



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**DIFERENCIADORES DISTRIBUIDOS EN PROBLEMAS DE SISTEMAS**  
**MULTIAGENTE**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**PRESENTA:**  
**HÉCTOR JAVIER LEAL VILLAVICENCIO**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. LEONID FRIDMAN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2021**  
**SEPTIEMBRE**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Secretario: Dr. Héctor Benítez Pérez

Vocal: Dr. Leonid Fridman

1er. Suplente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

2o. Suplente: Dr. Jorge Ángel Dávila Montoya

La tesis se realizó en posgrado de la facultad de ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman

---



*A mis padres y a mi hermano, por su paciencia, su amor, su apoyo, su protección y por darme todo en mi vida.*

*Al Dr. Leonid Fridman por la confianza, la comprensión, el apoyo y las facilidades en el desarrollo de este trabajo.*

*A Diego Cruz por el tiempo y la atención que me ha dedicado, sobre todo por la paciencia de explicarme.*

*A Manuel Estrada por su amistad y sus consejos.*

*A Guillermo Hernández, Dilia Aguirre, Celeste Sánchez y Bruno Méndez por su amistad y haberme motivado a comenzar este viaje.*

*Al posgrado en Ingeniería eléctrica y a la Universidad, por la formación que me han dado.*

*Es gracias a todos ustedes que es posible el presente trabajo.  
En verdad, gracias.*



# Reconocimientos

---

**Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM** con la clave de proyecto IN115419 - *Diseño e investigación de propiedades de algoritmos continuos de modos deslizantes*. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.





# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

HÉCTOR JAVIER LEAL VILLAVICENCIO. Ciudad Universitaria, CDMX, 2021



# Resumen

---

En los sistemas multiagente uno de los problemas a resolver es el consenso líder – seguidor, en particular, para nodos seguidores con una estructura de cadena de integradores de segundo orden perturbados, se considera el problema de estimación de velocidad del líder e información sobre las posiciones relativas entre los nodos.

Basado en la teoría de los modos deslizantes, se utiliza una estructura diferenciación distribuida que converge en tiempo finito, por lo que se propone añadir un término de escalamiento en las ganancias del diferenciador, tal que, se asegura la estimación exacta en un tiempo máximo definido.

Finalmente, se proponen dos esquemas distintos de control basados en los valores estimados en el diferenciador en tiempo predefinido, capaces de lograr el consenso cuando la norma de error de diferenciación es acotada. Algunas de las ventajas de utilizar este esquema de diferenciación en tiempo predefinido son: la convergencia de los términos correctivos en el diferenciador en un tiempo definido y el diseño flexible del esquema de control, el cual, resuelve un problema específico. Este diferenciador solo requiere el conocimiento de la posición del líder en los nodos adyacentes.



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de definiciones, teoremas y suposiciones</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	8
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	8
1.3. Contribuciones . . . . .	9
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	9
<b>2. Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1. Teoría de grafos . . . . .	11
2.2. Conceptos de control . . . . .	14
2.2.1. Control y estimación basado en los modos deslizantes . . . . .	16
2.2.2. Protocolo distribuido de consenso . . . . .	18
2.2.3. Escalamiento temporal . . . . .	19
<b>3. Diferenciación distribuida en tiempo finito para nodos integradores de segundo orden</b>	<b>21</b>
3.1. Diferenciación distribuida en tiempo finito . . . . .	21
3.2. Convergencia del diferenciador distribuido en tiempo finito . . . . .	23
<b>4. Diferenciación distribuida en tiempo predefinido para nodos integradores de segundo orden</b>	<b>27</b>
4.1. Planteamiento del diferenciador distribuido en tiempo predefinido . . . . .	27
4.2. Diferenciador distribuido en tiempo predefinido . . . . .	29
4.3. Prueba de convergencia del diferenciador en tiempo predefinido . . . . .	30
<b>5. Aplicaciones de los diferenciadores en problemas de consenso con nodos integradores de segundo orden perturbados</b>	<b>33</b>
5.1. Protocolo continuo de consenso . . . . .	34
5.2. Protocolo discontinuo de consenso . . . . .	40

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>6. Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Problema de consenso con líder . . . . .	2
1.2. Grafo $\mathcal{G}$ . . . . .	2
1.3. Grafo $\mathcal{G}_e$ . . . . .	4
1.4. Estados en el sistema multiagente . . . . .	4
1.5. Estados en el sistema multiagente perturbado . . . . .	5
1.6. Control basado en la estimación distribuida . . . . .	6
1.7. Escalamiento del tiempo . . . . .	7
1.8. Diferenciación . . . . .	9
2.1. Grafo dirigido . . . . .	12
2.2. Grafo no dirigido . . . . .	12
2.3. Grafo $\mathcal{G}_2$ . . . . .	18
4.1. $t$ vs. $\tau$ . . . . .	31
5.1. Grafo $\mathcal{G}_1$ . . . . .	34
5.2. Ganancia $\kappa(t)$ . . . . .	35
5.3. Términos correctivos en el argumento del diferenciador . . . . .	36
5.4. Error de seguimiento de posición . . . . .	36
5.5. Error de seguimiento de velocidad . . . . .	37
5.6. Posición en cada uno de los agentes . . . . .	37
5.7. Velocidad en cada uno de los agentes . . . . .	38
5.8. Reducción de las diferencias estimadas en posición . . . . .	38
5.9. Reducción de las diferencias estimadas en velocidad . . . . .	39
5.10. Grafo $\mathcal{G}_2$ . . . . .	40
5.11. Términos correctivos en el argumento del diferenciador . . . . .	41
5.12. Error de seguimiento de posición . . . . .	42
5.13. Error de seguimiento de velocidad . . . . .	42
5.14. Posición en cada uno de los agentes . . . . .	43
5.15. Velocidad en cada uno de los agentes . . . . .	43
5.16. Reducción de las diferencias estimadas en posición . . . . .	44
5.17. Reducción de las diferencias estimadas en velocidad . . . . .	44
5.18. Condiciones iniciales 10 veces más alejadas . . . . .	45



## ÍNDICE DE FIGURAS

---

5.19. Condiciones iniciales 100 veces más alejadas . . . . .	46
5.20. Condiciones iniciales 1000 veces más alejadas . . . . .	46

# Índice de definiciones, teoremas y suposiciones

---

2.1. Definición (Grafo) . . . . .	11
2.2. Definición (Grafo dirigido) . . . . .	12
2.3. Definición (Grafo no dirigido) . . . . .	12
2.4. Definición (Grafo dinámico) . . . . .	12
2.5. Definición (Matriz de adyacencia) . . . . .	13
2.6. Definición (Matriz de grado) . . . . .	13
2.7. Definición (Matriz Laplaciana) . . . . .	13
2.8. Definición (Conexidad en un grafo) . . . . .	14
2.9. Definición (Árbol) . . . . .	14
2.10. Definición (Árbol de cobertura) . . . . .	14
1. Suposición (Cobertura entre los seguidores) . . . . .	14
2.11. Definición (Estabilidad en el sentido de Lyapunov) . . . . .	14
2.12. Definición (Atractividad asintótica) . . . . .	15
2.13. Definición (Estabilidad asintótica) . . . . .	15
2.14. Definición (Estabilidad exponencial) . . . . .	15
2.15. Definición (Estabilidad en tiempo finito) . . . . .	15
2.16. Definición (Estabilidad en tiempo fijo) . . . . .	15
2.17. Definición (Estabilidad en tiempo predefinido) . . . . .	16
1. Nota . . . . .	16
2.18. Definición (Super Twisting) . . . . .	16
2.1. Teorema (Ganancias en el Super Twisting) . . . . .	16
2.19. Definición (Diferenciador exacto y robusto de primer orden) . . . . .	17
2.20. Definición (Continuous Twisting Algorithm) . . . . .	17
2.21. Definición (Terminal Sliding Mode) . . . . .	18
2. Suposición (Información en los seguidores) . . . . .	19
2.22. Definición (Acuerdo) . . . . .	19
2.23. Definición (Consenso) . . . . .	19
2.24. Definición (Protocolo distribuido) . . . . .	19
2.25. Definición (Escalamiento temporal) . . . . .	19
2. Nota . . . . .	20

## ÍNDICE DE DEFINICIONES, TEOREMAS Y SUPOSICIONES

---

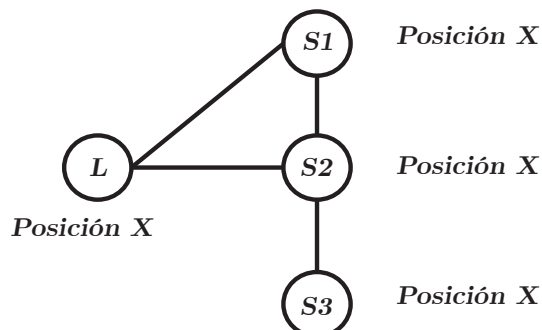
2.1. Lema (Transformación) . . . . .	20
3. Nota . . . . .	22
4. Nota . . . . .	30
3. Suposición (Valor de $T_i$ ) . . . . .	32

# Introducción

---

Los sistemas multiagente son un grupo particular de sistemas que operan en una red de agentes autónomos, en el cual cada agente se comunica entre si con sus vecinos y cuyo propósito es resolver un problema que individualmente es imposible de realizar, algunas de las aplicaciones potenciales son: sistemas multivehículo aeronáuticos para combate, reconocimiento o sobrevuelo, satélites, sincronización de sistemas dinámicos no tripulados, etc. Llevar a cabo las acciones deseadas en los ejemplos anteriores no es una tarea trivial, por lo general, no todos los miembros de una red poseen la información requerida para lograr su objetivo, es por esa razón es necesario que la información dentro de una red se comparta, tal y como se menciona en [27].

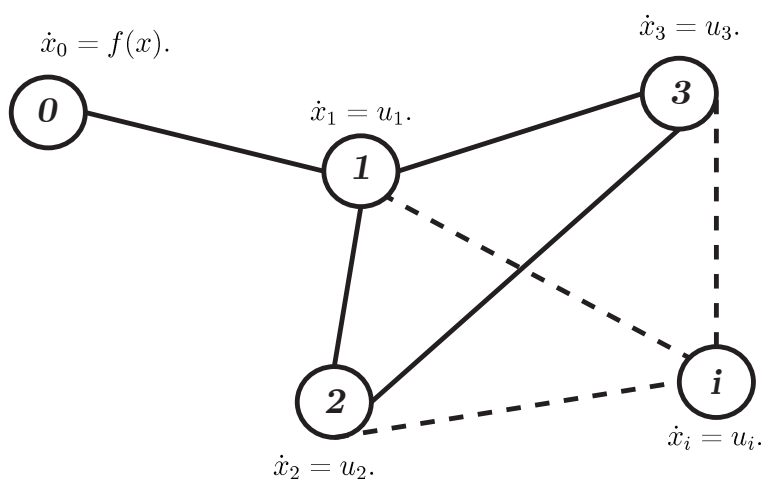
En los últimos años algunos grupos de investigación han analizado distintos problemas en los sistemas multiagente, tales como: sincronización, consenso, parvada, entre otros objetivos considerando distintos conceptos y puntos de vista. En particular, en el consenso existen dos clases de problemas: el problema de consenso con líder y el problema de consenso sin líder. Este trabajo de tesis aborda únicamente el primer caso, el cual intenta resolver el problema a partir de la información que poseen los agentes adyacentes a un líder, los cuales reciben el nombre de agentes seguidores, los agentes comparten información a través de un canal de comunicación y mediante un esquema de control, se intentan imitar el comportamiento del sistema líder. El consenso se consigue una vez que el comportamiento entre los agentes sea el mismo que el líder, lo anterior se menciona en [26].



**Figura 1.1:** Problema de consenso con líder

La figura 1.1 representa un ejemplo del problema de consenso en una red de comunicación, el cual muestra un agente líder  $L$  con una posición  $X$  y una serie de agentes seguidores  $S1$ ,  $S2$  y  $S3$ . El consenso se logra cuando los agentes seguidores alcanzan la misma posición del agente líder, es decir, la posición  $X$ . Las interacciones en una red de comunicación están asociadas a un grafo el cual establece las reglas de como es que la información se distribuye entre los agentes, a lo largo de este trabajo de tesis cada agente puede representar un sistema dinámico en particular, tal como se menciona en los trabajos de [4] y [3] sobre teoría de grafos. Por ejemplo, sea el siguiente sistema multiagente cuyas interacciones están asociadas a un grafo  $\mathcal{G}$ , con una dinámica que describe su comportamiento dado por las ecuaciones del líder y seguidor:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f(x), & (\text{Líder}) \\ \dot{x}_i &= u_i, \forall i = \{1, 2, 3, \dots, N\}. & (\text{Seguidores}) \end{aligned}$$



**Figura 1.2:** Grafo  $\mathcal{G}$

---

En la figura 1.2, solo el seguidor 1 es adyacente al líder y conoce los estados del mismo. El objetivo es lograr que los estados en los seguidores  $i$ -ésimos sigan al estado del líder, por lo que se diseña un grupo de controladores que utilicen la información relativa de sus estados  $i$ , respecto a sus vecinos  $j$ . De [28] se muestra el protocolo lineal de consenso clásico, para un grupo de nodos integradores de primer orden, en el cual se puede diseñar la entrada de cada nodo  $u_i = -\Phi(x_i - x_j)$ , tal que, los estados en los seguidores tiende al estado del líder para todo tiempo, sin embargo, el protocolo no converge exactamente a las trayectorias del líder y ante presencia de perturbaciones en el canal de comunicación, es decir,  $x_i = u_i + \zeta(t)$ , las trayectorias en los seguidores divergen respecto a las del líder. Las trayectorias de los sistemas seguidores convergen exponencialmente a las trayectorias del sistema líder siempre y cuando no existe presencia de perturbaciones. En un intento por robustificar lo anterior, es posible apoyarse en la teoría de los modos deslizantes, la cual puede otorgar robustez a cierta clase de perturbaciones y una convergencia exacta de las trayectorias. Lo anterior deja las puertas abiertas a trabajos cuyo enfoque es cubrir temas de robustez. Muchos de los trabajos que se han realizado en el tema de consenso se enfocan en el control distribuido, sin embargo, el control distribuido supone que los agentes adyacentes al líder tienen información completa de los estados del mismo, por lo cual no siempre es posible llevar a cabo aquellos algoritmos.

En concreto, si se tiene una estructura líder-seguidor como una cadena de integradores de segundo orden, con una dinámica en el líder de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{10} &= x_{20}, \\ \dot{x}_{20} &= f(t, x_{10}, x_{20}),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  son los estados y  $|f(x_{10}, x_{20})| < L$ , con  $L \in \mathbb{R}^+$  como una constante positiva. Los seguidores tienen una dinámica de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \\ \dot{x}_{2i} &= u_i,\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^2$  representa los estados y  $u_i$  es la entrada de control. Se desea lograr el consenso, es decir:

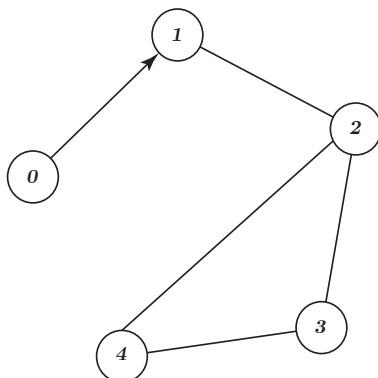
$$\|x_i - x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow +\infty,$$

esto significa que los estados en cada seguidor, alcanzara al líder y para ello basta utilizar la entrada que se propone en el quinto capítulo en [26]:

$$\begin{aligned}u_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [\dot{x}_{2j} - K_{ri}(x_{1i} - x_{1j}) - K_{vi}(x_{2i} - x_{2j})], \\ &+ a_{i0} [\dot{x}_{20} - K_{ri}(x_{1i} - x_{10}) - K_{vi}(x_{2i} - x_{20})],\end{aligned}\tag{1.3}$$

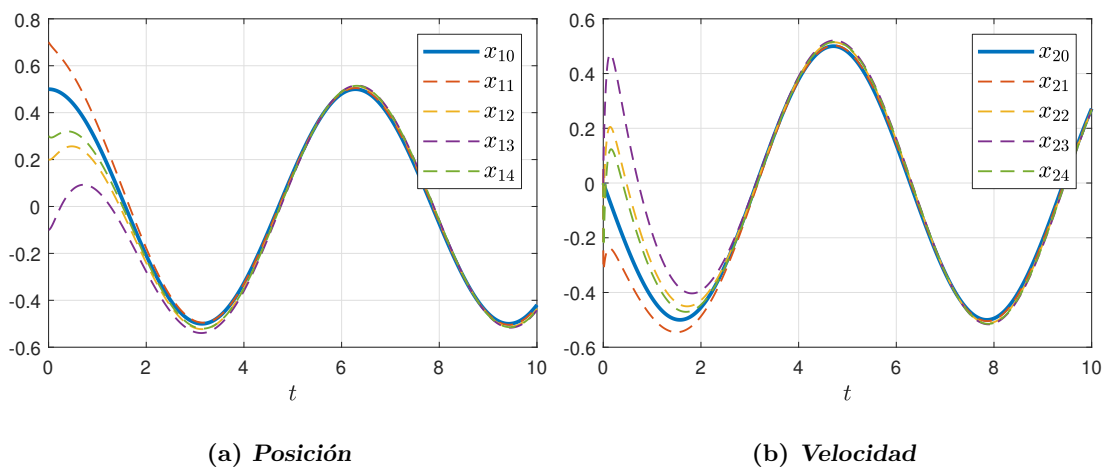
donde  $a_{ij}$  representa un elemento de la matriz de adyacencia,  $K_{ri}$  y  $K_{vi}$  son las ganancias del control. Es claro que para llevar a cabo este algoritmo, los nodos seguidores adyacentes al líder deben conocer la posición, velocidad y aceleración del mismo.

Por ejemplo, sea el grafo no dirigido:



**Figura 1.3:** Grafo  $\mathcal{G}_e$

donde  $f(t, x_{10}) = -x_{10}$  y utilizando la entrada de control  $u_i$  de la expresión (1.3), para condiciones iniciales cercanas, se tiene el siguiente resultado de simulación:



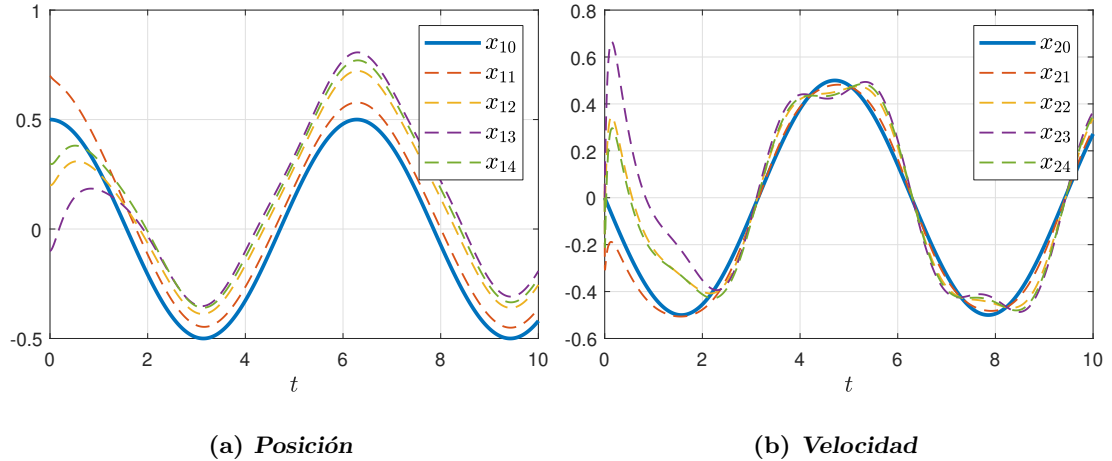
**Figura 1.4:** Estados en el sistema multiagente

La figura 1.4 muestra como para condiciones iniciales cercanas, se logra el consenso, sin embargo, se debe hacer énfasis en que el algoritmo anterior depende de conocer todos los estados del líder hasta la aceleración en los nodos seguidores adyacentes al líder, además supone condiciones ideales, es decir, cuando no existen perturbaciones en los nodos seguidores.

En el siguiente ejemplo, se mantiene la dinámica del líder y se cambia la dinámica del seguidor por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \\ \dot{x}_{2i} &= u_i + \zeta_i, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $|\dot{\zeta}_i|$  es un termino de perturbación acotada por la misma constante  $L$ .



**Figura 1.5:** Estados en el sistema multiagente perturbado

Más allá de conocer todos los estados del líder para los nodos seguidores adyacentes, el problema de utilizar el mismo algoritmo, radica en su falta de robustez cuando los nodos seguidores están perturbados y la figura (1.5) muestra como no se consigue el consenso.

En particular, en los sistemas mecánicos, se puede utilizar las derivadas de su salida para reconstruir las posiciones, velocidades y aceleraciones, por lo que algunos trabajos como en [6] se enfocan en utilizar los modos deslizantes de segundo orden para estimar una señal de referencia. Otros diferenciadores basados en los modos deslizantes como en [7] utilizan filtros con el propósito de reconstruir la derivada deseada de la señal de salida, sin embargo, están limitados por la constante de tiempo en el filtro. Por otro lado el diferenciador de primer orden de [14], también basado en los modos deslizantes de segundo orden dan una mejor precisión en el sentido de [Kolmogorov], no obstante, se encuentra limitado a la primera derivada de la señal base, sin embargo, obtener las derivadas de un orden superior el trabajo de [15] y [16] propone un diferenciador de orden arbitrario, modificando los argumentos en el mismo, ya que estos son iterativos a diferencia del primer trabajo. Los diferenciadores de orden superior requieren de conocimiento adicional de la cota del error de diferenciación inicial para asegurar la convergencia durante el tiempo de asentamiento del sistema, sin embargo, para evitar ese requerimiento, el trabajo de [5] propone una convergencia en tiempo fijo usando el diferenciador de primer orden basado en el algoritmo de super twisting. Otros trabajos, como en [2] consiste en la reconstrucción de la  $N$ -ésima derivada de una señal base utilizando un diferenciador de orden arbitrario, el cual converge en tiempo finito independientemente de las condiciones iniciales. Este trabajo de tesis pretende centrarse en la estimación distribuida a partir de la información que se intercambia en la red.



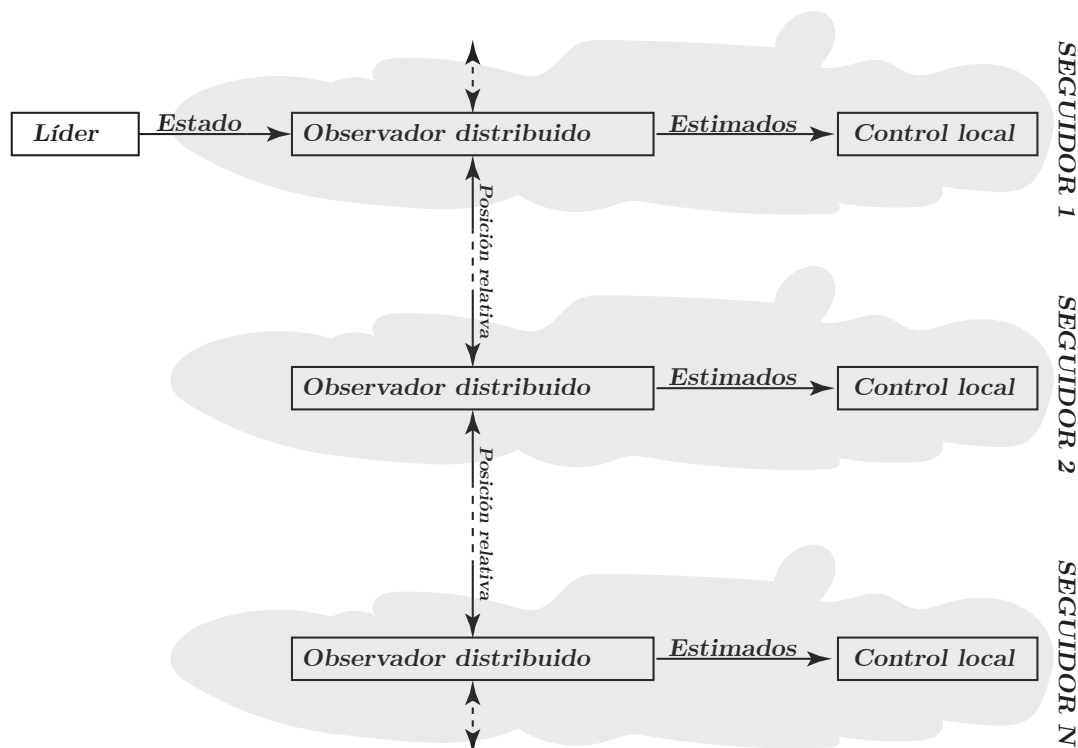


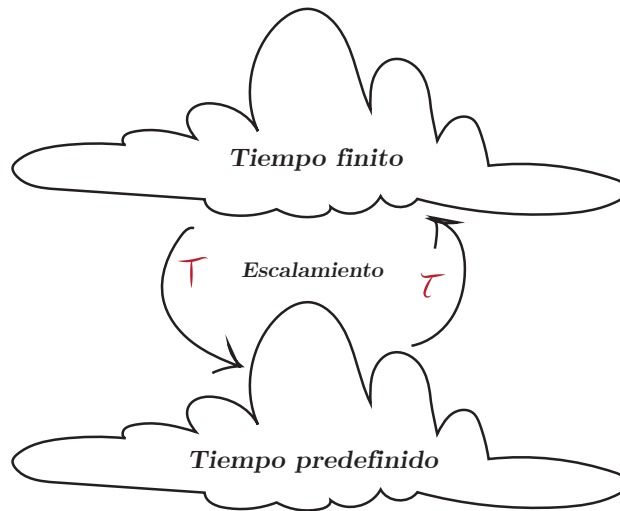
Figura 1.6: Control basado en la estimación distribuida

Es importante dejar en claro que el grafo asociado a la red de comunicación es únicamente para la parte de estimación y por esa razón recibe el nombre de estimación distribuida. La figura 1.6 muestra como cada agente seguidor utiliza la información relativa de sus vecinos para estimar la información restante, la cual será utilizada en el diseño de control para lograr el consenso. Trabajos como en [19], se proponen estructuras de diferenciación basadas en [14], en la cual se intercambian las posiciones entre los nodos, así como las velocidades estimadas en la red. El primer diferenciador que presentan estima el protocolo lineal en la red y el segundo diferenciador estima el error de seguimiento, ambos enfoques son similares y en cierto sentido pueden visualizarse de la misma manera, ya que ambas visiones tienen como objetivo facilitar el diseño de control, en el cual los errores tienden a cero incluso frente a perturbaciones acotadas. En [32] se considera el problema de seguimiento en múltiples sistemas Euler-Lagrange sin depender de las velocidades, utilizando observadores distribuidos, los cuales utilizan la posición relativa entre un nodo y sus vecinos, la información estimada se emplea en un control el cual tiene como propósito hacer que el error de seguimiento tienda a cero. Ambos trabajos proponen estructuras de convergencia en tiempo finito, sin embargo, en los últimos años se ha propuesto conocer la cota máxima de convergencia en las trayectorias independiente de las condiciones iniciales.

Algunos trabajos como [9] consideran la sincronización para sistemas multiagente

---

de segundo orden con perturbaciones acotadas cuyo algoritmos homogéneos de control basado en observación alcanzan una convergencia en tiempo fijo independientemente de las condiciones iniciales, partiendo del conocimiento de la posición y velocidad de sistema líder. En este trabajo se propone estimar los errores de seguimiento entre los seguidores y el líder, cuya información estimada es empleada en el diseño de control con el objetivo de que el error de seguimiento converja a cero. En [21] se considera el problema de sincronización en una estructura líder seguidor, cuando existe la presencia de retrasos en la entrada de los seguidores en sistemas de segundo orden, se emplean algoritmos homogéneos para la parte de observación y de control en el seguimiento, cuyo tipo de convergencia dependerá de los ajuste en los parámetros del observador, la cual puede ser en tiempo fijo o tiempo finito. Estos trabajos están enfocados en lograr una convergencia en tiempo fijo, incluso en presencia de perturbaciones, sin embargo, existen trabajos enfocados en definir la cota máxima de convergencia, tal es el caso del trabajo en [22] que muestra la misma visión del trabajo en [9], es decir, estimar los errores de seguimiento en un tiempo definido por el usuario dependiendo de los parámetros en el observador, información que sera usada en el diseño del controlador. En la práctica, tener la estimación exacta de las trayectorias de líder es en cierto sentido imposible de realizar, sin embargo, es posible obtener una cota de la estimación en un tiempo definido.



**Figura 1.7:** Escalamiento del tiempo

Trabajos enfocados en definir la cota máxima de convergencia, en los cuales se tiene como objetivo una convergencia predefinida, tales como en [1], [31] y [11] enfocados en introducir transformaciones temporales, las cuales definen un nuevo instante temporal para el cual el control u observador preservan su tipo de convergencia dada su estructura original, sin embargo, fuera de ese instante la convergencia es distinta, tal y como se muestra en el ejemplo de la figura 1.7. El usuario define el nuevo instante o tiempo, por

lo que el resultado concluye en una convergencia en tiempo predefinido. Este trabajo de tesis utiliza una diferenciación distribuida en tiempo predefinido, debido a que se desea estimar los estados del líder antes de un tiempo definido por el usuario, dato que será usado para el diseño del control cuyo objetivo sera lograr el consenso.

Estos trabajos previos han servido como una inspiración de lo que se pretende mostrar en este trabajo de tesis, es decir, lograr que los agentes seguidores puedan seguir a un agente líder aún cuando cada uno de ellos es perturbado de distinta forma.

### 1.1. Objetivo

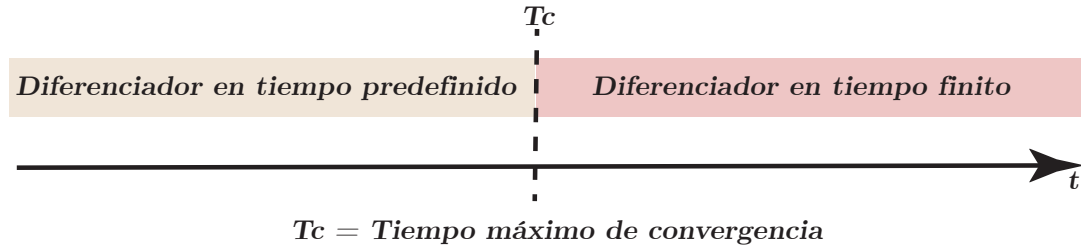
Este trabajo de tesis, considera una estructura de diferenciación distribuida en cual se agrega un término que escala al diferenciador distribuido en tiempo finito para que la dinámica de error converja a cero en tiempo predefinido.

### 1.2. Planteamiento del problema

En sistemas multiagente líder - seguidor el problema de consenso puede ser resuelto utilizando esquemas de control distribuido, sin embargo, cuando los nodos son de orden mayor a uno, difícilmente los seguidores conocerán los estados completos del líder. Este trabajo de tesis aborda una manera de resolver el problema de consenso basado en la diferenciación distribuida para estimar la información del líder.

Diferenciadores en tiempo fijo o tiempo pre-escrito mencionados previamente en la introducción, dependen del conocimiento de la aceleración del líder y por otro lado, los parámetros de diseño suelen ser complicados de calcular, por lo cual se considera el diferenciador propuesto [19], el cual estima las diferencias de posición entre los nodos y su error de seguimiento en la velocidad, sin embargo, el problema de utilizar el diferenciador distribuido en tiempo finito, radica en el lazo cerrado, debido a que no es posible (hasta el momento) garantizar la estabilidad del lazo antes de que los términos correctivos en el diferenciador sean cercanos a cero, por lo cual, se emplea un termino que escale el diferenciador, tal que la dinámica del error (en el diferenciador) tienda a cero en tiempo predefinido.

En [11] y [1] se establecen las condiciones necesarias para definir el término de escalamiento, tal que, el diferenciador distribuido converge en tiempo predefinido en el espacio original y converge en tiempo finito en el espacio transformado.



**Figura 1.8:** Diferenciación

La intención de la figura (1.8) es ejemplificar como diferenciador en tiempo predefinido converge como máximo en el tiempo definido y posteriormente como se leerá en capítulos posteriores, se recupera la estructura del diferenciador en tiempo finito, consecuencia del diseño en la ganancia variante con el tiempo. Debido a que los términos de corrección en el diferenciador son lo suficientemente cercanos a cero, la información estimada puede ser utilizada en el diseño de control para resolver el problema de consenso.

### 1.3. Contribuciones

Este trabajo muestra una manera de resolver el problema de consenso basado en la diferenciación distribuida cuya convergencia de la dinámica de error es en tiempo predefinido.

### 1.4. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en seis capítulos, en los cuales el capítulo dos comienza por definir algunos conceptos, definiciones y herramientas utilizadas en el desarrollo de este trabajo de tesis, tales como, la teoría de grafos y los conceptos de control utilizados. En el capítulo tres se presenta el diferenciador distribuido en tiempo finito, el objetivo de diferenciación, la estructura del diferenciador distribuido, así como la prueba de convergencia en tiempo finito. El capítulo cuatro replantea el problema de diferenciación en tiempo finito y la necesidad de alcanzar una convergencia en tiempo predefinido, se presenta el diferenciador distribuido en tiempo predefinido, así como los detalles del enfoque de diferenciación, finalmente se muestra la prueba de convergencia. El capítulo cinco presenta las aplicaciones en dos distintos problemas de sistemas multiagente, en particular, resolver el problema de consenso empleando el diferenciador distribuido, utilizando protocolos continuos y discontinuos, así como una prueba de convergencia del diferenciador utilizando distintas condiciones iniciales. Finalmente el capítulo seis finaliza el trabajo con las conclusiones del trabajo.

## NOTACIÓN

- $\text{int}(\Omega)$  es el interior del conjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- $\text{sign}(\rho)$  es la función signo y se define como:

$$\text{sign}(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho > 0, \\ -1 & \text{si } \rho < 0. \end{cases}$$

- $\lceil x \rceil^\alpha = |x|^\alpha \text{sign}(x)$  es una operación de potencial, la cual preserva el *sign* de  $x \in \mathbb{R}$ .
- Dado un vector  $z = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$ , se define lo siguiente:
  - $\lceil z \rceil^\alpha = [\lceil z_1 \rceil^\alpha, \lceil z_2 \rceil^\alpha, \dots, \lceil z_N \rceil^\alpha]^T$ .
  - $|z|^\alpha = [|z_1|^\alpha, |z_2|^\alpha, \dots, |z_N|^\alpha]^T$ .

# Preliminares

---

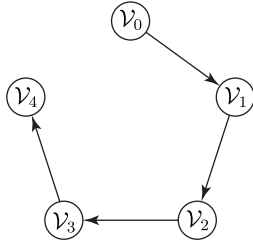
Este capítulo tiene como propósito introducir algunos conceptos y herramientas empleados a lo largo de este trabajo de tesis. Se comienza con una introducción sobre la teoría de grafos que nos permite definir las interacciones entre agentes. Se continúa con la definición de sincronización y consenso, es decir, como la información se propaga en la red para lograr un fin. Finalmente se muestran algunos conceptos de estabilidad y diferenciación usando la teoría de modos deslizantes para el desarrollo de este trabajo de tesis.

## 2.1. Teoría de grafos

Muchas situaciones en el mundo real pueden ser descritas por un diagrama compuesto de un conjunto de puntos con líneas ingresando a ciertos pares de esos puntos. Por ejemplo, los puntos pueden representar centros de comunicación y las líneas ingresando representan los enlaces de comunicación. Una forma clara para simbolizar el intercambio de información entre agente es la teoría de grafos, la cual hace posible ver a cada sistema como un elemento conectado que busca lograr un objetivo en común. A lo largo de esta sección se emplean definiciones tomadas de [10], [4] y [3] para la parte de teoría de grafos; de [27], [26] y [28] para la parte de sincronización, así como de [25], [14] y [29] para la parte que corresponde a conceptos de estabilidad y diferenciación basada en los modos deslizantes, trabajos que resultan de importancia para el desarrollo de este trabajo.

**Definición 2.1 (Grafo)** *Un grafo  $\mathcal{G}$  es un conjunto finito  $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{v_1, \dots, v_N\}$ , cuyos elementos nodos o vértices, junto con el conjunto  $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  cuyos elementos son llamados bordes.*

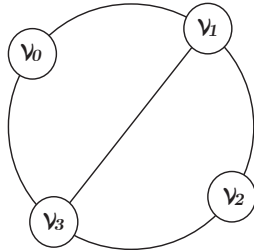
**Definición 2.2 (Grafo dirigido)** Un conjunto no vacío de vértices o nodos  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  y un conjunto de arcos  $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ , donde un arco o arista dirigida es un par ordenado de vértices distintos de  $\mathcal{G}$  recibe el nombre de grafo dirigido. Sean  $v_j$  y  $v_i$  los vértices de una arista dirigida, donde los índices indican la “cola” y “cabeza” de la arista respectivamente.



$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (\mathcal{V}, \mathcal{A}) \\ \mathcal{V} &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ \mathcal{A} &= \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\} \end{aligned}$$

**Figura 2.1:** Grafo dirigido

**Definición 2.3 (Grafo no dirigido)** Un grafo no dirigido  $\mathcal{G}$  consiste de un conjunto de vértices o nodos  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ , donde  $v_i \in \mathcal{V}$ , o  $i \in \mathcal{J} := \{1, \dots, n\}$  es un nodo, y un conjunto de aristas  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ , donde una arista es un par no ordenado de vértices distintos de  $\mathcal{G}$ . Sea  $e = (v_i, v_j)$  una arista formada por los vértices  $v_i$  y  $v_j$ . Se dice que  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes o que  $v_j$  es un vecino de  $v_i$ , se denota por  $v_i \sim v_j$ . Un vértice es incidente con una arista si alguno de ambos vértices forma parte de la arista.



$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (\mathcal{V}, \mathcal{E}) \\ \mathcal{V} &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \\ \mathcal{E} &= \{(v_0, v_1), (v_1, v_0), (v_1, v_2), \\ &\quad (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), \\ &\quad (v_3, v_0), (v_0, v_3), (v_3, v_1), (v_1, v_3)\} \end{aligned}$$

**Figura 2.2:** Grafo no dirigido

**Definición 2.4 (Grafo dinámico)** Sea  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  un grafo que consiste de un conjunto de  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  nodos, un conjunto de aristas  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  y  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es la matriz de adyacencia asociada al grafo. Un grafo dinámico es aquel en el que cada nodo representa un sistema dinámico, es decir:

$$\dot{x}_i = f(x_i, u_i) \quad i = \{0, \dots, N\}. \quad (2.1)$$

Donde  $N$  es el número máximo de nodos en el grafo.

**Definición 2.5 (Matriz de adyacencia)** La matriz de adyacencia  $a(\mathcal{G})$  de un grafo  $\mathcal{G}$  es una matriz con entradas enteras de filas y columnas indexadas por vértices de  $\mathcal{G}$ , tal que la entrada  $a_{ij}$  de  $a(\mathcal{G})$  es igual al número de arcos de  $i$  a  $j$ . Para un grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  definido sobre  $\mathcal{V}$  se define la matriz de adyacencia como  $a(\mathcal{G}) = a_{ij}$  donde  $a_{ij} = 1$  si  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , y  $a_{ij} = 0$  si  $(i, j) \notin \mathcal{G}$ .

Sea el grafo dirigido de la figura 2.1, la matriz de adyacencia correspondiente es:

$$a(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea el grafo dirigido de la figura 2.2, la matriz de adyacencia correspondiente es:

$$a(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definición 2.6 (Matriz de grado)** El grado de un nodo es el número de vecinos adyacentes  $\mathcal{N}_i$  con los que se interactúa y se denota por  $\text{deg}(v_i)$ . La matriz de grado de [23] se define como una matriz diagonal  $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde:

$$\Delta_{ij} := \begin{cases} \text{deg}(v_i), & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Definición 2.7 (Matriz Laplaciana)** La matriz Laplaciana de un grafo  $\mathcal{G}$  se define en [23] como:

$$L = \Delta - A. \quad (2.3)$$

La matriz Laplaciana  $L$  de  $\mathcal{G}$  satisface la propiedad de simetría.



**Definición 2.8 (Conexidad en un grafo)** *Se dice que  $\mathcal{G}$  es un grafo conexo si existe un camino entre dos nodos cualesquiera, de lo contrario  $\mathcal{G}$  no es conexo.  $\mathcal{G}$  es la unión disjunta de dos subgrafos inducidos, cuando  $\mathcal{G}$  no es conexo, se puede particionar el conjunto de nodos en dos conjuntos no vacíos tal que ningún nodo en uno de los conjuntos no vacíos es adyacente a un nodo del conjunto contrario.*

**Definición 2.9 (Árbol)** *Un árbol es un grafo conexo simple, cuyos enlaces se denominan ramas, el nodo origen es llamado raíz.*

**Definición 2.10 (Árbol de cobertura)** *Dado un grafo  $\mathcal{G}$ , un árbol de cobertura es un subgrafo que conecta todos los nodos. Un grafo puede tener muchos posibles arboles de cobertura.*

**Suposición 1 (Cobertura entre los seguidores)** *En  $\mathcal{G}$  existe un camino directo con cada uno de los seguidores, por lo que  $\mathcal{G}$  es un árbol de cobertura.*

## 2.2. Conceptos de control

En esta sección se presentan algunos conceptos utilizados para desarrollar el diferenciador distribuido tomados de la teoría de control.

El sistema:

$$\dot{x} = f(x(t), p), \quad (2.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema,  $p \in \mathbb{R}^b$  es un parámetro del sistema y  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función no lineal.

**Definición 2.11 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov)** [25], *El origen del sistema (2.4) es estable en el sentido de Lyapunov si para toda  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$  y todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) \in \mathbb{R}_+$ , tal que, para todo  $x(t_0) \in \mathbb{B}(\delta)$ , así bien:*

- *Cualquier solución de  $x(t, t_0, x(t_0))$  del problema de Cauchy, existe para toda  $t > t_0$ .*
- *$x(t, t_0, x(t_0)) \in \mathbb{B}(\epsilon)$  para  $t > t_0$ .*

**Definición 2.12 (Atractividad asintótica)** [25], El origen del sistema (2.4) es asintóticamente atractivo si para toda  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe un conjunto  $\mathcal{U}(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n : 0 \in \text{int}(\mathcal{U}(t_0))$ , tal que, para todo  $x(t_0) \in \mathcal{U}(t_0)$ , por lo que:

- Cualquier solución  $x(t, t_0, x(t_0))$  del problema de Cauchy, existe para toda  $t > 0$ .
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, t_0, x(t_0))\| = 0$ .

Entonces el conjunto  $\mathcal{U}(t_0)$  es llamado de dominio atractivo.

**Definición 2.13 (Estabilidad asintótica)** [25], El origen del sistema (2.4) es asintóticamente estable, si es estable en el sentido de Lyapunov y asintóticamente atractivo.

Si  $\mathcal{U}(t_0) = \mathbb{R}^n$ , entonces el origen del sistema (2.4) es globalmente asintóticamente estable.

**Definición 2.14 (Estabilidad exponencial)** [25], El origen del sistema (2.4) es exponencialmente estable si es estable en el sentido de Lyapunov y además, existe un dominio de atracción  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n : 0 \in \text{int}(\mathcal{U})$  y los números  $C, r \in \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$\|x(t, t_0, x(t_0))\| < C\|x(t_0)\|e^{-r(t-t_0)}, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

Para  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $x(t_0) \in \mathcal{U}$ .

**Definición 2.15 (Estabilidad en tiempo finito)** [25], El Origen del sistema (2.4) es globalmente estable en tiempo finito si es globalmente asintóticamente estable y existe una función  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  llamada función de tiempo de convergencia, tal que, para cualquier valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  los estados del sistema alcanzan el origen en  $T(x_0)$ , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0. \quad (2.6)$$

**Definición 2.16 (Estabilidad en tiempo fijo)** El origen del sistema (2.4) es estable en tiempo fijo si es estable en tiempo finito y la función de tiempo de convergencia  $T$  es acotada, esto es, hallar una constante  $T_{max} \in \mathbb{R}^+$ , tal que,  $T(x_0) < T_{max}$ . [22]

**Definición 2.17 (Estabilidad en tiempo predefinido)** Si el tiempo  $T_{max}$  puede ser modificado por el parámetro del sistema  $\tau$ , i.e.,  $T_{max} = T_{max}(\tau)$ , el origen del sistema (2.4) es estable en tiempo predefinido. [22]

**Nota 1** El parámetro  $p$  afecta a la cota del tiempo  $T_{max}$ , sin embargo, no tiene influencia en el punto de equilibrio del sistema (2.4).

### 2.2.1. Control y estimación basado en los modos deslizantes

Considere el siguiente sistema dinámico de grado relativo uno, descrito por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u, \quad \sigma = \sigma(x, t) \quad (2.7)$$

y suponga que:  $\dot{\sigma} = h(x, t) + g(x, t)u$ . Los modos deslizantes convencionales necesitan una medición de  $\dot{\sigma}$  o al menos de  $sign(\dot{\sigma})$ , con el propósito de garantizar  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ . El siguiente controlador basado en los modos deslizantes de segundo orden puede ser usado en lugar de los modos deslizantes convencionales.

**Definición 2.18 (Super Twisting)** [29], Suponga que el sistema (2.7) es de grado relativo uno y además suponga que para las constantes positivas  $C, K_M, K_m, U_M, q$ , se satisface las siguientes desigualdades:

$$|\dot{h}| + U_M|\dot{g}| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq g(t, x) \leq K_M, \quad |h/g| < q < 1,$$

y se define la siguiente entrada de control:

$$u = -\lambda|\sigma|sign(\sigma) + u_1, \quad \dot{u}_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_M \\ -\alpha sign(\sigma), & |u| \leq U_M \end{cases} \quad (2.8)$$

es de notar que el controlador (2.8) no necesita las mediciones de  $\dot{\sigma}$ . El controlador recibe el nombre de Super-Twisting Algorithm (STA) y presenta el siguiente resultado.

**Teorema 2.1 (Ganancias en el Super Twisting)** Con  $\alpha K_m > C$  y  $\lambda$  suficientemente grande, el controlador (2.8) garantiza la existencia de un 2-sliding mode  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ , la cual atrae las trayectorias en tiempo finito. El control  $u$  entra en el segmento en tiempo finito  $[-U_M, U_m]$  y permanece ahí. [29]

Uno de los temas cruciales en este trabajo de tesis es la estimación de una señal base, que posteriormente usara cada uno de los seguidores. El diferenciador basado en (2.8) utilizando los modos deslizantes de segundo orden y presentado en el trabajo de [14], se muestra a continuación:

**Definición 2.19 (Diferenciador exacto y robusto de primer orden)** *Sea una señal de entrada  $f(t)$  una función definida sobre  $[0, \infty]$  que consiste de un ruido acotado medible con características desconocidas y una señal base  $f_0(t)$ , cuya segunda derivada tiene una constante Lipschitz conocida  $L > 0$ . El siguiente diferenciador resuelve el problema de estimar robustamente la segunda derivada de la señal base, las cual es exactas en ausencia de ruidos de medición:*

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= -\lambda_2^{1/2}|z_0 - f(t)|^{1/2} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= -\lambda_1 L \text{sign}(z_0 - f(t))\end{aligned}\tag{2.9}$$

Una vez que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son correctamente seleccionadas para el diferenciador de primer orden con constante Lipschitz y el parámetro  $\lambda_i$  necesita ser elegido suficientemente grande.

Una posible elección de los parámetros elegidos para el diferenciador de primer orden es  $\lambda_1 = 1.1$  y  $\lambda_2 = 1.5$ . [29]

Debido a que este trabajo considera agentes seguidores de segundo orden, cuya estructura individual del sistema dinámico es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Se asume que se conocen las mediciones de  $x_1$  y  $x_2$ .

**Definición 2.20 (Continuous Twisting Algorithm)** *El controlador presentado en [30], atrae las trayectorias del sistema (2.10) en tiempo finito. La entrada  $u$  es:*

$$\begin{aligned}u &= -k_1 [x_1]^{1/3} - k_2 [x_2]^{1/2} + \eta, \\ \dot{\eta} &= -k_3 [x_1]^0 - k_4 [x_2]^0, \quad k_i > 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

La segunda ecuación de (2.11) tiene la estructura de un Twisting, esto permite al controlador rechazar perturbaciones con derivada acotada. Las ganancias de controlador

calculadas en [24], son:

$$k_1 = 2.7, \quad k_2 = 5.345$$

$$k_3 = 1.1, \quad k_4 = 0.$$

La ganancias anteriores aseguran la convergencia, robustez del algoritmo, así como una reducción del chatterring en el control.

**Definición 2.21 (Terminal Sliding Mode)** [8]. Dado el grado relativo de la salida, el controlador es construido usando una recursión generalizando el algoritmo terminal.

Esto es:

$$u = -\alpha \left[ \beta \sigma + [\dot{\sigma}]^2 \right]^0. \quad (2.12)$$

Donde  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ , son las ganancias que satisfacen las desigualdades.

### 2.2.2. Protocolo distribuido de consenso

Para las siguientes definiciones, considere el siguiente grafo:

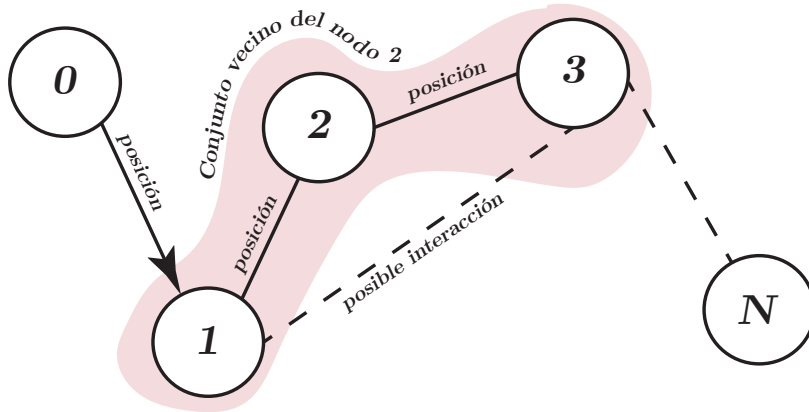


Figura 2.3: Grafo  $G_2$

El grafo de la figura 2.3 muestra un conjunto de 5 nodos, donde el nodo 0 representa al líder y los nodos 1 al 4 representan a los nodos seguidores. La información que se comparte a través del grafo es la posición del líder y es claro observar que cada nodo tiene un conjunto de vecinos, por ejemplo: el nodo 2 tiene como vecino al nodo 1 y al nodo 3.

El consenso es un problema particular de sincronización y en esta subsección se pretende mostrar algunos conceptos clave utilizados en el desarrollo de este trabajo de tesis.

**Suposición 2 (Información en los seguidores)** *Cada seguidor  $i \in \mathcal{V}$  conoce sus respectivos estados, además como resultado de las interacciones en la red, cada seguidor tiene acceso local a la información de sus vecinos  $j \in \mathcal{N}_i$  con los que interactúa.*

**Definición 2.22 (Acuerdo)** *Sea  $x_i$  el valor de nodo  $\mathcal{V}_i$  en el grafo  $\mathcal{G}_2$  para todo  $i$ . Se dice que dos nodos están en acuerdo sí y sólo sí  $x_i = x_j$  y en desacuerdo cuando  $x_i \neq x_j$ .*

**Definición 2.23 (Consenso)** *Se dice que los nodos del grafo  $\mathcal{G}_2$  alcanzan el consenso sí y sólo sí todos los nodos están en acuerdo.*

**Definición 2.24 (Protocolo distribuido)** *En [27] una realimentación de salida:*

$$u_i = k_i(x_{j_1}, \dots, x_{j_{m_i}}), \quad (2.13)$$

*es un protocolo con topología  $\mathcal{G}$  si el cluster  $J_i = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_{m_i}}\}$  de vértices con índices  $j_1, \dots, j_{m_i} \in \mathcal{J}$  y el conjunto de índices de vértice  $\mathcal{J}$  satisfacen la propiedad  $J_i \subseteq \{v_i\} \cup \mathcal{N}_i$ . Sí  $|J_i| < n$  para todo  $i \in \mathcal{J}$ , entonces (2.13) es un protocolo distribuido.*

Por ejemplo, si se considera el grafo dinámico  $\mathcal{G}_2$  y la entrada de control en [28]:

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j - x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.14)$$

Donde  $\mathcal{N}_i$  son vecinos adyacentes en el nodo  $i$ , la expresión (2.14) define el protocolo lineal de consenso. Existe un valor de decisión común, tal que:

$$x_i - x_j \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow +\infty, \quad (2.15)$$

es alcanzado asintóticamente por cada nodo en el grafo dinámico.

### 2.2.3. Escalamiento temporal

**Definición 2.25 (Escalamiento temporal)** [11]. *Las trayectorias de un sistema son interpretadas en un sentido geométrico diferencial como una parametrización de las curvas. Una transformación aplicada en la variable tiempo a través de una re parametrización es conocida como un escalamiento temporal:*

- [13]. Una curva parametrizada en  $t$  es  $\mathcal{C}^1(\mathcal{J})$  una inmersión  $c : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido en un intervalo real  $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ . Esto significa que  $\frac{dc}{dt} \neq 0$  se mantiene en casi todos los lados.
- [13]. Una curva es una clase equivalente de curvas parametrizadas donde la relación de equivalencia es dada por la transformación paramétrica  $\varphi$ , donde  $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}'$  es  $\mathcal{C}^1(\mathcal{J})$  y  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ . Por lo tanto, si  $c : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  es una curva parametrizada y  $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}'$  es una transformación paramétrica, entonces  $c \circ \varphi : \mathcal{J}' \rightarrow \mathbb{R}$  es considerado equivalente.

Se utilizan las funciones que se han definido en [1], que resultan de gran utilidad al momento de definir el escalamiento de la variable tiempo. Las funciones son:

- $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \setminus \{0\}$ , es una función continua sobre  $\mathbb{R}_+$  que satisface,
  - $\int_0^{+\infty} \Phi(z) dz = 1$ .
  - $\Phi(\tau) < +\infty, \forall \tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ .
  - Es decreciente o Localmente Lipschitz en  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ .
- $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  que satisface,
  - $\psi(\tau; T_c) = T_c \int_0^\tau \Phi(\xi) d\xi$ , donde  $T_c$  es una constante positiva.
- $\chi$  es tal que,
  - $\chi(T) = \lim_{\tau \rightarrow T} \frac{1}{T} \psi(\tau; T_c) \leq 1$ , donde  $T$  es un parámetro positivo.
- $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisface,
  - $\rho(\tau; T_c) = \frac{1}{T_c} \Phi(\tau)^{-1}$ .

**Nota 2** Una posible elección para  $\Phi(\cdot)$  es cualquier función de densidad de probabilidad. Las consideraciones para  $\Phi$  implican que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = 0$ .

**Lema 2.1 (Transformación)** Sea  $t_0$  una condición inicial, la función  $t = \psi(\tau)$  define una transformación paramétrica con  $\tau = \psi^{-1}(t)$  como su mapeo inverso.

# Diferenciación distribuida en tiempo finito para nodos integradores de segundo orden

---

En el capítulo de introducción se menciono algunos ejemplos en la literatura que dan solución al problema de consenso en escenarios específicos, en particular, el caso cuando se tienen nodos integradores de orden mayor a uno y los nodos seguidores no poseen información completa de los estados del líder, se utiliza el esquema de [19] mencionado en el capítulo anterior, el cual utiliza la posición relativa entre los nodos, tal que, se garantiza la convergencia exacta del error de de diferenciación, aún cuando los nodos seguidores se encuentran perturbados.

## 3.1. Diferenciación distribuida en tiempo finito

El esquema de diferenciación base de este trabajo de tesis, el cual considera un grafo no dirigido  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, A\}$  que consiste de un conjunto de  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  nodos, un conjunto de aristas  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  y  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es la matriz de adyacencia asociada al grafo y suponga que se tienen  $N$  seguidores en una red. El grafo satisface las suposiciones 1 y 2 mostradas en el capítulo anterior, cuya estructura de los sistemas dinámicos de los seguidores es una cadena de integradores doble, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, & i \in \mathcal{V}/i &= \{1, \dots, N\}, \\ \dot{x}_{2i} &= u_i + \zeta_i(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^2$  son los estados,  $u_i \in \mathbb{R}^p$  es una entrada de control y  $\zeta_i(t) \in \mathbb{R}^p$  es una perturbación acotada tal que  $|\dot{\zeta}_i(t)| \leq L$ . Por otro lado, existe un líder en la red de



### 3. DIFERENCIACIÓN DISTRIBUIDA EN TIEMPO FINITO PARA NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN

---

dinámica:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{10} &= x_{20}, \\ \dot{x}_{20} &= u_0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  son los estados del líder y  $u_0 \in \mathbb{R}$  es una entrada acotada  $|u_0| \leq L$  por una constante  $L \in \mathbb{R}^+$  y solo los agentes adyacentes poseen la posición del líder. El objetivo del diferenciador es estimar las diferencias de posición entre los nodos y el error de seguimiento de velocidad, es decir:

$$\begin{aligned}z_i &\rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}), \quad i \in \mathcal{V} \\ \eta_i &\rightarrow x_{i2} - x_{20}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Se propone el grupo de diferenciadores distribuidos mostrados en [19], los cuales utilizan la posición relativa del líder y las de sus seguidores para estimar el protocolo lineal, a partir de las interacciones entre los mismos. Para la dinámica de los agentes (3.1), se proponen los siguientes diferenciadores distribuidos:

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= -\kappa_2 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i - \eta_j), \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\eta}_i &= -\kappa_1 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^0 + u_i,\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde  $z_i$  es usada para estimar  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j})$ ,  $\eta_i$  es usado para estimar  $x_{2i} - x_{20}$ ,  $a_{ij}$  son elementos de la matriz  $\mathcal{A}$  asociado a  $\mathcal{G}$ ,  $a_{i0} \geq 0$  describe la comunicación entre el líder y sus adyacentes,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son las ganancias del diferenciador, las cuales deben ser elegidas tal que:

$$\begin{aligned}\kappa_2 &> 0, \\ \kappa_1 &> \max \left\{ \frac{\kappa_2^2}{2(2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)^2 \lambda_{\min}(\mathcal{M}^{-1})}, \frac{(\kappa_2^2 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\|\omega\|_\infty)^2}{2\kappa_2^2} + 2\|\mathcal{M}\|_\infty\|\omega\|_\infty \right\},\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde  $\mathcal{M} = \mathcal{L} + \text{diag}(a_{i0})$ ,  $\mathcal{L}$  es la matriz Laplaciana asociada al grafo  $\mathcal{G}$ , el vector  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$  y  $\omega_i = \delta_1 + \delta_2$  para toda  $i$ . Los elementos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son constantes positivas las cuales se escogen tal que:

$$\begin{aligned}\delta_1 &\geq \|u_0\|_\infty, \\ \delta_2 &\geq \|\zeta_i\|_\infty.\end{aligned}\tag{3.6}$$

**Nota 3** Al definir la dinámica en el líder y los seguidores, se considera que existe una constante positiva  $L$  que acota **todas** las perturbaciones  $\zeta_i(t)$ , así como la entrada del líder  $u_0$ , por lo que,  $L \geq \|\omega_i\|_\infty$ .

Entonces:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &> 0, \\ \kappa_1 &> \max \left\{ \frac{\kappa_2^2}{2(2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)^2 \lambda_{\min}(\mathcal{M}^{-1})}, \frac{(\kappa_2^2 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)L)^2}{2\kappa_2^2} + 2\|\mathcal{M}\|_\infty L \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La información estimada en el diferenciador (3.4) es utilizada en el diseño del control local en el seguidor para lidiar con las perturbaciones y lograr el consenso. La trayectorias del diferenciador tienden a las expresiones que se muestran en (3.3), en tiempo finito, a continuación se presenta parte de la prueba de convergencia en a dinámica del error en el diferenciador.

### 3.2. Convergencia del diferenciador distribuido en tiempo finito

En esta sección, se muestra los puntos mas importantes en el desarrollo de la prueba de convergencia del diferenciador, sin embargo, la prueba detallada se encuentra en [19]. El diferenciador,

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -\kappa_2 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i - \eta_j), \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\eta}_i &= -\kappa_1 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^0 + u_i, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $z_i$  es usada para estimar  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j})$ ,  $\eta_i$  es usado para estimar  $x_{2i} - x_{20}$ ,  $a_{ij}$  son elementos de la matriz  $\mathcal{A}$  asociado a  $\mathcal{G}$ ,  $a_{i0} \geq 0$  describe la comunicación entre el líder y sus adyacentes,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son las ganancias del diferenciador, las cuales deben ser elegidas como se menciona en el capítulo de preliminares.

Se define las ecuaciones de error como:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i &= z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}), \\ \tilde{\eta}_i &= \eta_i - (x_{2i} - x_{20}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Las ecuaciones de error en (3.9) serán cero sí y solo sí:

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}), \\ \eta_i &= x_{2i} - x_{20}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3. DIFERENCIACIÓN DISTRIBUIDA EN TIEMPO FINITO PARA NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN

---

Reescribiendo (3.4), utilizando las ecuaciones en (3.9), resulta:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}_i &= -\kappa_2 [\tilde{z}_i]^{1/2} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j), \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\tilde{\eta}}_i &= -\kappa_1 [\tilde{z}_i]^0 + u_0 - \zeta_i(t).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Sin embargo, dado que la matriz  $\mathcal{M}$  es simétrica y positiva, debido a que el grafo es no dirigido, entonces:  $\mathcal{M}\tilde{\eta} = o$  donde  $o = [o_1, \dots, o_N]^T$  y  $o_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j)$ . Se definen los vectores restantes como:  $\varsigma = [\varsigma_1, \dots, \varsigma_N]^T$ ,  $\varsigma_i = -\zeta_i(t) + u_0$ ,  $\tilde{z} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N]^T$  y  $\tilde{\eta} = [\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_N]^T$ . Entonces (3.11) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}} &= -\kappa_2 [\tilde{z}]^{1/2} + \mathcal{M}\tilde{\eta}, \\ \dot{\tilde{\eta}} &= -\kappa_1 [\tilde{z}]^0 + \varsigma.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Como  $o = \mathcal{M}\tilde{\eta}$ , entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}} &= -\kappa_2 [\tilde{z}]^{1/2} + o, \\ \dot{o} &= -\kappa_1 \mathcal{M} [\tilde{z}]^0 + \mathcal{M}\varsigma.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Por lo que  $o \rightarrow 0$ , si  $\mathcal{M}\tilde{\eta} \rightarrow 0$ . Debido a que  $\mathcal{M}$  es invertible, entonces  $\tilde{\eta} \rightarrow 0$ , por lo que:

$$\eta \rightarrow \begin{pmatrix} x_{21} - x_{20} \\ \vdots \\ x_{2N} - x_{20} \end{pmatrix}.$$

De manera muy similar al trabajo en [20] y [18], la prueba consiste en aprovechar el desacoplamiento entre diferenciadores y realizar la prueba "N" veces, por lo cual la función candidata de Lyapunov es la n-ésima suma de funciones candidatas a cada diferenciador. Se considera la función cuadrática  $V(\tilde{z}, \tilde{\eta}) = \varphi^T P \varphi$ , tal que:

$$\varphi^T = \begin{bmatrix} ([\tilde{z}]^{1/2})^T & \mathcal{M}\tilde{\eta}^T \end{bmatrix},\tag{3.14}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}V(\tilde{z}, \tilde{\eta}) &= \begin{bmatrix} ([\tilde{z}]^{1/2})^T & \mathcal{M}\tilde{\eta}^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} [\tilde{z}]^{1/2} \\ \mathcal{M}\tilde{\eta} \end{bmatrix} \\ P &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\kappa_2^2 + (4\|\mathcal{M}\|_\infty + 2)\kappa_1)I_{N \times N} & -\kappa_2 I_{N \times N} \\ -\kappa_2 I_{N \times N} & (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\mathcal{M}^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Los valores propios de la matriz  $\mathcal{M}^{-1}$  son  $\lambda_i > 0$  para toda  $i$ , debido a que el grafo  $\mathcal{G}$  es no dirigido, entonces,  $\mathcal{M}$  puede diagonalizarse como  $\mathcal{M} = \Gamma^{-1}\Lambda\Gamma$ , donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ , por lo que la matriz  $P$ , puede escribirse como:

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma^{-1} & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\kappa_2^2 + (4\|\mathcal{M}\|_\infty + 2)\kappa_1)I_{N \times N} & -\kappa_2 I_{N \times N} \\ -\kappa_2 I_{N \times N} & (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & \Gamma \end{bmatrix}.$$

Sea  $\varrho$  un valor propio de  $P$  y debido a que  $\Lambda$  es una matriz diagonal, entonces, el polinomio característico debe satisfacer la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \varrho^2 - \frac{1}{2}(\kappa_2^2 + (4\|\mathcal{M}\|_\infty + 2)\kappa_1 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\lambda_i)\varrho \\ \frac{1}{4}(\kappa_2^2 + (4\|\mathcal{M}\|_\infty + 2)\kappa_1)(2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\lambda_i - \frac{1}{4}\kappa_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Todas las raíces en (3.16) son positivas sí y solo sí  $\frac{1}{2}(\kappa_2^2 + (4\|\mathcal{M}\|_\infty + 2)\kappa_1 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\lambda_i) > 0$  y  $\frac{1}{4}(\kappa_2^2 + (4\|\mathcal{M}\|_\infty + 2)\kappa_1)(2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\lambda_i - \frac{1}{4}\kappa_2^2 > 0$ . Por lo que se deduce que la matriz  $P$  es una matriz positiva definida si:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &> 0, \\ \kappa_1 &> \frac{\kappa_2^2}{2(2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)^2 \lambda_{\min}(\mathcal{M}^{-1})}. \end{aligned}$$

En [19] se prueba que  $V(t, \tilde{z}(t_0), \tilde{\eta}(t_0))$  es monotonicamente decreciente, sí y solo sí la derivada a lo largo de las trayectorias es negativa definida en casi todas partes, esto es:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left( - \sum_{i=1}^N (\kappa_2^3/2 + (2 + \|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\kappa_2\kappa_1) |\tilde{z}_i|^{1/2} + (\kappa_2^2/2 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\kappa_1) ([\tilde{z}]^0)^T \mathcal{M} \tilde{\eta} \right) \\ &\quad + \kappa_2 \left( [\tilde{z}]^{1/2} \right)^T \mathcal{M} (\kappa_1 [\tilde{z}]^0 - \varsigma) + \tilde{\eta}^T \mathcal{M} \left( \frac{\kappa_2^2}{2} [\tilde{z}]^0 - \frac{\kappa_2}{2} \text{diag}(|\tilde{z}_i|^{1/2}) \mathcal{M} \tilde{\eta} \right) \\ &\quad + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1) \tilde{\eta}^T \mathcal{M} (-\kappa_1 [\tilde{z}]^0 + \varsigma) \\ &\leq - \sum_{i=1}^N (\kappa_2^3/2 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\kappa_2\kappa_1) |\tilde{z}_i|^{1/2} - \frac{\kappa_2}{2} \tilde{\eta}^T \mathcal{M} \text{diag}(|\tilde{z}|^{-1/2}) \mathcal{M} \tilde{\eta} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N 2\kappa_2\kappa_1 \left( \sum_{j=0}^N a_{ij} \right) |\tilde{z}_i|^{1/2} + \sum_{i=1}^N \frac{\kappa_2^2}{|\tilde{z}_i|^{1/2}} [\tilde{z}_i]^{1/2} \left( \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \right) \\ &\quad + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1) \sum_{i=1}^N \varsigma_i \left( \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \right) - \kappa_2 \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=0}^N a_{ij} (\varsigma_i - \varsigma_j) \right) [\tilde{z}_i]^{1/2} \\ \\ \dot{V} &= - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\tilde{z}_i|^{1/2}} \begin{bmatrix} [\tilde{z}_i]^{1/2} & \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1i} & \frac{K_{2i}}{2} \\ \frac{K_{2i}}{2} & \frac{\kappa_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\tilde{z}_i]^{1/2} \\ \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\tilde{z}_i|^{1/2}} [\tilde{z}_i]^{1/2} [\tilde{z}_i]^0 \begin{bmatrix} K_{3i} & K_{4i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\tilde{z}_i]^{1/2} \\ \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \end{bmatrix} \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\tilde{z}_i|^{1/2}} \begin{bmatrix} [\tilde{z}_i]^{1/2} \\ \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{1i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{3i} & \frac{K_{2i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{4i}}{2} \\ \frac{K_{2i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{4i}}{2} & \frac{\kappa_2}{2} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} [\tilde{z}_i]^{1/2} \\ \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

### 3. DIFERENCIACIÓN DISTRIBUIDA EN TIEMPO FINITO PARA NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN

---

donde  $\varsigma_0 = 0$ ,  $K_{1i} = \frac{\kappa_2^3}{2} + \kappa_2\kappa_1$ ,  $K_{2i} = -\kappa_2^2$ ,  $K_{3i} = -\kappa_2 \sum_{j=0}^N a_{ij}(\varsigma_i - \varsigma_j)$ ,  $K_{4i} = (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)\varsigma_i$ , por lo que:

$$Q_i = \begin{bmatrix} K_{1i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{3i} & \frac{K_{2i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{4i}}{2} \\ \frac{K_{2i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{4i}}{2} & \frac{\kappa_2}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

de lo cual se sabe que  $|\varsigma_i| \leq L$ , por lo que se deduce que la matriz  $Q_i$  para toda  $i$ , es positiva definida sí y solo sí  $K_{1i} = -[\tilde{z}_i]^0 K_{3i} + \frac{\kappa_2}{2} > 0$  y  $(K_{1i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{3i})\frac{\kappa_2}{2} - \frac{(K_{2i} - [\tilde{z}_i]^0 K_{4i})^2}{4} > 0$ , para toda  $i$ . Por lo que  $V(t, \tilde{z}(0), \tilde{\eta}(0))$  es una función decreciente monotonícamente si:

$$\kappa_1 > \frac{(\kappa_2^2 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)L)^2}{2\kappa_2^2} + 2\|\mathcal{M}\|_\infty L.$$

Es de notar que,  $\max(|\tilde{z}_i|^{1/2}) \leq \frac{V^{1/2}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}$ , además:

$$\begin{aligned} V &\leq \lambda_{\max}(P) \sum_{i=1}^N \left( |\tilde{z}_i| + \left( \sum_{j=0}^N a_{ij}(\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \right)^2 \right) \\ &\leq \max(|\tilde{z}|^{1/2}) \lambda_{\max}(P) \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\tilde{z}_i|^{1/2}} \left( |\tilde{z}_i| + \left( \sum_{j=0}^N a_{ij}(\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \right)^2 \right), \end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{z}(t_0), \tilde{\eta}(t_0)) &\leq - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\tilde{z}_i|^{1/2}} \lambda_{\min}(Q_i) \left( |\tilde{z}_i| + \left( \sum_{j=0}^N a_{ij}(\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j) \right)^2 \right) \\ &\leq -\varepsilon V^{1/2}(t, \tilde{z}(t_0), \tilde{\eta}(t_0)), \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon = \min(\lambda_{\min}(Q_i)) \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)}$ . Así bien, las trayectorias en  $\tilde{z}_i$  y  $\tilde{\eta}_i$  convergen a cero en tiempo finito con un tiempo de convergencia:

$$T(\tilde{z}(t_0), \tilde{\eta}(t_0)) = \frac{2V^{1/2}(t, \tilde{z}(t_0), \tilde{\eta}(t_0))}{\varepsilon},$$

por lo que queda demostrado que  $z_i \rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j})$  y  $\eta_i \rightarrow (x_{2i} - x_{20})$  en tiempo finito. Debe ser claro que si se encojen condiciones iniciales muy alejadas, el error de diferenciación sera muy grande, lo que implica que  $T \rightarrow +\infty$  para esas condiciones iniciales.

# Diferenciación distribuida en tiempo predefinido para nodos integradores de segundo orden

---

En este capítulo se presenta el desarrollo del diferenciador en tiempo predefinido, el cual tiene como objetivo reducir estimar las diferencias de posición entre los nodos y su error de seguimiento en la velocidad antes de un tiempo  $T_c$  definido por el usuario. lo anterior es resultado de emplear la misma estructura del diferenciador en tiempo finito del capítulo anterior agregando una ganancia variable con el tiempo  $t$ , que escala al diferenciador en tiempo finito. La metodología para el diseño de esas ganancias variables con el tiempo  $t$  se detallan en trabajos como [11] y [1]. A continuación se presenta el planteamiento del diferenciador distribuido en tiempo predefinido el cual toma como base el diferenciador del capítulo anterior.

## 4.1. Planteamiento del diferenciador distribuido en tiempo predefinido

El diferenciador distribuido en tiempo finito de [19], mostrado capítulo anterior estima las diferencias de posición entre los nodos y el error de seguimiento en la velocidad entre un nodo y el líder, sin embargo, se si desea usar un control para lograr el consenso, es necesario que el error de diferenciación entre los nodos sean lo más cercanas posibles a cero antes de que el control inicie, por lo cual es necesario conocer el tiempo para el cual la dinámica del error en el diferenciador es lo suficientemente cercana a cero.

#### 4. DIFERENCIACIÓN DISTRIBUIDA EN TIEMPO PREDEFINIDO PARA NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN

---

El siguiente diferenciador:

$$\begin{aligned}\frac{dz_i}{dt} &= -\kappa_2\kappa(t) \left[ z_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i}(t) - x_{1j}(t)) \right]^{1/2} + \kappa(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i(t) - \eta_j(t)), \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\kappa_1\kappa(t) \left[ z_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i}(t) - x_{1j}(t)) \right]^{1/2} + \kappa(t)u_i(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde la ganancia que depende del tiempo se define como:

$$\kappa(t) := \begin{cases} \frac{\chi}{\alpha(T_c - t\chi)} & \text{si } t \in [0, T_c) \\ 1 & \text{de otra manera,} \end{cases}\tag{4.2}$$

donde  $\alpha > 0$ ,  $0 < \chi \leq 1$  se deben satisfacer.  $T_c$  es una constante positiva que indica el tiempo máximo de convergencia, dependiente de las condiciones iniciales en los agentes.

El diferenciador en (4.1), tiene una convergencia en tiempo predefinido y se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dz_i}{dt} &= \frac{dz_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dz_i}{d\tau} \kappa(t), \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{d\eta_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\eta_i}{d\tau} \kappa(t),\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde  $\kappa(t)$  representa un escalamiento temporal,  $\frac{dz_i}{d\tau}$  y  $\frac{d\eta_i}{d\tau}$  representan la dinámica de un diferenciador en el dominio de  $\tau$ . Sea la función  $\Phi = \alpha\chi^{-1}e^{-\alpha\tau}$ , tal que se cumple con las características que se mencionan en el capítulo dos, entonces la función  $\psi(\tau) = T_c\chi^{-1}(1 - e^{-\alpha\tau})$  define una transformación en  $t$ , cuyo mapeo inverso es la función  $\psi(t) = -\alpha^{-1} \ln(1 - \frac{t}{T_c}\chi)$ , la cual define la transformación en  $\tau$ .

De manera análoga, se deducen las expresiones para el diferenciador en el dominio de  $\tau$ , utilizando la expresión en (4.3), es decir:

$$\begin{aligned}\frac{dz_i}{d\tau} &= \kappa(t)^{-1} \frac{dz_i}{dt} \Big|_{t=T_c\chi^{-1}(1-e^{-\alpha\tau})}, \\ \frac{d\eta_i}{d\tau} &= \kappa(t)^{-1} \frac{d\eta_i}{dt} \Big|_{t=T_c\chi^{-1}(1-e^{-\alpha\tau})}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

La derivada de la función  $\psi(t)$  es  $\frac{d\tau}{dt} = \kappa(t) = \frac{\chi}{\alpha(T_c - \chi t)}$  y cuya función recíproca es  $\kappa(t)^{-1} = \frac{dt}{d\tau} \Big|_{\tau = -\alpha^{-1} \ln(1 - t\chi/T_c)} = \alpha\chi^{-1}(T_c - \chi t)$ . Reescribiendo las ecuaciones (4.4), se

obtiene el siguiente diferenciador en el dominio de  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{d\tau} &= -\kappa_2 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i - \eta_j) \\ \frac{d\eta_i}{d\tau} &= -\kappa_1 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + u_i. \end{aligned} \quad (4.5)$$

El diferenciador (4.5) en el espacio temporal  $\tau$  tiene la misma estructura que el diferenciador de [19], mostrado en el capítulo anterior, por lo que se considera que la convergencia de la dinámica de error de sus trayectorias en  $\tau$ , convergen a cero en tiempo finito, sin embargo, la dinámica de error en el diferenciador (4.1) converge a cero cuando el tiempo  $t$  tiende al parámetro  $T_c$ .

## 4.2. Diferenciador distribuido en tiempo predefinido

Se considera un grafo no dirigido  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, A\}$  que consiste de un conjunto de  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  nodos, un conjunto de aristas  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  y  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es la matriz de adyacencia asociada al grafo y suponga que se tienen  $N$  seguidores en una red y que el sistema dinámico de seguidores puede ser descrito por una cadena de integradores doble, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \quad i \in \mathcal{V}/i = \{1, \dots, N\}, \\ \dot{x}_{2i} &= u_i + \zeta_i(t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^2$  son los estados,  $u_i \in \mathbb{R}^p$  es una entrada de control y  $\zeta_i(t) \in \mathbb{R}^p$  es una perturbación acotada tal que  $|\dot{\zeta}_i(t)| \leq L$ . Por otro lado, existe un líder en la red de dinámica:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} &= x_{20}, \\ \dot{x}_{20} &= u_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  son los estados del líder y  $u_0 \in \mathbb{R}$  es una entrada acotada  $|u_0| \leq L$  por una constante  $L \in \mathbb{R}^+$  y solo los agentes adyacentes poseen la posición del líder. El objetivo del diferenciador es estimar un protocolo de consenso en la posición del líder y el error de seguimiento de velocidad, es decir:

$$\begin{aligned} z_i &\rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}), \quad i \in \mathcal{V} \\ \eta_i &\rightarrow (x_{2i} - x_{20}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se deben cumplir las mismas suposiciones que el diferenciador en tiempo finito, explicado en el capítulo anterior, así bien, se propone un grupo de diferenciadores distribuidos que utilizan la posición relativa del líder y las de sus seguidores para calcular las diferencias entre los nodos, a partir de la interacciones relativas entre los mismos, fijando el



#### 4. DIFERENCIACIÓN DISTRIBUIDA EN TIEMPO PREDEFINIDO PARA NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN

---

tiempo máximo de convergencia en el error de diferenciación. Basado en los escalamientos temporales mostrados en [11] y [1], se propone el siguiente grupo de diferenciadores distribuidos:

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= -\kappa(t)\kappa_2 \left[ z_i - \kappa(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i - \eta_j), \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\eta}_i &= -\kappa(t)\kappa_1 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^0 + \kappa(t)u_i,\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde  $z_i$  es usada para estimar  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j})$ ,  $\eta_i$  es usado para estimar  $x_{2i} - x_{20}$ ,  $a_{ij}$  son elementos de la matriz  $\mathcal{A}$  asociado a  $\mathcal{G}$ ,  $a_{i0} \geq 0$  describe la comunicación entre el líder y sus adyacentes,  $\kappa(t)$  es una ganancia variable, cuya estructura depende de la elección de la función  $\Phi$ . Finalmente  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  se escogen tal y como se menciona en el capítulo anterior.

La ganancia variante en el tiempo tiene la siguiente forma:

$$\kappa(t) := \begin{cases} \frac{\chi}{\alpha(T_c - t\chi)} & \text{si } t \in [0, T_c) \\ 1 & \text{de otra manera.} \end{cases}\tag{4.10}$$

Donde  $\alpha > 0$ ,  $0 < \chi \leq 1$ .

**Nota 4** *El diferenciador (3.4) del capítulo anterior se recupera en (4.9) cuando  $t \rightarrow +\infty$ , debido a que la ganancia en (4.10), se vuelve unitaria.*

### 4.3. Prueba de convergencia del diferenciador en tiempo predefinido

El diferenciador en el dominio de  $\tau$  tiene una convergencia en su dinámica de error en tiempo finito, debido a que posee la misma estructura que el diferenciador del capítulo anterior, sin embargo, en el espacio no transformado, es decir, en  $t$ , el (4.9) tiene una convergencia en tiempo predefinido cuando  $t$  tiende al parámetro  $T_c$ . A continuación se muestra la prueba de convergencia del diferenciador distribuido en el dominio de  $\tau$ .

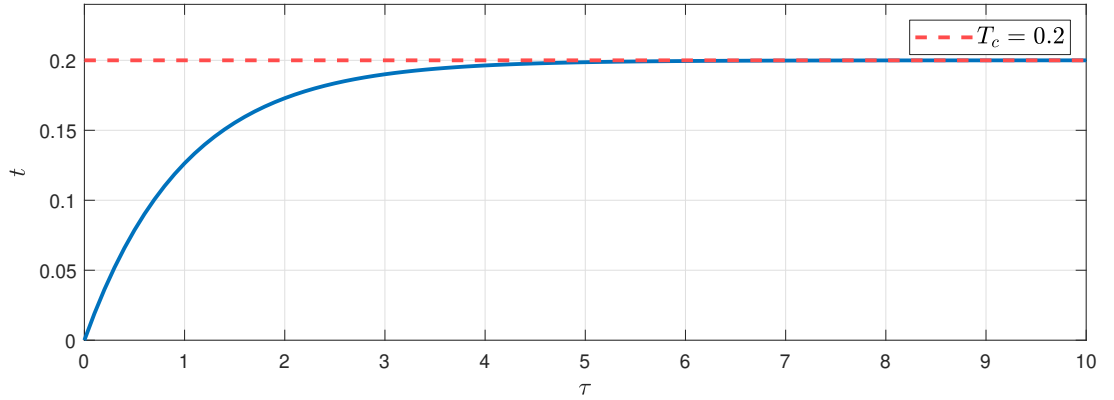
Se considera la dinámica en el espacio transformado, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{dz_i}{d\tau} &= -\kappa_2 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i - \eta_j), \\ \frac{d\eta_i}{d\tau} &= -\kappa_1 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + u_i,\end{aligned}\tag{4.11}$$

con unas ganancias definidas como:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &> 0, \\ \kappa_1 &> \max \left\{ \frac{\kappa_2^2}{2(2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)^2 \lambda_{\min}(\mathcal{M}^{-1})}, \frac{(\kappa_2^2 + (2\|\mathcal{M}\|_\infty + 1)L)^2}{2\kappa_2^2} + 2\|\mathcal{M}\|_\infty L \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde  $\mathcal{M} = \mathcal{L} + \text{diag}(a_{i0})$ ,  $\mathcal{L}$  es la matriz Laplaciana asociada al grafo  $\mathcal{G}$ . La relación entre  $t$  y  $\tau$ , se muestra a continuación en la siguiente imagen:



**Figura 4.1:**  $t$  vs.  $\tau$

La figura 4.1 muestra como para un  $T_c = 0.2$  en  $\tau$  se necesitan cerca de cinco unidades cuando  $\alpha = 1$  y  $\chi = 1$ , para condiciones iniciales cercanas al origen en el diferenciador. Se definen las variables del error de diferenciación:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i(\tau) &= z_i(\tau) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i}(\tau) - x_{1j}(\tau)), \\ \tilde{\eta}_i(\tau) &= \eta_i(\tau) - (x_{2i}(\tau) - x_{20}(\tau)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ambas ecuaciones se sustituyen en (4.11) y se obtiene la dinámica de error en el dominio de  $\tau$ , es decir:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_i &= -\kappa_2 [\tilde{z}_i]^{1/2} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j), \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\tilde{\eta}}_i &= -\kappa_1 [\tilde{z}_i]^0 + u_0 - \zeta_i. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Se consideran las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}_i}{d\tau} &= \kappa(t)^{-1} \frac{d\tilde{z}_i}{dt} \\ \frac{d\tilde{\eta}_i}{d\tau} &= \kappa(t)^{-1} \frac{d\tilde{\eta}_i}{dt}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

de las cuales se puede deducir que los términos asociados a la perturbación en el dominio se  $\tau$  se pueden expresar como:

$$\kappa(t)^{-1} (u_0(t) - \zeta_i(t)),$$

#### 4. DIFERENCIACIÓN DISTRIBUIDA EN TIEMPO PREDEFINIDO PARA NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN

---

de esa manera es fácil notar que los términos permanecen acotados, debido a que los terminos  $u_0$  y  $\zeta_i$  están acotados por  $L$  y además:

$$\kappa(t)^{-1} = \alpha\chi^{-1}(T_c e^{-\alpha t}),$$

de lo cual se puede observar que el término  $[\kappa(t)^{-1}(u_0(t) - \zeta_i(t))] \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . A partir de este punto la prueba sigue exactamente los mismos pasos mostrados en el capítulo anterior, por lo que se puede concluir que las trayectorias del sistema (4.14) tienden a cero en tiempo finito en:

$$\mathcal{T}(\tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0)) = \frac{2V^{1/2}(\tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0))}{\epsilon} \quad \epsilon = \min(\lambda_{\min}(Q_i)) \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)}. \quad (4.16)$$

Sin embargo, si el error de diferenciación es muy grande para las condiciones iniciales, entonces  $\mathcal{T}(\tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0)) = +\infty$ , por lo cual, se debe satisfacer la siguiente suposición:

**Suposición 3 (Valor de  $T_i$ )** *Se debe satisfacer lo siguiente:*

- Existe un valor  $T_i$ , tal que para toda condición inicial en  $\tau$ ,  $\mathcal{T}(\tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0)) \leq T_i$ .
- $\lim_{t \rightarrow T_c} \kappa(t)^{-1} \Omega(\tau, \tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0)) \Big|_{\tau = -\alpha^{-1} \ln(1 - t\chi/T_c)} = 0$ .

donde  $\Omega(\tau, \tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0))$  representa la dinámica del diferenciador en  $\tau$ .

Si  $\chi := 1 - e^{-\alpha T_i}$  y  $T_i$  se define como en la suposición anterior, entonces el diferenciador (4.14) en  $t$ , la dinámica del error tiende a cero en un tiempo:

$$T(\tilde{z}(0), \tilde{\eta}(0)) = \lim_{t \rightarrow T} \chi^{-1} T_c (1 - e^{-\alpha t}) \leq T_c. \quad (4.17)$$

El tiempo de convergencia en la expresión (4.17), mantiene las siguientes afirmaciones:

1. Si  $\mathcal{T}(\tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0)) = +\infty$  entonces el tiempo de convergencia es exactamente en  $T_c$ , para cualquier condición inicial  $\tilde{\eta}(t_0) \neq 0$  y  $\tilde{z}(t_0) \neq 0$ .
2. Si existe un valor  $T_i < +\infty$ , tal que,  $\mathcal{T}(\tilde{z}(\tau_0), \tilde{\eta}(\tau_0)) \leq T_i$ , entonces  $\kappa(t)$  es finito para todo tiempo  $t$  y toda condición inicial.

# Aplicaciones de los diferenciadores en problemas de consenso con nodos integradores de segundo orden perturbados

---

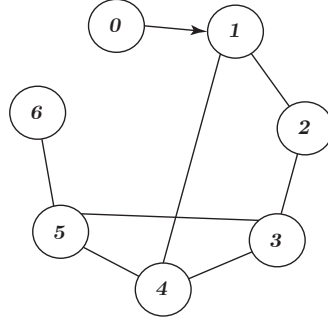
En capítulos previos se comenzó por definir el diferenciador distribuido en tiempo finito y el diferenciador distribuido tiempo predefinido, así bien este capítulo se verán algunos ejemplos de aplicaciones de los diferenciadores en protocolos continuos y discontinuos de consenso. En ambos protocolos el diferenciador en tiempo predefinido funciona hasta poco antes de alcanzar la cota definida por el usuario, posteriormente se recupera la estructura del diferenciador en tiempo finito, debido a la definición de su ganancia. Una vez que el diferenciador en tiempo finito inicia, el controlador también comienza a funcionar, el cual tiene como objetivo reducir las diferencias entre los nodos y sus vecinos, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty^+} \|x_i - x_j\| = 0. \quad (5.1)$$

Los controladores utilizados son el CTA (continuous twisting algorithm) y el NSOSM (nested second order sliding mode) para el protocolo continuo y discontinuo respectivamente, el propósito de utilizar estos controladores es mostrar la utilización de los diferenciadores distribuidos en distintos problemas de consenso.

## 5.1. Protocolo continuo de consenso

Para este ejemplo se considera el grafo dinámico:



**Figura 5.1:** Grafo  $\mathcal{G}_1$

El grafo de la figura 5.1 cumple con la primera suposición, es decir,  $\mathcal{G}_1$  es un árbol de cobertura. El sistema multiagente asociado al grafo  $\mathcal{G}_1$ , tiene la siguiente dinámica para los seguidores:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \quad i \in \mathcal{V}/i = \{1, \dots, 6\}, \\ \dot{x}_{2i} &= u_i + \zeta_i(t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^2$  son los estados,  $u_i \in \mathbb{R}^p$  es una entrada de control y  $\zeta_i(t) \in \mathbb{R}^p$  es una perturbación acotada tal que  $|\dot{\zeta}_i(t)| \leq L$ , cada seguidor cumple con la segunda suposición, es decir, cada uno conoce sus propios estados. Las perturbaciones en cada seguidor son:

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= 0.7\sin(2t) + 0.5, \\ \zeta_2(t) &= 0.5\sin(0.5t) + 0.6, \\ \zeta_3(t) &= 0.2\sin(0.2t) + 0.2, \\ \zeta_4(t) &= 0.5\cos(t) + 0.6, \\ \zeta_5(t) &= 0.3\cos(0.7t) + 0.5, \\ \zeta_6(t) &= 0.2\cos(t) + 0.7, \end{aligned} \quad (5.3)$$

y cuyas condiciones iniciales son:  $x_{1i}(0) = \{0.4, 0.2, 0.5, 0.3, 0.15, 0.15\}$  y  $x_{2i}(0) = \{0.35, 0.3, 0.25, 0.15, 0.05, 0.05\}$ . Por otro lado, existe un líder representado por el nodo 0 en la red, cuya dinámica es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} &= x_{20}, \\ \dot{x}_{20} &= u_0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

con las condiciones iniciales  $x_0(0) = \{0, 0.1\}$ , donde  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  son los estados del líder y  $u_0 = -0.1\sin(t)$  es una entrada acotada  $|u_0| \leq L$  por una constante  $L \in \mathbb{R}^+$ , solo el nodo 1 posee la posición del líder. Se propone un grupo de diferenciadores distribuidos

que usan la posición relativa del líder y las de sus seguidores para estimar el protocolo lineal asociado al grafo de la figura 5.1, a partir de la interacciones entre los mismos.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -\kappa(t)\kappa_2 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + \kappa(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i - \eta_j), \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\eta}_i &= -\kappa(t)\kappa_1 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^0 + \kappa(t)u_i, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $z_i$  es usada para estimar  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j})$ ,  $\eta_i$  es usado para estimar  $x_{2i} - x_{20}$ ,  $a_{ij}$  son elementos de la matriz  $\mathcal{A}$  asociado a  $\mathcal{G}$ ,  $a_{i0} \geq 0$  describe la comunicación entre el líder y sus adyacentes, se utilizan los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\chi = 1 - e^{-\alpha T_i}$  y  $T_i = 0.3$ , con unas ganancias  $\kappa_1 = 27.5$  y  $\kappa_2 = 7.5$  en el diferenciador, donde  $\kappa(t)$  es:

$$\kappa(t) = \begin{cases} \frac{\chi}{\alpha(T_c - \chi(t))}, & \text{si } t \in [0, T_c) \\ 1. & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.6)$$

se utilizan los estimados  $z_i$  y  $\eta_i$  en el siguiente control:

$$\begin{aligned} u_{CTA_i} &= -k_1 [z_i]^{\frac{1}{3}} - k_2 [\eta_i]^{\frac{1}{2}} + \sigma, \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\sigma} &= -k_3 [z_i]^0 - k_4 [\eta_i]^0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

con unas ganancias  $k_i = \{2.7, 5.345, 1.1, 0\}$  para  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ , donde:

$$u_i = \begin{cases} u_{CTA_i}, & \text{si } t \in [T_c, \infty+) \\ 0. & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.8)$$

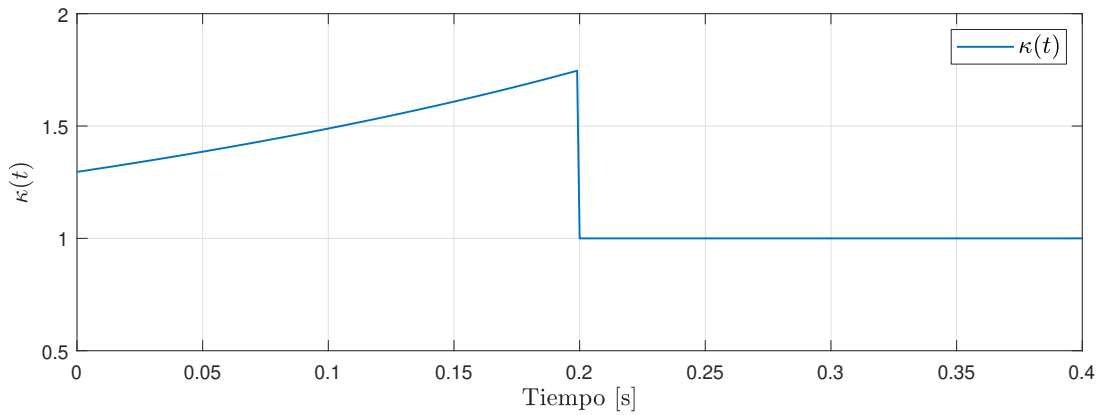
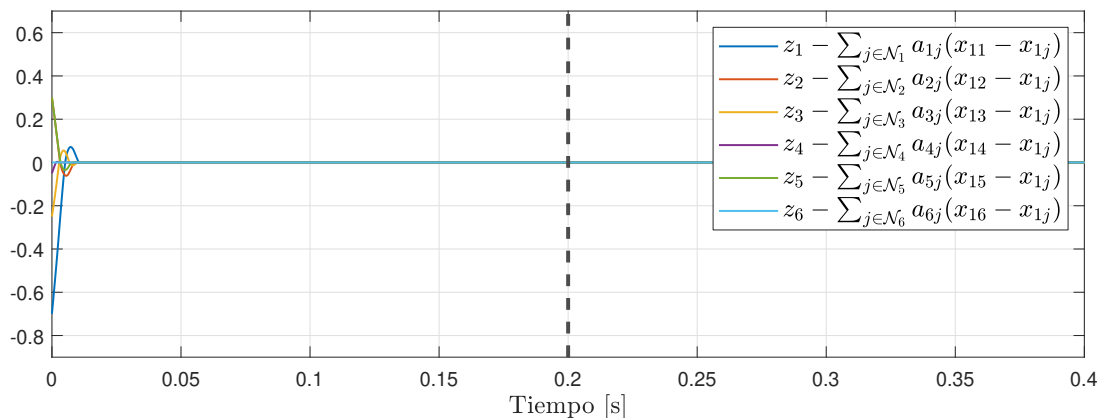


Figura 5.2: Ganancia  $\kappa(t)$

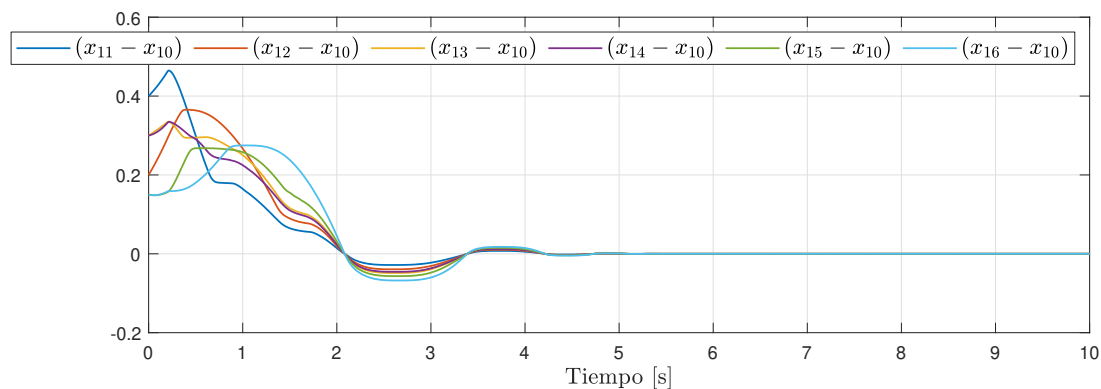
## 5. APLICACIONES DE LOS DIFERENCIADORES EN PROBLEMAS DE CONSENSO CON NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN PERTURBADOS

En la figura 5.2 se muestra el crecimiento de la ganancia cuando se tiene el parámetro  $T_i = 0.3$  para un  $T_c = 0.2$ . El término  $\frac{\chi}{\alpha(T_c - \chi t)}$  no tiende a infinito cuando  $t \rightarrow T_c$ .

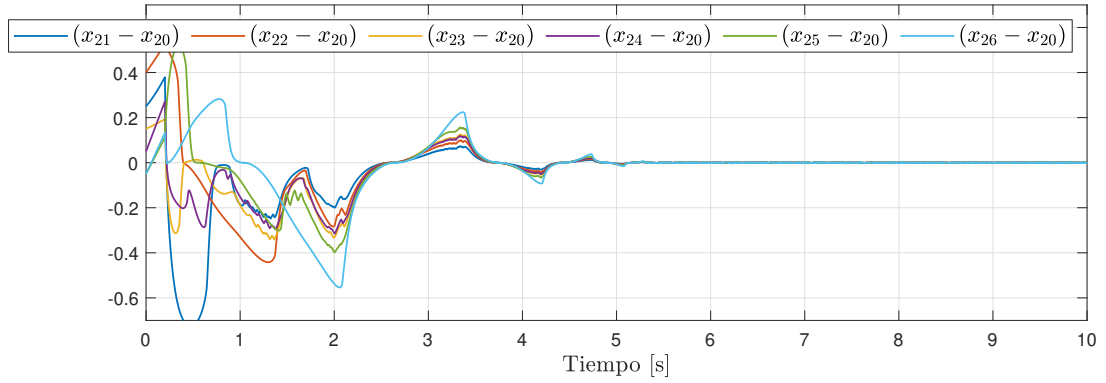


**Figura 5.3:** Términos correctivos en el argumento del diferenciador

La figura 5.3 muestra como el error de diferenciación en cada uno de los seguidores converge a una región cercana al cero antes de llegar al tiempo  $T_c = 0.2s$  mostrado como una línea punteada. Una vez se alcanza el umbral de  $T_c$ , se recupera el diferenciador en tiempo finito.

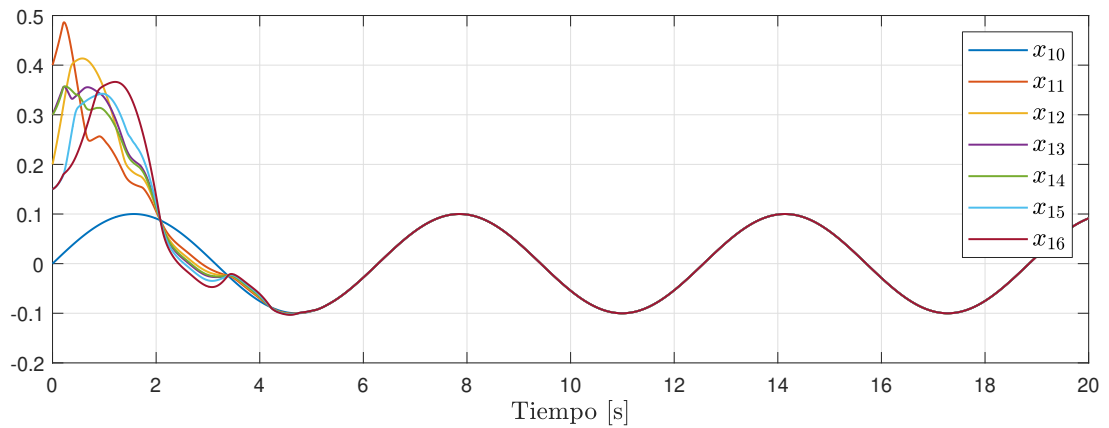


**Figura 5.4:** Error de seguimiento de posición



**Figura 5.5:** Error de seguimiento de velocidad

Las figuras 5.4 y 5.5 muestran el error de seguimiento en la posición y velocidad, cada error es una diferencia entre información de un nodo seguidor y la información del líder.

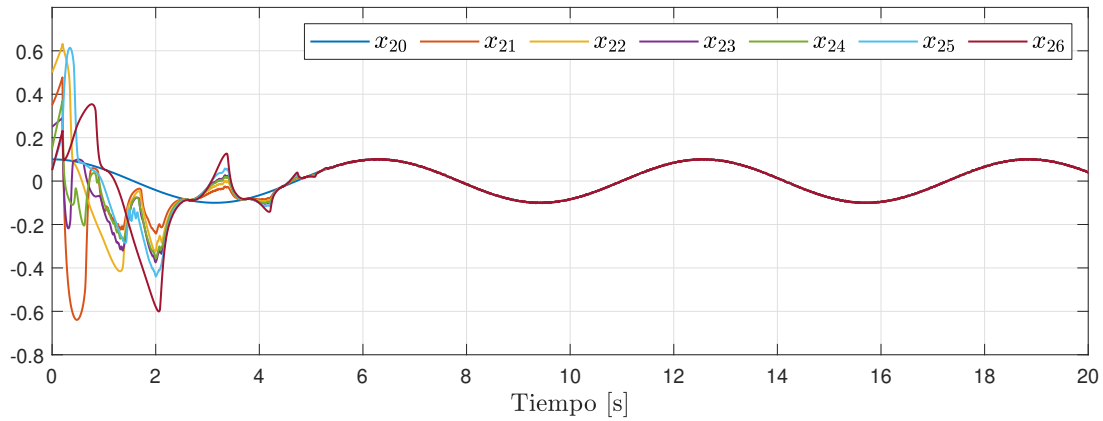


**Figura 5.6:** Posición en cada uno de los agentes



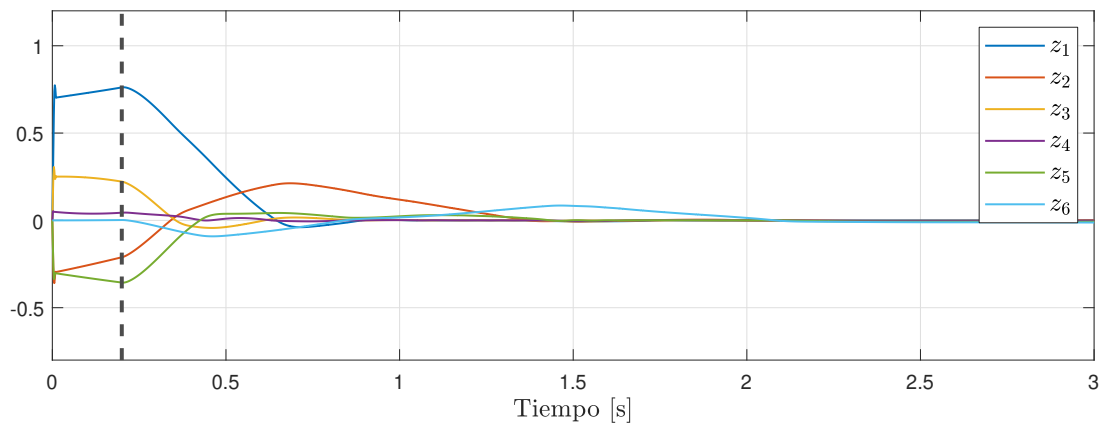
## 5. APLICACIONES DE LOS DIFERENCIADORES EN PROBLEMAS DE CONSENSO CON NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN PERTURBADOS

---

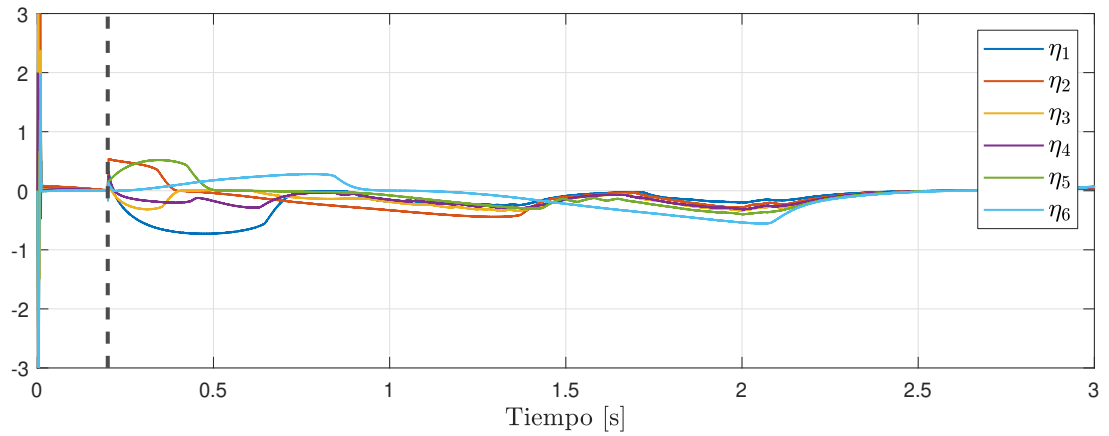


**Figura 5.7:** Velocidad en cada uno de los agentes

Las figuras 5.6 y 5.7 muestran como la posición y velocidad en cada uno de los nodos seguidores, siguen la posición y velocidad del nodo líder.



**Figura 5.8:** Reducción de las diferencias estimadas en posición

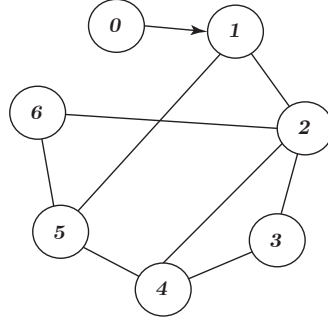


**Figura 5.9:** Reducción de las diferencias estimadas en velocidad

Finalmente las figuras 5.8 y 5.9 muestran los términos estimados en los diferencia-dores y su comportamiento al iniciar el control CTA de la expresión (5.7). El control CTA se encuentra apagado antes de  $T_c$ , una vez se cruza el umbral definido por el tiempo de convergencia, el control comienza a funcionar.

## 5.2. Protocolo discontinuo de consenso

Para este ejemplo se considera el grafo dinámico:



**Figura 5.10:** Grafo  $\mathcal{G}_2$

El grafo de la figura 5.10 cumple con la primera suposición, es decir,  $\mathcal{G}_2$  es un árbol de cobertura. El sistema multiagente asociado al grafo  $\mathcal{G}_2$ , tiene la siguiente dinámica para los seguidores:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \quad i \in \mathcal{V}/i = \{1, \dots, 6\}, \\ \dot{x}_{2i} &= u_i + \zeta_i(t), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^2$  son los estados,  $u_i \in \mathbb{R}^p$  es una entrada de control y  $\zeta_i(t) \in \mathbb{R}^p$  es una perturbación acotada tal que  $|\dot{\zeta}_i(t)| \leq L$ , cada seguidor cumple con la segunda suposición, es decir, cada uno conoce sus propios estados. Las perturbaciones son:

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= 0.7 \sin(2t) + 0.5, \\ \zeta_2(t) &= 0.5 \sin(0.5t) + 0.6, \\ \zeta_3(t) &= 0.2 \sin(0.2t) + 0.2, \\ \zeta_4(t) &= 0.5 \cos(t) + 0.6, \\ \zeta_5(t) &= 0.3 \cos(0.7t) + 0.5, \\ \zeta_6(t) &= 0.2 \cos(t) + 0.7, \end{aligned} \quad (5.10)$$

y cuyas condiciones iniciales son:  $x_{1i}(0) = \{0.4, 0.2, 0.5, 0.3, 0.15, 0.15\}$  y  $x_{2i}(0) = \{0.35, 0.3, 0.25, 0.15, 0.05, 0.05\}$ . Por otro lado, existe un líder representado por el nodo 0 en la red, cuya dinámica es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} &= x_{20}, \\ \dot{x}_{20} &= u_0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

con las condiciones iniciales  $x_0(0) = \{0, 0.1\}$ , donde  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  son los estados del líder y  $u_0 = -0.1 \sin(t)$  es una entrada acotada  $|u_0| \leq L$  por una constante  $L \in \mathbb{R}^+$ , solo el nodo 1 posee la posición del líder. Se propone un grupo de diferenciadores distribuidos

que usan la posición relativa del líder y las de sus seguidores para estimar el protocolo lineal asociado al grafo de la figura 5.10, a partir de la interacciones entre los mismos.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -\kappa(t)\kappa_2 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^{1/2} + \kappa(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\eta_i - \eta_j), \quad i \in \mathcal{V}, \\ \dot{\eta}_i &= -\kappa(t)\kappa_1 \left[ z_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j}) \right]^0 + \kappa(t)u_i, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $z_i$  es usada para estimar  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_{1i} - x_{1j})$ ,  $\eta_i$  es usado para estimar  $x_{2i} - x_{20}$ ,  $a_{ij}$  son elementos de la matriz  $\mathcal{A}$  asociado a  $\mathcal{G}$ ,  $a_{i0} \geq 0$  describe la comunicación entre el líder y sus adyacentes, se utilizan los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\chi = 1 - e^{-\alpha T_i}$  y  $T_i = 0.3$ , con unas ganancias  $\kappa_1 = 27.5$  y  $\kappa_2 = 7.5$  en el diferenciador, donde  $\kappa(t)$  es:

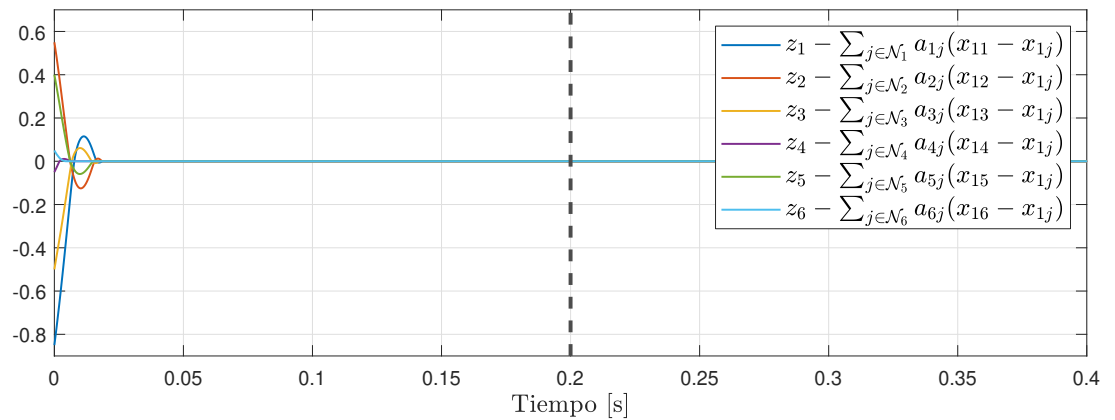
$$\kappa(t) = \begin{cases} \frac{\chi}{\alpha(T_c - \chi(t))}, & \text{si } t \in [0, T_c) \\ 1. & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.13)$$

Fijando el tiempo máximo de convergencia en  $T_c = 0.2s$  y utilizando los estimados  $z_i$  y  $\eta_i$  en el control, es decir:

$$u_{TSM_i} = -k_1 \left[ k_2 z_i + [\eta_i]^2 \right]^0, \quad i \in \mathcal{V}. \quad (5.14)$$

Donde  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$  y además:

$$u_i = \begin{cases} u_{TSM_i}, & \text{si } t \in [T_c, \infty+) \\ 0. & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.15)$$

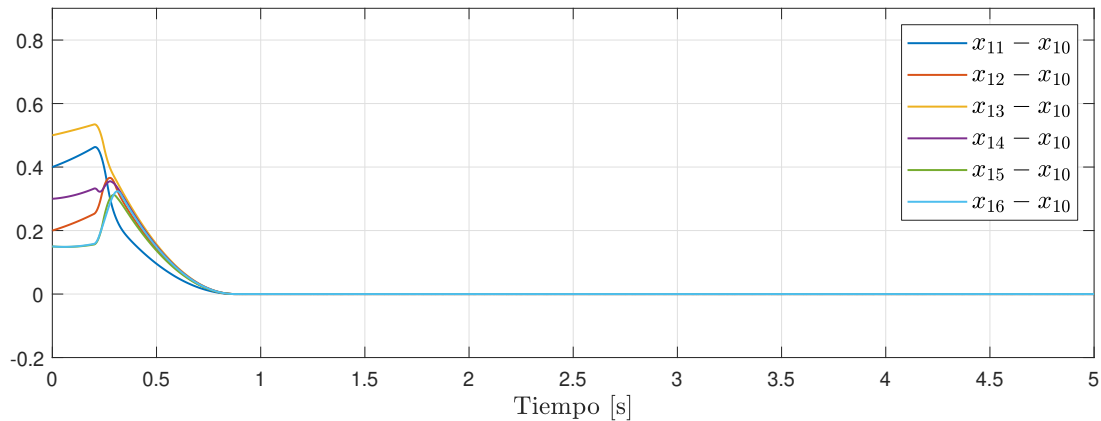


**Figura 5.11:** Términos correctivos en el argumento del diferenciador

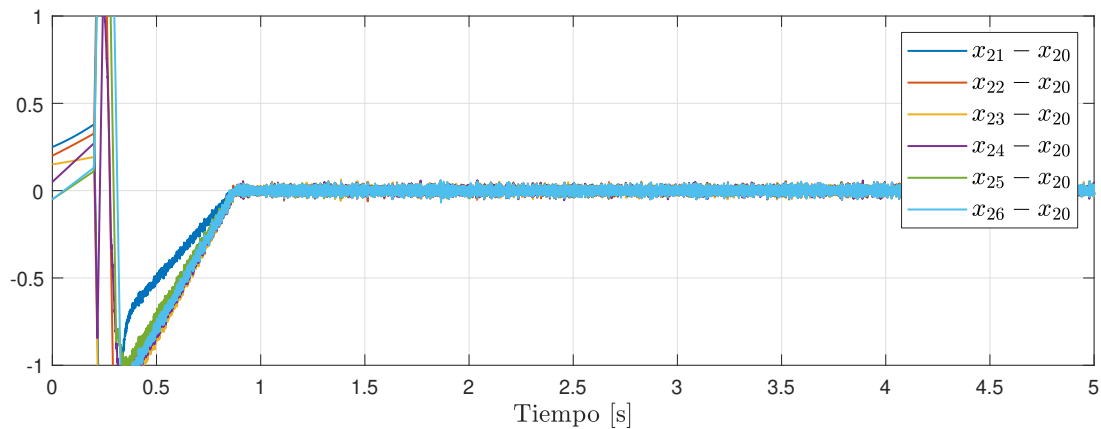
## 5. APLICACIONES DE LOS DIFERENCIADORES EN PROBLEMAS DE CONSENSO CON NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN PERTURBADOS

---

La figura 5.11 muestra, como los términos de corrección en cada uno de los diferenciadores converge a una región cercana al cero antes de llegar al tiempo  $T_c = 0.2s$ , la cual se muestra como una línea punteada. Una vez se pasa el umbral de  $T_c$ , se recupera el diferenciador en tiempo finito.

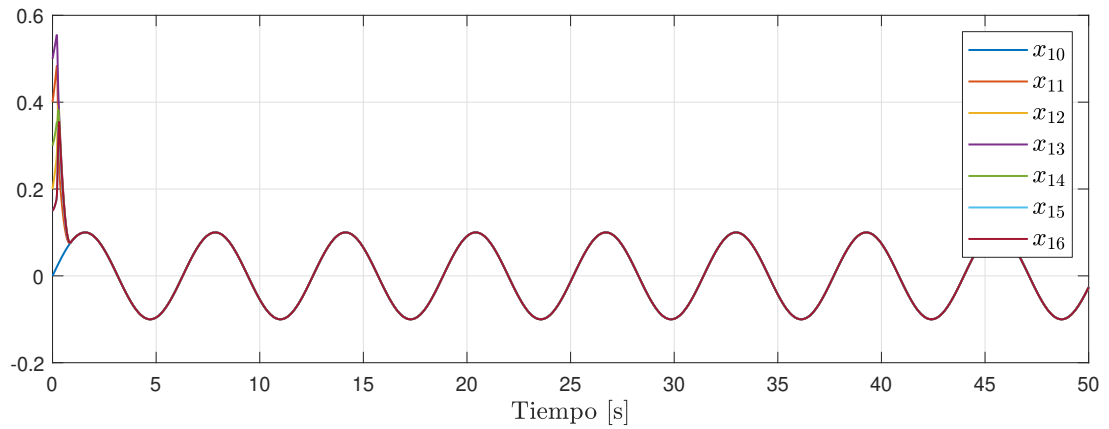
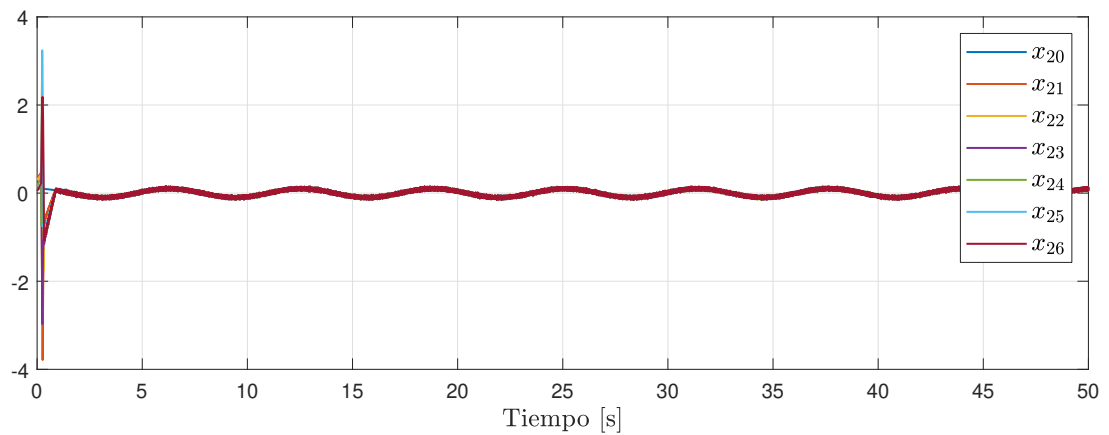


**Figura 5.12:** Error de seguimiento de posición



**Figura 5.13:** Error de seguimiento de velocidad

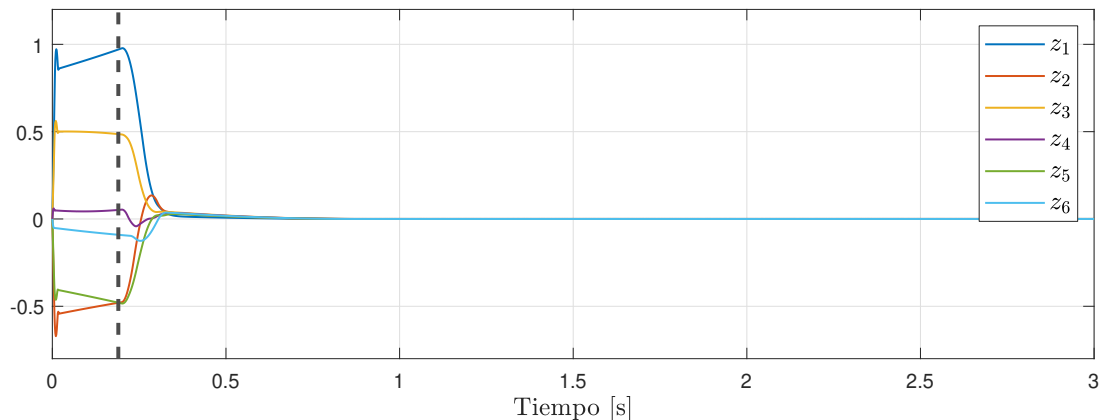
Las figuras 5.12 y 5.13 muestran el error de seguimiento en la posición y el error de seguimiento en la velocidad, cada error es una diferencia entre información de un nodo seguidor y la información del líder.

**Figura 5.14:** Posición en cada uno de los agentes**Figura 5.15:** Velocidad en cada uno de los agentes

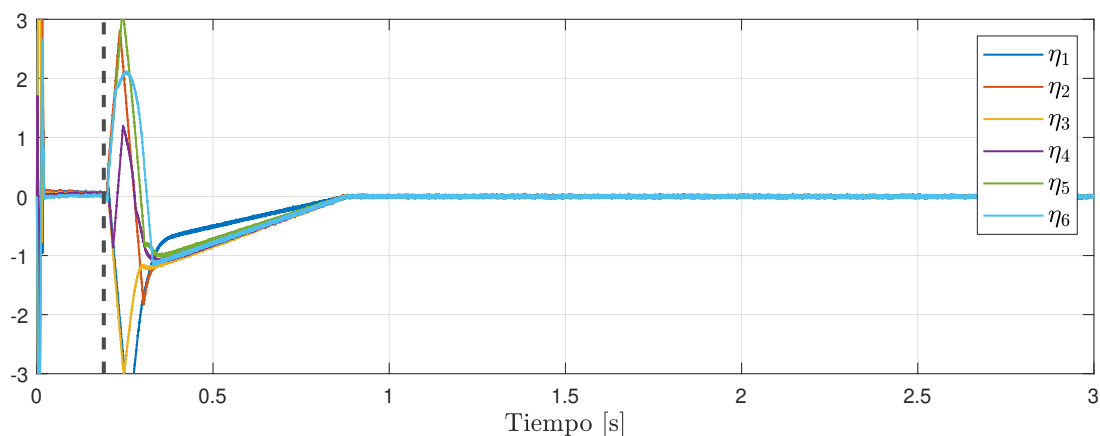
Las figuras 5.14 y 5.15 muestran como la posición y velocidad en cada uno de los nodos seguidores, siguen la posición y velocidad del nodo líder.

## 5. APLICACIONES DE LOS DIFERENCIADORES EN PROBLEMAS DE CONSENSO CON NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN PERTURBADOS

---



**Figura 5.16:** Reducción de las diferencias estimadas en posición



**Figura 5.17:** Reducción de las diferencias estimadas en velocidad

Las figuras 5.16 y 5.17 muestran los términos estimados en los diferenciadores y su comportamiento al utilizarse el control TSM de la expresión (5.14). El control mencionado se encuentra apagado antes de  $T_c$ , una vez se cruza el umbral definido, el control comienza a funcionar.

A pesar de que cada controlador tiene un comportamiento distinto y logra el consenso en diferentes tiempos, el diferenciador en tiempo predefinido converge en el tiempo establecido  $T_c$ , a continuación se muestra como el diferenciador, a pesar de alejar las condiciones iniciales 10 veces, 100 veces y 1000 veces siempre va converger antes del tiempo  $T_c = 0.2s$ .

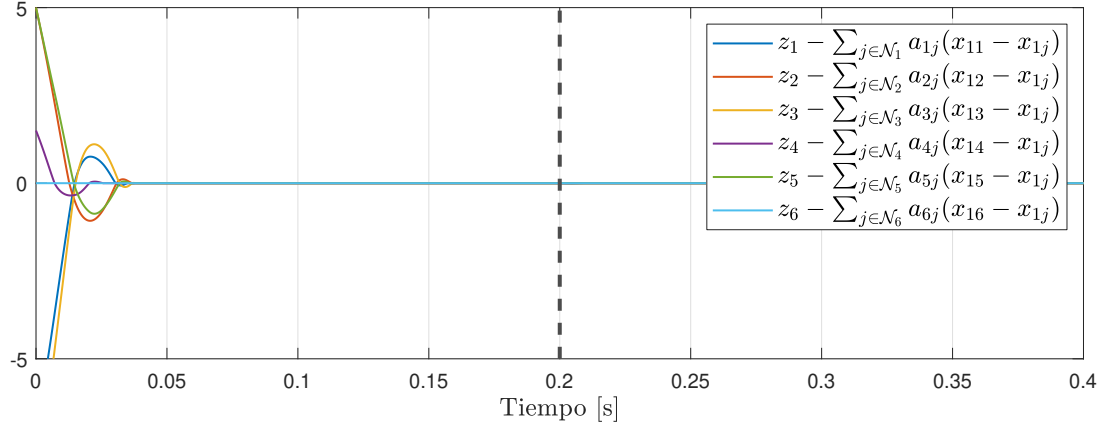
Considere el siguiente grupo de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_{i1}(0) &= \{0.4, 0.2, 0.5, 0.3, 0.15, 0.15\}, \\ x_{i2}(0) &= \{0.35, 0.3, 0.25, 0.15, 0.05, 0.05\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

El grupo de condiciones iniciales en (5.16) son los usados para ejemplos, sin embargo, no muestran, que pese alejarse las condiciones iniciales el objetivo del diferenciador siempre se cumple, por lo cual (5.16) se multiplica 10 veces, es decir:

$$\begin{aligned} x_{i1}(0) &= \{4, 2, 5, 3, 1.5, 1.5\}, \\ x_{i2}(0) &= \{3.5, 3, 2.5, 1.5, 0.5, 0.5\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde los términos correctivos se muestran a continuación:



**Figura 5.18:** Condiciones iniciales 10 veces más alejadas

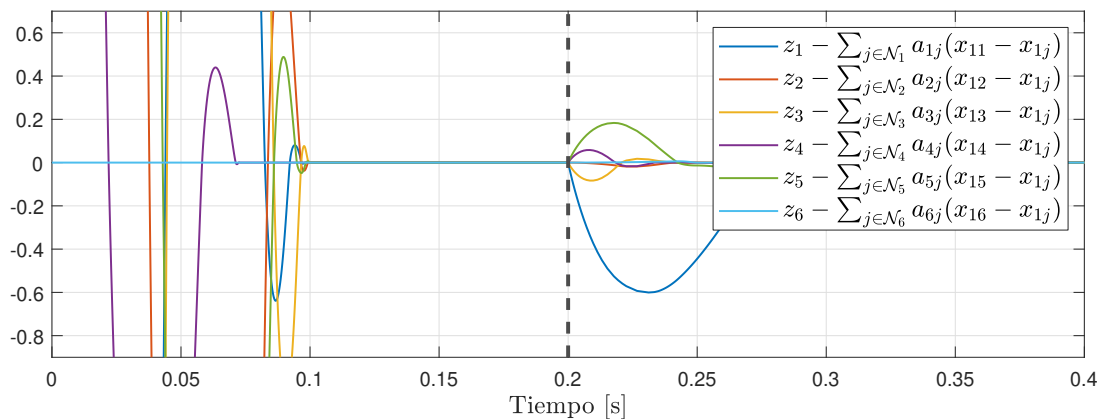
Condiciones iniciales 100 veces más alejadas, es decir:

$$\begin{aligned} x_{i1}(0) &= \{40, 20, 50, 30, 15, 15\}, \\ x_{i2}(0) &= \{35, 30, 25, 15, 5, 5\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$



## 5. APLICACIONES DE LOS DIFERENCIADORES EN PROBLEMAS DE CONSENSO CON NODOS INTEGRADORES DE SEGUNDO ORDEN PERTURBADOS

donde los términos correctivos se muestran a continuación:

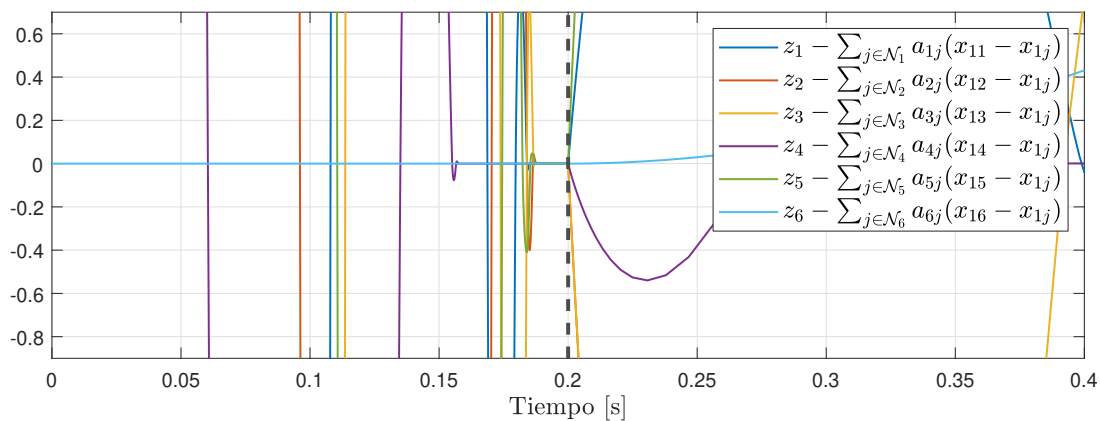


**Figura 5.19:** Condiciones iniciales 100 veces más alejadas

Condiciones iniciales 1000 veces más alejadas, es decir:

$$\begin{aligned} x_{i1}(0) &= \{400, 200, 500, 300, 150, 150\}, \\ x_{i2}(0) &= \{350, 300, 250, 150, 50, 50\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde los términos correctivos se muestran a continuación:



**Figura 5.20:** Condiciones iniciales 1000 veces más alejadas

con lo anterior se verifica el hecho de que el diferenciador siempre converge antes del tiempo  $T_c$ , por lo cual se verifica la convergencia en tiempo predefinido.

## Conclusiones

---

A lo largo de este trabajo de tesis se ha mostrado el desarrollo de este esquema de diferenciación distribuida, el cual tiene como base el trabajo en [19], cuyo objetivo de diferenciación es estimar las diferencias de posición entre los nodos y el error de seguimiento de velocidad. Los estimados serán usados en un control local el cual tiene como propósito, reducir las diferencias entre los nodos, sin embargo, asegurar la convergencia del diferenciador en el lazo cerrado, no es una tarea trivial, por lo que el control solo puede usarse cuando los términos correctivos en el diferenciador, se encuentren cercanos al cero. Conocer el instante para los términos correctivos son cercanos al cero requiere de un trabajo previo de simulación y análisis, por lo cual es necesario utilizar un diferenciador que permita definir el tiempo máximo de convergencia. El resultado principal de este trabajo de tesis, esta centrada en el desarrollo del diferenciador distribuido, el cual utiliza los escalamientos desarrollados en [11] y en [1] para cambiar del dominio temporal  $t$  al dominio temporal en  $\tau$ , por lo cual se utiliza el diferenciador de [19] en el dominio de  $\tau$ , el cual tiene una convergencia en tiempo finito, cuya convergencia en el dominio  $t$  resulta en un tiempo predefinido. Al conocer el tiempo de convergencia del diferenciador, es posible utilizar un control que utilice la información estimada, y el cual comenzara a funcionar en el tiempo  $T_c$  definido por el usuario, cabe señalar que el control es local, esto quiere decir que la señal de control en cada seguidor, no se comparte en la red.

El diferenciador distribuido en tiempo predefinido mostrado en el capítulo 4 tiene una ganancia variable, la cual depende del tiempo y tiende a infinito cuando el tiempo tiende a  $T_c$ , sin embargo, el algoritmo considera el comportamiento y cambia su valor a una constante de valor unitaria, por lo cual, una vez se llega al tiempo  $T_c$  se recupera la estructura del diferenciador en tiempo finito. Utilizar esta esquema de diferenciación distribuida, permite la utilización de controladores distintos en los nodos seguidores que resuelvan un propósito en específico, por ejemplo en nodos integradores perturbados o incluso nodos de distinto orden que pretendan lograr el consenso.

## 6. CONCLUSIONES

---

Algunas ventajas del diferenciador distribuido en tiempo predefinido:

- Conocimiento del tiempo máximo de convergencia en los términos correctivos.
- Diseño flexible del controlador para cada seguidor, debido a que es local.
- Solo se requiere del conocimiento de la posición del líder.

Desventajas:

- El término asociado al escalamiento en  $\tau$ , tiende a infinito cuando  $t$  tiende a  $T_c$ .
- El control en cada seguidor debe comentar en  $T_c$  y no antes.

El desarrollo de este trabajo deja en puerta algunos problemas que podrían resolverse en el futuro, tales como: robustificación de la topología de comunicación, consenso de nodos integradores de distinto orden y diferenciación distribuida en tiempo predefinido para nodos integradores de orden arbitrario.

## Bibliografía

---

- [1] Aldana-López, R., Gómez-Gutiérrez, D., Angulo, M. T., and Defoort, M. (2020). A methodology for designing fixed-time stable systems with a predefined upper-bound in their settling time. *arXiv preprint arXiv:2001.06707*. [7](#), [8](#), [20](#), [27](#), [30](#), [47](#)
- [2] Angulo, M. T., Moreno, J. A., and Fridman, L. (2013). Robust exact uniformly convergent arbitrary order differentiator. *Automatica*, 49(8):2489–2495. [5](#)
- [3] Bollobás, B. (2013). *Modern graph theory*, volume 184. Springer Science & Business Media. [2](#), [11](#)
- [4] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., et al. (1976). *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London. [2](#), [11](#)
- [5] Cruz-Zavala, E., Moreno, J. A., and Fridman, L. M. (2011). Uniform robust exact differentiator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11):2727–2733. [5](#)
- [6] Davila, J., Fridman, L., and Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. In *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06.*, pages 232–237. IEEE. [5](#)
- [7] Djemai, M., Manamanni, N., and Barbot, J. P. (2005). Sliding mode observer for triangular input hybrid system. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1):181–186. [5](#)
- [8] Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., and Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. In *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics*, pages 5–35. Springer. [18](#)
- [9] Fu, J. and Wang, J. (2016). Fixed-time coordinated tracking for second-order multi-agent systems with bounded input uncertainties. *Systems & Control Letters*, 93:1–12. [6](#), [7](#)
- [10] Godsil, C. and Royle, G. (2001). Algebraic graph theory new york. *Graduate Texts in Mathematics*, page 207. [11](#)

- [11] Gómez-Gutiérrez, D. (2020). On the design of nonautonomous fixed-time controllers with a predefined upper bound of the settling time. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(10):3871–3885. [7](#), [8](#), [19](#), [27](#), [30](#), [47](#)
- [Kolmogorov] Kolmogorov, A. *On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval:(Uchenye zapiski Moskovskogo gosudarstvenogo universiteta, matematika 30, 3-13 (1939))*. [5](#)
- [13] Kühnel, W. (2015). *Differential geometry*, volume 77. American Mathematical Soc. [20](#)
- [14] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *automatica*, 34(3):379–384. [5](#), [6](#), [11](#), [17](#)
- [15] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941. [5](#)
- [16] Levant, A. (2009). Non-homogeneous finite-time-convergent differentiator. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pages 8399–8404. IEEE. [5](#)
- [17] Liu, W. and Huang, J. (2017). Adaptive leader-following consensus for a class of higher-order nonlinear multi-agent systems with directed switching networks. *Automatica*, 79:84–92.
- [18] López-Caamal, F. and Moreno, J. A. (2019). Generalised multivariable supertwisting algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3):634–660. [24](#)
- [19] Meng, Z. and Lin, Z. (2014). On distributed finite-time observer design and finite-time coordinated tracking of multiple double integrator systems via local interactions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(16):2473–2489. [6](#), [8](#), [21](#), [22](#), [23](#), [25](#), [27](#), [29](#), [47](#)
- [20] Moreno, J. A. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE transactions on automatic control*, 57(4):1035–1040. [24](#)
- [21] Ni, J., Liu, L., Liu, C., and Liu, J. (2017). Fixed-time leader-following consensus for second-order multiagent systems with input delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(11):8635–8646. [7](#)
- [22] Ni, J., Liu, L., Tang, Y., and Liu, C. (2019). Predefined-time consensus tracking of second-order multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. [7](#), [15](#), [16](#)
- [23] Olfati-Saber, R. and Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(9):1520–1533. [13](#)

- [24] Pérez-Ventura, U., Mendoza-Avila, J., and Fridman, L. (forthcoming). Design of a pid-like continuous sliding mode controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 18
- [25] Polyakov, A. and Fridman, L. (2014). Stability notions and lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1831–1865. 11, 14, 15
- [26] Ren, W. and Beard, R. W. (2008). *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*. Springer. 1, 3, 11
- [27] Ren, W., Beard, R. W., and Atkins, E. M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control systems magazine*, 27(2):71–82. 1, 11, 19
- [28] Saber, R. O. and Murray, R. M. (2003). Consensus protocols for networks of dynamic agents. 3, 11, 19
- [29] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*. Springer. 11, 16, 17
- [30] Torres-González, V., Fridman, L. M., and Moreno, J. A. (2015). Continuous twisting algorithm. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5397–5401. IEEE. 17
- [31] Trujillo, M., Aldana-López, R., Gómez-Gutiérrez, D., Defoort, M., Ruiz-León, J., and Becerra, H. (2020). Autonomous and non-autonomous fixed-time leader–follower consensus for second-order multi-agent systems. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–18. 7
- [32] Zhao, Y., Duan, Z., and Wen, G. (2015). Distributed finite-time tracking of multiple euler–lagrange systems without velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(11):1688–1703. 6