



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Núcleos en digráficas infinitas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Pamela Pérez Aguirre

TUTORA

Dra. María del Rocío Sánchez López





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Pérez  
Aguirre  
Pamela  
55 16608708  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
30227579-9
2. Datos de la tutora  
Dra.  
María del Rocío  
Sánchez  
López
3. Datos de la sinodal 1  
Dra.  
Hortensia  
Galeana  
Sánchez
4. Datos de la sinodal 2  
Mat.  
Laura  
Pastrana  
Ramírez
5. Datos del sinodal 3  
Dr.  
Juan José  
Montellano  
Ballesteros
6. Datos de la sinodal 4  
Dra.  
Íngrid Chantal  
Torres  
Ramos
7. Datos del trabajo escrito  
Núcleos en digráficas infinitas  
103 p.  
2019

# Índice

---

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>Preliminares</b>	<b>9</b>
0.1 Definiciones básicas de la teoría de digráficas . . . . .	9
0.2 Subdigráficas . . . . .	11
0.3 Caminos . . . . .	11
0.4 Conexidad . . . . .	13
0.5 Tipos de digráficas . . . . .	16
0.6 Coloración . . . . .	16
0.7 Resultados básicos de la teoría de gráficas . . . . .	17
<b>1 Resultados generales en la teoría de digráficas infinitas</b>	<b>23</b>
1.1 Ciclos, digráficas fuertemente conexas y digráficas bipartitas . . . . .	23
1.2 Componentes fuertemente conexas, digráficas transitivas y digráficas pre-transitivas . . . . .	28
1.2.1 Componentes fuertemente conexas en digráficas transitivas. . . . .	32
1.2.2 Componentes fuertemente conexas terminales en digráficas sin trayectorias infinitas exteriores. . . . .	35
<b>2 Cuasinúcleos en digráficas infinitas</b>	<b>39</b>
2.1 Cuasinúcleos en digráficas exteriormente finitas. . . . .	42
2.2 Cuasinúcleos en digráficas infinitas con número cromático finito. . . . .	45
<b>3 Seminúcleos</b>	<b>53</b>
<b>4 Núcleos en digráficas infinitas</b>	<b>61</b>
4.1 Algunas propiedades de núcleos en digráficas infinitas. . . . .	63
4.2 Núcleos en digráficas bipartitas. . . . .	65
4.3 Núcleos en digráficas exteriormente finitas. . . . .	66
4.4 Núcleos y ciclos. . . . .	68
4.5 Núcleos en digráficas transitivas. . . . .	69
4.6 Núcleos en digráficas pretransitivas. . . . .	75

---

<b>5</b>	<b>Caracterización de las digráficas infinitas que son núcleo perfectas</b>	<b>89</b>
5.1	Digráficas núcleo imperfectas críticas y digráficas finitamente núcleo imperfectas críticas . . . . .	89
5.2	Caracterización de las digráficas infinitas núcleo perfectas . . . . .	95
5.2.1	Algunas consecuencias del teorema 5.2.1 . . . . .	96
	<b>Conclusiones</b>	<b>101</b>
	<b>Apéndice</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

# Introducción

---

La teoría de gráficas es una de las más recientes ramas en el mundo de las matemáticas. Euler fue el que dio inicio a la teoría de gráficas en 1736 cuando considero el problema de los puentes de Königsberg, preguntándose si era posible recorrer todos los puentes sin pasar por ellos más de una vez, ver [2].

La importancia de la teoría de gráficas ha ido creciendo en las distintas áreas científicas como son Física, Química, Ciencias de la Computación, Arquitectura, Ingeniería Civil, Tecnología de la Computación, Búsquedas Operacionales, Genética, Psicología, Sociología, Economía, Antropología, y Lingüística, entre otras. Esta teoría está íntimamente relacionada con diversas ramas de la matemática, tales como teoría de grupos, teoría de matrices, sistemas numéricos, probabilidad, topología, y combinatoria, por mencionar algunas áreas. Esta teoría sirve como un modelo matemático para algún sistema usando una relación binaria.

Un subconjunto  $N$  de los vértices de una digráfica  $D$  es *absorbente* si cumple que para cada  $x$  en  $V(D)\setminus N$  existe  $y$  en  $N$  tal que hay una flecha de  $x$  hacia  $y$  en  $D$ . Análogamente,  $N$  es un conjunto *dominante* si para cada  $x$  en  $V(D)\setminus N$  existe  $y$  en  $N$  tal que hay una flecha de  $y$  hacia  $x$  en  $D$ . Consideremos  $I$  un subconjunto de los vértices de  $D$ , diremos que  $I$  es un conjunto *independiente* si para cualquier subconjunto  $\{x, y\}$  de  $I$  no hay flechas entre  $x$  y  $y$ .  $N$  es un *núcleo* de  $D$  si cumple con ser un conjunto independiente y absorbente.

Dos pioneros dentro de la teoría de juegos son los economistas von Neuman y Morgenstern. Ellos en su libro **Theory of games and economic behavior** [12] establecieron situaciones y variables con juegos y situaciones económicas en términos de conceptos e ideas matemáticas. El análisis es realizado por la representación de las diferentes situaciones en un juego por elementos en un conjunto y definiendo una relación entre ellos.

En juegos cooperativos los jugadores actúan eficientemente cuando forman una coalición única, también llamada la gran coalición. El objetivo del juego es encontrar distribuciones aceptables de la rentabilidad de la gran coalición. Son inaceptables las distribuciones donde un jugador recibe menos de lo que podría obtener por su cuenta, sin cooperar con ninguna otra persona, una condición conocida como la racionalidad individual. Las imputaciones son distribuciones que son eficientes e individualmente racionales.

El concepto de dominación de imputaciones en juegos de  $n$ -personas fue desarrollado en el libro clásico de von Neuman y Morgenstern [12]. En esa formulación, cada imputación era representada por elementos  $a, b, c, \dots$  de algún conjunto universal  $P$ . Si  $a$  dominaba a  $b$  entonces  $a > b$ . La relación  $>$  definida en los elementos de  $P$  fue asumida a ser irreflexiva; es decir,  $a \not> a$  para algún  $a$  en  $P$ .

El conjunto  $S$  de  $P$  es una *solución* de la relación si se cumple:

- (i) Para cualesquiera dos elementos  $a$  y  $b$  en  $S$ ,  $a \not> b$ .
- (ii) Para cualquier  $a$  en  $P \setminus S$ , existe un  $b$  en  $S$  tal que  $b > a$ .

Esta formulación puede ser visualizada en términos de una digráfica  $D$  donde el conjunto de vértices  $V(D)$  representa el conjunto  $P$  y existe una flecha del vértice  $a$  al vértice  $b$  si y solo si  $a > b$ . Notemos que  $D$  no tiene lazos ya que la relación  $>$  es irreflexiva. El problema de encontrar una solución de una relación, es equivalente a encontrar un conjunto independiente y dominante en la digráfica  $D$ , de aquí en adelante nosotros decimos que es una solución en la digráfica. Notemos que los conceptos de solución y núcleo son duales direccionalmente; es decir, el conjunto que es una solución en una digráfica puede ser un núcleo si se cambia la orientación de las flechas.

No toda digráfica tiene núcleo, un ejemplo de esto es la digráfica  $D$  donde  $V(D) = \{a, b, c\}$  y  $A(D) = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$  la cual no contiene un conjunto absorbente que consista de un solo elemento. Por otro lado, existen digráficas con núcleo, las cuales cumplen con que también todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo, las cuales son llamadas *núcleo perfectas*. También existen digráficas sin núcleo tales que todas sus subdigráficas inducidas propias tienen núcleo, dichas digráficas reciben el nombre de *núcleo imperfectas críticas*. El problema de decidir si una digráfica tiene núcleo o no es un problema NP-completo, [4], y son pocos los resultados que se tienen sobre las condiciones que se deben de cumplir en una digráfica finita para que ésta tenga núcleo. Los siguientes teoremas forman parte de los resultados clásicos dentro de la teoría de núcleos para digráficas finitas.

**Teorema 0.0.1.** ([12] von Neumann) *Si  $D$  no tiene ciclos, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Teorema 0.0.2.** ([14] Richardson) *Si  $D$  no tiene ciclos de longitud impar, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Teorema 0.0.3.** [16] *Toda digráfica simétrica es núcleo perfecta. Un subconjunto  $N$  de  $V(D)$  es núcleo de  $D$  si y solo si  $N$  es un conjunto independiente maximal.*

**Teorema 0.0.4.** [11] *Sea  $D$  una digráfica transitiva. Entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta. Además cada núcleo de  $D$  es obtenido eligiendo justamente un vértice de cada componente fuertemente conexa terminal. Así es que, cada núcleo tiene el mismo número de elementos y cada conjunto absorbente minimal es un núcleo.*

**Teorema 0.0.5.** [2] *Sea  $D$  una digráfica. Si cada ciclo tiene una flecha simétrica, entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.*

Otros resultados acerca de la existencia de núcleos en digráficas finitas son los siguientes.

**Teorema 0.0.6.** [18] *La unión de dos digráficas transitivas es núcleo perfecta.*

**Teorema 0.0.7.** [13] *Una digráfica bipartita es núcleo perfecta.*

**Teorema 0.0.8.** [18] *Una digráfica cuasitransitiva es núcleo perfecta.*

**Teorema 0.0.9.** [9] *Una digráfica derecha pretransitiva o izquierda pretransitiva es núcleo perfecta.*

**Teorema 0.0.10.** *Las digráficas localmente semicompletas son digráficas núcleo perfectas cuando toda subdigráfica semicompleta tiene núcleo.*

Otro concepto relacionado con el de núcleo es el de *seminúcleo*, el cual fue introducido por Neumann Lara, [13], este concepto es muy importante para el desarrollo de la teoría de núcleos, en particular fue usado para dar una demostración corta del teorema de Richardson y para la demostración de la existencia de un núcleo en digráficas bipartitas. Un *seminúcleo* se define como un subconjunto de vértices  $S$  de  $V(D)$  tal que cumple con ser independiente y si existe una  $Sx$ -flecha con  $x$  en  $V(D) \setminus S$ , entonces debe de existir una  $xS$ -flecha.

Como ya se había mencionado anteriormente, son pocos los resultados que se tienen respecto a la existencia de núcleos en digráficas finitas. En el campo de digráficas infinitas se reducen los resultados. El tema principal de esta tesis consiste en presentar una recopilación de algunos resultados sobre la existencia de núcleos en digráficas infinitas. Más aún, como trabajo original, se presentará la caracterización de digráficas infinitas núcleo perfectas a partir de las componentes fuertemente conexas de su parte asimétrica.

En esta tesis, respecto a la teoría de digráfica infinitas, veremos la existencia de núcleos en ciertas clases de digráficas, como son: transitivas, pretransitivas, cuasitransitivas, exteriormente finitas, entre otras.

Es bien sabido que toda digráfica finita tiene un cuasinúcleo (un conjunto independiente de vértices tal que cualquier otro vértice fuera del conjunto está a distancia a lo más dos de algún elemento del conjunto), pero este no es el caso para digráfica infinitas. En este trabajo se verán condiciones que garantizan la existencia de cuasinúcleos en digráficas infinitas y como corolario veremos cuando una digráfica infinita transitiva tiene núcleo.

La primera parte de esta tesis, Preliminares, consiste en presentar todas las definiciones que utilizaremos en este trabajo, así como algunos resultados básicos de la teoría de digráficas finitas (algunos resultados también valen para digráficas infinitas).

En el Capítulo 1 estudiaremos la existencia de ciclos dirigidos en digráficas posiblemente infinitas, además de algunas propiedades de las digráficas fuertemente conexas, también

veremos la existencia de componentes fuertemente conexas y la existencia de componentes fuertemente conexas terminales.

En el Capítulo 2 exhibiremos algunas condiciones suficientes para garantizar la existencia de cuasinúcleos en digráficas infinitas, usando el concepto de digráfica hereditaria y el teorema de compacidad.

En el Capítulo 3 veremos condiciones suficientes para demostrar la existencia de seminúcleos en digráficas infinitas.

En el Capítulo 4 veremos algunas condiciones suficientes que muestran la existencia de núcleos en algunas clases de digráficas infinitas, como son: transitivas, pretransitiva, cuasitransitivas, simétricas, acíclicas, sin ciclos impares y aquí usamos fuertemente el concepto de seminúcleo.

En el Capítulo 5 veremos algunos resultados recientes que se han obtenido en la teoría de núcleos en digráficas infinitas. Veremos la caracterización de las digráficas núcleo perfectas, y para ello analizaremos la estructura de las digráficas núcleo imperfectas críticas.

# Preliminares

---

## 0.1 Definiciones básicas de la teoría de digráficas

**Definición 0.1.1.** Una **digráfica**  $D$  es una pareja  $(V(D), A(D))$ , tal que  $V(D)$  es un conjunto no vacío de elementos, a estos los llamaremos **vértices**, y  $A(D)$  es un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de  $V(D)$ , a estos los llamaremos **flechas**.

Como ejemplo de digráfica, consideremos a  $D$  con conjunto de vértices  $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y conjunto de flechas  $A(D) = \{(v_1, v_5), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_5, v_4), (v_5, v_3), (v_5, v_1)\}$ .

Dada una digráfica  $D$ , es posible darle una **representación geométrica** en el plano de la siguiente manera: a cada vértice de  $D$  le asociamos un punto en el plano y dibujamos una flecha del punto que representa al vértice  $u$  hacia el punto que representa al vértice  $v$  si  $(u, v) \in A(D)$ . En la figura 1 se exhibe la representación geométrica de la digráfica del ejemplo anterior.

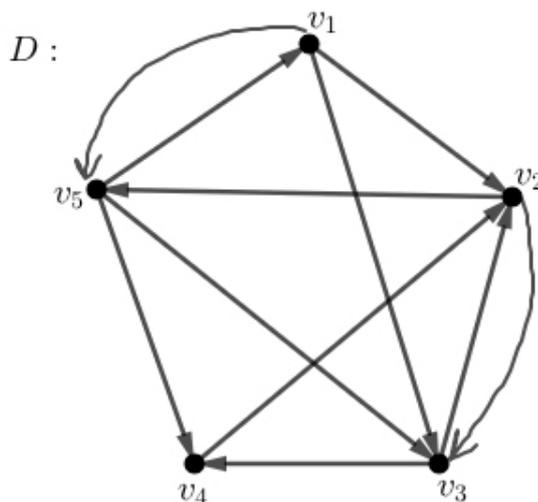


Figura 1: Representación geométrica de una digráfica

Para las siguientes definiciones consideremos una digráfica  $D$ .

**Definición 0.1.2.** Diremos que  $D$  es **infinita** si  $V(D)$  es un conjunto infinito, en otro caso diremos que  $D$  es **finita**.

**Definición 0.1.3.** Diremos que  $D$  es **trivial** si  $|V(D)| = 1$  y  $|A(D)| = 0$ .

**Definición 0.1.4.** Si  $(x, y) \in A(D)$  entonces diremos que la flecha es dirigida del vértice  $x$  hacia el vértice  $y$ ; es decir, el vértice  $x$  es **adyacente hacia el vértice  $y$**  o el vértice  $y$  es **adyacente desde el vértice  $x$** , denotado por  $x \rightarrow y$ .

**Notación 0.1.1.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos subconjuntos no vacíos de  $V(D)$  y  $x$  un vértice en  $V(D)$ . Una  **$S_1S_2$ -flecha** es una flecha  $(w, y)$  en  $A(D)$  tal que  $w$  está en  $S_1$  y  $y$  está en  $S_2$ . Si  $S_1 = \{x\}$  o  $S_2 = \{x\}$ , entonces una  $S_1S_2$ -flecha será denotada por  **$xS_2$ -flecha** o  **$S_1x$ -flecha**, según sea el caso.

**Definición 0.1.5.** Decimos que una flecha  $(x, y)$  de  $D$  es **simétrica** si  $(y, x) \in A(D)$ .

**Definición 0.1.6.** Decimos que una flecha  $(x, y)$  de  $D$  es **asimétrica** si  $(y, x) \notin A(D)$ .

**Definición 0.1.7.** El **grado exterior** de un vértice  $x$ , o **exgrado**, es el número de vértices adyacentes desde  $x$ , denotado por  $\delta^+(x)$ .

**Definición 0.1.8.** El **grado interior** de un vértice  $x$ , o **ingrado**, es el número de vértices adyacentes hacia  $x$ , denotado por  $\delta^-(x)$ .

**Definición 0.1.9.** Una digráfica es **exteriormente finita** si todos sus vértices tienen exgrado finito.

**Definición 0.1.10.** El conjunto de los **vecinos exteriores de un vértice  $x$** , denotado por  $\Gamma^+(x)$ , se define como  $\{y \in V(D) : (x, y) \in A(D)\}$ .

**Definición 0.1.11.** El conjunto de los **vecinos interiores de un vértice  $x$** , denotado por  $\Gamma^-(x)$ , se define como  $\{y \in V(D) : (y, x) \in A(D)\}$ .

**Definición 0.1.12.** El conjunto de los **vecinos de un vértice  $x$** , denotado por  $N_x$ , se define como  $\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ .

**Definición 0.1.13.** El conjunto de los **vecinos exteriores (respectivamente interiores) de un conjunto  $S$** , denotado por  $\Gamma^+(S)$  ( $\Gamma^-(S)$ ), se define como  $\{y \in V(D) : (s, y) \in A(D) \text{ para algún } s \text{ en } S\}$  (respectivamente  $\{y \in V(D) : (y, s) \in A(D) \text{ para algún } s \text{ en } S\}$ ).

Con la figura 1 ejemplificaremos las definiciones anteriores. La flecha  $(v_5, v_1)$  es simétrica, la flecha  $(v_1, v_2)$  es asimétrica,  $\delta^-(v_3) = 3$ ,  $\delta^+(v_4) = 1$ ,  $\Gamma^-(v_5) = \{v_1, v_2\}$ ,  $\Gamma^+(v_2) = \{v_3, v_5\}$ ,  $N_{v_4} = \{v_2, v_3, v_5\}$ ; para  $S = \{v_1, v_3, v_4\}$  y  $T = \{v_5, v_2\}$  se tiene que  $(v_5, v_4)$  es una  $TS$ -flecha.

**Definición 0.1.14.** Un conjunto  $S$  que satisface una propiedad  $P$  es un **conjunto maximal** si no hay un conjunto  $S'$  que satisface la propiedad  $P$  y además  $S \subset S'$ .

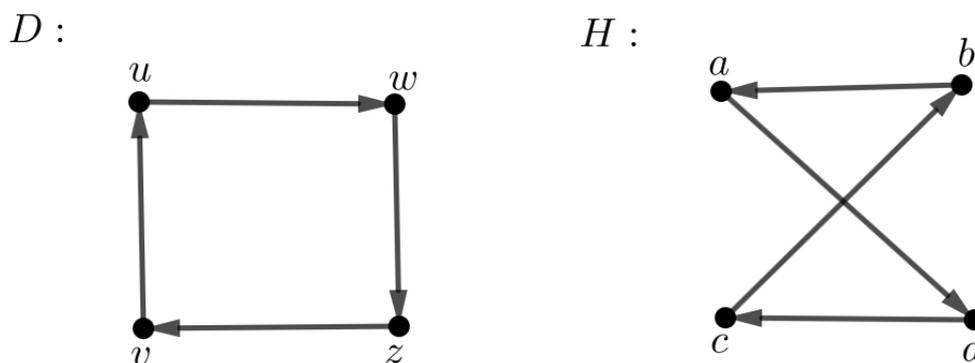


Figura 2:  $D$  y  $H$  son digráficas isomorfas

**Definición 0.1.15.** Sean  $G$  y  $H$  digráficas. Diremos que  $G$  es isomorfa a  $H$ , denotado por  $G \cong H$ , si existe una función biyectiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $(u, v) \in A(G)$  si y solo si  $(f(u), f(v)) \in A(H)$ .

A la función de la definición 0.1.15 se le llamará **isomorfismo**.

En la figura 2 se exhiben dos digráficas isomorfas, donde la siguiente función,  $f : V(D) \rightarrow V(H)$ , es un isomorfismo:  $f(u) = a$ ,  $f(w) = d$ ,  $f(z) = c$ ,  $f(v) = b$ .

## 0.2 Subdigráficas

**Definición 0.2.1.** Sean  $D$  y  $D'$  dos digráficas. Decimos que  $D'$  es una **subdigráfica** de  $D$ , denotado por  $D' \subseteq D$ , si  $V(D') \subseteq V(D)$  y  $A(D') \subseteq A(D)$ .

**Definición 0.2.2.** Sean  $D$  una digráfica y  $S$  un subconjunto de  $V(D)$ . La **subdigráfica de  $D$  inducida por  $S$** , denotada por  $D[S]$ , es la digráfica tal que  $V(D[S]) = S$  y  $A(D[S]) = \{(u, v) \in A(D) : \{u, v\} \subseteq S\}$ .

**Definición 0.2.3.** Sean  $D$  una digráfica y  $S$  un subconjunto de  $V(D)$ . Se dirá que  $S$  es un **conjunto independiente** en  $D$  si  $A(D[S]) = \emptyset$ .

En la figura 3 se tiene que  $H$  es una subdigráfica de  $D$  y  $G$  es la subdigráfica inducida por  $\{v_1, v_2, v_5\}$ .

## 0.3 Caminos

**Definición 0.3.1.** Un **camino dirigido**  $C$  es una sucesión de vértices de  $D$ ,  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$  para cada  $i$  en  $\{0, \dots, n-1\}$ .

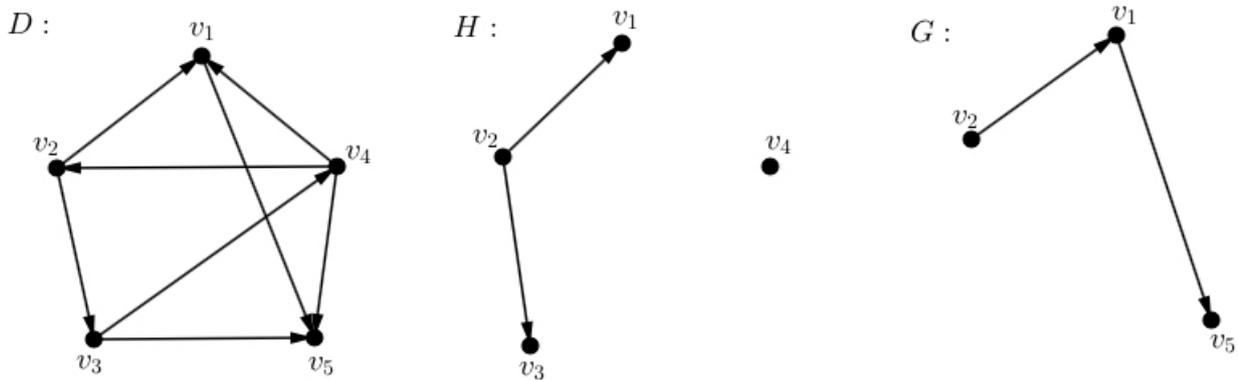


Figura 3: Una digráfica  $D$  y dos de sus subdigráficas

**Notación 0.3.1.** Sean  $C$  un camino dirigido y  $\{x_i, x_j\}$  un subconjunto de  $V(C)$ , con  $i < j$ . El camino dirigido  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$  será denotado por  $(x_i, C, x_j)$ .

**Definición 0.3.2.** Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  un camino dirigido. La longitud del camino dirigido  $C$  se define como el número  $n$ , denotado por  $l(C)$ .

**Definición 0.3.3.** Decimos que un camino dirigido  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  es cerrado si inicia y termina en el mismo vértice; es decir,  $x_0 = x_n$ .

**Definición 0.3.4.** Decimos que un camino dirigido es asimétrico si todas sus flechas son asimétricas.

**Definición 0.3.5.** Un camino dirigido cerrado asimétrico es un camino que cumple con la propiedad de ser cerrado y de ser asimétrico.

**Definición 0.3.6.** Si  $C$  es un camino dirigido que no repite vértices, entonces diremos que  $C$  es una trayectoria dirigida.

**Definición 0.3.7.** Si una trayectoria dirigida  $P$  consiste de un solo vértice, diremos que  $P$  es la trayectoria dirigida trivial.

**Definición 0.3.8.** Un ciclo dirigido  $\gamma$  es un camino dirigido cerrado que no repite vértices salvo el primero y el último.

Para ejemplificar las definiciones anteriores, considere la digráfica de la figura 4,  $(v_5, v_1, v_8, v_7, v_4, v_8)$  es un camino dirigido de longitud 5,  $(v_5, v_1, v_8, v_7, v_4, v_8, v_5)$  es un camino dirigido cerrado y también es un camino dirigido asimétrico,  $(v_5, v_2, v_4, v_6, v_3)$  es una trayectoria dirigida y  $(v_2, v_6, v_3, v_2)$  es un ciclo dirigido.

Observe que la distancia de  $u$  a  $v$  no es la misma que de  $v$  a  $u$ .

**Notación 0.3.2.** Si  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  es un camino dirigido (trayectoria dirigida) de  $x_0$  hacia  $x_n$ , entonces lo denotaremos por  $x_0 x_n$ -camino (trayectoria).

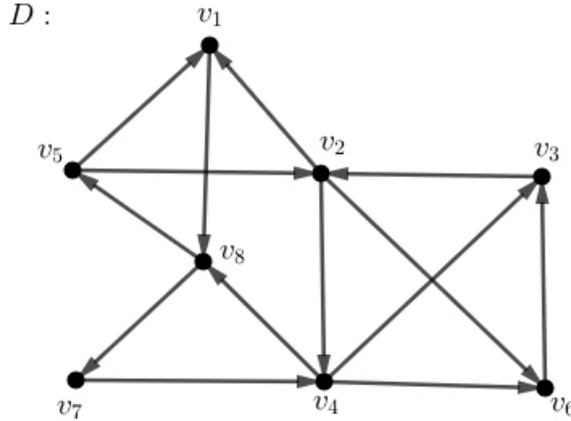


Figura 4: Digráfica utilizada para ejemplificar diferentes tipos de caminos dirigidos

**Definición 0.3.9.** Un **ciclo dirigido asimétrico** es un ciclo dirigido que cumple con tener todas sus flechas asimétricas.

**Definición 0.3.10.** Sean  $D$  una digráfica y  $u, v$  dos vértices de  $D$ . La **distancia de  $u$  hacia  $v$** , denotada por  $d(u, v)$ , se define como  $\min\{l(P) : P \text{ es una } uv\text{-trayectoria dirigida en } D\}$  cuando  $\{P : P \text{ es una } uv\text{-trayectoria dirigida en } D\} \neq \emptyset$ .

Considerando la digráfica de la figura 4 se tiene que  $d(v_2, v_5) = 3$ .

**Definición 0.3.11.** Sea  $D$  una digráfica infinita. Una sucesión  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de distintos vértices de  $D$  es una **trayectoria infinita exterior** si  $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$  para cada  $i$  en  $\mathbb{N}$ .

**Nota 0.3.1.** De ahora en adelante escribiremos camino, trayectoria y ciclo omitiendo la especificación de que cada uno de éstos sea dirigido.

## 0.4 Conexidad

**Definición 0.4.1.** Una digráfica  $D$  es **unilateralmente conexa** si para cualquier par de vértices se cumple al menos una de las siguientes:

- (i) Existe una  $uv$ -trayectoria.
- (ii) Existe una  $vu$ -trayectoria.

**Definición 0.4.2.** Una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** si para cualquier par de vértices existe una  $uv$ -trayectoria y también existe una  $vu$ -trayectoria.

La digráfica  $D$  de la figura 5 es unilateralmente conexa porque  $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6, v_8, v_9, v_7)$  es una trayectoria que contiene a todos los vértices de  $D$ , lo que implica que para todo par de vértices en  $D$  existe una trayectoria entre ellos; pero  $D$  no es fuertemente conexa porque no existe una  $v_7v_0$ -trayectoria en  $D$ .

$D$  :

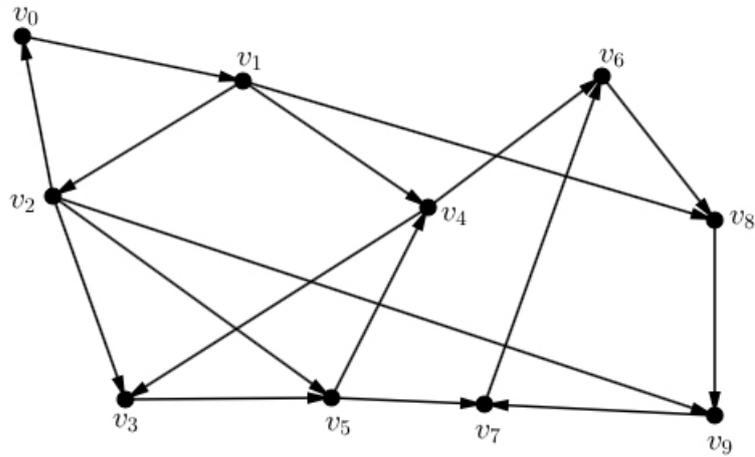


Figura 5: Digráfica unilateralmente conexa

**Definición 0.4.3.** Sea  $D$  una digráfica. Una **componente fuertemente conexa** de  $D$  cumple con ser una subdigráfica de  $D$  máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa.

Observe que si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa, entonces  $D$  tiene exactamente una componente fuertemente conexa, a saber  $D$  misma. En la figura 6 se exhiben las componentes fuertemente conexas de la digráfica de la figura 5.

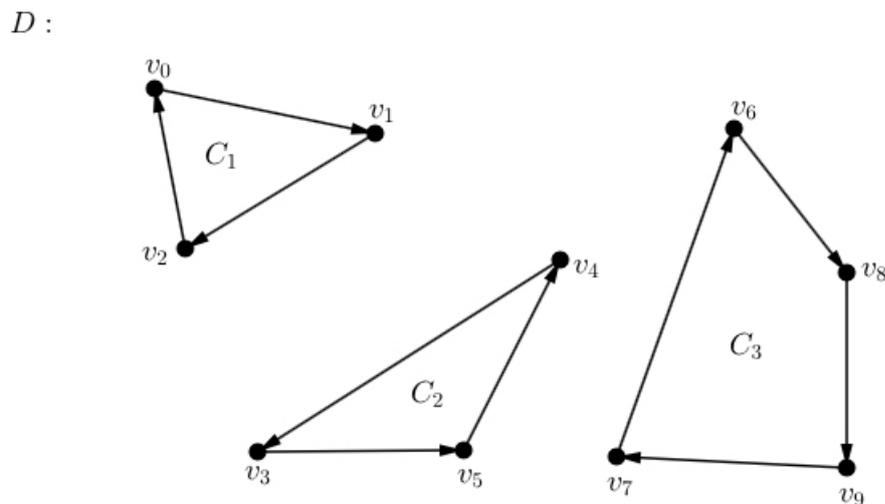


Figura 6: Componentes fuertemente conexas de la digráfica de la figura 5

**Definición 0.4.4.** Sean  $D$  una digráfica y  $\mathcal{C}$  la familia de todas las componentes fuertemente conexas de  $D$ . La **digráfica de condensación** de  $D$ , denotada por  $D^*$ , es la digráfica tal que  $V(D^*) = \mathcal{C}$  y  $(C_i, C_j) \in A(D^*)$  si y solo si hay una  $V(C_i)V(C_j)$ -flecha en  $D$ .

En la figura 7 se exhibe la digráfica de condensación de la digráfica de la figura 5.

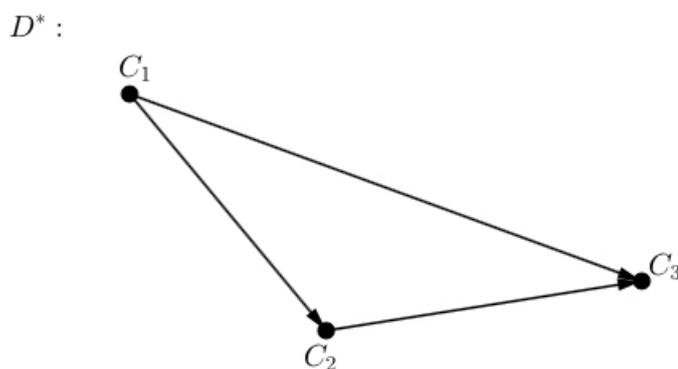


Figura 7: Digráfica de condensación de la digráfica de la figura 5

**Notación 0.4.1.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos subconjuntos no vacíos de  $V(D)$  y  $x$  un vértice en  $V(D)$ . Una  **$S_1S_2$ -trayectoria** es una  $wy$ -trayectoria tal que  $w \in S_1$  y  $y \in S_2$  para algún  $w$  en  $S_1$  y para algún  $y$  en  $S_2$ . Si  $S_1 = \{x\}$  o  $S_2 = \{x\}$ , entonces una  $S_1S_2$ -trayectoria será denotada por  **$xS_2$ -trayectoria** o  **$S_1x$ -trayectoria**, según sea el caso.

## 0.5 Tipos de digráficas

**Definición 0.5.1.** Sea  $D$  una digráfica. Decimos que  $D$  es **bipartita** si existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $V_i$  es un conjunto independiente para cada  $i$  en  $\{1, 2\}$ .

**Definición 0.5.2.** Una digráfica es **semicompleta** si para todo subconjunto  $\{u, v\}$  de  $V(D)$  se cumple  $\{(v, u), (u, v)\} \cap A(D) \neq \emptyset$ .

**Definición 0.5.3.** Una digráfica es **simétrica** si todas sus flechas son simétricas.

**Definición 0.5.4.** Una digráfica es **asimétrica** si todas sus flechas son asimétricas.

**Definición 0.5.5.** Una digráfica es **acíclica** si no contiene ciclos.

**Definición 0.5.6.** Un **torneo**  $T$  es una digráfica semicompleta y asimétrica.

**Definición 0.5.7.** Una digráfica  $D$  es **transitiva** si tres vértices distintos  $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D)$  implica que  $(x, z) \in A(D)$ .

**Definición 0.5.8.** Una digráfica  $D$  es **derecha pretransitiva** si tres vértices distintos  $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D)$  implica que  $(x, z) \in A(D)$  o  $(z, y) \in A(D)$ .

**Definición 0.5.9.** Una digráfica  $D$  es **izquierda pretransitiva** si tres vértices distintos  $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D)$  implica que  $(x, z) \in A(D)$  o  $(y, x) \in A(D)$ .

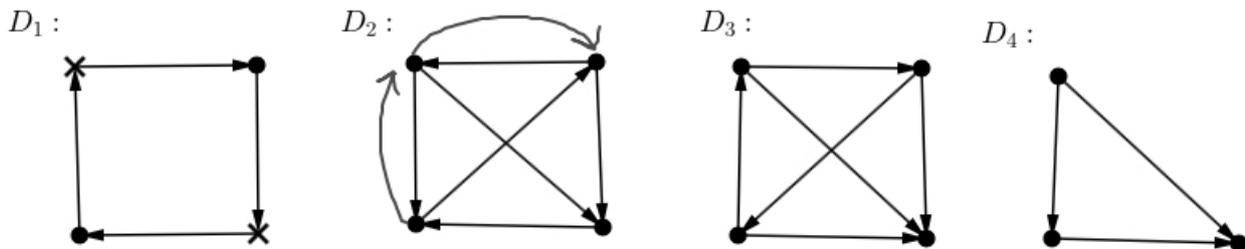


Figura 8:  $D_1$  es bipartita,  $D_2$  es semicompleta,  $D_3$  es un torneo y  $D_4$  es transitiva y acíclica

En la figura 8 se tiene lo siguiente:  $D_1$  es una digráfica bipartita porque un conjunto independiente es el que consiste de los puntos negros y el otro conjunto independiente es el que consiste de los tachos; la digráfica  $D_2$  es semicompleta; la digráfica  $D_3$  es un torneo y la digráfica  $D_4$  es transitiva y acíclica.

## 0.6 Coloración

**Definición 0.6.1.** Sean  $D$  una digráfica y  $n$  en  $\mathbb{N}$ . Una  **$n$ -coloración** de  $V(D)$  es una función  $c: V(D) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ .

**Definición 0.6.2.** Sean  $D$  una digráfica,  $n$  en  $\mathbb{N}$  y  $c: V(D) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  una  $n$ -coloración de  $V(D)$ . Diremos que  **$c$  es propia** si para cualquier par de vértices  $x$  y  $w$  en  $D$  tales que  $(x, w) \in A(D)$  se tiene que  $c(x) \neq c(w)$ .

**Definición 0.6.3.** Sea  $D$  una digráfica. El **número cromático de  $D$** , denotado por  $\chi(D)$ , está definido como el mínimo número  $n$  tal que  $D$  tiene una  $n$ -coloración propia.

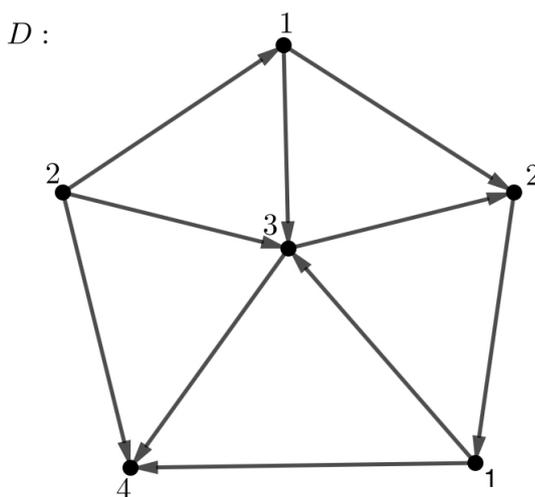


Figura 9: Digráfica con número cromático 4

En la digráfica de la figura 9 podemos observar una 4-coloración propia, la cual es mínima; es decir,  $\chi(D) = 4$ .

## 0.7 Resultados básicos de la teoría de gráficas

**Teorema 0.7.1.** *Todo  $xy$ -camino contiene una  $xy$ -trayectoria, con  $x \neq y$ .*

**Demostración.**

Sea  $C = (x = x_0, x_1, \dots, x_n = y)$  un  $xy$ -camino. Procederemos por inducción sobre su longitud.

*Base.* Si la longitud de  $C$  es 1 o 2 se cumple el teorema, ya que  $x \neq y$ .

*Hipótesis de inducción.* Si  $C'$  es un  $xy$ -camino tal que su longitud es menor que  $n$ , entonces  $C'$  contiene una  $xy$ -trayectoria.

*Paso inductivo.* Sea  $C = (x = x_0, x_1, \dots, x_n = y)$  un  $xy$ -camino de longitud  $n$ .

Veamos dos casos sobre los vértices en  $C$ .

Caso 1)  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$  con  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ .

En este caso tenemos que  $C$  es una trayectoria.

Caso 2)  $x_i = x_j$  para algún  $i < j$ .

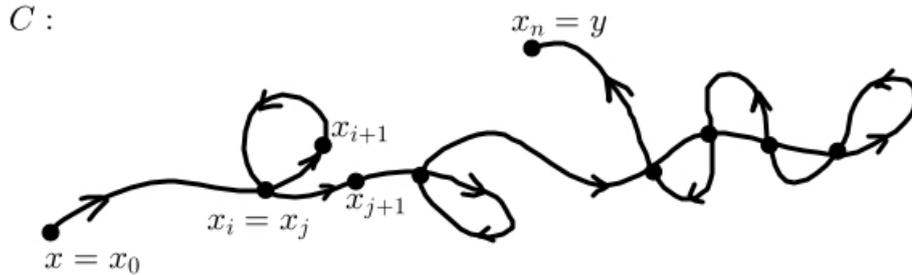


Figura 10: Representación del caso 2

Como  $x_i = x_j$  para algún  $i < j$ , entonces a  $C$  lo podemos ver de la siguiente manera:  $C = (x = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$  (ver figura 10). Así,  $C' = (x = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = y)$  es un  $xy$ -camino tal que su longitud es menor que la de  $C$ . Por lo tanto, por la hipótesis de inducción  $C'$  contiene una  $xy$ -trayectoria, la cual también es una  $xy$ -trayectoria contenida en  $C$ . ■

**Teorema 0.7.2.** *Sea  $D$  una digráfica finita.  $D$  es fuertemente conexa si y solo si  $D$  contiene un camino cerrado  $C$  tal que  $V(D) = V(C)$ .*

### Demostración.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $D$  es fuertemente conexa.

Sea  $C$  un camino cerrado que pasa por la mayor cantidad de vértices de  $D$  y supongamos que  $C$  empieza y termina en un vértice  $u$ . Demostraremos que  $V(C) = V(D)$ , procediendo por contradicción, supongamos que existe  $v$  en  $V(D) \setminus V(C)$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, existe un  $uv$ -camino, digamos  $C_1$  y existe un  $vu$ -camino, digamos  $C_2$ .

Entonces  $C' = C \cup C_1 \cup C_2$  es un camino cerrado tal que  $|V(C')| > |V(C)|$  (ver figura 11), lo cual es una contradicción ya que  $C$  era el que contenía a la mayoría de los vértices de  $D$ . Por lo tanto,  $V(C) = V(D)$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que existe un camino cerrado  $C$  que pasa por todos los vértices de  $D$ .

Sea  $\{u, v\}$  un subconjunto de  $V(D) = V(C)$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $C$  empieza y termina en  $u$ ; entonces  $C_1 = (u, C, v)$  es un camino que va de  $u$  hacia  $v$  en  $D$  y  $C_2 = (v, C, u)$  es un camino que va de  $v$  hacia  $u$ . Luego, por el teorema 0.7.1 se tiene que existe una  $uv$ -trayectoria y una  $vu$ -trayectoria. Por lo tanto,  $D$  es fuertemente conexa. ■

**Teorema 0.7.3.** *Todo camino cerrado contiene un ciclo.*

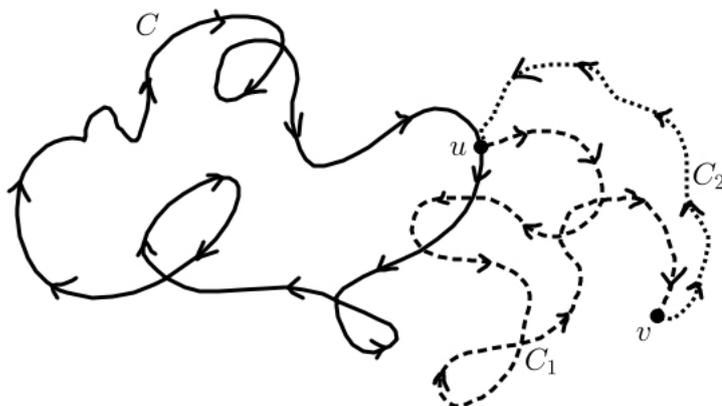


Figura 11: Dibujo para la implicación de ida del teorema 0.7.2

### Demostración.

Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$  un camino cerrado, procederemos por inducción sobre su longitud.

*Base.* Si la longitud de  $C$  es 2, entonces se cumple que  $C$  es un ciclo.

*Hipótesis de inducción.* Si  $C'$  es un camino cerrado tal que su longitud es menor que  $n$ , entonces  $C'$  contiene un ciclo.

*Paso inductivo.* Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$  un camino cerrado de longitud  $n$ .

Tenemos dos casos sobre los vértices de  $C$ .

Caso 1)  $C$  no repite vértices, salvo el inicial y el final.

En este caso  $C$  ya es un ciclo.

Caso 2)  $C$  repite algún vértice distinto al inicial y al final.

Supongamos que  $x_i = x_j$  para algún índice  $i$  distinto de un índice  $j$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $i < j$ . En este caso  $C$  lo podemos ver de la siguiente manera  $C = (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = x_0)$  (ver figura 12). Por lo tanto,  $C' = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = x_0)$  es un camino cerrado tal que su longitud es menor que  $n$ . Por hipótesis de inducción  $C'$  contiene un ciclo  $\gamma$ . Como  $C' \subseteq C$ , entonces  $C$  contiene a  $\gamma$ . ■

**Teorema 0.7.4.** *Todo camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar.*

### Demostración.

Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$  un camino cerrado de longitud impar, procederemos por inducción sobre su longitud.

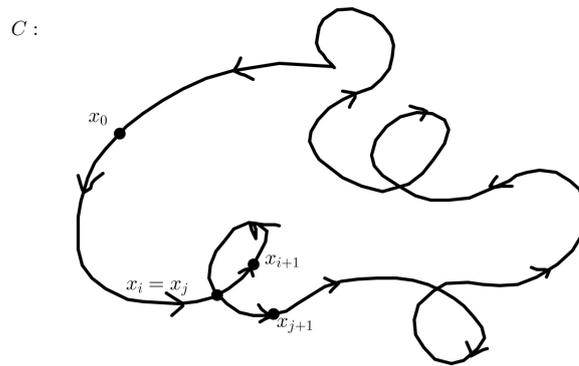


Figura 12: Caso cuando  $C$  repite vértices en la demostración del teorema 0.7.3

*Base.* Si la longitud de  $C$  es 3, entonces  $C$  es un ciclo de longitud impar.

*Hipótesis de inducción.* Si  $C'$  es un camino cerrado de longitud impar tal que su longitud es menor que  $n$ , entonces  $C'$  contiene un ciclo de longitud impar.

*Paso inductivo.* Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$  un camino cerrado de longitud impar,  $n$ .

Tenemos dos casos sobre los vértices de  $C$ .

Caso 1)  $C$  no repite vértices, salvo el inicial y el final.

En este caso  $C$  es el ciclo de longitud impar buscado.

Caso 2)  $C$  repite algún vértice distinto del inicial y el final.

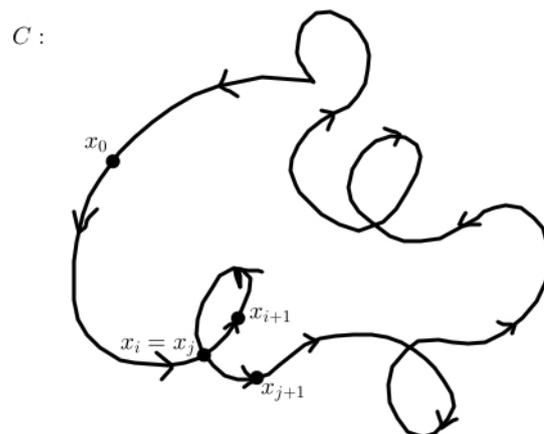


Figura 13: Representación del caso 2 en la prueba del teorema 0.7.4

Sea  $x_i = x_j$  el primer vértice que se repite, supongamos sin pérdida de generalidad que  $i < j$ . En este caso  $C$  es de la forma  $(x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = x_0)$  (ver figura 13). Por lo tanto,  $C' = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = x_0)$  y  $C'' = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i)$  son dos caminos cerrados tal que su longitud es menor que  $n$ . Como  $l(C) = l(C') + l(C'')$  y la longitud de  $C$  es impar, se sigue que la longitud de  $C'$  es impar o la longitud de  $C''$  es impar. Supongamos sin pérdida de generalidad que la longitud de  $C'$  es impar. Por hipótesis de inducción,  $C'$  contiene un ciclo de longitud impar y como  $C' \subseteq C$ , entonces  $C$  contiene un ciclo de longitud impar. ■



# Resultados generales en la teoría de digráficas infinitas

En este capítulo estudiaremos la existencia de ciclos dirigidos en digráficas posiblemente infinitas, además de algunas propiedades de las digráficas fuertemente conexas, también veremos la existencia de componentes fuertemente conexas y la existencia de componentes fuertemente conexas terminales.

## 1.1 Ciclos, digráficas fuertemente conexas y digráficas bipartitas

**Teorema 1.1.1** ([17]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita).  $D$  es fuertemente conexas si y solo si para toda partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  existe una  $V_1V_2$ -flecha y existe una  $V_2V_1$ -flecha.*

### Demostración.

( $\Rightarrow$ ) Por demostrar que para toda partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  existe una  $V_1V_2$ -flecha y existe una  $V_2V_1$ -flecha.

Sean  $v_1$  en  $V_1$  y  $v_2$  en  $V_2$ . Por hipótesis tenemos que existe un  $v_1v_2$ -camino, llamémosle  $C_1$ , y un  $v_2v_1$ -camino, llamémosle  $C_2$ . Note que en  $C_1 = (v_1 = u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n = v_2)$  existe  $u_i$  tal que  $u_i \in V_1$  y  $u_{i+1} \in V_2$  (porque  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$ ). Así,  $(u_i, u_{i+1})$  es una  $V_1V_2$ -flecha en  $D$  (ver figura 1.1).

Análogamente en  $C_2 = (v_2 = w_1, w_2, \dots, w_j, w_{j+1}, \dots, w_m = v_1)$  tenemos que existe un vértice  $w_j$  en  $V(C_2)$  tal que  $w_j \in V_2$  y  $w_{j+1} \in V_1$ . Así,  $(w_j, w_{j+1})$  es una  $V_2V_1$ -flecha en  $D$ . Por lo tanto, para toda partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  existe una  $V_1V_2$ -flecha y existe una  $V_2V_1$ -flecha.

( $\Leftarrow$ ) Por demostrar que  $D$  es fuertemente conexas; es decir, para todo subconjunto  $\{u, v\}$  de  $V(D)$  existe un  $uv$ -camino y existe un  $vu$ -camino.

Sean  $\{u, v\}$  un subconjunto de  $V(D)$  y  $W = \{w \in V(D) : \text{existe un } uw\text{-camino}\}$ .

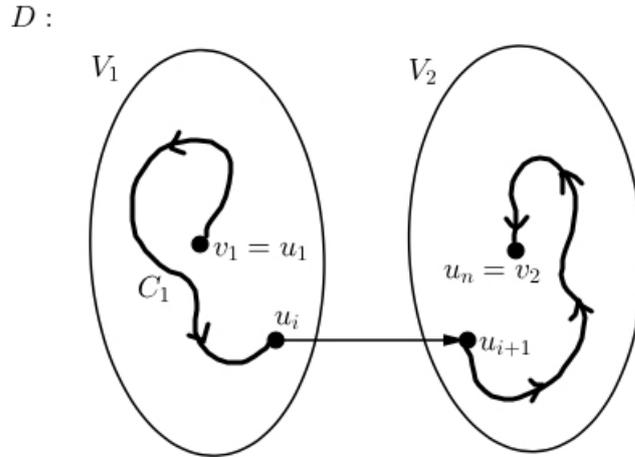


Figura 1.1: Representación de la implicación de ida del teorema 1.1.1

**Afirmación:**  $v \in W$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $v \notin W$ . Notemos que  $W \neq \emptyset$  ya que  $u \in W$ .

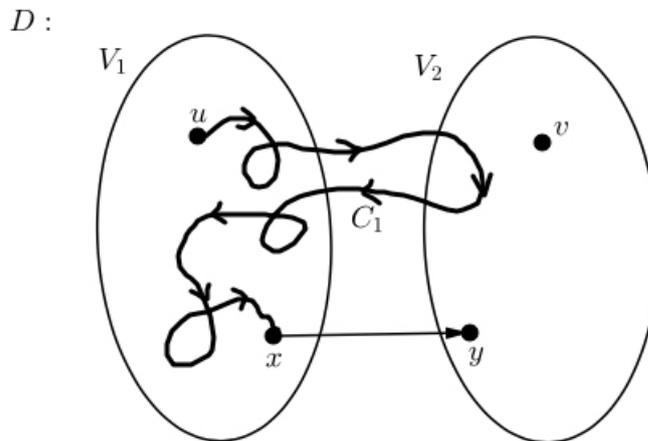


Figura 1.2: Representación de la demostración para la implicación de regreso del teorema 1.1.1

Como  $\{V_1 = W, V_2 = V(D) \setminus W\}$  es una partición de  $V(D)$ , entonces por hipótesis, en particular, existe una  $V_1V_2$ -flecha en  $D$ , digamos  $(x, y)$  donde  $x \in V_1$  y  $y \in V_2$ . Como  $x \in V_1$  se tiene que existe un  $ux$ -camino, llamémosle  $C_1$ . Así,  $C'_1 = C_1 \cup (x, y)$  es un  $uy$ -camino (ver figura 1.2), lo que implica que  $y \in W$  (por definición de  $W$ ) y por lo tanto  $y \in V_1$ , lo cual es una contradicción ya que  $y \in V_2$ . Así,  $v \in W$ , con lo que concluimos que existe un  $uv$ -camino en  $D$ . Análogamente se demuestra que existe un  $vu$ -camino en  $D$ . ■

**Teorema 1.1.2.** *Si  $D$  no tiene trayectorias infinitas exteriores y para todo  $x$  en  $V(D)$  tal que  $\delta^+(x) \geq 1$ , entonces  $D$  tiene al menos un ciclo.*

**Demostración.**

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D$  no tiene ciclos.

Sea  $v_1$  un vértice en  $V(D)$ . Como  $\delta^+(v_1) \geq 1$ , existe  $v_2$  en  $V(D)$  tal que  $(v_1, v_2) \in A(D)$ . Como  $\delta^+(v_2) \geq 1$ , existe  $v_3$  en  $V(D) \setminus \{v_1\}$  tal que  $(v_2, v_3) \in A(D)$ . Continuando con este procedimiento encontramos que para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$  dado  $v_n$  en  $V(D)$  existe  $v_{n+1}$  en  $V(D) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $(v_n, v_{n+1}) \in A(D)$ . Como estamos suponiendo que no hay ciclos, entonces tenemos  $T = (v_1, v_2, v_3, \dots)$  es una trayectoria infinita exterior, lo cual nos lleva a una contradicción ya que  $D$  no tiene trayectorias infinitas exteriores. Por lo tanto,  $D$  tiene al menos un ciclo. ■

**Teorema 1.1.3.** *Si  $D$  es una digráfica transitiva (posiblemente infinita) y asimétrica, entonces  $D$  no tiene ciclos.*

**Demostración.**

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D$  contiene un ciclo  $\gamma = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$ . Como  $D$  es transitiva se sigue que: la existencia de  $(v_0, v_1)$  y  $(v_1, v_2)$  implica la existencia de  $(v_0, v_2)$  en  $A(D)$ , la existencia de  $(v_0, v_2)$  y  $(v_2, v_3)$  implica la existencia de  $(v_0, v_3)$  en  $A(D)$ . Continuando de esta manera llegamos a que la existencia de  $(v_0, v_{n-1})$  y  $(v_{n-1}, v_n)$  implica la existencia de  $(v_0, v_n)$  en  $A(D)$ , lo cual no es posible ya que la flecha  $(v_n, v_0)$  sería simétrica, lo cual es una contradicción (ver figura 1.3).

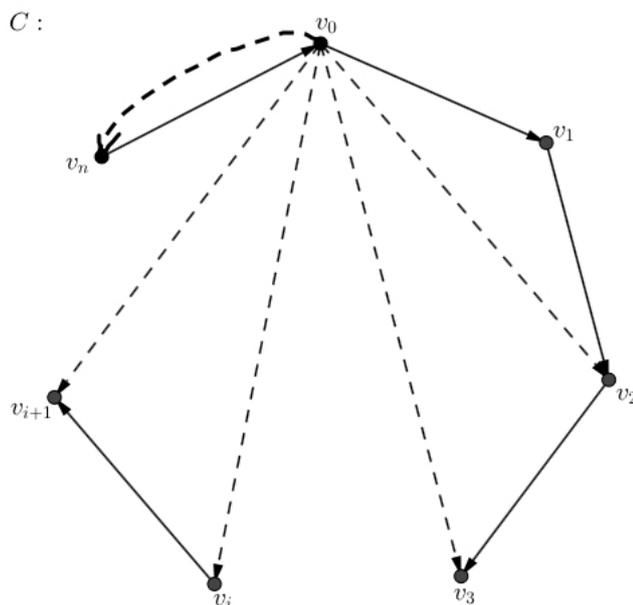


Figura 1.3: Representación de la demostración del teorema 1.1.3

Por lo tanto,  $D$  no tiene ciclos. ■

**Teorema 1.1.4.** *Si  $D$  es una digráfica bipartita (posiblemente infinita), entonces  $D$  no tiene ciclos de longitud impar.*

**Demostración.**

Supongamos que existe  $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  un ciclo en  $D$ . Por demostrar que la longitud de  $C$  es par.

Como  $D$  es bipartita, existe una partición de sus vértices en dos conjuntos independientes, digamos  $\{V_1, V_2\}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que los vértices en  $C$  se distribuyen de la siguiente manera:  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_1$ , y así sucesivamente. Como  $(v_n, v_1) \in A(C)$  y  $v_1 \in V_1$  se tiene que  $v_n \in V_2$ . Así,  $n$  es par.

Por lo tanto, la longitud del ciclo  $C$  es par. ■

El regreso del teorema 1.1.4 no necesariamente es cierto; es decir, si  $D$  es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces  $D$  no necesariamente es una digráfica bipartita.

**Ejemplo:** La digráfica  $D$  con conjunto de vértices  $\{u, v, w\}$  y cuyas flechas son:

$\{(u, v), (v, w), (u, w)\}$  no tiene ciclos, sin embargo tampoco tiene una partición de sus vértices en dos conjuntos independientes (ver figura 1.4).

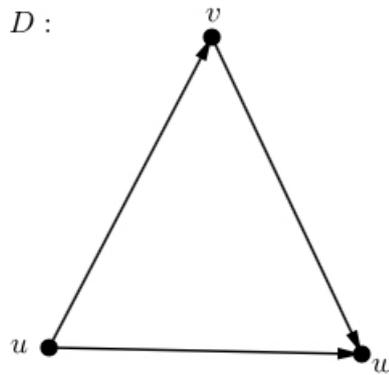


Figura 1.4:  $D$  no tiene ciclos de longitud impar y no es bipartita

Para que se pueda cumplir el regreso del teorema 1.1.4 es necesario pedirle una condición a la digráfica, la cual es que sea fuertemente conexas. El resultado es el siguiente.

**Teorema 1.1.5.** *Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexas (posiblemente infinita), de orden al menos dos.  $D$  es bipartita si y solo si  $D$  no tiene ciclos de longitud impar.*

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Se sigue del teorema 1.1.4.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $D$  no tiene ciclos de longitud impar y que  $D$  es fuertemente conexas.

Veremos que en  $D$  hay una partición de sus vértices en dos conjuntos independientes.

Sea  $x$  un vértice arbitrario de  $D$ .

**Afirmación 1.** Para cada vértice  $y$  en  $V(D) \setminus \{x\}$  y cada elección de una  $xy$ -trayectoria  $P$  y una  $yx$ -trayectoria  $Q$  se tiene que la longitud de  $P$  y  $Q$  son iguales, módulo 2.

Procediendo por contradicción, suponemos que no es el caso para alguna elección de  $y$ ,  $P$  y  $Q$ ; es decir,  $P$  y  $Q$  son tales que la paridad de la longitud de  $P$  y  $Q$  no es igual módulo 2. Así,  $P \cup Q$  es un camino cerrado de longitud impar, el cual contiene un ciclo de longitud impar (por teorema 0.7.4), lo cual no es posible por nuestra hipótesis. Esto prueba la afirmación 1.

**Observación:** En particular, se sigue de la afirmación 1 y el hecho de que  $D$  es fuertemente conexa que para cada  $y$  en  $V(D) \setminus \{x\}$ , la longitud de todas las trayectorias de  $x$  hacia  $y$  tienen la misma paridad.

Sean  $U = \{y \in V(D) : \text{la longitud de cada } xy\text{-trayectoria es par}\}$  y  $U' = \{y \in V(D) : \text{la longitud de cada } xy\text{-trayectoria es impar}\}$ .

**Afirmación 2.**  $U \neq \emptyset$  y  $U' \neq \emptyset$ .

Como  $(x)$  es una trayectoria de longitud cero, entonces  $x \in U$ .

Por otro lado, como  $D$  es fuertemente conexa y es de orden al menos dos, se tiene que el exgrado de  $x$  es al menos uno; es decir, si  $y$  es un vértice tal que  $(x, y) \in A(D)$ , entonces existe una  $xy$ -trayectoria de longitud al menos uno. Por lo tanto,  $U \neq \emptyset$  y  $U' \neq \emptyset$ .

**Afirmación 3.**  $U \cup U' = V(D)$ .

Como  $U$  y  $U'$  están contenidos en  $V(D)$ , entonces  $U \cup U' \subseteq V(D)$ . Por otro lado, sea  $v$  en  $V(D)$ , entonces existe una  $xv$ -trayectoria en  $D$ , digamos  $T$  (porque  $D$  es fuertemente conexa). Así,  $v \in U$  si la longitud de  $T$  es par o  $v \in U'$  si la longitud de  $T$  es impar, con lo que se concluye que  $v \in U \cup U'$ . Por lo tanto,  $U \cup U' = V(D)$ .

**Afirmación 4.**  $U \cap U' = \emptyset$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $z$  en  $U \cap U'$ . Entonces existe una  $xz$ -trayectoria de longitud par, digamos  $T_1$ , y existe una  $xz$ -trayectoria de longitud impar, digamos  $T_2$ , pero esto no es posible por la observación.

**Afirmación 5.**  $U$  y  $U'$  son conjuntos independientes en  $D$ .

Veremos que  $U$  es un conjunto independiente en  $D$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existen dos vértices  $u_1$  y  $u_2$  en  $U$  tales que  $(u_1, u_2) \in A(D)$ . De la definición de  $U$ , existe una  $xu_1$ -trayectoria de longitud par, digamos  $T_1$ , y existe una  $xu_2$ -trayectoria de longitud par, digamos  $T_2$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, existe  $u_2x$ -trayectoria, digamos  $T_3$ . Note que la longitud de  $T_3$  es par debido a la afirmación 1 y el hecho de que la longitud de  $T_2$  es par. Por lo tanto,  $T_1 \cup (u_1, u_2) \cup T_3$  es un camino cerrado de longitud impar en  $D$ ,

el cual contiene un ciclo de longitud impar en  $D$  (por teorema 0.7.4), lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto,  $U$  es un conjunto independiente en  $D$ . Análogamente se prueba que  $U'$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Por lo tanto,  $\{U, U'\}$  es una partición de  $V(D)$  en conjuntos independientes. Así,  $D$  es bipartita. ■

## 1.2 Componentes fuertemente conexas, digráficas transitivas y digráficas pretransitivas

Como sabemos, una componente fuertemente conexa cumple con ser máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa. Así, las digráficas finitas que no son fuertemente conexas las podemos descomponer en al menos dos componentes fuertemente conexas. Lo que veremos a continuación es lo que sucede con digráficas infinitas; es decir, veremos si también es cierto que toda digráfica infinita se puede descomponer en componentes fuertemente conexas.

**Observación 1.2.1** ([16]). Sean  $D$  una digráfica (posiblemente infinita) y  $\mathcal{S}$  la familia de todas las subdigráficas fuertemente conexas de  $D$ . Definimos la relación  $\leq$  en  $\mathcal{S}$  dada por  $S_1 \leq S_2$  si  $S_1$  es una subdigráfica de  $S_2$ . Veremos que  $(\mathcal{S}, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado y que tiene elemento maximal; es decir,  $D$  tiene al menos una componente fuertemente conexa.

### Demostración.

Primero veamos que  $\leq$  cumple con ser reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Sean  $S_1, S_2$  y  $S_3$  elementos de  $\mathcal{S}$ .

(i)  $\leq$  es reflexiva; es decir,  $S_1 \leq S_1$ .

Por definición de subdigráfica siempre se cumple que  $S_1$  es una subdigráfica de sí misma. Así,  $S_1 \leq S_1$ .

(ii)  $\leq$  es transitiva.

Veamos que si  $S_1 \leq S_2$  y  $S_2 \leq S_3$ , entonces  $S_1 \leq S_3$ . Como  $S_1 \leq S_2$  se tiene que  $V(S_1) \subseteq V(S_2)$  y  $A(S_1) \subseteq A(S_2)$ ; puesto que  $S_2 \leq S_3$  se tiene que  $V(S_2) \subseteq V(S_3)$  y  $A(S_2) \subseteq A(S_3)$ , lo que implica que  $V(S_1) \subseteq V(S_3)$  y  $A(S_1) \subseteq A(S_3)$ . Por lo tanto,  $S_1$  es una subdigráfica de  $S_3$ . Así,  $S_1 \leq S_3$ .

(iii)  $\leq$  es antisimétrica.

Veamos que si  $S_1 \leq S_2$  y  $S_2 \leq S_1$ , entonces  $S_1 = S_2$ . Por demostrar que  $V(S_1) = V(S_2)$  y  $A(S_1) = A(S_2)$ . Como  $S_1 \leq S_2$ ,  $S_1$  es una subdigráfica de  $S_2$ ; es decir,  $V(S_1) \subseteq V(S_2)$  y  $A(S_1) \subseteq A(S_2)$ . Por otro lado, como  $S_2 \leq S_1$ ,  $S_2$  es una subdigráfica de  $S_1$ ; es decir,

$V(S_2) \subseteq V(S_1)$  y  $A(S_2) \subseteq A(S_1)$ . Así,  $V(S_1) = V(S_2)$  y  $A(S_1) = A(S_2)$ , lo que implica que  $S_1 = S_2$ .

Por lo tanto,  $(\mathcal{S}, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado.

Ahora falta probar que  $(\mathcal{S}, \leq)$  tiene elementos maximales.

(1) Note que  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ , ya que la digráfica trivial es fuertemente conexa.

(2) Veremos que toda cadena en  $(\mathcal{S}, \leq)$  tiene una cota superior en  $\mathcal{S}$ .

Sean  $\mathcal{C}$  una cadena en  $(\mathcal{S}, \leq)$  y  $\mathcal{C}^\infty = \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$ .

**Afirmación 1.**  $\mathcal{C}^\infty$  es una cota superior para  $\mathcal{C}$ .

Sea  $S$  en  $\mathcal{C}$ , de la construcción de  $\mathcal{C}^\infty$  se sigue que  $S$  es subdigráfica de  $\mathcal{C}^\infty$ . Así,  $S \leq \mathcal{C}^\infty$ . Por lo tanto,  $\mathcal{C}^\infty$  es una cota superior de  $\mathcal{C}$ .

**Afirmación 2.**  $\mathcal{C}^\infty \in \mathcal{S}$ .

Por demostrar que  $\mathcal{C}^\infty$  es fuertemente conexa. Sean  $s_1$  y  $s_2$  dos vértices de  $\mathcal{C}^\infty$ . Por demostrar que existe un  $s_1 s_2$ -camino y existe un  $s_2 s_1$ -camino en  $\mathcal{C}^\infty$ . Como  $\{s_1, s_2\} \subseteq V(\mathcal{C}^\infty)$ , existen  $S_1$  y  $S_2$  en  $\mathcal{C}$  tales que  $s_1 \in V(S_1)$  y  $s_2 \in V(S_2)$ . Puesto que  $\mathcal{C}$  es una cadena podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $S_1 \leq S_2$ ; es decir,  $S_1$  es subdigráfica de  $S_2$ . Por lo tanto,  $\{s_1, s_2\} \subseteq V(S_2)$ , lo que implica que existen el  $s_1 s_2$ -camino y el  $s_2 s_1$ -camino en  $S_2$  (porque  $S_2$  es fuertemente conexa). Así, existen el  $s_1 s_2$ -camino y el  $s_2 s_1$ -camino en  $\mathcal{C}^\infty$ .

Como toda cadena en  $(\mathcal{S}, \leq)$  tiene una cota superior en  $\mathcal{S}$ , se sigue del Lema de Zorn que  $(\mathcal{S}, \leq)$  tiene elemento maximal, y este elemento maximal es una componente fuertemente conexa de  $D$ . ■

Otra propiedad que cumplen las digráficas finitas es que tienen componentes fuertemente conexas terminales. Por lo tanto, nos podemos preguntar lo siguiente: ¿En digráficas infinitas también hay componentes fuertemente conexas terminales? La respuesta es no necesariamente, y esto lo podemos ver con el siguiente ejemplo: Sea  $D$  una trayectoria infinita exterior asimétrica. En esta digráfica sus componentes fuertemente conexas son cada uno de sus vértices, pero no tiene componentes terminales fuertemente conexas.

También podemos considerar a la digráfica  $D^\sharp$ ; donde  $V(D^\sharp) = \mathbb{N}$  y  $(x, y) \in A(D^\sharp)$  si y solo si  $x < y$ , con “<” el orden natural de los números naturales (ver figura 1.5).

**Afirmación 1.** Toda componente fuertemente conexa en  $D^\sharp$  tiene exactamente un vértice. Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $C$ , una componente fuertemente conexa de  $D^\sharp$ , tal que  $|V(C)| \geq 2$ . Sean  $u$  y  $v$  dos vértices distintos en  $V(C)$ , entonces

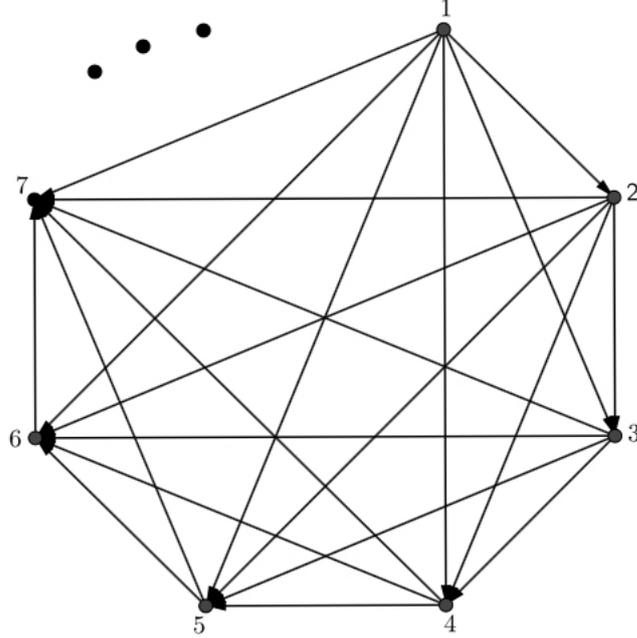


Figura 1.5: Digráfica  $D^\sharp$

existe una  $uv$ -trayectoria en  $C$ , digamos  $T_1$ , y existe una  $vu$ -trayectoria en  $C$ , digamos  $T_2$ . Luego, de la definición de  $D^\sharp$  y de la transitividad de los naturales se sigue que  $(u,v)$  es una flecha simétrica en  $D^\sharp$ , lo que implica que  $u = v$ , lo cual no es posible. Por lo tanto, toda componente fuertemente conexa de  $D^\sharp$  consiste de un único vértice.

**Afirmación 2.**  $\delta^+(v) \geq 1$  para todo  $v$  en  $V(D^\sharp)$ .

Sea  $i$  en  $V(D^\sharp)$ . Como  $i < i + 1$ , entonces tenemos que  $(i, i + 1) \in A(D^\sharp)$ , lo que implica que  $\delta^+(i) \geq 1$ .

**Afirmación 3.**  $D^\sharp$  no contiene componentes fuertemente conexas terminales.

Como  $\delta^+(v) \geq 1$  para todo  $v$  en  $V(D^\sharp)$ , de la afirmación 1 se sigue que  $D^\sharp$  no tiene componentes fuertemente conexas terminales.

A continuación veremos qué condiciones son necesarias para que una digráfica infinita tenga al menos una componente fuertemente conexa terminal.

**Observación 1.2.2** ([16]). Sea  $\rho$  la familia de las componentes fuertemente conexas de  $D$ . Si  $D_1$  y  $D_2$  son elementos de  $\rho$ , definimos  $D_1 \preceq D_2$  si existe una  $V(D_1)V(D_2)$ -trayectoria en  $D$ . Veamos que  $(\rho, \preceq)$  es un conjunto parcialmente ordenado, y los elementos maximales de  $(\rho, \preceq)$ , si existen, son las componentes terminales fuertemente conexas de  $D$ .

**Demostración.**

Por demostrar que  $\preceq$  cumple con ser reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Sean  $D_1, D_2$  y  $D_3$  elementos de  $\rho$ .

(i)  $\preceq$  es reflexiva; es decir  $D_1 \preceq D_1$ .

Como  $D_1$  es elemento de  $\rho$  tenemos que para cualquier subconjunto  $\{x, y\}$  de  $D_1$  existe una  $xy$ -trayectoria y una  $yx$ -trayectoria en  $D_1$ . Así que se cumple que existe la  $V(D_1)V(D_1)$ -trayectoria en  $D$ .

(ii)  $\preceq$  es transitiva; es decir, si  $D_1 \preceq D_2$  y  $D_2 \preceq D_3$ , entonces  $D_1 \preceq D_3$ .

Como  $D_1 \preceq D_2$ , existe una  $V(D_1)V(D_2)$ -trayectoria en  $D$ . Sean  $u$  en  $V(D_1)$  y  $v$  en  $V(D_2)$  tales que existe,  $T_1$ , una  $uv$ -trayectoria en  $D$ . Por otro lado, puesto que  $D_2 \preceq D_3$ , existe una  $V(D_2)V(D_3)$ -trayectoria en  $D$ . Sean  $z$  en  $V(D_2)$  y  $w$  en  $V(D_3)$  tales que existe,  $T_2$ , una  $zw$ -trayectoria en  $D$ .

Tenemos dos casos sobre  $v$  y  $z$ :

Caso a)  $v = z$ .

En este caso  $T_1 \cup T_2$  es un  $uw$ -camino el cual contiene una  $uw$ -trayectoria.

Caso b)  $v \neq z$ .

Como  $D_2$  es componente fuertemente conexa, entonces para  $v$  y  $z$  tenemos que existe un  $vz$ -camino, digamos  $T_3$ . Así,  $T_1 \cup T_3 \cup T_2$  es un  $uw$ -camino; el cual contiene una  $uw$ -trayectoria.

Por lo tanto, existe una  $V(D_1)V(D_3)$ -trayectoria en  $D$ , lo que implica que  $D_1 \preceq D_3$ .

(iii)  $\preceq$  es antisimétrica; es decir, si  $D_1 \preceq D_2$  y  $D_2 \preceq D_1$ , entonces  $D_1 = D_2$ .

Como  $D_1 \preceq D_2$ , existe una  $V(D_1)V(D_2)$ -trayectoria en  $D$ , digamos  $T_1$ . Ya que  $V(D_1) \cap V(D_2) = \emptyset$ , existen  $u$  en  $V(D_1)$  y  $v$  en  $V(D_2)$  tal que  $(u, v)$  es un flecha de  $T_1$ . Análogamente, puesto que  $D_2 \preceq D_1$ , existe una  $V(D_2)V(D_1)$ -trayectoria en  $D$ , digamos  $T_2$ , y existen  $x$  en  $V(D_2)$  y  $y$  en  $V(D_1)$  tal que  $(x, y)$  es una flecha de  $T_2$ . Por otro lado, como  $D_1$  y  $D_2$  son componentes fuertemente conexas, por el teorema 0.7.2,  $D_1$  contiene un camino cerrado que pasa por todos sus vértices, digamos  $C_1$ , y  $D_2$  contiene un camino cerrado que pasa por todos sus vértices, digamos  $C_2$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $C_1$  empieza y termina en  $u$  y  $C_2$  empieza y termina en  $v$ .

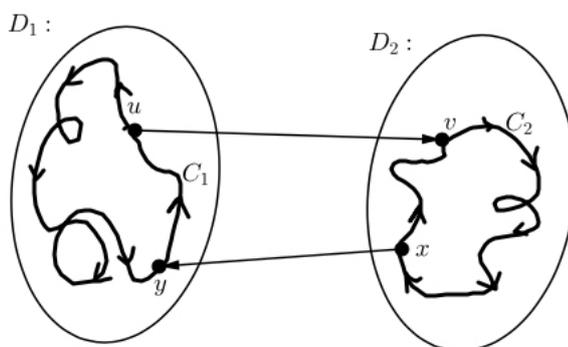


Figura 1.6

Ahora, consideremos el camino  $C = C_1 \cup (u, v) \cup C_2 \cup (v, C_2, x) \cup (x, y) \cup (y, C_1, u)$  el cual es un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $G = D[V(D_1) \cup V(D_2)]$  (ver figura 1.6). Así,  $G$  es una subdigráfica fuertemente conexas de  $D$  que contiene a  $D_1$  y  $D_2$ . Lo cual no es posible por que cada  $D_i$  es una componente fuertemente conexas en  $D$ , por lo tanto  $D_1 = D_2 = G$ .

Por lo tanto,  $(\rho, \preceq)$  es un conjunto parcialmente ordenado. ■

### 1.2.1 Componentes fuertemente conexas en digráficas transitivas.

**Lema 1.2.1** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica derecha pretransitiva o izquierda pretransitiva. Si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una sucesión de vértices tales que  $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$  y  $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, n-1\}$ , entonces la sucesión es una trayectoria y además, para cada  $i$  en  $\{1, \dots, n-1\}$  y para cada  $j$  en  $\{i+1, \dots, n\}$ ,  $(x_i, x_j) \in A(D)$  y  $(x_j, x_i) \notin A(D)$ .*

**Demostración.**

Procederemos por inducción sobre  $n$ .

Base. Para  $n = 1$ , la sucesión es una trayectoria trivial.

Para  $n = 2$ , tenemos una trayectoria de longitud uno que satisface el lema 1.2.1.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es verdadero para una sucesión  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  tal que  $(w_i, w_{i+1}) \in A(D)$  y  $(w_{i+1}, w_i) \notin A(D)$  para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Paso inductivo. Consideremos una sucesión  $T = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$  y  $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por demostrar que  $x_i \neq x_j$  para toda  $i \neq j$ , con  $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n+1\}$ . Como las subsucesiones  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(x_2, \dots, x_{n+1})$  cumplen con la hipótesis de inducción (porque están contenidas en  $T$ ), entonces cada una es una trayectoria de longitud  $n-1$ , y además se cumple que, para cada  $i$  en  $\{1, \dots, n-1\}$  y para cada  $j$  en  $\{i+1, \dots, n\}$ ,  $(x_i, x_j) \in A(D)$  y  $(x_j, x_i) \notin A(D)$ . Por lo tanto, solo resta probar que  $x_1 \neq x_{n+1}$  y  $(x_1, x_{n+1}) \in A(D)$  y  $(x_{n+1}, x_1) \notin A(D)$ .

**Afirmación 1.**  $x_1 \neq x_{n+1}$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $x_1 = x_{n+1}$ . Por la hipótesis de inducción sobre  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tenemos, en particular, que  $(x_1, x_n) \in A(D)$ , lo que implica que  $(x_{n+1}, x_n) \in A(D)$ , lo cual contradice que en  $T$  se cumple que  $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$  y  $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$ . Por lo tanto,  $x_1 \neq x_{n+1}$ .

**Afirmación 2.**  $(x_1, x_{n+1}) \in A(D)$  y  $(x_{n+1}, x_1) \notin A(D)$ .

Primero veamos que  $(x_1, x_{n+1}) \in A(D)$ . Como  $\{(x_1, x_n), (x_n, x_{n+1})\} \subseteq A(D)$ ,  $(x_n, x_1) \notin A(D)$ ,  $(x_{n+1}, x_n) \notin A(D)$  y  $D$  es una digráfica derecha pretransitiva o izquierda pretransitiva, se sigue de la definición de estas digráficas que en particular  $(x_1, x_{n+1}) \in$

$A(D)$ .

Ahora veamos que  $(x_{n+1}, x_1) \notin A(D)$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $(x_{n+1}, x_1) \in A(D)$ . Veamos dos casos sobre  $D$ .

Caso 1.  $D$  es derecha pretransitiva.

En este caso consideremos las flechas  $(x_{n+1}, x_1)$  y  $(x_1, x_n)$ . Como  $D$  es derecha pretransitiva,  $(x_{n+1}, x_n) \in A(D)$  o  $(x_n, x_1) \in A(D)$ , lo cual no es posible porque ninguna de esas flechas pertenece a  $D$ .

Caso 2:  $D$  es izquierda pretransitiva.

En este caso consideremos las flechas  $(x_n, x_{n+1})$  y  $(x_{n+1}, x_1)$ . Como  $D$  es izquierda pretransitiva tendríamos  $(x_n, x_1) \in A(D)$  o  $(x_{n+1}, x_n) \in A(D)$ , lo cual no es posible porque ninguna de estas flechas pertenece a  $D$ .

Por lo tanto,  $T$  es una trayectoria que cumple con las hipótesis del lema 1.2.1. ■

**Teorema 1.2.1** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica posiblemente infinita. Supongamos que  $D$  es una digráfica transitiva tal que cada trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica. Entonces  $(\rho, \preceq)$ , con el orden parcial definido anteriormente, tiene al menos un elemento maximal; es decir,  $D$  tiene al menos una componente terminal fuertemente conexa. Además, para cada componente fuertemente conexa  $C$  de  $D$  hay una componente terminal fuertemente conexa  $C'$  de  $D$ , tal que  $C \preceq C'$ .*

### Demostración.

Consideremos la siguiente afirmación.

**Afirmación.** Si  $C_1$  y  $C_2$  son dos componentes fuertemente conexas de  $D$  tales que  $C_1 \preceq C_2$ , entonces para cada  $u$  en  $V(C_1)$  y cada  $v$  en  $V(C_2)$  se tiene que  $(u, v) \in A(D)$ ; además  $(v, u) \notin A(D)$ .

Como  $C_1 \preceq C_2$ , existe una  $V(C_1)V(C_2)$ -trayectoria en  $D$ . Sean  $u$  en  $V(C_1)$  y  $v$  en  $V(C_2)$  tal que existe,  $T_1$ , una  $uv$ -trayectoria en  $D$ . Puesto que  $D$  es una digráfica transitiva tenemos que  $(u, v) \in A(D)$ .

Ahora veamos que para todo  $x$  en  $V(C_1)$  y todo  $y$  en  $V(C_2)$  se tiene que  $(x, y) \in A(D)$ . Sean  $x$  en  $V(C_1)$  y  $y$  en  $V(C_2)$  dos vértices arbitrarios. Como cada  $C_i$  es fuertemente conexa, se sigue que existen la  $xu$ -trayectoria en  $C_1$ , digamos  $T_1$ , y la  $vy$ -trayectoria en  $C_2$ , digamos  $T_2$ . Ya que  $D$  es una digráfica transitiva y  $T_1 \cup (u, v) \cup T_2$  es un  $xy$ -camino, entonces  $(x, y) \in A(D)$ .

Veamos que  $(y, x) \notin A(D)$ . Procediendo por contradicción, si tenemos  $(y, x) \in A(D)$ , entonces con un razonamiento análogo al anterior llegamos a que  $(z, k) \in A(D)$  para todo  $z$  en  $V(C_2)$  y para cada  $k$  en  $V(C_1)$ . Así, obtenemos que  $C_1 \cup C_2$  está contenida en

una componente fuertemente conexa, lo cual contradice que  $C_1$  y  $C_2$  son componentes fuertemente conexas.

Por lo tanto, para todo  $x$  en  $V(C_1)$  y para todo  $y$  en  $V(C_2)$  se tiene que  $(x, y) \in A(D)$  y  $(y, x) \notin A(D)$ .

Ahora procedamos por contradicción para la demostración del teorema 1.2.1. Construiremos una trayectoria infinita exterior asimétrica. Supongamos que  $D$  no tiene componentes terminales fuertemente conexas; es decir, para cada  $C$  en  $\rho$  existe  $C'$  en  $\rho$ ,  $C' \neq C$ , tal que  $C \preceq C'$ . Sean  $C_1$  en  $\rho$  y  $u_1$  en  $V(C_1)$ , entonces existe  $C_2$  en  $\rho$ ,  $C_1 \neq C_2$ , tal que  $C_1 \preceq C_2$ . Puesto que  $C_1 \preceq C_2$ , entonces por la observación anterior se tiene que  $(u_1, u_2) \in A(D)$  y  $(u_2, u_1) \notin A(D)$  para un  $u_2$  dado en  $V(C_2)$ . Procediendo de esta manera se sigue que, para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , dados  $C_n$  en  $\rho$  y  $u_n$  en  $V(C_n)$  existe  $C_{n+1}$  en  $\rho$ ,  $C_{n+1} \neq C_n$ , tal que  $C_n \preceq C_{n+1}$ , y existe  $u_{n+1}$  en  $V(C_{n+1})$  tal que  $(u_n, u_{n+1}) \in A(D)$  y  $(u_{n+1}, u_n) \notin A(D)$ . Así, se sigue del lema 1.2.1 que  $T = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n+1})$  es una trayectoria asimétrica en  $D$ , y la sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una trayectoria asimétrica infinita exterior en  $D$ . Pero esto es una contradicción ya que en  $D$  toda trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica.

Por lo tanto,  $D$  tiene al menos una componente terminal fuertemente conexa, y para cada  $C$  en  $\rho$  existe  $C'$  en  $\rho$  componente terminal fuertemente conexa tal que  $C \preceq C'$ . ■

El siguiente resultado sobre digráficas derecha pretransitiva o izquierda pretransitiva no garantiza la existencia de componentes fuertemente conexas terminales, pero lo incluimos en esta sección porque será útil más adelante.

**Lema 1.2.2** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica derecha pretransitiva o izquierda pretransitiva sin trayectorias infinitas exteriores. Entonces para cada subconjunto no vacío  $U$  de  $V(D)$  existe  $x$  en  $U$  tal que si  $(x, y) \in A(D)$ , con  $y \in U$ , entonces  $(y, x) \in A(D)$ .*

### Demostración.

Sea  $U$  un subconjunto no vacío de  $V(D)$ . Por demostrar que existe  $x$  en  $U$  tal que si  $(x, y) \in A(D)$ , con  $y \in U$ , entonces  $(y, x) \in A(D)$ . Procederemos por contradicción, supongamos que para cada  $x$  en  $U$  existe  $y$  en  $U$  tal que  $(x, y) \in A(D)$  y  $(y, x) \notin A(D)$ . Sea  $x_1$  en  $U$ , por nuestra suposición tenemos que para  $x_1$  existe  $x_2$  en  $U$  tal que  $(x_1, x_2) \in A(D)$  y  $(x_2, x_1) \notin A(D)$ . Luego para  $x_2$  existe  $x_3$  en  $U$  tal que  $(x_2, x_3) \in A(D)$  y  $(x_3, x_2) \notin A(D)$ . En general, para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , dado  $x_n$  en  $U$  existe  $x_{n+1}$  en  $U$  tal que  $(x_n, x_{n+1}) \in A(D)$  y  $(x_{n+1}, x_n) \notin A(D)$ . Ahora, para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , sea  $T_{n+1} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ . Puesto que  $T_{n+1}$  satisface las hipótesis de lema 1.2.1, se tiene que  $T_{n+1}$  es una trayectoria para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ . Consideremos a la sucesión  $T = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donde, para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ ,  $(x_n, x_{n+1}) \in A(T_{n+1})$ .

**Afirmación.**  $T$  es una trayectoria infinita exterior.

Por demostrar que  $x_n \neq x_m$  para todo  $n \neq m$ , con  $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$ . Sean  $x_n$  y  $x_m$  en  $V(T)$ , con  $n \neq m$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $n < m$ . Consideremos a la trayectoria  $T_m$ . Como  $\{x_n, x_m\} \in V(T_m)$ , se tiene que  $x_n \neq x_m$ . Por lo tanto,  $T$  es una

trayectoria infinita exterior en  $D$ , lo cual contradice la hipótesis del lema 1.2.2.

Así, existe  $x$  en  $U$  tal que si  $(x, y) \in A(D)$ , con  $y \in U$ , entonces  $(y, x) \in A(D)$ . ■

### 1.2.2 Componentes fuertemente conexas terminales en digráficas sin trayectorias infinitas exteriores.

Los siguientes resultados sobre la digráfica de condensación serán de utilidad para encontrar componentes fuertemente conexas terminales en digráficas infinitas.

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita).  $D^*$  es una digráfica acíclica.*

**Demostración.**

Procediendo por contradicción. Supongamos que  $D^*$  contiene un ciclo  $\gamma = (C_1, C_2, \dots, C_k, C_1)$ . Consideremos  $D[V(\bigcup_{C \in V(\gamma)} C)]$ . Por demostrar que  $G = D[V(\bigcup_{C \in V(\gamma)} C)]$  es fuertemente conexas. Sabemos que  $(C_i, C_{i+1}) \in A(D^*)$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ , con  $C_{k+1} = C_1$ , entonces de la definición de  $D^*$  se tiene que existe una flecha que va de algún vértice de  $C_i$  hacia algún vértice de  $C_{i+1}$ . Así, para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$  existen  $c'_i$  en  $V(C_i)$  y  $c_{i+1}$  en  $V(C_{i+1})$  tal que  $(c'_i, c_{i+1}) \in A(D)$ , con  $c_{k+1} = c_1$ . Por otro lado, como  $C_i$  es fuertemente conexas, para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ , existe un camino cerrado que pasa por todos sus vértices, digamos  $P_i$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $P_i$  empieza y termina en  $c'_i$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ .

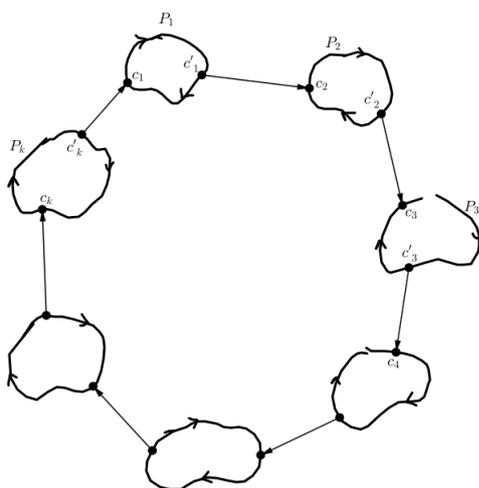


Figura 1.7

Así,  $P = P_1 \cup (c'_1, c_2) \cup (c_2, P_2, c'_2) \cup (c'_2, P_2, c_2) \cup (c_2, P_2, c'_2) \cup (c'_2, c_3) \cup (c_3, P_3, c'_3) \cup (c'_3, P_3, c_3) \cup (c_3, P_3, c'_3) \cup (c'_3, c_4) \cup \dots \cup (c_k, P_k, c'_k) \cup (c'_k, P_k, c_k) \cup (c_k, P_k, c'_k) \cup (c'_k, c_1) \cup (c_1, P_1, c'_1)$  es un

camino cerrado que contiene a todos los vértices de  $G = D[V(\bigcup_{C \in V(\gamma)} C)]$  (ver figura 1.7),

lo que implica que  $G$  es fuertemente conexa, lo cual no es posible, porque cada  $C_i$  es una componente fuertemente conexa en  $D$ .

Por lo tanto,  $D^*$  es acíclica. ■

**Teorema 1.2.2** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Supongamos que  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores. Entonces  $D^*$  no contiene trayectorias infinitas exteriores.*

**Demostración.**

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D^*$  tiene una trayectoria infinita exterior  $T = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Veamos lo que esto implica.

Como  $(C_i, C_{i+1}) \in A(D^*)$  para cada  $i$  en  $\mathbb{N}$ , entonces de la definición de  $D^*$  se tiene que existe una flecha que va de algún vértice de  $C_i$  hacia algún vértice de  $C_{i+1}$ . Así, para cada  $i$  en  $\mathbb{N}$  existen  $c'_i$  en  $V(C_i)$  y  $c_{i+1}$  en  $V(C_{i+1})$  tal que  $(c'_i, c_{i+1}) \in A(D)$ . Por otro lado, puesto que  $C_i$  es fuertemente conexa, para cada  $i$  en  $\mathbb{N}$ , existe una  $c_i c'_i$ -trayectoria para toda  $i$ , digamos  $T_i$ . Notemos que si  $c_i = c'_i$ , entonces  $T_i$  es la trayectoria de longitud cero.

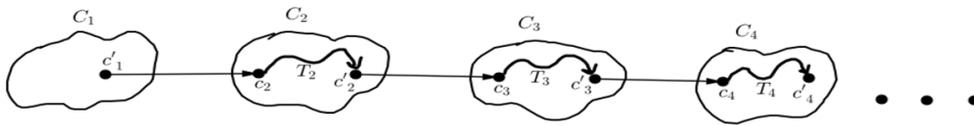


Figura 1.8

Así,  $T = (c'_1, c_2) \cup T_2 \cup (c'_2, c_3) \cup T_3 \cup (c'_3, c_4) \cup T_4 \cup \dots \cup (c'_n, c_{n+1}) \cup T_{n+1} \cup \dots$  es una trayectoria infinita exterior en  $D$  (ver figura 1.8), lo cual contradice la hipótesis de que en  $D$  no hay trayectorias infinitas exteriores.

Por lo tanto,  $D^*$  no tiene trayectorias infinitas exteriores. ■

**Teorema 1.2.3** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces  $D$  contiene al menos una componente fuertemente conexa terminal.*

**Demostración.**

Consideremos a la digráfica de condensación  $D^*$  de  $D$ , la cual por el teorema 1.2.2 sabemos que no tiene trayectorias infinitas exteriores. Ahora, como  $D^*$  es acíclica, se sigue del teorema 1.1.2 que  $D^*$  tiene un vértice de exgrado cero. Puesto que los vértices de  $D^*$  son

---

las componentes fuertemente conexas de  $D$ , entonces los vértices de exgrado cero en  $D^*$  son componentes fuertemente conexas terminales en  $D$ .■



## Cuasinúcleos en digráficas infinitas

---

En este capítulo comenzaremos con un teorema que garantiza la existencia de un cuasinúcleo para cualquier digráfica finita, [3], y nos hacemos la pregunta si es posible que cualquier digráfica infinita tenga cuasinúcleo, así que veremos qué condiciones son necesarias para garantizar su existencia.

Haciendo uso del teorema de compacidad (ver apéndice) veremos que en digráficas posiblemente infinitas podemos obtener un cuasinúcleo si pedimos como condición que cada vértice tenga exgrado finito, [7]. A partir de esto haremos generalizaciones a digráficas infinitas a partir del concepto de digráfica hereditaria y concluiremos con un resultado para digráficas infinitas, con número cromático finito, el cual nos asegura la existencia de cuasinúcleos, [8].

**Definición 2.0.1.** Sea  $D$  una digráfica. Un subconjunto  $Q$  de  $V(D)$  es un cuasinúcleo si cumple: (1) un conjunto independiente; (2) para toda  $x$  en  $V(D)\setminus Q$  existe  $y$  en  $Q$  tal que  $d(x, y) \leq 2$ .

Podemos ligar el concepto de cuasinúcleo al de núcleo si hacemos la siguiente observación.

**Observación 2.0.1.** Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $N$  es un núcleo de  $D$ , entonces  $N$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

**Demostración.**

Sabemos que si  $N$  es un núcleo de  $D$  cumple con ser un conjunto independiente, además absorbe a todos los vértices en  $V(D)\setminus N$  a distancia 1; es decir, que también absorbe a los vértices en  $V(D)\setminus N$  a distancia a lo más 2.

Por lo tanto,  $N$  es un cuasinúcleo de  $D$ . ■

Nos preguntamos si la implicación al revés sería cierta; es decir, si  $N$  es un cuasinúcleo de  $D$  también cumple con ser un núcleo de  $D$ . A continuación veremos un contraejemplo de que esto no es posible.

**Ejemplo:**

Sea  $D$  una digráfica tal que sus vértices son el conjunto  $V(D) = \{x, y, z\}$  y sus flechas  $A(D) = \{(x, y), (y, z)\}$  (ver figura 2.1). En esta digráfica  $\{z\}$  es un cuasinúcleo de  $D$ , ya que  $z$  absorbe a  $x$  y a  $y$  a distancia a lo más 2, sin embargo,  $z$  no puede ser un núcleo de  $D$ , ya que  $z$  no puede absorber a  $x$  a distancia 1.



Figura 2.1

Sabemos que no toda digráfica finita tiene núcleo, pero este no es el caso para los cuasinúcleos. Podemos afirmar que toda digráfica finita tiene cuasinúcleo y esto se debe a Chvátal y Lovász, [3].

**Teorema 2.0.1.** [3] Toda digráfica finita  $D$  contiene un cuasinúcleo.

**Demostración.**

Procederemos por inducción sobre la cardinalidad de  $V(D)$ .

Pasos base: Si  $|V(D)| = 1$ , entonces tenemos que el único vértice es cuasinúcleo de  $D$ .

Si  $|V(D)| = 2$ , entonces supongamos que  $V(D) = \{x, y\}$ . En este caso tenemos tres

posibles digráficas (ver figura 2.2). En  $D_1$  su conjunto de vértices es independiente y  $A(D_1) = \emptyset$ , por lo tanto,  $V(D_1)$  es un cuasinúcleo de  $D_1$ . En  $D_2$  el vértice  $y$  absorbe al vértice  $x$  y el conjunto  $\{y\}$  es independiente, por lo que  $\{y\}$  es un cuasinúcleo de  $D_2$ . En  $D_3$ ,  $\{y\}$  también es un cuasinúcleo.

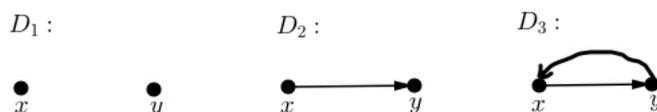


Figura 2.2

Hipótesis de inducción: Si  $D'$  es una digráfica con menos de  $n$  vértices, entonces  $D'$  tiene un cuasinúcleo.

Sean  $D$  una digráfica con  $n$  vértices y  $x_0$  un vértice de  $D$ . Consideremos  $D' = D[V(D) \setminus (\{x_0\} \cup \Gamma_D^-(x_0))]$ .

Veamos dos caso sobre  $D'$ .

Caso 1)  $V(D') = \emptyset$ .

En este caso  $x_0$  es cuasinúcleo de  $D$ .

Caso 2)  $V(D') \neq \emptyset$ .

En este caso, por hipótesis de inducción, tenemos que  $D'$  tiene un cuasinúcleo  $Q$ . Notemos que no existe la  $Qx_0$ -flecha en  $D$  por la construcción de  $D'$ . Además, como  $Q$  es un conjunto independiente en  $D'$  y  $D'$  es subdigráfica inducida de  $D$ , se sigue que  $Q$  es un conjunto independiente en  $D$ . Consideremos dos posibles casos sobre  $Q$  y  $x_0$ .

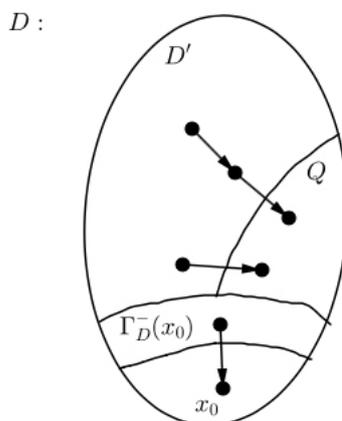


Figura 2.3

Caso A) Existe la  $x_0Q$ -flecha.

En este caso afirmamos que  $Q$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

Puesto que  $\{x_0\}$  absorbe a  $\Gamma_D^-(x_0)$ , entonces existe una trayectoria de longitud a lo más dos de  $\Gamma_D^-(x_0) \cup \{x_0\}$  hacia  $Q$ . Ya que para todo  $x$  en  $V(D') \setminus Q$  existe una trayectoria de longitud a lo más dos de  $x$  hacia  $Q$  (porque  $Q$  es un cuasinúcleo de  $D'$ ), se sigue que  $Q$  es un cuasinúcleo de  $D$ .

Caso B) No existe la  $x_0Q$ -flecha en  $D$ .

En este caso como no existe la  $x_0Q$ -flecha ni la  $Qx_0$ -flecha, por construcción tenemos que  $Q \cup \{x_0\}$  es un conjunto independiente en  $D$ . Ahora, como  $Q$  es un cuasinúcleo en  $D'$  y  $x_0$  absorbe a  $\Gamma_D^-(x_0)$ , se tiene que para todo  $x$  en  $V(D) \setminus (Q \cup \{x_0\})$  existe una trayectoria de longitud a lo más dos hacia  $Q \cup \{x_0\}$ .

Por lo tanto,  $Q$  es un cuasinúcleo de  $D$ . ■

El teorema 2.0.1 no siempre se cumple en digráficas infinitas. Veamos a continuación un ejemplo de una digráfica infinita que no tiene cuasinúcleo, para esto consideremos la digráfica  $D^\sharp$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D^\sharp$  tiene un cuasinúcleo  $Q$ . Sabemos que  $Q$  debe cumplir con ser un conjunto independiente y también sabemos que  $D^\sharp$  es un torneo, con el orden de los naturales, así que  $|Q| = 1$ . Supongamos que  $Q = \{n\}$ , para algún  $n$  en  $\mathbb{N}$ , sabemos que  $n$  absorbe a todos los  $n - 1$  vértices anteriores, por el orden establecido en las flechas de  $D^\sharp$ .

**Afirmación.**  $n + 1$  no es absorbido por  $n$  a distancia a lo más dos.

Note que puesto que  $n < n + 1$ , entonces la flecha  $(n + 1, n)$  no está en  $A(D^\sharp)$ . Por otro lado, como  $Q$  es un cuasinúcleo, entonces existe  $m$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $(n + 1, m, n)$  es una trayectoria de longitud dos en  $D^\sharp$ . Pero esto quiere decir que  $n + 1 < m$  y  $m < n$ , y así por transitividad tenemos que  $n + 1 < n$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $n$  no puede absorber a  $n + 1$  a distancia a lo más dos. Así,  $D^\sharp$  no tiene un cuasinúcleo.

Veremos algunas condiciones que tienen que cumplir las digráficas infinitas para poder encontrar un cuasinúcleo en ellas.

## 2.1 Cuasinúcleos en digráficas exteriormente finitas.

En [8], P. L. Erdős y L. Soukupt mencionan para digráficas posiblemente infinitas que si cada vértice tiene exgrado finito, entonces  $D$  tiene cuasinúcleo. La demostración que presentamos en este trabajo es una prueba que nosotros damos para dicho resultado porque en el artículo no se exhibe ninguna prueba.

**Teorema 2.1.1** ([8]). *Si en una digráfica  $D$  cada vértice tiene exgrado finito, entonces  $D$  tiene un cuasinúcleo.*

**Demostración.**

Por demostrar que existe un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  tal que  $S$  es independiente y para todo  $v$  en  $V(D) \setminus S$  existe  $z$  en  $S$  tal que hay una trayectoria de longitud a lo más dos de  $v$  hacia  $z$  en  $D$ .

Asignamos a cada vértice  $v$  de la digráfica  $D$  una variable  $P_v$  proposicional.

Sea  $x$  un vértice de  $D$ . Consideremos los siguientes conjuntos:  $\Gamma_D^+(x) = \{w_i : i \in \{1, \dots, \delta^+(x)\}\}$  y  $\Gamma_D^+(w_i) = \{w_{i_j} : j \in \{1, \dots, \delta^+(w_i)\}\}$ .

Las fórmulas para cada flecha  $(u, w)$  en  $A(D)$  y para cada vértice  $x$  en  $V(D)$  son las siguientes:

$$\varphi_1((u, w)) = \neg(P_u \wedge P_w)$$

$$\varphi_2(x) = (P_x \vee (P_{w_1} \vee P_{w_{1_1}} \vee \dots \vee P_{w_{1_{(\delta^+(w_1))}}}) \vee (P_{w_2} \vee P_{w_{2_1}} \vee \dots \vee P_{w_{2_{(\delta^+(w_2))}}}) \vee \dots \vee (P_{w_{(\delta^+(x))}} \vee P_{w_{(\delta^+(x))_1}} \vee \dots \vee P_{w_{(\delta^+(x))_{(\delta^+(w_{(\delta^+(x))})})}})).$$

Sea  $\sum$  el conjunto formado por las fórmulas definidas anteriormente.

Por demostrar que para todo subconjunto finito  $\sum_0$  de  $\sum$  existe una asignación de verdad que satisface a todos los elementos de  $\sum_0$ .

**Observación:** Notemos que como  $D$  es exteriormente finita se sigue cada fórmula de  $\sum$  está compuesta por una cantidad finita de símbolos y tiene tantas fórmulas como vértices y flechas tiene la digráfica  $D$ .

Sean  $\sum_0$  un subconjunto finito de  $\sum$  y  $S = \{x \in V(D) : P_x \text{ es un símbolo de alguna fórmula de } \sum_0\}$ .

Sea  $D[S]$  la subdigráfica inducida de  $D$ .

Notemos que  $D[S]$  es una digráfica finita, por la observación y por la elección de  $\sum_0$ . Luego, por el teorema 2.0.1 tenemos que  $D[S]$  tiene un cuasinúcleo  $Q$ .

Consideremos la siguiente asignación de verdad. Asignemos el valor de verdad  $V$  a  $P_\alpha$  solo si  $\alpha \in Q$ . Por demostrar que la asignación de verdad anteriormente dada satisface a  $\sum_0$ ; es decir, para cualquier símbolo de  $\sum_0$  se tiene que  $\varphi_1((u, w)) = V$  y  $\varphi_2(x) = V$ .

Sea  $\varphi_1((u, w))$  un elemento de  $\sum_0$ . Recordemos que  $\varphi_1((u, w)) = \neg(P_u \wedge P_w)$  y consideremos dos caso sobre  $P_u$ .

Caso 1)  $P_u = V$ .

Como  $P_u = V$ , entonces  $u \in Q$ . Por otro lado, como  $Q$  es un conjunto independiente y

$(u, w) \in A(D)$ , entonces  $w \notin Q$ , lo que implica que  $P_w = F$ . Por lo tanto,  $(P_u \wedge P_w) = F$  y  $\neg(P_u \wedge P_w) = V$ .

Caso 2)  $P_u = F$ .

Consideremos dos subcasos para  $P_w$ .

Subcaso 1)  $P_w = V$ .

En este subcaso  $(P_u \wedge P_w) = F$  y  $\neg(P_u \wedge P_w) = V$ .

Subcaso 2)  $P_w = F$ .

En este subcaso  $(P_u \wedge P_w) = F$  y  $\neg(P_u \wedge P_w) = V$ .

Sea  $\varphi_2(x)$  un elemento de  $\sum_0$ . Recordemos que  $\varphi_2(x) = (P_x \vee (P_{w_1} \vee P_{w_{1_1}} \vee \dots \vee P_{w_{1_{(\delta^+(w_1))}}})) \vee (P_{w_2} \vee P_{w_{2_1}} \vee \dots \vee P_{w_{2_{(\delta^+(w_2))}}}) \vee \dots \vee (P_{w_{(\delta^+(x))}} \vee P_{w_{(\delta^+(x))_1}} \vee \dots \vee P_{w_{(\delta^+(x))_{(\delta^+(w_{(\delta^+(x))})})}})$  y consideremos dos caso sobre  $P_x$ .

Caso 1)  $P_x = V$ .

Sabemos que solo es necesario que alguna proposición en  $\varphi_2(x)$  sea verdadera para que  $\varphi_2(x)$  sea verdadera. Como  $P_x = V$  se sigue que  $\varphi_2(x) = V$ .

Caso 2)  $P_x = F$ .

Entonces, como  $Q$  es un cuasinúcleo de  $D[S]$  y  $x \in V(D[S]) \setminus Q$  se tiene que existe algún vértice  $z$  en  $Q$  tal que existe una trayectoria de  $x$  hacia  $z$  de longitud a lo más dos. Como la asignación de verdad de la proposición asociada a  $z$  es verdadera y  $P_z$  es símbolo de  $\varphi_2(x)$  (por la definición de  $\varphi_2(x)$ ) se tiene que como solo es necesario que alguna proposición en  $\varphi_2(x)$  sea verdadera para que la fórmula sea verdadera, entonces  $\varphi_2(x) = V$ .

Por lo tanto, por el teorema de compacidad, existe una asignación de verdad que satisface a todos los elementos de  $\sum$ . Consideremos dicha asignación de verdad y sea  $Q_1 = \{x \in V(D) \mid P_x = V\}$ .

**Afirmación:**  $Q_1$  es cuasinúcleo de  $D$ .

Por demostrar que  $Q_1$  es un conjunto independiente.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $(x, y) \in A(D)$  con  $\{x, y\} \subseteq Q$ . Entonces se tiene que  $P_x = V$  y  $P_y = V$ , lo que implica que  $(P_x \wedge P_y) = V$  y  $\neg(P_x \wedge P_y) = F$ , lo cual es una contradicción porque la asignación de verdad satisface a  $\sum$ . Por lo tanto,  $Q$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Ahora demostraremos que para todo  $x$  en  $V(D) \setminus Q_1$  existe  $y$  en  $Q_1$  tal que hay una trayectoria de longitud a lo más dos de  $x$  hacia  $y$  en  $D$ .

Sea  $x$  en  $V(D) \setminus Q_1$ . Como  $\varphi_2(x) = (P_x \vee (P_{w_1} \vee P_{w_{1_1}} \vee \dots \vee P_{w_{1_{(\delta+(w_1))}}})) \vee (P_{w_2} \vee P_{w_{2_1}} \vee \dots \vee P_{w_{2_{(\delta+(w_2))}}}) \vee \dots \vee (P_{w_{(\delta+(x))}} \vee P_{w_{(\delta+(x))_1}} \vee \dots \vee P_{w_{(\delta+(x))_{(\delta+(w_{(\delta+(x))})})}})) = V$  y  $P_x = F$ , se tiene que existe  $z$  en  $\Gamma_D^+(x) \cup \Gamma_D^+(\Gamma_D^+(x))$  tal que  $P_z = V$ ; es decir,  $z \in Q_1$ . Esto implica que  $x$  está a distancia a lo más dos de  $Q_1$ .

Por lo tanto,  $Q_1$  es un cuasinúcleo de  $D$ . ■

## 2.2 Cuasinúcleos en digráficas infinitas con número cromático finito.

Los resultados de esta subsección se deben a Péter L. Erdos y Lajos Soukup, [8].

Las siguientes definiciones nos serán de utilidad para comprender los resultados dentro de esta sección.

**Definición 2.2.1.** Para  $n$  en  $\mathbb{N}$  definimos a  $\mathfrak{Out}_n$  como la familia de todas las digráficas  $G$  (finitas o infinitas) tales que tienen un conjunto independiente  $A$  con la propiedad de que para cada vértice  $v$  en  $V(G) \setminus A$  hay una trayectoria de longitud a lo más  $n$  de algún vértice de  $A$  hacia  $v$ .

**Definición 2.2.2.** Sean  $G$  una digráfica y  $A$  un subconjunto de  $V(G)$ .  $Out_n^G(A) = \{v \in V(G) : \text{hay una trayectoria de longitud a lo más } n \text{ tal que va de algún vértice de } A \text{ hacia } v \text{ en } G\}$ .

**Definición 2.2.3.**  $G$  es una digráfica hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$  si toda subdigráfica inducida de  $G$  está en  $\mathfrak{Out}_n$ .

De las definiciones anteriores podemos deducir la siguiente observación.

**Observación 2.2.1.** Toda subdigráfica inducida de una digráfica hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$  también es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$ .

### Demostración.

Sea  $D$  una digráfica hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$ . Entonces por definición se tiene que para toda subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ ,  $H$  está en  $\mathfrak{Out}_n$ .

Sea  $H$  una subdigráfica inducida de  $D$ . Por demostrar que toda subdigráfica inducida de  $H$  está en  $\mathfrak{Out}_n$ .

Sea  $G$  una subdigráfica inducida de  $H$ . Como  $G$  es una subdigráfica inducida de  $H$  y  $H$  es una subdigráfica inducida de  $D$ , se tiene que  $G$  es una subdigráfica inducida de  $D$ .

Por lo tanto,  $G$  está en  $\mathfrak{Out}_n$ , porque  $D$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$ . Así,  $H$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$ . ■

**Teorema 2.2.1.** Sean  $G$  una digráfica (posiblemente infinita) y  $n \geq 1$ . Supongamos que  $V(G)$  tienen una partición  $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$  tal que:

- (i)  $G[V_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_{n+1}$ .
- (ii) Para  $1 \leq i < k$ ,  $G[V_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$ .
- (iii)  $k = 0$  o  $G[V_k] \in \mathfrak{Out}_n$ .

Entonces  $G \in \mathfrak{Out}_{n+1}$ .

### Demostración.

Procedemos por inducción sobre  $k$ .

**Base.** Para  $k = 0$  se cumple el teorema 2.2.1, ya que por (i) tenemos que  $G[V_0] = G$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_{n+1}$ ; es decir,  $G[V_0] = G \in \mathfrak{Out}_{n+1}$ .

**Hipótesis de inducción.** Supongamos que si  $G'$  es una gráfica, con  $k \geq 1$ , tal que si  $\{V_0, V_1, \dots, V_{k-1}\}$  es una partición de  $V(G')$  que cumple (i), (ii) y (iii), respecto a  $G'$ , entonces  $G' \in \mathfrak{Out}_{n+1}$ .

**Paso inductivo.** Sean  $G$  una gráfica, con  $k \geq 1$ , y  $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$  una partición de  $V(G)$  que cumple (i), (ii) y (iii), respecto a  $G$ . Como  $G[V_k] \in \mathfrak{Out}_n$  (por (iii) y el hecho de que  $k \geq 1$ ), se tiene que existe un subconjunto  $A_k$  de  $V_k$  tal que  $A_k$  es un conjunto independiente y para todo  $v$  en  $V(G[V_k]) \setminus A_k$  existe una trayectoria de longitud a lo más  $n$  de algún vértice de  $A_k$  hacia  $v$  en  $G[V_k]$ .

**Afirmación 1.**  $A_k \subseteq \text{Out}_n^G(A_k)$ .

Como  $\text{Out}_n^G(A_k) = \{v \in V(G) : \text{hay una trayectoria de longitud a lo más } n \text{ de algún vértice de } A_k \text{ hacia } v \text{ en } G\}$ , se tiene que en particular cualquier vértice de  $A_k$  está a distancia cero de sí mismo, por lo que,  $A_k \subseteq \text{Out}_n^G(A_k)$ .

**Afirmación 2.**  $V_k = \text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k)$ .

Por demostrar que  $\text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k) \subseteq V_k$ . Como  $\text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k) = \{v \in V_k = V(G[V_k]) : \text{hay una trayectoria de longitud a lo más } n \text{ que va de } A_k \text{ hacia } v \text{ en } G[V_k]\}$ , entonces se tiene que  $\text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k) \subseteq V_k$ .

Por demostrar que  $V_k \subseteq \text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k)$ . Sea  $v$  en  $V_k$ ; si  $v \in A_k$ , entonces  $v \in \text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k)$ , por la afirmación 1. Supongamos que  $v \notin A_k$ , entonces de la elección de  $A_k$  se sigue que existe una trayectoria de longitud a lo más  $n$  de  $A_k$  hacia  $v$  en  $G[V_k]$ . Así,  $v \in \text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k)$ .

Por lo tanto,  $V_k = \text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k)$ .

Ahora, sean  $V'_i = V_i \setminus \text{Out}_1^G(A_k)$ , para cada  $0 \leq i < k$ , y  $V' = \bigcup_{i=0}^{k-1} V'_i$  (ver figura 2.4).

Consideremos a la digráfica  $G' = G[V']$ .

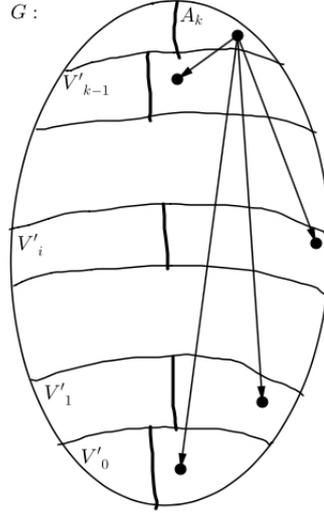


Figura 2.4

**Afirmación 3.** La partición  $\{V'_0, V'_1, \dots, V'_{k-1}\}$  cumple (i), (ii), (iii), respecto a  $G'$ .

Demostraremos que  $G'[V'_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_{n+1}$ .

Como  $G'[V'_0]$  es una subdigráfica inducida de  $G[V_0]$  (ya que  $V'_0 \subseteq V_0$ ) y  $G[V_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_{n+1}$ , se tiene que  $G'[V'_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_{n+1}$  (por la observación 2.2.1).

Por demostrar que  $G'[V'_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$  para cada  $1 \leq i < k - 1$ .

Análogo a lo anterior tenemos que  $G'[V'_i]$  es una subdigráfica inducida de  $G[V_i]$ , porque  $V'_i \subseteq V_i$  para cada  $1 \leq i < k - 1$ . Puesto que  $G[V_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$  se tiene que  $G'[V'_i]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$ , esto para  $1 \leq i < k - 1$  (por la observación 2.2.1).

Por demostrar que  $G'[V'_{k-1}] \in \mathfrak{Out}_n$ .

Supongamos que  $k - 1 > 0$ .

Como  $G'[V'_{k-1}]$  es una subdigráfica inducida de  $G[V_{k-1}]$  (porque  $V'_{k-1} \subseteq V_{k-1}$ ) y  $G[V_{k-1}]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$ , entonces  $G'[V'_{k-1}]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_n$  (por la observación 2.2.1), lo que implica que en particular  $G'[V'_{k-1}] \in \mathfrak{Out}_n$ .

Por lo tanto, la partición  $\{V'_0, V'_1, \dots, V'_{k-1}\}$  cumple (i), (ii), (iii), respecto a  $G'$ .

Así, por hipótesis de inducción,  $G'$  contiene un conjunto independiente  $A'$  tal que para cada vértice  $v$  en  $V' \setminus A'$  hay una trayectoria de longitud a lo más  $n+1$  de  $A'$  hacia  $v$  en  $G = G[V']$ .

**Afirmación 4.**  $V' = \text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A')$ .

Por demostrar que  $\text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A') \subseteq V'$ . Como  $\text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A') = \{v \in V(G[V']) : \text{hay una trayectoria de longitud a lo más } n+1 \text{ que va de } A' \text{ hacia } v \text{ en } G[V']\}$ , entonces se tiene que  $\text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A') \subseteq V'$ .

Por demostrar que  $V' \subseteq \text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A')$ . Sea  $w$  en  $V'$ . Si  $w \in A'$ , entonces  $w \in \text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A')$  (porque de igual forma que en la afirmación 1 también se puede probar que  $A' \subseteq \text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A')$ ). Supongamos que  $v \notin A'$ , se sigue de la elección de  $A'$  que existe una trayectoria de longitud a lo más  $n+1$  de  $A_k$  hacia  $v$  en  $G[V']$ . Así,  $v \in \text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A')$ .

Por lo tanto,  $V' = \text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A')$ .

Sea  $\bar{A} = A' \cup (A_k \setminus \text{Out}_1^G(A'))$  (ver figura 2.5).

**Afirmación 5.**  $\bar{A}$  es un conjunto independiente en  $G$ .

Sabemos que tanto  $A'$  como  $(A_k \setminus \text{Out}_1^G(A'))$  son conjuntos independientes en  $G$ . Ahora falta probar que no hay flechas entre  $A'$  y  $(A_k \setminus \text{Out}_1^G(A'))$ .

Por la construcción de  $V'$  tenemos que no hay una flecha de  $(A_k \setminus \text{Out}_1^G(A'))$  hacia  $A'$  en  $G$ . Luego, de la construcción de  $\bar{A}$  se tiene que no existen flechas de  $A'$  hacia  $(A_k \setminus \text{Out}_1^G(A'))$  (ver figura 2.5).

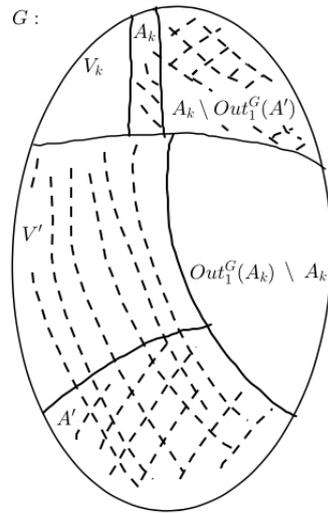


Figura 2.5

Por lo tanto,  $\bar{A}$  es independiente en  $G$ .

**Observación 1.** Notemos que  $Out_{n+1}^{G[V']}(A') \subseteq Out_{n+1}^G(A')$ .

**Afirmación 6.**  $A_k \subseteq Out_1^G(\bar{A})$ .

Sea  $z$  en  $A_k$ . Por demostrar que  $z \in Out_1^G(\bar{A})$ .

Consideremos dos casos sobre  $z$ .

Caso 1)  $z \in Out_1^G(A')$ .

En este caso existe una trayectoria de longitud a lo más 1 de  $A'$  hacia  $z$  en  $G$ . Como  $\bar{A} = A' \cup (A_k \setminus Out_1^G(A'))$  se tiene que existe una trayectoria de longitud a lo más 1 de  $\bar{A}$  hacia  $z$  en  $G$ . Por lo tanto,  $z \in Out_1^G(\bar{A})$ .

Caso 2)  $z \notin Out_1^G(A')$ .

En este caso, como  $\bar{A} = A' \cup (A_k \setminus Out_1^G(A'))$  y  $z \in A_k$  se sigue que  $z \in \bar{A}$ .

Como  $\bar{A} \subseteq Out_1^G(\bar{A})$  (lo cual se puede demostrar de manera análoga que la afirmación 1), entonces  $z \in Out_1^G(\bar{A})$ .

**Afirmación 7.**  $Out_1^G(A_k) \subseteq Out_2^G(\bar{A})$ .

Sea  $z$  en  $Out_1^G(A_k)$ . Consideremos 2 casos sobre  $z$ .

Caso 1)  $z \in A_k$ .

Por la afirmación 6 tenemos que  $z \in Out_1^G(\bar{A})$ . Por otro lado, como  $Out_1^G(\bar{A}) \subseteq Out_2^G(\bar{A})$ , se tiene que  $z \in Out_2^G(\bar{A})$ .

Caso 2)  $z \notin A_k$ .

Como  $z \in Out_1^G(A_k)$ , existe  $w$  en  $A_k$  tal que  $(w, z) \in A(G)$ . Ahora, consideremos dos subcasos sobre  $w$ .

Subcaso 1)  $w \in (A_k \setminus Out_1^G(A'))$ .

En este subcaso como  $\bar{A} = A' \cup (A_k \setminus Out_1^G(A'))$ , se tiene que  $w \in \bar{A}$ . Así,  $z \in Out_2^G(\bar{A})$ .

Subcaso 2)  $w \in Out_1^G(A')$ .

Como  $A_k \cap A' = \emptyset$  (recuerde que  $A' \subseteq V'$ ,  $V' \cap V_k = \emptyset$  y  $A_k \subseteq V_k$ ), existe un  $t$  en  $A'$  tal que  $(t, w) \in A(G)$ . Así, existe una trayectoria de longitud a lo más dos de  $A'$  hacia  $z$  en  $G$ , a saber  $(t, w, z)$ . Luego de la definición de  $\bar{A}$  se tiene que existe una trayectoria de longitud a lo más 2 de  $\bar{A}$  hacia  $z$  en  $G$ . Por lo tanto,  $z \in Out_2^G(\bar{A})$ .

**Afirmación 8.**  $V(G) = \text{Out}_{n+1}^G(\bar{A})$ .

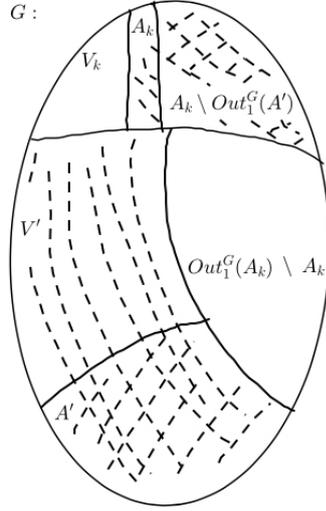


Figura 2.6

Como  $\text{Out}_{n+1}^G(\bar{A}) \subseteq V(G)$ , entonces solo falta probar que  $V(G) \subseteq \text{Out}_{n+1}^G(\bar{A})$ .

Sea  $v$  en  $V(G)$ . Supongamos que  $v \notin \bar{A}$ . Consideremos 4 casos sobre  $v$ .

Caso 1)  $v \in \text{Out}_1^G(A_k) \setminus A_k$ .

En este caso, de la afirmación 7 se sigue que  $v \in \text{Out}_2^G(\bar{A})$ . Ya que  $2 \leq n+1$  se sigue que  $v \in \text{Out}_{n+1}^G(\bar{A})$ .

Caso 2)  $v \in V' \setminus A'$ .

En este caso, de la afirmación 4 se tiene que  $v \in \text{Out}_{n+1}^{G[V']}(A')$ . Así,  $v \in \text{Out}_{n+1}^G(\bar{A})$  (por definición de  $\bar{A}$ ).

Caso 3)  $v \in (A_k \cap \text{Out}_1^G(A'))$ .

De la afirmación 6 se sigue que  $v \in \text{Out}_1^G(\bar{A})$ . Ya que  $1 \leq n+1$  se sigue que  $v \in \text{Out}_{n+1}^G(\bar{A})$ .

Caso 4)  $v \in (V_k \setminus A_k)$ .

En este caso, de la elección de  $A_k$  se tiene que  $v \in \text{Out}_n^G(A_k)$  (porque  $\text{Out}_n^{G[V_k]}(A_k) \subseteq \text{Out}_n^G(A_k)$ ). Sea  $w$  un vértice en  $A_k$  tal que existe una  $wv$ -trayectoria de longitud a lo más  $n$  en  $G$ , digamos  $P$ . Si  $w \in (A_k \setminus \text{Out}_1^G(A'))$ , entonces  $v \in \text{Out}_{n+1}^G(\bar{A})$  (porque  $n < n+1$ ). Por lo tanto, supongamos que  $w \in (A_k \cap \text{Out}_1^G(A'))$ , entonces existe  $z$  en  $A'$  tal que  $(z, w) \in A(G)$ . Así,  $(z, w) \cup P$  contiene una  $zv$ -trayectoria de longitud a lo más  $n+1$  en  $G$ . Como  $A' \subseteq \bar{A}$  (por definición de  $\bar{A}$ ), se sigue que  $v \in \text{Out}_{n+1}^G(\bar{A})$ .

Por lo tanto, de las afirmaciones 5 y 8 se sigue que  $G \in \mathfrak{Out}_{n+1}$ . ■

**Corolario 2.2.1.** *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $D$  tiene número cromático finito, entonces  $D$  tiene un cuasinúcleo.*

**Demostración.**

Sea  $G$  la digráfica obtenida de  $D$  al cambiar la orientación de todas sus flechas.

**Observación 1.** El número cromático de  $G$  es igual al número cromático de  $D$ , ya que solo se está cambiando la orientación de las flechas de  $D$ .

Si  $V(G)$  es un conjunto independiente en  $G$ , entonces  $V(G)$  es un cuasinúcleo de  $G$ . Por lo tanto, supongamos que  $A(G) \neq \emptyset$ .

Sean  $c: V(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$  una mínima coloración propia para los vértices de  $G$  y  $V_i = \{v \in V(G) : c(v) = i\}$  para cada  $0 \leq i \leq k$ . Note que  $V_i$  es un conjunto independiente para toda  $0 \leq i \leq k$ .

Veamos que la partición  $\{V_0, \dots, V_k\}$  satisface las hipótesis del teorema 2.2.1 para  $n = 1$ .

**Observación 2.**  $G[V_i]$  consiste de vértices aislados para toda  $0 \leq i \leq k$  al igual que todas sus subdigráficas inducidas.

1.  $G[V_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_2$ .

Sea  $H$  una subdigráfica inducida de  $G[V_0]$ . Por demostrar que  $H \in \mathfrak{Out}_2$ ; es decir, existe un subconjunto  $B$  de  $V(H)$  tal que para todo  $v$  en  $V(H) \setminus B$  existe una trayectoria de longitud a lo más 2 que va de algún vértice de  $B$  hacia  $v$ . Como  $V(H)$  es un conjunto independiente en  $H$ , entonces  $V(H)$  es el conjunto buscado. Así,  $H \in \mathfrak{Out}_2$ .

Por lo tanto,  $G[V_0]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_2$ .

2. Para  $0 \leq i \leq k$ ,  $G[\{V_i\}]$  es hereditaria en  $\mathfrak{Out}_1$ .

La prueba es análoga a la dada en el punto 1.

3.  $k = 0$  o  $G[V_k] \in \mathfrak{Out}_2$ .

Como  $A(G) \neq \emptyset$ , entonces  $k \geq 1$ . Por demostrar que  $G[V_k] \in \mathfrak{Out}_2$ . La prueba es análoga a la dada en el punto 1.

Por lo tanto, se sigue del teorema 2.2.1 que  $G \in \mathfrak{Out}_2$ ; es decir, existe un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  tal que para todo  $v$  en  $V(G) \setminus S$  existe una trayectoria de longitud a lo más 2 de  $S$  hacia  $v$  en  $G$ .

Por lo tanto,  $S$  es un cuasinúcleo de  $D$ . ■



---

## Chapter 3

# Seminúcleos

---

Recordemos que von Neumann demostró lo siguiente, para digráficas finitas: Si  $D$  no tiene ciclos, entonces  $D$  es núcleo perfecta. Pero Richardson generalizó este resultado, para digráficas finitas, de la siguiente manera: Si  $D$  no tiene ciclos de longitud impar, entonces  $D$  es núcleo perfecta. Richardson se basó en la teoría de Juegos para la demostración de su resultado, sin embargo Neumann dio una demostración más apegada a la teoría de gráficas, basado en el concepto de seminúcleo para la demostración del teorema de Richardson, cabe mencionar que Víctor Neumann es el autor del concepto de seminúcleo, [13]. Daremos una generalización del teorema de Richardson en el capítulo 4, para digráficas infinitas, haciendo uso de algunos resultados de seminúcleos.

En este capítulo veremos algunas condiciones que muestran la existencia de seminúcleos en digráficas infinitas. Posteriormente veremos una condición suficiente y necesaria para garantizar que una digráfica sea núcleo perfecta a partir de la existencia de seminúcleos.

**Lema 3.0.1.** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $N$  es núcleo de  $D$ , entonces  $N$  es seminúcleo de  $D$ .*

**Demostración.**

Como  $S$  es núcleo cumple con ser un conjunto independiente. Así, sólo resta probar que si existe  $x$  en  $V(D)\setminus S$  tal que hay una  $Sx$ -flecha en  $D$ , entonces también existe una  $xS$ -flecha en  $D$ . Como  $S$  absorbe a todos los vértices en  $V(D)\setminus S$ , entonces para cualquier  $x$  en  $V(D)\setminus S$  si existe la  $Sx$ -flecha siempre va a existir también la  $xS$ -flecha en  $D$ .

Por lo tanto  $S$ , es un seminúcleo de  $D$ .■

La siguiente nota será de utilidad en la demostración de algunos teoremas acerca de seminúcleos y núcleos.

**Nota 3.0.1.** *Sea  $D$  una digráfica. El conjunto vacío es seminúcleo de  $D$ .*

**Demostración.**

Como  $S$  es vacío cumple con ser un conjunto independiente y como  $S$  no contiene vértices, se cumple por vacuidad que si existe la  $Sx$ -flecha en  $D$  con  $x \in V(D)\setminus S$ , entonces también existe la  $xS$ -flecha en  $D$ .

Por lo tanto,  $S$  es un seminúcleo de  $D$ .■

**Observación 3.0.1.** *Note que si  $D$  es una digráfica con seminúcleo no vacío y  $\mathcal{C}$  es la familia de todos los seminúcleos de  $D$ , entonces  $(\mathcal{C}, \subseteq)$  es un conjunto parcialmente ordenado y tiene elementos maximales (donde  $\subseteq$  es el orden de contención de conjuntos).*

La demostración es similar a la dada en la observación 1.2.1.

**Lema 3.0.2** ([13]). *Sea  $D$  una digráfica. Si para todo subconjunto no vacío  $V_0$  de  $V(D)$  la subdigráfica inducida por  $V_0$  tiene un seminúcleo no vacío, entonces  $D$  tiene núcleo.*

**Demostración.**

Supongamos que para todo subconjunto no vacío  $V_0$  de  $V(D)$  la subdigráfica inducida por  $V_0$  tiene un seminúcleo no vacío. Probaremos que  $D$  tiene núcleo.

Sean  $S$  un seminúcleo maximal de  $D$  (el cual existe por la observación 3.0.1 y por la hipótesis del lema 3.0.2) y  $\Gamma^-(S)$  el conjunto de los vecinos interiores de  $S$ .

Consideremos  $V_0 = V(D)\setminus(S \cup \Gamma^-(S))$ .

**Afirmación.**  $V_0 = \emptyset$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $V_0 \neq \emptyset$ . Por hipótesis  $D[V_0]$  tiene un seminúcleo no vacío, digamos  $T$ .

Afirmamos que  $S \cup T$  es un seminúcleo de  $D$ ; es decir,  $S \cup T$  es independiente y si existe la  $(S \cup T)x$ -flecha en  $D$  para algún  $x$  en  $V(D) \setminus (S \cup T)$ , entonces existe la  $x(S \cup T)$ -flecha.

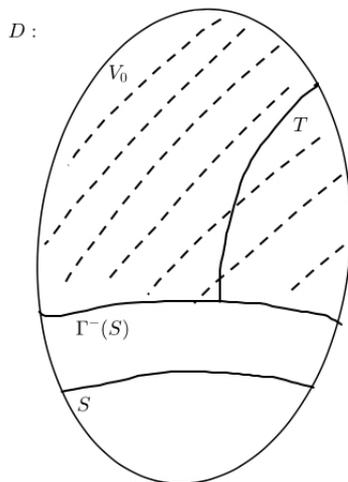


Figura 3.1

1.  $(S \cup T)$  es independiente en  $D$ .

Sabemos que  $S$  y  $T$  son conjuntos independientes por ser seminúcleos. Por construcción de  $V_0$  sabemos que no existe la  $TS$ -flecha. Además, no existe la  $ST$ -flecha, ya que de otro modo implicaría tener la  $TS$ -flecha (por ser  $S$  seminúcleo de  $D$ ), pero esto no es posible. Así,  $S \cup T$  es independiente en  $D$ .

2. Sea  $x$  en  $V(D) \setminus (S \cup T)$  tal que existe una  $(S \cup T)x$ -flecha en  $D$ . Veremos que existe la  $x(S \cup T)$ -flecha en  $D$ .

Supongamos que existe la  $(S \cup T)x$ -flecha. Tenemos dos casos sobre  $x$  (si  $x \in \Gamma^-(S)$  o si  $x \notin \Gamma^-(S)$ ).

Caso 1.  $x \in \Gamma^-(S)$ .

Por definición de  $\Gamma^-(S)$  se tiene que existe la  $xS$ -flecha, y puesto que  $S \subseteq (S \cup T)$ , entonces existe la  $x(S \cup T)$ -flecha.

Caso 2.  $x \notin \Gamma^-(S)$ .

En este caso,  $x \in V_0 \setminus T$  (ver figura 3.1). Como  $T$  es seminúcleo de  $D[V_0]$ , tenemos que existe la  $xT$ -flecha en  $D[V_0]$ . Puesto que  $T \subseteq (S \cup T)$ , entonces tenemos la  $x(S \cup T)$ -flecha en  $D$ .

Por lo tanto,  $(S \cup T)$  es un seminúcleo de  $D$ .

Como  $T \neq \emptyset$  (por hipótesis), entonces  $S \subset S \cup T$ , lo cual nos lleva a una contradicción, ya que  $S$  es un seminúcleo maximal de  $D$ . Así,  $V_0 = \emptyset$ .

Como  $V_0 = \emptyset$ , entonces de la definición de  $V_0$  tenemos que  $S$  es un núcleo de  $D$ .

Por lo tanto,  $D$  tiene núcleo. ■

**Teorema 3.0.1** ([13]). (*Neumann-Lara*) *Una digráfica  $D$  es núcleo perfecta si y solo si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo no vacío.*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $D$  es núcleo perfecta.

Por definición sabemos que si  $D$  es núcleo perfecta, entonces toda subdigráfica inducida  $H$  de  $D$  tienen un núcleo  $M_H$ , el cual ya sabemos que es un seminúcleo de  $H$ . Como el núcleo es distinto del vacío, entonces cada seminúcleo  $S_H$  es distinto del vacío.

Por lo tanto, tenemos que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo no vacío.

$\Leftarrow$ ] Como para todo subconjunto  $V_0$  de  $V(D)$  la digráfica  $D[V_0]$  tiene un seminúcleo no vacío (por la hipótesis del teorema 3.0.1), se sigue del lema 3.0.2 que  $D$  tiene un núcleo.

Ahora veamos que toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene un núcleo.

Sean  $D'$  una subdigráfica inducida propia de  $D$  y  $S$  un seminúcleo maximal de  $D'$  (el cual sabemos que existe por hipótesis). Afirmamos que  $S$  es un núcleo de  $D'$ . Veremos que  $S$  cumple con ser independiente y absorbente.

- $S$  es un conjunto independiente en  $D'$ .

Como  $S$  es un seminúcleo de  $D'$ , entonces es un conjunto independiente en  $D'$ .

- $S$  es un conjunto absorbente en  $D'$ .

Consideremos  $V_0 = V(D') \setminus (S \cup \Gamma_{D'}^-(S))$ . Procediendo como en el lema 3.0.2 llegamos a que  $V_0 = \emptyset$ , lo que implica que  $S$  es un conjunto absorbente en  $D'$ .

Así  $D'$  tiene núcleo.

Como tomamos  $D'$  arbitraria, en general toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo, lo que implica que  $D$  es núcleo perfecta. ■

El siguiente resultado será útil para la generalización del teorema de Richardson en digráficas infinitas.

**Teorema 3.0.2** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores y no contiene ciclos de longitud impar, entonces  $D$  tiene un seminúcleo no vacío.*

**Demostración.**

Como  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces, por el teorema 1.2.3,  $D$  tienen una componente terminal fuertemente conexa, llamémosle  $C$ . Tenemos dos casos sobre  $C$ .

Caso a)  $|V(C)| = 1$ .

En este caso  $C$  tiene un solo vértice el cual es un seminúcleo para  $D$ .

Caso b)  $|V(C)| > 1$ .

Sean  $x_0$  en  $V(C)$  fijo y  $x_1$  en  $V(C)$  arbitrario, con  $x_0 \neq x_1$ .

**Observación 1.** Como  $C$  es una componente terminal fuertemente conexa, todas las trayectorias de  $x_0$  hacia  $x_1$  y de  $x_1$  hacia  $x_0$  están contenidas en  $C$ .

**Afirmación 1.** Todas las trayectorias de  $x_0$  hacia  $x_1$  y de  $x_1$  hacia  $x_0$  tienen la misma paridad.

Procediendo por contradicción, supongamos que existen  $T_1$  una  $x_0x_1$ -trayectoria y  $T_2$  una  $x_1x_0$ -trayectoria de distinta paridad. Entonces  $T_1 \cup T_2$  es un camino cerrado de longitud impar y este camino contiene un ciclo de longitud impar (por el teorema 0.7.4), el cual estaría contenido en  $D$ , lo cual no es posible por nuestra hipótesis.

**Afirmación 2.** Para todo  $v$  en  $V(C)$  se tiene que las  $x_0v$ -trayectorias y las  $vx_0$ -trayectorias están contenidas en  $C$  y tienen la misma paridad.

La demostración es análoga a la de la observación 1 y la afirmación 1.

Sea  $S = \{x \in V(C) \mid \text{existe } x_0x \text{ -trayectoria de longitud par contenida en } C\}$

**Afirmación 3.**  $S$  es un seminúcleo no vacío de  $D$ .

i)  $S$  es un conjunto independiente.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $S$  no es un conjunto independiente. Sea  $\{y_1, y_2\}$  un subconjunto de  $S$  tal que  $(y_1, y_2) \in A(D)$ .

Observemos que como  $\{y_1, y_2\} \subseteq S$ , entonces existe  $T_1$  una  $x_0y_1$ -trayectoria de longitud par y  $T_2$  una  $x_0y_2$ -trayectoria de longitud par, ambas contenidas en  $C$ .

Como  $C$  es fuertemente conexa existe una  $y_2x_0$ -trayectoria en  $C$ , digamos  $T_3$ . Como  $T_2$  es de longitud par, entonces  $T_3$  es de longitud par, (por la afirmación 2). Por lo tanto,  $T_3 \cup T_1 \cup (y_1, y_2)$  es un camino cerrado de longitud impar el cual contiene un ciclo de longitud impar, lo cual no es posible por nuestra hipótesis. Por lo tanto,  $S$  es un conjunto independiente.

ii) Sea  $v$  en  $V(D) \setminus S$  arbitrario. Veamos que si existe la  $Sv$ -flecha, entonces existe la  $vS$ -flecha en  $D$ .

**Observación 2.** Si existe una  $Sv$ -flecha para algún  $v$  en  $V(D) \setminus S$ , entonces  $v \in V(C)$  (porque  $S \subseteq C$  y  $C$  es una componente terminal fuertemente conexa).

Supongamos que existe la  $Sv$ -flecha. Como existe la  $Sv$ -flecha, existe un  $w \in S$  tal que  $(w, v) \in A(D)$ , además existe una  $x_0w$ -trayectoria de longitud par, digamos  $T = (x_0 = u_0, u_1, \dots, u_{2n} = w)$  para algún  $n$  en  $\mathbb{N}$ .

**Observación 3.** Como  $v \notin S$ , entonces todas las  $x_0v$ -trayectorias son de longitud impar en  $C$ .

Tenemos dos casos sobre  $v$ .

Caso 1)  $v \in V(T)$ .

Como  $v \in V(T)$  se tiene que  $v = u_i$  para algún  $i$  en  $\{1, \dots, 2n - 1\}$  y por la observación 3 tenemos que  $T' = (x_0 = u_0, \dots, u_i = v, u_{i+1})$  es una  $x_0u_{i+1}$ -trayectoria de longitud par (ver figura 3.2), por lo que  $u_{i+1} \in S$ . Por lo tanto, existe la  $vS$ -flecha.

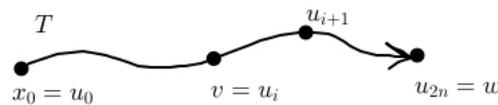


Figura 3.2

Caso 2)  $v \notin V(T)$ .

Como  $v \in V(C)$  y  $C$  es fuertemente conexa entonces  $\delta^+(v) \neq 0$ , por lo que existe  $z$  en  $V(C)$  tal que  $(v, z) \in A(D)$ . Tenemos dos casos sobre  $z$ .

Subcaso a)  $z \notin V(T)$ .

Como  $z \notin V(T)$  tenemos que  $T \cup (w, v) \cup (v, z)$  es una trayectoria de longitud par contenida en  $C$ , por lo que  $z \in S$  (ver figura 3.3).

Por lo tanto, existe la  $vS$ -flecha.



Figura 3.3

Subcaso b)  $z \in T$

Como  $z \in T$ , tenemos que  $z = u_j$  para algún  $j \in \{0, \dots, 2n\}$  (ver figura 3.4).

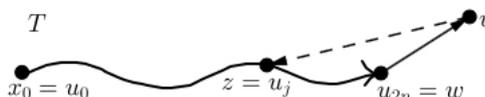


Figura 3.4

Afirmamos que  $T' = (x_0 = u_0, \dots, u_j = z)$  es una trayectoria de longitud par. De otra manera, tendríamos que  $T'' = (z = u_j, u_{j+1}, \dots, w)$  es una trayectoria de longitud impar, ya que  $T$  es de longitud par. Lo que implica que,  $T'' \cup (w, v) \cup (v, z)$  es un ciclo de longitud impar lo cual no puede suceder por nuestra hipótesis. Así, la longitud de  $T'$  es par, por lo que  $z \in S$ . Por lo tanto, existe la  $vS$ -flecha.

De (i) y (ii) tenemos que  $S$  es un seminúcleo no vacío de  $D$ . ■

**Teorema 3.0.3** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si cada ciclo y cada trayectoria infinita exterior tienen una flecha simétrica, entonces existe  $u$  en  $V(D)$ , tal que  $\{u\}$  es un seminúcleo de  $D$ .*

#### **Demostración.**

Como  $\{u\}$  es un conjunto independiente para cada  $u$  en  $V(D)$ , nos resta probar que hay un vértice  $v$  en  $V(D)$  tal que  $\{v\}$  es un seminúcleo de  $D$ . Procedemos por contradicción, supongamos que para todo  $v$  en  $V(D)$  existe  $w$  en  $V(D) \setminus \{v\}$ , tal que existe la  $vw$ -flecha y no existe la  $wv$ -flecha.

Consideremos  $x_1$  en  $V(D)$ , como  $\{x_1\}$  no es un seminúcleo de  $D$ , entonces existe  $x_2$  en  $V(D)$  tal que  $(x_1, x_2) \in A(D)$  y  $(x_2, x_1) \notin A(D)$ . Como  $\{x_2\}$  no es un seminúcleo de  $D$  y  $(x_2, x_1) \notin A(D)$ , entonces existe  $x_3$  en  $V(D) \setminus \{x_1\}$  tal que  $(x_2, x_3) \in A(D)$  y  $(x_3, x_2) \notin A(D)$ . Como  $\{x_3\}$  no es un seminúcleo de  $D$  y  $(x_3, x_2) \notin A(D)$ , entonces existe  $x_4$  en  $V(D) \setminus \{x_2\}$  tal que  $(x_3, x_4) \in A(D)$  y  $(x_4, x_3) \notin A(D)$ . Siguiendo con este procedimiento, tenemos que para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , dado  $x_n$  en  $V(D)$  existe  $x_{n+1}$  en  $V(D) \setminus \{x_{n-1}\}$  tal que  $(x_n, x_{n+1}) \in A(D)$  y  $(x_{n+1}, x_n) \notin A(D)$ . Consideremos la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y veamos

dos casos:

**Caso 1.**  $x_i \neq x_j$ , para todo  $i$  distinto de  $j$ .

En este caso  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  es una trayectoria infinita exterior asimétrica, ya que por construcción  $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$ , para todo  $i$  en  $\mathbb{N}$ . Por lo que llegamos a una contradicción, debido a que por hipótesis cada trayectoria infinita exterior tiene una flecha simétrica.

**Caso 2.** Existen dos índices distintos  $i$  y  $j$  en  $\mathbb{N}$  tales que  $x_i = x_j$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $i < j$ . Entonces  $C = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i)$  es un camino cerrado asimétrico en  $D$ . Luego, por el teorema 0.7.3,  $C$  contiene un ciclo  $\gamma$  el cual es asimétrico, por construcción de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pero esto es una contradicción, ya que por hipótesis cada ciclo tiene una flecha simétrica.

Por lo tanto, como el caso 1 y el caso 2 producen una contradicción, se tiene que existe  $u$  en  $V(D)$  tal que  $\{u\}$  es un seminúcleo de  $D$ . ■

# Núcleos en digráficas infinitas

Recordemos que las siguientes condiciones en digráficas finitas garantizan la existencia de núcleos.

Sea  $D$  una digráfica finita tal que:

1.  $D$  no tiene ciclos.
2.  $D$  no tiene ciclos de longitud impar.
3.  $D$  es transitiva.
4.  $D$  es asimétrica.

Sin embargo, existen digráficas infinitas que cumplen las hipótesis anteriores pero no tienen núcleo. Para ver esto, consideremos de nuevo a la digráfica  $D^\sharp$ .

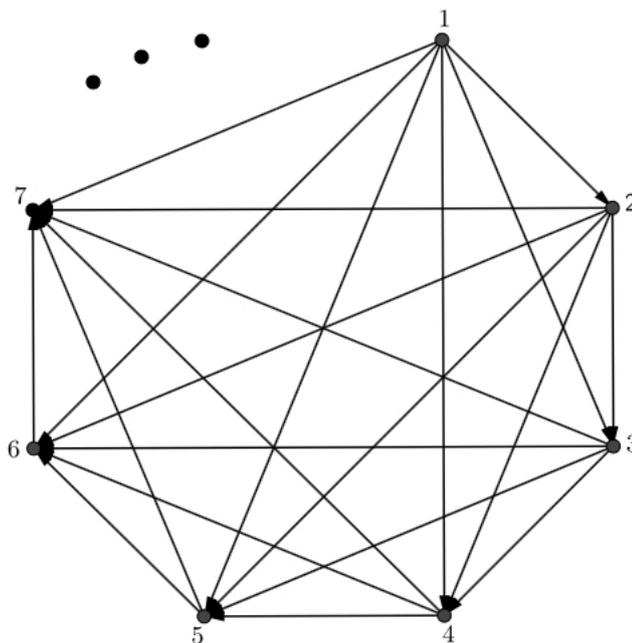


Figura 4.1:  $D^\sharp$

$D^\#$  satisface las siguientes propiedades:

**Afirmación 1.**  $D^\#$  es transitiva.

Sea  $\{(i, j), (j, k)\}$  un subconjunto de  $A(D^\#)$ . Como  $(i, j) \in A(D^\#)$  se tiene que  $i < j$ . Análogamente, como  $(j, k) \in A(D^\#)$  se tiene que  $j < k$ . Así, por transitividad de los naturales se tiene que  $i < k$ , lo que implica que  $(i, k) \in A(D^\#)$ .

**Afirmación 2.**  $D^\#$  es asimétrica.

Supongamos que existe una flecha simétrica, digamos  $(i, j)$  en  $D^\#$ . Como  $(i, j) \in A(D^\#)$  se tiene que  $i < j$ . Por otro lado, como  $(j, i) \in A(D^\#)$  se tiene que  $j < i$ , lo que implica que  $i < i$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $D^\#$  es asimétrica.

**Afirmación 3.**  $D^\#$  es acíclica.

Como  $D^\#$  es transitiva y asimétrica, por el teorema 1.1.3 se tiene que  $D^\#$  es acíclica.

**Afirmación 4.**  $D^\#$  no tiene ciclos impares.

Por la afirmación 3 se tiene que en particular  $D^\#$  no tiene ciclos impares.

**Afirmación 5.**  $D^\#$  no tiene núcleo.

Notemos que todo conjunto independiente en  $D^\#$  consiste de un solo vértice (por definición de  $D^\#$ ). Ahora, procediendo por contradicción, supongamos que  $D^\#$  tiene un núcleo, digamos  $\{n\}$ . Como  $\{n\}$  es un conjunto absorbente, entonces en particular  $\{n\}$  absorbe a  $n + 1$ ; es decir,  $(n + 1, n) \in A(D^\#)$ , lo que implica que  $n + 1 < n$  (por definición de  $D^\#$ ), lo cual no es posible.

Debido a lo anterior, la pregunta es: ¿Qué condiciones extra se deben añadir a una digráfica (posiblemente infinita  $D$ ) para que ésta tenga núcleo? En este capítulo esta pregunta se responderá parcialmente en las subsecciones 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5. En la subsección 4.1 se verán algunas propiedades importantes de los núcleos.

## 4.1 Algunas propiedades de núcleos en digráficas infinitas.

La siguiente proposición nos será de utilidad para encontrar conjuntos independientes maximales.

**Proposición 4.1.1** ([16]). *Sea  $\mathcal{I}$  la familia de conjuntos independientes de una digráfica  $D$ , posiblemente infinita. Entonces  $(\mathcal{I}, \subseteq)$  es un conjunto parcialmente ordenado, y se sigue del Lema de Zorn que  $(\mathcal{I}, \subseteq)$  tienen un elemento maximal.*

### **Demostración.**

Es claro que  $\mathcal{I}$  es parcialmente ordenado por  $\subseteq$ .

Por demostrar que toda cadena en  $(\mathcal{I}, \subseteq)$  tiene una cota superior en  $\mathcal{I}$ . Sea  $\mathcal{C}$  una cadena en  $(\mathcal{I}, \subseteq)$ . Por demostrar que  $\mathcal{C}$  tienen una cota superior en  $\mathcal{I}$ .

Consideremos  $\mathcal{C}^\infty = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ .

**Afirmación 1.**  $\mathcal{C}^\infty$  es una cota superior de  $\mathcal{C}$ .

Sea  $A \in \mathcal{C}$ . De la construcción de  $\mathcal{C}^\infty$  se sigue que  $A \subseteq \mathcal{C}^\infty$ . Por lo tanto,  $\mathcal{C}^\infty$  es una cota superior de  $\mathcal{C}$ .

**Afirmación 2.**  $\mathcal{C}^\infty \in \mathcal{I}$ .

Por demostrar que  $\mathcal{C}^\infty$  es un conjunto independiente. Sean  $x$  y  $y$  dos vértices en  $\mathcal{C}^\infty$ . Entonces existen  $X$  y  $Y$  en  $\mathcal{C}$  tales que  $x \in X$  y  $y \in Y$ . Como  $\mathcal{C}$  es una cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $X \subseteq Y$ . Así  $\{x, y\} \subseteq Y$ . Como  $Y$  es un conjunto independiente, no existen flechas entre  $x$  y  $y$  en  $D$ . Por lo tanto,  $\mathcal{C}^\infty$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Así, de las afirmaciones 1 y 2 se sigue que  $\mathcal{C}$  tiene una cota superior en  $\mathcal{I}$ . Por lo tanto, del Lema de Zorn,  $(\mathcal{I}, \subseteq)$  tiene un elemento maximal. ■

**Observación 4.1.1.** *Sea  $D$  una digráfica. Un subconjunto  $N$  de vértices de  $D$  es un núcleo si y solo si  $N$  es un conjunto independiente maximal y absorbente minimal.*

**Demostración.** Sea  $N$  un núcleo de  $D$ .

( $\Rightarrow$ ) Por demostrar que  $N$  es independiente maximal y absorbente minimal.

- $N$  es un conjunto independiente maximal.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un subconjunto  $K$  de  $V(D)$  tal que  $K$  es un conjunto independiente y  $N \subset K$ . Puesto que  $N$  es un subconjunto propio de  $K$  se sigue que existe  $k$  en  $K$  tal que  $k \notin N$ . Así, del hecho que  $N$  es un conjunto absorbente en  $D$ , tenemos que existe  $u$  en  $N$  tal que  $(k, u) \in A(D)$ , lo cual contradice que  $K$  es un conjunto independiente (porque  $\{k, u\} \subseteq K$ ).

Por lo tanto,  $N$  es independiente maximal.

- $N$  es un conjunto absorbente minimal.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un subconjunto  $T$  de  $V(D)$  tal que  $T$  es un conjunto absorbente y  $T \subset N$ . Puesto que  $T$  es un subconjunto propio de  $N$  se sigue que existe  $v$  en  $N$  tal que  $v \notin T$ . Así, del hecho que  $T$  es un conjunto absorbente en  $D$ , tenemos que existe  $u$  en  $T$  tal que  $(v, u) \in A(D)$ , lo cual contradice que  $N$  es un conjunto independiente (porque  $\{v, u\} \subseteq N$ ).

Por lo tanto,  $N$  es absorbente minimal.

( $\Leftarrow$ ) Como, en particular,  $N$  es un conjunto independiente y absorbente en  $D$ , se tiene que  $N$  es núcleo de  $D$ . ■

Las condiciones de que  $N$  sea independiente maximal y absorbente minimal son necesarias, veamos que si quitamos alguna de estas no se cumple el resultado.

**Observación 4.1.2.** Sean  $D$  una digráfica y  $N$  un subconjunto de  $V(D)$ . Si  $N$  es un conjunto independiente maximal, entonces  $N$  no necesariamente es un núcleo. Por ejemplo, consideremos a la digráfica  $D$  donde  $V(D) = \{a, b, c\}$  y  $A(D) = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$  (ver figura 4.2). En esta digráfica cualquier conjunto independiente maximal contiene sólo un vértice el cual no puede ser núcleo ya que sólo absorbe al vecino interior.

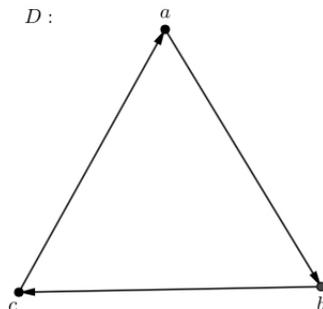


Figura 4.2

**Observación 4.1.3.** Sean  $D$  una digráfica y  $N$  un subconjunto de  $V(D)$ . Si  $N$  es un conjunto absorbente minimal, entonces  $N$  no necesariamente es un núcleo. Análogo al ejemplo anterior, consideremos la misma digráfica. Cualquier conjunto absorbente minimal

en  $D$  contiene solo dos vértices, el cual no puede ser núcleo ya que no es independiente. Por tal motivo  $D$  no tiene núcleo.

**Observación 4.1.4.** Sean  $D$  una digráfica simétrica (posiblemente infinita) y  $N$  un subconjunto de  $V(D)$ .  $N$  es un núcleo si y solo si  $N$  es un conjunto independiente maximal.

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ] Por demostrar que  $N$  es independiente maximal.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  no es un conjunto independiente maximal. Entonces, existe un subconjunto independiente  $N'$  de  $V(D)$  tal que  $N \subset N'$  (por proposición 4.1.1). Como  $N \subset N'$ , se tiene que existe  $x$  en  $N'$  tal que  $x \notin N$ . Puesto que  $N$  es núcleo de  $D$ , existe  $y$  en  $N$  tal que  $(x, y) \in A(D)$ . Así, existen dos vértices en  $N'$  tal que entre ellos hay una flecha, lo cual no puede suceder porque  $N'$  es independiente. Por lo tanto,  $N$  es un conjunto independiente maximal.

$\Leftarrow$ ] Por demostrar que  $N$  es núcleo.

Como, por hipótesis,  $N$  es independiente, entonces solo falta probar que  $N$  es absorbente. Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $x$  en  $V(D) \setminus N$  tal que ese vértice no es absorbido por  $N$ ; es decir, no existe la  $xN$ -flecha. Como  $D$  es simétrica y no existe la  $xN$ -flecha, entonces no existe la  $Nx$ -flecha. Así,  $N \cup \{x\}$  es un conjunto independiente que contiene propiamente a  $N$ . Esto es una contradicción, ya que  $N$  es un conjunto independiente maximal. Por lo tanto,  $N$  es un conjunto absorbente. Lo que implica que  $N$  es núcleo de  $D$ . ■

## 4.2 Núcleos en digráficas bipartitas.

**Teorema 4.2.1** ([13]). Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $D$  es bipartita, entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.**

Demostraremos que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío.

Sea  $H$  una subdigráfica inducida de  $D$ . Si  $|V(H)| = 1$ , entonces  $V(H)$  es un seminúcleo no vacío de  $H$ . Por lo tanto, supongamos que  $|V(H)| \geq 2$ . Note que  $H$  también es una digráfica bipartita. Si  $H$  tiene un vértice de exgrado cero en  $H$ , digamos  $v$ , entonces  $\{v\}$  es un seminúcleo no vacío de  $H$ . Así, supongamos que todo vértice de  $H$  tiene exgrado al menos uno en  $H$ . Sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(H)$  en conjuntos independientes.

**Afirmación.**  $V_1$  es un seminúcleo de  $H$ .

Como  $V_1$  es un conjunto independiente en  $H$ , entonces solo resta probar que si existen  $u$  en  $V_1$  y  $v$  en  $V(H) \setminus V_1$  tales que  $(u, v) \in A(H)$ , entonces existe  $w$  en  $V_1$  tal que  $(v, w) \in A(H)$ .

Sean  $u$  en  $V_1$  y  $v$  en  $(V(H) \setminus V_1) = V_2$  tales que  $(u, v) \in A(H)$ . Como  $v$  tiene exgrado al menos uno y  $V_2$  es un conjunto independiente, entonces existe  $w$  en  $V_1$  tal que  $(v, w) \in A(H)$ .

Por lo tanto,  $V_1$  es un seminúcleo de  $H$ . Así,  $H$  tiene un seminúcleo no vacío.

Por lo tanto, se sigue del teorema 3.0.1 que  $D$  es núcleo perfecta.

### 4.3 Núcleos en digráficas exteriormente finitas.

En el siguiente teorema veremos condiciones suficientes para que una digráfica exteriormente finita cumpla con ser núcleo perfecta, para su demostración usaremos el teorema de compacidad y las definiciones de lógica mencionadas en el apéndice. Dicho teorema se debe a P. Duchet y H. Meyniel, [6].

Recordemos que una digráfica es exteriormente finita si todos sus vértices tienen exgrado finito.

**Teorema 4.3.1.** *Una digráfica exteriormente finita es núcleo perfecta si y solo si toda subdigráfica inducida finita tiene núcleo.*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ] Sea  $H$  una subdigráfica inducida y finita de  $D$ . Como  $D$  es núcleo perfecta, entonces toda subdigráfica inducida tiene núcleo, en particular  $H$  tiene núcleo.

$\Leftarrow$ ] Para demostrar el regreso, asignemos a cada vértice  $z$  de  $D$  una variable proposicional  $P_z$ . Las fórmulas para cada flecha  $(u, w)$  y cada vértice  $x$  de  $D$  son las siguientes:

$$\varphi_1((u, w)) = \neg(P_u \wedge P_w).$$

$$\varphi_2(x) = P_x \vee P_{w_1} \vee P_{w_2} \vee \dots \vee P_{w_{\delta^+(x)}} \text{ para cada vértice } x \in V(D), \text{ donde } \Gamma_D^+(x) = \{w_1, \dots, w_{\delta^+(x)}\}.$$

Observe que  $\varphi_2(x)$  consiste de un número finito de proposiciones porque  $D$  es exteriormente finita.

Sea  $\Sigma$  el conjunto formado por las fórmulas definidas anteriormente. Notemos que  $\Sigma$  tiene tantos elementos como vértices y flechas tiene la digráfica  $D$ .

Por demostrar que para todo subconjunto finito  $\Sigma_0$  de  $\Sigma$  existe una asignación de verdad que satisface a todos los elementos de  $\Sigma_0$ .

Sean  $\Sigma_0$  un subconjunto finito de  $\Sigma$  y  $S = \{y \in V(D) \mid P_y \text{ es un símbolo de alguna fórmula de } \Sigma_0\}$ .

**Afirmación 1.**  $S$  es un conjunto finito.

Como  $D$  es exteriormente finita, se sigue que cada fórmula de  $\sum$  está compuesta por una cantidad finita de símbolos. Y puesto que  $\sum_0$  es finito se concluye que  $S$  es un conjunto finito.

Sea  $D[S]$ , la subdigráfica inducida por  $S$  en  $D$ , la cual tiene núcleo por hipótesis. Sea  $N$  un núcleo de  $D[S]$ . Asignemos el valor de verdad  $V$  a  $P_z$  solo si  $z \in N$ .

Veamos que esta asignación de verdad satisface a todos los elementos de  $\sum_0$ .

Sea  $\varphi_1((u, w)) = \neg(P_u \wedge P_w)$  un elemento de  $\sum_0$ . Veamos dos caso sobre  $P_u$ .

Caso 1)  $P_u = V$ .

En este caso  $P_w = F$ , porque  $N$  es un conjunto independiente. Así,  $(P_u \wedge P_w) = F$  y  $\neg(P_u \wedge P_w) = V$ .

Caso 2)  $P_u = F$ .

Consideremos dos subcasos para  $P_w$ .

Subcaso 1)  $P_w = V$ .

En este subcaso  $(P_u \wedge P_w) = F$  y  $\neg(P_u \wedge P_w) = V$ .

Subcaso 2)  $P_w = F$ .

En este subcaso  $(P_u \wedge P_w) = F$  y  $\neg(P_u \wedge P_w) = V$ .

Ahora, sea  $\varphi_2(x) = P_x \vee P_{w_1} \vee P_{w_2} \vee P_{w_{\delta^+(x)}}$  un elemento de  $\sum_0$ , donde  $\Gamma_D^+(x) = \{w_1, \dots, w_{\delta^+(x)}\}$ . Veamos dos casos sobre  $P_x$ .

Caso 1)  $P_x = V$ .

En este caso tenemos que  $x \in N$ , lo que implica que  $\Gamma_D^+(x) \cap N = \emptyset$ . Así,  $P_{w_i} = F$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, \delta^+(x)\}$ . Por lo tanto,  $\varphi_2(x) = V$ .

Caso 2)  $P_x = F$ .

En este subcaso, como  $N$  es núcleo de  $D[S]$  y  $x \in V(D[S]) \setminus N$  se tiene que existe algún vértice  $w_i$  en  $N$  tal que  $(x, w_i) \in A(D)$ , lo que implica que  $P_{w_i} = V$ . Por lo tanto,  $\varphi_2(x) = V$ .

Por lo tanto, por el teorema de compacidad, existe una asignación de verdad que satisface a todos los elementos de  $\sum$ . Consideremos dicha asignación de verdad.

Sea  $N_1 = \{x \in V(D) \mid P_x = V\}$ .

**Afirmación 2.**  $N_1$  es un núcleo de  $D$ .

Por demostrar que  $N_1$  es un conjunto independiente en  $D$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $(y, x) \in A(D)$ , para algún subconjunto  $\{x, y\}$  de  $N$ . Entonces  $P_y = V$  y  $P_x = V$ , lo que implica que  $(P_y \wedge P_x) = V$  y  $\neg(P_y \wedge P_x) = F$ , lo cual es una contradicción (porque la asignación de verdad satisface a todos los elementos de  $\Sigma$ ). Por lo tanto,  $N_1$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Por demostrar que  $N_1$  es un conjunto absorbente. Sea  $z \in V(D) \setminus N_1$ , entonces  $P_z = F$ . Por otro lado, como la asignación de verdad sobre la que estamos trabajando satisface a todos los elementos de  $\Sigma$ , se sigue que en particular  $P_z \vee P_{w_1} \vee P_{w_2} \vee P_{w_{\delta^+(z)}}$ , con  $\{w_1, \dots, w_{\delta^+(z)}\} = \Gamma_D^+(z)$ , es verdadera. Lo que implica que algún  $P_{w_i}$  es verdadera, con  $i \in \{1, \dots, \delta^+(z)\}$ . Por lo tanto,  $w_i \in N_1$  y  $(z, w_i) \in A(D)$ . Así,  $N_1$  es un conjunto absorbente en  $D$ .

Por lo tanto,  $N_1$  es núcleo de  $D$ . ■

## 4.4 Núcleos y ciclos.

**Teorema 4.4.1** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si cada ciclo y cada trayectoria infinita exterior tienen una flecha simétrica, entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.*

### Demostración.

Veremos que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío. Sea  $D'$  una subdigráfica inducida de  $D$ . Como en  $D$  todo ciclo y toda trayectoria infinita exterior tienen una flecha simétrica, entonces por la definición de subdigráfica inducida se tiene que en  $D'$  toda trayectoria infinita exterior y todo ciclo tienen una flecha simétrica. Así, por el teorema 3.0.3 se tiene que  $D'$  posee núcleo.

Por lo tanto,  $D$  es núcleo perfecta. ■

**Corolario 4.4.1** ([16]). *Si  $D$  es una digráfica simétrica (posiblemente infinita), entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.*

### Demostración.

Como  $D$  es una digráfica simétrica, entonces todos sus ciclos y sus trayectorias infinitas exteriores tienen al menos una flecha simétrica, por lo que  $D$  es núcleo perfecta (por el teorema 4.4.1). ■

Del resultado obtenido en el corolario 4.4.1 se sigue que cada digráfica acíclica sin trayectorias infinitas exteriores es núcleo perfecta.

El siguiente resultado es una generalización del teorema de Richardson.

**Teorema 4.4.2** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores y no contiene ciclos impares, entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.*

**Demostración.** Por el teorema 3.0.2 tenemos que toda digráfica que no contenga ciclos de longitud impar tiene un seminúcleo no vacío. Como  $D$  no contiene ciclos de longitud impar entonces toda subdigráfica inducida de  $D$  no tiene ciclos de longitud impar. Así por el teorema 3.0.2 toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío.

Por lo tanto, por el teorema 3.0.1  $D$  es núcleo perfecta. ■

## 4.5 Núcleos en digráficas transitivas.

Comenzaremos esta sección con un resultado que es consecuencia del corolario 2.2.1.

**Teorema 4.5.1** ([17]). *Sea  $D$  una digráfica transitiva (posiblemente infinita). Si  $D$  tiene número cromático finito, entonces  $D$  tiene núcleo.*

**Demostración.** Del corolario 2.2.1 se sigue que  $D$  tiene un cuasinúcleo  $Q$ , luego como  $D$  es transitiva, se deduce que  $Q$  es un núcleo de  $D$ . ■

**Definición 4.5.1.** *Sean  $D$  una digráfica y  $N$  un subconjunto de  $V(D)$ . Decimos que  $N$  es un núcleo por trayectorias si cumple que:*

1. *Para cualquier subconjunto  $\{x, y\}$  de  $N$  no existe una  $xy$ -trayectoria en  $D$  ( $N$  es independiente por trayectorias).*
2. *Para todo  $v$  en  $V(D) \setminus N$  existe una  $vN$ -trayectoria en  $D$  ( $N$  es absorbente por trayectorias).*

El siguiente resultado muestra una condición que debe cumplir una digráfica (posiblemente infinita) para que ésta tenga un núcleo por trayectorias.

**Teorema 4.5.2.** *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias.*

**Demostración.**

Como  $D$  cumple con no tener trayectorias infinitas exteriores, entonces por el teorema 1.2.2 se tiene que  $D^*$  no tiene trayectorias infinitas exteriores. Y puesto que  $D^*$  tiene la propiedad de ser acíclica, entonces cumple con las hipótesis del teorema 4.4.2, por lo que

$D^*$  es una digráfica núcleo perfecta y tiene un núcleo, llamémosle  $N_1$ .

Recordemos que todos los vértices de  $D^*$  son componentes fuertemente conexas y los vértices de exgrado cero son componentes fuertemente conexas terminales.

Consideremos al conjunto  $\mathcal{L} = \{k \in N_1 \mid \delta_{D^*}^+(k) = 0\}$ .

Notemos que  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ , ya que  $D^*$  es acíclica, por la proposición 1.2.1.

**Afirmación 1.** Para cada  $C$  en  $V(D^*) \setminus \mathcal{L}$  existe  $C'$  en  $\mathcal{L}$  tal que  $C \preceq C'$  (recordemos que  $D_1 \preceq D_2$  si existe una  $V(D_1)V(D_2)$ -trayectoria en  $D$ ).

Para demostrar la afirmación 1 veamos dos casos sobre  $N_1$ .

**Caso A.**  $N_1 \setminus \mathcal{L} = \emptyset$ .

En este caso  $N_1 = \mathcal{L}$ , y como  $N_1$  es núcleo de  $D^*$ , entonces la afirmación 1 se cumple.

**Caso B.**  $N_1 \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset$ .

Ya que  $N_1$  es núcleo de  $D^*$ , se tiene que para cada  $M$  en  $V(D^*) \setminus N_1$  existe una  $MN_1$ -trayectoria (cuya longitud es 1), entonces solo basta probar que para cada  $C$  en  $N_1 \setminus \mathcal{L}$  existe una  $C\mathcal{L}$ -trayectoria en  $D^*$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $C_1$  en  $N_1 \setminus \mathcal{L}$  tal que en  $D^*$  no hay trayectorias de  $C_1$  hacia  $\mathcal{L}$ . Demostraremos que, para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , dados  $C_n$  en  $(V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$  y una trayectoria  $T_n = (C_1, \dots, C_n)$  en  $D^*$  se tiene que existe  $C_{n+1}$  en  $(V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$  tal que  $C_{n+1} \notin V(T_n)$  y  $(C_n, C_{n+1}) \in A(D^*)$ . Además,  $C_{n+1} \in V(D^*) \setminus N_1$  si  $n$  es impar y  $C_{n+1} \in N_1 \setminus \mathcal{L}$  si  $n$  es par.

Sea  $T_1 = (C_1)$ , ya que  $C_1 \in N_1 \setminus \mathcal{L}$ , de la definición de  $\mathcal{L}$  se tiene que  $\delta_{D^*}^+(C_1) \geq 1$ . Puesto que  $\delta_{D^*}^+(C_1) \geq 1$  y  $N_1$  es independiente en  $D^*$ , entonces existe  $C_2$  en  $V(D^*) \setminus N_1$  tal que  $(C_1, C_2) \in A(D^*)$ . Sea  $T_2 = (C_1, C_2)$ . Ya que  $C_2 \in V(D^*) \setminus N_1$  y  $N_1$  es núcleo de  $D^*$ , entonces existe  $C_3$  en  $N_1 \setminus \mathcal{L}$  tal que  $(C_2, C_3) \in A(D^*)$ .

Notemos que:

- 1) Si  $C_3 \in \mathcal{L}$ , entonces se tendría una  $C_1\mathcal{L}$ -trayectoria, a saber  $(C_1, C_2, C_3)$ , lo cual contradice que en  $D^*$  no hay trayectorias de  $C_1$  hacia  $\mathcal{L}$ .
- 2)  $C_3 \neq C_1$ , ya que de lo contrario  $(C_1, C_2, C_3)$  sería un ciclo en  $D^*$ , lo cual contradice que  $D^*$  es acíclica.

Así,  $T_3 = (C_1, C_2, C_3)$  es una trayectoria en  $D^*$ , donde  $C_3 \in N_1$  y  $C_2 \notin N_1$ .

Ya que  $C_3 \notin \mathcal{L}$ , de la definición de  $\mathcal{L}$  se tiene que  $\delta_{D^*}^+(C_3) \geq 1$ . Entonces existe  $C_4$  en

$V(D^*) \setminus N_1$  tal que  $(C_3, C_4) \in A(D^*)$ .

Notemos que:

3)  $C_4 \notin \{C_1, C_3\}$ , ya que  $\{C_1, C_3\} \subseteq N_1$  y  $C_4 \notin N_1$ .

4)  $C_4 \neq C_2$ , de lo contrario  $(C_2, C_3, C_4)$  sería un ciclo en  $D^*$ , lo cual contradice que  $D^*$  es acíclica.

Así,  $T_4 = (C_1, C_2, C_3, C_4)$  es una trayectoria en  $D^*$  (ver figura 4.3).

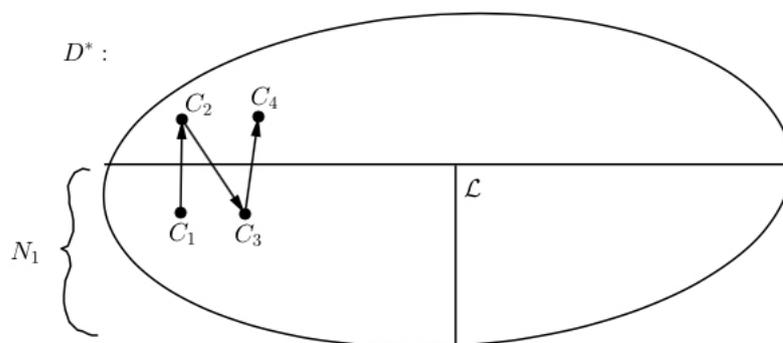


Figura 4.3

Supongamos que  $T_n = (C_1, \dots, C_n)$  es una trayectoria en  $D^*$  y  $C_n \in (V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$ , donde  $\{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k < n\} \subseteq V(D^*) \setminus N_1$  y  $\{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k < n\} \subseteq N_1 \setminus \mathcal{L}$ . Veamos que existe  $C_{n+1} \in (V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$  tal que  $C_{n+1} \notin V(T_n)$  y  $(C_n, C_{n+1}) \in A(D^*)$ .

Tenemos dos casos sobre  $C_n$ .

**Caso 1.**  $C_n \in N_1 \setminus \mathcal{L}$ ; es decir,  $n$  es impar.

En este caso, se sigue de la definición de  $\mathcal{L}$  que  $\delta_{D^*}^+(C_n) \geq 1$ . Como  $\delta_{D^*}^+(C_n) \geq 1$ ,  $C_n \in N_1$  y  $N_1$  es independiente en  $D^*$ , entonces existe  $C_{n+1}$  en  $V(D^*) \setminus N_1$  tal que  $(C_n, C_{n+1}) \in A(D^*)$  (ver figura 4.4).

Notemos que:

5)  $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k \leq n\}$ , de lo contrario  $(C_1, \dots, C_n, C_{n+1})$  contiene un ciclo en  $D^*$ , lo cual contradice que  $D^*$  es acíclica.

6)  $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k \leq n\}$ , ya que  $\{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k \leq n\} \subseteq N_1$  y  $C_{n+1} \notin N_1$ .

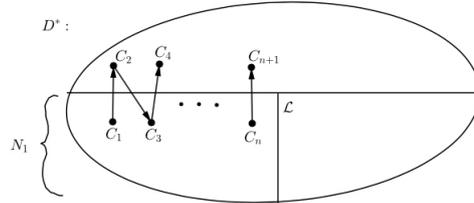


Figura 4.4

Así,  $T_{n+1} = (C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1})$  es una trayectoria en  $D^*$  por (5) y (6).

**Caso 2.**  $C_n \in V(D^*) \setminus N_1$ ; es decir,  $n$  es par.

Como  $N_1$  es núcleo de  $D^*$ , entonces existe  $C_{n+1} \in N_1$  tal que  $(C_n, C_{n+1}) \in A(D^*)$  (ver figura 4.5).

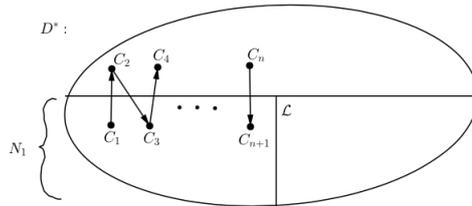


Figura 4.5

Notemos que:

7)  $C_{n+1} \notin \mathcal{L}$ , de lo contrario  $(C_1, \dots, C_n, C_{n+1})$  sería una  $C_1\mathcal{L}$ -trayectoria en  $D^*$ , lo cual contradice nuestra suposición de que no hay  $C_1\mathcal{L}$ -trayectoria en  $D^*$ .

8)  $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k \leq n\}$ , de lo contrario  $(C_1, \dots, C_n, C_{n+1})$  contiene un ciclo en  $D^*$ , lo cual contradice que  $D^*$  es acíclica.

9)  $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k \leq n\}$ , ya que  $\{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k \leq n\} \subseteq V(D^*) \setminus N_1$  y  $C_{n+1} \in N_1$ .

Así,  $T_{n+1} = (C_1, \dots, C_n, C_{n+1})$  es una trayectoria en  $D^*$  por (8) y (9).

Finalmente, notemos que la sucesión  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una trayectoria infinita exterior en  $D^*$ , lo cual contradice que  $D^*$  no tiene trayectorias infinitas exteriores.

Por lo tanto, para cada  $C$  en  $N_1 \setminus \mathcal{L}$  existe una  $C\mathcal{L}$ -trayectoria en  $D^*$ .

**Observación.** Si  $C$  y  $C'$  son dos vértices distintos de  $D^*$  tales que existe una  $CC'$ -trayectoria en  $D^*$ , entonces para cada  $u$  en  $V(C)$  y para cada  $z$  en  $V(C')$  existe una

$uz$ -trayectoria en  $D$ .

Sea  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n = C')$  una trayectoria de  $C$  hacia  $C'$  en  $D^*$ .

Como  $(C_1, C_2) \in A(D^*)$ , entonces existen  $c_1$  en  $V(C_1)$  y  $c_2$  en  $V(C_2)$  tal que  $(c_1, c_2) \in A(D)$ . Como  $(C_2, C_3) \in A(D^*)$ , entonces existen  $c'_2$  en  $V(C_2)$  y  $c_3$  en  $V(C_3)$  tal que  $(c'_2, c_3) \in A(D)$ . Como  $(C_3, C_4) \in A(D^*)$ , entonces existe  $c'_3$  en  $V(C_3)$  y  $c_4$  en  $V(C_4)$  tal que  $(c'_3, c_4) \in A(D)$ . Así, para cada  $i$  en  $\{2, \dots, n-1\}$  existen  $c'_i$  en  $V(C_i)$  y  $c_{i+1}$  en  $V(C_{i+1})$  tal que  $(c'_i, c_{i+1}) \in A(D)$  (ver figura 4.6).

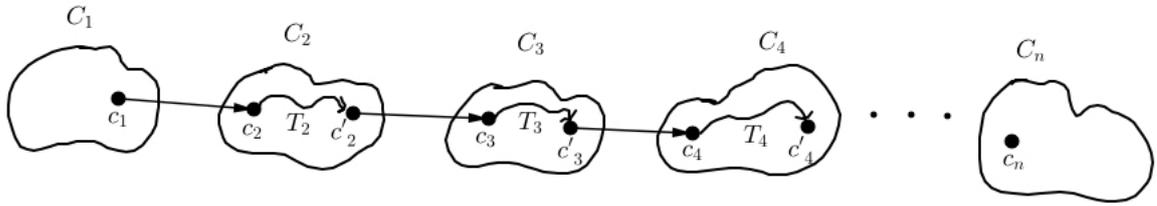


Figura 4.6

Puesto que  $C_i$  es fuertemente conexas, para cada  $i$  en  $\{2, \dots, n-1\}$ , existe una  $c_i c'_i$ -trayectoria, digamos  $T_i$ . Notemos que si  $c_i = c'_i$ , entonces  $T_i$  es la trayectoria trivial. Así,  $T = (c_1, c_2) \cup T_2 \cup (c'_2, c_3) \cup T_3 \cup (c'_3, c_4) \cup T_4 \dots T_{n-1} \cup (c'_{n-1}, c_n)$  es una trayectoria que va de  $c_1$  hacia  $c_n$  en  $D$  (ver figura 4.6). Lo que implica que, existe una trayectoria de  $u$  hacia cualquier vértice de  $C_n$  (porque  $C_1$  y  $C_n$  son fuertemente conexas).

Por otro lado, como  $\{V(C') : C' \in \mathcal{L}\}$  es una colección no vacía de conjuntos no vacíos ajenos dos a dos, usando el Axioma de Elección se tiene que existe  $N$  subconjunto de  $\bigcup_{C' \in \mathcal{L}} V(C')$  tal que  $|N \cap V(C')| = 1$  para cada  $C'$  en  $\mathcal{L}$ .

**Afirmación 2.**  $N$  es núcleo por trayectorias de  $D$ .

Como  $|N \cap V(C')| = 1$  y  $\delta_{D^*}^+(C') = 0$ , para cada  $C'$  en  $\mathcal{L}$ , se tiene que  $N$  es un conjunto independiente por trayectorias en  $D$ . Entonces solo resta probar que  $N$  es un conjunto absorbente por trayectorias en  $D$ .

Sea  $v$  en  $V(D) \setminus N$ . Veamos dos casos sobre  $v$ .

**Caso 1.**  $v \in V(C')$  para algún  $C' \in \mathcal{L}$ ; es decir,  $v$  está en alguna componente fuertemente conexas terminal de  $D$ .

Ya que  $|N \cap V(C')| = 1$ , podemos suponer que  $N \cap V(C') = \{w\}$ , para algún  $w \in V(C')$ . Como  $\{v, w\} \subseteq V(C')$ , se sigue de la definición de componente fuertemente conexas que existe una  $vw$ -trayectoria en  $D$ , lo cual implica que hay una  $vN$ -trayectoria en  $D$ .

**Caso 2.**  $v \notin V(C)$  para cada  $C$  en  $\mathcal{L}$ ; es decir,  $v$  está en alguna componente fuertemente conexas no terminal de  $D$ .

Sea  $C'$  la componente fuertemente conexa de  $D$  que contiene al vértice  $v$ . Como  $v \notin V(C)$ , para cada  $C$  en  $\mathcal{L}$ , entonces  $C' \notin \mathcal{L}$ . Ahora, de la afirmación 1 se tiene que existe  $C''$  en  $\mathcal{L}$  tal que existe la  $V(C'')V(C')$ -trayectoria en  $D^*$ . Finalmente, de la observación, para  $v$  en  $V(C')$  y para  $w$  en  $(N \cap V(C''))$  se tiene la  $vw$ -trayectoria en  $D$ . Así,  $N$  es absorbente por trayectorias en  $D$ .

Por lo tanto,  $N$  es núcleo por trayectorias en  $D$ . ■

Del resultado anterior podemos deducir el siguiente resultado original.

**Corolario 4.5.1.** *Sea  $D$  una digráfica transitiva (posiblemente infinita). Si  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces  $D$  tiene núcleo.*

**Demostración.**

Como  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores, por el teorema 4.5.2, tenemos que  $D$  tiene un núcleo por trayectorias, llamémosle  $N$ .

**Afirmación.**  $N$  es núcleo para  $D$ .

Por demostrar que  $N$  es independiente.

Como una flecha es una trayectoria y  $N$  es independiente por trayectorias en  $D$ , entonces no pueden existir flechas entre todo par de vértices de  $N$ .

Por demostrar que  $N$  es absorbente.

Sea  $u$  en  $V(D) \setminus N$ . Como  $N$  es núcleo por trayectorias, entonces existe  $v$  en  $N$  tal que hay una  $uv$ -trayectoria en  $D$ . Puesto que  $D$  es transitiva, se sigue que  $(u, v) \in A(D)$ .

Por lo tanto,  $D$  tiene núcleo por trayectorias. ■

El siguiente teorema es una generalización del corolario anterior, ya que en dicho teorema se establecen hipótesis sobre las trayectorias infinitas exteriores.

**Teorema 4.5.3** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica transitiva (posiblemente infinita). Supongamos que cada trayectoria infinita exterior en  $D$  tiene al menos una flecha simétrica. Entonces  $D$  tiene un núcleo. Por otra parte cada núcleo es obtenido por la elección de un vértice en cada componente fuertemente conexa terminal de  $D$ . Así, todos los núcleos de  $D$  tienen la misma cardinalidad.*

**Demostración.**

Por el teorema 1.2.1 tenemos que  $D$  tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal y que para cada componente fuertemente conexa  $C$  de  $D$  hay una componente fuertemente conexa terminal  $C'$  de  $D$  tal que existe una  $V(C)V(C')$ -trayectoria.

Sea  $\mathcal{I}$  la familia de todas las componentes fuertemente conexas terminales de  $D$ . Usando el Axioma de elección se tiene que existe un subconjunto  $N$  de  $\bigcup_{C' \in \mathcal{I}} V(C')$  tal que  $|N \cap V(C')| = 1$  para cada  $C'$  en  $\mathcal{I}$ .

**Afirmación.**  $N$  es núcleo de  $D$ .

Como  $N$  está construido por la elección de un vértice de cada componente fuertemente conexas terminal, tenemos que  $N$  es un conjunto independiente ya que no hay forma de llegar de una componente fuertemente conexas terminal a otra.

Ahora veamos que  $N$  es un conjunto absorbente. Sea  $v$  un vértice en  $V(D) \setminus N$ . Tenemos dos casos sobre  $v$ .

**Caso 1.**  $v$  no está en alguna componente fuertemente conexas terminal  $C$  de  $D$ .

Por el teorema 1.2.1 tenemos que existe una componente terminal fuertemente conexas  $C'$  de  $D$  tal que existe una  $V(C)V(C')$ -trayectoria. Como  $|N \cap V(C')| = 1$ , podemos suponer que  $N \cap V(C') = \{w\}$ . Luego, procediendo como en la demostración de la observación del teorema 4.5.2, tenemos que  $(v, w) \in A(D)$ , con  $w \in N$ .

**Caso 2.**  $v$  está en alguna componente fuertemente conexas terminal  $C'$  de  $D$ .

Como  $|N \cap V(C')| = 1$ , podemos suponer que  $N \cap V(C') = \{w\}$ . Puesto que  $C'$  es componente fuertemente conexas se tiene que existe la  $vw$ -trayectoria y como  $D$  es transitiva se concluye que  $(v, w) \in A(D)$ . Por lo tanto,  $N$  es absorbente.

Así,  $N$  es núcleo de  $D$  y como el número de componentes fuertemente conexas terminales es el mismo, al elegir cualesquiera otros vértices de  $\bigcup_{C' \in \mathcal{I}} V(C')$  para la construcción de  $N$  su cardinalidad no cambia. ■

## 4.6 Núcleos en digráficas pretransitivas.

La siguiente notación será necesaria para simplificar la demostración de algunos teoremas.

Sean  $D$  y  $D_i$  dos digráficas, para alguna  $i$  en  $\mathbb{N}$ ,  $S$  un subconjunto de  $V(D)$  y  $R$  un subconjunto de  $V(D_i)$ .

1.  $x \rightarrow y$  si  $(x, y) \in A(D)$ .
2.  $x \nrightarrow y$  si  $(x, y) \notin A(D)$ .
3.  $x \rightarrow^i y$  si  $(x, y) \in A(D_i)$ .
4.  $x \nrightarrow^i y$  si  $(x, y) \notin A(D_i)$ .

5.  $S \rightarrow y$  si  $x \rightarrow y$  para algún  $x$  en  $S$ .
6.  $S \nrightarrow y$  si  $x \nrightarrow y$  para cada  $x$  en  $S$ .
7.  $R \rightarrow^i y$  si  $x \rightarrow^i y$  para algún  $x$  en  $R$ .
8.  $R \nrightarrow^i y$  si  $x \nrightarrow^i y$  para cada  $x$  en  $R$ .

Análogamente se define  $y \rightarrow S$ ,  $y \nrightarrow S$ ,  $y \rightarrow^i R$  y  $y \nrightarrow^i R$ .

El siguiente teorema se debe a Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy, [9].

**Teorema 4.6.1.** *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Supongamos que existen dos digráficas,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  (posiblemente  $A(D_1) \cap A(D_2) \neq \emptyset$ ),  $D_1$  es derecha pretransitiva,  $D_2$  es izquierda pretransitiva y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores, para cada  $i$  en  $\{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.**

Será suficiente con probar que  $D$  tiene núcleo, puesto que toda subdigráfica inducida de  $D$  satisface la hipótesis del teorema 4.6.1.

Para conjuntos de vértices independientes de  $D$ , digamos  $S$  y  $T$ , escribiremos  $S \leq T$  si y solo si para cada  $s$  en  $S$  existe  $t$  en  $T$ , tal que  $s = t$  o  $(s \rightarrow^1 t \text{ y } t \nrightarrow^1 s)$ .

Notemos que, en particular, si  $S \subseteq T$ , entonces  $S \leq T$ , ya que para todo  $s$  en  $S$  se tiene que  $s \in T$ .

(1) Veremos que la colección de todos los subconjuntos independientes de vértices de  $D$  es un conjunto parcialmente ordenado por  $\leq$ ; es decir, veremos que la relación  $\leq$  es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Sean  $S, T$  y  $R$  tres conjuntos independientes de  $D$ .

1.  $\leq$  es reflexiva.

Tenemos que probar que  $S \leq S$ , lo cual se cumple por propiedades de conjuntos, ya que un conjunto siempre está contenido en sí mismo. Por lo tanto,  $S \leq S$ .

2.  $\leq$  es transitiva.

Tenemos que probar que si  $S \leq T$  y  $T \leq R$ , entonces  $S \leq R$ . Sea  $s$  en  $S$ . Por demostrar que existe  $r$  en  $R$  tal que  $s = r$  o  $(s \rightarrow^1 r \text{ y } r \nrightarrow^1 s)$ . Como  $S \leq T$ , existe  $t$  en  $T$  tal que  $s = t$  o  $(s \rightarrow^1 t \text{ y } t \nrightarrow^1 s)$ . Por otro lado, como  $T \leq R$ , entonces para  $t$  en  $T$  existe  $r$  en  $R$  tal que  $t = r$  o  $(t \rightarrow^1 r \text{ y } r \nrightarrow^1 t)$ .

Tenemos cuatro casos:

a)  $s = t$  y  $t = r$ .

En este caso, como  $s = t$  y  $t = r$ , entonces  $s = r$ .

b)  $s = t$  y  $(t \rightarrow^1 r \text{ y } r \rightarrow^1 t)$ .

En este caso tendríamos que  $s \rightarrow^1 r \text{ y } r \rightarrow^1 s$ .

c)  $(s \rightarrow^1 t \text{ y } t \rightarrow^1 s)$  y  $t = r$ .

En este caso, tendríamos que  $s \rightarrow^1 r \text{ y } r \rightarrow^1 s$ .

d)  $(s \rightarrow^1 t \text{ y } t \rightarrow^1 s)$  y  $(t \rightarrow^1 r \text{ y } r \rightarrow^1 t)$ .

Aquí, usamos el hecho de que  $D_1$  es una digráfica derecha pretransitiva. Se sigue del lemma 1.2.1, aplicado a la sucesión  $(s, t, r)$ , que  $s \rightarrow^1 r$  y  $r \rightarrow^1 s$ .

Por lo tanto,  $S \leq R$ .

### 3. $\leq$ es antisimétrica.

Tenemos que probar que si  $S \leq T$  y  $T \leq S$ , entonces  $S = T$ . Primero demostraremos que  $S \subseteq T$ . Sea  $s$  en  $S$ . Como  $S \leq T$  se tiene que existe  $t$  en  $T$  tal que  $s = t$  o  $(s \rightarrow^1 t \text{ y } t \rightarrow^1 s)$ . Puesto que  $T \leq S$ , para  $t$  en  $T$  existe  $s'$  en  $S$  tal que  $t = s'$  o  $(t \rightarrow^1 s' \text{ y } s' \rightarrow^1 t)$ .

De nuevo tenemos tres casos:

a)  $s = t$ .

En este caso  $s \in T$ .

b)  $s \neq t$  y  $t = s'$ .

En este caso,  $s \rightarrow^1 t \text{ y } t \rightarrow^1 s$ , lo que implica que  $s \rightarrow^1 s' \text{ y } s' \rightarrow^1 s$ . Lo cual nos lleva a una contradicción (porque  $S$  es un conjunto independiente).

c)  $s \neq t$  y  $(t \rightarrow^1 s' \text{ y } s' \rightarrow^1 t)$ .

Como  $s \rightarrow^1 t \text{ y } t \rightarrow^1 s$ , entonces aplicando el lema 1.2.1 a la sucesión  $(s, t, s')$  tenemos que  $s \rightarrow^1 s'$ , contradiciendo que  $S$  es un conjunto independiente.

Por lo tanto, concluimos que  $t = s$  y consecuentemente  $s \in T$  y  $S \subseteq T$ .

Análogamente podemos probar que  $T \subseteq S$ .

Sea  $\mathfrak{F}$  la familia de todos los conjuntos independientes  $S$  de vértices de  $D$  tales que,  $S \rightarrow^2 y$  implica que  $y \rightarrow S$ , para todo vértice  $y$  en  $V(D_2)$ .

(2)  $(\mathfrak{F}, \leq)$  tiene elementos maximales.

Probaremos que toda cadena en  $(\mathfrak{F}, \leq)$  tiene una cota superior en  $\mathfrak{F}$ .

(i) Primero veamos que  $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ .

Tenemos que  $D_2$  es una digráfica izquierda pretransitiva, la cual no tiene trayectorias infinitas exteriores. Así, se sigue del lema 1.2.2 (considerando  $D = D_2$  y  $U = V(D_2)$ ) que existe un vértice  $x$  en  $V(D_2)$  tal que  $x \rightarrow^2 y$  implica que  $y \rightarrow^2 x$ , para todo vértice  $y$  en  $V(D_2)$ . Por lo tanto, al menos el conjunto  $\{x\}$  pertenece a  $\mathfrak{F}$ .

(ii) Toda cadena en  $(\mathfrak{F}, \leq)$  está acotada superiormente.

Sean  $\mathfrak{C}$  una cadena en  $(\mathfrak{F}, \leq)$  y  $S^\infty = \{s \in \bigcup_{S \in \mathfrak{C}} S : \text{existe } S \text{ en } \mathfrak{C} \text{ tal que } s \in S \text{ siempre que } T \in \mathfrak{C} \text{ y } S \leq T\}$ . Es decir,  $S^\infty$  consiste de todos los  $s$  en  $S$  tales que a partir de un  $S$  en  $\mathfrak{C}$ ,  $s$  pertenece a todo conjunto  $T$  con  $S \leq T$  y  $T \in \mathfrak{C}$ .

**Afirmación 1.**  $S^\infty$  es una cota superior de  $\mathfrak{C}$ .

1)  $S^\infty \neq \emptyset$ , y para cada  $S$  en  $\mathfrak{C}$  se tiene que  $S \leq S^\infty$ .

Sean  $S$  en  $\mathfrak{C}$  y  $t_0$  en  $S$ . Veremos que existe  $t$  en  $S^\infty$  tal que  $t_0 = t$  o  $(t_0 \rightarrow^1 t \text{ y } t \rightarrow^1 t_0)$ . Tenemos dos casos sobre  $t_0$ .

1.a)  $t_0 \in S^\infty$ .

En este caso  $S^\infty \neq \emptyset$  y  $t_0$  es el vértice buscado en  $S^\infty$ .

1.b)  $t_0 \notin S^\infty$ .

Tenemos que probar que existe  $t$  en  $S^\infty$  tal que  $t_0 \rightarrow^1 t \text{ y } t \rightarrow^1 t_0$ . Procediendo por contradicción, supongamos que para toda  $t$  en  $S^\infty$  se tiene que  $(t \rightarrow^1 t_0 \text{ y } t_0 \rightarrow^1 t)$ .

Llamemos  $T_0 = S$ . Como  $t_0 \notin S^\infty$  tenemos que existe  $T_1$  en  $\mathfrak{C}$  tal que  $T_0 \leq T_1$  y  $t_0 \notin T_1$ . Así, existe  $t_1$  en  $T_1$  tal que  $t_0 \neq t_1$  y  $(t_0 \rightarrow^1 t_1 \text{ y } t_1 \rightarrow^1 t_0)$ . Luego, de nuestra suposición, tenemos que  $t_1 \notin S^\infty$ . Como  $t_1 \notin S^\infty$ , existe  $T_2$  en  $\mathfrak{C}$  tal que  $T_1 \leq T_2$  y  $t_1 \notin T_2$ . Así, existe  $t_2$  en  $T_2$  tal que  $t_2 \neq t_1$  y  $(t_1 \rightarrow^1 t_2 \text{ y } t_2 \rightarrow^1 t_1)$ . Como  $D_1$  es una digráfica derecha pretransitiva, se sigue del lema 1.2.1, al aplicarlo a la sucesión  $\tau_2 = (t_0, t_1, t_2)$ , que  $\tau_2$  es una trayectoria y  $(t_0 \rightarrow^1 t_2 \text{ y } t_2 \rightarrow^1 t_0)$ , donde  $t_2 \notin S^\infty$ . Continuando de esta manera podemos obtener para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ :  $T_n$  en  $\mathfrak{C}$  y  $t_n$  en  $T_n$  tal que  $(t_0 \rightarrow^1 t_n \text{ y } t_n \rightarrow^1 t_0)$  y  $t_n \notin S^\infty$ .

Ahora, consideremos la sucesión  $\tau = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Afirmación.**  $\tau$  es una trayectoria infinita exterior en  $D_1$ .

Como  $t_n \rightarrow^1 t_{n+1}$  para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , solo resta probar que  $t_n \neq t_m$  para cada  $n \neq m$ . Sean  $t_n$  y  $t_m$  dos vértices en  $\tau$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $n < m$ . Como  $\{t_n, t_m\} \subset \tau_m$ , donde  $\tau_m = (t_0, \dots, t_m)$ , y  $\tau_m$  es una trayectoria, (por el lema 1.2.1), entonces  $t_n \neq t_m$ . Por lo tanto,  $\tau$  es una trayectoria infinita exterior contenida en  $D_1$ , lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis  $D_1$  no contiene trayectorias infinitas exteriores.

Así, existe  $t$  en  $S^\infty$  tal que  $(t_0 \rightarrow^1 t \text{ y } t \nrightarrow^1 t_0)$ .

Con esto hemos demostrado que  $S^\infty \neq \emptyset$ , y para cada  $S$  en  $\mathfrak{C}$  se tiene que  $S \leq S^\infty$ .

2)  $S^\infty$  es un conjunto independiente.

Sean  $\{s_1, s_2\}$  un subconjunto de  $S^\infty$  y  $S_1$  y  $S_2$  dos elementos de  $\mathfrak{C}$  tales que  $s_1 \in S_1$ , para todo  $S$  en  $\mathfrak{C}$  tal que  $S_1 \leq S$ , y  $s_2 \in S_2$ , para todo  $T$  en  $\mathfrak{C}$  tal que  $S_2 \leq T$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $S_1 \leq S_2$ . Como  $S_1 \leq S_2$ , entonces  $s_1 \in S_2$ . Puesto que  $\{s_1, s_2\} \subseteq S_2$ , entonces no existen flechas entre  $s_1$  y  $s_2$  en  $D$  (porque  $S$  es un conjunto independiente en  $D$ ). Por lo tanto,  $S^\infty$  es independiente.

3)  $S^\infty \in \mathfrak{F}$ .

Tenemos que ver que  $S^\infty \rightarrow^2 y$  implica que  $y \rightarrow S^\infty$  para todo  $y \in V(D_2)$ . Supongamos que existe  $y$  en  $V(D_2)$  tal que  $S^\infty \rightarrow^2 y$ . Sea  $s$  en  $S^\infty$  tal que  $s \rightarrow^2 y$ . Como  $s \in S^\infty$ , tenemos que existe  $S$  en  $\mathfrak{C}$  tal que  $s \in S$  para toda  $T$  en  $\mathfrak{C}$  con  $S \leq T$ . En particular  $s \in S$ . Así,  $S \rightarrow^2 y$ . Por otro lado, como  $S \in \mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$ , entonces  $S \in \mathfrak{F}$ , lo que implica que  $y \rightarrow S$  (por definición de  $\mathfrak{F}$ ). Ahora, sea  $s'$  en  $S$  tal que  $y \rightarrow s'$ .

Tenemos dos casos sobre  $s'$ .

a)  $s' \in S^\infty$ .

En este caso, como  $s' \in S^\infty$  y  $y \rightarrow s'$ , entonces  $y \rightarrow S^\infty$ .

b)  $s' \notin S^\infty$ .

Tenemos dos subcasos sobre la flecha  $y \rightarrow s'$  (ver figura 4.7).

b.1)  $y \rightarrow^2 s'$ .

Como  $s \rightarrow^2 y$ ,  $y \rightarrow^2 s'$  y  $D$  es una digráfica izquierda pretransitiva, entonces  $s \rightarrow^2 s'$  o  $y \rightarrow^2 s$ . Si  $s \rightarrow^2 s'$ , así contradice el hecho de que  $S$  es un conjunto independiente. Así,  $y \rightarrow^2 s$ . Como  $s \in S^\infty$ , entonces  $y \rightarrow S^\infty$ .

b.2)  $y \rightarrow^1 s'$ .

Como  $s' \in S^\infty$ ,  $S \leq S^\infty$ ,  $s' \in S$  y  $s' \notin S^\infty$ , entonces existe  $t$  en  $S^\infty$  tal que  $s' \neq t$  y  $(s' \rightarrow^1 t \text{ y } t \nrightarrow^1 s')$  (ver figura 4.8).

Como  $y \rightarrow^1 s'$ ,  $s' \rightarrow^1 t$ ,  $t \nrightarrow^1 s'$  y  $D_1$  es una digráfica derecha pretransitiva, entonces



(i) Por demostrar que para cada  $x$  en  $(V(D) \setminus S)$  existe una  $xS$ -flecha.

Procederemos por contradicción. Supongamos que existe  $x$  en  $(V(D) \setminus S)$  tal que  $x \not\rightarrow S$ .

Sea  $U = \{z \in (V(D_2) \setminus S) : z \not\rightarrow S\}$ .

Para llegar a una contradicción, consideremos las siguientes afirmaciones.

(i.1) Existe  $x_0$  en  $U$  tal que  $x_0$  satisface que:  $x_0 \rightarrow^2 y$ , con  $y \in U$ , implica que  $y \rightarrow x_0$ , para todo  $y$  en  $V(D_2)$ .

Como  $U \neq \emptyset$ , entonces, aplicando el lema 1.2.2 en  $D_2$  y  $U$ , tenemos que existe  $x_0$  en  $U$  tal que  $(x_0, y) \in A(D_2)$ , con  $y \in U$ , implica que  $(y, x_0) \in A(D_2)$ . Así,  $x_0$  satisface (i.1).

Sea  $x_0$  como en (i.1). Como  $x_0 \not\rightarrow S$  y  $S \in \mathfrak{F}$ , entonces de la definición de  $\mathfrak{F}$  tenemos que  $S \not\rightarrow^2 x_0$ .

Sea  $T = \{s \in S : s \rightarrow^1 x_0\}$ .

**Afirmación 2.**  $T \cup \{x_0\}$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Como  $T \subseteq S$ , entonces  $T$  es independiente. Puesto que  $x \rightarrow S$  y  $T \rightarrow x_0$  (porque  $S \not\rightarrow^2 x_0$ ,  $T \subseteq S$  y  $T \rightarrow^1 x_0$ ), entonces  $T \cup \{x_0\}$  es un conjunto independiente en  $D$ .

(i.2)  $(T \cup \{x_0\}) \in \mathfrak{F}$ .

Supongamos que existe  $y$  en  $V(D_2)$  tal que  $(T \cup \{x_0\}) \rightarrow^2 y$ . Por demostrar que  $y \rightarrow (T \cup \{x_0\})$ . Supongamos que  $y \not\rightarrow T$  (de otro modo ya terminamos). Probaremos que  $y \rightarrow x_0$ .

Antes de empezar con esta prueba haremos la siguiente observación.

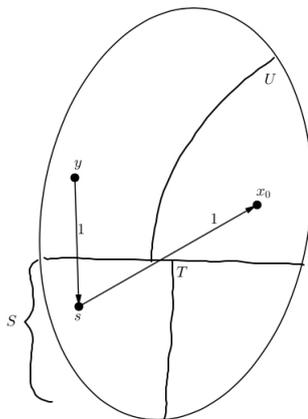


Figura 4.9

**Observación.** Si  $y \rightarrow^1 (S \setminus T)$ , entonces  $y \rightarrow^1 x_0$ .

Supongamos que  $y \rightarrow^1 (S \setminus T)$ . Sea  $s$  en  $S \setminus T$  tal que  $y \rightarrow^1 s$ . Como  $s \notin T$  de la definición de  $T$  se tiene que  $s \rightarrow^1 x_0$  (ver figura 4.9). Puesto que  $D_1$  es una digráfica derecha pretransitiva, tenemos que  $y \rightarrow^1 x_0$  o  $x_0 \rightarrow^1 s$ , pero sabemos que  $x_0 \rightarrow S$ . Así,  $y \rightarrow^1 x_0$ .

Para la demostración de la afirmación, consideremos dos casos sobre  $(T \cup \{x_0\}) \rightarrow^2 y$ .

1)  $T \rightarrow^2 y$ .

Como  $T \subseteq S$ ,  $S \in \mathfrak{F}$  y  $T \rightarrow^2 y$ , entonces tenemos  $y \rightarrow S$  (por definición de  $\mathfrak{F}$ ). Puesto que  $y \rightarrow T$ , entonces  $y \rightarrow (S \setminus T)$ . Además,  $y \in V(D) \setminus (S \cup U)$ .

Tenemos dos subcasos sobre  $y \rightarrow (S \setminus T)$ .

1.1)  $y \rightarrow^1 (S \setminus T)$ .

Se sigue de la observación que  $y \rightarrow^1 x_0$ .

1.2)  $y \rightarrow^2 (S \setminus T)$ .

Sean  $t$  en  $T$  y  $s$  en  $S \setminus T$  tal que  $t \rightarrow^2 y$  y  $y \rightarrow^2 s$  ( porque  $T \rightarrow^2 y$  y  $y \rightarrow^2 (S \setminus T)$ ) (ver figura 4.10).

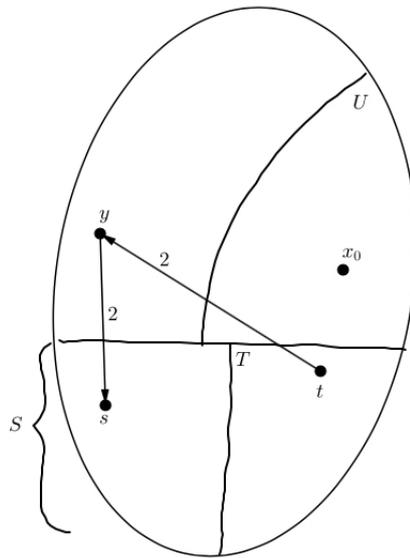


Figura 4.10

Como  $D_2$  es una digráfica izquierda pretransitiva, se sigue que  $y \rightarrow^2 t$  o  $t \rightarrow^2 s$ , lo cual es una contradicción ya que  $y \rightarrow T$  y  $S$  es independiente en  $D$ .

2)  $x_0 \rightarrow^2 y$ .

Note que  $y \notin S$  (porque  $x_0 \nrightarrow S$ ). Tenemos dos subcasos, cuando  $y \in U$  y cuando  $y \notin U$ .

2.1)  $y \notin U$ .

En este caso, por definición de  $U$  tenemos que  $y \rightarrow (S \setminus T)$  (pues asumimos que  $y \nrightarrow T$  y  $y \notin S$ ). Sea  $s$  en  $S \setminus T$  tal que  $y \rightarrow s$ .

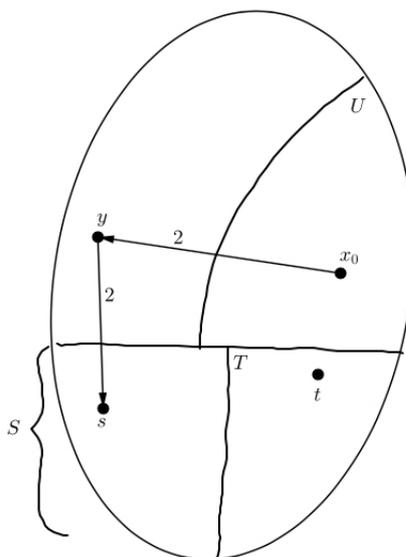


Figura 4.11

Cuando  $y \rightarrow^1 s$ , tenemos que  $y \rightarrow^1 x_0$  (por la observación). Si  $y \rightarrow^2 s$  (ver figura 4.11), entonces como  $x_0 \rightarrow^2 y$  y  $D_2$  es una digráfica izquierda pretransitiva, obtenemos que  $x_0 \rightarrow^2 s$  o  $y \rightarrow^2 x_0$ . Como  $x_0 \nrightarrow S$ , entonces podemos concluir que  $y \rightarrow^2 x_0$ .

Por lo tanto  $y \rightarrow (T \cup \{x_0\})$ , si  $y \nrightarrow T$ .

Así,  $y \rightarrow (T \cup \{x_0\})$ .

**Afirmación.**  $S \leq (T \cup \{x_0\})$ .

Sea  $s$  en  $S$ . Por demostrar que existe  $z$  en  $(T \cup \{x_0\})$ , tal que  $s = z$  o  $(s \rightarrow^1 z \text{ y } z \nrightarrow^1 s)$ . Si  $s \in T$ , entonces  $s$  es el elemento buscado en  $T \cup \{x_0\}$ . Supongamos que  $s \in (S \setminus T)$ . Como  $s \notin T$ , entonces  $s \rightarrow^1 x_0$ . Puesto que  $x_0 \nrightarrow S$ , entonces en particular  $x_0 \nrightarrow s$ . Por lo tanto,  $x_0$  es el vértice buscado en  $T \cup \{x_0\}$ .

Así,  $S \leq (T \cup \{x_0\})$ .

Por otro lado, como  $x_0$  no está en  $S$ , se sigue que  $S \subset (T \cup \{x_0\})$ .

Por lo tanto, las afirmaciones 1 y 2 contradicen que  $S$  es un elemento maximal de  $(\mathfrak{F}, \leq)$ , lo que implica que  $S$  es un conjunto absorbente de  $D$ .

Por lo tanto,  $S$  es núcleo en  $D$ . ■

**Observación 4.6.1.** *La hipótesis,  $D_i$  no tiene trayectorias infinitas exteriores, en el teorema 4.6.1 es necesaria.*

Consideremos a la digráfica  $D^\#$ , definida anteriormente. Sea  $H$  una digráfica derecha pretransitiva.  $D_1$  y  $D_2$  son tales que:  $V(D_1) = V(D^\#) \cup V(H)$ ,  $A(D_1) = A(H) \cup A(D^\#) \cup \{(u, v) : u \in V(H), v \in V(D^\#)\}$  (ver figura 4.12) y  $D_2 = D^\#$ .

$D_1$ :

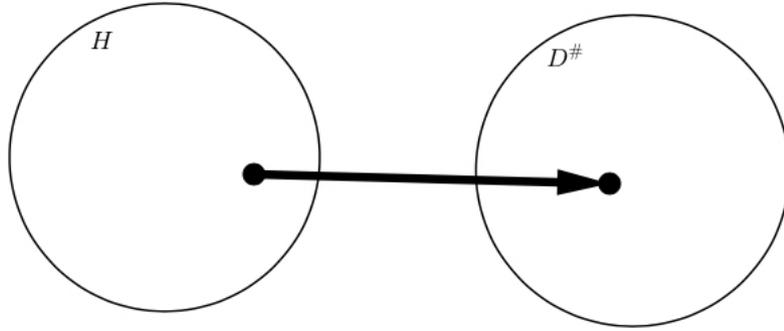


Figura 4.12

Veamos que  $D_1$  es una digráfica derecha pretransitiva y  $D_2$  es una digráfica izquierda pretransitiva.

Por demostrar que  $D_1$  es derecha pretransitiva. Sean  $u, v$  y  $w$  vértices en  $D_1$  tales que  $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq A(D_1)$ . Por demostrar que  $(u, w) \in A(D_1)$  o  $(w, v) \in A(D_1)$ . Sabemos que en  $D_1$  no hay flechas de  $D^\#$  hacia  $H$ . Veamos algunos casos de donde podrían estar estos vértices.

**Caso 1.**  $\{u, v, w\} \subseteq V(H)$ .

En este caso no hay nada que hacer, ya que por elección de  $H$  tenemos que  $(u, w) \in A(D_1)$  o  $(w, v) \in A(D_1)$ .

**Caso 2.**  $u \in V(H)$  y  $\{v, w\} \subseteq V(D^\#)$ .

En este caso tenemos la flecha que va de  $u$  hacia  $w$  por construcción de  $D_1$ .

**Caso 3.**  $\{u, v\} \subseteq V(H)$  y  $w \in V(D^\#)$ .

En este caso, también tenemos la flecha que va de  $u$  hacia  $w$  por construcción de  $D_1$ .

**Caso 4.**  $\{u, v, w\} \subseteq V(D^\#)$ .

En este caso, por construcción de  $D^\#$  tenemos la flecha que va de  $u$  hacia  $w$  (por ser  $D^\#$  una digráfica transitiva). Así,  $(u, w) \in A(D_1)$ .

Por lo tanto,  $D_1$  es una digráfica derecha pretransitiva.

Por demostrar que  $D_2$  es una digráfica izquierda pretransitiva. Sean  $u, v$  y  $w$  tres vértices en  $D_2$  tales que  $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq A(D_2)$ . Por demostrar que  $(u, w) \in A(D_2)$  o  $(v, u) \in A(D_2)$ . Como  $D_2 = D^\#$  y  $D^\#$  es una digráfica transitiva, se tiene que existe la flecha que va de  $u$  hacia  $w$ . Por lo tanto,  $D_2$  es una digráfica izquierda pretransitiva.

Por otro lado, notemos que  $D_1$  y  $D_2$  tienen trayectorias infinitas exteriores.

**Afirmación.**  $D = D_1 \cup D_2$  no tiene núcleo.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D$  tiene un núcleo  $N$  y veamos donde puede estar  $N$ .

De la construcción de  $D_1$  se sigue que  $N \subseteq V(D^\#)$  o  $N \subseteq V(H)$ . Si  $N \subseteq V(D^\#)$ , entonces este consiste de un solo vértice, digamos  $\{n\}$ , pero ya habíamos visto que este vértice no absorbe al vértice  $n + 1$ . Si  $N \subseteq V(H)$ , entonces  $N$  no es absorbente ya que  $N$  no absorbe a ningún vértice de  $D^\#$ .

Por lo tanto, no existe un núcleo en  $D$ . ■

Notemos que la hipótesis  $D = D_1 \cup D_2$ , donde  $D_1$  es una digráfica derecha pretransitiva y  $D_2$  es una digráfica izquierda pretransitiva no puede ser modificada.

En las siguientes dos observaciones presentamos el ejemplo de la unión de dos digráficas derechas-pretransitivas y de la unión de dos digráficas izquierdas-pretransitivas, donde ninguna unión contiene un núcleo. Dichos ejemplos se encuentran en [9].

**Observación 4.6.2.** *La siguiente digráfica  $D$  es la unión de dos digráficas derechas-pretransitivas,  $D_1$  y  $D_2$ , y esta no tiene núcleo (ver figura 4.13). Sea  $V(D_1) = V(D_2) = \{u, v, w, x\}$ ,  $A(D_1) = \{(x, u), (u, w), (w, u), (v, w)\}$ ,  $A(D_2) = \{(u, v), (x, v), (v, x), (w, x)\}$ . ■*

**Observación 4.6.3.** *Existe una digráfica  $D$  que es la unión de dos digráficas izquierdas-pretransitivas,  $D_1$  y  $D_2$ , y ésta no tiene núcleo (ver figura 4.14). Sea  $V(D_1) = V(D_2) = \{u, v, w, x\}$ ,  $A(D_1) = \{(u, v), (u, w), (w, u), (w, x)\}$ ,  $A(D_2) = \{(x, u), (x, v), (v, x), (v, w)\}$ . Como la digráfica  $D$  es semicompleta, el independiente más grande es de un vértice, pero el conjunto de un vértice no es absorbente. Por lo tanto,  $D$  no tiene núcleo. ■*

**Teorema 4.6.2** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Supongamos que  $D$  es una digráfica derecha pretransitiva o izquierda pretransitiva tal que cada trayectoria infinita exterior tiene una flecha simétrica. Entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.*

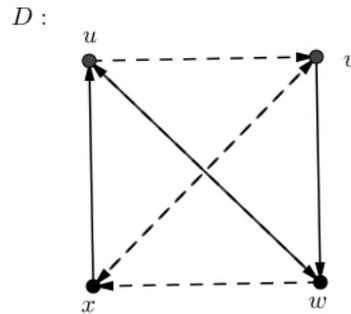


Figura 4.13

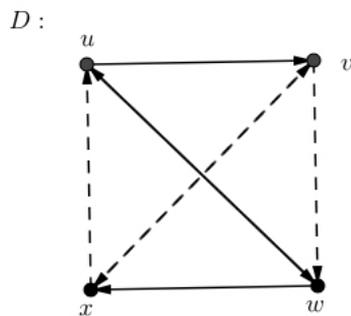


Figura 4.14

**Demostración.** Partimos de la hipótesis de que cada trayectoria infinita exterior tiene una flecha simétrica. Por demostrar que toda trayectoria infinita exterior y todo ciclo en  $D$  tiene al menos una flecha simétrica. Por hipótesis tenemos que toda trayectoria infinita exterior tiene una flecha simétrica, por lo que solo resta probar que todo ciclo tiene una flecha simétrica.

Consideramos dos casos sobre  $D$ .

**Caso 1.**  $D$  no tiene ciclos.

En este caso, por vacuidad se cumple que todo ciclo tiene una flecha simétrica.

**Caso 2.**  $D$  tiene al menos un ciclo.

Sea  $C = (x_1, x_2, \dots, x_n = x_1)$  un ciclo en  $D$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $C$  no tiene flechas simétricas; es decir,  $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$  para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Como la sucesión  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cumple con la hipótesis del lema 1.2.1, entonces  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una trayectoria, lo cual no es posible, porque  $x_n = x_1$ .

Por lo tanto,  $C$  tiene al menos una flecha simétrica.

Como  $D$  cumple con las hipótesis del teorema 4.4.1 tenemos que  $D$  es núcleo perfecta. ■

El siguiente resultado ya había sido demostrado, sin embargo se vuelve a ver como conse-

cuencia del resultado en el teorema 4.6.2.

**Corolario 4.6.1** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica posiblemente infinita, supongamos que  $D$  es una digráfica transitiva tal que cada trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica. Entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.*

**Demostración.**

Tenemos que  $D$  es una digráfica transitiva que cumple en particular con ser derecha pretransitiva e izquierda pretransitiva. Por hipótesis las trayectorias infinitas exteriores tienen una flecha simétrica, entonces por el teorema 4.6.2 tenemos que  $D$  es una digráfica núcleo perfecta. ■



# Caracterización de las digráficas infinitas que son núcleo perfectas

Para las digráficas finitas que no tienen núcleo sabemos que existe una subdigráfica inducida, que es núcleo imperfecta crítica; pero este resultado no se cumple en digráficas infinitas, un ejemplo de ello lo veremos en este capítulo. Como alternativa al concepto de digráfica núcleo imperfecta crítica se considerara el concepto de digráfica finitamente núcleo imperfecta crítica y con este concepto se dara una caracterización de las digráficas posiblemente infinitas que son núcleo perfectas.

## 5.1 Digráficas núcleo imperfectas críticas y digráficas finitamente núcleo imperfectas críticas

**Definición 5.1.1.** *Una digráfica  $D$  es núcleo imperfecta crítica si  $D$  no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida propia de  $D$  si tiene núcleo.*

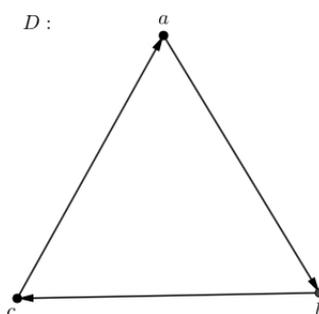


Figura 5.1: Digráfica núcleo imperfecta crítica

Recordemos que la digráfica de la figura 5.1 no tiene núcleo, pero esta digráfica es núcleo imperfecta crítica porque todas sus subdigráficas inducidas propias tienen núcleo (como toda subdigráfica inducida propia de  $D$  no tiene ciclos, el resultado se sigue del teorema 4.4.1).

La siguiente observación será de utilidad para la demostración de algunos teoremas.

**Observación 5.1.1.** *Toda subdigráfica inducida de una digráfica núcleo perfecta es núcleo perfecta.*

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica núcleo perfecta; es decir, toda subdigráfica inducida tiene núcleo. Sea  $H$  una subdigráfica inducida de  $D$ . Veamos que  $H$  es una digráfica núcleo perfecta.

Sea  $G$  una subdigráfica inducida de  $H$ . Note que  $G$  también es una digráfica inducida de  $D$  (porque  $H$  es inducida de  $D$ ). Así  $G$  tiene núcleo ya que  $D$  es núcleo perfecta.

Por lo tanto,  $H$  es núcleo perfecta. ■

El siguiente teorema es un resultado para digráficas finitas las cuales tienen la característica de no tener núcleo.

**Teorema 5.1.1.** *Sea  $D$  una digráfica finita que no contiene núcleo. Entonces existe una subdigráfica inducida de  $D$  que es núcleo imperfecta crítica.*

**Demostración.**

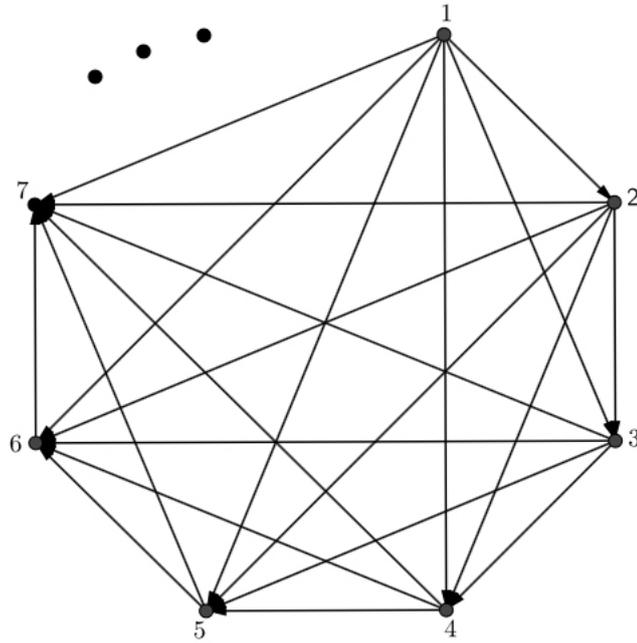
Sabemos que  $D$  también es subdigráfica inducida de si misma, así que si  $D$  es núcleo imperfecta crítica se cumple el teorema 5.1.1. De otro modo existe un subconjunto  $V_1$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1]$  no tiene núcleo. Si  $D[V_1]$  es núcleo imperfecta crítica se cumple el teorema 5.1.1. De otro modo existe un subconjunto  $V_2$  de  $V_1$  tal que  $D[V_2]$  no tiene núcleo. Si  $D[V_2]$  es núcleo imperfecta crítica, entonces se cumple el teorema 5.1.1. De otro modo existe un subconjunto  $V_3$  de  $V_2$  tal que  $D[V_3]$  no tiene núcleo. Como  $D$  es finita, continuando de esta manera llegamos a que existe  $V_n$  un subconjunto de  $V_{n-1}$  tal que  $D[V_n]$  no tiene núcleo y toda subdigráfica inducida propia de  $D[V_n]$  si lo tiene. ■

**Observación 5.1.2.** *El teorema 5.1.1 no puede ser aplicado a digráficas infinitas. Veamos que  $D^\sharp$  no tiene subdigráficas inducidas que sean núcleo imperfectas críticas.*

**Demostración.**

Recordemos que  $D^\sharp$  es la digráfica tal que  $V(D^\sharp) = \mathbb{N}$  y  $(i, j) \in A(D^\sharp)$  si y solo si  $i < j$ .

1.  $D^\sharp$  no tiene núcleo.
2. Cada subdigráfica finita inducida  $H$  de  $D^\sharp$  es transitiva, lo que implica que  $H$  es núcleo perfecta (por el corolario 4.5.1).
3. Toda subdigráfica infinita inducida  $H$  de  $D^\sharp$  es isomorfa a  $D^\sharp$  por lo que  $H$  no tiene núcleo.

Figura 5.2: Digráfica  $D^\sharp$ .

Por lo tanto, cualquier subdigráfica inducida de  $D^\sharp$  no puede ser núcleo imperfecta crítica.

Víctor Neumann Lara y Hortensia Galeana Sánchez fueron los que introdujeron el concepto de digráfica núcleo imperfecta crítica; sin embargo, como no toda digráfica infinita sin núcleo contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, Rocío Rojas Monroy y J. Imelda Villareal Valdéz en [16], como una alternativa, introdujeron el concepto de digráfica finitamente núcleo imperfecta crítica.

**Definición 5.1.2** ([16]). *Una digráfica infinita  $D$  es llamada finitamente núcleo imperfecta crítica si  $D$  no tiene núcleo pero cada subdigráfica finita inducida de  $D$  tiene un núcleo.*

Por lo tanto, se sigue de la definición anterior que  $D^\sharp$  es finitamente núcleo imperfecta crítica.

Veremos que toda digráfica infinita sin núcleo contiene una subdigráfica finitamente núcleo imperfecta crítica.

**Teorema 5.1.2** ([16]). *Sea  $D$  una digráfica infinita que no contiene núcleo. Entonces existe una subdigráfica inducida de  $D$  que es núcleo imperfecta crítica o es finitamente núcleo imperfecta crítica.*

**Demostración.**

Si cada subdigráfica finita inducida de  $D$  tiene núcleo, entonces  $D$  es una digráfica finitamente núcleo imperfecta crítica. Si no, entonces existe una subdigráfica finita inducida de  $D$  que no contiene núcleo, llamémosle  $H$ . Por el teorema 5.1.1 tenemos que  $H$  contiene una subdigráfica que es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto, existe una subdigráfica inducida de  $D$  que es núcleo imperfecta crítica o es finitamente núcleo imperfecta crítica. ■

Veremos algunos teoremas que muestran propiedades que cumplen las digráficas núcleo imperfectas críticas.

**Teorema 5.1.3.** *Sea  $D$  una digráfica finita. Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $D$  es fuertemente conexa.*

**Demostración.**

Por contradicción supongamos que  $D$  es núcleo imperfecta crítica y que no es fuertemente conexa.

Como  $D$  no es fuertemente conexa, entonces  $D$  tiene dos componentes fuertemente conexas. Sea  $C_1$  una componente fuertemente conexa terminal de  $D$ . Puesto que  $C_1$  es una subdigráfica inducida propia de  $D$  y  $D$  es núcleo imperfecta crítica, se tiene que  $C_1$  posee núcleo. Sea  $S_1$  un núcleo de  $C_1$ . Sea  $C_2 = V(D) \setminus (S_1 \cup \Gamma_D^-(S_1))$  (note que  $C_2 \neq \emptyset$  porque  $D$  no tiene núcleo). Claramente  $C_2 \subset V(D)$ , así que  $D[C_2]$  tiene núcleo, digamos  $S_2$ . Ver figura 5.3.

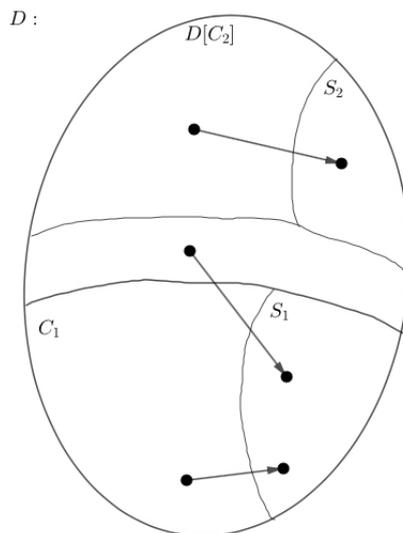


Figura 5.3

**Afirmación:**  $S_1 \cup S_2$  es núcleo de  $D$ .

Por demostrar que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto independiente y absorbente en  $D$ .

Primero veamos que  $S_1 \cup S_2$  es independiente en  $D$ . Como  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos independientes, solo resta probar que no existe la  $S_1S_2$ -flecha ni la  $S_2S_1$ -flecha en  $D$ . Por definición de  $C_2$  tenemos que no existe la  $S_2S_1$ -flecha. Puesto que  $C_1$  es una componente terminal se tiene que no salen flechas hacia otra componente, por lo que tampoco existe la  $S_1S_2$ -flecha. Así,  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Ahora veamos que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto absorbente en  $D$ . Sabemos que  $S_1$  absorbe a los vértices en  $(V(C_1) \setminus S_1) \cup \Gamma_D^-(S_1)$  y que  $S_2$  absorbe a los vértices de  $C_2 \setminus S_2$ . Como  $V(D) = V(C_1) \cup C_2 \cup \Gamma^-(S_1)$ , entonces  $S_1 \cup S_2$  absorbe a todos los vértices de  $V(D) \setminus (S_1 \cup S_2)$ .

Por lo tanto,  $S_1 \cup S_2$  es núcleo de  $D$ , contradiciendo que  $D$  es núcleo imperfecta crítica. Así,  $D$  es fuertemente conexa. ■

El siguiente teorema es una generalización del anterior y además es un resultado original.

**Teorema 5.1.4.** *Si  $D$  es una digráfica (posiblemente infinita) núcleo imperfecta crítica, entonces  $D$  es fuertemente conexa.*

**Demostración.**

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D$  es núcleo imperfecta crítica y que no es fuertemente conexa. Entonces, por el teorema 1.1.1, existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que no existe una  $V_1V_2$ -flecha o no existe una  $V_2V_1$ -flecha. Supongamos sin pérdida de generalidad que no existe la  $V_1V_2$ -flecha. Sea  $C_1 = D[V_1]$ . Como  $C_1$  es una subdigráfica inducida propia de  $D$  y  $D$  es núcleo imperfecta crítica, se tiene que  $C_1$  posee un núcleo, digamos  $S_1$ . Ahora, consideremos la subdigráfica inducida por  $C_2 = V(D) \setminus (S_1 \cup \Gamma_D^-(S_1))$  (note que  $C_2 \neq \emptyset$  porque  $D$  no tiene núcleo). Así que  $D[C_2]$  tiene núcleo, digamos  $S_2$ , ver figura 5.4.

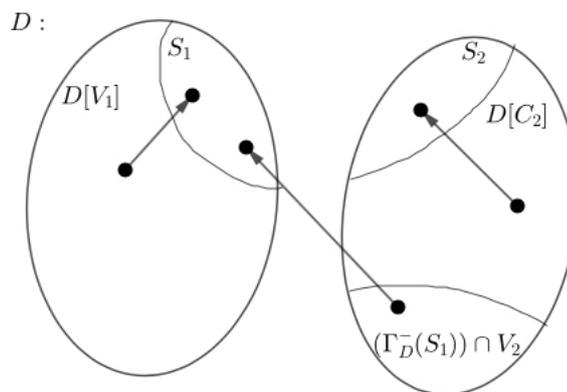


Figura 5.4

**Afirmación:**  $S_1 \cup S_2$  es núcleo de  $D$ .

Por demostrar que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto independiente en  $D$ ; es decir, que no existe la  $S_1S_2$ -flecha ni la  $S_2S_1$ -flecha en  $D$ . Como  $S_1$  es núcleo de  $C_1$  se tiene que es un conjunto independiente en  $C_1$  y como  $S_2$  es núcleo de  $D[C_2]$  se tiene que es un conjunto independiente en  $D[C_2]$ . Así,  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos independientes en  $D$ . Por otro lado, de la definición de  $C_2$  tenemos que no existe la  $S_2S_1$ -flecha en  $D$ . Puesto que no existe  $V_1V_2$ -flecha en  $D$ , se tiene que tampoco existe la  $S_1S_2$ -flecha en  $D$ . De esta manera,  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Por demostrar que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto absorbente en  $D$ . Sabemos que  $S_1$  absorbe a los vértices en  $V(C_1) \setminus S_1$  y a todos los vértices en  $(\Gamma_D^-(S_1)) \cap V_2$ . También,  $S_2$  absorbe a los vértices de  $C_2 \setminus S_2$ . Como  $V(D) = V(C_1) \cup C_2 \cup \Gamma_D^-(S_1)$ , entonces  $S_1 \cup S_2$  absorbe a todos los vértices de  $V(D) \setminus (S_1 \cup S_2)$ .

Por lo tanto,  $S_1 \cup S_2$  es núcleo de  $D$ , contradiciendo que  $D$  es núcleo imperfecta crítica. Así,  $D$  es fuertemente conexa. ■

Con el siguiente resultado se vuelve a demostrar que  $D$  es fuertemente conexa cuando  $D$  es una digráfica posiblemente infinita núcleo imperfecta crítica. Cabe mencionar que originalmente primero se demostró el teorema anterior pero luego nos dimos cuenta de que se podía demostrar más.

**Teorema 5.1.5** ([17]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita). Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $Asim(D)$  es fuertemente conexa.*

**Demostración.**

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D$  es núcleo imperfecta crítica y que  $Asim(D)$  no es fuertemente conexa. Entonces existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(Asim(D)) = V(D)$  tal que no existe la  $V_1V_2$ -flecha en  $Asim(D)$  o no existe la  $V_2V_1$ -flecha en  $Asim(D)$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que no existe la  $V_1V_2$ -flecha en  $Asim(D)$ .

Sea  $C_1$  la subdigráfica de  $D$  inducida por  $V_1$ . Como  $C_1$  es una subdigráfica inducida propia de  $D$  y  $D$  es núcleo imperfecta crítica, se tiene que  $C_1$  posee un núcleo, digamos  $S_1$ . Consideremos la subdigráfica inducida por  $C_2 = V(D) \setminus (S_1 \cup \Gamma_D^-(S_1))$  en  $D$ . Claramente  $C_2 \neq \emptyset$ , porque  $D$  no tiene núcleo. Así,  $D[C_2]$  tiene núcleo, digamos  $S_2$ .

**Afirmación:**  $S_1 \cup S_2$  es núcleo de  $D$ .

Por demostrar que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto independiente en  $D$ ; es decir, que no existe la  $S_1S_2$ -flecha ni la  $S_2S_1$ -flecha en  $D$ .

Como  $S_1$  es núcleo de  $C_1$  se tiene que es un conjunto independiente en  $C_1$  y como  $S_2$  es núcleo de  $D[C_2]$  se tiene que es un conjunto independiente en  $C_2$ . Así,  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos independientes en  $D$ . Luego, no hay  $S_2S_1$ -flechas en  $D$ , por la definición de  $C_2$  y el hecho de que  $S_2 \subseteq C_2$ . No hay  $S_1S_2$ -flechas en  $D$ , porque no hay  $V_1V_2$ -flechas en  $D$ . Por lo tanto,  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto independiente en  $D$ .

Por demostrar que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto absorbente en  $D$ .

Sabemos que  $S_1$  absorbe a los vértices en  $V(C_1) \setminus S_1$  y a todos los vértices  $\Gamma_D^-(S_1) \cap V_2$  y que  $S_2$  absorbe a los vértices de  $C_2 \setminus S_2$ . Como  $V(D) = V(C_1) \cup C_2 \cup \Gamma_D^-(S_1)$ , entonces  $S_1 \cup S_2$  absorbe a todos los vértices de  $V(D) \setminus (S_1 \cup S_2)$ .

Por lo tanto,  $S_1 \cup S_2$  es núcleo de  $D$ , lo cual contradice que  $D$  es núcleo imperfecta crítica.

Así,  $Asim(D)$  es fuertemente conexa. ■

Como consecuencia del resultado anterior tenemos lo siguiente.

**Teorema 5.1.6.** *Sea  $D$  una digráfica posiblemente infinita. Si  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $Asim(D)$  tiene al menos un ciclo.*

**Demostración.**

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $Asim(D)$ . Como  $D$  es núcleo imperfecta crítica, por el teorema 5.1.5,  $Asim(D)$  es fuertemente conexa, lo que implica que existe un  $uv$ -camino en  $Asim(D)$ , llamémosle  $C_1$ , y existe un  $vu$ -camino en  $Asim(D)$ , llamémosle  $C_2$ . Entonces  $C_1 \cup C_2$  es un camino cerrado en  $Asim(D)$ , el cual contiene un ciclo (teorema 0.7.3).

Por lo tanto,  $Asim(D)$  tiene al menos un ciclo. ■

## 5.2 Caracterización de las digráficas infinitas núcleo perfectas

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo. Dicho teorema es idea original de la asesora de esta tesis y su demostración se trabajó en conjunto.

**Teorema 5.2.1** ([17]). *Sean  $D$  una digráfica posiblemente infinita y  $\mathcal{S}$  la familia de todas las componentes fuertemente conexas de  $Asim(D)$ .  $D$  es núcleo perfecta si y solo si  $D[V(G)]$  es núcleo perfecta para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  y  $D$  no contiene subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas.*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $D$  es núcleo perfecta.

Como  $D$  es núcleo perfecta, entonces para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  se tiene que  $D[V(G)]$  es núcleo perfecta. Por otro lado, como toda subdigráfica de  $D$  tiene núcleo, entonces  $D$  no puede tener una subdigráfica inducida que sea finitamente núcleo imperfecta crítica.

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $D[V(G)]$  es núcleo perfecta para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  y  $D$  no tiene subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas.

Procediendo por contradicción, supongamos que  $D$  no es núcleo perfecta. Entonces existe un subconjunto  $H$  de  $V(D)$  tal que  $D[H]$  no tiene núcleo.

**Afirmación:**  $D[H]$  contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica.

Consideremos dos casos sobre la digráfica  $D[H]$ .

**Caso 1.**  $D[H]$  es finita.

Como  $D[H]$  es finita y no contiene núcleo, por el teorema 5.1.1, tenemos que existe una subdigráfica de  $D[H]$  tal que es núcleo imperfecta crítica.

**Caso 2.**  $D[H]$  es infinita.

Como  $D[H]$  es infinita, no tiene núcleo y no contiene subdigráficas finitamente núcleo imperfectas críticas (por hipótesis), por el teorema 5.1.2 tenemos que  $D[H]$  contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica (la cual también es una subdigráfica inducida de  $D$ ).

Sea  $D[S]$  la subdigráfica inducida de  $D[H]$  tal que es núcleo imperfecta crítica, para algún subconjunto  $S$  de  $H$ . Como  $D[H]$  es una subdigráfica de  $D$  y  $D[S]$  es una subdigráfica de  $D[H]$ , se tiene que  $D[S]$  es subdigráfica de  $D$ . Puesto que  $D[S]$  es núcleo imperfecta crítica, por el teorema 5.1.5 tenemos que  $Asim(D[S])$  es fuertemente conexa. Como  $Asim(D[S])$  es subdigráfica de  $Asim(D)$  y  $Asim(D[S])$  es fuertemente conexa, existe una componente fuertemente conexa en  $Asim(D)$ , llamémosle  $W$ , tal que  $Asim(D[S])$  es una subdigráfica de  $W$ . Puesto que  $D[V(W)]$  es núcleo perfecta (por hipótesis del teorema 5.2.1) se tiene que  $D[S]$  también es núcleo perfecta (porque  $D[S]$  es una subdigráfica de  $D[V(W)]$  y por la observación 5.1.1), lo cual contradice que  $D[S]$  es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto,  $D$  es núcleo perfecta. ■

### 5.2.1 Algunas consecuencias del teorema 5.2.1

El siguiente teorema es una generalización del teorema de Richardson para digráficas posiblemente infinitas.

**Teorema 5.2.2** ([17]). *Sea  $D$  una digráfica (posiblemente infinita) sin subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas. Si todo ciclo de longitud impar posee al menos dos flechas simétricas, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.**

Sea  $\mathcal{S}$  la familia de componentes fuertemente conexas de  $Asim(D)$ . Por demostrar que para cada  $H$  en  $\mathcal{S}$  se tiene que  $D[V(H)]$  es núcleo perfecta.

Sea  $H$  en  $\mathcal{S}$ . Como la digráfica que consiste de un sólo vértice es núcleo perfecta, entonces supongamos que  $|V(H)| \geq 2$ .

**Afirmación 1:**  $H$  no tiene ciclos de longitud impar.

Si  $H$  tuviera ciclos de longitud impar ya no se cumple la hipótesis "todo ciclo de longitud impar posee al menos dos flechas simétricas" (ya que  $H$  es una subdigráfica de  $Asim(D)$ ).

**Afirmación 2:**  $H$  es bipartita.

Como  $H$  es fuertemente conexas y no tiene ciclos de longitud impar, se sigue del teorema 1.1.5 que  $H$  es bipartita.

Sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(H)$  en conjuntos independientes.

**Afirmación 3:**  $\{V_1, V_2\}$  también es una partición de los vértices de  $D[V(H)]$  en conjuntos independientes.

Por demostrar que  $V_1$  y  $V_2$  son conjuntos independientes en  $D$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $V_1$  no es independiente en  $D$ , entonces existen  $x_1$  y  $x_2$  en  $V_1$  tales que  $(x_1, x_2) \in A(D)$ . Como  $V_1$  es independiente en  $H$  y  $H$  es subdigráfica de  $Asim(D)$ , entonces en  $D[V(H)]$  se tiene que  $(x_1, x_2)$  es una flecha simétrica. Puesto que  $H$  es fuertemente conexas se tiene que para  $x_1$  y  $x_2$  existe una trayectoria que va de  $x_1$  hacia  $x_2$  en  $H$ , llamémosle  $\tau_1$ , la cual es de longitud par ya que  $\{x_1, x_2\} \subseteq V_1$ . Notemos que  $\tau_1$  está contenida en  $Asim(D)$  ya que  $H$  es una subdigráfica de  $Asim(D)$ . Entonces  $\tau_1 \cup (x_2, x_1)$  es un ciclo de longitud impar con exactamente una flecha simétrica, a saber  $(x_1, x_2)$ . Lo cual no es posible por hipótesis. Por lo tanto,  $V_1$  es independiente en  $D$ . Análogamente se demuestra que  $V_2$  es independiente en  $D$ .

Por lo tanto,  $D[V(H)]$  es bipartita, lo que implica que  $D[V(H)]$  es núcleo perfecta (por teorema 4.2.1).

Por lo tanto, como  $D[V(H)]$  es núcleo perfecta para toda  $H$  en  $\mathcal{S}$  y  $D$  no contiene subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas, se sigue del teorema 5.2.1 que  $D$  es núcleo perfecta. ■

**Corolario 5.2.1** ([17]). *Sean  $D$  una digráfica (posiblemente infinita) sin subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas y  $\mathcal{S}$  la familia de componentes fuertemente conexas de  $Asim(D)$ . Si para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  se tiene que todo ciclo de longitud impar en  $D[V(G)]$  posee al menos dos flechas simétricas, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Es una combinación del teorema 5.2.2 y el teorema 5.2.1. ■

Los siguientes resultados son consecuencias de la combinación del teorema 5.2.1 y los resultados vistos en el capítulo 4.

**Corolario 5.2.2** ([17]). Sean  $D$  una digráfica (posiblemente infinita) sin subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas y  $\mathcal{S}$  la familia de componentes fuertemente conexas de  $\text{Asim}(D)$ . Si para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  se tiene que  $D[V(G)]$  es exteriormente finita y toda subdigráfica inducida finita de  $D[V(G)]$  tiene núcleo, entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Es una combinación del teorema 4.3.1 y el teorema 5.2.1. ■

**Corolario 5.2.3** ([17]). Sean  $D$  una digráfica (posiblemente infinita) sin subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas y  $\mathcal{S}$  la familia de componentes fuertemente conexas de  $\text{Asim}(D)$ . Si para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  se tiene que existen dos subdigráficas  $D_1$  y  $D_2$  de  $D[V(G)]$  tales que  $D[V(G)] = D_1 \cup D_2$  (posiblemente  $A(D_1) \cap A(D_2) \neq \emptyset$ ), donde  $D_1$  es derecha pretransitiva,  $D_2$  es izquierda pretransitiva y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores, para cada  $i$  en  $\{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Es una combinación del teorema 4.6.1 y el teorema 5.2.1. ■

**Corolario 5.2.4** ([17]). Sean  $D$  una digráfica (posiblemente infinita) sin subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas y  $\mathcal{S}$  la familia de componentes fuertemente conexas de  $\text{Asim}(D)$ . Si para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  se tiene que  $D[V(G)]$  es una digráfica transitiva tal que cada una de sus trayectorias infinitas exteriores tienen al menos una flecha simétrica, entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Es una combinación del teorema 4.5.3 y el teorema 5.2.1. ■

**Corolario 5.2.5** ([17]). Sean  $D$  una digráfica (posiblemente infinita) sin subdigráficas inducidas que sean finitamente núcleo imperfectas críticas y  $\mathcal{S}$  la familia de componentes fuertemente conexas de  $\text{Asim}(D)$ . Si para cada  $G$  en  $\mathcal{S}$  se tiene que  $D[V(G)]$  es una digráfica transitiva con número cromático finito, entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Es una combinación del teorema 4.5.1 y el teorema 5.2.1. ■

El siguiente teorema es otro resultado original.

**Teorema 5.2.3.** Sea  $D$  una digráfica posiblemente infinita. Si existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que toda  $V_1V_2$ -flecha es simétrica en  $D$  y  $D[V_i]$  es núcleo perfecta para cada  $i$  en  $\{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.**

Sea  $H$  una subdigráfica inducida de  $D$ . Por demostrar que  $H$  tiene núcleo. Veamos dos casos, respecto a  $H$ .

Caso 1)  $V(H) \subseteq V_i$  para algún  $i$  en  $\{1, 2\}$ .

Como  $D[V_i]$  es núcleo perfecta para cada  $i$  en  $\{1, 2\}$ , entonces  $H$  tiene núcleo.

Caso 2)  $V(H) \cap V_i \neq \emptyset$  para cada  $i$  en  $\{1, 2\}$ .

Sean  $G_1 = D[V(H) \cap V_1]$  y  $G_2 = D[V(H) \cap V_2]$ . Sabemos que  $G_1$  tiene núcleo por ser subdigráfica inducida de  $D[V_1]$ , digamos  $N_1$ . Consideremos el conjunto  $S = V(G_2) \setminus (\Gamma_D^-(N_1) \cap V(G_2))$ . Veamos dos subcasos, respecto a  $S$ .

Subcaso A)  $S = \emptyset$ .

En este caso, como todos los vértices de  $S$  son adyacentes hacia vértices de  $N_1$ , tenemos que  $N_1$  ya es núcleo de  $H$ .

Subcaso B)  $S \neq \emptyset$ .

En este caso existe un subconjunto  $N_2$  de  $S$  tal que  $N_2$  es núcleo de  $G[S]$  (porque  $G[S]$  es subdigráfica inducida de  $D[V_2]$  y  $D[V_2]$  es núcleo perfecta).

**Afirmación:**  $N_1 \cup N_2$  es núcleo de  $H$ .

Por demostrar que  $N_1 \cup N_2$  es un conjunto independiente en  $H$ . Sabemos que  $N_1$  y  $N_2$  son conjuntos independientes dentro de  $G_1$  y  $G[S]$ , respectivamente. Veamos que no hay flechas entre ellos.

Por demostrar que no existe la  $N_2N_1$ -flecha en  $H$ . Por construcción no hay flechas de  $S$  hacia  $N_1$ .

Por demostrar que no existe la  $N_1N_2$ -flecha en  $H$ . Por hipótesis sabemos que las  $V_1V_2$ -flechas son simétricas, así que si tuvieramos la  $N_1N_2$ -flecha en  $H$  implicaría tener la  $N_2N_1$ -flecha en  $H$ , la cual ya vimos que no existe.

Por lo tanto,  $N_1 \cup N_2$  es un conjunto independiente en  $H$ .

Por demostrar que  $N_1 \cup N_2$  es un conjunto absorbente en  $H$ . Sabemos que  $N_1$  es núcleo de  $G_1$ , así que  $N_1$  absorbe a  $(V(G_1) \setminus N_1) \cup (\Gamma_D^-(N_1) \cap V(G_2))$  y puesto que  $N_2$  es núcleo de  $G[S]$  se tiene que  $N_2$  absorbe a  $S \setminus N_2$ .

Por lo tanto,  $N_1 \cup N_2$  es un conjunto absorbente en  $H$ .

Así,  $N_1 \cup N_2$  es núcleo de  $H$ , concluyendo que  $D$  es núcleo perfecta. ■



# Conclusiones

---

En esta tesis exhibimos algunos resultados que muestran la existencia de núcleos en digráficas infinitas, en ciertos tipos de digráfica, como son: digráficas exteriormente finitas, digráficas con ciclos, digráficas transitivas, digráficas pretransitivas, digráficas cuasitransitivas, digráficas bipartitas. Posteriormente todos estos resultados sirvieron para establecer nuevas condiciones que garantizan la existencia de núcleos en digráficas infinitas en el capítulo 5.

En el capítulo 5 de esta tesis se presentó un resultado original, el cual muestra cuando una digráfica posiblemente infinita es núcleo perfecta (teorema 5.2.1), esto considerando algunas características en la parte asimétrica de la digráfica combinado con el concepto de digráfica finitamente núcleo imperfecta crítica. Como consecuencia de este resultado se derivaron nuevas condiciones en digráficas infinitas que garantizan la núcleo perfección. Cabe mencionar que la continuidad de la investigación fue realizada por mi asesora Rocío Sánchez López en [17].

Podemos concluir que algunas condiciones suficientes para la existencia de núcleos en digráficas infinitas son mostradas en esta tesis.



# Apéndice

---

El siguiente apartado trata de los conceptos básicos de la lógica de enunciados (lógica proposicional). La finalidad de esta sección es poder enunciar con claridad el teorema de compacidad.

En la lógica de enunciados se construye un lenguaje con el cual se pueden traducir oraciones del español. A diferencia de los lenguajes naturales, éste es un lenguaje formal, con reglas de formación precisas.

El uso de lenguajes formales permiten escapar de la imprecisión y las ambigüedades de los lenguajes naturales; sin embargo, esto tiene su precio: los lenguajes formales tienen un grado de expresividad muy limitado.

La descripción de un lenguaje formal incluye generalmente tres tipos de datos:

1. Se especifica el conjunto de símbolos (el alfabeto). En el caso presente, la lógica de enunciados, algunos de los símbolos son  
 $(, ), \rightarrow, \neg, A_1, A_2, \dots$
2. Se especifican las reglas para formar las sucesiones finitas de símbolos gramaticalmente correctas (tales sucesiones se denominan *formulas*).
3. También se indican las traducciones permisibles entre el español y el lenguaje formal. Los símbolos  $A_1, A_2, \dots$  pueden ser traducciones de enunciados declarativos del español.

Supondremos que se nos da una sucesión infinita de objetos distintos a los que llamaremos símbolos, ver tabla 5.1.

Los cinco símbolos  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  se llaman *conectivos de enunciado*. Los conectivos, junto con los paréntesis, son los *símbolos lógicos*. Al traducirlos del español y al español siempre desempeñan el mismo papel. Los *símbolos de enunciado* son los *parámetros* (o *símbolos no lógicos*). Su traducción no está fija; más bien estarán abiertos a una gran diversidad de interpretaciones. A los símbolos de enunciado simplemente los llamaremos símbolos.

Se supone que ningún símbolo es una sucesión finita de otros símbolos; es decir, los símbolos de la tabla 5.1 no sólo son distintos, sino que, además, ninguno de ellos es una sucesión finita de dos o más símbolos.

Símbolo	Nombre largo	Observaciones
(	paréntesis izquierdo	puntuación
)	paréntesis derecho	puntuación
$\neg$	símbolo de negación	español: <i>no</i>
$\wedge$	símbolo de conjunción	español: <i>y</i>
$\vee$	símbolo de disyunción	español: <i>o</i>
$\rightarrow$	símbolo de condicional	español: <i>si... , entonces</i>
$\leftrightarrow$	símbolo de bicondicional	español: <i>si y solo si</i>
$A_1$	primer símbolo de enunciado	
$A_2$	segundo símbolo de enunciado	
...		
$A_n$	enésimo símbolo de enunciado	
...		

Tabla 5.1

Una *expresión* es una sucesión finita de símbolos. Una *fórmula* se define como una expresión “gramaticalmente correcta”, las expresiones sin sentido son excluidas. De esta última definición se tienen las siguientes consecuencias:

1. Todo símbolo de enunciado es una fórmula.
2. Si  $A$  y  $B$  son fórmulas, entonces también lo son  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$ .
3. Ninguna expresión es una fórmula a menos que los dos puntos anteriores obliguen a ello.

En resumen, una fórmula es una expresión que puede construirse a partir de símbolos de enunciado aplicando un número finito de veces las *operaciones de construcción de fórmulas* definidas por  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$ .

Fijemos un conjunto  $\{F, V\}$  de **valores de verdad** consistentes en dos puntos distintos:  $F$ , llamado **falso**,  
 $V$ , llamado **verdadero**.

Una **asignación de verdad**  $v$  para un conjunto  $\mathcal{S}$  de símbolos de enunciados es una función  $v: \mathcal{S} \rightarrow \{F, V\}$  que asigna  $V$  o  $F$  a cada símbolo de  $\mathcal{S}$ .

Sea  $\bar{\mathcal{S}}$  el conjunto de fórmulas que pueden construirse a partir de  $\mathcal{S}$  con las cinco operaciones de construcción de fórmulas. Una **extensión**  $\bar{v}: \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \{F, V\}$  de  $v$  que asigne el valor correcto de verdad a cada fórmula de  $\bar{\mathcal{S}}$ , satisface: para cualquier  $A$  en  $\mathcal{S}$ ,  $\bar{v}(A) = v(A)$  y en la siguiente tabla se exhibe el valor de verdad asociado a cada fórmula de  $\bar{\mathcal{S}}$ , a partir de la asignación de verdad  $v$ .

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Tabla 5.2

Se dice que una asignación de verdad  $v$  **satisface**  $\varphi$  si y solo si  $\bar{v}(\varphi) = V$ .

El siguiente teorema es el de compacidad.

**Teorema 5.2.4.** *Sea  $\Sigma$  un conjunto infinito de fórmulas tal que para todo subconjunto finito  $\Sigma_0$  de  $\Sigma$  existe una asignación de verdad que satisface a todos los elementos de  $\Sigma_0$ . Entonces existe una asignación de verdad que satisface a todos los elementos de  $\Sigma$ .*



# Bibliografía

---

- [1] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, Springer-Verlag, London, 2000.
- [2] C. Berge, Graphs, North-Holland Mathematical Library, The Netherlands, 1989.
- [3] V. Chvátal, L. Lovász. Every directed graph has a semi-kernel, in: Hypergraph Seminar, in: Lecture Notes in Math., vol. 441, Springer-Verlag, Berlin, 1974, p.175.
- [4] V. Chvátal, On The Computational Complexity of Finding a Kernel, Report CRM300, Centre de Recherches Mathématiques Université de Montréal, 1973.
- [5] P. Duchet, A sufficient condition for a digraph to be kernel perfect, J. Graph Theory 11 (1) (1987) 81-85.
- [6] P. Duchet and H. Meyniel, Kernels in directed graphs, Discrete Mathematics 115 (1993) 273-276.
- [7] P. Duchet, Kernels in directed graphs: a poison game, Discrete Math, 115 (1993), 273-276.
- [8] P. L. Erdős and L. Soukup, Quasi-kernels and quasi-sinks in infinite graphs, Discrete Mathematics 309 (2009) 3040-3048.
- [9] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, Kernels in pretransitive digraphs, Discrete Mathematics 275 (2004) 129-136.
- [10] H. Galeana-Sánchez, Semikernels modulo  $F$  and kernels in digraphs, Discrete Math., 218 (2000), 61-71.
- [11] D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Reprinted from Chelsea Publishing Company, New York, 1950.
- [12] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.
- [13] V. Neumann-Lara, Seminúcleos de una digráfica, An. Inst. Mat. (1971) II UNAM.
- [14] M. Richardson, Solutions of irreflexive relations, Ann. Math. 58 (2) (1953) 573.

- [15] M. Richardson, Extensions theorems for solutions of irreflexive relations, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 39 (1953) 649.
- [16] R. Rojas-Monroy, J. I. Villarreal-Valdés, Kernels in infinite digraphs, AKCE J. Graphs. Combin. 7 (1) (2010) 103-111.
- [17] R. Sánchez-López, Infinite Kernel Perfect Digraphs, AKCE J. Graphs. Combin. 14(2017) 165-171.
- [18] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas- Monroy, Kernels in quasitransitive digraphs, Discrete Math., 306 (2006), 1969-1974.