UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
PLANTEL ACATLÁN

APUNTES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE PRUEBAS DE HIPÓTESIS

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

RICARDO ALEXIS CAUICH GARCIA

ASESOR:
ACT. LUZ MARÍA LAVÍN ALANÍS

SANTA CRUZ ACATLÁN, EDO. DE MÉXICO
AGOSTO 2021

Agradecimientos

La presente tesina es un trabajo que se logró gracias al apoyo de una maravillosa persona y asesora, la Act. Luz María Lavín Alanís y un excelente profesor Mtro. Arturo Vera Moreno, a los cuales les agradezco su tiempo, opiniones, correcciones, el tiempo y esfuerzo que me brindaron.

A mis sinodales; así como al Fis. Mat. Isidro Morales Garcia por ayudarme con sus comentarios y correcciones enriqueciendo este trabajo y haciendo de el un excelente trabajo de titulación.

A los profesores Act. Mahil Herrera Maldonado, Mat. Jesús Ángel Lara Rivera, Fis. Mat. Jorge Luis Suárez Madariaga, Mat. Nadia Huerta Sánchez y Fis. Manuel Valadez Rodríguez quienes son los profesores que me impartieron catedra durante la licenciatura, y de los cuales me llevo grabado su conocimiento y pasión por la enseñanza siendo una inspiración a futuro para mí.

A mis padres Lucero Garcia y Ricardo Cauich, por tenerme paciencia, darme todo su apoyo y confianza, su dedicación y sacrificio para que yo pudiera salir adelante, por acompañarme siempre en los buenos y malos momentos, y siempre estar para mí.

A mi abuela Magdalena Villafuerte, porque es una figura excepcional que siempre me demostró su apoyo incondicional siendo una segunda madre; igualmente mi tío Edgar Garcia, que siempre me ha guiado y apoyado en mis decisiones fungiendo como un segundo padre.

A mi tío Osvaldo Garcia, mis hermanos Brisa Cauich y Ulises Cauich, quienes siempre me apoyaron de forma incondicional a lo largo de la licenciatura.

A mis queridos amigos, que me apoyaron y me dieron cabida en su vida, algunos desde antes de la licenciatura, pero todos siempre siendo los mejores dentro y fuera de la escuela, los cuales les tengo un gran aprecio y apego por siempre estar ahí Vania Mendoza, Daniela Itzel, Nelly Fernanda, Oscar Albino, Misael Monroy, Gerardo Alberto, Edwin León, Guillermo Contreras, Yoltzin Pérez, Christian Nava, Cinthya Lorena, Christofer Mata, Armando Cruz, Verónica Pérez, Víctor Yáñez, Manuel Moranchel, Pedro Santacruz, David Aquino, Eliot Viveros, Mariana Rojas, Adán Arias, Ricardo Ruelas, Eder Montes, Daniel Baranda, Francisco Pavón, Luis López, Daniel Lechuga, Karen Martínez, Cid Pérez, Hanqui Chen, Juan Mendoza, Jorge Enríquez, Estefanía Ávila, Oscar Hernández y a mís queridos gatos Persian y Luxio.

A los que no logre mencionar pero que de manera directa o indirecta tuvieron contribución para que este logro se volviera una realidad. Gracias a todos.

Contenido

Introducción

En las investigaciones siempre existen preguntas y precisamente son diseñadas para responderlas. En la estadística inferencial existen dos grandes áreas, la estimación de parámetros y el diseño de pruebas de hipótesis. Ambos tópicos son primordiales en cualquier estudio estadístico.

Por ello podríamos hacernos algunas preguntas como ¿Cuál es el mejor estimador para inferir algún parámetro desconocido en cierta población?, ¿Existirá alguna diferencia estadísticamente significativa entre un estimador y el parámetro de alguna población? o ¿entre dos estimadores? Al hacer alguna estimación ¿Qué tan seguros podemos estar de ella?, para responder a estas preguntas recurriremos a las pruebas o contrastes de hipótesis.

Tomemos por ejemplo lo siguiente, tratemos de encontrar un estimador de la edad promedio de los estudiantes de estadística II de la licenciatura de actuaría de la Fes Acatlán, una forma de hacer esto sería tomar la media muestral de las edades de algún grupo que cumpla estas condiciones, pero este estimador ¿qué tan preciso seria?, ¿sería esta la mejor estimación para la edad promedio?, si por ejemplo ahora tomamos la media muestral de tres grupos de diferente generación que cumplan los supuestos, ¿Cómo saber que estimación es mejor?.

A lo largo de este texto se presentarán técnicas y procedimientos estadísticos con los cuales seremos capaces de dar respuesta a todo este tipo de cuestionamientos.

Objetivo General

Esta tesina tiene como finalidad apoyar la asignatura de estadística II del plan 2014 de la licenciatura en Actuaría de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán; mediante la recopilación de información de la primera unidad del temario, que consiste en pruebas de hipótesis, además de incorporar la resolución de varios ejercicios, para que se analicen más a fondo los métodos y técnicas que se incorporan en el texto. La finalidad de profundizar en estos temas es poder facilitar al alumno la consulta de los mismos, y tener un mayor entendimiento de los problemas y su resolución.

Planteamiento del Problema

Un problema muy común en los estudiantes de Actuaría que cursan la materia de Estadística II, es comprender el nivel de abstracción de la primera unidad del curso: Pruebas de Hipótesis, por lo que resulta muy importante contar con un material de apoyo que permita entender adecuadamente los conceptos más importantes que ahí se desarrollan, así como el planteamiento y resolución de ejercicios relacionados con el tema.

Alcance

La tesina “Apuntes y Ejercicios Resueltos de Pruebas de Hipótesis” cubre todo el temario de la primera unidad del plan 2014, quedando a consideración del propio alumno el profundizar los temas en materiales o textos ya especializados, sin embargo, podrá contar con un panorama general y conocimientos adecuados para poder consultar cualquier fuente de información y entenderla con mayor facilidad, pues ya habrá adquirido la capacidad de abordar un problema, analizarlo y llegar a una solución.

Permite conocer el trasfondo de que es una prueba de hipótesis bajo el enfoque clásico de la estadística, así como conceptos fundamentales como lo son los errores tipo I y II, además muestra los diversos métodos para la construcción de estas pruebas, como clarifica más estos conceptos con diversos ejemplos bajo diferentes condiciones.

Hipótesis

"¿Es factible desarrollar material didáctico, teórico – práctico, adecuado y accesible para el tema de Pruebas de Hipótesis que se contempla en la materia de Estadística II, del plan de estudios 2014 de la licenciatura de Actuaría?"

Metodología

La metodología empleada en esta tesina fue la recaudación de varios apuntes de profesores que hayan impartido la materia de Estadística II, contrastándolos con el temario propuesto en el plan 2014 y enriqueciendo esta información con diversas fuentes bibliográficas, también realizando la resolución de ejercicios de algunos libros y de los mismos profesores antes mencionados, dando así un panorama completo de cómo abordar estos temas desde la parte teórica hasta la práctica.

Capítulo 1

Pruebas de hipótesis

1.1. Conceptos Preliminares

Una manera de hacer inferencia es haciendo una afirmación acerca del valor que el parámetro de la población bajo estudio puede llegar a tomar. Esta afirmación puede estar basada en alguna creencia o experiencia pasada que será contrastada con la evidencia que nosotros obtengamos a través de la información contenida en la muestra. Esto es a lo que llamamos Prueba de Hipótesis.

Definición 1. Una ***hipótesis estadística*** es una suposición o conjetura acerca de la distribución de una o más variables aleatorias.

Dependiendo de las características de la hipótesis estadística, denotada generalmente por $\mathcal{H}$, esta se puede clasificar en dos tipos, hipótesis simple e hipótesis compuesta.

Definición 2. Se dirá que $\mathcal{H}$ es una ***hipótesis simple*** si especifica puntualmente la o las características de una o más variables aleatorias.

Definición 3. Se dirá que $\mathcal{H}$ es una ***hipótesis compuesta*** si no se especifica puntualmente la o las características de una o más variables aleatorias.

Ejemplo 1. Suponga que la edad de la población que toma una clase de Estadística II en la Fes Acatlán se distribuye de manera Normal con varianza 4 y media desconocida θ ; se toma una muestra de tamaño 57, recolectando los datos de la Tabla 1; dos posibles conjeturas sobre el promedio de edad de dicha población son:

i. La edad media de la población es de 21.01754.

ii. La edad media de la población es mayor a 21.01754

Edad	Frecuencia
20	21
21	26
22	2
23	5
24	2
25	1

Tabla 1.

Al analizar un poco la Tabla 1, y obtener el estadístico $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ con x_i los 57 datos observados, tenemos como resultado que $\bar{x} =$ 21.01754, de aquí nacen las conjeturas que podemos expresarlas con la notación usual de la siguiente manera:

i. $\mathcal{H}_1 \colon \theta =$ 21.01754.

ii. $\mathcal{H}_2 \colon \theta \geq$ 21.01754.

Definición 4. Una ***prueba de hipótesis*** (denotada por Υ) es una regla o método para decidir si rechazar o no una hipótesis estadística $\mathcal{H}$.

Ejemplo 2. Retomando el Ejemplo 1 se listarán cuatro posibles reglas de decisión para la hipótesis estadística $\mathcal{H}_1$:

i. $\Upsilon_1 \colon \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_1 \text{ si } \bar{x} < 21.01754\}$.

ii. $\Upsilon_2 \colon \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_1 \text{ si } \bar{x} < 21.01754 - 2\}$.

iii. $\Upsilon_3 : \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_1 \text{ si } \bar{x} < 21.01754 - \left({}^{2}/_{\sqrt{n}} \right)\right\}.$

iv. $\Upsilon_4 : \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_1 \text{ sí al lanzar un volado justo sale Sol}\}.$

Definición 5. Considere una prueba Υ sobre una hipótesis $\mathcal{H}$ definida de la siguiente manera:

$$\Upsilon : \{\text{Rechazar } \mathcal{H} \text{ si } (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in C_\Upsilon\} \text{ donde } C_\Upsilon \subseteq \Omega.$$

Entonces C_Υ se define como la ***región critica*** o ***región de rechazo*** asociada a la prueba Υ.

Ejemplo 3. Continuando con el Ejemplo 2 se listan las cuatro regiones críticas para las pruebas de la hipótesis estadística $\mathcal{H}_1$:

i. $C_{\Upsilon_1} = \{(x_1 , x_2 , \dots , x_n) : \bar{x} < 21.01754\}.$

ii. $C_{\Upsilon_2} = \{(x_1 , x_2 , \dots , x_n) : \bar{x} < 21.01754 - 2\}.$

iii. $C_{\Upsilon_3} = \left\{(x_1 , x_2 , \dots , x_n) : \bar{x} < 21.01754 - \left({}^{2}/_{\sqrt{n}} \right)\right\}.$

iv. $C_{\Upsilon_4} = \{(x_1 , x_2 , \dots , x_n) : \text{al lanzar un volado justo sale Sol}\}.$

Definición 6. La ***hipótesis Nula*** $(\mathcal{H}_0)$ es aquella sobre la cual está diseñada la prueba, aquella que va a ser probada en contraste con la ***hipótesis Alternativa*** $(\mathcal{H}_1)$.

Nota: Cuando en la construcción de una prueba de hipótesis haya la necesidad de suponer alguna de las dos hipótesis como cierta, siempre se supondrá cierta la hipótesis nula.

1.2. Errores Tipo I y II

Definición 7. El ***error tipo I***, error tipo alfa (α) o falso positivo es el error que se comete cuando se rechaza la hipótesis nula siendo esta verdadera.

Definición 8. El ***error tipo II***, error tipo beta (β) o falso negativo es el error que se comete cuando no se rechaza la hipótesis nula, aunque esta sea falsa.

Definición 9. La ***sensibilidad*** es la capacidad de la prueba para dar como positivos casos ciertos.

Definición 10. La ***especificidad*** es la capacidad de la prueba para dar como negativos casos realmente falsos.

Nota: Existe una relación complementaria entre la sensibilidad con el error tipo I y entre la especificidad con el error tipo II, pero no necesariamente entre la sensibilidad con la especificidad ni el error tipo I con el II; se pueden resumir estos conceptos en la Tabla 2 y se cumplen las siguientes propiedades:

- **i.** Sensibilidad + $\alpha = 1$.
- **ii.** Especificidad + $\beta = 1$.
- **iii.** $\alpha, \beta \geq 0$.

		Condición del fenómeno	
		Verdadero	**Falso**
Resultado de la Prueba	**No Rechazar**	Sensibilidad (Verdadero Positivo)	Error Tipo II (β) (Falso Negativo)
	Rechazar	Error Tipo I (α) (Falso Positivo)	Especificidad (Verdadero Negativo)

Tabla 2.

1.3. Función Potencia

Definición 11. Sea Υ una prueba para la hipótesis nula $\mathcal{H}_0$. La ***función potencia*** de la prueba Υ denotada por $\Pi_\Upsilon(\theta)$ se define como la probabilidad de rechazar $\mathcal{H}_0$ cuando la distribución de la muestra tiene parámetro θ con $\theta \in \Theta$.

Definición 12. Sea Υ una prueba de hipótesis tal que $\mathcal{H}_0: \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$, siendo Θ_0 un subconjunto del espacio paramétrico Θ donde θ puede tomar valores, el ***tamaño de la prueba*** Υ es la máxima probabilidad de cometer el error tipo I y se denota como $\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \Pi_\Upsilon(\theta)$.

Definición 13. Para Υ una prueba de hipótesis tal que $\mathcal{H}_0: \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$, se dice que tiene un ***nivel de significancia*** $\boldsymbol{\alpha}$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ si $\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \Pi_\Upsilon(\theta) \leq \alpha$**.**

Ejemplo 4. Para Υ la prueba de la hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 21 \text{ vs } \mathcal{H}_1: \theta > 21$$

Con región critica:

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ \bar{x} > 21 + \left({}^{2}\!/_{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

Obtener el error tipo I, error tipo II, función potencia y el tamaño de la prueba, suponiendo una muestra proveniente de una distribución Normal con media θ y varianza 4.

Solución:

Para el error tipo I sabemos que α es la probabilidad de rechazar $\mathcal{H}_0$ dado que $\mathcal{H}_0$ es cierta, es decir.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\bar{x} > 21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) \mid \theta \leq 21\right)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta \leq 21$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_0 y varianza 4, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_0 y varianza ${}^{4}/_{n}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{{}^{4}/_{n}}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{x} \leq 21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) \mid \theta \leq 21\right)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{{}^{4}/_{n}}} \leq \frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_0}{\sqrt{{}^{4}/_{n}}} \mid \theta \leq 21\right)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_0}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \leq \frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_0}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \mid \theta \leq 21\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_0}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \mid \theta \leq 21\right)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una Normal (0,1) y θ_0 un elemento del espacio $\Theta_0 = \{\theta : \theta \leq 21\}$. Quedando el error tipo I como una función de θ_0.

Para el error tipo II sabemos que β es la probabilidad de no rechazar $\mathcal{H}_0$ dado que $\mathcal{H}_0$ es falsa, es decir.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ Falsa})$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\bar{x} \leq 21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) \mid \theta > 21\right)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ falsa se tiene que $\theta > 21$ y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_1 y varianza 4, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_1 y varianza ${}^{4}/_{n}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-\theta_1}{\sqrt{{}^{4}/_{n}}} \sim N(0,1)$. Entonces.

$$\beta = \mathbb{P}\left(\bar{x} \leq 21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) \mid \theta > 21\right)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_1}{\sqrt{{}^{4}/_{n}}} \leq \frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_1}{\sqrt{{}^{4}/_{n}}} \mid \theta > 21\right)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_1}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \leq \frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_1}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \mid \theta > 21\right)$$
$$\beta = \phi\left(\frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_1}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \mid \theta > 21\right)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una Normal (0,1) y θ_1 un elemento del espacio $\Theta_1 = \{\theta : \theta > 21\}$. Quedando el error tipo II como una función de θ_1.

Para la función potencia sabemos que $\Pi_\Upsilon(\theta)$ es la probabilidad de rechazar $\mathcal{H}_0$ dado que $\theta \epsilon \Theta$, es decir.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \epsilon \Theta$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}\left(\bar{x} > 21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) \mid \theta = \theta_0\right)$$

Como $\theta = \theta_0$ podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_0 y varianza 4, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_0 y varianza ${}^{4}/_{n}$. Estandarizando esta Normal se tiene que $\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{4/n}} \sim N(0,1)$. Entonces.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{x} \leq 21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{4/n}} \leq \frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_0}{\sqrt{4/n}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \leq \frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_0}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{21 + \left({}^{2}/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_0}{{}^{2}/_{\sqrt{n}}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ y θ_0 un elemento del espacio Θ. Quedando $\Pi_{\Upsilon}(\theta_0)$ como una función de θ_0.

Para la función potencia sabemos es la máxima probabilidad de cometer el error tipo I, es decir.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon}(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Max}\{\mathbb{P}(\text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta })\}$$

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon}(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Max}\left\{\mathbb{P}\left(\bar{x} > 21 + \left({}^{2}\!/_{\sqrt{n}}\right) \mid \theta \leq 21\right)\right\}$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta \leq 21$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_0 y varianza 4, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_0 y varianza ${}^{4}\!/_{n}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{{}^{4}\!/_{n}}} \sim N(0,1)$. Y esta probabilidad es equivalente a la función potencia por lo que habrá que maximizar la función potencia dentro del espacio paramétrico $\Theta_0 = \{\theta : \theta \leq 21\}$ entonces sabemos que $0 \leq \theta \leq 21$ ya que θ modela la edad promedio, entonces.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon}(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Max}\left\{1 - \phi\left(\frac{21 + \left({}^{2}\!/_{\sqrt{n}}\right) - \theta_0}{{}^{2}\!/_{\sqrt{n}}} \mid \theta \leq 21\right)\right\}$$

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon}(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Max}\left\{1 - \phi\left(\frac{21}{{}^{2}\!/_{\sqrt{n}}} + 1 - \frac{\theta_0}{{}^{2}\!/_{\sqrt{n}}} \mid \theta \leq 21\right)\right\}$$

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon}(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Max}\left\{1 - \phi\left(\frac{21\sqrt{n}}{2} + 1 - \frac{\theta_0\sqrt{n}}{2} \mid \theta \leq 21\right)\right\}$$

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon}(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Max}\left\{1 - \phi\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{2}(21 - \theta_0) \mid \theta \leq 21\right)\right\}$$

Analizando la función notamos que depende de n y θ_0 pero el factor de $(21 - \theta_0)$ esta acotada entre 0 y 21 por el dominio de θ, en cambio el factor de $\frac{\sqrt{n}}{2}$ no tiene alguna cota superior y para un n lo suficientemente grande $\phi\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{2}(21 - \theta_0)\right)$ tendería a 1 y con ello la función potencia a 0, a menos que $\theta_0 = 21$ ya que se anularía el producto sin importar el tamaño de n y maximizando la función con este valor de θ_0, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \Pi_Y(\theta) = 1 - \phi(1)$$

$$\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \Pi_Y(\theta) = 1 - 0.8413$$

$$\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \Pi_Y(\theta) = 0.1587 = \alpha$$

Capítulo 2

Construcción de pruebas de hipótesis

2.1. Pruebas por Cociente de Verosimilitudes

Para esta sección estudiaremos la construcción y análisis de pruebas sobre hipótesis puntualmente especificadas. Suponga que para cierta muestra observable $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se sabe que esta proviene de alguna de dos posibles distribuciones que difieren entre si únicamente en uno de sus parámetros, es decir, podemos definir una prueba de hipótesis como:

$$\mathcal{H}_0: x_i \sim f_0(*) \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: x_i \sim f_1(*)$$

Suponga que (para fines de este ejemplo) la distribución verdadera es $f_0(*)$, entonces para la mayoría de los casos en la muestra deberíamos observar que:

$$f_0(x_i) > f_1(x_i)$$

Se puede apreciar esto último mediante la Figura 1, donde se muestran las distribuciones $f_0(x_i)$, $f_1(x_i)$ y los valores $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reportados por la muestra y se hace presente que como $f_0(*)$ es la distribución verdadera los datos se cargan más hacia ella.

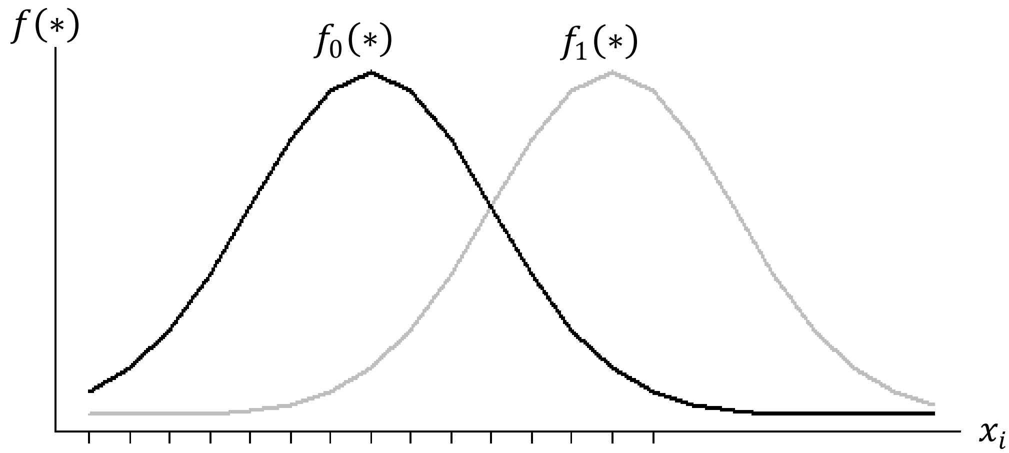

Figura 1.

Para la muestra completa se puede esperar que $\prod_{i=1}^{n} f_0(x_i) > \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)$ o lo que es lo mismo $\mathcal{L}(\theta_0|x) > \mathcal{L}(\theta_1|x)$, por lo tanto, si se define a $\lambda = {}^{\mathcal{L}_0}/_{\mathcal{L}_1}$, un valor chico de λ es un indicio para rechazar $\mathcal{H}_0$ mientras que si λ es grande resulta lógico no rechazar $\mathcal{H}_0$.

Por otro lado, si no se contara con alguna regla de decisión para rechazar alguna prueba de hipótesis, se puede **Aleatorizar** la decisión mediante algún fenómeno de la misma naturaleza, como pudiera ser lanzar una moneda o dado, o cualquier fenómeno que no se tenga certeza de su resultado.

Definición 14. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria cuya distribución es $f_0(*)$ o $f_1(*)$. Sea Υ una prueba para:

$$\mathcal{H}_0: x_i \sim f_0(*) \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: x_i \sim f_1(*)$$

Se dice que Υ es una ***prueba razón de verosimilitud para hipótesis simples*** si está definida como:

$$\Upsilon:\begin{cases}\text{Rechazar } \mathcal{H}_0, & \text{si } \lambda < k\\ \text{No Rechazar } \mathcal{H}_0, & \text{si } \lambda > k\\ \text{Aleatorizar}, & \text{si } \lambda = k\end{cases}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\,\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\,\theta_1)} = \frac{\mathcal{L}(\theta_0|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta_1|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)} = \frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1} \qquad \wedge \quad k \in \mathbb{R}^+$$

2.2. Pruebas por Unión-Intersección e Intersección-Unión

Suponga que se tienen varias pruebas de hipótesis con sus respectivas regiones de rechazo, ahora considere construir nuevas pruebas de hipótesis a partir de la unión o intersección de las regiones de rechazo de las primeras pruebas, considerando el espacio paramétrico de varias pruebas como conjuntos se puede dar una idea en la Figura 2.

Sea $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución $f(x|\,\theta)$ y sea Θ el espacio paramétrico para θ, ahora considere Θ_{0_1} y Θ_{0_2} dos subconjuntos de Θ que pueden ser o no disjuntos, a partir de estos dos subconjuntos se pueden asociar a dos hipótesis nulas.

$$\mathcal{H}_{0_1}: \theta \in \Theta_{0_1} \subseteq \Theta \quad \wedge \quad \mathcal{H}_{0_2}: \theta \in \Theta_{0_2} \subseteq \Theta$$

También supongamos que ya existen pruebas de hipótesis asociadas a estas con sus respectivas regiones de rechazo.

$$\Upsilon_1: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_{0_1} \text{ si } (x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in \complement_{\Upsilon_1}\right\}$$

$$\Upsilon_2: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_{0_2} \text{ si } (x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in \complement_{\Upsilon_2}\right\}$$

con

$$\complement_{\Upsilon_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1\}$$
$$\complement_{\Upsilon_2} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_2\}$$

Siendo $t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ transformaciones de la muestra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, V_1 y V_2 son el conjunto de valores con los que se tomara la decisión de rechazar o no $\mathcal{H}_{0_1}$ y $\mathcal{H}_{0_2}$ respectivamente.

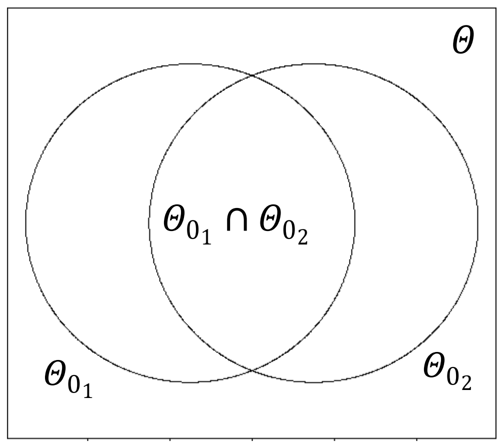

Figura 2.

Ahora consideremos el caso en el que $(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon \left(\complement_{\Upsilon_1} \cap \complement_{\Upsilon_2}\right)$, esto nos diría que se rechazarían $\mathcal{H}_{0_1}$ y $\mathcal{H}_{0_2}$ a la vez, por lo que se rechaza que $\theta \epsilon \left(\Theta_{0_1} \cup \Theta_{0_2}\right)$, ahora nombramos $\complement_{\Upsilon} = \complement_{\Upsilon_1} \cap \complement_{\Upsilon_2}$ siendo esta una nueva región de rechazo para una prueba Υ para la hipótesis nula.

$$\mathcal{H}_0 : \theta \epsilon \Theta_0 \coloneqq \left(\Theta_{0_1} \cup \Theta_{0_2}\right) \subseteq \Theta$$

En el caso en el que $(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon \left(\complement_{\Upsilon_1} \cup \complement_{\Upsilon_2}\right)$, esto nos diría que se rechazaría $\mathcal{H}_{0_1}$ o $\mathcal{H}_{0_2}$, pero el espacio donde se cumplen ambas condiciones seria en la intersección de los espacios paramétricos por lo que se rechaza que $\theta \epsilon \left(\Theta_{0_1} \cap \Theta_{0_2}\right)$, ahora nombramos $\complement_{\Upsilon^*} = \complement_{\Upsilon_1} \cup \complement_{\Upsilon_2}$ siendo esta una nueva región de rechazo para una prueba Υ^* para la hipótesis nula.

$$\mathcal{H}_{0^*}: \theta \epsilon \Theta_{0^*} \coloneqq \left(\Theta_{0_1} \cap \Theta_{0_2}\right) \subseteq \Theta$$

Definición 15. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución $f(x|\theta), \Theta$ el espacio paramétrico para θ.

$$\Upsilon_1: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_{0_1} \text{ si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon \complement_{\Upsilon_1}\right\}$$
$$\Upsilon_2: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_{0_2} \text{ si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon \complement_{\Upsilon_2}\right\}$$

Dos pruebas para:

$$\mathcal{H}_{0_1}: \theta \epsilon \Theta_{0_1} \ vs\ \mathcal{H}_{1_1}: \theta \epsilon \Theta_{1_1}$$
$$\mathcal{H}_{0_2}: \theta \epsilon \Theta_{0_2} \ vs\ \mathcal{H}_{1_2}: \theta \epsilon \Theta_{1_2}$$

Con $\Theta_{0_1} \subseteq \Theta$ y $\Theta_{0_2} \subseteq \Theta$ no necesariamente disjuntos y con regiones de rechazo:

$$\complement_{\Upsilon_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon V_1\}$$
$$\complement_{\Upsilon_2} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon V_2\}$$

Se dice que Υ es una ***prueba por Unión-Intersección*** si se define como:

$$\Upsilon: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon \complement_{\Upsilon}\}$$

Para:

$$\mathcal{H}_0: \theta \in \Theta_0 \coloneqq \left(\Theta_{0_1} \cup \Theta_{0_2}\right) \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta \in \Theta_1$$

Y con región de rechazo:

$$C_{\Upsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \{t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1\} \cap \{t_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_2\}\}.$$

Definición 16. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución $f(x|\ \theta), \Theta$ el espacio paramétrico para θ.

$$\Upsilon_1: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_{0_1} \text{ si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_{\Upsilon_1}\right\}$$
$$\Upsilon_2: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_{0_2} \text{ si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_{\Upsilon_2}\right\}$$

Dos pruebas para:

$$\mathcal{H}_{0_1}: \theta \in \Theta_{0_1} \ vs \ \mathcal{H}_{1_1}: \theta \in \Theta_{1_1}$$
$$\mathcal{H}_{0_2}: \theta \in \Theta_{0_2} \ vs \ \mathcal{H}_{1_2}: \theta \in \Theta_{1_2}$$

Con $\Theta_{0_1} \subseteq \Theta$ y $\Theta_{0_2} \subseteq \Theta$ no necesariamente disjuntos y con regiones de rechazo:

$$C_{\Upsilon_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1\}$$
$$C_{\Upsilon_2} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_2\}$$

Se dice que Υ es una ***prueba por Intersección-Unión*** si se define como:

$$\Upsilon: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_{\Upsilon}\}$$

Para:

$$\mathcal{H}_0: \theta \in \Theta_0 \coloneqq \left(\Theta_{0_1} \cap \Theta_{0_2}\right) \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta \in \Theta_1$$

Y con región de rechazo:

$$C_{\Upsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \{t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1\} \cup \{t_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_2\}\}.$$

2.3. Pruebas Uniformemente más Potentes

Considere una muestra aleatoria que se distribuye como cierta distribución $f(x|\,\theta)$ con $\theta \in \Theta \coloneqq \{\theta_0, \theta_1\}$ y considere una prueba Υ para $\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$ vs $\mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$ con función de potencia $\Pi_{\Upsilon}(\theta)$. Una buena prueba seria aquella para cual $\Pi_{\Upsilon}(\theta_0)$ fuera chico y $\Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$ fuera grande (idealmente igual a 1).

Note que $\alpha = \Pi_{\Upsilon}(\theta_0)$ y $\beta = 1 - \Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$ y como se ha visto con anterioridad reducir el tamaño de alguno de los errores implica aumentar el otro por lo que el criterio más común para elegir a la mejor prueba es fijar el valor de α y minimizar el de β.

Definición 17. Una prueba Υ^* para:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$$

Se define como la ***prueba más potente*** de tamaño α, sí y solo si:

i. $\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_0) = \alpha$.

ii. $\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$.

Analizando la desigualdad de la condición **(ii)**, se puede deducir:

$$\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1) \iff$$
$$-\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \leq -\Pi_{\Upsilon}(\theta_1) \iff$$
$$1 - \Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \leq 1 - \Pi_{\Upsilon}(\theta_1) \iff$$
$$\beta_{\Upsilon^*} \leq \beta_{\Upsilon}$$

Para cualquier otra prueba Υ que cumpla $\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \alpha$.

2.3.1. Lema de Neyman-Pearson

Teorema 1. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida de una distribución $f(x|\,\theta)$ donde $\theta \,\epsilon\, \Theta \coloneqq \{\theta_0, \theta_1\}$ y sea 0$\leq \alpha \leq 1$ un valor fijo. Sea también $k^* \epsilon\, \mathbb{R}^+$ y C^* un subconjunto del espacio muestral tales que:

- **i.** $\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_0) = \mathbb{P}\big((x_1, x_2, \dots, x_n)\, \epsilon\, C^* |\, \theta = \theta_0\big) = \alpha.$
- **ii.** $\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1} \leq k^*, \forall\ (x_1, x_2, \dots, x_n)\, \epsilon\, C^*.$

Entonces la prueba Υ^* correspondiente a la región de rechazo C^* es la ***prueba más potente de tamaño $\boldsymbol{\alpha}$*** para:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs\ \mathcal{H}_1: \theta = \theta_1.$$

Demostración:

Se prueba para el caso continuo. Supóngase que k^* y C^* satisfacen **(i)** y **(ii)** del Teorema 1. Si no existe otra prueba de tamaño α o menor, entonces el resultado es trivial. Ahora probaremos que se cumple para cualquier prueba Υ.

Sea Υ otra prueba de tamaño α con región de rechazo $C \neq C^*$ tal que $\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}\big((x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \mid \theta = \theta_0\big) \leq \alpha$. Entonces por la Definición 17 tenemos que demostrar que $\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \Pi_\Upsilon(\theta_1)$.

$$\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \Pi_\Upsilon(\theta_1) \iff$$

$$\mathbb{P}\big((x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^* \mid \theta = \theta_1\big) \geq \mathbb{P}\big((x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \mid \theta = \theta_1\big) \iff$$

$$\int_{C^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta_1) \geq \int_{C} \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta_1) \iff$$

$$\int_{C^*} \mathcal{L}(\theta_1 | x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \int_{C} \mathcal{L}(\theta_1 | x_1, x_2, \dots, x_n) \iff$$

$$\int_{C^*} \mathcal{L}_1 \geq \int_{C} \mathcal{L}_1 \iff$$

$$\int_{C^*} \mathcal{L}_1 - \int_{C} \mathcal{L}_1 \geq 0$$

Todo se reduce a demostrar esta última desigualdad, entonces trabajemos un poco con C^* y C así.

$$C^* = (C^* \cap C) \cup (C^* \cap \bar{C})$$

$$C = (C \cap C^*) \cup (C \cap \bar{C}^*)$$

Así

$$\int_{C^*} \mathcal{L}_1 - \int_{C} \mathcal{L}_1 = \int_{(C^* \cap C) \cup (C^* \cap \bar{C})} \mathcal{L}_1 - \int_{(C \cap C^*) \cup (C \cap \bar{C}^*)} \mathcal{L}_1$$

$$= \left(\int_{(C^* \cap C)} \mathcal{L}_1 + \int_{(C^* \cap \bar{C})} \mathcal{L}_1 \right) - \left(\int_{(C \cap C^*)} \mathcal{L}_1 + \int_{(C \cap \bar{C}^*)} \mathcal{L}_1 \right)$$

$$= \int_{(C^* \cap \bar{C})} \mathcal{L}_1 - \int_{(C \cap \bar{C}^*)} \mathcal{L}_1 \quad (\mathbf{1})$$

Pero por hipótesis sabemos que.

$$\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1} \leq k^*, \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^* \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*} \mathcal{L}_0 \leq \mathcal{L}_1, \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^* \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{k^*} \mathcal{L}_0 \leq \int \mathcal{L}_1, \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^* \text{ y como } (C^* \cap \bar{C}) \subseteq C^* \quad \Rightarrow$$

$$\int_{(C^* \cap \bar{C})} \frac{1}{k^*} \mathcal{L}_0 \leq \int_{(C^* \cap \bar{C})} \mathcal{L}_1 \ , \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^* \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*} \int_{(C^* \cap \bar{C})} \mathcal{L}_0 \leq \int_{(C^* \cap \bar{C})} \mathcal{L}_1 \ , \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^* \quad (\mathbf{2})$$

Por otra parte, tenemos.

$$\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1} \leq k^*, \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^* \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1} \geq k^*, \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{C}^* \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\mathcal{L}_0 \geq \mathcal{L}_1, \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{C}^* \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k^*}\mathcal{L}_0 \leq -\mathcal{L}_1, \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{C}^* \quad \Rightarrow$$

$$\int -\frac{1}{k^*}\mathcal{L}_0 \leq \int -\mathcal{L}_1, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{C}^* \text{ y como } (C \cap \bar{C}^*) \subseteq \bar{C}^* \quad \Rightarrow$$

$$\int_{(C\cap\bar{C}^*)} -\frac{1}{k^*}\mathcal{L}_0 \leq \int_{(C\cap\bar{C}^*)} -\mathcal{L}_1 \ , \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{C}^* \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k^*}\int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_0 \leq -\int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_1 \ , \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{C}^* \quad (\mathbf{3})$$

Ahora conjuntando las desigualdades **(2)** y **(3)** tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{k^*}\int_{(C^*\cap\bar{C})} \mathcal{L}_0 - \frac{1}{k^*}\int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_0 \leq \int_{(C^*\cap\bar{C})} \mathcal{L}_1 - \int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\left(\int_{(C^*\cap\bar{C})} \mathcal{L}_0 - \int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_0\right) \leq \int_{(C^*\cap\bar{C})} \mathcal{L}_1 - \int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_1$$

Generando así una cota inferior para **(1)** y trabajando con esta desigualdad

$$\frac{1}{k^*}\left(\int_{(C^*\cap\bar{C})} \mathcal{L}_0 - \int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_0 + 0\right) \leq \int_{(C^*\cap\bar{C})} \mathcal{L}_1 - \int_{(C\cap\bar{C}^*)} \mathcal{L}_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\left(\int_{(C^*\cap\bar{C})}\mathcal{L}_0-\int_{(C\cap\bar{C}^*)}\mathcal{L}_0+\left(\int_{(C^*\cap C)}\mathcal{L}_0-\int_{(C^*\cap C)}\mathcal{L}_0\right)\right)$$

$$\leq\int_{(C^*\cap\bar{C})}\mathcal{L}_1-\int_{(C\cap\bar{C}^*)}\mathcal{L}_1\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\left(\int_{(C^*\cap\bar{C})}\mathcal{L}_0+\int_{(C^*\cap C)}\mathcal{L}_0-\left(\int_{(C\cap\bar{C}^*)}\mathcal{L}_0+\int_{(C^*\cap C)}\mathcal{L}_0\right)\right)$$

$$\leq\int_{(C^*\cap\bar{C})}\mathcal{L}_1-\int_{(C\cap\bar{C}^*)}\mathcal{L}_1\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\left(\int_{(C^*\cap\bar{C})\cup(C^*\cap C)}\mathcal{L}_0-\int_{(C\cap\bar{C}^*)\cup(C^*\cap C)}\mathcal{L}_0\right)\leq\int_{(C^*\cap\bar{C})}\mathcal{L}_1-\int_{(C\cap\bar{C}^*)}\mathcal{L}_1\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\left(\int_{C^*}\mathcal{L}_0-\int_{C}\mathcal{L}_0\right)\leq\int_{(C^*\cap\bar{C})}\mathcal{L}_1-\int_{(C\cap\bar{C}^*)}\mathcal{L}_1\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\Big(\mathbb{P}\big((x_1,x_2,\dots,x_n)\,\epsilon\,C^*|\,\theta=\theta_0\big)-\mathbb{P}\big((x_1,x_2,\dots,x_n)\,\epsilon\,C|\,\theta=\theta_0\big)\Big)$$

$$\leq\int_{(C^*\cap\bar{C})}\mathcal{L}_1-\int_{(C\cap\bar{C}^*)}\mathcal{L}_1\quad\mathbf{(4)}$$

Pero por hipótesis

$$\mathbb{P}\big((x_1,x_2,\dots,x_n)\,\epsilon\,C^*|\,\theta=\theta_0\big)=\alpha\quad\wedge$$

$$\mathbb{P}\big((x_1,x_2,\dots,x_n)\,\epsilon\,C|\,\theta=\theta_0\big)\leq\alpha\ \wedge\ k^*\epsilon\,\mathbb{R}^+\quad\Rightarrow$$

$$-\mathbb{P}\big((x_1,x_2,\dots,x_n)\,\epsilon\,C|\,\theta=\theta_0\big)\geq-\alpha\quad\Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\big((x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in C^* |\, \theta = \theta_0\big) - \mathbb{P}\big((x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in C |\, \theta = \theta_0\big) \geq \alpha - \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\big((x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in C^* |\, \theta = \theta_0\big) - \mathbb{P}\big((x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in C |\, \theta = \theta_0\big) \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k^*}\Big(\mathbb{P}\big((x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in C^* |\, \theta = \theta_0\big) - \mathbb{P}\big((x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \in C |\, \theta = \theta_0\big)\Big) \geq 0$$

Y por transitividad en **(4)** se tiene.

$$0 \leq \int\limits_{(C^* \cap \bar{C})} \mathcal{L}_1 - \int\limits_{(C \cap \bar{C}^*)} \mathcal{L}_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1) \;\blacksquare$$

$\therefore$ Υ^* es la prueba más potente de tamaño α para $\mathcal{H}_0 \colon \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1 \colon \theta = \theta_1$.

Ejemplo 5. Sea $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de densidad:

$$f_{x_i}(x_i |\, \theta) = \theta e^{-\theta x_i} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i) \qquad \forall i$$

.

Donde $\theta \in \Theta \coloneqq \{\theta_0, \theta_1\}$ (por simplicidad supongamos que $\theta_0 < \theta_1$) y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0 \colon \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1 \colon \theta = \theta_1$$

Use el Lema de Neyman-Pearson para encontrar la prueba más potente.

Solución:

Primero obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\,\theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)$$

Teniendo el cociente de para el lema de Neyman-Pearson.

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$\lambda = \frac{{\theta_0}^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)}{{\theta_1}^n e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{\sum_{i=1}^{n} x_i(\theta_1 - \theta_0)}$$

Acotando el cociente a un k y trabajando la desigualdad.

$$\lambda \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{\sum_{i=1}^{n} x_i(\theta_1 - \theta_0)} \leq k$$

Como θ_0 y θ_1 no dependen de la muestra y son constantes conocidas.

$$e^{\sum_{i=1}^{n} x_i(\theta_1 - \theta_0)} \leq k \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,(\theta_1-\theta_0) \leq ln\left(k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,(\theta_1-\theta_0) \leq k_1 \ \text{con}\ k_1 = \ ln\left(k\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right)$$

Como $\theta_0 < \theta_1$ entonces 0$< \theta_1 - \theta_0$ por lo que no afecta la desigualdad.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{k_1}{(\theta_1-\theta_0)} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_2 \ \text{con}\ k_2 = \frac{k_1}{(\theta_1-\theta_0)}$$

Entonces tenemos que.

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_2\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar}\ \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0\ \text{cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_2 \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Pero por el Apéndice A.2.5. vemos que se trata de una distribución exponencial de parámetro θ, entonces las $x_i \sim exp(\theta)$ y por el Apéndice C.38. conocemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n,\theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces, $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n,\theta_0)$. Por lo que k_2 es aquella constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_2\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$$

$$\int_0^{k_2} \frac{{\theta_0}^n v^{n-1} e^{-(\theta_0 v)}}{\Gamma(n)} dv = \alpha$$

Por lo que la prueba más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_2 \right\}.$$

Ejemplo 6. Sea x_1 una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de densidad:

$$f_x(x|\, 2\,, \theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x} \mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x)$$

Donde $\theta \in \Theta \coloneqq \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \tfrac{3}{4} \; vs \; \mathcal{H}_1: \theta = \tfrac{1}{2}$$

Encuentre las diferentes pruebas que se pueden derivar por cociente de verosimilitud y sus respectivos α y β.

Solución:

Por el Apéndice A.1.3. vemos que se trata de una distribución Binomial y como la muestra es de tamaño 1, el cociente λ se reduce a.

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}\left(\frac{3}{4} \mid x_1\right)}{\mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \mid x_1\right)}$$

$$\lambda = \frac{\binom{2}{x_1}\frac{3}{4}^{x_1}\left(1-\frac{3}{4}\right)^{2-x_1}\mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x_1)}{\binom{2}{x_1}\frac{1}{2}^{x_1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2-x_1}\mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x_1)}$$

$$\lambda = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right)^{x_1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right)^{2-x_1}$$

$$\lambda = \left(\frac{6}{4}\right)^{x_1}\left(\frac{2}{4}\right)^{2-x_1}$$

$$\lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x_1}$$

$$\lambda = \frac{3^{x_1}\,1^{2-x_1}}{2^{x_1+2-x_1}}$$

$$\lambda = \frac{3^{x_1}\,1}{2^2}$$

$$\lambda = \frac{3^{x_1}}{4}$$

Como la muestra solo puede tomar 3 valores entonces λ también solo puede tomar 3 valores por lo que a partir de ellos se propondrán las posibles k para construir todas las pruebas de hipótesis. Los resultados se muestran en la tabla 3.

x_1	λ
0	$\frac{3^0}{4} = \frac{1}{4}$
1	$\frac{3^1}{4} = \frac{3}{4}$
2	$\frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}$

Tabla 3.

Teniendo los 3 valores puntuales de λ, podemos proponer todas las k para crear las regiones de rechazo respectivas.

- **i.** $k < \frac{1}{4}$
- **ii.** $\frac{1}{4} \leq k < \frac{3}{4}$
- **iii.** $\frac{3}{4} \leq k < \frac{9}{4}$
- **iv.** $\frac{9}{4} \leq k$

Con estos valores podemos proponer 4 posibles pruebas en base a los valores de λ, teniendo así:

Prueba I:

Si $k < \frac{1}{4}$ entonces la región de rechazo seria:

$$C_{\Upsilon_1} = \{ x_1 : \lambda \leq k \}$$

Y su prueba asociada seria:

$$\Upsilon_1 : \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k \}$$

Entonces obteniendo los errores de α y β para esta prueba tenemos.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$
$$\alpha = \mathbb{P}\left(\lambda \leq k \mid \theta = \frac{3}{4}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $k < \frac{1}{4}$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda \leq k$ que es el conjunto $\emptyset$ por lo que.

$$\alpha = \mathbb{P}(\emptyset)$$
$$\alpha = 0$$

Ahora obteniendo β.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ falsa})$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\lambda > k \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $k < \frac{1}{4}$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda > k$ que es el conjunto $\{0,1,2\}$ por lo que.

$$\beta = \mathbb{P}\left(x_1 \epsilon \{0,1,2\} \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Como $\theta = \frac{1}{2}$ entonces $x_1 \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$, entonces.

$$\beta = \mathbb{P}(x_1 \epsilon \{0,1,2\}) \text{ con } x_1 \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = \sum_{x_1=0}^{2} \binom{2}{x_1} \frac{1}{2}^{x_1} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-x_1}$$

$$\beta = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\beta = 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\beta = 1$$

Prueba II:

Si $\frac{1}{4} \leq k < \frac{3}{4}$ entonces la región de rechazo seria:

$$C_{\Upsilon_2} = \{\, x_1 : \lambda \leq k\}$$

Y su prueba asociada seria:

$$\Upsilon_2 : \{\text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k\}$$

Entonces obteniendo los errores de α y β para esta prueba tenemos.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta })$$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\lambda \leq k \mid \theta = \frac{3}{4}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $\frac{1}{4} \leq k < \frac{3}{4}$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda \leq k$ que es el conjunto $\{0\}$ por lo que.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\, x_1 \epsilon \{0\} \mid \theta = \frac{3}{4}\right)$$

Como $\theta = \frac{3}{4}$ entonces $x_1 \sim Bin\left(2, \frac{3}{4}\right)$, entonces.

$$\alpha = \mathbb{P}(\ x_1\ \epsilon\ \{0\}\ )\ \text{ con }\ x_1 \sim Bin\left(2, \frac{3}{4}\right)$$

$$\alpha = \binom{2}{0} \frac{3^0}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-0}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{1}{16}$$

Ahora obteniendo β.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ falsa })$$

$$\beta = \mathbb{P}\left(\lambda > k \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $\frac{1}{4} \leq k < \frac{3}{4}$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda > k$ que es el conjunto $\{1,2\}$ por lo que.

$$\beta = \mathbb{P}\left(\ x_1\ \epsilon\ \{1,2\} \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Como $\theta = \frac{1}{2}$ entonces $x_1 \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$, entonces.

$$\beta = \mathbb{P}(\ x_1\ \epsilon\ \{1,2\}\ )\ \text{ con }\ x_1 \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = \sum_{x_1=1}^{2} \binom{2}{x_1} \frac{1}{2}^{x_1} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-x_1}$$

$$\beta = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\beta = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\beta = \frac{3}{4}$$

Prueba III:

Si $\frac{3}{4} \leq k < \frac{9}{4}$ entonces la región de rechazo seria:

$$C_{\Upsilon_3} = \{\, x_1 : \lambda \leq k\}$$

Y su prueba asociada seria:

$$\Upsilon_3 : \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k\}$$

Entonces obteniendo los errores de α y β para esta prueba tenemos.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\lambda \leq k \mid \theta = \frac{3}{4}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $\frac{3}{4} \leq k < \frac{9}{4}$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda \leq k$ que es el conjunto $\{0,1\}$ por lo que.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(x_1 \, \epsilon \, \{0,1\} \mid \theta = \frac{3}{4}\right)$$

Como $\theta = \frac{3}{4}$ entonces $x_1 \sim Bin\left(2, \frac{3}{4}\right)$, entonces.

$$\alpha = \mathbb{P}(x_1 \, \epsilon \, \{0,1\}) \text{ con } x_1 \sim Bin\left(2, \frac{3}{4}\right)$$

$$\alpha = \sum_{x_1=0}^{1} \binom{2}{x_1} \frac{3}{4}^{x_1} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-x_1}$$

$$\alpha = \binom{2}{0} \frac{3}{4}^{0} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-0} + \binom{2}{1} \frac{3}{4}^{1} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-1}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\alpha = \frac{7}{16}$$

Ahora obteniendo β.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ falsa})$$

$$\beta = \mathbb{P}\left(\lambda > k \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $\frac{3}{4} \leq k < \frac{9}{4}$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda > k$ que es el conjunto $\{2\}$ por lo que.

$$\beta = \mathbb{P}\left(x_1 \, \epsilon \, \{2\} \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Como $\theta = \frac{1}{2}$ entonces $x_1 \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$, entonces.

$$\beta = \mathbb{P}(\ x_1 \in \{2\}\ ) \text{ con } x_1 \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = \binom{2}{2} \frac{1}{2}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-2}$$

$$\beta = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\beta = 1\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{4}$$

Prueba IV:

Si $\frac{9}{4} \leq k$ entonces la región de rechazo seria:

$$C_{\Upsilon_4} = \{\ x_1 : \lambda \leq k\}$$

Y su prueba asociada seria:

$$\Upsilon_4 : \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k\}$$

Entonces obteniendo los errores de α y β para esta prueba tenemos.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\lambda \leq k \mid \theta = \frac{3}{4}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $\frac{9}{4} \leq k$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda \leq k$ que es el conjunto $\{0,1,2\}$ por lo que.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(x_1 \epsilon \{0,1,2\} \mid \theta = \frac{3}{4}\right)$$

Como $\theta = \frac{3}{4}$ entonces $x_1 \sim Bin\left(2, \frac{3}{4}\right)$, entonces.

$$\alpha = \mathbb{P}(x_1 \epsilon \{0,1,2\}) \text{ con } x_1 \sim Bin\left(2, \frac{3}{4}\right)$$

$$\alpha = \sum_{x_1=0}^{2} \binom{2}{x_1} \frac{3}{4}^{x_1} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-x_1}$$

$$\alpha = \binom{2}{0} \frac{3}{4}^{0} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-0} + \binom{2}{1} \frac{3}{4}^{1} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-1} + \binom{2}{2} \frac{3}{4}^{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-2}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{9}{16}$$

$$\alpha = 1$$

Ahora obteniendo β.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ falsa })$$

$$\beta = \mathbb{P}\left(\lambda > k \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Como λ solo puede tomar 3 valores y $\frac{9}{4} \leq k$ entonces el conjunto de x_1 que satisface $\lambda > k$ que es el conjunto $\{\emptyset\}$ por lo que.

$$\beta = \mathbb{P}(\emptyset)$$
$$\beta = 0$$

El concepto de hipótesis compuestas es una idea más general que las hipótesis simples, pues en una hipótesis compuesta considera una muestra aleatoria proveniente de una distribución $f(x|\,\theta)$ donde $\theta \in \Theta$ y se contrastan hipótesis del tipo $\mathcal{H}_0\colon \theta \in \Theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1\colon \theta \in \Theta_1$ donde $\Theta_0, \Theta_1 \subseteq \; \Theta$ y $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ y usualmente $\Theta_1 = \overline{\Theta_0} = \Theta/\Theta_0$.

Definición 18. Sea $\mathcal{L}(\theta|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ la función de verosimilitud de la muestra $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ con función de densidad conjunta $f_{x_1\,, x_2\,, \dots,\, x_n}(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n|\,\theta)$ donde $\theta \in \Theta$. Sea Υ una prueba para:

$$\mathcal{H}_0\colon \theta \in \Theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1\colon \theta \in \Theta_1$$

Donde $\Theta_0, \Theta_1 \subseteq \; \Theta$. Se dice que Υ es una prueba de ***razón de verosimilitud generalizada*** si está definida como:

$$\Upsilon\colon \begin{cases} \text{Rechazar } \mathcal{H}_0, & \text{si } \lambda < k \\ \text{No Rechazar } \mathcal{H}_0, & \text{si } \lambda > k \\ \text{Aleatorizar,} & \text{si } \lambda = k \end{cases}$$

Donde:

$$\lambda = \lambda(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) = \frac{\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\; \mathcal{L}(\theta|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)} \;\; \wedge \;\; k \in \mathbb{R}^+$$

Nota: $0 \leq \lambda \leq 1$.

Ejemplo 7. Sea $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta) = \theta e^{-\theta x_i}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i) \qquad \forall i$$

Donde $\theta \in \Theta \coloneqq \{\theta|\,\theta > 0\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0 .$$

Obtener una prueba de razón de verosimilitud generalizada para esta prueba.

Solución:

Primero veamos que la prueba Υ debe ser definida así:

$$\Upsilon : \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k\}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = \frac{\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1 , x_2 , \dots , x_n)}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1 , x_2 , \dots , x_n)}$$

Por el Ejemplo 5 sabemos que:

$$\mathcal{L}(\theta|x_1 , x_2 , \dots , x_n) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\; \mathcal{L}(\theta | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)}{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\; \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)}{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\, \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)\; \underset{\theta\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\; \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)\; \underset{\theta\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\, \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\; \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\, \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ pero esto es equivalente a obtener el estimador de máxima verosimilitud para θ, ya que $\theta\, \epsilon\, \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por el Apéndice A.2.5. vemos que se trata de una distribución exponencial de parámetro θ y por él Apéndice B.2.2. se tiene que:

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) = \hat{\theta}^n e^{-\hat{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ pero restringida ya que $\theta\, \epsilon\, \Theta_0$ entonces hay que analizar los posibles casos para este espacio, como el máximo general es $\hat{\theta}$, y el espacio paramétrico Θ_0 esta en función de θ_0, entonces por tricotomía se tienen 3 casos:

i. $\theta_0 < \hat{\theta}$

ii. $\theta_0 > \hat{\theta}$

iii. $\theta_0 = \hat{\theta}$

Si los casos **(ii)** y **(iii)** pasaran entonces $\hat{\theta} \epsilon \Theta_0$, lo que implicaría que el máximo en el espacio Θ_0 también fuera $\hat{\theta}$, haciendo al cociente 1, mientras que el caso **(i)** se tiene que $\hat{\theta}$ es un máximo absoluto de la función $\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$, lo que implica que la función es no decreciente en el intervalo $(0, \hat{\theta})$, y como se cumple $\theta_0 < \hat{\theta}$, el máximo se alcanza cuando $\theta = \theta_0$ teniendo así.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} {\theta_0}^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i}, & \text{si } \theta_0 < \hat{\theta} \\ \hat{\theta}^n e^{-\hat{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i}, & \text{si } \theta_0 \geq \hat{\theta} \end{cases}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{{\theta_0}^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\hat{\theta}^n e^{-\hat{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i}}, & \text{si } \theta_0 < \hat{\theta} \\ 1, & \text{si } \theta_0 \geq \hat{\theta} \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que $\theta_0 < \hat{\theta}$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{{\theta_0}^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\hat{\theta}^n e^{-\hat{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\theta} \sum_{i=1}^n x_i} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n e^{\sum_{i=1}^n x_i (\hat{\theta} - \theta_0)} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\theta_0}{\frac{1}{\bar{x}}}\right)^n e^{\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\bar{x}} - \theta_0\right)} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$(\theta_0 \bar{x})^n e^{n\bar{x}\left(\frac{1}{\bar{x}} - \theta_0\right)} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$(\theta_0 \bar{x})^n e^{n(1 - \bar{x}\theta_0)} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\theta_0 \bar{x} e^{(1 - \bar{x}\theta_0)}\right)^n \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\theta_0 \bar{x} e^{(1 - \bar{x}\theta_0)} \leq k^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow$$

$$\theta_0 \bar{x} e^{(1 - \bar{x}\theta_0)} \leq k_1 \text{ con } k_1 = k^{\frac{1}{n}}$$

Entonces queremos encontrar un k_1 que cumpla esa condición, pero ya no es posible despejar un estadístico conocido de $\theta_0 \bar{x} e^{(1 - \bar{x}\theta_0)}$, entonces si lo vemos como una función de $\theta_0 \bar{x}$,a fin de analizar esta función buscaremos su rango, podemos encontrar el máximo, derivando e igualando a 0.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0 \bar{x}} \left(\theta_0 \bar{x} e^{(1 - \bar{x}\theta_0)}\right) = 0$$

$$\theta_0 \bar{x} \frac{\partial}{\partial \theta_0 \bar{x}} \left(e^{(1 - \bar{x}\theta_0)}\right) + e^{(1 - \bar{x}\theta_0)} \frac{\partial}{\partial \theta_0 \bar{x}} (\theta_0 \bar{x}) = 0$$

$$\theta_0 \bar{x} e^{(1 - \bar{x}\theta_0)}(-1) + e^{(1 - \bar{x}\theta_0)}(1) = 0$$

$$e^{(1 - \bar{x}\theta_0)} = \theta_0 \bar{x} e^{(1 - \bar{x}\theta_0)}$$

$$\theta_0 \bar{x} = 1$$

Entonces su máximo se da cuando $\theta_0 \bar{x} = 1$ evaluando en la función tenemos encontramos el máximo valor que puede tomar.

$$1e^{(1-1)} = e^0 = 1$$

Entonces estamos buscando un k_1 de tal modo que $\theta_0 \bar{x} e^{(1-\bar{x}\theta_0)} \leq k_1$, si graficamos la función como se muestra en la Figura 3, tenemos.

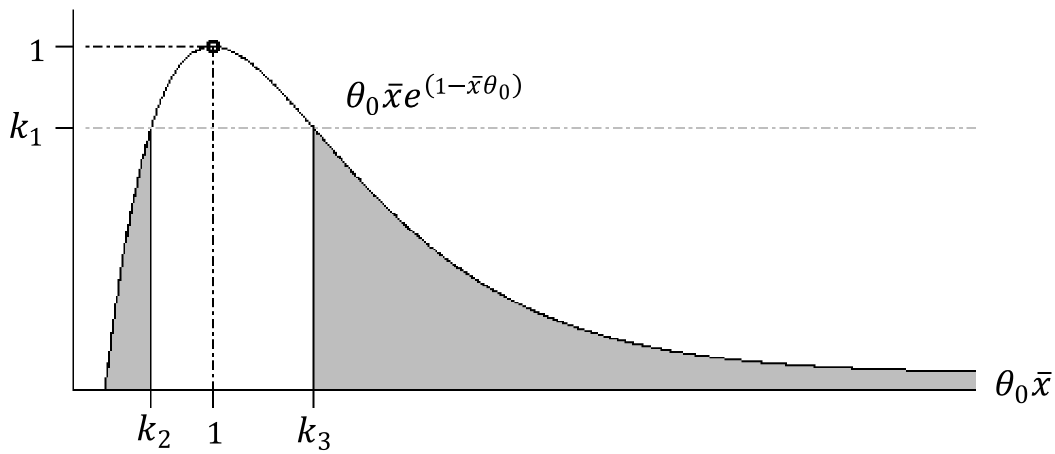

Figura 3.

Entonces vemos que la parte en gris es la parte de la función que satisface que $\theta_0 \bar{x} e^{(1-\bar{x}\theta_0)} \leq k_1$ para algún k_1 dado, y como se observa es posible encontrar k_2 y k_3 de tal modo que cumpla la misma condición, esto es.

$$\theta_0 \bar{x} e^{(1-\bar{x}\theta_0)} \leq k_1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\theta_0 \bar{x} \leq k_2 \quad \vee \quad \theta_0 \bar{x} \geq k_3$$

Entonces es más practico trabajar con estas desigualdades, pero recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que $\theta_0 < \hat{\theta}$ esto es.

$$\theta_0 < \frac{1}{\bar{x}} \quad \Rightarrow$$

$$\theta_0 \bar{x} < 1$$

Y por cómo están definidas k_2 y k_3, tenemos que $k_2 \leq 1 \quad \wedge \quad k_3 \geq 1$, por lo que solo nos quedamos con la desigualdad para k_2, quedando.

$$\theta_0 \bar{x} \leq k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\theta_0 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n k_2}{\theta_0} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_4 \ \text{ con } \ k_4 = \frac{n k_2}{\theta_0}$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1 , x_2 , \dots , x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_4 \right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_4 \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim exp(\theta)$ y por el Apéndice C.38. conocemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$. Por lo que k_4 es aquella constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_4\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$$

$$\int_{0}^{k_4} \frac{{\theta_0}^n v^{n-1} e^{-(\theta_0 v)}}{\Gamma(n)} dv = \alpha$$

Por lo que la prueba más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k_4 \right\}.$$

Definición 19. Una prueba Υ^* para:

$$\mathcal{H}_0: \theta \in \Theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta \in \Theta_1$$

Se define como la ***prueba uniformemente más potente*** de tamaño α, sí y solo si:

i. $\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup} \ \Pi_{\Upsilon^*}(\theta) = \alpha$.

ii. $\Pi_{\Upsilon^*}(\theta) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta) \ \forall \ \theta \in \overline{\Theta_0}$, y para cualquier otra prueba Υ de tamaño menor o igual a α.

2.3.2. Teorema de Karlin-Rubin

Definición 20. Una familia de distribuciones $\{f(x|\ \theta)\ |\ \theta\ \epsilon\ \Theta\}$ para una variable univariada x con parámetro $\theta\ \epsilon\ \Theta \subseteq \mathbb{R}$ tiene un ***cociente de verosimilitud monótono*** si para cada $\theta_2 > \theta_1$, $\frac{f(x|\ \theta_2)}{f(x|\ \theta_1)}$ es una función monótona de x (no creciente o no decreciente).

Definición 21. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de densidad $f(x|\ \theta)$, $\theta\ \epsilon\ \Theta \subseteq \mathbb{R}$, suponga que $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente de θ y que además existen funciones $g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta)$ y $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se define ***la factorización para estadísticos suficientes*** como:

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta)h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \theta) = g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta)h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Teorema 2. Sea $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente de θ. Además, suponga también que la familia de funciones de densidad $\{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta)\ |\ \theta\ \epsilon\ \Theta\}$ tiene un cociente de verosimilitud monótono, entonces:

- **i.** Si el cociente de verosimilitudes es **monótono no decreciente** y si existe t_0 tal que $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\ |\ \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_1 con región de rechazo:

$$C_{\Upsilon_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

ii. Si el cociente de verosimilitudes es **monótono no decreciente** y si existe t_0 tal que $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_2 con región de rechazo:

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_2} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

iii. Si el cociente de verosimilitudes es **monótono no creciente** y si existe t_0 tal que $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_3 con región de rechazo:

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_3} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

iv. Si el cociente de verosimilitudes es **monótono no creciente** y si existe t_0 tal que $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_4 con región de rechazo:

$$C_{\Upsilon_4} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

Demostración:

i) Para demostrar que Υ_1 es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, se deben cumplir las dos condiciones de la Definición 19.

Sean $\theta_0 < \theta'$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta = \theta'$$

Definamos $t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, por hipótesis se tiene que la familia de funciones de densidad $\{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta) \mid \theta \in \Theta\}$ tiene un cociente de verosimilitud monótono no decreciente, es decir:

$$\frac{g(t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \theta')}{g(t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \theta_0)} < \frac{g(t_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \theta')}{g(t_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \theta_0)}$$

Por simplicidad sean $t_1 = t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $t_2 = t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces.

$$\frac{g(t_1|\,\theta')}{g(t_1|\,\theta_0\,)} < \frac{g(t_2|\,\theta')}{g(t_2|\,\theta_0\,)} \;\; \Leftrightarrow$$
$$g(t_1|\,\theta')g(t_2|\,\theta_0\,) < g(t_2|\,\theta')g(t_1|\,\theta_0\,)$$

Integrando ambos lados respecto a t_2 y evaluando de t_1 a ∞.

$$\int_{t_1}^{\infty} g(t_1|\,\theta')g(t_2|\,\theta_0\,)\,dt_2 < \int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta')g(t_1|\,\theta_0\,)\,dt_2 \quad \Rightarrow$$
$$g(t_1|\,\theta')\int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta_0\,)\,dt_2 < g(t_1|\,\theta_0\,)\int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta')\,dt_2 \quad \Rightarrow$$
$$g(t_1|\,\theta')\big(1 - G(t_1|\,\theta_0\,)\big) < g(t_1|\,\theta_0\,)\big(1 - G(t_1|\,\theta'\,)\big) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{g(t_1|\,\theta')}{1 - G(t_1|\,\theta'\,)} < \frac{g(t_1|\,\theta_0\,)}{1 - G(t_1|\,\theta_0\,)}$$

Integrando ambos lados respecto a t_1 y evaluando de $-\infty$ a un t_0 arbitrario.

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta')}{1 - G(t_1|\,\theta'\,)}\,dt_1 < \int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta_0\,)}{1 - G(t_1|\,\theta_0\,)}\,dt_1$$

Realizando cambios de variable.

$$u = 1 - G(t_1|\,\theta'\,) \qquad\qquad v = 1 - G(t_1|\,\theta_0\,)$$
$$du = -g(t_1|\,\theta')dt_1 \qquad\qquad dv = -g(t_1|\,\theta_0)dt_1$$
$$Si\;\; t_1 = t_0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 - G\left(t_0|\,\theta'\right) \;\wedge\; v = 1 - G(t_0|\,\theta_0\,)$$
$$Si\;\; t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = \lim_{t_1\to-\infty} 1 - G\left(t_1|\,\theta'\right) \;\wedge\; v = \lim_{t_1\to-\infty} 1 - G(t_1|\,\theta_0\,) \quad \Rightarrow$$
$$u = 1 - \lim_{t_1\to-\infty} G(t_1|\,\theta'\,) \;\wedge\; v = 1 - \lim_{t_1\to-\infty} G(t_1|\,\theta_0\,)$$

Al ser $G(t_0|\,\theta\,) = \mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \le t_0 \mid \theta)$ una función de distribución se tiene:

$$\lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta'\,) = 0 \;\;\wedge\;\; \lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta_0\,) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$Si\;\; t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = 1 - 0 = 1 \;\;\wedge\;\; v = 1 - 0 = 1$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta'\,)} -\frac{1}{u}\,du < \int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta_0\,)} -\frac{1}{v}\,dv$$

Intercambiando los límites de integración.

$$\int_{1-G(t_0|\,\theta'\,)}^{1} \frac{1}{u}\,du < \int_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \frac{1}{v}\,dv \quad \Rightarrow$$
$$ln(u)\Big|_{1-G(t_0|\,\theta'\,)}^{1} < ln(v)\Big|_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \quad \Rightarrow$$
$$ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta'\,)\big) < ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$
$$-ln\big(1 - G(t_0|\,\theta'\,)\big) < -ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$
$$ln\big(1 - G(t_0|\,\theta'\,)\big) > ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$
$$e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta'\,)\right)} > e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta_0)\right)} \quad \Rightarrow$$
$$1 - G(t_0|\,\theta'\,) > 1 - G(t_0|\,\theta_0) \qquad (\mathbf{1})$$

Por hipótesis se tiene que:

$$\Upsilon_1 : \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \}.$$

Teniendo así:

$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 | \ \theta = \theta_0) \text{ con } \theta_0 \in \Theta \subseteq \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 | \ \theta = \theta_0)$$

$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = 1 - G(t_0 | \ \theta_0 \ )$$

Sustituyendo en **(1)** se tiene.

$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta' \ ) > \Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) \text{ con } \theta_0 < \theta'$$

Por lo que $\Pi_{\Upsilon_1}(\theta)$ es una función monótona no decreciente.

Ahora se busca el tamaño de esta prueba, siendo así.

$$\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup} \ \Pi_{\Upsilon_1}(\theta) = \underset{\theta \leq \theta_0}{Sup} \ \Pi_{\Upsilon_1}(\theta)$$

Como $\Pi_{\Upsilon_1}(\theta)$ es no decreciente.

$$\underset{\theta \leq \theta_0}{Sup} \ \Pi_{\Upsilon_1}(\theta) = \Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \ |\theta = \theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\theta \leq \theta_0}{Sup} \ \Pi_{\Upsilon_1}(\theta) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \ | \ \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

Por hipótesis se tiene $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \ | \ \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces.

$$\underset{\theta \leq \theta_0}{Sup} \ \Pi_{\Upsilon_1}(\theta) = \alpha$$

$\therefore\ \Upsilon_1$ es una prueba de tamaño α, lo que cumple la condición **(i)** de la Definición 19.

Ahora usando el Teorema 1, para el contraste de hipótesis propuesto, se tiene que la región critica más poderosa es:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta'|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{L}(\theta'|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta_0|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)} \geq \frac{1}{k}$$

Por hipótesis $t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente de θ, entonces por la Definición 21 se obtiene.

$$\frac{g(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n), \theta')h(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)}{g(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n), \theta_0)h(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)} \geq \frac{1}{k}$$

$$\frac{g(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n), \theta')}{g(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n), \theta_0)} \geq \frac{1}{k}$$

Se define.

$$\frac{1}{k} = \inf_{t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)\epsilon \daleth} \frac{g(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n), \theta')}{g(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n), \theta_0)}$$

Con

$$\daleth = \{t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \geq t_0\,, g(t, \theta_0) > 0 \ \lor\ g(t, \theta') > 0\}$$

Al definir a $\daleth$ de esta manera se tiene lo siguiente:

$$\frac{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta')}{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_0)} \geq \frac{1}{k} \quad \Leftrightarrow$$

$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0$$

Teniendo que la región critica más poderosa de tamaño α para el contraste propuesto es:

$$C_{\Upsilon_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Al ser la región más poderosa, se satisface **(ii)** de la Definición 17, siendo así.

$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$$

Para cualquier otra prueba Υ de tamaño α, para el contraste propuesto. Pero como $\theta_0 < \theta'$, es decir θ' es fijo pero arbitrario y $\theta' \in \Theta_1$, se cumple también para los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$$

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

Lo que cumple la condición **(ii)** de la Definición 19, para Υ_1.

$$\therefore \;\; \Upsilon_1 : \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$$

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0 \blacksquare$$

ii) Para demostrar que Υ_2 es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, se deben cumplir las dos condiciones de la Definición 19.

Sean $\theta_0 > \theta'$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1 : \theta = \theta'$$

Definamos $t_1(x_1 , x_2 , \dots , x_n) < t_2(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$, por hipótesis se tiene que la familia de funciones de densidad $\{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta) \mid \theta \in \Theta\}$ tiene un cociente de verosimilitud monótono no decreciente, es decir:

$$\frac{g(t_1(x_1 , x_2 , \dots , x_n)|\, \theta_0)}{g(t_1(x_1 , x_2 , \dots , x_n)|\, \theta')} < \frac{g(t_2(x_1 , x_2 , \dots , x_n)|\, \theta_0)}{g(t_2(x_1 , x_2 , \dots , x_n)|\, \theta')}$$

Por simplicidad sean $t_1 = t_1(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ y $t_2 = t_2(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$, entonces.

$$\frac{g(t_1|\, \theta_0)}{g(t_1|\, \theta')} < \frac{g(t_2|\, \theta_0)}{g(t_2|\, \theta')} \iff$$

$$g(t_1|\, \theta_0) g(t_2|\, \theta') < g(t_2|\, \theta_0) g(t_1|\, \theta')$$

Integrando ambos lados respecto a t_2 y evaluando de t_1 a ∞.

$$\int_{t_1}^{\infty} g(t_1|\, \theta') g(t_2|\, \theta_0)\, dt_2 > \int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\, \theta') g(t_1|\, \theta_0)\, dt_2 \quad \Rightarrow$$

$$g(t_1|\, \theta') \int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\, \theta_0)\, dt_2 > g(t_1|\, \theta_0) \int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\, \theta')\, dt_2 \quad \Rightarrow$$

$$g(t_1|\, \theta') \big(1 - G(t_1|\, \theta_0)\big) > g(t_1|\, \theta_0) \big(1 - G(t_1|\, \theta')\big) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{g(t_1|\,\theta')}{1-G(t_1|\,\theta'\,)} > \frac{g(t_1|\,\theta_0\,)}{1-G(t_1|\,\theta_0\,)}$$

Integrando ambos lados respecto a t_1 y evaluando de $-\infty$ a un t_0 arbitrario.

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta')}{1-G(t_1|\,\theta'\,)}dt_1 > \int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta_0\,)}{1-G(t_1|\,\theta_0\,)}dt_1$$

Realizando cambios de variable.

$$u = 1 - G(t_1|\,\theta'\,) \qquad\qquad v = 1 - G(t_1|\,\theta_0\,)$$

$$du = -g(t_1|\,\theta')dt_1 \qquad\qquad dv = -g(t_1|\,\theta_0)dt_1$$

$$Si\;\; t_1 = t_0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 - G\left(t_0|\,\theta^{'}\right) \;\wedge\; v = 1 - G(t_0|\,\theta_0\,)$$

$$Si\;\; t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = \lim_{t_1\to-\infty} 1 - G\left(t_1|\,\theta^{'}\right) \;\wedge\; v = \lim_{t_1\to-\infty} 1 - G(t_1|\,\theta_0\,) \quad \Rightarrow$$

$$u = 1 - \lim_{t_1\to-\infty} G(t_1|\,\theta'\,) \;\wedge\; v = 1 - \lim_{t_1\to-\infty} G(t_1|\,\theta_0\,)$$

Al ser $G(t_0|\,\theta\,) = \mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) \leq t_0 \;|\; \theta)$ una función de distribución se tiene:

$$\lim_{t_1\to-\infty} G(t_1|\,\theta'\,) = 0 \;\wedge\; \lim_{t_1\to-\infty} G(t_1|\,\theta_0\,) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$Si\;\; t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = 1 - 0 = 1 \;\wedge\; v = 1 - 0 = 1$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta'\,)} -\frac{1}{u}du > \int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta_0\,)} -\frac{1}{v}dv$$

Intercambiando los límites de integración.

$$\int_{1-G(t_0|\,\theta')}^{1} \frac{1}{u}du > \int_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \frac{1}{v}dv \quad \Rightarrow$$

$$ln(u)\Bigg|_{1-G(t_0|\,\theta')}^{1} > ln(v)\Bigg|_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \quad \Rightarrow$$

$$ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta')\big) > ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$-ln\big(1 - G(t_0|\,\theta')\big) > -ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$ln\big(1 - G(t_0|\,\theta')\big) < ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta')\right)} < e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta_0)\right)} \quad \Rightarrow$$

$$1 - G(t_0|\,\theta') < 1 - G(t_0|\,\theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$-G(t_0|\,\theta') < -G(t_0|\,\theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$G(t_0|\,\theta') > G(t_0|\,\theta_0) \qquad (\mathbf{2})$$

Por hipótesis se tiene que:

$$\Upsilon_2 : \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 \}.$$

Teniendo así:

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0|\,\theta = \theta_0) \text{ con } \theta_0 \,\epsilon\, \Theta \subseteq \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = G(t_0|\,\theta_0)$$

Sustituyendo en **(2)** se tiene.

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta') > \Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) \text{ con } \theta_0 > \theta'$$

Por lo que $\Pi_{\Upsilon_2}(\theta)$ es una función monótona no creciente.

Ahora se busca el tamaño de esta prueba, siendo así.

$$\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_2}(\theta) = \underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_2}(\theta)$$

Como $\Pi_{\Upsilon_2}(\theta)$ es no creciente.

$$\underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_2}(\theta) = \Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 \,|\theta = \theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_2}(\theta) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

Por hipótesis se tiene $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces.

$$\underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_2}(\theta) = \alpha$$

$\therefore$ Υ_2 es una prueba de tamaño α, lo que cumple la condición **(i)** de la Definición 19.

Ahora usando el Teorema 1, para el contraste de hipótesis propuesto, se tiene que la región critica más poderosa es:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta'|x_1, x_2, \dots, x_n)} \leq k$$

Por hipótesis $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente de θ, entonces por la Definición 21 se obtiene.

$$\frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0) h(x_1 , x_2 , \dots , x_n)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta') h(x_1 , x_2 , \dots , x_n)} \leq k$$

$$\frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta')} \leq k$$

Se define.

$$k = \sup_{t(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \epsilon \daleth} \frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta')}$$

Con

$$\daleth = \{t(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \leq t_0 , g(t, \theta') > 0 \ \vee \ g(t, \theta_0) > 0\}$$

Al definir a $\daleth$ de esta manera se tiene lo siguiente:

$$\frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta')} \leq k \quad \Leftrightarrow$$

$$t(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \leq t_0$$

Teniendo que la región critica más poderosa de tamaño α para el contraste propuesto es:

$$C_{\Upsilon_2} = \{(x_1 , x_2 , \dots , x_n) : t(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \leq t_0\}$$

Al ser la región más poderosa, se satisface **(ii)** de la Definición 17, siendo así.

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$$

Para cualquier otra prueba Υ de tamaño α, para el contraste propuesto. Pero como $\theta_0 > \theta'$, es decir θ' es fijo pero arbitrario y $\theta' \epsilon \Theta_1$, se cumple también para los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

Lo que cumple la condición **(ii)** de la Definición 19, para Υ_2.

$$\therefore \ \Upsilon_2 \colon \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : t(x_1 \,, x_2 \,, \dots , x_n) \leq t_0 \}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0 \blacksquare$$

iii) Para demostrar que Υ_3 es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, se deben cumplir las dos condiciones de la Definición 19.

Sean $\theta_0 < \theta'$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta = \theta'$$

Definamos $t_1(x_1 \,, x_2 \,, \dots , x_n) < t_2(x_1 \,, x_2 \,, \dots , x_n)$, por hipótesis se tiene que la familia de funciones de densidad $\{g(t(x_1 \,, x_2 \,, \dots , x_n), \theta) \mid \theta \,\epsilon\, \Theta\}$ tiene un cociente de verosimilitud monótono no creciente, es decir:

$$\frac{g(t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)|\,\theta')}{g(t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)|\,\theta_0)} > \frac{g(t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)|\,\theta')}{g(t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)|\,\theta_0)}$$

Por simplicidad sean $t_1 = t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $t_2 = t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces.

$$\frac{g(t_1|\,\theta')}{g(t_1|\,\theta_0)} > \frac{g(t_2|\,\theta')}{g(t_2|\,\theta_0)} \iff$$
$$g(t_1|\,\theta')g(t_2|\,\theta_0) > g(t_2|\,\theta')g(t_1|\,\theta_0)$$

Integrando ambos lados respecto a t_2 y evaluando de t_1 a ∞.

$$\int_{t_1}^{\infty} g(t_1|\,\theta')g(t_2|\,\theta_0)\,dt_2 > \int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta')g(t_1|\,\theta_0)\,dt_2 \quad \Rightarrow$$
$$g(t_1|\,\theta')\int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta_0)\,dt_2 > g(t_1|\,\theta_0)\int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta')\,dt_2 \quad \Rightarrow$$
$$g(t_1|\,\theta')\big(1 - G(t_1|\,\theta_0)\big) > g(t_1|\,\theta_0)\big(1 - G(t_1|\,\theta')\big) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{g(t_1|\,\theta')}{1 - G(t_1|\,\theta')} > \frac{g(t_1|\,\theta_0)}{1 - G(t_1|\,\theta_0)}$$

Integrando ambos lados respecto a t_1 y evaluando de $-\infty$ a un t_0 arbitrario.

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta')}{1 - G(t_1|\,\theta')}\,dt_1 > \int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta_0)}{1 - G(t_1|\,\theta_0)}\,dt_1$$

Realizando cambios de variable.

$$u = 1 - G(t_1|\,\theta') \qquad\qquad v = 1 - G(t_1|\,\theta_0)$$

$$du = -g(t_1|\,\theta')dt_1 \qquad dv = -g(t_1|\,\theta_0)dt_1$$

$$Si\ \ t_1 = t_0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 - G\left(t_0|\,\theta^{'}\right)\ \wedge\ v = 1 - G(t_0|\,\theta_0\,)$$

$$Si\ \ t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = \lim_{t_1 \to -\infty} 1 - G\left(t_1|\,\theta^{'}\right)\ \wedge\ v = \lim_{t_1 \to -\infty} 1 - G(t_1|\,\theta_0\,) \quad \Rightarrow$$

$$u = 1 - \lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta'\,)\ \wedge\ v = 1 - \lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta_0\,)$$

Al ser $G(t_0|\,\theta\,) = \mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \leq t_0\ |\ \theta)$ una función de distribución se tiene:

$$\lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta'\,) = 0\ \ \wedge\ \lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta_0\,) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$Si\ \ t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = 1 - 0 = 1\ \ \wedge\ \ v = 1 - 0 = 1$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta'\,)} -\frac{1}{u}du > \int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta_0\,)} -\frac{1}{v}dv$$

Intercambiando los límites de integración.

$$\int_{1-G(t_0|\,\theta'\,)}^{1} \frac{1}{u}du > \int_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \frac{1}{v}dv \quad \Rightarrow$$

$$ln(u)\Big|_{1-G(t_0|\,\theta'\,)}^{1} > ln(v)\Big|_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \quad \Rightarrow$$

$$ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta'\,)\big) > ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$-ln\big(1 - G(t_0|\,\theta'\,)\big) > -ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$ln\big(1 - G(t_0|\,\theta'\,)\big) < ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta'\,)\right)} < e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta_0)\right)} \quad \Rightarrow$$

$$1 - G(t_0|\,\theta'\,) < 1 - G(t_0|\,\theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$-G(t_0|\,\theta'\,) < -G(t_0|\,\theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$G(t_0|\,\theta'\,) > G(t_0|\,\theta_0) \qquad (\mathbf{3})$$

Por hipótesis se tiene que:

$$\Upsilon_3 : \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \le t_0 \}.$$

Teniendo así:

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \le t_0|\,\theta = \theta_0) \text{ con } \theta_0 \,\epsilon\, \Theta \subseteq \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = G(t_0|\,\theta_0\,)$$

Sustituyendo en **(3)** se tiene.

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta'\,) > \Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) \text{ con } \theta_0 < \theta'$$

Por lo que $\Pi_{\Upsilon_3}(\theta)$ es una función monótona no decreciente.

Ahora se busca el tamaño de esta prueba, siendo así.

$$\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\, \Pi_{\Upsilon_3}(\theta) = \underset{\theta\le\theta_0}{Sup}\, \Pi_{\Upsilon_3}(\theta)$$

Como $\Pi_{\Upsilon_3}(\theta)$ es no decreciente.

$$\underset{\theta\le\theta_0}{Sup}\, \Pi_{\Upsilon_3}(\theta) = \Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \le t_0\,|\theta = \theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\theta \le \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_3}(\theta) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \le t_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

Por hipótesis se tiene $\mathbb{P}\big(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \le t_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}\big) = \alpha$, entonces.

$$\underset{\theta \le \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_3}(\theta) = \alpha$$

$\therefore\ \Upsilon_3$ es una prueba de tamaño α, lo que cumple la condición **(i)** de la Definición 19.

Ahora usando el Teorema 1, para el contraste de hipótesis propuesto, se tiene que la región critica más poderosa es:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0 | x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta' | x_1, x_2, \dots, x_n)} \le k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{L}(\theta' | x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta_0 | x_1, x_2, \dots, x_n)} \ge \frac{1}{k}$$

Por hipótesis $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente de θ, entonces por la Definición 21 se obtiene.

$$\frac{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta') h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_0) h(x_1, x_2, \dots, x_n)} \ge \frac{1}{k}$$

$$\frac{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta')}{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_0)} \ge \frac{1}{k}$$

Se define.

$$\frac{1}{k} = \inf_{t(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon \urcorner} \frac{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta')}{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_0)}$$

Con

$$\daleth = \{t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 , g(t, \theta_0) > 0 \ \vee \ g(t, \theta') > 0\}$$

Al definir a $\daleth$ de esta manera se tiene lo siguiente:

$$\frac{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta')}{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_0)} \geq \frac{1}{k} \ \Leftrightarrow$$
$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0$$

Teniendo que la región critica más poderosa de tamaño α para el contraste propuesto es:

$$C_{\Upsilon_3} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0\}$$

Al ser la región más poderosa, se satisface **(ii)** de la Definición 17, siendo así.

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$$

Para cualquier otra prueba Υ de tamaño α, para el contraste propuesto. Pero como $\theta_0 < \theta'$, es decir θ' es fijo pero arbitrario y $\theta' \epsilon \Theta_1$, se cumple también para los contrastes:

$$\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0.$$

Lo que cumple la condición **(ii)** de la Definición 19, para Υ_3.

$$\therefore \ \Upsilon_3 : \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0 \blacksquare$$

iv) Para demostrar que Υ_4 es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, se deben cumplir las dos condiciones de la Definición 19.

Sean $\theta_0 > \theta'$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta = \theta'$$

Definamos $t_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, por hipótesis se tiene que la familia de funciones de densidad $\{g(t(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta) \mid \theta \epsilon \Theta\}$ tiene un cociente de verosimilitud monótono no creciente, es decir:

$$\frac{g(t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)| \, \theta_0)}{g(t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)| \, \theta')} > \frac{g(t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)| \, \theta_0)}{g(t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)| \, \theta')}$$

Por simplicidad sean $t_1 = t_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $t_2 = t_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces.

$$\frac{g(t_1| \, \theta_0)}{g(t_1| \, \theta')} > \frac{g(t_2| \, \theta_0)}{g(t_2| \, \theta')} \ \ \Leftrightarrow$$
$$g(t_1| \, \theta_0) g(t_2| \, \theta') > g(t_2| \, \theta_0) g(t_1| \, \theta')$$

Integrando ambos lados respecto a t_2 y evaluando de t_1 a ∞.

$$\int_{t_1}^{\infty} g(t_1|\,\theta')g(t_2|\,\theta_0\,)\,dt_2 < \int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta')g(t_1|\,\theta_0\,)\,dt_2 \quad \Rightarrow$$

$$g(t_1|\,\theta')\int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta_0\,)\,dt_2 < g(t_1|\,\theta_0\,)\int_{t_1}^{\infty} g(t_2|\,\theta')\,dt_2 \quad \Rightarrow$$

$$g(t_1|\,\theta')\big(1 - G(t_1|\,\theta_0\,)\big) < g(t_1|\,\theta_0\,)\big(1 - G(t_1|\,\theta'\,)\big) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{g(t_1|\,\theta')}{1 - G(t_1|\,\theta'\,)} < \frac{g(t_1|\,\theta_0\,)}{1 - G(t_1|\,\theta_0\,)}$$

Integrando ambos lados respecto a t_1 y evaluando de $-\infty$ a un t_0 arbitrario.

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta')}{1 - G(t_1|\,\theta'\,)}dt_1 < \int_{-\infty}^{t_0} \frac{g(t_1|\,\theta_0\,)}{1 - G(t_1|\,\theta_0\,)}dt_1$$

Realizando cambios de variable.

$$u = 1 - G(t_1|\,\theta'\,) \qquad\qquad v = 1 - G(t_1|\,\theta_0\,)$$

$$du = -g(t_1|\,\theta')dt_1 \qquad\qquad dv = -g(t_1|\,\theta_0)dt_1$$

$$Si\;\; t_1 = t_0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 - G\left(t_0|\,\theta^{'}\right) \;\wedge\; v = 1 - G(t_0|\,\theta_0\,)$$

$$Si\;\; t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = \lim_{t_1 \to -\infty} 1 - G\left(t_1|\,\theta^{'}\right) \;\wedge\; v = \lim_{t_1 \to -\infty} 1 - G(t_1|\,\theta_0\,) \quad \Rightarrow$$

$$u = 1 - \lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta'\,) \;\wedge\; v = 1 - \lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta_0\,)$$

Al ser $G(t_0|\,\theta\,) = \mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \le t_0 \mid\; \theta)$ una función de distribución se tiene:

$$\lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta'\,) = 0 \;\wedge\; \lim_{t_1 \to -\infty} G(t_1|\,\theta_0\,) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$Si\ \ t_1 \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad u = 1 - 0 = 1 \ \ \wedge \ \ v = 1 - 0 = 1$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta')} -\frac{1}{u}du < \int_{1}^{1-G(t_0|\,\theta_0)} -\frac{1}{v}dv$$

Intercambiando los límites de integración.

$$\int_{1-G(t_0|\,\theta')}^{1} \frac{1}{u}du < \int_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \frac{1}{v}dv \quad \Rightarrow$$

$$ln(u)\Big|_{1-G(t_0|\,\theta')}^{1} < ln(v)\Big|_{1-G(t_0|\,\theta_0)}^{1} \quad \Rightarrow$$

$$ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta')\big) < ln(1) - ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$-ln\big(1 - G(t_0|\,\theta')\big) < -ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$ln\big(1 - G(t_0|\,\theta')\big) > ln\big(1 - G(t_0|\,\theta_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta')\right)} > e^{ln\left(1-G(t_0|\,\theta_0)\right)} \quad \Rightarrow$$

$$1 - G(t_0|\,\theta') > 1 - G(t_0|\,\theta_0) \qquad (\mathbf{4})$$

Por hipótesis se tiene que:

$$\Upsilon_4 : \{\ \text{Rechazar }\ \mathcal{H}_0\ \text{ si }\ : t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \geq t_0\}.$$

Teniendo así:

$$\Pi_{\Upsilon_4}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \geq t_0|\,\theta = \theta_0) \text{ con } \theta_0 \in \Theta \subseteq \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Pi_{\Upsilon_4}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_0 |\ \theta = \theta_0)$$
$$\Pi_{\Upsilon_4}(\theta_0) = 1 - G(t_0 |\ \theta_0)$$

Sustituyendo en **(4)** se tiene.

$$\Pi_{\Upsilon_4}(\theta') > \Pi_{\Upsilon_4}(\theta_0) \text{ con } \theta_0 > \theta'$$

Por lo que $\Pi_{\Upsilon_4}(\theta)$ es una función monótona no creciente.

Ahora se busca el tamaño de esta prueba, siendo así.

$$\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_4}(\theta) = \underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_4}(\theta)$$

Como $\Pi_{\Upsilon_4}(\theta)$ es no creciente.

$$\underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_4}(\theta) = \Pi_{\Upsilon_4}(\theta_0) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \ |\theta = \theta_0) \quad \Rightarrow$$
$$\underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_4}(\theta) = \mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \ |\ \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

Por hipótesis se tiene $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0 \ |\ \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces.

$$\underset{\theta \geq \theta_0}{Sup}\ \Pi_{\Upsilon_4}(\theta) = \alpha$$

$\therefore\ \Upsilon_4$ es una prueba de tamaño α, lo que cumple la condición **(i)** de la Definición 19.

Ahora usando el Teorema 1, para el contraste de hipótesis propuesto, se tiene que la región critica más poderosa es:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0 | x_1 , x_2 , \dots , x_n)}{\mathcal{L}(\theta' | x_1 , x_2 , \dots , x_n)} \leq k$$

Por hipótesis $t(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ es un estadístico suficiente de θ, entonces por la Definición 21 se obtiene.

$$\frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0) h(x_1 , x_2 , \dots , x_n)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta') h(x_1 , x_2 , \dots , x_n)} \leq k$$

$$\frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta')} \leq k$$

Se define.

$$k = \sup_{t(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \epsilon \daleth} \frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta')}$$

Con

$$\daleth = \{ t(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \geq t_0 , g(t, \theta') > 0 \ \vee \ g(t, \theta_0) > 0 \}$$

Al definir a $\daleth$ de esta manera se tiene lo siguiente:

$$\frac{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta_0)}{g(t(x_1 , x_2 , \dots , x_n), \theta')} \leq k \quad \Leftrightarrow$$

$$t(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \geq t_0$$

Teniendo que la región critica más poderosa de tamaño α para el contraste propuesto es:

$$C_{\Upsilon_4} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Al ser la región más poderosa, se satisface **(ii)** de la Definición 17, siendo así.

$$\Pi_{\Upsilon_4}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$$

Para cualquier otra prueba Υ de tamaño α, para el contraste propuesto. Pero como $\theta_0 > \theta'$, es decir θ' es fijo pero arbitrario y $\theta' \in \Theta_1$, se cumple también para los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

Lo que cumple la condición **(ii)** de la Definición 19, para Υ_4.

$$\therefore \ \Upsilon_4 : \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0 \blacksquare$$

Definición 22. Sea $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un estadístico de la muestra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con función de densidad $f(x|\,\theta)$, se dice que es un **estadístico suficiente minimal** para θ si:

- **i.** Si $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es suficiente.
- **ii.** $t(x_1, \dots, x_n)$ es función de cualquier otro estadístico suficiente para θ.

Sean $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos muestras aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con funciones de densidad $f(x|\,\theta)$ y $f(y|\,\theta)$ respectivamente, $\theta \epsilon \Theta \subseteq \mathbb{R}$, suponga que $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un estadístico para θ, el ***teorema de Lehmann-Scheffé*** establece que $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ será un estadístico suficiente minimal para θ si:

$$\frac{\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta|y_1, y_2, \dots, y_n)} \text{ no depende de } \theta \iff t(x_1, x_2, \dots, x_n) = t(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Ejemplo 8. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim exp(\theta)$ $\forall i$. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

Solución:

Usando el teorema de Lehmann-Scheffé, podemos encontrar un estadístico suficiente minimal.

$$\frac{\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta|y_1, y_2, \dots, y_n)} \Rightarrow$$

$$\frac{\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)}{\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n y_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y_i)} \Rightarrow$$

$$e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i + \theta \sum_{i=1}^n y_i} \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)}{\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y_i)} \Rightarrow$$

$$e^{\theta(\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i)} \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)}{\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y_i)}$$

La única manera de que el cociente no dependa de θ es que.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$t(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Es un estadístico suficiente minimal para θ, entonces sean $\theta_2 < \theta_1$ y analicemos el cociente $\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)}$.

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{\theta_1 e^{-\theta_1 x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)}{\theta_2 e^{-\theta_2 x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)}$$

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{\theta_1}{\theta_2} e^{-\theta_1 x + \theta_2 x}$$

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{\theta_1}{\theta_2} e^{x(\theta_2 - \theta_1)}$$

Entonces.

$$\theta_1 > \theta_2 > 0 \quad \wedge \quad x > 0 \quad \Rightarrow$$

$$1 > \frac{\theta_2}{\theta_1} > 0 \quad \wedge \quad \theta_2 - \theta_1 < 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(\theta_2 - \theta_1) < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} e^{x(\theta_2 - \theta_1)} \ \text{ es monótono no creciente.}$$

Entonces por el Teorema 2 se tiene que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim exp(\theta)$ y por el Apéndice C.38. conocemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$. Entonces k es aquella constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$$

$$\int_{0}^{k} \frac{{\theta_0}^{n} v^{n-1} e^{-(\theta_0 v)}}{\Gamma(n)} dv = \alpha$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right\}.$$

Ejemplo 9. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim Unif(0, \theta)\ \forall i$. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

Solución:

Usando el teorema de Lehmann-Scheffé, podemos encontrar un estadístico suficiente minimal, y aplicando los resultados del Apéndice B.2.7. se tiene.

$$\frac{\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta|y_1, y_2, \dots, y_n)} \Rightarrow$$

$$\frac{(\theta-0)^{-n}\mathbb{I}_{[0,\theta]}\left(x_{(n)}\right)}{(\theta-0)^{-n}\mathbb{I}_{[0,\theta]}\left(y_{(n)}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathbb{I}_{[0,\theta]}\left(x_{(n)}\right)}{\mathbb{I}_{[0,\theta]}\left(y_{(n)}\right)}$$

La única manera de que el cociente no dependa de θ es que.

$$x_{(n)} = y_{(n)}$$

Entonces.

$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{(n)}$$

Es un estadístico suficiente minimal para θ,ahora sean $\theta_2 < \theta_1$ y analicemos el cociente $\frac{f(x|\ \theta_1)}{f(x|\ \theta_2)}$.

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{(\theta_1)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\theta_1]}(x)}{(\theta_2)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\theta_2]}(x)}$$

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{\theta_2\mathbb{I}_{[0,\theta_1]}(x)}{\theta_1\mathbb{I}_{[0,\theta_2]}(x)}$$

Entonces.

$$\theta_1 > \theta_2 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} > 0$$

Para poder analizar la parte de las indicadoras, graficaremos el cociente, tomado a la división por 0 como ∞, veamos cómo se comporta ya que es una función constante hasta θ_2 y después es una división por 0, como se puede observar en la Figura 4.

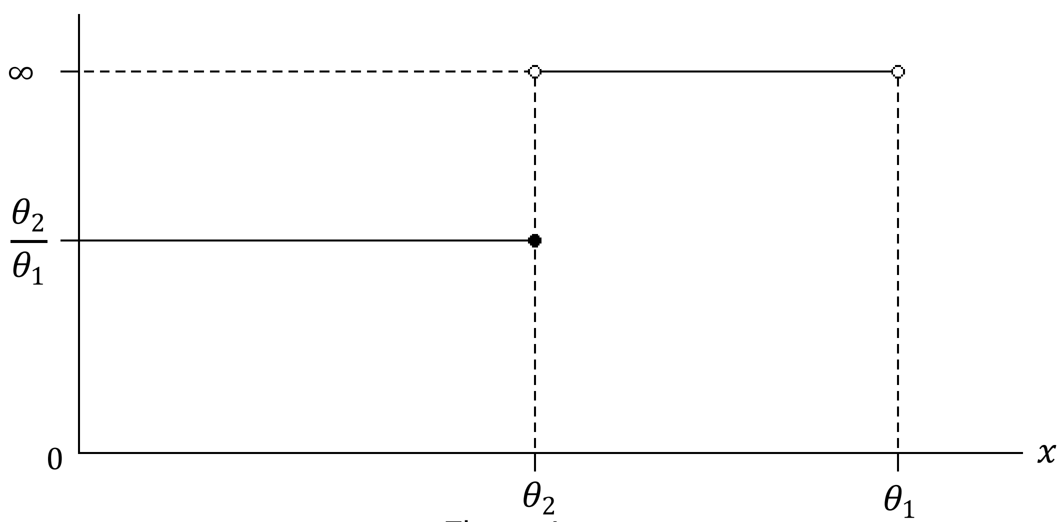

Figura 4.

Notamos que la función es no decreciente, entonces por el Teorema 2 se tiene que.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_{(n)} > k\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(x_{(n)} > k \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Pero por el Apéndice C.80. se puede obtener la distribución explicita de $x_{(n)}$, entonces para fines prácticos sea $y = x_{(n)}$.

$$f_y(y|\,\theta) = n\left(F_x(y|\,\theta)\right)^{n-1} f_x(y|\,\theta)$$

$$f_y(y|\,\theta) = n\left(\int_{-\infty}^{y} (\theta)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(x)dx\right)^{n-1} (\theta)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

$$f_y(y|\,\theta) = n\left((\theta)^{-1}\int_{0}^{y} 1dx\right)^{n-1} (\theta)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

$$f_y(y|\,\theta) = n((\theta)^{-1}y)^{n-1}(\theta)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

$$f_y(y|\,\theta) = n(\theta)^{-(n-1)}y^{n-1}(\theta)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

$$f_y(y|\,\theta) = n(\theta)^{-(n-1)-1}y^{n-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

$$f_y(y|\,\theta) = n\theta^{-n}y^{n-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

$$f_y(y|\,\theta) = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}(y > k) = \alpha \;\text{ con }\; f_y(y|\,\theta_0) = \frac{ny^{n-1}}{{\theta_0}^n}\mathbb{I}_{[0,\theta_0]}(y)$$

$$\int_{k}^{\theta_0} \frac{ny^{n-1}}{{\theta_0}^n} dy = \alpha$$

$$\frac{n}{{\theta_0}^n} \int_{k}^{\theta_0} y^{n-1} dy = \alpha$$

$$\frac{n}{{\theta_0}^n} \left(\frac{y^n}{n} \Bigg|_{k}^{\theta_0} \right) = \alpha$$

$$\frac{1}{{\theta_0}^n} ({\theta_0}^n - k^n) = \alpha$$

$$1 - \frac{k^n}{{\theta_0}^n} = \alpha$$

$$1 - \left(\frac{k}{\theta_0} \right)^n = \alpha$$

$$\left(\frac{k}{\theta_0} \right)^n = 1 - \alpha$$

$$\frac{k}{\theta_0} = (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}$$

$$k = \theta_0 (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_{(n)} > \theta_0 (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Definición 23. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x|\,\theta)$, $\theta \, \epsilon \, \Theta \subseteq \mathbb{R}$, suponga existen funciones $a(\theta) > 0 \;\forall \theta$, $b(x) > 0 \;\forall x$, $c(\theta) > 0 \;\forall \theta$ y $d(x) > 0 \;\forall x$, se dice que la función de densidad de X pertenece a la ***familia exponencial*** si se puede expresar como:

$$f(x|\,\theta) = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$$

Teorema 3. Sea $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria con función de densidad $f(x|\,\theta)$, $\theta \epsilon\, \Theta \subseteq \mathbb{R}$, asuma que.

$$f(x|\,\theta) = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$$

Entonces.

iii. Si $c(\theta)$ es una **función monótona creciente** en θ y si existe k^* tal que $\mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) > k^* \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_1 con región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_1} = \left\{(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geq k^*\right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0 \colon \theta \leq\ \theta_0 \ \ vs\ \ \mathcal{H}_1 \colon \theta >\ \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0 \colon \theta =\ \theta_0 \ \ vs\ \ \mathcal{H}_1 \colon \theta >\ \theta_0.$$

iv. Si $c(\theta)$ es una **función monótona decreciente** en θ y si existe k^* tal que $\mathbb{P}(t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \leq k^* \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_2 con región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_2} = \left\{(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \leq k^*\right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

v. Si $c(\theta)$ es una **función monótona creciente** en θ y si existe k^* tal que $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq k^* \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_3 con región de rechazo.

$$C_{\Upsilon_3} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \leq k^*\right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

vi. Si $c(\theta)$ es una **función monótona decreciente** en θ y si existe k^* tal que $\mathbb{P}(t(x_1, x_2, \ldots, x_n) > k^* \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$, entonces la prueba Υ_4 con región de rechazo.

$$C_{\Upsilon_4} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geq k^*\right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α para las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

Demostración:

Usando el teorema de Lehmann-Scheffé, podemos encontrar un estadístico suficiente minimal para θ, teniendo así:

$$\frac{\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta|y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a(\theta)b(x_i)e^{c(\theta)d(x_i)}}{\prod_{i=1}^{n} a(\theta)b(y_i)e^{c(\theta)d(y_i)}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a(\theta)^n e^{\sum_{i=1}^{n} c(\theta)d(x_i)} \prod_{i=1}^{n} b(x_i)}{a(\theta)^n e^{\sum_{i=1}^{n} c(\theta)d(y_i)} \prod_{i=1}^{n} b(y_i)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} b(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} b(y_i)} \; e^{c(\theta)\sum_{i=1}^{n} d(x_i) - c(\theta)\sum_{i=1}^{n} d(y_i)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} b(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} b(y_i)} \; e^{c(\theta)\left(\sum_{i=1}^{n} d(x_i) - \sum_{i=1}^{n} d(y_i)\right)}$$

La única manera de que el cociente no dependa de θ es que.

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) - \sum_{i=1}^{n} d(y_i) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d(y_i)$$

Entonces.

$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i)$$

Por lo que $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente minimal para θ , ahora se analizará el cociente de verosimilitudes de $f(x|\,\theta)$, sean $\theta_2 < \theta_1$ y analicemos el cociente $\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)}$.

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{a(\theta_1)b(x)e^{c(\theta_1)d(x)}}{a(\theta_2)b(x)e^{c(\theta_2)d(x)}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{a(\theta_1)}{a(\theta_2)} e^{c(\theta_1)d(x)-c(\theta_2)d(x)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x|\,\theta_1)}{f(x|\,\theta_2)} = \frac{a(\theta_1)}{a(\theta_2)} e^{d(x)\left(c(\theta_1)-c(\theta_2)\right)}$$

Entonces, como $f(x|\,\theta)$ pertenece a la familia exponencial, por la Definición 23 se tiene.

$$a(\theta_1) > 0 \;\wedge\; a(\theta_2) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a(\theta_1)}{a(\theta_2)} > 0 \;\wedge\; d(x) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$c(\theta_1) > 0 \;\wedge\; c(\theta_2) > 0$$

Al no conocer la naturaleza de $c(\theta)$, se desconoce si $c(\theta_1) - c(\theta_2)$ es mayor o menor a cero, teniendo así que el cociente de verosimilitudes será monótono no decreciente si $c(\theta_1) - c(\theta_2) > 0$, es decir si $c(\theta)$ es una función monótona no decreciente y el cociente de verosimilitudes será monótono no creciente si $c(\theta_1) - c(\theta_2) < 0$, es decir si $c(\theta)$ es una función monótona no creciente, teniendo de esta manera:

i) Por hipótesis se sabe que $c(\theta)$ es una función monótona creciente, esto quiere decir que $f(x|\,\theta)$ tiene un cociente de verosimilitudes monótono no decreciente, y por lo anterior se probó que $t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente para θ, entonces por cómo se definen las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0\colon \theta \leq\ \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta >\ \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0\colon \theta =\ \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta >\ \theta_0.$$

Se usa el caso **(i)** del Teorema 2, definiendo la región de rechazo más poderosa como:

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_1} = \{(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) : t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Haciendo $t_0 = k^*$ ya que es arbitrario, se tiene.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_1} = \left\{(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geq k^*\right\}$$

$$\therefore\ \Upsilon_1\colon \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geq k^*\right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0\colon \theta \leq \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta > \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0\colon \theta = \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta > \theta_0\ \blacksquare$$

ii) Por hipótesis se sabe que $c(\theta)$ es una función monótona decreciente, esto quiere decir que $f(x|\,\theta)$ tiene un cociente de verosimilitudes monótono no creciente, y por lo anterior se probó que $t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente para θ, entonces por cómo se definen las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0\colon \theta \leq\ \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta >\ \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0\colon \theta =\ \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta >\ \theta_0.$$

Se usa el caso **(iii)** del Teorema 2, definiendo la región de rechazo más poderosa como:

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_2} = \{(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) : t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) \leq t_0\}$$

Haciendo $t_0 = k^*$ ya que es arbitrario, se tiene.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon_2} = \left\{(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \leq k^*\right\}$$

$$\therefore\ \Upsilon_2\colon \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \leq k^*\right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0\colon \theta \leq \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta > \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0\colon \theta = \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1\colon \theta > \theta_0\ \blacksquare$$

iii) Por hipótesis se sabe que $c(\theta)$ es una función monótona creciente, esto quiere decir que $f(x|\,\theta)$ tiene un cociente de verosimilitudes monótono no decreciente, y por lo anterior se probó que $t(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)$ es un estadístico suficiente para θ, entonces por cómo se definen las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

Se usa el caso **(ii)** del Teorema 2, definiendo la región de rechazo más poderosa como:

$$C_{\Upsilon_3} = \{(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) : t(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) \leq t_0\}$$

Haciendo $t_0 = k^*$ ya que es arbitrario, se tiene.

$$C_{\Upsilon_3} = \left\{(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \leq k^*\right\}$$

$$\therefore \; \Upsilon_3 : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \leq k^* \right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0 \blacksquare$$

iv) Por hipótesis se sabe que $c(\theta)$ es una función monótona decreciente, esto quiere decir que $f(x|\,\theta)$ tiene un cociente de verosimilitudes monótono no creciente, y por lo anterior se probó que $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un estadístico suficiente para θ, entonces por cómo se definen las hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

Se usa el caso **(iv)** del Teorema 2, definiendo la región de rechazo más poderosa como:

$$C_{\Upsilon_4} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq t_0\}$$

Haciendo $t_0 = k^*$ ya que es arbitrario, se tiene.

$$C_{\Upsilon_4} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geq k^*\right\}$$

$$\therefore \ \Upsilon_4: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } : \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geq k^* \right\}$$

Es la prueba uniformemente más potente de tamaño α, paras los contrastes:

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$$
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0 \blacksquare$$

Ejemplo 10. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim exp(\theta)$ $\forall i$. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

Solución:

Sabemos que.

$$f(x|\,\theta) = \theta e^{-\theta x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Poniendo la distribución como familia exponencial de la Definición 23 de este modo.

$$f(x|\,\theta) = \theta \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)e^{-\theta x} = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$$

Donde.

$$a(\theta) = \theta$$
$$b(x) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$
$$c(\theta) = -\theta$$
$$d(x) = x$$

Entonces se puede construir el estadístico $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Analizando el comportamiento de $c(\theta)$, utilizando el criterio de la primera derivada para ver si es creciente o decreciente.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) = -1$$

Entonces tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) < 0 \ \ \forall\theta \in \Theta$$

Por lo tanto $c(\theta)$ es una función monótona decreciente en θ. Y por el inciso **(ii)** del Teorema 3, se tiene.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k\right\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim exp(\theta)$ y por el Apéndice C.38. conocemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$. Entonces k es aquella constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k\right) = \alpha \ \text{con} \ \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$$

$$\int_0^k \frac{{\theta_0}^n v^{n-1} e^{-(\theta_0 v)}}{\Gamma(n)} dv = \alpha$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right\}.$$

2.4. Valor p

Definición 24. Dada una prueba Υ, con región de rechazo $\complement_\Upsilon, \alpha$ el nivel de significancia ya dado, de tal modo que.

$$\Upsilon : \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon \complement_\Upsilon\}$$

Con.

$$\complement_\Upsilon = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : t(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon V\}$$

Siendo $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una transformación de la muestra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, V el conjunto de valores con los que se tomará la decisión de rechazar o no $\mathcal{H}_0$ y suponga que tomamos un V de tal forma que $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ evaluado en la muestra este contenido en V. Entonces, la mínima probabilidad de rechazar $\mathcal{H}_0$ dadas estas condiciones es lo que se conoce como ***valor p***.

$$Valor\ p = Min\{\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta } \wedge \ t(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ evaluado } \epsilon\ V)\}$$

Entonces una vez dado este valor p, se puede tomar la decisión de rechazar o no $\mathcal{H}_0$, con los siguientes criterios.

$$\text{Si } Valor\ p \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Se rechaza } \mathcal{H}_0$$
$$\text{Si } Valor\ p > \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{No se rechaza } \mathcal{H}_0$$

Ejemplo 11. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim Ber(\theta)\ \forall i$, los resultados obtenidos de la muestra fueron los siguientes.

$$(1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$$

Dada la prueba de tal modo que.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \right\}$$

Obtener el valor p de esta prueba y contrastar contra $\alpha = 0.05$ para las siguientes hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \tfrac{1}{2} \ \ vs\ \ \mathcal{H}_1: \theta > \tfrac{1}{2}.$$

Solución:

Primero hay que notar que ya contamos con el estadístico de prueba y podemos calcularlo ya que también conocemos la muestra.

$$t(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = \sum_{i=1}^{10} x_i = 6$$

Entonces analizando la probabilidad del valor p, tenemos.

$$Valor\ p = Min\left\{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Pero por la Definición 24, k debe ser de tal manera que $6 \geq k$ ya que debe cumplirse que el resultado de nuestra muestra se encuentre contenido en la región de rechazo. Entonces al ser una variable discreta existen pocos casos para el valor de k, y como $0 \leq k$, son 7 posibles casos, donde se buscará minimizar esta probabilidad para encontrar el valor p.

Caso I:

Si $k = 0$, entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 0 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 0 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 0\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Consultando la Tabla D.6. del Apéndice D se tiene que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 0 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - 0$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 0 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1$$

Caso II:

Si $k = 1$, entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Consultando la Tabla D.6. del Apéndice D se tiene que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 0 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.001$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 0.999$$

Caso III:

Si $k = 2$, entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice B.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Consultando la Tabla D.6. del Apéndice D se tiene que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 1 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.011$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 0.989$$

Caso IV:

Si $k = 3$, entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Consultando la Tabla D.6. del Apéndice D se tiene que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.055$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 0.945$$

Caso V:

Si $k = 4$, entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 4\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Consultando la Tabla D.6. del Apéndice D se tiene que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 3 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.172$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 0.828$$

Caso VI:

Si $k = 5$, entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Consultando la Tabla D.6. del Apéndice D se tiene que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 4 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.377$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 0.623$$

Caso VII:

Si $k = 6$, entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

Consultando la Tabla D.6. del Apéndice D se tiene que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 6 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 5 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.623$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right) = 0.377$$

Estos serían todos los casos, entonces por la Definición 24.

$$Valor\ p = Min\left\{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq k \mid \theta \leq \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$Valor\ p = Min\{1\ , 0.999\ , 0.989\ , 0.945\ , 0.828\ , 0.623\ , 0.377\}$$

$$Valor\ p = 0.377$$

Contrastando este valor con el de α. Y por la Definición 24 se tiene.

$$0.377 > 0.05$$

$$Valor\ p > \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{No se rechaza } \mathcal{H}_0$$

Capítulo 3

Pruebas de hipótesis sobre la Distribución Normal

Dada la importancia de la distribución normal y al contar con dos parámetros se pueden presentar diversos casos para pruebas de hipótesis los cuales se presentarán en este capítulo.

3.1. Pruebas para una sola muestra

Ejemplo 12. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\forall i$, con σ^2 conocido. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

Solución:

Por cómo están definidas las hipótesis podemos usar el Teorema 3, entonces se tiene que.

$$f(x|\,\theta, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Poniendo la distribución como familia exponencial de la Definición 23 de este modo.

$$f(x|\,\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$f(x|\,\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2-2x\theta+\theta^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$f(x|\,\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{x\theta}{\sigma^2}-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$f(x|\,\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{x\theta}{\sigma^2}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$f(x|\,\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x) e^{\frac{\theta x}{\sigma^2}} = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$$

Donde.

$$a(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}}$$

$$b(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$c(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$$

$$d(x) = x$$

Entonces se puede construir el estadístico $t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$.

$$t(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Analizando el comportamiento de $c(\theta)$, utilizando el criterio de la primera derivada para ver si es creciente o decreciente.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\theta}{\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$$

Entonces tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) > 0 \quad \forall\theta \in \Theta$$

Por lo tanto $c(\theta)$ es una función monótona creciente en θ. Y por el inciso **(i)** del Teorema 3, se tiene.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i > k\right\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > k \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{k}{n} \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} > \frac{k}{n} \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ y por el Apéndice C.60. conocemos que $\bar{x} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Siendo k la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} > \frac{k}{n}\right) = \alpha \text{ con } \bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{n}\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{n}\right) = 1 - \alpha$$

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - \theta_0 \leq \frac{k}{n} - \theta_0\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\frac{k}{n} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\frac{k}{n} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha \text{ con } \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\phi\left(\frac{\frac{k}{n} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$\frac{\frac{k}{n} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \zeta_{1-\alpha}$$

Siendo ζ_α la inversa de la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ acumulando α de probabilidad.

$$\frac{k}{n} - \theta_0 = \zeta_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{k}{n} = \zeta_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0$$

$$k = \zeta_{1-\alpha}\sqrt{n}\sigma + n\theta_0$$

Teniendo una región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i > \zeta_{1-\alpha}\sqrt{n}\sigma + n\theta_0\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{1}{n}\left(\zeta_{1-\alpha}\sqrt{n}\sigma + n\theta_0\right)\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} > \zeta_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} > \zeta_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 \right\}.$$

Ejemplo 13. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)\ \forall i$, con θ conocido. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0 \colon \sigma^2 \leq {\sigma_0}^2 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1 \colon \sigma^2 > {\sigma_0}^2.$$

Solución:

Por cómo están definidas las hipótesis podemos usar el Teorema 3, entonces se tiene que.

$$f(x|\,\theta, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Poniendo la distribución como familia exponencial de la Definición 23 de este modo.

$$f(x|\,\theta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$f(x|\,\theta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x) e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} = a(\sigma^2) b(x) e^{c(\sigma^2) d(x)}$$

Donde.

$$a(\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$b(x) = \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$c(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$d(x) = (x - \theta)^2$$

Entonces se puede construir el estadístico $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2$$

Analizando el comportamiento de $c(\sigma^2)$, utilizando el criterio de la primera derivada para ver si es creciente o decreciente.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} c(\sigma^2) = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} c(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}$$

Entonces tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} c(\sigma^2) > 0 \ \ \forall\sigma^2 \epsilon\ \Theta$$

Por lo tanto $c(\theta)$ es una función monótona creciente en θ. Y por el inciso **(i)** del Teorema 3, se tiene.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 > k\right\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 > k \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 > \frac{k}{{\sigma_0}^2} \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 > \frac{k}{{\sigma_0}^2} \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, por el Apéndice C.64. además como $\sigma^2 = {\sigma_0}^2$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que.

$$\frac{x_i-\theta}{\sigma_0} \sim N(0,1)\ \forall i$$

Por el Apéndice C.61. sabemos que.

$$\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(1)\ \forall i$$

Y por el Apéndice C.62. se tiene.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

Entonces k es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 > \frac{k}{{\sigma_0}^2}\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$1-\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 \leq \frac{k}{{\sigma_0}^2}\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 \leq \frac{k}{{\sigma_0}^2}\right) = 1-\alpha$$

$$\frac{k}{{\sigma_0}^2} = {\chi^2}_{(n)1-\alpha}$$

Siendo ${\chi^2}_{(n)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $\chi^2(n)$ acumulando α de probabilidad.

$$k = {\sigma_0}^2 {\chi^2}_{(n)1-\alpha}$$

Teniendo una región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 > {\sigma_0}^2 {\chi^2}_{(n)1-\alpha}\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 > {\chi^2}_{(n)1-\alpha}\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2 > {\chi^2}_{(n)1-\alpha}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \theta}{\sigma_0} \right)^2 > \chi^2{}_{(n)1-\alpha} \right\}.$$

Ejemplo 14. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\forall i$, con σ^2 desconocido. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0.$$

Solución:

Al tener el otro parámetro desconocido no es posible usar el Teorema 3, entonces se usará el cociente de verosimilitud generalizado de la Definición 18 y la Definición 19 para encontrar la prueba más potente. Entonces.

$$\Upsilon : \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k \}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\underset{\theta, \sigma^2 \in \Theta_0}{Sup} \ \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\underset{\theta, \sigma^2 \in \Theta}{Sup} \ \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Primero obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta, \sigma^2)$$

$$\mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup} \mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Sup} \mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Sup} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Sup} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Sup} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1, x_2, \dots, x_n)$ pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para θ y σ^2 ya que $\theta, \sigma^2 \,\epsilon\, \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por él Apéndice B.2.5. se tiene que:

$$EMV(\theta, \sigma^2) = (\widehat{\theta}, \widehat{\sigma^2}) = \left(\bar{x} \,, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}\,)^2 \right)$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta, \sigma^2 \, \epsilon \, \Theta}{Sup} \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1 \,, x_2 \,, \dots, x_n) = \left(2\pi \widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \widehat{\theta}\right)^2}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1 \,, x_2 \,, \dots, x_n)$ pero restringida ya que $\theta, \sigma^2 \,\epsilon\, \Theta_0$ entonces hay que analizar los posibles casos para este espacio, como el máximo general es $\widehat{\theta}$, y el espacio paramétrico Θ_0 esta en función de θ_0, entonces por tricotomía se tienen 3 casos:

- **i.** $\theta_0 < \widehat{\theta}$
- **ii.** $\theta_0 > \widehat{\theta}$
- **iii.** $\theta_0 = \widehat{\theta}$

Si los casos **(ii)** y **(iii)** pasaran entonces $\widehat{\theta} \,\epsilon\, \Theta_0$ lo que implicaría $\widehat{\sigma^2} \,\epsilon\, \Theta_0$ porque este último estimador está en función $\widehat{\theta}$ y esto resultaría de que el máximo en el espacio Θ_0 también fuera $\widehat{\theta}$ y $\widehat{\sigma^2}$, haciendo al cociente 1, mientras que el caso **(i)** el máximo para θ se alcanza cuando $\theta = \theta_0$ y como el estimador de σ^2 esta en función de θ se alcanza cuando $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_0)^2$ teniendo así.

$$\underset{\theta, \sigma^2 \, \epsilon \, \Theta_0}{Sup} \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1 \,, x_2 \,, \dots, x_n) = \begin{cases} \left(2\pi \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_0)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_0)^2\right)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_0)^2} & , \text{si } \theta_0 < \widehat{\theta} \\ \left(2\pi \widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \widehat{\theta})^2}, & \text{si } \theta_0 \geq \widehat{\theta} \end{cases}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}}{\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\widehat{\theta}\right)^2}}, & \text{si } \theta_0 < \widehat{\theta} \\ 1\,, & \text{si } \theta_0 \geq \widehat{\theta} \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que $\theta_0 < \widehat{\theta}$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}}{\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\widehat{\theta}\right)^2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}}{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\right)}}}{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\right)}}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}}}{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}{\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2-2x_i\theta_0+{\theta_0}^2\right)}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}{\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2-2x_i\theta_0+{\theta_0}^2\right)+0}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}{\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2-2x_i\theta_0+{\theta_0}^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\left((\bar{x}^2-2x_i\bar{x})-(\bar{x}^2-2x_i\bar{x})\right)}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}{\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)+\sum_{i=1}^{n}\left(\left({\theta_0}^2-2x_i\theta_0\right)-(\bar{x}^2-2x_i\bar{x})\right)}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n}{\theta_0}^2-\sum_{i=1}^{n}2x_i\theta_0-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2+\sum_{i=1}^{n}2x_i\bar{x}}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n{\theta_0}^2-2\theta_0\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}^2+2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n{\theta_0}^2-2\theta_0\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}^2+2\bar{x}\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n{\theta_0}^2-2\theta_0 n\bar{x}-n\bar{x}^2+2\bar{x}n\bar{x}}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n{\theta_0}^2-2\theta_0 n\bar{x}-n\bar{x}^2+2n\bar{x}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n{\theta_0}^2-2\theta_0 n\bar{x}+n\bar{x}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n\left({\theta_0}^2-2\theta_0\bar{x}+\bar{x}^2\right)}\right)^{\frac{n}{2}}\leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n\left(\bar{x}^2-2\theta_0\bar{x}+{\theta_0}^2\right)}\right)^{\frac{n}{2}}\leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\theta_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}}\leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\theta_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}}\leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\theta_0)^2\right)}\right)^{\frac{n}{2}}\leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\right)^{\frac{n}{2}}\leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\leq k^{\frac{2}{n}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\leq k_1 \ \text{ con } \ k_1 = \ k^{\frac{2}{n}} \quad \Rightarrow$$

$$1+\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\geq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\geq k_1-1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \geq k_2 \text{ con } k_2 = k_1 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(n-1)n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \geq (n-1)k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \geq k_3 \text{ con } k_3 = (n-1)k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{S^2} \geq k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{x}-\theta_0|}{S} \geq \sqrt{k_3} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{x}-\theta_0|}{S} \geq k_4 \text{ con } k_4 = \sqrt{k_3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\frac{1}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right)\frac{\sqrt{n}|\bar{x}-\theta_0|}{S} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\theta_0|}{\frac{1}{\sigma}S} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\theta_0|}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}S^2}} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\theta_0|}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{n-1}{n-1}\right)S^2}} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{|\bar{x}-\theta_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2}{n-1}}} \geq k_4$$

Recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que $\theta_0 < \hat{\theta}$ esto es.

$$\theta_0 < \bar{x} \quad \Rightarrow$$

$$0 < \bar{x} - \theta_0 \quad \Rightarrow$$

$$|\bar{x} - \theta_0| = \bar{x} - \theta_0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\bar{x} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2}{n-1}}} \geq k_4$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \geq k_4\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \geq k_4 \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\frac{\bar{x} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2}{n-1}}} \geq k_4 \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ y por el Apéndice C.60. conocemos que $\bar{x} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{\bar{x} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Por el Apéndice C.63 se sabe qué.

$$\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Y por el Apéndice C.65 se tiene.

$$\frac{\frac{\bar{x} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2}{n-1}}} \sim t(n-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \sim t(n-1)$$

Entonces k_4 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \geq k_4\right) = \alpha \text{ con } \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \sim t(n-1)$$

$$1-\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\theta_0)}{S}<k_4\right)=\alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S}<k_4\right)=1-\alpha$$

Entonces.

$$k_4=t_{(n-1)1-\alpha}$$

Siendo $t_{(n)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $t(n)$ acumulando α de probabilidad. Teniendo una región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon}=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\,:\,\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S}\geq t_{(n-1)1-\alpha}\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon}=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\,:\,\bar{x}-\theta_0\geq\frac{S}{\sqrt{n}}t_{(n-1)1-\alpha}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon:\left\{\text{Rechazar }\mathcal{H}_0\text{ si }\bar{x}-\theta_0\geq\frac{S}{\sqrt{n}}t_{(n-1)1-\alpha}\right\}.$$

Ejemplo 15. Sea $(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i\sim N(\theta,\sigma^2)$ $\forall i$, con θ desconocido. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0:\sigma^2\leq{\sigma_0}^2\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1:\sigma^2>{\sigma_0}^2.$$

Solución:

Al tener el otro parámetro desconocido no es posible usar el Teorema 3, entonces se usará el cociente de verosimilitud generalizado de la Definición 18 y la Definición 19 para encontrar la prueba más potente. Entonces.

$$\Upsilon : \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k \}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = \frac{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup} \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1 , x_2 , \dots , x_n)}{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Sup} \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1 , x_2 , \dots , x_n)}$$

Por el Ejemplo 14. Sabemos que.

$$\lambda = \frac{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}{\underset{\theta,\sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Sup} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para θ y σ^2 ya que $\theta, \sigma^2 \,\epsilon\, \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por él Apéndice B.2.5. se tiene que:

$$EMV(\theta, \sigma^2) = \left(\widehat{\theta}, \widehat{\sigma^2}\right) = \left(\bar{x} , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta,\sigma^2\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)=\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\widehat{\theta}\right)^2}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)$ pero restringida ya que $\theta,\sigma^2\ \epsilon\ \Theta_0$, primero al maximizar para θ se mantiene el mismo procedimiento que en el Apéndice B.2.5. resultando que el máximo para θ en este espacio ocurre cuando $\theta=\bar{x}$, y para σ^2 hay que analizar los posibles casos para este espacio, como el máximo general es $\widehat{\sigma^2}$, y el espacio paramétrico Θ_0 esta en función de ${\sigma_0}^2$, entonces por tricotomía se tienen 3 casos:

- **i.** ${\sigma_0}^2<\widehat{\sigma^2}$
- **ii.** ${\sigma_0}^2>\widehat{\sigma^2}$
- **iii.** ${\sigma_0}^2=\widehat{\sigma^2}$

Si los casos **(ii)** y **(iii)** pasaran entonces $\widehat{\sigma^2}\ \epsilon\ \Theta_0$, lo que implicaría que el máximo en el espacio Θ_0 también fuera $\widehat{\sigma^2}$, haciendo al cociente 1, mientras que el caso **(i)** se tiene que $\widehat{\sigma^2}$ es un máximo absoluto de la función $\mathcal{L}(\theta,\sigma^2|x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)$, lo que implica que la función es no decreciente en el intervalo $\left(0,\widehat{\sigma^2}\right)$, y como se cumple ${\sigma_0}^2<\widehat{\sigma^2}$, el máximo se alcanza cuando $\sigma^2={\sigma_0}^2$ teniendo así.

$$\underset{\theta,\sigma^2\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)=\begin{cases}(2\pi{\sigma_0}^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}, & \text{si }\ {\sigma_0}^2<\widehat{\sigma^2}\\ \left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\widehat{\theta}\right)^2}, & \text{si }\ {\sigma_0}^2\geq\widehat{\sigma^2}\end{cases}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\left(2\pi{\sigma_0}^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\widehat{\theta}\right)^2}}, & \text{si } {\sigma_0}^2 < \widehat{\sigma^2} \\ 1\,, & \text{si } {\sigma_0}^2 \geq \widehat{\sigma^2} \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que ${\sigma_0}^2 < \widehat{\sigma^2}$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{\left(2\pi{\sigma_0}^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{{\sigma_0}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\right)}}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{n{\sigma_0}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{e^{-\frac{n}{2}}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{n{\sigma_0}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\left(\frac{n}{2}\right)\frac{1}{n{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{n{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}} \leq k^{\frac{2}{n}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}} \leq k_1 \text{ con } k_1 = k^{\frac{2}{n}}$$

Entonces queremos encontrar un k_1 que cumpla esa condición, pero ya no es posible despejar un estadístico conocido de esta desigualdad, entonces si lo vemos como una función de $w = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}$,a fin de analizar esta función buscaremos su rango, podemos encontrar el máximo, derivando e igualando a 0.

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(we^{1-w}) = 0$$

$$w\frac{\partial}{\partial w}\left(e^{(1-w)}\right) + e^{(1-w)}\frac{\partial}{\partial w}(w) = 0$$

$$we^{(1-w)}(-1) + e^{(1-w)}(1) = 0$$

$$e^{(1-w)} = \theta_0\bar{x}e^{(1-w)}$$

$$w = 1$$

Entonces su máximo se da cuando $w = 1$ evaluando en la función tenemos encontramos el máximo valor que puede tomar.

$$1e^{(1-1)} = e^0 = 1$$

Entonces estamos buscando un k_1 de tal modo que.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}} \leq k_1$$

Si graficamos la función como se muestra en la Figura 5, tenemos.

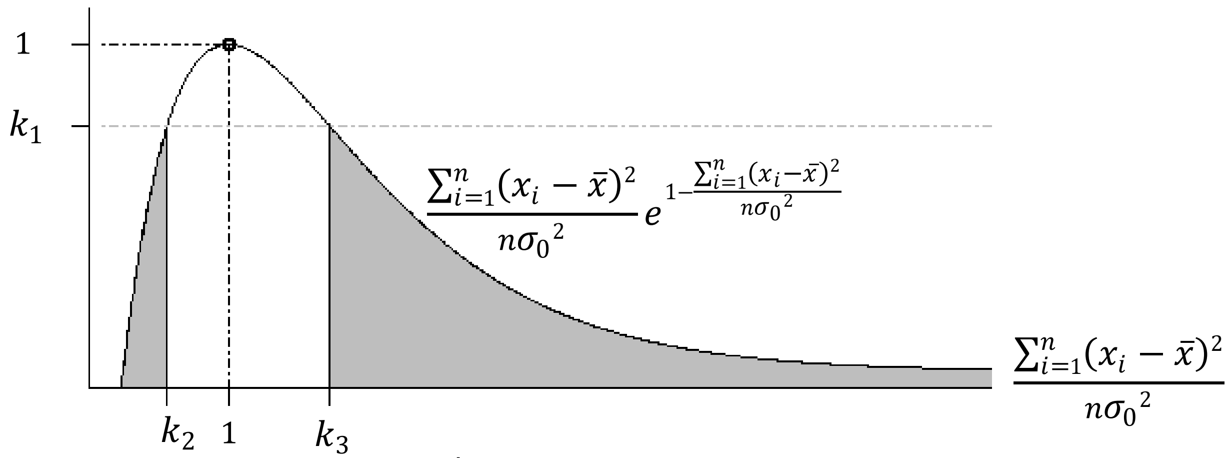

Figura 5.

Entonces vemos que la parte en gris es la parte de la función que satisface que.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}} \leq k_1$$

Para algún k_1 dado, y como se observa es posible encontrar k_2 y k_3 de tal modo que cumpla la misma condición, esto es.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}} \leq k_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} \leq k_2 \quad \vee \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} \geq k_3$$

Entonces es más practico trabajar con estas desigualdades, pero recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que ${\sigma_0}^2 < \widehat{\sigma^2}$ esto es.

$$\sigma_0{}^2 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \Rightarrow$$

$$1 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n\sigma_0{}^2}$$

Y por cómo están definidas k_2 y k_3, tenemos que $k_2 \leq 1 \quad \wedge \quad k_3 \geq 1$, por lo que solo nos quedamos con la desigualdad para k_3, quedando.

$$\frac{1}{n\sigma_0{}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \geq k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma_0{}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \geq nk_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma_0{}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \geq k_4 \ \text{ con } \ k_4 = \ nk_3$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) : \frac{1}{\sigma_0{}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \geq k_4\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma_0{}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \geq k_4 \mid \ \sigma^2 = \sigma_0{}^2\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{n-1}{n-1}\left(\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \geq k_4 \mid \ \sigma^2=\sigma_0{}^2\right)=\alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma_0{}^2}(n-1)S^2 \geq k_4 \mid \ \sigma^2=\sigma_0{}^2\right)=\alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta,\sigma^2)$, por el Apéndice C.63. además como $\sigma^2=\sigma_0{}^2$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\frac{1}{\sigma_0{}^2}(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$. Entonces k_4 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma_0{}^2}(n-1)S^2 \geq k_4\right)=\alpha \ \text{ con } \ \frac{1}{\sigma_0{}^2}(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$1-\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma_0{}^2}(n-1)S^2 < k_4\right)=\alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma_0{}^2}(n-1)S^2 < k_4\right)=1-\alpha$$

$$k_4=\chi^2{}_{(n-1)1-\alpha}$$

Siendo $\chi^2{}_{(n)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $\chi^2(n)$ acumulando α de probabilidad. Teniendo una región de rechazo.

$$C_{\Upsilon}=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n): \frac{1}{\sigma_0{}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \geq \chi^2{}_{(n-1)1-\alpha}\right\}$$

$$C_{\Upsilon}=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n): \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \geq \frac{1}{n-1}\left(\chi^2{}_{(n-1)1-\alpha}\right)\right\}$$

$$C_{\Upsilon}=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n): S^2 \geq \frac{\sigma_0{}^2}{n-1}\chi^2{}_{(n-1)1-\alpha}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon:\left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } S^2 \geq \frac{{\sigma_0}^2}{n-1}\chi^2{}_{(n-1)1-\alpha}\right\}.$$

3.2. Diferencia de Medias

Algo muy común es cuando se tienen dos poblaciones y se quiere saber si tienen o no la misma media, es por eso que se crearon las pruebas de diferencia de medias, donde esta vez se trabajara con 2 muestras.

Ejemplo 16. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta_x, {\sigma_x}^2)\ \forall i$, y sea $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ otra muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $y_j \sim N\left(\theta_y, {\sigma_y}^2\right)\ \forall j$, con $Cov\left(x_i, y_j\right) = 0\ \forall i, j$, siendo $n \neq m$ y ${\sigma_x}^2 \neq {\sigma_y}^2$ pero conocidos. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta_x \leq \theta_y \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta_x > \theta_y.$$

Solución:

Primero hay que notar que las hipótesis son equivalentes a.

$$\mathcal{H}_0: \theta_x \leq \theta_y \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta_x > \theta_y \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{H}_0: \theta_x - \theta_y \leq 0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta_x - \theta_y > 0$$

Ahora consideremos una nueva muestra (z_1) que la definimos como una transformación de las muestras que se tienen de esta manera. $z_1 = \bar{x} - \bar{y}$, esto debido a que esta transformación tiene como parámetro $\theta_x - \theta_y$ y es más fácil trabajar con hipótesis de una sola muestra. Entonces por el Apéndice C.60.

sabemos que $\bar{x} \sim N\left(\theta_x, \frac{{\sigma_x}^2}{n}\right)$ y $\bar{y} \sim N\left(\theta_y, \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)$, pero por mismo se tiene que $\bar{x} - \bar{y} \sim N\left(\theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)$, siendo así $z_1 \sim N\left(\theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)$. Por cómo están definidas las hipótesis podemos usar el Teorema 3, entonces se tiene que.

$$f_z\left(z|\ \theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right) = \frac{e^{-\frac{\left(z-(\theta_x-\theta_y)\right)^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

Poniendo la distribución como familia exponencial de la Definición 23 de este modo.

$$f_z\left(z|\ \theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right) = \frac{e^{-\frac{\left(z-(\theta_x-\theta_y)\right)^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

$$f_z\left(z|\ \theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right) = \frac{e^{-\frac{z^2-2z(\theta_x-\theta_y)+(\theta_x-\theta_y)^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

$$f_z\left(z|\ \theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}+\frac{z(\theta_x-\theta_y)}{\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}-\frac{(\theta_x-\theta_y)^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

$$f_z\left(z \mid \theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} e^{\frac{z(\theta_x-\theta_y)}{\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} e^{-\frac{(\theta_x-\theta_y)^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

$$f_z\left(z \mid \theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right) = \frac{e^{-\frac{(\theta_x-\theta_y)^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} e^{-\frac{z^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z) e^{\frac{z(\theta_x-\theta_y)}{\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}$$

$$= a(\theta_x - \theta_y) b(z) e^{c(\theta_x-\theta_y)d(z)}$$

Donde.

$$a(\theta_x - \theta_y) = \frac{e^{-\frac{(\theta_x-\theta_y)^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}}$$

$$b(z) = e^{-\frac{z^2}{2\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

$$c(\theta_x - \theta_y) = \frac{(\theta_x - \theta_y)}{\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}$$

$$d(z) = z$$

Entonces se puede construir el estadístico $t(z_1)$.

$$t(z_1) = \sum_{i=1}^{1} d(z_i) = z_1$$

Analizando el comportamiento de $c\left(\theta_x - \theta_y\right)$, utilizando el criterio de la primera derivada para ver si es creciente o decreciente.

$$\frac{\partial}{\partial\left(\theta_x - \theta_y\right)} c\left(\theta_x - \theta_y\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\theta_x - \theta_y\right)}\left(\frac{\left(\theta_x - \theta_y\right)}{\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\left(\theta_x - \theta_y\right)} c\left(\theta_x - \theta_y\right) = \frac{1}{\left(\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)}$$

Entonces tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial\left(\theta_x - \theta_y\right)} c\left(\theta_x - \theta_y\right) > 0 \;\; \forall\left(\theta_x - \theta_y\right) \epsilon\, \Theta$$

Por lo tanto $c\left(\theta_x - \theta_y\right)$ es una función monótona creciente en $\left(\theta_x - \theta_y\right)$. Y por el inciso **(i)** del Teorema 3, se tiene.

$$C_{\Upsilon} = \{(z_1) : z_1 > k\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(z_1 > k \mid \theta_x - \theta_y = 0\right) = \alpha$$

Pero sabemos que $z_1 \sim N\left(\theta_x - \theta_y, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)$ además como $\theta_x - \theta_y = 0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $z_1 \sim N\left(0\,, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)$. Entonces k es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}(z_1 > k\ ) = \alpha \ \text{ con } \ z_1 \sim N\left(0\,, \frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}(z_1 \leq k\ ) = \alpha$$

$$\mathbb{P}(z_1 \leq k\ \ ) = 1 - \alpha$$

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{z_1 - 0}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}} \sim N(0{,}1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}(z_1 - 0 \leq k\ ) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{z_1}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}} \leq \frac{k}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{z_1}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}} \leq \frac{k}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}}\right) = 1 - \alpha \ \text{ con } \ \frac{z_1}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}} \sim N(0{,}1)$$

$$\phi\left(\frac{k}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}}\right) = 1 - \alpha$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0{,}1)$.

$$\frac{k}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}}}=\zeta_{1-\alpha}$$

Siendo ζ_α la inversa de la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ acumulando α de probabilidad.

$$k=\zeta_{1-\alpha}\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}}$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_Y=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n):z_1>\zeta_{1-\alpha}\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}}\right\}$$

$$C_Y=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n):\bar{x}-\bar{y}>\zeta_{1-\alpha}\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$Y:\left\{\text{Rechazar }\mathcal{H}_0\text{ si }\bar{x}-\bar{y}>\zeta_{1-\alpha}\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_y}^2}{m}}\right\}.$$

Ejemplo 17. Sea $(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i\sim N(\theta_x,{\sigma_x}^2)\ \forall i$, y sea $(y_1\,,y_2\,,\dots,y_m)$ otra muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde

$y_j \sim N(\theta_y, {\sigma_y}^2)\ \forall j$, con $Cov\left(x_i\,, y_j\right) = 0\ \ \forall i, j$, siendo $n \neq m$ y ${\sigma_x}^2 = {\sigma_y}^2$ pero desconocidos. Encontrar la prueba uniformemente más potente para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0 : \theta_x \leq\ \theta_y\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1 : \theta_x >\ \theta_y.$$

Solución:

Al tener el otro parámetro desconocido no es posible usar un estadístico como en el Ejemplo 16, ni el Teorema 3, entonces se usará el cociente de verosimilitud generalizado de la Definición 18 y la Definición 19 para encontrar la prueba más potente. Entonces.

$$\Upsilon : \{\ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k\}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\underset{\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2, {\sigma_y}^2\ \epsilon\ \Theta_0}{Sup} \mathcal{L}\left(\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2, {\sigma_y}^2 | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n\,, y_1\,, y_2\,, \dots, y_m\right)}{\underset{\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2, {\sigma_y}^2\ \epsilon\ \Theta}{Sup} \mathcal{L}\left(\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2, {\sigma_y}^2 | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n\,, y_1\,, y_2\,, \dots, y_m\right)}$$

Primero obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}\left(\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2, {\sigma_y}^2 | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n\,, y_1\,, y_2\,, \dots, y_m\right) = \prod_{i=1}^{n} f_x(x_i|\ \theta_x, {\sigma_x}^2) \prod_{i=1}^{m} f_y\left(y_i|\ \theta_y, {\sigma_y}^2\right)$$

$$\mathcal{L}(*) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{(x_i - \theta_x)^2}{2{\sigma_x}^2}}}{\sqrt{2\pi{\sigma_x}^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \frac{e^{-\frac{\left(y_i - \theta_y\right)^2}{2{\sigma_y}^2}}}{\sqrt{2\pi{\sigma_y}^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)$$

$$\mathcal{L}(*) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_x}^2}(x_i - \theta_x)^2} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \left(2\pi{\sigma_y}^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_y}^2}\left(y_i - \theta_y\right)^2} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)$$

$$\mathcal{L}(*) = (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \left(2\pi{\sigma_y}^2\right)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_y}^2}} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)$$

Pero por hipótesis se tiene que ${\sigma_x}^2 = {\sigma_y}^2$ entonces.

$$\mathcal{L}(*) = (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)$$

$$\mathcal{L}(*) = (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}\left(y_i\right)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup} \mathcal{L}\left(\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2,{\sigma_y}^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\right)}{\underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta}{Sup} \mathcal{L}\left(\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2,{\sigma_y}^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\right)}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup} (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}\left(y_i\right)}{\underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta}{Sup} (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}\left(y_i\right)}$$

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}\left(y_i\right) \underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup} (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}}}{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}\left(y_i\right) \underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta}{Sup} (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}}}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup} (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}}}{\underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta}{Sup} (2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2}{2{\sigma_x}^2}}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2 | x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para θ_x, θ_y y ${\sigma_x}^2$ ya que $\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2 \in \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango.

$$EMV(\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2) = \underset{\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2 \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\mathcal{L}(\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2 | x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)\right)\right\}$$

$$EMV(*) = \underset{\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2 \in \Theta}{Max}\left\{ln\left((2\pi{\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_y)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\prod_{i=1}^{m}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)\right)\right\}$$

$$= \underset{\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2 \in \Theta}{Max}\left\{-\frac{(n+m)}{2}ln(2\pi{\sigma_x}^2) - \frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_y)^2\right) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\prod_{i=1}^{m}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ_x, θ_y y ${\sigma_x}^2$ e igualar a 0 para encontrar el máximo, generando un sistema de ecuaciones.

$$\frac{\partial}{\partial\theta_x}\left(-\frac{(n+m)}{2}ln(2\pi{\sigma_x}^2) - \frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_y)^2\right) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\prod_{i=1}^{m}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_y}\left(-\frac{(n+m)}{2}ln(2\pi{\sigma_x}^2) - \frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_y)^2\right) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\prod_{i=1}^{m}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial{\sigma_x}^2}\left(-\frac{(n+m)}{2}ln(2\pi{\sigma_x}^2) - \frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_y)^2\right) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\prod_{i=1}^{m}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i)\right)\right) = 0$$

Teniendo así.

$$0 - \frac{\partial}{\partial\theta_x}\left(-\frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_y)^2\right)\right) + 0 = 0$$

$$0 - \frac{\partial}{\partial\theta_y}\left(-\frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_y)^2\right)\right) + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial {\sigma_x}^2}\left(-\frac{(n+m)}{2}ln(2\pi{\sigma_x}^2)\right)-\frac{\partial}{\partial {\sigma_x}^2}\left(\frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2\right)\right)+0=0$$

Generando así un sistema de ecuaciones.

$$-\frac{2}{2{\sigma_x}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)\,(-1)=0 \qquad (1)$$

$$-\frac{2}{2{\sigma_x}^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\theta_y\right)(-1)=0 \qquad (2)$$

$$-\frac{n+m}{4\pi{\sigma_x}^2}(2\pi)-\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2\right)\left(-\frac{1}{2{\sigma_x}^4}\right)=0 \qquad (3)$$

De la ecuación (1) vemos que.

$$\frac{1}{{\sigma_x}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\theta_x=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\theta_x$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\theta_x$$

$$\theta_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\widehat{\theta_x} = \bar{x}$$

De la ecuación (2) vemos que.

$$\frac{1}{{\sigma_y}^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \theta_y) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - \theta_y) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} \theta_y = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} \theta_y$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = m\theta_x$$

$$\theta_y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\widehat{\theta_y} = \bar{y}$$

De la ecuación (3) se tiene.

$$-\frac{n+m}{2{\sigma_x}^2} + \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - \theta_y)^2\right)\left(\frac{1}{2{\sigma_x}^4}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2{\sigma_x}^2}\left(-(n+m) + \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - \theta_y)^2\right)\left(\frac{1}{{\sigma_x}^2}\right)\right) = 0$$

$$-(n+m)+\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2\right)\left(\frac{1}{{\sigma_x}^2}\right)=0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2\right)\left(\frac{1}{{\sigma_x}^2}\right)=n+m$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2=(n+m){\sigma_x}^2$$

$${\sigma_x}^2=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_y\right)^2\right)$$

Sustituyendo $\widehat{\theta_x}$ y $\widehat{\theta_y}$ en ${\sigma_x}^2$ se tiene.

$$\widehat{{\sigma_x}^2}=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)$$

Entonces.

$$EMV\left(\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\right)=\left(\widehat{\theta_x},\widehat{\theta_y},\widehat{{\sigma_x}^2}\right)$$

$$EMV\left(\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\right)=\left(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right)\right)$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\mathcal{L}(*)=\left(2\pi\widehat{{\sigma_x}^2}\right)^{-\frac{(n+m)}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\widehat{\theta_x}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\widehat{\theta_y}\right)^2}{2\widehat{{\sigma_x}^2}}}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}\left(\theta_x,\theta_y,{\sigma_x}^2|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n\,,y_1\,,y_2\,,\dots,y_m\right)$ pero restringida ya que $\theta_x, \theta_y, {\sigma_x}^2 \epsilon \Theta_0$ y en este espacio se tiene que $\theta_x = \theta_y$ entonces hay que maximizar la función ahora ya con solo dos parámetros, pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para θ_x y ${\sigma_x}^2$.

$$EMV(\theta_x, {\sigma_x}^2) = \underset{\theta_x, {\sigma_x}^2 \epsilon \Theta_0}{Max} \left\{ ln \left(\mathcal{L}(\theta_x, {\sigma_x}^2 | x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \right) \right\}$$

$$EMV(*) = \underset{\theta_x, {\sigma_x}^2 \epsilon \Theta_0}{Max} \left\{ ln \left((2\pi {\sigma_x}^2)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_x)^2}{2{\sigma_x}^2}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i) \right) \right\}$$

$$= \underset{\theta_x, {\sigma_x}^2 \epsilon \Theta_0}{Max} \left\{ -\frac{(n+m)}{2} ln(2\pi {\sigma_x}^2) - \frac{1}{2{\sigma_x}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \theta_x)^2 \right) + ln \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i) \right) \right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ_x y ${\sigma_x}^2$ e igualar a 0 para encontrar el máximo, generando un sistema de ecuaciones.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_x} \left(-\frac{(n+m)}{2} ln(2\pi {\sigma_x}^2) - \frac{1}{2{\sigma_x}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \theta_x)^2 \right) + ln \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i) \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial {\sigma_x}^2} \left(-\frac{(n+m)}{2} ln(2\pi {\sigma_x}^2) - \frac{1}{2{\sigma_x}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \theta_x)^2 \right) + ln \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \prod_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(y_i) \right) \right) = 0$$

Teniendo así.

$$0 - \frac{\partial}{\partial \theta_x} \left(-\frac{1}{2{\sigma_x}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \theta_x)^2 \right) \right) + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial {\sigma_x}^2} \left(-\frac{(n+m)}{2} ln(2\pi {\sigma_x}^2) \right) - \frac{\partial}{\partial {\sigma_x}^2} \left(\frac{1}{2{\sigma_x}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_x)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \theta_x)^2 \right) \right) + 0 = 0$$

Generando así un sistema de ecuaciones.

$$-\frac{1}{2\sigma_x{}^2}\left(2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)(-1)+2\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_x)(-1)\right)=0 \qquad (1)$$

$$-\frac{n+m}{4\pi\sigma_x{}^2}(2\pi)-\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_x)^2\right)\left(-\frac{1}{2\sigma_x{}^4}\right)=0 \qquad (2)$$

De la ecuación (1) vemos que.

$$\frac{1}{\sigma_x{}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_x)\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_x)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\theta_x+\sum_{i=1}^{m}y_i-\sum_{i=1}^{m}\theta_x=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i=\sum_{i=1}^{n}\theta_x+\sum_{i=1}^{m}\theta_x$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i=n\theta_x+m\theta_x$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i=\theta_x(n+m)$$

$$\theta_x=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i\right)$$

$$\widehat{\theta_{x_0}}=\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}$$

De la ecuación (2) vemos que.

$$-\frac{n+m}{2\sigma_x{}^2}+\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_x\right)^2\right)\left(\frac{1}{2\sigma_x{}^4}\right)=0$$

$$\frac{1}{2\sigma_x{}^2}\left(-(n+m)+\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_x)^2\right)\left(\frac{1}{\sigma_x{}^2}\right)\right)=0$$

$$-(n+m)+\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_x\right)^2\right)\left(\frac{1}{\sigma_x{}^2}\right)=0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_x\right)^2\right)\left(\frac{1}{\sigma_x{}^2}\right)=n+m$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\theta_x\right)^2=(n+m)\sigma_x{}^2$$

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_x)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_x)^2\right)$$

Sustituyendo $\widehat{\theta_{x_0}}$ en $\sigma_x{}^2$ se tiene.

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2\right)$$

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i{}^2-2x_i\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}+\left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i{}^2-2y_i\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}+\left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-2\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}y_i{}^2-2\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\sum_{i=1}^{m}y_i+m\left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-2\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}n\bar{x}+\sum_{i=1}^{m}y_i{}^2-2\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}m\bar{y}+(n+m)\left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2\right)$$

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+\sum_{i=1}^{m}y_i{}^2-2\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}(n\bar{x}+m\bar{y})+\frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+\sum_{i=1}^{m}y_i{}^2-2\frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m}+\frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i{}^2 - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2) - (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2) + \sum_{i=1}^{m} y_i{}^2 - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i{}^2 - m\bar{y}^2 - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m} + (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i{}^2 - 2m\bar{y}^2 + m\bar{y}^2 - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m} + (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i{}^2 - 2\bar{y}m\bar{y} + m\bar{y}^2 - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m} + (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i{}^2 - 2\bar{y}\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}^2 - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m} + (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i{}^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i{}^2 - 2\bar{y}y_i + \bar{y}^2\right) - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m} + (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2 - \frac{(n\bar{x}+m\bar{y})^2}{n+m} + (n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2 - \frac{\left((n\bar{x}+m\bar{y})^2 - (n+m)(n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)\right)}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2 - \frac{(n^2\bar{x}^2 + 2n\bar{x}m\bar{y} + m^2\bar{y}^2) - (n^2\bar{x}^2 + nm\bar{y}^2 + mn\bar{x}^2 + m^2\bar{y}^2)}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2 - \frac{(2n\bar{x}m\bar{y} - nm\bar{y}^2 - mn\bar{x}^2)}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2 + \frac{nm(-2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \bar{x}^2)}{n+m}\right)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2 + \frac{nm(\bar{x}-\bar{y})^2}{n+m}\right)$$

$$\widehat{\sigma_{x_0}}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 + \frac{nm}{n+m}(\bar{x} - \bar{y})^2\right)$$

Entonces.

$$EMV(\theta_x, {\sigma_x}^2) = \left(\widehat{\theta_{x_0}}, \widehat{{\sigma_{x_0}}^2}\right)$$

$$EMV(*) = \left(\frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}, \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2 + \frac{nm}{n+m}(\bar{x} - \bar{y})^2\right)\right)$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta_x, {\sigma_x}^2 \in \Theta_0}{Sup} \mathcal{L}(*) = \left(2\pi\widehat{\sigma_{x_0}}^2\right)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{\theta_{x_0}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \widehat{\theta_{x_0}}\right)^2}{2\widehat{\sigma_{x_0}}^2}}$$

Teniendo así.

$$\lambda = \frac{\left(2\pi\widehat{\sigma_{x_0}}^2\right)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{\theta_{x_0}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \widehat{\theta_{x_0}}\right)^2}{2\widehat{\sigma_{x_0}}^2}}}{\left(2\pi\widehat{\sigma_x}^2\right)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{\theta_x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \widehat{\theta_y}\right)^2}{2\widehat{\sigma_x}^2}}}$$

Y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{\left(2\pi\widehat{\sigma_{x_0}}^2\right)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{\theta_{x_0}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \widehat{\theta_{x_0}}\right)^2}{2\widehat{\sigma_{x_0}}^2}}}{\left(2\pi\widehat{\sigma_x}^2\right)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{\theta_x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \widehat{\theta_y}\right)^2}{2\widehat{\sigma_x}^2}}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right)\right)\right)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2}{2\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right)\right)}}}{\left(2\pi\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)\right)\right)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{2\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)\right)}}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right)\right)\right)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n+m}\right)}}}{\left(2\pi\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)\right)\right)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n+m}\right)}}} \leq k \ \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right)\right)\right)^{-\frac{n+m}{2}}}{\left(2\pi\left(\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)\right)\right)^{-\frac{n+m}{2}}} \leq k \ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}\right)^{-\frac{n+m}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}\right)^{\frac{n+m}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}\right)^{\frac{n+m}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\bar{y}\right)^2+\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right)}\right)^{\frac{n+m}{2}} \leq k \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}}\right)^{\frac{n+m}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}} \leq k^{\frac{2}{n+m}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}} \leq k_1 \text{ con } k_1 = k^{\frac{2}{n+m}} \quad \Rightarrow$$

$$1+\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2} \geq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2} \geq k_1 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2} \geq k_2 \text{ con } k_2 = k_1 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(n+m-2)\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2} \geq (n+m-2)k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)} \geq k_3 \text{ con } k_3 = (n+m-2)k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)} \geq k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\frac{1}{n+m-2}\left(\left(\frac{n-1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\left(\frac{m-1}{m-1}\right)\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right)} \geq k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)} \geq k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} \geq \sqrt{k_3} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4 \text{ con } k_4 = \sqrt{k_3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\frac{1}{\sigma_x}}{\frac{1}{\sigma_x}}\right)\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\frac{nm}{{\sigma_x}^2(n+m)}}|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\left(\frac{1}{{\sigma_x}^2}\right)\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\frac{nm}{{\sigma_x}^2(n+m)}}|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left(\frac{1}{{\sigma_x}^2}(n-1){S_x}^2+\frac{1}{{\sigma_x}^2}(m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2(n+m)}{nm}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{{\sigma_x}^2}(n-1){S_x}^2+\frac{1}{{\sigma_x}^2}(m-1){S_y}^2}{n+m-2}}} \geq k_4$$

Recordando que esto se cumple solo si $0 < \bar{x}-\bar{y}$ ya que si pasara lo contrario el cociente λ se volvería uno porque el máximo en el espacio Θ_0 cumple que $0 \geq \theta_x - \theta_y$ y para que el cociente tenga sentido debe pasar que $0 < \bar{x} - \bar{y}$, entonces.

$$0 < \bar{x} - \bar{y} \quad \Rightarrow$$
$$|\bar{x} - \bar{y}| = \bar{x} - \bar{y} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2 + (m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2(n+m)}{nm}}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{{\sigma_x}^2}(n-1){S_x}^2 + \frac{1}{{\sigma_x}^2}(m-1){S_y}^2}{n+m-2}}} \geq k_4$$

Entonces tenemos que.

$$C_Y = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2 + (m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4 \right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2 + (m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4 \mid \theta_x = \theta_y \right) = \alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{{\sigma_x}^2(n+m)}{nm}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{{\sigma_x}^2}(n-1){S_x}^2+\dfrac{1}{{\sigma_x}^2}(m-1){S_y}^2}{n+m-2}}} \geq k_4 \mid \theta_x=\theta_y\right)=\alpha$$

Por el Apéndice C.60. sabemos que $\bar{x}\sim N\left(\theta_x,\frac{{\sigma_x}^2}{n}\right)$ y $\bar{y}\sim N\left(\theta_y,\frac{{\sigma_y}^2}{m}\right)$, pero por mismo se tiene que $\bar{x}-\bar{y}\sim N\left(\theta_x-\theta_y,\frac{{\sigma_x}^2}{n}+\frac{{\sigma_x}^2}{m}\right)$ además como $\theta_x=\theta_y$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\bar{x}-\bar{y}\sim N\left(0,\frac{{\sigma_x}^2(n+m)}{nm}\right)$.

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{{\sigma_x}^2(n+m)}{nm}}}\sim N(0,1)$$

Por el Apéndice C.63 se sabe qué.

$$\frac{1}{{\sigma_x}^2}(n-1){S_x}^2\sim\chi^2(n-1)$$

Y por eso mismo.

$$\frac{1}{{\sigma_x}^2}(m-1){S_y}^2\sim\chi^2(m-1)$$

Y por el Apéndice C.62. se tiene que.

$$\frac{1}{{\sigma_x}^2}(n-1){S_x}^2+\frac{1}{{\sigma_x}^2}(m-1){S_y}^2 \sim \chi^2(n+m-2)$$

Y por el Apéndice C.65 se tiene.

$$\frac{\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{{\sigma_x}^2(n+m)}{nm}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{{\sigma_x}^2}(n-1){S_x}^2+\frac{1}{{\sigma_x}^2}(m-1){S_y}^2}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} \sim t(n+m-2)$$

Entonces k_4 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} \geq k_4\right)=\alpha$$

$$\text{con} \quad \frac{\sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} \sim t(n+m-2)$$

$$1-\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} < k_4\right)=\alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2+(m-1){S_y}^2\right)}} < k_4\right)=1-\alpha$$

$$k_4 = t_{(n+m-2)1-\alpha}$$

Siendo $t_{(n)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $t(n)$ acumulando α de probabilidad. Teniendo una región de rechazo.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2 + (m-1){S_y}^2\right)}} \geq t_{(n+m-2)1-\alpha} \right\}$$

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} - \bar{y} \geq \frac{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2 + (m-1){S_y}^2\right)}}{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}} t_{(n+m-2)1-\alpha} \right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} - \bar{y} \geq \frac{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left((n-1){S_x}^2 + (m-1){S_y}^2\right)}}{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}} t_{(n+m-2)1-\alpha} \right\}.$$

Capítulo 4

Planteamiento y Solución de Problemas

En este capítulo se plantearán diversos problemas y su respectiva resolución, usando las definiciones, métodos y técnicas expuestas en los capítulos 1,2 y 3. Una práctica recomendable es que el lector intente resolver el problema en cuestión antes de analizar su resolución, para que practique sus conocimientos adquiridos previamente.

Ejercicio 1: Inflado de llantas. Suponga que la distribución del tiempo necesario para inflar una llanta es Normal con media de 90 segundos y varianza típica de 158.76, se dejan de inflar llantas si el tiempo promedio de inflado no es de 90 segundos. Se observa el tiempo de inflado de 37 llantas. Compare las siguientes pruebas.

- **i.** $\Upsilon_1 : \{\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq \ 96.1\}$.
- **ii.** $\Upsilon_2 : \{\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq \ 95.3\}$.
- **iii.** $\Upsilon_3 : \{\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq \ 94\}$.

- **a)** Si se tolera un error de tipo I de hasta 0.04, determine las pruebas que satisfacen dicho error.
- **b)** ¿Qué prueba tiene menor error de tipo II dado que él verdadero valor de la media es de 93.3 segundos?
- **c)** Grafique la función de potencia para los valores 93.3, 94, 94.7, 95.4, 96.1.

Solución:

Primero hay que plantear bien nuestros datos, como nos dice que el tiempo es Normal con varianza conocida y se tomó una muestra de 37 llantas, entonces, tenemos $(x_1, x_2, \dots, x_{37})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, 158.76)\ \forall i$, como el evento de interés es saber si el tiempo promedio de inflado es de 90 o no, se plantean las siguientes hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = 90 \ vs\ \mathcal{H}_1: \theta \neq 90.$$

a) Para este inciso hay que sacar el error tipo I, para cada prueba y contrastarlo contra 0.04.

Para Υ_1, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$
$$\alpha = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 96.1)^c \mid \theta = 90)$$
$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} > 96.1 \mid \theta = 90)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 90$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 90 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 90 y varianza ${}^{158.76}\!/_{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{158.76/37}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64, entonces.

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 96.1 \mid \theta = 90)$$
$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{\sqrt{158.76/37}} \leq \frac{96.1 - 90}{\sqrt{158.76/37}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{12.6 / \sqrt{37}} \leq \frac{96.1 - 90}{12.6 / \sqrt{37}} \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{96.1 - 90}{12.6 / \sqrt{37}} \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha = 1 - \phi(2.944829)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\alpha = 1 - \phi(2.944829)$$

$$\alpha = 1 - 0.9984$$

$$\alpha = 0.0016 < 0.04$$

Entonces la prueba Υ_1 sí satisface el error de 0.04.

Para Υ_2, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 95.3)^c \mid \theta = 90)$$

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} > 95.3 \mid \theta = 90)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 90$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 90 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 90 y varianza $158.76/_{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{158.76/_{37}}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64, entonces.

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 95.3 \mid \theta = 90)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{\sqrt{158.76/37}} \leq \frac{95.3 - 90}{\sqrt{158.76/37}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{12.6/\sqrt{37}} \leq \frac{95.3 - 90}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{95.3 - 90}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi(2.558622)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\alpha = 1 - \phi(2.558622)$$

$$\alpha = 1 - 0.9948$$

$$\alpha = 0.0052 < 0.04$$

Entonces la prueba Υ_2 sí satisface el error de 0.04.

Para Υ_3, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 94)^c \mid \theta = 90)$$

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} > 94 \mid \theta = 90)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 90$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 90 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 90 y varianza ${}^{158.76}/_{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64, entonces.

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 94 \mid \theta = 90)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \leq \frac{94 - 90}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \leq \frac{94 - 90}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{94 - 90}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha = 1 - \phi(1.931035)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\alpha = 1 - \phi(1.931035)$$

$$\alpha = 1 - 0.9732$$

$$\alpha = 0.0268 < 0.04$$

Entonces la prueba Υ_3 sí satisface el error de 0.04.

b) Para este inciso hay que sacar el error tipo II para cada prueba.

Para Y_1

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ Falsa})$$
$$\beta = \mathbb{P}(\bar{x} \leq 96.1 \mid \theta = 93.3)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ falsa se tiene que $\theta = 93.3$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 93.3 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 93.3 y varianza ${158.76}/{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-93.3}{\sqrt{158.76/37}} \sim N(0{,}1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\beta = \mathbb{P}(\bar{x} \leq 96.1 \mid \theta = 93.3)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-93.3}{\sqrt{158.76/37}} \leq \frac{96.1-93.3}{\sqrt{158.76/37}} \mid \theta = 93.3\right)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-93.3}{12.6/\sqrt{37}} \leq \frac{96.1-93.3}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = 93.3\right)$$
$$\beta = \phi\left(\frac{96.1-93.3}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = 93.3\right)$$
$$\beta = \phi(1.351725)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0{,}1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\beta = \phi(1.351725)$$
$$\beta = 0.9115$$

Para Υ_2

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ Falsa })$$
$$\beta = \mathbb{P}(\bar{x} \leq 95.3 \mid \theta = 93.3)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ falsa se tiene que $\theta = 93.3$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 93.3 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 93.3 y varianza ${}^{158.76}/_{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-93.3}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\beta = \mathbb{P}(\bar{x} \leq 95.3 \mid \theta = 93.3)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{x} - 93.3}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \leq \frac{95.3 - 93.3}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \mid \theta = 93.3 \right)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{x} - 93.3}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \leq \frac{95.3 - 93.3}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \mid \theta = 93.3 \right)$$
$$\beta = \phi\left(\frac{95.3 - 93.3}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \mid \theta = 93.3\right)$$
$$\beta = \phi(0.965517)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\beta = \phi(0.965517)$$
$$\beta = 0.8315$$

Para Y_3

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ Falsa})$$
$$\beta = \mathbb{P}(\bar{x} \leq 94 \mid \theta = 93.3)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ falsa se tiene que $\theta = 93.3$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 93.3 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 93.3 y varianza ${}^{158.76}/_{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-93.3}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\beta = \mathbb{P}(\bar{x} \leq 95.3 \mid \theta = 93.3)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 93.3}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \leq \frac{94 - 93.3}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \mid \theta = 93.3\right)$$
$$\beta = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 93.3}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \leq \frac{94 - 93.3}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \mid \theta = 93.3\right)$$
$$\beta = \phi\left(\frac{94 - 93.3}{{}^{12.6}/_{\sqrt{37}}} \mid \theta = 93.3\right)$$

$$\beta = \phi(0.337931)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\beta = \phi(0.337931)$$
$$\beta = 0.6293$$

Entonces la prueba que tiene el menor error tipo II es Υ_3.

c) Para este inciso hay que obtener la función potencia para cada prueba y después contrastarlas con los valores dados.

Para Υ_1, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar}\, \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \,\epsilon\, \Theta$$
$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 96.1)^c \mid \theta = \theta_0)$$
$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = \mathbb{P}(\bar{x} > 96.1 \mid \theta = \theta_0)$$

Como $\theta = \theta_0$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_0 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_0 y varianza ${}^{158.76}/_{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{{}^{158.76}/_{37}}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64, entonces.

$$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 96.1 \mid \theta = \theta_0)$$

$$\mathit{\Pi}_{\Upsilon_1}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \leq \frac{96.1-\theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\mathit{\Pi}_{\Upsilon_1}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \leq \frac{96.1-\theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\mathit{\Pi}_{\Upsilon_1}(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{96.1-\theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\mathit{\Pi}_{\Upsilon_1}(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{96.1-\theta_0}{12.6/\sqrt{37}}\right)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

Para Υ_2, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\mathit{\Pi}_{\Upsilon_2}(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar}\, \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \in \Theta$$

$$\mathit{\Pi}_{\Upsilon_2}(\theta_0) = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 95.3)^c \mid \theta = \theta_0)$$

$$\mathit{\Pi}_{\Upsilon_2}(\theta_0) = \mathbb{P}(\bar{x} > 95.3 \mid \theta = \theta_0)$$

Como $\theta = \theta_0$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_0 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_0 y varianza $158.76/37$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64, entonces.

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 95.3 \mid \theta = \theta_0)$$

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \leq \frac{95.3 - \theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \leq \frac{95.3 - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{95.3 - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{95.3 - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}}\right)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

Para Υ_3, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \epsilon \Theta$$

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 94)^c \mid \theta = \theta_0)$$

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = \mathbb{P}(\bar{x} > 94 \mid \theta = \theta_0)$$

Como $\theta = \theta_0$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_0 y varianza 158.76, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_0 y varianza $^{158.76}/_{37}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64, entonces.

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 94 \mid \theta = \theta_0)$$

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \leq \frac{94 - \theta_0}{\sqrt{158.76/37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \leq \frac{94 - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{94 - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}} \mid \theta = \theta_0\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{94 - \theta_0}{12.6/\sqrt{37}}\right)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$. Ahora se contrastan las funciones.

	$\boldsymbol{\theta_0}$				
Función	93.3	94	94.7	95.4	96.1
$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0)$	$1-\phi\left(\frac{96.1-93.3}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{96.1-94}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{96.1-94.7}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{96.1-95.4}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{96.1-96.1}{12.6/\sqrt{37}}\right)$
$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0)$	$1-\phi\left(\frac{95.3-93.3}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{95.3-94}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{95.3-94.7}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{95.3-95.4}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{95.3-96.1}{12.6/\sqrt{37}}\right)$
$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0)$	$1-\phi\left(\frac{94-93.3}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{94-94}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{94-94.7}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{94-95.4}{12.6/\sqrt{37}}\right)$	$1-\phi\left(\frac{94-96.1}{12.6/\sqrt{37}}\right)$

Tabla 4.

Obteniendo los valores en las funciones.

	$\boldsymbol{\theta_0}$				
Función	93.3	94	94.7	95.4	96.1
$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0)$	$1-\phi(1.351725)$	$1-\phi(1.013793)$	$1-\phi(0.675862)$	$1-\phi(0.337931)$	$1-\phi(0)$
$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0)$	$1-\phi(0.965517)$	$1-\phi(0.627586)$	$1-\phi(0.289655)$	$1-\phi(-0.04827)$	$1-\phi(-0.38620)$
$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0)$	$1-\phi(0.337931)$	$1-\phi(0)$	$1-\phi(-0.33793)$	$1-\phi(-0.67586)$	$1-\phi(-1.01379)$

Tabla 5.

Buscando los valores en las tablas D.24. y D.25. de la Normal del Apéndice D.

	$\boldsymbol{\theta_0}$				
Función	93.3	94	94.7	95.4	96.1
$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0)$	$1-0.9115$	$1-0.8438$	$1-0.7486$	$1-0.6293$	$1-0.5$
$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0)$	$1-0.8315$	$1-0.7324$	$1-0.6103$	$1-0.4840$	$1-0.3520$
$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0)$	$1-0.6293$	$1-0.5$	$1-0.3707$	$1-0.2514$	$1-0.1562$

Tabla 6.

Obteniendo los valores.

	$\boldsymbol{\theta_0}$				
Función	93.3	94	94.7	95.4	96.1
$\Pi_{\Upsilon_1}(\theta_0)$	0.0885	0.1562	0.2514	0.3707	0.5
$\Pi_{\Upsilon_2}(\theta_0)$	0.1685	0.2676	0.3897	0.5160	0.6480
$\Pi_{\Upsilon_3}(\theta_0)$	0.3707	0.5	0.6293	0.7486	0.8438

Tabla 7.

Graficando las funciones se tiene.

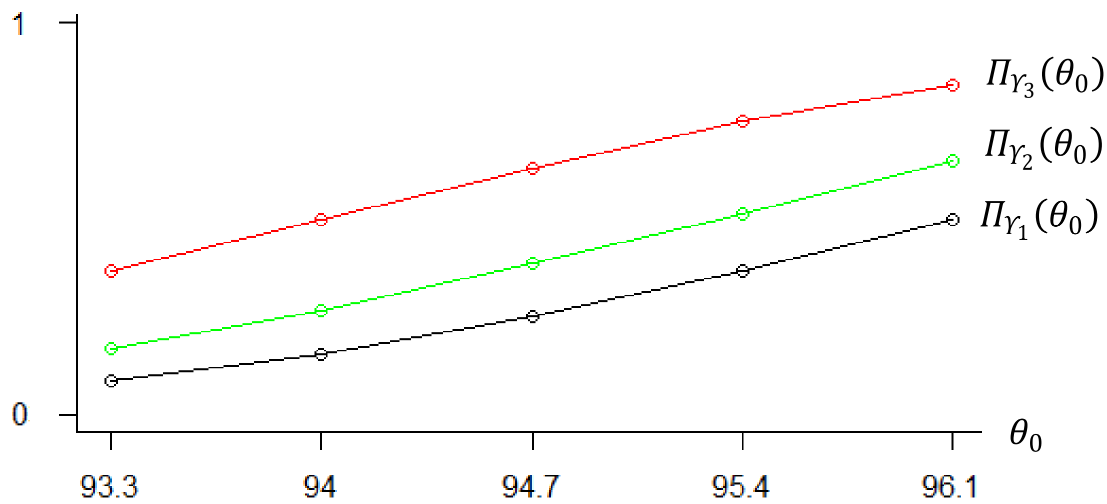

Figura 6.

Ejercicio 2: Moneda justa. En 1000 lanzamientos de una moneda, se obtienen 560 soles y 440 águilas, ¿Es razonable suponer que la moneda esta equilibrada? Justifique su respuesta.

Solución:

Primero hay que darnos cuenta que el experimento de lanzar una moneda se puede modelar con una distribución Bernoulli, y supondremos que si sale sol es considerado un éxito, entonces tenemos $(x_1, x_2, \dots, x_{1000})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim Ber(\theta)$ $\forall i$, como el evento de interés es saber si la moneda esta equilibrada se plantean las siguientes hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = \tfrac{1}{2} \; vs \; \mathcal{H}_1: \theta \neq \tfrac{1}{2}.$$

Construiremos la prueba uniformemente más potente de tamaño α, para esta hipótesis y propondremos α =0.05.

Una prueba Υ debe ser definida de este modo:

$$\Upsilon : \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k \}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \frac{\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_{1000})}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_{1000})}$$

Obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \prod_{i=1}^{1000} f(x_i | \theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \prod_{i=1}^{1000} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \theta^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\theta)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i} \prod_{i=1}^{1000} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_{1000})}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_{1000})}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\ \theta^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\theta)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i} \prod_{i=1}^{1000} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup}\ \theta^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\theta)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i} \prod_{i=1}^{1000} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{1000} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \theta^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\theta)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}}{\prod_{i=1}^{1000} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\, \theta^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\theta)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \theta^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\theta)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}}{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\, \theta^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\theta)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_{1000})$ pero esto es equivalente a obtener el estimador de máxima verosimilitud para θ, ya que $\theta \,\epsilon\, \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por él Apéndice B.1.1. se tiene que:

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = \bar{x}$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \hat{\theta}^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}\left(1-\hat{\theta}\right)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_{1000})$ pero restringida ya que $\theta \,\epsilon\, \Theta_0$ pero en este espacio θ solo puede tomar un valor y es el de $\frac{1}{2}$, y este debe ser diferente al supremo general $\hat{\theta}$ entonces el máximo se alcanza cuando $\theta = \frac{1}{2}$ teniendo así.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \frac{1}{2}^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}$$

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \frac{1}{2}^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}$$

$$\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=1}^{1000} x_i + 1000 - \sum_{i=1}^{1000} x_i}$$

$$\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_{1000}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}}{\hat{\theta}^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}\left(1-\hat{\theta}\right)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}}, & \text{si } \dfrac{1}{2} \neq \hat{\theta} \\ 1, & \text{si } \dfrac{1}{2} = \hat{\theta} \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que $\frac{1}{2} \neq \hat{\theta}$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}}{\hat{\theta}^{\sum_{i=1}^{1000} x_i}\left(1-\hat{\theta}\right)^{1000-\sum_{i=1}^{1000} x_i}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}}{\bar{x}^{\left(\frac{1000}{1000}\right)\sum_{i=1}^{1000} x_i}(1-\bar{x})^{1000-\left(\frac{1000}{1000}\right)\sum_{i=1}^{1000} x_i}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}}{\bar{x}^{1000\bar{x}}(1-\bar{x})^{1000-1000\bar{x}}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\bar{x}^{1000\bar{x}}(1-\bar{x})^{1000(1-\bar{x})}} \leq k\left(\frac{1}{2}\right)^{-1000} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{x}^{-1000\bar{x}}(1-\bar{x})^{-1000(1-\bar{x})} \leq k_1 \ \text{ con } \ k_1 = k\left(\frac{1}{2}\right)^{-1000} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\bar{x}^{-\bar{x}}(1-\bar{x})^{(\bar{x}-1)}\right)^{1000} \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\right)^{1000} \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right) \leq k_1{}^{\frac{1}{1000}} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right) \leq k_2 \text{ con } k_2 = k_1{}^{\frac{1}{1000}}$$

Entonces queremos encontrar un k_1 que cumpla esa condición, pero ya no es posible despejar un estadístico conocido de $\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)$, entonces si lo vemos como una función de $\bar{x}$,a fin de analizar esta función buscaremos su rango, podemos encontrar el máximo, derivando e igualando a 0.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(e^{\bar{x}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(e^{\bar{x}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)}\right) + e^{\bar{x}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)e^{\bar{x}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{x}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)\right) + e^{\bar{x}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)}\frac{-1}{(1-\bar{x})^2}(-1) = 0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) + \bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)\right)\right) + \left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\frac{1}{(1-\bar{x})^2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right) + \bar{x}\frac{1}{\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)\right) + \left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\frac{1}{(1-\bar{x})^2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right) + \bar{x}\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{1}{\bar{x}} - 1\right)\right) + \left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\frac{1}{(1-\bar{x})^2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)+\frac{\bar{x}^2}{1-\bar{x}}\left(\frac{-1}{\bar{x}^2}\right)\right)+\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\frac{1}{(1-\bar{x})^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)-\frac{1}{1-\bar{x}}\right)+\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\frac{1}{(1-\bar{x})^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)-\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\frac{1}{(1-\bar{x})^2}+\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\frac{1}{(1-\bar{x})^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right)\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)=0$$

Para que este producto sea 0, se debe cumplir que alguno de sus miembros sea 0, pero para el primer miembro $\frac{1}{1-\bar{x}}$ nunca toma el valor de 0, entonces analizando el segundo miembro $\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}$ tampoco puede tomar el valor de 0, entonces solo el tercer miembro puede ser 0, es decir.

$$ln\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}=1 \text{ ya que } ln(1)=0$$

$$1-\bar{x}=\bar{x}$$

$$2\bar{x}=1$$

$$\bar{x}=\frac{1}{2}$$

Entonces su máximo se da cuando $\bar{x}=\frac{1}{2}$ evaluando en la función tenemos encontramos el máximo valor que puede tomar.

$$\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=(1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)=2$$

Entonces estamos buscando un k_2 de tal modo que $\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right) \leq k_2$, si graficamos la función como se muestra en la Figura S1.2, tenemos.

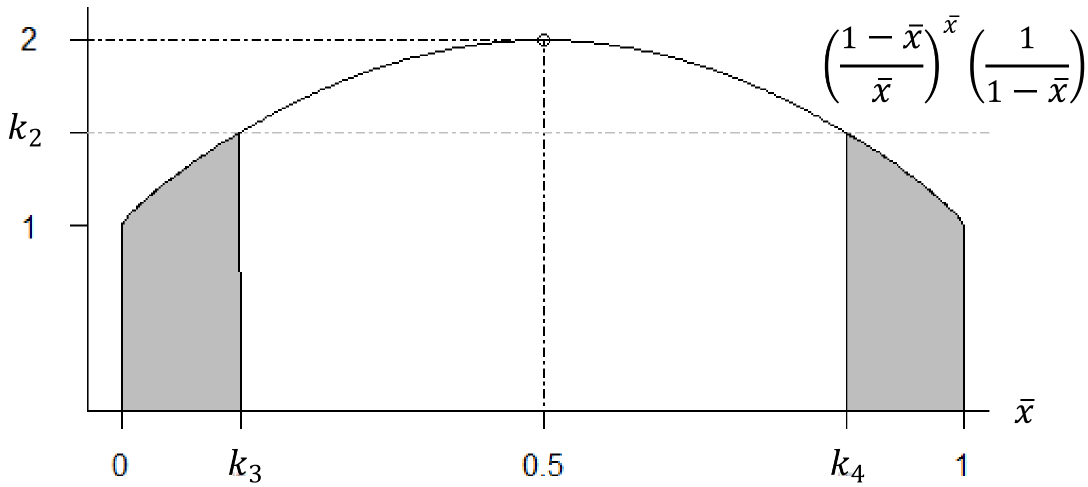

Figura 7.

Entonces vemos que la parte en gris es la parte de la función que satisface que $\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right) \leq k_2$ para algún k_2 dado, y como se observa es posible encontrar k_3 y k_4 de tal modo que cumpla la misma condición, esto es.

$$\left(\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^{\bar{x}}\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right) \leq k_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\bar{x} \leq k_3 \quad \vee \quad \bar{x} \geq k_4$$

Entonces es más practico trabajar con estas desigualdades, pero existen una infinidad de combinaciones que podrían satisfacer estas desigualdades entonces tomaremos las cotas simétricas aprovechando la simetría de la función respecto a 0.5 y recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que $\frac{1}{2} \neq \hat{\theta}$ esto es

.

$$\bar{x} \neq \frac{1}{2}$$

Y por cómo están definidas k_3 y k_4, tenemos que $k_3 \leq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad k_4 \geq \frac{1}{2}$, y por la simetría $k_4 = 1 - k_3$ por lo que nos quedamos con ambas desigualdades quedando.

$$\bar{x} \leq k_3 \quad \vee \quad \bar{x} \geq 1 - k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_3 \quad \vee \quad \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1 - k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq 1000k_3 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - 1000k_3 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5 \ \text{ con } \ k_5 = \ 1000k_3$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1 \,, x_2 \,, \ldots, x_{1000}) : \sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5 \right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5 \mid \theta = \frac{1}{2} \right) = 0.05$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{1000} x_i \sim Bin(1000, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{1000} x_i \sim Bin\left(1000, \frac{1}{2}\right)$. Por lo que $k_5$la constante que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5\right) = 0.05 \text{ con } \sum_{i=1}^{1000} x_i \sim Bin\left(1000, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5\right) = 0.05$$

$$\sum_{x=0}^{k_5} \binom{1000}{x} \frac{1}{2}^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1000-x} + \sum_{x=1000-k_5}^{1000} \binom{1000}{x} \frac{1}{2}^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1000-x} = 0.05$$

$$\sum_{x=0}^{k_5} \binom{1000}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} + \sum_{x=1000-k_5}^{1000} \binom{1000}{x} \frac{1}{2}^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} = 0.05$$

Pero encontrar a k_5 en función de estas series, resulta una tarea sumamente complicada sin la ayuda de algún software computacional. Y como la muestra es Bernoulli, y por el Apéndice A.1.2. tenemos que $E(x) = \theta$ y $V(x) = \theta(1 - \theta)$, y como $\mathcal{H}_0$ es cierta $\theta = \frac{1}{2}$ entonces $E(x) = \frac{1}{2}$ y $V(x) = \frac{1}{4}$,

por lo que se recurrirá al Apéndice C.82. que es el teorema del límite central, teniendo así.

$$\frac{\sum_{i=1}^{1000} x_i - 1000\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{1000}} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{1000} x_i - 500}{\frac{1}{2}\sqrt{1000}} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i \sim N\left(500, \left(\frac{1}{2}\sqrt{1000}\right)^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i \sim N(500{,}250)$$

Retomando la condición **(i)** del Teorema 1 se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.05$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.05$$

Podemos encontrar un k_5 tal que satisfaga esto, pero para conveniencia usaremos la simetría de la distribución normal, asumiendo que ambas probabilidades son simétricas entonces serian iguales, es decir.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.05$$

$$2\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.05$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.025$$

Pero ya tenemos la distribución de $\sum_{i=1}^{1000} x_i$, entonces por el Apéndice C.64. podemos estandarizar la normal.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq k_5 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.025$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} x_i - 500}{\sqrt{250}} \leq \frac{k_5 - 500}{\sqrt{250}}\right) = 0.025$$

$$\phi\left(\frac{k_5 - 500}{\sqrt{250}}\right) = 0.025$$

Buscando valores en la tabla D.24. de la Normal del Apéndice D.

$$\phi(-1.96) = 0.025$$

De aquí.

$$\frac{k_5 - 500}{\sqrt{250}} = -1.96$$

$$k_5 = -1.96\sqrt{250} + 500$$

$$k_5 = 469.009678$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{1000}) : \sum_{i=1}^{1000} x_i \leq 469.01 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1000 - 469.00 \right\}$$

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{1000}) : \sum_{i=1}^{1000} x_i \leq 469.01 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 530.99 \right\}$$

Quedado la prueba uniformemente más potente.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{1000} x_i \leq 469.01 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 530.99 \right\}$$

Teniendo la prueba construida, analizamos la muestra que tenía 560 soles y 440 águilas, como tomamos al sol como un éxito entonces.

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i = 560(1) + 440(0)$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i = 560$$

Entonces la suma cae dentro de la región critica de la prueba, ya que $560 \geq 530.99$, por lo que se rechaza $\mathcal{H}_0$.

∴ La moneda no esta equilibrada con un nivel de significancia del 5%.

Ejercicio 3: Accidentes automovilísticos I. Asuma que en cierta ciudad se ha observado históricamente que los accidentes de automóviles sigues una distribución Poisson con una media igual a 15 accidentes al año, si el año pasado se observaron 10 accidentes, ¿Es estadísticamente correcto suponer que la tasa de accidentes automovilísticos ha disminuido?

Solución:

Tenemos (x_1) una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_1 \sim Poi(\theta)$, como nos interesa saber si la taza ha disminuido o no, plantearemos la hipótesis con eso, siendo $\mathcal{H}_1$ la hipótesis de interés, entonces.

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq 15 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta < 15.$$

Construiremos la prueba uniformemente más potente de tamaño α, para esta hipótesis y propondremos α =0.05.

Una prueba Υ debe ser definida así:

$$\Upsilon: \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k\}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1) = \frac{\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup} \mathcal{L}(\theta|x_1)}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup} \mathcal{L}(\theta|x_1)}$$

Obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta|x_1) = \prod_{i=1}^{1} f(x_i|\,\theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1) = \prod_{i=1}^{1} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1) = e^{-(1)\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{1} x_i} \prod_{i=1}^{1} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta_0}{Sup} \ \mathcal{L}(\theta|x_1)}{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Sup} \mathcal{L}(\theta|x_1)}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta_0}{Sup} \ e^{-(1)\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{1} x_i} \prod_{i=1}^{1} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)}{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Sup} \, e^{-(1)\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{1} x_i} \prod_{i=1}^{1} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta_0}{Sup} \ e^{-\theta}\theta^{x_1} \frac{1}{x_1!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)}{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Sup} \, e^{-\theta}\theta^{x_1} \frac{1}{x_1!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{x_1!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i) \underset{\theta \, \epsilon \, \Theta_0}{Sup} \ e^{-\theta}\theta^{x_1}}{\frac{1}{x_1!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i) \underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Sup} \, e^{-\theta}\theta^{x_1}}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta_0}{Sup} \ e^{-\theta}\theta^{x_1}}{\underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Sup} \, e^{-\theta}\theta^{x_1}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta|x_1)$ pero esto es equivalente a obtener el estimador de máxima verosimilitud para θ, ya que $\theta \, \epsilon \, \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por él Apéndice B.1.5. se tiene que:

$$EMV(\theta) = \widehat{\theta} = \overline{x}$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\,\mathcal{L}(\theta|x_1) = e^{-\hat{\theta}}\hat{\theta}^{x_1}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta|x_1\,, x_2\,, \dots, x_{1000})$ pero restringida ya que $\theta\;\epsilon\;\Theta_0$ pero en este espacio θ se maximiza cuando $\theta = 15$ y este debe ser diferente al supremo general $\hat{\theta}$ entonces el máximo se alcanza cuando $\theta = 15$ teniendo así.

$$\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\;\mathcal{L}(\theta|x_1) = e^{-15}(15)^{x_1}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{e^{-15}(15)^{x_1}}{e^{-\hat{\theta}}\hat{\theta}^{x_1}}, & \text{si } \hat{\theta} < 15 \\ 1\,, & \text{si } \hat{\theta} \geq 15 \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que $\hat{\theta} > 15$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{e^{-15}(15)^{x_1}}{e^{-\hat{\theta}}\hat{\theta}^{x_1}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-15}(15)^{x_1}}{e^{-\bar{x}}\bar{x}^{x_1}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{\bar{x}-15}\left(\frac{15}{\bar{x}}\right)^{x_1} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} x_i - 15}\left(\frac{15}{\frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} x_i}\right)^{x_1} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1} \leq k$$

Entonces queremos encontrar un k que cumpla esa condición, pero ya no es posible despejar un estadístico conocido de $e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1}$, entonces si lo vemos como una función de x_1 ,a fin de analizar esta función buscaremos su rango, podemos encontrar el máximo, derivando e igualando a 0.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1-15}e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\right) = 0$$

$$e^{x_1-15}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{x_1-15}) = 0$$

$$e^{x_1-15}e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}e^{x_1-15} = 0$$

$$e^{x_1-15}e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{15}{x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(ln\left(\frac{15}{x_1}\right)\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}e^{x_1-15} = 0$$

$$e^{x_1-15}e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{15}{x_1}\right) + x_1\frac{1}{\left(\frac{15}{x_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{15}{x_1}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}e^{x_1-15} = 0$$

$$e^{x_1-15}e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{15}{x_1}\right) + x_1\frac{x_1}{15}\left(\frac{-15}{{x_1}^2}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}e^{x_1-15} = 0$$

$$e^{x_1-15}e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{15}{x_1}\right) + \frac{{x_1}^2}{15}\left(\frac{-15}{{x_1}^2}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{15}{x_1}\right)}e^{x_1-15} = 0$$

$$e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1}\left(ln\left(\frac{15}{x_1}\right) - 1\right) + \left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1}e^{x_1-15} = 0$$

$$e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1} ln\left(\frac{15}{x_1}\right) - e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1} + \left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1} e^{x_1-15} = 0$$

$$e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1} ln\left(\frac{15}{x_1}\right) = 0$$

Para que este producto sea 0, se debe cumplir que alguno de sus miembros sea 0, pero para el primer miembro e^{x_1-15} nunca toma el valor de 0, entonces analizando el segundo miembro $\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1}$ tampoco se hace 0, solo el tercer miembro puede ser 0, es decir.

$$ln\left(\frac{15}{x_1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{x_1} = 1 \text{ ya que } ln(1) = 0$$

$$x_1 = 15$$

Entonces su máximo se da cuando $x_1 = 15$ evaluando en la función tenemos encontramos el máximo valor que puede tomar.

$$e^{15-15}\left(\frac{15}{15}\right)^{15} = e^0(1)^{15} = 1$$

Entonces estamos buscando un k de tal modo que $e^{x_1-15}\left(\frac{15}{x_1}\right)^{x_1} \leq k$, si graficamos la función como se muestra en la Figura 8, tenemos.

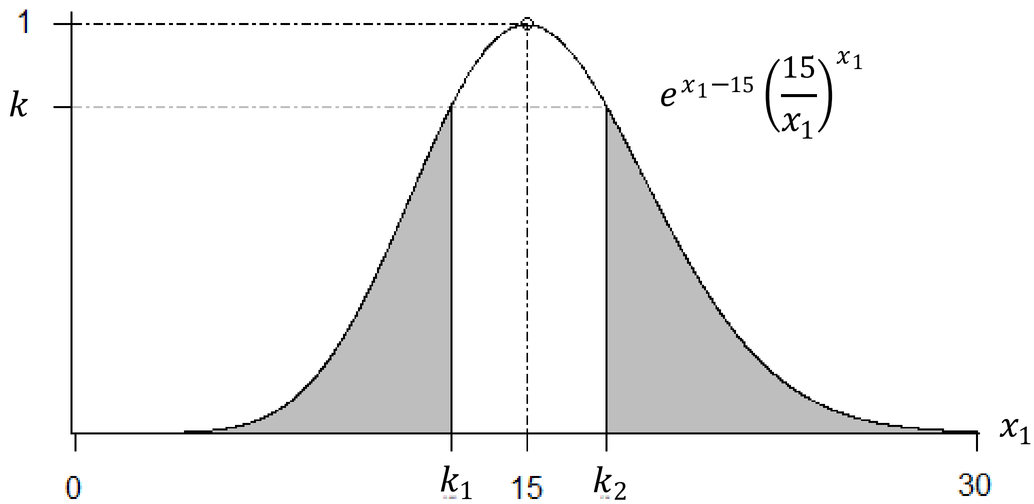

Figura 8.

Entonces es más practico trabajar con estas desigualdades, pero recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que $\hat{\theta} < 15$ esto es.

$$\hat{\theta} < 15 \quad \Rightarrow$$
$$x_1 < 15$$

Y por cómo están definidas k_1 y k_2, tenemos que $k_1 \leq 15 \quad \wedge \quad k_2 \geq 15$, por lo que solo nos quedamos con la desigualdad para k_1, quedando.

$$x_1 \leq k_1$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \{(x_1) : x_1 \leq k_1\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}(x_1 \leq k_1 \mid \theta = 15) = 0.05$$

Como se tiene que $\theta = 15$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $x_1 \sim Poi(15)$. Por lo que k_1 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}(x_1 \leq k_1) = 0.05 \text{ con } x_1 \sim Poi(15)$$

$$\sum_{x=0}^{k_1} \frac{e^{-15}15^x}{x!} = 0.05$$

Buscando valores en la tabla D.23. de la Poisson del Apéndice D.

$$k_2 = 9$$

Entonces la prueba uniformemente más potente es.

$$\Upsilon: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_1 \leq 9\}.$$

Teniendo la prueba construida, analizamos la muestra que se obtuvo un promedio de 10 accidentes. Entonces el valor no cae dentro de la región critica de la prueba, ya que $10 > 9$, por lo que no se rechaza $\mathcal{H}_0$.

∴ La tasa de accidentes automovilísticos no ha disminuido con un nivel de significancia del 5%.

Nota: El lector podría intentar resolver el mismo problema mediante el valor P y contrastar ambos procedimientos.

Ejercicio 4: Prueba Exponencial I. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta) = \theta e^{-\theta x_i}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i) \quad \forall i$$

Donde $\theta \epsilon \Theta \coloneqq \{\theta \mid \theta > 0\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

Obtener la prueba uniformemente más poderosa de tamaño α.

Solución:

Con base a los Ejemplos 7 y 8, la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right\}.$$

Donde k es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$$

$$\int_0^{k_4} \frac{{\theta_0}^n v^{n-1} e^{-(\theta_0 v)}}{\Gamma(n)} dv = \alpha$$

Nota: El lector podría intentar resolver el mismo problema mediante el valor P y contrastar ambos procedimientos.

Ejercicio 5: Prueba Bernoulli I. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\, \theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \qquad \forall i$$

Donde $\theta \epsilon \Theta := \{\theta \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq \frac{1}{2} \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta > \frac{1}{2}.$$

Y considere la región critica.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{12}) : \sum_{i=1}^{12} x_i > 7\right\}$$

a) ¿Cuál es el nivel de significancia de esta prueba?

b) Encuentre la función potencia.

Solución:

Primero hay que identificar que nuestra muestra $(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ es proveniente de una distribución Bernoulli, y como se tiene la región critica podemos definir la prueba.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{12} x_i > 7 \right\}.$$

a) Para este inciso hay que obtener la probabilidad del error tipo I o nivel de significancia de esta prueba.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i > 7 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{12} x_i \sim Bin(12, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{12} x_i \sim Bin\left(12, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i > 7\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{12} x_i \sim Bin\left(12, \frac{1}{2}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i \leq 7\right) = \alpha$$

$$1 - \sum_{x=0}^{7} \binom{12}{x} \frac{1}{2}^{x} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12-x} = \alpha$$

Buscando valores en la tabla D.8. de la Binomial del Apéndice D.

$$1 - 0.806 = \alpha$$

$$\alpha = 0.194$$

b) Para este inciso hay que obtener la función potencia de la prueba.

Sabemos que $\Pi_{\Upsilon}(\theta)$ es la probabilidad de rechazar $\mathcal{H}_0$ dado que $\theta \epsilon \Theta$, es decir.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \epsilon \Theta$$

$$\varPi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i > 7 \ | \ \theta = \theta_0\right)$$

$$\varPi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i \leq 7 \ | \ \theta = \theta_0\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{12} x_i \sim Bin(12, \theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{12} x_i \sim Bin(12, \theta_0)$.

$$\varPi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i \leq 7 \ | \ \theta = \theta_0\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{12} x_i \sim Bin(12, \theta_0)$$

$$\varPi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = 1 - \sum_{x=0}^{7} \binom{12}{x} {\theta_0}^{x} (1 - \theta_0)^{12-x}$$

Quedando $\varPi_{\Upsilon}(\theta_0)$ como una función de θ_0.

Ejercicio 6: Prueba Bernoulli II. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i | \ \theta) = \ \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1 - x_i} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \quad \forall i$$

Donde $\theta \ \epsilon \ \Theta \coloneqq \{\theta | \ 0 \leq \theta \leq 1\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0 \colon \theta \leq \ \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1 \colon \theta = \ \theta_1 > \theta_0.$$

a) Por medio del teorema de Neyman Pearson encuentre la región critica más poderosa de tamaño α dado que el estadístico de prueba es $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

b) Defina los valores $\theta_0 = 0.4$, $\theta_1 = 0.6$ y $n = 20$ se sabe que $\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$. Encuentre el valor k para el cual la probabilidad de cometer el error tipo I es 0.0000050.

Solución:

Primero hay que identificar que nuestra muestra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es proveniente de una distribución Bernoulli, y al tratarse de hipótesis simples se usa el Teorema 1.

a) Para este inciso se buscará la región critica más poderosa.

Con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0|x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) \leq ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) \leq k_1 \text{ con } k_1 = ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) - ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)\right) + nln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) - ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)\right) \leq k_1 - nln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) - ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)\right) \leq k_2 \text{ con } k_2 = k_1 - nln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln(\theta_0) - ln(\theta_1) - \left(ln(1-\theta_0) - ln(1-\theta_1)\right)\right) \leq k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln(\theta_0) - ln(\theta_1) - ln(1-\theta_0) + ln(1-\theta_1)\right) \leq k_2$$

Como $\theta_0 < \theta_1$.

$$\theta_0 < \theta_1 \quad \Rightarrow$$

$$ln(\theta_0) < ln(\theta_1) \quad \wedge \quad -\theta_0 > -\theta_1 \quad \Rightarrow$$

$$ln(\theta_0) < ln(\theta_1) \quad \wedge \quad 1-\theta_0 > 1-\theta_1 \;\Rightarrow$$

$$ln(\theta_0) < ln(\theta_1) \quad \wedge \quad ln(1-\theta_0) > ln(1-\theta_1) \;\Rightarrow$$

$$ln(\theta_0) - ln(\theta_1) < 0 \quad \wedge \quad 0 > ln(1-\theta_1) - ln(1-\theta_0) \;\Rightarrow$$

$$ln(\theta_0) - ln(\theta_1) - ln(1-\theta_0) + ln(1-\theta_1) < 0$$

Retomando.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{k_2}{ln(\theta_0) - ln(\theta_1) - ln(1-\theta_0) + ln(1-\theta_1)} \;\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3 \;\text{ con }\; k_3 = \frac{k_2}{ln(\theta_0) - ln(\theta_1) - ln(1-\theta_0) + ln(1-\theta_1)}$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Bin(n, \theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Bin(n, \theta_0)$.

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Bin(n, \theta_0)$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3\right) = 1 - \alpha$$

$$\sum_{x=0}^{k_3} \binom{n}{x} {\theta_0}^x (1 - \theta_0)^{n-x} = 1 - \alpha$$

Pero encontrar a k_3 en función de esta serie, resulta una tarea sumamente complicada sin la ayuda de algún software computacional. Y como la muestra es Bernoulli, y por el Apéndice A.1.2. tenemos que $E(x) = \theta$ y $V(x) = \theta(1 - \theta)$, y como $\mathcal{H}_0$ es cierta $\theta = \theta_0$ entonces $E(x) = \theta_0$ y $V(x) = \theta_0(1 - \theta_0)$, por lo que se recurrirá al Apéndice C.82. que es el teorema del límite central, teniendo así.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N\big(n\theta_0 \, , n\theta_0(1-\theta_0)\big)$$

Retomando la condición **(i)** del Teorema 1 se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3 \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0\right) = 1 - \alpha$$

Pero ya tenemos la distribución de $\sum_{i=1}^{n} x_i$, entonces por el Apéndice C.64. podemos estandarizar la normal.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n}} < \frac{k_3 - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\phi\left(\frac{k_3 - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$\frac{k_3 - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n}} = \zeta_{1-\alpha}$$

Siendo ζ_α la inversa de la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ acumulando α de probabilidad.

$$k_3 = \zeta_{1-\alpha}\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n} + n\theta_0$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \zeta_{1-\alpha}\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n} + n\theta_0\right\}$$

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{1}{n}\left(\zeta_{1-\alpha}\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\sqrt{n} + n\theta_0\right)\right\}$$

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} \geq \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta_{1-\alpha}\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\right\}$$

Siendo esta la región critica más poderosa de tamaño α.

b) Para este inciso se usará la región critica del inciso anterior y se buscará la región critica con un α dado.

Como el estadístico de prueba es $\sum_{i=1}^{n} x_i$ tenemos la región critica

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k\right\}$$

Como $\alpha = 0.0000050$ se buscará dicha región. Y sustituyendo los valores dados.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i \geq k \mid \theta = 0.4\right) = 0.0000050$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i < k \mid \theta = 0.4\right) = 0.0000050$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{20} x_i \sim Bin(20,\theta)$ además como $\theta = 0.4$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{20} x_i \sim Bin(20{,}0.4)$.

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i < k \mid \theta = 0.4\right) = 0.0000050 \quad \text{con } \sum_{i=1}^{20} x_i \sim Bin(20{,}0.4)$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i < k\right) = 0.0000050$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i < k\right) = 1 - 0.0000050$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i < k\right) = 0.999995$$

$$\sum_{x=0}^{k-1} \binom{20}{x} 0.4^x (1 - 0.4)^{20-x} = 0.999995$$

$$\sum_{x=0}^{k-1} \binom{20}{x} 0.4^x (0.6)^{20-x} = 0.999995$$

Buscando valores en la tabla D.16. de la Binomial vemos que $k \geq 15$ ya que para estos valores tiene sentido la suma. Pero la tabla solo nos proporciona 3 decimales, por lo que haremos una nueva tabla con estos valores a 6 decimales.

$\boldsymbol{k}$	$\displaystyle\sum_{x=0}^{k-1} \binom{20}{x} 0.4^x (0.6)^{20-x}$
15	0.998388
16	0.999682
17	0.999952
18	0.999995
19	0.999999
20	1

Tabla 8.

Entonces.

$$k = 18$$

Y la región critica quedaría definida de la siguiente manera.

$$C_Y = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{20} x_i \geq 18 \right\}$$

Ejercicio 7: Prueba Bernoulli III. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i | \theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \qquad \forall i$$

Donde $\theta \epsilon \Theta \coloneqq \{\theta \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0 \colon \theta \leq \frac{1}{2} \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1 \colon \theta > \frac{1}{2}.$$

Y considere la región critica.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{ (x_1\,, x_2\,, \dots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \right\}$$

a) Encuentre la función potencia.

b) Encuentre el tamaño de esta prueba.

Solución:

Primero hay que identificar que nuestra muestra $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_{10})$ es proveniente de una distribución Bernoulli.

a) Para este inciso hay que obtener la función potencia de la prueba.

Sabemos que $\Pi_{\Upsilon}(\theta)$ es la probabilidad de rechazar $\mathcal{H}_0$ dado que $\theta \epsilon \Theta$, es decir.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = \mathbb{P}(\text{No Rechazar}\, \mathcal{H}_0 \mid \ \theta = \theta_0) \quad \text{con} \ \ \theta_0 \ \epsilon \ \Theta$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \ \mid \ \theta = \theta_0 \right)$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 6 \ \mid \ \theta = \theta_0 \right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10,\theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10,\theta_0)$.

$$\Pi_Y(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 6 \mid \theta = \theta_0\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10,\theta_0)$$

$$\Pi_Y(\theta_0) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{10}{x} {\theta_0}^x (1-\theta_0)^{10-x}$$

Quedando $\Pi_Y(\theta_0)$ como una función de θ_0.

b) Para este inciso hay que obtener la probabilidad del error tipo I o nivel de significancia de esta prueba.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10,\theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10,\frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 6\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10,\frac{1}{2}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 6\right) = \alpha$$

$$1-\sum_{x=0}^{5}\binom{10}{x}\frac{1}{2}^{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-x}=\alpha$$

Buscando valores en la tabla D.6. de la Binomial del Apéndice D.

$$1-0.623=\alpha$$

$$\alpha=0.377$$

Ejercicio 8: Prueba Bernoulli IV. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta)=\ \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \qquad \forall i$$

Donde $\theta\ \epsilon\ \Theta \coloneqq \{\theta \mid 0\leq\theta\leq 1\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0{:}\,\theta=\ \tfrac{1}{2}\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1{:}\,\theta=\ \tfrac{1}{4}.$$

a) Encuentre la prueba más potente de tamaño $\alpha=0.0547$.

b) Encuentre el valor de la función potencia cuando $\theta=\frac{1}{4}$.

c) Encuentre el valor de β.

Solución:

Primero hay que identificar que nuestra muestra $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ es proveniente de una distribución Bernoulli.

a) Para este inciso al tratarse de hipótesis simples podemos usar el Teorema 1 o el Lema de Neyman Pearson, por el Ejercicio 6 tenemos.

$$\lambda = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Remplazando los valores dados.

$$\lambda = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^{\sum_{i=1}^{10} x_i} \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i}$$

$$\lambda = (2)^{\sum_{i=1}^{10} x_i} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\right)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i}$$

$$\lambda = (2)^{\sum_{i=1}^{10} x_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i}$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$(2)^{\sum_{i=1}^{10} x_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$ln\left((2)^{\sum_{i=1}^{10} x_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i}\right) \leq ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$ln\left((2)^{\sum_{i=1}^{10} x_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i}\right) \leq k_1 \text{ con } k_1 = ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i\, ln(2) + \left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i\right) ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \left(ln(2) - ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) + 10ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i\left(ln(2) - ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \leq k_1 - 10ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i\left(ln(2) - ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \leq k_2 \text{ con } k_2 = k_1 - 10ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i\left(ln(2) - ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \leq k_2$$

Como $ln(2) - ln\left(\frac{2}{3}\right) > 0$. Entonces no afecta la desigualdad.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \leq \frac{k_2}{ln(2) - ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \leq k_3 \text{ con } k_3 = \frac{k_2}{ln(2) - ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i \leq k_3\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \alpha$$

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq k_3 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = 0.0547$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq k_3 \mid \ \theta = \frac{1}{2}\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq k_3\right) = 0.0547$$

$$\sum_{x=0}^{k_3} \binom{10}{x} \frac{1}{2}^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-x} = 0.0547$$

Buscando valores en la tabla D.6. de la Binomial del Apéndice D.

$$k_3 = 2$$

Entonces la región critica queda definida como.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1 , x_2 , \dots , x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2\right\}$$

Por lo que la prueba más potente de tamaño 0.0547 es.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2 \right\}.$$

b) Para este inciso como ya tenemos la prueba más potente solo hay que obtener su función potencia evaluada en un punto.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \in \Theta$$

$$\Pi_{\Upsilon}\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2 \mid \theta = \frac{1}{4}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin(10, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{4}$, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

$$\Pi_{\Upsilon}\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2 \mid \theta = \frac{1}{4}\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{4}\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon}\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2\right)$$

$$\Pi_{\Upsilon}\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} \frac{1}{4}^{x} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-x}$$

Buscando valores en la tabla D.6. de la Binomial del Apéndice D.

$$\Pi_{\Upsilon}\left(\frac{1}{4}\right) = 0.526$$

c) Para este inciso hay que obtener el error de tipo II.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ Falsa})$$

$$\beta = \mathbb{P}\left(\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2\right)^{c} \mid \theta = \frac{1}{4}\right)$$

$$\beta = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i > 2 \mid \theta = \frac{1}{4}\right)$$
$$\beta = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2 \mid \theta = \frac{1}{4}\right)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{4}\right)$ además como $\theta = \frac{1}{4}$ bajo $\mathcal{H}_0$ falsa, entonces $\sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

$$\beta = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2 \mid \theta = \frac{1}{4}\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i \sim Bin\left(10, \frac{1}{4}\right)$$
$$\beta = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} \frac{1}{4}^x \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-x}$$

Buscando valores en la tabla D.6. de la Binomial del Apéndice D.

$$\beta = 1 - 0.526$$
$$\beta = 0.474$$

Ejercicio 9: Prueba Exponencial II. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i \mid \theta) = \theta e^{-\theta x_i} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i) \quad \forall i$$

Donde $\theta \in \Theta := \{\theta \mid \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta = \theta_1 > \theta_0.$$

a) Por medio del teorema de Neyman Pearson encuentre la región critica más poderosa de tamaño α dado que el estadístico de prueba es $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

b) Encuentre el valor critico k para el cual la probabilidad de cometer el error tipo I es 1.

Solución:

a) Con base a el Ejemplo 5, la región critica más poderosa de tamaño α es.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right\}$$

Donde k es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$$

$$\int_0^k \frac{{\theta_0}^n v^{n-1} e^{-(\theta_0 v)}}{\Gamma(n)} dv = \alpha$$

b) Ahora hay que buscar un k tal que.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right) = 1 \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$$

$$\int_0^k \frac{{\theta_0}^n v^{n-1} e^{-(\theta_0 v)}}{\Gamma(n)} dv = 1$$

Por cómo está definida la distribución Gamma, esto solo pasa si se integra sobre todo el dominio de la función ya que es la probabilidad del total, entonces.

$$k \to \infty$$

Ejercicio 10: Prueba Poisson I. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!}\mathbb{I}_{\{0,1,\ldots\}}(x_i) \qquad \forall i$$

Donde $\theta \epsilon\, \Theta \coloneqq \{\theta|\, \theta \epsilon \{\theta_0, \theta_1\}\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs\ \mathcal{H}_1: \theta = \theta_1 > \theta_0.$$

a) Encontrar la región critica más poderosa de tamaño α, usando el teorema del límite central.

b) Encontrar la región critica más poderosa de tamaño α, dado que el estadístico de prueba es $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Solución:

Primero hay que identificar que nuestra muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es proveniente de una distribución Poisson, y al tratarse de hipótesis simples se usa el Teorema 1.

a) Para este inciso se buscará la región critica más poderosa y después el Apéndice C.82. del teorema del límite central.

Con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0 | x_1 , x_2 , \dots , \; x_n)}{\mathcal{L}(\theta_1 | x_1 , x_2 , \dots , x_n)}$$

Del ejercicio 3 se sabe qué.

$$\mathcal{L}(\theta | x_1 , x_2 , \dots , x_n) = e^{-(n)\theta} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{e^{-(n)\theta_0} {\theta_0}^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)}{e^{-(n)\theta_1} {\theta_1}^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{e^{-(n)\theta_0} {\theta_0}^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{e^{-(n)\theta_1} {\theta_1}^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$$\lambda = e^{n(-\theta_0 + \theta_1)} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$e^{n(-\theta_0 + \theta_1)} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{n(-\theta_0 + \theta_1)} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \right) \leq ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{n(-\theta_0+\theta_1)}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) \leq k_1 \text{ con } k_1 = ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$n(-\theta_0+\theta_1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \, ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln(\theta_0) - ln(\theta_1)\right) + n(\theta_1-\theta_0) \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln(\theta_0) - ln(\theta_1)\right) \leq k_1 - n(\theta_1-\theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ln(\theta_0) - ln(\theta_1)\right) \leq k_2 \text{ con } k_2 = k_1 - n(\theta_1-\theta_0) \quad \Rightarrow$$

Como $\theta_0 < \theta_1$.

$$\theta_0 < \theta_1 \quad \Rightarrow$$

$$ln(\theta_0) < ln(\theta_1) \quad \Rightarrow$$

$$ln(\theta_0) - ln(\theta_1) < 0$$

Por lo que si afecta la desigualdad.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{k_2}{ln(\theta_0) - ln(\theta_1)} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3 \text{ con } k_3 = \frac{k_2}{ln(\theta_0) - ln(\theta_1)}$$

Entonces tenemos que.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon}= \left\{(x_1 , x_2 , \dots , x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = 1 - \alpha$$

Como la muestra es Poisson, y por el Apéndice A.1.6. tenemos que $E(x) = \theta$ y $V(x) = \theta$, y como $\mathcal{H}_0$ es cierta $\theta = \theta_0$ entonces $E(x) = \theta_0$ y $V(x) = \theta_0$, por lo que se recurrirá al Apéndice C.82. que es el teorema del límite central, teniendo así.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0}\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(n\theta_0 , n\theta_0)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = 1 - \alpha$$

Pero ya tenemos la distribución de $\sum_{i=1}^{n} x_i$, entonces por el Apéndice C.64. podemos estandarizar la normal.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0}\sqrt{n}} < \frac{k_3 - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0}\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\phi\left(\frac{k_3 - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0}\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$\frac{k_3 - n\theta_0}{\sqrt{\theta_0}\sqrt{n}} = \zeta_{1-\alpha}$$

Siendo ζ_α la inversa de la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ acumulando α de probabilidad.

$$k_3 = \zeta_{1-\alpha}\sqrt{\theta_0}\sqrt{n} + n\theta_0$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \zeta_{1-\alpha}\sqrt{n\theta_0} + n\theta_0\right\}$$

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{1}{n}\left(\zeta_{1-\alpha}\sqrt{n\theta_0} + n\theta_0\right)\right\}$$

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} \geq \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta_{1-\alpha} \sqrt{\theta_0} \right\}$$

Siendo esta la región critica más poderosa de tamaño α.

b) Usando el inciso anterior sabemos que la región critica más poderosa es.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3 \right\}$$

Para hacerla de tamaño α, sin usar el teorema del limite central debemos usar la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) = 1 - \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Poi(\theta)$ y por el Apéndice C.83. conocemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Poi(n\theta)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Poi(n\theta_0)$. Por lo que k_3 es la constante tal que cumpla con:

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0 \right) \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Poi(n\theta_0)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3\right) = 1 - \alpha$$

$$\sum_{x=0}^{k_3-1} \frac{e^{-n\theta_0}(n\theta_0)^x}{x!} = 1 - \alpha$$

Por lo que la región critica más poderosa de tamaño α es.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3\right\}$$

Donde k_3 es la constante tal que cumpla con:

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < k_3 \mid \theta = \theta_0\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Poi(n\theta_0)$$

$$\sum_{x=0}^{k_3-1} \frac{e^{-n\theta_0}(n\theta_0)^x}{x!} = 1 - \alpha$$

Ejercicio 11: Prueba Normal I. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i \mid 0, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x_i)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \quad \forall i$$

Donde $\sigma^2 \in \Theta \coloneqq \{\sigma^2 \mid \sigma^2 > 0\}$.

a) Encontrar la región critica más poderosa de tamaño $\alpha = 0.05$, para.

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 = 2.$$

b) Encontrar la región critica más poderosa de tamaño $\alpha = 0.05$, para.

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 = 4.$$

c) Encontrar la región critica más poderosa de tamaño $\alpha = 0.05$, para.

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 \leq 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 > 1.$$

Solución:

Primero hay que identificar que nuestra muestra $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ es proveniente de una distribución Normal, y al tratarse de hipótesis simples se usa el Teorema 1.

a) Para este inciso se buscará la región critica más poderosa para.

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 = 2.$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(0, {\sigma_0}^2 | x_1, x_2, \dots, \ x_{10})}{\mathcal{L}(0, {\sigma_1}^2 | x_1, x_2, \dots, x_{10})}$$

Siendo ${\sigma_0}^2 = 1$ y ${\sigma_1}^2 = 2$, por el Ejemplo 14 se sabe qué.

$$\mathcal{L}(0\,,\sigma^2|x_1\,,x_2\,,\dots,x_{10}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{10}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(x_i-0)^2} \prod_{i=1}^{10} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\big(2\pi(1)\big)^{-\frac{10}{2}} e^{-\frac{1}{2(1)}\sum_{i=1}^{10}(x_i-0)^2} \prod_{i=1}^{10} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\big(2\pi(2)\big)^{-\frac{10}{2}} e^{-\frac{1}{2(2)}\sum_{i=1}^{10}(x_i-0)^2} \prod_{i=1}^{10} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{(2\pi)^{-5} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2}}{(4\pi)^{-5} e^{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2}}$$

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2} \left(\frac{2}{4}\right)^{-5}$$

$$\lambda = e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2}{4}\right)^{-5}$$

$$\lambda = e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{1}{4}\right)} \leq k\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \quad \Rightarrow$$

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{1}{4}\right)} \leq k_1 \text{ con } k_1 = k\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \quad \Rightarrow$$

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{1}{4}\right)} \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{1}{4}\right)}\right) \leq ln(k_1) \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{1}{4}\right)}\right) \leq k_2 \text{ con } k_2 = ln(k_1) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \left(-\frac{1}{4}\right) \leq k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \geq k_2(-4) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \geq k_3 \text{ con } k_3 = k_2(-4)$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1 , x_2 , \dots , x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \geq k_3\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \geq k_3 \mid \sigma^2 = 1\right) = 0.05$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 < k_3 \mid \sigma^2 = 1\right) = 0.05$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 < k_3 \mid \sigma^2 = 1\right) = 1 - 0.05$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(0, \sigma^2)$, por el Apéndice C.64. además como $\sigma^2 = 1$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que.

$$x_i \sim N(0,1) \; \forall i$$

Por el Apéndice C.61. sabemos que.

$$x_i^{\,2} \sim \chi^2(1)\ \forall i$$

Y por el Apéndice C.62. se tiene.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} \sim \chi^2(10)$$

Entonces k_3 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} < k_3 \mid \sigma^2 = 1\right) = 1 - 0.05 \text{ con } \sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} \sim \chi^2(10)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} < k_3\right) = 0.95$$

$$k_3 = \chi^2{}_{(10)0.95}$$

Siendo $\chi^2{}_{(10)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $\chi^2(10)$ acumulando α de probabilidad. Buscando valores en la tabla D.26. de la Chi cuadrada en el Apéndice D.

$$k_3 = 18.3070$$

Por lo que la región de rechazo más poderosa de tamaño 0.05 es.

$$C_Y = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 \geq 18.3070 \right\}$$

b) Para este inciso se buscará la región critica más poderosa para.

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 = 4.$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(0, {\sigma_0}^2 | x_1, x_2, \dots, x_{10})}{\mathcal{L}(0, {\sigma_1}^2 | x_1, x_2, \dots, x_{10})}$$

Siendo ${\sigma_0}^2 = 1$ y ${\sigma_1}^2 = 4$, por el Ejemplo 14 se sabe qué.

$$\mathcal{L}(0, \sigma^2 | x_1, x_2, \dots, x_{10}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{10}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 0)^2} \prod_{i=1}^{10} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\big(2\pi(1)\big)^{-\frac{10}{2}} e^{-\frac{1}{2(1)}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 0)^2} \prod_{i=1}^{10} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\big(2\pi(4)\big)^{-\frac{10}{2}} e^{-\frac{1}{2(4)}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 0)^2} \prod_{i=1}^{10} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{(2\pi)^{-5} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2}}{(8\pi)^{-5} e^{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2}}$$

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2} \left(\frac{2}{8}\right)^{-5}$$

$$\lambda = e^{\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2}{8}\right)^{-5}$$

$$\lambda = e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right)}\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right)}\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right)} \leq k\left(\frac{1}{4}\right)^{5} \quad \Rightarrow$$

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right)} \leq k_1 \text{ con } k_1 = k\left(\frac{1}{4}\right)^{5} \quad \Rightarrow$$

$$e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right)} \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right)}\right) \leq ln(k_1) \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right)}\right) \leq k_2 \text{ con } k_2 = ln(k_1) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2\left(-\frac{3}{8}\right) \leq k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \geq k_2\left(-\frac{8}{3}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \geq k_3 \text{ con } k_3 = k_2\left(-\frac{8}{3}\right)$$

Entonces tenemos que.

$$C_\Upsilon = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i{}^2 \geq k_3\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 \geq k_3 \mid \sigma^2 = 1\right) = 0.05$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 < k_3 \mid \sigma^2 = 1\right) = 0.05$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 < k_3 \mid \sigma^2 = 1\right) = 1 - 0.05$$

Como se llegó a la misma región critica del primer inciso sabemos que.

$$k_3 = 18.3070$$

Por lo que la región de rechazo más poderosa de tamaño 0.05 es.

$$C_Y = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 \geq 18.3070\right\}$$

c) Para este inciso se buscará la región critica más poderosa para.

$$\mathcal{H}_0: \sigma^2 \leq 1 \ vs \ \mathcal{H}_1: \sigma^2 > 1.$$

Usando el Ejemplo 13, se tiene que la región critica más poderosa de tamaño α para las hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \sigma^2 \leq {\sigma_0}^2 \ vs \ \mathcal{H}_1: \sigma^2 > {\sigma_0}^2$$

Es.

$$C_{Y}=\left\{(x_1\ ,x_2\ ,\dots,x_{10}):\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma_0}\right)^2>{\chi^2}_{(n)1-\alpha}\right\}$$

Entonces sustituyendo los valores de n, θ, σ_0 y α.

$$C_{Y}=\left\{(x_1\ ,x_2\ ,\dots,x_{10}):\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{x_i-0}{1}\right)^2>{\chi^2}_{(10)1-0.05}\right\}$$

$$C_{Y}=\left\{(x_1\ ,x_2\ ,\dots,x_{10}):\sum_{i=1}^{10}{x_i}^2>{\chi^2}_{(10)0.95}\right\}$$

Buscando valores en la tabla D.26. de la Chi cuadrada del Apéndice D.

$${\chi^2}_{(10)0.95}=18.3070$$

Por lo que la región de rechazo más poderosa de tamaño 0.05 es.

$$C_{Y}=\left\{(x_1\ ,x_2\ ,\dots,x_{10}):\sum_{i=1}^{10}{x_i}^2>18.3070\right\}$$

Ejercicio 12: Prueba Exponencial III. Sea $(x_1\ ,x_2\ ,\dots,x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\ \theta)=\ \theta {x_i}^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)\qquad \forall i$$

Muestre que la mejor región critica para la hipótesis.

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \theta = 2.$$

Es.

$$C_Y = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod_{i=1}^{n} x_i \geq k \right\}$$

Solución:

Se buscará la región critica más poderosa para.

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \theta = 2.$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(1 | x_1, x_2, \dots, x_n)}{\mathcal{L}(2 | x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta {x_i}^{\theta - 1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\theta - 1} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) = \theta^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{1^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)}{2^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{2-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{1^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{0}}{2^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1}}$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq k\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq k\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \leq k_1 \text{ con } k_1 = k\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{k_1} \quad \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \geq k_2 \text{ con } k_2 = \frac{1}{k_1} \quad \Rightarrow$$

Entonces tenemos que.

$$C_Y = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \prod_{i=1}^{n} x_i \geq k_2 \right\}$$

Entonces la región critica más poderosa si es la que pedía mostrar el problema.

Ejercicio 13: Prueba Poisson II. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i | \theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\ldots\}}(x_i) \quad \forall i$$

Muestre que la mejor región critica para la hipótesis.

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 0.1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \theta = 0.5.$$

Es.

$$C_Y = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3 \right\}$$

Y determine el nivel de significancia de esta prueba.

Solución:

Con base en el Ejercicio 10 b), la región critica más poderosa de tamaño α es.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon}=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\,:\,\sum_{i=1}^{n}x_i\geq k\right\}$$

Donde k es la constante tal que cumpla con:

$$1-\alpha\;=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i<k\mid\;\theta=\theta_0\right)\;\text{con}\;\sum_{i=1}^{n}x_i\sim Poi(n\theta_0)$$

$$\sum_{x=0}^{k-1}\frac{e^{-n\theta_0}(n\theta_0)^x}{x!}=1-\alpha$$

Sustituyendo los valores que nos da el problema se tiene.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon}=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_{10})\,:\,\sum_{i=1}^{10}x_i\geq k\right\}$$

Si $k=3$ entonces la región critica más poderosa es la que pide el problema. Para encontrar el nivel de significancia de la prueba se tiene que cumplir.

$$1-\alpha\;=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i<3\mid\;\theta=0.1\right)\;\text{con}\;\sum_{i=1}^{10}x_i\sim Poi(10(0.1))$$

$$\sum_{x=0}^{3-1}\frac{e^{-10(0.1)}(10(0.1))^x}{x!}=1-\alpha$$

$$\sum_{x=0}^{2}\frac{e^{-1}(1)^x}{x!}=1-\alpha$$

$$\frac{e^{-1}(1)^0}{0!}+\frac{e^{-1}(1)^1}{1!}+\frac{e^{-1}(1)^2}{2!}=1-\alpha$$

$$e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2}\right)=1-\alpha$$

$$e^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=1-\alpha$$

$$\alpha=1-e^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\alpha=0.0830139$$

Ejercicio 14: Prueba Normal II. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_4)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta,4)=\frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2(4)}}}{\sqrt{2\pi(4)}}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \qquad \forall i$$

Para la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = 12 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta \neq 12.$$

Se tiene como región de rechazo.

$$C_{\Upsilon}=\{(x_1, x_2, \ldots, x_4) : |\bar{x}-12| > 1.645\}$$

a) ¿Cuál es el nivel de significancia de esta prueba?

b) Encuentre la función potencia.

c) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, si $\theta = 11$?

d) Grafique la función potencia para valores enteros de $\{\theta \mid 8 \leq \theta \leq 16\}$.

Solución:

Tenemos $(x_1, x_2, \ldots, x_4)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, 4)\ \forall i$.

a) Para este inciso hay que obtener el error tipo I.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$
$$\alpha = \mathbb{P}(|\bar{x} - 12| > 1.645 \mid \theta = 12)$$
$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(|\bar{x} - 12| \leq 1.645 \mid \theta = 12)$$
$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(-1.645 \leq \bar{x} - 12 \leq 1.645 \mid \theta = 12)$$
$$\alpha = 1 - \big(\mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq 1.645 \mid \theta = 12) - \mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq -1.645 \mid \theta = 12)\big)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 12$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 12 y varianza 4, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 12 y varianza ${}^4/_4$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-12}{\sqrt{1}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\alpha = 1 - \big(\mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq 1.645) - \mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq -1.645)\big)$$
$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq 1.645) + \mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq -1.645)$$
$$\alpha = 1 - \phi(1.645) + \phi(-1.645)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en las tablas D.24. y D.25. de la Normal en el Apéndice D.

$$\alpha = 1 - \phi(1.645) + \phi(-1.645)$$
$$\alpha = 1 - 0.9505 + 0.0495$$
$$\alpha = 0.099$$

b) Para este inciso hay que obtener la función potencia.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) \ = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \ \theta = \theta_0) \quad \text{con } \ \theta_0 \in \Theta$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}(|\bar{x} - 12| > 1.645 \mid \ \theta = \theta_0)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(|\bar{x} - 12| \leq 1.645 \mid \ \theta = \theta_0 \ )$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(-1.645 \leq \bar{x} - 12 \leq 1.645 \mid \ \theta = \theta_0 \ )$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \big(\mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq 1.645 \mid \ \theta = 12 \ ) - \mathbb{P}(\bar{x} - 12 \leq -1.645 \mid \ \theta = \theta_0 \ )\big)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \big(\mathbb{P}(\bar{x} \leq 13.645 \mid \ \theta = 12 \ ) - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 10.355 \mid \ \theta = \theta_0 \ )\big)$$

Como $\theta = \theta_0$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media θ_0 y varianza 4, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media θ_0 y varianza ${}^{4}/_{4}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{1}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \big(\mathbb{P}(\bar{x} \leq 13.645 \mid \ \theta = 12 \ ) - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 10.355 \mid \ \theta = \theta_0 \ )\big)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \big(\mathbb{P}(\bar{x} - \theta_0 \leq 13.645 - \theta_0 \mid \ \theta = 12 \ ) - \mathbb{P}(\bar{x} - \theta_0 \leq 10.355 - \theta_0 \mid \ \theta = \theta_0 \ )\big)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} - \theta_0 \leq 13.645 - \theta_0 \mid \ \theta = 12 \ ) + \mathbb{P}(\bar{x} - \theta_0 \leq 10.355 - \theta_0 \mid \ \theta = \theta_0 \ )$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \ 1 - \ \phi(13.645 - \theta_0 \ \mid \theta = \theta_0) + \phi(10.355 - \theta_0 \ \mid \theta = \theta_0)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \ 1 - \ \phi(13.645 - \theta_0) + \phi(10.355 - \theta_0)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$. Y siendo esta última expresión la función potencia.

c) Para este inciso hay que sacar el error tipo II.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \ \mathcal{H}_0 \text{ Falsa })$$
$$\beta = \mathbb{P}(|\bar{x} - 12| > 1.6451 \mid \ \theta = 11)$$

Pero esto es equivalente a evaluar la función potencia en $\theta = 11$, entonces.

$$\beta = \Pi_Y(11)$$
$$\beta = 1 - \phi(13.645 - 11) + \phi(10.355 - 11)$$
$$\beta = 1 - \phi(2.645) + \phi(-0.645)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en las tablas D.24. y D.25. de la Normal en el Apéndice D.

$$\beta = 1 - \phi(2.645) + \phi(-0.645)$$
$$\beta = 1 - 0.9959 + 0.2578$$
$$\beta = 0.2619$$

d) Para este inciso hay graficar la función potencia con los valores dados.

Agrupando los datos en una tabla.

$\boldsymbol{\theta_0}$	$\boldsymbol{\Pi_Y(\theta_0)}$
8	$1 - \phi(13.645 - 8) + \phi(10.355 - 8)$
9	$1 - \phi(13.645 - 9) + \phi(10.355 - 9)$
10	$1 - \phi(13.645 - 10) + \phi(10.355 - 10)$
11	$1 - \phi(13.645 - 11) + \phi(10.355 - 11)$
12	$1 - \phi(13.645 - 12) + \phi(10.355 - 12)$
13	$1 - \phi(13.645 - 13) + \phi(10.355 - 13)$
14	$1 - \phi(13.645 - 14) + \phi(10.355 - 14)$
15	$1 - \phi(13.645 - 15) + \phi(10.355 - 15)$
16	$1 - \phi(13.645 - 16) + \phi(10.355 - 16)$

Tabla 9.

Obteniendo los valores en las funciones.

$\boldsymbol{\theta_0}$	$\boldsymbol{\Pi_Y(\theta_0)}$
8	$1 - \phi(5.645) + \phi(2.355)$
9	$1 - \phi(4.645) + \phi(1.355)$
10	$1 - \phi(3.645) + \phi(0.355)$
11	$1 - \phi(2.645) + \phi(-0.645)$
12	$1 - \phi(1.645) + \phi(-1.645)$
13	$1 - \phi(0.645) + \phi(-2.645)$
14	$1 - \phi(-0.355) + \phi(-3.645)$
15	$1 - \phi(-1.355) + \phi(-4.645)$
16	$1 - \phi(-2.355) + \phi(-5.645)$

Tabla 10.

Buscando los valores en las tablas D.24. y D.25. de la Normal del Apéndice D.

$\boldsymbol{\theta_0}$	$\boldsymbol{\Pi_Y(\theta_0)}$
8	$1 - 1 + 0.9906$
9	$1 - 1 + 0.9131$
10	$1 - 1 + 0.6406$
11	$1 - 0.9959 + 0.2578$
12	$1 - 0.9505 + 0.0495$
13	$1 - 0.7422 + 0.0040$
14	$1 - 0.3669 + 0$
15	$1 - 0.0901 + 0$
16	$1 - 0.0096 + 0$

Tabla 11.

Obteniendo los valores y graficando.

$\boldsymbol{\theta_0}$	$\boldsymbol{\Pi_Y(\theta_0)}$
8	0.9906
9	0.9131
10	0.6406
11	0.2619
12	0.099
13	0.5318
14	0.6331
15	0.9099
16	0.9904

Tabla 12.

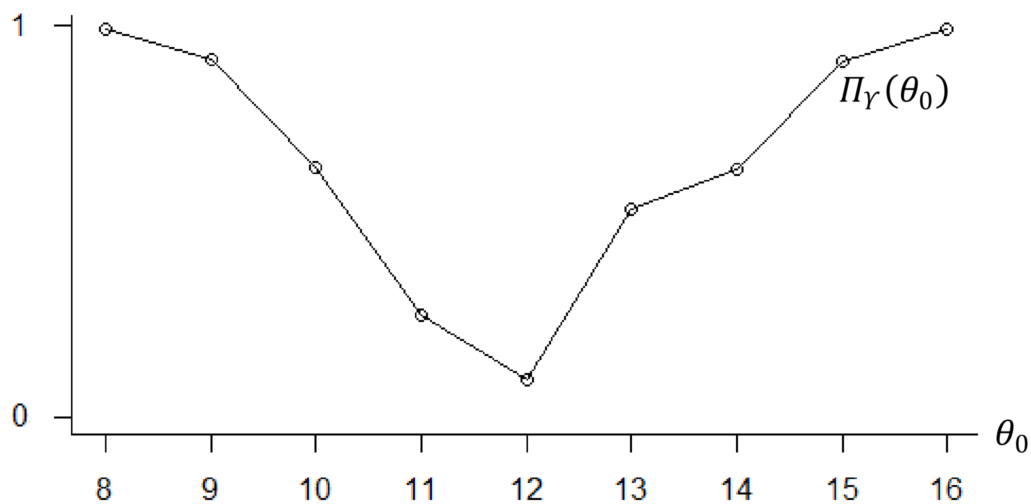

Figura 9.

Ejercicio 15: Función Potencia. Sea (x_1) una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta) = \theta {x_i}^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_i) \quad \forall i$$

Donde $\theta \in \Theta \coloneqq \{\theta \mid \theta > 0\}$.

a) Encontrar la función potencia y el tamaño de la prueba si se tiene una región critica.

$$\Upsilon: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_1 \geq 0.5\}$$

Para la hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 1 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > 1.$$

b) Encontrar la prueba más potente de tamaño α, para.

$$\mathcal{H}_0: \theta = 2 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta = 1.$$

c) Existe la prueba uniformemente más potente para.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > 0.$$

Y si es así. ¿Cuál es?

Solución:

a) Para este inciso hay que obtener la función potencia y después el error de tipo I o tamaño de la prueba.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \in \Theta$$
$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(x_1 \geq 0.5 \mid \theta = \theta_0)$$

Como $\theta = \theta_0$, entonces se tiene una función de distribución definida para x_1 siendo esta.

$$f_{x_1}(x_1|\,\theta_0) = \ \theta_0 {x_1}^{\theta_0 - 1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_1)$$

Entonces.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(x_1 \geq \ 0.5)$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \theta_0 {x_1}^{\theta_0 - 1} dx_1$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \frac{\theta_0 {x_1}^{\theta_0 - 1 + 1}}{\theta_0 - 1 + 1}\Bigg|_{0.5}^{1}$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \frac{\theta_0 {x_1}^{\theta_0}}{\theta_0}\Bigg|_{0.5}^{1}$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = {x_1}^{\theta_0}\Bigg|_{0.5}^{1}$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = 1^{\theta_0} - 0.5^{\theta_0}$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = 1 - 0.5^{\theta_0}$$

Siendo esta ultima la función potencia, ahora para encontrar el tamaño de la prueba la evaluamos cuando $\theta_0 = 0$.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}(x_1 \geq \ 0.5 \mid \ \theta = 0)$$

$$\alpha = \Pi_\Upsilon(0)$$

$$\alpha = 1 - 0.5^0$$

$$\alpha = 1 - 1$$

$$\alpha = 0$$

b) Para este inciso al tratarse de hipótesis simples se usa el Teorema 1.

Con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(\theta_0|x_1)}{\mathcal{L}(\theta_1|x_1)}$$

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(2|x_1)}{\mathcal{L}(1|x_1)}$$

Obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta|x_1) = \prod_{i=1}^{1} f(x_i|\ \theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1) = \prod_{i=1}^{1} \theta {x_i}^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta|x_1) = \theta {x_1}^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_1)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{2{x_1}^{2-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_1)}{1{x_1}^{1-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_1)}$$

$$\lambda = \frac{2{x_1}^{1}}{{x_1}^{0}}$$

$$\lambda = \frac{2{x_1}^{1}}{1}$$

$$\lambda = 2x_1$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$2x_1 \leq k \quad \Rightarrow$$
$$x_1 \leq \frac{k}{2} \quad \Rightarrow$$
$$x_1 \leq k_1 \ \text{con} \ k_1 = \frac{k}{2} \quad \Rightarrow$$
$$x_1 \leq k_1$$

Entonces tenemos que.

$$C_Y = \{(x_1) : x_1 \leq k_1\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$
$$\mathbb{P}(x_1 \leq k_1 \mid \theta = 2) = \alpha$$

Como $\theta = 2$, entonces se tiene una función de distribución definida para x_1 siendo esta.

$$f_{x_1}(x_1 | \, 2) = 2{x_1}^{2-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_1)$$
$$f_{x_1}(x_1 | \, 2) = 2x_1\mathbb{I}_{(0,1)}(x_1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}(x_1 \leq k_1) = \alpha$$
$$\int_0^{k_1} 2x_1 dx_1 = \alpha$$

$$\left.\frac{2{x_1}^2}{2}\right|_0^{k_1} = \alpha$$

$$\left.{x_1}^2\right|_0^{k_1} = \alpha$$

$${k_1}^2 - 0 = \alpha$$

$${k_1}^2 = \alpha$$

$$k_1 = \sqrt{\alpha}$$

Entonces la región critica queda definida como.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1) : x_1 \leq \sqrt{\alpha}\right\}$$

Por lo que la prueba más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_1 \leq \sqrt{\alpha} \right\}.$$

c) Para este inciso se buscará la región critica más poderosa para.

$$\mathcal{H}_0 : \theta \leq 0 \ vs \ \mathcal{H}_1 : \theta > 0.$$

Definiendo la prueba Υ como.

$$\Upsilon : \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k \}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1) = \frac{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1)}{\underset{\theta\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1)}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta|x_1)$ pero restringida ya que $\theta\ \epsilon\ \Theta_0$ pero en este espacio $\theta \leq 0$ pero esto genera una contradicción ya que de la manera en que está definida la densidad de x_1 se tiene que cumplir $\theta > 0$. Entonces no es posible definir la prueba por lo que no existe prueba uniformemente más potente para.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1: \theta > 0.$$

Ejercicio 16: Prueba Normal III. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)\ \forall i$, con σ^2 conocido. Determinar la fórmula para establecer el tamaño de la muestra, dada la hipótesis y midiendo los errores tipo I y II.

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq\ \theta_0\ \ vs\ \ \mathcal{H}_1: \theta <\ \theta_0.$$

Solución:

Para este ejercicio primero definiremos la región critica más potente de tamaño alfa para esta prueba. Usando la primer parte del Ejemplo 12, se sabe que la muestra normal pertenece a la familia exponencial, por lo que se puede usar el Teorema 3.

Entonces el estadístico $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es.

$$t(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Analizando el comportamiento de $c(\theta)$, utilizando el criterio de la primera derivada para ver si es creciente o decreciente.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\theta}{\sigma^2}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$$

Entonces tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) > 0 \;\; \forall\theta \in \Theta$$

Por lo tanto $c(\theta)$ es una función monótona creciente en θ. Y por el inciso **(iv)** del Teorema 3, se tiene.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k\right\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{k}{n} \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{n} \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ y por el Apéndice C.60. conocemos que $\bar{x} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Entonces k es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{n}\right) = \alpha \text{ con } \bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{n}\right) = \alpha$$

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - \theta_0 \leq \frac{k}{n} - \theta_0\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\frac{k}{n} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\frac{k}{n} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \text{ con } \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\phi\left(\frac{\frac{k}{n}-\theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=\alpha$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$\frac{\frac{k}{n}-\theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\zeta_\alpha$$

Siendo ζ_α la inversa de la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ acumulando α de probabilidad.

$$\frac{k}{n}-\theta_0=\zeta_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{k}{n}=\zeta_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\theta_0$$

$$k=\zeta_\alpha\sqrt{n}\sigma+n\theta_0$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_\Upsilon=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n):\sum_{i=1}^{n}x_i\le\zeta_\alpha\sqrt{n}\sigma+n\theta_0\right\}$$

$$C_\Upsilon=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n):\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\le\frac{1}{n}\left(\zeta_\alpha\sqrt{n}\sigma+n\theta_0\right)\right\}$$

$$C_\Upsilon=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n):\bar{x}\le\zeta_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\theta_0\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon\colon\left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0\right\}.$$

Ahora como ya tenemos la región critica más poderosa de tamaño α, supongamos que existe un θ_1 en el espacio Θ_0 y obtengamos el error tipo II, con este elemento.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ falsa}) \leq \beta$$
$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 \mid \theta = \theta_1\right) \leq \beta$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ y por el Apéndice C.60. conocemos que $\bar{x} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ además como $\theta = \theta_1$ bajo $\mathcal{H}_0$ falsa, entonces $\bar{x} \sim N\left(\theta_1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0\right) \leq \beta \text{ con } \bar{x} \sim N\left(\theta_1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$
$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0\right) \leq \beta$$

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{\bar{x} - \theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - \theta_1 \leq \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 - \theta_1\right) \leq \beta$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 - \theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \leq \beta$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 - \theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \leq \beta \text{ con } \frac{\bar{x}-\theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\phi\left(\frac{\zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 - \theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \leq \beta$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$\frac{\zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 - \theta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \zeta_\beta$$

Siendo ζ_β la inversa de la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ acumulando β de probabilidad. Entonces.

$$\zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 - \theta_1 \leq \zeta_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\theta_0 - \theta_1 \leq \zeta_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\theta_0 - \theta_1 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\zeta_\beta - \zeta_\alpha\right)$$

$$\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) = \sigma\left(\zeta_\beta - \zeta_\alpha\right)$$

$$\sqrt{n} \leq \frac{\sigma\left(\zeta_\beta - \zeta_\alpha\right)}{(\theta_0 - \theta_1)}$$

$$n \leq \frac{\sigma^2\left(\zeta_\beta - \zeta_\alpha\right)^2}{(\theta_0 - \theta_1)^2}$$

Siendo esta ultima la fórmula para establecer el tamaño de muestra dada la hipótesis.

Ejercicio 17: Familia Exponencial. Si $x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, demostrar que si α es conocido, entonces esta distribución pertenece a la familia exponencial.

Solución:

$$f(x|\,\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Poniendo la distribución como familia exponencial de la Definición 23 de este modo.

$$f(x|\,\alpha,\beta) = \beta^\alpha\,\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) e^{-\beta x}$$

$$f(x|\,\alpha,\beta) = \beta^\alpha\,\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) e^{-\beta x} = a(\beta) b(x) e^{c(\beta) d(x)}$$

Donde.

$$a(\beta) = \beta^\alpha$$

$$b(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

$$c(\beta) = -\beta$$

$$d(x) = x$$

Por lo que si pertenece a la familia exponencial.

Ejercicio 18: Contraste de tecnologías. Se introduce una nueva tecnología en un proceso de producción, para lograr que el costo promedio de un determinado producto disminuya. El costo se sabe se distribuye normalmente y según la tecnología vieja, el costo promedio era de \$25 y la desviación típica para ambas tecnologías es de 7. Se sabe que la región critica es de la forma.

$$C_{\Upsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{49}) : \bar{x} < 24\}$$

a) Determine el valor de α.

b) Si el error de tipo I, del inciso anterior es demasiado grande y ahora se decide Rechazar $\mathcal{H}_0$ con un riesgo de $\alpha^* = \alpha - 0.1487$, obtenga la región critica correspondiente a este nivel de significación.

Solución:

Primero hay que plantear las hipótesis, como la muestra es normal con la desviación conocida y de tamaño 49, podemos obtener la varianza, es decir $x_i \sim N(\theta, 7^2)$ $\forall i$ y la hipótesis es sobre el valor de la media quedando así.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 25 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta > 25.$$

a) Para este inciso hay que sacar el error tipo I.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$
$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} < 24 \mid \theta = 25)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 25$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 25 y varianza 49, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 25 y varianza ${}^{49}/_{49}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-25}{\sqrt{1}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} - 25 < 24 - 25)$$
$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} - 25 \leq -1)$$
$$\alpha = \phi(-1)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.24. de la Normal del Apéndice D.

$$\alpha = \phi(-1)$$
$$\alpha = 0.1587$$

b) Para este inciso hay que encontrar una nueva región critica para un nuevo $\alpha^* = \alpha - 0.1487$.

Como $\alpha = 0.1587$ entonces $\alpha^* = 0.1587 - 0.1487 = 0.01$, entonces definiendo la región critica seria.

$$C_Y = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{49}) : \bar{x} < k\}$$

Y se tiene que cumplir.

$$0.01 = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$
$$0.01 = \mathbb{P}(\bar{x} < k \mid \theta = 25)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 25$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 25 y varianza 49, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 25 y varianza ${}^{49}/_{49}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-25}{\sqrt{1}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$0.01 = \mathbb{P}(\bar{x} - 25 < k - 25)$$
$$0.01 = \phi(k - 25)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$k - 25 = \zeta_{0.01}$$

Buscando valores en la tabla D.24. de la Normal del Apéndice D.

$$k - 25 = -2.32$$
$$k = -2.32 + 25$$
$$k = 22.68$$

Ejercicio 19: TV´s. Se plantea que menos del 50% de los hogares de la ciudad Obregón tienen un televisor de marca V. Un investigador selecciona una muestra aleatoria de 64 hogares, obteniendo una proporción muestral de hogares marca V igual a 0.6. ¿Es cierta la afirmación que se hace con un nivel de significación de 0.05?

Solución:

Primero hay que plantear las hipótesis, como estamos hablando de una proporción entonces la muestra es Bernoulli y de tamaño 64, es decir $x_i \sim Ber(\theta)\ \forall i$ y la hipótesis es sobre el valor de la media quedando así.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 0.5 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > 0.5.$$

Por cómo están definidas las hipótesis podemos usar el Teorema 3, entonces se tiene que.

$$f(x|\,\theta) = \ \theta^x (1-\theta)^{1-x} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$

Poniendo la distribución como familia exponencial de la Definición 23 de este modo.

$$f(x|\,\theta) = e^{ln(\theta^x)} e^{ln((1-\theta)^{1-x})} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$
$$f(x|\,\theta) = e^{xln(\theta)} e^{(1-x)ln(1-\theta)} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$
$$f(x|\,\theta) = e^{xln(\theta)} e^{ln(1-\theta)} e^{-xln(1-\theta)} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$
$$f(x|\,\theta) = e^{x(ln(\theta)-ln(1-\theta))} e^{ln(1-\theta)} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$
$$f(x|\,\theta) = (1-\theta) \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x) e^{x(ln(\theta)-ln(1-\theta))}$$
$$f(x|\,\theta) = (1-\theta) \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x) e^{x(ln(\theta)-ln(1-\theta))} = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$$

Donde.

$$a(\theta) = (1-\theta)$$
$$b(x) = \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$
$$c(\theta) = ln(\theta) - ln(1-\theta)$$
$$d(x) = x$$

Entonces se puede construir el estadístico $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_{64}) = \sum_{i=1}^{64} d(x_i) = \sum_{i=1}^{64} x_i$$

Analizando el comportamiento de $c(\theta)$, utilizando el criterio de la primera derivada para ver si es creciente o decreciente.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(ln(\theta) - ln(1-\theta))$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}(-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}$$

Entonces tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) > 0 \ \ \forall\theta \epsilon \varTheta$$

Por lo tanto $c(\theta)$ es una función monótona creciente en θ. Y por el inciso **(i)** del Teorema 3, se tiene.

$$C_{\Upsilon} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{64}) : \sum_{i=1}^{64} x_i > k \right\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{64} x_i > k \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64} x_i > \frac{k}{64} \mid \theta = 0.5 \right) = 0.05$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} > \frac{k}{64} \mid \theta = 0.5 \right) = 0.05$$

Como la muestra es Bernoulli, y por el Apéndice A.1.2. tenemos que $E(x) = \theta$ y $V(x) = \theta(1-\theta)$, y como $\mathcal{H}_0$ es cierta $\theta = 0.5$ entonces $E(x) = \theta_0$ y $V(x) = 0.5(1-0.5)$, por lo que se recurrirá al Apéndice C.82. que es el teorema del límite central, teniendo así.

$$\frac{\bar{x} - 0.5}{\frac{\sqrt{0.5(1-0.5)}}{\sqrt{64}}} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\bar{x} \sim N\left(0.5\,, \frac{0.5(0.5)}{64}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\bar{x} \sim N\left(0.5\,, \frac{0.25}{64}\right)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} > \frac{k}{64}\right) = 0.05$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{64}\right) = 0.05$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{64}\right) = 0.95$$

Pero ya tenemos la distribución de $\bar{x}$, entonces por el Apéndice C.64. podemos estandarizar la normal.

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} \leq \frac{k}{64}\right) = 0.95$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{64}}} < \frac{\frac{k}{64} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{64}}}\right) = 0.95$$

$$\phi\left(\frac{\frac{k}{64} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{64}}}\right) = 0.95$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$\frac{\frac{k}{64} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{64}}} = \zeta_{0.95}$$

Buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\frac{\frac{k}{64} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{64}}} = 1.65$$

$$\frac{k}{64} - 0.5 = 1.65\sqrt{\frac{0.25}{64}}$$

$$\frac{k}{64} = 1.65\sqrt{\frac{0.25}{64}} + 0.5$$

$$k = 64\left(1.65\sqrt{\frac{0.25}{64}} + 0.5\right)$$

$$k = 38.6$$

Teniendo una región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{64}) : \sum_{i=1}^{64} x_i > 38.6\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{64}) : \frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64} x_i > \frac{38.6}{64}\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{64}) : \bar{x} > 0.6433\}$$

Siendo esta la región critica más poderosa de tamaño 0.05. Ahora usando los datos obtenidos de la muestra que decía que la proporción obtenida es de 0.6, contrastando con la prueba se tiene.

$$0.6 > 0.6433$$

Como esto no pasa ya que es una contradicción, así que no se rechaza $\mathcal{H}_0$, es decir se acepta que menos del 50% de los hogares de la ciudad Obregón tienen un televisor de marca V con un nivel de significancia de 0.05.

Ejercicio 20: Salario trabajadores. Se desea conocer el salario medio de los trabajadores de una fábrica. Para ello se selecciona una muestra aleatoria de 8 trabajadores, los resultados obtenidos de la muestra fueron los siguientes.

$$(130, 125, 135, 123, 141, 122, 131, 140)$$

Suponiendo que el salario se distribuye normalmente con media θ y varianza σ^2, diga si $\sigma^2 < 46$, con un nivel de significación de 0.05.

Solución:

Para este problema primero hay que plantear nuestras hipótesis, dada que la muestra es normal con media desconocida, es decir $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\forall i$ siendo σ^2 desconocida y la hipótesis es sobre el valor de la varianza quedando así.

$$\mathcal{H}_0: \sigma^2 \geq 46 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \sigma^2 < 46.$$

Siendo en este caso $\mathcal{H}_1$ la hipótesis de interés. Usando la primer parte del Ejemplo 15, se tenía.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}} \leq k_1$$

Para algún k_1 dado, y como se observa es posible encontrar k_2 y k_3 de tal modo que cumpla la misma condición, esto es.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} e^{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2}} \leq k_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} \leq k_2 \quad \vee \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} \geq k_3$$

Entonces es más practico trabajar con estas desigualdades, pero por la definición de este problema λ se define como.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\left(2\pi{\sigma_0}^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}{\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\theta}\right)^2}}, & \text{si } {\sigma_0}^2 > \widehat{\sigma^2} \\ 1\,, & \text{si } {\sigma_0}^2 \leq \widehat{\sigma^2} \end{cases}$$

Entonces por la definición λ de se tiene que cumplir también que ${\sigma_0}^2 > \widehat{\sigma^2}$ esto es.

$$\begin{gathered} {\sigma_0}^2 > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \Rightarrow \\ 1 > \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n{\sigma_0}^2} \end{gathered}$$

Y por cómo están definidas k_2 y k_3, tenemos que $k_2 \leq 1 \quad \wedge \quad k_3 \geq 1$, por lo que solo nos quedamos con la desigualdad para k_3, quedando.

$$\begin{gathered} \frac{1}{n{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq k_2 \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq nk_2 \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq k_4 \text{ con } k_4 = nk_2 \end{gathered}$$

Entonces tenemos que.

$$C_Y = \left\{(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) : \frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq k_4\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq k_4 \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{n-1}{n-1}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq k_4 \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}(n-1)S^2 \leq k_4 \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, por el Apéndice C.63. además como $\sigma^2 = {\sigma_0}^2$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\frac{1}{{\sigma_0}^2}(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$. Entonces k_4 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}(n-1)S^2 \leq k_4\right) = \alpha \text{ con } \frac{1}{{\sigma_0}^2}(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}(n-1)S^2 \leq k_4\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}(n-1)S^2 \leq k_4\right) = \alpha$$

$$k_4 = {\chi^2}_{(n-1)\alpha}$$

Siendo ${\chi^2}_{(n)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $\chi^2(n)$ acumulando α de probabilidad. Teniendo una región de rechazo.

$$\text{C}_{\Upsilon}=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\,:\,\frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\leq {\chi^2}_{(n-1)\alpha}\right\}$$

$$\text{C}_{\Upsilon}=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\,:\,\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\leq \frac{1}{n-1}\left({\chi^2}_{(n-1)\alpha}\right)\right\}$$

$$\text{C}_{\Upsilon}=\left\{(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\,:\,S^2\leq \frac{{\sigma_0}^2}{n-1}{\chi^2}_{(n-1)\alpha}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon\!:\left\{\text{Rechazar }\mathcal{H}_0\text{ si }S^2\leq\frac{{\sigma_0}^2}{n-1}{\chi^2}_{(n-1)\alpha}\right\}.$$

Teniendo la prueba más potente solo es sustituir los valores, así.

$$\Upsilon\!:\left\{\text{Rechazar }\mathcal{H}_0\text{ si }S^2\leq\frac{46}{8-1}{\chi^2}_{(8-1)0.05}\right\}$$

$$\Upsilon\!:\left\{\text{Rechazar }\mathcal{H}_0\text{ si }S^2\leq\frac{46}{7}{\chi^2}_{(7)0.05}\right\}$$

Buscando valores en la tabla D.26. de la Chi Cuadrada del Apéndice D.

$$\Upsilon\!:\left\{\text{Rechazar }\mathcal{H}_0\text{ si }S^2\leq\frac{46}{7}(2.1673)\right\}$$

$$\Upsilon\!:\{\text{Rechazar }\mathcal{H}_0\text{ si }S^2\leq 14.242257\}$$

Siendo esta la región critica más poderosa de tamaño 0.05. Ahora usando los datos obtenidos de la muestra hay que obtener el valor de S^2 para contrastarlo con la prueba.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \left(\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i\right)\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \left(\frac{1}{8}(130 + 125 + 135 + 123 + 141 + 122 + 131 + 140)\right)\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \left(\frac{1}{8}(1047)\right)\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - 130.875)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{7}((130 - 130.875)^2 + (125 - 130.875)^2 + (135 - 130.875)^2 + (123 - 130.875)^2 + (141 - 130.875)^2 + (122 - 130.875)^2 + (131 - 130.875)^2 + (140 - 130.875)^2)$$

$$S^2 = \frac{1}{7}((-0.875)^2 + (-5.875)^2 + (4.175)^2 + (-7.875)^2 + (10.125)^2 + (-8.875)^2 + (0.125)^2 + (9.125)^2)$$

$$S^2 = \frac{1}{7}(0.765625 + 34.515625 + 17.015625 + 62.015625 + 102.515625 + 78.765625 + 0.015625 + 83.265625)$$

$$S^2 = \frac{1}{7}(378.875)$$

$$S^2 = 54.125$$

Contrastando con la prueba.

$$54.125 \leq 14.242257$$

Como esto no pasa ya que es una contradicción, por lo que no se rechaza $\mathcal{H}_0$, es decir se rechaza $\mathcal{H}_1$, que era nuestra hipótesis de interés concluyendo que se rechaza que $\sigma^2 < 46$ con un nivel de significancia de 0.05.

Nota: El lector podría intentar resolver el mismo problema mediante el valor P y contrastar ambos procedimientos.

Ejercicio 21: Prueba Normal IV. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \quad \forall i$$

Considere la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > \theta_0.$$

a) Si σ^2 es conocida, muestre que la prueba.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} > \zeta_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 \right\}$$

Es una prueba de tamaño α.

b) Muestre que la prueba del inciso anterior puede ser derivada por medio de una razón de verosimilitud y que es la prueba uniformemente más potente.

Solución:

Para este problema hay que ver que nuestra muestra es Normal con varianza conocida.

a) Para este inciso es equivalente a la última parte del Ejemplo 12, entonces.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} > \zeta_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 \right\}$$

Es una prueba de tamaño α.

b) Para este inciso hay que obtener el cociente λ, por el Ejemplo 14 se tiene.

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup} \, (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \dots, x_n)$ pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para θ ya que $\theta \in \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por él Apéndice B.2.5. se tiene que:

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = \bar{x}$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta \in \Theta}{Sup} \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\theta}\right)^2}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pero restringida ya que $\theta \epsilon \Theta_0$ entonces hay que analizar los posibles casos para este espacio, como el máximo general es $\hat{\theta}$, y el espacio paramétrico Θ_0 esta en función de θ_0, entonces se tienen 2 casos:

i. $\theta_0 \neq \hat{\theta}$

ii. $\theta_0 = \hat{\theta}$

Si el caso **(ii)** pasara entonces $\hat{\theta} \epsilon \Theta_0$ y esto resultaría que el máximo en el espacio Θ_0 también fuera $\hat{\theta}$, haciendo al cociente 1, mientras que el caso **(i)** el máximo para θ se alcanza cuando $\theta = \theta_0$ teniendo así.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_0)^2}, & \text{si } \theta_0 < \hat{\theta} \\ (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\theta}\right)^2}, & \text{si } \theta_0 \geq \hat{\theta} \end{cases}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_0)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\theta}\right)^2}}, & \text{si } \theta_0 < \hat{\theta} \\ 1, & \text{si } \theta_0 \geq \hat{\theta} \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que $\theta_0 < \hat{\theta}$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_0)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\theta}\right)^2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}}{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2}} \le k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2}} \le k \quad \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2} \le k \quad \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2\right)} \le k \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2\right) \le ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right) \le ln(k) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right) \le ln(k)(2\sigma^2) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}\,)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2 \le k_1 \text{ con } k_1 = \ ln(k)(-2\sigma^2) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2-2x_i\theta_0+{\theta_0}^2\right) \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2\theta_0\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}{\theta_0}^2\right) \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2-\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+2\theta_0\sum_{i=1}^{n}x_i-n{\theta_0}^2 \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$-2\overline{x}\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2+2\theta_0\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i-n{\theta_0}^2 \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$-2\overline{x}n\overline{x}+n\overline{x}^2+2\theta_0 n\overline{x}-n{\theta_0}^2 \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$-2n\overline{x}^2+n\overline{x}^2+2\theta_0 n\overline{x}-n{\theta_0}^2 \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$-n\overline{x}^2+2\theta_0 n\overline{x}-n{\theta_0}^2 \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$-n\left(\overline{x}^2-2\theta_0\overline{x}+{\theta_0}^2\right) \le k_1 \quad \Rightarrow$$

$$-n(\bar{x}-\theta_0)^2 \leq k_1 \quad \Rightarrow$$
$$(\bar{x}-\theta_0)^2 \geq -\frac{k_1}{n} \quad \Rightarrow$$
$$(\bar{x}-\theta_0)^2 \geq k_2 \ \text{con} \ k_2 = -\frac{k_1}{n} \quad \Rightarrow$$
$$|\bar{x}-\theta_0| \geq \sqrt{k_2} \quad \Rightarrow$$
$$|\bar{x}-\theta_0| \geq k_3 \ \text{con} \ k_3 = \sqrt{k_2}$$

Recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que $\theta_0 < \hat{\theta}$ esto es.

$$\theta_0 < \bar{x} \quad \Rightarrow$$
$$0 < \bar{x}-\theta_0 \quad \Rightarrow$$
$$|\bar{x}-\theta_0| = \bar{x}-\theta_0 \quad \Rightarrow$$
$$\bar{x}-\theta_0 \geq k_3 \quad \Rightarrow$$
$$\bar{x} \geq k_3 + \theta_0 \quad \Rightarrow$$
$$\bar{x} \geq k_4 \ \text{con} \ k_4 = k_3 + \theta_0$$

Entonces tenemos que.

$$C_{\Upsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \ \bar{x} \geq k_4\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$
$$\mathbb{P}(\bar{x} \geq k_4 \mid \ \theta = \theta_0) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ y por el Apéndice C.60. conocemos que $\bar{x} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ además como $\theta = \theta_0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Entonces k_4 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}(\bar{x} \geq k_4) = \alpha \text{ con } \bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}(\bar{x} < k_4) = \alpha$$

$$\mathbb{P}(\bar{x} < k_4) = 1 - \alpha$$

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}(\bar{x} - \theta_0 < k_4 - \theta_0) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{k_4 - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{k_4 - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha \text{ con } \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\phi\left(\frac{k_4 - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$.

$$\frac{k_4 - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \zeta_{1-\alpha}$$

Siendo ζ_α la inversa de la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$ acumulando α de probabilidad.

$$k_4 \ - \theta_0 = \zeta_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$k_4 \ = \zeta_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0$$

Teniendo una región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{ (x_1 \,, x_2 \,, \dots, x_n) : \bar{x} \geq \zeta_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 \right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \ \text{ si } \ \bar{x} \geq \zeta_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 \right\}.$$

Probando que si puede ser derivada por medio de una razón de verosimilitud.

Ejercicio 22: Prueba Uniforme I. Sea $(x_1 \,, x_2 \,, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i | \ 0, \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_i) \qquad \forall i$$

Y sea $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ la muestra ordenada de menor a mayor. Para la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta \neq \theta_0.$$

Se usa la siguiente prueba.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } y_n \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} \right\}$$

a) Encuentre la función potencia de esta prueba.

b) Pruebe que esta prueba es la prueba uniformemente más potente.

Solución:

Para este problema hay que ver que nuestra muestra es Uniforme.

a) Para este inciso necesitamos sacar la función potencia de la prueba, teniendo.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta) \quad \text{con } \theta \epsilon \Theta$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \mathbb{P}\left(y_n \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} \mid \theta = \theta \right)$$

Por el Ejemplo 9, se sabe la densidad de y_n, entonces.

$$f_y(y \mid \theta) = \frac{n y^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

Entonces.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \mathbb{P}\left(y_n \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} \mid \ \theta = \theta\right) \ \text{con} \ f_y(y|\ \theta) = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \int_0^{\theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}} y^{n-1} dy$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \frac{n}{\theta^n} \left(\frac{y^n}{n} \Bigg|_0^{\theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}} \right)$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \left(\left(\theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n - 0^n \right)$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \frac{{\theta_0}^n \alpha^{\frac{n}{n}}}{\theta^n}$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta) = \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \alpha$$

Siendo esta la función potencia de θ.

b) Para este inciso hay que probar que es la prueba uniformemente más potente, entonces usando la Definición 18 y la Definición 19 para encontrar la prueba más potente. Entonces.

$$\Upsilon: \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \ \text{ si } \ \lambda \leq k \}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)}{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\,\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Por el Apéndice B.2.7. se tiene.

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = (\theta - 0)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = (\theta)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_i)$$

Así.

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ (\theta)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_i)}{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\,(\theta)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_i)}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \dots, x_n)$ pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para θ ya que $\theta \epsilon\ \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por él Apéndice B.2.7. se tiene que:

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = x_{(n)} = y_n$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\,\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_n)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,y_n]}(x_i)$$

Como se tiene el producto de indicadoras y por definición del máximo muestral $x_i \leq y_n \; \forall i$ entonces todas las indicadoras siempre tienen sentido y son 1, quedando así.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta | x_1 , x_2 , \dots , x_n) = (y_n)^{-n}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta | x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ pero restringida ya que $\theta \,\epsilon\, \Theta_0$, pero en este espacio θ solo puede tomar un valor y es el de θ_0, hay que analizar los posibles casos para este espacio, como el máximo general es $\hat{\theta}$, y el espacio paramétrico Θ_0 esta en función de θ_0, entonces por tricotomía se tienen 3 casos:

- **i.** $\theta_0 < \hat{\theta}$
- **ii.** $\theta_0 > \hat{\theta}$
- **iii.** $\theta_0 = \hat{\theta}$

Si el caso **(iii)** pasara entonces $\hat{\theta} \,\epsilon\, \Theta_0$, lo que implicaría que el máximo en el espacio Θ_0 también fuera $\hat{\theta}$, haciendo al cociente 1, mientras que en los casos **(i)** y **(ii)** el máximo se alcanza cuando $\theta = \theta_0$ teniendo así.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta | x_1 , x_2 , \dots , x_n) = \begin{cases} (\theta_0)^{-n} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\theta_0]}(x_i)\,, & \text{si } \theta_0 < \hat{\theta} \\ (\theta_0)^{-n} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\theta_0]}(x_i)\,, & \text{si } \theta_0 > \hat{\theta} \\ (y_n)^{-n} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,y_n]}(x_i)\,, & \text{si } \theta_0 = \hat{\theta} \end{cases}$$

Analizando estos casos, en el caso que $\theta_0 < \hat{\theta}$, por cómo está definida la función se tiene un producto de indicadoras, pero recordando que $\hat{\theta} = y_n$, en ese producto existe $\mathbb{I}_{[0,\theta_0]}(y_n)$, la cual seria 0 haciendo todo el producto 0, en los otros dos casos cómo $x_i \leq y_n$ $\forall i$ entonces todas las indicadoras siempre tienen sentido y son 1, quedando así.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \theta_0 < \hat{\theta} \\ (\theta_0)^{-n}, & \text{si } \theta_0 > \hat{\theta} \\ (y_n)^{-n}, & \text{si } \theta_0 = \hat{\theta} \end{cases}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \theta_0 < \hat{\theta} \\ \dfrac{(\theta_0)^{-n}}{(y_n)^{-n}}, & \text{si } \theta_0 > \hat{\theta} \\ 1\,, & \text{si } \theta_0 = \hat{\theta} \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 y 0 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que $\theta_0 > \hat{\theta}$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{(\theta_0)^{-n}}{(y_n)^{-n}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\theta_0}{y_n}\right)^{-n} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y_n}{\theta_0}\right)^{n} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y_n}{\theta_0} \leq k^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow$$

$$y_n \leq k^{\frac{1}{n}}\theta_0 \quad \Rightarrow$$

$$y_n \leq k_1 \text{ con } k_1 = k^{\frac{1}{n}}\theta_0$$

Entonces tenemos que.

$$C_Y = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : y_n \leq k_1\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}(y_n \leq k_1 \mid \theta = \theta_0) = \alpha$$

Por el Ejemplo 9, se sabe la densidad de y_n, entonces.

$$f_y(y|\,\theta) = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\mathbb{I}_{[0,\theta]}(y)$$

Así.

$$\mathbb{P}(y_n \leq k_1 \mid \theta = \theta_0) = \alpha \text{ con } f_y(y|\,\theta_0) = \frac{ny^{n-1}}{{\theta_0}^n}\mathbb{I}_{[0,\theta_0]}(y)$$

$$\int_0^{k_1} \frac{ny^{n-1}}{{\theta_0}^n} dy = \alpha$$

$$\frac{n}{{\theta_0}^n}\int_0^{k_1} y^{n-1} dy = \alpha$$

$$\frac{n}{{\theta_0}^n}\left(\frac{y^n}{n}\bigg|_0^{k_1}\right) = \alpha$$

$$\frac{1}{{\theta_0}^n}((k_1)^n - 0^n) = \alpha$$

$$\left(\frac{k_1}{\theta_0}\right)^n = \alpha$$

$$\frac{k_1}{\theta_0} = \alpha^{\frac{1}{n}}$$

$$k_1 = \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}$$

Teniendo una región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : y_n \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } y_n \leq \theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Ejercicio 23: Prueba Normal V. Un caso especial de la familia normal se da cuando la media y la varianza están relacionadas, considere $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, a\theta)\ \forall i$, si nosotros estamos interesados en probar dicha relación independientemente del valor de θ estaremos encarando algunos problemas. Si θ es desconocido, encuentre la razón de verosimilitud de la prueba.

$$\mathcal{H}_0 : a = 1 \ vs \ \mathcal{H}_1 : a \neq 1.$$

Solución:

Para este ejercicio hay que obtener la razón de verosimilitud para esta prueba. Al tener el otro parámetro desconocido no es posible usar el Teorema 3, entonces se usará el cociente de verosimilitud generalizado de la Definición 18 y la Definición 19 para encontrar la prueba más potente. Entonces.

$$\Upsilon : \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k \}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\underset{\theta, a \, \epsilon \, \Theta_0}{Sup} \; \mathcal{L}(\theta, a | x_1, x_2, \dots, x_n)}{\underset{\theta, a \, \epsilon \, \Theta}{Sup} \; \mathcal{L}(\theta, a | x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Primero obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\theta, a | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \, \theta, a)$$

$$\mathcal{L}(\theta, a | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2a\theta}}}{\sqrt{2\pi a\theta}} \mathbb{I}_{(-\infty, \infty)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta, a | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi a\theta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}(x_i - \theta)^2} \mathbb{I}_{(-\infty, \infty)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\theta, a | x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty, \infty)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta, a|x_1\ , x_2\ , \dots , x_n)}{\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta, a|x_1\ , x_2\ , \dots , x_n)}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ (2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\ (2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\ \underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ (2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\ \underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\ (2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ (2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}{\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\ (2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta, a|x_1\ , x_2\ , \dots , x_n)$ pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para θ y a ya que $\theta, a\ \epsilon\ \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango, entonces.

$$EMV(\theta, a) = \underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Max} \{ln(\mathcal{L}(\theta, a|x_1\ , x_2\ , \dots , x_n))\}$$

$$EMV(\theta, a) = \underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Max} \left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \theta, a)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta, a) = \underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Max} \left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2a\theta}}}{\sqrt{2\pi a\theta}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta, a) = \underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Max} \left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} (2\pi a\theta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta, a) = \underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Max} \left\{ln\left((2\pi a\theta)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta, a) = \underset{\theta, a \,\epsilon\, \Theta}{Max} \left\{ -\frac{n}{2} ln(2\pi a\theta) - \frac{1}{2a\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \right) \right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ y σ^2 y crear un sistema de ecuaciones igualado a 0, para encontrar el punto máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2} ln(2\pi a\theta) - \frac{1}{2a\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \right) \right) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{n}{2} ln(2\pi a\theta) - \frac{1}{2a\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \right) \right) = 0 \qquad (2)$$

Trabajando con (1) se tiene.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2} ln(2\pi a\theta) - \frac{1}{2a\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2} ln(2\pi a\theta) \right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2a\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \right) = 0$$

$$-\frac{n}{4\pi a\theta}(2\pi a) - \left(\frac{1}{2a\theta} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta}(x_i - \theta)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2a\theta} \right) \right) + 0 = 0$$

$$-\frac{n}{2\theta} - \left(\frac{2}{2a\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)(-1) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 \left(-\frac{1}{2a\theta^2} \right) \right) = 0$$

$$-\frac{n}{2\theta} + \left(\frac{1}{a\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 \left(\frac{1}{2a\theta^2} \right) \right) = 0$$

$$-\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{2a\theta^2}\right)=0$$

$$\frac{1}{a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{2a\theta^2}\right)=\frac{n}{2\theta}$$

$$\frac{2\theta}{n}\left(\frac{1}{a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{2a\theta^2}\right)\right)=1$$

$$\left(\frac{2}{an}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)+\frac{1}{an\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)=1$$

$$\frac{2}{an}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\theta\right)+\frac{1}{an\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2=1$$

$$\frac{2}{an}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{2}{an}(n\theta)+\frac{1}{an\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2=1$$

$$\frac{2\bar{x}}{a}-\frac{2\theta}{a}+\frac{1}{an\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2=1$$

$$\frac{1}{a}\left(2\bar{x}-2\theta+\frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)=1$$

$$2\bar{x}-2\theta+\frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2=a \qquad (3)$$

Trabajando con (2) se tiene.

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi a\theta)-\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2+ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi a\theta)\right)-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)+\frac{\partial}{\partial a}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)=0$$

$$-\frac{n}{4\pi a\theta}(2\pi\theta)-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(-\frac{1}{2\theta a^2}\right)+0=0$$

$$-\frac{n}{2a}+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{2\theta a^2}\right)=0$$

$$\frac{1}{2a}\left(-n+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{\theta a}\right)\right)=0$$

$$-n+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{\theta a}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{\theta a}\right)=n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2=n\theta a$$

$$a=\frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 \tag{4}$$

Igualando (3) con (4) se tiene.

$$2\overline{x}-2\theta+\frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2=\frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

$$2\overline{x}-2\theta=0$$

$$2\overline{x}=2\theta$$

$$\theta=\bar{x}$$

$$\hat{\theta}=\bar{x}$$

Sustituyendo $\hat{\theta}$ en (4), se tiene.

$$a = \frac{1}{n\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Entonces.

$$EMV(\theta, a) = (\widehat{\theta}, \widehat{a}) = \left(\overline{x}\,, \frac{1}{n\overline{x}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta, a|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) = \left(2\pi\hat{a}\widehat{\theta}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\hat{a}\widehat{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{\theta}\right)^2}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta, a|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ pero restringida ya que $\theta, a\ \epsilon\ \Theta_0$, pero en este espacio solo vive un solo valor para a, teniendo que maximizar respecto a θ cuando $a = 1$, entonces partiendo de la ecuación (3).

$$2\overline{x} - 2\theta + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2 = a$$

$$2\overline{x} - 2\theta + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2 = 1$$

$$2\overline{x} - 2\theta + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2 - 2x_i\theta + \theta^2\right) = 1$$

$$2\overline{x} - 2\theta + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2 - 2x_i\theta + \theta^2\right) = 1$$

$$2\overline{x} - 2\theta + \frac{1}{n\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\theta^2\right) = 1$$

$$2\overline{x} - 2\theta + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \frac{2\theta}{n\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}\theta^2 = 1$$

$$2\overline{x} - 2\theta + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\overline{x} + \frac{n\theta^2}{n\theta} = 1$$

$$-2\theta + \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + \theta = 1$$

$$-2\theta + \theta - 1 = -\frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$$

$$-2\theta^2 + \theta^2 - \theta = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$$

$$-\theta^2 - \theta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = 0$$

$$\theta^2 + \theta - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = 0$$

Solucionando esta ecuación cuadrática para θ, se tiene que.

$$\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)}}{2(1)}$$

$$\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}}{2}$$

Como θ igual conforma parte de la varianza de la normal se debe cumplir que $a\theta > 0$ pero como $a = 1$ entonces $\theta > 0$; en el estimador como la parte de la raíz es una suma de puros elementos positivos y la suma será mayor que 1, entonces no podemos tomar la solución donde la raíz es negativa ya que esto implicaría que $\theta < 0$, por lo que.

$$\theta = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}{2}$$

$$\theta = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta, a\, \epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta, a | x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(2\pi(1)\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^2}{2(1)\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)}}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\left(2\pi(1)\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^2}{2(1)\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)}}}{\left(2\pi\hat{a}\hat{\theta}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\hat{a}\hat{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\theta}\right)^2}}, & \text{si } \hat{a} \neq 1 \\ 1, & \text{si } \hat{a} = 1 \end{cases}$$

El caso en que es 1 es trivial, por lo que la razón de verosimilitud es.

$$\lambda = \frac{\left(2\pi\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^2}{2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)}}}{\left(2\pi\frac{1}{n\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\,\bar{x}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\frac{1}{n\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

$$\lambda = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^2}{2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)}}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

$$\lambda = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^2}{2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)}}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}$$

$$\lambda = \left(\frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^2}{2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)}+\frac{n}{2}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)\right)^2}{-1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}}$$

Ejercicio 24: Prueba Normal VI. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_{25})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta, 4) = \frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2(4)}}}{\sqrt{2\pi(4)}}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \quad \forall i$$

Considere la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = 0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > 0.$$

Encuentre la función potencia de la prueba.

$$\Upsilon: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \geq 0.6\}$$

Solución:

Para este ejercicio vemos que la muestra es de tamaño 25 siendo normal con media desconocida y varianza 4, entonces hay que obtener la función potencia para la prueba.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \epsilon \Theta$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}(\bar{x} \geq 0.6 \mid \theta = \theta_0)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, 4)$ y por el Apéndice C.60. conocemos que $\bar{x} \sim N\left(\theta, \frac{4}{25}\right)$ además como $\theta = \theta_0$, entonces $\bar{x} \sim N\left(\theta_0, \frac{4}{25}\right)$. Entonces

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}(\bar{x} \geq 0.6)$$

Por el Apéndice C.64. se sabe qué.

$$\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{\frac{4}{25}}} \sim N(0,1)$$

Entonces.

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}(\bar{x} \geq 0.6)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} < 0.6)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}(\bar{x}-\theta_0 < 0.6-\theta_0)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{\frac{4}{25}}} < \frac{0.6-\theta_0}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{\frac{4}{25}}} < \frac{0.6-\theta_0}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right) \text{ con } \frac{\bar{x}-\theta_0}{\sqrt{\frac{4}{25}}} \sim N(0,1)$$
$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1 - \phi\left(\frac{0.6-\theta_0}{\frac{2}{5}}\right)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$. Y esta ultima la función potencia.

Ejercicio 25: Prueba Bernoulli V. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_5)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i | \theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \quad \forall i$$

Donde $\theta \in \Theta \coloneqq \{\theta | \, 0 \leq \theta \leq 1\}$ y considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: \theta = 0.5 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1: \theta < 0.5.$$

Considere la prueba.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{5} x_i \leq k \right\}$$

a) Muestre que esta es la prueba uniformemente más potente.

b) Encuentre el nivel de significancia cuando $k = 1$.

c) Encuentre el nivel de significancia cuando $k = 0$.

Solución:

Primero hay que ver que la muestra es Bernoulli.

a) Para este inciso se retoma la primer parte del Ejercicio 19 ya que se sabe la distribución Bernoulli pertenece a la familia exponencial, entonces.

$$t(x_1, x_2, \dots, x_5) = \sum_{i=1}^{5} d(x_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i$$

Analizando el comportamiento de $c(\theta)$, utilizando el criterio de la primera derivada para ver si es creciente o decreciente.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} c(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} (ln(\theta) - ln(1 - \theta))$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}(-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}$$

Entonces tenemos que.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}c(\theta) > 0 \ \ \forall\theta \in \Theta$$

Por lo tanto $c(\theta)$ es una función monótona creciente en θ. Y por el inciso **(iii)** del Teorema 3, se tiene.

$$C_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_5) : \sum_{i=1}^{5} x_i \leq k\right\}$$

Es la región de rechazo para la prueba Υ con k de tal modo que cumple.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \leq k \mid \ \theta = 0.5\right) = \alpha$$

Generando la prueba.

$$\Upsilon\!: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{5} x_i \leq k\right\}$$

De modo que la prueba si es la uniformemente más potente.

b) Si $k = 1$ entonces la prueba queda definida como.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{5} x_i \leq 1 \right\}$$

Obteniendo el error de tipo I.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 1 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{5} x_i \sim Bin(5, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i \sim Bin\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 1\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{5} x_i \sim Bin\left(5, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 1\right) = \alpha$$

$$\sum_{x=0}^{1} \binom{10}{x} \frac{1}{2}^{x} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-x} = \alpha$$

Buscando valores en la tabla D.1. de la Binomial del Apéndice D.

$$\alpha = 0.188$$

c) Si $k = 0$ entonces la prueba queda definida como.

$$\Upsilon: \left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{5} x_i \leq 0\right\}$$

Obteniendo el error de tipo I.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 0 \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Ber(\theta)$ y por el Apéndice C.1. conocemos que $\sum_{i=1}^{5} x_i \sim Bin(5, \theta)$ además como $\theta = \frac{1}{2}$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i \sim Bin\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 0\right) = \alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{5} x_i \sim Bin\left(5, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 0\right) = \alpha$$

$$\sum_{x=0}^{0} \binom{10}{x} \frac{1}{2}^{x} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-x} = \alpha$$

Buscando valores en la tabla D.1. de la Binomial del Apéndice D.

$$\alpha = 0.031$$

Ejercicio 26: Prueba Uniforme II. Sea $(x_1\,,x_2)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim Unif(\theta, \theta+1)\ \forall i$, considere la hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = 0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > 0.$$

Y sean Υ_1 y Υ_2 dos pruebas.

$$\Upsilon_1: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \ x_1 > 0.95\}$$
$$\Upsilon_2: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \ x_1 + x_2 > k\}$$

a) Encuentre el valor de k que hace que ambas pruebas tengan el mismo tamaño.

b) Encuentre la función potencia de cada prueba.

Solución:

a) Primero hay que encontrar el tamaño de la prueba Υ_1, después buscar el k que hace que tengan el mismo tamaño.

Para el tamaño de Υ_1.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$
$$\mathbb{P}(x_1 > 0.95 \mid \theta = 0\,) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Unif(\theta, \theta+1)$ además como $\theta = 0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $x_1 \sim Unif(0{,}1)$.

$$\mathbb{P}(x_1 > 0.95) = \alpha \ \text{ con } \ x_1 \sim Unif(0{,}1)$$

$$\int_{0.95}^{\infty} \frac{1}{0+1-0} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)dx = \alpha$$

$$\int_{0.95}^{1} 1dx = \alpha$$

$$x \Big|_{0.95}^{1} = \alpha$$

$$1 - 0.95 = \alpha$$

$$\alpha = 0.05$$

Ahora para la prueba Υ_2 hay que obtener un k tal que su tamaño sea 0.05.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = 0.05$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \mid \theta = 0) = 0.05$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Unif(\theta, \theta + 1)$ y por el Apéndice C.70. conocemos que $x_1 + x_2 \sim Trian(2\theta, 2\theta + 2, 2\theta + 1)$ (también se puede buscar la k analizando la región donde la suma $x_1 + x_2$ tiene sentido y despejando k de una integral doble) además como $\theta = 0$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $x_1 + x_2 \sim Trian(0,2,1)$, siendo $y = x_1 + x_2$.

$$f(y \mid 0,2,1) = \frac{2}{(2-0)}\left(\frac{(y-0)}{(1-0)}\mathbb{I}_{[0,1)}(y) + \mathbb{I}_{\{1\}}(y) + \frac{(2-y)}{(2-1)}\mathbb{I}_{(1,2]}(y)\right)$$

$$f(y \mid 0,2,1) = y\mathbb{I}_{[0,1)}(y) + \mathbb{I}_{\{1\}}(y) + (2-y)\mathbb{I}_{(1,2]}(y)$$

$$f(y \mid 0,2,1) = y\mathbb{I}_{[0,1]}(y) + (2-y)\mathbb{I}_{(1,2]}(y)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 > k) = 0.05 \text{ con } x_1 + x_2 \sim Trian(0,2,1)$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 > k) = 0.05$$

$$1 - \mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = 0.05$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = 0.95$$

Al ser una probabilidad acumulada y para la distribución triangular hay dos casos, analicemos cuanta probabilidad se acumula en el intervalo [0,1].

$$\mathbb{P}(0 \leq x_1 + x_2 \leq 1) = \int_0^1 y\mathbb{I}_{[0,1]}(y) + (2-y)\mathbb{I}_{(1,2]}(y)dy$$

$$\mathbb{P}(0 \leq x_1 + x_2 \leq 1) = \int_0^1 ydy$$

$$\mathbb{P}(0 \leq x_1 + x_2 \leq 1) = \frac{y^2}{2}\bigg|_0^1$$

$$\mathbb{P}(0 \leq x_1 + x_2 \leq 1) = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$\mathbb{P}(0 \leq x_1 + x_2 \leq 1) = \frac{1}{2}$$

Al ser menor que 0.95 se concluye que k debe estar en el intervalo (1,2].

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = \int_0^k y\mathbb{I}_{[0,1]}(y) + (2-y)\mathbb{I}_{(1,2]}(y)dy$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = \int_0^1 ydy + \int_1^k (2-y)dy$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = \frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 + \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\bigg|_1^k$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + \left(2k - \frac{k^2}{2}\right) - \left(2(1) - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = \frac{1}{2} + \left(2k - \frac{k^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = \frac{1}{2} + \left(2k - \frac{k^2}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = -1 + 2k - \frac{k^2}{2}$$

Teniendo así.

$$\mathbb{P}(x_1 + x_2 \leq k) = 0.95$$

$$-1 + 2k - \frac{k^2}{2} = 0.95$$

$$-\frac{k^2}{2} + 2k - 1.95 = 0$$

Solucionando esta ecuación cuadrática para k, se tiene que.

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(-1.95)}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 2(1.95)}}{-1}$$

$$k = 2 \pm \sqrt{4 - 3.9}$$

$$k = 2 \pm \sqrt{0.1}$$

Como k está definido en el intervalo (1,2] no puede ser mayor que 2, entonces.

$$k = 2 - \sqrt{0.1}$$
$$k = 1.683772$$

Definiendo las pruebas.

$$\Upsilon_1 : \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_1 > 0.95\}$$
$$\Upsilon_2 : \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_1 + x_2 > 1.683772\}$$

Que cumplen que son del mismo tamaño.

b) Ahora hay que obtener la función potencia para cada una de las pruebas.

Para Υ_1.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \in \Theta$$
$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(x_1 > 0.95 \mid \theta = \theta_0)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Unif(\theta, \theta + 1)$ además como $\theta = \theta_0$, entonces $x_1 \sim Unif(\theta_0, \theta_0 + 1)$.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(x_1 > 0.95)$$
$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \int_{0.95}^{\infty} \frac{1}{\theta_0 + 1 - \theta_0} \mathbb{I}_{[\theta_0, \theta_0 + 1]}(x)dx$$
$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \int_{0.95}^{\infty} 1\mathbb{I}_{[\theta_0, \theta_0 + 1]}(x)dx$$

Siendo esta ultima la función potencia.

Para Υ_2.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \theta_0 \in \Theta$$
$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(x_1 + x_2 > 1.683772 \mid \theta = \theta_0)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Unif(\theta, \theta + 1)$ y por el Apéndice C.70. conocemos que $x_1 + x_2 \sim Trian(2\theta, 2\theta + 2, 2\theta + 1)$ además como $\theta = \theta_0$, entonces $x_1 + x_2 \sim Trian(2\theta_0, 2\theta_0 + 2, 2\theta_0 + 1)$, siendo $y = x_1 + x_2$.

$$f(y \mid 2\theta_0, 2\theta_0 + 2, 2\theta_0 + 1) = \frac{2}{(2\theta_0 + 2 - 2\theta_0)}\left(\frac{(y - 2\theta_0)}{(2\theta_0 + 1 - 2\theta_0)}\mathbb{I}_{[2\theta_0, 2\theta_0+1)}(y) + \mathbb{I}_{\{2\theta_0+1\}}(y) + \frac{(2\theta_0 + 2 - y)}{(2\theta_0 + 2 - (2\theta_0 + 1))}\mathbb{I}_{(2\theta_0+1, 2\theta_0+2]}(y)\right)$$
$$f(y \mid 2\theta_0, 2\theta_0 + 2, 2\theta_0 + 1) = \frac{2}{2}\left(\frac{(y - 2\theta_0)}{1}\mathbb{I}_{[2\theta_0, 2\theta_0+1)}(y) + \mathbb{I}_{\{2\theta_0+1\}}(y) + \frac{(2\theta_0 + 2 - y)}{1}\mathbb{I}_{(2\theta_0+1, 2\theta_0+2]}(y)\right)$$
$$f(y \mid 2\theta_0, 2\theta_0 + 2, 2\theta_0 + 1) = (y - 2\theta_0)\mathbb{I}_{[2\theta_0, 2\theta_0+1)}(y) + \mathbb{I}_{\{2\theta_0+1\}}(y) + (2\theta_0 + 2 - y)\mathbb{I}_{(2\theta_0+1, 2\theta_0+2]}(y)$$
$$f(y \mid 2\theta_0, 2\theta_0 + 2, 2\theta_0 + 1) = (y - 2\theta_0)\mathbb{I}_{[2\theta_0, 2\theta_0+1]}(y) + (2\theta_0 + 2 - y)\mathbb{I}_{(2\theta_0+1, 2\theta_0+2]}(y)$$

Entonces.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(x_1 + x_2 > 1.683772)$$
$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \int_{1.683772}^{\infty} (y - 2\theta_0)\mathbb{I}_{[2\theta_0, 2\theta_0+1]}(y) + (2\theta_0 + 2 - y)\mathbb{I}_{(2\theta_0+1, 2\theta_0+2]}(y)dy$$

Siendo esta ultima la función potencia.

Ejercicio 27: Prueba Normal VII. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i \mid \theta, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \quad \forall i$$

Considere la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta \neq \theta_0.$$

a) Si σ^2 es desconocida, muestre que la prueba.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } |\bar{x} - \theta_0| > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right\}$$

Es una prueba de tamaño α.

b) Muestre que la prueba del inciso anterior puede ser derivada por medio de una razón de verosimilitud y que es la prueba uniformemente más potente.

Solución:

a) Para este inciso hay que obtener el error tipo 1 de la prueba.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(|\bar{x} - \theta_0| > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \bar{x} - \theta_0 < -\frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right\} \cup \left\{ \bar{x} - \theta_0 > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right\} \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - \theta_0 < -\frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \mid \theta = \theta_0 \right) + \mathbb{P}\left(\bar{x} - \theta_0 > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} < -t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \mid \theta = \theta_0 \right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} > t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \mid \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ además como $\theta = \theta_0$ entonces $x_i \sim N(\theta_0, \sigma^2)$ y por el Ejemplo 14. se tiene.

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \sim t(n-1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} < -t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} > t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \alpha$$

Usando la simetría de la distribución t Student.

$$1-\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} < t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} > t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \alpha$$

$$1-\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} < t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) + 1-\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \alpha$$

$$2-2\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \alpha$$

$$2-2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha$$

$$2-2+\alpha = \alpha$$

$$\alpha = \alpha$$

Por lo que la prueba si es de tamaño α.

b) Para este inciso hay que obtener el cociente λ. Usando la primer parte del Ejemplo 14, se tenía.

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{x}-\theta_0|}{S} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\frac{|\bar{x}-\theta_0|}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2}{n-1}}} \geq k_4$$

Pero por la definición de este problema λ se define como.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\left(2\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}}{\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\theta}\right)^2}}, & \text{si } \theta_0 \neq \hat{\theta} \\ 1, & \text{si } \theta_0 = \hat{\theta} \end{cases}$$

Recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que $\theta_0 \neq \hat{\theta}$ esto es, pero de aquí se derivan dos casos.

i. $\theta_0 < \hat{\theta}$

ii. $\theta_0 > \hat{\theta}$

Partiendo del primer caso.

$$\theta_0 < \bar{x} \quad \Rightarrow$$

$$0 < \bar{x} - \theta_0 \quad \Rightarrow$$

$$|\bar{x}-\theta_0| = \bar{x} - \theta_0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \geq k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2}{n-1}}} \geq k_4$$

Partiendo del segundo caso.

$$\theta_0 > \bar{x} \quad \Rightarrow$$

$$0 > \bar{x} - \theta_0 \quad \Rightarrow$$

$$|\bar{x} - \theta_0| = -(\bar{x} - \theta_0) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \geq k_4 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \leq -k_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2}{n-1}}} \leq -k_4$$

Entonces tenemos que.

$$C_Y = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \geq k_4\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \leq -k_4\right\}\right\}$$

$$C_Y = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S}\right| \geq k_4\right\}$$

$$C_Y = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{\sqrt{n}|\bar{x} - \theta_0|}{S} \geq k_4\right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{x}-\theta_0|}{S} \geq k_4 \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq -k_4\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \geq k_4\right\} \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq -k_4 \mid \theta = \theta_0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \geq k_4 \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ además como $\theta = \theta_0$ entonces $x_i \sim N(\theta_0, \sigma^2)$ y por el Ejemplo 14. se tiene.

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \sim t(n-1)$$

Entonces.

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq -k_4\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \geq k_4\right) = \alpha$$

Usando la simetría de la distribución t Student.

$$1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq k_4\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \geq k_4\right) = \alpha$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq k_4\right) + 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{S} \leq k_4\right) = \alpha$$

$$2 - 2\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \theta_0)}{S} \leq k_4\right) = \alpha$$

$$2\left(1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \theta_0)}{S} \leq k_4\right)\right) = \alpha$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \theta_0)}{S} \leq k_4\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{S} \leq k_4\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$k_4 = t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Siendo $t_{(n)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $t(n)$ acumulando α de probabilidad. Teniendo una región de rechazo.

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{\sqrt{n}|\bar{x} - \theta_0|}{S} \geq t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right\}$$

$$\mathrm{C}_{\Upsilon} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |\bar{x} - \theta_0| \geq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon : \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } |\bar{x} - \theta_0| \geq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right\}.$$

Ejercicio 28: Prueba Normal VIII. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\, 0, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x_i)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \qquad \forall i$$

Considere la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \sigma^2 = {\sigma_1}^2 > {\sigma_0}^2.$$

Considere la prueba.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 > k \right\}$$

Muestre que es la prueba uniformemente más potente y que el valor de k puede ser determinado explícitamente para un valor dado de α.

Solución:

Al tratarse de hipótesis simples se usa el Teorema 1, con λ definida como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(0\,, {\sigma_0}^2 | x_1\,, x_2\,, \dots\,,\ \ x_n)}{\mathcal{L}(0\,, {\sigma_1}^2 | x_1\,, x_2\,, \dots,\ x_n)}$$

Por el Ejemplo 14 se sabe qué.

$$\mathcal{L}(0\,, \sigma^2 | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 0)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{(2\pi{\sigma_0}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{(2\pi{\sigma_1}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_1}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{(2\pi{\sigma_0}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}}{(2\pi{\sigma_1}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2{\sigma_1}^2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}}$$

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+\frac{1}{2{\sigma_1}^2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2} \left(\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_0}^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}-\frac{1}{{\sigma_1}^2}\right)} \left(\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_0}^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lambda = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)} \left(\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_0}^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)} \left(\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_0}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)} \leq k\left(\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_0}^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)} \leq k_1 \ \text{ con } \ k_1 = k\left(\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_0}^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)} \leq k_1 \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)}\right) \leq ln(k_1) \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)}\right) \leq k_2 \ \text{ con } \ k_2 = \ ln(k_1) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \left(\frac{1}{{\sigma_1}^2} - \frac{1}{{\sigma_0}^2}\right) \leq k_2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \left(\frac{1}{{\sigma_1}^2} - \frac{1}{{\sigma_0}^2}\right) \geq k_2(2) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \left(\frac{1}{{\sigma_1}^2} - \frac{1}{{\sigma_0}^2}\right) \geq k_3 \ \text{ con } \ k_3 = k_2(2)$$

Pero se tenía por hipótesis ${\sigma_1}^2 > {\sigma_0}^2$. De modo que.

$${\sigma_1}^2 > {\sigma_0}^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{{\sigma_0}^2} < \frac{1}{{\sigma_1}^2} \quad \Rightarrow$$

$$0 < \frac{1}{{\sigma_1}^2} - \frac{1}{{\sigma_0}^2}$$

Así.

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq \frac{k_3}{\frac{1}{{\sigma_1}^2} - \frac{1}{{\sigma_0}^2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq k_4 \ \text{ con } \ k_3 = \frac{k_3}{\frac{1}{{\sigma_1}^2} - \frac{1}{{\sigma_0}^2}}$$

Siendo la región critica.

$$C_Y = \left\{ (x_1 \, , x_2 \, , \ldots , x_n) \, : \, \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq k_4 \right\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq k_4 \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = \alpha$$

$$1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 < k_4 \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 < k_4 \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 < \frac{k_4}{{\sigma_0}^2} \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2}{{\sigma_0}^2} < \frac{k_4}{{\sigma_0}^2} \mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right) = 1 - \alpha$$

Pero sabemos que las $x_i \sim N(0, \sigma^2)$, por el Apéndice C.64. además como $\sigma^2 = {\sigma_0}^2$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que.

$$\frac{{x_i}^2}{{\sigma_0}^2} \sim N(0,1) \ \forall i$$

Por el Apéndice C.61. sabemos que.

$$\frac{{x_i}^2}{{\sigma_0}^2} \sim \chi^2(1) \ \forall i$$

Y por el Apéndice C.62. se tiene.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2}{{\sigma_0}^2} \sim \chi^2(n)$$

Entonces k_4 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^2}{{\sigma_0}^2}<\frac{k_4}{{\sigma_0}^2}\mid \sigma^2 = {\sigma_0}^2\right)=1-\alpha \text{ con } \sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^2}{{\sigma_0}^2}\sim\chi^2(n)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^2}{{\sigma_0}^2}<\frac{k_4}{{\sigma_0}^2}\right)=1-\alpha$$

$$\frac{k_4}{{\sigma_0}^2}={\chi^2}_{(n)(1-\alpha)}$$

Siendo ${\chi^2}_{(n)\alpha}$ la inversa de la función de distribución acumulada de una $\chi^2(n)$ acumulando α de probabilidad.

$$k_4={\sigma_0}^2{\chi^2}_{(n)(1-\alpha)}$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_{\Upsilon}=\left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 \geq {\sigma_0}^2{\chi^2}_{(n)(1-\alpha)}\right\}$$

Por lo que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon:\left\{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 \geq {\sigma_0}^2{\chi^2}_{(n)(1-\alpha)}\right\}.$$

Ejercicio 29: Prueba Beta. Sea (x_1) una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i\sim Bet(\theta,1)\ \forall i$, considere la hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 1 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta > 1.$$

Considere la prueba.

$$\Upsilon: \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_1 > 0.5\}$$

Encuentre el tamaño de esta prueba y bosqueje su función potencia.

Solución:

Primero se obtendrá la función potencia y se graficará, después se evaluará en $\theta = 1$ para obtener el tamaño de la prueba.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \theta = \theta_0) \quad \text{con } \ \theta_0 \in \Theta$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(\, x_1 > 0.5 \mid \theta = \theta_0)$$

Pero sabemos que las $x_i \sim Bet(\theta, 1)$ además como $\theta = \theta_0$, entonces $x_1 \sim Bet(\theta_0, 1)$.

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \mathbb{P}(x_1 > 0.5)$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \int_{0.5}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{B}(\theta_0, 1)} x^{\theta_0 - 1}(1 - x)^{1-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) dx$$

$$\Pi_\Upsilon(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\mathrm{B}(\theta_0, 1)} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\int_0^1 t^{\theta_0-1}(1-t)^{1-1}dt} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\int_0^1 t^{\theta_0-1}dt} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\left.\frac{t^{\theta_0-1+1}}{\theta_0 - 1 + 1}\right|_0^1} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\left.\frac{t^{\theta_0}}{\theta_0}\right|_0^1} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\frac{1^{\theta_0}}{\theta_0} - \frac{0^{\theta_0}}{\theta_0}} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \int_{0.5}^{1} \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\frac{1}{\theta_0}} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \theta_0 \int_{0.5}^{1} x^{\theta_0 - 1} dx$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \theta_0 \left.\frac{x^{\theta_0-1+1}}{\theta_0 - 1 + 1}\right|_{0.5}^{1}$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \theta_0 \left.\frac{x^{\theta_0}}{\theta_0}\right|_{0.5}^{1}$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \left. x^{\theta_0}\right|_{0.5}^{1}$$

$$\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = 1^{\theta_0} - 0.5^{\theta_0}$$

$$\Pi_Y(\theta_0) = 1 - 0.5^{\theta_0}$$

Siendo esta ultima la función potencia, graficándola.

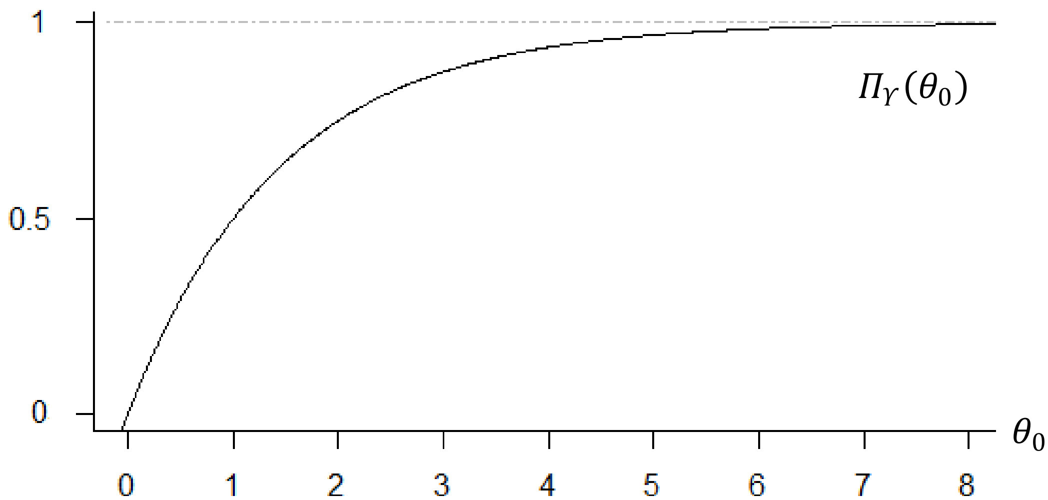

Figura 10.

Ahora hay que obtener el tamaño de la prueba.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

$$\mathbb{P}(x_1 > 0.5 \mid \theta = 1) = \alpha$$

$$\Pi_Y(1) = \alpha$$

$$1 - 0.5^1 = \alpha$$

$$\alpha = 0.5$$

Ejercicio 30: Prueba más potente. Considere la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta = \theta_1.$$

Donde θ es el parámetro de cierta distribución $f(x|\ \theta)$ y asuma que existe una prueba Υ^* de tamaño α con región de rechazo C^*, pruebe que sí.

$$\int_{C^*} \mathcal{L}(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \int_{C} \mathcal{L}(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Para cualquier otra prueba de tamaño α con región de rechazo C, entonces Υ^* es la prueba uniformemente más potente.

Solución:

Sea Υ otra prueba de tamaño α con región de rechazo $C \neq C^*$ tal que $\Pi_{\Upsilon}(\theta_0) = \mathbb{P}\big((x_1, x_2, \dots, x_n) \in C|\ \theta = \ \theta_0\big) = \alpha$. Entonces por la Definición 17 tenemos que demostrar que $\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1)$. para que Υ^* sea la prueba uniformemente más potente.

$$\Pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \Pi_{\Upsilon}(\theta_1) \ \ \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}\big((x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^*|\ \theta = \ \theta_1\big) \geq \ \mathbb{P}\big((x_1, x_2, \dots, x_n) \in C|\ \theta = \ \theta_1\big) \ \Leftrightarrow$$

$$\int_{C^*} \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \theta_1) \geq \int_{C} \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \theta_1) \ \ \Leftrightarrow$$

$$\int_{C^*} \mathcal{L}(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \int_{C} \mathcal{L}(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pero por hipótesis esto ya se cumple, entonces Υ^* es la prueba uniformemente más potente.

Ejercicio 31: Prueba Binomial. Sea x_1 una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de densidad:

$$f_x(x|\,2\,,\theta) = \binom{2}{x}\theta^x(1-\theta)^{2-x}\mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x)$$

Considere la prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0\colon \theta = 0.75 \;\; vs \;\; \mathcal{H}_1\colon \theta = 0.5.$$

Considere la prueba.

$$\Upsilon\colon \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda < 2.5\}$$

a) Encuentre la región de rechazo de dicha prueba.
b) Encuentre el tamaño de los errores I y II.

Solución:

Primero hay que ver nuestra muestra es Binomial.

a) Al tratarse de hipótesis simples se usa el Teorema 1, entonces λ queda como.

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(0.75|x_1)}{\mathcal{L}(0.5|x_1)}$$

$$\lambda = \frac{\binom{2}{x_1} 0.75^{x_1}(1-0.75)^{2-x_1}\mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x_1)}{\binom{2}{x_1} 0.5^{x_1}(1-0.5)^{2-x_1}\mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x_1)}$$

$$\lambda = \frac{0.75^{x_1}(0.25)^{2-x_1}}{0.5^{x_1}(0.5)^{2-x_1}}$$

$$\lambda = \frac{0.75^{x_1}0.25^{2}}{0.5^{2}0.25^{x_1}}$$

$$\lambda = \left(\frac{0.75}{0.25}\right)^{x_1}\left(\frac{0.25}{0.5}\right)^{2}$$

$$\lambda = \left(\frac{0.75}{0.25}\right)^{x_1}\left(\frac{0.25}{0.5}\right)^{2}$$

$$\lambda = 3^{x_1}0.5^{2}$$

$$\lambda = 3^{x_1}(0.25)$$

Como se definió $\lambda < 2.5$, entonces.

$$3^{x_1}(0.25) < 2.5$$

$$3^{x_1} < \frac{2.5}{0.25}$$

$$3^{x_1} < 10$$

$$x_1 ln(3) < ln(10)$$

$$x_1 < \frac{ln(10)}{ln(3)}$$

$$x_1 < 2.09590327$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_{\Upsilon} = \{(x_1) : x_1 < 2.0959032\}$$

b) Para este inciso hay que obtener el error tipo I y II de la prueba.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$
$$\alpha = \mathbb{P}(x_1 < 2.0959032 \mid \theta = 0.75)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 0.75$, y podemos asumir que la muestra se $x_1 \sim Bin(2\,, 0.75)$, entonces.

$$\alpha = \mathbb{P}(x_1 < 2.0959032) \text{ con } x_1 \sim Bin(2\,, 0.75)$$
$$\alpha = \sum_{x=0}^{2.0959032} \binom{2}{x} 0.75^x (1-0.75)^{2-x} \mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x)$$
$$\alpha = \sum_{x=0}^{2} \binom{2}{x} 0.75^x (0.25)^{2-x}$$
$$\alpha = 1$$

Para el error tipo II.

$$\beta = \mathbb{P}(\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ Falsa})$$
$$\beta = \mathbb{P}(x_1 \geq 2.0959032 \mid \theta = 0.5)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ falsa se tiene que $\theta = 0.5$, y podemos asumir que la muestra se $x_1 \sim Bin(2\,, 0.5)$, entonces.

$$\beta = \mathbb{P}(x_1 \geq 2.0959032) \text{ con } x_1 \sim Bin(2\,, 0.5)$$
$$\beta = \sum_{x=2.0959032}^{\infty} \binom{2}{x} 0.5^x (1-0.5)^{2-x} \mathbb{I}_{\{0,1,2\}}(x)$$
$$\beta = 0$$

Ejercicio 32: Accidentes Automovilísticos II. Asuma que en cierta ciudad se ha observado históricamente que los accidentes de automóviles sigues una distribución Poisson con una media igual a 3 accidentes al año, si el año pasado se observaron 6 accidentes, ¿Es estadísticamente correcto suponer que la tasa de accidentes automovilísticos ha aumentado con un $\alpha = 0.05$?, ¿Y si fueran 7 accidentes?

Solución:

Tenemos (x_1) una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_1 \sim Poi(\theta)$, como nos interesa saber si la taza ha aumentado o no, plantearemos la hipótesis con eso, donde la hipótesis de interés seria $\mathcal{H}_1$ entonces.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 3 \; vs \; \mathcal{H}_1: \theta > 3.$$

Construiremos la prueba uniformemente más potente de tamaño α, para esta hipótesis y propondremos $\alpha =$0.05.

Una prueba Υ debe ser definida así:

$$\Upsilon: \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k \}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1) = \frac{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1)}{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1)}$$

Por el Ejercicio 3 se tiene.

$$\lambda = \frac{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ e^{-\theta}\theta^{x_1}}{\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\, e^{-\theta}\theta^{x_1}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta|x_1)$ pero esto es equivalente a obtener el estimador de máxima verosimilitud para θ, ya que $\theta \,\epsilon\, \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango. Entonces por él Apéndice B.1.5. se tiene que:

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = \bar{x}$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Sup}\, \mathcal{L}(\theta|x_1) = e^{-\hat{\theta}}\hat{\theta}^{x_1}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\theta|x_1\,, x_2\,, \ldots, x_{1000})$ pero restringida ya que $\theta \,\epsilon\, \Theta_0$ pero en este espacio θ se maximiza cuando $\theta = 3$ y este debe ser diferente al supremo general $\hat{\theta}$ entonces el máximo se alcanza cuando $\theta = 3$ teniendo así.

$$\underset{\theta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup}\ \mathcal{L}(\theta|x_1) = e^{-3}(3)^{x_1}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{e^{-3}(3)^{x_1}}{e^{-\hat{\theta}}\hat{\theta}^{x_1}}, & \text{si } \hat{\theta} > 3 \\ 1, & \text{si } \hat{\theta} \leq 3 \end{cases}$$

El caso en el que el cociente es 1 es trivial por lo que solo tomamos el caso en el que $\hat{\theta} < 3$ y como tenemos que $\lambda \leq k$.

$$\frac{e^{-3}(3)^{x_1}}{e^{-\hat{\theta}}\hat{\theta}^{x_1}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-3}(3)^{x_1}}{e^{-\bar{x}}\bar{x}^{x_1}} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{\bar{x}-3}\left(\frac{3}{\bar{x}}\right)^{x_1} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} x_i - 3}\left(\frac{3}{\frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} x_i}\right)^{x_1} \leq k \quad \Rightarrow$$

$$e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1} \leq k$$

Entonces queremos encontrar un k que cumpla esa condición, pero ya no es posible despejar un estadístico conocido de $e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}$, entonces si lo vemos como una función de x_1 ,a fin de analizar esta función buscaremos su rango, podemos encontrar el máximo, derivando e igualando a 0.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1-3}e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\right) = 0$$

$$e^{x_1-3}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{x_1-3}) = 0$$

$$e^{x_1-3}e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}e^{x_1-3} = 0$$

$$e^{x_1-3}e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{3}{x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(ln\left(\frac{3}{x_1}\right)\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}e^{x_1-3} = 0$$

$$e^{x_1-3}e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{3}{x_1}\right) + x_1\frac{1}{\left(\frac{3}{x_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{3}{x_1}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}e^{x_1-3} = 0$$

$$e^{x_1-3}e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{3}{x_1}\right) + x_1\frac{x_1}{3}\left(\frac{-3}{{x_1}^2}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}e^{x_1-3} = 0$$

$$e^{x_1-3}e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}\left(ln\left(\frac{3}{x_1}\right) + \frac{{x_1}^2}{3}\left(\frac{-3}{{x_1}^2}\right)\right) + e^{x_1 ln\left(\frac{3}{x_1}\right)}e^{x_1-3} = 0$$

$$e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}\left(ln\left(\frac{3}{x_1}\right) - 1\right) + \left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}e^{x_1-3} = 0$$

$$e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}ln\left(\frac{3}{x_1}\right) - e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1} + \left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}e^{x_{1-3}} = 0$$

$$e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}ln\left(\frac{3}{x_1}\right) = 0$$

Para que este producto sea 0, se debe cumplir que alguno de sus miembros sea 0, pero para el primer miembro e^{x_1-3} nunca toma el valor de 0, entonces analizando el segundo miembro $\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1}$ tampoco se hace 0, solo el tercer miembro puede ser 0, es decir.

$$ln\left(\frac{3}{x_1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{x_1} = 1 \text{ ya que } ln(1) = 0$$

$$x_1 = 3$$

Entonces su máximo se da cuando $x_1 = 3$ evaluando en la función tenemos encontramos el máximo valor que puede tomar.

$$e^{3-3}\left(\frac{3}{3}\right)^3 = e^0(1)^3 = 1$$

Entonces estamos buscando un k de tal modo que $e^{x_1-3}\left(\frac{3}{x_1}\right)^{x_1} \leq k$, si graficamos la función como se muestra en la Figura S1.3, tenemos.

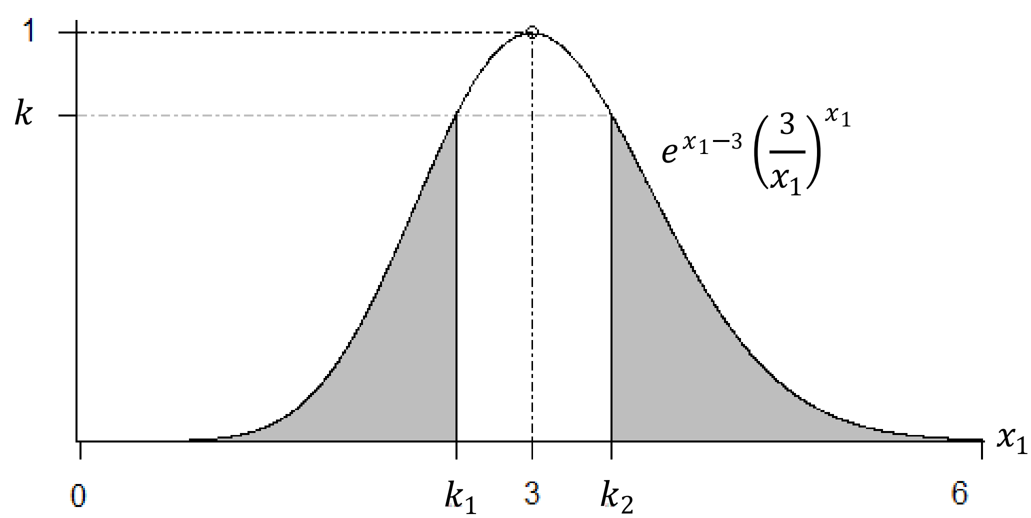

Figura 11.

Entonces es más practico trabajar con estas desigualdades, pero recordando cómo se definió λ se tiene que cumplir también que $\hat{\theta} > 3$ esto es.

$$\hat{\theta} > 3 \quad \Rightarrow$$
$$x_1 > 3$$

Y por cómo están definidas k_1 y k_2, tenemos que $k_1 \leq 3 \quad \wedge \quad k_2 \geq 3$, por lo que solo nos quedamos con la desigualdad para k_1, quedando.

$$x_1 \geq k_2$$

Entonces tenemos que.

$$C_Y = \{(x_1) : x_1 \geq k_2\}$$

Y por la condición **(i)** del Teorema 1 tenemos que se debe cumplir.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$
$$\mathbb{P}(x_1 \geq k_2 \mid \theta = 3) = 0.05$$

Como se tiene que $\theta = 3$ bajo $\mathcal{H}_0$ cierta, entonces $x_1 \sim Poi(3)$. Por lo que k_1 es la constante tal que cumpla con:

$$\mathbb{P}(x_1 \geq k_2) = 0.05 \text{ con } x_1 \sim Poi(3)$$
$$1 - \mathbb{P}(x_1 < k_2) = 0.05$$
$$\mathbb{P}(x_1 < k_2) = 0.95$$
$$\sum_{x=0}^{k_2-1} \frac{e^{-3} 3^x}{x!} = 0.95$$

Buscando valores en la tabla D.23. de la Poisson del Apéndice D.

$$k_2 = 7$$

Entonces la prueba uniformemente más potente es.

$$\Upsilon\colon \{\text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } x_1 \geq 7\}.$$

Teniendo la prueba construida, analizamos la muestra que se obtuvo un promedio de 6 accidentes. Entonces el valor no cae dentro de la región critica de la prueba, ya que $6 < 7$, por lo que no se rechaza $\mathcal{H}_0$.

∴ La tasa de accidentes automovilísticos no ha aumentado con un nivel de significancia del 5%.

En el otro caso cuando son 7 accidentes, el valor cae dentro de la región critica de la prueba, ya que $7 = 7$, por lo que se rechaza $\mathcal{H}_0$ y no se rechaza $\mathcal{H}_1$.

∴ La tasa de accidentes automovilísticos ha aumentado con un nivel de significancia del 5%.

Ejercicio 33: Frecuencia Cardiaca. Suponga que la frecuencia de latidos por minuto de una persona se distribuye Normal con media de 90 latidos por minuto y desviación típica de 12, a una persona le da un ataque al corazón si su frecuencia de latidos por minuto sobrepasa los 90. Se analiza el pulso de 33 pacientes y se establecen las siguientes pruebas.

i. $\Upsilon_1\colon \{\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq 93.3\}$.

ii. $\Upsilon_2\colon \{\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} > 94.1\}$.

iii. $\Upsilon_3\colon \{\text{No Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq 94.8\}$.

a) Si se tolera un error de tipo I de hasta 0.06, determine las pruebas que satisfacen dicho error.

b) Obtenga la nueva región critica si el tamaño de muestra es de 47 y un error de tipo I de 0.06.

Solución:

Primero hay que plantear bien nuestros datos, como nos dice que la frecuencia es Normal con varianza conocida y se tomó una muestra de 33 pacientes, entonces, tenemos $(x_1, x_2, \dots, x_{33})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, 12^2)\ \forall i$, como el evento de interés es saber si sobrepasa los 90 latidos o no, se plantean las siguientes hipótesis, siendo $\mathcal{H}_1$ la hipótesis relevante.

$$\mathcal{H}_0: \theta \leq 90 \ vs \ \mathcal{H}_1: \theta > 90.$$

a) Para este inciso hay que sacar el error tipo I, para cada prueba y contrastarlo contra 0.06.

Para Υ_1, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$
$$\alpha = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 93.3)^c \mid \theta = 90)$$
$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} > 93.3 \mid \theta = 90)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 90$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 90 y varianza 144, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 90 y varianza ${}^{144}/_{33}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \sim N(0,1)$. Para más detalles consultar el Apéndice C.60. y C.64., entonces.

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 93.3 \mid \theta = 90)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \leq \frac{93.3-90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \leq \frac{93.3-90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{93.3-90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi(1.5797)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\alpha = 1 - \phi(1.5797)$$

$$\alpha = 1 - 0.9429$$

$$\alpha = 0.0571 < 0.06$$

Entonces la prueba Υ_1 sí satisface el error de 0.06.

Para Υ_2.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} > \ 94.1 \mid \ \theta = 90\,)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 90$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 90 y varianza 144, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 90 y varianza ${}^{144}/_{33}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \sim N(0{,}1)$, entonces.

$$\alpha = 1 - \ \mathbb{P}(\bar{x} \leq \ 94.1 \mid \theta = 90\,)$$

$$\alpha \ = \ 1 - \ \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \leq \frac{94.1 - 90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha \ = \ 1 - \ \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \leq \frac{94.1 - 90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{94.1 - 90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \ \mid \theta = 90 \right)$$

$$\alpha = 1 - \phi(1.9627)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0{,}1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\alpha = 1 - \phi(1.9627)$$

$$\alpha = 1 - 0.9750$$

$$\alpha = 0.025 < 0.06$$

Entonces la prueba Υ_2 sí satisface el error de 0.06.

Para $\mathcal{Y}_3$, como la prueba está definida para No Rechazar se saca el complemento de esta región critica.

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta})$$

$$\alpha = \mathbb{P}((\bar{x} \leq 94.8)^c \mid \theta = 90)$$

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{x} > 94.8 \mid \theta = 90)$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 90$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 90 y varianza 144, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 90 y varianza ${}^{144}/_{33}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \sim N(0,1)$, entonces.

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq 94.8 \mid \theta = 90)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \leq \frac{94.8-90}{\sqrt{{}^{144}/_{33}}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x}-90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \leq \frac{94.8-90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{94.8-90}{{}^{12}/_{\sqrt{33}}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi(2.2978)$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$, buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\alpha = 1 - \phi(2.2978)$$
$$\alpha = 1 - 0.9893$$
$$\alpha = 0.0107 < 0.06$$

Entonces la prueba Υ_3 sí satisface el error de 0.06.

b) Para este inciso hay que obtener la nueva región critica para un α dado.

Como el estadístico de prueba es $\bar{x}$ tenemos la región critica

$$C_\Upsilon = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{47}) : \bar{x} > k\}$$

Como $\alpha = 0.06$ se buscará dicha región. Y sustituyendo los valores dados.

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \text{ cierta}) = \alpha$$
$$\mathbb{P}(\bar{x} > k \mid \theta = 90) = 0.06$$

Bajo $\mathcal{H}_0$ cierta se tiene que $\theta = 90$, y podemos asumir que la muestra se distribuye Normal con media 90 y varianza 144, por lo que $\bar{x}$ se distribuye Normal con media 90 y varianza ${}^{144}/_{47}$. Y estandarizando esta Normal sabemos que $\frac{\bar{x}-90}{\sqrt{144/47}} \sim N(0,1)$, entonces.

$$0.06 = 1 - \mathbb{P}(\bar{x} \leq k \mid \theta = 90)$$

$$0.94 = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{\sqrt{144/47}} \leq \frac{k - 90}{\sqrt{144/47}} \mid \theta = 90\right)$$

$$0.94 = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{x} - 90}{12/\sqrt{47}} \leq \frac{k - 90}{12/\sqrt{47}} \mid \theta = 90\right)$$

$$0.94 = \phi\left(\frac{k - 90}{12/\sqrt{47}} \mid \theta = 90\right)$$

$$\phi\left(\frac{k - 90}{12/\sqrt{47}}\right) = 0.94$$

$$\frac{k - 90}{12/\sqrt{47}} = \zeta_{0.94}$$

Buscando valores en la tabla D.25. de la Normal del Apéndice D.

$$\frac{k - 90}{12/\sqrt{47}} = 1.56$$

$$k - 90 = 1.56\left(\frac{12}{\sqrt{47}}\right)$$

$$k = 1.56\left(\frac{12}{\sqrt{47}}\right) + 90$$

$$k = 92.73059$$

Teniendo una región de rechazo.

$$C_{\Upsilon} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{47}) : \bar{x} > 92.73059\}$$

Siendo esta la región critica más poderosa de tamaño 0.06.

Nota: El lector podría intentar resolver el mismo problema mediante el valor P y contrastar ambos procedimientos.

Ejercicio 34: Prueba Normal IX. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i|\,\theta,\sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i) \quad \forall i$$

Considere la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0 \ \ vs\ \ \mathcal{H}_1: \theta < \theta_0.$$

a) Si σ^2 es una constante conocida, obtenga la prueba uniformemente más potente de tamaño α.

b) Se sabe que la duración de las laptops N se distribuye Normal, con desviación típica de 10.5 años y media desconocida, se plantea que la duración es mayor o igual a 7 años. Mediante un muestreo aleatorio simple se seleccionan 28 laptops N, siendo la media muestral igual a 6 años. ¿Es cierto el planteamiento con un $\alpha = 0.08$?

Solución:

a) Usando la primer parte del ejercicio 16 se tiene que la prueba uniformemente más potente de tamaño α es.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0 \right\}.$$

b) Planteando las hipótesis se tiene una muestra de tamaño 28, entonces, tenemos $(x_1, x_2, \ldots, x_{28})$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida donde $x_i \sim N(\theta, 10.5^2)$ $\forall i$.

$$\mathcal{H}_0: \theta \geq 7 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \theta < 7.$$

Usando la prueba del primer inciso y el alfa de 0.08 se tiene.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq \zeta_{0.08} \frac{10.5}{\sqrt{28}} + 7 \right\}$$

Buscando valores en la tabla D.24. de la Normal del Apéndice D.

$$\Upsilon: \left\{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq (-1.4) \frac{10.5}{\sqrt{28}} + 7 \right\}$$

$$\Upsilon: \{ \text{Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \bar{x} \leq 4.22196 \}.$$

Teniendo la prueba construida, analizamos la muestra que se obtuvo una media muestral de 6 años. Entonces el valor no cae dentro de la región critica de la prueba, ya que $6 > 4.22196$, por lo que no se rechaza $\mathcal{H}_0$.

∴ La duración de las laptops N es mayor o igual a 7 años con un nivel de significancia del 8%.

Ejercicio 35: Prueba Gamma. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de distribución:

$$f_{x_i}(x_i \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha} {x_i}^{\alpha - 1} e^{-\beta x_i}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i) \qquad \forall i$$

Considere la siguiente hipótesis.

$$\mathcal{H}_0: \alpha = \alpha_0 \ \ vs \ \ \mathcal{H}_1: \alpha \neq \alpha_0.$$

Obtenga la prueba estadística por cociente de verosimilitudes para esta hipótesis.

Solución:

Para este ejercicio hay que obtener la razón de verosimilitud para esta prueba. Al tener el otro parámetro desconocido no es posible usar el Teorema 3, entonces se usará el cociente de verosimilitud generalizado de la Definición 18 y la Definición 19 para encontrar la prueba más potente. Entonces.

$$\Upsilon: \{ \text{ Rechazar } \mathcal{H}_0 \text{ si } \lambda \leq k\}$$

Con λ definida como:

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\underset{\alpha,\beta \,\epsilon\, \Theta_0}{Sup} \ \mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\underset{\alpha,\beta \,\epsilon\, \Theta}{Sup} \ \mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Primero obtenemos la función de máxima verosimilitud.

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \alpha, \beta)$$

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^{\alpha} {x_i}^{\alpha-1} e^{-\beta x_i}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)$$

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) = \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)$$

Entonces λ queda:

$$\lambda = \frac{\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\;\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)}{\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\;\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n {x_i}^{\alpha-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)}{\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n {x_i}^{\alpha-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)}$$

$$\lambda = \frac{\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\,\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n {x_i}^{\alpha-1}}{\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\,\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n {x_i}^{\alpha-1}}$$

$$\lambda = \frac{\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n {x_i}^{\alpha-1}}{\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n {x_i}^{\alpha-1}}$$

Considerando únicamente el denominador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$ pero esto es equivalente a obtener los estimador de máxima verosimilitud para α y β ya que $\alpha,\beta\ \epsilon\ \Theta$ y no tiene restricción alguna para su rango, entonces por el Apéndice B.2.3 caso iii) se tiene que.

$$EMV(\alpha,\beta) = (\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) \approx \left(\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n ln(x_i)}},\frac{\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n ln(x_i)}}\right)$$

Siendo $\gamma \approx 0.5772156649015328606O6$ la constante de Euler- Mascheroni, sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Sup}\,\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) = \left(\frac{\hat{\beta}^{\hat{\alpha}}}{\Gamma(\hat{\alpha})}\right)^n e^{-\hat{\beta}\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\hat{\alpha}-1}$$

Considerando únicamente el numerador, es posible obtener el supremo al maximizar la función $\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$ pero restringida ya que $\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta_0$, pero en este espacio solo vive un solo valor para α, teniendo que maximizar respecto a β cuando $\alpha = \alpha_0$, entonces por el Apéndice B.2.3 caso i) se tiene que.

$$EMV(\beta) = \frac{\alpha_0}{\bar{x}}$$

Sustituyendo se tiene que.

$$\underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta_0}{Sup}\,\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) = \left(\frac{\frac{\alpha_0}{\bar{x}}^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\right)^n e^{-\frac{\alpha_0}{\bar{x}}\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\alpha_0-1}$$

Generando que λ se comporte.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\frac{\alpha_0}{\bar{x}}^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\right)^n e^{-\frac{\alpha_0}{\bar{x}}\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\alpha_0-1}}{\left(\frac{\hat{\beta}^{\hat{\alpha}}}{\Gamma(\hat{\alpha})}\right)^n e^{-\hat{\beta}\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\hat{\alpha}-1}}, & \text{si } \hat{a} \neq \alpha_0 \\ 1\,, & \text{si } \hat{a} = \alpha_0 \end{cases}$$

El caso en que es 1 es trivial, por lo que la razón de verosimilitud es.

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\frac{\alpha_0{}^{\alpha_0}}{\overline{x}}}{\Gamma(\alpha_0)}\right)^n e^{-\frac{\alpha_0}{\overline{x}}\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\alpha_0-1}}{\left(\frac{\frac{\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}^{\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}}}{\Gamma\left(\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}\right)}\right)^n e^{-\frac{\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i{}^{\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}-1}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\frac{\alpha_0{}^{\alpha_0}}{\overline{x}}\,\Gamma\left(\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}\right)}{\frac{\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}^{\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}}\Gamma(\alpha_0)}\right)^n e^{-\frac{\alpha_0}{\overline{x}}\sum_{i=1}^{n} x_i+\frac{\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha_0-1-\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}+1}$$

$$\lambda = \left(\frac{\frac{\alpha_0{}^{\alpha_0}}{\overline{x}}\,\Gamma\left(\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}\right)}{\frac{\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}^{\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}}\Gamma(\alpha_0)}\right)^n e^{\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}-\frac{\alpha_0}{\overline{x}}\right)} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha_0-\frac{\overline{x}\gamma}{\overline{x}-e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}}$$

Conclusiones

Este trabajo significo un logro más que pude cumplir, ya que me permitió elaborar esta tesina con todo cuidado conjuntando una serie de ejercicios y teoría relacionada a una materia que me fascina, todo esto para que el alumno pueda explotar este material al máximo y poder satisfacer su búsqueda de conocimiento al buscar temas relacionados a las pruebas de hipótesis.

Por conforme se presentan los tópicos y ejercicios se refuerzan las ideas de que el alumno será capaz de tener un razonamiento analítico, siendo capaz de plantear, buscar, estudiar, formular y aplicar modelos matemáticos, dando información de valor para el desarrollo y planeación de toma de decisiones en el campo laboral y no se quede todo el conocimiento como algo meramente teórico.

Para responder la pregunta de investigación, siendo que cuando se escribieron estas conclusiones los alumnos no cuentan con los "Apuntes y Ejercicios Resueltos de pruebas de Hipótesis", no se puede dar alguna conclusión cuantitativa a la pregunta inicial, sin embargo, la tesina se diseñó de tal forma que contiene un amplio repertorio de ejemplos que se realizan desde el planteamiento del problema, su resolución y como concluir estos problemas, por lo que la tesina cuenta con amplias probabilidades de que les será de bastante utilidad a los alumnos de actuaria permitiéndoles un óptimo y complementario aprendizaje de estos temas.

Esta tesina fue pensada en un apoyo para el estudiante de las futuras generaciones, dejando pie para profundizar a mayor detalle los temas vistos ampliando así el temario propuesto y poder incluir ejercicios de mayor complejidad.

También es un agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México por todo el apoyo desinteresado, bondadoso y dedicado que me brindo a lo largo de mis estudios de la licenciatura de Actuaria, ya que en este tiempo crecí como persona y estudiante, permitiéndome llegar a donde ahora estoy y poderme llamar a mí mismo un profesionista.

Apéndice A

Funciones de Distribución

A.1. Distribuciones Discretas

A.1.1. Uniforme Discreta

Si x se distribuye como una Uniforme Discreta de parámetro $\theta \epsilon \mathbb{N}$, es decir $x \sim UD(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta) = \frac{1}{\theta}\mathbb{I}_{(1,2,\ldots,\theta)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\theta+1}{2}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\theta^2-1}{12}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \sum_{x=1}^{\theta}\frac{1}{\theta}e^{xt}$$

A.1.2. Bernoulli

Si x se distribuye como una Bernoulli de parámetro 0≤ θ ≤1, es decir $x \sim Ber(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \theta$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \theta(1-\theta)$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = (1-\theta) + \theta e^t$$

A.1.3. Binomial

Si x se distribuye como una Binomial de parámetros 0≤ θ ≤1 y $n \epsilon \mathbb{N}$, es decir $x \sim Bin(n, \theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \mathbb{I}_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = n\theta$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = n\theta(1-\theta)$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \left((1-\theta) + \theta e^t\right)^n$$

A.1.4. Geométrica

Si x se distribuye como una Geométrica de parámetro $0 \leq \theta \leq 1$, es decir $x \sim Geo(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{1}{\theta}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \frac{\theta e^t}{1-(1-\theta)e^t}$$

A.1.5. Binomial Negativa

Si x se distribuye como una Binomial Negativa de parámetros 0≤ θ ≤1 y $r \in \mathbb{N}$, es decir $x \sim BN(r, \theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\, r, \theta) = \binom{r + x - 2}{x - 1} \theta^r (1 - \theta)^{x-1} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{r}{\theta}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{r(1 - \theta)}{\theta^2}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \left(\frac{\theta e^t}{1 - (1 - \theta)e^t}\right)^r$$

A.1.6. Poisson

Si x se distribuye como una Poisson de parámetro $\theta > 0$, es decir $x \sim Poi(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\, \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \theta$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \theta$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = e^{\theta(e^t - 1)}$$

A.1.7. Hipergeométrica

Si x se distribuye como una Hipergeométrica de parámetros $N, M, K \in \mathbb{N}$, es decir $x \sim HG(N, M, K)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\, N, M, K) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{K-x}}{\binom{N}{K}} \mathbb{I}_{\{0,1,\ldots,K\}}(x)$$

Con $M - (N - K) \leq x \leq M$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{KM}{N}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \left(\frac{KM}{N}\right)\left(\frac{(N-M)(N-K)}{N(N-1)}\right)$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \frac{\binom{N-K}{M}\ {}_2F_1(1-M, -K, N-K-M+1, e^t)}{\binom{N}{M}}$$

Siendo ${}_2F_1(a,b,c,d)$ la serie hipergeométrica tal que:

$${}_2F_1(a,b,c,d) = \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)(-d)^{-a}}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}$$

Con $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

A.2. Distribuciones Continuas

A.2.1. Beta

Si x se distribuye como una Beta de parámetros $\alpha, \beta > 0$, es decir $x \sim Bet(\alpha, \beta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\ \alpha, \beta) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

$$\text{Con } \mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^r}{k!}$$

A.2.2. Cauchy

Si x se distribuye como una Cauchy de parámetros $-\infty < \theta < \infty$ y $\sigma > 0$, es decir $x \sim Cauch(\theta, \sigma)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta,\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma\left(1+\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right)}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$No\ existe$$

Con **Varianza**:

$$No\ existe$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe$$

A.2.3. Chi Cuadrada

Si x se distribuye como una Chi cuadrada de parámetro $\theta > 0$ o de θ grados de libertad si $\theta \epsilon \mathbb{N}$, es decir $x \sim \chi^2(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta) = \frac{x^{\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right)2^{\frac{\theta}{2}}}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \theta$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = 2\theta$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{\theta}{2}}$$

A.2.4. Doble Exponencial

Si x se distribuye como Doble Exponencial de parámetros $-\infty < \theta < \infty$ y $\sigma > 0$, es decir $x \sim DobExp(\theta, \sigma)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta, \sigma) = \frac{e^{-\frac{|x-\theta|}{\sigma}}}{2\sigma}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \theta$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = 2\sigma^2$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \frac{e^{\theta t}}{1-(\sigma t)^2}$$

A.2.5. Exponencial

Si x se distribuye como una Exponencial de parámetro $\theta > 0$, es decir $x \sim exp(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{1}{\theta}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{1}{\theta^2}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$$

A.2.6. F

Si x se distribuye como una F de parámetros $v_1, v_2 > 0$, es decir $x \sim F(v_1, v_2)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\, v_1, v_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)\left(1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)x\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{v_2}{v_2 - 2}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = 2\left(\frac{v_2}{v_2-2}\right)^2 \frac{v_1+v_2-2}{v_1(v_2-4)}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe$$

A.2.7. Gamma

Si x se distribuye como una Gamma de parámetros $\alpha, \beta > 0$, es decir $x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\, \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$$

A.2.8. Logística

Si x se distribuye como una Logística de parámetros $-\infty < \theta < \infty$ y $\beta > 0$, es decir $x \sim Logis(\theta, \beta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta, \beta) = \frac{e^{-\frac{(x-\theta)}{\beta}}}{\beta\left(1 + e^{-\frac{(x-\theta)}{\beta}}\right)^2}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \theta$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\pi^2\beta^2}{3}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = e^{\theta t}\,\Gamma(1-\beta t)\Gamma(1+\beta t)$$

A.2.9. Lognormal

Si x se distribuye como una Lognormal de parámetros $-\infty < \theta < \infty$ y $\sigma^2 > 0$, es decir $x \sim LnN(\theta, \sigma^2)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(ln\,(x)-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = e^{\left(\theta+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = e^{(2\theta+2\sigma^2)} - e^{(2\theta+\sigma^2)}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe$$

A.2.10. Normal

Si x se distribuye como una Normal de parámetros $-\infty < \theta < \infty$ y $\sigma^2 > 0$, es decir $x \sim N(\theta, \sigma^2)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\ \theta, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \theta$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \sigma^2$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = e^{\left(\theta t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

A.2.11. Pareto

Si x se distribuye como una Pareto de parámetros $\alpha, \beta > 0$, es decir $x \sim Par(\alpha, \beta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\ \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\beta\alpha}{\beta - 1}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\beta\alpha^2}{(\beta - 1)^2(\beta - 2)}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe$$

A.2.12. t Student

Si x se distribuye como una t Student de parámetro $\theta > 0$ o de θ grados de libertad si $\theta \epsilon \mathbb{N}$, es decir $x \sim t(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\theta + 1}{2}\right)}{\sqrt{\theta\pi}\,\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \left(\frac{x^2}{\theta}\right)\right)^{\left(\frac{\theta+1}{2}\right)}}\,\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = 0$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\theta}{\theta - 2}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe$$

A.2.13. Uniforme

Si x se distribuye como una Uniforme de parámetros $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, es decir $x \sim Unif(\alpha, \beta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\ \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

A.2.14. Weibull

Si x se distribuye como una Weibull de parámetros $\alpha, \beta > 0$, es decir $x \sim W(\alpha, \beta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\, \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\right)^2 \right)$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ Aplica$$

A.2.15. Triangular

Si x se distribuye como una Triangular de parámetros $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ y $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, es decir $x \sim Trian(\alpha, \beta, \gamma)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{2}{(\beta - \alpha)} \left(\frac{(x - \alpha)}{(\gamma - \alpha)} \mathbb{I}_{[\alpha,\gamma)}(x) + \mathbb{I}_{\{\gamma\}}(x) + \frac{(\beta - x)}{(\beta - \gamma)} \mathbb{I}_{(\gamma,\beta]}(x) \right)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma}{18}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$M_x(t) = \frac{2\left((\beta - \gamma)e^{\alpha t} - (\beta - \alpha)e^{\gamma t} + (\gamma - \alpha)e^{\beta t}\right)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma)t^2}$$

A.2.16. Gamma Inversa

Si x se distribuye como una Gamma Inversa de parámetros $\alpha, \beta > 0$, es decir $x \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} e^{-\beta\left(\frac{1}{x}\right)}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\beta}{\alpha - 1}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe$$

A.2.17. Chi Cuadrada Inversa

Si x se distribuye como una Chi cuadrada Inversa de parámetro $\theta > 0$ o de θ grados de libertad si $\theta \epsilon \mathbb{N}$, es decir $x \sim \chi^{2^{-1}}(\theta)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} e^{-\frac{1}{2x}}}{\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right) 2^{\frac{\theta}{2}}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{1}{\theta - 2}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{2}{(\theta - 2)^2(\theta - 4)}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe\ en\ \mathbb{R}$$

A.2.18. Chi Cuadrada Inversa Escalada

Si x se distribuye como una Chi cuadrada Inversa de parámetros $\theta > 0$ o de θ grados de libertad si $\theta \epsilon \mathbb{N}$ y $\sigma^2 > 0$, es decir $x \sim {\chi^2}^{-1} esc(\theta, \sigma^2)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\,\theta, \sigma^2) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} \left(\frac{\theta\sigma^2}{2}\right)^{\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-\frac{\theta\sigma^2}{2x}}}{\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \frac{\theta\sigma^2}{\theta - 2}$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{2\theta^2\sigma^4}{(\theta - 2)^2(\theta - 4)}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe\ en\ \mathbb{R}$$

A.2.19. t Student no estandarizada

Si x se distribuye como una t Student no estandarizada de parámetros $\theta > 0$ o de θ grados de libertad si $\theta \epsilon \mathbb{N}$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma^2 > 0$ es decir $x \sim t(\theta, \mu, \sigma^2)$, cuya **función de distribución** es:

$$f_x(x|\ \theta, \mu, \sigma^2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\theta+1}{2}\right)}{\sqrt{\theta\pi\sigma^2}\,\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\frac{1}{\theta}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right)^{\left(\frac{\theta+1}{2}\right)}}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Con **media** o **esperanza**:

$$E(x) = \mu$$

Con **Varianza**:

$$V(x) = \frac{\sigma^2\theta}{\theta-2}$$

Con **Generadora de Momentos**:

$$No\ existe$$

Apéndice B

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Al aplicar el método de máxima verosimilitud no es posible obtener el estimador explicito para todas las distribuciones sin necesidad de tener que recurrir a métodos numéricos. Por lo que solo se mostraran aquellos Estimadores de Máxima Verosimilitud (EMV) que se puedan obtener de forma explícita.

Suponga se tienen n observaciones de una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, el método consiste primero en encontrar la función de densidad conjunta de estas observaciones usando el hecho de que son independientes e idénticamente distribuidas.

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = f_{x_1}(x_1 | \theta) \cdot f_{x_2}(x_2 | \theta) \cdots f_{x_n}(x_n | \theta)$$

Al ya conocer los valores de la muestra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede ver esta función como una función de θ siendo esta la **función de verosimilitud**.

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta)$$

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ $\left(EMV(\theta)\right)$ hay que encontrar con que valor de $\theta \in \Theta$(siendo Θ el espacio paramétrico de los posibles valores que puede tomar θ) se máxima $\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$, como la función logaritmo es una función creciente a menudo se suele usar para suavizar la función y sea más fácil encontrar este máximo ya que bajo esta transformación preserva se preserva.

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\{\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\} \quad \Leftrightarrow$$
$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

1.1. Distribuciones Discretas

1.1.1. Bernoulli

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Ber(\theta)$ $\forall i$, Entonces.

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$
$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\,\theta)\right)\right\}$$
$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)\right)\right\}$$
$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)\right)\right\}$$
$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\, ln(\theta) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, ln(\theta) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, ln(\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{1-\theta}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)(-1) + 0 = 0$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{1-\theta}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i = \theta\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i = n\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\theta} = \bar{x}$$

Entonces.

$$EMV(\theta) = \widehat{\theta} = \overline{x}$$

1.1.2. Binomial

Sea $(x_1\ , x_2\ , \dots , x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Bin(m, \theta)\ \forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** m conocida y θ desconocida.
- **ii.** θ conocida y m desconocida.
- **iii.** m y θ desconocidas.

Solo trabajaremos con el caso **(i)** ya que los casos **(ii)** y **(iii)** es imposible obtener un estimador para m de forma explicita. Entonces.

$$EMV(\theta) = \underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(m, \theta | x_1\ , x_2\ , \dots , x_n))\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i |\ m, \theta)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{m-x_i} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots,m\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{nm-\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots,m\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\, ln(\theta) + \left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots,m\}}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, ln(\theta) + \left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots,m\}}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, ln(\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots,m\}}(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{1-\theta}\left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)(-1) + 0 = 0$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{1-\theta}\left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i = \theta\left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i = nm\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$nm\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{m}$$

Entonces.

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{m}$$

1.1.3. Geométrica

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Geo(\theta)$ $\forall i$, Entonces.

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\,\theta)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i-1}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{nln(\theta) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(nln(\theta) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(nln(\theta)) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)ln(1-\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{n}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)(-1) + 0 = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = \frac{1}{1-\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)$$

$$(1-\theta)n = \theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)$$

$$n - \theta n = \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - \theta n$$

$$n = \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Entonces.

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$$

1.1.4. Binomial Negativa

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim BN(r, \theta)$ $\forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** r conocida y θ desconocida.
- **ii.** θ conocida y r desconocida.
- **iii.** r y θ desconocidas.

Solo trabajaremos con el caso **(i)** ya que los casos **(ii)** y **(iii)** es imposible obtener un estimador para m de forma explícita. Entonces.

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(r, \theta | x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i | r, \theta)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_i - 2}{x_i - 1} \theta^r (1-\theta)^{x_i - 1} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\theta^{nr} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n} \prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_i - 2}{x_i - 1} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{nr\,ln(\theta) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_i - 2}{x_i - 1} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(nr\,ln(\theta) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) ln(1-\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_i - 2}{x_i - 1} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(nr\,ln(\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) ln(1-\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial \theta} ln\left(\prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_i - 2}{x_i - 1} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots\}}(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{nr}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)(-1) + 0 = 0$$

$$\frac{nr}{\theta} = \frac{1}{1-\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)$$

$$(1-\theta)nr = \theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)$$

$$nr - \theta nr = \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - \theta n$$

$$\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + nr - n\right) = nr$$

$$\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + n(r-1)\right) = nr$$

$$\theta = nr\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + n(r-1)\right)^{-1}$$

$$\hat{\theta} = \frac{r}{\left(\bar{x} + (r-1)\right)}$$

Entonces.

$$EMV(\theta) = \widehat{\theta} = \frac{r}{\left(\overline{x} + (r-1)\right)}$$

1.1.5. Poisson

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Poi(\theta)$ $\forall i$, Entonces.

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\, \theta)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \, \epsilon \, \Theta}{Max}\left\{ln\left(e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \epsilon \Theta}{Max}\left\{-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \, ln(\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \, ln(\theta) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-n\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, ln(\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \mathbb{I}_{\{0,1,\dots\}}(x_i)\right) = 0$$

$$-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i + 0 = 0$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = n$$

$$n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\theta} = \bar{x}$$

Entonces.

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = \bar{x}$$

1.2. Distribuciones Continuas

1.2.1. Doble Exponencial

Sea $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim DobExp(\theta, \sigma)$ $\forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** σ conocida y θ desconocida.
- **ii.** θ conocida y σ desconocida.
- **iii.** σ y θ desconocidas.

Caso **(i)**:

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta, \sigma | x_1 , x_2 , \dots , x_n))\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta, \sigma)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{|x_i-\theta|}{\sigma}}}{2\sigma} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n}(2\sigma)^{-1} e^{-\frac{|x_i-\theta|}{\sigma}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left((2\sigma)^{-n} e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|} \prod_{i=1}^{n}\left(\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{-nln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-nln(2\sigma)-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|+ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\big(-nln(2\sigma)\big)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)=0$$

$$0-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}|x_i-\theta|+0=0$$

$$-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}sgn(x_i-\theta)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}sgn(x_i-\theta)=0$$

Siendo $sgn(x_i-\theta)$ la función signo definida de tal modo:

$$sgn(x):\begin{cases}1\,, & \text{si } x>0\\ -1\,, & \text{si } x<0\\ 0\,, & \text{si } x=0\end{cases}$$

Proponemos tres conjuntos tales que:

$$A:\{\,x_i\mid x_i-\theta>0\}\ \Rightarrow$$
$$A:\{\,x_i\mid x_i>\theta\}$$

$$B:\{\,x_i\mid x_i-\theta<0\}\ \Rightarrow$$
$$A:\{\,x_i\mid x_i<\theta\}$$

$$C:\{\,x_i\mid x_i=\theta\}$$

Notamos que la unión de A, B y C genera toda la muestra, además A, B y C son disjuntos entre sí. Entonces retomando lo que teníamos.

$$\sum_{i=1}^{n} sgn(x_i - \theta) = 0$$

$$\sum_{A \cup B \cup C} sgn(x_i - \theta) = 0$$

$$\sum_{A} sgn(x_i - \theta) + \sum_{B} sgn(x_i - \theta) + \sum_{C} sgn(x_i - \theta) = 0$$

Por cómo están definidos los conjuntos la suma sobre A nos daría puros 1, la suma sobre B puros -1 y sobre C puros 0, entonces al ser estos conjuntos numerables podemos obtener la cardinalidad de cada uno de ellos, quedando:

$$\#A(1) + \#B(-1) + \#C(0) = 0$$

$$\#A = \#B$$

Para lograr la igualdad se debería tener la misma cardinalidad para A y para B, entonces para encontrar el punto máximo y como se definen estos conjuntos se debe esperar que a lo más $\frac{n}{2}$ elementos de la muestra sean mayores a θ y para a lo más $\frac{n}{2}$ elementos restantes menores a θ. Si acomodamos la muestra con estadísticos de orden así:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n-k)} \leq \cdots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}$$

Con $x_{(1)} = Min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $x_{(n)} = Max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Podemos notar que la mediana de la muestra satisface las condiciones deseadas para el estimador de θ, con dos casos:

I. n impar.

II. n par.

Para el caso **(I)** por la definición de mediana se cumple lo siguiente:

$$Mediana(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Si esto pasa existen $n-1$ elementos de la muestra que cumplen:

$$x_{(i)} \leq x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \leq x_{(j)} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, \frac{n-1}{2} \quad \text{y} \quad j = \frac{n+3}{2}, \dots, n$$

Y si tomamos a $\theta = Mediana(x_1, x_2, \dots, x_n)$ seria cuando nuestra función de verosimilitud se maximice ya que $\#A \simeq \#B$. Así.

$$\hat{\theta} = Mediana(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Para el caso **(II)** por la definición de mediana se cumple lo siguiente:

$$Mediana(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\left(\frac{n}{2}\right)+1\right)}\right)}{2}$$

Si esto pasa existen n elementos de la muestra que cumplen:

$$x_{(i)} \leq \frac{\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)}{2} \leq x_{(j)} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{y} \quad j = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$$

Y si tomamos a $\theta = \ Mediana(x_1, x_2, \dots, x_n)$ seria cuando nuestra función de verosimilitud se maximice ya que $\#A \simeq \#B$. Así.

$$\hat{\theta} = Mediana(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Conjuntado todo lo anterior podemos concluir que.

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = Mediana(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Caso **(ii)**:

$$EMV(\sigma) = \underset{\sigma \, \epsilon \, \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta, \sigma | x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\sigma) = \underset{\sigma \, \epsilon \, \Theta}{Max}\left\{-nln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de σ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(-nln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(-nln(2\sigma)) - \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta|\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right) = 0$$

$$-\frac{n}{2\sigma}(2) - \sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta|\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) + 0 = 0$$

$$-\frac{n}{\sigma}+\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)=0$$

$$\frac{1}{\sigma}\left(-n+\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)=0$$

$$-n+\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\left(\frac{1}{\sigma}\right)=n$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|=n\sigma$$

$$\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$$

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$$

Entonces.

$$EMV(\sigma)=\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$$

Caso **(iii)**:

Para este último caso se debe encontrar el vector de estimadores para θ y σ respectivamente.

$$EMV(\theta,\sigma)=\underset{\theta,\sigma\,\epsilon\,\Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta,\sigma|x_1,x_2,\dots,x_n))\}$$

$$EMV(\theta,\sigma) = \underset{\theta,\sigma\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{-nln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ y σ y crear un sistema de ecuaciones igualado a 0, para encontrar el punto máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-nln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(-nln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

Pero de los casos **(i)** y **(ii)** sabemos que:

$$\hat{\theta} = Mediana(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta|$$

Pero como los estimadores no pueden estar en función de los parámetros ya que son desconocidos, sustituyendo el estimador de θ en $\hat{\sigma}$ se tiene.

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \hat{\theta}\right|$$

Entonces.

$$EMV(\theta,\sigma)=(\hat{\theta},\hat{\sigma})=\left(Mediana(x_1,x_2,\dots,x_n),\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-Mediana(x_1,x_2,\dots,x_n)|\right)$$

1.2.2. Exponencial

Sea $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim exp(\theta)$ $\forall i$, Entonces.

$$EMV(\theta)=\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta|x_1,x_2,\dots,x_n))\}$$

$$EMV(\theta)=\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i|\,\theta)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta)=\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n}\theta e^{-\theta x_i}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta)=\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta)=\underset{\theta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{nln(\theta)-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i+ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(nln(\theta)-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i+ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(nln(\theta))-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)=0$$

$$\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i+0=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{\theta}$$

$$\theta \sum_{i=1}^{n} x_i = n$$

$$\theta = n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Entonces.

$$EMV(\theta) = \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$$

1.2.3. Gamma

Sea $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ $\forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** α conocida y β desconocida.
- **ii.** β conocida y α desconocida.
- **iii.** α y β desconocidas.

Caso **(i)**:

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \, \epsilon \, \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \alpha,\beta)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^{\alpha} {x_i}^{\alpha-1} e^{-\beta x_i}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\left(\frac{\beta^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha)^{n}}\right) e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de β e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\alpha n ln(\beta)\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(n ln(\Gamma(\alpha))\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\beta \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{\partial}{\partial \beta} ln\left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{\alpha n}{\beta} - 0 - \sum_{i=1}^{n} x_i + 0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\alpha n}{\beta}$$

$$\beta \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha n$$

$$\beta = \alpha n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\alpha}{\bar{x}}$$

Entonces.

$$EMV(\beta) = \widehat{\beta} = \frac{\alpha}{\bar{\bar{x}}}$$

Para los otros dos casos es necesaria una aproximación a la función Digamma $\Psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$, una buena aproximación usando la constante de Euler-Mascheroni (γ) es.

$$\Psi(\alpha) \approx ln(\alpha - \gamma\ )$$

Teniendo así.

Caso **(ii)**:

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha\,\epsilon\,\Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1\ , x_2\ , \dots , x_n))\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{\alpha nln(\beta) - nln(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de α e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha nln(\beta) - nln(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha n ln(\beta)\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n ln(\Gamma(\alpha))\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\beta\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right) = 0$$

$$n ln(\beta) - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - 0 + \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} ln(\beta) - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) = 0$$

$$-n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\left(ln(x_i) + ln(\beta)\right) = 0$$

$$-n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i) = 0$$

$$-n\Psi(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i) = 0$$

$$n\Psi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)$$

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)$$

Usando la aproximación de la función $\Psi(\alpha)$.

$$ln(\alpha - \gamma) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)$$

$$ln(\alpha - \gamma) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)$$

$$\alpha - \gamma \approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)}$$

$$\alpha \approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)} + \gamma$$

$$\hat{\alpha} \approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)} + \gamma$$

Entonces.

$$EMV(\alpha) \approx \hat{\alpha} \approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)} + \gamma$$

Caso **(iii)**:

Para este último caso se debe encontrar el vector de estimadores para α y β respectivamente.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\big(\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1, x_2, \dots, x_n)\big)\right\}$$

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de α y β y crear un sistema de ecuaciones igualado a 0, para encontrar el punto máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

Pero de los casos **(i)** y **(ii)** sabemos que:

$$\hat{\beta} = \frac{\alpha}{\bar{x}}$$

$$ln(\alpha - \gamma) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\beta x_i)$$

Pero como los estimadores no pueden estar en función de los parámetros ya que son desconocidos, sustituyendo el estimador de β la segunda igualdad se tiene.

$$ln(\alpha - \gamma) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\alpha}{\bar{x}} x_i\right)$$

$$ln(\alpha - \gamma) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(ln\left(\frac{\alpha}{\bar{x}}\right) + ln(x_i)\right)$$

$$ln(\alpha - \gamma) \approx \frac{1}{n}\left(nln\left(\frac{\alpha}{\bar{x}}\right) + \sum_{i=1}^{n} ln(x_i)\right)$$

$$ln(\alpha - \gamma) \approx ln\left(\frac{\alpha}{\bar{x}}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln(\alpha - \gamma) - ln\left(\frac{\alpha}{\bar{x}}\right) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln\left(\frac{\alpha - \gamma}{\frac{\alpha}{\bar{x}}}\right) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln\left(\frac{\bar{x}(\alpha - \gamma)}{\alpha}\right) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$\frac{\bar{x}(\alpha - \gamma)}{\alpha} \approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}$$

$$\bar{x}(\alpha - \gamma) \approx \alpha e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}$$

$$\bar{x}\alpha - \alpha e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)} \approx \bar{x}\gamma$$

$$\alpha\left(\bar{x} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}\right) \approx \bar{x}\gamma$$

$$\alpha \approx \frac{\bar{x}\gamma}{\bar{x} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

$$\hat{\alpha} \approx \frac{\bar{x}\gamma}{\bar{x} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

Sustituyendo este valor en $\hat{\beta}$ se tiene.

$$\hat{\beta} \approx \frac{1}{\bar{x}}\frac{\bar{x}\gamma}{\bar{x} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

$$\hat{\beta} \approx \frac{\gamma}{\bar{x} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

Siendo $\gamma \approx 0.5772156649015328606065$ la constante de Euler- Mascheroni, entonces.

$$EMV(\alpha, \beta) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \approx \left(\frac{\bar{x}\gamma}{\bar{x} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}, \frac{\gamma}{\bar{x} - e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}\right)$$

1.2.4. Lognormal

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim LnN(\theta, \sigma^2)$ $\forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** σ^2 conocida y θ desconocida.
- **ii.** θ conocida y σ^2 desconocida.
- **iii.** σ^2 y θ desconocidas.

Caso **(i)**:

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta, \sigma^2)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{(ln(x_i)-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{x_i\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}(x_i)^{-1}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(ln(x_i)-\theta)^2}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{ln\left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln(x_i)-\theta)^2}\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{Max}\left\{-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln(x_i)-\theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln\,(x_i)-\theta)^2+ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln\,(x_i)-\theta)^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)=0$$

$$0-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}(ln\,(x_i)-\theta)^2+0=0$$

$$-\frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln(x_i)-\theta)(-1)=0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln(x_i)-\theta)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ln(x_i)-\theta)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\theta=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\theta$$

$$\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)=n\theta$$

$$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)$$

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)$$

Entonces.

$$EMV(\theta) = \widehat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

Caso **(ii)**:

$$EMV(\sigma^2) = \underset{\sigma^2\, \epsilon\, \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1\,, x_2\,, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\sigma^2) = \underset{\sigma^2\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de σ^2 e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$-\frac{n}{4\pi\sigma^2}(2\pi) - \sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2\left(-\frac{1}{2\sigma^4}\right) + 0 = 0$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2\left(\frac{1}{2\sigma^4}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(-n + \sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\right) = 0$$

$$-n + \sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2 = n\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2$$

Entonces.

$$EMV(\sigma^2) = \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2$$

Caso **(iii)**:

Para este último caso se debe encontrar el vector de estimadores para θ y σ^2 respectivamente.

$$EMV(\theta, \sigma^2) = \underset{\theta,\sigma^2\ \epsilon\ \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1\ , x_2\ , \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\theta, \sigma^2) = \underset{\theta,\sigma^2\ \epsilon\ \Theta}{Max}\left\{-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\ (x_i) - \theta\right)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ y σ^2 y crear un sistema de ecuaciones igualado a 0, para encontrar el punto máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i) - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i)-\theta)^2+ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

Pero de los casos **(i)** y **(ii)** sabemos que:

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)$$

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\ (x_i)-\theta)^2$$

Pero como los estimadores no pueden estar en función de los parámetros ya que son desconocidos, sustituyendo el estimador de θ en $\widehat{\sigma^2}$ se tiene.

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\ (x_i)-\hat{\theta}\right)^2$$

Entonces.

$$EMV(\theta,\sigma^2)=\left(\hat{\theta},\widehat{\sigma^2}\right)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ln(x_i),\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\ (x_i)-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)\right)\right)^2\right)$$

1.2.5. Normal

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)\ \forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** σ^2 conocida y θ desconocida.
- **ii.** θ conocida y σ^2 desconocida.
- **iii.** σ^2 y θ desconocidas.

Caso **(i)**:

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i |\, \theta, \sigma^2)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\theta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{-\frac{n}{2} ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2+ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)=0$$

$$0-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}(x_i-\theta)^2+0=0$$

$$-\frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)(-1)=0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\theta=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\theta$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\theta$$

$$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\hat{\theta}=\bar{x}$$

Entonces.

$$EMV(\theta)=\hat{\theta}=\bar{x}$$

Caso **(ii)**:

$$EMV(\sigma^2) = \underset{\sigma^2 \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1, x_2, \ldots, x_n))\}$$

$$EMV(\sigma^2) = \underset{\sigma^2 \in \Theta}{Max}\left\{-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de σ^2 e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)\right) - \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma^2}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right) = 0$$

$$-\frac{n}{4\pi\sigma^2}(2\pi) - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(-\frac{1}{2\sigma^4}\right) + 0 = 0$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{2\sigma^4}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(-n + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\right) = 0$$

$$-n + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 = n\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2$$

Entonces.

$$EMV(\sigma^2) = \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2$$

Caso **(iii)**:

Para este último caso se debe encontrar el vector de estimadores para θ y σ^2 respectivamente.

$$EMV(\theta, \sigma^2) = \underset{\theta, \sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\mathcal{L}(\theta, \sigma^2 | x_1 , x_2 , \ldots , x_n)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta, \sigma^2) = \underset{\theta, \sigma^2 \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de θ y σ^2 y crear un sistema de ecuaciones igualado a 0, para encontrar el punto máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2 + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2+ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

Pero de los casos **(i)** y **(ii)** sabemos que:

$$\hat{\theta}=\bar{x}$$

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

Pero como los estimadores no pueden estar en función de los parámetros ya que son desconocidos, sustituyendo el estimador de θ en $\widehat{\sigma^2}$ se tiene.

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\theta}\right)^2$$

Entonces.

$$EMV(\theta,\sigma^2)=\left(\hat{\theta},\widehat{\sigma^2}\right)=\left(\bar{x}\,,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}\,)^2\right)$$

1.2.6. Pareto

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Par(\alpha,\beta)$ $\forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** α conocida y β desconocida.
- **ii.** β conocida y α desconocida.
- **iii.** α y β desconocidas.

Caso **(i)**:

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \alpha,\beta)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x_i{}^{\beta+1}}\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\beta\alpha^{\beta}\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{ln\left(\left(\beta\alpha^{\beta}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\theta) = \underset{\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{nln(\beta) + n\beta ln(\alpha) - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de β e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(nln(\beta) + n\beta ln(\alpha) - (\beta + 1)\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\big(nln(\beta)\big) + \frac{\partial}{\partial \beta}\big(n\beta ln(\alpha)\big) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left((\beta + 1)\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{n}{\beta} + nln(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) + 0 = 0$$

$$\frac{n}{\beta} = \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - nln(\alpha)$$

$$n = \beta\left(\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - nln(\alpha)\right)$$

$$\beta = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - nln(\alpha)\right)^{-1}$$

$$\beta = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} ln(\alpha)\right)^{-1}$$

$$\beta = n\left(\sum_{i=1}^{n}\big(ln(x_i) - ln(\alpha)\big)\right)^{-1}$$

$$\beta = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right)^{-1}$$

$$\hat{\beta} = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right)^{-1}$$

Entonces.

$$EMV(\beta) = \widehat{\beta} = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right)^{-1}$$

Caso **(ii)**:

Para este caso α es desconocido y además el parámetro vive dentro de la indicadora por lo que no será posible derivar la función para encontrar su máximo, entonces para este caso se analizara la función de verosimilitud y no el logaritmo de esta.

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha\, \epsilon\, \Theta}{Max}\{\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{\left(\beta\alpha^{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{-(\beta+1)} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i)^{-(\beta+1)}\right) \alpha^{\beta n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)\right\}$$

Como β es conocido, $\alpha, \beta > 0$ y además $\alpha \leq x_i$ $\forall i$ por cómo está definido su dominio, los primeros factores solo dependen de β y son estrictamente positivos por lo que se podrían tomar como constantes, ahora pasando al producto de indicadoras vemos que el mínimo valor que la muestra puede tomar es el de α, entonces si garantizamos que el mínimo muestral este contenido en el intervalo, esto es equivalente a que todos los valores muestrales se encuentren ahí debido a que $x_{(1)} \leq x_i$ $\forall i$, es decir.

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i) = \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}\left(x_{(1)}\right)$$

Entonces vemos que la función nos quedaría como un polinomio de grado βn y que toma valores en $0< \alpha \leq x_{(1)}$ ya que si $x_{(1)} < \alpha$ la indicadora se haría 0 y por ende el producto de ellas, entonces la función solo toma sentido en ese intervalo, y como vemos que es una función polinomial es creciente en el intervalo $[0,\infty)$, teniendo así.

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \, \epsilon \, \Theta}{Max}\{\rho\alpha^{\beta n}\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)})\}$$

Siendo $\rho = \beta^n \prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}$ una constante conocida.

Si graficamos esta función, que se puede ver en la Figura A2.1, tenemos lo siguiente:

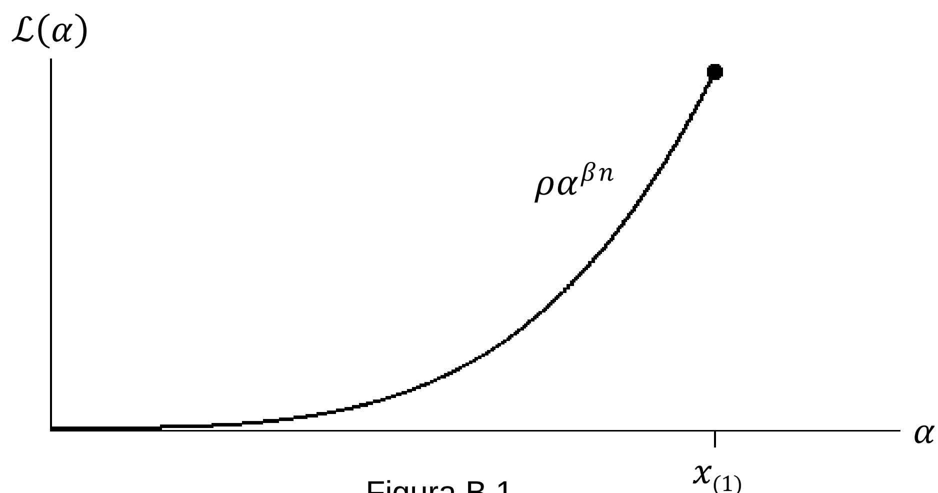

Figura B.1.

Entonces podemos ver que la función se maximiza cuando $\alpha = x_{(1)}$, entonces $\hat{\alpha} = x_{(1)}$, teniendo así:

$$EMV(\alpha) = \hat{\alpha} = x_{(1)}$$

Caso **(iii)**:

Para este último caso se debe encontrar el vector de estimadores para α y β respectivamente, es decir que necesitamos maximizar la función de verosimilitud multivariada para dar con estos estimadores.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\ \epsilon\ \Theta}{Max}\{\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\}$$

Por el caso **(ii)** sabemos que

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\ \epsilon\ \Theta}{Max}\left\{\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n}\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}\big(x_{(1)}\big)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que no nos es posible derivarla directamente por el problema del parámetro dentro de la indicadora, entonces la maximizaremos utilizando multiplicadores de Lagrange quedando de tal modo.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\ \epsilon\ \Theta}{Max}\left\{\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n}\ \text{ s.a. }\ \alpha \le x_{(1)}\right\}$$

Siendo que los multiplicadores de Lagrange se definen para una función $f(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$ con v restricciones $g_i(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) = 0,\ \ i = 1,\dots\,,v$, para la función $f(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$. El extremo para ella seria definido por:

$$\nabla\left(f(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{v}\lambda_i g_i(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\right) = 0$$

Entonces en este caso nuestra función es de dos variables y solo tenemos una restricción, pero hay que ponerla en las condiciones necesarias para los multiplicadores, entonces:

$$\alpha \leq x_{(1)}$$
$$0 \leq x_{(1)} - \alpha$$

Tomando la igualdad y remplazando tenemos.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n} \text{ s.a. } \left(x_{(1)} - \alpha\right) = 0\right\}$$

Entonces.

$$\nabla\left(\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n} - \sum_{i=1}^{1}\lambda_i\left(x_{(1)} - \alpha\right)\right) = 0$$

$$\nabla\left(\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n} - \lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right)\right) = 0$$

$$\nabla\left(\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n}\right) = \nabla\left(\lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right)\right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n}\right), \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right)\right), \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right)\right)\right)$$

$$\left(\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\beta n\alpha^{\beta n-1}, \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n}\right)\right) = (-\lambda_1, 0)$$

Generando el sistema de ecuaciones y respetando que se cumplan las restricciones se tiene.

$$\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\beta n\alpha^{\beta n-1} = -\lambda_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\alpha^{\beta n}\right) = 0 \tag{2}$$

$$x_{(1)} - \alpha = 0 \tag{3}$$

De la ecuación (3) vemos que.

$$\alpha = x_{(1)}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2).

$$\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\beta n\left(x_{(1)}\right)^{\beta n-1} = -\lambda_1 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}\right) = 0 \tag{5}$$

De la ecuación (4) vemos que.

$$\lambda_1 = -\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\beta n\left(x_{(1)}\right)^{\beta n-1}$$

Trabajando ahora con la ecuación (5) se tiene que.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\beta+1)}\right)\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} e^{ln\left(\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}\right)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} e^{\beta nln\left(x_{(1)}\right)}\right) = 0$$

$$\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{\beta nln\left(x_{(1)}\right)}\right) + e^{\beta nln\left(x_{(1)}\right)}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)}\right) = 0$$

$$\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} e^{\beta\, nln\left(x_{(1)}\right)}\, nln\left(x_{(1)}\right)\; +$$

$$e^{\beta nln\left(x_{(1)}\right)}\left(\beta^n\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)}\right) + \left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\right)\right) = 0$$

$$\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} e^{\beta\,\mathrm{nln}\left(x_{(1)}\right)}\, nln\left(x_{(1)}\right)\; +$$

$$e^{\beta nln\left(x_{(1)}\right)}\left(\beta^n\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)}\right)}\right) + \left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^n\right)\right) = 0$$

$$\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} e^{\beta\,\mathrm{nln}\left(x_{(1)}\right)}\, nln\left(x_{(1)}\right)\; +$$

$$e^{\beta nln\left(x_{(1)}\right)}\left(\beta^n\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)}\right)}\right) + \left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} n\beta^{n-1}\right) = 0$$

$$\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\beta+1)} e^{\beta\,\mathrm{nln}\left(x_{(1)}\right)}\, nln\left(x_{(1)}\right)\; +$$

$$e^{\beta n ln\,(x_{(1)})}\left(\beta^{n}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-(\beta+1)ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)}\right)+\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}n\beta^{n-1}\right)=0$$

$$\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}e^{\beta\,\mathrm{nln}\left(x_{(1)}\right)}nln\left(x_{(1)}\right)\ +$$

$$e^{\beta n ln\,(x_{(1)})}\left(\beta^{n}e^{-(\beta+1)ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)}\left(-ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)\right)+\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}n\beta^{n-1}\right)$$

$$=0$$

$$\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}nln\left(x_{(1)}\right)\ +$$

$$\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}\left(\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}\left(-ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)\right)+\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}n\beta^{n-1}\right)=0$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}\left(\beta^{n}\,nln\left(x_{(1)}\right)-\beta^{n}ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)+n\beta^{n-1}\right)=0$$

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}\beta^{n}\right)\left(nln\left(x_{(1)}\right)-ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)+n\beta^{-1}\right)=0$$

Entonces dada esta factorización este producto será 0 cuando alguno de los dos miembros sea 0, teniendo así.

$$\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{-(\beta+1)}\left(x_{(1)}\right)^{\beta n}\beta^{n}=0\right\}\cup\left\{nln\left(x_{(1)}\right)-ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)+n\beta^{-1}=0\right\}$$

Para la primera parte analicemos los dominios de β, n y las x_i de tal modo que.

$$\alpha, \beta, n > 0 \quad \wedge \quad 0 < \alpha \leq x_i \; \forall i \quad \Rightarrow$$

$$\beta^n > 0 \quad \wedge \quad 0 < \alpha \leq x_{(1)} \quad \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i > 0 \quad \wedge \quad \beta n > 0 \quad \wedge \quad \beta + 1 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-(\beta+1)} > 0 \quad \wedge \quad \left(x_{(1)} \right)^{\beta n} > 0 \quad \wedge \quad \beta^n > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-(\beta+1)} \left(x_{(1)} \right)^{\beta n} \beta^n > 0$$

Entonces este producto nunca podrá ser 0, por lo que la única manera en que sea 0 es que el segundo miembro sea 0, es decir.

$$n ln\left(x_{(1)} \right) - ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) + n\beta^{-1} = 0$$

$$\frac{n}{\beta} = ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) - n ln\left(x_{(1)} \right)$$

$$\frac{n}{\beta} = \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - n ln\left(x_{(1)} \right)$$

$$n = \beta \left(\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - n ln\left(x_{(1)} \right) \right)$$

$$\beta = n \left(\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - n ln\left(x_{(1)} \right) \right)^{-1}$$

$$\beta = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} ln\big(x_{(1)}\big)\right)^{-1}$$

$$\beta = n\left(\sum_{i=1}^{n} \Big(ln(x_i) - ln\big(x_{(1)}\big)\Big)\right)^{-1}$$

$$\beta = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)\right)^{-1}$$

Entonces ya se logró una igualdad para α y β, que no está en términos de λ_1 y solo de la muestra por lo que esos son nuestros extremos y por ende nuestros estimadores, entonces.

$$\hat{\alpha} = x_{(1)}$$

$$\hat{\beta} = n\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)\right)^{-1}$$

Así.

$$EMV(\alpha, \beta) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left(x_{(1)}\,, n\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{x_{(1)}}\right)\right)^{-1}\right)$$

1.2.7. Uniforme

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Unif(\alpha, \beta)$ $\forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** α conocida y β desconocida.
- **ii.** β conocida y α desconocida.
- **iii.** α y β desconocidas.

Caso **(i)**:

Para este caso β es desconocido y además el parámetro vive dentro de la indicadora por lo que no será posible derivar la función para encontrar su máximo, entonces para este caso se analizara la función de verosimilitud y no el logaritmo de esta.

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \in \Theta}{Max}\{\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \in \Theta}{Max}\left\{\prod_{i=1}^{n} f(x_i | \alpha, \beta)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \in \Theta}{Max}\left\{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta - \alpha} \mathbb{I}_{[\alpha, \beta]}(x_i)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \in \Theta}{Max}\left\{(\beta - \alpha)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha, \beta]}(x_i)\right\}$$

Como α es conocido, $\alpha, \beta > 0$ y además $\alpha \leq x_i \leq \beta$ $\forall i$ por cómo está definido su dominio, el producto de indicadoras vemos que el máximo valor que la muestra puede tomar es el de β, entonces si garantizamos que el máximo muestral este contenido en el intervalo, esto es equivalente a que todos los valores muestrales se encuentren ahí debido a que $x_i \leq x_{(n)}$ $\forall i$, es decir.

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x_i) = \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\left(x_{(n)}\right)$$

Entonces vemos que la función nos quedaría como el reciproco de un polinomio de grado n y que toma valores en $x_{(n)} \leq \beta$ ya que si $\beta < x_{(n)}$ la indicadora se haría 0 y por ende el producto de ellas, entonces la función toma sentido en ese intervalo, y como $\alpha < \beta$ vemos que $\beta - \alpha >0$ entonces es una función decreciente en el intervalo (α, ∞), pero como está definida después de $x_{(n)}$, y $\alpha \leq x_{(n)}$ entonces es decreciente en el intervalo $\left[x_{(n)}, \infty\right)$, teniendo así.

$$EMV(\beta) = \underset{\beta \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{(\beta - \alpha)^{-n}\mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\left(x_{(n)}\right)\right\}$$

Si graficamos esta función, que se puede ver en la Figura A2.2, tenemos lo siguiente:

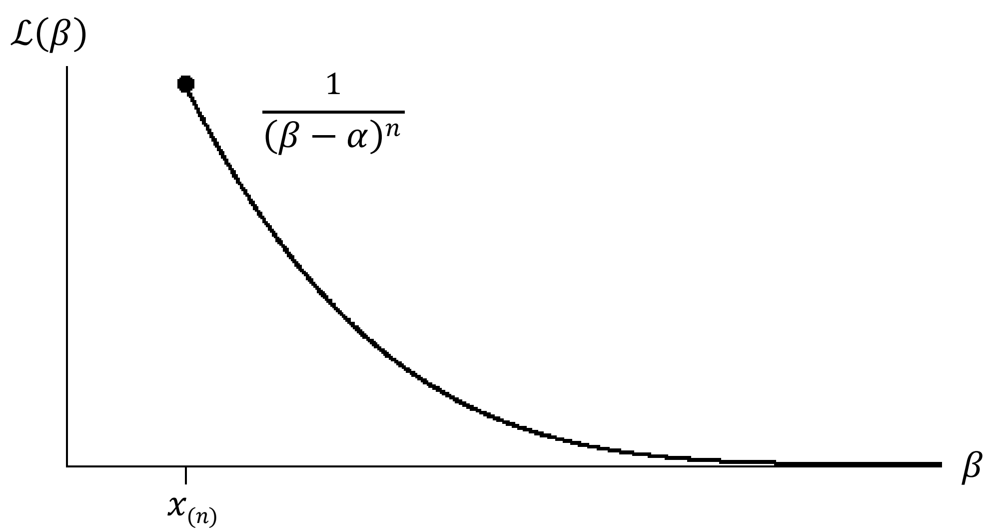

Figura B.2.

Entonces podemos ver que la función se maximiza cuando $\beta = x_{(n)}$, entonces $\hat{\beta} = x_{(n)}$, teniendo así:

$$EMV(\beta) = \widehat{\beta} = x_{(n)}$$

Caso **(ii)**:

Para este caso α es desconocido y además el parámetro vive dentro de la indicadora por lo que no será posible derivar la función para encontrar su máximo, entonces para este caso se analizara la función de verosimilitud y no el logaritmo de esta.

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \,\epsilon\, \Theta}{Max}\{\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1 , x_2 , \dots , x_n)\}$$
$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \,\epsilon\, \Theta}{Max}\left\{(\beta - \alpha)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x_i)\right\}$$

Como β es conocido, $\alpha, \beta > 0$ y además $\alpha \leq x_i \leq \beta \;\; \forall i$ por cómo está definido su dominio, el producto de indicadoras vemos que el mínimo valor que la muestra puede tomar es el de α, entonces si garantizamos que el mínimo muestral este contenido en el intervalo, esto es equivalente a que todos los valores muestrales se encuentren ahí debido a que $x_{(1)} \leq x_i \; \forall i$, es decir.

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x_i) = \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\big(x_{(1)}\big)$$

Entonces vemos que la función nos quedaría como el reciproco de un polinomio de grado n y que toma valores en $\alpha \leq x_{(1)}$ ya que si $x_{(1)} < \alpha$ la indicadora se haría 0 y por ende el producto de ellas, entonces la función toma sentido en ese intervalo, y como $\alpha < \beta$ vemos que $\beta - \alpha > 0$ entonces es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \beta)$, pero como está definida antes de $x_{(1)}$, y $x_{(1)} \leq \beta$ entonces es creciente en el intervalo $\left(-\infty, x_{(1)}\right]$, teniendo así.

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\left\{(\beta - \alpha)^{-n} \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\left(x_{(1)}\right)\right\}$$

Si graficamos esta función, que se puede ver en la Figura A2.3, tenemos lo siguiente:

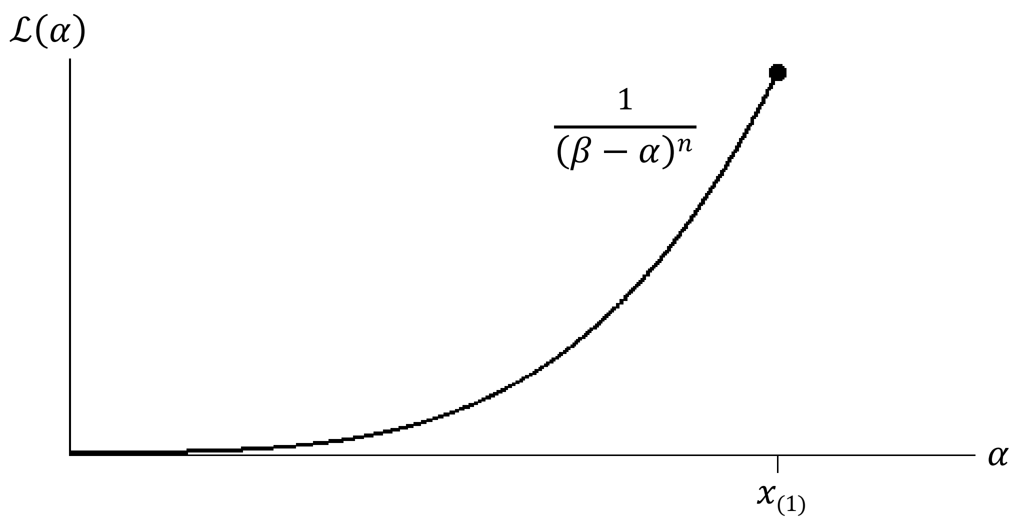

Figura B.3.

Entonces podemos ver que la función se maximiza cuando $\alpha = x_{(1)}$, entonces $\hat{\alpha} = x_{(1)}$, teniendo así:

$$EMV(\alpha) = \hat{\alpha} = x_{(1)}$$

Caso **(iii)**:

Para este último caso se debe encontrar el vector de estimadores para α y β respectivamente, es decir que necesitamos maximizar la función de verosimilitud multivariada para dar con estos estimadores.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\{\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)\}$$

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{(\beta-\alpha)^{-n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x_i)\right\}$$

Como $\alpha,\beta > 0$ y además $\alpha \leq x_i \leq \beta\ \ \forall i$ por cómo está definido su dominio, para el producto de indicadoras vemos que el mínimo valor que la muestra puede tomar es el de α, y máximo es β entonces si garantizamos que el mínimo y máximo muestrales estén contenidos en el intervalo, esto es equivalente a que todos los valores muestrales se encuentren ahí debido a que $x_{(1)} \leq x_i \leq x_{(n)}\ \forall i$, es decir.

$$\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}(x_i) = \mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\left(x_{(n)}\right)$$

Entonces remplazando en la función.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{(\beta-\alpha)^{-n}\mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{I}_{[\alpha,\beta]}\left(x_{(n)}\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que no nos es posible derivarla directamente por el problema de los parámetros dentro de la indicadora, entonces la maximizaremos utilizando multiplicadores de Lagrange quedando de tal modo.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{(\beta-\alpha)^{-n}\ \text{s.a.}\ \ \alpha \leq x_{(1)} \quad \wedge \quad x_{(n)} \leq \beta\right\}$$

Entonces en este caso nuestra función es de dos variables y tenemos dos restricciones, pero hay que ponerlas en las condiciones necesarias para los multiplicadores, entonces:

$$\alpha \leq x_{(1)} \quad \wedge \quad x_{(n)} \leq \beta$$
$$0 \leq x_{(1)} - \alpha \quad \wedge \quad 0 \leq \beta - x_{(n)}$$

Tomando la igualdad y remplazando tenemos.

$$EMV(\alpha, \beta) = \underset{\alpha,\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\{(\beta - \alpha)^{-n} \text{ s.a. } \left(x_{(1)} - \alpha\right) = 0 \quad \wedge \quad \left(\beta - x_{(n)}\right) = 0\}$$

Entonces.

$$\nabla\left((\beta - \alpha)^{-n} - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\, g_i\right) = 0$$
$$\nabla\left((\beta - \alpha)^{-n} - \left(\lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right) + \lambda_2\left(\beta - x_{(n)}\right)\right)\right) = 0$$
$$\nabla\left((\beta - \alpha)^{-n}\right) = \nabla\left(\lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right) + \lambda_2\left(\beta - x_{(n)}\right)\right)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}((\beta - \alpha)^{-n}), \frac{\partial}{\partial\beta}((\beta - \alpha)^{-n})\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right) + \lambda_2\left(\beta - x_{(n)}\right)\right), \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\lambda_1\left(x_{(1)} - \alpha\right) + \lambda_2\left(\beta - x_{(n)}\right)\right)\right)$$
$$(-n(\beta - \alpha)^{-n-1}(-1), -n(\beta - \alpha)^{-n-1}) = (-\lambda_1, \lambda_2)$$
$$\left(n(\beta - \alpha)^{-(n+1)}, -n(\beta - \alpha)^{-(n+1)}\right) = (-\lambda_1, \lambda_2)$$

Generando el sistema de ecuaciones y respetando que se cumplan las restricciones se tiene.

$$n(\beta - \alpha)^{-(n+1)} = -\lambda_1 \tag{1}$$
$$-n(\beta - \alpha)^{-(n+1)} = \lambda_2 \tag{2}$$
$$x_{(1)} - \alpha = 0 \tag{3}$$
$$\beta - x_{(n)} = 0 \tag{4}$$

De la ecuación (3) y (4) vemos que.

$$\alpha = x_{(1)} \quad \wedge \quad \beta = x_{(n)}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2).

$$n\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)^{-(n+1)} = -\lambda_1 \tag{5}$$
$$-n\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)^{-(n+1)} = \lambda_2 \tag{6}$$

De la ecuación (5) y (6) vemos que.

$$\lambda_1 = -n\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)^{-(n+1)}$$
$$\lambda_2 = -n\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)^{-(n+1)}$$

Entonces ya se logró una igualdad para α y β, que no está en términos de λ_1 ni λ_2, y solo de la muestra por lo que esos son nuestros extremos y por ende nuestros estimadores, entonces.

$$\hat{\alpha} = x_{(1)}$$
$$\hat{\beta} = x_{(n)}$$

Así.

$$EMV(\alpha,\beta) = (\hat{\alpha},\hat{\beta}) = (x_{(1)}\,, x_{(n)})$$

1.2.8. Weibull

Sea $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim W(\alpha,\beta)\ \forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** α conocida y β desconocida.
- **ii.** β conocida y α desconocida.
- **iii.** α y β desconocidas.

Solo trabajaremos con el caso **(ii)** ya que los casos **(i)** y **(iii)** es imposible obtener un estimador para β de forma explícita. Entonces.

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,, x_2\,, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \alpha,\beta)\right)\right\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} \alpha\beta {x_i}^{\beta-1} e^{-\alpha {x_i}^{\beta}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\left\{ln\left((\alpha\beta)^n e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} {x_i}^{\beta}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\beta-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\left\{n ln(\alpha\beta) - \alpha \sum_{i=1}^{n} {x_i}^{\beta} + ln\left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\beta-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de α e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(nln(\alpha\beta)-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}+ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\big(nln(\alpha\beta)\big)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta-1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)=0$$

$$\frac{n\beta}{\alpha\beta}-\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}+0=0$$

$$\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}+0=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}=\frac{n}{\alpha}$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}=n$$

$$\alpha=n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}\right)^{-1}$$

$$\hat{\alpha}=n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}\right)^{-1}$$

Entonces.

$$EMV(\alpha)=\hat{\alpha}=n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{\beta}\right)^{-1}$$

1.2.9. Gamma Inversa

Sea $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida $(m.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$ $\forall i$, para esta distribución al tener dos parámetros se nos presentan 3 casos:

- **i.** α conocida y β desconocida.
- **ii.** β conocida y α desconocida.
- **iii.** α y β desconocidas.

Caso **(i)**:

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1 , x_2 , \dots , x_n))\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i |\ \alpha, \beta)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta^{\alpha}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1} e^{-\beta\left(\frac{1}{x_i}\right)}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n} e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{ln\left(\left(\frac{\beta^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha)^{n}}\right) e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

$$EMV(\beta) = \underset{\beta\, \epsilon\, \Theta}{Max}\left\{\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de β e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\alpha nln(\beta)-nln(\Gamma(\alpha))-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)+ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\alpha nln(\beta))-\frac{\partial}{\partial\beta}(nln(\Gamma(\alpha)))-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)=0$$

$$\frac{\alpha n}{\beta}-0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+0=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\frac{\alpha n}{\beta}$$

$$\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\alpha n$$

$$\beta=\alpha n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

$$\hat{\beta}=\alpha n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

Entonces.

$$EMV(\beta)=\widehat{\beta}=\alpha n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

Para los otros dos casos es necesaria una aproximación a la función Digamma $\Psi(\alpha)=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$, una buena aproximación usando la constante de Euler-Mascheroni (γ) es.

$$\Psi(\alpha)\approx ln(\alpha-\gamma)$$

Teniendo así.

Caso **(ii)**:

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

$$EMV(\alpha) = \underset{\alpha \in \Theta}{Max}\left\{\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de α e igualar a 0 para encontrar el máximo.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + ln\left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha n ln(\beta) - n ln(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha n ln(\beta)) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(n ln(\Gamma(\alpha))) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right) = 0$$

$$n ln(\beta) - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - 0 + \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} ln(\beta) - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$$

$$-n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\left(ln(1) - ln(x_i) + ln(\beta)\right) = 0$$

$$-n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\left(0 + ln(\beta) - ln(x_i)\right) = 0$$

$$-n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)=0$$

$$-n\Psi(\alpha)+\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)=0$$

$$n\Psi(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)$$

$$\Psi(\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)$$

Usando la aproximación de la función $\Psi(\alpha)$.

$$ln(\alpha-\gamma)\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)$$

$$ln(\alpha-\gamma)\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)$$

$$\alpha-\gamma\approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)}$$

$$\alpha\approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)}+\gamma$$

$$\hat{\alpha}\approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)}+\gamma$$

Entonces.

$$EMV(\alpha)\approx\hat{\alpha}\approx e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)}+\gamma$$

Caso **(iii)**:

Para este último caso se debe encontrar el vector de estimadores para α y β respectivamente.

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\{ln(\mathcal{L}(\alpha,\beta|x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n))\}$$

$$EMV(\alpha,\beta) = \underset{\alpha,\beta\,\epsilon\,\Theta}{Max}\left\{\alpha n ln(\beta) - nln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right\}$$

Para maximizar esta función vemos que nos es posible derivarla respecto de α y β y crear un sistema de ecuaciones igualado a 0, para encontrar el punto máximo.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha n ln(\beta) - nln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\alpha n ln(\beta) - nln(\Gamma(\alpha)) - \beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\right) = 0$$

Pero de los casos **(i)** y **(ii)** sabemos que:

$$\hat{\beta} = \alpha n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

$$ln(\alpha - \gamma) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{x_i}\right)$$

Pero como los estimadores no pueden estar en función de los parámetros ya que son desconocidos, sustituyendo el estimador de β la segunda igualdad se tiene.

$$ln(\alpha - \gamma\,) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\alpha n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}}{x_i}\right)$$

$$ln(\alpha - \gamma\,) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(ln(\alpha) + ln(n) - ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) - ln(x_i)\right)$$

$$ln(\alpha - \gamma\,) \approx \frac{1}{n}\left(nln(\alpha) + nln(n) - nln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} ln(x_i)\right)$$

$$ln(\alpha - \gamma\,) \approx ln(\alpha) + ln(n) - ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln(\alpha - \gamma\,) - ln(\alpha) \approx ln(n) - ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln\left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\right) \approx ln\left(n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln\left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\right) - ln\left(n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}\right) \approx -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln\left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\right) + ln\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right) \approx -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$ln\left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right)\right) \approx -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

$$(\alpha-\gamma)\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right)\approx \alpha e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}$$

$$\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right)\alpha-\alpha e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}\approx \gamma\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right)$$

$$\alpha\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}\right)\approx \frac{\gamma}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$$

$$\alpha \approx \frac{\frac{\gamma}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

$$\hat{\alpha} \approx \frac{\frac{\gamma}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

Sustituyendo este valor en $\hat{\beta}$ se tiene.

$$\hat{\beta} \approx n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}\frac{\frac{\gamma}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

$$\hat{\beta} \approx \frac{\gamma}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}$$

Siendo $\gamma \approx 0.57721566490153286060 6$ la constante de Euler- Mascheroni, entonces.

$$EMV(\alpha,\beta)=(\hat{\alpha},\hat{\beta})\approx\left(\frac{\frac{\gamma}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}},\frac{\gamma}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}}\right)$$

Apéndice C

Transformaciones Conocidas

C.1. Relación Bernoulli-Binomial

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Ber(\theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$Y \sim Bin(n, \theta)$$

C.2. Relación Binomial-Bernoulli

Si $x \sim Bin(1, \theta)$, entonces.

$$x \sim Ber(\theta)$$

C.3. Relación Binomial-Binomial

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Bin(n_i, \theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$Y \sim Bin\left(\sum_{i=1}^{n} n_i \, , \theta\right)$$

C.4. Relación Geométrica-Binomial Negativa

Sea $(x_1\, , x_2\, , \dots , x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Geo(\theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$Y \sim BN(n, \theta)$$

C.5. Relación Binomial Negativa-Geométrica

Si $x \sim BN(1, \theta)$, entonces.

$$x \sim Geo(\theta)$$

C.6. Relación Geométrica-Geométrica

Sea $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Geo(\theta_i)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = x_{(1)} = Min\{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$$

Entonces.

$$Y \sim Geo\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\theta_i)\right)$$

C.7. Relación Exponencial-Geométrica

Sea $x \sim exp(\theta)$, y sea.

$$Y = \lfloor x \rfloor$$

Donde $\lfloor x \rfloor$ es la función piso definida de tal manera:

$$\lfloor x \rfloor = Max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

Entonces.

$$Y \sim Geo\left(1 - e^{-\theta}\right)$$

C.8. Relación Hipergeométrica-Bernoulli

Si $x \sim HG(N, M, 1)$, entonces.

$$x \sim Ber\left(\frac{M}{N}\right)$$

C.9. Relación Beta-Beta

Sea $x \sim Bet(\alpha, \beta)$, y sea.

$$Y = 1 - x$$

Entonces.

$$Y \sim Bet(\beta, \alpha)$$

C.10. Relación Beta-F

Sea $x \sim Bet\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$, y sea.

$$Y = \frac{\beta x}{\alpha(1 - x)}$$

Entonces.

$$Y \sim F(\alpha, \beta)$$

C.11. Relación Beta-Exponencial

Sea $x \sim Bet(\alpha, 1)$, y sea.

$$Y = -ln(x)$$

Entonces.

$$Y \sim exp(\alpha)$$

C.12. Relación Beta-Uniforme

Si $x \sim Bet(1,1)$, entonces.

$$x \sim Unif(0,1)$$

C.13. Relación Gamma-Beta

Sea (x_1 , x_2) variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim \Gamma(\alpha_i, \theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

Entonces.

$$Y \sim Bet(\alpha_1, \alpha_2)$$

C.14. Relación Chi Cuadrada-Beta

Sea (x_1, x_2) variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim \chi^2(\theta_i)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

Entonces.

$$Y \sim Bet\left(\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2}\right)$$

C.15. Relación Uniforme-Beta

Sea $x \sim Unif(0,1)$, $\alpha > 0$ y sea.

$$Y = x^{\frac{1}{\alpha}}$$

Entonces.

$$Y \sim Bet(\alpha, 1)$$

C.16. Relación Cauchy-t Student

Si $x \sim Cauch(0,1)$, entonces.

$$x \sim t(1)$$

C.17. Relación Cauchy-t Student no estandarizada

Si $x \sim Cauch(\theta, \sigma)$, entonces.

$$x \sim t(1, \theta, \sigma^2)$$

C.18. Relación Normal-Cauchy

Sea (x_1 , x_2) variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim N(0,1)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \frac{x_1}{x_2}$$

Entonces.

$$Y \sim Cauch(0,1)$$

C.19. Relación Uniforme-Cauchy

Sea $x \sim Unif(0,1)$, y sea.

$$Y = tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Entonces.

$$Y \sim Cauch(0,1)$$

C.20. Relación Chi Cuadrada-Gamma

Si $x \sim \chi^2(\theta)$, entonces.

$$x \sim \Gamma\left(\frac{\theta}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

C.21. Relación Chi Cuadrada-Exponencial

Si $x \sim \chi^2(2)$, entonces.

$$x \sim exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

C.22. Relación Chi Cuadrada-Chi Cuadrada Inversa Escalada

Sea $x \sim \chi^2(\theta)$, y sea.

$$Y = \frac{1}{x}$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^{2^{-1}} esc(\theta, 1)$$

C.23. Relación Chi Cuadrada-Chi Cuadrada Inversa

Sea $x \sim \chi^2(\theta)$, y sea.

$$Y = \frac{1}{x}$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^{2^{-1}}(\theta)$$

C.24. Relación Uniforme-Chi Cuadrada

Sea $x \sim Unif(0,1)$, y sea.

$$Y = -2ln(x)$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^2(2)$$

C.25. Relación Doble Exponencial-Chi Cuadrada

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim DobExp(\theta, \sigma)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{2|x_i - \theta|}{\sigma}$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^2(2n)$$

C.26. Relación Normal-Chi Cuadrada I

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^2(n-1)$$

C.27. Relación Doble Exponencial-Doble Exponencial

Sea $x \sim DobExp(\theta, \sigma)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y sea.

$$Y = \alpha x + \beta$$

Entonces.

$$Y \sim DobExp(\alpha\theta + \beta, \alpha\sigma)$$

C.28. Relación Doble Exponencial-Exponencial

Sea $x \sim DobExp(\theta, \sigma)$, y sea.

$$Y = |x - \theta|$$

Entonces.

$$Y \sim exp\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

C.29. Relación Exponencial-Doble Exponencial I

Sea (x_1, x_2) variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim exp(\theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = x_1 - x_2$$

Entonces.

$$Y \sim DobExp\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$$

C.30. Relación Normal-Doble Exponencial

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_4)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim N(0,1)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = x_1 x_2 - x_3 x_4$$

Entonces.

$$Y \sim DobExp(0,1)$$

C.31. Relación Doble Exponencial-F

Sea $(x_1\ , x_2)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim DobExp(\theta, \sigma)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \frac{|x_1 - \theta|}{|x_2 - \theta|}$$

Entonces.

$$Y \sim F(2,2)$$

C.32. Relación Uniforme-Doble Exponencial

Sea $(x_1\ , x_2)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Unif(0,1)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Entonces.

$$Y \sim DobExp(0,1)$$

C.33. Relación Exponencial, Bernoulli-Doble Exponencial

Sea $(x_1\ , x_2)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_1 \sim exp(\theta)$, $x_2 \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ y sea.

$$Y = x_1(2x_2 - 1)$$

Entonces.

$$Y \sim DobExp\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$$

C.34. Relación Exponencial-Doble Exponencial II

Sea $(x_1\ , x_2)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim exp(\theta_i)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2$$

Entonces.

$$Y \sim DobExp(0,1)$$

C.35. Relación Exponencial, Normal-Doble Exponencial

Sea $(x_1\ , x_2)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_1 \sim exp(1)$, $x_2 \sim N(0,1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y sea.

$$Y = \theta + \sigma\sqrt{2x_1}x_2$$

Entonces.

$$Y \sim DobExp(\theta, \sigma)$$

C.36. Relación Exponencial-Exponencial I

Sea $x \sim exp(\theta)$, $\alpha > 0$ y sea.

$$Y = \alpha x$$

Entonces.

$$Y \sim exp\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)$$

C.37. Relación Exponencial-Exponencial II

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim exp(\theta_i)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = x_{(1)} = Min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Entonces.

$$Y \sim exp\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right)$$

C.38. Relación Exponencial-Gamma

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim exp(\theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$Y \sim \Gamma(n, \theta)$$

C.39. Relación Exponencial-Logística I

Sea $x \sim exp(1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y sea.

$$Y = \theta - \sigma ln\left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right)$$

Entonces.

$$Y \sim Logis(\theta, \sigma)$$

C.40. Relación Exponencial-Logística II

Sea (x_1, x_2) variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim exp(1)$ $\forall i$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y sea.

$$Y = \theta - \sigma ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Entonces.

$$Y \sim Logis(\theta, \sigma)$$

C.41. Relación Exponencial-Pareto

Sea $x \sim exp(\theta)$, $\alpha > 0$ y sea.

$$Y = \alpha e^x$$

Entonces.

$$Y \sim Par(\alpha, \theta)$$

C.42. Relación Pareto-Exponencial

Sea $x \sim Par(1, \theta)$, y sea.

$$Y = ln(x)$$

Entonces.

$$Y \sim exp(\theta)$$

C.43. Relación Exponencial-Beta

Sea $x \sim exp(\theta)$, y sea.

$$Y = e^{-x}$$

Entonces.

$$Y \sim Bet(\theta, 1)$$

C.44. Relación Exponencial-Weibull

Sea $x \sim exp(\theta)$, entonces

$$x \sim W(\theta, 1)$$

C.45. Relación Exponencial, Gamma-Pareto

Sea $(x_1\ , x_2)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_1 \sim exp(\theta)$, $x_2 \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$ y sea.

$$Y = \frac{x_1}{x_2} + 1$$

Entonces.

$$Y \sim Par(1, n)$$

C.46. Relación Chi Cuadrada-F

Sea (x_1, x_2) variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim \chi^2(\theta_i)\ \forall i$, y sea.

$$Y = \frac{\left(\frac{x_1}{\theta_1}\right)}{\left(\frac{x_2}{\theta_2}\right)}$$

Entonces.

$$Y \sim F(\theta_1, \theta_2)$$

C.47. Relación Gamma-F

Sea (x_1, x_2) variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta_i)\ \forall i$, y sea.

$$Y = \frac{\alpha_2 \beta_1 x_1}{\alpha_1 \beta_2 x_2}$$

Entonces.

$$Y \sim F(2\alpha_1, 2\alpha_2)$$

C.48. Relación F-Beta

Sea $x \sim F(v_1, v_2)$, y sea.

$$Y = \frac{v_1\left(\frac{x}{v_2}\right)}{1 + v_1\left(\frac{x}{v_2}\right)}$$

Entonces.

$$Y \sim Bet\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)$$

C.49. Relación F-F

Sea $x \sim F(v_1, v_2)$, y sea.

$$Y = \frac{1}{x}$$

Entonces.

$$Y \sim F(v_2, v_1)$$

C.50. Relación t Student-F

Sea $x \sim t(\theta)$, y sea.

$$Y = x^2$$

Entonces.

$$Y \sim F(1, \theta)$$

C.51. Relación Gamma-Gamma Inversa

Sea $x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, y sea.

$$Y = \frac{1}{x}$$

Entonces.

$$Y \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$$

C.52. Relación Logística-Logística

Sea $x \sim Logis(\theta, \sigma)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ y sea.

$$Y = \alpha + \beta x$$

Entonces.

$$Y \sim Logis(\alpha + \beta\theta, \beta\sigma)$$

C.53. Relación Uniforme-Logística

Sea $x \sim Unif(0,1)$, $\theta \epsilon \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y sea.

$$Y = \theta + \sigma(ln(x) - ln(1 - x))$$

Entonces.

$$Y \sim Logis(\theta, \sigma)$$

C.54. Relación Normal-Lognormal

Sea $x \sim N(\theta, \sigma^2)$, y sea.

$$Y = e^x$$

Entonces.

$$Y \sim LnN(\theta, \sigma^2)$$

C.55. Relación Lognormal-Normal

Sea $x \sim LnN(\theta, \sigma^2)$, y sea.

$$Y = ln(x)$$

Entonces.

$$Y \sim N(\theta, \sigma^2)$$

C.56. Relación Lognormal-Lognormal I

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim LnN(\theta_i, {\sigma_i}^2)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$Y \sim LnN\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i, \sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2\right)$$

C.57. Relación Lognormal-Lognormal II

Sea $x \sim LnN(\theta, \sigma^2)$, $\alpha > 0$ y sea.

$$Y = \alpha x$$

Entonces.

$$Y \sim LnN(\theta + ln(\alpha), \sigma^2)$$

C.58. Relación Lognormal-Lognormal III

Sea $x \sim LnN(\theta, \sigma^2)$, y sea.

$$Y = \frac{1}{x}$$

Entonces.

$$Y \sim LnN(-\theta, \sigma^2)$$

C.59. Relación Lognormal-Lognormal IV

Sea $x \sim LnN(\theta, \sigma^2)$, $\alpha \neq 0$ y sea.

$$Y = x^{\alpha}$$

Entonces.

$$Y \sim LnN(\alpha\theta, \alpha^2\sigma^2)$$

C.60. Relación Normal-Normal I

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim N(\theta_i, {\sigma_i}^2)$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\ \forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta_i x_i$$

Entonces.

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta_i \theta_i, \sum_{i=1}^{n} {\beta_i}^2 {\sigma_i}^2\right)$$

C.61. Relación Normal-Chi Cuadrada II

Sea $x \sim N(0,1)$, y sea.

$$Y = x^2$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^2(1)$$

C.62. Relación Chi Cuadrada-Chi Cuadrada

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_i \sim \chi^2(\theta_i)\ \forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right)$$

C.63. Relación Normal-Chi Cuadrada III

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2$$

Donde.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^2(n-1)$$

C.64. Relación Normal-Normal II

Sea $x \sim N(\theta, \sigma^2)$, y sea.

$$Y = \frac{x-\theta}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{x-\theta}{\sigma}$$

Entonces.

$$Y \sim N(0,1)$$

C.65. Relación Normal, Chi Cuadrada-t Student

Sea (x_1, x_2) variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_1 \sim N(0,1)$, $x_2 \sim \chi^2(\theta)$ y sea.

$$Y = \frac{x_1}{\sqrt{\frac{x_2}{\theta}}}$$

Entonces.

$$Y \sim t(\theta)$$

C.66. Relación Normal, Chi Cuadrada-t Student no estandarizada

Sea (x_1, x_2) variables aleatorias independientes $(v.a.i.)$ donde $x_1 \sim N(0,1)$, $x_2 \sim \chi^2(\theta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea.

$$Y = \frac{x_1 + \alpha}{\sqrt{\frac{x_2}{\theta}}}$$

Entonces.

$$Y \sim t(\theta, \alpha, 1)$$

C.67. Relación t Student-t Student no estandarizada

Sea $x \sim t(\theta)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y sea.

$$Y = \mu + \sigma x$$

Entonces.

$$Y \sim t(\theta, \mu, \sigma^2)$$

C.68. Relación t Student no estandarizada-t Student

Sea $x \sim t(\theta, \mu, \sigma^2)$, y sea.

$$Y = \frac{x - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Entonces.

$$Y \sim t(\theta)$$

C.69. Relación Uniforme-Exponencial

Sea $x \sim Unif(0,1)$, $\theta > 0$ y sea.

$$Y = -\frac{1}{\theta} ln(x)$$

Entonces.

$$Y \sim exp(\theta)$$

C.70. Relación Uniforme-Triangular

Sea $(x_1\ , x_2)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Unif(\theta, \theta + 1)\ \forall i$, y sea.

$$Y = x_1 + x_2$$

Entonces.

$$Y \sim Trian(2\theta, 2\theta + 2{,}2\theta + 1)$$

C.71. Relación Uniforme-Weibull

Sea $x \sim Unif(0{,}1)$, $\alpha, \beta > 0$ y sea.

$$Y = \alpha(-ln(x))^{\beta}$$

Entonces.

$$Y \sim W(\alpha, \beta)$$

C.72. Relación Gamma-Gamma

Sea $x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $\delta > 0$ y sea.

$$Y = \delta x$$

Entonces.

$$Y\sim\Gamma\left(\alpha,\frac{\beta}{\delta}\right)$$

C.73. Relación Gamma Inversa-Gamma Inversa

Sea $x\sim\Gamma^{-1}(\alpha,\beta)$, $\delta>0$ y sea.

$$Y=\delta x$$

Entonces.

$$Y\sim\Gamma^{-1}(\alpha,\delta\beta)$$

C.74. Relación Gamma Inversa-Chi Cuadrada Inversa

Sea $x\sim\Gamma^{-1}\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)$, entonces

$$x\sim\chi^{2^{-1}}(2\alpha)$$

C.75. Relación Gamma Inversa-Chi Cuadrada Inversa Escalada

Sea $x\sim\Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right)$, entonces

$$x\sim\chi^{2^{-1}}esc\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$$

C.76. Relación Chi Cuadrada Inversa Escalada-Chi Cuadrada Inversa I

Sea $x \sim \chi^{2^{-1}} esc\left(\theta, \frac{1}{\theta}\right)$, entonces

$$x \sim \chi^{2^{-1}}(\theta)$$

C.77. Relación Chi Cuadrada Inversa Escalada-Gamma Inversa

Sea $x \sim \chi^{2^{-1}} esc(\theta, \sigma^2)$, entonces

$$x \sim \Gamma^{-1}\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta\sigma^2}{2}\right)$$

C.78. Relación Chi Cuadrada Inversa Escalada-Chi Cuadrada Inversa II

Sea $x \sim \chi^{2^{-1}} esc(\theta, \sigma^2)$, y sea.

$$Y = \frac{x}{\theta\sigma^2}$$

Entonces.

$$Y \sim \chi^{2^{-1}}(\theta)$$

C.79. Relación Gamma Inversa-Gamma Inversa

Sea $x \sim {\chi^2}^{-1} esc(\theta, \sigma^2)$, $\delta > 0$ y sea.

$$Y = \delta x$$

Entonces.

$$Y \sim {\chi^2}^{-1} esc(\theta, \delta\sigma^2)$$

C.80. Relación Máximo Muestral

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim f(x_i | \theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = x_{(n)} = Max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Entonces.

$$f_y(y | \theta) = n\big(F_x(y | \theta)\big)^{n-1} f_x(y | \theta)$$

Con.

$$F_x(y | \theta) = \int_{-\infty}^{y} f_x(x | \theta) dx$$

C.81. Relación Mínimo Muestral

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim f(x_i|\,\theta)\ \forall i$, y sea.

$$Y = x_{(1)} = Min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Entonces.

$$f_y(y|\,\theta) = n\big(1 - F_x(y|\,\theta)\big)^{n-1} f_x(y|\,\theta)$$

Con.

$$F_x(y|\,\theta) = \int_{-\infty}^{y} f_x(x|\,\theta)dx$$

C.82. Teorema del Limite Central

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim f(x_i|\,\theta)\ \forall i$, con una media constante θ y una varianza estricta positiva, conocida y finita σ^2. Y sea.

$$Y = \frac{\bar{x} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta}{\sigma\sqrt{n}}$$

Entonces cuando n es lo “suficientemente” grande o tiende al infinito.

$$Y \sim N(0,1)$$

C.83. Relación Poisson-Poisson

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(v.a.i.i.d.)$ donde $x_i \sim Poi(\theta)$ $\forall i$, y sea.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Entonces.

$$Y \sim Poi(n\theta)$$

Apéndice D

Tablas de Probabilidad Acumulada

D.1. Tabla Binomial $(5, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.951	0.774	0.590	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.999	0.977	0.919	0.737	0.633	0.528	0.337	0.188	0.087	0.031	0.016	0.007	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.999	0.991	0.942	0.896	0.837	0.683	0.500	0.317	0.163	0.104	0.058	0.009	0.001	0.000
3	1.000	1.000	1.000	0.993	0.984	0.969	0.913	0.813	0.663	0.472	0.367	0.263	0.081	0.023	0.001
4	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.990	0.969	0.922	0.832	0.763	0.672	0.410	0.226	0.049
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.1.

D.2. Tabla Binomial $(6, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.941	0.735	0.531	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.999	0.967	0.886	0.655	0.534	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.998	0.984	0.901	0.831	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.038	0.017	0.001	0.000	0.000
3	1.000	1.000	0.999	0.983	0.962	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.169	0.099	0.016	0.002	0.000
4	1.000	1.000	1.000	0.998	0.995	0.989	0.959	0.891	0.767	0.580	0.466	0.345	0.114	0.033	0.001
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.984	0.953	0.882	0.822	0.738	0.469	0.265	0.059
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.2.

D.3. Tabla Binomial $(7, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.932	0.698	0.478	0.210	0.133	0.082	0.028	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.998	0.956	0.850	0.577	0.445	0.329	0.159	0.063	0.019	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.996	0.974	0.852	0.756	0.647	0.420	0.227	0.096	0.029	0.013	0.005	0.000	0.000	0.000
3	1.000	1.000	0.997	0.967	0.929	0.874	0.710	0.500	0.290	0.126	0.071	0.033	0.003	0.000	0.000
4	1.000	1.000	1.000	0.995	0.987	0.971	0.904	0.773	0.580	0.353	0.244	0.148	0.026	0.004	0.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.981	0.938	0.841	0.671	0.555	0.423	0.150	0.044	0.002
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.972	0.918	0.867	0.790	0.522	0.302	0.068
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.3.

D.4. Tabla Binomial $(8, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.923	0.663	0.430	0.168	0.100	0.058	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.997	0.943	0.813	0.503	0.367	0.255	0.106	0.035	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.994	0.962	0.797	0.679	0.552	0.315	0.145	0.050	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
3	1.000	1.000	0.995	0.944	0.886	0.806	0.594	0.363	0.174	0.058	0.027	0.010	0.000	0.000	0.000
4	1.000	1.000	1.000	0.990	0.973	0.942	0.826	0.637	0.406	0.194	0.114	0.056	0.005	0.000	0.000
5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.950	0.855	0.685	0.448	0.321	0.203	0.038	0.006	0.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.965	0.894	0.745	0.633	0.497	0.187	0.057	0.003
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.942	0.900	0.832	0.570	0.337	0.077
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.4.

D.5. Tabla Binomial $(9, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.914	0.630	0.387	0.134	0.075	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.997	0.929	0.775	0.436	0.300	0.196	0.071	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.992	0.947	0.738	0.601	0.463	0.232	0.090	0.025	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.999	0.992	0.914	0.834	0.730	0.483	0.254	0.099	0.025	0.010	0.003	0.000	0.000	0.000
4	1.000	1.000	0.999	0.980	0.951	0.901	0.733	0.500	0.267	0.099	0.049	0.020	0.001	0.000	0.000
5	1.000	1.000	1.000	0.997	0.990	0.975	0.901	0.746	0.517	0.270	0.166	0.086	0.008	0.001	0.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.975	0.910	0.768	0.537	0.399	0.262	0.053	0.008	0.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.929	0.804	0.700	0.564	0.225	0.071	0.003
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.960	0.925	0.866	0.613	0.370	0.086
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.5.

D.6. Tabla Binomial $(10, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.904	0.599	0.349	0.107	0.056	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.996	0.914	0.736	0.376	0.244	0.149	0.046	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.988	0.930	0.678	0.526	0.383	0.167	0.055	0.012	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.999	0.987	0.879	0.776	0.650	0.382	0.172	0.055	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
4	1.000	1.000	0.998	0.967	0.922	0.850	0.633	0.377	0.166	0.047	0.020	0.006	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	1.000	0.994	0.980	0.953	0.834	0.623	0.367	0.150	0.078	0.033	0.002	0.000	0.000
6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.224	0.121	0.013	0.001	0.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.988	0.945	0.833	0.617	0.474	0.322	0.070	0.012	0.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.954	0.851	0.756	0.624	0.264	0.086	0.004
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.972	0.944	0.893	0.651	0.401	0.096
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.6.

D.7. Tabla Binomial $(11, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.895	0.569	0.314	0.086	0.042	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.995	0.898	0.697	0.322	0.197	0.113	0.030	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.985	0.910	0.617	0.455	0.313	0.119	0.033	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.998	0.981	0.839	0.713	0.570	0.296	0.113	0.029	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	1.000	0.997	0.950	0.885	0.790	0.533	0.274	0.099	0.022	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	1.000	0.988	0.966	0.922	0.753	0.500	0.247	0.078	0.034	0.012	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.978	0.901	0.726	0.467	0.210	0.115	0.050	0.003	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.971	0.887	0.704	0.430	0.287	0.161	0.019	0.002	0.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.967	0.881	0.687	0.545	0.383	0.090	0.015	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.970	0.887	0.803	0.678	0.303	0.102	0.005
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.958	0.914	0.686	0.431	0.105
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.7.

D.8. Tabla Binomial $(12, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.886	0.540	0.282	0.069	0.032	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.994	0.882	0.659	0.275	0.158	0.085	0.020	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.980	0.889	0.558	0.391	0.253	0.083	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.998	0.974	0.795	0.649	0.493	0.225	0.073	0.015	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	1.000	0.996	0.927	0.842	0.724	0.438	0.194	0.057	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.999	0.981	0.946	0.882	0.665	0.387	0.158	0.039	0.014	0.004	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	1.000	0.996	0.986	0.961	0.842	0.613	0.335	0.118	0.054	0.019	0.001	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.991	0.943	0.806	0.562	0.276	0.158	0.073	0.004	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.985	0.927	0.775	0.507	0.351	0.205	0.026	0.002	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.981	0.917	0.747	0.609	0.442	0.111	0.020	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.980	0.915	0.842	0.725	0.341	0.118	0.006
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.986	0.968	0.931	0.718	0.460	0.114
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.8.

D.9. Tabla Binomial $(13, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.878	0.513	0.254	0.055	0.024	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.993	0.865	0.621	0.234	0.127	0.064	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.975	0.866	0.502	0.333	0.202	0.058	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.997	0.966	0.747	0.584	0.421	0.169	0.046	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	1.000	0.994	0.901	0.794	0.654	0.353	0.133	0.032	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.999	0.970	0.920	0.835	0.574	0.291	0.098	0.018	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	1.000	0.993	0.976	0.938	0.771	0.500	0.229	0.062	0.024	0.007	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.982	0.902	0.709	0.426	0.165	0.080	0.030	0.001	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.968	0.867	0.647	0.346	0.206	0.099	0.006	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.954	0.831	0.579	0.416	0.253	0.034	0.003	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.942	0.798	0.667	0.498	0.134	0.025	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.987	0.936	0.873	0.766	0.379	0.135	0.007
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.976	0.945	0.746	0.487	0.122
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.9.

D.10. Tabla Binomial $(14, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.869	0.488	0.229	0.044	0.018	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.992	0.847	0.585	0.198	0.101	0.047	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.970	0.842	0.448	0.281	0.161	0.040	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.996	0.956	0.698	0.521	0.355	0.124	0.029	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	1.000	0.991	0.870	0.742	0.584	0.279	0.090	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.999	0.956	0.888	0.781	0.486	0.212	0.058	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	1.000	0.988	0.962	0.907	0.692	0.395	0.150	0.031	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.969	0.850	0.605	0.308	0.093	0.038	0.012	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.942	0.788	0.514	0.219	0.112	0.044	0.001	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.910	0.721	0.416	0.258	0.130	0.009	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.971	0.876	0.645	0.479	0.302	0.044	0.004	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.960	0.839	0.719	0.552	0.158	0.030	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.953	0.899	0.802	0.415	0.153	0.008
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.982	0.956	0.771	0.512	0.131
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.10.

D.11. Tabla Binomial $(15, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.860	0.463	0.206	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.990	0.829	0.549	0.167	0.080	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.964	0.816	0.398	0.236	0.127	0.027	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.995	0.944	0.648	0.461	0.297	0.091	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.999	0.987	0.836	0.686	0.515	0.217	0.059	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.998	0.939	0.852	0.722	0.403	0.151	0.034	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	1.000	0.982	0.943	0.869	0.610	0.304	0.095	0.015	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.996	0.983	0.950	0.787	0.500	0.213	0.050	0.017	0.004	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.985	0.905	0.696	0.390	0.131	0.057	0.018	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.966	0.849	0.597	0.278	0.148	0.061	0.002	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.941	0.783	0.485	0.314	0.164	0.013	0.001	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.909	0.703	0.539	0.352	0.056	0.005	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.973	0.873	0.764	0.602	0.184	0.036	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.965	0.920	0.833	0.451	0.171	0.010
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.987	0.965	0.794	0.537	0.140
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.11.

D.12. Tabla Binomial $(16, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.851	0.440	0.185	0.028	0.010	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.989	0.811	0.515	0.141	0.063	0.026	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.999	0.957	0.789	0.352	0.197	0.099	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.993	0.932	0.598	0.405	0.246	0.065	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.999	0.983	0.798	0.630	0.450	0.167	0.038	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.997	0.918	0.810	0.660	0.329	0.105	0.019	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.999	0.973	0.920	0.825	0.527	0.227	0.058	0.007	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.993	0.973	0.926	0.716	0.402	0.142	0.026	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.974	0.858	0.598	0.284	0.074	0.027	0.007	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.993	0.942	0.773	0.473	0.175	0.080	0.027	0.001	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.981	0.895	0.671	0.340	0.190	0.082	0.003	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.962	0.833	0.550	0.370	0.202	0.017	0.001	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.935	0.754	0.595	0.402	0.068	0.007	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.901	0.803	0.648	0.211	0.043	0.001
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.974	0.937	0.859	0.485	0.189	0.011
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.990	0.972	0.815	0.560	0.149
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.12.

D.13. Tabla Binomial $(17, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.843	0.418	0.167	0.023	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.988	0.792	0.482	0.118	0.050	0.019	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.999	0.950	0.762	0.310	0.164	0.077	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.991	0.917	0.549	0.353	0.202	0.046	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.999	0.978	0.758	0.574	0.389	0.126	0.025	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.995	0.894	0.765	0.597	0.264	0.072	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.999	0.962	0.893	0.775	0.448	0.166	0.035	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.989	0.960	0.895	0.641	0.315	0.092	0.013	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.997	0.988	0.960	0.801	0.500	0.199	0.040	0.012	0.003	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.987	0.908	0.685	0.359	0.105	0.040	0.011	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.965	0.834	0.552	0.225	0.107	0.038	0.001	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.928	0.736	0.403	0.235	0.106	0.005	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.975	0.874	0.611	0.426	0.242	0.022	0.001	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.954	0.798	0.647	0.451	0.083	0.009	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.923	0.836	0.690	0.238	0.050	0.001
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.981	0.950	0.882	0.518	0.208	0.012
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.977	0.833	0.582	0.157
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.13.

D.14. Tabla Binomial $(18, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.835	0.397	0.150	0.018	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.986	0.774	0.450	0.099	0.039	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.999	0.942	0.734	0.271	0.135	0.060	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.989	0.902	0.501	0.306	0.165	0.033	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.998	0.972	0.716	0.519	0.333	0.094	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.994	0.867	0.717	0.534	0.209	0.048	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.999	0.949	0.861	0.722	0.374	0.119	0.020	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.984	0.943	0.859	0.563	0.240	0.058	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.996	0.981	0.940	0.737	0.407	0.135	0.021	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.979	0.865	0.593	0.263	0.060	0.019	0.004	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.942	0.760	0.437	0.141	0.057	0.016	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.980	0.881	0.626	0.278	0.139	0.051	0.001	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.952	0.791	0.466	0.283	0.133	0.006	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.985	0.906	0.667	0.481	0.284	0.028	0.002	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.967	0.835	0.694	0.499	0.098	0.011	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.940	0.865	0.729	0.266	0.058	0.001
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.986	0.961	0.901	0.550	0.226	0.014
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.982	0.850	0.603	0.165
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.14.

D.15. Tabla Binomial $(19, \theta)$

	θ														
X	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.826	0.377	0.135	0.014	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.985	0.755	0.420	0.083	0.031	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.999	0.933	0.705	0.237	0.111	0.046	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.987	0.885	0.455	0.263	0.133	0.023	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.998	0.965	0.673	0.465	0.282	0.070	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.991	0.837	0.668	0.474	0.163	0.032	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.998	0.932	0.825	0.666	0.308	0.084	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.977	0.923	0.818	0.488	0.180	0.035	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.993	0.971	0.916	0.667	0.324	0.088	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.998	0.991	0.967	0.814	0.500	0.186	0.033	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.912	0.676	0.333	0.084	0.029	0.007	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.965	0.820	0.512	0.182	0.077	0.023	0.000	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.916	0.692	0.334	0.175	0.068	0.002	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.968	0.837	0.526	0.332	0.163	0.009	0.000	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.930	0.718	0.535	0.327	0.035	0.002	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.977	0.867	0.737	0.545	0.115	0.013	0.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.954	0.889	0.763	0.295	0.067	0.001
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.969	0.917	0.580	0.245	0.015
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.986	0.865	0.623	0.174
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.15.

D.16. Tabla Binomial $(20, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.818	0.358	0.122	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.983	0.736	0.392	0.069	0.024	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.999	0.925	0.677	0.206	0.091	0.035	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.984	0.867	0.411	0.225	0.107	0.016	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.997	0.957	0.630	0.415	0.238	0.051	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.989	0.804	0.617	0.416	0.126	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.998	0.913	0.786	0.608	0.250	0.058	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	1.000	0.968	0.898	0.772	0.416	0.132	0.021	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.990	0.959	0.887	0.596	0.252	0.057	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.997	0.986	0.952	0.755	0.412	0.128	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.872	0.588	0.245	0.048	0.014	0.003	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.943	0.748	0.404	0.113	0.041	0.010	0.000	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.979	0.868	0.584	0.228	0.102	0.032	0.000	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.942	0.750	0.392	0.214	0.087	0.002	0.000	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.979	0.874	0.584	0.383	0.196	0.011	0.000	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.949	0.762	0.585	0.370	0.043	0.003	0.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.984	0.893	0.775	0.589	0.133	0.016	0.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.965	0.909	0.794	0.323	0.075	0.001
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.976	0.931	0.608	0.264	0.017
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.988	0.878	0.642	0.182
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.16.

D.17. Tabla Binomial $(21, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.810	0.341	0.109	0.009	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.981	0.717	0.365	0.058	0.019	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.999	0.915	0.648	0.179	0.075	0.027	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.981	0.848	0.370	0.192	0.086	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.997	0.948	0.586	0.367	0.198	0.037	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	0.986	0.769	0.567	0.363	0.096	0.013	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.997	0.891	0.744	0.551	0.200	0.039	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	0.999	0.957	0.870	0.723	0.350	0.095	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.986	0.944	0.852	0.524	0.192	0.035	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.996	0.979	0.932	0.691	0.332	0.085	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.974	0.826	0.500	0.174	0.026	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.991	0.915	0.668	0.309	0.068	0.021	0.004	0.000	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.965	0.808	0.476	0.148	0.056	0.014	0.000	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.905	0.650	0.277	0.130	0.043	0.001	0.000	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.961	0.800	0.449	0.256	0.109	0.003	0.000	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.987	0.904	0.637	0.433	0.231	0.014	0.000	0.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.963	0.802	0.633	0.414	0.052	0.003	0.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.914	0.808	0.630	0.152	0.019	0.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.973	0.925	0.821	0.352	0.085	0.001
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.981	0.942	0.635	0.283	0.019
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.991	0.891	0.659	0.190
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.17.

D.18. Tabla Binomial $(22, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.802	0.324	0.098	0.007	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.980	0.698	0.339	0.048	0.015	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.999	0.905	0.620	0.154	0.061	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.978	0.828	0.332	0.162	0.068	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.996	0.938	0.543	0.323	0.165	0.027	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	0.999	0.982	0.733	0.517	0.313	0.072	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.996	0.867	0.699	0.494	0.158	0.026	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	0.999	0.944	0.838	0.671	0.290	0.067	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.980	0.925	0.814	0.454	0.143	0.021	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.994	0.970	0.908	0.624	0.262	0.055	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.961	0.772	0.416	0.121	0.014	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.986	0.879	0.584	0.228	0.039	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.945	0.738	0.376	0.092	0.030	0.006	0.000	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.979	0.857	0.546	0.186	0.075	0.020	0.000	0.000	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.993	0.933	0.710	0.329	0.162	0.056	0.001	0.000	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.974	0.842	0.506	0.301	0.133	0.004	0.000	0.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992	0.928	0.687	0.483	0.267	0.018	0.001	0.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.973	0.835	0.677	0.457	0.062	0.004	0.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992	0.932	0.838	0.668	0.172	0.022	0.000
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.979	0.939	0.846	0.380	0.095	0.001
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.985	0.952	0.661	0.302	0.020
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.993	0.902	0.676	0.198
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.18.

D.19. Tabla Binomial $(23, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.794	0.307	0.089	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.978	0.679	0.315	0.040	0.012	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.998	0.895	0.592	0.133	0.049	0.016	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.974	0.807	0.297	0.137	0.054	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.995	0.927	0.501	0.283	0.136	0.019	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	0.999	0.977	0.695	0.468	0.269	0.054	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.994	0.840	0.654	0.440	0.124	0.017	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	0.999	0.928	0.804	0.618	0.237	0.047	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.973	0.904	0.771	0.388	0.105	0.013	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.991	0.959	0.880	0.556	0.202	0.035	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	0.997	0.985	0.945	0.713	0.339	0.081	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.979	0.836	0.500	0.164	0.021	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.919	0.661	0.287	0.055	0.015	0.003	0.000	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.965	0.798	0.444	0.120	0.041	0.009	0.000	0.000	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.987	0.895	0.612	0.229	0.096	0.027	0.000	0.000	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.953	0.763	0.382	0.196	0.072	0.001	0.000	0.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.983	0.876	0.560	0.346	0.160	0.006	0.000	0.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.946	0.731	0.532	0.305	0.023	0.001	0.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.981	0.864	0.717	0.499	0.073	0.005	0.000
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.946	0.863	0.703	0.193	0.026	0.000
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.984	0.951	0.867	0.408	0.105	0.002
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.988	0.960	0.685	0.321	0.022
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.911	0.693	0.206
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.19.

D.20. Tabla Binomial $(24, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.786	0.292	0.080	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.976	0.661	0.292	0.033	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.998	0.884	0.564	0.115	0.040	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.970	0.786	0.264	0.115	0.042	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.994	0.915	0.460	0.247	0.111	0.013	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	0.999	0.972	0.656	0.422	0.229	0.040	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.993	0.811	0.607	0.389	0.096	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	0.998	0.911	0.766	0.565	0.192	0.032	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.964	0.879	0.725	0.328	0.076	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.987	0.945	0.847	0.489	0.154	0.022	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	0.996	0.979	0.926	0.650	0.271	0.053	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.969	0.787	0.419	0.114	0.012	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.988	0.886	0.581	0.213	0.031	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.947	0.729	0.350	0.074	0.021	0.004	0.000	0.000	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.978	0.846	0.511	0.153	0.055	0.013	0.000	0.000	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992	0.924	0.672	0.275	0.121	0.036	0.000	0.000	0.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.968	0.808	0.435	0.234	0.089	0.002	0.000	0.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.904	0.611	0.393	0.189	0.007	0.000	0.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.960	0.771	0.578	0.344	0.028	0.001	0.000
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.987	0.889	0.753	0.540	0.085	0.006	0.000
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.958	0.885	0.736	0.214	0.030	0.000
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.960	0.885	0.436	0.116	0.002
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.991	0.967	0.708	0.339	0.024
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.920	0.708	0.214
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.20.

D.21. Tabla Binomial $(25, \theta)$

	θ														
x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
0	0.778	0.277	0.072	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.974	0.642	0.271	0.027	0.007	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.998	0.873	0.537	0.098	0.032	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.966	0.764	0.234	0.096	0.033	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1.000	0.993	0.902	0.421	0.214	0.090	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	0.999	0.967	0.617	0.378	0.193	0.029	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.991	0.780	0.561	0.341	0.074	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1.000	1.000	0.998	0.891	0.727	0.512	0.154	0.022	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.000	1.000	1.000	0.953	0.851	0.677	0.274	0.054	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1.000	1.000	1.000	0.983	0.929	0.811	0.425	0.115	0.013	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	0.994	0.970	0.902	0.586	0.212	0.034	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.956	0.732	0.345	0.078	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.983	0.846	0.500	0.154	0.017	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.922	0.655	0.268	0.044	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.966	0.788	0.414	0.098	0.030	0.006	0.000	0.000	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.987	0.885	0.575	0.189	0.071	0.017	0.000	0.000	0.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.946	0.726	0.323	0.149	0.047	0.000	0.000	0.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.978	0.846	0.488	0.273	0.109	0.002	0.000	0.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.993	0.926	0.659	0.439	0.220	0.009	0.000	0.000
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.971	0.807	0.622	0.383	0.033	0.001	0.000
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.910	0.786	0.579	0.098	0.007	0.000
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.967	0.904	0.766	0.236	0.034	0.000
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.968	0.902	0.463	0.127	0.002
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.993	0.973	0.729	0.358	0.026
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.928	0.723	0.222
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.21.

D.22. Tabla Poisson (θ) con $0 < \theta \leq 1$

	Θ									
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.22.

D.23. Tabla Poisson (θ) con $\theta > 1$

	Θ											
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
0	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.406	0.199	0.092	0.040	0.017	0.007	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.677	0.423	0.238	0.125	0.062	0.030	0.014	0.006	0.003	0.001	0.000	0.000
3	0.857	0.647	0.433	0.265	0.151	0.082	0.042	0.021	0.010	0.002	0.000	0.000
4	0.947	0.815	0.629	0.440	0.285	0.173	0.100	0.055	0.029	0.008	0.001	0.000
5	0.983	0.916	0.785	0.616	0.446	0.301	0.191	0.116	0.067	0.020	0.003	0.000
6	0.995	0.966	0.889	0.762	0.606	0.450	0.313	0.207	0.130	0.046	0.008	0.000
7	0.999	0.988	0.949	0.867	0.744	0.599	0.453	0.324	0.220	0.090	0.018	0.001
8	1.000	0.996	0.979	0.932	0.847	0.729	0.593	0.456	0.333	0.155	0.037	0.002
9	1.000	0.999	0.992	0.968	0.916	0.830	0.717	0.587	0.458	0.242	0.070	0.005
10	1.000	1.000	0.997	0.986	0.957	0.901	0.816	0.706	0.583	0.347	0.118	0.011
11	1.000	1.000	0.999	0.995	0.980	0.947	0.888	0.803	0.697	0.462	0.185	0.021
12	1.000	1.000	1.000	0.998	0.991	0.973	0.936	0.876	0.792	0.576	0.268	0.039
13	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.987	0.966	0.926	0.864	0.682	0.363	0.066
14	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.983	0.959	0.917	0.772	0.466	0.105
15	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.992	0.978	0.951	0.844	0.568	0.157
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.973	0.899	0.664	0.221
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.995	0.986	0.937	0.749	0.297
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.993	0.963	0.819	0.381
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.979	0.875	0.470

Tabla D.23.1.

	Θ											
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.988	0.917	0.559
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.947	0.644
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.967	0.721
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.981	0.787
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.843
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.888
26	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.922
27	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.948
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.966
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.978
30	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.987
31	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992
32	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995
33	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997
34	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
35	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
36	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla D.23.2.

D.24. Tabla Normal (0,1) Negativa

x	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00
-5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

Tabla D.24.1.

x	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00
-3.6	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005
-3.2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007
-3.1	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0010
-3	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013	0.0013
-2.9	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019
-2.8	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026
-2.7	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035
-2.6	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047
-2.5	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062
-2.4	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082
-2.3	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107
-2.2	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139
-2.1	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174	0.0179
-2	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228
-1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287
-1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359
-1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446
-1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548
-1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655	0.0668
-1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808
-1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968
-1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151
-1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357
-1	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587
-0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841
-0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119
-0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420
-0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743
-0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085
-0.4	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446
-0.3	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821
-0.2	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207
-0.1	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602
-0	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000

Tabla D.24.2.

D.25. Tabla Normal (0,1) Positiva

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Tabla D.25.1.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla D.25.2.

D.26. Tabla Chi Cuadrada con θ grados de libertad

	Probabilidad Acumulada									
Θ	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013

Tabla D.26.1.

	Probabilidad Acumulada									
Θ	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989
100	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695

Tabla D.26.2.

D.27. Tabla t Student con θ grados de libertad

	Probabilidad Acumulada									
Θ	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
1	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619	3183.099
2	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599	70.700
3	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924	22.204
4	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610	13.034
5	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869	9.678
6	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959	8.025
7	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408	7.063
8	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041	6.442
9	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781	6.010
10	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587	5.694
11	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437	5.453
12	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318	5.263
13	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221	5.111
14	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140	4.985
15	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073	4.880
16	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015	4.791
17	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965	4.714
18	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922	4.648
19	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883	4.590
20	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850	4.539
21	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819	4.493
22	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792	4.452
23	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768	4.415
24	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745	4.382
25	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725	4.352
26	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707	4.324
27	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690	4.299
28	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674	4.275
29	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659	4.254
30	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646	4.234
31	0.682	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633	4.216
32	0.682	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622	4.198
33	0.682	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611	4.182
34	0.682	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601	4.167
35	0.682	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591	4.153

Tabla D.27.1.

	Probabilidad Acumulada									
θ	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
36	0.681	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582	4.140
37	0.681	0.851	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574	4.127
38	0.681	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566	4.116
39	0.681	0.851	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558	4.105
40	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551	4.094
50	0.679	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496	4.014
60	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460	3.962
70	0.678	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435	3.926
80	0.678	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416	3.899
90	0.677	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402	3.878
100	0.677	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390	3.862
125	0.676	0.845	1.288	1.657	1.979	2.357	2.616	3.157	3.370	3.832
200	0.676	0.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340	3.789
∞	0.674	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.719

Tabla D.27.2.

Tabla de Definiciones y Teoremas

Tabla de Figuras y Tablas

Referencias Bibliográficas

Casella G. Berger, R. (2002). *Statistical Inference.* Pacific Grove CA: Duxbury.

Erdely, A. (2015). Intersección y unión de pruebas de hipótesis. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=K0TuzyxKSKI

Fallas, J. (2012). *Prueba de Hipótesis, Rechazar o no Ho: he ahi el dilema.* Obtenido de http://www.ucipfg.com/Repositorio/MGAP/MGAP-05/BLOQUE-ACADEMICO/Unidad-2/complementarias/prueba_hipótesis_2012.pdf

Jiménez Gutiérrez, G. (2018). Ejercicios Prueba de Hipótesis.

Lehmann , E., & Casella, G. (1998). *Theory of point Estimation 2nd ed.* Springer.

Lehmann E.L. Romano, J. (2010). *Testing statical hypotheses.* Nueva York: Springer.

Mood A.M. Graybill, F. (1974). *Introduction to the theory of statistics* . Nueva York: McGraw-Hill.

Rincon , L. (2007). *Curso Intermedio de Probabilidad.* Mexico D.F: Facultad de Ciencias UNAM.

Rincon, L. (2018). 0398 ¿Qué es una prueba de hipótesis? Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=bBjXWspAmbA

Rincon, L. (2018). 0398 Ejemplo de prueba de hipótesis sobre la distribución Bernoulli. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=fr96C4YVTlU

Rincon, L. (2018). 0398 Ejemplos de pruebas de hipótesis sobre la distribución normal. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=MDgWCNLi8zw

Rincon, L. (Enero de 2018). 0398 Regiones de rechazo y tipos de errores. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=Qlrs2gd8JbI

Rohen, V. (2018). *Pruebas de Hipótesis.* Obtenido de http://lcolladotor.github.io/courses/Courses/MEyAdDG/day2/Pruebas%20de%20Hip%C3%B3tesis.pdf

Shao, J. (2003). *Mathematical statistics.* Nueva York: Springer.

Vera Moreno, A. (2017). Ejercicios de pruebas de hipótesis (Sin publicar).

Vera Moreno, A. (2018). *Apuntes del Curso de Estadistica II* (Sin publicar). Mexico.