UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Propiedades analíticas de la matriz de dispersión en la recta discreta

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Gerardo Martin Franco Cordova

DIRECTOR
Miguel Arturo Ballesteros Montero
(Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas)

CIUDAD DE MÉXICO 28 de Junio AÑO 2021.

Índice

1. Introducción

En esta tesis se desarrolla teoría estacionaria de dispersión para operadores autoadjuntos H sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ de la forma

$$(H\,u)(n) \;=\; u(n+1) \;+\; V(n)u(n) \;+\; u(n-1)\;, \qquad n \in \mathbb{Z}\;, \tag{1}$$

donde $V(n) = V(n)^* \in \mathbb{C}^{L\times L}$ es una matriz autoadjunta de $L \times L$ con $L \in \mathbb{N}$ un número fijo. Estos operadores tridiagonales son también conocidos como operadores de Jacobi. Estos son el análogo discreto de los operadores de Sturm-Liouville y muchas de las técnicas se pueden traspasar con modificaciones adecuadas. Aquí el enfoque sera sobre teoría de dispersión elemental donde $V(n)$ no se anula en un número finito de sitios n, esto es la perturbación V de el laplaciano discreto $H_0 = H - V$ tiene soporte finito. Hay muchos trabajos [20, 25, 34, 33, 32] que cubren esta situación y nos dan varios resultados generales. Mas recientemente, el caso de potenciales no lineales ha sido trabajado por ejemplo en [12, 24]. Mas aún, el caso escalar $L = 1$ ha sido tratado en detalle por Hinton, Klaus, Shaw [14], ver tambien la reciente contribución [15]. Para el caso continuo de operadores de Schrödinger matriciales hay trabajos por Klaus [19] y Aktosun, Klaus y Van Der Mee [3] asi como recientes contribuciones por Aktosun, Klaus y Weder [7, 4, 8]. También el caso de la semirecta de la anterior ecuación matricial de Schrödinger ha sido analizado antes en [5, 26]. Problemas inversos han sido también tratados en numerosos trabajos (ver por ejemplo [1], [2, 8, 6, 11, 13, 16]).

En esta tesis nos enfocaremos en varios hechos y características que solidifican nuestra comprensión de la teoría de la dispersión estacionaria:

- La estructura analítica de la matriz de dispersión y el 'time delay' en energía compleja E, o mas bien el parámetro z definido por $E = z + z^{-1}$, es estudiado en detalle.
- La relación unitaria de la matriz de dispersión es extendida a energías complejas, incluyendo a los umbrales.
- La conexión entre la matriz de transferencia de onda plana y la matriz de transferencia estándar usada en la teoría de operadores de Jacobi es establecida.

Comencemos por recordar un poco sobre el análisis espectral de H.

Denotamos por $\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L) \to L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}^L)$ la transformada de Fourier y por $\mathcal{F}^{-1}$ su inversa. Estas están dadas por

$$\mathcal{F}(\phi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{ikn}\phi(n), \qquad\qquad \mathcal{F}^{-1}(\psi)(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikn}\psi(k). \tag{2}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}\psi(k) = (e^{ik} + e^{-ik})\psi(k) = (e^{ik} + e^{-ik})\psi(k) = 2\cos(k)\psi(k). \tag{3}$$

Como la transformada de Fourier es unitaria, entonces el espectro de H_0 es $\sigma(H_0) = [-2, 2]$ y este es absolutamente continuo . Por el teorema de Weyl (ver Sección XIII.4 en [23]), el espectro esencial de H esta dado por el espectro absolutamente continuo de H_0, $\sigma(H_0) = [-2, 2]$. Será parte de los resultados posteriores que el resto del espectro de H consta solo de un número finito J_b de eigenvalores $E_1, \ldots, E_{J_b} \in \mathbb{R}$ (listados con multiplicidad) fuera de $[-2, 2]$. Los eigenvectores asociados son llamados estado acotados y representan todo el espectro puntual $\sigma_p(H) = \{E_1, \ldots, E_{J_b}\}$ de H, notablemente no hay 'embedded eigenvalues'. En los umbrales $E = \pm 2$, puede haber un número J_h de los llamados estados semi-acotados que serán discutidos mas adelante.

Para el análisis del problema de dispersión y la continuación analítica de la matriz de dispersión, es conveniente estudiar la ecuación de Jacobi $Hu = Eu$ para energías complejas E y funciones a valores matrices o vectores de la forma $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{L\times L}$ o $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^L$ donde H esta dado por la misma prescripción como en (1). Las soluciones de jost son soluciones particulares que están determinadas por su comportamiento asintótico en $\pm\infty$ impuesto por las soluciones de la ecuación libre de Jacobi $H_0 u = Eu$ asociada al hamiltoniano libre H_0. Para cualquier $E \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$ hay dos soluciones libres

$$u_0^z(n) \;=\; z^n\,\mathbf{1}\;, \qquad u_0^{1/z}(n) \;=\; z^{-n}\,\mathbf{1}\;,$$

donde $\mathbf{1} \in \mathbb{C}^{L\times L}$ es la matriz identidad y $z, z^{-1} \in \mathbb{C}$ son las soluciones de

$$E \;=\; z \,+\, z^{-1}\;. \tag{4}$$

Obsérvese que $(u_0^z, u_0^{1/z})$ es una solución fundamental de $H_0 u = Eu$. Notemos que para $E \notin (-2, 2)$, las funciones u_0^z crecen o decrecen de manera exponencial en n, mientras que para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$ son las bien conocidas ondas planas. Nótese también que para $z = \pm 1$ correspondiente a los umbrales $E = \pm 2$, solo hay una solución libre $u_0^{\pm 1}$. Existe, sin embargo, una segunda solución $v_0^{\pm 1}$ de $H_0 u = \pm 2u$ dada por $v_0^{\pm 1}(n) = (\pm 1)^n\, n$. Esta segunda solución es entonces linealmente creciente en n. A continuación son definidas las soluciones de jost.

Definición 1. *Las soluciones de jost* $u_\pm^z : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{L\times L}$ *de* $Hu = Eu$ *con* $E = z + z^{-1}$ *estan definidas por las igualdades*

$$u_+^z(n) \;=\; u_0^z(n)\;, \qquad u_-^z(-n) \;=\; u_0^z(-n)\;,$$

para $n \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande tal que el soporte de* V *esta contenido en* $(-n, n)$.

Hay un total de $2L$ soluciones linealmente independientes $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^L$ de la ecuación $Hu = Eu$. Para $E \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$, es decir $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, las columnas de la matriz $(u_+^z, u_+^{1/z})$ provén una base del espacio de soluciones. Lo mismo se da para $(u_-^z, u_-^{1/z})$. Uno puede entonces expandir cualquier solución con respecto a una de estas bases. Esto justifica que sea posible la siguiente definición

Definición 2. *Para* $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1, 0, 1\}$, *la matriz de transferencia de onda plana* $\mathcal{M}^z \in \mathbb{C}^{2L\times 2L}$ *es definida por*

$$\big(u_-^z, u_-^{1/z}\big) \;=\; \big(u_+^z, u_+^{1/z}\big)\,\mathcal{M}^z\;. \tag{5}$$

Las entradas de $L \times L$ *de la matriz de transferencia son denotadas por*

$$\mathcal{M}^z \;=\; \begin{pmatrix} M_-^{1/z} & N_-^z \\ N_-^{1/z} & M_-^z \end{pmatrix}\;. \tag{6}$$

Note que (5) contiene las ecuaciones $u_-^z = u_+^z M_-^{1/z} + u_+^{1/z} N_-^{1/z}$ y $u_-^{1/z} = u_+^z N_-^z + u_+^{1/z} M_-^z$, que de hecho son idénticas si z es remplazado por z^{-1}. Teniendo de supuesto que M_-^z es invertible, uno puede reescribir la segunda ecuación como $u_+^{1/z} = u_-^{1/z}(M_-^z)^{-1} - u_+^z N_-^z (M_-^z)^{-1}$. De una manera similar, uno puede expandir u_+^z en terminos de $u_+^{1/z}$ y u_-^z, suponiendo también que $M_-^{1/z}$ es invertible. La matriz de dispersión es entonces definida por una relación similar a (5). Para simplificar la notación, vamos a introducir el conjunto $\mathbb{C}_0$ que consiste en los puntos $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ tales que tanto $M_-^{1/z}$ como M_-^z son invertibles. Mas adelante se probará (Corolario 21) que todos los puntos en el disco cerrado estan en $\mathbb{C}_0$, excepto aquellos $z \in (-1, 1)$ para los cuales $z + z^{-1}$ es un eigenvalor de H.

Definición 3. *Para cualquier $z \in \mathbb{C}_0$, la matriz de dispersión $\mathcal{S}^z \in \mathbb{C}^{2L \times 2L}$ expresa las soluciones de Jost u_-^z and $u_+^{1/z}$ en términos de u_+^z y $u_-^{1/z}$, es decir esta definida por*

$$\left(u_-^z, u_+^{1/z}\right) = \left(u_+^z, u_-^{1/z}\right) \mathcal{S}^z . \tag{7}$$

Las entradas de $L \times L$ de la matriz de dispersión son denotadas por

$$\mathcal{S}^z = \begin{pmatrix} T_+^z & R_-^z \\ R_+^z & T_-^z \end{pmatrix} ,$$

y son llamados los coeficientes de transmisión $T_\pm^z$ y los coeficientes de reflexión $R_\pm^z$.

Por supuesto, existe una estrecha conexión entre los coeficientes matriciales de $\mathcal{M}^z$ y $\mathcal{S}^z$. Por ejemplo, la relación $u_+^{1/z} = u_-^{1/z}(M_-^z)^{-1} - u_+^z N_-^z (M_-^z)^{-1}$ descrita anteriormente implica directamente que $T_-^z = (M_-^z)^{-1}$ y $R_-^z = -N_-^z (M_-^z)^{-1}$. A continuación vamos a proveer de una lista de propiedades algebraicas básicas de la matriz de transferencia de onda plana y la matriz de dispersión. Algunas serán expresadas en términos de las matrices de Pauli reales de tamaño $2L \times 2L$ con bloques de $L \times L$:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Además, denotaremos $\mathcal{M}^*$ al adjunto (traspuesta conjugada) de una matriz $\mathcal{M}$ y $\imath = \sqrt{-1}$.

Proposición 4. (i) *La matriz de transferencia de onda plana satisface para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$*

$$(\mathcal{M}^{1/\overline{z}})^* \mathcal{J} \mathcal{M}^z = \mathcal{J} , \qquad \mathcal{M}^z \mathcal{J} (\mathcal{M}^{1/\overline{z}})^* = \mathcal{J} . \tag{9}$$

Para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$, esto muestra que $\mathcal{M}^z$ es $\mathcal{J}$-unitaria, es decir $(\mathcal{M}^z)^* \mathcal{J} \mathcal{M}^z = \mathcal{J}$.

(ii) *Para $z \in \mathbb{R}$, la matriz de transferencia de onda plana es $\mathcal{I}$-unitaria, es decir $(\mathcal{M}^z)^* \mathcal{I} \mathcal{M}^z = \mathcal{I}$.*

(iii) *Para todo $z \in \mathbb{C}_0$, uno tiene que*

$$(\mathcal{S}^{1/\overline{z}})^* \mathcal{S}^z = \mathbf{1} , \qquad \mathcal{S}^{\overline{z}} = \mathcal{K} (\mathcal{S}^z)^* \mathcal{K} .$$

Para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$, esto implica que $\mathcal{S}^z$ es unitaria, $(T_+^{\overline{z}})^* = T_-^z$ y $(R_\pm^{\overline{z}})^* = R_\pm^z$.

(iv) *Si* $V = 0$*, uno tiene* $\mathcal{M}^z = \mathbf{1}$ *y* $\mathcal{S}^z = \mathbf{1}$ *para toda* $z \in \mathbb{C}_0$*.*

(v) *Ambas* $\mathcal{M}^z$ *y* $\mathcal{S}^z$ *son meromorfas sobre* $\mathbb{C}$*.*

Las pruebas de (i) y (ii) están dadas en la Secció 4, y las de (iii) y (v) en Sección 6. El inciso (iv) es obvio. Un detallado análisis de las singularidades y ceros de $\mathcal{M}^z$, $\mathcal{S}^z$ y sus entradas matriciales componen una gran parte de la tesis. Vamos a hacer algunas observaciones sobre las propiedades estructurales de la matriz de transferencia de onda plana y de la matriz de dispersión.

Observación 5. Hay dos razones principales que justifican la terminología *matriz de transferencia de onda plana* para $\mathcal{M}^z$. Primero que nada, esto refleja que las soluciones de onda plana de la derecha son transferidas a las soluciones de onda plana de la izquierda La segunda razón es que $\mathcal{M}^z$ es el producto ordenado de las matrices de transferencia de onda plana puntuales definidas como

$$\mathcal{M}^z(n) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \;+\; \imath\nu^z \begin{pmatrix} V(n) & z^{-2n}V(n) \\ -z^{2n}V(n) & -V(n) \end{pmatrix} \;, \tag{10}$$

donde

$$\nu^z \;=\; \frac{\imath}{z - z^{-1}} \tag{11}$$

es una cantidad que aparecerá en varias fórmulas mas adelante. Esta satisface $\nu^z = -\nu^{1/z} = (\nu^{1/\overline{z}})^*$, es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ y tienen polos de orden uno en ± 1. Entonces la multiplicatividad, una propiedad definida para cualquier tipo de matriz de transferencia, esta dada por

$$\mathcal{M}^z \;=\; \mathcal{M}^z(K_+)\mathcal{M}^z(K_+ - 1)\cdots\mathcal{M}^z(K_- + 1) \;,$$

donde $[K_- + 1, K_+] \cap \mathbb{Z}$ contiene al soporte de V. La multiplicatividad sera explicada a detalle en la Sección 4 y explotada mas adelante. Uno de los resultados de esta tesis es como obtener a $\mathcal{M}^z$ y $\mathcal{M}^z(n)$ de las matrices de transferencia estandar usadas en la teoría de matrices de Jacobi, ver Sección 4. $\diamond$

Observación 6. En esta observación, $z \in \mathbb{S}^1$. Vamos primero a recordar (en una variante un poco distinta que en [31, 30, 21]) que para cualquier matriz $\mathcal{J}$-unitaria $\mathcal{M}$ (es decir, que satisface $\mathcal{M}^*\mathcal{J}\mathcal{M} = \mathcal{J}$ y por eso también $\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^* = \mathcal{J}$), existe una matriz unitaria asociada $\mathcal{V}(\mathcal{M}) \in \mathbb{C}^{2L\times 2L}$ dada por

$$\mathcal{V}(\mathcal{M}) \;=\; \begin{pmatrix} (A^*)^{-1} & -BD^{-1} \\ D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (A^*)^{-1} & -BD^{-1} \\ B^*(A^*)^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \;, \qquad \mathcal{M} \;=\; \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \;. \tag{12}$$

Esta satisface

$$\mathcal{V}(\mathcal{M}) \;=\; \mathcal{V}(\mathcal{M}^{-1})^* \;=\; \mathcal{J}\,\mathcal{V}(\mathcal{M}^*)^*\mathcal{J} \;,$$

y, mas aún, existe una estrecha relación entre la teoría espectral de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{M})$, a saber la multiplicidad de 1 como un eigenvalor de $\mathcal{M}$ es igual a la multiplicidad de 1 como eigenvalor de

$\mathcal{V}(\mathcal{M})$. Además, $\mathcal{V}$ es una biyección de el conjunto de matrices $\mathcal{J}$-unitarias sobre el conjunto de elementos en el grupo unitario $\mathrm{U}(2L)$ que tienen entradas en la diagonal invertibles. En la presente situación donde $\mathcal{M} = \mathcal{M}^z$ para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 0, 1\}$, uno obtiene explícitamente que

$$\mathcal{V}(\mathcal{M}^z) \;=\; \mathcal{S}^z \; . \tag{13}$$

Por lo que la matriz de dispersión codifica la 'twisted graph' de la matriz de transferencia $\mathcal{M}^z$. $\diamond$

Observación 7. En la Definición 3, la matriz de dispersión actúa por la derecha sobre las soluciones de Jost. En la literatura de física de estado solido de sistemas cuasi-uno-dimensionales, la matriz de dispersión usualmente actúa por la izquierda sobre los vectores. La conexión entre estos dos puntos de vista se establece seleccionando dos soluciones particulares $u^z_-\psi_+$ y $u^{1/z}_+\phi_-$ tomando dos vectores $\psi_+, \phi_- \in \mathbb{C}^L$. Entonces las soluciones decrecientes hacia la izquierda y creciente hacia la derecha $u^{1/z}_-\psi_-$ y $u^z_+\phi_+$ están dadas por vectores $\psi_-, \phi_+ \in \mathbb{C}^L$ que están, de acuerdo a (7), especificados por

$$\left(u^z_-, u^{1/z}_+\right)\begin{pmatrix}\psi_+\\ \phi_-\end{pmatrix} \;=\; \left(u^z_+, u^{1/z}_-\right)\mathcal{S}^z\begin{pmatrix}\psi_+\\ \phi_-\end{pmatrix} \;=\; \left(u^z_+, u^{1/z}_-\right)\begin{pmatrix}\phi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} \;,$$

es decir

$$\mathcal{S}^z\begin{pmatrix}\psi_+\\ \phi_-\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\phi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} \;.$$

Entonces existe una manera estadanr de pasar (*e.g.* [22]), de la matriz de dispersión a la matriz de transferencia $\mathcal{M}^z$ mandando las componentes $\psi_\pm$ de la derecha a aquellas $\psi_\pm$ de la izquierda:

$$\mathcal{S}^z\begin{pmatrix}\psi_+\\ \phi_-\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\phi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{M}^z\begin{pmatrix}\psi_+\\ -\psi_-\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\phi_+\\ -\phi_-\end{pmatrix} \;.$$

Por lo tanto también la matriz de transferencia de onda plana actúa por la izquierda sobre los coeficientes de las soluciones. Como ya se estableció, la relación con las matrices de transferencia estandar es explicada en la Sección 4. $\diamond$

Hasta ahora todo lo anterior se sigue de técnicas relativamente estandar. El segundo punto principal de esta tesis es el comportamiento asintótico de la matriz de dispersión en los bordes de banda $E = \pm 2$ correspondientes a $z = \pm 1$. Se probará que el límite $\lim_{z\to\pm1}\mathcal{S}^z$ siempre existe por lo que la singularidad es removible (ver Sección 9, en particular la Proposición 24).

Teorema 8. *La matriz de dispersión se extiende analíticamente a* $\{-1, 1\}$.

Mas aún, serán provistas formulas explicitas de los límites anteriores. Para simplificar la notación, nos enfocaremos en $z = 1$, ya que $z = -1$ puede ser tratado de manera similar (o ser obtenido por una inversión de el potencial). Para un potencial genérico, uno tiene (ver (56) mas adelante)

$$\lim_{z\to1}\mathcal{S}^z \;=\; \begin{pmatrix}0 & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & 0\end{pmatrix} \;. \tag{14}$$

Existe, sin embargo, casos no genéricos también llamados casos excepcionales para los cuales los límites de los coeficientes de transmisión son no triviales y pueden ser expresados explícitamente en términos del wronskiano de las funciones de jost, ver Sección 9 mas adelante.

El tercero y último resultado mencionado en esta introducción es una fórmula de la matriz de dispersión en términos de la función de Green. Esta usa una estrecha conexión entre la matriz de transferencia y las funciones de Green para matrices de Jacobi finitas, también en el caso de entradas matriciales (*e.g.* [29]). Para $n, m \in \mathbb{Z}$ y $E \notin \sigma(H)$, la función de Green esta definida por

$$G^E(n,m) \;=\; \pi_n\,(H-E)^{-1}\,(\pi_m)^* \;\in\; \mathbb{C}^{L\times L}\;, \tag{15}$$

donde $\pi_n : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L) \to \mathbb{C}^L$ es la isometría parcial definida por $\pi_n\phi = \phi_n \in \mathbb{C}^L$ para un vector $\phi = (\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$. La siguiente fórmula es derivada en la Sección 12, ver las ecuaciones (63) y (64).

Proposición 9. *Para $|z| < 1$ con $z + z^{-1} \notin \sigma(H)$, la matriz de dispersión $\mathcal{S}^z$ esta dada por*

$$\mathcal{S}^z \;=\; (z-z^{-1})z^{K_- - K_+}\begin{pmatrix} G^E(K_+,K_-) & z^{-K_+-K_-}(G^E(K_+,K_+)+\imath\nu^z) \\ -z^{K_++K_-}(G^E(K_-,K_-)+\imath\nu^z) & G^E(K_-,K_+)\end{pmatrix}\;.$$

También puede considerarse la situación de dispersión con un soporte no acotado de V, pero bajo una condición de rango corto. Donde la existencia de las soluciones de jost es asegurada por un argumento estandar basado en la ecuación de Volterra, varios (pero no todos) los resultados aquí establecidos se traspasan a esta situación mas general.

2. Matriz de transferencia y soluciones de jost

Como ya se destacó, el soporte de el potencial es supuesto finito. Para ser mas concreto, vamos a suponer que el soporte esta contenido en $\{-K_- + 1, \ldots, K_+\}$ para algún finito y fijo $K_\pm$ con $K_- \leq K_+$. Construir soluciones de Jost explícitamente es simple usando las matrices de transferencia

$$\mathcal{T}^E(n) \;=\; \begin{pmatrix} E - V(n) & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}\;.$$

Las matrices de transferencia sobre varios sitios están definidas como

$$\mathcal{T}^E(n,m) \;=\; \mathcal{T}^E(n)\cdots\mathcal{T}^E(m+1)\;, \qquad n > m\;,$$

junto con la convención de que $\mathcal{T}^E(n,n) = \mathbf{1}_{2L}$. También hacemos $\mathcal{T}^E(m,n) = \mathcal{T}^E(n,m)^{-1}$. Entonces uno tiene que $\mathcal{T}^E(n,n-1) = \mathcal{T}^E(n)$ y la relación de concatenación $\mathcal{T}^E(n,m)\mathcal{T}^E(m,k) = \mathcal{T}^E(n,k)$. Mas aún,

$$\mathcal{T}^{\overline{E}}(n,m)^*\,\mathcal{I}\,\mathcal{T}^E(n,m) \;=\; \mathcal{I}\;, \tag{16}$$

donde $\mathcal{I}$ es la segunda matriz real de Pauli definidas en (8). Para energías reales $E \in \mathbb{R}$, estos estados de la matriz de transferencia están en el grupo de las matrices $\mathcal{I}$-unitarias que satisfacen $\mathcal{T}^*\mathcal{I}\mathcal{T} = \mathcal{I}$. Las matrices de transferencia permiten reescribir la ecuación de Schödinger $Hu = Eu$ estableciendo

$$\Phi(n) \ = \ \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} \ \in \mathbb{C}^{2L\times L} \ , \tag{17}$$

entonces uno tienen que

$$\Phi(n) \ = \ \mathcal{T}^E(n)\,\Phi(n-1) \ = \ \mathcal{T}^E(n,m)\,\Phi(m) \ .$$

Para usar esto de manera iterada, uno necesita algunas condiciones iniciales. Entonces condiciones iniciales particulares nos dan las soluciones de jost $u^z_\pm$. Las condiciones iniciales apropiadas están determinadas por la diagonalización de la matriz de transferencia no perturbada

$$\mathcal{T}^E_0 \ = \ \begin{pmatrix} E & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

que es igual a $\mathcal{T}^E(n)$ para $n \notin \{-K_- + 1, \ldots, K_+\}$. Recordar que por la relación (4), uno tiene que

$$\begin{pmatrix} E & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z\,\mathbf{1} & z^{-1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} z\,\mathbf{1} & z^{-1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z\,\mathbf{1} & 0 \\ 0 & z^{-1}\,\mathbf{1} \end{pmatrix} \ .$$

Esto permite reconocer eigenvectores para los eigenvalores z y z^{-1}. Mas aún, esto motiva a usar la siguiente notación

$$\mathcal{C}^z \ = \ \begin{pmatrix} z\,\mathbf{1} & z^{-1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \ , \qquad \mathcal{D}^z(K) \ = \ \begin{pmatrix} z^K\mathbf{1} & 0 \\ 0 & z^{-K}\mathbf{1} \end{pmatrix} \ .$$

Ahora la anterior identidad matricial puede simplemente ser escrita como $\mathcal{T}^E_0\mathcal{C}^z = \mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(1)$, que muestra que

$$(\mathcal{T}^E_0)^K\,\mathcal{C}^z \ = \ \mathcal{C}^z\,\mathcal{D}^z(K) \ .$$

Para las soluciones de jost u^z_+ uno puede entonces escoger $\Phi(K_+) = \binom{z\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ salvo un factor de normalización, y escoger $\Phi(K_-) = \binom{z\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ para u^z_-. Agregando potencias de z adecuadas esto muestra que las soluciones de Jost son, para $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$u^z_\pm(n) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}^* \mathcal{T}^E(n,K_\pm) \begin{pmatrix} z\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} z^{K_\pm} \ .$$

Como en (17), las soluciones de Jost nos permiten construir matrices $\Phi^z_\pm(n) \in \mathbb{C}^{2L\times L}$ que generan planos L-dimensionales en $\mathbb{C}^{2L}$:

$$\Phi^z_\pm(n) \ = \ \begin{pmatrix} u^z_\pm(n+1) \\ u^z_\pm(n) \end{pmatrix} \ = \ \mathcal{T}^E(n,K_\pm) \begin{pmatrix} z\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} z^{K_\pm} \ . \tag{18}$$

Usando la anterior notación, uno tiene que

$$\big(\Phi^z_\pm(n), \Phi^{1/z}_\pm(n)\big) \ = \ \mathcal{T}^E(n,K_\pm)\,\mathcal{C}^z\,\mathcal{D}^z(K_\pm)\,. \tag{19}$$

Note que para $n \geq K_+$ uno tiene que

$$\left(\Phi_+^z(n), \Phi_+^{1/z}(n)\right) \;=\; \mathcal{C}^z\, \mathcal{D}^z(n) \;=\; \begin{pmatrix} z^{n+1}\, \mathbf{1} & z^{-n-1}\, \mathbf{1} \\ z^n\, \mathbf{1} & z^{-n}\, \mathbf{1} \end{pmatrix}\,, \tag{20}$$

y de forma similar para $\left(\Phi_-^z(n), \Phi_-^{1/z}(n)\right)$ cuando $n \leq K_-$.

A continuación, vamos brevemente a puntualizar que también es posible construir las soluciones que crecen de manera lineal $v_\pm^z$ para $z = 1$, por ejemplo:

$$v_+^1(n) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}^* \mathcal{T}^2(n, K_+) \begin{pmatrix} (K_+ + 1)\, \mathbf{1} \\ K_+\, \mathbf{1} \end{pmatrix}\,.$$

Para concluir esta sección, vamos a indicar como se pueden obtener las soluciones de Jost cuando se debilita la hipótesis del soporte de la perturbación V. Es decir, solo en esta última parte omitiremos la hipótesis de que V tiene soporte compacto para suponer que tiene primer momento finito, esto es

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|nV(n)\| < \infty.$$

Definición 10 (Soluciones de Jost)**.** *Para cualquier $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$, denotamos por u_+^z , $u_-^{1/z}$ a las soluciones a valores en $\mathcal{M}_{L\times L}$ de*

$$Hu_+^z = Eu_+^z, \qquad Hu_-^{1/z} = Eu_-^{1/z}, \qquad\qquad E = z + 1/z, \tag{21}$$

que satisfacen, cuando $n \to +\infty$ y $n \to -\infty$ respectivamente,

$$u_+^z(n) = z^n(\mathbf{1} + o(1)), \qquad u_-^{1/z}(n) = z^{-n}(\mathbf{1} + o(1)). \tag{22}$$

Mas aún, para $z = 1$, denotamos por $v_\pm^z$ la solución a valores en $\mathcal{M}_{L\times L}$ de

$$Hv_\pm^z = Ev_\pm^z, \qquad\qquad E = 2, \tag{23}$$

que satisface, cuando $n \to \pm\infty$,

$$v_\pm^z(n) = n(\mathbf{1} + o(1)). \tag{24}$$

Lema 11 (Soluciones de Jost)**.** *Las soluciones de Jost u_+^z, $u_-^{1/z}$ como estan definidas en la Definición 10 existen, para cada $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$. Más aún, para cada n, las funciones $u_+^z(n), u_-^{1/z}(n)$ son analíticas en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$. Además estas satisfacen las siguientes ecuaciones de Volterra:*

$$\begin{aligned} u_+^z(n) &= z^n\mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} s^z(j-n)V(j)u_+^z(j), \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ u_-^{1/z}(n) &= z^{-n}\mathbf{1} + \sum_{j=-\infty}^{n-1} s^{1/z}(j-n)V(j)u_-^{1/z}(j), \qquad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{25}$$

donde s^z es la solución escalar de $Hs^z = Es^z$, que satisface $s^z(0) = 0$ y $s^z(1) = 1$.

Demostración. EL resultado se sigue de el Teorema 30: Tomando $g = \mathbf{1}$, $K^z(n,j) = -z^{j-n}s^z(j-n)V(j)$ y $M(j) = j\|V(j)\|$, obtenemos una solución $\tilde{u}^z_+$ de la ecuación (para $n \in \mathbb{N}$)

$$\tilde{u}^z_+(n) = \mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} s^z(j-n)V(j)z^{j-n}\tilde{u}^z_+(j). \tag{26}$$

Un cálculo directo usando (26) muestra que $u^z_+(n) = z^n\tilde{u}^z_+(n)$ resuelve la ecuación de Schrödinger $u^z_+(n-1) + V(n)u^z_+(n) + u^z_+(n+1) = (z+1/z)u^z_+(n)$, para $n \geq 2$ (esto es probado en el Lema 33). Para $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, recursivamente ajustamos la ecuación $Hu^z_+ = Eu^z_+$ definiendo: $u^z_+(n-1) = (z+1/z)u^z_+(n) - V(n)u^z_+(n) - u^z_+(n+1)$. La construcción de la otra solución es similar. $\square$

Lema 12. *Las soluciones $v^1_\pm$ introducidas en la Definición 10 existen.*

Demostración. El Teorema 30 implica que hay una solución $\tilde{v}^1_+$ a la ecuación de Volterra (para $n \geq N$)

$$\tilde{v}^1_+(n) = \mathbf{1} + \frac{1}{n}\sum_{j=N}^{n} j^2V(j)\tilde{v}^1_+(n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} jV(j)\tilde{v}^1_+(n), \tag{27}$$

donde $N \in \mathbb{N}$ es tal que $\sum_{j=N}^{\infty} j\|V(j)\| < 1/2$. Aquí estamos haciendo $g = \mathbf{1}$,

$$K(n,j) = \begin{cases} jV(j), & j \geq n+1 \\ \frac{j^2}{n}V(j), & N \leq j \leq n \end{cases}$$

and $M(j) = j\|V(j)\|$. Un cálculo directo usando (27) prueba que $v^1_+(n) = n\tilde{v}^1_+(n)$ resuelve la ecuación de Schrödinger $v^1_+(n-1) + V(n)v^1_+(n) + v^1_+(n+1) = 2v^1_+(n)$, para $n \geq N+1$ (esto es obtenido utilizando métodos similares a los de la prueba del Lema 33). Para $n \leq N$, recursivamente ajustamos la ecuación $Hu^z_+ = Eu^z_+$ definiendo $v^1_+(n-1) = 2v^1_+(n) - V(n)v^1_+(n) - v^1_+(n+1)$. La construcción de la otra solución es similar. $\square$

3. Identidades del wronskiano

Definición 13. *Para las dos funciones $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{L\times L}$ y $n \in \mathbb{Z}$, los wronskianos estan definidos por*

$$W_n(u,v) \;=\; \imath\big(u(n+1)^*v(n) \;-\; u(n)^*v(n+1)\big) \;\in \mathbb{C}^{L\times L}\;. \tag{28}$$

Si $W_n(u,v)$ es independiente de n, esto se denota simplemente por $W(u,v)$.

Claramente uno tiene de la definición que $W_n(u,v)^* = W_n(v,u)$. La definición también sugiere que el wronskiano es independiente de n para funciones u y v de interés. Este hecho se sigue de un rápido calculo:

Lema 14. *Para un par de soluciones matriciales $Hu = Eu$ y $Hv = \overline{E}v$ de la ecuación de Schrödinger en energía conjugada, el wronskiano $W_n(u,v)$ es independiente de n.*

Demostración. Por hipótesis u y v satisfacen, para cada $n \in \mathbb{Z}$, que

$$u(n+1) + V(n)u(n) + u(n-1) = Eu(n), \quad v(n+1) + V(n)v(n) + v(n-1) = \overline{E}v(n),$$

tomando adjunto en la primera igualdad (recordar que $V(n)$ es autoadjunta) y multiplicandola por la derecha por $v(n)$ obtenemos

$$u(n+1)^* v(n) + u(n)^* V(n)v(n) + u(n-1)^* v(n) = \overline{E}u(n)^* v(n),$$

ahora multiplicando la segunda igualdad por $u(n)^*$ por la izquierda obtenemos

$$u(n)^* v(n+1) + u(n)^* V(n)v(n) + u(n)^* v(n-1) = \overline{E}u(n)^* v(n).$$

Tomando la resta de las ecuaciones anteriores obtenemos que

$$u(n+1)^* v(n) - u(n)^* v(n+1) - (u(n)^* v(n-1) - u(n-1)^* v(n)) = 0,$$

por lo que

$$W_n(u, v) - W_{n-1}(u, v) = 0.$$

Como lo anterior es para toda $n \in \mathbb{Z}$, se tiene el resultado. □

A partir de ahora, en wronskianos como $W(u_-^{\overline{z}}, u_+^z)$ y $W(u_-^{1/\overline{z}}, u_+^z)$ omitiremos el subíndice n. Usando la constancia, los wronskianos de las soluciones de jost pueden ser evaluados explícitamente en n, ya sea para $n > K_+$ o $n < K_-$. Usando esto uno encuentra las siguientes identidades del wronskiano

$$W(u_\pm^{\overline{z}}, u_\pm^z) \;=\; 0 \;, \qquad W(u_\pm^{1/\overline{z}}, u_\pm^z) \;=\; (\nu^z)^{-1}\, \mathbf{1} \;.$$

Usando la notación de (18) podemos reescribir estas identidades como

$$W(u_+^{\overline{z}}, u_\pm^z) \;=\; (\Phi_+^{\overline{z}})^* \, \tfrac{1}{\imath}\, \mathcal{I}\, \Phi_\pm^z \;, \qquad W(u_+^{1/\overline{z}}, u_\pm^z) \;=\; (\Phi_+^{1/\overline{z}})^* \, \tfrac{1}{\imath}\, \mathcal{I}\, \Phi_\pm^z \;. \tag{29}$$

Las identidades del wronskiano entonces se convierten en

$$(\Phi_\pm^{1/\overline{z}}, \Phi_\pm^{\overline{z}})^* \, \tfrac{1}{\imath}\, \mathcal{I}\, (\Phi_\pm^z, \Phi_\pm^{1/z}) \;=\; (\nu^z)^{-1}\, \mathcal{J} \;. \tag{30}$$

Aquí el índice n en todo $\Phi_\pm^z(n)$ no es escrito. En particular, estas identidades implican que las matrices $(\Phi_\pm^z, \Phi_\pm^{1/z}) \in \mathbb{C}^{2L\times 2L}$ son invertibles.

Las siguientes identidades del wronskiano envuelven las derivadas de las soluciones de jost con respecto a z que también se usarán mas adelante.

Lema 15. *Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\sigma, \eta \in \{-, +\}$ y $n \in \mathbb{Z}$, uno tiene que*

$$W_n(u_\sigma^{\overline{z}}, \partial_z u_\eta^z) \;=\; W_{n-1}(u_\sigma^{\overline{z}}, \partial_z u_\eta^z) \;-\; \imath\, (1 - z^{-2})\, u_\sigma^{\overline{z}}(n)^* u_\eta^z(n) \;.$$

Una identidad similar se da para $W_n(u_\sigma^{1/\overline{z}}, \partial_z u_\eta^z)$.

Demostración. Escribiendo la ecuación $Hu^z_\pm = (z+z^{-1})u^z_\pm$ para cada $n\in\mathbb{Z}$ tenemos

$$u^z_\sigma(n+1) + V(n)u^z_\sigma(n) + u^z_\sigma(n-1) = (z+z^{-1})u^z_\sigma(n)\,. \tag{31}$$

Tomando el adjunto de esta ecuación con z reemplazada por $\overline{z}$ y multiplicando por la derecha por $\partial_z u^z_\eta(n)$ obtenemos que

$$u^{\overline{z}}_\sigma(n{+}1)^*\partial_z u^z_\eta(n) + u^{\overline{z}}_\sigma(n)^*V(n)\partial_z u^z_\eta(n) + u^{\overline{z}}_\sigma(n{-}1)^*\partial_z u^z_\eta(n) = (z{+}z^{-1})u^{\overline{z}}_\sigma(n)^*\partial_z u^z_\eta(n)\,. \tag{32}$$

Derivando la Ecuación (31) (reemplazando σ por η) con respecto a z se obtiene

$$\partial_z u^z_\eta(n+1) + V(n)\partial_z u^z_\eta(n) + \partial_z u^z_\eta(n-1) = (1-z^{-2})u^z_\eta(n) + (z+z^{-1})\partial_z u^z_\eta(n)\,. \tag{33}$$

Multiplicando la Ec. (33) por la derecha por $u^{\overline{z}}_\sigma(n)^*$ y restando la Ec. (32) se obtiene el resultado deseado. $\square$

4. Matriz de transferencia de onda plana

La matriz de transferencia de onda plana $\mathcal{M}^z$ es introducida en la Definición 2. Esta terminología sera explicada y justificada en esta sección. Recuerde la definición (5), es decir $(u^z_-, u^{1/z}_-) = (u^z_+, u^{1/z}_+)\mathcal{M}^z$. Usando las matrices $\Phi^z_\pm(n)\in\mathbb{C}^{2L\times L}$ en (18), esto puede ser reescrito como

$$\big(\Phi^z_-, \Phi^{1/z}_-\big) = \big(\Phi^z_+, \Phi^{1/z}_+\big)\,\mathcal{M}^z\,.$$

Note que en ambos lados de esta igualdad uno puede seguir evaluando en el sitio n. Multiplicando la ecuación de el lado izquierdo por $(\Phi^{1/\overline{z}}_\pm, \Phi^{\overline{z}}_\pm)^*\,\frac{1}{\imath}\,\mathcal{I}$ y tomando en cuenta las identidades del wronskiano (30) así como $\mathcal{J}^2=\mathbf{1}$ se prueba que

$$\mathcal{M}^z = \nu^z\,\mathcal{J}\,\big(\Phi^{1/\overline{z}}_+, \Phi^{\overline{z}}_+\big)^*\,\tfrac{1}{\imath}\,\mathcal{I}\,\big(\Phi^z_-, \Phi^{1/z}_-\big)\,. \tag{34}$$

Se sigue que $\mathcal{M}^z$ es analítica para z fuera de $\{-1,0,1\}$. Con la intención de hacer una conexión con la matriz de transferencia, vamos ahora a usar (19) con el signo de menos y $n=K_+$ seguido de (20):

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^E(K_+,K_-)\,\mathcal{C}^z\,\mathcal{D}^z(K_-) &= \big(\Phi^z_-(K_+), \Phi^{1/z}_-(K_+)\big)\\ &= \big(\Phi^z_+(K_+), \Phi^{1/z}_+(K_+)\big)\,\mathcal{M}^z\\ &= \mathcal{C}^z\,\mathcal{D}^z(K_+)\,\mathcal{M}^z\,,\end{aligned}$$

lo cual implica que que

$$\mathcal{M}^z = \big(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(K_+)\big)^{-1}\,\mathcal{T}^E(K_+,K_-)\,\big(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(K_-)\big)\,. \tag{35}$$

Esto motiva que se introduzca la matriz de transferencia de onda plana puntual en $n\in\mathbb{Z}$ como

$$\mathcal{M}^z(n) = \big(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(n)\big)^{-1}\,\mathcal{T}^E(n)\,\big(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(n-1)\big)\,, \tag{36}$$

también la versión en varios puntos como $\mathcal{M}^z(n,m) = \mathcal{M}^z(n)\cdots\mathcal{M}^z(m+1)$ y $\mathcal{M}^z(m,n) = \mathcal{M}^z(n,m)^{-1}$ para $n > m$, justo como para las matrices de transferencia. También hacemos $\mathcal{M}^z(n,n) = \mathbf{1}$. Con esta notación, uno tiene que $\mathcal{M}^z(n,n-1) = \mathcal{M}^z(n)$ y la matriz de transferencia de la Definición 2 se puede escribir ahora como $\mathcal{M}^z = \mathcal{M}^z(K_+,K_-)$. Ahora uno puede deducir una primera propiedad crucial de $\mathcal{M}^z(n,m)$, a saber que su multiplicatividad se mantiene. En efecto, descomponiendo $\mathcal{T}^E(n,m) = \mathcal{T}^E(n)\mathcal{T}^E(n-1,m)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}^z(n,m)\\
&= \left(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(n)\right)^{-1}\mathcal{T}^E(n)\left(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(n-1)\right)\left(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(n-1)\right)^{-1}\mathcal{T}^E(n-1,m)\left(\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(m)\right)\\
&= \mathcal{M}^z(n)\,\mathcal{M}^z(n-1,m)\\
&= \mathcal{M}^z(n)\cdots\mathcal{M}^z(m+1)\,. \qquad (37)
\end{aligned}$$

De (36), también uno puede calcular la matriz de transferencia de onda plana de manera explicita:

$$\mathcal{M}^z(n) \;=\; \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \;+\; \imath\,\nu^z\begin{pmatrix}V(n) & z^{-2n}V(n)\\ -z^{2n}V(n) & -V(n)\end{pmatrix}\;. \qquad (38)$$

Por lo tanto $\mathcal{M}^z(n) = \mathbf{1}$ si el potencial $V(n)$ se anula. De (38) uno fácilmente obtiene las identidades $\mathcal{M}^{1/\overline{z}}(n)^*\mathcal{J}\mathcal{M}^z(n) = \mathcal{J}$ y $\mathcal{M}^z(n)\mathcal{J}\mathcal{M}^{1/\overline{z}}(n)^* = \mathcal{J}$. Combinadas con (37) se puede deducir la siguiente propiedad:

$$\mathcal{M}^{1/\overline{z}}(n,m)^*\,\mathcal{J}\,\mathcal{M}^z(n,m) \;=\; \mathcal{J}\;, \qquad (39)$$

$$\mathcal{M}^z(n,m)\,\mathcal{J}\,\mathcal{M}^{1/\overline{z}}(n,m)^* \;=\; \mathcal{J}\;. \qquad (40)$$

Para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1,1\}$, esto muestra que $\mathcal{M}^z(n,m)$ es $\mathcal{J}$-unitaria, es decir que satisface $\mathcal{M}^*\mathcal{J}\mathcal{M} = \mathcal{J}$. Esto también implica (9).

En conclusión, las matrices $\mathcal{M}^z(n,m)$ tienen la propiedad de multiplicatividad y son $\mathcal{J}$-unitarias, de manera similar a las matrices de transferencia que son multiplicativas y $\mathcal{I}$-unitarias. Mas aún, estas son triviales cuando el potencial se anula y entonces se adaptan a las ondas planas. Todo esto justifica la terminología usada. La conexión con las matrices de transferencia $\mathcal{T}^E(n,m)$ es establecida por (36). Esto prueba que el paso de $\mathcal{T}^E(n,m)$ a $\mathcal{M}^z(n,m)$ esta dado por un cambio de base inducido por $\mathcal{C}^z$, seguido por los factores diagonales. Este cambio de base $\mathcal{C}^z$ para $z = \pm\imath$ induce vía la acción de Möbius la transformación de Cayley y esta es bien conocida que induce un mapeo de $\mathcal{I}$-unitarias a $\mathcal{J}$-unitarias (*e.g.* [30]). Esto es también efecto de el cambio de base. Para ser mas concretos, vamos a escribir a $\mathcal{M}^z(n,m)$ en términos de las entradas de $L \times L$ (que dependen de E) de la matriz de transferencia:

$$\mathcal{T}^E(n,m) \;=\; \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\;. \qquad (41)$$

Entonces se tiene que

$$\mathcal{M}^z(n,m) \;=\; \imath\,\nu^z\mathcal{D}^z(n)^{-1}\begin{pmatrix}-B+C-zA+z^{-1}D & -B+z^{-1}(D-A)+z^{-2}C\\ B+z(A-D)-z^2C & -C+B+z^{-1}A-zD\end{pmatrix}\mathcal{D}^z(m)\;.$$

Ahora vamos a fijarnos cuando $z \in \mathbb{R}$, correspondientes a energías $E \in \mathbb{R} \setminus (-2,2)$. Uno puede hacer el cálculo y verificar que

$$\mathcal{M}^z(n)^* \mathcal{I} \, \mathcal{M}^z(n) \; = \; \mathcal{I} \, , \tag{42}$$

que es la $\mathcal{I}$-unitariedad de $\mathcal{M}^z(n)$ para $z \in \mathbb{R}$. Esto implica que también $\mathcal{M}^z(n,m)$ y entonces $\mathcal{M}^z$ es $\mathcal{I}$-unitaria, que es el inciso (ii) de la Proposición 4.

5. Entradas matriciales de la matriz de transferencia de onda plana

Vamos a comenzar por recordar la relación (6) que define a $\mathcal{M}^z$, es decir $\big(u^z_-, u^{1/z}_-\big) = \big(u^z_+, u^{1/z}_+\big)\mathcal{M}^z$. Multiplicando esta por el inverso de $\mathcal{M}^z$ obtenemos que $\big(u^z_+, u^{1/z}_+\big) = \big(u^z_-, u^{1/z}_-\big)(\mathcal{M}^z)^{-1}$. Vamos a introducir notación para los coeficientes de la matriz

$$(\mathcal{M}^z)^{-1} \; = \; \begin{pmatrix} M^z_+ & N^{1/z}_+ \\ N^z_+ & M^{1/z}_+ \end{pmatrix} \, ,$$

las anteriores dos ecuaciones junto con (6) implican

$$u^z_+ \; = \; u^z_- M^z_+ \; + \; u^{1/z}_- N^z_+ \, , \qquad u^{1/z}_- \; = \; u^z_+ N^z_- \; + \; u^{1/z}_+ M^z_- \, , \tag{43}$$

que se da para $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Esto también puede ser reescrito como

$$\Phi^z_+ \; = \; \Phi^z_- M^z_+ \; + \; \Phi^{1/z}_- N^z_+ \, , \qquad \Phi^{1/z}_- \; = \; \Phi^z_+ N^z_- \; + \; \Phi^{1/z}_+ M^z_- \, .$$

Usando las identidades de el wronskian (30) se obtiene que

$$\begin{aligned} M^z_+ \; &= \; \nu^z \, (\Phi^{1/\overline{z}}_-)^* \, \tfrac{1}{\imath} \mathcal{I} \, \Phi^z_+ \; = \; \nu^z \, W(u^{1/\overline{z}}_-, u^z_+) \, , \\ N^z_+ \; &= \; - \, \nu^z \, (\Phi^{\overline{z}}_-)^* \, \tfrac{1}{\imath} \mathcal{I} \, \Phi^z_+ \; = \; - \, \nu^z \, W(u^{\overline{z}}_-, u^z_+) \, , \\ N^z_- \; &= \; \nu^z \, (\Phi^{1/\overline{z}}_+)^* \, \tfrac{1}{\imath} \mathcal{I} \, \Phi^{1/z}_- \; = \; \nu^z \, W(u^{1/\overline{z}}_+, u^{1/z}_-) \, , \\ M^z_- \; &= \; - \, \nu^z \, (\Phi^{\overline{z}}_+)^* \, \tfrac{1}{\imath} \mathcal{I} \, \Phi^{1/z}_- \; = \; - \, \nu^z \, W(u^{\overline{z}}_+, u^{1/z}_-) \, . \end{aligned} \tag{44}$$

Esto prueba que $M^z_\pm$ y $N^z_\pm$ son analíticos en $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ahora $\mathcal{M}^z$ puede también ser escrito usando los wronskianos:

$$\mathcal{M}^z \; = \; \nu^z \begin{pmatrix} W(u^{1/\overline{z}}_+, u^z_-) & W(u^{1/\overline{z}}_+, u^{1/z}_-) \\ -W(u^{\overline{z}}_+, u^z_-) & -\, W(u^{\overline{z}}_+, u^{1/z}_-) \end{pmatrix} \, . \tag{45}$$

Además notemos que $(\mathcal{M}^z)^{-1} = \mathcal{J}(\mathcal{M}^{1/\overline{z}})^* \mathcal{J}$ debido a (40), que es equivalente a

$$(N^z_+)^* \; = \; - \, N^{1/\overline{z}}_- \, , \qquad (M^z_+)^* \; = \; M^{\overline{z}}_- \, . \tag{46}$$

Mas aún, usando las relaciones (39) y (40), uno obtiene que:

$$M_+^z(M_+^{1/\overline{z}})^* \;=\; \mathbf{1} \,+\, N_+^{1/z}(N_+^{\overline{z}})^* \,, \qquad (M_-^{1/\overline{z}})^* M_-^z \;=\; \mathbf{1} \,+\, (N_-^{1/\overline{z}})^* N_-^z \,, \tag{47}$$

$$M_+^z N_-^z \;=\; -\,N_+^{1/z} M_-^z \,, \qquad M_-^z N_+^z \;=\; -\,N_-^{1/z} M_+^z \,, \tag{48}$$

$$(M_+^{1/\overline{z}})^* M_+^z \;=\; \mathbf{1} \,+\, (N_+^{1/\overline{z}})^* N_+^z \,, \qquad M_-^z(M_-^{1/\overline{z}})^* \;=\; \mathbf{1} \,+\, N_-^{1/z}(N_-^{\overline{z}})^* \,. \tag{49}$$

Combinando estas ecuaciones con (46) implica que para $z \in \mathbb{R}$:

$$(N_-^z)^* M_-^z \;=\; (M_-^z)^* N_-^z \,, \qquad (M_-^{1/z})^* M_-^z \;=\; \mathbf{1} \,+\, (N_-^{1/z})^* N_-^z \,. \tag{50}$$

Lema 16. *Para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$, $M_\pm^z$ son invertibles.*

Demostración. Para $z \in \mathbb{S}^1$, uno tiene $1/\overline{z} = z$ y por eso la identidad (49) implica que $(M_\pm^z)^* M_\pm^z \geq \mathbf{1}$ entonces $M_\pm^z$ son invertibles. □

6. La matriz de dispersión

La matriz de dispersión fue introducida en la Definición 3. Esta sección está destinada a expresar la matriz de dispersión en términos de los coeficientes $M_\pm^z$ y $N_\pm^z$, y entonces deducir algunas primeras propiedades básicas. Con este propósito, sea $z \in \mathbb{C}_0$, es decir que los inversos $(M_\pm^z)^{-1}$ existen. Entonces uno puede reescribir (43) como

$$u_-^z \;=\; u_+^z (M_+^z)^{-1} \;-\; u_-^{1/z} N_+^z (M_+^z)^{-1} \,, \qquad u_+^{1/z} \;=\; u_-^{1/z} (M_-^z)^{-1} \;-\; u_+^z N_-^z (M_-^z)^{-1} \,.$$

Comparando a (7) con la Definición 3, la matriz de dispersión para $z \in \mathbb{C}_0$ es entonces

$$\mathcal{S}^z \;=\; \begin{pmatrix} (M_+^z)^{-1} & -N_-^z (M_-^z)^{-1} \\ -N_+^z (M_+^z)^{-1} & (M_-^z)^{-1} \end{pmatrix} \,, \tag{51}$$

que nos permite ocupar los coeficientes de transmisión y reflexión. Mas aún las ecuaciones (46) y (48) tambien permiten reescribir (51), *e.g.*

$$\mathcal{S}^z \;=\; \begin{pmatrix} ((M_-^{\overline{z}})^*)^{-1} & -N_-^z (M_-^z)^{-1} \\ (M_-^z)^{-1} N_-^{1/z} & (M_-^z)^{-1} \end{pmatrix} \,. \tag{52}$$

Basado en las fórmulas de (46) a (49), un cálculo nos permite verificar las afirmaciones de la Proposición 4(ii). Mas aún, la Proposición 4(v) también se sigue porque $z \mapsto M_-^z$ es meromorfo debido a (44)) y por lo tanto $z \mapsto \det(M_-^z)$ también. Mas aún, $M_\pm^z \to \mathbf{1}$ cuando $z \to 0$, y los límites $(M_\pm^z)^{-1}$ existen cuando $z \to \pm 1$ (ver Proposiciones 22 y 24). Por lo tanto los ceros de el último mapeo y los puntos singulares de $(M_-^z)^{-1}$ forman un conjunto discreto. Por lo tanto también $z \mapsto (M_-^z)^{-1}$ es meromorfa y entonces lo es $z \mapsto \mathcal{S}^z$.

7. Estados acotados

En esta sección, $E \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$. Por lo que $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Si $|z| < 1$, entonces las soluciones de jost u_+^z decaen exponencialmente en $+\infty$, y las soluciones de jost $u_-^{1/z}$ decaen exponencialmente en $-\infty$. Si estas dos soluciones se emparejan, uno obtiene un eigenvalor de el operador autoadjunto H. Por supuesto, tales eigenvalores no pueden aparecer para energías complejas.

Proposición 17. *Para $E = z + z^{-1} \notin \sigma(H)$ con $|z| < 1$, $M_\pm^z$ son invertibles.*

Demostración. Recordemos que de (5) se tiene que $u_-^{1/z} = u_+^z N_-^z + u_+^{1/z} M_-^z$. Vamos a asumir que $M_\pm^z$ es no invertible y entonces vamos a probar que $E \in \sigma(H)$. Si M_-^z tiene kernel no trivial y $\phi \in \mathrm{Ker}(M_-^z)$, entonces la solución $u_-^{1/z}\phi = u_+^z N_-^z \phi$ es un eigenvector cuadrado integrable de H, entonces en efecto $E \in \sigma(H)$. Ahora la invertibilidad de M_+^z se sigue de (46). □

Vamos ahora a poner mas atención a la multiplicidad de los eigenvalores. La intersección de los espacios de soluciones decrecientes hacia la izquierda y decrecientes hacia la derecha nos produce un estado acotado cuadrado integrable en la energía E. Mas precisamente, esta intersección puede ser parametrizada por

$$\mathrm{Ran}\big(\Phi_+^z(K_+)\big) \cap \mathrm{Ran}\big(\mathcal{T}^E(K_+, K_-)\Phi_-^{1/z}(K_-)\big) \ . \tag{53}$$

Si la intersección es no trivial, uno puede escoger $\phi \in \mathbb{C}^L$ tal que $\Phi_+^z(K_+)\phi$ esta en la intersección, y esto produce un estado acotado

$$u_\phi(n) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}^* \mathcal{T}^E(n, K_+)\Phi_+^z(K_+)\phi \ .$$

Observación 18. Reemplazando (46) en (47), uno encuentra que

$$(M_-^{1/\overline{z}})^* M_-^z \ = \ \mathbf{1} \ - \ N_+^z N_-^z \ , , \qquad (M_+^{1/\overline{z}})^* M_+^z \ = \ \mathbf{1} \ - \ N_-^z N_+^z \ .$$

Esto implica que $N_+^z N_-^z \phi = \phi$ para $\phi \in \mathrm{Ker}(M_-^z)$, y $N_-^z N_+^z \phi = \phi$ para $\phi \in \mathrm{Ker}(M_+^z)$. Mas aún, las ecuaciones (48) implican que $N_-^z(\mathrm{Ker}(M_-^z)) \subset \mathrm{Ker}(M_+^z)$ y $N_+^z(\mathrm{Ker}(M_+^z)) \subset \mathrm{Ker}(M_-^z)$. Por lo tanto

$$N_-^z\big|_{\mathrm{Ker}(M_-^z)} \ : \ \mathrm{Ker}(M_-^z) \to \mathrm{Ker}(M_+^z) \tag{54}$$

es un isomorfismo con inverso $N_+^z|_{\mathrm{Ker}(M_+^z)}$. ◇

Proposición 19. *Para $E = z + z^{-1} \in \mathbb{R}$ con $|z| < 1$,*

$$\begin{aligned} \text{multiplicidad de } E \text{ como eigenvalor de } H \ &= \ \dim \mathrm{Ker}(M_\pm^z) \\ &= \ \text{orden de } z \text{ como cero de } z' \mapsto \det(M_\pm^{z'}) \ . \end{aligned}$$

En particular, $M_\pm^z$ es invertible si $z + z^{-1}$ no es un eigenvalor.

Demostración. El argumento en la prueba de la Proposición 17 y la discusión anterior implican la primera parte de la igualdad. Para la prueba de la segunda igualdad notemos que $z+1/z \in \mathbb{R}$ con $|z| < 1$. Esto implica que $z \in \mathbb{R}$. Denotemos por p la dimensión de $\mathrm{Ker}(M_-^z)$ y sea $\{w_1, \ldots, w_p\}$ una base de $\mathrm{Ker}(M_-^z)$. Como $N_-^z : \mathrm{Ker}(M_-^z) \to \mathrm{Ker}(M_+^z)$ es un isomorfismo por la Observación 18, se sigue que $\{N_-^z w_1, \ldots, N_-^z w_p\}$ es una base $\mathrm{Ker}(M_+^z) = \mathrm{Ker}((M_-^z)^*) = \mathrm{Ran}(M_-^z)^\perp$ (ver (46)). Sea $\{v_{p+1}, \ldots, v_L\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Ran}(M_-^z)$ y $\{u_{p+1}, \ldots, u_L\}$ vectores tales que $M_-^r u_j = v_j$ para $j \in \{p+1, \ldots, L\}$. Entonces $\{w_1, \ldots, w_p, u_{p+1}, \ldots, u_L\}$ y $\{N_-^z w_1, \ldots, N_-^z w_p, v_{p+1}, \ldots, v_L\}$ son bases de $\mathbb{C}^L$. Vamos a introducir las siguientes matrices invertibles de $L \times L$

$$U_1 \;=\; \big(w_1, \ldots, w_p, u_{p+1}, \ldots, u_L\big) \;, \qquad V_1 \;=\; \big(N_-^z w_1, \ldots, N_-^z w_p, v_{p+1}, \ldots, v_L\big) \;.$$

Se sigue que

$$V_1^* M_-^z U_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \;.$$

Como $\zeta \mapsto M_-^\zeta$ es analítca alrededor de z, uno tiene que $M_-^\zeta = M_-^z + (\zeta - z)\partial_z M_-^z + \mathcal{O}((\zeta - z)^2)$ entonces

$$V^* M_-^\zeta U \;=\; \begin{pmatrix} (\zeta - z) V_2^* \partial_z M_-^z U_2 & (\zeta - z) B \\ (\zeta - z) C & \mathbf{1} + (\zeta - z) D \end{pmatrix} \;+\; \mathcal{O}\big((\zeta - z)^2\big) \;,$$

para algunas matrices constantes B, C, D y donde U_2, V_2 estan dadas por

$$U_2 \;=\; \big(w_1, \ldots, w_p\big) \;, \qquad V_2 \;=\; \big(N_-^z w_1, \ldots, N_-^z w_p\big) \;=\; N_-^z U_2 \;.$$

La matriz $V_2^* \partial_z M_-^z U_2$ es invertible, por que el Lema 20 implica que para $z > 0$ y para todo $\phi \in \mathbb{C}^p$

$$\phi^* V_2^* \partial_z M_-^z U_2 \phi \;=\; (V_2 \phi)^* \partial_z M_-^z U_2 \phi \;=\; (U_2 \phi)^* (N_-^z)^* \partial_z M_-^z (U_2 \phi) \;>\; 0 \;,$$

y de manera similar se da para $z < 0$. Usando la fórmula del complemento de Schur para el determinante, uno obtiene que

$$\begin{aligned} \det(V_1^* M_-^\zeta U_1) \;&=\; \det\big(\mathbf{1} + (\zeta - z) D + \mathcal{O}((\zeta - z)^2)\big) \, \det\big((\zeta - z)(V_2^* \partial_z M_-^z U_2 + \mathcal{O}(\zeta - z))\big) \\ &=\; (\zeta - z)^p g(\zeta) \;, \end{aligned}$$

con g una función que satisface $g(z) = \det(V_2^* \partial_z M_-^z U_2) \neq 0$. Esto implica la afirmación. □

Lema 20. *Para* $z \in (-1, 1)$ *y* $\phi \in \mathrm{Ker}(M_-^z)$,

$$\phi^* \, (N_-^z)^* \partial_z M_-^z \phi \;=\; z^{-1} \, \|u_-^{1/z} \phi\|^2 \;.$$

Demostración. Primero notemos que para $\phi \in \mathrm{Ker}(M_-^z)$, (43) implica que $u_-^{1/z}\phi = u_+^z N_-^z \phi$ y por lo tanto es un vector cuadrado sumable tanto hacia $-\infty$ como ∞. Consecuentemente la ℓ^2-norma $\|u_-^{1/z}\phi\|$ que aparece en la afirmacón es en efecto finita.

Vamos a comenzar por $M_-^z = -\nu^z W(u_+^z, u_-^{1/z})$ dada en (44) con $\overline{z} = z \in \mathbb{R}$. Derivando obtenemos que

$$\partial_z M_-^z \;=\; -\,(\partial_z \nu^z) W(u_+^z, u_-^{1/z}) \;-\; \nu^z W_n(\partial_z u_+^z, u_-^{1/z}) \;-\; \nu^z W_n(u_+^z, \partial_z u_-^{1/z}) \;,$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ es arbritario. Como $W(u_+^z, u_-^{1/z})\phi = 0$ y $u_-^{1/z}\phi = u_+^z N_-^z \phi$, esto implica que

$$\begin{aligned}\phi^*(N_-^z)^*\partial_z M_-^z\phi \;&=\; -\nu^z\phi^*(N_-^z)^* W_n(\partial_z u_+^z, u_-^{1/z})\phi \,-\, \nu^z\phi^*(N_-^z)^* W_n(u_+^z, \partial_z u_-^{1/z})\phi \\ &=\; -\nu^z\phi^*(N_-^z)^* W_n(\partial_z u_+^z, u_+^z) N_-^z\phi \,-\, \nu^z\phi^*\, W_n(u_-^{1/z}, \partial_z u_-^{1/z})\phi \;.\end{aligned}$$

Como $|z| < 1$, uno tiene

$$\lim_{n\to\infty} W_n(\partial_z u_+^z, u_+^z) \;=\; 0 \;.$$

Para calcular el límite de la otra contribución vamos a hacer uso de el Lema 15 iteradamente. Como $\partial_z f(1/z) = -z^{-2}\partial_{1/z} f(1/z)$ para cualquier función analítica, se tiene que

$$\phi^*(N_-^z)^*\partial_z M_-^z\phi \;=\; z^{-2}\nu^z \lim_{n\to\infty}\left(\phi^* W_k(u_-^{1/z}, \partial_{1/z} u_-^{1/z})\phi - \sum_{m=k+1}^{n} \imath(1-z^2)\,\phi^* u_-^{1/z}(m)^* u_-^{1/z}(m)\phi\right) .$$

Esto se tiene para cualquier k. Como

$$\lim_{k\to-\infty} W_k(u_-^{1/z}, \partial_{1/z} u_-^{1/z}) \;=\; 0 \;,$$

la afirmación se sigue tomando límite cuando $k \to -\infty$. $\square$

Corolario 21. *Recuerde que $\mathbb{C}_0$ es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ donde $M_\pm^z$ son invertibles. El conjunto $\mathbb{C}_0$ contiene una vecindad abierta de el disco unitario con los puntos $\{-1, 0, 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} \;:\; z + z^{-1} \in \sigma_p(H)\}$ removidos.*

Demostración. Para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$ la invertibilidad de M_-^z es establecida en el Lema 16. Para $\Im m(z) \neq 0$ esta es la Proposición 17. Para $z \neq 0$ real la invertibilidad esta probada en la Proposición 19. $\square$

El Corolario 21 no contiene ninguna afirmación acerca de la analiticidad de M_-^z in $\{-1, 0, 1\}$. La Sección 8 considerará $z = 0$ y la Sección 9 y 10 los puntos $z = \pm 1$.

8. Análisis asintótico a altas energías

Comencemos por notar que $z \to 0$ si y solo si $|E| \to \infty$. Por eso la siguiente afirmación concierne al comportamiento asintótico a altas energías.

Proposición 22. *Se tiene que* $\lim_{z\to 0} M_-^z = \mathbf{1}$. *Entonces $z = 0$ es una singularidad removible de M_-^z.*

Demostración. Debido a la propiedad de factorización (37), se tiene que

$$\mathcal{M}^z \;=\; \prod_{n=K_-}^{K_+} \mathcal{M}^z(n) \;,$$

donde aquí y en lo siguiente los factores del producto están ordenados de acuerdo al indice, el n mas pequeño esta en el lado derecho. Cada matriz $\mathcal{M}^z(n)$ esta dada por (38) y sera factorizada como sigue:

$$\mathcal{M}^z(n) \;=\; \mathbf{1} \;+\; \imath\,\nu^z \begin{pmatrix} V(n) & 0 \\ 0 & V(n) \end{pmatrix} \left[\mathcal{J} \;+\; \begin{pmatrix} 0 & z^{-2n} \\ -z^{2n} & 0 \end{pmatrix} \right] .$$

Las matrices del lado derecho conmutan. Reemplazando en lo anterior, obtenemos que

$$\mathcal{M}^z \;=\; \mathbf{1} + \sum_{\emptyset \neq J \subset [K_-+1, K_+]} (\imath\nu^z)^{|J|} \left[\prod_{n\in J} \begin{pmatrix} V(n) & 0 \\ 0 & V(n) \end{pmatrix} \right] \prod_{n \in J} \left[\mathcal{J} \;+\; \begin{pmatrix} 0 & z^{-2n} \\ -z^{2n} & 0 \end{pmatrix} \right] ,$$

donde la suma es tomada sobre todo subconjunto J de $\{K_- + 1, \ldots, K_+\}$ y $|J|$ denota la cardinalidad de J. Ahora por la ecuación (6) M^z_- es el entrada inferior derecha de $\mathcal{M}^z$. Efectuando los productos de la derecha obtenemos una gran cantidad de sumandos, pero en cada uno habrá factores ordenados que están fuera de la diagonal del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & z^{-2n} \\ -z^{2n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z^{-2m} \\ -z^{2m} & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -z^{2(m-n)} & 0 \\ 0 & -z^{2(n-m)} \end{pmatrix} , \qquad n > m ,$$

o posiblemente con un factor $\mathcal{J}$ entre los primeros dos factores. El hecho crucial es que ahora la entrada inferior derecha es no singular, debido a que $n > m$. Por lo tanto todas las entradas inferiores derechas son no singulares. Mas aún, $\lim_{z\to 0} \nu^z = 0$. Esto implica la afirmación. $\square$

9. Singularidades en el borde de banda

En el borde de banda $E = \pm 2$, uno tiene que $z = \pm 1$. Cuando $z \to \pm 1$ sobre el circulo unitario, $\nu^z \to \infty$ con un polo de orden uno. Debido a (38) y (37), se tienen singularidades en la matriz de transferencia de onda plana $\mathcal{M}^z$. A primera vista, uno puede esperar que estas singularidades sean de orden $K_+ - K_-$, derivado de la multiplicación de los factores ν^z. Sin embargo, la estructura especial de (38) implica que esta singularidad es solo de orden 1.

Proposición 23. *Existe una función analítica $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \mathcal{G}^z_\pm \in \mathbb{C}^{2L\times 2L}$ y matrices $\mathcal{F}_\pm \in \mathbb{C}^{2L\times 2L}$ tales que $\mathcal{M}^z = \mathcal{G}^z_\pm + \nu^z \mathcal{F}_\pm$ en una vecindad de ± 1.*

Demostración. Vamos a dar dos pruebas. Primero consideremos el conjunto

$$\mathfrak{G} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} V & z^{2n} V \\ -z^{2m} V & -z^{2n+2m} V \end{pmatrix} \;:\; V \in \mathbb{C}^{L\times L} ,\;\; n, m \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Note que V no es necesariamente autoadjunta aquí. El conjunto $\mathfrak{G}$ es un subsemigrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^{2L\times 2L}$ porque para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^{L\times L}$ y $n, m, n', m' \in \mathbb{Z}$, uno tiene la siguiente identidad

$$\begin{pmatrix} V & z^{2n} V \\ -z^{2m} V & -z^{2n+2m} V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' & z^{2n'} V' \\ -z^{2m'} V' & -z^{2n'+2m'} V' \end{pmatrix} = (1 - z^{2n+2m'}) \begin{pmatrix} VV' & z^{2n'} VV' \\ -z^{2m} VV' & -z^{2n'+2m} VV' \end{pmatrix} .$$

Por (38) y (37), $\mathcal{M}^z$ esta en el generado de $\mathfrak{G}$. Mas aún, para $n+m'>0$, cada uno de los productos contiene un factor $(1-z^{2n+2m'})=(1-z^2)(1+z^2+\ldots+z^{2n+2m'-2})$. Como $\nu^z(1-z^2)=-\imath z$, este cancela la singularidad de uno de los factores ν^z. Para $n+m'<0$, se argumenta de manera similar y para $n+m'=0$ el producto se anula. En consecuencia, en todos los productos en (37) solo un factor singular ν^z permanece. Extrayendo esta singularidad se sige la afirmación.

La segunda prueba esta basada en (35) y en un cálculo explicito de el inverso de $\mathcal{C}^z$ que prueba que

$$\mathcal{M}^z \;=\; \imath\,\nu^z\,\mathcal{D}^z(K_+)^{-1}\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & z^{-1}\,\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & -z\,\mathbf{1}\end{pmatrix}\mathcal{T}^E(K_+,K_-)\,\mathcal{C}^z\mathcal{D}^z(K_-)\;.$$

Por lo tanto uno puede calcular el límite

$$\mathcal{F}_\pm \;=\; \lim_{z\to\pm 1}(\nu^z)^{-1}\mathcal{M}^z \;=\; \imath\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & \pm\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mp\mathbf{1}\end{pmatrix}\mathcal{T}^2(K_+,K_-)\begin{pmatrix}\pm\mathbf{1} & \pm\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\;,$$

y definir $\mathcal{G}^z_\pm=\mathcal{M}^z-\nu^z\mathcal{F}_\pm$. □

Las matrices $\mathcal{F}_\pm$ en la Proposición 23 pueden también ser expresadas en términos del wronskiano de las soluciones de jost. En efecto, comparando con (45), uno encuentra

$$\mathcal{F}_\pm \;=\; \lim_{z\to\pm 1}\,(\nu^z)^{-1}\mathcal{M}^z \;=\; \lim_{z\to\pm 1}\begin{pmatrix}W(u_+^{1/\overline{z}},u_-^z) & W(u_+^{1/\overline{z}},u_-^{1/z})\\ -\,W(u_+^{\overline{z}},u_-^z) & -\,W(u_+^{\overline{z}},u_-^{1/z})\end{pmatrix}\;.$$

Además la Proposición 23 implica que como M^z_- es una entrada matricial de $\mathcal{M}^z$ entonces tiene un comportamiento singular similar, a saber en una vecindad de ± 1

$$M^z_- \;=\; G^z_\pm \,+\, \nu^z\,F_\pm\;,$$

para polinomios trigonométricos $G^z_\pm\in\mathbb{C}^{L\times L}$ y matrices $F_\pm\in\mathbb{C}^{L\times L}$. Note otra vez que los subíndices $\pm$ corresponden al alto/bajo borde de banda ± 2 y no están relacionados al subíndice en M^z_-. Comparando con lo anterior, uno deduce que

$$F_\pm \;=\; \lim_{z\to\pm 1} -\,W(u_+^{\overline{z}},u_-^{1/z}) \;=\; -\,W(u_+^1,u_-^1)\;. \tag{55}$$

Para un análisis mas detallado, vamos a enfocarnos en $F=F_+$ en el borde de banda superior ($E=2$). El borde de banda inferior ($E=-2$) se analiza de forma similar. Tomemos su descomposición en valores singulares $F=UDU'$ donde U y U' son unitarias y $D\geq 0$ es diagonal. Si F es no singular de modo que $D>0$, uno tiene

$$T^1_- \;=\; \lim_{z\to 1}\big(G^z\,+\,\nu^z\,F\big)^{-1} \;=\; \lim_{z\to 1}\,(U')^*\big(U^*G^z(U')^*\,+\,\nu^z\,D\big)^{-1}U^* \;=\; 0\;.$$

Tambien los coeficiente matriciales N^z_- tienen una descomposición $N^z_-=\hat{G}^z+\nu^z\hat{F}$ con

$$\hat{F} \;=\; \lim_{z\to 1}\,W(u_+^{1/\overline{z}},u_-^{1/z}) \;=\; W(u_+^1,u_-^1)\;.$$

En consecuencia uno encuentra en el caso no singular que

$$R^1_- \;=\; -\lim_{z\to 1} N^z_-(M^z_-)^{-1} \;=\; -\lim_{z\to 1} (\hat{G}^z+\nu^z\hat{F})(G^z+\nu^z F)^{-1} \;=\; -\hat{F}\,F^{-1} \;=\; \mathbf{1}\,. \tag{56}$$

Ahora vamos a tratar el caso de que la matriz F es singular. Entonces $D=\mathrm{diag}(0,f)$ con $f>0$. Para posterior uso, vamos a denotar $J^1_h = L{-}\mathrm{rank}(f) = L{-}\mathrm{rank}(F) = \dim\mathrm{Ker}(F)$. Entonces

$$T^z_- \;=\; (G^z+\nu^z UDU')^{-1} \;=\; (U')^*\left(U^*G^z(U')^*+\nu^z\mathrm{diag}(0,f)\right)^{-1}U^*\,.$$

Ahora el inverso puede ser calculado utilizando la fórmula del complemento de Schur. Sea

$$U^*G^z(U')^* \;=\; \begin{pmatrix} a^z & b^z \\ c^z & d^z \end{pmatrix}\,.$$

Entonces

$$U'T^z_-U \;=\; \begin{pmatrix} (s^z)^{-1} & -(s^z)^{-1}b^z(d^z+\nu^z f)^{-1} \\ -(d^z+\nu^z f)^{-1}c^z(s^z)^{-1} & (d^z+\nu^z f)^{-1}+(d^z+\nu^z f)^{-1}c^z(s^z)^{-1}b^z(d^z+\nu^z f)^{-1} \end{pmatrix}\,, \tag{57}$$

con el complemento de Schur $s^z=a^z-b^z(d^z+\nu^z f)^{-1}c^z$. Recuerde que un hecho general es que el complemento de Schur de una matriz con entrada inferior derecha invertible es invertible si y solo si la matriz es invertible. Aquí la matriz $U'T^z_-U = U'(M^z_-)^{-1}U$ es invertible para $z\in\mathbb{S}^1_0=\mathbb{S}^1\setminus\{-1,1\}$. Mas aún, $\|U'T^z_-U\|=\|T^z_-\|=\|(M^z_-)^{-1}\|\le 1$ para $z\in\mathbb{S}^1_0$ debido a que $(M^z_-)^*M^z_-\geq\mathbf{1}$ (ver la prueba del Lema 16). Por lo tanto también $\|(s^z)^{-1}\|\le 1$ para $z\in\mathbb{S}^1_0$. Por otro lado, $f>0$ implica $\lim_{z\to 1}s^z=a^1$ por eso a^1 is invertible. Se sigue que

$$T^1_- \;=\; (U')^*\begin{pmatrix} (a^1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*\,. \tag{58}$$

Además, uno tiene que $R^z_-=(\hat{G}^z+\nu^z\hat{F})T^z_-$. Como el límite T^1_- es acotado y $\|R^z_-\|\le 1$, se debe tener que $\hat{F}T^1_-=0$ por lo que

$$R^1_- \;=\; \hat{G}^1T^1_-\,.$$

Fórmulas para T^1_+ y R^1_+ pueden ser obtenidas de manera similar. Otras fórmulas para el límite que resultan de las identidades (44) son

$$T^1_+ \;=\; \lim_{z\to 1}\,\imath(z^{-1}-z)\,W(u^{1/\overline{z}}_-,u^z_+)^{-1}\,,\qquad T^1_- \;=\; \lim_{z\to 1}\,\imath(z-z^{-1})\,W(u^{\overline{z}}_+,u^{1/z}_-)^{-1}\,,$$

y de manera similar para $R^1_\pm$. Esto implica

$$T^1_- \;=\; \lim_{z\to 1}\,\imath(\overline{z}-\overline{z}^{-1})\,W(u^z_+,u^{1/\overline{z}}_-)^{-1} \;=\; \left(\lim_{z\to 1}\,\imath(z^{-1}-z)\,W(u^{1/\overline{z}}_-,u^z_+)^{-1}\right)^* \;=\; (T^1_+)^*\,.$$

De forma similar, uno obtiene que $R^1_-=(R^1_+)^*$. Fórmulas análogas para $z=-1$ pueden ser obtenidas. Debido a la identidad $(M^z_-)^{-1}=T^z_-$, lo anterior implica el siguiente hecho que será usado posteriormente.

Proposición 24. *El límite* $\lim_{z\to\pm 1}(M^z_-)^{-1}$ *existe.*

10. Estados semi-acotados

En el borde de banda $E = 2$ (y de forma similar $E = -2$), uno tiene $z = 1$. En el límite $z \to 1$, las soluciones $u_+^{\bar{z}}$ y $u_-^{1/z}$ pueden posiblemente alinearse y entonces su wronskiano $W(u_+^{\bar{z}}, u_-^{1/z})$ converge a 0, al menos sobre un subespacio. Por eso su inverso divergerá ahí. En esta sección, se probará que el polo asociado puede ser extraído y entonces determinarse el límite de la matriz de dispersión. El comportamiento no genérico donde (14) no se da, esta conectado a la existencia de estados especiales en las energías del borde de banda. En efecto, si el wronskiano $W(u_+^{\bar{z}}, u_-^{1/z})$ tiene un kernel no trivial en el límite $z \to 1$, entonces la alineación de direcciones de $u_+^{\bar{z}}$ y $u_-^{1/z}$ en el límite $z \to 1$ permiten construir soluciones acotadas, que pertenecen a $\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ y por lo tanto el generado de las soluciones acotadas $u_\pm^1$ cuando $\pm\infty$. De forma similar como en (18) estas conducen a las matrices

$$\Phi_\pm^1(n) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{C}^{2L\times L} \;, \qquad n > K_+ \;\text{ o }\; n < K_- \;\text{ respectivamente.}$$

Estas matrices satisfacen $(\Phi_\pm^1)^*\mathcal{I}\Phi_\pm^1 = 0$. Si la intersección

$$\mathrm{Ran}\big(\Phi_+^1(K_+)\big) \cap \mathrm{Ran}\big(\mathcal{T}^2(K_+, K_-)\Phi_-^1(K_-)\big) \;, \tag{59}$$

es no trivial, de vectores en esta intersección se pueden construir soluciones asintóticamente constantes (ambas en $+\infty$ y $-\infty$). Si tomamos $\phi \in \mathbb{C}^L$ tal que $\Phi_+^1(K_+)\phi$ esta en la intersección, uno obtiene una solución acotada

$$u_\phi(n) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}^* \mathcal{T}^2(n, K_+)\Phi_+^1(K_+)\phi \;.$$

Estas soluciones son constantes fuera de $\{K_- + 1, \ldots, K_+\}$. En el caso de operadores de Schrödinger continuos, tales soluciones son llamadas estado semi-acotados porque estas tienen una contribución $\frac{1}{2}$ en el teorema de Levinson. Estos estados no están en el espacio de Hilbert, pero en algunos casos, dependiendo de la dimensión, tienen decaimiento [17]. Aquí estas soluciones son constantes asintóticamente. Por supuesto, estos estados semi-acotados no nos proporcionan eigenvalores de H como operador autoadjunto.

Ahora sea J_h^+ la dimensión de esta intersección. Por construcción, esta es igual a la dimensión de el espacio de soluciones acotadas en la energía $E = 2$ con lo cual $z = 1$ (esto es, la dimensión de los estados semi-acotados en $z = 1$). Hay una dimensión similar J_h^- para $E = -2$ y $z = -1$.

Proposición 25. *Uno tiene que* $J_h^\pm = \dim \mathrm{Ker}(F_\pm)$*, con* $F_\pm$ *definido como en la* Sección 9 *en* $z = \pm 1$*. Mas aún, el mapeo* $z \mapsto \det(M_-^z)$ *tiene un polo de orden* $L - J_h^\pm$ *en* $z = \pm 1$*.*

Demostración. Vamos a enfocarnos en $z = 1$. Por (55),

$$F_+ \;=\; -W(u_+^1, u_-^1) \;=\; \imath(u_-^1(n+1) - u_-^1(n)) \;,$$

para toda $n \geq K_+$. Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_-^1(n)}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n-1}\left(u_-^1(m+1)-u_-^1(m)\right)}{n} \;=\; -\imath\, F_+ \;.$$

Como (u_+^1, v_+^1) es una solución fundamental en $E=1$, hay matrices X, Y de $L\times L$ tales que $u_-^1 = u_+^1 X + v_+^1 Y$. Usando que $u_+^1(n) = \mathbf{1}$ y $v_+^1(n) = n$ para $n \geq K_+$, se sigue que $Y = -\imath F_+$. Por lo tanto, $u_-^1(n) = X - \imath n F_+$ para $n \geq K_+$. Por lo que soluciones de la forma $u_-^1\phi$ son acotadas si y solo si $\phi \in \mathrm{Ker}(F_+)$. Esto implica que $J_h^+ = \dim(\mathrm{Ker}(F_+))$.

La segunda afirmación, es equivalente a que $z \mapsto \det((M_-^z)^{-1}) = \det(T_-^z)$ tenga un cero de orden $L - J_h^\pm$ en $z=\pm 1$. Esto sera verificado para $z=1$ usando las fórmulas explicitas de T_-^z dadas en la Sección 9. El caso $z=-1$ es análogo. Para U, U' como están dadas, vamos a introducir la siguiente notación para las entradas matriciales de $U'T_-^zU$ como esta dada en (57):

$$U'T_-^zU \;=\; \begin{pmatrix} \hat{a}^z & \hat{b}^z \\ \hat{c}^z & \hat{d}^z \end{pmatrix} \;,$$

es decir, $\hat{a}^z = (s^z)^{-1}$, $\hat{b}^z = -(s^z)^{-1}b^z(d^z+\nu^z f)^{-1}$ y así sucesivamente. Como $f>0$ y $\|d^z\| \leq 1$ para $z \in \mathbb{S}_0^1$, se tiene que

$$\lim_{z\to 1} (d^z+\nu^z f)^{-1} \;=\; 0 \;, \qquad \lim_{z\to 1} \nu^z (d^z+\nu^z f)^{-1} \;=\; f^{-1} \;.$$

Esto implica que

$$\lim_{z\to 1} \hat{b}^z(\hat{d}^z)^{-1}\hat{c}^z \;=\; \lim_{z\to 1} (s^z)^{-1}b^z(d^z+\nu^z f)^{-1}\big(\mathbf{1} + c^z(s^z)^{-1}b^z(d^z+\nu^z f)^{-1}\big)^{-1} c^z(s^z)^{-1} \;=\; 0 \;.$$

Notemos que $\hat{d}^z$ es invertible porque $\nu^z\hat{d}^z \to f^{-1}$ por (57). Por eso

$$\lim_{z\to 1} \det\left(\hat{a}^z - \hat{b}^z(\hat{d}^z)^{-1}\hat{c}^z\right) \;=\; \lim_{z\to 1} \det\left((s^z)^{-1}\right) \;=\; \det\left((a^1)^{-1}\right) \;\neq 0 \;,$$

porque a^1 es invertible. Por lo tanto $\hat{a}^z - \hat{b}^z(\hat{d}^z)^{-1}\hat{c}^z$ es invertible en una vecindad de 1. De manera similar,

$$\lim_{z\to 1} \det\left(\nu^z\hat{d}^z\right) \;=\; \det(f^{-1}) \;.$$

Finalmente, usando la fórmula de Schur para el determinante,

$$\det(U'T_-^zU) \;=\; (\nu^z)^{-L+J_h^+} \det\left(\nu^z\hat{d}^z\right) \det\left(\hat{a}^z - \hat{b}^z(\hat{d}^z)^{-1}\hat{c}^z\right) \;,$$

por que el tamaño y el rango de f es $L - J_h^+$. Debido al comportamiento asintótico establecido antes y al hecho de que ν^z tiene un polo de orden 1, se implica el resultado. □

Por último recolectamos la información anterior sobre los estados semi-acotados en la siguiente proposición.

Proposición 26. *Para cada $\phi \in \mathrm{Ran}(T^1_-)$, existe un estado $u_\phi \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ que satisface la ecuación de Schrödinger $Hu_\phi = 2u_\phi$. El límite*

$$\lim_{n\to\pm\infty} u_\phi(n)$$

existe. La dimensión J^+_h de el espacio de estos estados semi-acotados es igual a $\dim(\mathrm{Ran}(T^1_-))$. Una afirmación similar se da para $z = -1$.

Demostración. Se sigue de lo anterior y de el hecho de que

$$\mathrm{Ran}(T^1_-) = (U')^*(\mathbb{C}^{L-rank(F_-)}) = \mathrm{Ker}(F_+),$$

donde la primera igualdad se debe a (58) y la segunda a que $F_+ = UDU'$. □

11. Time delay

El Teorema de Levinson concierne al 'winding number' de la matriz de dispersión sobre el círculo unitario. El integrando es también llamado 'the time delay'. Este puede ser calculado por el siguiente principio general relacionado simplemente con el paso (12) de la $\mathcal{J}$-unitaria $\mathcal{M}$ a la unitaria $\mathcal{V}(\mathcal{M})$.

Proposición 27. *Sea $t \mapsto \mathcal{M}_t$ una trayectoria diferenciable de matrices $\mathcal{J}$-unitarias con entradas en la diagonal A_t y D_t. Entonces*

$$\mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}(\mathcal{M}_t)^*\partial_t\mathcal{V}(\mathcal{M}_t)\big) \;=\; \mathrm{Tr}\big((A_t)^{-1}\partial_t A_t \;-\; (D_t)^{-1}\partial_t D_t\big)\;.$$

Demostración. Vamos a omitir el indice t y escribiremos $\partial = \partial_t$. La $\mathcal{J}$-unitariedad de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ es equivalente a las siguientes identidades

$$\begin{aligned} A^*A \;&=\; \mathbf{1} + C^*C\;, \qquad & D^*D \;&=\; \mathbf{1} + B^*B\;, \qquad & A^*B \;&=\; C^*D\;,\\ AA^* \;&=\; \mathbf{1} + BB^*\;, \qquad & DD^* \;&=\; \mathbf{1} + CC^*\;, \qquad & AC^* \;&=\; BD^*\;. \end{aligned}$$

Como se notó antes, A y D son entonces invertibles. Ahora

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}(\mathcal{M})^*\partial\mathcal{V}(\mathcal{M})\big) \;&=\; \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}B \\ -(D^*)^{-1}B^* & (D^*)^{-1}\end{pmatrix}\partial\begin{pmatrix}(A^*)^{-1} & -BD^{-1} \\ B^*(A^*)^{-1} & D^{-1}\end{pmatrix}\right)\\ &=\; \mathrm{Tr}\big(A^{-1}\partial(A^*)^{-1} + A^{-1}B\partial B^*(A^*)^{-1} + A^{-1}BB^*\partial(A^*)^{-1}\\ &\qquad + (D^*)^{-1}B^*\partial BD^{-1} + (D^*)^{-1}B^*B\partial D^{-1} + (D^*)^{-1}\partial D^{-1}\big)\;. \end{aligned}$$

Ahora utilizando las primeras identidades, reemplazamos BB^* y B^*B en la anterior expresión en el tercer y quinto sumando y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}(\mathcal{M})^*\partial\mathcal{V}(\mathcal{M})\big) \;&=\; \mathrm{Tr}\big(A^*\partial(A^*)^{-1} + A^{-1}B\partial B^*(A^*)^{-1} + (D^*)^{-1}B^*\partial BD^{-1} + D\partial D^{-1}\big)\\ &=\; \mathrm{Tr}\big(A^*\partial(A^*)^{-1} + (A^*)^{-1}A^{-1}B\partial B^* + D^{-1}(D^*)^{-1}B^*\partial B + D\partial D^{-1}\big)\\ &=\; \mathrm{Tr}\big(A^*\partial(A^*)^{-1} + (AA^*)^{-1}B\partial B^* + (D^*D)^{-1}B^*\partial B + D\partial D^{-1}\big)\;. \end{aligned}$$

Ahora reemplazando AA^* y D^*D en términos de B y usando $(\mathbf{1}+B^*B)^{-1}B^* = B^*(\mathbf{1}+BB^*)^{-1}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}(\mathcal{M})^*\partial\mathcal{V}(\mathcal{M})\big) &= \mathrm{Tr}\big(A^*\partial(A^*)^{-1} + (\mathbf{1}+BB^*)^{-1}\partial(BB^*) + D\partial D^{-1}\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(A^*\partial(A^*)^{-1} + (AA^*)^{-1}\partial(AA^*) + D\partial D^{-1}\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(- (A^*)^{-1}\partial A^* + (AA^*)^{-1}(\partial AA^* + A\partial A^*) - D^{-1}\partial D\big) ,
\end{aligned}$$

que implica el resultado deseado. $\square$

Cuando aplicamos lo anterior y (13), se obtiene una fórmula para 'the time delay' para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1,1\}$. Como ambos lados son meromorfos, esta fórmula se extiende para todo $\{z \in \mathbb{C} : z, z^{-1} \in \mathbb{C}_0\}$.

Corolario 28. *Para todo $z, \overline{z}^{-1} \in \mathbb{C}_0 \cup \{-1,1\}$,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big((\mathcal{S}^{1/\overline{z}})^*\partial_z\mathcal{S}^z\big) &= \mathrm{Tr}\big((M_-^{1/z})^{-1}\partial_z M_-^{1/z} - (M_-^z)^{-1}\partial_z M_-^z\big) &\quad (60)\\
&= \det(M_-^{1/z})^{-1}\,\partial_z \det(M_-^{1/z}) \;-\; \det(M_-^z)^{-1}\,\partial_z \det(M_-^z)\,. &\quad (61)
\end{aligned}$$

12. Función de Green y la matriz de dispersión

Recuerde la definición (15) de la función de Green. Note que $\Im m(G^E(n,n)) > 0$ para $\Im m(E) > 0$, por lo que es invertible. Además, la función $z \mapsto G^{z+z^{-1}}(n,m)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$.

Proposición 29. *Para $E = z + z^{-1} \notin \sigma(H)$ con $|z| < 1$,*

$$\begin{aligned}
M_-^z &= \frac{z^{K_+-K_-}}{z-z^{-1}}\, G^E(K_-,K_+)^{-1} , \\
N_-^z &= z^{-K_+-K_-}\, G^E(K_+,K_+)\, G^E(K_-,K_+)^{-1} \;-\; \frac{z^{-K_+-K_-}}{z-z^{-1}}\, G^E(K_-,K_+)^{-1} .
\end{aligned}$$

Demostración. Vamos a hacer $G^E(n) = G^E(n,K_+)$ y ver esto como una función a valores matrices en $\mathbb{Z}$. Entonces

$$G^E(n+1) \,+\, G^E(n-1) \,+ (V(n)-E)G^E(n) \;=\; \delta_{n,K_+}\,\mathbf{1}_L\,.$$

Vamos a introducir

$$\Psi^E(n) \;=\; \begin{pmatrix} G^E(n+1) \\ G^E(n) \end{pmatrix} .$$

Usando los tres términos de la relación de recurrencia de manera iterada, se puede ver que $\Psi^E(n)$ tiene rango L. Además, se tiene que

$$\Psi^E(n) \;=\; \mathcal{T}^E(n)\Psi^E(n-1) \;+\; \delta_{n,K_+}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

En particular,

$$\Psi^E(K_+) \;=\; \mathcal{T}^E(K_+,K_-)\,\Psi^E(K_-) \;+\; \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\0\end{pmatrix}. \tag{62}$$

Como la matriz $\Psi^E(n)$ esta expresada en términos de el resolvente, esta decae tanto cuando $n\to\infty$ como cuando $n\to-\infty$ porque $n\mapsto G^E(n)$ es cuadrado sumable. Para $|z|<1$, se sigue de (17) y de argumentos similares que hay soluciones $\hat\Psi^E_+$ y $\hat\Psi^E_-$ con condiciones iniciales $\Psi^E(K_+)$ y $\Psi^E(K_-)$ que decaen en $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente, de forma cuadrado sumable. Esto implica que hay matrices cuadradas $\alpha^z_\pm$ tales que $\hat\Psi^E_+ = \Phi^z_+\alpha^z_+$ y $\hat\Psi^E_- = \Phi^{1/z}_-\alpha^z_-$. En particular,

$$\Psi^E(K_+) \;=\; \Phi^z_+(K_+)\,\alpha^z_+\;, \qquad \Psi^E(K_+) \;=\; \Phi^{1/z}_-(K_+)\,\alpha^z_-\;.$$

Como $\Psi^E(K_\pm)$ son de rango L, las matrices $\alpha^z_\pm$ son invertibles. De estas ecuaciones, se obtiene que

$$\alpha^z_+ \;=\; z^{-K_+}\,G^E(K_+)\;, \qquad \alpha^z_- \;=\; z^{K_-}\,G^E(K_-)\;.$$

Mas aún,

$$\begin{aligned}
\Phi^{1/z}_-(K_+) \;&=\; \mathcal{T}^E(K_+,K_-)\,\Phi^{1/z}_-(K_-) \;=\; \mathcal{T}^E(K_+,K_-)\,\Psi^E(K_-)\,(\alpha^z_-)^{-1}\\
&=\; \left[\Psi^E(K_+) \;-\; \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\0\end{pmatrix}\right]\,(\alpha^z_-)^{-1} \;=\; \left[\Phi^z_+(K_+)\alpha^z_+ \;-\; \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\0\end{pmatrix}\right]\,(\alpha^z_-)^{-1}\;.
\end{aligned}$$

Ahora usando las ecuaciones (30) y (44), se obtiene que

$$\begin{aligned}
M^z_- \;&=\; -\,\nu^z\;\Phi^{\overline{z}}_+(K_+)^*\,\tfrac{1}{\imath}\,\mathcal{I}\,\Phi^{1/z}_-(K_+)\\
&=\; -\,\nu^z\;\Phi^{\overline{z}}_+(K_+)^*\,\tfrac{1}{\imath}\,\mathcal{I}\,\left[\Phi^z_+(K_+)\alpha^z_+ \;-\; \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\0\end{pmatrix}\right]\,(\alpha^z_-)^{-1}\\
&=\; 0 \;+\; \nu^z\;\tfrac{1}{\imath}\;\Phi^{\overline{z}}_+(K_+)^*\begin{pmatrix}0\\\mathbf{1}\end{pmatrix}(\alpha^z_-)^{-1}\\
&=\; \frac{z^{K_+}}{z-z^{-1}}\,(\alpha^z_-)^{-1} \;=\; \frac{z^{K_+-K_-}}{z-z^{-1}}\,G^E(K_-,K_+)^{-1}\;.
\end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned}
N^z_- \;&=\; \nu^z\;\Phi^{1/\overline{z}}_+(K_+)^*\,\tfrac{1}{\imath}\,\mathcal{I}\,\Phi^{1/z}_-(K_+)\\
&=\; \nu^z\;\Phi^{1/\overline{z}}_+(K_+)^*\,\tfrac{1}{\imath}\,\mathcal{I}\,\left[\Phi^z_+(K_+)\alpha^z_+ \;-\; \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\0\end{pmatrix}\right]\,(\alpha^z_-)^{-1}\\
&=\; \alpha^z_+(\alpha^z_-)^{-1} \;-\; \nu^z\;\tfrac{1}{\imath}\;\Phi^{1/\overline{z}}_+(K_+)^*\begin{pmatrix}0\\\mathbf{1}\end{pmatrix}(\alpha^z_-)^{-1}\\
&=\; z^{-K_+-K_-}\,G^E(K_+,K_+)\,G^E(K_-,K_+)^{-1} \;-\; \frac{z^{-K_+-K_-}}{z-z^{-1}}\,G^E(K_-,K_+)^{-1}\;.
\end{aligned}$$

Esto demuestra las dos identidades. □

Notemos que la Proposición 29 también provee una prueba alternativa de la Proposición 17. Además, esta implica una fórmula de los coeficientes de transmisión T^z_- y los coeficientes de reflexión R^z_- en términos de la matriz de Green:

$$T^z_- \;=\; z^{K_- - K_+}(z - z^{-1})\, G^E(K_-, K_+)\;, \quad R^z_- \;=\; z^{-2K_+}\big(-\mathbf{1} \,+\, (z-z^{-1})\, G^E(K_+, K_+)\big)\;, \tag{63}$$

Donde $|z| < 1$ y $z + z^{-1} \notin \sigma(H)$. Los otros coeficiente de la matriz de dispersión para $|z| < 1$ pueden ser obtenidos usando la relación

$$G^{\overline{E}}(n, m)^* \;=\; G^E(m, n)\;.$$

Debido a que $T^z_+ = (T^{\overline{z}}_-)^*$ y a la unitariedad, se obtiene que

$$T^z_+ \;=\; z^{K_- - K_+}(z - z^{-1})\, G^E(K_+, K_-)\;, \quad R^z_+ \;=\; z^{2K_-}\big(\mathbf{1} \,-\, (z - z^{-1})\, G^E(K_-, K_-)\big)\;. \tag{64}$$

Entonces la matriz de dispersión $\mathcal{S}^z$ para $|z| < 1$ puede ser escrita de manera compacta como establece la Proposición 9 y así se completa la prueba de estos resultados.

13. Ejemplos

Si $K_+ = K_-$ por lo que $V = 0$, entonces no hay obstáculo para las soluciones de jost que satisfacen $u^z_+ = u^z_-$. Entonces la matriz de transferencia así como la matriz de dispersión es la identidad. Ahora vamos a considerar el caso de una perturbación en un sitio, digamos el sitio 1. Así $K_+ = 1$ y $K_- = 0$. Entonces uno trata solo con $\mathcal{M}^z(1, 0) = \mathcal{M}^z(1)$ dado por (38) y, usando la ecuaciones (6) y (52), uno encuentra

$$\mathcal{S}^z \;=\; \begin{pmatrix} \big(\mathbf{1} - \imath\,\nu^z V(1)\big)^{-1} & -\imath\,\nu^z z^{-2} V(1)\big(\mathbf{1} - \imath\,\nu^z V(1)\big)^{-1} \\ -\imath\,\nu^z z^2 V(1)\big(\mathbf{1} - \imath\,\nu^z V(1)\big)^{-1} & \big(\mathbf{1} - \imath\,\nu^z V(1)\big)^{-1} \end{pmatrix}\;.$$

Note que si $|z| = 1$, el inverso en efecto siempre existe porque la parte real de $\mathbf{1} - \imath\,\nu^z V(1)$ es positiva. Además, si $V(1)$ es de rango completo, uno obtiene (14) en el límite cuando $z \to 1$ porque entonces $\nu^z \to \infty$. En general, sea P la proyección sobre el kernel de $V(1)$, entonces $T^1_+ = P$. La solución que es constante asintoticamente u_ϕ de la Proposición 26 puede ser escogida constante en este caso. Por lo tanto V tiene un canal sin reflexión si P es no trivial.

Ahora sea $K_+ = 1$ y $K_- = -1$ es decir la perturbación tiene soporte en dos sitios 0 y 1. Entonces

$$\mathcal{M}^z(1, -1) \;=\; \left[\mathbf{1} \,+\, \imath\,\nu^z \begin{pmatrix} V(1) & z^{-2}V(1) \\ -z^2 V(1) & -V(1) \end{pmatrix}\right] \left[\mathbf{1} \,+\, \imath\,\nu^z \begin{pmatrix} V(0) & V(0) \\ -V(0) & -V(0) \end{pmatrix}\right]\;.$$

que permite obtener

$$\begin{aligned} M^z_- \;&=\; \mathbf{1} - \imath\,\nu^z(V(0) + V(1)) + (\nu^z)^2(z^2 - 1)V(0)V(1) \\ &=\; \mathbf{1} - \imath\,\nu^z(V(0) + V(1) - zV(0)V(1)) \\ &=\; \mathbf{1} - \tfrac{z}{z+1}\, V(0)V(1) - \imath\,\nu^z(V(0) + V(1) - V(0)V(1))\;, \end{aligned}$$

donde fue usada la identidad $\nu^z(z^2-1) = \imath z$. Recuerde que M_-^z es invertible para $|z|=1$ (ver el Lema 16), el coeficiente de transmisión es en este caso

$$T_-^z \;=\; \left(\mathbf{1} - \imath\,\nu^z(V(0)+V(1)-zV(0)V(1))\right)^{-1} \;.$$

Con la notación de la Sección 9, uno puede entonces obtener que $G^z = \mathbf{1} - \frac{z}{z+1}\,V(0)V(1)$ y $F = -\imath(V(0)+V(1)-V(0)V(1))$. Ahora es posible construir ejemplos con F singular y entonces bordes de banda con comportamiento asintótico no genérico.

14. Apéndice

Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{L\times L}$ y $l^p(\mathbb{N},\mathcal{M})$ el espacio de las sucesiones $h:\mathbb{N}\to\mathcal{M}$ con $\sum_n \|h(n)\|^p < \infty$ para $p\in[1,\infty)$ y $\sup_n \|h(n)\| < \infty$ para $p=\infty$.

Teorema 30 (Lemma 7.8 [32], Ecuación de Volterra)**.** *Sea $g \in l^\infty(\mathbb{N},\mathcal{M})$ y $K(n,m)\in\mathcal{M}$ para cada $m,n\in\mathbb{N}$. Considere la ecuación de suma de Volterra*

$$f(n) = g(n) + \sum_{m=n+1}^{\infty} K(n,m)f(m), \tag{65}$$

y supongamos existe una sucesión $M\in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ tal que $\|K(n,m)\|\le M(m)$ para cada $m,n\in\mathbb{N}$. Entonces, la Ecuación (65) tiene una única solución $f\in l^\infty(\mathbb{N},\mathcal{M})$. Mas aún, si $g(n)$ y $K(n,m)$ dependen continuamente (resp. analíticamente) de un parametro z (para cada n), M no depende de z, y $g(n)$ es uniformemente acotada con respecto a n y z, entonces se tiene que lo mismo es verdadero para $f(n)$.

Demostración. Para cada $k\in\mathbb{N}$, si uno encuentra una solución $f\in l^\infty(\mathbb{N}\cap[k,\infty),\mathcal{M})$, entonces esta puede ser extendida a una solución en $l^\infty(\mathbb{N},\mathcal{M})$ definiendo recursivamente $f(n) = g(n)+\sum_{m=n+1}^{\infty}K(n,m)f(m)$ para cada $n<k$. Como $M\in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$, entonces existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=k+1}^{\infty}M(m) < 1/2$. Entonces, sin perder generalidad, podemos asumir que $k=0$, *i.e.*, $\sum_{m=1}^{\infty}M(m)<1/2$. Entonces introducimos el siguiente operador $T: l^\infty(\mathbb{N},\mathcal{M})\to l^\infty(\mathbb{N},\mathcal{M})$ como

$$(Tf)(n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} K(n,m)f(m)$$

que esta bien definido porque

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\|K(n,m)f(m)\| \le \sum_{m=n+1}^{\infty}\|K(n,m)\|\|f(m)\| \le 1/2\|f\|_\infty.$$

Más aún, la última ecuación también implica que T es acotada y que $\|T\|<1/2$, por lo que $I-T$ es invertible y $f := (I-T)^{-1}g$ es una solución a la ecuación que esta en $l^\infty(\mathbb{N},\mathcal{M})$.

Ahora vamos a asumir que $g(n)\equiv g^z(n)$ y $K(n,m)=K^z(n,m)$ dependen continuamente (resp. analíticamente) respecto al parametro z (para cada n), M no depende de

z, y $g^z(n)$ es uniformemente acotada con respecto a n y z. Como la serie $(Tg^z)(n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} K^z(n,m)g^z(m)$ converge uniformemente, $(Tg^z)(n)$ es entonces continua (analítica) para cada $n \in \mathbb{N}$ y esta es uniformemente acotada con respecto a n y z. Repitiendo el argumento, uno obtiene que lo mismo es cierto para $T^j g^z$, para cada número natural j. Usando que $\|T^j g\| \leq (1/2)^j \sup_{n,z}\{\|g(n)\|\}$, se sigue que la serie $f^z(n) = \sum_{j=0}^{\infty}(T^j g)^z(n)$ converge uniformemente. Esto implica que el mapeo $z \mapsto f^z(n)$ es continuo (analítico). $\square$

Lema 31 (Lema de Gronwall)**.** *Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales no-negativos y α un número real tal que para $n \in \mathbb{N}$*

$$u_n \leq \alpha + \sum_{i=1}^{n-1} u_i w_i.$$

Entonces, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$u_n \leq \alpha \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i\right).$$

Demostración. Notemos que

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{l=1}^{i-1}(1+w_l)\right) w_k \leq \prod_{i=1}^{n-1}(1+w_k) \tag{66}$$

donde el producto vacio se define como 1 y la suma vacia como 0. Probaremos por inducción sobre n que

$$u_n \leq \alpha \prod_{i=1}^{n-1}(1+w_n) \tag{67}$$

para $n = 1$ es claro, y el paso inductivo se deduce de lo siguiente ocupando (66),

$$\begin{aligned} \alpha \prod_{i=1}^{n}(1+w_n) &\geq \alpha + \alpha \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{l=1}^{i-1}(1+w_l)\right) w_k \\ &\geq \alpha + \sum_{i=1}^{n} u_k w_k \geq u_{n+1} \end{aligned}$$

con lo que se tiene (67), notemos que para $x \in \mathbb{R}^+, 1 + x \leq \exp(x)$ ocupando esto y (67) se tiene que

$$u_n \leq \alpha \prod_{i=1}^{n-1}(1+w_n) \leq \alpha \prod_{i=1}^{n-1} \exp(w_n) = \alpha \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_n\right).$$

que es lo que se quiera probar.

$\square$

Lema 32 (Variación de parametros). *Consideremos la siguiente ecuación de diferencias*

$$X(n-1)+AX(n)+X(n+1)=B(n)X(n), \tag{68}$$

donde $A, B(n) \in \mathcal{M}$ *para cada* $n \in \mathbb{Z}$. *Suponga que* S_1, S_2 *son soluciones de la ecuación*

$$X(n-1)+AX(n)+X(n+1)=0, \tag{69}$$

tales que $S_1(0)=0$, $S_1(1)=\mathbf{1}$ *y* $S_2(0)=S_2(1)=\mathbf{1}$. *Entonces, para* $C, D \in \mathcal{M}$, *la solución* S *de la Ecuación* (68), *con condiciones iniciales* $S(0)=C$, $S(1)=D$, *satisface para* $n \in \mathbb{N}$

$$S(n)=S_1(n)(D-C)+S_2(n)C+\sum_{j=1}^{n-1} S_1(n-j)B(j)S(j), \tag{70}$$

y para $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

$$S(n)=S_1(n)(D-C)+S_2(n)C-\sum_{j=n+1}^{0} S_1(n-j)B(j)S(j), \tag{71}$$

donde esta identificando $\sum_{j=1}^{0} S_1(-j)B(j)S(j) \equiv 0$ *y* $\sum_{j=1}^{0} S_1(1-j)B(j)S(j) \equiv 0$.

Demostración. Las Ecuaciones (70) y (71) junto con las condiciones iniciales definen recursivamente una función a valores matrices que es denotada por S. Ahora vamos a probar que S satisface la Ecuación (68). La prueba es dada solo para $n \geq 2$, los otros casos se tratan de manera similar. Para cada $X \in \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}$, usamos la notación

$$h_n(X)=X(n-1)+AX(n)+X(n+1).$$

Usando la Ecuación (70) y $n \geq 2$ obtenemos (aquí recuerde que S_1 y S_2 satisfacen (69) y, por lo tanto, $h_n(S_1)=0=h_n(S_2)$; mas aún $S_1(0)=0, S_1(1)=\mathbf{1}$)

$$\begin{aligned}
h_n(S) =& h_n(S_1)(D-C)+h_n(S_2)C+\sum_{j=1}^{n-2} h_{n-j}(S_1)B(j)S(j)\\
&+AS_1(n-(n-1))B(n-1)S(n-1)+S_1(n+1-(n-1))B(n-1)S(n-1)\\
&+S_1(n+1-n)B(n)S(n)\\
=& AS_1(1)B(n-1)S(n-1)+S_1(2)B(n-1)S(n-1)+B(n)S(n)\\
=& \Big(AS_1(1)+S_1(2)\Big)B(n-1)S(n-1)+B(n)S(n)\\
=& -S_1(0)B(n-1)S(n-1)+B(n)S(n)=B(n)S(n).
\end{aligned}$$

Obtenemos que $h_n(S)=B(n)S(n)$, que es (68). $\square$

Lema 33. *Consideremos la configuración de el Teorema 30 con* $g=\mathbf{1}, K^z(n,j)=-z^{j-n}s^z(j-n)V(j)$ *y* $M(j)=j\|V(j)\|$ *donde* s^z *es como en la Proposición 11. Además sea* $\tilde{u}_+^z$ *la correspondiente solución de la ecuación de Volterra (para* $n \in \mathbb{N}$*)*

$$\tilde{u}_+^z(n)=\mathbf{1}-\sum_{j=n+1}^{\infty} s^z(j-n)V(j)z^{j-n}\tilde{u}_+^z(j). \tag{72}$$

Finalmente denotemos por $u_+^z(n) = z^n \tilde{u}_+^z(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que

$$u_+^z(n-1) + V(n)u_+^z(n) + u_+^z(n+1) = (z + 1/z)u_+^z(n), \qquad n \geq 2. \tag{73}$$

Demostración. Vamos a tomar $n \geq 2$. Usamos la notación de el Lema 32 y su prueba, tomando $A = -(z + 1/z)\mathbf{1}$, y haciendo $\gamma(n) = z^n$. Un cálculo directo prueba que $h_m(s^z) = 0$ and $h_m(\gamma) = 0$, para cada m. Además notemos que

$$u_+^z(n) = \gamma(n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} s^z(n-j)V(j)u_+^z(j). \tag{74}$$

Se sigue de (74) por un cálculo algebraico usando la definición de h_m que

$$\begin{aligned} h_n(u_+^z) = & h_n(\gamma) + \sum_{j=n+2}^{\infty} h_{n-j}(s^z)V(j)u_+^z(j) + As^z(n-(n+1))V(n+1)u_+^z(n+1) \\ & + s^z(n-1-(n+1))V(n+1)u_+^z(n+1) + s^z(n-1-n)V(n)u_+^z(n). \end{aligned} \tag{75}$$

Usando (75), el hecho de que $h_m(s^z) = 0$, $h_n(\gamma) = 0$ y $s^z(m) = -s^z(-m)$ junto con $s^z(0) = 0$, $s^z(1) = 1$, se obtiene que

$$\begin{aligned} h_n(u_+^z) = & -(As^z(1) + s^z(2))V(n+1)u_+^z(n+1) - s^z(1)V(n)u_+^z(n) \\ = & \, s^z(0)V(n+1)u_+^z(n+1) - V(n)u_+^z(n) \\ = & -V(n)u_+^z(n), \end{aligned}$$

que es (73). $\square$

Agradecimientos. Proyecto apoyado por el FORDECYT-PRONACES, PRONACES/429825. IN101621.

Referencias

[1] Z. S. Agranovich, V. A. Marchenko, *The inverse problem of scattering theory,* (Courier Dover Publications, 2020).

[2] T. Aktosun, R. Weder, *Inverse scattering on the half line for the matrix Schrödinger equation,* Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. 14 no. 3, 237–269 (2018).

[3] T. Aktosun, M. Klaus, C. Van Der Mee, *Small-energy asymptotics of the scattering matrix for the matrix Schrödinger equation on the line*, J. Math. Phys. **42**, 4627-4652 (2001).

[4] T. Aktosun, M. Klaus, R. Weder, *Small-energy analysis for the selfadjoint matrix Schrödinger operator on the half line. II*, J. Math. Phys. **55**, 032103 (2014).

[5] T. Aktosun, A. E. Choque-Rivero, V. G. Papanicolaou, *On the bound states of the discrete Schrödinger equation with compactly supported potentials*, `arXiv:1809.08150`

[6] T. Aktosun,V. G. Papanicolaou, *Inverse problem with transmission eigenvalues for the discrete Schrödinger equation*, J. Math. Phys. 56, 082101 (2015).

[7] T. Aktosun, R. Weder, *High-energy analysis and Levinson's theorem for the selfadjoint matrix Schrödinger operator on the half line*, J. Math. Phys. **54**, 012108 (2013).

[8] T. Aktosun, R. Weder, *Direct and Inverse Scattering for the Matrix Schrödinger Equation*, (Springer International, Switzerland, 2020).

[9] C. W. J. Beenakker, *Random-matrix theory of quantum transport*, Rev. Mod. Phys. **69**, 731-808 (1997).

[10] J. Bellissard, H. Schulz-Baldes, *Scattering theory for lattice operators in dimension $d \geq 3$*, Reviews Math. Phys. **24**, 1250020 (2012).

[11] K. M. Case, M. Kac, *A discrete version of the inverse scattering problem*, J. Math. Phys. **14**, 594-603 (1973).

[12] T. Cazenave, I. Naumkin, *Modified scattering for the critical nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **274**, 402-432 (2018).

[13] P. Deift, E. Trubowitz, *Inverse scattering on the line*, Commun. Pure Appl. Math. 32, 121–251 (1979).

[14] D. B. Hinton, M. Klaus, J. K. Shaw, *Half-bound states and Levinson's theorem for discrete systems*, SIAM J. Math. Analysis **22**, 754-768 (1991).

[15] H. Inoue, N. Tsuzu, *Schrödinger Wave Operators on the Discrete Half-Line*, Integr. Equ. Oper. Theory, online first (2019).

[16] H. Isozaki, E. Korotyaev, *Inverse problems, trace formulae for discrete Schrödinger operators*, Ann. Henri Poincaré 13, no. 4, 751–788 (2012).

[17] A. Jensen, T. Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions*, Duke Math. J. **46**, 583-611 (1979).

[18] J. Kellendonk, S. Richard, *The topological meaning of Levinson's theorem, half-bound states included*, J. Phys. **A 41**, 295207-295217 (2008).

[19] M. Klaus, *Low-energy behaviour of the scattering matrix for the Schrödinger equation on the line*, Inverse Problems **4**, 505 (1988).

[20] S. T. Kuroda, *Scattering Theory for Differential Operators I and II*, J. Math. Soc. Japan **25**, 75-104, 222-234 (1973).

[21] L. Marin, H. Schulz-Baldes, *Scattering zippers and their spectral theory*, J. Spectral Theory **3**, 47-82 (2013).

[22] P. A. Mello, P. Pereyra, N. Kumar, *Macroscopic approach to multichannel disordered conductors*, Ann. Phys. **181**, 290-317 (1988).

[23] M. Reed, B. Simon, *Analysis of Operators*, (Elsevier, 1978).

[24] I. Naumkin, *Nonlinear Schrödinger equations with exceptional potentials*, J. Differential Equations **265**, 4575-4631 (2018).

[25] R. G. Newton, *Scattering theory of waves and particles*, 2nd Edition, (Springer, New York, 1982).

[26] S. H. Nguyen, S. Richard, R. Tiedra de Aldecoa, *Discrete Laplacian in a half-space with a periodic surface potential I: Resolvent expansions, scattering matrix, and wave operators*, `arXiv:1910.00624`.

[27] S. Richard, *Levinsons theorem: an index theorem in scattering theory*, pp. 149-203 in *Spectral Theory and Mathematical Physics*, (Birkhäuser, Cham, 2016).

[28] Ch. Sadel, *Relations between transfer and scattering matrices in the presence of hyperbolic channels*, J. Math. Phys. **52**, 123511 (2011).

[29] H. Schulz-Baldes, *Geometry of Weyl theory for Jacobi matrices with matrix entries*, J. d'Analyse Mathématique **110**, 129-165 (2010).

[30] H. Schulz-Baldes, *Signature and spectral flow of J-unitary $\mathbb{S}^1$-Fredholm operators*, Integral Equations and Operator Theory **78**, 323-374 (2014).

[31] H. Schulz-Baldes, *Sturm intersection theory for periodic Jacobi matrices and linear Hamiltonian systems*, Linear Algebra and its Applications **436**, 498-515 (2011).

[32] G. Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, (AMS, Providence, 2000).

[33] R. Weder, *Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media*, (Springer, New York, 1991).

[34] D. R. Yafaev, *Mathematical scattering theory: general theory*, (AMS, Providence, 1992).