



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

EXPLORANDO EL ESPACIO DE ESTADOS CUÁNTICOS:  
CONSTELACIONES DE MAJORANA, MUB'S Y TEORÍA DE  
MORSE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

VALENTINA RASCÓN BARAJAS

TUTOR

DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX. AGOSTO, 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la memoria de mis abuelos:  
Ana Luisa, Jorge, Cristina y Froylán*

# Agradecimientos

La gratitud es un sentimiento extensivo... Así que si quisiera agradecer a todas y cada una de las personas que considero que de alguna manera han contribuido en mi paso por la carrera y en su conclusión, no habría suficiente papel (o Terabytes) para abarcarlos a todos... Así que me limitaré a mencionar a aquellos que de manera más o menos directa han sido parte de todo este proceso. A los demás, sepan mi gratitud desde ahora.

Comienzo agradeciendo a mi asesor, Chryssomalis, por su guía y su paciencia y por enseñarme que los gatos siempre caen de pie.

Agradezco también a mis sinodales Andrea, Alejandro, Eduardo y Yuri por sus muy valiosos comentarios a mi trabajo.

Me gustaría desde luego darle las gracias a mi mamá, por ser una compañía incondicional y solidaria y sin lugar a duda, uno de los pilares de mi templo.

También le doy las gracias a mi papá, porque “mientras viva mi padre no estoy en el mundo sola”.

Quiero agradecer a mis hermanos Amanda, Aura y Froy porque todos en algún momento me recordaron que me gusta luchar por mis sueños hasta el fin.

Gracias a las hermanas que elegí, Astrid y Ladxi por el cariño la compañía y complicidad que con el paso de los años se ha vuelto un pilar tan importante para mí.

Estoy convencida de que la física es una carrera que goza y aprovecha mucho más cuando se comparte, y no puedo agradecer lo suficiente a mis amigos Fernando y Toñito, por todas esas madrugadas con la frente pegada a una hoja de papel y esos momentos de divina revelación.

Gracias también a Gaby, Luis, Louis, Rodrigo, Marianita, Alex, Claudia, Andrés, Yahn, Leo, Robert,

Randy, Gerardo... y todos los amigos con los que he podido compartir el placer de dedicarnos a este quehacer.

Quiero agradecer muy especialmente a mis maestros, sobre todo a Jeff, Alejandro, Héctor, Marcela, Enrique, Israel, Joel, Gaby, Vini, Pablo, Miguel, David, Atahualpa, Memo, Edward, Leo, Andrea... Porque enseñar es un acto maravilloso.

Gracias a Athena y Vero, por regalarme una familia en República Checa. Y a Hanita, Jip, Alex, Milan, Vilém, Emilie, Neal, Luz, Francesco y Silvia por hacer de mi vida en Brno uno de los periodos más felices que he vivido.

Y a Art, Toñi, Monty, Mauro, Tetsu, Warden, Jorge, Belita, Eleazar, David, Gerry... Por acompañarme a lo largo de todos estos años con tanto cariño y ser parte de mi vida.

Gracias a Gabriel por recordarme que mis sueños están hechos de plata.

Me disculpo con todos aquellos a quienes les debo también toda mi gratitud y que no encontraron sus nombres escritos aquí... Les abrazo y les debo una copa de vino.

Finalmente, agradezco también a la DGAPA-UNAM por su apoyo a través del proyecto PAPIIT IN111920.

# Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	VIII
<b>1. Conceptos fundamentales</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios proyectivos . . . . .	1
1.2. Proyección estereográfica . . . . .	2
1.3. Representación estelar de Majorana . . . . .	3
1.4. Matrices de densidad . . . . .	4
1.5. Métrica de Fubini-Study . . . . .	6
<b>2. Estados en el espacio de Hilbert y en el espacio proyectivo</b>	<b>12</b>
2.1. Estados rotados . . . . .	13
<b>3. Explorando <math>\mathbb{C}P^n</math></b>	<b>18</b>
3.1. La característica de Euler . . . . .	18
3.1.1. Encajamiento diagonal y característica de Euler . . . . .	23
<b>4. Mutually Unbiased Bases (Bases Mutuamente Indistintas o MUB's)</b>	<b>26</b>
4.1. MUB's y líneas equiangulares para espacios de Hilbert con métrica de Fubini-Study .	29
4.1.1. Ejemplo con los eigenestados de $S_y$ y $S_z$ . . . . .	30
<b>5. Teoría de Morse</b>	<b>35</b>
5.1. Descomposición de una variedad por asas o <i>handles</i> . . . . .	38
5.1.1. Descomposición por asas del espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^m$ . . . . .	42
5.1.2. Descomposición por asas del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^m$ . . . . .	45

5.2. De vuelta al espacio de estados cuánticos . . . . .	48
5.2.1. Probando con una función distinta; $(\Delta H)^2$ . . . . .	56
5.3. Enredamiento de estados simétricos . . . . .	62
5.3.1. Sistemas multipartitas . . . . .	62
5.3.2. Estados máximamente enredados . . . . .	63
5.3.3. Estados de máximo enredamiento, puntos críticos de la función $\Delta H$ y representación de Majorana . . . . .	65
<b>6. Conclusiones</b>	<b>68</b>
Apéndice . . . . .	70
A. Definiciones . . . . .	70

# Índice de figuras

1.1. Espacio Proyectivo $\mathbb{R}P^2$ . . . . .	1
1.2. Proyección estereográfica desde el polo sur de las raíces $\zeta_i \in \mathbb{C}$ del polinomio de Majorana a la esfera de Bloch. . . . .	4
1.3. Esquema de la deducción geométrica de la expresión infinitesimal de la métrica de Fubini-Study. . . . .	7
1.4. Desplazamiento de un estado $ \psi\rangle$ a otro $ \psi'\rangle$ infinitesimalmente cercano por medio de un vector tangente $ \xi\rangle$ . . . . .	10
2.1. Un estado normalizado $ \psi\rangle$ de espín 1/2 visto como punto sobre la esfera unitaria $S^3$ encajada en el espacio $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$ y los estados obtenidos al multiplicarlo por un escalar real $\lambda$ y por una fase $e^{i\alpha}$ . . . . .	13
2.2. Campo vectorial correspondiente a la rotación respecto al eje $z$ en el espacio proyectivo $\mathbb{C}P \cong S^2$ , cuyos puntos críticos son los polos de la esfera. . . . .	17
3.1. Encajamiento diagonal $\Delta M$ de una variedad $M$ unidimensional en su producto cartesiano $M \times M$ . La línea interrumpida corresponde a la perturbación infinitesimal del encajamiento $\Delta_\epsilon M$ y los puntos marcados con estrellas son los puntos de intersección de ambas variedades. . . . .	24
4.1. Diagrama de tres estados en el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$ conectados por geodésicas de la métrica de Fubini-Study. El ángulo $\Theta_{ab}$ es el ángulo entre los vectores tangentes $v_a$ y $v_b$ a las geodésicas que conectan al estado $\rho_\psi$ con $\rho_a$ y $\rho_b$ , respectivamente. . . . .	30
4.2. Ilustración de los ángulos formados por los vectores tangentes a las curvas geodésicas que conectan a los estados de espín 1/2; $\rho_{z+}$ , $\rho_{z-}$ , $\rho_{y-}$ y $\rho_{y+}$ en el espacio proyectivo $\mathbb{C}P$ . . . . .	33

5.1. Puntos críticos $p$ y $q$ de la función altura $f_h$ sobre la esfera $S^2$ con sus respectivas vecindades sombreadas. . . . .	39
5.2. Distintos tipos de <i>handles</i> para un espacio bidimensional . . . . .	41
5.3. Superficies de nivel de las funciones $f_0(x_0, y_0, x_1, y_1)$ [5.3(a) y 5.3(b)], $f_1(x_0, y_0, x_1, y_1)$ [5.3(c) y 5.3(d)] y $f_2(x_0, y_0, x_1, y_1)$ [5.3(e) y 5.3(f)] en los hiperplanos obtenidos al fijar una coordenada. . . . .	52
5.4. Superficies de nivel de la función $f_0(x_1, y_1, x_2, y_2)$ en los hiperplanos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ . En ambos casos se muestran los puntos críticos que corresponden a los tres eigenvalores del operador $S_z$ y las curvas de puntos críticos degenerados correspondiente a los puntos críticos $p_1$ [Fig. 5.4(a)] y $p_2$ [Fig. 5.4(b)] . . . . .	58
5.5. Esquema del cálculo de la medida geométrica del enredamiento de un estado $ \psi\rangle$ a través de su distancia geodésica al estado separable más cercano $ \Lambda_{ \psi}\rangle$ . . . . .	64
5.6. Representaciones de Majorana de estados simétricos máximamente enredados marcadas con estrellas ( $\star$ ) junto con sus estados separables de mínima distancia marcados con cruces ( $\times$ ) para sistemas de 2, 3, 4 y 6 <i>qbits</i> . . . . .	66
1. Diagrama de tres estados en el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$ conectados por geodésicas de la métrica de Fubini-Study. El ángulo $\Theta_{ab}$ es el ángulo entre los vectores tangentes $v_a$ y $v_b$ a las geodésicas que conectan al estado $\rho_\psi$ con $\rho_a$ y $\rho_b$ , respectivamente. . . . .	71

# Introducción

Al momento de estudiar un objeto, pareciera que mientras más extraño o misterioso sea, más nos interesa comprenderlo y sin embargo, después de mucho trabajo, pareciera que nuestro logro más importante es el habernos dado cuenta que aún falta mucho por comprender.

Una fábula presente en algunas culturas de la antigüedad describe bien esta curiosidad y cómo nuestro conocimiento en general no es más que piezas de un saber más grande. Se trata de la fábula de tres ciegos que se encuentran con un elefante. Éstos, intrigados, exploran con sus manos al extraño animal, y una vez que han terminado uno de ellos dice “un elefante es como una sogá” porque ha tocado su trompa. Otro agrega “No, un elefante es como un árbol” porque ha tocado las patas. A lo que el tercer ciego dice “No, un elefante es como un gran abanico” porque había tocado las orejas del animal.

De alguna manera los tres ciegos estaban en lo correcto en sus afirmaciones. Sin embargo, ninguna de las tres descripciones coincide realmente con lo que es un elefante en su totalidad.

En este trabajo ocurre algo parecido; nosotros seremos los ciegos y el elefante se tratará del espacio de estados cuánticos, el cual es un espacio abstracto cuya estructura global es compleja y se encuentra lejos de nuestra intuición. Queremos entonces averiguar tanto como nos sea posible su topología, ya que ésta nos servirá para comprender mejor aspectos como la cercanía entre estados cuánticos así como las transformaciones mediante las cuales podemos llevar unos a otros.

En el Capítulo 1 se asientan algunos conceptos básicos que servirán a lo largo de todo este trabajo. Estos conceptos corresponden a la definición del espacio de Hilbert de estados cuánticos y de su espacio proyectivo. Luego se explican las definiciones de la proyección estereográfica y de la representación estelar de Majorana, como un recurso sumamente útil para representar los estados que viven en nuestro espacio. Después de las matrices de densidad como coordenadas de los puntos

en el espacio proyectivo. Finalmente se explica la métrica de Fubini-Study que es la métrica natural en el espacio proyectivo que surge del producto interno hermitiano en el espacio de Hilbert.

En el Capítulo 2 se describe cómo es posible rotar a los estados cuánticos sobre el espacio en el que están representados y también los puntos que permanecen invariantes bajo algunas rotaciones.

El Capítulo 3 está dedicado a la característica de Euler, la cual será calculada para el caso del espacio proyectivo utilizando el teorema de Poincaré-Hopf. También se hace mención de la propuesta hecha por Raoul Bott para calcular la característica de Euler de una variedad en general como el grado de enlazamiento entre la variedad encajada diagonalmente en su producto cartesiano y el mismo encajamiento pero con una perturbación infinitesimal.

En el Capítulo 4 pasaremos a una sección distinta de nuestro elefante, fijándonos ahora en bases mutuamente indistintas (Mutually Unbiased Bases o MUB's) definidas en el espacio proyectivo y encontrando que dadas estas bases, pueden construirse conjuntos de líneas equiangulares, identificadas así a través de la métrica de Fubini-Study. Mencionaremos un poco de la discusión que hay actualmente en torno a los conjuntos maximales de líneas equiangulares que puede haber en un espacio de dimensión  $d$  y señalaremos algunos resultados notables.

En el Capítulo 5, dedicado a la teoría de Morse, se definen las herramientas que ésta teoría requiere, como las funciones de Morse, los ceros de estas funciones y sus respectivos índices. Se explica en qué consiste la descomposición de una variedad por asas y desarrollaremos algunos ejemplos. Con estas bases se aplica la teoría de Morse para identificar al valor esperado de un operador hermitiano no degenerado como una función de Morse, a través de la cual se calcula la descomposición por asas del espacio proyectivo. Después se busca hacer lo mismo con la función varianza, pero en este caso, se encuentra que la función posee puntos críticos degenerados y por lo tanto no es función de Morse. Sin embargo, se encuentra una forma estándar que presentan los puntos críticos de la varianza  $(\Delta H)^2$ , la cual es comparada con los resultados de [2] sobre estados máximamente enredados.

A lo largo de este trabajo, lo que se busca es explotar los aspectos geométricos y topológicos del espacio proyectivo complejo y buscar en ellos la mayor información posible sobre los estados

cuánticos que viven en él. Mostrando de esta manera la utilidad de teorías abstractas para el estudio de sistemas físicos.

# Capítulo 1

## Conceptos fundamentales

### 1.1. Espacios proyectivos

Para un espacio vectorial  $V^n$  definimos el espacio proyectivo  $VP^{n-1}$  como el espacio de todas las líneas, o bien, de todos los subespacios de dimensión 1 que pasan por el origen.

En el caso particular de  $\mathbb{R}^3$  podemos también definir estas líneas como la relación de equivalencia  $(X, Y, Z) \sim (X', Y', Z')$  si y sólo si  $\exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que  $(X, Y, Z) = \lambda(X', Y', Z')$ , como se muestra en la Figura 1.1. Por ejemplo, el espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  se define también como el espacio cociente  $\mathbb{R}^*/\sim$ , donde  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^3 - \mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}$  es el origen.

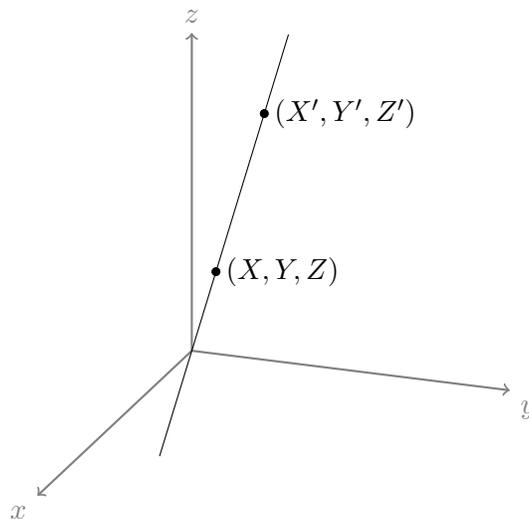


Figura 1.1: Espacio Proyectivo  $\mathbb{R}P^2$

Por otro lado, ocurre algo muy similar en el caso complejo; digamos, en el espacio complejo  $\mathbb{C}^N$  (con  $N = n + 1$ ) el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  es ahora el espacio cociente  $\mathbb{C}^N / \sim$ , de la relación de equivalencia:

$$(Z^0, Z^1, \dots, Z^n) \sim (Z'^0, Z'^1, \dots, Z'^n) \iff (Z^0, Z^1, \dots, Z^n) = \lambda(Z'^0, Z'^1, \dots, Z'^n),$$

donde  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \mathcal{O}$  y  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  y a los valores  $X^\alpha$  les llamamos coordenadas homogéneas.

En general, el espacio de Hilbert donde viven los estados cuánticos de espín  $s$  es  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{n+1}$  donde  $n = 2s$  y el espacio donde viven las clases de equivalencia bajo la relación anterior de los estados normalizados multiplicados por una fase global es el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ .

En el caso particular de los estados cuánticos de espín  $1/2$  o *qbits*, el espacio de Hilbert es  $\mathbb{C}^2$  y el espacio proyectivo es  $\mathbb{C}P^1$ , el cual como variedad es difeomorfo a la 2-esfera  $S^2$ .

## 1.2. Proyección estereográfica

La proyección estereográfica es un mapeo conforme que manda la 2-esfera  $S^2$  al plano complejo, identificando el infinito con el polo desde el cual se hace la proyección. Este mapeo se construye trazando una recta que parte del polo sur (o bien, desde el polo norte) y que intersecta a la esfera en el punto con coordenadas  $(x, y, z)$ , identificando su punto correspondiente sobre el plano complejo  $\mathbb{C}$  con coordenadas  $(X, Y)$  como su punto de intersección de la recta.

Entonces, proyectando desde el polo sur el punto con coordenadas  $(x, y, z)$  sobre la esfera tiene coordenadas  $(X, Y)$  en el plano complejo que están determinadas de la siguiente manera:

$$(X, Y) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right), \quad (1.1)$$

y de manera inversa, las coordenadas  $(x, y, z)$  de un punto sobre la esfera unitaria están dadas en términos de  $(X, Y)$  como:

$$(x, y, z) = \left( \frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \frac{1-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2} \right). \quad (1.2)$$

### 1.3. Representación estelar de Majorana

La representación estelar de Majorana consiste en un mapeo que identifica estados cuánticos de espín con conjuntos de puntos sobre la esfera unitaria (o esfera de Bloch).

Cada punto sobre la esfera, a la cual se le llamará *estrella*, representa un *qbit*.

Y, dado que un estado de espín  $s$  puede verse como un estado compuesto por  $2s$  espines  $1/2$ , entonces la representación de Majorana de un estado de espín  $s$  será un conjunto de  $2s$  puntos, al cual se le llama *constelación de Majorana*. Este mapeo fue propuesto por el físico siciliano Ettore Majorana en el año de 1932 [19].

Por lo tanto, la representación estelar es un mapeo que va de  $\mathbb{C}P^n \rightarrow (S^2 \times \dots \times S^2)/\sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia que identifica cualesquiera constelaciones que difieren sólo por una permutación entre las estrellas que las conforman, y se construye de la siguiente manera:

Dado un estado normalizado de espín  $s$  expresado en la base de eigenvectores de  $S_z$ :

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle, \quad (1.3)$$

definimos el polinomio de Majorana [19]  $p_{|\psi\rangle}(\zeta)$  como:

$$p_{|\psi\rangle}(\zeta) = \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} c_m \zeta^{s+m}, \quad (1.4)$$

el cual tiene a lo más  $n = 2s$  raíces  $\zeta_i \in \mathbb{C}$ , las cuales pueden ser mapeadas a  $2s$  puntos que llamaremos *estrellas* sobre la esfera de Bloch a través de la proyección estereográfica desde el polo sur, ver (Figura 1.2). En caso de que el polinomio tenga  $n < 2s$  raíces, la constelación de Majorana correspondiente tendrá  $2s - n$  estrellas en el polo sur.

Al expresar el estado  $|\psi\rangle$  como un polinomio de Majorana  $p_{|\psi\rangle}$ , éste puede factorizarse como

$$p_{|\psi\rangle}(\zeta) = A(\zeta - \zeta_1) \cdots (\zeta - \zeta_n).$$

Nótese que las raíces  $\zeta_i$  del polinomio  $p_{|\psi\rangle}$  son las mismas que para  $\lambda p_{|\psi\rangle}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , ya que en este

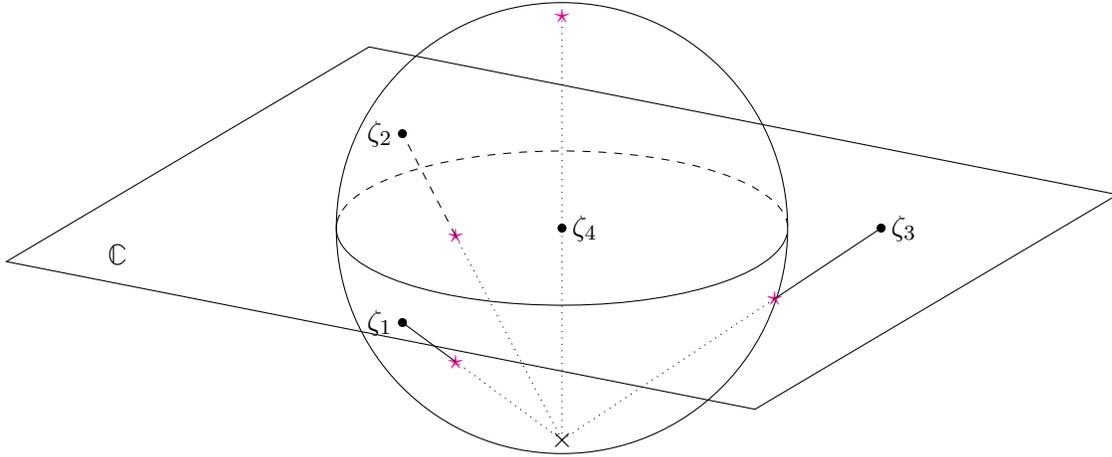


Figura 1.2: Proyección estereográfica desde el polo sur de las raíces  $\zeta_i \in \mathbb{C}$  del polinomio de Majorana a la esfera de Bloch.

caso  $\lambda$  puede factorizarse como un factor global y no altera el valor de las raíces. Por esta razón, como hemos mencionado antes, la representación de Majorana es un mapeo que va del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  a la esfera de Bloch.

## 1.4. Matrices de densidad

De la misma manera en que un estado puro arbitrario puede ser representado por un vector  $|\psi\rangle$ , también es posible representarlo como una matriz  $\rho$ , a la cual se le llama *matriz de densidad*. Esta representación resulta ser especialmente útil cuando se está trabajando con sistemas compuestos y contiene toda la información física del sistema.

Las matrices de densidad no dependen de la fase global  $\lambda$  del estado  $|\psi\rangle$  y por lo tanto representan puntos del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ . Es decir, que los estados  $|\psi\rangle$  y  $\lambda|\psi\rangle$  corresponden a la misma matriz  $\rho$  en  $\mathbb{C}P^n$ .

Para un estado puro, es decir, un estado que puede representarse con un solo ket  $|\psi\rangle$ , la matriz de densidad correspondiente  $\rho$  está dada por el operador de proyección:

$$\rho_{|\psi\rangle} \equiv |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (1.5)$$

Si tenemos una mezcla clásica de  $n$  estados puros  $|\psi^{(k)}\rangle$  la matriz de densidad correspondiente será

ahora:

$$\rho \equiv \sum_{k=1}^n \omega_k \left| \psi^{(k)} \right\rangle \left\langle \psi^{(k)} \right|, \quad (1.6)$$

donde los pesos  $\omega_k \geq 0$  satisfacen que  $\sum_{k=1}^n \omega_k = 1$ , ya que corresponden a la fracción del sistema total que se encuentra en el estado representado por  $|\psi^{(k)}\rangle$ .

Las matrices de densidad de estados puros poseen las siguientes propiedades:

1.  $\rho^\dagger = \rho$
2.  $\text{tr}(\rho) = 1$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho) &= \sum_i \langle i | \psi \rangle \langle \psi | i \rangle \\ &= \sum_i \psi_i \bar{\psi}_i \\ &= \sum_i |\psi_i|^2 = 1 \end{aligned}$$

3.  $\rho^2 = \rho$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= |\psi\rangle \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi | \\ &= |\psi\rangle \langle \psi | \\ &= \rho \end{aligned}$$

4. Si  $A$  es un operador hermitiano:  $\text{tr}(A\rho) = \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle A \rangle$

$$\begin{aligned}
\text{tr}(A\rho) &= \sum_i \langle i| A |\psi\rangle \langle \psi|i\rangle \\
&= \sum_i \langle \psi|i\rangle \langle i| A |\psi\rangle \\
&= \langle \psi| \sum_i |i\rangle \langle i| A |\psi\rangle \\
&= \langle \psi| \mathbb{1} \cdot A |\psi\rangle \\
&= \langle \psi| A |\psi\rangle \\
&= \langle A \rangle
\end{aligned}$$

## 1.5. Métrica de Fubini-Study

La métrica de Fubini-Study es la métrica natural definida en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  a partir del producto interno hermitiano en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Esta métrica fue propuesta por Guido Fubini y Eduard Study en 1904 y 1905 respectivamente [13, 31], artículos resumidos en [5], que es de donde nos basaremos para el desarrollo a continuación.

Como se ha mencionado antes, los puntos  $\rho$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  representan rectas en  $\mathcal{H}$ , donde tenemos definido un producto interno hermitiano que provee una noción de distancia entre cualesquiera dos vectores en el espacio. Entonces la pregunta es cómo obtener esta misma noción de distancia pero ahora no entre cualesquiera dos vectores, sino entre cualesquiera dos rectas, ya que son éstas son ahora los puntos en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ .

La respuesta más intuitiva es que esta distancia o medida de separación entre rectas corresponda al ángulo formado entre ellas, y éste se puede calcular para rectas *infinitesimalmente cercanas* de la siguiente manera:

Dados un vector  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  y un vector tangente<sup>1</sup>  $|v\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{H}$  sabemos que la operación  $|\psi\rangle + |v\rangle$  da como resultado un nuevo vector  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  (ver Figura 1.3). Luego, si queremos calcular la distancia angular entre los vectores  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  necesitamos saber qué tanto hay que desplazarnos desde  $|\psi\rangle$  para llegar a  $|\phi\rangle$ .

La componente de  $|v\rangle$  que es paralela a  $|\psi\rangle$  no aportará ningún desplazamiento angular, por lo que

---

<sup>1</sup>Ver definición en el Apéndice A

necesitaremos únicamente la componente ortogonal

$$|v^\perp\rangle = |v\rangle - \frac{|\psi\rangle\langle\psi|v\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}, \quad (1.7)$$

de modo que, dado que estamos trabajando con distancias angulares infinitesimalmente pequeñas entre los vectores  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$ , la magnitud de  $|v^\perp\rangle$  es una aproximación lo suficientemente confiable al ángulo  $\alpha$  entre ellos, de modo que la distancia angular pueda calcularse como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\langle v^\perp|v^\perp\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \\ &= \frac{\langle v|v\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} - \frac{\langle v|\psi\rangle\langle\psi|v\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle^2}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

que es la definición de la métrica de Fubini-Study para la magnitud de la distancia infinitesimal entre dos rectas en el espacio de Hilbert, que a su vez definen dos estados en el espacio proyectivo.

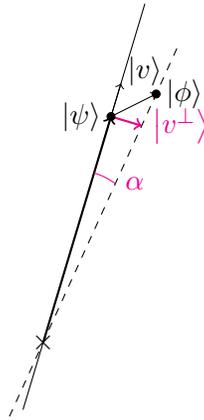


Figura 1.3: Esquema de la deducción geométrica de la expresión infinitesimal de la métrica de Fubini-Study.

Dicho en otras palabras, la expresión encontrada en la ecuación (1.8) nos dice que el cuadrado de la magnitud del vector de velocidad  $g_{\text{FS}}(v, v)$  en el espacio proyectivo que resulta de haber desplazado al vector  $|\psi\rangle$  con una velocidad  $|v\rangle$  en el espacio de Hilbert, corresponde a la distancia angular entre las rectas definidas por los estados  $|\psi\rangle$  y  $|\psi\rangle + |v\rangle = |\phi\rangle$ .

Nótese que aquí al estar trabajando en un espacio abstracto, la noción de *velocidad* corresponde únicamente al vector tangente de la curva que describe el desplazamiento del estado que se está

observando sobre el espacio en el punto de interés<sup>2</sup>.

Si queremos calcular el producto interno entre cualesquiera dos vectores  $X$  y  $Y$  en el espacio tangente  $TCP^n$ , la expresión correspondiente se puede deducir a partir de la magnitud del vector  $X + Y$  como

$$\begin{aligned} g_{\text{FS}}(X + Y, X + Y) &= g_{\text{FS}}(X, X) + g_{\text{FS}}(Y, Y) + 2g_{\text{FS}}(X, Y) \\ \Rightarrow g_{\text{FS}}(X, Y) &= \frac{1}{2} [g_{\text{FS}}(X + Y, X + Y) - g_{\text{FS}}(X, X) - g_{\text{FS}}(Y, Y)]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Por otro lado, la expresión de producto interno entre dos vectores  $X$  y  $Y$  puede deducirse de la siguiente manera:

Considérese un estado  $|\psi\rangle$ , el cual puede ser desplazado ya sea a lo largo de una dirección  $|X\rangle$  o  $|Y\rangle$ , ambas sobre el espacio tangente  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{H}$ . Para que estos desplazamientos produzcan de manera inyectiva un desplazamiento en el espacio proyectivo, es necesario considerar únicamente las direcciones cuya componente paralela a  $|\psi\rangle$  es igual a cero, lo cual corresponde a “eliminar” la dirección generada al multiplicar el estado original por una fase global. A continuación, podemos calcular el producto interno hermitiano entre ambos vectores ortogonales:

$$\begin{aligned} \langle Y^\perp | X^\perp \rangle &= \left( \langle Y | - \frac{\langle \psi | \langle Y | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right) \left( |X\rangle - \frac{|\psi\rangle \langle \psi | X \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right) \\ &= \langle Y | X \rangle - \frac{\langle Y | \psi \rangle \langle \psi | X \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | X \rangle \langle Y | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} + \frac{\langle \psi | \psi \rangle \langle Y | \psi \rangle \langle \psi | X \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle^2} \\ &= \langle Y | X \rangle - \frac{\langle Y | \psi \rangle \langle \psi | X \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nótese que el resultado de este producto no es simétrico, *i.e.*  $\langle Y^\perp | X^\perp \rangle \neq \langle X^\perp | Y^\perp \rangle$ , propiedad fundamental para una norma. Esto puede arreglarse si se considera únicamente la parte real del producto. Entonces, el producto interno entre dos vectores en  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{H}$  está dado por la métrica de Fubini-Study de la siguiente manera

$$g_{|\psi\rangle}(|X\rangle, |Y\rangle) = \text{Re} \langle Y^\perp | X^\perp \rangle = \text{Re} \left( \langle Y | X \rangle - \frac{\langle Y | \psi \rangle \langle \psi | X \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right), \quad (1.11)$$

y como se mencionó anteriormente, la métrica de Fubini-Study está bien definida en el espacio

<sup>2</sup>Para más detalles de estas definiciones, consultar el Apéndice A

tangente al espacio proyectivo  $T_\rho \mathbb{C}P^n$ , ya que se ha eliminado la dirección paralela al estado  $|\psi\rangle$  y la ecuación (1.11) no se ve afectada si se cambia el estado  $|\psi\rangle$  por  $\lambda|\psi\rangle$ , donde

$$h = |\psi\rangle \langle \xi| + |\xi\rangle \langle \psi|$$

son matrices definidas en  $T_\rho \mathbb{C}P^n$  y  $|\xi\rangle$  es cualquier vector ortogonal a  $|\psi\rangle$ .

Como es de esperarse, las matrices  $h$  deben cumplir las siguientes propiedades:

1.  $h^\dagger = h$
2.  $\text{tr}(h) = 0$

$$\begin{aligned} \text{tr}(h) &= \sum_i \langle i|\psi\rangle \langle \xi|i\rangle + \langle i|\xi\rangle \langle \psi|i\rangle \\ &= \bar{\psi}_i \xi_i + \bar{\xi}_i \psi_i \\ &= 2 \text{Re}(\langle \xi|\psi\rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.  $\rho h + h\rho = h$

$$\begin{aligned} \rho h &= |\psi\rangle \langle \psi| (|\psi\rangle \langle \xi| + |\xi\rangle \langle \psi|) \\ &= |\psi\rangle \langle \psi|\psi\rangle \langle \xi| + |\psi\rangle \langle \psi|\xi\rangle \langle \psi| \\ &= |\psi\rangle \langle \xi| \\ h\rho &= (|\psi\rangle \langle \xi| + |\xi\rangle \langle \psi|) |\psi\rangle \langle \psi| \\ &= |\psi\rangle \langle \xi|\psi\rangle \langle \psi| + |\xi\rangle \langle \psi|\psi\rangle \langle \psi| \\ &= |\xi\rangle \langle \psi| \\ \rho h + h\rho &= |\psi\rangle \langle \xi| + |\xi\rangle \langle \psi| \\ &= h \end{aligned}$$

La segunda propiedad garantiza que dada una matriz  $\rho$  en el espacio proyectivo es posible construir una nueva matriz  $\rho'$  infinitesimalmente cercana a  $\rho$  como  $\rho' = \rho + \epsilon h$ , donde  $h$  es una matriz en el espacio tangente  $T_\rho \mathbb{C}P^n$  y  $\epsilon$  es una constante infinitesimalmente pequeña. Del mismo modo que si uno quiere moverse de un estado  $|\psi\rangle$  a otro  $|\psi'\rangle$  infinitesimalmente cercano en el espacio

de Hilbert, ésto puede hacerse tomando un vector  $|\xi\rangle$  en el espacio tangente  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{H}$  de la siguiente manera (ver Figura. 1.4)

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + \epsilon|\xi\rangle,$$

con  $\epsilon$  infinitesimalmente pequeño.

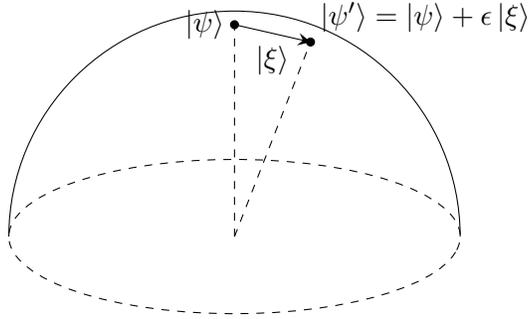


Figura 1.4: Desplazamiento de un estado  $|\psi\rangle$  a otro  $|\psi'\rangle$  infinitesimalmente cercano por medio de un vector tangente  $|\xi\rangle$ .

Y por consecuencia, si el vector tangente  $|\xi\rangle$  es un vector ortogonal, entonces la matriz de densidad  $\rho'$  correspondiente al estado  $|\psi'\rangle$  debería poder expresarse como la suma de la matriz de densidad original  $\rho$  y una matriz  $h$  en el espacio tangente del espacio proyectivo  $T_\rho\mathbb{C}P^n$ :

$$\begin{aligned} \rho' = \rho_{|\psi'\rangle} &= (|\psi\rangle + \epsilon|\xi\rangle)(\langle\psi| + \epsilon\langle\xi|) \\ &= \underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_\rho + \epsilon \underbrace{(|\xi\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\xi|)}_h \\ &= \rho + \epsilon h. \end{aligned}$$

Más adelante, será conveniente trabajar directamente en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ , por lo que será importante tener una expresión de la métrica de Fubini-Study dada por la ecuación (1.11) en términos de matrices  $h \in T_\rho\mathbb{C}P^n$ .

Sean entonces,  $|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{H}$  tales que  $\langle\psi|\xi_1\rangle = \langle\psi|\xi_2\rangle = 0$  y sean  $h_1, h_2$  sus respectivas matrices en  $T_\rho\mathbb{C}P^n$

$$\begin{aligned}
\text{tr}(h_1 h_2) &= \text{tr}((|\psi\rangle\langle\xi_1| + |\xi_1\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\xi_2| + |\xi_2\rangle\langle\psi|)) \\
&= \text{tr}(\underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_{\rho} |\xi_1\rangle\langle\xi_2| + |\xi_1\rangle\langle\xi_2|) \\
&= \langle\xi_1|\xi_2\rangle \text{tr}(\rho) + \text{tr}(|\xi_1\rangle\langle\xi_2|) \\
&= \langle\xi_1|\xi_2\rangle + \sum_i \langle i|\xi_1\rangle\langle\xi_2|i\rangle \\
&= \langle\xi_1|\xi_2\rangle + \sum_i \bar{\xi}_{2i}\xi_{1i} \\
&= \langle\xi_1|\xi_2\rangle + \langle\xi_2|\xi_1\rangle \\
&= 2 \text{Re} \langle\xi_1|\xi_2\rangle.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Por lo tanto, por la equivalencia que se ve en (1.12) entre la traza de un producto de matrices en  $T_\rho\mathbb{C}P^n$  y la parte real del producto hermitiano de dos vectores tangentes en  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{H}$ , llegamos a que la métrica de Fubini-Study (F-S) en el espacio tangente al espacio proyectivo se calcula como:

$$g_\rho(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\text{tr}(h_1 h_2). \tag{1.13}$$

Con lo expuesto en este primer capítulo se tienen las herramientas suficientes para comenzar a explorar la topología del espacio de estados cuánticos. Primero se necesitaba una representación para los estados que viven en este espacio, que para fines de este trabajo serán matrices de densidad o constelaciones de Majorana, ambas igualmente útiles, dependiendo del aspecto topológico particular que se quiera observar, como veremos en los capítulos a continuación.

Además, si bien ahora contamos con la métrica de Fubini-Study para medir distancias entre los estados, también es ilustrativo ahondar en la intuición geométrica de la que surge esta noción de distancias entre líneas infinitas.

Tener estas ideas presentes nos permite hacer uso de las herramientas matemáticas de una manera más segura y clara.

Entonces, lo siguiente será *desplazar* los estados cuánticos en el espacio proyectivo y estudiar cómo se comportan estos desplazamientos, ya que ésto estará estrechamente relacionado con la topología del espacio, que es lo que nos interesa averiguar.

## Capítulo 2

# Estados en el espacio de Hilbert y en el espacio proyectivo

Como mencionamos antes, cualquier estado de espín  $s$  en el espacio de Hilbert puede expresarse como una combinación lineal de los eigenestados del operador  $S_z$ , dada por la ecuación (1.3). Luego, si se consideran únicamente los estados normalizados, es decir, aquellos cuyos coeficientes  $c_m$  satisfagan la condición

$$\sum_{m=-s}^s |c_m|^2 = 1, \quad (2.1)$$

entonces el espacio de Hilbert queda restringido a la  $N+1$  esfera encajada en el espacio  $\mathbb{C}^{n+1} \sim \mathbb{R}^{N+2}$  con  $N = 2n = 4s$ . Además, si se multiplica al estado  $|\psi\rangle$  por una fase global  $e^{i\alpha}$ , se generará un desplazamiento del estado a lo largo de un círculo grande (geodésico) de la esfera. El caso de estados de espín  $s = 1/2$  vistos como puntos sobre la esfera unitaria encajada en  $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$  se puede observar en la ver Figura 2.1.

Si se toma la clase de equivalencia  $|\psi\rangle \sim \lambda |\psi'\rangle$  donde  $\lambda \in \mathbb{C}$ , “filtramos” las direcciones normal y a lo largo del círculo geodésico del movimiento del estado  $|\psi\rangle$  en el espacio de Hilbert y de esta manera nos estamos restringiendo al espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^n$ , con  $n = 2s$ . Cada punto en este espacio puede representarse con una constelación de Majorana, o bien, con una matriz de densidad, que por simplicidad de notación, a partir de este punto podemos simplemente escribir  $\rho = \rho_{|\psi\rangle}$ .

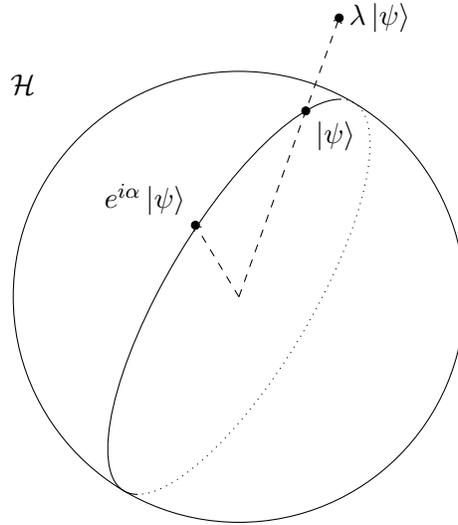


Figura 2.1: Un estado normalizado  $|\psi\rangle$  de espín 1/2 visto como punto sobre la esfera unitaria  $S^3$  encajada en el espacio  $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$  y los estados obtenidos al multiplicarlo por un escalar real  $\lambda$  y por una fase  $e^{i\alpha}$ .

## 2.1. Estados rotados

La manera operacional de aplicar una rotación a un estado  $|\psi\rangle$ , es con el operador

$$R = e^{-i\alpha\hat{n}\cdot\vec{S}},$$

donde  $\alpha$  es el ángulo y  $\hat{n}$  es el vector normal al plano de rotación, mientras que  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ , donde  $S_x, S_y, S_z$  son los operadores de espín, que en el caso de espín 1/2 corresponden a las matrices de Pauli  $\sigma_x/2, \sigma_y/2, \sigma_z/2$ . Entonces, un estado rotado, denotado por  $|\tilde{\psi}\rangle$ , es

$$|\tilde{\psi}\rangle = R|\psi\rangle = e^{-i\alpha\hat{n}\cdot\vec{S}}|\psi\rangle,$$

ésto a su vez genera una nueva matriz de densidad  $\tilde{\rho}$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= R|\psi\rangle\langle\psi|R^\dagger \\ &= R\rho R^\dagger \\ &= R\rho R^{-1}. \end{aligned}$$

Al ser rotado, el estado  $|\psi\rangle$  cambia y se mueve sobre la  $(N + 1)$ -esfera a la cual se ha restringido el espacio de Hilbert. Por lo tanto se puede parametrizar una curva sobre este espacio que también será mapeada a una curva en el espacio proyectivo, parametrizada por el ángulo de rotación, al cual ahora llamaremos  $t$ .

Asimismo, se puede calcular el vector tangente a esta curva, digamos, en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ . Por simplicidad, ésto se puede hacer alineando el sistema de coordenadas de modo que el eje de rotación quede alineado con el eje  $z$ , y el operador de rotación resulta ser:

$$R(t) = e^{-itS_z} = I - itS_z + O(t^2), \quad (2.2)$$

con

$$S_z = \sum_{m=-s}^s m |s, m\rangle \langle s, m|, \quad (2.3)$$

por lo que el vector tangente  $\dot{\rho}$  a la curva  $R(t)$  es

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left. \frac{d}{dt} R(t) \rho R(t)^{-1} \right|_{t=0} \\ &= i(\rho S_z - S_z \rho) \\ &= i[\rho, S_z]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

La siguiente pregunta que surge naturalmente es cuál es la magnitud de este vector de *velocidad de rotación*, la cual se responde calculando la norma de dicho vector utilizando la métrica de Fubini-Study dada por (1.13):

$$\begin{aligned} \|\dot{\rho}\|^2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\rho}^2) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(-(\rho S_z - S_z \rho)(\rho S_z - S_z \rho)) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(2\rho S_z \rho S_z - 2S_z^2 \rho^2) \\ &= \underbrace{\text{tr}(S_z^2 \rho)}_{\langle S_z^2 \rangle} - \underbrace{\text{tr}(\rho S_z \rho S_z)}_{\langle S_z \rangle^2} \\ &= \langle S_z^2 \rangle - \langle S_z \rangle^2 \\ &= (\Delta S_z)^2. \end{aligned}$$

Entonces, la velocidad de rotación de un estado  $\rho$  está dada por la varianza del operador  $S_z$ . Esto inmediatamente dice algo importante:

Todos los eigenestados  $\rho_m = |s, m\rangle\langle s, m|$ , con  $m \in [-s, s]$  de  $S_z$  tendrán velocidad cero bajo una rotación de este tipo.

Por lo tanto, el campo vectorial  $v(\rho) = i[\rho, S_z]$  tiene  $2s + 1$  ceros en el espacio proyectivo. Por otro lado, podemos buscar los estados que adquieren velocidad máxima bajo la rotación, que son aquellos estados

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s c_m |s, m\rangle,$$

tales que maximizan la varianza  $(\Delta S_z)^2 \equiv \langle S_z^2 \rangle - \langle S_z \rangle^2$ , es decir, lo ideal sería encontrar estados tales que simultáneamente maximicen  $\langle S_z^2 \rangle$  y minimicen  $\langle S_z \rangle^2$ , lo cual maximiza la diferencia entre estos dos términos no-negativos de  $(\Delta S_z)^2$ . Encontrar estos estados en general no es posible o es bastante complicado, sin embargo, pero en este caso resulta que sí, y los estados que maximizan:

$$\langle S_z^2 \rangle = \sum_{m=-s}^s m^2 |c_m|^2,$$

y minimizan:

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle^2 &= \left( \sum_{m=-s}^s m |c_m|^2 \right)^2 \\ &= \begin{cases} \left( \sum_{m=0}^s m (|c_{s-m}|^2 - |c_m|^2) \right)^2, & s \text{ entero} \\ \left( \sum_{m=1/2}^s m (|c_{s-m}|^2 - |c_m|^2) \right)^2, & s \text{ semientero} \end{cases} \end{aligned}$$

son aquellos  $|\psi\rangle$  tales que:

$$|c_m|^2 = \begin{cases} 1/2, & m = s, -s, \\ 0, & -s < m < s. \end{cases} \quad (2.5)$$

Dado que el número de puntos donde el campo vectorial se hace cero es finito, se puede garantizar que alrededor de cada uno de ellos se puede construir una *bola* de radio lo suficientemente pequeño

como para que todos los vectores del campo sobre ella sean distintos de cero.

Esto es, para cada  $m \in [-s, s]$ ,

$$\rho_m = |s, m\rangle \langle s, m| = |m\rangle \langle m| \quad (2.6)$$

existen  $2s$  vectores tangentes

$$h_{m,l} = |m\rangle \langle l| + |l\rangle \langle m| \quad l \in [-s, s], l \neq m \quad (2.7)$$

tales que para cada  $l$ , el punto

$$\rho_{m,l} = \rho_m + \epsilon h_{m,l} \quad (2.8)$$

bajo la acción del operador de rotación, adquiriría una velocidad:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{m,l} &= i[\rho_{m,l}, S_z] \\ &= i((\rho_m + \epsilon h_{m,l})S_z - S_z(\rho_m + \epsilon h_{m,l})) \\ &= i\epsilon \cancel{[\rho_m, S_z]}^0 + i\epsilon[h_{m,l}, S_z] \\ &= i\epsilon(h_{m,l}S_z - S_z h_{m,l}) \\ &= i\epsilon \left( \sum_{m'=-s}^s (|m\rangle \langle l| + |l\rangle \langle m|) m' |m'\rangle \langle m'| - \sum_{m'=-s}^s m' |m'\rangle \langle m'| (|m\rangle \langle l| + |l\rangle \langle m|) \right) \\ &= i\epsilon(l|m\rangle \langle l| + m|l\rangle \langle m| - m|m\rangle \langle l| - l|l\rangle \langle m|) \\ &= i\epsilon(l-m)|m\rangle \langle l| - i\epsilon(l-m)|l\rangle \langle m| \end{aligned} \quad (2.9)$$

En el caso de estados de espín  $1/2$ , el espacio proyectivo donde viven las matrices de densidad que representan dichos estados es  $\mathbb{C}P$  que es difeomorfo a la 2-esfera  $S^2$ . Al aplicar el operador  $S_z$  sobre estos estados, la operación es equivalente a rotar la esfera alrededor del eje  $z$ . Los puntos críticos en los cuales el campo vectorial generado por esta operación es cero son los polos de la esfera, mientras que los estados de máxima velocidad de rotación son aquellos que se encuentran a lo largo del ecuador, como se puede observar en la Figura 2.2.

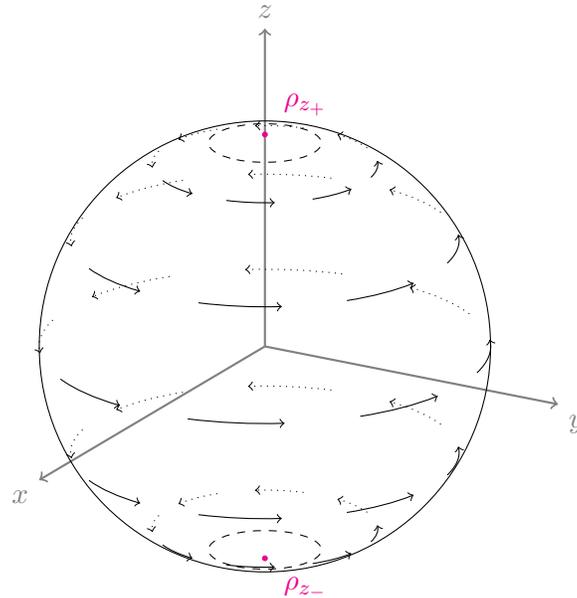


Figura 2.2: Campo vectorial correspondiente a la rotación respecto al eje  $z$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P \cong S^2$ , cuyos puntos críticos son los polos de la esfera.

En el ejemplo desarrollado en este capítulo se habló de puntos sobre el espacio proyectivo que bajo la acción de rotar respecto al eje  $z$  adquieren una velocidad cero (magnitud obtenida de la métrica de Fubini-Study, deducida en el capítulo anterior). Este concepto de estados invariantes bajo la acción de algún operador, o bien *eigenestados*, será retomada más adelante.

También en este ejemplo se puede apreciar por primera vez dentro de este trabajo que el único caso en el cual el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  puede dibujarse es para el caso del espacio de estados de espín  $1/2$ . Esto es importante porque los diagramas y los dibujos son herramientas sumamente útiles cuando se está estudiando la geometría y la topología de un objeto. Desafortunadamente, este es un recurso que se pierde rápidamente al aumentar el espín de los estados cuánticos con los que se desee trabajar.

## Capítulo 3

# Explorando $\mathbb{C}P^n$

En matemáticas se ha investigado mucho respecto a la estructura y las propiedades del espacio proyectivo complejo [4, 8], y aún así permanece siendo un campo de investigación con mucho potencial. Tener un panorama lo más amplio posible de este espacio será de gran utilidad para estudiar sistemas cuánticos.

### 3.1. La característica de Euler

La característica de Euler es un buen punto de partida para indagar respecto a la topología de un *espacio topológico*<sup>1</sup>.

Este invariante topológico fue propuesto originalmente por Leonhard Euler como una relación entre las caras (*Faces*), vértices (*Vertices*) y aristas (*Edges*) de un poliedro 2-dimensional, el cual recibe el nombre de *fórmula de Euler para poliedros*:

$$\chi(M) = V - E + F. \tag{3.1}$$

Más adelante el mismo Euler notó que cualquier variedad puede aproximarse o *triangularse* como un  $k$ -simplex y la misma relación entre caras, vértices y aristas se mantiene.

De este modo, conocer la característica de Euler de una variedad en general provee una idea, aunque sea vaga, de cómo sería ésta al triangularla como un  $k$ -simplex, algo un poco más cercano a nuestra intuición.

---

<sup>1</sup>Ver definición en el Apéndice A.

Sin embargo, la característica de Euler de los espacios proyectivos complejos  $\mathbb{C}P^n$  continúa siendo algo que no se puede intuir fácilmente. Existen pues en la actualidad muchas propuestas y discusiones respecto a cómo definir un algoritmo para calcular  $\chi(\mathbb{C}P^n)$  [8]. Éstas en general pueden ser bastante sofisticadas lo cual las vuelve poco intuitivas.

A continuación utilizaremos el teorema de Poincaré-Hopf como herramienta principal para calcular  $\chi(\mathbb{C}P^n)$ . Para esto es necesario tener presentes las siguientes definiciones:

**Definición 3.1.1.** *Se dice que una variedad  $M$  es cerrada<sup>2</sup> si es compacta y  $\partial M = 0$ .*

**Definición 3.1.2** (Grado de Brouwer de un mapeo). *Sean  $M^n$  y  $V^n$  dos variedades cerradas y orientadas,  $\varphi : M^n \rightarrow V^n$  un mapeo suave y  $\omega^n$  una  $n$ -forma en  $V^n$  tal que*

$$\int_{V^n} \omega^n = 1. \quad (3.2)$$

*Definimos el grado de Brouwer del mapeo  $\varphi$  de la siguiente manera:*

$$\deg(\varphi) = \int_{M^n} \varphi^* \omega^n. \quad (3.3)$$

**Lema 3.1.1.** *El grado de Brouwer de un mapeo  $\varphi$  no depende de la elección de  $n$ -forma con la que se calcule.*

*Demostración.* Sean  $\omega$  y  $\omega'$  dos  $n$ -formas en  $V^n$

$$\begin{aligned} \int_{M^n} \varphi^* \omega' - \int_{M^n} \varphi^* \omega &= \int_{M^n} \varphi^* (\omega' - \omega) \\ &= \int_{M^n} \varphi^* d\alpha^{n-1} \\ &= \int_{M^n} d\varphi^* \alpha^{n-1} \\ &= \int_{\partial M^n} \alpha^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

□

---

<sup>2</sup>Ver definición en el Apéndice A.

Es relevante recalcar que el grado de Brouwer es un valor entero y una característica de la clase de equivalencia de todos los  $\varphi$  en  $M^n$  que difieren por un difeomorfismo, por lo tanto no depende de la elección particular del mapeo  $\varphi$  [24].

Una forma más intuitiva de entender el grado de Brouwer es como la medida de veces que la variedad  $M^n$  envuelve a  $V^n$  bajo el mapeo  $\varphi$ .

**Definición 3.1.3** (Índice de un cero de un campo vectorial  $v$ ). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto abierto y  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un campo vectorial suave con un cero aislado  $z \in U$ . La función*

$$\bar{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

*mapea una esfera infinitesimalmente pequeña con centro en  $z$  a la esfera unitaria. Ambas esferas están orientadas como la frontera de la bola correspondiente. Al grado de Brouwer de este mapeo se le conoce como el índice  $\iota$  del campo vectorial en el cero  $z$ .*

**Teorema 3.1.1** (Poincaré-Hopf). *Sea  $M$  una variedad compacta y  $v$  un campo vectorial suave sobre ella con  $m$  ceros aislados. En caso de que  $M$  tenga frontera, el campo  $v$  debe apuntar hacia afuera sobre todos los puntos en la frontera.*

*La suma de todos los índices  $\iota_i$  del campo vectorial  $v$  es igual a la característica de Euler  $\chi$  de la variedad:*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m \iota_i.$$

*Este resultado no depende de la elección particular del campo  $v$ .*

La demostración a este teorema se puede consultar en [24].

Una primera prueba para el caso 2-dimensional de este teorema fue realizada por Poincaré en 1885. Posteriormente Hopf [15] demostró el caso generalizado en 1926 utilizando resultados previamente publicados por Brouwer y Hadamard.

Considérese el campo vectorial  $v(\rho) = i[\rho, S_z]$  definido en el capítulo anterior. Como todos los puntos  $\rho_{m,n}$  dados por la ecuación (2.8) sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  se encuentran infinitesimalmente cerca del cero  $\rho_m$  del campo vectorial, en la vecindad que los abarca a todos se puede aproximar la variedad  $\mathbb{C}P^n$  como su espacio tangente  $T_{\rho_m} \mathbb{C}P^n$ . También podemos normalizar a los vectores de

velocidad  $\dot{\rho}_{m,l}$  dados por la ecuación (2.9), llamándolos  $\tilde{h}_{m,l}$ :

$$\tilde{h}_{m,l} \equiv i |m\rangle \langle l| - i |l\rangle \langle m|. \quad (3.5)$$

Entonces el espacio tangente  $T_{\rho_m} \mathbb{C}P^n$  puede considerarse un espacio vectorial real de dimensión  $4s$  (dimensión compleja  $2s$ ) y una posible base para éste es

$$h_{m,s}, h_{m,s-1}, \dots, h_{m,-s}, \tilde{h}_{m,s}, \dots, \tilde{h}_{m,-s}, \quad (3.6)$$

en la cual omitimos las matrices  $h_{m,m}$  y  $\tilde{h}_{m,m}$ , ya que  $\tilde{h}_{m,m} = 0$  y  $\text{tr}(h_{m,m}) = 1$ , por lo tanto no pertenece al espacio tangente.

Ahora, para cada uno de los vectores de esta base, queremos saber cuál es su vector de velocidad correspondiente bajo el campo vectorial  $v(\rho)$ . Nótese que al normalizar este campo vectorial estamos definiendo un mapeo que va de la esfera infinitesimal de radio  $\epsilon$  a la esfera unitaria, ambas en el espacio vectorial  $T_{\rho_m} \mathbb{C}P^n$ .

Como veremos más adelante, la función que hace este mapeo la cual está expresada de forma explícita en la ecuación (2.9) es 1 a 1 y lineal, por lo que puede representarse con una matriz invertible  $A$  que actúa sobre los vectores de base que hemos propuesto en (3.6) para el espacio tangente de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} Ah_{m,l} &= \tilde{h}_{m,l}, \\ A\tilde{h}_{m,l} &= -h_{m,l}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde la matriz  $A$  tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{2s} \\ -I_{2s} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

y  $I_{2s}$  representa la matriz unidad de dimensión  $2s$ , de modo que la matriz  $A$  puede verse también como el producto tensorial:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_M \otimes \underbrace{I_{2s}}_N, \quad (3.9)$$

y su determinante será

$$\det A = (\det M)^n (\det N)^m, \quad (3.10)$$

donde  $m, n$  son las dimensiones de  $M$  y  $N$  respectivamente. Para este caso,

$$\begin{aligned} \det M &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \det N &= \det I_{2s} = 1 \\ \Rightarrow \det A &= 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

El determinante de esta matriz  $A$  es el factor de reescalamiento de un elemento de volumen del espacio ambiente donde está encajada la  $n$ -esfera bajo el mapeo  $A$ , que en este caso, como  $\det A = 1$ , el volumen se preserva y por lo tanto el elemento de área sobre la esfera también. El signo del determinante lo que nos dice es si la orientación de este elemento de volumen se preserva o no, es decir, *se voltea* bajo el mapeo.

En ambos espacios vectoriales se puede considerar la forma de volumen como el producto de un elemento  $dr$  radial y un elemento de área  $ds$  sobre la superficie de la esfera, que en el caso de la 2-esfera encajada en un espacio tridimensional, se vería como

$$\begin{aligned} dV &= dr ds, \\ ds &= d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

entonces, si en ambas esferas el elemento radial  $dr$  apunta siempre hacia afuera, (ya que están orientadas como la frontera de la bola correspondiente), el determinante de la matriz  $A$  nos da información sobre la orientación del elemento de área sobre la superficie de la esfera.

Por lo tanto, como el determinante de la matriz es 1, sabemos que la orientación de los elementos de área en ambas esferas bajo el mapeo definido por  $A$  es la misma.

Así podemos inmediatamente identificar el grado de Brouwer del mapeo, ya que el índice del campo vectorial en el cero  $\rho_m$  es  $\iota_m = 1$ , porque al dar una vuelta completa sobre la primera esfera, la imagen igualmente dará una sola vuelta completa en la segunda.

Finalmente, por el Teorema 3.1.1 la característica de Euler del espacio proyectivo  $\chi(\mathbb{C}P^n)$  es la suma de los índices del campo vectorial de velocidades en los puntos  $\rho_m$  donde el campo vectorial  $v(\rho)$  se hace cero. En este caso, como se ha mencionado antes son  $2s + 1$  puntos y todos ellos tienen índice 1. Por lo tanto:

$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1 \quad n = 2s. \quad (3.13)$$

Esta resulta ser una manera muy económica de calcular la característica de Euler del espacio proyectivo.

Otra forma disponible es, como mencionamos al principio de esta sección, aproximando  $\mathbb{C}P^n$  como un  $k$ -simplex de tal modo que su topología sea preservada [30], del cual es fácil calcular la característica de Euler utilizando la fórmula de Euler para poliedros dada por la ecuación (3.1). Sin embargo, esta aproximación sólo es sencilla en el caso de  $\mathbb{C}P^1$  que es difeomorfa a la 2-esfera  $S^2$  y a su vez a un 2-simplex.

### 3.1.1. Encajamiento diagonal y característica de Euler

Otra manera de calcular  $\chi(M)$ , es la propuesta por Raoul Bott en [6] y que consiste en tomar el encajamiento diagonal de la variedad  $M$  en su producto cartesiano  $\Delta : M \rightarrow M \times M$ , tal que  $\forall p \in M, \Delta(p) = (p, p)$  (véase Figura 3.1).

De modo que si a este encajamiento se le aplica una perturbación infinitesimal de orden  $\epsilon$ , obtenemos el siguiente mapeo de la variedad  $M$  al producto cartesiano  $M \times M$ :  $\Delta_\epsilon(p) = (p, p + \epsilon\eta(p))$  y a la vez estamos definiendo un campo de velocidades  $p(t) = p + t\eta(p)$  sobre  $M$ . Nótese que los puntos de intersección  $p$  en la variedad para los cuales  $\Delta(p) = \Delta_\epsilon(p)$  corresponden a los ceros del campo vectorial definido por  $\eta(p)$ .

Luego, considerando que si se tienen dos espacios de dimensiones  $m$  y  $n$  encajados en un espacio ambiente de dimensión  $k$ , en el caso genérico, la intersección de estos espacios será un subespacio

de dimensión  $m + n - k$ , entonces la intersección de los espacios  $\Delta M$  y  $\Delta_\epsilon M$  son subespacios de dimensión 0, es decir, puntos que corresponden a los puntos fijos mencionados anteriormente.

Finalmente, podemos asignar índices  $+1$  o  $-1$  a estos puntos de intersección dependiendo de la orientación en la cual se intersecan los espacios. Ésto también nos da información sobre qué tan enlazadas están las variedades  $\Delta M$  y  $\Delta_\epsilon M$ . Este grado de entrelazamiento corresponde a la característica de Euler de la variedad  $\chi(M)$ , en otras palabras, si  $\chi(M)$  es distinto de cero  $\Delta M$  y  $\Delta_\epsilon M$  no pueden separarse porque han quedado entrelazadas.

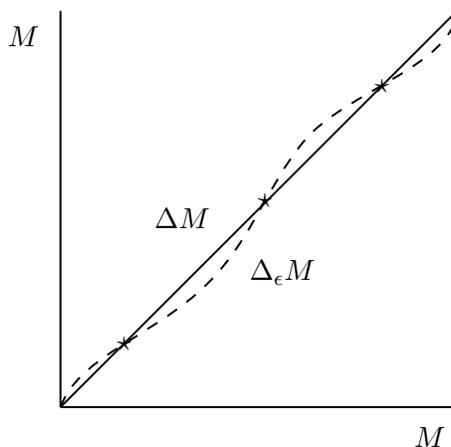


Figura 3.1: Encajamiento diagonal  $\Delta M$  de una variedad  $M$  unidimensional en su producto cartesiano  $M \times M$ . La línea interrumpida corresponde a la perturbación infinitesimal del encajamiento  $\Delta_\epsilon M$  y los puntos marcados con estrellas son los puntos de intersección de ambas variedades.

Lo primero que podemos concluir de lo que se ha expuesto en este capítulo es que no existe una manera única de responder a una pregunta. En este caso, se buscó calcular la característica de Euler del espacio proyectivo complejo utilizando el Teorema de Poincaré-Hopf, y se mencionaron los métodos de triangulación de la variedad como un  $k$ -simplex y el encajamiento diagonal como otros posibles acercamientos.

De estas menciones se puede notar que en efecto, hay métodos más efectivos que otros, por ejemplo, dado que la fórmula de Euler sólo es válida para poliedros 2-dimensionales, el método de triangulación sólo puede usarse si la dimensión real de la variedad es 2, y por lo tanto no es tan útil como el Teorema de Poincaré-Hopf para calcular  $\chi(M)$ .

Por otro lado, si bien no ahondamos en el método propuesto por Raoul Bott, lo identificamos como una propuesta sumamente atractiva e interesante como un proyecto de trabajo futuro.

Finalmente, poder discernir entre los distintos métodos que se pueden encontrar para resolver un problema en particular permite abordarlo de una manera más eficiente obteniendo resultados más sólidos.

## Capítulo 4

# Mutually Unbiased Bases (Bases Mutuamente Indistintas o MUB's)

En el espacio de Hilbert de estados cuánticos y en el espacio proyectivo podemos construir objetos que no serían posibles en el espacio euclidiano. Las bases mutuamente imparciales o MUB's son uno de estos objetos.

Se dice que dos bases ortonormales en un espacio de Hilbert son mutuamente imparciales (MU) si el módulo al cuadrado del producto interno entre cualquier pareja de estados de ambas bases es independiente de los estados elegidos en cada una,

$$|\langle e_i | f_j \rangle|^2 = \frac{1}{N} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.1)$$

Pensando en el espacio de Hilbert  $\mathbb{C}^N$ , dos bases ortonormales son MU si la probabilidad de transición de un estado  $|e_i\rangle$  de la primera base a un estado  $|f_j\rangle$  de la segunda es la misma sin importar qué par de estados se elijan.

Ejemplos naturales de MUB's en la teoría cuántica para estados de espín son las bases de eigenestados de los operadores  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$ , mostradas como matrices cuyas columnas son los vectores de base, tres MUB's para el espacio de Hilbert de estados de espín 1/2 serían:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.2)$$

Nótese aquí que las matrices formadas por los MUB's son matrices unitarias.

Una pregunta natural que surge al hablar de MUB's es ¿cuál es el conjunto maximal de MUB's que puede haber en un espacio de Hilbert de dimensión  $d$ ? La respuesta es conocida para dimensiones bajas  $d = 1, 2, 3, 4, 5$  [7] y después comienza una discusión amplia y algunas preguntas abiertas para los casos  $d \geq 6$ . En particular, en [36] Wootters y Fields encontraron un método para construir estos conjuntos maximales de MUB's para espacios  $\mathbb{C}^N$  cuando  $N$  es potencia de algún número primo  $p$ . No se sabe si los ejemplos de MUB's que se explican en [7] son los únicos que hay, o sí existen conjuntos inequivalentes de MUBs.

Por otro lado, un problema similar al de la construcción de MUB's en un espacio es el de encontrar un conjunto  $S$  de líneas equiangulares, las cuales pueden ser representadas por vectores unitarios  $v_i$  en un espacio métrico y entre cualesquiera dos líneas del conjunto se tiene siempre la misma distancia entre ellas. Esto es, que para cualesquiera  $v_i, v_j \in S$  con  $i \neq j$ :

$$\langle v_i | v_j \rangle = \alpha, \quad (4.3)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo formado entre las líneas generadas por los vectores  $v_i$  y  $v_j$ .

De entrada, en  $\mathbb{R}^n$  se puede asegurar que cualquier subconjunto de  $d < n$  elementos de una base ortonormal, es un conjunto de líneas equiangulares... Pero ¿es posible tener  $d > n$  líneas equiangulares en un espacio  $\mathbb{R}^n$ ? Este problema, aunque suena elemental, dista mucho de serlo y el número máximo de líneas equiangulares que puede haber en un espacio se mantiene como un problema abierto hasta el día de hoy [3].

Desde luego, la cardinalidad  $M(n)$  del conjunto maximal de líneas equiangulares depende de la dimensión  $n$ . Sin embargo, sólo se ha podido encontrar una cota superior para espacios de dimensiones bajas.

El primero en abordar formalmente este problema fue Johannes Haantjes en 1948, quien encontró

$M(n)$  para  $n = 2, 3$  [14]. Más adelante, J.H. Van Lint y J.J. Seidel [18] continuaron estudiando el problema y hallaron los valores de  $M(n)$  para  $4 \leq n \leq 7$ . Gerzon encontró después una cota superior de  $M(n)$  para  $n$  general (ver [17], Teorema 3.5):

**Teorema 4.0.1** (Gerzon). *Si hay  $M$  líneas equiangulares en un espacio  $\mathbb{R}^n$ , entonces:*

$$M \leq \frac{n(n+1)}{2}, \tag{4.4}$$

La cota dada por el Teorema 4.0.1 solamente puede ser alcanzada en espacios de dimensiones bajas ( $n \leq 43$ ).

Por otro lado, no se puede ignorar también la dependencia del ángulo que subtienden las líneas en la cardinalidad del conjunto de las mismas. De ahí que Neumann [3], mostró el siguiente resultado fundamental:

**Teorema 4.0.2** (Neumann). *Si se tienen  $d$  líneas equiangulares en  $\mathbb{R}^n$  con ángulo común  $\arccos \alpha$  y  $d > 2n$  entonces  $1/\alpha$  es un entero impar.*

Para los casos en que  $n = 2, 3$  la condición de que  $d > 2n$  no se satisface ya que la cantidad de líneas equiangulares es  $d = 3$  y  $6$  respectivamente. El primer caso en donde se aprecia el teorema de Neumann es cuando  $n = 6$ ,  $d = 16$  y  $1/\alpha = 3$ .

$n$	$d = M(n)$	$1/\alpha$
2	3	2
3	6	$\sqrt{5}$
4	6	$3, \sqrt{5}$
5	10	3
6	16	3
$7 < n < 13$	16	3

Tabla 4.1: Resultados de la cota de Gerzon  $M(n)$  y el valor asociado a la distancia angular entre las líneas  $1/\alpha$ .

En el caso de  $\mathbb{R}^2$  en el que se tienen hasta 3 líneas equiangulares, tenemos que  $d < 4$  y el ángulo en común es siempre  $\pi/3$ , por lo tanto  $\alpha = 1/2$ .

## 4.1. MUB's y líneas equiangulares para espacios de Hilbert con métrica de Fubini-Study

Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos bases MU del espacio de Hilbert  $\mathbb{C}^N$ , donde el estado  $|\psi\rangle$  pertenece a la primera base  $H_1$  y los estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  pertenecen a  $H_2$ . En este espacio existe una curva geodésica de la métrica de Fubini-Study que conecta a cualquier estado  $|\psi\rangle$  con cualquier otro  $|\phi\rangle$ , dada por [10]:

$$|c_{\psi\phi}(t)\rangle = (\cos t - \cot \omega_{\psi\phi} \sin t) |\psi\rangle + e^{i\eta_{\psi\phi}} \sin t \csc \omega_{\psi\phi} |\phi\rangle, \quad (4.5)$$

donde

$$\langle\psi|\phi\rangle \equiv \cos \omega_{\psi\phi} e^{i\eta_{\psi\phi}}, \quad (4.6)$$

Esta curva puede ser proyectada en  $\mathbb{C}P^n$  como  $\rho_{c_{\psi\phi}(t)} = |c_{\psi\phi}(t)\rangle \langle c_{\psi\phi}(t)|$ , y también puede calcularse su vector tangente  $\dot{\rho}_{c_{\psi\phi}(t)} = \partial_t \rho_{c_{\psi\phi}(t)}|_{t=0}$ :

$$\dot{\rho}_{c_{\psi\phi}}(0) = -2 \cot \omega_{\psi\phi} \rho_{\psi} + \csc \omega_{\psi\phi} (e^{i\eta_{\psi\phi}} |\phi\rangle \langle\psi| + e^{-i\eta_{\psi\phi}} |\psi\rangle \langle\phi|). \quad (4.7)$$

Entonces, para los estados  $|\psi\rangle$ ,  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  mencionados anteriormente, que ahora están representados por matrices  $\rho_{\psi}$ ,  $\rho_a$  y  $\rho_b$  en el espacio proyectivo, si se definen  $v_a \equiv \dot{\rho}_{c_{\psi a}}(0)$  y  $v_b \equiv \dot{\rho}_{c_{\psi b}}(0)$  como los vectores tangentes a las geodésicas que conectan a  $\rho_{\psi}$  con  $\rho_a$  y  $\rho_b$  respectivamente (ver Figura 4.1), el ángulo  $\Theta_{ab}$  formado por ellos dado por la métrica de Fubini-Study es:

$$\begin{aligned} \Theta_{ab} &= \arccos \left( \frac{1}{2} \text{Tr}(v_a v_b) \right) \\ &= \arccos \left( \frac{\cos \omega_{ab} \cos \Omega + \cos \omega_{a\psi} \cos \omega_{b\psi}}{\sin \omega_{a\psi} \sin \omega_{b\psi}} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $\Omega = \eta_{ab} + \eta_{b\psi} + \eta_{\psi a}$  es la fase del invariante de Bargmann [10] de los tres estados involucrados:

$$\langle a|b\rangle \langle b|\psi\rangle \langle\psi|a\rangle = R e^{i\Omega}, \quad (4.9)$$

con  $R, \Omega \in \mathbb{R}$ .

Lo siguiente que uno podría naturalmente preguntarse es si dos bases MU generan un conjunto de líneas equiangulares. La respuesta es que sí y puede verse fácilmente de la ecuación (4.8). Si  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$  forman una base ortonormal del espacio de Hilbert, y  $|\psi\rangle$  es un estado que pertenece a

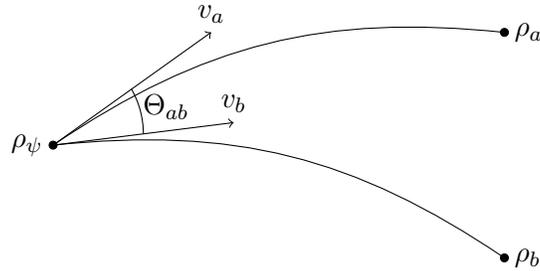


Figura 4.1: Diagrama de tres estados en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  conectados por geodésicas de la métrica de Fubini-Study. El ángulo  $\Theta_{ab}$  es el ángulo entre los vectores tangentes  $v_a$  y  $v_b$  a las geodésicas que conectan al estado  $\rho_\psi$  con  $\rho_a$  y  $\rho_b$ , respectivamente.

otra base que es MU respecto a ésta, podemos primero notar que, por ser MUB's, los ángulos que subtienden son iguales, por lo que

$$\omega_{\psi a} = \omega_{\psi b} = \omega_{\psi c} \equiv \omega_\psi, \quad (4.10)$$

y por ser  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$  elementos de una base ortonormal, entonces

$$\omega_{ab} = \omega_{bc} = \omega_{ac} = \pi/2, \quad (4.11)$$

que al sustituir estas relaciones en  $\Theta_{ab}$  y  $\Theta_{bc}$  dadas por (4.8) se puede ver que

$$\Theta_{ab} = \Theta_{bc} = \arccos(\cot^2 \omega_\psi). \quad (4.12)$$

#### 4.1.1. Ejemplo con los eigenestados de $S_y$ y $S_z$

Para el caso de espín 1/2, el espacio de Hilbert donde viven los espinores es  $\mathbb{C}^2$  y las posibles bases son las generadas por los eigenestados de los operadores  $S_y$  y  $S_z$ :

$$H_{S_y} = \{|y_+\rangle, |y_-\rangle\}, \quad H_{S_z} = \{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}. \quad (4.13)$$

Donde:

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Sin embargo, será conveniente trabajar directamente en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P$  entonces, construimos las matrices de densidad

$$\rho_{y_+} = |y_+\rangle \langle y_+| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{y_-} = |y_-\rangle \langle y_-| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\rho_{z_+} = |z_+\rangle \langle z_+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{z_-} = |z_-\rangle \langle z_-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Entonces, comenzando por calcular el ángulo que se forma al conectar al estado  $|z_+\rangle$  con  $|y_+\rangle$  y con  $|y_-\rangle$  primero hay que encontrar  $\omega_{z_+y_+}$  y  $\omega_{z_+y_-}$  utilizando la ecuación (4.6):

$$\langle y_+ | z_+ \rangle = \langle y_- | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \omega_{z_+y_+} = \omega_{z_+y_-} = \frac{\pi}{4} \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow \eta_{z_+y_+} = \eta_{z_+y_-} = 0. \quad (4.20)$$

Sustituyendo estos resultados en (4.5) se tiene que la curva que conecta al estado  $\rho_{z_+}$  con  $\rho_{y_+}$  en el espacio de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  es

$$|c_{z_+y_+}(t)\rangle = (\cos t - \sin t) |z_+\rangle + \sqrt{2} \sin t |y_+\rangle. \quad (4.21)$$

La cual en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P$  corresponde a la matriz

$$\begin{aligned} \rho_{c_{z_+y_+}}(t) &= (\cos t - \sin t)^2 \rho_{z_+} + \sqrt{2} \sin t (\cos t - \sin t) (|z_+\rangle \langle y_+| + |y_+\rangle \langle z_+|) + 2 \sin^2 t \rho_{y_+} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 t & -i \cos t \sin t \\ i \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde

$$|z_+\rangle\langle y_+| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |y_+\rangle\langle z_+| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

y cuyo vector tangente es

$$\dot{\rho}_{c_{z_+y_+}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Luego, se repite el mismo procedimiento para calcular ahora la curva que conecta a  $|z_+\rangle$  con  $|y_-\rangle$ :

$$|c_{z_+y_-}(t)\rangle = (\cos t - \sin t)|z_+\rangle + \sqrt{2}\sin t|y_-\rangle. \quad (4.25)$$

Su matriz de densidad en el espacio proyectivo:

$$\rho_{c_{z_+y_-}}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t & i \cos t \sin t \\ -i \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

y finalmente, su vector tangente:

$$\dot{\rho}_{c_{z_+y_-}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Entonces, se puede calcular el ángulo entre los vectores  $\dot{\rho}_{c_{z_+y_+}}(0) \equiv v_+$  y  $\dot{\rho}_{c_{z_+y_-}}(0) \equiv v_-$  utilizando la ecuación (4.8):

$$\Theta_{v_+v_-} = \pi, \quad (4.28)$$

lo cual hace sentido ya que en el caso de espín 1/2, el espacio proyectivo es la 2-esfera  $S^2$  y los estados  $\rho_{z_+}$ ,  $\rho_{y_+}$  y  $\rho_{y_-}$  son los vectores unitarios que apuntan en las direcciones paralelas a los ejes  $Z$  y  $Y$  respectivamente. Por lo que el ángulo formado entre ellos, mejor que sea  $\pi$  (ver Figura 4.2).

Del mismo modo que se hizo anteriormente, se pueden encontrar las curvas geodésicas que conectan al estado  $\rho_{z_-}$  con  $\rho_{y_+}$  y  $\rho_{y_-}$ , sus vectores tangentes y el ángulo entre ellos, que se esperaría que fuera también  $\pi$  dada la geometría del espacio proyectivo y las posiciones de los eigenestados

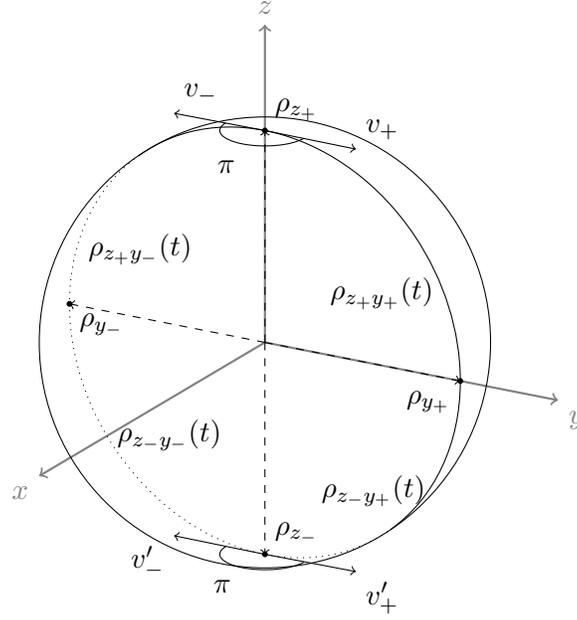


Figura 4.2: Ilustración de los ángulos formados por los vectores tangentes a las curvas geodésicas que conectan a los estados de espín  $1/2$ ;  $\rho_{z_+}$ ,  $\rho_{z_-}$ ,  $\rho_{y_-}$  y  $\rho_{y_+}$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P$ .

con los que se está trabajando:

$$\langle y_+ | z_- \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad \langle y_- | z_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow \omega_{z_- y_+} = \omega_{z_- y_-} = \frac{\pi}{4}, \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow \eta_{z_- y_+} = \frac{3\pi}{2}, \quad \eta_{z_- y_-} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.31)$$

Entonces, las curvas que conectan a  $|z_- \rangle$  con  $|y_+ \rangle$  y  $|y_- \rangle$  en el espacio de Hilbert son:

$$|c_{z_- y_+}(t)\rangle = (\cos t - \sin t) |z_- \rangle + i\sqrt{2} \sin t |y_+ \rangle, \quad (4.32)$$

$$|c_{z_- y_-}(t)\rangle = (\cos t - \sin t) |z_- \rangle - i\sqrt{2} \sin t |y_- \rangle. \quad (4.33)$$

Sus matrices de densidad correspondientes en el espacio proyectivo:

$$\begin{aligned} \rho_{z_- y_+}(t) &= (\cos t - \sin t)^2 \rho_{z_-} - i\sqrt{2} \sin t (\cos t - \sin t) |y_+ \rangle \langle z_-| \\ &\quad + i\sqrt{2} \sin t (\cos t - \sin t) |z_- \rangle \langle y_+| + 2 \sin^2 t \rho_{y_+} \\ &= \begin{pmatrix} \sin 2t & -i \cos 2t \\ i \cos 2t & -2 \cos t \sin t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{z_-y_-}(t) &= (\cos t - \sin t)^2 \rho_{z_-} + i\sqrt{2} \sin t (\cos t - \sin t) |y_+\rangle \langle z_-| \\
 &\quad - i\sqrt{2} \sin t (\cos t - \sin t) |z_-\rangle \langle y_+| + 2 \sin^2 t \rho_{y_+} \\
 &= \begin{pmatrix} \sin 2t & i \cos 2t \\ -i \cos 2t & -2 \cos t \sin t \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

donde ahora se están utilizando las matrices:

$$|z_-\rangle \langle y_{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix}, \quad |y_{\pm}\rangle \langle z_-| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

finalmente, los vectores tangentes son:

$$v'_+ \equiv \dot{\rho}_{c_{z_-y_+}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

$$v'_- \equiv \dot{\rho}_{c_{z_-y_-}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Y dado que  $v_+ = v'_-$  y  $v_- = v'_+$ , es inmediato que el ángulo entre  $v'_+$  y  $v'_-$  es  $\pi$ .

Con este desarrollo hemos podido comprobar que las geodésicas que conectan cualesquiera dos elementos de dos MUB's además de tener siempre la misma longitud (por definición de MUB's) también se puede garantizar que entre cualesquiera dos de estas geodésicas se tendrá siempre el mismo ángulo. Dicho de otra manera, el conjunto de geodésicas que conectan dos bases MUB's, es un conjunto de líneas equiangulares.

Ahora, la pregunta natural que surge de esto es ¿se puede afirmar lo mismo pero al revés? Es decir, dada una colección de líneas equiangulares entre sí, ¿se puede afirmar que todas tienen la misma longitud?.

Esta pregunta es una motivación para trabajo futuro, y por el momento sabemos que en el caso que acabamos de resolver con las geodésicas que conectan a los eigenestados de  $S_y$  y  $S_z$ , los cuales ya sabemos que son equidistantes, podemos ver que tales geodésicas son equiangulares.

## Capítulo 5

# Teoría de Morse

En topología diferencial, la teoría de Morse [22] investiga el cómo se relaciona el comportamiento de funciones diferenciables sobre una variedad con los aspectos topológicos de la misma. Es decir, se estudia la topología de una variedad a través de funciones diferenciales definidas sobre ella.

Uno podría imaginarse esto como el estudio de la forma de un objeto, por ejemplo una esfera o una dona, vertiendo algún líquido sobre de ella e inferir su topología a través de las trayectorias del líquido al descender, por acción gravitatoria, a lo largo del objeto.

Desde luego, las propiedades topológicas de la variedad  $M$  en cuestión no deben depender de la elección de la función que se elija. Sin embargo, las funciones que servirán para este fin deben de cumplir con algunas características que las identifican como *funciones de Morse* a través de sus puntos críticos de una función, comenzando por el caso más simple; para una función suave  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $x_0$  es punto crítico de  $f$  si  $f'(x_0) = 0$ . Luego, los puntos críticos pueden a su vez clasificarse en dos tipos; degenerados, si su segunda derivada es  $f''(x_0) = 0$  y no-degenerados, si  $f''(x_0) \neq 0$ .

Para nuestros objetivos, no sólo usaremos funciones reales de una sola dimensión, sino que es necesario generalizar estos conceptos para funciones en variedades de dimensión  $n$ , para lo cual se tienen las siguientes definiciones:

**Definición 5.0.1** (Punto crítico). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, se dice que el punto  $p_0 =$*

$(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$  es punto crítico de  $f$  si:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p_0) = 0 \quad \forall i \in 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Luego, para caracterizar si tales puntos críticos son degenerados o no, haremos uso de la matriz hessiana de la función  $f$ :

$$H_{fij}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p_0). \quad (5.2)$$

Entonces podemos clasificar los puntos críticos  $p_0$  de la función  $f$  de la siguiente manera:

**Definición 5.0.2** (Punto crítico no-degenerado). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y  $p_0$  un punto crítico, decimos que es no-degenerado si*

$$\det H_f(p_0) \neq 0 \quad (5.3)$$

**Definición 5.0.3** (Funciones de Morse). *Sea  $f$  una función suave sobre una variedad  $M$ . Se dice que  $f$  es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no-degenerados.*

De aquí es importante destacar una característica del determinante de la matriz hessiana: el carácter degenerado o no-degenerado de los puntos críticos de la función  $f$ . Éste no depende del sistema de coordenadas que se elija, ya que se puede cambiar de una a otra de la siguiente manera:

**Lema 5.0.1.** *Sea  $p_0$  un punto crítico de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x^1, \dots, x^n)$  y  $(y^1, \dots, y^n)$  dos sistemas de coordenadas distintos para  $\mathbb{R}^n$ , y  $H_f(p_0)$  y  $H'_f(p_0)$  las matrices hessianas de  $f$  en cada sistema coordinado, respectivamente. Las matrices  $H_f(p_0)$  y  $H'_f(p_0)$  están relacionadas de la siguiente manera:*

$$H'_f(p_0) = J^T(p_0)H_f(p_0)J(p_0), \quad (5.4)$$

donde  $J(p_0)$  es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas de  $x^i$  a  $y^i$ :

$$J_{ij}(p_0) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p_0). \quad (5.5)$$

**Teorema 5.0.1** (Lema de Morse). *Sea  $p_0$  un punto crítico no degenerado de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, es posible elegir coordenadas apropiadas  $(X, Y)$  en una vecindad con centro en  $p_0$  de modo*

que la función  $f$  al ser expresada en términos de estas coordenadas tome alguna de las siguientes tres formas:

I.  $f = X^2 + Y^2 + c,$

II.  $f = X^2 - Y^2 + c,$

III.  $f = -X^2 - Y^2 + c,$

donde  $c$  es una constante ( $c = f(p_0)$ ) y  $p_0$  es el origen  $p_0 = (0, 0)$ .

La demostración al Teorema 5.0.1 es inmediata del Lema 5.0.1, ya que la condición de que  $p_0$  es un punto crítico no degenerado garantiza que la matriz hessiana es una matriz simétrica y por lo tanto, diagonalizable. Por lo que la matriz  $J$  que la diagonalice, corresponde a la matriz jacobiana del cambio de coordenadas deseado. Sin embargo, también es posible construir la base  $(X, Y)$  sin recurrir directamente a la matriz jacobiana. Tal demostración se puede encontrar en [22].

**Definición 5.0.4** (Índice de un punto crítico no-degenerado). *Sea  $p_0$  un punto crítico no-degenerado de una función  $f$  de dos variables y sean  $(x, y)$  coordenadas en una vecindad de  $p_0$  tales que  $f$  adquiere la forma estándar dada por el Teorema 5.0.1. Entonces, podemos definir el índice del punto crítico  $p_0$  como 0, 1 o 2 respectivamente si  $f = x^2 + y^2 + c$ ,  $f = x^2 - y^2 + c$  o  $f = -x^2 - y^2 + c$ . Dicho de otra forma, el índice del punto crítico  $p_0$  corresponde al número de signos menos de su forma estándar.*

Desde luego, nos interesa que todo lo que hemos mencionado hasta ahora sea válido no sólo para funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sino en general para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Así que reformularemos el lema de Morse en esta versión generalizada:

**Teorema 5.0.2** (Lema de Morse para dimensión  $m$ ). *Sea  $p_0$  un punto crítico no-degenerado de la función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, podemos elegir coordenadas  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  en una vecindad alrededor del punto  $p_0$  de modo que la representación de  $f$  respecto a estas coordenadas tenga la siguiente forma estándar:*

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + c, \quad (5.6)$$

donde  $p_0$  corresponde al origen  $(0, 0, \dots, 0)$  y  $c$  es una constante.

La demostración de la versión generalizada del lema de Morse, es completamente análoga a la correspondiente al caso cuando  $f$  es una función de dos variables, e igualmente, es inmediata del Lema 5.0.1.

**Definición 5.0.5** (Índice de un punto crítico no-degenerado de dimensión  $n$ ). *Al número  $\lambda$  del teorema anterior se le conoce como el índice del punto crítico  $p_0$ .*

Tal índice es un número entero entre 0 y  $m$ . Dicho de otro modo, el índice de un punto crítico corresponde al número de variables con signo negativo en la forma estándar dada por el Teorema 5.0.2.

Este índice también corresponde al número de eigenvalores negativos de la matriz hessiana  $H_f(p_0)$ , lo cual nos da la dimensión del subespacio de  $T_{p_0}M$  en la cual dicha matriz es negativa definida.

La teoría de Morse consiste en estudiar la topología de la variedad  $M$  a través de los puntos críticos de una función de Morse  $f$  definida sobre ella. Para esto será conveniente mencionar un par de resultados adicionales respecto a los puntos críticos:

**Lema 5.0.2.** *Los puntos críticos  $p_i$  de una función de Morse  $f$  sobre una variedad  $M$  están aislados [9].*

**Corolario 5.0.2.1.** *Una función de Morse  $f$  sobre una variedad compacta  $M$  tiene un número finito de puntos aislados  $p_i$ .*

## 5.1. Descomposición de una variedad por asas o *handles*

A partir de este punto, asumiremos que las variedades con las que trabajamos son compactas, de modo que podemos garantizar que por el Corolario 5.0.2.1, cualquier función de Morse sobre la variedad  $M$  tendrá una cantidad finita de puntos críticos aislados  $p_i$  y por lo tanto, alrededor de cada uno de ellos podemos tomar una vecindad suficientemente cercana tal que no haya ningún otro punto crítico en ella.

A estas vecindades alrededor de los puntos críticos las conoceremos como asas o *handles* de la variedad.

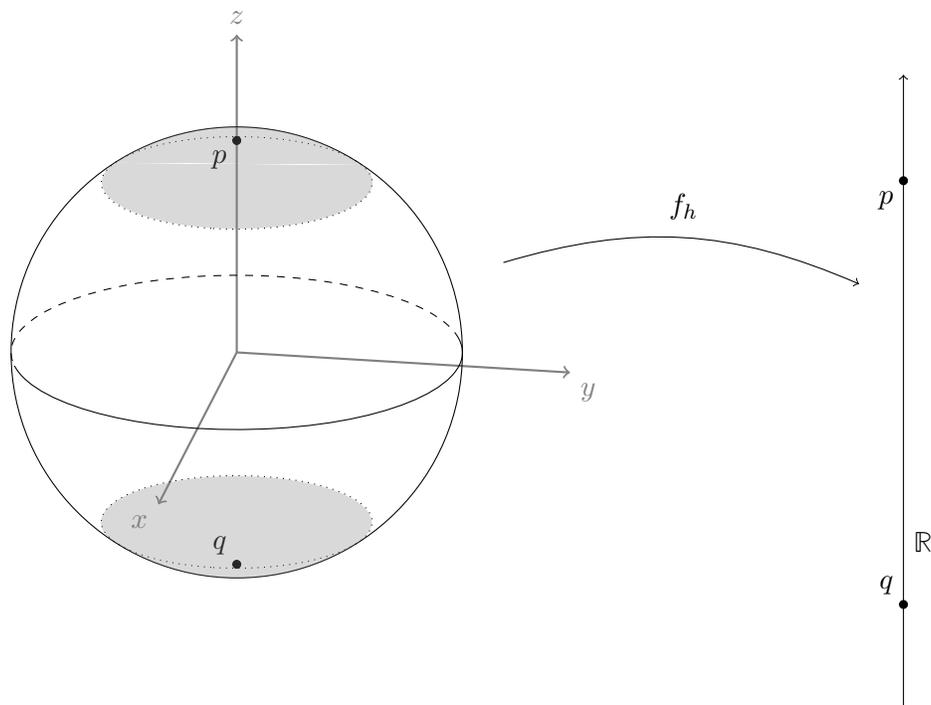


Figura 5.1: Puntos críticos  $p$  y  $q$  de la función altura  $f_h$  sobre la esfera  $S^2$  con sus respectivas vecindades sombreadas.

Las funciones de Morse son el pilar de esta teoría, por lo tanto es importante asegurarnos que siempre es posible definir estas funciones en cualquier variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $m$ .

**Teorema 5.1.1** (Existencia de las funciones de Morse). *Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión  $m$  y sea  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave definida sobre  $M$ . Existe una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  arbitrariamente cercana a  $g$  (véase [22] para más detalles).*

La demostración de este teorema también puede consultarse en [22].

Ya teniendo garantizada la existencia de funciones de Morse sobre nuestras variedades, podemos empezar a preferir unas que nos resultan más útiles sobre otras. La función de Morse que más se usa es la función altura:

$$f_h(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = x_{m+1} \quad (5.7)$$

La cual siempre está disponible para cualquier variedad diferenciable  $M$  por el siguiente lema:

**Lema 5.1.1.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y compacta, y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse sobre  $M$ . Entonces,  $f$  puede verse como la función altura respecto a un encajamiento adecuado de*

$M$  en un espacio euclideo de dimensión mayor.

La demostración a este lema se puede encontrar en [9].

Podemos comenzar a explorar esta idea de *descomponer* una variedad de acuerdo a los puntos críticos de una función con la función altura  $f_h$  definida sobre la 2-esfera:

$$f_h(x, y, z) = z, \quad (5.8)$$

la cual si es expresada en términos de las coordenadas  $(x, y)$  sobre la 2-esfera

$$f_{hS^2}(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (5.9)$$

nos permite ver inmediatamente que tiene dos puntos críticos;  $p = (0, 0, 1)$  y  $q = (0, 0, -1)$ , cuyos índices son  $\lambda_p = 2$  y  $\lambda_q = 0$ , respectivamente.

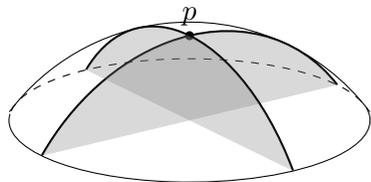
Nótese que para el punto crítico  $p$ , cuyo índice es  $\lambda_p = 2$ , la vecindad alrededor de tal punto puede verse como el producto cartesiano de dos semidiscos  $D$  que corresponden a las intersecciones de la vecindad en los planos  $x = 0$  y  $y = 0$ . Las fronteras de estos semidiscos son arcos cuyos extremos apuntan hacia abajo en ambos casos, de acuerdo a la función altura que hemos definido en el espacio ambiente  $\mathbb{R}^3$  donde está encajada la esfera.

Por otro lado, para el punto crítico  $q$ , cuyo índice es  $\lambda_q = 0$ , la vecindad de puntos cercanos también puede verse, igual que en el caso anterior, como el producto cartesiano de dos semidiscos pero esta vez, los extremos de los arcos que corresponden a sus fronteras apuntan hacia arriba en ambos casos.

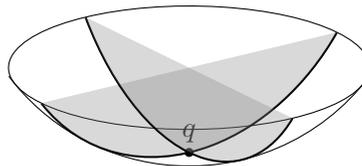
Esta idea de descomponer las vecindades cercanas a los puntos críticos en discos orientados nos lleva a definir un nuevo concepto; las asas:

**Definición 5.1.1** ( $k$ -asas). *Una  $k$ -asa  $m$ -dimensional es la variedad diferenciable y contraíble definida por el siguiente producto cartesiano:*

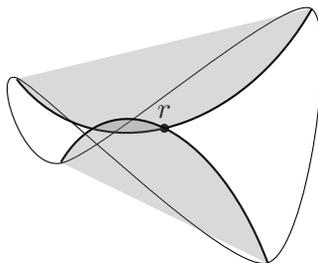
$$h_k = D^k \times D^{m-k}. \quad (5.10)$$



(a) Un punto crítico con índice 2 en un espacio de dimensión 2.



(b) Un punto crítico con índice 0 en un espacio de dimensión 2.



(c) Un punto crítico con índice 1 en un espacio de dimensión 2.

Figura 5.2: Distintos tipos de *handles* para un espacio bidimensional

Las fronteras de estas asas pueden unirse mediante homeomorfismos, dando como resultado una variedad difeomorfa a la variedad original  $M$ . En esto consiste la descomposición de una variedad por asas o *handles*.

**Teorema 5.1.2** (Descomposición por asas de una variedad). *Cuando se tiene una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una variedad cerrada  $M$ , se puede determinar una estructura de cuerpo de asas a partir de  $f$ . Las asas de este cuerpo de asas corresponden a los puntos críticos de la función  $f$  y los índices de las asas coinciden con los índices de los puntos críticos correspondientes.*

Entonces, volviendo al ejemplo de la 2-esfera, las vecindades alrededor de los puntos críticos  $p$  y  $q$  son una 2-asa (hemisferio norte) y una 0-asa (hemisferio sur) y por lo tanto, si las unimos por

sus fronteras, obtenemos nuevamente la 2-esfera original, ver Figura 5.1.

$$\begin{aligned}
 S^2 &\cong h_2 \cup h_0 \\
 &= D^2 \times D^{2-2} \cup D^0 \times D^{2-0} \\
 &= D^2 \times \{0\} \cup \{0\} \times D^2.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Después de descomponer por asas la 2-esfera, naturalmente nos preguntamos si podemos proponer una descomposición general para la  $m$ -esfera  $S^m$ , la cual podemos definir como:

$$S^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2 = 1\}. \tag{5.12}$$

Pues bien, podemos definir en este caso la función altura  $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = x_{m+1}, \tag{5.13}$$

la cual tiene únicamente dos puntos críticos;  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  y  $(0, 0, \dots, 0, -1)$ , por lo que de manera análoga a como se encontraron los índices de los puntos críticos en el caso de  $S^2$ ,  $S^m$  tiene una descomposición de asas que consiste en una  $m$ -asa y en una 0-asa;

$$S^m = D^m \cup D^m, \tag{5.14}$$

que no es otra cosa sino descomponer a la  $m$ -esfera en sus hemisferios norte y sur.

Otro resultado notable de este cálculo es que cualquier variedad compacta de dimensión  $m$  en la cual una función de Morse tenga únicamente dos puntos críticos es homeomorfa a la  $m$ -esfera  $S^m$ .

### 5.1.1. Descomposición por asas del espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^m$

A continuación, el siguiente ejemplo es el espacio proyectivo real de dimensión  $m$  ( $\mathbb{R}P^m$ ), que es el espacio de todas las rectas en  $\mathbb{R}^{m+1}$  que pasan por el origen. Los cálculos presentados aquí fueron tomados de [22] completando algunos pasos intermedios. Por lo que mencionamos antes, los puntos

en  $\mathbb{R}P^m$  son clases de equivalencia de la relación de equivalencia:

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}) &\sim (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \\ \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \ni (y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}) &= \lambda(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por lo tanto, para cualquier punto  $x \in \mathbb{R}^{m+1}$  existe una constante  $\lambda$  tal que

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 + y_{m+1}^2 = 1, \quad (5.16)$$

que no es más que la ecuación de un punto de la  $m$ -esfera  $S^m$  encajada en  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Ahora, si tomamos a los puntos  $[y_1, y_2, \dots, y_{m+1}]$  como representantes de las clases de equivalencia de  $S^m$ , podemos mapear la esfera en el espacio proyectivo mediante una proyección

$$S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m.$$

El mapeo anterior es suprayectivo 2 a 1, ya que esta proyección manda puntos antipodales sobre la esfera al mismo punto en  $\mathbb{R}P^m$ .

Ahora, para poder encontrar la descomposición por asas de esta variedad, necesitamos una función de Morse  $f : \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual proponemos como:

$$f([x_1, x_2, \dots, x_{m+1}]) = \frac{a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{m+1} x_{m+1}^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2}, \quad (5.17)$$

donde las  $a_i$  son constantes arbitrarias pero fijas que cumplan con la condición:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{m+1}. \quad (5.18)$$

Nótese que si multiplicamos todos los  $x_i$  por alguna constante  $\alpha$  el resultado de  $f$  permanece invariante, por lo tanto  $f$  es una función bien definida en  $\mathbb{R}P^m$ .

Ahora fijémonos en un abierto  $U_i \subset \mathbb{R}P^m$  tal que todos los puntos que pertenezcan a él satisfagan que la  $i$ -ésima coordenada cumpla que  $x_i \neq 0$ . Entonces, podemos definir unas nuevas coordenadas locales  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  en  $U_i$  de la siguiente manera:

$$X_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, X_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, X_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, X_m = \frac{x_{m+1}}{x_i}, \quad (5.19)$$

por lo que ahora la función de Morse que hemos definido es

$$f(X_1, X_2, \dots, X_m) = \frac{a_1 X_1^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_{m+1} X_m^2}{X_1^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \dots + X_m^2}. \quad (5.20)$$

Luego, para encontrar los puntos críticos de la función, se calculan las derivadas  $\partial f / \partial X_i$ , comenzando por la última coordenada  $X_m$ :

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = \frac{2X_m \{(a_{m+1} - a_1)X_1^2 + \dots + (a_{m+1} - a_m)X_{m-1}^2 + (a_{m+1} - a_i)\}}{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_m^2 + 1)^2}, \quad (5.21)$$

que, por la condición impuesta de que  $a_{m+1} > a_j$  para todas las  $j = 1, \dots, m$ , tenemos que la derivada  $\partial f / \partial X_m = 0 \iff X_m = 0$ . Aplicando esta condición:

$$f|_{X_m=0} = f(X_1, \dots, X_{m-1}, 0) = \frac{a_1 X_1^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_m X_{m-1}^2}{X_1^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \dots + X_{m-1}^2} \quad (5.22)$$

calculamos la derivada respecto a la siguiente coordenada  $\partial f|_{X_m=0} / \partial X_{m-1}$  y repetimos exactamente el mismo procedimiento que hicimos anteriormente, llegando ahora a la condición de que  $\partial f|_{X_m=0} / \partial X_{m-1} = 0 \iff X_{m-1} = 0$ .

Este procedimiento se repite recursivamente hasta llegar a la coordenada  $X_i$  concluyendo que los puntos críticos de  $f$  en la vecindad  $U_i$  deben satisfacer que:

$$X_i = \dots = X_m - 1 = X_m = 0, \quad (5.23)$$

mientras que para las coordenadas  $X_j$  con  $j = 1, \dots, i-1$  el procedimiento es casi el mismo, sólo que ahora se comienza por la coordenada con el  $a_j$  más pequeño, que en este caso es  $X_1$  y al diferenciar respecto a esta coordenada se llegará a una forma muy similar a la de la ecuación (5.21) sólo que ahora el argumento para determinar que  $\partial f / \partial X_1 = 0 \iff X_1 = 0$  es que  $a_1$  es menor que todas las otras  $a_j$ 's.

Finalmente, llegamos a que la condición de un punto crítico en  $U_i$  es:

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{m-1} = X_m = 0, \quad (5.24)$$

y por lo tanto, el único punto crítico en esta vecindad es el origen  $(0, 0, \dots, 0)$  del sistema de coordenadas  $p_{0_i} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ , que en las coordenadas originales de  $\mathbb{R}P^m$ ,  $[x_1, x_2, \dots, x_{m+1}]$



expresando

$$z_j = x_j + iy_j \quad (5.29)$$

con  $x_j, y_j \in \mathbb{R}$  entonces la condición anterior se vuelve:

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \cdots + x_m^2 + y_m^2 + x_{m+1}^2 + y_{m+1}^2 = 1. \quad (5.30)$$

Entonces, para indagar sobre la topología de  $\mathbb{C}P^m$  a través de una función de Morse, comenzamos definiendo la función

$$f(z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1}) = \frac{a_1|z_1|^2 + a_2|z_2|^2 + \cdots + a_m|z_m|^2 + a_{m+1}|z_{m+1}|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_m|^2 + |z_{m+1}|^2}, \quad (5.31)$$

con  $a_j \in \mathbb{R}$  y  $a_j < a_k$  si  $j < k$ .

Nótese que al igual que en el caso real,  $f$  es una función bien definida en el espacio proyectivo complejo ya que  $f(z_1, \dots, z_{m+1}) = f(\alpha z_1, \dots, \alpha z_{m+1})$ . Luego, si nos fijamos en un abierto  $U_i \in \mathbb{C}P^m$  tal que la coordenada  $z_i \neq 0$  podemos definir coordenadas locales  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$  como:

$$Z_1 = \frac{z_1}{z_i}, \dots, Z_{i-1} = \frac{z_{i-1}}{z_i}, Z_i = \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, Z_m = \frac{z_{m+1}}{z_i}, \quad (5.32)$$

de modo que la función  $f$  definida en (5.31) es ahora:

$$f(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = \frac{a_1|Z_1|^2 + \cdots + a_{i-1}|Z_{i-1}|^2 + a_i + a_{i+1}|Z_i|^2 \cdots + a_{m+1}|Z_m|^2}{|Z_1|^2 + \cdots + |Z_{i-1}|^2 + 1 + |Z_i|^2 + \cdots + |Z_m|^2}, \quad (5.33)$$

que si descomponemos a los complejos  $Z_i$  en su parte real e imaginaria como en (5.29), entonces tenemos una función de  $2m$  variables reales:

$$f(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_m, Y_m) = \frac{a_1(X_1^2 + Y_1^2) + \cdots + a_{i-1}(X_{i-1}^2 + Y_{i-1}^2) + a_i + a_{i+1}(X_i^2 + Y_i^2) \cdots + a_{m+1}(X_m^2 + Y_m^2)}{X_1^2 + Y_1^2 + \cdots + X_{i-1}^2 + Y_{i-1}^2 + 1 + X_{i+1}^2 + Y_{i+1}^2 + \cdots + X_m^2 + Y_m^2}, \quad (5.34)$$

y para encontrar los puntos críticos en la vecindad  $U_i$  será necesario calcular las derivadas parciales



Aquí cabe resaltar la necesidad de expresar la función de Morse en términos de coordenadas reales al momento de calcular la matriz hessiana; porque de ser complejas la noción de índice como la hemos definido para las funciones de Morse pierde sentido ya que en este caso siempre podemos proponer un cambio de coordenadas, por ejemplo  $z_j \rightarrow iz_j$  en el cual la matriz hessiana diagonalizada es un múltiplo positivo de la matriz identidad.

De aquí podemos concluir que si recubrimos el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^m$  con  $m + 1$  abiertos  $U_i$ , en cada uno de ellos habrá un punto crítico que corresponde al origen en las coordenadas locales  $Z_i$  definidas como en (5.32).

El índice de estos puntos críticos se puede leer de la hessiana en (5.37) considerando que por cada dimensión compleja se tienen dos dimensiones reales, y en este caso por la condición que hay entre los  $a_j$ 's, el índice del punto crítico en el  $i$ -ésimo abierto  $U_i$  es  $2(i - 1)$ .

En conclusión, la función de Morse que hemos definido en el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^m$  tiene  $m + 1$  puntos críticos con índices

$$0, 2, 4, \dots, 2m, \quad (5.38)$$

respectivamente.

Por lo tanto, la descomposición por asas de este espacio es la siguiente:

$$\mathbb{C}P^m = D^{2m} \cup D^2 \times D^{2m-2} \cup \dots \cup D^{2m-2} \times D^2 \cup D^{2m}. \quad (5.39)$$

Y efectivamente, para el caso de  $\mathbb{C}P$  que sabemos que es difeomorfo a la 2-esfera  $S^2$  la descomposición por asas es:

$$\mathbb{C}P = D^2 \cup D^2, \quad (5.40)$$

que corresponde al resultado que obtuvimos al encontrar la descomposición de asas de  $S^2$  mediante la función de altura  $f_h$ .

## 5.2. De vuelta al espacio de estados cuánticos

En el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2s+1}$ , donde viven los estados cuánticos de espín  $s$ , podemos garantizar que el valor esperado de un operador hermitiano no degenerado  $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$  es una función

de Morse ya que siempre podemos encontrar una base en el espacio del Hilbert en la cual la función valor esperado toma la siguiente forma

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \sum_{j=0}^{2s} a_j |\psi_j|^2, \quad (5.41)$$

donde

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{2s} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Y dado que  $H$  es un operador hermitiano no degenerado, todos sus eigenvalores  $a_j$  son números reales y son todos distintos. Ahora, si queremos trabajar en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^{2s}$  es necesario hacer que el resultado de esta función sea el mismo para un estado  $|\psi\rangle$  y para cualquier otro de la forma  $\lambda|\psi\rangle$  con  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Redefinimos el valor esperado como la siguiente función  $f: \mathbb{C}P^{2s} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(|\psi\rangle) = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (5.43)$$

que si nos restringimos a trabajar únicamente con estados normalizados, la función (5.43) se vuelve simplemente  $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$ .

O bien, ya que se trata de una función en el espacio proyectivo, puede expresarse en términos de matrices de densidad  $\rho$

$$f(\rho) = \text{tr}(H\rho). \quad (5.44)$$

Veamos entonces el caso particular en el espacio de estados cuánticos de espín 1 considerando como nuestro hamiltoniano al operador:

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

si tomamos como base del espacio de Hilbert, que en este caso se trata de  $\mathbb{C}^3$ , a la base de

eigenvectores de  $S_z$ ;

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.46)$$

entonces, para un estado arbitrario  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ , la función (5.43) tomará la siguiente forma en términos de las componentes  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$ :

$$f(\psi_0, \psi_1, \psi_2) = \frac{\psi_0\bar{\psi}_0 - \psi_2\bar{\psi}_2}{\psi_0\bar{\psi}_0 + \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2}, \quad (5.47)$$

y dado que esta función está bien definida tanto en el espacio de Hilbert como en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^2$ , podemos tomar una carta  $U_0 \subset \mathbb{C}P^2$  en la cual  $\psi_0 \neq 0$ ,  $\forall \psi \in U_0$  de modo que podemos definir las siguientes coordenadas locales:

$$z_1 = \frac{\psi_1}{\psi_0}, \quad z_2 = \frac{\psi_2}{\psi_0}, \quad (5.48)$$

de modo que ahora, la función (5.47) toma ahora la siguiente forma:

$$f_0(1, z_1, z_2) = \frac{1 - z_2\bar{z}_2}{1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2}, \quad (5.49)$$

que ahora, si expresamos las coordenadas complejas en términos de sus componentes real e imaginaria:

$z_j = x_j + iy_j$  la función queda en términos de cuatro coordenadas reales:

$$f_0(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1 - (x_2^2 + y_2^2)}{1 + (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2)}. \quad (5.50)$$

Después, calculando las primeras derivadas  $\partial f_0/\partial x_j$  y  $\partial f_0/\partial y_j$  podemos ver que ésta función tiene un único punto crítico;  $p_{0_0} = (0, 0, 0, 0)$ . Calculando las segundas parciales obtenemos la matriz hessiana:

$$H_{f_0}(p_{0_0}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

por lo tanto el punto crítico  $p_{00}$  tiene índice de Morse 4.

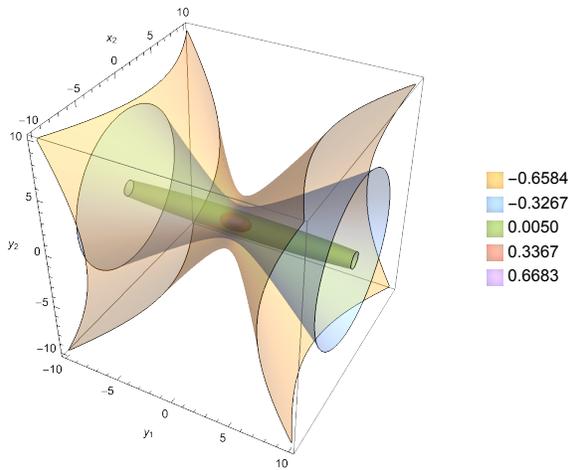
Este mismo procedimiento se puede llevar a cabo para las cartas  $U_1$  y  $U_2$  en las que  $\psi_1 \neq 0$  y  $\psi_2 \neq 0$  respectivamente. Los resultados se muestran a continuación en el Cuadro 5.1. Lo cual es consistente con el resultado general que obtuvimos para los espacios proyectivos complejos  $\mathbb{C}P^m$ .

Carta	Función (en coordenadas locales reales)	Punto crítico (en coordenadas homogéneas)	Índice de Morse
$U_0$	$f_0 = \frac{1-(x_2^2+y_2^2)}{1+(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)}$	$(1, 0, 0)$	4
$U_1$	$f_1 = \frac{(x_0^2+y_0^2)-(x_2^2+y_2^2)}{(x_0^2+y_0^2)+1+(x_2^2+y_2^2)}$	$(0, 1, 0)$	2
$U_2$	$f_2 = \frac{(x_0^2+y_0^2)-1}{(x_0^2+y_0^2)+(x_1^2+y_1^2)+1}$	$(0, 0, 1)$	0

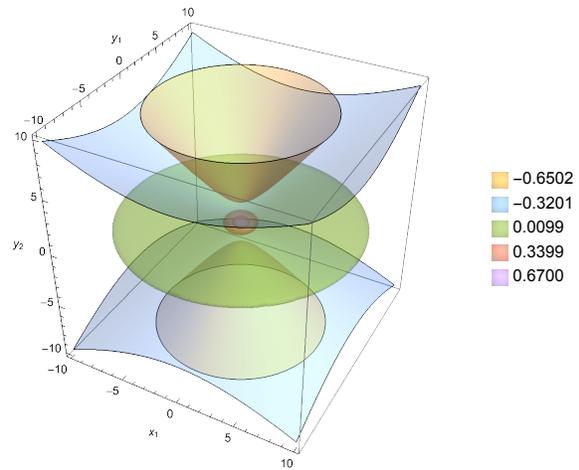
Tabla 5.1: Puntos críticos con sus índices de Morse de la función  $f(\psi) = \langle \psi | S_z | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$

$$\mathbb{C}P^2 = D^4 \cup D^2 \times D^2 \cup D^4. \tag{5.52}$$

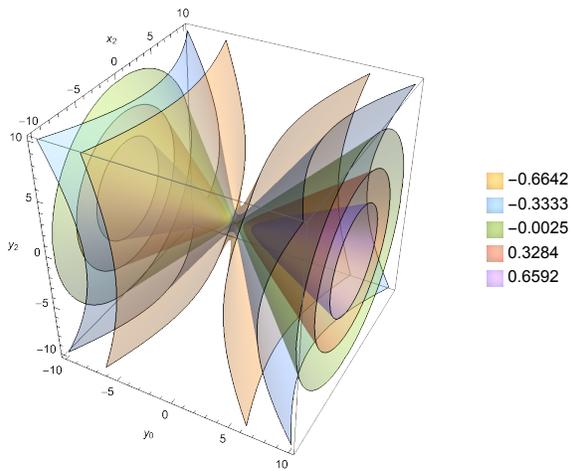
Además, en la Figura 5.3 se puede observar la función en distintos hiperplanos de  $\mathbb{C}P^2$  donde se puede notar que los puntos críticos  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ , son extremos de la función, ya que al acercarse al punto crítico, que corresponde a  $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$  y  $x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = 0$  respectivamente, la superficie de nivel se aproxima a una esfera que al alcanzar el valor crítico tiene radio 0. Mientras que, por el otro lado, el punto crítico  $(0, 1, 0)$  corresponde a un punto silla ya que al acercarse al punto crítico la curva de nivel se aproxima a un cono, ver Figuras 5.3(c) y 5.3(d).



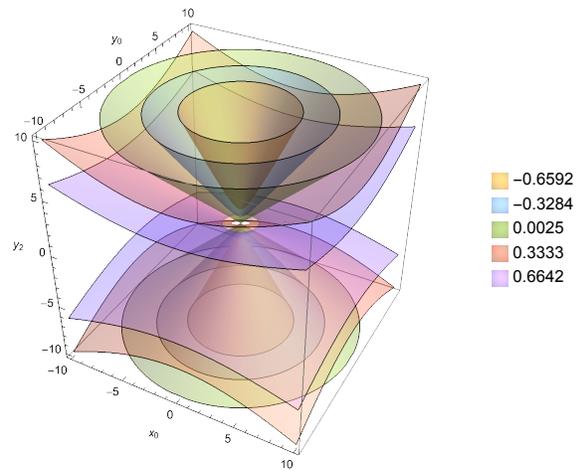
(a) Superficies de nivel de  $f_0$  para  $x_1 = 0$



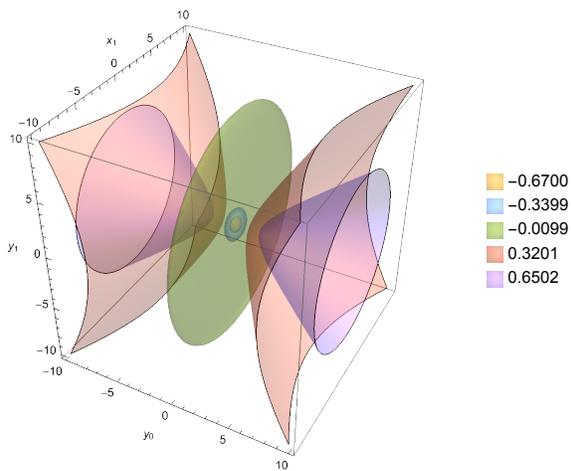
(b) Superficies de nivel de  $f_0$  para  $x_2 = 0$



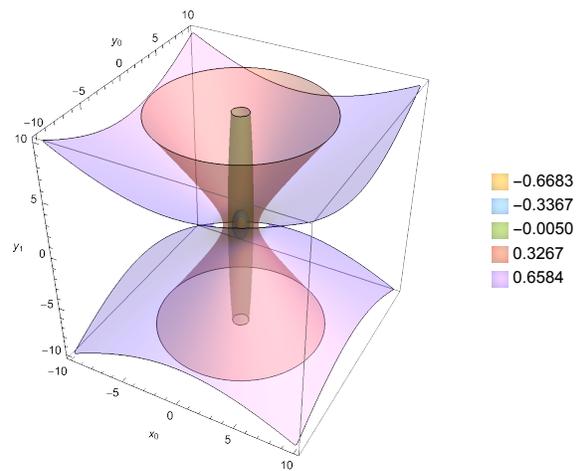
(c) Superficies de nivel de  $f_1$  para  $x_0 = 0$



(d) Superficies de nivel de  $f_1$  para  $x_2 = 0$



(e) Superficies de nivel de  $f_2$  para  $x_0 = 0$



(f) Superficies de nivel de  $f_2$  para  $x_1 = 0$

Figura 5.3: Superficies de nivel de las funciones  $f_0(x_0, y_0, x_1, y_1)$  [5.3(a) y 5.3(b)],  $f_1(x_0, y_0, x_1, y_1)$  [5.3(c) y 5.3(d)] y  $f_2(x_0, y_0, x_1, y_1)$  [5.3(e) y 5.3(f)] en los hiperplanos obtenidos al fijar una coordenada.

De los resultados obtenidos, cabe resaltar que los puntos críticos de esta función de valor esperado del operador  $S_z$  coinciden con los eigenvectores del mismo operador. Esto es algo que nos resulta interesante y de hecho, veremos que podemos afirmar que todo eigenvector de un operador hermitiano no degenerado  $\hat{H}$  es un punto crítico de la función de Morse definida como  $f(\psi) = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$ .

**Lema 5.2.1.** *Todo eigenvector de un operador hermitiano no degenerado  $\hat{H}$  es un punto crítico de la función de Morse definida en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^m$  como  $f(\psi) = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$ .*

*Demostración.* Comenzaremos por notar que si  $|\psi\rangle$ , que por simplicidad a partir de este punto podemos considerar únicamente estados normalizados, es un punto crítico del valor esperado, entonces si perturbamos el estado, la expansión de la función a primer orden no deberá ser distinta a la función original, es decir, si  $|\psi\rangle$  es eigenvector entonces  $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = (\langle \psi | + \langle \delta\psi |) \hat{H} (|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle)$ .

Nótese que  $(|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle)$  también debe de ser un estado normalizado, por lo que:

$$\begin{aligned} (\langle \psi | + \langle \delta\psi |)(|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle) &= 1 \\ \Rightarrow \cancel{\langle \psi | \psi \rangle} + \langle \psi | \delta\psi \rangle + \langle \delta\psi | \psi \rangle &= 1 \\ \Rightarrow \langle \psi | \delta\psi \rangle + \langle \delta\psi | \psi \rangle &= 0 \\ \Rightarrow 2\text{Re} \langle \psi | \delta\psi \rangle &= 0, \end{aligned} \tag{5.53}$$

es decir, la proyección del estado a lo largo de la perturbación únicamente puede tener componente imaginaria.

Ahora, sea  $|\psi\rangle$  eigenvector de un operador hermitiano  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \tag{5.54}$$

En este caso el valor esperado de  $\hat{H}$  corresponde al eigenvalor  $E$ . Luego, calculamos el valor

esperado del estado perturbado ( $|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle$ ) con  $\delta \ll 1$ , expandiendo hasta el término lineal en  $\delta$ :

$$\begin{aligned}
\langle \langle \psi| + \langle \delta\psi| \rangle \hat{H} (|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle) &= \langle \psi| \hat{H} |\psi\rangle + \langle \psi| \hat{H} |\delta\psi\rangle + \langle \delta\psi| \hat{H} |\psi\rangle \\
&= E \langle \psi|\psi\rangle + \langle \psi| \hat{H}^\dagger |\delta\psi\rangle + \langle \delta\psi| \hat{H} |\psi\rangle \\
&= E + E(\langle \psi|\delta\psi\rangle + \langle \delta\psi|\psi\rangle) \\
&= E + E(2\text{Re}\langle \psi|\delta\psi\rangle) \\
&= E = \langle \psi| \hat{H} |\psi\rangle.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

□

Ahora, nos podemos preguntar si la misma afirmación puede hacerse en el sentido opuesto, es decir, si cualquier punto crítico de la función valor esperado de un operador hermitiano es un eigenvector de tal operador. Efectivamente es el caso y se puede enunciar el siguiente Lema.

**Lema 5.2.2.** *Todo punto crítico de la función de Morse definida en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^m$  como  $f(\psi) = \langle \psi| \hat{H} |\psi\rangle / \langle \psi|\psi\rangle$  donde  $\hat{H}$  es un operador hermitiano no degenerado, es un eigenvector de tal operador.*

*Demostración.* Para esta prueba nos convendrá visualizar a los estados del espacio de Hilbert  $\mathbb{C}^m$

como vectores columna  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix}$  y al operador  $\hat{H}$  como una matriz hermitiana  $H$ , de modo

que la función de valor esperado queda expresada como:

$$f(\psi) = \frac{\psi^\dagger H \psi}{\psi^\dagger \psi} = \frac{\bar{\psi}_j H_{jk} \psi_k}{\bar{\psi}_j \psi_j}, \tag{5.56}$$

donde  $\psi^\dagger = (\bar{\psi}_0, \dots, \bar{\psi}_m)$ .

Recordemos que si  $\psi$  es un eigenvalor del operador  $H$  entonces la varianza  $\Delta H$  debe satisfacer que:

$$(\Delta H)^2 = \psi^\dagger H^2 \psi - (\psi^\dagger H \psi)^2 = 0, \tag{5.57}$$

es decir, que el valor esperado de  $H$  para el eigenvector  $\psi$  es exactamente su eigenvalor correspondiente.

Ahora, como estamos trabajando con la función  $f(\psi)$  definida en el espacio proyectivo, entonces, la condición de la ecuación (5.57) para un eigenvector es ahora:

$$\begin{aligned}
(\Delta H)^2 &= \frac{\psi^\dagger H^2 \psi}{\psi^\dagger \psi} - \frac{(\psi^\dagger H \psi)^2}{(\psi^\dagger \psi)^2} = 0 \\
&\Rightarrow (\psi^\dagger \psi) \psi^\dagger H^2 \psi - (\psi^\dagger H \psi)^2 = 0,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

luego, sabemos que  $\psi$  es un punto crítico de  $f(\psi)$  si

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_j} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \tag{5.59}$$

entonces, calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_j} = \frac{(\bar{\psi}_j \psi_j)(\bar{\psi}_k H_{kj}) - (\bar{\psi}_j H_{jk} \psi_k) \bar{\psi}_j}{(\bar{\psi}_j \psi_j)^2} = \frac{(\psi^\dagger \psi)(\psi^\dagger H)_j - (\psi^\dagger H \psi) \psi_j^\dagger}{(\psi^\dagger \psi)^2}, \tag{5.60}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}_j} = \frac{(\bar{\psi}_j \psi_j)(H_{jk} \psi_k) - (\bar{\psi}_j H_{jk} \psi_k) \psi_j}{(\bar{\psi}_j \psi_j)^2} = \frac{(\psi^\dagger \psi)(H \psi)_j - (\psi^\dagger H \psi) \psi_j}{(\psi^\dagger \psi)^2}, \tag{5.61}$$

de igualar a cero las ecuaciones (5.60) y (5.61), lo cual debe cumplirse para cualquier componente  $j$ , tenemos que un punto crítico debe satisfacer simultáneamente que:

$$(\psi^\dagger \psi) \psi^\dagger H = (\psi^\dagger H \psi) \psi^\dagger, \tag{5.62}$$

$$(\psi^\dagger \psi) H \psi = (\psi^\dagger H \psi) \psi. \tag{5.63}$$

Entonces, si a la ecuación (5.62) la multiplicamos por la derecha con la ecuación (5.63):

$$(\psi^\dagger \psi)^2 \psi^\dagger H^2 \psi = (\psi^\dagger H \psi)^2 \psi^\dagger \psi \tag{5.64}$$

$$\Rightarrow (\psi^\dagger \psi) \psi^\dagger H^2 \psi = (\psi^\dagger H \psi)^2, \tag{5.65}$$

que es justamente la condición (5.58), la cual determina que  $\psi$  es un eigenvector del operador  $H$ .  $\square$

Con estos resultados, podemos afirmar que encontrar los eigenvectores de un operador hermitiano en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^m$  es lo mismo que encontrar los puntos críticos de la función de Morse definida por el valor esperado de tal operador sobre la variedad.

### 5.2.1. Probando con una función distinta; $(\Delta H)^2$

Con la comprobación de que el valor esperado de un operador hermitiano no degenerado es una función de Morse definida en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^m$ , resulta natural preguntarse si otras funciones frecuentemente utilizadas al resolver problemas de mecánica cuántica cumplen también con ser funciones de Morse, de las cuales se pueda extraer más información sobre la topología del espacio de estados cuánticos. Entonces, buscamos otra función que esté bien definida en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^m$  que resulta ser la varianza de un operador hermitiano para un estado arbitrario  $|\psi\rangle$ :

$$(\Delta H)^2 = \frac{\langle \psi | H^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle^2}{\langle \psi | \psi \rangle^2}. \quad (5.66)$$

Entonces, veamos ahora el caso particular del operador  $S_z$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^2$ , dada por la ecuación (5.45). Si expresamos la función en términos de coordenadas homogéneas  $\psi_j$ , la función (5.66) toma la siguiente forma:

$$f(\psi_0, \psi_1, \psi_2) = \frac{\bar{\psi}_0\psi_0 + \bar{\psi}_2\psi_2}{\bar{\psi}_0\psi_0 + \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2} - \frac{(\bar{\psi}_0\psi_0 - \bar{\psi}_2\psi_2)^2}{(\bar{\psi}_0\psi_0 + \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2)^2}, \quad (5.67)$$

de aquí, el procedimiento a seguir es el mismo que en el caso del valor esperado; primero tomamos una carta  $U_0$  en la cual  $\psi_0 \neq 0$ , para expresar la función en coordenadas locales  $z_1 = \psi_1/\psi_0$  y  $z_2 = \psi_2/\psi_0$  y luego la reexpresamos en términos de sus componentes real e imaginaria  $z_j = x_j + iy_j$ . Ya con la función  $f_0(x_1, y_1, x_2, y_2)$  calculamos las primeras derivadas  $\partial f_0/\partial x_j$  y  $\partial f_0/\partial y_j$ , las igualamos a cero y resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar los puntos críticos.

En este caso, encontramos un punto crítico no-degenerado y dos puntos críticos degenerados que corresponden a un punto aislado y a dos familias uniparamétricas respectivamente:

$$\left\{ (0, 0, 0, 0), (\alpha, \sqrt{1-\alpha^2}, 0, 0), (0, 0, \alpha, \sqrt{1-\alpha^2}) \right\}, \quad (5.68)$$

donde  $-1 < \alpha < 1$ . Si hacemos el cambio de variable  $\alpha \rightarrow \cos \theta$  rápidamente se puede hacer la identificación de coordenadas  $x_j = \cos \theta$ ,  $y_j = \sin \theta$ , y al expresar los puntos críticos en términos de

coordenadas homogéneas del espacio proyectivo, tenemos que son:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

Lo cual significa que nuestra función tiene un único punto crítico aislado que es el eigenvector  $p_0$ , mientras que los otros trazan una curva continua de puntos críticos y por lo tanto son degenerados. Por lo tanto la función  $(\Delta H)^2$  no es una función de Morse sobre  $\mathbb{C}P^2$  porque no todos sus puntos críticos son no-degenerados.

Aún así, podemos interpretar un poco más entorno a estos puntos críticos, calculando la matriz hessiana evaluada en  $p_0, p_1$  y  $p_2$ , tomando  $\theta = 0$ :

$$H_{f_0}(p_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad H_{f_0}(p_1) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_{f_0}(p_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

De aquí podemos concluir que el punto  $p_0$  es un mínimo de la función mientras que  $p_1$  es un punto silla y  $p_2$  es un máximo, por lo tanto el estado

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} = |1\rangle + e^{i\theta} |-1\rangle \quad (5.71)$$

es un estado de máxima dispersión de energía.

El comportamiento de la función  $f_0$  expresada en coordenadas locales de la carta  $U_0$  puede ilustrarse mejor con las gráficas expuestas en la Figura 5.4.

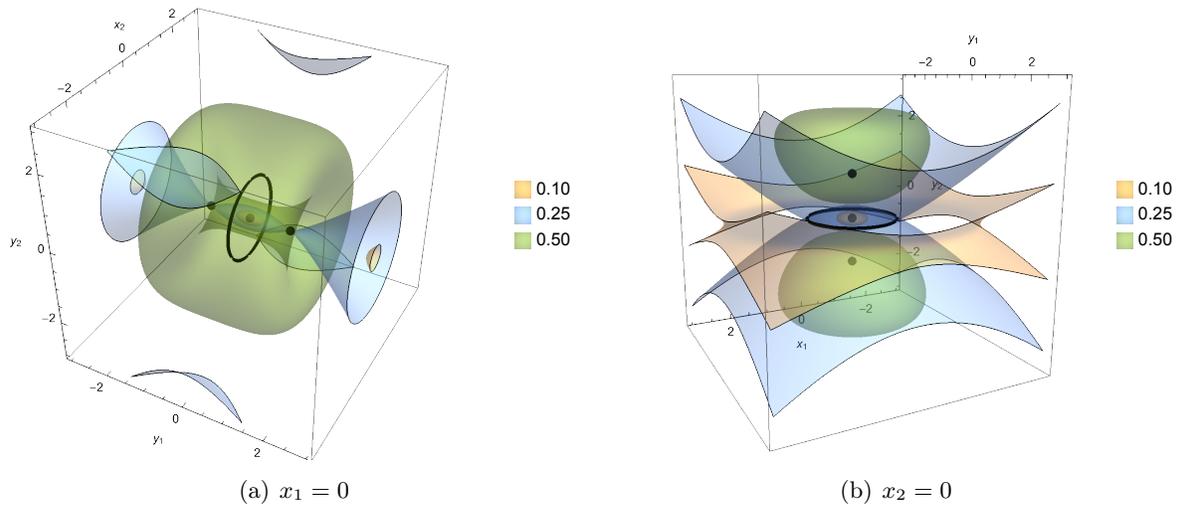


Figura 5.4: Superficies de nivel de la función  $f_0(x_1, y_1, x_2, y_2)$  en los hiperplanos  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ . En ambos casos se muestran los puntos críticos que corresponden a los tres eigenvalores del operador  $S_z$  y las curvas de puntos críticos degenerados correspondiente a los puntos críticos  $p_1$  [Fig. 5.4(a)] y  $p_2$  [Fig. 5.4(b)]

En general, si repetimos el mismo procedimiento para obtener la variación de la energía de un estado  $|\psi\rangle$  de espín  $s$  dado un hamiltoniano arbitrario  $H$ , entonces la función  $(\Delta H)^2$  mostrada en la ecuación (5.66) definida sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^{2s}$  tendrá  $(2s+1)^2$  puntos críticos que expresados en la base de eigenvectores  $|m\rangle$  de  $H$  corresponderán a;

- $(2s+1)$  puntos críticos no degenerados que corresponderán a los eigenvectores del hamiltoniano los cuales podemos expresar  $|m\rangle$  donde  $m = [-s, \dots, s]$ .
- $2s(2s+1)$  puntos críticos degenerados de la forma  $|m\rangle + e^{i\theta} |n\rangle$  donde  $m \neq n$ .

De este resultado podemos proponer el siguiente lema:

**Lema 5.2.3.** *Dado un hamiltoniano  $H$  definido en el espacio de Hilbert  $\mathbb{C}^{2s+1}$ , cualquier estado de la forma  $1/\sqrt{2}(|m\rangle + e^{i\theta} |n\rangle)$  donde  $|m\rangle$  y  $|n\rangle$  son elementos de la base de eigenvectores de  $H$ , es punto crítico de la función  $(\Delta H)^2$  definida sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^{2s}$ .*

*Demostración.* Expresando la función

$$(\Delta H)^2 = \frac{(\psi^\dagger \psi)(\psi^\dagger H^2 \psi) - (\psi^\dagger H \psi)^2}{(\psi^\dagger \psi)^2}, \quad (5.72)$$

donde  $\psi = \psi_j |j\rangle$  y  $\psi^\dagger = \bar{\psi}_j \langle j|$  se entiende que son vectores columna y renglón respectivamente y

$H$  es una matriz cuadrada. Sabemos que un punto crítico  $\psi$  satisface que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta H)^2}{\partial\psi_j} &= 0, \\ \frac{\partial(\Delta H)^2}{\partial\bar{\psi}_j} &= 0 \quad \forall j \in [-s, s]. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Entonces, comenzando por calcular la derivada respecto a  $\psi_l$  con  $l \in [-s, s]$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta H)^2}{\partial\bar{\psi}_l} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_l} \frac{(\bar{\psi}_j\psi_j)(\bar{\psi}_j H_{jk}^2 \psi_k) - (\bar{\psi}_j H_{jk} \psi_k)^2}{\bar{\psi}_j\psi_j} \\ &= \frac{(\bar{\psi}_j\psi_j)^3 (H_{lk}^2 \psi_k) - (\bar{\psi}_j\psi_j)^2 \psi_l (\bar{\psi}_j H_{jk}^2 \psi_k) - 2(\bar{\psi}_j\psi_j)^2 (\bar{\psi}_j H_{jk} \psi_k)(H_{lk} \psi_k) + 2(\bar{\psi}_j\psi_j) \psi_l (\bar{\psi}_j H_{jk} \psi_k)^2}{(\bar{\psi}_j\psi_j)^4} \\ &= \frac{(\psi^\dagger\psi)^3 (H^2\psi)_l - (\psi^\dagger\psi)^2 \psi_l (\psi^\dagger H^2\psi) - 2(\psi^\dagger\psi) (\psi^\dagger H\psi)(H\psi)_l + 2(\psi^\dagger\psi) \psi_l (\psi^\dagger H\psi)^2}{(\psi^\dagger\psi)^4}, \end{aligned} \tag{5.74}$$

donde, para que se cumpla la condición de que la derivada de (5.74) sea igual a cero, basta sólo con que el numerador sea igual a cero siempre y cuando el denominador sea distinto de cero, por lo que la condición de punto crítico se vuelve:

$$(\psi^\dagger\psi)^2 (H^2\psi)_l - (\psi^\dagger\psi) \psi_l (\psi^\dagger H^2\psi) - 2(\psi^\dagger H\psi)(H\psi)_l + 2\psi_l (\psi^\dagger H\psi)^2 = 0, \tag{5.75}$$

y tomando que  $\psi$  es de la forma  $1/\sqrt{2}(|m\rangle + e^{i\theta}|n\rangle)$ , donde  $|m\rangle$  y  $|n\rangle$  son eigenvectores de  $H$  con eigenvalores  $E_{mm} \equiv E_m$  y  $E_{nn} \equiv E_n$ , respectivamente, y que el factor de normalización únicamente para simplificar algunas cuentas, podemos concluir los siguientes resultados:

$$\psi_l = \begin{cases} 1 & \text{si } l = m \\ e^{i\theta} & \text{si } l = n \\ 0 & \text{si } l \neq m \neq n \end{cases} \tag{5.76}$$

$$H_{mn} = E_m \delta_{mn}$$

$$(\psi^\dagger\psi) = 1$$

$$(\psi^\dagger H\psi) = 1/2(H_{mm} + H_{nn}) = 1/2(E_m + E_n)$$

$$(H\psi)_l = 1/\sqrt{2}(H_{lm} + e^{i\theta}H_{ln}).$$

Ahora, sólo resta sustituir los resultados de (5.76) en (5.75) para los siguientes tres casos;

$$\begin{aligned}
 & l = m \\
 \Rightarrow (5.75) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_m^2) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(E_m^2 + E_n^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(E_m^2 + E_m E_n) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(E_m^2 + 2E_m E_n + E_n^2) \quad (5.77) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l = n \\
 \Rightarrow (5.75) &= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}(E_n^2) - \frac{e^{i\theta}}{2\sqrt{2}}(E_m^2 + E_n^2) - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}(E_m E_n + E_n^2) + \frac{e^{i\theta}}{2\sqrt{2}}(E_m^2 + 2E_m E_n + E_n^2) \quad (5.78) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l \neq m \neq n \\
 \Rightarrow & \text{La sustitución directa en la ecuación (5.75) es igual a cero.} \quad (5.79)
 \end{aligned}$$

Del mismo modo se puede calcular la derivada  $\partial(\Delta H)^2/\partial\psi_l$  y sustituir nuevamente los resultados de (5.76) agregando que:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_l &= \begin{cases} 1 & \text{si } l = m \\ e^{-i\theta} & \text{si } l = n \\ 0 & \text{si } l \neq m \neq n \end{cases} \quad (5.80) \\
 (\psi^\dagger H)_l &= 1/\sqrt{2}(H_{lm} + e^{-i\theta} H_{ln}),
 \end{aligned}$$

y de manera totalmente análoga se llegará a que los estados de la forma  $|m\rangle + e^{i\theta}|n\rangle$  son puntos críticos degenerados de la función  $(\Delta H)^2$ .  $\square$

Nótese también que la demostración anterior puede hacerse de manera mucho más simple expresando la ecuación (5.75) en términos de matrices:

$$(H^2 - 2\langle H \rangle H - \langle H^2 \rangle + 2\langle H \rangle^2) |\psi\rangle = 0, \quad (5.81)$$

donde, como  $\langle H \rangle$  y  $\langle H^2 \rangle$  son valores reales, se entiende que están siendo multiplicados por una matriz identidad  $\mathbb{1}$ .

La ecuación (5.81) genera un sistema originalmente de  $2s$  ecuaciones, del cual la  $j$ -ésima ecuación será de la forma

$$\left( E_j^2 - 2 \left( \sum_k \rho_k^2 E_k \right) E_j - \sum_r \rho_r^2 E_r^2 + 2 \left( \sum_{s,n} \rho_s^2 \rho_n^2 E_s E_n \right) \right) \rho_j = 0, \quad (5.82)$$

y que para el caso  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|m\rangle + e^{i\theta}|n\rangle)$ , en realidad terminarán habiendo únicamente dos ecuaciones, ya que el vector  $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |E_k\rangle$ , donde en general  $\psi_k = \rho_k e^{i\theta k}$ . Para este caso  $\rho_k = 0 \forall k \neq m, n$ , y para  $k = m, n$   $\rho_k = 1/\sqrt{2}$ .

Nos fijamos entonces en los tres posibles casos:

$$\begin{aligned} & j = m \\ (E_m^2 - \frac{2}{2}(E_m + E_n)E_m - \frac{1}{2}(E_m^2 + E_n^2) + \frac{2}{4}(E_m^2 + 2E_mE_n + E_n^2)) \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \\ E_m^2 - E_m^2 - E_mE_n - \frac{1}{2}E_m^2 - \frac{1}{2}E_n^2 + \frac{1}{2}E_m^2 + E_mE_n + \frac{1}{2}E_n^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.83)$$

El caso  $j = n$  es análogo, ya que como la ecuación (5.82) está igualada a cero, podemos ignorar la fase de  $\psi_n = 1/\sqrt{2}e^{i\theta n}$ . Y finalmente el caso  $j \neq m, n$  es trivial.

Rápidamente podemos comprobar también que los eigenvectores de  $S_z$ , que son vectores de la forma  $\psi_j = 0 \forall j \neq m$  y  $\psi_m = 1$ , también son solución para el sistema de ecuaciones, donde la  $j$ -ésima ecuación es:

$$(E_j^2 - 2E_mE_j - E_m^2 + E_m^2)\rho_j = 0, \quad (5.84)$$

donde sólo hay dos posibles casos:

$$\begin{aligned} & j = m \\ E_m^2 - 2E_m^2 - E_m^2 + E_m^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

Y el caso  $j \neq m$  que es trivial.

Dicho esto, lo siguiente que nos gustaría intentar es demostrar el resultado inverso. Esto es, que todo punto crítico de la función  $(\Delta H)^2$  debe de ser o un eigenestado del hamiltoniano o un estado de la forma  $|m\rangle + e^{i\theta}|n\rangle$ . Proponemos esta prueba como parte de nuestro trabajo a futuro.

### 5.3. Enredamiento de estados simétricos

#### 5.3.1. Sistemas multipartitas

Al tener un sistema compuesto por dos o más partículas o subsistemas, llamado también *sistema multipartita*, la intuición clásica nos indicaría que es posible estudiar de manera independiente cada una de las partes que conforman el sistema. Sin embargo, éste no siempre es el caso, con lo cual se abre la puerta para preguntas interesantes como la famosa paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen [12] en la cual pareciera concluir que los sistemas cuánticos pueden actuar instantáneamente y por lo tanto la información que los relaciona viaja más rápido que la luz. Esta paradoja se ha estudiado en años posteriores dando lugar a una nueva característica para sistemas cuánticos: el enredamiento [25, 29].

El espacio de Hilbert donde viven estos estados multipartitas corresponde al producto tensorial de los espacios de Hilbert donde viven cada uno de los subsistemas que lo conforman:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N. \quad (5.86)$$

En este espacio de sistemas multipartitas, existen dos tipos de estados; separables y enredados.

Los estados separables (o *factorizables*) son aquellos que pueden ser representados por el producto tensorial de estados puros, por ejemplo, un sistema bipartita separable es de la forma:

$$|\Psi_{sep}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad (5.87)$$

donde  $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$  y  $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ .

Por otro lado un sistema bipartito enredado es aquél para el cual no existen estados locales  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$  tales que  $|\Psi\rangle$  es de la forma mostrada en (5.87) y en cambio, deben ser representados por una combinación lineal de productos directos de estados puros, es decir, de la forma:

$$|\Psi_{ent}\rangle = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} |\psi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle. \quad (5.88)$$

Nosotros nos enfocaremos en los estados simétricos, que son aquellos que no se ven alterados

bajo el intercambio de cualesquiera dos subsistemas que los conforman. En el caso de sistemas conformados por  $n$  *qbits*, un sistema simétrico arbitrario es de la forma:

$$|S_{n,k}\rangle = \binom{n}{k}^{-1/2} \sum_{\text{perm}} \underbrace{|0\rangle|0\rangle\cdots|0\rangle}_{n-k} \underbrace{|1\rangle|1\rangle\cdots|1\rangle}_k, \quad (5.89)$$

con  $0 \leq k \leq n$ . En el caso particular de un sistema bipartita, los estados simétricos serán entonces:

$$\begin{aligned} |S_{2,0}\rangle &= |0\rangle|0\rangle = |00\rangle, \\ |S_{2,1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |S_{2,2}\rangle &= |1\rangle|1\rangle = |11\rangle. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Para simplificar la notación, una vez indicado el número de *qbits* que conforman el sistema en cuestión, los estados simétricos pueden expresarse simplemente como  $|S_k\rangle$  y corresponden a los estados de espín  $n/2$  con proyección  $n/2 - k$ .

### 5.3.2. Estados máximamente enredados

Algo de sumo interés en el estudio de estos sistemas multipartitas es la *cantidad de enredamiento* que presentan. Existen muchas formas de clasificar y por lo tanto de cuantificar el enredamiento de estos sistemas y éstas se eligen de acuerdo a las características del sistema en cuestión que se quieran analizar, una de ellas es la medida geométrica que se presentará a continuación facilita el estudio y comparación entre distintos sistemas.

La medida geométrica de enredamiento de un sistema multipartita corresponde a la distancia geodésica bajo la métrica de Fubini-Study entre el estado  $|\psi\rangle$  y el estado separable más cercano  $|\Lambda_\psi\rangle$  (ver Figura 5.5) [2]:

$$\begin{aligned} E_G(|\psi\rangle) &= \log_2 \left( \frac{1}{\langle \Lambda_\psi | \psi \rangle} \right) \\ &= \min_{|\lambda\rangle \in \mathcal{H}_{sep}} \log_2 \left( \frac{1}{\langle \lambda | \psi \rangle} \right) \end{aligned} \quad (5.91)$$

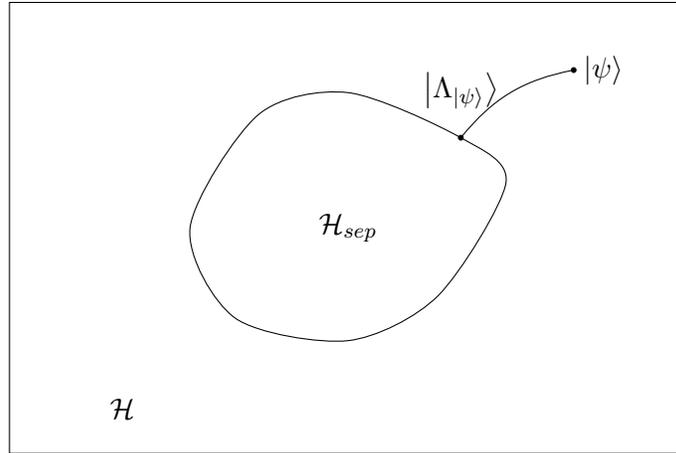


Figura 5.5: Esquema del cálculo de la medida geométrica del enredamiento de un estado  $|\psi\rangle$  a través de su distancia geodésica al estado separable más cercano  $|\Lambda_{|\psi\rangle}\rangle$ .

Luego, a partir de esta definición y del hecho de que el espacio de Hilbert de estados normalizados de dimensión finita es un espacio compacto, es posible encontrar el estado que maximice la función (5.91) a la cual se le identifica como estado de máximo enredamiento.

Encontrar el estado  $|\Lambda_{|\psi\rangle}\rangle$  de un estado arbitrario  $|\psi\rangle$  no es trivial y es un problema que se simplifica considerablemente si reducimos nuestro estudio únicamente a los estados simétricos, como los descritos por la ecuación (5.89). Para esto es importante notar que el estado separable más cercano a un estado simétrico es simétrico, y además, el estado  $|\Lambda_{|\psi\rangle}\rangle$  debe ser factorizable, entonces únicamente puede ser de un estado de la forma:

$$|\Lambda\rangle_s = |\sigma\rangle^{\otimes n}, \quad (5.92)$$

donde  $|\sigma\rangle$  corresponde a un solo *qbit* [16]. Esto significa que si se quiere representar este estado utilizando la representación estelar de Majorana, todas las  $n$  estrellas que conforman la constelación serán mapeadas a un único punto sobre la esfera de Bloch. Esta es una característica de los estados coherentes.

Por otro lado tenemos la

**Lema 5.3.1.** *Todo estado simétrico máximamente enredado  $|\psi\rangle_s$  tiene al menos dos distintos estados de mínima distancia respecto a la métrica de Fubini-Study.*

La demostración de este lema se encuentra en [2].

### 5.3.3. Estados de máximo enredamiento, puntos críticos de la función $\Delta H$ y representación de Majorana

Finalmente, la representación estelar de Majorana, resulta ser una herramienta sumamente útil para estudiar el problema de optimización, de encontrar el estado máximamente enredado para un sistema de  $n$  *qbits* junto con el conjunto de estados separables más cercanos. Los cuales, como hemos mencionado anteriormente, resultan ser estados coherentes.

En [2], se estudia este problema para sistemas desde 2 hasta 12 *qbits*, utilizando métodos numéricos a partir de 4 *qbits*, mientras que para sistemas de 2, 3, 4 y 6 *qbits*, las representaciones de Majorana de sus estados máximamente enredados y las de sus estados separables más cercanos están ilustrados en la Figura 5.6.

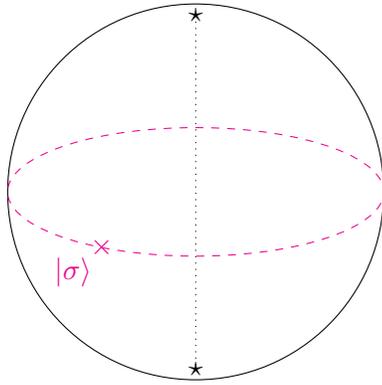
Además nos es atractivo notar que para los casos de 2, 3, 6, 7 y 9 *qbits* los estados de máximo enredamiento son:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |S_{2,1}\rangle, \\
 |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |S_{3,1}\rangle, \\
 |\Psi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_{6,1}\rangle + |S_{6,5}\rangle), \\
 |\Psi_7\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_{7,1}\rangle + |S_{7,6}\rangle), \\
 |\Psi_9\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_{9,1}\rangle + |S_{9,7}\rangle),
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

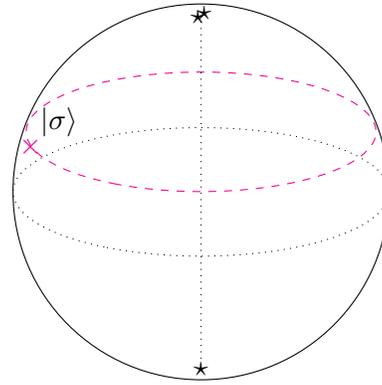
que son a su vez, puntos críticos de la función  $\Delta S_z$ .

Por otro lado, el caso de 5 *qbits*, el estado maximalmente enredado  $|\Psi_5\rangle \approx 0.54 |S_{5,0}\rangle + 0.81 |S_{5,4}\rangle$  tiene una medida geométrica de enredamiento  $E_G(|\Psi_5\rangle) \approx 1.74$  mientras que el punto crítico  $|\psi_5\rangle = 1/\sqrt{2}(|S_{5,1}\rangle + |S_{5,4}\rangle)$  tiene una medida  $E_G(|\psi_5\rangle) \approx 1.68$ , un valor bastante cercano al de máximo enredamiento.

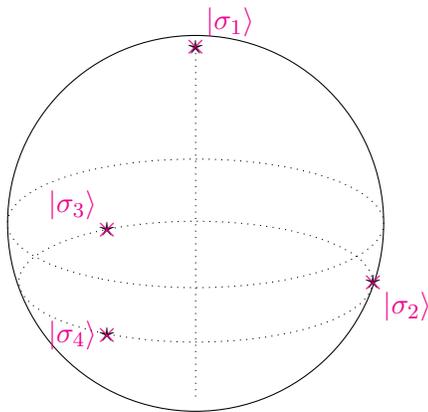
Estos resultados nos llaman la atención como una posible aplicación útil para el estudio de puntos críticos de la función  $\Delta H$ .



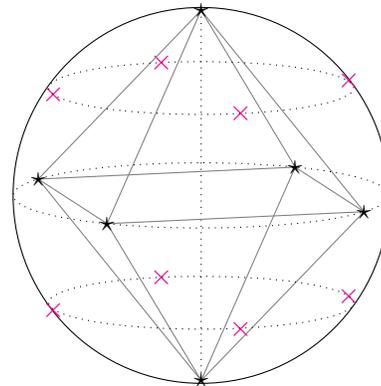
(a) Representación de Majorana del estado de máximo enredamiento para un sistema simétrico bipartita  $|\Psi_2\rangle = \sqrt{1/2}(|01\rangle + |10\rangle)$ , para el cual, los estados separables más cercanos  $|\sigma\rangle = \sqrt{1/2}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$  forman un conjunto continuo ubicado a lo largo del ecuador de la esfera.



(b) Representación de Majorana del estado de máximo enredamiento para un sistema simétrico tripartita  $|\Psi_3\rangle = \sqrt{1/2}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ , para el cual, los estados separables más cercanos son de la forma  $|\sigma\rangle = \sqrt{2/3}|0\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1/3}|1\rangle$  con  $\varphi \in [0, 2\pi)$  y forman un círculo horizontal.



(c) Representación de Majorana del estado de máximo enredamiento para un sistema simétrico de 4 qubits  $|\Psi_4\rangle = \sqrt{1/3}|S_0\rangle + \sqrt{2/3}|S_3\rangle$ , para el cual, los estados separables más cercanos son aquellos ubicados en los vértices del tetraedro formado por los puntos de la constelación de Majorana de  $|\Psi_4\rangle$ .



(d) Representación de Majorana del estado de máximo enredamiento para un sistema simétrico de 6 qubits  $|\Psi_6\rangle = \sqrt{1/2}(|S_1\rangle + |S_5\rangle)$ , para el cual, los estados separables forman un cubo cuyos vértices se encuentran en medio de las estrellas de la constelación de Majorana de  $|\Psi_6\rangle$ .

Figura 5.6: Representaciones de Majorana de estados simétricos máximamente enredados marcadas con estrellas (★) junto con sus estados separables de mínima distancia marcados con cruces (×) para sistemas de 2, 3, 4 y 6 qubits.

En conclusión, de lo que se ha visto en este capítulo resaltamos que el estudio del espacio de estados cuánticos en su forma más abstracta, es decir, como un espacio topológico a través de funciones definidas sobre él, no sólo nos da información de la topología del mismo, sino que también con este estudio se obtiene información física de los estados cuánticos cuyas representaciones viven en dicho espacio.

Se ha confirmado con ésto que las representaciones abstractas de los sistemas cuánticos son muy útiles para su estudio ya que a partir de ellas se puede tener un poco más de intuición respecto al comportamiento de los estados cuánticos bajo algunas acciones específicas.

Notamos también que no todas las funciones que nos interesan físicamente cumplen con las características que nuestra teoría matemática demanda. Un ejemplo de esto es la función varianza de un operador hermitiano que resulta no ser una función de Morse. Sin embargo, sí se pudo extraer información física de los puntos críticos de dicha función, identificando a los puntos críticos no-degenerados como estados de máxima dispersión de la cantidad física representada por el operador  $H$ .

La aplicabilidad de estos puntos críticos en el estudio de estados máximamente enredados es un resultado muy atractivo para continuar indagando en posibles funciones que se puedan definir sobre el espacio de estados cuánticos, sus propiedades y sus posibles interpretaciones para los estados físicos que representan.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Así como los ciegos en la fábula descubren distintas características del elefante tocando distintas partes de su cuerpo, nosotros exploramos la topología del espacio de estados cuánticos observando distintos aspectos del mismo;

Comenzamos por calcular su característica de Euler, haciendo uso del teorema de Poincaré-Hopf, lo cual nos dio un primer resultado que nos muestra que podemos conocer una propiedad intrínseca de la topología del espacio estudiando los ceros de un campo vectorial  $v(\rho)$  definida sobre él.

Una vez tocado el tema de la característica de Euler, aprovechamos para mencionar el método propuesto por Raoul Bott en [6] de calcular la característica de Euler de una variedad como el grado de enredamiento entre el encajamiento diagonal de  $M$  en su producto cartesiano con una perturbación infinitesimal de la misma. Esta propuesta nos resultó sumamente atractiva y la consideramos como un posible tema de estudio para trabajo futuro.

Aquí volvemos a mencionar la relevancia de poder abordar un problema desde distintas perspectivas, ya que al encontrar los puntos de encuentro entre cada una de ellas podemos comprender mejor tanto las herramientas matemáticas como el sistema físico que se está estudiando.

Otro aspecto geométrico que estudiamos en este trabajo fue la existencia de conjuntos de MUB's, los cuales dependen fuertemente del producto interno hermitiano entre los estados del espacio.

Este es un punto en el que pudimos observar que en el espacio de Hilbert de estados cuánticos existe algo que en nuestra intuición euclideana no tiene sentido; múltiples bases ortonormales tales que cada elemento de una de ellas se encuentra a la misma distancia de todos los elementos de la otra. Ésto es como si además de ser bases ortonormales, cada elemento de la primera base se encontrara

en el centro geométrico de un simplex formado por los elementos de la otra base.

Una vez en el tema de bases equidistantes, nos preguntamos qué tanto podemos relacionarlos con líneas equiangulares, y vimos que las geodésicas formadas al unir dos elementos de distintas MUB's efectivamente son líneas equiangulares.

Demostrar el caso inverso, es decir, si dado un conjunto de líneas equidistantes podemos encontrar MUB's es una pregunta que dejamos abierta como otro posible tema de estudio a futuro.

Finalmente llegamos a estudiar la teoría de Morse, desarrollando el caso particular del valor esperado  $\langle S_z \rangle$  sobre el espacio proyectivo de estados cuánticos de espín 1. Encontramos que los ceros de esta función corresponden con los eigenestados del operador  $S_z$  y demostramos que en general, si utilizamos el valor esperado de cualquier operador hamiltoniano no degenerado como función de Morse, sus eigenestados corresponderán con los ceros de la función con los cuales podríamos hacer una descomposición por asas del espacio para inferir sobre su topología.

Después buscamos hacer el mismo análisis con otra función típica sobre el espacio de estados cuánticos; la varianza  $(\Delta H)^2$ . En este caso encontramos que la función tiene puntos críticos degenerados y no degenerados, por lo tanto no es una función de Morse. Sin embargo, notamos que los puntos críticos no degenerados son, al igual que en el caso del valor esperado, eigenestados del operador, mientras que los puntos críticos no-degenerados son siempre combinaciones lineales de dos eigenestados pesados igual y con una fase interna entre ellos.

Aprovechamos este resultado para compararlo con los expuestos en [2] notando que los puntos críticos de  $(\Delta H)^2$  nos pueden dar un buen punto de partida para encontrar estados mixtos máximamente enredados, que incluso en muchos de los casos resultan ser precisamente uno de estos puntos.

De todo lo dicho anteriormente, hemos comprobado la utilidad de la geometría y la topología en el estudio de sistemas físicos, en este caso de estados cuánticos. En el futuro queremos, primeramente demostrar los resultados que quedaron pendientes en este trabajo, esperando encontrar relaciones específicas entre funciones abstractas y sistemas físicos.

También queremos indagar más en las herramientas matemáticas que podrían vincularse con representaciones abstractas de sistemas cuánticos, o más idealmente, proponer alguna nueva.

## Apéndice

### A. Definiciones

Las definiciones que se enlistan a continuación fueron recuperadas de [26] manteniendo la notación que allí se utiliza.

**Definición A.1** (Espacio topológico). *Sea  $X$  un conjunto cualquiera y  $\mathcal{T} = \{U_i | i \in I\}$  una cierta colección de subconjuntos de  $X$ . A la pareja  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico si  $\mathcal{T}$  satisface los siguientes requerimientos:*

i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .

ii) Si  $J$  es cualquier subcolección (puede ser infinita) de  $I$ , la familia  $\{U_j | j \in J\}$  satisface que  $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$ .

iii) Si  $K$  es cualquier subcolección finita de  $I$ , la familia  $\{U_k | k \in K\}$  satisface que  $\bigcap_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}$ .

A los  $U_i$  se les llama conjuntos abiertos y se dice que  $\mathcal{T}$  provee una topología al conjunto  $X$ .

**Definición A.2** (Variedad diferenciable). *Se dice que  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m$  si:*

i)  $M$  es un espacio topológico.

ii)  $M$  está dotado de un atlas, es decir, una familia de pares  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  llamados cartas.

iii)  $\{U_i\}$  es una familia de conjuntos abiertos tales que  $\bigcup_i U_i = M$ .  $\varphi_i$  es un homeomorfismo que manda al abierto  $U_i$  a un conjunto abierto  $U'_i$  en  $\mathbb{R}^m$  (ver Figura 1) y

iv) dados  $U_i$  y  $U_j$  tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  el mapeo  $\psi_{ji} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  que va de  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  a  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  es de clase  $C^\infty$ .

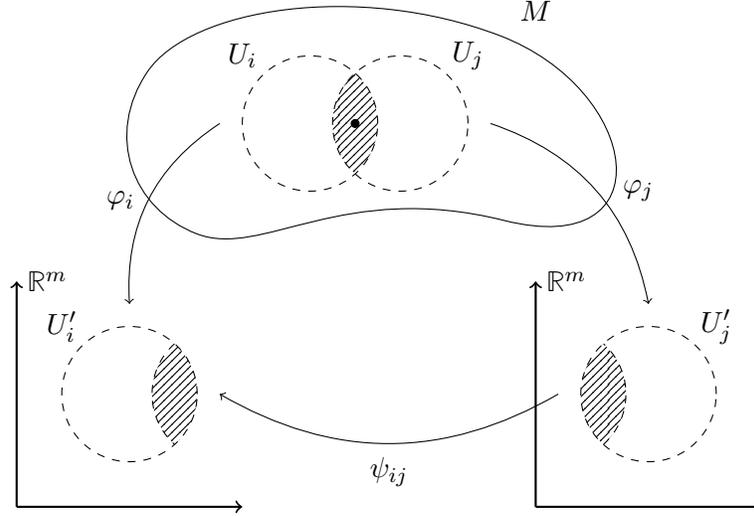


Figura 1: Diagrama de tres estados en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  conectados por geodésicas de la métrica de Fubini-Study. El ángulo  $\Theta_{ab}$  es el ángulo entre los vectores tangentes  $v_a$  y  $v_b$  a las geodésicas que conectan al estado  $\rho_\psi$  con  $\rho_a$  y  $\rho_b$ , respectivamente.

**Definición A.3** (Vectores tangentes). Para definir un vector tangente en una variedad  $M$ , es necesaria una curva  $c(t) : (a, b) \rightarrow M$  y una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $(a, b)$  es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$  que contiene a  $t = 0$ .

Entonces, definimos el vector tangente  $Y$  en  $c(0)$  como la derivada direccional de una función  $f(c(t))$  a lo largo de la curva  $c(t)$  en  $t = 0$ :

$$Y = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (1)$$

**Definición A.4** (Cubiertas). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. A una familia  $\{A_i\}$  de subconjuntos de  $X$  se le llama cubierta de  $X$  si

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X \quad (2)$$

**Definición A.5.** Considérese un conjunto  $X$  y todas las posibles cubiertas de  $X$ . Se dice que  $X$  es compacto si para cualquier cubierta  $\{U_i | i \in I\}$  existe un subconjunto finito  $J$  de  $I$  tal que  $\{U_j | j \in J\}$  es también una cubierta de  $X$ .

# Bibliografía

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [2] M. Aulbach, D. Markham, and M. Murao. The maximally entangled symmetric state in terms of the geometric measure. *New Journal of Physics*, 12(7):073025, July 2010.
- [3] A. Barg and W.-H. Yu. New bounds for equiangular lines. 625, 11 2013.
- [4] I. Bengtsson, S. Weis, and K. Życzkowski. Geometry of the set of mixed quantum states: An apophatic approach. *Geometric Methods in Physics*, page 175–197, Sep 2012.
- [5] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 1 edition, 2006.
- [6] R. Bott. Book review: The geometry and physics of knots. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26(1):182–189, Jan. 1992.
- [7] S. Brierley, S. Weigert, and I. Bengtsson. All mutually unbiased bases in dimensions two to five. *Quantum information & computation*, 07 2009.
- [8] A. Buchleitner, C. Viviescas, and M. Tiersch, editors. *Entanglement and Decoherence*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [9] R. Chhim. Morse theory and supersymmetry. Master’s thesis, Centro de Investigación en Matemáticas A.C., Jalisco S/N, Col. Valenciana CP. 36023 Guanajuato, 2017.
- [10] C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, and E. Serrano-Ensástiga. Geometry of spin coherent states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51(16):165202, Mar 2018.
- [11] T. Durt, B.-G. Englert, I. Bengtsson, and K. Życzowski. On mutually unbiased bases. *International Journal of Quantum Information*, 08(04):535–640, June 2010.

- [12] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10):777–780, May 1935.
- [13] G. Fubini. Sulle metriche definite da una forma hermitiana. *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, (63):501–513, 1904.
- [14] J. Haantjes. Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional spaces. *Nieuw Arch Wisk*, (22):355–362, 1948.
- [15] H. Hopf. Vektorfelder in  $n$ -dimensionalen mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 96(1):225–249, 1927.
- [16] R. Hübener, M. Kleinmann, T.-C. Wei, C. González-Guillén, and O. Gühne. Geometric measure of entanglement for symmetric states. *Physical Review A*, 80(3), Sept. 2009.
- [17] P. Lemmens and J. Seidel. Equiangular lines. *Journal of Algebra*, 24(3):494–512, Mar. 1973.
- [18] J. V. Lint and J. Seidel. Equilateral point sets in elliptic geometry. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: Series A: Mathematical Sciences*, 69(3):335–348, 1966.
- [19] E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Il Nuovo Cimento*, 9(2):43–50, Feb. 1932.
- [20] D. J. H. Markham. Entanglement and symmetry in permutation-symmetric states. *Physical Review A*, 83(4), Apr 2011.
- [21] P. Mathonet, S. Krins, M. Godefroid, L. Lamata, E. Solano, and T. Bastin. Entanglement equivalence of  $n$ -qubit symmetric states. *Phys. Rev. A*, 81:052315, May 2010.
- [22] Y. Matsumoto. *An introduction to Morse theory*. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2002.
- [23] J. W. Milnor. *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies AM-51. Princeton University Press, 1963.
- [24] J. W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia, 1965.

- [25] F. Mintert, C. Viviescas, and A. Buchleitner. Basic concepts of entangled states. In *Entanglement and Decoherence*, pages 61–86. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [26] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Graduate student series in physics. Hilger, Bristol, 1990.
- [27] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co, rev. ed edition, 1994.
- [28] E. Schmidt. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 63(4):433–476, Dec. 1907.
- [29] E. Schrödinger. Probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32(3):446–452, Oct. 1936.
- [30] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction To Differential Geometry*, volume Vol1. Publish Or Perish, 3 edition, 1999.
- [31] E. Study. Kurzeste wege im komplexen gebiet. *Mathematische Annalen*, 60(3):321–378, Sept. 1905.
- [32] J. van der Heijden. Morse theory and supersymmetry. Bachelor’s thesis mathematics, physics and astronomy, University of Amsterdam, Science Park 904, 1098 XH Amsterdam, 2016.
- [33] V. Vedral and M. B. Plenio. Entanglement measures and purification procedures. *Physical Review A*, 57(3):1619–1633, Mar. 1998.
- [34] T.-C. Wei and P. M. Goldbart. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Physical Review A*, 68(4), Oct. 2003.
- [35] R. F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, 40(8):4277–4281, Oct. 1989.
- [36] W. K. Wootters and B. D. Fields. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements. *Annals of Physics*, 191(2):363–381, May 1989.