersa en dos medios diferentes, de igual forma se ha realizado el análisis considerando espejos o lentes delgadas, que proporcionan fórmulas cerradas para los focos sagitales y tangenciales descritos en las Refs. [17, 42, 43].

En este capítulo seguiremos un procedimiento similar explicado en la Ref. [12], con el fin de proporcionar fórmulas cerradas para describir superficies focales tanto sagitales como tangenciales producidas por un doblete cementado, en función del ángulo de oblicuidad, y fórmulas para representar la propagación del frente de onda fuera de la lente, considerando un frente de onda plano inclinado que incide en un doblete cementado con superficies esféricas. Finalmente, realizaremos una expansión en series de Taylor del frente de onda alrededor del rayo principal, con el fin de proporcionar una aproximación a segundo orden en función del ángulo de oblicuidad.

4.1 Obtención de la superficie cáustica a través de dobletes cementados

Suponiendo un frente de onda plano incide oblicuamente en la primer superficie esférica del doblete cementado, tal que el eje \mathbf{Z} es paralelo al eje óptico, cuyas superficies esféricas están descritas matemáticamente como

$$\mathcal{S}_j(x_j, y_j) = \left[\mathcal{R}_j \left(1 - \sqrt{1 - c_j^2 [x^2 + y^2]} \right) + t_{j-1}, y \right] \text{ con } j = \{1, 2, 3\}, \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{R}_j = 1/c_j$ son los radios de curvatura para cada superficie que conforman el doblete cementado, t_{j-1} son los espesores axiales y hemos definido a $t_0 = 0$ para la primer superficie esférica. Adicionalmente, se han considerado los índices de refracción n_1 y n_2 para cada lente constituida por el doblete cementado, inmersa en dos medios diferentes con índices de refracción n_o y n_i , cuyos subíndices significan *objeto* e *imagen*, respectivamente. Cabe mencionar que se empleará la convención de signos sugerida en la Ref. [17]. Se considera un punto \mathbf{P}_1 donde los rayos incidentes interceptan la primer superficie esférica, con coordenadas $\mathbf{P}_1 = [x_1, y_1, S_1(x_1, y_1)]$, y el rayo será refractado dentro del doblete cementado a lo largo de la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{R}}_1$, dado por

$$\hat{\mathbf{R}}_1 = \gamma_1 \hat{\mathbf{I}}_1 + \left[\sqrt{1 - \gamma_1^2 [1 - (\hat{\mathbf{I}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1)^2]} - \gamma_1 (\hat{\mathbf{I}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_1) \right] \hat{\mathbf{N}}_1, \quad (4.2)$$

donde $\gamma_1 = n_o/n_1$. Se consideró que $\hat{\mathbf{I}}_1$ es el vector unitario que representa la dirección del rayo incidente, y $\hat{\mathbf{N}}_1$ es el vector normal unitario de la primer superficie esférica.

Sin pérdida de generalidad, se considera un conjunto de rayos paralelos propagándose de manera oblicua al eje óptico en un plano meridional \mathbf{X} - \mathbf{Z} , siendo θ el ángulo de inclinación u oblicuidad entre los rayos y el eje \mathbf{Z} , representado en la Fig. 4.1(a), considerando la Ec. (4.1) para $S_1(x_1, y_1)$, se obtiene

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \begin{cases} \left[-c_1 x_1, -c_1 y_1, c_1 \sqrt{\mathcal{R}_1^2 - (x_1^2 + y_1^2)} \right], & \text{si } \mathcal{R}_1 > 0, \\ \left[-c_1 x_1, -c_1 y_1, -c_1 \sqrt{\mathcal{R}_1^2 - (x_1^2 + y_1^2)} \right], & \text{si } \mathcal{R}_1 < 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_1 = \left[\text{sen}[\theta], 0, \text{cos}[\theta] \right].$$

La Ec. (4.2) es la ley de Snell en su forma vectorial, sustituyendo los cosenos directores de la Ec. (4.3) en la Ec. (4.2), se obtiene $\hat{\mathbf{R}}_1 = [R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}]$. Así la evolución espacial para los rayos refractados a través de la primer superficie esférica del doblete cementado, se expresa como

$$\mathbf{X}_1 = \left[X_{1x}, X_{1y}, X_{1z} \right] = \mathbf{P}_1 + \lambda_1 \hat{\mathbf{R}}_1, \quad (4.4)$$

donde el parámetro λ_1 representa la distancia arbitraria, desde el punto de incidencia en la primer superficie $S_1(x_1, y_1)$, a un punto distante dentro del doblete cementado, propagado a lo largo de $\hat{\mathbf{R}}_1$. Como es bien conocido, la Ec. (4.4) representa matemáticamente el Principio de Huygens. Alternativamente, la Ec. (4.4) representa un mapeo entre los puntos del plano de incidencia $z = 0$, y los puntos dentro del doblete cementado que cumplen con $\lambda_1 \leq t_1$.

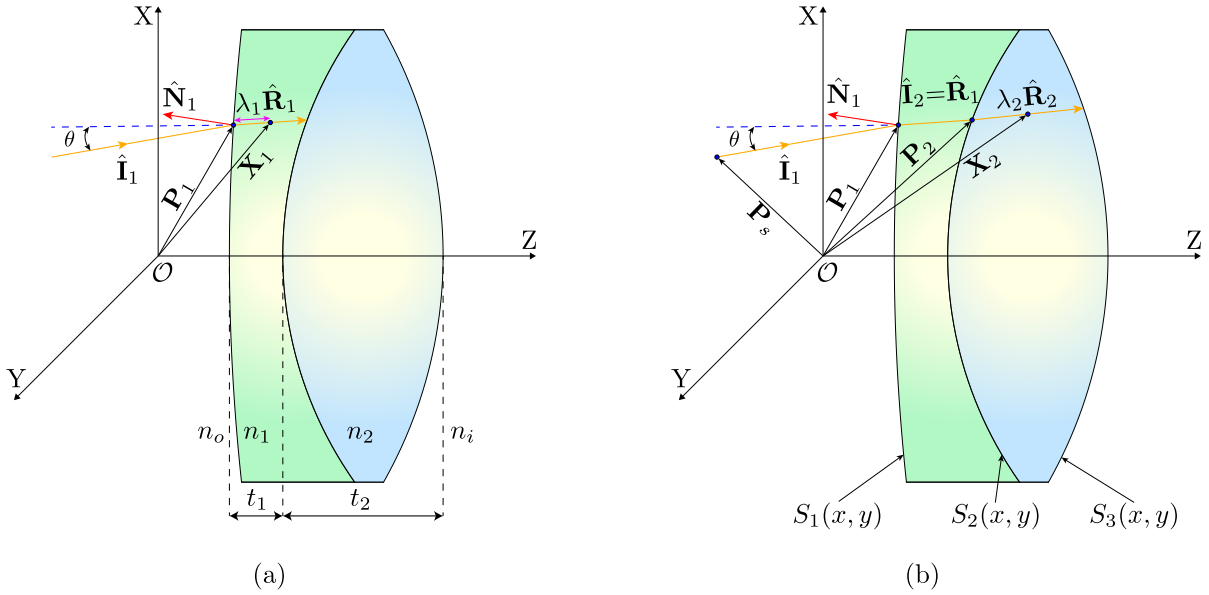


Fig. 4.1 Proceso de refracción a través de un doblete cementado suponiendo un frente de onda plano incidiendo de forma oblicua y sus parámetros asociados a la (a) primer superficie esférica y para la (b) segunda superficie esférica.

El objetivo es obtener explícitamente una fórmula analítica que describa el comportamiento de los rayos refractados fuera del doblete cementado, para ello se obtiene la distancia interna entre los puntos de incidencia en la primer superficie esférica y propagarlos a la segunda superficie esférica. Se extiende el rayo refractado desde el punto $\mathbf{P}_1 = [x_1, y_1, S_1(x_1, y_1)]$ a $\mathbf{P}_2 = [x_2, y_2, S_2(x_2, y_2)]$, como se muestra en la Fig. 4.1(b). Es decir se evalúa la Ec. (4.4) para \mathbf{P}_2 y se obtiene explícitamente $[x_2, y_2]$, donde los rayos serán propagados en la segunda lente, matemáticamente se resuelve $\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}_2$, resultando

$$\left\{ x_2 = x_1 + \lambda_1 R_{1x}, \quad y_2 = y_1 + \lambda_1 R_{1y}, \quad S_2(x_2, y_2) = S_1(x_1, y_1) + \lambda_1 R_{1z} \right\}. \quad (4.5)$$

Se obtiene directamente el parámetro $\lambda_1 = [S_2(x_2, y_2) - S_1(x_1, y_1)] / R_{1z}$ en la Ec. (4.5). Además, de las dos primeras expresiones de la Ec. (4.5), se obtienen las coordenadas para la segunda superficie esférica, donde el rayo se refractará en la segunda lente con índice de refracción n_2 . Imponiendo la condición para λ_1 , obtenida anteriormente, y reduciendo términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + \left\{ t_1 + \mathcal{R}_2 \left[1 - \sqrt{1 - c_2^2(x_2^2 + y_2^2)} \right] - S_1(x_1, y_1) \right\} \left[\frac{R_{1x}}{R_{1z}} \right], \\
y_2 &= y_1 + \left\{ t_1 + \mathcal{R}_2 \left[1 - \sqrt{1 - c_2^2(x_2^2 + y_2^2)} \right] - S_1(x_1, y_1) \right\} \left[\frac{R_{1y}}{R_{1z}} \right],
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $S_1(x_1, y_1)$ se ha definido en la Ec. (4.1), considerando $j = 1$. Resolviendo la Ec. (4.6) para x_2 y y_2 , se obtiene la correspondencia entre puntos de la primer y segunda superficie esférica, obteniendo implícitamente

$$\begin{aligned}
x_{2\pm} &= (R_{1y}^2 + R_{1z}^2)x_1 + R_{1x} \{ R_{1z} [t_1 + \mathcal{R}_2 - S_1(x_1, y_1)] - R_{1y}y_1 \pm \Lambda_1 \}, \\
y_{2\pm} &= (R_{1x}^2 + R_{1z}^2)y_1 + R_{1y} \{ R_{1z} [t_1 + \mathcal{R}_2 - S_1(x_1, y_1)] - R_{1x}x_1 \pm \Lambda_1 \}, \\
\lambda_{1\pm} &= [S_2(x_{2\pm}, y_{2\pm}) - S_1(x_1, y_1)] / R_{1z},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $\Lambda_1 > 0$ si $\mathcal{R}_1 < 0$ y $\mathcal{R}_2 < 0$ ó $\mathcal{R}_1 > 0$ y $\mathcal{R}_2 < 0$, por otra parte para $\Lambda_1 < 0$ si $\mathcal{R}_1 > 0$ y $\mathcal{R}_2 > 0$ ó $\mathcal{R}_1 < 0$ y $\mathcal{R}_2 > 0$. Además se ha utilizado la propiedad de los cosenos directores $R_{1x}^2 + R_{1y}^2 + R_{1z}^2 = 1$, y se ha definido

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^2 &= (t_1 + 2\mathcal{R}_2 - S_1)(S_1 - t_1) - (R_{1y}x_1 - R_{1x}y_1)^2 - 2R_{1z}(t_1 + \mathcal{R}_2 - S_1)(R_{1x}x_1 + R_{1y}y_1) \\
&\quad + R_{1z}^2 \left[\mathcal{R}_2^2 - (x_1^2 + y_1^2) + t_1^2 + S_1^2 - 2(\mathcal{R}_2[S_1 - t_1] + t_1 S_1) \right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Normalmente la solución para la Ec. (4.6), se obtiene analíticamente dependiendo del grado de la ecuación que describe la segunda superficie esférica. Es decir para superficies cuadráticas y lineales. Además, si $\Lambda_1^2 \leq 0$, significa físicamente una contribución de reflexión total interna (RTI) en la primer superficie esférica, relacionado directamente con el ángulo de incidencia en función de las coordenadas $\mathbf{P}_1 = [x_1, y_1, S_1(x_1, y_1)]$. Entonces estos rayos no serán propagados a la segunda superficie esférica y reducirá la apertura de entrada. Esto es la solución analítica para la Ec. (4.7), obteniendo valores para (x_{2+}, y_{2+}) y (x_{2-}, y_{2-}) , de acuerdo a Λ_1 . Para describir la evolución del rayo refractado dentro de la segunda lente, se sigue un proceso similar a la primer refracción, matemáticamente se expresa como

$$\hat{\mathbf{R}}_2 = \gamma_2 \hat{\mathbf{I}}_2 + \left[\sqrt{1 - \gamma_2^2 \left[1 - (\hat{\mathbf{I}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2)^2 \right]} - \gamma_2 (\hat{\mathbf{I}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2) \right] \hat{\mathbf{N}}_2, \tag{4.9}$$

donde $\gamma_2 = n_1/n_2$. Se definió $\hat{\mathbf{I}}_2$ como el rayo vector incidente en la segunda superficie esférica, que coincide con la dirección de $\hat{\mathbf{R}}_1$, y $\hat{\mathbf{N}}_2$ representa el vector normal unitario evaluado en el punto $\mathbf{P}_2 = [x_2, y_2, S_2(x_2, y_2)]$, considerando $j = 2$. De acuerdo a las Ecs. (4.1) y (4.2), se obtiene

$$\hat{\mathbf{N}}_2 = \begin{cases} \left[-c_2 x_2, -c_2 y_2, c_2 \sqrt{\mathcal{R}_2^2 - (x_2^2 + y_2^2)} \right], & \text{si } \mathcal{R}_2 > 0, \\ \left[-c_2 x_2, -c_2 y_2, -c_2 \sqrt{\mathcal{R}_2^2 - (x_2^2 + y_2^2)} \right], & \text{si } \mathcal{R}_2 < 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_2 = [R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}].$$

La evolución espacial para los rayos refractados dentro de la segunda lente se expresa como

$$\mathbf{X}_2 = [X_{2x}, X_{2y}, X_{2z}] = \mathbf{P}_2 + \lambda_2 \hat{\mathbf{R}}_2, \quad (4.11)$$

donde λ_2 representa una distancia arbitraria desde el punto de incidencia en la segunda superficie esférica, a un punto distante en la tercer superficie esférica, propagándose a lo largo del rayo refractado $\hat{\mathbf{R}}_2 = [R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}]$, como se muestra en la Fig. 4.2(a). Asimismo la Ec. (4.11), representa matemáticamente el Principio de Huygens para la segunda refracción dentro de la segunda lente, y un mapeo alterno entre los puntos del plano de incidencia ($z = 0$), y los puntos que cumplan la condición de $\lambda_2 \leq (t_1 + t_2)$. Se obtiene explícitamente una fórmula analítica para describir el comportamiento de los rayos refractados dentro de la segunda lente, calculando la distancia interna entre los puntos refractados en la segunda superficie esférica y propagarlos a la tercer superficie esférica, extendiendo el rayo refractado desde $\mathbf{P}_2 = [x_2, y_2, S_2(x_2, y_2)]$ a $\mathbf{P}_3 = [x_3, y_3, S_3(x_3, y_3)]$, representado en la Fig. 4.2(b). Entonces se evalúa la Ec. (4.11) en \mathbf{P}_3 , y resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones obtenemos explícitamente a x_3 y y_3 , esto es

$$\left\{ \begin{aligned} x_3 &= x_2 + \lambda_2 R_{2x}, & y_3 &= y_2 + \lambda_2 R_{2y}, & S_3(x_3, y_3) &= S_2(x_2, y_2) + \lambda_2 R_{2z} \end{aligned} \right\}, \quad (4.12)$$

donde se deduce el parámetro $\lambda_2 = [S_3(x_3, y_3) - S_2(x_2, y_2)] / R_{2z}$, e imponiendo ésta condición, se obtiene

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + \left\{ (t_1 + t_2) + \mathcal{R}_3 \left[1 - \sqrt{1 - c_3^2(x_3^2 + y_3^2)} \right] - S_2(x_2, y_2) \right\} \left[\frac{R_{2x}}{R_{2z}} \right], \\ y_3 &= y_2 + \left\{ (t_1 + t_2) + \mathcal{R}_3 \left[1 - \sqrt{1 - c_3^2(x_3^2 + y_3^2)} \right] - S_2(x_2, y_2) \right\} \left[\frac{R_{2y}}{R_{2z}} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $S_3(x_3, y_3)$ está definida en la Ec. (4.1), considerando $j = 3$. Resolviendo la Ec. (4.13) para x_3 y y_3 , se obtiene implícitamente

$$\begin{aligned}
x_{3\pm} &= (R_{2y}^2 + R_{2z}^2)x_2 + R_{2x} \{R_{2z} [(t_1 + t_2) + \mathcal{R}_3 - S_2(x_2, y_2)] - R_{2y}y_2 \pm \Lambda_2\}, \\
y_{3\pm} &= (R_{2x}^2 + R_{2z}^2)y_2 + R_{2y} \{R_{2z} [(t_1 + t_2) + \mathcal{R}_3 - S_2(x_2, y_2)] - R_{2x}x_2 \pm \Lambda_2\}, \\
\lambda_{2\pm} &= [S_3(x_{3\pm}, y_{3\pm}) - S_2(x_2, y_2)] / R_{2z},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $\Lambda_2 > 0$ si $\mathcal{R}_1 \leq 0$, $\mathcal{R}_2 \leq 0$ y $\mathcal{R}_3 < 0$, por el contrario $\Lambda_2 < 0$ si $\mathcal{R}_1 \leq 0$, $\mathcal{R}_2 \leq 0$ y $\mathcal{R}_3 > 0$. La Ec. (4.14) proporciona la correspondencia entre los puntos en la segunda y tercer superficie esférica, y utilizando la propiedad de los cosenos directores para $\hat{\mathbf{R}}_2$, esto es $R_{2x}^2 + R_{2y}^2 + R_{2z}^2 = 1$, se ha definido

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^2 &= [(t_1 + t_2) + 2\mathcal{R}_3 - S_2] [S_2 - (t_1 + t_2)] - (R_{2y}x_2 - R_{2x}y_2)^2 - 2R_{2z} [(t_1 + t_2) + \mathcal{R}_3 - S_2] \\
&\quad \times (R_{2x}x_2 + R_{2y}y_2) + R_{2z}^2 [\mathcal{R}_3^2 - (x_2^2 + y_2^2) + (t_1 + t_2)^2 + S_2^2 - 2(\mathcal{R}_3[S_2 - (t_1 + t_2)] + (t_1 \\
&\quad + t_2)S_2)].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Si $\Lambda_2^2 \leq 0$, se obtiene la propiedad de RTI en la segunda superficie esférica y está directamente relacionada con el ángulo de incidencia, en función de las coordenadas del punto \mathbf{P}_2 .

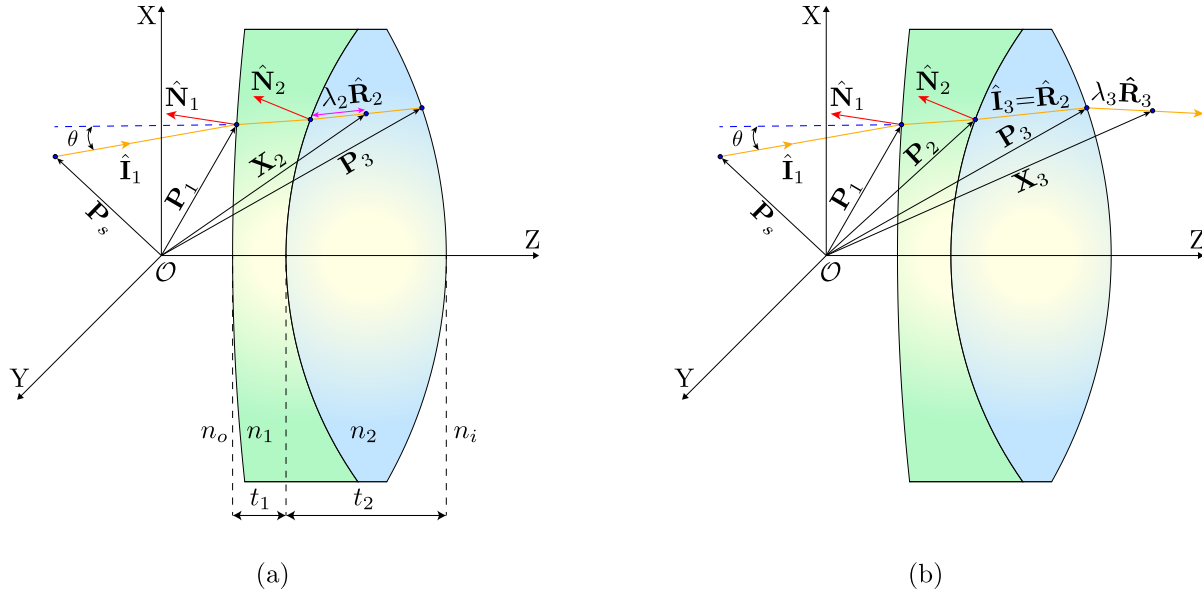


Fig. 4.2 Proceso de refracción a través de un doblete cementado suponiendo un frente de onda plano incidiendo de forma oblicua y sus parámetros asociados a la (a) segunda superficie esférica y para la (b) tercer superficie esférica.

Por último, una expresión que describe formalmente la evolución de los rayos propagados fuera del doblete cementado, se sigue el procedimiento anteriormente descrito, entonces la ecuación del rayo

refractado fuera del doblete cementado es representado como

$$\hat{\mathbf{R}}_3 = \gamma_3 \hat{\mathbf{I}}_3 + \left[\sqrt{1 - \gamma_3^2 [1 - (\hat{\mathbf{I}}_3 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3)^2]} - \gamma_3 (\hat{\mathbf{I}}_3 \cdot \hat{\mathbf{N}}_3) \right] \hat{\mathbf{N}}_3, \quad (4.16)$$

donde $\gamma_3 = n_2/n_i$, $\hat{\mathbf{I}}_3$ es el vector unitario incidente en la tercer superficie esférica, coincidiendo con la dirección del rayo refractado $\hat{\mathbf{R}}_2$. Asimismo $\hat{\mathbf{N}}_3$ es el vector normal unitario evaluado en el punto \mathbf{P}_3 , conforme a las Ecs. (4.1) y (4.9), se obtiene

$$\hat{\mathbf{N}}_3 = \begin{cases} \left[-c_3 x_3, -c_3 y_3, c_3 \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - (x_3^2 + y_3^2)} \right], & \text{si } \mathcal{R}_3 > 0, \\ \left[-c_3 x_3, -c_3 y_3, -c_3 \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - (x_3^2 + y_3^2)} \right], & \text{si } \mathcal{R}_3 < 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_3 = [R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}].$$

Matemáticamente la propagación de los rayos refractados fuera del doblete cementado, se expresa como

$$\mathbf{X}_3 = [X_{3x}, X_{3y}, X_{3z}] = \mathbf{P}_3 + \lambda_3 \hat{\mathbf{R}}_3, \quad (4.18)$$

donde λ_3 es una distancia arbitraria desde el punto de incidencia en la tercer superficie esférica a un punto lejano fuera del doblete cementado, propagándose a lo largo del rayo refractado $\hat{\mathbf{R}}_3 = [R_{3x}, R_{3y}, R_{3z}]$, como se muestra en la Fig. 4.2(b).

Con base en la teoría desarrollada previamente, se obtiene analíticamente las superficies cáusticas refractadas a través del doblete cementado, considerando la definición de conjunto crítico producido por un mapeo entre subconjuntos de \mathbb{R}^3 , en correspondencia con el principio de conservación de la densidad de flujo a lo largo de un tubo infinitesimal de rayos en un sistema óptico, como se describe en la Ref. [12]. En otras palabras se obtienen las singularidades del mapeo que describe la evolución de los rayos refractados, calculando la matriz Jacobiana de la transformación desde el espacio objeto al espacio imagen, de acuerdo a la Ec. (4.18), obteniendo así

$$\det \left(\mathcal{J}_{\mathbf{X}_3} [x_1, y_1, \lambda_3] \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_{3x}}{\partial x_1} & \frac{\partial X_{3y}}{\partial x_1} & \frac{\partial X_{3z}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_{3x}}{\partial y_1} & \frac{\partial X_{3y}}{\partial y_1} & \frac{\partial X_{3z}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial X_{3x}}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial X_{3y}}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial X_{3z}}{\partial \lambda_3} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

De esta forma, las superficies cáusticas se obtienen a través de la siguiente ecuación

$$\mathbf{C}_{\pm} = \mathbf{P}_3 + \lambda_{\pm} \hat{\mathbf{R}}_3, \quad (4.20)$$

donde los valores para λ_{\pm} , se obtienen considerando la Ec. (4.19), y suponiendo $\lambda_3 \rightarrow \lambda$, simplificando

$$\mathcal{C}_2 \lambda^2 + \mathcal{C}_1 \lambda + \mathcal{C}_0 = 0, \quad (4.21)$$

donde se han definido los coeficientes \mathcal{C}_j , con $j = \{0, 1, 2\}$, como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= \hat{\mathbf{R}}_3 \cdot \left(\left[\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_3}{\partial x_1} \right] \times \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_3}{\partial y_1} \right] \right), \\ \mathcal{C}_1 &= \hat{\mathbf{R}}_3 \cdot \left(\left[\frac{\partial \mathbf{P}_3}{\partial x_1} \right] \times \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_3}{\partial y_1} \right] + \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_3}{\partial x_1} \right] \times \left[\frac{\partial \mathbf{P}_3}{\partial y_1} \right] \right), \\ \mathcal{C}_0 &= \hat{\mathbf{R}}_3 \cdot \left(\left[\frac{\partial \mathbf{P}_3}{\partial x_1} \right] \times \left[\frac{\partial \mathbf{P}_3}{\partial y_1} \right] \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Resolviendo la Ec. (4.21) para λ y sustituyéndola en la Ec. (4.20), se obtiene

$$\mathbf{C}_{\pm} = \mathbf{P}_3 + \left[- \left(\frac{\mathcal{C}_1}{2\mathcal{C}_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{C}_1}{2\mathcal{C}_2} \right)^2 - \left(\frac{\mathcal{C}_0}{\mathcal{C}_2} \right)} \right] \hat{\mathbf{R}}_3. \quad (4.23)$$

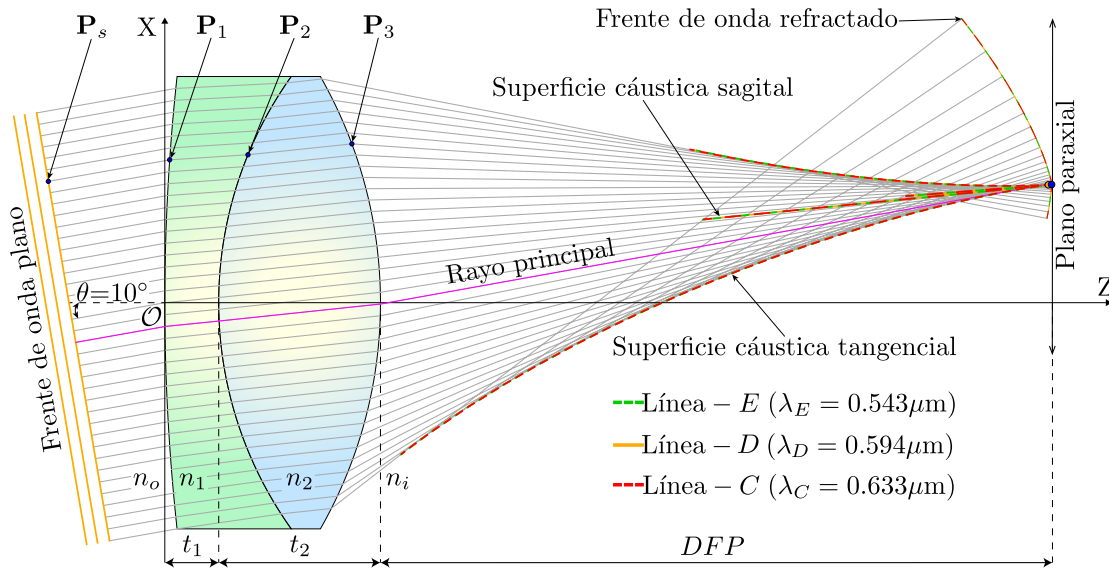


Fig. 4.3 Trazo exacto de rayos considerando un frente de onda plano incidiendo de forma oblicua respecto al eje óptico, propagándose a través de un doblete cementado centrado en λ_D . En particular, el diafragma de apertura está localizado en la tercer superficie de la lente.

Tradicionalmente C_+ está asociado al lugar geométrico donde se forma la *cáustica sagital*, esto es

$$C_{\text{sag}} = \mathbf{P}_3 - \left[\left(\frac{C_1}{2C_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{C_1}{2C_2} \right)^2 - \left(\frac{C_0}{C_2} \right)} \right] \hat{\mathbf{R}}_3. \quad (4.24)$$

La cáustica sagital producida por un doblete cementado, resulta un segmento de línea recta en el eje óptico considerando un frente de onda plano a incidencia normal, y está relacionada con la cantidad de AEL producida por el mismo, como se describe en la Ref. [7]. Por el contrario considerando un frente de onda plano inclinado que incide sobre el doblete cementado, la cáustica sagital tiene una forma plana asimétrica cerca del rayo principal con dos ramas, limitada por los rayos marginales tanto superior como inferior. Normalmente la parte inferior de la cáustica sagital está formada por los rayos refractados de la parte superior del doblete y viceversa, como se muestra en las Fig. 4.3.

Por otro lado considerando C_- , se obtiene el lugar geométrico donde se forma la *cáustica tangencial*, alrededor de la cáustica sagital para un frente de onda plano inclinado incidiendo de forma oblicua en el doblete cementado, formando una superficie asimétrica centrada alrededor del rayo principal, como se aprecia en la Fig. 4.3, matemáticamente se define como

$$C_{\text{tan}} = \mathbf{P}_3 - \left[\left(\frac{C_1}{2C_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{C_1}{2C_2} \right)^2 - \left(\frac{C_0}{C_2} \right)} \right] \hat{\mathbf{R}}_3. \quad (4.25)$$

Si la condición $\left[\left(C_1/2C_2 \right)^2 - \left(C_0/C_2 \right) \right] \leq 0$ se satisface, entonces los rayos no se refractan por el doblete cementado debido por la condición de RTI. Físicamente se representa en la parte inferior del doblete cementado si el ángulo de oblicuidad es $\theta > 0$ y viceversa. O puede presentarse simultáneamente en ambos hemisferios del doblete cementado, reduciendo la apertura de entrada del doblete cementado como se muestra en los ejemplos de la Fig. 4.8(b), (c), (f) y (h), respectivamente.

El *rayo principal* se define como el rayo que pasa por el centro del diafragma. En ausencia de aberraciones, el rayo principal también pasa por el centro de las pupilas de entrada y salida. A medida que aumenta el ángulo de oblicuidad, se limita el paso de algunos de los rayos del cono de luz, causando así que el diafragma no se llene completamente [21, 23, 44]. Adicionalmente, se define el *rayo principal paraxial*, como el rayo que pasa exactamente por el centro de la apertura y las pupilas de entrada y salida paraxiales. No obstante, en este trabajo se definirá como el rayo que intercepta tanto el foco sagital como el foco tangencial, de acuerdo a la Ref. [45], de esta forma se calcula en eje suponiendo las coordenadas $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Esto es cuando el frente de onda incide en eje, y dicha condición se satisface para ángulos pequeños, matemáticamente se expresa $\text{sen}[\theta] \approx \theta$ o $\text{tan}[\theta] \approx \theta$. Más aún para ángulos mayores, el rayo principal no pasará a través del punto $(x_1, y_1) \approx (0, 0)$, por lo que se encontrará en una posición arbitraria en la primer superficie esférica del doblete cementado.

Para el trazo de rayos, se utilizó el doblete cementado **AC127-019-A**, cuyos parámetros de diseño se

muestran en la Tabla 2.1, suponiendo un ángulo de oblicuidad de $\theta = 10^\circ$, como se observa en la Fig. 4.4. Es importante mencionar que tradicionalmente no se utiliza esta configuración del doblete cementado y solamente por fines prácticos, se ejemplificó para mostrar gráficamente las superficies cóusticas sagital y tangencial.

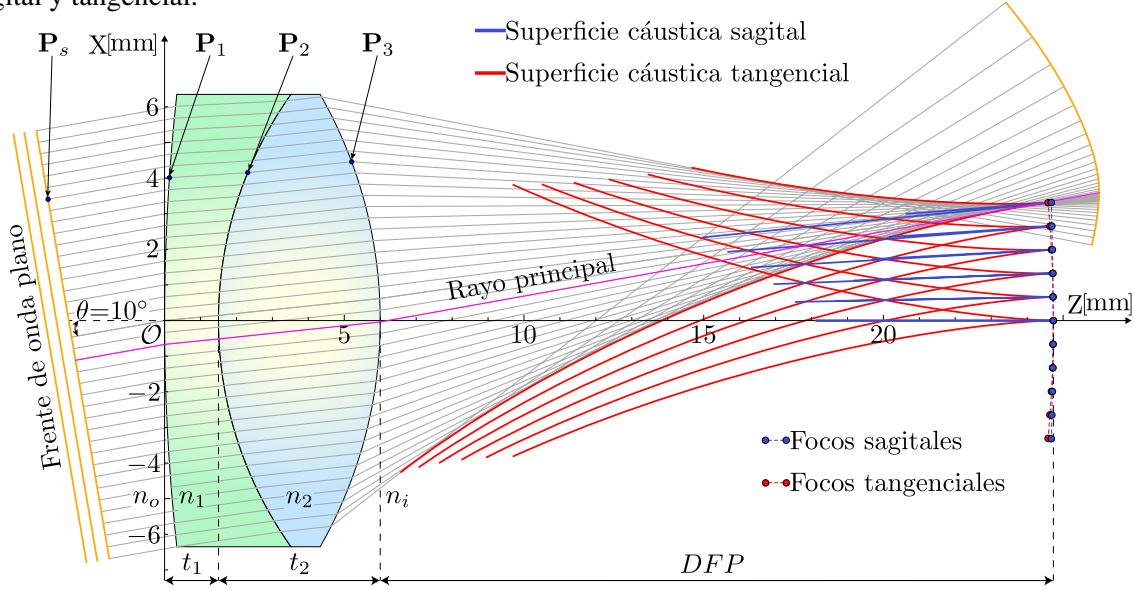


Fig. 4.4 Representación gráfica de las superficies cóusticas tangenciales y sagitales mostradas en un plano meridional de un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, suponiendo diferentes ángulos de oblicuidad $\theta = 10^\circ$ para un frente de onda plano inclinado, considerando el diaphragma de apertura localizado en la tercer superficie de la lente.

4.2 Obtención del frente de onda refractado a través de dobletes cementados

Una forma de representar analíticamente el frente de onda refractado, a través de un doblete cementado para distancias arbitrarias \mathcal{L} a lo largo del eje óptico, es considerando la LCO para un rayo refractado desde una fuente puntual $\mathbf{P}_s = [x_0, y_0, S_0(x_0, y_0)]$ al punto $\mathbf{X}_3 = [X_{3x}, X_{3y}, X_{3z}]$, como se observa en la Fig. 4.2. Se describe como

$$\Phi = n_o [\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_s] \cdot \hat{\mathbf{I}}_1 + n_1 [\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1] \cdot \hat{\mathbf{R}}_1 + n_2 [\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2] \cdot \hat{\mathbf{R}}_2 + n_i [\mathbf{X}_3 - \mathbf{P}_3] \cdot \hat{\mathbf{R}}_3. \quad (4.26)$$

El frente de onda refractado es definido por su LCO , considerando la condición $LCO = n_i \mathcal{L}_i$, esto es

$$n_i \mathcal{L}_i = n_o \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_s\| + n_1 \|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\| + n_2 \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2\| + n_i [\mathbf{X}_3 - \mathbf{P}_3] \cdot \hat{\mathbf{R}}_3, \quad (4.27)$$

donde \mathcal{L} es una distancia arbitraria de propagación del frente de onda refractado. Como ejemplo, el frente de onda de fase cero (*archetype*), supone un ángulo de oblicuidad $\theta=0$, dado por $\mathcal{L} = [n_2/n_i] (t_1 + t_2)$. En la Ec. (4.27), los puntos \mathbf{X}_3 pertenecen al frente de onda refractado y satisfacen lo siguiente

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_3 + \left[\mathcal{L} - \gamma_0 \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_s\| - \gamma_2 \|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\| - \gamma_3 \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2\| \right] \hat{\mathbf{R}}_3, \quad (4.28)$$

donde $\gamma_0 = n_o/n_i$, γ_2 y γ_3 están definidas en las Ecs. (4.9) y (4.16) respectivamente. Además, se renombró $\mathbf{X}_3 \rightarrow \mathbf{W}$ de la Ec. (4.28), para describir la evolución del frente de onda refractado a través de un doblete cementado. Alternativamente de la Ec. (4.28), se calculan las superficies cónicas asociadas a los frentes de onda refractados, considerando un mapeo entre dos subconjuntos de \mathbb{R}^3 , donde $[x_1, y_1, \mathcal{L}]$ es un conjunto de variables independientes en el espacio objeto, por el contrario $\mathbf{X}_3 = [X_{3x}, X_{3y}, X_{3z}]$ es un conjunto perteneciente al espacio imagen. Sin pérdida de generalidad, se puede simular un frente de onda plano inclinado propagándose a lo largo del ángulo de oblicuidad θ , considerando la fuente puntual localizada en infinito como se muestra en la Fig. 4.5, se describe paramétricamente como

$$\mathbf{P}_s = [x_1, y_1, -x_1 \tan[\theta] - 1]. \quad (4.29)$$

La Ec. (4.29) representa un frente de onda plano trasladado a lo largo del eje Z . Es importante mencionar que el frente de onda de fase cero es el único frente de onda en el espacio imagen, cuya LCO medido desde el punto objeto es nulo [46]. Su ubicación es la distancia geométrica asociada al rayo principal, $\mathcal{L}_0 = \gamma_0 \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_s\| + \gamma_2 \|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\| + \gamma_3 \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2\|$, siendo refractado por la tercer superficie esférica, dando lugar al siguiente frente de onda sucesivo en el espacio imagen. Además el rayo correspondiente al frente de onda de fase cero proporciona el vértice, cuya longitud \mathcal{L}_0 puede ser calculada numéricamente.

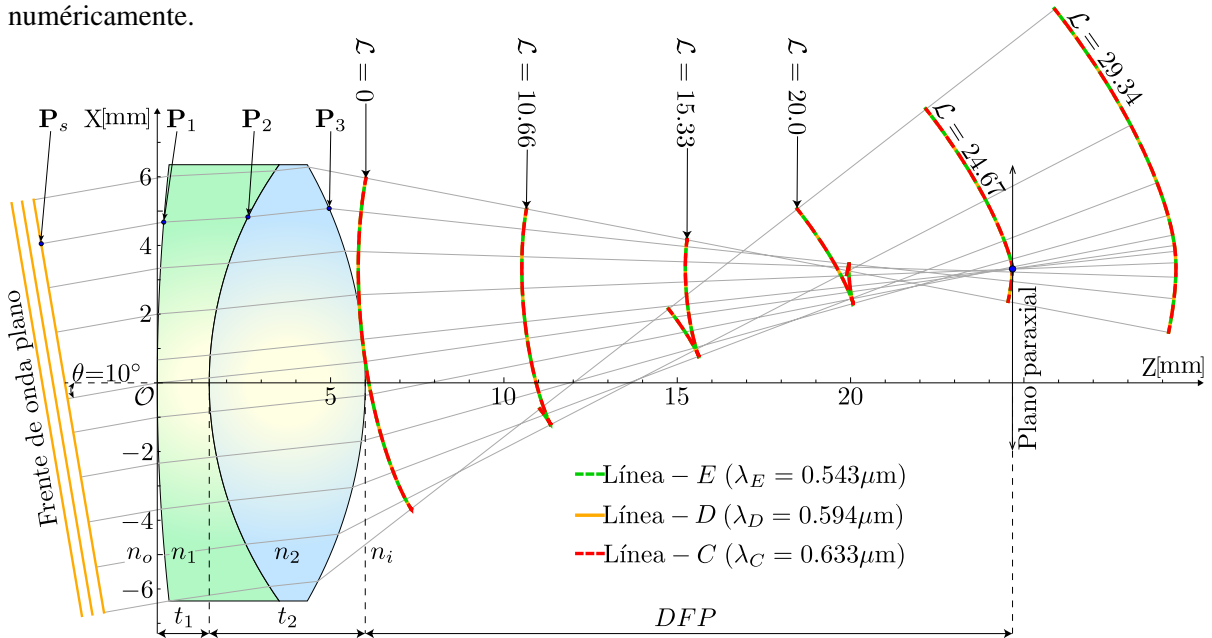


Fig. 4.5 Propagación del frente de onda exacto para diferentes distancias arbitrarias \mathcal{L} [mm], a un ángulo de oblicuidad $\theta = 10^\circ$, donde el diafragma de apertura está localizado en la tercer superficie para un doblete cementado centrado en λ_D .

4.3 Aproximación a segundo orden del frente de onda refractado a incidencia oblicua

En similitud al Capítulo 2, se limita a trabajar en la región paraxial considerando ángulos pequeños cercanos al eje óptico de la lente bajo estudio. De esta manera, se restringen las ecuaciones del frente de onda refractado a través de un doblete cementado, considerando un frente de onda plano inclinado, descrito por la Ec. (4.28), de esta forma se obtiene una aproximación alterna del frente de onda refractado, realizando una expansión en series de Taylor alrededor del punto $(x_1, y_1) \approx (0, 0)$ a segundo orden, descrito como

$$\widetilde{\mathbf{W}} \approx \mathbf{W}_0 + [\mathbf{W}_{xx} + \mathbf{W}_{yy}] + \frac{1}{2!} [\mathbf{W}_{xx}x^2 + 2\mathbf{W}_{xy}xy + \mathbf{W}_{yy}y^2], \quad (4.30)$$

donde la tilde de la Ec. (4.30) significa *Frente de onda Aproximado* a segundo orden, cuyos coeficientes están asociados a la primer y segunda derivada parcial respecto de x e y del frente de onda, los cuales están definidos en la Ec. (4.31).

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \left[\frac{1}{\mathcal{R}_3 n_i} \left[\mathcal{A}_3 n_2 \mathcal{R}_3 - \mathcal{A}_8 n_i \left(\mathcal{A}_3 (\mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2) + \mathcal{S}_4) + \mathcal{A}_5 \right) \right] \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1 \mathcal{S}_3 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n_2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 (\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] + \mathcal{A}_3 (\mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2) + \mathcal{S}_4) + \mathcal{A}_5, 0, \\ &\quad \frac{1}{\mathcal{R}_3 n_i} \left[\mathcal{A}_2 n_2 \mathcal{R}_3 - \mathcal{A}_8 n_i \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_3 (\mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2) + \mathcal{S}_4) + \mathcal{A}_5]^2} \right] \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n_1 \mathcal{S}_3 + n_2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 (\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] + \mathcal{R}_3 (1 - \mathcal{S}_5) + t_1 + t_2 \left. \right], \\ \mathbf{W}_x &= \left[\mathcal{B}_4 + \frac{1}{n_i \mathcal{R}_3} \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1 \mathcal{S}_3 + n_2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 (\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] \right] \left[\mathcal{B}_2 n_2 \mathcal{R}_3 \right. \\ &\quad \left. + n_i \left(-\mathcal{A}_8 \mathcal{B}_4 - \mathcal{B}_5 (\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))) \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2 n_i^2 \mathcal{R}_3 \mathcal{S}_3 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 (\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2}} \left[\left(\mathcal{A}_8 n_i \left(\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + t_2)) \right) - \mathcal{A}_3 n_2 \mathcal{R}_3 \right) \left(\mathcal{B}_6 n_2 \mathcal{S}_3 + \left(\mathcal{B}_7 n_1 + 2 n_o \mathcal{S}_3 \tan[\theta] \right) \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 (\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \right) \right], 0, \frac{1}{n_i \mathcal{R}_3 \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2}} \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1 \mathcal{S}_3 + n_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 (\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] \left[n_i \left(\mathcal{A}_8 \mathcal{B}_4 \left(\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \right) - \mathcal{B}_5 \left(\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2 \right) \right) \right] + \mathcal{B}_1 n_2 \mathcal{R}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2} \\
& + \frac{1}{2n_i^2\mathcal{R}_3\mathcal{S}_3\mathcal{S}_5\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2}} \left[\left(2\mathcal{B}_4n_i^2\mathcal{S}_3 \left(\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \mathcal{R}_3 + t_2) \right) \right) - \mathcal{A}_2n_2\mathcal{R}_3\mathcal{S}_5 \left(\mathcal{B}_7n_1 + 2n_o\mathcal{S}_3 \tan[\theta] \right) \right) \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \\
& - \mathcal{A}_2\mathcal{B}_6\mathcal{R}_3\mathcal{S}_3\mathcal{S}_5n_2^2 + \mathcal{A}_8n_i\mathcal{S}_5\sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2} \left(\mathcal{B}_6n_2\mathcal{S}_3 \right. \\
& \left. \left. + \left(\mathcal{B}_7n_1 + 2n_o\mathcal{S}_3 \tan[\theta] \right) \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] \Bigg], \\
\mathbf{W}_y &= \left[0, \frac{1}{\mathcal{R}_3n_i} \left[\mathcal{B}_9n_2\mathcal{R}_3 - \mathcal{A}_8n_i \left((\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)\mathcal{B}_8 + \mathcal{B}_9\mathcal{C}_0 \right) \right] \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1\mathcal{S}_3 + n_2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] + (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)\mathcal{B}_8 + \mathcal{B}_9\mathcal{C}_0, 0 \right], \\
\mathbf{W}_{xy} &= \left[0, \frac{1}{\mathcal{R}_3n_i} \left[n_i \left(-\mathcal{B}_5 \left((\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)\mathcal{B}_8 + \mathcal{B}_9\mathcal{C}_0 \right) - \mathcal{A}_8(2\mathcal{B}_8(\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3\mathcal{B}_2) + (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)\mathcal{C}_1 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \mathcal{B}_9\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_0\mathcal{C}_2) \right) + \mathcal{C}_2n_2\mathcal{R}_3 \right] \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1\mathcal{S}_3 + n_2\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \right] + \frac{1}{2\mathcal{R}_3\mathcal{S}_3n_i^2\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2}} \left[\mathcal{A}_8n_i \left((\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)\mathcal{B}_8 + \mathcal{B}_9\mathcal{C}_0 \right) - \mathcal{B}_9 \right. \\
& \left. \left. \times n_2\mathcal{R}_3 \right] \left[\left(\mathcal{B}_7n_1 + 2\mathcal{S}_3 \tan[\theta]n_o \right) \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} + \mathcal{B}_6n_2\mathcal{S}_3 \right] + 2\mathcal{B}_8 \right. \\
& \left. \times (\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3\mathcal{B}_2) + (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)\mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_9\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_0\mathcal{C}_2, 0 \right], \\
\mathbf{W}_{xx} &= \left[\mathcal{F}_2 + \frac{1}{n_i\mathcal{R}_3} \left[\mathcal{F}_1 \left(\mathcal{A}_3n_2\mathcal{R}_3 - \mathcal{A}_8n_i \left(\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2)) \right) \right) \right] + \left[\mathcal{L} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1\mathcal{S}_3 + n_2\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] \left(\mathcal{D}_4n_2\mathcal{R}_3 + n_i \left(-2\mathcal{E}_0\mathcal{F}_0 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \mathcal{A}_8\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_3 \left(\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2)) \right) \right) \right) \right] \\
& + \frac{1}{n_i^2\mathcal{R}_3\mathcal{S}_3\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2}} \left[n_i \left(\mathcal{A}_8\mathcal{E}_0 + \mathcal{F}_0 \left(\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \mathcal{R}_3 + t_2) \right) \right) \right) - \mathcal{C}_5n_2\mathcal{R}_3 \right] \left[\mathcal{E}_1n_2\mathcal{S}_3 + \left(\mathcal{C}_7n_1 + 2n_o\mathcal{S}_3 \tan[\theta] \right) \right. \\
& \left. \times \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right], 0, \frac{1}{n_i\mathcal{R}_3} \left[\left(\mathcal{D}_3n_2\mathcal{R}_3 - \mathcal{F}_4n_i \right) \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1\mathcal{S}_3 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + n_2\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] + \mathcal{F}_1 \left(\mathcal{A}_2n_2\mathcal{R}_3 - \mathcal{A}_8n_i \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2} \right) \right] + \frac{1}{2n_i^2\mathcal{R}_3^3\mathcal{S}_3\mathcal{S}_5^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2}} \\
& \times \left[\mathcal{R}_3^2 \left(-2\mathcal{E}_1 n_2 n_i \mathcal{S}_3 \mathcal{S}_5 \left(\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_8 \mathcal{E}_0 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2)) + \mathcal{A}_5 (\mathcal{A}_8 \mathcal{E}_0 + 2\mathcal{A}_3 \mathcal{F}_0 (\mathcal{S}_4 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2)) \right) + \mathcal{F}_0 (\mathcal{A}_5^2 - \mathcal{R}_3^2 + \mathcal{A}_3^2 [\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2)]^2) \right) \right] - 2n_i \\
& \times \mathcal{S}_5 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \left(\mathcal{C}_7 n_1 + 2n_o \mathcal{S}_3 \tan[\theta] \right) \left(\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_8 \mathcal{E}_0 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 \right. \\
& \left. + \mathcal{R}_3 + t_2)) + \mathcal{A}_5 (\mathcal{A}_8 \mathcal{E}_0 + 2\mathcal{A}_3 \mathcal{F}_0 (\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2)) \right) + \mathcal{F}_0 \left(\mathcal{A}_5^2 - \mathcal{R}_3^2 + \mathcal{A}_3^2 \right. \\
& \left. \times [\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2)]^2 \right) + \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2} \\
& \times \left(\sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \left(\mathcal{E}_6 n_i^2 \mathcal{S}_3 - 2\mathcal{C}_6 n_2 \mathcal{R}_3 \mathcal{S}_5 \left(\mathcal{C}_7 n_1 + 2n_o \mathcal{S}_3 \tan[\theta] \right) \right) \right) \\
& \left. - 2\mathcal{C}_6 \mathcal{E}_1 n_2^2 \mathcal{R}_3 \mathcal{S}_3 \mathcal{S}_5 \right) \mathcal{S}_5^2 + 2\mathcal{E}_0^2 n_i^2 \mathcal{S}_3 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} (\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2 \\
& \times [-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2]))^2 \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_3(\mathcal{S}_4 + \mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2))]^2} \Bigg], \\
\mathbf{W}_{yy} = & \left[\frac{1}{2\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3 \mathcal{S}_3 n_i^2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2}} \left[\mathcal{A}_8 n_i \left(\mathcal{A}_3 (\mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \mathcal{S}_4) + \mathcal{A}_5 \right) - \mathcal{A}_3 n_2 \mathcal{R}_3 \right] \left[\left(\mathcal{G}_6 n_1 \mathcal{R}_1 + 2\mathcal{S}_3 n_o \right) \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} + \mathcal{H}_0 \right. \right. \\
& \left. \left. \times \mathcal{R}_1 \mathcal{S}_3 \right] + \mathcal{G}_7 \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1 \mathcal{S}_3 + n_2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + (\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2)^2} \right) \right] + \mathcal{G}_5, \right. \\
& 0, \frac{1}{2\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3 \mathcal{S}_3 \mathcal{S}_5 n_i^2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2}} \left[\mathcal{S}_5 \left(-\mathcal{A}_2 n_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{A}_8 n_i \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sqrt{\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_3 (\mathcal{A}_2 (-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + t_2) + \mathcal{S}_4) + \mathcal{A}_5]^2} \right) \left(\mathcal{H}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{S}_3 + \left(\mathcal{G}_6 n_1 \mathcal{R}_1 + 2\mathcal{S}_3 n_o \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) + \mathcal{G}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{S}_3 n_i^2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right] \\
& \left. + \mathcal{G}_8 \left[\mathcal{L} - \frac{1}{n_i} \left(n_o + n_1 \mathcal{S}_3 + n_2 \sqrt{\mathcal{A}_7^2 + [\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3(\mathcal{S}_5 - 1) - t_2]^2} \right) \right] \right],
\end{aligned} \tag{4.31}$$

donde los coeficientes \mathcal{S}_i , con $i = \{1, \dots, 5\}$, fueron definidos como

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= \sqrt{n_1^2 - \text{sen}^2[\theta]n_o^2}, \quad \mathcal{S}_2 = \sqrt{n_1^2\mathcal{R}_2^2 - \text{sen}^2[\theta]n_o^2(\mathcal{R}_2 + t_1)^2}, \quad \mathcal{S}_3 = \frac{1}{n_1^2} \left[n_1^4(\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 + t_1)^2 + \text{sen}^2[\theta] \right. \\
&\times n_o^2[\mathcal{S}_1(\mathcal{R}_2 + t_1) - \mathcal{S}_2]^2 \left. \right]^{1/2}, \quad \mathcal{S}_4 = \frac{1}{n_1} \left[n_1^2 \left(\mathcal{A}_2^2\mathcal{A}_4 - (\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 - t_2)(\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 - 2\mathcal{R}_3 - t_2) \right) - 2\mathcal{A}_2 \right. \\
&\times \mathcal{A}_3 \text{sen}[\theta]n_o(\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_3 - t_2) \left(\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1(\mathcal{R}_2 + t_1) \right) \left. \right]^{1/2}, \quad \mathcal{S}_5 = \frac{1}{\mathcal{R}_3^2} \left[\mathcal{R}_3^2 - [\mathcal{A}_3(\mathcal{A}_2(-\mathcal{A}_1\mathcal{R}_2 \right. \\
&+ \mathcal{R}_3 + t_2) + \mathcal{S}_4) + \mathcal{A}_5]^2 \left. \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

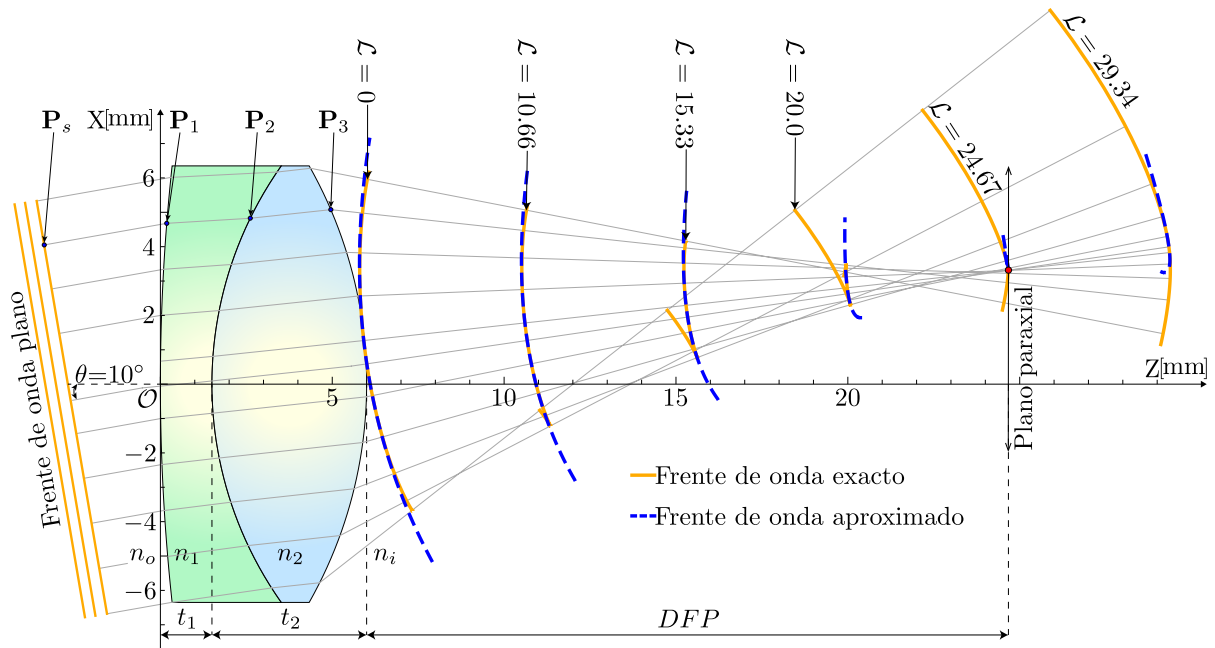


Fig. 4.6 Propagación del frente de onda refractado aproximado a segundo orden a un ángulo de oblicuidad $\theta = 10^\circ$, para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, cuyo diafragma de apertura está localizado en la tercer superficie de la lente.

Se ha omitido escribir las Ecs. (4.30) y (4.31) explícitamente por simplicidad, sin embargo en el Apéndice B están definidos los coeficientes restantes de las Ecs. (4.31) y (4.32), como \mathcal{A}_j , \mathcal{B}_j , \mathcal{C}_j , \mathcal{D}_j , \mathcal{E}_j , \mathcal{F}_j , \mathcal{G}_j , con $j = \{0, 1, \dots, 9\}$ y \mathcal{H}_0 . Se muestra en la Fig. 4.6 la comparación entre el frente de onda exacto y aproximado a segundo orden a lo largo del eje óptico, considerando un ángulo de oblicuidad $\theta = 10^\circ$ para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$. Además se realizó un acercamiento de la región del punto focal para diferentes valores de θ en la Fig. 4.7, donde la aproximación para $\theta = 0^\circ$ de la Fig. 4.7(a) es similar a la del Capítulo 2. Por otra parte, al aumentar el ángulo de oblicuidad θ se presentan cambios de dirección en los bordes del frente de onda aproximado, evaluando una cantidad mínima en la apertura de entrada del frente de onda exacto, como se aprecia en las Figs. 4.7(c)-(f).

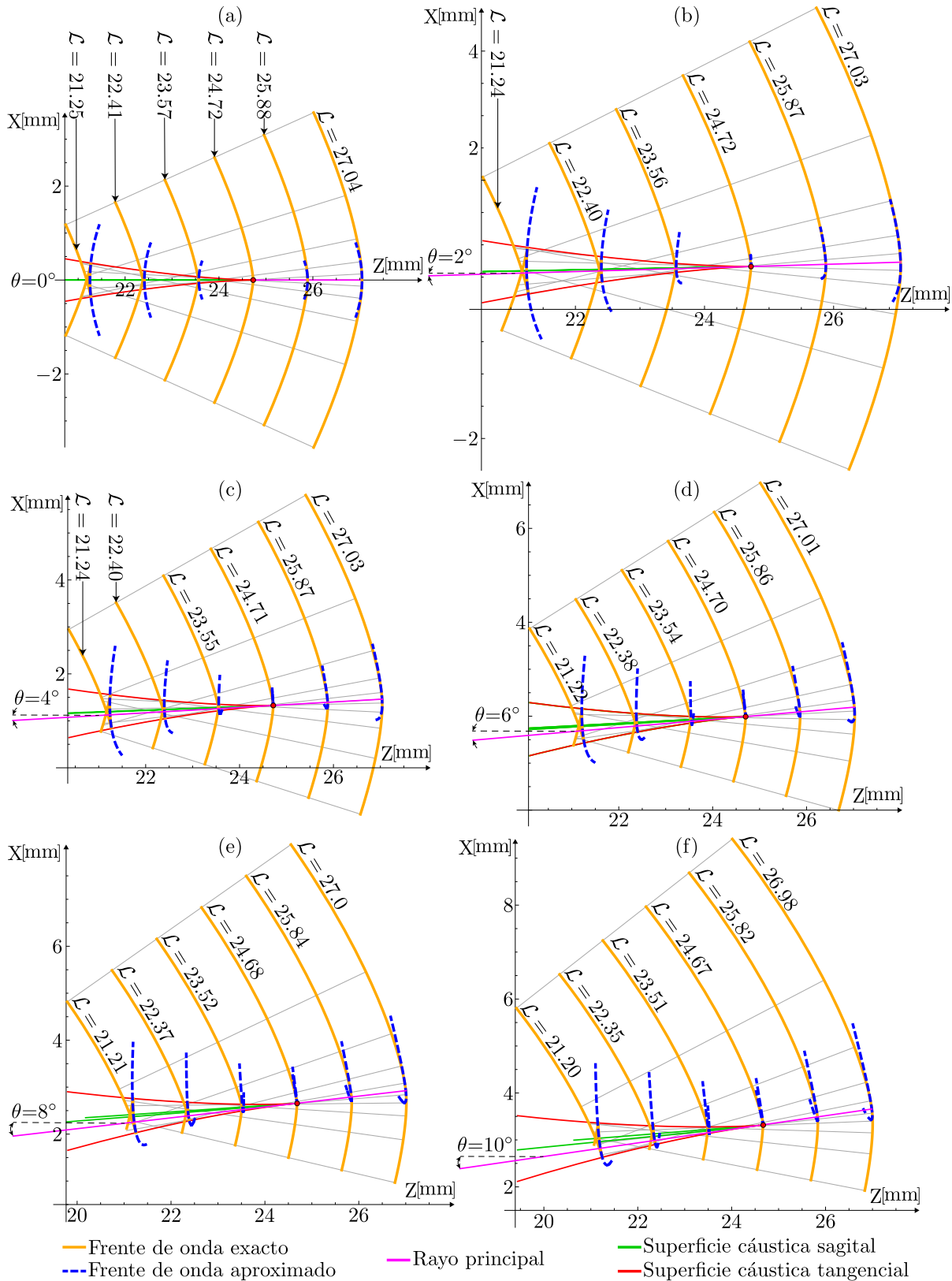


Fig. 4.7 Comparación entre el frente de onda exacto y aproximado a segundo orden para un doblete cementado centrado en $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$, cerca de la región del punto focal para diferentes ángulos de oblicuidad: (a) $\theta = 0^\circ$, (b) $\theta = 2^\circ$, (c) $\theta = 4^\circ$, (d) $\theta = 6^\circ$, (e) $\theta = 8^\circ$ y (f) $\theta = 10^\circ$.

4.4 Ecuación generalizada para describir la aproximación de las superficies cáusticas sagital y tangencial

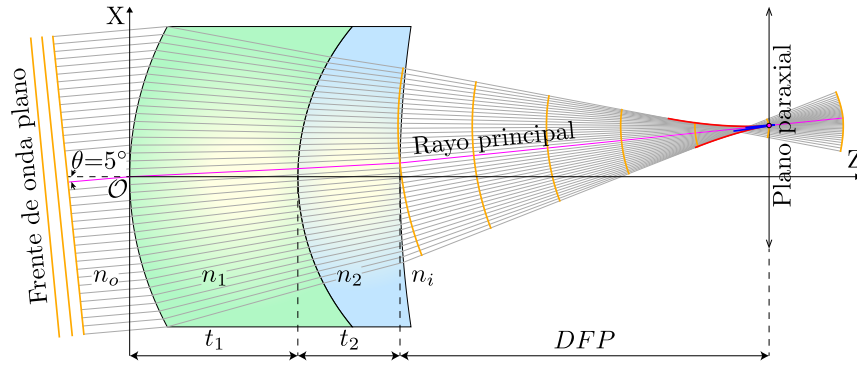
Como se explicó anteriormente, para obtener un frente de onda plano inclinado, se coloca la fuente puntual en infinito y se desplaza con respecto al eje óptico. Asimismo, al incidir el frente de onda inclinado en el doblete cementado y después es refractado, se tiene que las dos líneas focales de las superficies cáusticas comenzarán a separarse de sobremanera y el *spike* [7] producida por la superficie cáustica sagital comenzará a formar una superficie asimétrica. Igualmente, la cáustica tangencial formará una superficie asimétrica, limitada por la RTI. Es importante señalar, que cada cáustica contiene una cúspide o un pico máximo bien definido en la dirección \mathbf{Z} positiva, en función del ángulo de oblicuidad θ , tal que representan los puntos focales de cada superficie cáustica, es decir los *focos sagital y tangencial*. Para el cálculo del rayo principal consideramos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ [45], y de acuerdo a la Ref. [12], existen dos trayectorias diferentes de rayos que interceptan las cúspides para cada superficie cáustica, pero en el caso considerado, el rayo principal pasa cerca de dicha cúspide. Sin pérdida de generalidad, $(x_1, y_1) \approx (0, 0)$ definirá el rayo principal. Sustituyendo los valores numéricos para cada ángulo de oblicuidad, se obtienen los puntos máximos para los focos sagital y tangencial como se muestra en la Fig. 4.4. Entonces, una forma para representarlo matemáticamente, de la Ec. (4.24), se expande a tercer orden en series de Taylor alrededor del punto $(0, 0)$ en función del ángulo de oblicuidad θ , y se obtiene una ecuación aproximada para el foco sagital, equivalente a la aproximación del frente de onda de la Ec. (4.30), esto es

$$\tilde{C}_{\text{sag}} \approx C_{\text{sag}}[\theta_0] + \sum_{j=1}^N \frac{\partial^j C_{\text{sag}}[\theta]}{\partial \theta^j} [\theta - \theta_0]^j. \quad (4.33)$$

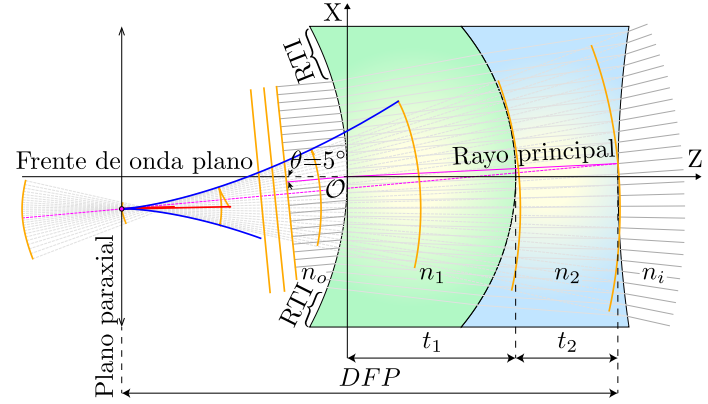
La Ec. (4.33) representa de manera general una superficie a tercer orden, suponiendo $N = 3$, para las coordenadas de puntos que representan los focos sagitales refractados a través de un doblete cementado, considerando un frente de onda plano inclinado incidiendo a un ángulo de oblicuidad θ . De manera semejante, se obtiene una ecuación aproximada para el foco tangencial, considerando $(x_1, y_1) \approx (0, 0)$ de la Ec. (4.25), y expandiendo en series de Taylor en función del ángulo de oblicuidad θ

$$\tilde{C}_{\text{tan}} \approx C_{\text{tan}}[\theta_0] + \sum_{j=1}^N \frac{\partial^j C_{\text{tan}}[\theta]}{\partial \theta^j} [\theta - \theta_0]^j. \quad (4.34)$$

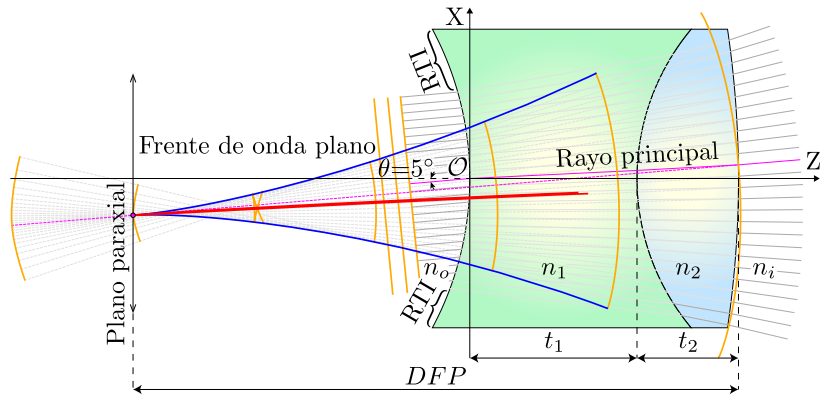
Análogamente, la Ec. (4.34) proporcionaría una superficie, para la ubicación de los puntos que representa el foco tangencial refractado a través del doblete cementado en función del ángulo de oblicuidad θ .



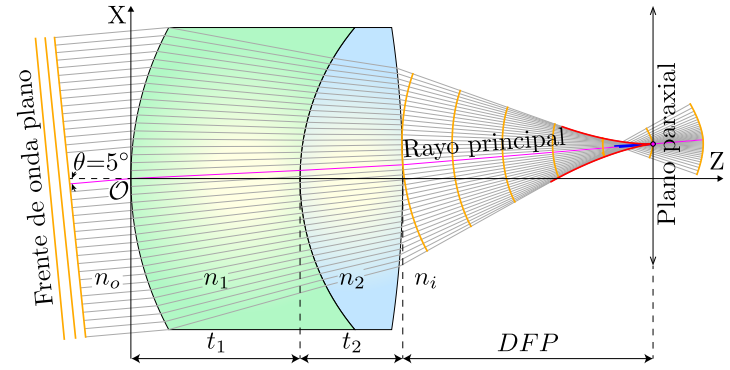
(a) $\mathcal{R}_1 > 0, \mathcal{R}_2 > 0, \mathcal{R}_3 > 0$.



(b) $\mathcal{R}_1 < 0, \mathcal{R}_2 < 0, \mathcal{R}_3 > 0$.



(c) $\mathcal{R}_1 < 0, \mathcal{R}_2 > 0, \mathcal{R}_3 < 0$.



(d) $\mathcal{R}_1 > 0, \mathcal{R}_2 > 0, \mathcal{R}_3 < 0$.

— Frente de onda exacto — Superficie cáustica sagital — Superficie cáustica tangencial

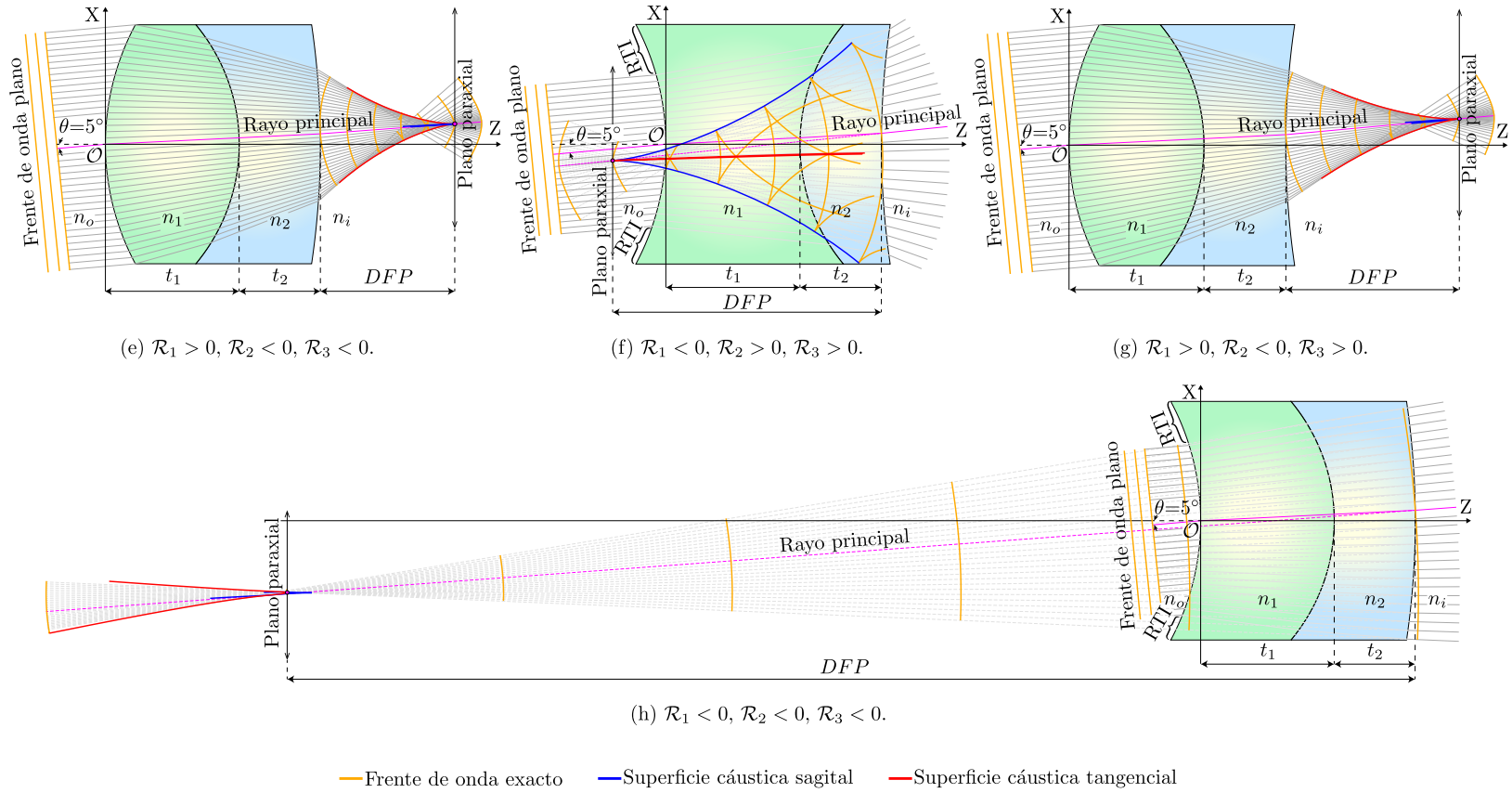


Fig. 4.8 Diferentes configuraciones para un doblete cementado centrado en $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$, y comparación de las superficies cónicas sagital y tangencial como del frente de onda exacto, considerando un ángulo de oblicuidad $\theta = 5^\circ$.

Es importante mencionar que la aproximación dependerá de la configuración de los radios de curvatura de las superficies esféricas del doblete cementado, como ejemplo de ello se muestran las diferentes configuraciones que se obtuvieron para expandir en series de Taylor las superficies cáusticas sagital y tangencial. Esquemáticamente se cuenta con diferentes casos para $DFP > 0$ y $DFP < 0$, mostrados en las Figs. 4.8(a,d,e,g) y 4.8(b,c,f,h), respectivamente. En particular la teoría anteriormente desarrollada, se presentó sin pérdida de generalidad para el caso de la Fig. 4.8(e), considerando el frente de onda plano incidiendo de manera oblicua de derecha a izquierda, sin embargo es válida para las configuraciones restantes, como se muestra en la Fig. 4.8. Por último, el objetivo es proporcionar un modelo simple para la retina del ojo humano, como el de la Fig. 4.9, que puede ser descrita por la ecuación de la superficie cáustica tanto sagital como tangencial, considerando un frente de onda plano incidiendo de forma oblicua. En otras palabras, a partir de expansiones en series de Taylor alrededor del rayo principal podríamos obtener una aproximación de las superficies cáusticas sagitales y tangenciales a tercer orden, en función del ángulo de oblicuidad, y con base en esto recuperar la forma de la superficie asociada a la retina del ojo humano, y aproximar numéricamente el radio de curvatura (\mathcal{R}_4) de las superficies a partir de los focos sagitales y tangenciales proporcionados por la teoría desarrollada para dobletes cementados. Asimismo, con la aproximación del frente de onda refractado, se puede implementar una prueba interferométrica para evaluar este modelo propuesto, por medio del diseño de pantallas nulas de fase y obtener las diferencias de fase entre el frente de onda exacto y aproximado a segundo orden.

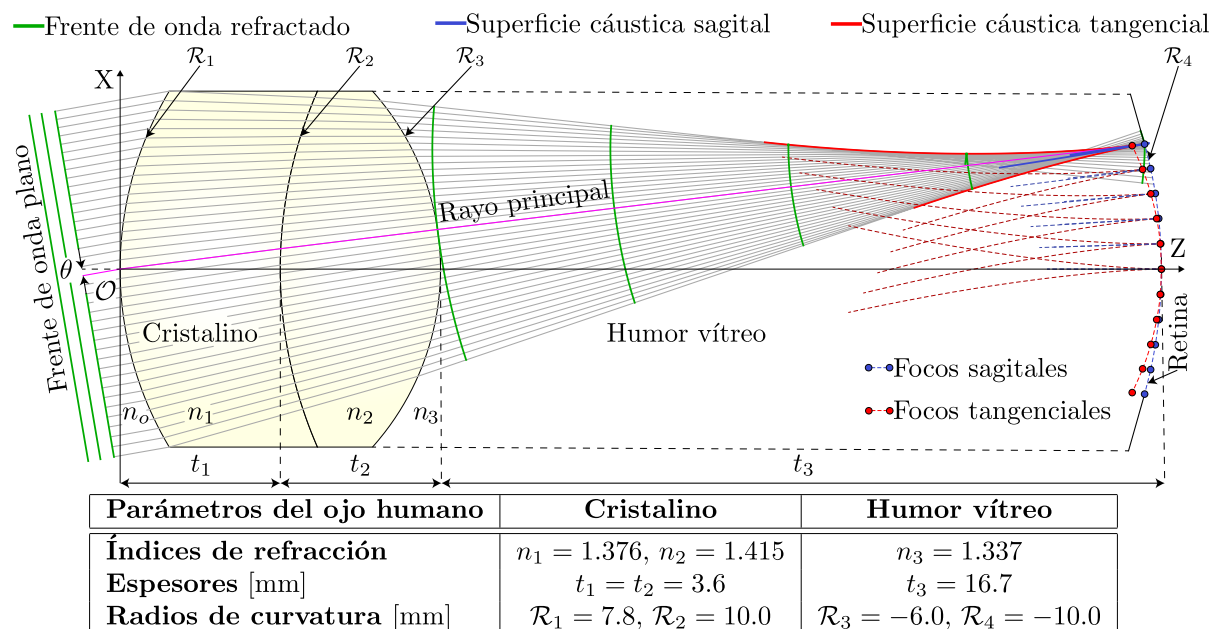


Fig. 4.9 Comparación entre las superficies focales sagital y tangencial exactas para modelar la retina del ojo humano considerándolo como un doblete cementado.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

Se realizó un trazo exacto de rayos para obtener la superficie cáustica y su aproximación en series de Taylor a tercer orden, derivando el coeficiente de aberración esférica a tercer orden en función de todos los parámetros de diseño para un doblete cementado. Adicionalmente, se obtuvo una ecuación simple para el frente de onda refractado empleando el Principio de Huygens, considerando un frente de onda plano propagándose a lo largo del eje óptico a incidencia normal. De igual forma, se realizó una expansión en series de Taylor a segundo orden, y se obtuvo un frente de onda parabólico en función de la DFP y DFE independientes de las constantes de conicidad. Consideramos la involuta de la superficie cáustica aproximada a tercer orden, y se obtuvo una aproximación alterna del frente de onda exacto a un orden superior en función de los parámetros de diseño y del coeficiente de aberración esférica a tercer orden para un doblete cementado. Creemos que el método para obtener la ecuación de la propagación de los frente de onda reportado aquí es sencillo.

Se diseñaron las pantallas nulas de fase, con base en la diferencia de LCO entre el frente de onda propagado y el espejo parabólico cóncavo como primer aproximación del frente de onda exacto, suponiendo un frente de onda plano propagándose a lo largo del eje óptico a incidencia normal, que permitió compensar la fase de un interferograma nulo cuyo patrón de interferencia consistió en anillos concéntricos. Se tomó como parámetro el diámetro del máximo central del interferograma nulo de referencia, para el diseño de las pantallas nulas de fase con diferentes niveles de gris. Con base en esto, se desplegaron en el SLM las pantallas nulas de fase entre 2 y 6 anillos, logrando un ligero incremento en el máximo central del interferograma nulo. Se cuantificaron los resultados para la diferencia de fase en la posición de diseño de los interferogramas nulos, considerando la ausencia en el cambio de fase para el nivel de gris $ng = 0$, por contrario para el nivel de gris $ng = 255$ el interferograma nulo presentó un cambio de fase. Se implementó la prueba interferométrica para compensar la fase y se calculó el diámetro del máximo central del interferograma nulo para cada pantalla nula de fase, y se constató con al teoría previamente

desarrollada. Se obtuvo un ligero incremento significativo, considerando un espejo parabólico cóncavo como primer aproximación del frente de onda en la posición de diseño, compensando la fase para un doblete cementado.

Se desarrolló teóricamente el trazo exacto de rayos en tres dimensiones, que permitió obtener ecuaciones simples para representar paramétricamente las superficies cáusticas sagital y tangencial, considerando un frente de onda plano propagado con un ángulo de oblicuidad respecto al eje óptico, que incide y es refractado fuera de un doblete cementado con superficies esféricas. Asimismo, se obtuvo la ecuación exacta del frente de onda refractado para diferentes distancias arbitrarias a lo largo del eje óptico en función del ángulo de oblicuidad, y los parámetros de diseño para un doblete cementado. A partir de la ecuación del frente de onda exacto, se realizó una expansión en series de Taylor a segundo orden alrededor del rayo principal, considerando un ángulo de oblicuidad pequeño, de esta forma fue posible describir la evolución de los frentes de onda fuera de eje en función del ángulo de oblicuidad, y los parámetros de diseño para diferentes configuraciones de dobletes cementados.

Como trabajo a futuro, se puede implementar una prueba interferométrica para dobletes cementados más rápidos, por medio de una platina con desplazamientos nanométricos, para mejorar la precisión de los resultados obtenidos para el diámetro del máximo central del interferograma nulo. Asimismo, se puede diseñar dobletes cementados con corrección en aberración esféricocromática para ser implementados apropiadamente en arreglos de visión óptica o campo de iluminación. Finalmente, el trabajo aquí presentado abre la puerta a recuperar la forma de la superficie de la retina del ojo humano e implementar una prueba interferométrica para simular este modelo, con base en el conocimiento de las superficies cáusticas y frentes de onda para dobletes cementados a incidencia oblicua.

Bibliografía

- [1] P. Hartmann, R. Jedamzik, S. Reichel, and B. Schreder, “Optical glass and glass ceramic historical aspects and recent developments: a Schott view,” *Appl. Opt.* **49**(16), D157–D176 (2010).
- [2] D. L. Shealy and W. M. Rosenblum, “Caustic and Analytical Illuminance Calculations for a Model of the Human Eye,” *Optical Engineering* **14**(3), 237 – 240 (1975).
- [3] M. C. López-Bautista, M. Avendaño-Alejo, G. Castillo-Santiago, L. Castañeda, and E. Román-Hernández, “Designing and testing cemented doublet lenses considering null screens,” *Appl. Opt.* (2021).
- [4] D. Tentori, “Homogeneity testing of optical glass by holographic interferometry,” *Appl. Opt.* **30**(7), 752–755 (1991).
- [5] A. J. Werner, “Methods in High Precision Refractometry of Optical Glasses,” *Appl. Opt.* **7**(5), 837–843 (1968).
- [6] D. Tentori-Santa-Cruz, “High-precision refractometry by hologram interferometry,” *Optical Engineering* **31**(4), 805 – 808 (1992).
- [7] O. N. Stavroudis, *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics, The K-function and its Ramifications*, chap. 12, p. 179–186 (Wiley-VCH, 2006).
- [8] M. Avendaño-Alejo, M. C. López-Bautista, and L. Castañeda, “Caustic surfaces produced by a plane wavefront refracted through cemented doublet lenses,” in *Current Developments in Lens Design and Optical Engineering XIX*, R. B. Johnson, V. N. Mahajan, and S. Thibault, eds., vol. 10745, pp. 61 – 70, International Society for Optics and Photonics (SPIE, 2018).
- [9] M. Avendaño-Alejo, “Caustics in a meridional plane produced by plano-convex aspheric lenses,” *J. Opt. Soc. Am. A* **30**(3), 501–508 (2013).
- [10] O. Cardona-Nuñez, “Significado de las superficies cáusticas en óptica,” *Rev. Mex. Fís.* **29**(2), 245–258 (1983).
- [11] M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, A. Maldonado, and N. Qureshi, “Huygens’ Principle: Exact wavefronts produced by aspheric lenses,” *Opt. Express* **21**(24), 29,874–29,884 (2013).
- [12] D. L. Shealy, “Analytical illuminance and caustic surface calculations in geometrical optics,” *Appl. Opt.* **15**(10), 2588–2596 (1976).
- [13] D. L. Shealy and J. A. Hoffnagle, “Wavefront and caustics of a plane wave refracted by an arbitrary surface,” *J. Opt. Soc. Am. A* **25**(9), 2370–2382 (2008).

- [14] J. A. Hoffnagle and D. L. Shealy, "Refracting the k-function: Stavroudis's solution to the eikonal equation for multielement optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **28**(6), 1312–1321 (2011).
- [15] M. Avendaño-Alejo, E. Román-Hernández, L. Castañeda, and V. I. Moreno-Oliva, "Analytic conic constants to reduce the spherical aberration of a single lens used in collimated light," *Appl. Opt.* **56**(22), 6244–6254 (2017).
- [16] M. Avendaño-Alejo, M. C. López-Bautista, L. Castañeda, and S. Maca-García, "Huygens principle: exact and approximate wavefronts propagated through conic lenses," *Appl. Opt.* **58**(4), 939–947 (2019).
- [17] J. F. A. and W. H. E., *Fundamentals of Optics*, pp. 176–187 (Mc. Graw-Hill, 1976).
- [18] J. L. Rayces and M. Rosete-Aguilar, "Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum. I. Tolerance conditions for secondary spectrum, spherochromatism, and fifth-order spherical aberration," *Appl. Opt.* **40**(31), 5663–5676 (2001).
- [19] P. N. Robb, "Selection of optical glasses. 1: Two materials," *Appl. Opt.* **24**(12), 1864–1877 (1985).
- [20] B. F. C. de Albuquerque, J. Sasian, F. L. de Sousa, and A. S. Montes, "Method of glass selection for color correction in optical system design," *Opt. Express* **20**(13), 13,592–13,611 (2012).
- [21] R. Kingslake, *Lens Design Fundamentals*, chap. 10, p. 185–196 (Academic, 1978).
- [22] J. Morgan, *Introduction to Geometrical and Physical Optics*, chap. 7, p. 85–121 (McGraw-Hill, 1953).
- [23] D. Malacara and Z. Malacara, *Handbook of Lens Design*, chap. 6, p. 159–191 (Marcel Dekker, 1994).
- [24] I. Velázquez-Gómez, M. C. López-Bautista, and M. Avendaño-Alejo, "Exact wavefront refracted through cemented doublet lenses," in *Optical System Alignment, Tolerancing, and Verification XIII*, J. Sasián and R. N. Youngworth, eds., vol. 11488, pp. 105 – 113, International Society for Optics and Photonics (SPIE, 2020).
- [25] M. Avendaño-Alejo, E. Román-Hernández, G. Castillo-Santiago, J. DelOlmo-Márquez, and L. Castañeda, "Sagittal and tangential foci produced by tilted plane wavefronts refracted through simple lenses," *Appl. Opt.* **58**(22), 5959–5967 (2019).
- [26] D. G. Burkhard and D. L. Shealy, "Formula for the density of tangent rays over a caustic surface," *Applied Optics* **21**(18), 3299–3306 (1982).
- [27] D. G. Burkhard and D. L. Shealy, "Simplified formula for the illuminance in an optical system," *Appl. Opt.* **20**(5), 897–909 (1981).
- [28] M. Avendaño-Alejo and O. N. Stavroudis, "Huygens's principle and rays in uniaxial anisotropic media. II. Crystal axis orientation arbitrary," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**(8), 1674–1679 (2002).
- [29] S. Cornbleet, *Microwave and Optical Ray Geometry*, chap. 2, pp. 11–35 (Wiley London, 1984).
- [30] M. Spivak, *CALCULUS, Cálculo Infinitesimal*, chap. 4, pp. 557–761 (Segunda Edición, Editorial Reverté, S.A., 1998).

- [31] W. T. Welford, *Aberrations of the Symmetrical Optical System*, chap. 6, pp. 73–110 (Academic, 1974).
- [32] M. Avendaño-Alejo, D. González-Utrera, N. Qureshi, L. Castañeda, and C. L. Ordóñez-Romero, “Null Ronchi-Hartmann test for a lens,” *Opt. Express* **18**(20), 21,131–21,137 (2010).
- [33] A. Cordero-Davila, A. Cornejo-Rodriguez, and O. Cardona-Nunez, “Null Hartmann and Ronchi-Hartmann tests,” *Appl. Opt.* **29**(31), 4618–4621 (1990).
- [34] R. Díaz-Uribe and M. Campos-García, “Null-screen testing of fast convex aspheric surfaces,” *Appl. Opt.* **39**(16), 2670–2677 (2000).
- [35] M. Avendaño-Alejo and R. Díaz-Uribe, “Testing a fast off-axis parabolic mirror by using tilted null screens,” *Appl. Opt.* **45**(12), 2607–2614 (2006).
- [36] G. Castillo-Santiago, D. Castán-Ricaño, M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and R. Díaz-Uribe, “Design of Hartmann type null screens for testing a plano-convex aspheric lens with a CCD sensor inside the caustic,” *Opt. Express* **24**(17), 19,405–19,416 (2016).
- [37] I. Velázquez-Gómez, *Diseño y construcción de un interferómetro para evaluar lentes simples utilizando un modulador espacial de fase*, chap. Apéndice A, pp. 73–81 (Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, Ciudad Universitaria, UNAM, 2019).
- [38] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, chap. 7, pp. 286–377 (Cambridge, University Press, 1999).
- [39] A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design, Part II* (Dover Publications, 1960).
- [40] D. J. Schroeder, *Astronomical Optics* (Academic Press, 1987).
- [41] J. E. A. Landgrave and J. R. Moya-Cessa, “Generalized Coddington equations in ophthalmic lens design,” *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1637–1644 (1996).
- [42] M. Avendaño-Alejo, I. Moreno, and O. Stavroudis, “Minimum deviation angle in uniaxial prisms,” *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 2431–2437 (2007).
- [43] L. C. Martin, *Geometrical Optics* (Sir Isaac Pitman & Sons, 1955).
- [44] M. Bass, *Handbook of Optics: Fundamentals, techniques, and design*, vol. 1, chap. 1. General Principles of Geometric Optics (Mc-Graw Hill, 2010).
- [45] M. Herzberger, *The Modern Geometrical Optics* (Interscience Publishers, 1958).
- [46] O. N. Stavroudis and R. C. Fronczek, *Caustic surfaces and the structure of the geometric image*, p. 795–800 (*J. Opt. Soc. Am.*, 1976).
- [47] SHOTT, “Catálogo de vidrios ópticos SCHOTT,” https://www.schott.com/d/advanced_optics/ac85c64c-60a0-4113-a9df-23ee1be20428/1.17/schott-optical-glass-collection-datasheets-english-may-2019.pdf (Accedido el 31 de Marzo de 2021).

Apéndice A

Ecuación de dispersión de Sellmeier

A.1 Coeficientes de dispersión

La ecuación de dispersión de Sellmeier es una relación empírica entre la longitud de onda y un medio transparente, cuya expresión se representa matemáticamente como

$$n^2(\lambda) - 1 = \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j}. \quad (\text{A.1})$$

Los índices de refracción para cualquier longitud de onda dentro del rango de UV cercano a $2.3\mu\text{m}$, se pueden calcular con la ayuda de las constantes B_j y C_j . Al calcular el índice de refracción utilizando los coeficientes de Sellmeier del catálogo de vidrios ópticos de SCHOTT [47], la longitud de onda debe ingresarse en unidades de μm .

Los coeficientes de dispersión para el vidrio **N-BAF10** y **N-SF6HT** fueron extraídos del catálogo de SCHOTT, mostrados en la Tabla A.1. En la Fig. A.1, se muestra el comportamiento del índice de refracción en función de longitudes de onda en el espectro visible, donde se distinguen las longitudes de onda $\lambda_E = 0.543\mu\text{m}$, $\lambda_D = 0.594\mu\text{m}$ y $\lambda_C = 0.633\mu\text{m}$, las cuales se utilizaron en los Capítulos 2, 3 y 4, respectivamente.

Coef. de dispersión	B_1	B_2	B_3	C_1	C_2	C_3
Tipo de Vidrio						
N-BAF10	1.5851	0.1435	1.0852	0.0092	0.0424	105.6135
N-SF6HT	1.7793	0.3381	2.0873	0.0133	0.0617	174.0175

Tabla A.1 Coeficientes de dispersión para los vidrios **N-BAF10** y **N-SF6HT**.

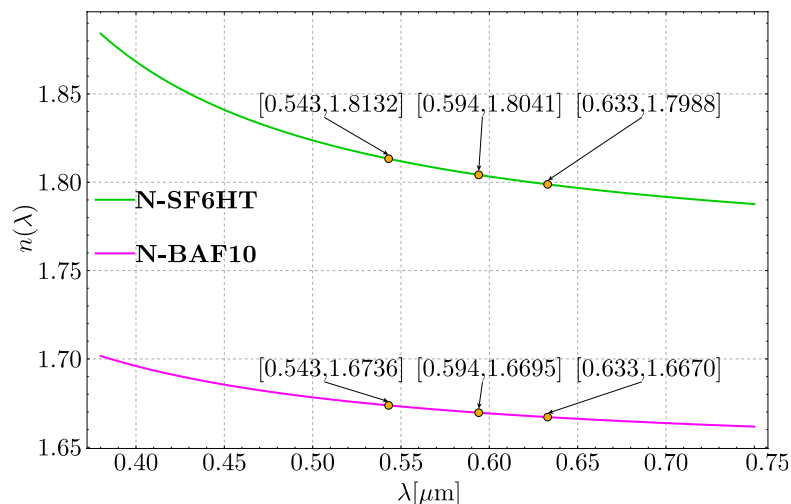


Fig. A.1 Índice de refracción en función de la longitud de onda para los vidrios **N-BAF10** y **N-SF6HT**.

De igual forma en la Tabla A.2, se presentan los coeficientes de dispersión para los vidrios **N-BK7** y **SF5**, donde están señaladas las longitudes de onda $\lambda_E = 0.5461\mu\text{m}$, $\lambda_D = 0.5876\mu\text{m}$ y $\lambda_C = 0.6328\mu\text{m}$ en la Fig. A.1, del Capítulo 2, Sección 2.5.

Tipo de Vidrio	Coef. de dispersión					
	B_1	B_2	B_3	C_1	C_2	C_3
N-BK7	1.0396	0.2317	1.0104	0.0060	0.0200	103.5606
SF5	1.4614	0.2477	0.9499	0.0111	0.0508	112.0418

Tabla A.2 Coeficientes de dispersión para los vidrios **N-BK7** y **SF5**.

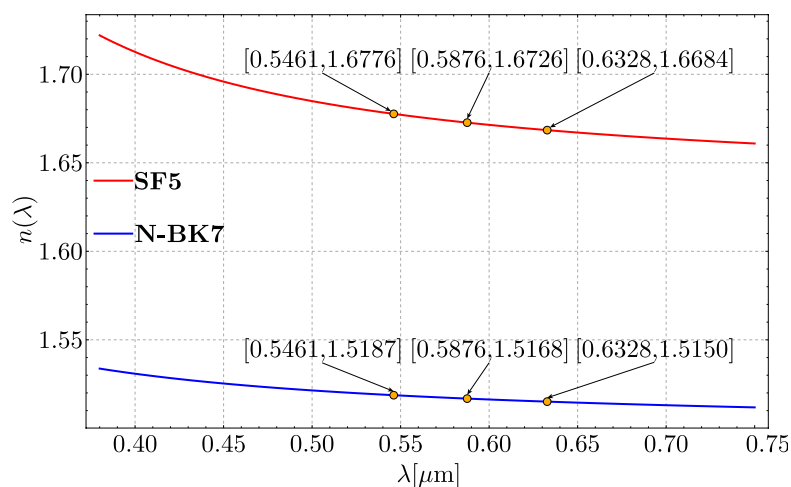


Fig. A.2 Índice de refracción en función de la longitud de onda para los vidrios **N-BAF10** y **N-SF5**.

Apéndice B

Coeficientes de la aproximación a segundo orden del frente de onda exacto a incidencia oblicua

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{n_1^3 R_2} \left(-n_0^2 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]^2 + S_1 \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2 (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2))} \right); \\A_1 &= \frac{1}{n_1^2 R_2} \left(n_1^2 R_2 - \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2 (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2))} \right); \\A_2 &= \frac{1}{n_1^2 n_2 R_2} \left(S_1 n_1^2 R_2 + \left(-A_0 n_1 + \sqrt{(-1 + A_0^2) n_1^2 + n_2^2} \right) \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (2 R_2^2 + 2 R_2 t_1 + t_1^2)) \sin[\theta]^2 + 2 n_0^4 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^4)} \right); \\A_3 &= \frac{1}{n_1^2 n_2 R_2} n_0 \left(n_1^2 R_2 + \sqrt{(-1 + A_0^2) n_1^2 + n_2^2} (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) + A_0 n_1 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \right) \frac{\sin[\theta]}{\sin[\theta]}; \\A_4 &= \frac{1}{n_1^4} \left(n_1^4 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)^2 - n_0^2 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1))^2 \sin[\theta]^2 \right); \\A_5 &= \frac{A_2^2 n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]}{n_1^2}; \\A_6 &= -\frac{1}{R_3} \left(A_3 (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) + A_2 \sqrt{(R_3^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))))^2} \right); \\A_7 &= \frac{1}{n_1^2} \left(n_1^2 (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) + n_0 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \right) \frac{\sin[\theta]}{\sin[\theta]}; \\A_8 &= \frac{-A_6 n_2 + \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_3^2}}{n_3}; \\A_9 &= \frac{1}{S_1 S_2 n_1^2 R_1} \left(S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] \right) \frac{\cos[\theta]}{\cos[\theta]} \left(S_1 S_2 + n_0^2 (R_2 + t_1) \sin[\theta]^2 \right); \end{aligned}$$

Fig. B.1 Coeficiente \mathcal{A}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$.

$$\begin{aligned}
F_0 &= \left(n_2 \left(A_6 n_2 - \sqrt{(-1+A_6^2)n_2^2+n_1^2} \right) \left(A_3^2 C_6 - C_6 R_2^2 + A_2 A_3 E_0 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)) + A_2^2 C_6 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))^2 + A_0 (A_2 E_0 + 2 A_2 C_6 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (A_3 C_5 + A_2 (S_4 C_5 + E_0 + A_2 C_5 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \right) / \left(n_1 \sqrt{(-1+A_6^2)n_2^2+n_1^2} R_3 \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right); \\
F_1 &= \left((C_7^2 - 2 S_2^2 t_0) n_1 R_1 (A_7^2 + (-A_1 R_2 + R_3 - S_5 R_2 + t_2))^2 + S_2^2 \left(E_1^2 n_2 R_1 - 2 (A_7^2 + (-A_1 R_2 + R_3 - S_5 R_2 + t_2)) \left(E_1 n_2 R_1 + 2 n_0 \sqrt{A_7^2 + (-A_1 R_2 + R_3 - S_5 R_2 + t_2)^2} \right) \right) \right) / \left(4 S_1^3 n_1 R_1 (A_7^2 + (-1 + S_5) R_3 - t_2)^2 \right)^{3/2}; \\
F_2 &= \frac{1}{S_1 S_2 n_2^2 R_1^2} \\
&\quad \frac{(2 A_2^2 n_2^2 (R_2 + t_1) (-S_1 + S_2 (R_2 + t_1)) \cos[\theta]^2 \sin[\theta] +}{\cos[\theta]} \\
&\quad S_1 (S_2 R_1 ((S_4 A_2 + A_0 E_2 + 2 C_5 E_5) n_1^2 R_1 + A_2 (4 S_1 S_2 C_6 + 4 S_1^2 C_6 (R_1 - R_2 - t_1) + D_4 n_1^2 R_1 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)) + \\
&\quad n_0 \sin[\theta] (2 S_1 C_5^2 R_1^2 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) + A_2^2 (2 S_1^2 + S_2 (C_5 n_1 R_1^2 + 4 S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) - 2 S_1^2 (R_1 - R_2 - t_1) (R_2 + t_1)) (R_2 + t_1) \sin[\theta]) + \\
&\quad 2 A_2 n_0 \cos[\theta] (2 S_1 S_2 C_6 R_1 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) + n_0 \sin[\theta] (A_2 (-S_2^2 + S_1^2 (R_2 + t_1)) (R_1 - 2 (R_2 + t_1)) + S_1 S_2 (-2 R_1 + 3 (R_2 + t_1)) + 2 C_6 n_0 R_1 (R_2 + t_1) (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]))); \\
F_3 &= \left(n_2 \left(-2 A_6^2 n_2^2 \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \left(A_2 E_0 (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) - \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \left(A_3 E_0 + C_6 (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) + C_6 \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \right)^2 + \\
&\quad \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 \right) \\
&\quad \left(2 n_2 \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \left(A_2 E_0 (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) - \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \left(A_2 E_0 + C_6 (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) + C_6 \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \right)^2 + \\
&\quad A_6 n_2 R_3 \left(A_2 E_0 R_3^2 + A_2 (2 E_0^2 - E_4) (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2 - 2 (A_0 - R_2 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) (A_0 + R_2 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) \right) \\
&\quad \left(2 C_6 E_4 (A_2 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) - \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \left(2 C_5 E_4 + A_2 E_5 + D_4 (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) + D_1 \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \right) - \\
&\quad \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \left(A_2 E_0 R_3^2 + A_2 (2 E_0^2 - E_4) (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2 - 2 (A_0 - R_2 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) (A_0 + R_2 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) \right) \\
&\quad \left(2 C_6 E_4 (A_2 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2))) - \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \left(D_1 \sqrt{R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2} \right) \right) \right) / \left(2 n_1 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 \right)^{3/2} R_3^2 \left(R_3^2 - (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2 \right)^{3/2}; \\
F_4 &= (-2 A_0 A_6 E_4^2 (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2 - (A_0 E_4 + 4 E_0 F_4 (A_0 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))) \left(R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2 \right) + 2 F_3 \left(R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2 \right) / \left(2 \left(R_2^2 - (A_5 + A_3 (S_4 + A_2 (-A_1 R_2 + R_3 + t_2)))^2 \right)^{3/2}; \\
F_5 &= \frac{1}{2 S_1 S_2 n_1 R_1^2} \left(2 S_1^2 S_2 R_1^2 - 2 S_2 n_1^2 (R_2 + t_1) - 4 S_1^2 R_1 (R_2 + t_1) + 2 n_1^2 (R_1^2 + (R_2 + t_1)^2) \right) + 4 S_1 n_0 (R_1 - R_2 - t_1) (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 (R_2 + t_1) (-2 S_2 + S_1 (R_2 + 2 (R_2 + t_1))) \cos[\theta]; \\
F_6 &= \left(-S_1^4 S_2^2 - n_1^6 R_2^2 + 2 S_1^2 S_2 (-R_1 - R_2 + t_1) - S_1^4 (-R_1 - R_2 + t_1)^2 + (2 S_1 (S_2 - n_0 \cos[\theta]) (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1))) \cos[\theta] - S_1 n_0^2 R_1 (-2 S_1 + F_5 n_1 R_1 + 2 n_0 \cos[\theta]) \sin[\theta] \right) \\
&\quad \sqrt{n_0^4 R_1^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2} (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) + \\
&\quad n_0 (-S_2^2 n_0 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1))^2 \cos[\theta]^2 - n_1^4 \cos[\theta] \cos[\theta] + n_0 (S_1^2 S_2 F_5 n_1 R_1^2 - 2 S_1 S_2 n_1^2 (R_2 + t_1) + 2 S_1^4 R_1 (-R_1 - R_2 + t_1) + n_1^4 (2 R_2^2 + 2 R_2 t_1 + t_1^2) - S_1^3 R_1 (2 S_2 + F_5 n_1 R_1 (R_2 + t_1)) + n_0^2 (-2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) + n_1^2 (2 R_2^2 + 2 R_2 t_1 + t_1^2)) \cos[2\theta]) - S_1^2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^4 + \\
&\quad 2 S_1 \cos[\theta] (S_1^2 S_2^2 + n_1^2 R_2^2 - S_1^4 (R_1 - R_2 - t_1) (R_2 + t_1) - n_1^2 (R_2 - 2 (R_2 + t_1)) + n_0^2 \sin[\theta]^2 (-S_1^2 R_1 (R_2 + t_1) - n_1^2 (2 R_2^2 + 2 R_2 t_1 + t_1^2) + S_1 S_2 (R_1 + 2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2))) / \\
&\quad \left(S_1 n_1^2 R_1^2 R_2 \sqrt{n_0^4 R_1^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2} (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right); \\
F_7 &= - \left(S_1^2 S_2^2 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) + S_1 F_6 n_1^5 \left(-A_0 n_1 + \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) R_2^2 R_2^2 + 2 S_1^2 S_2 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) (R_1 - R_2 - t_1) + \right. \\
&\quad S_2^2 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) (-R_1 + R_2 + t_1)^2 + S_1 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) n_0^2 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1))^2 \cos[\theta]^2 - \\
&\quad S_1 n_0^2 R_1 \left(-2 S_2^2 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) (R_1 - R_2 - t_1) + n_1 R_1 \left(S_1 F_6 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) + F_6 n_1^2 \left(-A_0 n_1 + \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) \right) \left(2 R_2^2 + 2 R_2 t_1 + t_1^2 \right) \right) + \\
&\quad S_1 \left(-F_5 n_1 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) R_1 (R_2 + t_1) - 2 S_1 \left(n_2^2 + n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) (-A_0 F_6 R_1 (R_2 + t_1)) + n_1^2 (-1 + A_0 (A_0 - F_6 R_1 (R_2 + t_1))) \right) + \\
&\quad 2 n_0 (A_0^2 S_2 n_1^2 + S_2 n_1^2 + S_1 n_1^2 (R_2 + t_1) + A_0 S_1 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} (R_2 + t_1)) \cos[\theta] \sin[\theta] + S_1 n_0^4 R_1^2 \left(n_2^2 + n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) (-A_0 + 2 F_6 (R_2 + t_1)) + n_1^2 (-1 + A_6^2 - 2 A_0 F_6 (R_2 + t_1))^2 \sin[\theta]^4 + \\
&\quad n_1^2 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} R_2 \left(n_1^2 + n_0 \cos[2\theta] \right) \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (2 R_2^2 + 2 R_2 t_1 + t_1^2)) \sin[\theta]^2 + 2 n_0^4 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^4) + \\
&\quad 2 S_1 n_0 \cos[\theta] \left(-S_1 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 - A_0 n_1 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \right) (S_2 - S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) + n_0^2 R_1 \left(S_2 n_1 (n_1 + A_0 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2}) + S_1 (A_0^2 n_1^2 + n_0^2) (R_2 + t_1) \right) \sin[\theta]^2 - \right. \\
&\quad \left. n_1^2 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} R_2 \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (2 R_2^2 + 2 R_2 t_1 + t_1^2)) \sin[\theta]^2 + 2 n_0^4 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^4) \right) \right) / \\
&\quad \left(S_1 n_2^2 n_2 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} R_2 \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right); \\
F_8 &= \frac{1}{n_1^4 n_2 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} R_1^2} \left(-2 S_2^2 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 \right) (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1))^2 - 2 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 \right) n_0^2 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1))^2 \cos[\theta]^2 - 2 \left((-1 + A_6^2) n_1^2 + n_0^2 \right) n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] (2 S_1 S_2 + n_0^2 R_1 + 2 S_1^2 (R_1 - R_2 - t_1) - n_0^2 R_1 \cos[2\theta]) - \right. \\
&\quad n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2 \left(S_2 n_1 (A_0 S_1 n_0 - A_0^2 F_8 n_1 + F_8 (n_1 - n_0) (n_1 + n_0)) R_1 + S_1 \left(F_8 n_1 \left((-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2 \right) R_1 (R_2 + t_1) + S_4 (n_1^2 + n_1^2 (-4 + 4 A_6^2 - 2 A_0 F_8 R_1 (R_2 + t_1))) \right) + \right. \\
&\quad \left. S_1^2 (4 n_0^2 (R_1 - R_2 - t_1) + n_1^2 (-4 (-1 + A_6^2) (R_2 + t_1) + R_1 (-4 + A_0 (4 A_0 + F_8 (R_2 + t_1)))) \right) + 2 \left((-1 + A_6^2) n_1^2 + n_0^2 \right) n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2 \right) + \\
&\quad n_0 \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2} \\
&\quad \left(2 S_1^2 (-n_1 R_2 + A_0 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1))) (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + \right. \\
&\quad n_0 (2 n_0 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) (-n_1 R_2 + A_0 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1))) \cos[\theta]^2 + R_1 \sin[\theta] (A_3 F_8 n_1^2 n_2 R_2 R_2 + n_0 (-2 S_1 n_1 R_2 + F_8 R_1 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1))^2 + A_0 (-(-S_2 F_8 n_0 + n_0^2) R_1 + 4 S_1^2 (R_1 - R_2 - t_1) + S_1 (4 S_2 + F_8 n_1 R_2 (R_2 + t_1))) - A_0 n_0^2 R_1 \cos[2\theta]) \sin[\theta]) + \\
&\quad \left. 2 \cos[\theta] (S_1 (-2 A_0 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) + n_1 R_1 (2 S_2 + S_1 (R_2 - 2 (R_2 + t_1)))) + n_0^2 R_1 (n_1 R_2 + 2 A_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1))) \sin[\theta]) \right); \\
F_9 &= \left(2 \left(A_2^2 F_5 n_2^2 n_2^2 n_2^2 R_2^2 R_2^2 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]^2 \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right) + \right. \\
&\quad n_1^2 n_2^2 R_2^2 \left(n_1^2 (A_1 R_2 - R_2 - t_2) (F_5 n_1 n_2^2 R_2^2 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]^2 - (S_1 (S_1 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \right) + \\
&\quad A_2 n_0^2 R_1^2 (A_4 F_5 + F_5 (A_4 R_2 - R_2 - t_2)) \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right) - \\
&\quad A_2^2 (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right) - \\
&\quad A_2^2 (n_1^2 (A_1 R_2 + t_1) (F_5 n_1 n_2^2 R_2^2 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]^2 - (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \right) - \\
&\quad n_1^2 (R_1 + t_2 + t_1) (F_5 n_1 n_2^2 R_2^2 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]^2 - (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \right) + \\
&\quad (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right) - \\
&\quad n_0 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta] \left(n_0 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta] \left(n_1^2 R_2 (S_2 - n_0 \cos[\theta]) - (A_0 n_1 - \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2}) (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \right) \right) \\
&\quad \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right) - \\
&\quad A_2 n_1^2 n_2 R_2 \left(A_2 n_1^2 n_2 R_2 (F_5 n_1 n_2^2 R_2^2 (S_2 - S_1 (R_2 + t_1)) \sin[\theta]^2 - (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \right) - \\
&\quad F_5 n_1^2 n_2 R_2^2 (A_1 R_2 - R_2 - t_2) \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right) + \\
&\quad 2 S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2 \left(n_1^2 R_2 (S_2 - n_0 \cos[\theta]) - (A_0 n_1 - \sqrt{(-1 + A_6^2) n_2^2 + n_1^2}) (S_1 (S_2 + S_1 (R_1 - R_2 - t_1)) + n_0 (-S_2 + S_1 (R_2 + t_1)) \cos[\theta] + n_0^2 R_1 \sin[\theta]^2) \right) \\
&\quad \left. \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right) \right) / \left(n_1^4 n_1^2 R_1^2 R_2^2 \sqrt{(n_1^4 R_2^2 + n_0^2 \sin[\theta]^2) (2 S_1 S_2 (R_2 + t_1) - n_1^2 (t_1^2 + 2 R_2 (R_2 + t_1)) + 2 n_0^2 (R_2 + t_1)^2 \sin[\theta]^2) \right);
\end{aligned}$$

Fig. B.6 Coeficiente \mathcal{F}_j , con $j = \{0, \dots, 9\}$.

