



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

El oscilador armónico en el espacio fase desde la  
perspectiva de la Electrodinámica Estocástica

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**JOSÉ FRANCISCO PÉREZ BARRAGÁN**

TUTOR PRINCIPAL:

DR. LUIS DE LA PEÑA AUERBACH  
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DRA. ANA MARÍA CETTO KRAMIS  
INSTITUTO DE FÍSICA

DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO DE 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*I recall that during one walk Einstein suddenly stopped,  
turned to me and asked whether I really believed that the Moon  
exists only when I look at it.*

Abraham Pais<sup>\*</sup>

---

<sup>\*</sup>PAIS, A. *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979), p. 907.



# Agradecimientos

Esta tesis de maestría representa el esfuerzo, el sacrificio y la dedicación de muchas personas, aun cuando tiene un único autor en su portada. Por ello, me tomo el espacio para expresar mi infinito agradecimiento a quienes de manera muy especial me han apoyado, no solo en la realización y conclusión de este trabajo, sino a lo largo de mis estudios de maestría. A todos y cada uno de ustedes ¡muchas gracias!

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado de la UNAM por los apoyos económicos brindados durante mis estudios de maestría.

Agradezco al Instituto de Física y al Instituto de Ciencias Nucleares por facilitar el desempeño de mis actividades como estudiante en sus instalaciones y por el excelente espacio de trabajo brindado.

Agradezco a la coordinación del Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM y de forma destacada a su coordinador, el doctor Alberto Güijosa, por la atención y el apoyo permanentes.

Por acrecentar de manera profesional y muy amena mis conocimientos en física, agradezco a cada uno de mis profesores del Posgrado.

Agradezco a mis sinodales, los doctores Andrea Valdés, José Recamier, Blas Manuel Rodríguez y Miguel Alcubierre, por el tiempo invertido en la revisión de mi tesis y por sus contribuciones y sugerencias. Agradezco de manera especial al Dr. Alcubierre por la atención siempre brindada como miembro de mi comité tutor, y a la Dra. Valdés por la revisión detallada y cuidadosa de la tesis, que permitió mejorarla enormemente.

Agradezco a la maestra Lorea Chaos y, nuevamente, a la doctora Andrea Valdés por haberme dado la oportunidad de trabajar junto a ustedes como docente en la Facultad de Ciencias estos últimos semestres.

Por acompañarme y guiarme en esta gran aventura llamada maestría en ciencias físicas desde el principio, agradezco enormemente a los doctores Ana María Cetto y Luis de la Peña. Gracias por la confianza y el apoyo incondicionales que me han brindado todos estos años y por el interés que siempre muestran en los proyectos que me propongo.

Por estar siempre pendientes de mí y de mi avance profesional, agradezco a mis abuelos, tíos y primos. Gracias por todos los recuerdos, momentos y, en especial, las risas que hemos compartido como familia.

Agradezco a mi hermana, Laura Sophia, por ser mi amiga, mi eterna compañera de aventuras y, por supuesto, mi fisioterapeuta personal. Gracias por tantos años de diversión juntos y por siempre tomarte el tiempo de atendernos en casa.

Agradezco mis padres Jenny y José Francisco por el amor, el cariño y el apoyo incondicionales que siempre me dan. Gracias por ayudarme a subir cada uno de los escalones que me he propuesto. Si he logrado ver más lejos es por estar sobre sus hombros. Este es uno más de nuestros logros.

Agradezco a Brenda Néquiz, mi novia, amiga y colega, por su amor, cariño y cuidado. Gracias por siempre impulsarme a ser mejor profesional y persona, por mostrarme el camino cada vez que lo pierdo y por colaborar activamente en mi aprendizaje todos estos años.

Finalmente, agradezco enormemente a mi *alma máter*, la Universidad Nacional Autónoma de México, por ser mi casa en todos los sentidos.

# Índice general

Índice de figuras	ix
Introducción	1
<b>1. El oscilador armónico en la electrodinámica estocástica</b>	<b>3</b>
1.1. Descripción estadística del campo electromagnético del vacío .	6
1.1.1. Correlaciones de dos puntos y distribuciones de probabilidad . . . . .	9
1.2. La ecuación de movimiento de Braffort-Marshall . . . . .	11
1.2.1. Descripción estadística de la solución estacionaria . . .	12
<b>2. Descripción del oscilador armónico en el espacio fase</b>	<b>17</b>
2.1. La ecuación generalizada de Fokker-Planck . . . . .	18
2.2. La aproximación markoviana . . . . .	21
2.2.1. Solución de la ecuación de Fokker-Planck . . . . .	24
2.2.2. Distribución en el espacio fase del oscilador armónico unidimensional . . . . .	29
2.3. Oscilaciones forzadas . . . . .	31
2.3.1. Caso resonante: los estados coherentes . . . . .	34
2.4. Aproximaciones de orden superior . . . . .	38
<b>3. La mecánica cuántica en el espacio fase</b>	<b>41</b>
3.1. Descripción cuántica en el espacio fase . . . . .	42
3.2. La distribución de Wigner . . . . .	44

3.2.1. Dinámica de la distribución de Wigner . . . . .	47
3.2.2. El producto de Weyl-Groenewold, el paréntesis de Moyal y la ecuación de Wigner-Moyal . . . . .	51
3.3. La electrodinámica estocástica y la mecánica cuántica en el espacio fase . . . . .	54
<b>Conclusión</b>	<b>59</b>
<b>A. La ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz</b>	<b>61</b>
<b>B. Deducción de la ecuación (1.5)</b>	<b>67</b>
<b>C. Propiedades del campo electromagnético del vacío</b>	<b>69</b>
C.1. Densidad espectral . . . . .	69
C.2. Contenido energético . . . . .	72
<b>D. Cálculo de los coeficientes de difusión</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Índice de figuras

1.1. Distribución estacionaria de probabilidad en el espacio fase en la aproximación de línea estrecha de un electrón que oscila armónicamente en presencia del CPC con $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Los valores numéricos se presentan en unidades atómicas. . . . .	16
2.1. Distribución de probabilidad de un electrón que oscila armónicamente en presencia del CPC con $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ en la aproximación markoviana. Las curvas azules corresponden a una curva de nivel de la distribución en diferentes instantes de tiempo y la curva roja a la trayectoria seguida por la distribución desde $(x_0, p_0)$ . Para evidenciar dicho desplazamiento se fijó $\alpha = e^2/\hbar c = 0.5$ ; estando el resto de valores numéricos en unidades atómicas. . . . .	30
2.2. Trayectoria fase seguida por la densidad de probabilidad de un electrón que oscila armónicamente con $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ en presencia del CPC y de una onda electromagnética, con una amplitud $E_0 = e/4a_0^2$ , en la aproximación markoviana y el caso resonante. Con fines ilustrativos se fijó $\alpha = 1/2$ , estando el resto de valores numéricos en unidades atómicas. . . . .	35
2.3. Distribución de probabilidad en el límite $t \rightarrow \infty$ de un electrón que oscila con frecuencia $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ en presencia del CPC y de una onda electromagnética, con una amplitud $E_0 = e/4a_0^2$ , en la aproximación markoviana y el caso resonante. Las curvas azules corresponden a una curva de nivel de la distribución en distintos tiempos y la curva roja a la trayectoria seguida por la distribución. Los valores numéricos se presentan en unidades atómicas. . . . .	37

- 3.1. Distribución de Wigner de un oscilador armónico cuántico unidimensional con frecuencia  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  en: a) su primer y b) su segundo estado excitado. . . . . 48
- 3.2. Partes real e imaginaria de la matriz de densidad de un electrón que oscila con frecuencia  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  en presencia del CPC, en la aproximación markoviana para: a)  $t = 5\omega_0^{-1}$ , b)  $t = 15\omega_0^{-1}$  y c)  $t = 50\omega_0^{-1}$ . La cruz representa la posición del centro de la función y la curva negra la trayectoria que sigue este desde su posición inicial. Para evidenciar el cambio en la función se fijó  $\alpha = 1/2$ ; estando el resto de valores numéricos en unidades atómicas. . . . . 58
- A.1. Gráficas de la fuerza  $F(t) = F_0 e^{-bt} \sin(\omega t)$ , curva roja, y de la correspondiente aceleración obtenida a partir de la solución (A.8), curva azul. La acausalidad de la solución se ha magnificado al elegir  $\tau = 0.5 \text{ s}$ . El resto de parámetros se eligieron como:  $m = 1 \text{ g}$ ;  $F_0 = 1 \text{ dyn}$ ;  $b = 0.2 \text{ s}^{-1}$  y  $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ . . . . . 64

# Introducción

La electrodinámica estocástica, o EDE, es una teoría fundamental de la mecánica cuántica en proceso de construcción que explica la cuantización como un fenómeno emergente generado por un proceso estocástico primordial de origen electromagnético [1]. Concretamente, la EDE explora la hipótesis de que el comportamiento cuántico es una consecuencia de la interacción, permanente e inevitable, entre la materia y el campo estocástico de radiación de punto cero [2], o CPC, al considerarlos elementos inseparables de un sistema físico más grande y completo.

El método de la electrodinámica estocástica inicia con la consideración de una partícula material cargada sujeta a la acción del CPC, el cual es una solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío que, no obstante, es ajena a la física clásica [1]. La dinámica de la partícula es gobernada, en un principio, por una ecuación de movimiento clásica y estocástica. Al dejar evolucionar el sistema, se encuentra que existen situaciones en las que este alcanza un régimen reversible en el que existe un balance detallado de energía entre el campo de fondo y la partícula en promedio, tal que los términos radiativos en las ecuaciones dinámicas de la partícula se reducen a correcciones que pueden ser despreciadas en una primera aproximación. Bajo estas condiciones, se encuentra que la evolución de la parte mecánica del sistema está controlada por las leyes de la mecánica cuántica [1].

El tratamiento conjunto de la materia y el campo de radiación de punto cero dota a la electrodinámica estocástica de los elementos necesarios para el estudio de la absorción y emisión de radiación por parte del subsistema mecánico y de las correcciones radiativas que de estas emergen. Como resultado, este tratamiento le permite a la EDE describir consistentemente no solo los fenómenos mecanocuánticos, sino también aquellos que se encuentran dentro de los dominios de la electrodinámica cuántica [1].

La EDE permite esclarecer algunos de los problemas característicos de la teoría cuántica, como el mecanismo detrás de la estabilidad atómica o la naturaleza de las fluctuaciones cuánticas, desde un marco teórico autoconsistente que reafirma principios fundamentales de la ciencia como el realismo, la causalidad y la localidad [1]. La virtud de esta teoría sobre otras formulaciones alternativas de la mecánica cuántica es que ofrece una perspectiva del mundo cuántico desde fuera de este al llegar al formalismo cuántico desde un cimiento físico bien establecido [1].

El oscilador armónico, o OA, ofrece una oportunidad única para estudiar explícitamente las propiedades que adquiere un sistema mecánico al estar en contacto con el CPC y para mostrar, con un ejemplo concreto, cómo un objeto clásico se convierte a través de dicha interacción en uno cuántico [2]. Por esta razón, muchos de los autores que sentaron las bases teóricas de la electrodinámica estocástica, entre los que destacan P. Braffort, T. W. Marshall, E. Santos, L. de la Peña, A. M. Cetto, T. H. Boyer y H. M. França, aplicaron sus resultados al oscilador armónico con el fin de mostrar las implicaciones y los alcances de la teoría. Por ello, el OA es el sistema mecánico que ha sido más estudiado en la EDE.

Los objetivos de esta tesis fueron estudiar los comportamientos dinámicos del oscilador armónico y del oscilador armónico forzado de la EDE en el espacio fase y comprobar que estos convergen a sus homólogos cuánticos en el límite temporal asintótico de la teoría. Para esto, se realizó primeramente una descripción estadística en el espacio fase de la parte estacionaria de la solución de la ecuación de Braffort-Marshall para el OA a partir de una revisión de los resultados más notorios de la electrodinámica estocástica. Posteriormente, se utilizó el formalismo de la ecuación generalizada de Fokker-Planck de la EDE para construir la ecuación de evolución temporal de la densidad de probabilidad promedio del oscilador armónico en el espacio fase, considerando la aproximación markoviana y el límite temporal asintótico. Al resolver esta ecuación se pudo analizar el comportamiento del OA en dicho límite y se pudo comprobar que la solución tiende al estado estacionario previamente descrito. Este análisis se realizó también para un oscilador armónico forzado por un campo eléctrico externo. Finalmente, se estudiaron los principios básicos de la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase con el fin de hacer una comparación detallada entre los resultados obtenidos desde la perspectiva de la electrodinámica estocástica y las descripciones cuánticas del oscilador armónico y sus estados coherentes.

# Capítulo 1

## El oscilador armónico en la electrodinámica estocástica

El estudio mecánico no relativista de una partícula puntual de masa  $\mu$  y carga  $e$ , típicamente un electrón, sujeta a un potencial armónico de frecuencia  $\omega_0$  y en interacción con un campo de radiación electromagnética parte de la función hamiltoniana total del sistema partícula-campo, es decir,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \mathbf{x}^2 + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^{\perp 2} + \mathbf{B}^2) d^3x, \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  denota el potencial vectorial del campo electromagnético, tal que  $\mathbf{E}^{\perp} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$  y  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  son sus componentes eléctrica<sup>1</sup> y magnética, respectivamente [2, 3, 4]. La ecuación (1.1) consta de tres partes: la primera representa el término cinético del sistema, que para el caso de una partícula cargada en un campo electromagnético externo consta de una parte mecánica y una corrección electromagnética proporcional al vector potencial [3]; la segunda parte expresa la interacción de la partícula con el potencial armónico; y finalmente, se tiene la contribución energética del campo de radiación presente, esto es, la función hamiltoniana asociada a dicho campo electromagnético.

---

<sup>1</sup>La componente longitudinal del campo eléctrico,  $\mathbf{E}^{\parallel}$ , no está presente en la ecuación (1.1) porque no forma parte del campo de radiación, el cual es transversal por construcción [3]. En la norma de Coulomb se tiene que la componente  $\mathbf{E}^{\parallel}$  está asociada únicamente al potencial escalar,  $\mathbf{E}^{\parallel} = -\nabla\Phi$ , de modo que esta puede suponerse como el origen físico del potencial armónico que sujeta a la partícula cargada.

El campo de radiación en la norma de Coulomb y en condiciones de ausencia de materia satisface una ecuación de onda, de tal manera que puede expresarse en términos de sus modos normales de oscilación, a través del vector potencial, de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi c^2 \mathcal{E}_k}{\omega_k^2 V}} (a_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_k t} + a_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega_k t}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^\lambda, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector de onda y  $\lambda = 1, 2$  es el índice de polarización, de modo que los vectores de polarización  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^\lambda$  y  $\hat{\mathbf{k}}$  forman una base ortonormal de vectores unitarios. Además, se tiene que la frecuencia de oscilación de cada modo  $\omega_k$  está definida a través de la relación de dispersión  $\omega_k^2 = c^2 k^2$ , y que la energía por modo es igual a  $\mathcal{E}_k$  cuando las amplitudes  $a_{\mathbf{k}, \lambda}$  están normalizadas a la unidad, es decir, cuando satisfacen que  $|a_{\mathbf{k}, \lambda}|^2 = 1$ . Finalmente,  $V$  denota el volumen del paralelepípedo, con condiciones a la frontera periódicas, utilizado para teselar el espacio tridimensional [2].

Al obtener las expresiones para los campos  $\mathbf{E}^\perp$  y  $\mathbf{B}$ , a partir de la ecuación (1.2), y sustituirlas en la función hamiltoniana expresada en la ecuación (1.1) pueden deducirse las ecuaciones de movimiento de la partícula y cada uno de los modos de oscilación del campo. Los modos del campo pueden obtenerse como funciones del tiempo mediante la integración directa de sus ecuaciones de evolución. Por su parte, la ecuación de movimiento de la partícula puede expresarse en términos de dichos modos de manera que, al tomar en consideración que  $\dot{x} \ll c$ , esta puede aproximarse por<sup>2</sup>

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\omega_0^2 \mathbf{x} + m\tau \ddot{\mathbf{x}} + e\mathbf{E}^\perp(\mathbf{x}, t) + \frac{e\dot{\mathbf{x}}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t). \quad (1.3)$$

La ecuación (1.3) corresponde a la ecuación de Abraham-Lorentz de un OA cargado en presencia de un campo de radiación electromagnética. Una ecuación de Abraham-Lorentz se caracteriza por poseer un término proporcional a la tercera derivada de la posición de la partícula,  $m\tau \ddot{\mathbf{x}}$ , que modela la interacción de esta última con la radiación generada por su propio movimiento [3]. Adicionalmente, una ecuación de Abraham-Lorentz implica una renormalización de la masa de la partícula, como se muestra en el apéndice A, tal que la masa original  $\mu$  ha sido remplazada por la cantidad  $m = \mu + \delta m$ , siendo

<sup>2</sup>Una deducción detallada de la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz, partiendo desde la función hamiltoniana de la ecuación (1.1), puede verse en la referencia [5].

$\delta m$  una corrección de origen electromagnético [2, 6]. Los términos restantes en el lado derecho de la ecuación (1.3) representan las fuerzas externas que actúan sobre la partícula, siendo, en este caso, la fuerza armónica y la fuerza de Lorentz resultante de la interacción con los campos electromagnéticos externos, respectivamente.

El factor  $\tau = 2e^2/3mc^3$ , que posee un valor numérico de aproximadamente  $6.3 \times 10^{-24}$  segundos para el caso de un electrón, es pequeño en comparación con los tiempos atómicos usuales al considerar variaciones realistas de las fuerzas aplicadas [6]. Por esta razón, el término  $\ddot{\mathbf{x}}$  en la ecuación (1.3) puede aproximarse, como se demuestra en el apéndice A, por la expresión  $-\omega_0^2 \dot{\mathbf{x}}$  [3]. Así, la ecuación de movimiento de la partícula se reescribe como

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\omega_0^2 \mathbf{x} - m\gamma \dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{E}^\perp(\mathbf{x}, t) + \frac{e\dot{\mathbf{x}}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad (1.4)$$

donde se ha definido la frecuencia  $\gamma \equiv \tau\omega_0^2$ . Esta frecuencia resulta ser mucho menor que la frecuencia natural del oscilador,

$$\gamma \ll \omega_0, \quad (1.5)$$

para problemas no relativistas, como se ilustra en el apéndice B. Por otro lado, dado que se ha supuesto que la partícula realiza un movimiento con velocidades no relativistas, se tiene que la fuerza magnética sobre la partícula es despreciable en comparación con la fuerza eléctrica, de manera que

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\omega_0^2 \mathbf{x} - m\gamma \dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{E}^\perp(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

Finalmente, los modos del campo que son relevantes para el movimiento no relativista de la partícula poseen longitudes de onda mayores que las dimensiones características del subsistema mecánico, como se discute en apéndice A. De esta manera, puede suponerse que en la región del espacio ocupada por la partícula el campo eléctrico no varía apreciablemente [2]. Con base en esta consideración, conocida como aproximación de longitud de onda larga o dipolar eléctrica [2], la dependencia de la posición del campo eléctrico puede ser despreciada, de modo que la ecuación (1.6) se reduce a

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\omega_0^2 \mathbf{x} - m\gamma \dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{E}^\perp(t). \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) corresponde mecánicamente a la ecuación de movimiento de un oscilador armónico de frecuencia  $\omega_0$  amortiguado, debido al efecto de su propia radiación, y forzado, por la presencia de la componente eléctrica del campo de radiación.

## 1.1. Descripción estadística del campo electromagnético del vacío

El campo electromagnético del vacío, también conocido como campo de radiación de punto cero o CPC<sup>3</sup>, es el nombre asignado a la componente electromagnética del conjunto de campos aleatorios de punto cero existentes en ausencia total de materia [2]. Contraria a la suposición clásica, la cual implica que en ausencia de fuentes no existe campo electromagnético, la noción de campo de radiación de punto cero propone una solución más general a las ecuaciones de Maxwell en el vacío, la cual resulta de la imposición de condiciones a la frontera mejor adaptadas para la descripción de un sistema físico abierto [7].

Concretamente, el CPC se entiende como un campo electromagnético de carácter estocástico que persiste incluso a temperatura cero y al que le corresponde una energía media por modo de oscilación proporcional a su frecuencia [8],  $\mathcal{E}_0(\omega) = \hbar\omega/2$ . Adicionalmente, se tiene que los modos de oscilación del CPC son estadísticamente independientes y que su espectro de frecuencias es un invariante de Lorentz [7, 9, 10], el cual está dado por

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}. \quad (1.8)$$

Aunado a lo anterior, el campo de radiación de punto cero en el espacio vacío se supone generado por una cantidad arbitrariamente grande de fuentes externas al sistema, tal que este es altamente desordenado. Esto implica que el CPC es fuertemente incoherente, lo que ayuda a explicar que sus efectos son inobservables a escalas macroscópicas<sup>4</sup> [2, 7]. En el apéndice C se deducen y discuten algunas de estas cualidades del campo electromagnético del vacío.

Con base en las propiedades anteriores puede construirse una descripción estadística del CPC. Siendo así, supóngase que se efectúa una medición en un periodo corto de tiempo  $t_0$ , durante el cual se realiza un promedio temporal de las componentes del CPC. Debido a la no observabilidad de estos campos

---

<sup>3</sup>El CPC fue propuesto de manera formal por W. Nernst, en 1916, cuando argumentó que las diferencias entre los osciladores de Planck y el campo de radiación son inadmisibles si ambos sistemas se hallan en equilibrio estadístico al estar en contacto térmico [2].

<sup>4</sup>A pesar de esto, debe tenerse en cuenta que cada modo del CPC mantiene una correlación suficiente para ser considerado una oscilación. Esto es relevante puesto que dichas correlaciones distinguen al CPC de un simple ruido carente de correlación significativa.

se tiene que sus promedios temporales deben ser nulos [2], *i. e.*,

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) dt = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) dt = \mathbf{0}, \quad (1.9)$$

siendo  $t_0$  una cantidad grande comparada con los tiempos atómicos relevantes. Análogamente, puede considerarse que los campos electromagnéticos del campo de punto cero son, en cada instante, una realización de las infinitas realizaciones posibles contenidas en el ensamble estadístico. En este caso, el carácter puramente aleatorio de estos campos implica que el promedio sobre todas las realizaciones es cero [2, 7], es decir,

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{0}, \quad (1.10)$$

donde  $\langle A \rangle$  denota el promedio de la cantidad  $A$  sobre todas las realizaciones posibles de las variables aleatorias del ensamble.

Por otro lado, dado que la energía media por modo de oscilación del CPC es igual a  $\hbar\omega/2$ , se tiene que la expresión para el vector potencial de la ecuación (1.2) se reescribe en dicho caso particular como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\pi c^2 \hbar}{\omega_k V}} (a_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_k t} + a_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega_k t}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^\lambda. \quad (1.11)$$

Las amplitudes de la expresión (1.11), representadas como  $a_{\mathbf{k}, \lambda}$  y  $a_{\mathbf{k}, \lambda}^*$ , son consideradas variables aleatorias, tales que se supone que toda la estocasticidad del vector potencial  $\mathbf{A}$  proviene del conjunto de variables  $\{a_{\mathbf{k}, \lambda}, a_{\mathbf{k}, \lambda}^*\}$  [2]. Así, al obtener los campos eléctrico y magnético del vector potencial de la ecuación (1.11) y calcular los promedios expuestos en la ecuación (1.10), se obtiene que las amplitudes  $a_{\mathbf{k}, \lambda}$ , que se suponen estadísticamente independientes para modos distintos, promedian por separado a cero,

$$\langle a_{\mathbf{k}, \lambda} \rangle = 0, \quad \langle a_{\mathbf{k}, \lambda}^* \rangle = 0, \quad (1.12)$$

al igual que el producto de dos amplitudes correspondientes a modos de oscilación distintos del campo [2, 7]. Con base en esto, y siendo consistente con que  $|a_{\mathbf{k}, \lambda}|^2 = 1$ , se llega a que

$$\langle a_{\mathbf{k}, \lambda}^* a_{\mathbf{k}', \lambda'} \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (1.13)$$

siendo nulos los promedios del resto de los productos posibles.

En el límite continuo de la representación del campo se tiene que las amplitudes aleatorias se transforman como  $a_{\mathbf{k},\lambda} \rightarrow a_\lambda(\mathbf{k})$ , tal que el promedio expresado en la ecuación (1.13) se reescribe como [2]

$$\langle a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\langle |a_{\mathbf{k},\lambda}|^2 \rangle} = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (1.14)$$

Existen situaciones físicas en las que es conveniente describir el potencial vectorial magnético y los campos electromagnéticos en términos del conjunto de variables canónicas  $\{q_{\mathbf{k},\lambda}, p_{\mathbf{k},\lambda}\}$  [2, 6, 11], las cuales se definen como:

$$q_{\mathbf{k},\lambda} \equiv i \sqrt{\frac{\mathcal{E}_k}{2\omega_k^2}} (a_{\mathbf{k},\lambda} - a_{\mathbf{k},\lambda}^*); \quad p_{\mathbf{k},\lambda} \equiv i \sqrt{\frac{\mathcal{E}_k}{2}} (a_{\mathbf{k},\lambda} + a_{\mathbf{k},\lambda}^*). \quad (1.15)$$

Siendo así, para el caso del campo electromagnético del vacío es inmediato notar, de las ecuaciones (1.12) y (1.13), que ambas variables canónicas promedian a cero,

$$\langle q_{\mathbf{k},\lambda} \rangle = 0, \quad \langle p_{\mathbf{k},\lambda} \rangle = 0, \quad (1.16)$$

y que no están correlacionadas.

De manera análoga, se tiene que los segundos momentos estadísticos de las variables canónicas, los cuales coinciden con las varianzas en este caso por la ecuación (1.16), están dados por:

$$\sigma_{q_{\mathbf{k},\lambda}}^2 \equiv \langle q_{\mathbf{k},\lambda}^2 \rangle = \frac{\mathcal{E}_0(\omega_k)}{\omega_k^2} = \frac{\hbar}{2\omega_k}; \quad (1.17)$$

$$\sigma_{p_{\mathbf{k},\lambda}}^2 \equiv \langle p_{\mathbf{k},\lambda}^2 \rangle = \mathcal{E}_0(\omega_k) = \frac{\hbar\omega_k}{2}. \quad (1.18)$$

Al tomar el producto directo de las dispersiones de las variables canónicas  $q_{\mathbf{k},\lambda}$  y  $p_{\mathbf{k},\lambda}$  del CPC es inmediato llegar a que

$$\sigma_{q_{\mathbf{k},\lambda}}^2 \sigma_{p_{\mathbf{k},\lambda}}^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (1.19)$$

El resultado expuesto en la ecuación (1.19) sugiere que el CPC es el origen último e irreducible de las llamadas fluctuaciones cuánticas [1]. La magnitud de este producto está acotada por debajo debido a la falta de contribuciones térmicas a las fluctuaciones, es decir, el valor mínimo  $\hbar^2/4$  es alcanzado únicamente cuando todas las fluctuaciones térmicas han sido eliminadas al alcanzar el límite de temperatura cero [1].

### 1.1.1. Correlaciones de dos puntos y distribuciones de probabilidad

Partiendo de los resultados obtenidos es posible construir correlaciones de dos puntos que involucren diferentes componentes del campo electromagnético del vacío [2, 7]. De este modo, para el campo eléctrico se tiene, usando la relación  $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$  y los resultados de las ecuaciones (1.12) y (1.13), que la correlación de dos puntos se puede expresar como

$$\langle E_i(\mathbf{x}, t)E_j(\mathbf{x}', t') \rangle = \frac{2\pi\hbar}{V} \sum_{\mathbf{k}} \omega_k (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \cos(\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{x} - \omega_k \Delta t), \quad (1.20)$$

donde se han definido las diferencias  $\Delta\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  y  $\Delta t \equiv t - t'$ . Para llegar a la ecuación (1.20) se realizó la suma sobre el índice de polarización resultante en términos de deltas de Kronecker [11], esto es,

$$\sum_{\lambda} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{\lambda})_i (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{\lambda})_j = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j. \quad (1.21)$$

La correlación de dos puntos del campo magnético se obtiene de manera análoga, conduciendo al mismo resultado que el campo eléctrico. El hecho de que el resultado expuesto en la ecuación (1.20) depende únicamente de las diferencias  $\Delta\mathbf{x}$  y  $\Delta t$  es debido a la homogeneidad y al carácter estacionario del campo [2]. Un caso que es de interés en el estudio de estas correlaciones es en el que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ , de modo que de la ecuación (1.20) se obtiene, al tomar su límite continuo haciendo la sustitución  $(1/V)\Sigma_k \rightarrow (1/8\pi^3) \int d^3k$ , que

$$\langle E_i(\mathbf{x}, t)E_j(\mathbf{x}, t') \rangle = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega^3 \cos(\omega \Delta t) \int_{\Omega_k} (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) d\Omega_k d\omega. \quad (1.22)$$

Dado que el promedio angular de  $\hat{k}_i \hat{k}_j$  es  $\delta_{ij}/3$  [12], se tiene que la integral angular de la ecuación (1.22) se reduce a  $8\pi\delta_{ij}/3$ , de tal manera que

$$\langle E_i(\mathbf{x}, t)E_j(\mathbf{x}, t') \rangle = \delta_{ij} \int_0^{\infty} S_0(\omega) \cos(\omega(t - t')) d\omega, \quad (1.23)$$

donde se ha definido el espectro de potencias  $S_0(\omega)$  en términos de la densidad espectral del campo de radiación de punto cero  $\rho_0(\omega)$  como [2]

$$S_0(\omega) \equiv \frac{4\pi}{3} \rho_0(\omega) = \frac{2\hbar\omega^3}{3\pi c^3}. \quad (1.24)$$

Así, con base en la ecuación (1.23), se tiene que la covarianza de la componente eléctrica del campo electromagnético del vacío es igual a

$$\Gamma_{\mathbf{E}\mathbf{E}'}(t - t') \equiv \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') \rangle = 3 \int_0^\infty S_0(\omega) \cos(\omega(t - t')) d\omega. \quad (1.25)$$

La transformada de Fourier de la ecuación (1.23) es la versión de la EDE del teorema de Wiener-Khintchine, el cual proporciona el espectro de potencias en términos de la transformada de Fourier de la correlación a dos tiempos del campo [2, 13]. Así, partiendo de la definición de la transformada de Fourier del campo eléctrico,  $\tilde{E}_i(\mathbf{x}, \omega)$ , y utilizando el teorema de Parseval-Plancherel en su versión unidimensional, se llega a que [2]

$$\langle \tilde{E}_i(\mathbf{x}, \omega) \tilde{E}_j^*(\mathbf{x}, \omega') \rangle = \delta_{ij} S_0(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (1.26)$$

Es importante remarcar que para el caso del campo electromagnético del vacío es necesario introducir una cota superior en las frecuencias del espectro, como se discute en los apéndices A y C, para asignarle un significado definitivo a las expresiones anteriores [2].

Una suposición adicional que se hace regularmente en la EDE, que fue propuesta originalmente por A. Einstein y L. Hopf en 1910, es que las amplitudes de los modos de oscilación del CPC son variables aleatorias con una distribución normal [2, 14]. Esto implica que las variables canónicas  $q_{\mathbf{k},\lambda}$  y  $p_{\mathbf{k},\lambda}$  poseen distribuciones gaussianas, de modo que, de acuerdo a los resultados expresados en las ecuaciones (1.16), (1.17) y (1.18), sus distribuciones de probabilidad son:

$$P_q^{\text{CPC}}(q_{\mathbf{k},\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2}} e^{-q_{\mathbf{k},\lambda}^2/2\sigma_q^2} = \sqrt{\frac{\omega_k}{\pi\hbar}} e^{-\omega_k^2 q_{\mathbf{k},\lambda}^2/\hbar\omega}; \quad (1.27)$$

$$P_p^{\text{CPC}}(p_{\mathbf{k},\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-p_{\mathbf{k},\lambda}^2/2\sigma_p^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar\omega_k}} e^{-p_{\mathbf{k},\lambda}^2/\hbar\omega}, \quad (1.28)$$

donde se ha simplificado la notación como  $q = q_{\mathbf{k},\lambda}$  y  $p = p_{\mathbf{k},\lambda}$ . Ya que  $p_{\mathbf{k},\lambda}$  y  $q_{\mathbf{k},\lambda}$  son variables no correlacionadas se tiene que la distribución de probabilidad conjunta en el espacio fase puede obtenerse mediante el producto de las ecuaciones (1.27) y (1.28) [2], tal que esta es

$$F_{\text{CPC}}(q_{\mathbf{k},\lambda}, p_{\mathbf{k},\lambda}) = \frac{1}{2\pi(\hbar/2)} e^{-(p_{\mathbf{k},\lambda}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k},\lambda}^2)/2\mathcal{E}_0}. \quad (1.29)$$

La expresión (1.29) es conocida en la teoría cuántica como la función de Wigner del estado base de un oscilador armónico cuántico [15].

Aunado a lo anterior, se tiene que la cantidad entre paréntesis en el exponente de la distribución (1.29) es proporcional a la energía de un modo de oscilación del campo de radiación cuando este ha sido representado como un OA [2], ecuación (1.15). Así, dado que las variables canónicas del CPC poseen distribuciones gaussianas, se tiene que la distribución de probabilidad de la energía de cada uno de sus modos es

$$F_{\text{CPC}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_0^{-1} e^{-\mathcal{E}/\mathcal{E}_0}. \quad (1.30)$$

Esta distribución reproduce el hecho de que el valor medio de la energía por modo es igual a  $\mathcal{E}_0$ , e implica una varianza  $\sigma^2 = \mathcal{E}_0^2$  en su valor.

## 1.2. La ecuación de movimiento de Braffort-Marshall

La premisa principal de la electrodinámica estocástica es que el comportamiento cuántico de la materia surge de la interacción permanente de esta con el campo de radiación de punto cero [2]. Tomando esto en consideración, se supondrá de ahora en adelante que el campo  $\mathbf{E}^\perp(t)$  de la ecuación (1.7) corresponde a la componente eléctrica del campo electromagnético del vacío [8, 16], de manera que dicha ecuación, conocida en el contexto de la EDE como ecuación de movimiento de Braffort-Marshall [17], ahora corresponderá a una ecuación diferencial estocástica ordinaria [18]. A partir de ahora se denotará la componente transversal del campo eléctrico del CPC de forma compacta como  $\mathbf{E}(t)$  para simplificar la notación, ya que esta es la única involucrada en la dinámica de la partícula.

Un problema asociado con la ecuación de Braffort-Marshall es el de definir el momento de la partícula en presencia de la radiación de forma que pueda ser comparado con el experimento. En ese sentido, se tiene que el momento de la partícula debe definirse como una función de cantidades observables, tal que su cambio en el tiempo sea igual a las fuerzas experimentalmente controlables que actúan sobre ella, es decir, excluyendo aquellas originadas por la presencia del campo de fondo [18]. Siendo así, se tiene que

$$\dot{\mathbf{p}} = -m\omega_0^2 \mathbf{x}. \quad (1.31)$$

Al sustituir la ecuación (1.31) en la ecuación (1.7), se obtiene que el momento mecánico de la partícula es igual a

$$m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} - m\gamma\mathbf{x} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(t). \quad (1.32)$$

La ecuación (1.32) implica que en el momento mecánico de la partícula se pueden identificar dos partes: el momento observable  $\mathbf{p}$  y una componente adicional oculta y fluctuante dada por los últimos dos términos [18].

### 1.2.1. Descripción estadística de la solución estacionaria

La solución de la ecuación (1.7) puede expresarse como  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{tran}} + \mathbf{x}_{\text{est}}$ , donde  $\mathbf{x}_{\text{tran}}$  representa la parte transitoria y  $\mathbf{x}_{\text{est}}$  la parte estacionaria de la solución [16, 18]. La parte transitoria es independiente del campo externo, oscila con una frecuencia  $\omega_1 \equiv (\omega_0^2 - (\gamma/2)^2)^{1/2} \approx \omega_0$ , decae en el tiempo como  $\exp(-\gamma t/2)$  y depende de las condiciones iniciales de la partícula. Sin embargo, a pesar de que la constante temporal de decaimiento  $\gamma^{-1}$  es pequeña en la escala macroscópica, esta es muy grande comparada con los tiempos atómicos característicos, tal que es necesario esperar un largo tiempo en dicha escala para que el movimiento transitorio desaparezca [2]. Así, con el paso del tiempo la solución estacionaria se convierte en la más relevante, de manera que el movimiento queda definido por el campo de fondo [16, 19].

La parte estacionaria del movimiento del oscilador armónico, denotada como  $\mathbf{x}(t)$  de ahora en adelante, admite un desarrollo en series de Fourier [2], de modo que se expresa como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\lambda} \int (\tilde{\mathbf{x}}_{\lambda}(\mathbf{k})a_{\lambda}(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t} + \tilde{\mathbf{x}}_{\lambda}^*(\mathbf{k})a_{\lambda}^*(\mathbf{k})e^{i\omega_k t}) d^3k. \quad (1.33)$$

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, en condiciones de ausencia de materia el campo electromagnético de vacío también puede expresarse como una suma de ondas planas. En particular, para la componente eléctrica del CPC se obtiene, al utilizar la relación  $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$  en la ecuación (1.11) y tomar su límite continuo, que

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{\lambda} \int (\tilde{\mathbf{E}}_{\lambda}(\mathbf{k})a_{\lambda}(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t} + \tilde{\mathbf{E}}_{\lambda}^*(\mathbf{k})a_{\lambda}^*(\mathbf{k})e^{i\omega_k t}) d^3k, \quad (1.34)$$

donde se ha definido

$$\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}) \equiv i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{8\pi^2}}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{k}^\lambda. \quad (1.35)$$

Así, al sustituir las expresiones (1.33) y (1.34) en la ecuación de movimiento (1.7), se obtiene que la amplitud  $\tilde{\mathbf{x}}_\lambda(\mathbf{k})$  se expresa como

$$\tilde{\mathbf{x}}_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{(e/m)\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k})}{\omega_0^2 - \omega_k^2 - i\gamma\omega_k} \equiv \frac{e}{m} \frac{\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k})}{\Delta(\omega_k)}, \quad (1.36)$$

lo que implica que la solución estacionaria está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e}{m} \sum_\lambda \int \left( \frac{\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k})}{\Delta(\omega_k)} a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t} + \frac{\tilde{\mathbf{E}}_\lambda^*(\mathbf{k})}{\Delta^*(\omega_k)} a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_k t} \right) d^3k. \quad (1.37)$$

Ya que se supuso que toda la estocasticidad del vector potencial  $\mathbf{A}$ , y por ende de la componente eléctrica  $\mathbf{E}$ , proviene del conjunto de variables  $\{a, a^*\}$ , se tiene que las propiedades estadísticas de la solución estacionaria expresada en la ecuación (1.37) están determinadas por las propiedades de dichas amplitudes [16, 18, 19]. Así, de los resultados expresados en la ecuación (1.12) se obtiene que

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{0}. \quad (1.38)$$

Por otro lado, de la ecuación (1.31) se tiene que el momento de la partícula es proporcional a la integral temporal de su posición, tal que partiendo de la ecuación (1.37) se llega a que

$$\mathbf{p}(t) = -ie\omega_0^2 \sum_\lambda \int \left( \frac{\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k})}{\omega_k \Delta(\omega_k)} a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t} - \frac{\tilde{\mathbf{E}}_\lambda^*(\mathbf{k})}{\omega_k \Delta^*(\omega_k)} a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_k t} \right) d^3k, \quad (1.39)$$

de donde se obtiene inmediatamente que

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \mathbf{0}. \quad (1.40)$$

En analogía al desarrollo realizado para obtener la covarianza de la componente eléctrica del CPC, ecuación (1.25), se tiene que la covarianza de una de las componentes del momento, en concreto  $p_x$ , está dada por

$$\Gamma_{p_x p_x}(t) = e^2 \omega_0^4 \int_0^\infty \frac{S_0(\omega) \cos(\omega t) d\omega}{\omega^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}. \quad (1.41)$$

De esta manera, la varianza de esta componente del momento de la partícula está dada por la ecuación (1.41) cuando  $t = 0$ , de modo que

$$\sigma_{p_x}^2 = \Gamma_{p_x p_x}(0) = \frac{2\hbar e^2 \omega_0^4}{3\pi c^3} \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (1.42)$$

Dado que  $\tau$  posee un valor extremadamente pequeño y que  $\gamma \equiv \tau\omega_0^2 \ll \omega_0$ , se tiene que  $\tau\omega \ll 1$  incluso para frecuencias tan altas como la de Compton,  $\omega_C = mc^2/\hbar$ , la cual es la frecuencia más alta de interés en la electrodinámica estocástica [2]. Por ello, la contribución más importante para la integral de la ecuación (1.42) proviene de la resonancia localizada en  $\omega \approx \omega_0$  [2]. Así, dicha integral puede evaluarse al aproximar la frecuencia  $\omega$  por  $\omega_0$  en el integrando, excepto en la diferencia  $\omega - \omega_0$ , de tal manera que

$$\sigma_{0p_x}^2 = \frac{\hbar e^2 \omega_0^3}{6\pi c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (1.43)$$

donde se ha denotado el valor aproximado de  $\sigma_{p_x}^2$  como  $\sigma_{0p_x}^2$ . Adicionalmente, ya que la resonancia localizada en  $\omega_0$  es muy angosta, pues  $\gamma \ll \omega_0$ , se tiene que el límite inferior de la integral puede extenderse hasta  $-\infty$  sin introducir un error apreciable [2], de tal forma que la varianza de la componente  $x$  del momento se reduce a

$$\sigma_{0p_x}^2 \approx \frac{\hbar e^2 \omega_0^3}{6\pi c^3} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} = \frac{\hbar e^2 \omega_0^3}{3c^3 \gamma} = \frac{\hbar m \omega_0}{2}. \quad (1.44)$$

Utilizando la aproximación anterior, conocida como aproximación de línea estrecha [2], es también posible obtener la varianza de la posición  $x$ , tal que

$$\sigma_{0x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}, \quad (1.45)$$

siendo los resultados para las otras componentes análogos.

Los resultados expuestos en las ecuaciones (1.44) y (1.45) implican que la energía promedio de un OA tridimensional en esta aproximación es [18, 19]

$$\langle H \rangle_0 = \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle_0}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \mathbf{x}^2 \rangle_0 = \frac{3\hbar\omega_0}{2} = 3\mathcal{E}_0, \quad (1.46)$$

y que el producto de las dispersiones de dos de sus variables conjugadas es igual a [20]

$$\sigma_{0x}^2 \sigma_{0p_x}^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (1.47)$$

tal que estos resultados coinciden con los obtenidos para el estado base de un oscilador armónico tridimensional desde la mecánica cuántica [21].

Finalmente, de forma análoga a lo realizado para el CPC, se tiene que la distribución conjunta en el espacio fase de la solución estacionaria puede construirse partiendo de que la ecuación de movimiento del oscilador es lineal y de que el campo de fondo es un proceso aleatorio estacionario y gaussiano; es decir, de que  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{p}$  son variables normalmente distribuidas con promedio cero y estadísticamente independientes [16, 18]. Así, se tiene que

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{8\pi^3\sigma_x^3\sigma_p^3} e^{-\mathbf{p}^2/2\sigma_p^2 - \mathbf{x}^2/2\sigma_x^2}. \quad (1.48)$$

Las distribuciones de probabilidad marginales  $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int F(\mathbf{x}, \mathbf{p})d^3p$  y  $P_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{x}, \mathbf{p})d^3x$  obtenidas a partir de la ecuación (1.48) reproducen correctamente, en la aproximación de línea estrecha, las densidades de probabilidad mecanocuánticas correspondientes al estado base del OA tridimensional en el espacio de configuración y momental, respectivamente. Por otro lado, al aplicar esta misma aproximación directamente en la ecuación (1.48), se llega a que la distribución de probabilidad conjunta del oscilador armónico en el espacio fase es [16, 18, 19]

$$F_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{8\pi^3(\hbar/2)^3} e^{-(\mathbf{p}^2/m + m\omega_0^2\mathbf{x}^2)/2\mathcal{E}_0}. \quad (1.49)$$

Esta distribución coincide con la función de Wigner para el estado base del oscilador armónico tridimensional [15] y se grafica en la figura 1.1 para el caso de una dimensión espacial.

La energía del OA en la aproximación de línea estrecha está dada por la expresión entre paréntesis del exponente de la distribución (1.49). Siendo así, y dado que las variables canónicas poseen distribuciones gaussianas, se tiene que la distribución de probabilidad de la energía del oscilador armónico está dada, en analogía con la ecuación (1.30), por

$$F_0(H) = \frac{1}{2\mathcal{E}_0} \left( \frac{H}{\mathcal{E}_0} \right)^2 e^{-H/\mathcal{E}_0}. \quad (1.50)$$

La distribución de probabilidad expresada en la ecuación (1.50) implica que la energía del oscilador armónico es una variable continua y aleatoria [2, 18], que posee un valor medio igual a  $3\mathcal{E}_0$ , ecuación (1.46), y una varianza  $\sigma_{0H}^2 = 3\mathcal{E}_0^2$

en el caso tridimensional<sup>5</sup>. A diferencia de las distribuciones de posiciones y momentos del OA, la distribución de la energía (1.50) no coincide con su homólogo mecanocuántico, pues la mecánica cuántica predice que el oscilador armónico posee una distribución delta en su energía, o lo que es lo mismo, que su energía no es dispersiva [21]. No obstante, es notable que este resultado coincide con el obtenido desde la descripción cuántica de Wigner del espacio fase, de modo que ambas descripciones coinciden [2].

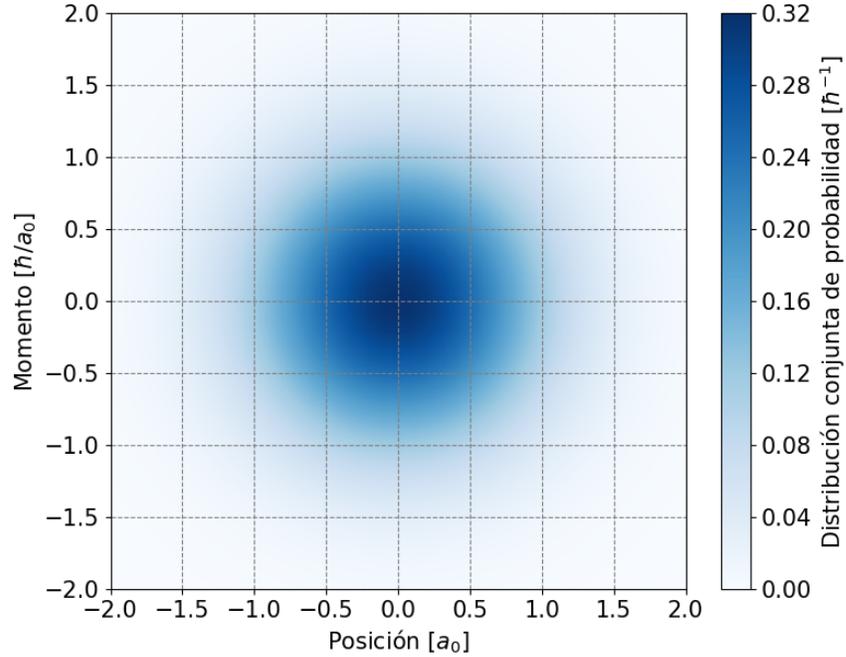


Figura 1.1: Distribución estacionaria de probabilidad en el espacio fase en la aproximación de línea estrecha de un electrón que oscila armónicamente en presencia del CPC con  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Los valores numéricos se presentan en unidades atómicas.

Los resultados obtenidos muestran que sin haber supuesto que la partícula cargada, en concreto un electrón, era un corpúsculo cuántico, este llega a un estado en el que sus variables dinámicas poseen una naturaleza estadística que evidencia la existencia de fluctuaciones irreducibles en el sistema.

<sup>5</sup>El oscilador armónico unidimensional, que es el caso más analizado en la literatura de la EDE, posee la misma distribución de probabilidad en la energía que los modos de oscilación del campo electromagnético del vacío [2, 18], ecuación (1.30).

## Capítulo 2

# Descripción del oscilador armónico en el espacio fase

Una trayectoria particular de la ecuación de movimiento (1.7) brinda una descripción detallada del movimiento estocástico realizado por el oscilador armónico. Sin embargo, dado que las trayectorias de la partícula dependen de la realización dada del campo de fondo, que en general es desconocida, se tiene que este tipo de descripción no aporta información sobre el comportamiento global de la partícula. Por ello, resulta de interés realizar la descripción de un ensamble de sistemas similares que representen todas las realizaciones del campo que sean compatibles con las condiciones del problema [1].

La descripción propuesta puede construirse a partir de la densidad de puntos en el espacio fase de la partícula  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ . Debido a la conservación de puntos en el espacio fase se tiene que la densidad  $\mathcal{R}$  satisface para cada realización del campo, que se supone esencialmente inalterado [1], la ecuación de continuidad siguiente [22, 23]:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{x}_i \mathcal{R}) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\dot{p}_i \mathcal{R}) = 0, \quad (2.1)$$

donde se está utilizando la convención de índices de Einstein<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>La ecuación (2.1) se asemeja a la ecuación de Liouville de la mecánica estadística. La diferencia entre ambas ecuaciones radica en el hecho de que el teorema de Liouville, que establece la conservación del volumen fase [4], no es aplicable al sistema descrito por la ecuación (1.7), pues no existen argumentos *a priori* para considerar al flujo de puntos en el espacio fase como incompresible [22]. Por esta razón, las derivadas parciales  $\partial/\partial x_i$  y  $\partial/\partial p_i$  deben permanecer al frente de  $\dot{x}_i$  y  $\dot{p}_i$ , respectivamente.

Las variables  $x_i$  y  $p_i$  de la ecuación (2.1) denotan las componentes de la posición y el momento del oscilador armónico, tales que la densidad de puntos  $\mathcal{R}$  hereda el carácter estocástico del campo de radiación de punto cero, lo que implica que esta varía con cada realización del campo [1]. Por ello, para obtener una descripción efectiva del comportamiento estadístico de la partícula, se estudiará el promedio de  $\mathcal{R}$  sobre las realizaciones del campo [23], es decir,

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \langle \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rangle. \quad (2.2)$$

La densidad de probabilidad promedio  $Q$  aporta información de cómo las partículas del ensamble estadístico están distribuidas en la vecindad de un punto  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  para todo tiempo  $t$ , de modo que toda referencia a la realización específica del campo está ausente en la descripción [1]. Así, en esta descripción, la función principal de la estocasticidad de la ecuación de movimiento es la de hacer que la posición y el momento sean variables distribuidas, incluso para el caso de condiciones iniciales fijas [1].

## 2.1. La ecuación generalizada de Fokker-Planck

La ecuación de evolución de la densidad promedio  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  puede construirse utilizando el llamado método de suavizado<sup>2</sup> [1]. En dicho método se define el operador de suavizado,  $\hat{P}_s$ , como aquel que al actuar sobre una función fase,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , da su promedio sobre las realizaciones del campo [23], esto es,  $\hat{P}_s f = \langle f \rangle$ . Así, se tiene que toda función fase puede expresarse como

$$f = \hat{P}_s f + (1 - \hat{P}_s) f \equiv \langle f \rangle + \delta f, \quad (2.3)$$

donde  $\delta f$  denota la componente aleatoria de  $f$ . Adicionalmente, es notable que  $\hat{P}_s^2 f = \hat{P}_s f$ , de modo que  $\hat{P}_s$  corresponde a un operador de proyección. Al aplicar el operador de suavizado a la densidad de puntos en el espacio fase se obtiene que esta se expresa como  $\mathcal{R} = Q + \delta\mathcal{R}$ , de tal manera que la ecuación (2.1) se reescribe, a partir de las ecuaciones (1.31) y (1.32), como

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q + \delta\mathcal{R}) + \hat{\mathcal{L}}(Q + \delta\mathcal{R}) = \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(Q + \delta\mathcal{R}), \quad (2.4)$$

---

<sup>2</sup>El método de suavizado, conocido en inglés como *smoothing method*, ha sido utilizado por distintos autores para el estudio de diversos fenómenos estocásticos [23].

siendo  $\hat{\mathcal{L}}$  el operador no aleatorio de Liouville del OA [23]. Estrictamente, el operador  $\hat{\mathcal{L}}$  corresponde a una generalización del verdadero operador de Liouville pues en su definición se ha incluido el término proporcional a  $\gamma$  que describe la reacción de radiación [1],

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i - m\gamma x_i) - m\omega_0^2 \frac{\partial}{\partial p_i} x_i. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.4) puede descomponerse en sus partes no estocástica y fluctuante al aplicarle los operadores  $\hat{P}_s$  y  $1 - \hat{P}_s$ , respectivamente. Así, al utilizar que  $\hat{P}_s A_i = \langle A_i \rangle = 0$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} \right) Q = \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{P}_s A_i \delta \mathcal{R}; \quad (2.6)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} \right) \delta \mathcal{R} = \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i Q + \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial x_i} (1 - \hat{P}_s) A_i \delta \mathcal{R}. \quad (2.7)$$

Definiendo el operador  $\hat{G} \equiv (\partial/\partial t + \hat{\mathcal{L}})^{-1}$ , que corresponde a la función de Green del operador diferencial  $(\partial/\partial t + \hat{\mathcal{L}})$ , tal que dada una función fase se obtiene que

$$\hat{G} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int_{-\infty}^t e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t') dt', \quad (2.8)$$

donde el operador diferencial  $e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')}$  actúa sobre las variables a su derecha propagándolas de  $\mathbf{x}(t')$  y  $\mathbf{p}(t')$  a  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{p}(t)$  respectivamente, con  $t' < t$ , siguiendo un camino totalmente determinista [1, 23]; se tiene que la ecuación (2.7) se reescribe como

$$\delta \mathcal{R} = \frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i Q + \frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_i} (1 - \hat{P}_s) A_i \delta \mathcal{R}, \quad (2.9)$$

o equivalentemente

$$\left[ 1 - \frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_i} (1 - \hat{P}_s) A_i \right] \delta \mathcal{R} = \frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i Q. \quad (2.10)$$

Aplicando el operador inverso de la expresión entre paréntesis del lado izquierdo de la ecuación (2.10), se obtiene que la parte fluctuante de la densidad de puntos en el espacio fase se expresa como

$$\delta \mathcal{R} = \frac{e}{mc} \left[ 1 - \frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_j} (1 - \hat{P}_s) A_j \right]^{-1} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i Q, \quad (2.11)$$

de tal forma que, al sustituir esta última expresión en la ecuación (2.6), se llega finalmente a que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}\right) Q = \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{P}_s A_i \left[1 - \frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_j} (1 - \hat{P}_s) A_j\right]^{-1} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k Q. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) es la ley de evolución de la densidad media de puntos en el espacio fase. No obstante, una forma más práctica de esta ecuación puede obtenerse al desarrollar el operador entre paréntesis cuadrados como una serie de potencias y al notar que  $A_i Q = (1 - \hat{P}_s) A_i Q$  [23], tal que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}\right) Q = \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{P}_s A_i \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_j} (1 - \hat{P}_s) A_j\right]^n Q. \quad (2.13)$$

La ecuación anterior puede simplificarse aún más al tomar en consideración que las variables canónicas del campo de radiación de punto cero poseen distribuciones simétricas y promedios nulos, como se observa en las ecuaciones (1.27) y (1.28), lo que implica que el promedio del producto de cualquier número impar de factores es siempre nulo [24], *i. e.*,

$$\hat{P}_s A_i(t_1) \cdots A_i(t_{2n+1}) \hat{P}_s f = 0. \quad (2.14)$$

De esta manera, todos los términos con  $n$  par del lado derecho de la ecuación (2.13) son nulos [1], de manera que dicha ecuación se reduce a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}\right) Q = \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{P}_s A_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_j} (1 - \hat{P}_s) A_j\right]^{2n+1} Q. \quad (2.15)$$

Si se define el operador integrodiferencial de difusión  $\hat{\mathcal{D}}_i(t)$  como [1]:

$$\hat{\mathcal{D}}_i(t) \equiv \hat{P}_s A_i(t) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e}{mc} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_j} (1 - \hat{P}_s) A_j(t)\right]^{2n} \hat{G} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k(t), \quad (2.16)$$

se llega a que la ecuación que describe la evolución temporal de la densidad promedio de puntos en el espacio fase  $Q$  del oscilador armónico cargado en presencia del campo electromagnético del vacío es

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} Q = \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\mathcal{D}}_i(t) Q). \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) es una ecuación integrodiferencial, equivalente a una ecuación diferencial de orden infinito [1], que, debido a la forma del espectro de potencias del CPC, involucra un ruido altamente coloreado tal que no corresponde a una verdadera ecuación de Fokker-Planck<sup>3</sup> sino a una generalización no markoviana de esta [13, 25]. La complejidad matemática de esta ecuación se debe en gran medida a la memoria que guarda el sistema pues se tiene que la derivada temporal de la densidad promedio  $Q$  depende de sus valores previos por la presencia del operador  $\hat{G}$  [23]. El número infinito de términos provenientes del operador de difusión representa el efecto medio de las múltiples dispersiones causadas por el CPC al oscilador armónico, *i. e.*, representa las correcciones radiativas, no relativistas y de todos los órdenes a la dinámica de la partícula cargada [23].

## 2.2. La aproximación markoviana

La interacción entre la partícula cargada y el campo de radiación de punto cero comienza con un intercambio irreversible de energía y momento durante el cual el CPC posee un efecto aleatorizador y disipador en la dinámica del OA [1]. Este proceso depende fuertemente de las condiciones iniciales del sistema físico, como se mencionó en la sección 1.2, y es el periodo en el que los términos de memoria son relevantes. Sin embargo, conforme el oscilador evolucione, tenderá a un estado estacionario en el cual el intercambio energético promedio con el CPC es reversible. Siendo así, es posible explorar la solución de la ecuación (2.17) en dicho límite temporal asintótico cuando la aproximación markoviana es aplicable [1].

En el límite temporal asintótico se tiene que la ecuación (2.17) puede aproximarse a primer orden en  $e^2$  ya que los términos de orden superior corresponden a correcciones radiativas y debidas a la memoria del sistema [1]. Así, de la definición de la ecuación (2.16) se obtiene que

$$\hat{\mathcal{D}}_i Q \approx \hat{P}_s A_i \hat{G} \frac{\partial(A_j Q)}{\partial x_j} = \hat{P}_s A_i(t) \int_{-\infty}^t e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial(A'_j Q')}{\partial x_j} dt', \quad (2.18)$$

donde se han denotado  $\mathbf{A}(t')$  y  $Q(t')$  como  $\mathbf{A}'$  y  $Q'$ , respectivamente. Ya que el vector potencial del campo de radiación de punto cero es función solo del

---

<sup>3</sup>Una ecuación de Fokker-Planck es una ecuación diferencial de segundo orden que describe la evolución de la densidad de probabilidad de una partícula sujeta a la acción de un ruido blanco, es decir, sin correlación y con un espectro de potencias plano [13, 24].

tiempo, debido a la aproximación de longitud de onda larga, y dado que tanto el operador  $\hat{\mathcal{L}}$  como la densidad promedio  $Q$  no son fluctuantes, se llega a que el resultado anterior se expresa como

$$\hat{\mathcal{D}}_i Q \approx \int_{-\infty}^t \langle A_i(t) A_j(t') \rangle e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial Q'}{\partial x_j} dt'. \quad (2.19)$$

A partir de la definición del operador  $e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')}$  en la ecuación (2.8), es posible establecer que  $Q(t) = e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} Q(t')$ , tal que el integrando de la ecuación (2.19) puede reescribirse, utilizando el operador identidad  $e^{\hat{\mathcal{L}}(t-t')} e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')}$ , de la siguiente manera [1]

$$e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial Q(t')}{\partial x_j} = \left( e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \right) e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} Q(t') = \frac{\partial Q(t)}{\partial x'_j}, \quad (2.20)$$

siendo  $x'_i \equiv x_i(t')$ . Por otro lado, en analogía a lo realizado para la componente eléctrica del CPC en la ecuación (1.23), se tiene que la correlación de dos puntos del vector potencial electromagnético se puede expresar como

$$\langle A_i(t) A_j(t') \rangle = \delta_{ij} c^2 \int_0^\infty \frac{S_0(\omega)}{\omega^2} \cos(\omega(t-t')) d\omega \equiv \delta_{ij} c^2 \varphi(t-t'). \quad (2.21)$$

Utilizando los dos resultados anteriores en la ecuación (2.19), y mediante el uso de la regla de la cadena [1], se llega a que el operador de difusión se puede aproximar en el límite temporal asintótico por

$$\frac{1}{c^2} \hat{\mathcal{D}}_i Q \approx \left( \int_{-\infty}^t \varphi(t-t') \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} dt' \right) \frac{\partial Q}{\partial x_j} + \left( \int_{-\infty}^t \varphi(t-t') \frac{\partial p_j}{\partial x'_i} dt' \right) \frac{\partial Q}{\partial p_j}. \quad (2.22)$$

Al definir los coeficientes de difusión  $D_{ij}^{xx}$  y  $D_{ij}^{xp}$  como [1]:

$$D_{ij}^{xx}(t) \equiv \frac{e^2}{m^2} \int_{-\infty}^t \varphi(t-t') \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} dt'; \quad (2.23)$$

$$D_{ij}^{xp}(t) \equiv \frac{e^2}{m^2} \int_{-\infty}^t \varphi(t-t') \frac{\partial p_j}{\partial x'_i} dt', \quad (2.24)$$

respectivamente, se obtiene que la ecuación de evolución de la densidad promedio de probabilidad en la aproximación markoviana,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , es

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} F = D_{ij}^{xx}(t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + D_{ij}^{xp}(t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial p_j}. \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) posee la forma general de la ecuación de evolución de la densidad de probabilidad en el espacio fase en el límite temporal asintótico de cualquier sistema mecánico representado a través de su correspondiente operador de Liouville [1]. Sin embargo, para el caso específico del OA se tiene que los coeficientes de difusión son diagonales y constantes en el tiempo [26]:  $D_{ij}^{xx} = \delta_{ij} D^{xx}$  y  $D_{ij}^{xp} = \delta_{ij} D^{xp}$ , como se demuestra en el apéndice D, tales que la ecuación (2.25) se reescribe explícitamente como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = m\omega_0^2 x_i \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{p_i}{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i F) + D^{xx} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + D^{xp} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial p_i}. \quad (2.26)$$

De esta manera, es notable que la ecuación generalizada de Fokker-Planck ha olvidado todos los valores de  $Q$  a lo largo de su pasado en la aproximación markoviana, tal que se ha reducido a una ecuación diferencial de segundo orden, es decir, a una ecuación de Fokker-Planck auténtica. Adicionalmente, debe notarse que la ecuación (2.26) se asemeja a la ecuación de Fokker-Planck correspondiente a un oscilador armónico browniano [26, 27, 28], esto es,

$$\frac{\partial F_{\text{clás}}}{\partial t} = m\omega_0^2 x_i \frac{\partial F_{\text{clás}}}{\partial p_i} - \frac{p_i}{m} \frac{\partial F_{\text{clás}}}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial}{\partial p_i} (p_i F_{\text{clás}}) + m\gamma k_B T \frac{\partial^2 F_{\text{clás}}}{\partial p_i^2}, \quad (2.27)$$

donde  $F_{\text{clás}} = F_{\text{clás}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  denota la distribución de probabilidad clásica del oscilador browniano,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta del medio que rodea al sistema mecánico.

La ecuación de Fokker-Planck (2.26) posee en su estructura dos tipos de términos: mecánicos y radiativos. Los términos mecánicos, correspondientes a los dos primeros términos del lado derecho, son aquellos que poseen codificada la información sobre el potencial que actúa sobre la partícula y sobre el acoplamiento dado entre sus posiciones y momentos [4]. Por otro lado, los tres últimos términos del lado derecho de esta ecuación se conocen como de radiación o radiativos, pues son los que establecen la interacción entre la partícula cargada y el campo electromagnético del vacío. Específicamente, el tercer término del lado derecho de la ecuación (2.26) proviene del proceso de reacción radiativa de la partícula, de modo que es el responsable de los procesos disipativos en el movimiento. El cuarto y quinto término, en cambio, representan el efecto aleatorizador que el CPC ejerce permanentemente sobre la partícula cargada [26]. La ausencia del cuarto y quinto término en la ecuación (2.26) provocaría el colapso del sistema a su estado clásico de mínima energía, mientras que la falta del tercero conduciría a un movimiento errático e inestable del mismo [1].

La ecuación (2.26) no es la única ecuación de Fokker-Planck capaz de describir la densidad de probabilidad en el espacio fase de un OA en interacción con el CPC [16, 26, 29]. Un ejemplo de ello se obtiene cuando la descripción del oscilador armónico se realiza en términos de las llamadas variables mecánicas, utilizando que  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$  en lugar de la ecuación (1.31), de modo que se llega a que la ecuación de Fokker-Planck que satisface la densidad de probabilidad promedio en la aproximación markoviana es [26]

$$\frac{\partial F}{\partial t} = m\omega_0^2 x_i \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{p_i}{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial}{\partial p_i} (p_i F) + D^{pp} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2} + D^{px} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial p_i}. \quad (2.28)$$

A pesar de que las ecuaciones (2.26) y (2.28) lucen distintas, ambas describen el mismo sistema en sus respectivos espacios fase [2]. La ecuación (2.26) establece que la difusión del sistema es originada por el acoplamiento entre la posición del oscilador y el vector potencial electromagnético [2, 5]. Por otro lado, la ecuación de Fokker-Planck (2.28) se obtiene a partir del hecho de que el campo eléctrico es el que induce el comportamiento difusivo en el momento de la partícula [2].

### 2.2.1. Solución de la ecuación de Fokker-Planck

La ecuación (2.26) es una ecuación lineal de Fokker-Planck debido a que sus coeficientes de deriva son lineales y sus coeficientes de difusión son constantes [13]. Como se mencionó previamente, esta clase de ecuaciones se obtuvo originalmente al estudiar la evolución de la densidad de probabilidad de procesos de Ornstein-Uhlenbeck, los cuales modelan la velocidad de una partícula browniana sujeta a la acción de una fuerza armónica [27, 28, 30].

Una ecuación lineal de Fokker-Planck arbitraria de varias variables puede expresarse de manera compacta como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = A_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} (z_j F) + D_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}, \quad (2.29)$$

donde las matrices  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{D}$  se caracterizan por ser matrices constantes, siendo  $\mathbb{D}$ , adicionalmente, simétrica [13]; e  $i, j = 1, \dots, 6$ , tal que las componentes  $z_i$  denotan las variables espaciales y momentales del sistema,  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Al expresar la ecuación anterior en términos de la transformada de Fourier de  $F$  con respecto al vector  $\mathbf{z}$ , esto es,

$$F(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \tilde{F}(\boldsymbol{\xi}, t) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}} d^6 \boldsymbol{\xi}, \quad (2.30)$$

se obtiene que dicha transformada satisface la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = -A_{ij}\xi_i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_j} - D_{ij}\xi_i \xi_j \tilde{F}. \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) puede resolverse por el método de características [13]. Sin embargo, ya que los procesos de Ornstein-Uhlenbeck describen sistemas con distribuciones de probabilidad gaussianas [27, 30], se propone que

$$\tilde{F}(\boldsymbol{\xi}, t) = \exp\left(-i\xi_i M_i(t) - \frac{1}{2}\xi_i \xi_j S_{ij}(t)\right), \quad (2.32)$$

con  $S_{ij}$  simétrica ante el intercambio de índices. Al sustituir la ecuación (2.32) en (2.31), se halla que  $M_i(t)$  y  $S_{ij}(t)$  deben satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales [13]:

$$\dot{M}_i = -A_{ij}M_j; \quad (2.33)$$

$$\dot{S}_{ij} = 2D_{ij} - A_{ik}S_{kj} - S_{ik}A_{kj}. \quad (2.34)$$

Dado que la matriz  $\mathbb{A}$  es independiente del tiempo, se tiene que la solución de la ecuación (2.33) está dada por el producto interior entre la exponenciación de la matriz  $-\mathbb{A}t$  y el vector condición inicial  $\mathbf{M}(0)$ ,

$$M_i(t) = [\exp(-\mathbb{A}t)]_{ij}M_j(0). \quad (2.35)$$

Por otro lado, para hallar la solución de la ecuación (2.34), se define la matriz auxiliar  $\mathbb{S}^A$  como [24]

$$\mathbb{S}^A(t) \equiv \exp(\mathbb{A}t)\mathbb{S}(t)\exp(\mathbb{A}^T t), \quad (2.36)$$

donde  $\mathbb{A}^T$  denota la matriz transpuesta de  $\mathbb{A}$ . Al derivar el elemento  $S_{ij}^A$  con respecto al tiempo y sustituir en dicha derivada la ecuación (2.34), se obtiene que su ecuación de evolución temporal está dada por

$$\dot{S}_{ij}^A = 2[\exp(\mathbb{A}t)]_{ik}D_{kl}[\exp(\mathbb{A}^T t)]_{lj}. \quad (2.37)$$

La ecuación diferencial anterior es separable, tal que mediante integración directa se halla que  $S_{ij}^A(t)$  es igual a

$$S_{ij}^A(t) = S_{ij}^A(0) + 2 \int_0^t [\exp(\mathbb{A}t')]_{ik}D_{kl}[\exp(\mathbb{A}^T t')]_{lj} dt'. \quad (2.38)$$

Con base en este último resultado y utilizando la relación entre  $S_{ij}$  y  $S_{ij}^A$ , establecida en la ecuación (2.36), se obtiene que

$$S_{ij}(t) = S_{ij}(0) + 2 \int_0^t [\exp(-\mathbb{A}s)]_{ik} D_{kl} [\exp(-\mathbb{A}^T s)]_{lj} ds. \quad (2.39)$$

Las condiciones iniciales  $M_i(0)$  y  $S_{ij}(0)$  pueden hallarse a partir de la transformada de Fourier de la densidad de probabilidad inicial del sistema  $F(\mathbf{z}, t = 0)$  [13]. Así, puede suponerse sin pérdida de generalidad que en  $t = 0$  la partícula está localizada en  $\mathbf{z}_0$  de modo que su densidad de probabilidad en el espacio fase se expresa en dicho instante como

$$F(\mathbf{z}, 0) = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0). \quad (2.40)$$

La transformada de Fourier de  $F(\mathbf{z}, 0)$  se obtiene inmediatamente al utilizar las propiedades de la delta de Dirac, siendo esta igual a

$$\tilde{F}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \exp(-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}_0), \quad (2.41)$$

Al comparar la expresión anterior con la ecuación (2.32) en  $t = 0$ , se llega a que  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{z}_0$  y que  $\mathbb{S}(0)$  es la matriz nula. De esta manera, y utilizando que  $\exp(-\mathbb{A}^T t) = [\exp(-\mathbb{A}t)]^T$ , se halla que los elementos  $M_i(t)$  y  $S_{ij}(t)$  se expresan como:

$$M_i(t) = [\exp(-\mathbb{A}t)]_{ij} z_{0j}; \quad (2.42)$$

$$S_{ij}(t) = 2 \int_0^t [\exp(-\mathbb{A}s)]_{ik} D_{kl} [\exp(-\mathbb{A}s)]_{jl} ds. \quad (2.43)$$

Los resultados expresados en las ecuaciones (2.42) y (2.43) muestran que la hipótesis de que la densidad de probabilidad  $F(\mathbf{z}, t)$  es una distribución gaussiana, de manera que  $\tilde{F}(\boldsymbol{\zeta}, t)$  posee la forma expuesta en la ecuación (2.32), es correcta. Siendo así, la densidad de probabilidad solución de la ecuación (2.29) está dada, en notación vectorial, por [13]:

$$F(\mathbf{z}, t) = \frac{\exp(-(1/2)(\mathbf{z} - \mathbf{M}(t))^T \mathbb{S}^{-1}(t)(\mathbf{z} - \mathbf{M}(t)))}{8\pi^3 \sqrt{\det \mathbb{S}(t)}}. \quad (2.44)$$

La densidad (2.44) posee codificada, estadísticamente, toda la dinámica del oscilador armónico en la aproximación markoviana, tal que a partir de esta es posible deducir todos los valores esperados de dicho sistema [1]. En

particular, la energía media puede construirse, en analogía con la ecuación (1.46), a partir de las varianzas de la posición y del momento,

$$\langle H(t) \rangle \approx 3\mathcal{E}_0(1 - e^{-\gamma t}) + \left( \frac{\mathbf{P}_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\mathbf{x}_0^2 \right) e^{-\gamma t}, \quad (2.45)$$

donde se ha aproximado la expresión al usar que  $\gamma \ll \omega_0$ . La expresión (2.45) muestra que la energía del sistema mecánico consta de dos partes: por un lado, de un término decreciente proporcional a la energía mecánica usual del oscilador armónico, cuyo valor inicial depende de condiciones iniciales arbitrarias; y por el otro, de una función creciente que tiende al valor  $3\mathcal{E}_0$ . Esto implica que el OA cede energía al CPC debido a la reacción radiativa, pero que, simultáneamente, gana energía del CPC a través de su efecto aleatorizador. Aunado a esto, la ecuación (2.45) prueba que, aunque el oscilador inicia su movimiento en un régimen irreversible, este alcanza, con el paso del tiempo, un estado estacionario en el que los procesos radiativos se compensan mutuamente tal que su energía se vuelve constante,  $\langle H(t \rightarrow \infty) \rangle = 3\mathcal{E}_0$ .

Aun cuando las densidades de probabilidad en el espacio fase del oscilador armónico de la EDE, en la aproximación markoviana, y de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, en particular del oscilador browniano, coinciden en estar descritas por ecuaciones lineales de Fokker-Planck similares, es importante remarcar que ambos fenómenos son enteramente diferentes [2]. Un proceso de Ornstein-Uhlenbeck está descrito por ecuaciones de la forma

$$\dot{\mathbf{z}} + \mathbb{A}\mathbf{z} = \mathbf{\Gamma}(t), \quad (2.46)$$

donde  $\mathbf{\Gamma}(t)$  denota un vector cuyas entradas consisten en fuerzas de Langevin que satisfacen las siguientes propiedades estocásticas:

$$\langle \Gamma_i(t) \rangle = 0; \quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle = D\delta_{ij}\delta(t - t'), \quad (2.47)$$

*i. e.*, corresponden a ruido blanco [27, 28]. Por otra parte, el OA de la electrodinámica estocástica está sujeto a la acción del CPC, el cual se caracteriza por poseer un espectro de potencias coloreado,  $S_0(\omega) \propto \omega^3$ . No obstante, el considerar la aproximación markoviana de dicho proceso no markoviano implica tratar el campo de fondo como efectivamente blanco<sup>4</sup> [2], lo que conlleva a la coincidencia entre las ecuaciones (2.27) y (2.28).

---

<sup>4</sup>Esta aproximación es equivalente a la aproximación de línea estrecha que conduce a las ecuaciones (1.44) y (1.45), en las cuales la cantidad  $S_0(\omega)/\omega^2$  se aproxima por  $S_0(\omega_0)/\omega_0^2$  bajo el símbolo de la integral [2].

Siendo así, aunque el OA de la EDE se aproxima muy cercanamente al oscilador browniano, se tiene que la intensidad del ruido en el primer caso es proporcional a  $\rho_0(\omega_0)$ , esto es, depende de la frecuencia del oscilador. Por el contrario, en el caso browniano, dicha cantidad es proporcional a la temperatura absoluta del sistema, de manera que es igual para todos los osciladores [2, 27]. Esta es la diferencia esencial entre ambos fenómenos, pues, a diferencia del caso clásico, con el CPC a cada OA le corresponderá un ruido específico según su frecuencia natural de oscilación [2].

Aunado a lo anterior, al comparar las ecuaciones de Fokker-Planck (2.27) y (2.28)<sup>5</sup>, se nota inmediatamente que estas difieren en el coeficiente de la segunda derivada con respecto al momento,  $\partial^2/\partial p_i^2$ , y en la presencia de una derivada cruzada de segundo orden,  $\partial^2/\partial x_i \partial p_i$ . La derivada cruzada de la ecuación (2.28) aporta correcciones menores a la densidad de probabilidad del oscilador armónico de la EDE, ya que su coeficiente de acoplamiento  $D^{px}$  [2], o equivalentemente  $D^{xp}$ , es muy cercano a cero en la aproximación de línea estrecha, como se muestra en el apéndice D, tal que su presencia o ausencia en la ecuación de Fokker-Planck no es significativa. Por el contrario, la diferencia entre los coeficientes de la segunda derivada  $\partial^2/\partial p_i^2$  es sumamente relevante, pues su obtención implica un acercamiento fundamentalmente diferente en ambos casos. Clásicamente, el coeficiente en cuestión se obtiene *a posteriori* al demandar que la distribución de probabilidad marginal  $\int F_{\text{clás}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x$  coincida con la distribución de Maxwell-Boltzmann en el límite temporal asintótico [27, 28, 30, 31]:

$$\int F_{\text{clás}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t \rightarrow \infty) d^3x \rightarrow (2\pi m k_B T)^{-3/2} e^{-\mathbf{p}^2/2mk_B T}; \quad (2.48)$$

esto es, al exigirle al oscilador que alcance el equilibrio termodinámico con el fluido que lo rodea en el límite temporal asintótico. Por el contrario, en el tratamiento de la electrodinámica estocástica, los coeficientes de difusión se obtienen como resultados del proceso de construcción de la aproximación markoviana de la ecuación generalizada de Fokker-Planck (2.17) a partir del espectro de potencias del campo electromagnético del vacío y de las características específicas del problema, como se observa en las definiciones (2.23) y (2.24), de modo que no corresponden a parámetros libres de la teoría que deban determinarse posteriormente.

---

<sup>5</sup>La comparación se realiza con la ecuación (2.28) ya que la descripción en el espacio fase de un oscilador armónico browniano se realiza, generalmente, desde el enfoque de Langevin, el cual se hace en términos de las variables mecánicas [28].

### 2.2.2. Distribución en el espacio fase del oscilador armónico unidimensional

La distribución (2.44) puede analizarse fácilmente para el caso de una dimensión espacial. En dicho caso, los índices de la ecuación (2.29) se restringen a  $i, j = 1, 2$ , de manera que  $z_1 = x$ ,  $z_2 = p$ ; y las matrices  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{D}$  se reducen a:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \gamma & -m^{-1} \\ m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2D^{xx} & D^{xp} \\ D^{xp} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

La matriz  $\mathbb{A}$  de la ecuación (2.49) posee un conjunto biortogonal completo de vectores propios que permiten descomponerla espectralmente, tal que si en  $t = 0$  el OA se halla en  $\mathbf{z}_0^T = (x_0, p_0)$ , entonces  $\mathbf{M}(t)$  es

$$\mathbf{M}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_M(t) \\ p_M(t) \end{pmatrix} \approx e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} x_0 \cos(\omega_0 t) + (p_0/m\omega_0) \sin(\omega_0 t) \\ p_0 \cos(\omega_0 t) - m\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Por otro lado, los elementos de la matriz  $\mathbb{S}$  son funciones del tiempo cuyos coeficientes son combinaciones lineales de los coeficientes de difusión:

$$S_{11}(t) \approx \frac{D^{xx}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{D^{xx}}{2\omega_0} e^{-\gamma t} \sin(2\omega_0 t); \quad (2.51)$$

$$S_{22}(t) \approx \frac{m^2\omega_0^2 D^{xx}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{m^2\omega_0 D^{xx}}{2} e^{-\gamma t} \sin(2\omega_0 t); \quad (2.52)$$

$$S_{12}(t) \approx -mD^{xx} e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_0 t). \quad (2.53)$$

Los resultados anteriores se obtuvieron al utilizar que  $\gamma \ll \omega_0$ . Con base en estos resultados se obtiene que la densidad de probabilidad en el límite temporal asintótico, expresada en la ecuación (2.44), se reescribe para el caso de un oscilador armónico unidimensional como

$$F(x, p, t) = (2\pi)^{-1} (S_{11}(t)S_{22}(t) - S_{12}^2(t))^{-1/2} \\ \times \exp \left( -\frac{S_{22}(t)(x - x_M(t))^2 + S_{11}(t)(p - p_M(t))^2}{2S_{11}(t)S_{22}(t) - 2S_{12}^2(t)} \right) \\ \times \exp \left( \frac{S_{12}(t)(x - x_M(t))(p - p_M(t))}{S_{11}(t)S_{22}(t) - S_{12}^2(t)} \right). \quad (2.54)$$

El comportamiento de esta densidad de probabilidad en el espacio fase se ilustra en la figura 2.1 para diferentes instantes de tiempo.

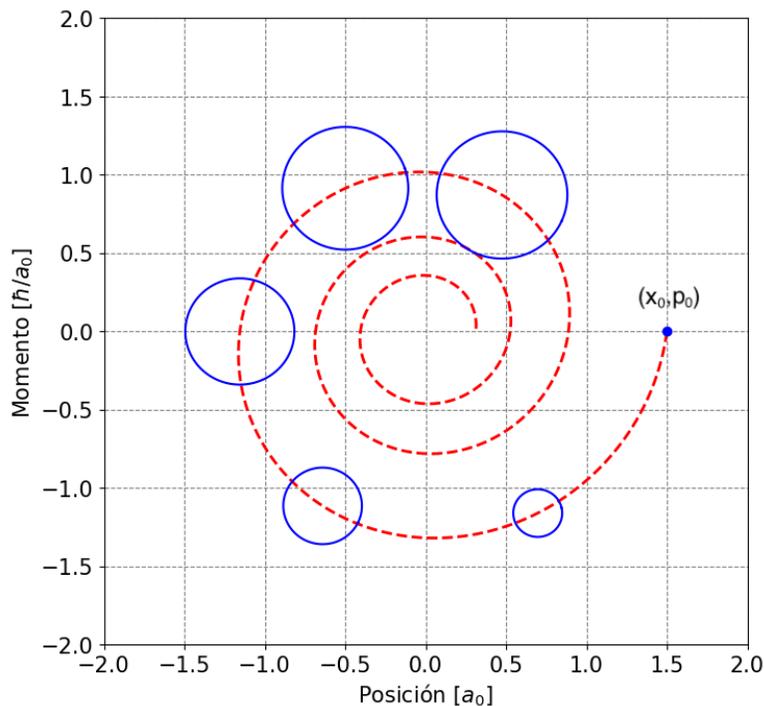


Figura 2.1: Distribución de probabilidad de un electrón que oscila armónicamente en presencia del CPC con  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  en la aproximación markoviana. Las curvas azules corresponden a una curva de nivel de la distribución en diferentes instantes de tiempo y la curva roja a la trayectoria seguida por la distribución desde  $(x_0, p_0)$ . Para evidenciar dicho desplazamiento se fijó  $\alpha = e^2/\hbar c = 0.5$ ; estando el resto de valores numéricos en unidades atómicas.

La ecuación (2.54) muestra que el centro de la distribución  $F(x, p, t)$  sigue una trayectoria espiral decreciente en el espacio fase determinada por el vector  $\mathbf{M}(t)$  [18, 32]. Esto implica que los valores promedio y los valores más probables de la posición y del momento están dados por:

$$\langle x(t) \rangle = x_M(t); \quad \langle p(t) \rangle = p_M(t). \quad (2.55)$$

La trayectoria  $(x_M(t), p_M(t))$  coincide con la trayectoria fase de un oscilador armónico amortiguado clásico [30], lo que implica que la trayectoria determinista del OA de la EDE, aquella que se obtiene al fijar  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{0}$ , es la trayectoria más probable y la que fija el comportamiento transitorio.

En el límite  $t \rightarrow \infty$ , las fuerzas disipativas y fluctuantes se equiparan en promedio, tal que su acción conjunta permite que el sistema alcance un régimen estacionario en el que existe un balance de energía en promedio, es decir, que el OA alcance el equilibrio con el campo de radiación de fondo [26, 32]. En esta situación, la densidad de probabilidad en el espacio fase del subsistema mecánico tiende a una distribución estacionaria independiente del tiempo, la cual está dada, según las ecuaciones (2.50) a (2.54), por

$$F_\infty(x, p) = \frac{\gamma}{2\pi m \omega_0 D^{xx}} e^{-\gamma(p^2/m + m\omega_0^2 x^2)/2m\omega_0^2 D^{xx}}. \quad (2.56)$$

Al sustituir el coeficiente  $D^{xx}$  en términos de los parámetros del oscilador, ecuación (D.18), se halla que la distribución estacionaria  $F_\infty(x, p)$  coincide con la distribución obtenida a partir de la descomposición de Fourier de la solución estacionaria del oscilador armónico de la EDE, ecuación (1.49). Así, ambos tratamientos conducen a la misma distribución estacionaria.

Finalmente, de las ecuaciones (2.51), (2.52), (2.54) y (D.18), se obtiene que el producto de las varianzas de la posición y el momento del oscilador armónico es

$$\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t) = S_{11}(t)S_{22}(t) \approx \frac{\hbar^2}{4}(1 - e^{-\gamma t})^2. \quad (2.57)$$

Este producto es inicialmente nulo, pero crece conforme el CPC interactúa con el OA hasta alcanzar el valor límite  $\hbar^2/4$  en el límite temporal asintótico. De esta manera, en el estado estacionario del sistema, el producto  $\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t)$  reproduce el contenido de las desigualdades de Heisenberg para el estado base del oscilador armónico.

## 2.3. Oscilaciones forzadas

Un fenómeno importante de analizar, debido a que se trata del mecanismo usualmente utilizado en la mecánica cuántica para estudiar la excitación, desexcitación e ionización de sistemas [21, 29], es la perturbación del oscilador de la EDE ocasionada por una onda electromagnética. La ecuación de movimiento de este sistema es de la forma de la ecuación (1.4), pero, en este caso, la fuerza de Lorentz que actúa sobre el OA está constituida por una parte estocástica, debida al CPC, y por una parte externa y oscilatoria. Nuevamente, al restringir el movimiento al caso no relativista y aplicar la aproximación dipolar eléctrica, se tiene que la componente magnética de la

fuerza de Lorentz es despreciable con respecto a la componente eléctrica, al igual que la dependencia espacial de esta última, de manera que la ecuación de movimiento se reescribe como [29, 32]

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\gamma\dot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2\mathbf{x} = e(\mathbf{E}^{\text{CPC}}(t) + \mathbf{E}^{\text{ext}}(t)). \quad (2.58)$$

Además, a partir de la definición del cambio de momento en términos de las fuerzas experimentalmente controlables [18], se tiene que

$$\dot{\mathbf{p}} = -m\omega_0^2\mathbf{x} + e\mathbf{E}^{\text{ext}}(t). \quad (2.59)$$

Siendo así, para el caso del oscilador armónico forzado, la relación entre  $\mathbf{p}$  y  $\dot{\mathbf{x}}$  está dada por

$$m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} - m\gamma\mathbf{x} - \frac{e}{c}\mathbf{A}^{\text{CPC}}(t). \quad (2.60)$$

La ecuación de Fokker-Planck que describe la distribución de probabilidad del OA forzado en interacción con el campo electromagnético del vacío en la aproximación markoviana está dada, de acuerdo con las ecuaciones (2.25), (2.59) y (2.60), por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & (m\omega_0^2 x_i - eE_i^{\text{ext}}(t)) \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{p_i}{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ & + \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i F) + D^{xx} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + D^{xp} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial p_i}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde los coeficientes de difusión  $D^{xx}$  y  $D^{xp}$  coinciden con los del caso no forzado<sup>6</sup>. La ecuación (2.61) es una ecuación lineal de Fokker-Planck [13], al igual que la ecuación (2.26), que tiene la particularidad de poseer un coeficiente de deriva que, aunque independiente de las coordenadas, es función del tiempo. La ecuación (2.61) puede reescribirse genéricamente como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = A_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} (z_j F) + B_i(t) \frac{\partial F}{\partial z_i} + D_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}, \quad (2.62)$$

---

<sup>6</sup>Los coeficientes de difusión dependen únicamente del espectro de potencias del CPC y de la forma en la que  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{p}(t)$  dependen de  $\mathbf{x}(t')$  para  $t' < t$  en el problema mecánico determinista [1]. Así, dado que la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado forzado corresponde a la de un oscilador armónico amortiguado con una inhomogeneidad, siendo ambas ecuaciones lineales, se tiene que la dependencia de su solución en las condiciones en tiempos anteriores no cambia con respecto al caso no forzado, de modo que  $D^{xx}$  y  $D^{xp}$  tampoco cambian.

donde el vector  $\mathbf{B}(t)$  contiene la información sobre el forzamiento. Al utilizar la ecuación (2.30) se tiene que la ecuación diferencial anterior se expresa en el espacio de Fourier de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = -A_{ij}\xi_i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_j} + iB_i(t)\xi_i \tilde{F} - D_{ij}\xi_i \xi_j \tilde{F}. \quad (2.63)$$

Si se propone la expresión (2.32) como solución de la ecuación (2.63) se obtiene que el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz  $\mathbb{S}(t)$  satisface la ecuación (2.34), al igual que en el caso no forzado, y que la ecuación que gobierna la evolución temporal de la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{M}(t)$  es

$$\dot{M}_i = -A_{ij}M_j - B_i(t). \quad (2.64)$$

La ecuación diferencial anterior corresponde a la generalización inhomogénea de la ecuación (2.33) tal que su solución se expresa como

$$M_i(t) = [\exp(-\mathbb{A}t)]_{ij}z_{j0} - \int_0^t [\exp(-\mathbb{A}s)]_{ij}B_j(t-s)ds. \quad (2.65)$$

Los resultados de las ecuaciones (2.42) y (2.65) coinciden en poseer una componente que decae exponencialmente a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ , siendo esta la única componente en el caso de la ecuación (2.42); mientras que se diferencian en que la última tiene un término que, en general, es no nulo en el límite temporal asintótico.

A partir de los resultados expresados en las ecuaciones (2.32), (2.43) y (2.65), se obtiene que la distribución de probabilidad en el espacio fase del OA forzado de la EDE, solución de la ecuación de Fokker-Planck (2.63), posee la misma forma que la distribución de la ecuación (2.44). No obstante, el caso forzado se distingue porque sus valores esperados poseen una componente transitoria que decrece exponencialmente y una estacionaria que oscila permanentemente. En particular, para los valores medios de posición y momento se obtiene que sus partes estacionarias son:

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle_{\text{est}} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \frac{\Theta(t)[(\omega_0^2 - \omega_2^2) \sin(\omega_2 t) - \gamma \omega_2 \cos(\omega_2 t)]}{(\omega_0^2 - \omega_2^2 - (\gamma/2)^2)^2 + 2(\gamma/2)^2(\omega_0^2 + \omega_2^2) - (\gamma/2)^4}; \quad (2.66)$$

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle_{\text{est}} = e\mathbf{E}_0 \frac{\Theta(t)[\omega_2(\omega_0^2 - \omega_2^2 - \gamma^2) \cos(\omega_2 t) + \omega_0^2 \gamma \sin(\omega_2 t)]}{(\omega_0^2 - \omega_2^2 - (\gamma/2)^2)^2 + 2(\gamma/2)^2(\omega_0^2 + \omega_2^2) - (\gamma/2)^4}, \quad (2.67)$$

donde se ha supuesto que la onda electromagnética externa incide en  $t = 0$  y que su componente eléctrica oscila sinusoidalmente con una frecuencia  $\omega_2$ , *i. e.*,

$$\mathbf{E}^{\text{ext}}(t) = \mathbf{E}_0 \Theta(t) \sin(\omega_2 t), \quad (2.68)$$

siendo  $\Theta(t)$  la función escalón de Heaviside. Por otro lado, las componentes transitorias de  $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$  y  $\langle \mathbf{p}(t) \rangle$  poseen una parte homogénea, la cual coincide por construcción con los valores promedios de posición y momento del caso no forzado, ecuación (2.55); y una inhomogénea, que oscila con frecuencias cercanas a  $\omega_0 \pm \omega_2$ .

En analogía con la ecuación (1.46), la energía promedio asociada al sistema forzado en cuestión posee la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle = & 3\mathcal{E}_0(1 - e^{-\gamma t}) + \left( \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \mathbf{x}_0^2 \right) e^{-\gamma t} \\ & + \mathcal{A}(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, t)e^{-\gamma t} + \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, t)e^{-\gamma t/2} + \mathcal{C}(t), \end{aligned} \quad (2.69)$$

siendo  $\mathcal{A}(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, t)$ ,  $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, t)$  y  $\mathcal{C}(t)$  funciones que oscilan con el tiempo. A diferencia de la expresión (2.45), la energía media (2.69) no tiende, en general, a una constante en el límite  $t \rightarrow \infty$ , es decir,  $d\langle H(t \rightarrow \infty) \rangle / dt \neq 0$ . Consecuentemente, en el caso más general, el oscilador armónico alcanza el equilibrio con el campo electromagnético del vacío ya que una componente de  $\langle H(t \rightarrow \infty) \rangle$  es  $3\mathcal{E}_0$ , pero no con el campo eléctrico externo que actúa como agente forzante [2].

### 2.3.1. Caso resonante: los estados coherentes

El efecto de la onda electromagnética externa sobre el OA es máximo cuando sus frecuencias de oscilación coinciden, esto es, cuando el sistema está en resonancia [3, 4]. Como se mostrará a continuación, esta situación resultará ser la única en la cual el oscilador alcanza, en promedio, el balance energético tanto con el CPC como con la onda electromagnética.

Si las frecuencias  $\omega_0$  y  $\omega_2$  son iguales, se obtiene que el vector  $\mathbf{M}(t)$  de la ecuación (2.65) se simplifica de tal manera que los promedios de la posición y el momento se reescriben como:

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{x}_{\text{tran}}(t) - \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0\gamma} \Theta(t) \cos(\omega_0 t); \quad (2.70)$$

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \mathbf{p}_{\text{tran}}(t) + \frac{e\mathbf{E}_0}{\gamma} \Theta(t) \left[ \sin(\omega_0 t) - \frac{\gamma}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \right]. \quad (2.71)$$

Las ecuaciones (2.70) y (2.71) muestran que la densidad de probabilidad del OA forzado tiende a un ciclo fase límite conforme el tiempo avanza, tal y como se ilustra en la figura 2.2 para el caso unidimensional.

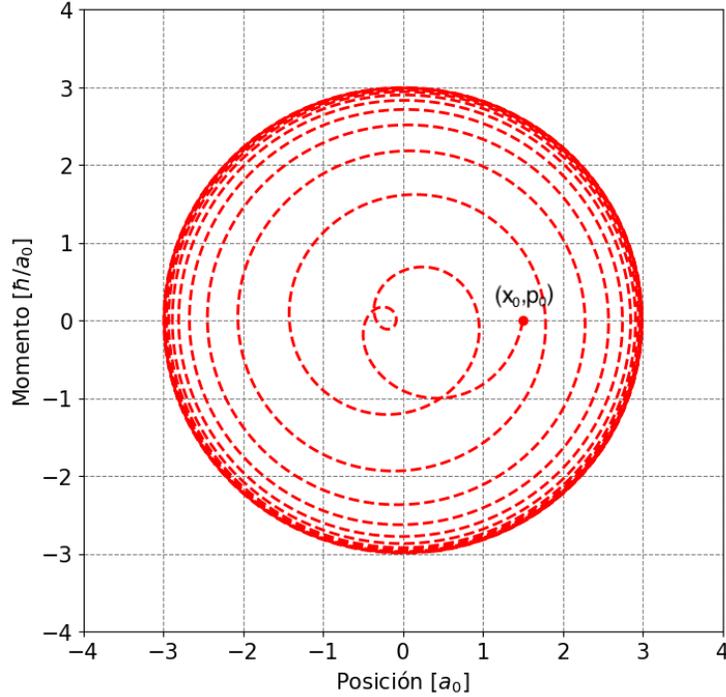


Figura 2.2: Trayectoria fase seguida por la densidad de probabilidad de un electrón que oscila armónicamente con  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  en presencia del CPC y de una onda electromagnética, con una amplitud  $E_0 = e/4a_0^2$ , en la aproximación markoviana y el caso resonante. Con fines ilustrativos se fijó  $\alpha = 1/2$ , estando el resto de valores numéricos en unidades atómicas.

La energía promedio del oscilador armónico forzado de la EDE en el caso resonante y el límite temporal asintótico está dada por

$$\langle H(t \rightarrow \infty) \rangle = 3\mathcal{E}_0 + \frac{e^2 \mathbf{E}_0^2}{2m\gamma^2} \left[ 1 - \frac{\gamma}{\omega_0} \sin(2\omega_0 t) + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \cos^2(\omega_0 t) \right]. \quad (2.72)$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación (2.72) corresponde a la energía característica que adquiere el OA cuando alcanza el equilibrio con el CPC [1, 2]. Por el otro lado, el segundo término es la energía asociada al movimiento del oscilador en la trayectoria fase que alcanza la distribución de probabilidad cuando el comportamiento transitorio ha desaparecido por completo. La expresión (2.72) presenta un comportamiento oscilatorio permanentemente, no obstante, los términos dependientes del tiempo son proporcionales a  $\gamma/\omega_0$  tales que por la ecuación (B.3) son, al menos, siete órdenes de magnitud menores que el término constante. Así, se tiene que

$$\langle H(t \rightarrow \infty) \rangle \approx 3\mathcal{E}_0 + \frac{e^2 \mathbf{E}_0^2}{2m\gamma^2}. \quad (2.73)$$

Con base en esto, se puede afirmar que el oscilador armónico alcanza un estado aproximado de equilibrio con la onda electromagnética forzante, en promedio, cuando ambos poseen la misma frecuencia de oscilación.

Por otro lado, el proceso dispersivo de la densidad de probabilidad es idéntico al del caso no forzado, ya que  $\mathbb{S}(t)$  está descrita por la ecuación (2.43) en ambos casos. Luego, la distribución de probabilidad del OA forzado tiende a la forma de la distribución (1.49) en el límite  $t \rightarrow \infty$  [18, 29, 32]. Esto implica que en dicho límite la distribución en cuestión sigue la trayectoria límite de la figura 2.2 rígidamente, como se muestra en la figura 2.3.

La densidad de probabilidad en el espacio de configuración del presente caso es inmediata de obtener, tal que, de las ecuaciones (2.44), (2.43), (2.70) y (2.71), se obtiene que esta está dada, en el límite temporal asintótico, por

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \equiv \int F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p = \left( \frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-m\omega_0[\mathbf{x}-\mathbf{x}_F \cos(\omega_0 t)]^2/\hbar}, \quad (2.74)$$

donde se ha definido el vector  $\mathbf{x}_F \equiv e\mathbf{E}_0/m\omega_0\gamma$ . A partir de esta densidad de probabilidad es posible identificar al OA forzado de la electrodinámica estocástica en el caso resonante como un ejemplo de los estados coherentes del oscilador armónico de la mecánica cuántica<sup>7</sup> [18, 21, 29, 32].

---

<sup>7</sup>En el marco de la mecánica cuántica, los estados coherentes del oscilador armónico  $|a\rangle$  son los estados propios del operador de aniquilación  $\hat{a}$ , los cuales se expresan, en términos de los estados propios del hamiltoniano  $|n\rangle$  y en el caso unidimensional, como

$$|a\rangle = e^{-|a|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \hat{D}(a)|0\rangle,$$

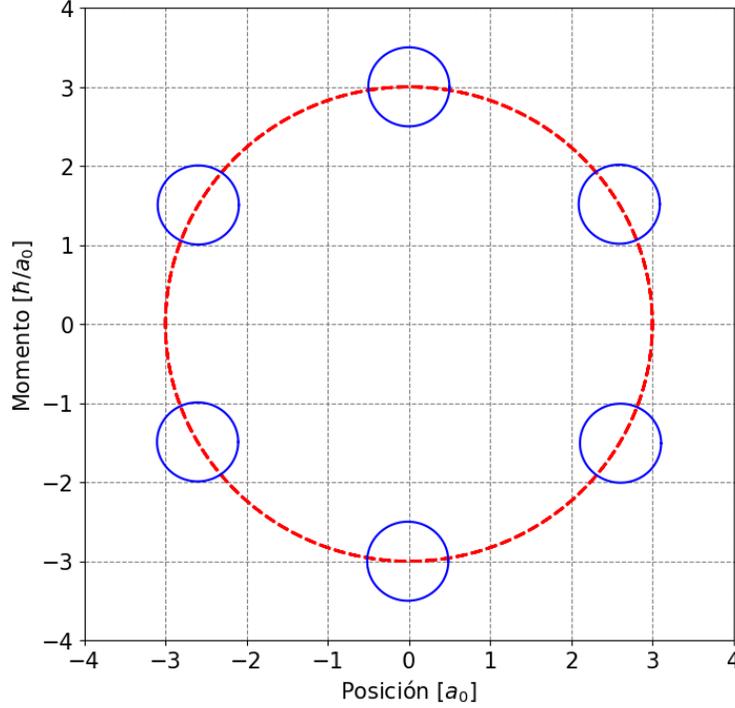


Figura 2.3: Distribución de probabilidad en el límite  $t \rightarrow \infty$  de un electrón que oscila con frecuencia  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  en presencia del CPC y de una onda electromagnética, con una amplitud  $E_0 = e/4a_0^2$ , en la aproximación markoviana y el caso resonante. Las curvas azules corresponden a una curva de nivel de la distribución en distintos tiempos y la curva roja a la trayectoria seguida por la distribución. Los valores numéricos se presentan en unidades atómicas.

donde  $a = (m\omega_0^2 x_F^2/2)^{1/2}$  y  $\hat{D}(a) \equiv \exp(a\hat{a} - |a|^2/2)$  denotan el valor propio del operador de aniquilación y el operador de desplazamiento [21], respectivamente. La expresión anterior muestra que el operador  $\hat{D}(a)$  genera el estado coherente  $|a\rangle$  al actuar sobre el estado base  $|0\rangle$ , de modo que dicho estado puede interpretarse como el estado base del oscilador armónico desplazado una distancia  $x_F$  desde el origen, con

$$x_F = \sqrt{\frac{2a^2}{m\omega_0^2}}.$$

Esto implica que los estados coherentes del OA corresponden a estados de mínima dispersión que poseen una anchura independiente del tiempo [21].

El oscilador armónico forzado de la EDE en el caso resonante posee una distribución de probabilidad en el espacio fase con un comportamiento singular ya que, a diferencia de la del caso no forzado que evoluciona a un estado estacionario independiente del tiempo, mantiene un movimiento estable alrededor del espacio fase permanentemente. Esto es sumamente relevante debido a que la onda electromagnética externa puede interpretarse como una excitación del CPC [1], de manera que dicho campo excitado es capaz de sostener al OA en un estado de equilibrio que igualmente puede considerarse como excitado<sup>7</sup>. Este resultado evidencia que un cambio del campo de fondo implica una modificación del estado de equilibrio del oscilador [1].

## 2.4. Aproximaciones de orden superior

Las distribuciones estudiadas en las secciones 2.2 y 2.3 son soluciones de ecuaciones diferenciales que son aproximaciones de la ecuación generalizada de Fokker-Planck a primer orden en  $\tau$ . Por ello, es de máximo interés analizar la posibilidad de construir una aproximación a un orden arbitrario y finito en  $\tau$  de la ecuación (2.17), y la validez física de esta.

Matemáticamente, la ecuación (2.17) puede ser aproximada a orden  $\tau^n$ , con  $n$  arbitrario, a partir de la definición del operador de difusión, ecuación (2.16). No obstante, por el teorema de Pawula<sup>8</sup>, únicamente cuando  $n = 0$  o  $n = 1$  se tiene que la ecuación aproximada posee como solución una función no negativa. Si el desarrollo no se finaliza a primer orden en  $\tau$ , entonces se requiere de toda la serie infinita para obtener nuevamente una función no negativa como solución [13].

En el contexto de la teoría de la probabilidad, una función debe satisfacer una serie de condiciones mínimas, entre las que se encuentra ser no negativa, para poder ser considerada como una densidad de probabilidad. Estas condiciones reciben el nombre de axiomas de Kolmogórov. Con base en lo anterior, la densidad  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  es una distribución de probabilidad auténtica en el es-

---

<sup>8</sup>El teorema de Pawula establece que si la función  $Q(x, t)$  está descrita por un desarrollo de Kramers-Moyal,

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \mathcal{D}_k(x, t) Q(x, t),$$

entonces esta es no negativa,  $Q(x, t) \geq 0$ , si y solo si el desarrollo se trunca después del primer o segundo término, o si no se trunca en lo absoluto [13].

pacio fase por construcción al ser la solución exacta de la ecuación (2.17) [1]. Igualmente, las soluciones de la ecuación generalizada de Fokker-Planck aproximada a órdenes cero y primero en  $\tau$  corresponderán a densidades de probabilidad auténticas<sup>9</sup>, de manera que estas tres soluciones son las únicas capaces de describir físicamente un sistema en el espacio fase [1].

El teorema de Pawula no afirma que las soluciones de los desarrollos truncados hasta  $n \geq 2$  no sean posibles de analizar, sino que estas poseerán valores negativos en alguna región del espacio fase a algún tiempo [13], tal que no pueden considerarse como distribuciones de probabilidad de Kolmogórov auténticas, lo que implica que no corresponden a una descripción completa en el espacio fase. Este tipo de funciones, comúnmente referidas como distribuciones de cuasiprobabilidad<sup>10</sup> [15], son principalmente utilizadas en la formulación en el espacio fase de la mecánica cuántica, siendo la distribución de Wigner el ejemplo más conocido [33].

Las soluciones de la ecuación (2.17) aproximada a órdenes cero y primero en  $\tau$  describen correctamente el comportamiento de los sistemas mecánicos lineales cerca de sus estados estacionarios [2], como se mostró para el caso del oscilador armónico. Sin embargo, en el caso general, y concretamente para el átomo de hidrógeno, estas aproximaciones han demostrado no ser adecuadas [34]. En este sentido, para obtener una descripción correcta de un sistema mecánico no lineal deben considerarse todos los términos de la serie infinita de la ecuación (2.17) o, en su defecto, considerar algunos términos de la serie, adicionales a los primeros dos, con la consecuencia de obtener una descripción en el espacio fase en términos de distribuciones de cuasiprobabilidad.

---

<sup>9</sup>La aproximación a orden cero en  $\tau$  de la ecuación generalizada de Fokker-Planck (2.17),

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0,$$

corresponde a la ecuación de Liouville de un proceso determinista, al haber despreciado todos los efectos radiativos del sistema, es decir, al haber eliminado la interacción del sistema mecánico con el CPC. Por otro lado, la aproximación a primer orden en  $\tau$ , en la que el CPC se aproxima como un ruido blanco, corresponde a la aproximación markoviana de la EDE.

<sup>10</sup>En el sentido más general, una distribución de cuasiprobabilidad es cualquier objeto matemático similar a una distribución de probabilidad que no satisface alguno de los axiomas de Kolmogórov.



# Capítulo 3

## La mecánica cuántica en el espacio fase

La formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase es considerada, junto con las formulaciones basadas en operadores en el espacio de Hilbert o en integrales de trayectoria, como uno de los caminos para arribar a la cuantización de manera lógica y autónoma [33].

El desarrollo de la teoría cuántica en el espacio fase se fundamenta en la función de Wigner de 1932 [35] e, históricamente, inició con la introducción de la correspondencia entre funciones en el espacio fase y operadores en el espacio de Hilbert ordenados bajo cierta prescripción<sup>1</sup>, por parte de H. Weyl en 1927 [33]. Específicamente, la correspondencia de Weyl establece que  $x \rightarrow \hat{x}$ ,  $p \rightarrow \hat{p}$  y, en general, para una función  $A(x, p)$  que [36, 37]

$$\hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \iiint\limits_{\mathbb{R}^4} e^{2i[r(\hat{x}-x)+s(\hat{p}-p)]/\hbar} A(x, p) dx dp dr ds. \quad (3.1)$$

La correspondencia de Weyl se consideró, en un inicio, como la prescripción correcta para la cuantización. No obstante, pronto se halló que esta fallaba en transformar el cuadrado del momento angular clásico en su análogo cuántico aceptado; y, por tanto, se relegó como una prescripción elegante, pero no intrínsecamente especial [38].

---

<sup>1</sup>La prescripción de ordenamiento de Weyl requiere que un operador arbitrario, expresado como una serie de potencias de  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ , sea ordenado en una expresión completamente simetrizada en  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ , mediante el conmutador de Heisenberg,  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  [33].

La estructura fundamental detrás de esta correspondencia fue estudiada a profundidad por H. Groenewold, en 1946, y por J. E. Moyal, en 1949, lo que permitió el establecimiento de la formulación [33, 38]. Groenewold mostró que el carácter estadístico de la mecánica cuántica no puede explicarse desde su formalismo mediante promedios sobre procesos deterministas descritos en términos de sus posiciones y momentos, como se hace en la mecánica estadística clásica; mas que esto no impide la construcción de una descripción que se asemeje a una descripción estadística formal [36].

Aunado a esto, Groenewold expuso la correspondencia de Weyl como una transformación invertible al mostrar que la función de Wigner<sup>2</sup> corresponde a la función fase que conduce al operador estadístico a través de la transformación de Weyl, y demostró que la imagen del conmutador cuántico bajo la transformación de Wigner es una generalización del paréntesis de Poisson que tiene a este último como su límite clásico y que, actualmente, se conoce como paréntesis de Moyal [33, 36, 38].

Moyal complementó la formulación en el espacio fase desde un punto de vista radicalmente distinto al de Groenewold, al notar que los valores de expectación de los operadores cuánticos monomiales,  $\langle \hat{x}^n \hat{p}^m \rangle$ , podían ser generados a partir de una función característica en el espacio fase, la cual identificó como la transformada de Fourier de la distribución de Wigner. Adicionalmente, Moyal encontró que las desigualdades de Heisenberg están incorporadas en la estructura matemática de la función de Wigner y, al igual que Groenewold aunque de manera menos sistemática, estudió su evolución temporal a través de la deformación del paréntesis de Poisson en el paréntesis de Moyal [38, 39].

### 3.1. Descripción cuántica en el espacio fase

Una descripción auténtica en el espacio fase de un sistema cuántico, representado por el operador estadístico  $\hat{\rho}(t)$ , debe basarse en una única función fase,  $F_Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , que cumpla con ser no negativa,

$$F_Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \geq 0, \quad (3.2)$$

---

<sup>2</sup>En 1932, E. Wigner propuso, de manera totalmente inconexa con el trabajo de Weyl, una función, que hoy en día lleva su nombre, capaz de describir el flujo difusivo mecano cuántico en el espacio fase, en un esfuerzo por calcular correcciones cuánticas en los promedios termodinámicos [33, 35].

tal que pueda interpretarse como una distribución de probabilidad; y con que sus distribuciones marginales sean iguales a las distribuciones de probabilidad usuales de posición,

$$\int F_Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p = \langle \mathbf{x} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{x} \rangle, \quad (3.3)$$

y de momento<sup>3</sup> [40],

$$\int F_Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 x = \langle \mathbf{p} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{p} \rangle. \quad (3.4)$$

Sin embargo, se ha demostrado que para cada estado cuántico existe un número infinito de este tipo funciones [41]. Esto dificulta construir una adecuada descripción del sistema pues, hasta ahora, no se ha encontrado una manera de discriminar dichas funciones por su significado físico [40].

Esta multiplicidad de distribuciones fase cuánticas puede entenderse a partir del hecho de que existen infinitas formas de representar el operador estadístico de una mezcla en términos de estados puros [40]. En este sentido, se puede intentar obtener una única función  $F_Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  al exigirle que únicamente dependa del operador estadístico  $\hat{\rho}(t)$  y no de la forma particular en la que este esté representado. No obstante, es posible demostrar que las distribuciones fase que cumplen esta condición adicional son incapaces de satisfacer alguna de las tres condiciones planteadas originalmente [40].

Con base en lo anterior, y retomando la posibilidad de construir una descripción que se asemeje a la descripción estadística formal propuesta por Groenewold, puede considerarse una descripción fase del sistema cuántico que sea única pero que prescindiera de alguna de las otras tres condiciones. Siendo así, es usual que se renuncie a la no negatividad de la función  $F_Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , pues dado que se quiere establecer conexiones entre la nueva formulación y los resultados mecanocuánticos usuales, se exige que se cumplan las condiciones (3.3) y (3.4). De esta forma, la descripción se realiza en términos de distribuciones de cuasiprobabilidad, cuyo representante más estudiado es la función de Wigner.

---

<sup>3</sup>Ocasionalmente, se argumenta que una distribución fase cuántica como la propuesta es imposible debido a las desigualdades de Heisenberg. No obstante, este argumento no es válido porque las desigualdades de Heisenberg no implican necesariamente que la teoría cuántica sea inconsistente con la suposición de que las partículas posean una posición y un momento bien definidos en todo momento; y porque para que una distribución  $F_Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  satisfaga estas desigualdades basta con que esta tenga un área efectiva de soporte en el espacio fase del orden de  $2\pi\hbar$  [40].

## 3.2. La distribución de Wigner

La forma usual de introducir la distribución de cuasiprobabilidad de Wigner es a través de su transformada inversa de Fourier, es decir, a través del promedio de la función característica  $e^{-2i(s_i x_i + r_i p_i)/\hbar}$ , donde  $x_i$  y  $p_i$  son los valores propios de los operadores cuánticos de posición,  $\hat{x}_i$ , y momento,  $\hat{p}_i$ , respectivamente [36, 39]. Así, al definir el operador [36]

$$\hat{M}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) \equiv e^{-2i(s_i \hat{x}_i + r_i \hat{p}_i)/\hbar} = e^{-ir_i \hat{p}_i/\hbar} e^{-2is_i \hat{x}_i/\hbar} e^{-ir_i \hat{p}_i/\hbar}, \quad (3.5)$$

en el cual se usó la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para establecer la segunda igualdad, se obtiene que la función característica del sistema en cuestión está dada por el siguiente valor de expectación:

$$M_\rho(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{M}) = \int \langle \mathbf{z} - \mathbf{r} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{z} + \mathbf{r} \rangle e^{-2is \cdot \mathbf{z}/\hbar} d^3 z, \quad (3.6)$$

donde el operador estadístico  $\hat{\rho}(t)$  describe, en el caso más general, una mezcla estadística; de modo que su transformada inversa de Fourier es igual a

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \int \langle \mathbf{x} - \mathbf{r} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{x} + \mathbf{r} \rangle e^{2i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}/\hbar} d^3 r. \quad (3.7)$$

La expresión (3.7) corresponde a la distribución originalmente propuesta por Wigner para representar una mezcla estadística tridimensional en el espacio fase [35].

La explicación detrás de la preferencia en describir el sistema cuántico en términos de la distribución de Wigner radica en el hecho de que esta permite expresar los valores esperados cuánticos de forma similar a los promedios clásicos [37, 40]. En este sentido, a partir de la definición de la transformación de Wigner de un operador arbitrario [15, 40],

$$A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 2 \int \langle \mathbf{x} - \mathbf{r} | \hat{A}(t) | \mathbf{x} + \mathbf{r} \rangle e^{2i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}/\hbar} d^3 r; \quad (3.8)$$

y de la expresión de  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  en términos del operador  $\hat{\rho}(t)$ , ecuación (3.7), se obtiene que el valor de expectación de la variable dinámica asociada al operador  $\hat{A}$  se expresa en términos de la función de Wigner como

$$\langle A \rangle(t) = \iint A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 x d^3 p, \quad (3.9)$$

donde  $A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  corresponde, en la mayoría de los casos, a la expresión clásica de la variable dinámica en cuestión<sup>4</sup> [33].

Las características principales de la distribución de Wigner están determinadas por las propiedades del operador estadístico [40]. En este sentido, dado que dicho operador es autoadjunto, se tiene que  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  es una función real. Por otro lado, el resultado  $\text{Tr}(\hat{\rho}(t)) = 1$  implica, por la ecuación (3.3), que la función de Wigner está normalizada en el espacio fase,

$$\iint W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p = 1. \quad (3.10)$$

Por otro lado, los elementos diagonales del operador  $\hat{\rho}(t)$  están sujetos a la restricción  $0 \leq \rho_{nn}(t) \leq 1$ , tal que dados dos operadores estadísticos diferentes se satisface que  $0 \leq \text{Tr}(\hat{\rho}_1(t)\hat{\rho}_2(t)) \leq 1$  [21, 40]. Debido a esto y a partir de la ecuación (3.9), se obtiene que la integral sobre el espacio fase del producto de las funciones de Wigner asociadas a cada operador estadístico satisface la siguiente condición:

$$0 \leq \iint W_{\rho_1}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) W_{\rho_2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p \leq \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.11)$$

Así, cuando  $\hat{\rho}_1(t) = \hat{\rho}_2(t)$  se obtiene que

$$\iint W^2(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p \leq \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}; \quad (3.12)$$

es decir,  $W_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  no puede poseer valores arbitrariamente grandes. Este resultado es una consecuencia directa de que la función de Wigner satisface las desigualdades de Heisenberg<sup>3</sup> [40].

La función de Wigner puede construirse en la representación momental de manera análoga a como se hizo en en la representación de coordenadas, obteniéndose que en dicho caso esta está dada por

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \int \langle \mathbf{p} - \mathbf{s} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{p} + \mathbf{s} \rangle e^{2is \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3s. \quad (3.13)$$

De esta manera, las ecuaciones (3.7) y (3.13) exhiben una simetría básica de la distribución de Wigner ante el intercambio  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{p}$  [15].

---

<sup>4</sup>La función  $A_W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  posee correcciones adicionales, proporcionales a  $\hbar$ , cuando existen ambigüedades en el ordenamiento mecanocuántico de los operadores [33, 36].

Un caso particular de la representación de Wigner que es de especial interés es aquel en el que el sistema se encuentra en un estado puro, tal que el operador estadístico se reduce a  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ , con  $|\psi(t)\rangle$  el estado en cuestión [21]. Consecuentemente, la función de Wigner se expresa en términos de la función de onda del sistema cuántico,  $\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \langle\mathbf{x}|\psi(t)\rangle$ , como [35]

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \int \psi^*(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t)e^{2i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar}d^3r. \quad (3.14)$$

Siendo así, la traza del producto de los operadores estadísticos asociados a dos estados puros distintos se reduce al cuadrado de la norma del traslape entre ambos estados. Entonces, si  $\hat{\rho}_1(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  y  $\hat{\rho}_2(t) = |\varphi(t)\rangle\langle\varphi(t)|$ , se obtiene que

$$|\langle\psi(t)|\varphi(t)\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^3 \iint W_\psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)W_\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)d^3xd^3p. \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) implica dos corolarios de relevancia: primero, que el límite superior de la desigualdad establecida en la ecuación (3.12) corresponde al caso en el que se tienen estados puros y se cumple que  $\hat{\rho}_1(t) = \hat{\rho}_2(t)$ ; y segundo, que si los estados en cuestión son ortogonales entre si, entonces

$$\iint W_\psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)W_\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)d^3xd^3p = 0, \quad (3.16)$$

lo que implica que la distribución de Wigner no puede ser ni positiva ni nula en todos los puntos del espacio fase [15, 36, 39].

El hecho de que  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  pueda adquirir valores negativos es la razón por la cual no puede considerarse como una auténtica distribución conjunta de probabilidad para coordenadas y momentos [35, 36], como ya se comentó. Además, dado que ninguna función que cumpla la condición de mezcla y sea capaz de describir sistemas cuánticos se libra de poseer regiones negativas en el espacio fase para ciertos estados [35, 36, 40], se acepta que estas dificultades son propias de la formulación [39]. Estas “probabilidades negativas” pueden manejarse, de manera pragmática, siempre que se hallen combinadas con probabilidades positivas tales que al combinarse den una probabilidad ordinaria y físicamente interpretable [42]. Lo anterior sugiere que la presencia de valores negativos en  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  es debida a la exclusión matemática de estados que físicamente solo pueden existir en conjunto [42].

Como ejemplo puede considerarse la distribución de Wigner del  $n$ -ésimo estado propio de un oscilador armónico en una dimensión:

$$W_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-H(x, p)/\mathcal{E}_0} L_n \left( \frac{2H(x, p)}{\mathcal{E}_0} \right), \quad (3.17)$$

donde  $H(x, p)$  denota la función hamiltoniana del oscilador armónico y  $L_n$  el  $n$ -ésimo polinomio de Laguerre [15, 36]. La ecuación (3.17) muestra que la distribución de Wigner del estado base del OA,  $n = 0$ , es positiva en todo el espacio fase, correspondiendo esta a la versión unidimensional de la ecuación (1.49) y a la figura 1.1, de manera que corresponde a una auténtica distribución conjunta de probabilidad. No obstante, para los estados excitados,  $n > 0$ , se obtiene que  $W_n(x, p)$  puede adquirir valores negativos. Las distribuciones de cuasiprobabilidad de los primeros dos estados excitados del oscilador armónico unidimensional se presentan en la figura 3.1.

### 3.2.1. Dinámica de la distribución de Wigner

La ecuación de evolución temporal de la función  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  puede obtenerse a partir de la ecuación que describe la dinámica de la función de onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , es decir, de la ecuación de Schrödinger [35],

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{x})\psi. \quad (3.18)$$

Así, el cambio en el tiempo de la distribución de Wigner puede ser reescrito, utilizando la convención de índices de Einstein, como

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{(\pi \hbar)^3} \int e^{2ir_i p_i / \hbar} \left\{ \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi_+^* \frac{\partial^2 \psi_-}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 \psi_+^*}{\partial x_k^2} \psi_- \right) + \frac{i[V(x_j + r_j) - V(x_j - r_j)]}{\hbar} \psi_+^* \psi_- \right\} d^3 r, \quad (3.19)$$

siendo  $\psi_{\pm}$  la notación reducida de  $\psi(\mathbf{x} \pm \mathbf{r})$ . En el primer término entre paréntesis del lado derecho de la ecuación (3.19) pueden reemplazarse las derivadas con respecto a  $x_k$  por derivadas con respecto a  $r_k$ , tal que sea posible realizar una integración por partes con respecto a  $r_k$ . Adicionalmente, al desarrollar  $V(x_j - r_j)$  y  $V(x_j + r_j)$  en series de Taylor con respecto a  $\mathbf{r}$  se

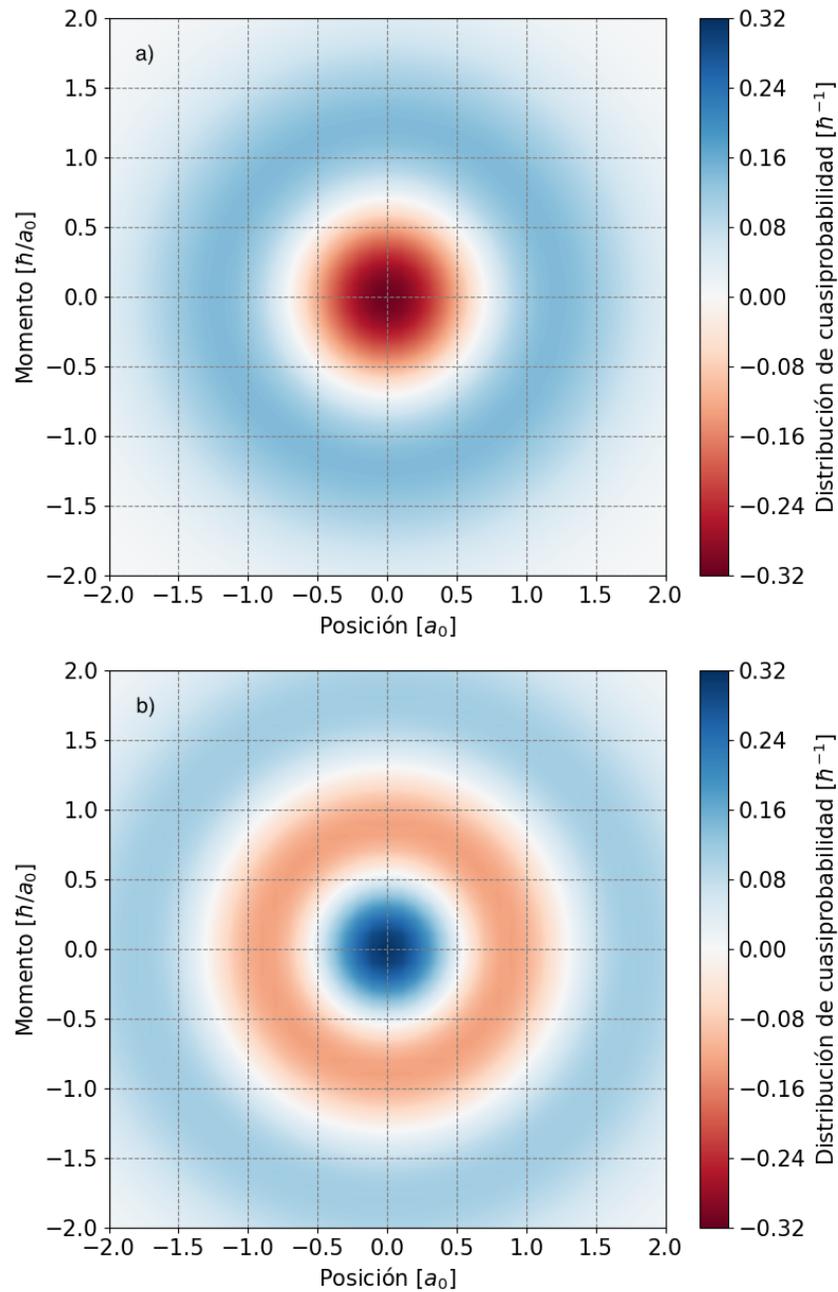


Figura 3.1: Distribución de Wigner de un oscilador armónico cuántico unidimensional con frecuencia  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  en: a) su primer y b) su segundo estado excitado.

llega a que esta ecuación es igual a

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \int e^{2ir_i p_i/\hbar} \left\{ \frac{p_k}{m} \left( \psi_+^* \frac{\partial \psi_-}{\partial r_k} - \frac{\partial \psi_+^*}{\partial r_k} \psi_- \right) \right. \\ & \left. + \psi_+^* \psi_- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( r_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{2n+1} \frac{2iV(x_j)}{\hbar} \right\} d^3 r, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde se ha supuesto que la función de onda tiende a cero conforme alguna de las componentes de  $\mathbf{x}$  tiende a infinito, esto es,  $\psi(x_i \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ .

Utilizando el teorema multinomial, en su versión de tres términos, se obtiene que la suma elevada a la potencia  $2n+1$  en el desarrollo en serie de Taylor del potencial de la ecuación anterior se reescribe de la siguiente manera:

$$\left( r_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{2n+1} = \sum_{\ell_1+\ell_2+\ell_3=2n+1} \frac{(2n+1)!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2} r_3^{\ell_3} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \partial x_3^{\ell_3}}. \quad (3.21)$$

Así, al remplazar en el primer término de la ecuación (3.20) las derivadas con respecto a las coordenadas espaciales, notando que  $\partial \psi_- / \partial x_k = -\partial \psi_- / \partial r_k$ ; y cambiando las coordenadas  $r_k$  por derivadas de la función exponencial del integrando en el segundo término, se obtiene que la ecuación dinámica de distribución de Wigner es [35]

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -\frac{p_i}{m} \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial p_i} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^{2n} \sum_{\ell_1+\ell_2+\ell_3=2n+1} \frac{1}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} \frac{\partial^{2n+1} V}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \partial x_3^{\ell_3}} \frac{\partial^{2n+1} W}{\partial p_1^{\ell_1} \partial p_2^{\ell_2} \partial p_3^{\ell_3}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) es una ecuación diferencial parcial que, dependiendo de la forma específica del potencial  $V(\mathbf{x})$ , puede ser de orden infinito. Esta ecuación muestra una clara semejanza con la ecuación que gobierna la evolución temporal de la distribución fase de probabilidad de los sistemas clásicos [35, 40], denotada en el capítulo anterior como  $F_{\text{clás}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ ; es decir, con la ecuación de Liouville:

$$\frac{\partial F_{\text{clás}}}{\partial t} = -\frac{p_i}{m} \frac{\partial F_{\text{clás}}}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial F_{\text{clás}}}{\partial p_i}. \quad (3.23)$$

Los términos por los que difieren las ecuaciones (3.22) y (3.23) son aquellos proporcionales a  $\hbar^n$ , por lo cual estos suelen interpretarse como correcciones cuánticas a la distribución de probabilidad clásica [35]. No obstante, a pesar de su aparente proporcionalidad a la constante de Planck, debe precisarse que estos términos involucran la  $n$ -ésima derivada momental de la función de Wigner, la cual puede incluir factores de la forma  $\hbar^{-n}$ , tales que en el caso más general son distintos de cero en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  [40].

Una situación particularmente interesante se da con los sistemas cuyos potenciales son de la forma  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + C$ , con  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $C$  constantes, pues se obtiene que las diferencias entre las ecuaciones (3.22) y (3.23) se anulan, correspondiendo esta a los casos de la partícula libre y del OA. Sin embargo, esta coincidencia en las ecuaciones de evolución no implica que las distribuciones fase clásica y cuántica del sistema sean iguales pues, como se ha mostrado y comentado, las funciones de Wigner satisfacen otras condiciones adicionales a la ecuación (3.22).

Concretamente, para el caso del oscilador armónico se llega mediante el método de características a que la solución general de la ecuación (3.22) está dada por

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{x} \cos(\omega_0 t) - (\mathbf{p}/m\omega_0) \sin(\omega_0 t), \mathbf{p} \cos(\omega_0 t) + m\omega_0 \mathbf{x} \sin(\omega_0 t)), \quad (3.24)$$

donde  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  denota la distribución fase de probabilidad en el instante  $t = 0$ . Aunado a esto, se obtiene que las curvas características del sistema, aquellas en las que la solución  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  se mantiene constante, están definidas por la siguiente relación algebraica:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \mathbf{x}^2 = \text{constante}. \quad (3.25)$$

La solución (3.24) implica un desplazamiento rígido, o no dispersivo, de la distribución inicial de probabilidad en el espacio fase [36]. Esto se ve reflejado en el hecho de que la ecuación (3.22) para el caso del oscilador armónico corresponde a una ecuación de Fokker-Planck cuyos coeficientes de difusión son nulos. Así, dicha ecuación diferencial parcial de primer orden únicamente gobierna el arrastre que sufre la distribución. La relación (3.25) describe cuádricas en el espacio fase de seis dimensiones, cuyas secciones planas son elipses, que físicamente representan hipersuperficies fase de energía constante para cada constante dada en dicha relación.

### 3.2.2. El producto de Weyl-Groenewold, el paréntesis de Moyal y la ecuación de Wigner-Moyal

Una forma más general de estudiar la evolución temporal de la función de Wigner es a través del producto de Weyl-Groenewold y de la ecuación de Wigner-Moyal. Como se mencionó, Groenewold mostró que la imagen del conmutador cuántico bajo la transformación de Wigner corresponde a una generalización del paréntesis de Poisson, el paréntesis de Moyal, definida como

$$((A, B)) \equiv \frac{A \star B - B \star A}{i\hbar}, \quad (3.26)$$

donde el signo  $\star$  denota una operación diferencial binaria entre funciones fase conocida como producto de Weyl-Groenewold<sup>5</sup>:

$$A(x, p) \star B(x, p) \equiv A(x, p) e^{i\hbar(\bar{\partial}_x \partial_p - \bar{\partial}_p \partial_x)/2} B(x, p), \quad (3.27)$$

siendo  $\bar{\partial}$  una indicación de que la derivada opera hacia la izquierda [36, 39].

El formalismo matemático de la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase se fundamenta en el producto de Weyl-Groenewold debido a que es un isomorfismo del producto entre operadores en el espacio de Hilbert a través de la correspondencia de Weyl [36],

$$\hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) \hat{B}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \iiint e^{2i(r(\hat{x}-x)+s(\hat{p}-p))/\hbar} (A(x, p) \star B(x, p)) dx dp dr ds, \quad (3.28)$$

capaz de replicar la inconmutabilidad en el espacio fase [33]. Con base en esto, y retomando el hecho de que la función de Wigner corresponde a la función fase que bajo la transformación de Weyl conduce al operador estadístico, se obtiene al aplicar la transformación de Wigner a la ecuación de evolución temporal de dicho operador, también conocida como ecuación de von Neumann [21], que la evolución temporal de la función de Wigner es gobernada por la siguiente ecuación [33, 37]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = ((H, W)), \quad (3.29)$$

conocida como ecuación de Wigner-Moyal.

<sup>5</sup>El producto de Weyl-Groenewold también es denominado en la literatura producto estrella, por el signo que denota la operación, o producto de Moyal [33].

La ecuación (3.29), que es solo una forma compacta de la ecuación (3.22) [39], es necesaria pero insuficiente para especificar de manera única la distribución de Wigner de un sistema físico [33], como se observó en la solución (3.24) para el caso del OA. Por esta razón, las soluciones de dicha ecuación dinámica se construyen, generalmente, a partir del espectro de estados estacionarios del sistema, de forma análoga a como se hace en la formulación convencional de la mecánica cuántica [33, 43]. Las distribuciones de Wigner correspondientes a estos estados, puros e independientes del tiempo, conmutan bajo el paréntesis de Moyal con la función hamiltoniana, como se observa en la ecuación (3.29), y satisfacen la siguiente ecuación de valores propios bajo el producto de Weyl-Groenewold:

$$H(x, p) \star W(x, p) = \mathcal{E} W(x, p), \quad (3.30)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la energía propia de la ecuación  $\hat{H}|\psi\rangle = \mathcal{E}|\psi\rangle$  [43].

Estas condiciones conducen a la caracterización completa de la función de Wigner de cualquier sistema mecánico y permiten construir todas sus propiedades espectrales sin la necesidad de recurrir a funciones de onda o a vectores de estado, es decir, de manera totalmente autónoma a cualquier otra formulación de la mecánica cuántica [33].

Finalmente, para complementar el análisis del oscilador armónico iniciado en la sección 3.2.1, se tiene, de la ecuación (3.30), que las funciones de Wigner de los estados estacionarios de este sistema satisfacen que

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{i\hbar}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \right)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} \left( \mathbf{x} + \frac{i\hbar}{2} \nabla_{\mathbf{p}} \right)^2 - \mathcal{E} \right] W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0, \quad (3.31)$$

donde se usó el hecho de que el producto de Weyl-Groenewold involucra exponenciales de operadores diferenciales, tal que pueden interpretarse como corrimientos en los argumentos de la función hamiltoniana [33]. La ecuación (3.31) puede separarse fácilmente en dos ecuaciones diferenciales más simples [33]: por un lado, su parte imaginaria,

$$m\omega_0^2 \mathbf{x} \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} W) - m^{-1} \mathbf{p} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} W) = 0, \quad (3.32)$$

que implica que la función  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  depende únicamente de  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ ; y por el otro, su parte real,

$$\frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 W + m\omega_0^2 \nabla_{\mathbf{p}}^2 W - \frac{8(H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mathcal{E})}{\hbar^2} W = 0. \quad (3.33)$$

Una solución de la ecuación (3.33) puede obtenerse mediante el método de separación de variables, suponiendo que  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \prod_i w_i(x_i, p_i)$  con el índice  $i = 1, 2, 3$ . De esta manera, para cada pareja de variables  $x_i$  y  $p_i$  se obtiene una ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial p_i^2} - \frac{4(h_i - \varepsilon_i)}{\hbar^2} w_i = 0, \quad (3.34)$$

donde la función  $h_i = p_i^2/2m + m\omega_0^2 x_i^2/2$  y la constante de separación  $\varepsilon_i$  son tales que  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_i h_i$  y  $\mathcal{E} = \sum_i \varepsilon_i$ . Nótese que en este proceso no se está utilizando la convención de índices de Einstein. Retomando el resultado de la ecuación (3.32), se tiene que la ecuación (3.34) se reescribe como

$$h_i \frac{d^2 w_i}{dh_i^2} + \frac{dw_i}{dh_i} - \frac{h_i - \varepsilon_i}{\mathcal{E}_0^2} w_i = 0. \quad (3.35)$$

Si se supone que  $w_i(h_i) = C e^{-h_i/\mathcal{E}_0} u_i(h_i)$  se obtiene, de la ecuación (3.35), que  $u_i(h_i)$  satisface una ecuación de Laguerre. Esto implica que  $u_i(h_i)$  es igual a los polinomios de Laguerre  $L_{n_i}(2h_i/\mathcal{E}_0)$  si  $\varepsilon_i = \hbar\omega_0(n_i + 1/2)$ . Así, se llega a que las funciones propias de la ecuación (3.31) son

$$W_{n_1, n_2, n_3}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = C_{n_1, n_2, n_3} e^{-H(\mathbf{x}, \mathbf{p})/\mathcal{E}_0} \prod_{i=1}^3 L_{n_i} \left( \frac{2h_i}{\mathcal{E}_0} \right), \quad (3.36)$$

y a que sus correspondientes energías propias están dadas por

$$\mathcal{E}_{n_1, n_2, n_3} = \hbar\omega_0^2 \left( n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right). \quad (3.37)$$

La constante de normalización  $C_{n_1, n_2, n_3}$  está determinada por la condición de normalización de las funciones de Wigner, expresada en la ecuación (3.10), siendo esta igual a  $(-1)^{n_1+n_2+n_3} (\pi\hbar)^{-3}$ .

La solución (3.36) es la generalización en tres dimensiones de la función de Wigner de la ecuación (3.17) y coincide para el estado base,  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ , con la distribución de probabilidad conjunta (1.49) y con el límite temporal asintótico de la solución (2.44). Las energías expresadas en la ecuación (3.37) concuerdan con el espectro de energía del oscilador armónico tridimensional de la mecánica cuántica [21]. No obstante, es importante enfatizar que en la formulación en el espacio fase estos valores únicamente corresponden al promedio de la función hamiltoniana para cada estado estacionario y no a una energía propia, en el sentido cuántico de bien definida o con nula dispersión [2], como se mencionó en el capítulo 1.

### 3.3. La electrodinámica estocástica y la mecánica cuántica en el espacio fase

Con base en los resultados obtenidos es posible realizar una comparación detallada entre la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase y la EDE. Primero, como ya se mencionó, la distribución promedio  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  de la electrodinámica estocástica es, por construcción, una distribución de probabilidad auténtica, es decir, si fuese posible resolver la ecuación (2.17) de manera exacta, se obtendría una distribución de probabilidad de Kolmogórov capaz de describir la dinámica del subsistema mecánico en interacción permanente con el CPC. En el mismo sentido, la aproximación markoviana de  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , cuya evolución temporal es gobernada por la ecuación de Fokker-Planck (2.25), representa la distribución de probabilidad conjunta en el espacio fase del subsistema mecánico cuando este ha alcanzado el equilibrio, en promedio, con el campo de radiación de punto cero; pues, por el teorema de Pawula, esta es no negativa. Por el contrario, la distribución de Wigner solo corresponde a una distribución de probabilidad cuando esta representa un estado descrito por una función de onda gaussiana [44], como se observa en la ecuación (3.36) para el estado base del oscilador armónico, siendo en el resto de los casos solo una distribución de cuasiprobabilidad.

Por otro lado, las ecuaciones que rigen la evolución temporal de las distribuciones  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  y  $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , ecuaciones (2.17) y (3.22), son parecidas en el hecho de que ambas son ecuaciones diferenciales parciales de orden infinito, en principio. Sin embargo, es importante destacar que cada uno de los términos de la ecuación (2.17) posee una interpretación física muy concreta, puesto que representan el efecto promedio de las múltiples dispersiones causadas por el CPC [23], como se discutió en el final de la sección 2.1. Este no es el caso para los términos de la ecuación de evolución de Wigner-Moyal, debido a que, si bien se conocen matemáticamente, su origen físico es desconocido.

Otra diferencia relevante entre ambas formulaciones es que la ecuación de Fokker-Planck (2.26) conduce a la solución (2.44), la cual tiende a una distribución estacionaria en el límite temporal asintótico que corresponde a la función de Wigner del estado base del OA, exclusivamente. Por el contrario, la ecuación de Wigner-Moyal del oscilador armónico implica la solución general (3.24), cuyo perfil se construye, generalmente, en términos de una combinación lineal de las funciones propias de la ecuación (3.30), es decir, de las distribuciones de cuasiprobabilidad asociadas a los estados propios del

sistema mecanocuántico. Esto ilustra una preeminencia del estado base del subsistema mecánico en la EDE, cuya explicación radica en que dicha teoría trata al CPC y al OA como elementos inseparables de un mismo sistema físico. Así, el resultado expresado en la ecuación (2.44) implica que el estado base es el único capaz de ser sostenido por el campo de radiación de punto cero, esto es, es el único en el que el efecto aleatorizador del campo de fondo es compensado, en promedio, por la reacción de radiación de la partícula cargada [1, 2, 18, 29].

El resultado anterior implica que los estados excitados del subsistema mecánico no son verdaderos estados estacionarios en el marco teórico de la EDE, resultado en el que coincide con la electrodinámica cuántica y que se comprueba en las observaciones experimentales, pero que discrepa con la mecánica cuántica [1, 21]. Debido a esto y al hecho de que las funciones de Wigner de los estados excitados poseen regiones negativas en el espacio fase, tales que no pueden representar distribuciones de probabilidad auténticas, se concluye que para el caso del OA los estados excitados del subsistema mecánico no representan estados verdaderamente físicos en el sentido de que no pueden existir de manera aislada a otros estados [18, 26, 29].

Independientemente de su carácter formal, los estados excitados poseen una utilidad matemática simplemente innegable pues permiten expresar las distribuciones de probabilidad en el espacio fase como combinaciones lineales de sus respectivas distribuciones de cuasiprobabilidad [26, 29]. Suponiendo, por simplicidad, un sistema con una dimensión espacial, se tiene que estos desarrollos en términos de combinaciones lineales se basan en las funciones de Wigner generalizadas  $W_{k\ell}(x, p)$ , definidas como

$$W_{k\ell}(x, p) \equiv \frac{1}{\pi\hbar} \int \varphi_k^*(x+r)\varphi_\ell(x-r)e^{2irp/\hbar} dr, \quad (3.38)$$

donde  $\varphi_\ell(x)$  es la  $\ell$ -ésima función propia del hamiltoniano del sistema<sup>6</sup>; ya que forman un conjunto completo y ortogonal en el espacio fase [39]. Siendo así, una distribución fase arbitraria puede expresarse como [29]

$$F(x, p, t) = \sum_{k,\ell} C_{k\ell}(t)W_{k\ell}(x, p), \quad (3.39)$$

---

<sup>6</sup>Las funciones  $W_{k\ell}(x, p)$  son generalizaciones de las funciones de Wigner asociadas a los estados propios del sistema mecanocuántico, correspondiendo estas últimas al caso particular en el que ambos índices coinciden.

donde

$$C_{k\ell}(t) = \iint W_{k\ell}^*(x, p) F(x, p, t) dx dp. \quad (3.40)$$

Utilizando esta construcción, se tiene que la distribución de probabilidad del oscilador armónico forzado y resonante, construida en el capítulo 2, puede expresarse como una combinación lineal de las funciones [29, 33, 36]:

$$W_{k\ell}(x, p) = \frac{(-1)^{\max(k, \ell)}}{\pi \hbar} \frac{\sqrt{k! \ell!}}{(\max(k, \ell))!} e^{i(k-\ell) \arctan(p/m\omega_0 x) - H(x, p)/\mathcal{E}_0} \times \left( \frac{2H(x, p)}{\mathcal{E}_0} \right)^{|k-\ell|/2} L_{\max(k, \ell)}^{|k-\ell|} \left( \frac{2H(x, p)}{\mathcal{E}_0} \right), \quad (3.41)$$

cuyos correspondientes coeficientes  $C_{k\ell}(t)$  son [29]:

$$C_{k\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{k! \ell!}} \left( \frac{e^2 E_0^2}{2m \hbar \omega_0 \gamma^2} \right)^{(k+\ell)/2} e^{i(k-\ell)\omega_0 t - e^2 E_0^2 / 2m \hbar \omega_0 \gamma^2}. \quad (3.42)$$

Este desarrollo ejemplifica cómo una combinación lineal de elementos sin una interpretación clara conduce a una distribución de probabilidad auténtica y físicamente interpretable. Más aún, es importante destacar que, en este caso en particular, es la presencia conjunta del campo externo y el CPC la que permite la estabilidad conjunta de los estados.

Adicionalmente, al retomar que la correspondencia de Weyl permite traducir la información contenida en la función de Wigner de un sistema en términos de su correspondiente operador estadístico [2], de manera que para el caso específico del espacio de configuración se tiene que la matriz de densidad<sup>7</sup> está dada en términos de la función de Wigner por [15, 26]

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \equiv \langle \mathbf{x} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{x}' \rangle = \int W \left( \frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{2}, \mathbf{p}, t \right) e^{-i(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} / \hbar} d^3 p; \quad (3.43)$$

se obtiene que la matriz de densidad asociada a la distribución de probabilidad del oscilador armónico de la electrodinámica estocástica en el espacio

---

<sup>7</sup>Los términos operador estadístico y matriz de densidad son usados con frecuencia de manera indistinta. Sin embargo, en este trabajo se entenderá por matriz de densidad la representación del operador estadístico en el espacio de configuración [40].

fase y en la aproximación markoviana, ecuación (2.54), es

$$\begin{aligned} \rho(x, x', t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi S_{11}(t)}} \exp\left(-\frac{\hbar^2(x' + x - 2x_d(t))^2 + 4\det \mathbb{S}(t)(x' - x)^2}{8\hbar^2 S_{11}(t)}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{i(x' - x)(2S_{11}(t)p_d(t) + S_{12}(t)(x' + x - 2x_d(t)))}{2\hbar S_{11}(t)}\right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Esta función presenta un comportamiento oscilatorio transitorio tras el cual converge a la matriz de densidad del estado base del OA cuántico, como se observa en la figura 3.2. Nótese que los elementos de la forma  $\rho(x, x' = x, t)$  son siempre números reales, como es de esperar [21].

Finalmente, la formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase y la electrodinámica estocástica coinciden en que la energía del subsistema mecánico consiste en una variable continua y aleatoria descrita por una distribución de probabilidad, que para el caso del estado base del oscilador armónico tridimensional está dada por la ecuación (1.50). En este sentido, los resultados obtenidos muestran que las distribuciones de energía asociadas a los estados propios del sistema mecánico poseen valores promedio que coinciden con las energías propias de la formulación de la mecánica cuántica en términos de operadores en el espacio de Hilbert, pero que, a diferencia de estas últimas, poseen varianzas distintas de cero.

La razón detrás de esta discordancia radica en que en la formulación en el espacio de Hilbert se establece que  $\hat{F}^2 = (\hat{F})^2$  para cualquier operador, lo que implica que  $\langle \hat{H}^2 \rangle = \langle \hat{H} \rangle^2$  para los estados propios de la energía; mientras que en la formulación en el espacio fase, los operadores se construyen a partir de la correspondencia de Weyl, lo que conduce a que el operador mecanocuántico asociado al cuadrado de la energía del sistema no coincida con el cuadrado del operador hamiltoniano y, por ende, a que la varianza de la energía no sea nula [2]. Así, para el caso del OA tridimensional se halla que

$$\hat{H}_{\text{Weyl}}^2 = \hat{H}_{\text{Hilbert}}^2 + 3\mathcal{E}_0^2, \quad (3.45)$$

lo cual reproduce el hecho de que la varianza de la energía del estado base posea un valor de  $3\mathcal{E}_0^2$  en la formulación en el espacio fase. Este argumento concilia matemáticamente ambas descripciones de la mecánica cuántica pero no discierne sobre cuál de estas es la adecuada para representar correctamente la naturaleza. Esta interrogante sigue sin ser resuelta de manera definitiva, lo que hace que la elección de un formalismo sobre el otro sea, hasta ahora, una mera cuestión de preferencias [2].

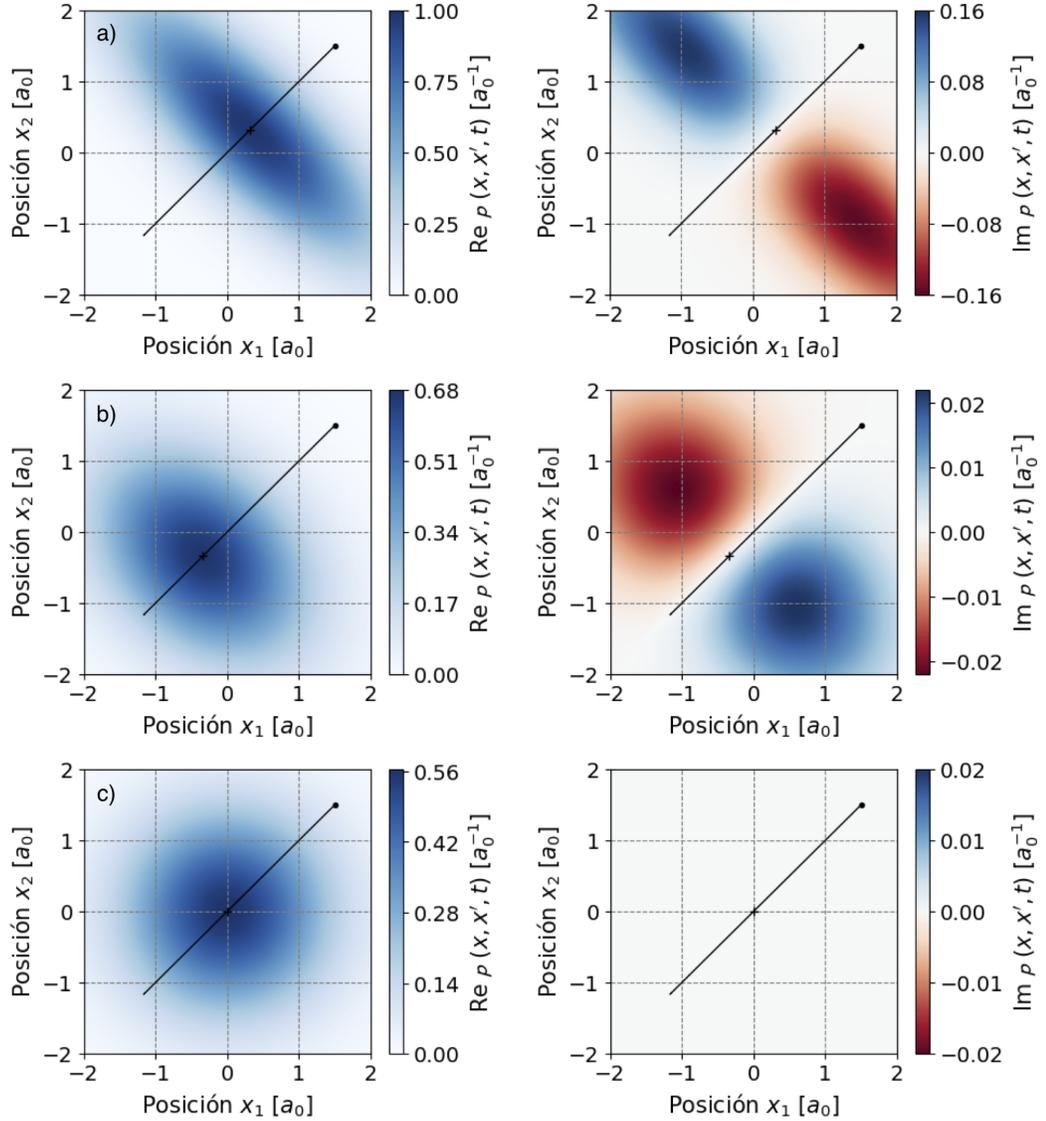


Figura 3.2: Partes real e imaginaria de la matriz de densidad de un electrón que oscila con frecuencia  $\omega_0 = 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  en presencia del CPC, en la aproximación markoviana para: a)  $t = 5\omega_0^{-1}$ , b)  $t = 15\omega_0^{-1}$  y c)  $t = 50\omega_0^{-1}$ . La cruz representa la posición del centro de la función y la curva negra la trayectoria que sigue este desde su posición inicial. Para evidenciar el cambio en la función se fijó  $\alpha = 1/2$ ; estando el resto de valores numéricos en unidades atómicas.

# Conclusión

A lo largo del presente estudio se aplicaron los principales resultados de la electrodinámica estocástica en el espacio fase al oscilador armónico con el fin de analizar las implicaciones y los alcances de esta teoría, pues este sistema mecánico permite estudiar la transición de un objeto clásico a uno cuántico de forma explícita. A continuación se retomarán y discutirán brevemente los resultados más relevantes obtenidos.

Primeramente, el análisis estadístico realizado al campo de radiación de punto cero en el capítulo 1 evidenció que el producto de las varianzas de las variables canónicas de posición y momento de cada modo de oscilación de dicho campo se halla acotado en el límite atómico por la cantidad  $\hbar^2/4$ , ecuación (1.19). Este resultado sugiere que el campo electromagnético del vacío es el origen físico, último e irreducible, de las llamadas fluctuaciones cuánticas. Más aún, este análisis y el desarrollo en series de Fourier de la solución estacionaria de la ecuación de Braffort-Marshall expusieron cómo un ensamble estadístico de OA clásicos se transforma en uno que replica las propiedades del oscilador armónico cuántico, descrito por la distribución de Wigner (1.50), como resultado de su interacción con el CPC.

En el capítulo 2 se utilizó el formalismo de la ecuación generalizada de Fokker-Planck en la aproximación markoviana para estudiar la dinámica del oscilador armónico en el régimen que precede al estado estacionario del capítulo 1. Siendo así, se obtuvo que la ecuación lineal de Fokker-Planck (2.26) gobierna la evolución temporal de la distribución fase de probabilidad del subsistema mecánico en dicho régimen; que su solución, expresada en la ecuación (2.44), muestra explícitamente el proceso de intercambio de energía entre el CPC y los OA, a través de las dispersiones causadas por el campo y la reacción de radiación; y el que el ensamble de osciladores armónicos arriba a un estado estacionario caracterizado por una energía media de  $3\mathcal{E}_0$ .

Este mismo procedimiento fue también aplicado a un OA forzado por una onda electromagnética, cuya componente eléctrica oscila sinusoidalmente en el tiempo y puede interpretarse como una excitación del CPC. Así, se halló que dicho sistema únicamente alcanza el estado de equilibrio cuando el oscilador armónico y la onda referida se encuentran en resonancia. En tal caso, el OA tiende a un estado que coincide con la representación fase de los estados coherentes del oscilador armónico cuántico, ecuación (2.74). Este análisis permitió observar de forma explícita los cambios que sufre el estado de equilibrio del OA como consecuencia de modificar el campo de fondo.

El capítulo 3 consistió en un estudio breve sobre la formulación en el espacio fase de la mecánica cuántica, el cual permitió la comparación directa de los resultados obtenidos desde la EDE con sus homólogos cuánticos. Así, este trabajo permite concluir que las descripciones del oscilador armónico y del oscilador armónico forzado obtenidas desde la electrodinámica estocástica coinciden inequívocamente con las descripciones cuánticas en el espacio fase del estado base y de los estados coherentes del OA, respectivamente, cuando se toma la aproximación markoviana y el límite temporal asintótico de la teoría. De este modo, el comportamiento cuántico de estos sistemas mecánicos puede entenderse como una consecuencia de la interacción entre la partícula cargada y el campo electromagnético del vacío.

Recientemente, se ha mostrado que los sistemas dinámicos que alcanzan estados estacionarios con el CPC, como los descritos en este trabajo y, en general, aquellos sujetos a fuerzas no lineales, responden de manera resonante a un conjunto específico de modos de oscilación de dicho campo. De esta forma, al aplicar la descripción hamiltoniana adecuada se obtiene el conmutador de Heisenberg,  $[\hat{x}, \hat{p}]$ , como una expresión bilinear que involucra las funciones de respuesta del sistema al campo y se identifican las amplitudes de respuesta de estas últimas como los elementos de matriz de los operadores de posición y momento [45]. Esto es relevante debido a que confirma que no es posible construir una descripción estadística formal de la mecánica cuántica en el espacio fase usual ya que el formalismo de los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  está asociado a la respuesta del subsistema mecánico a la acción del CPC y no a su trayectoria, por lo que no tiene asociada una auténtica distribución fase. Esto explica porque las funciones de Wigner de los estados excitados del oscilador armónico no corresponden a verdaderas distribuciones de probabilidad, como se observó en el capítulo 3.

# Apéndice A

## La ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz

La ecuación de Abraham-Lorentz de una partícula puntual con masa  $\mu$  y carga  $e$  que realiza un movimiento no relativista y está sujeta a una fuerza externa  $\mathbf{F}$  se expresa de forma explícita como

$$\mu\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mu\tau\ddot{\mathbf{x}} - \delta m\ddot{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.1})$$

con los parámetros  $\tau$  y  $\delta m$  definidos como:

$$\tau \equiv \frac{2e^2}{3\mu c^3}; \quad \delta m = \frac{4e^2}{3\pi c^3} \int_0^\infty d\omega, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\omega$  representa la frecuencia de los modos de oscilación de la radiación emitida por la partícula [5].

La ecuación (A.1) muestra que la partícula cargada se autoinduce, a través de su propia radiación, dos efectos: una corrección electromagnética  $\delta m$  a su masa y una fuerza de reacción proporcional al cambio temporal de su aceleración, conocida como reacción de radiación, que actúa como un término de resistencia al movimiento [46].

Es posible expresar la ecuación (A.1) de manera alternativa como

$$m \left( \ddot{\mathbf{x}} - \tau \frac{d\ddot{\mathbf{x}}}{dt} \right) = \mathbf{F}, \quad (\text{A.3})$$

en donde se ha redefinido  $m \equiv \mu + \delta m$  como la masa experimentalmente observable de la partícula cargada, consistente en la masa desnuda  $\mu$  de la carga más la correspondiente corrección electromagnética [2, 6, 47].

La ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz, tal como se ha expresado en la ecuación (A.3), está en conflicto con los principios básicos de la física clásica al predecir correcciones infinitas a la masa del sistema, ecuación (A.2), y al implicar soluciones cuyas aceleraciones divergen con el tiempo, dado que en ambos casos se requiere que el sistema físico tenga almacenada inicialmente una cantidad infinita de energía.

El hecho de que la corrección electromagnética a la masa sea una cantidad infinita puede entenderse a partir del siguiente argumento: considérese una partícula de radio  $R$  y carga  $e$  uniformemente distribuida en su superficie, tal que su energía electrostática es igual a  $E_{\text{eléc}} = e^2/2R$ . De la relación de equivalencia entre masa y energía,  $E = mc^2$ , se tiene que la masa de origen electromagnético del sistema anterior es igual a

$$m_{\text{eléc}} = \frac{e^2}{2Rc^2}. \quad (\text{A.4})$$

Al suponer que la masa  $m_{\text{eléc}}$  es igual a la corrección  $\delta m$ , ecuación (A.2), se obtiene que el radio  $R$  de la configuración adoptada necesario para reproducir dicha corrección a la masa está dado por

$$R = \frac{3\pi c}{8} \left( \int_0^\infty d\omega \right)^{-1} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{3\pi c}{8\omega}. \quad (\text{A.5})$$

De esta forma, la ecuación (A.5) muestra explícitamente que la corrección electromagnética infinita a la masa es resultado directo de haber supuesto que la partícula cargada es puntual [48].

El argumento anterior debe analizarse cuidadosamente para el caso de un electrón, ya que para tal partícula este resultado puede ser adjudicado a dos posibilidades: por un lado, a que actualmente no existe una teoría lo suficientemente refinada para hallar el valor físico y finito de  $\delta m$ ; y por el otro, a que el electrón posee una estructura efectiva originada por las rápidas fluctuaciones existentes en su posición<sup>1</sup> [2, 6]. Sin embargo, debido a la no observabilidad fundamental de la masa desnuda puede suponerse, como se hizo en la ecuación (A.3), que la masa  $m$  posee el valor experimental de la masa de la partícula [47, 48], eliminándose así el problema de masas infinitas. El proceso anterior es una de las primeras suposiciones del programa de renormalización actual de la electrodinámica cuántica moderna [2].

---

<sup>1</sup>En la electrodinámica cuántica se considera al electrón como una partícula puntual, tal que este es el argumento usualmente adoptado [6].

El otro problema asociado a la ecuación de Abraham-Lorentz está relacionado con las soluciones a las que esta conduce. Para ilustrar esto supóngase que la fuerza en la ecuación (A.3) es función únicamente del tiempo<sup>2</sup> y que  $\mathbf{F}(t=0) = \mathbf{0}$ , de modo que su solución general está dada por

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(0)e^{t/\tau} - \frac{1}{m\tau} \int_0^t \mathbf{F}(t')e^{-(t'-t)/\tau} dt'. \quad (\text{A.6})$$

La primera particularidad que se observa en la solución anterior es que depende del valor inicial de la aceleración de la partícula  $\ddot{\mathbf{x}}(0)$  ya que la ecuación (A.3) es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, a diferencia del resto de ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica. Por otra parte, la ecuación (A.6) predice que la partícula es acelerada antes de que la fuerza comience a actuar<sup>3</sup> y continua haciéndolo exponencialmente incluso si la fuerza externa es apagada [48, 49]. Con el paso del tiempo, esto conduce a valores finales infinitos de la velocidad, lo que implica una cantidad absurda de energía almacenada inicialmente por la partícula. A estas soluciones se les conocen como soluciones fugaces de la ecuación de Abraham-Lorentz<sup>4</sup>.

Si se insiste en que el movimiento de la partícula esté únicamente determinado por la condiciones iniciales usuales  $\mathbf{x}(0)$  y  $\dot{\mathbf{x}}(0)$ , entonces, debe imponerse una condición adicional sobre la aceleración inicial, lo que permite eliminar algunos de los defectos de la solución (A.6) [49]. Por ejemplo, si se elige que  $\ddot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$  se tiene que el comportamiento acausal de la solución se elimina pero esta mantiene su carácter fugaz. Alternativamente, puede elegirse que [2]

$$\ddot{\mathbf{x}}(0) = \frac{1}{m\tau} \int_0^\infty \mathbf{F}(t')e^{-t'/\tau} dt', \quad (\text{A.7})$$

de manera que la solución (A.6) se transforma en

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{m\tau} \int_t^\infty \mathbf{F}(t')e^{-(t'-t)/\tau} dt' = \frac{1}{m} \int_0^\infty \mathbf{F}(t + \tau s)e^{-s} ds. \quad (\text{A.8})$$

A pesar de la artificialidad de la condición inicial expresada en la ecuación (A.7), esta asegura que la aceleración final de la partícula sea nula, tal que el

<sup>2</sup>Si la fuerza externa  $\mathbf{F}$  es función de la posición en lugar del tiempo, se tiene que la solución (A.6) se complica, pero mantiene sus características fundamentales [3].

<sup>3</sup>Este fenómeno se conoce como preaceleración o aceleración acausal y, como el segundo nombre lo indica, consiste en una forma de comportamiento acausal [2, 49].

<sup>4</sup>Las soluciones fugaces de la ecuación de Abraham-Lorentz son conocidas en la literatura en lengua inglesa como *runaway solutions* [49].

comportamiento fugaz ha sido suprimido. Sin embargo, la solución anterior implica que  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  depende del valor de la fuerza para tiempos futuros en todo tiempo, de modo que el comportamiento acausal de la partícula persiste, como se ejemplifica en la figura A.1.

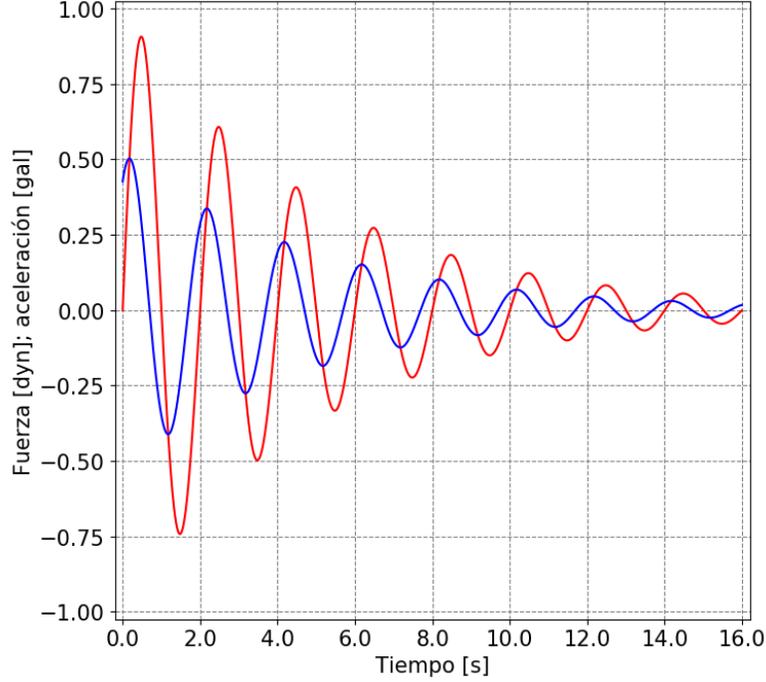


Figura A.1: Gráficas de la fuerza  $F(t) = F_0 e^{-bt} \sin(\omega t)$ , curva roja, y de la correspondiente aceleración obtenida a partir de la solución (A.8), curva azul. La acausalidad de la solución se ha magnificado al elegir  $\tau = 0.5$  s. El resto de parámetros se eligieron como:  $m = 1$  g;  $F_0 = 1$  dyn;  $b = 0.2$  s $^{-1}$  y  $\omega = \pi$  s $^{-1}$ .

A pesar de la discusión anterior, se tiene que el valor numérico de  $\tau$  es demasiado pequeño para tener variaciones realistas de la fuerza aplicada [6]. Así, desde una perspectiva pragmática puede realizarse un desarrollo de Taylor de  $\mathbf{F}(t + \tau s)$  en la ecuación (A.8) obteniéndose que

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n} \int_0^{\infty} s^n e^{-s} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n}. \quad (\text{A.9})$$

La ecuación (A.9) muestra que para orden cero en  $\tau$  la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz se reduce a la segunda ley de Newton, al haber sido despreciada totalmente la reacción radiativa. Por otro lado, al aproximar a primer orden en  $\tau$  se obtiene que el término de reacción radiativa puede expresarse proporcionalmente a la primera derivada temporal de la fuerza externa aplicada, *i. e.*,

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{F}(t) + \tau \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}. \quad (\text{A.10})$$

Numéricamente,  $\tau$  se interpreta como el tiempo que le toma a la luz recorrer la distancia

$$c\tau = \frac{2e^2}{3mc^2} = \frac{2R_{\text{clás}}}{3}, \quad (\text{A.11})$$

donde  $R_{\text{clás}}$  es el radio clásico de la partícula en cuestión. Así,  $\tau$  representa el tiempo que le toma a la luz propagarse a través de una partícula elemental [3], de tal modo que no es de esperarse que la aceleración acausal de la ecuación (A.8) conduzca a consecuencias o fenómenos observables [6].

Una forma de garantizar comportamientos causales de la partícula cargada y una corrección electromagnética a su masa finita es mediante la introducción de una cota superior o corte en las frecuencias en la ecuación (A.2). En 1977, E. J. Moniz y D. H. Sharp dedujeron y estudiaron una ecuación del tipo Abraham-Lorentz para una carga clásica extendida, hallando que esta predice comportamientos causales y correcciones electromagnéticas finitas a la masa [49]. Lo anterior, junto con la expresión (A.5), sugiere que un corte efectivo en las frecuencias es introducido por la estructura de la partícula cargada. Esto puede entenderse cualitativamente al considerar que una carga extendida realiza un promedio del campo de radiación a lo largo de su extensión, tal que elimina el efecto de las componentes de longitudes de onda iguales o menores que el radio de su estructura [2]. De la ecuación (A.5) puede observarse, al introducir una frecuencia de corte  $\omega_c$ , que en general el radio de la estructura es inversamente proporcional a la frecuencia máxima del campo de radiación,

$$\omega_c \propto \frac{c}{R}, \quad (\text{A.12})$$

donde el factor de proporcionalidad es característico de cada distribución particular de carga en la partícula.

La introducción de un corte en las frecuencias puede entenderse como una consecuencia de la falta de interacciones entre las componentes del campo de radiación de altas frecuencias y la partícula, de tal forma que las primeras puedan ser despreciadas [50]. Dichas frecuencias corresponden a intervalos temporales de menor duración que  $R/c$ , tal que si  $R > c\tau = R_{\text{clás}}$ ; es decir, si la partícula se extiende sobre un radio mayor que su radio clásico, entonces, todos los efectos no causales asociados a la ecuación de Abraham-Lorentz desaparecen [2]. En este sentido, la introducción de una frecuencia de corte, o equivalentemente de una estructura a la partícula, restablece la causalidad en el desarrollo. La cota superior  $\omega_c$  puede tener su origen en una combinación de muchos factores, siendo solo uno de ellos la estructura; otros pueden ser causados por los efectos dinámicos de la partícula [51]. Así, el corte en las frecuencias es introducido no porque sea práctico o posible, sino porque es necesario para recuperar la consistencia de la teoría [2].

Una frecuencia de corte comúnmente utilizada en la electrodinámica estocástica es la frecuencia de Compton [2],  $\omega_{\text{Compton}} = mc^2/\hbar$ . Para esta frecuencia característica se obtiene una corrección electromagnética a la masa finita dada por

$$\delta m = \frac{4me^2}{3\pi\hbar c} = \frac{4}{3\pi}\alpha m, \quad (\text{A.13})$$

siendo  $\alpha = e^2/\hbar c$  la constante de estructura fina. Así, para el caso específico de un electrón se obtiene que la razón entre la corrección a la masa correspondiente y su masa es  $\delta m_e/m_e \approx 3.1 \times 10^{-3}$ , la cual resulta una corrección a la masa razonable. En este sentido, puede afirmarse que la frecuencia de Compton resulta ser una cota superior natural para la presente descripción no relativista.

Es importante mencionar que la función hamiltoniana presentada en la ecuación (1.1) representa una teoría causal, de manera que cualquier descripción exacta basada en esta debe preservar dicha causalidad [2]. Así, independientemente del mecanismo utilizado para tratar de explicar las anomalías existentes en los comportamientos predichos por la ecuación de Abraham-Lorentz, se debe tener siempre presente que estas son producidas por las aproximaciones hechas a lo largo del proceso de deducción de esta ecuación y que no constituyen parte integral de la teoría [51].

# Apéndice B

## Deducción de la ecuación (1.5)

Ya que se está considerando el movimiento oscilatorio de una partícula cargada, concretamente de un electrón, en su límite no relativista se tiene que su energía cumple con la relación  $\hbar\omega_0 \ll mc^2$  [8], lo que implica que

$$\omega_0 \ll \frac{mc^2}{\hbar} = \omega_{\text{Compton}} \approx 7.8 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}. \quad (\text{B.1})$$

Una estimación de la magnitud de  $\omega_0$  puede obtenerse al considerar la frecuencia resultante de expresar la energía del estado base de un átomo de hidrógeno como la energía del estado base de un oscilador armónico, pues el primero representa un problema no relativista típico. Así, se tiene que

$$\omega_0 \sim \frac{me^4}{\hbar^3} = \alpha^2 \omega_{\text{Compton}} \approx 4.2 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{B.2})$$

siendo  $\alpha = e^2/\hbar c$  la constante de estructura fina. Lo anterior implica que la frecuencia  $\omega_0$  se halla en la región ultravioleta del espectro electromagnético.

Finalmente, de la ecuación (A.2) se obtiene que

$$\omega_0 \tau \sim \frac{2\alpha^3}{3} \ll 1, \quad (\text{B.3})$$

de donde se llega inmediatamente a que

$$\gamma \equiv \omega_0^2 \tau \ll \omega_0. \quad (\text{B.4})$$



# Apéndice C

## Propiedades del campo electromagnético del vacío

### C.1. Densidad espectral

Una de las propiedades más importantes del campo de punto cero es su densidad espectral, ya que es la característica que lo diferencia de un mero proceso browniano. Este espectro puede obtenerse desde la teoría cuántica moderna partiendo del hecho de que la energía mínima de un oscilador armónico es  $\hbar\omega/2$ . No obstante, debido a su importancia teórica, en el contexto de la electrodinámica estocástica es medular deducir este resultado desde argumentos físicos más fundamentales y sin hipótesis de cuantización [1, 2].

Siendo así, una forma ilustrativa de obtener el espectro del CPC es mediante la aplicación de la ley de desplazamiento de Wien a una cavidad radiante en el límite atómico<sup>1</sup> [8]. Esta ley, deducida por W. Wien en 1893 desde los fundamentos de la electrodinámica clásica y la termodinámica<sup>2</sup>,

---

<sup>1</sup>La otra forma canónica de obtener la densidad espectral del campo de radiación de punto cero desde principios físicos fundamentales consiste en demostrar que  $\rho(\omega) \sim \omega^3$  es el único espectro consistente con la relatividad especial al ser invariante de Lorentz [9, 10]. Esta demostración puede verse en la referencia [2].

<sup>2</sup>Wien supuso que dentro de una cavidad cilíndrica, reflectora, perfecta y provista de un pistón móvil se hallaba encerrada radiación, tal que al realizarse una expansión adiabática de la misma se obtenía un corrimiento Doppler por parte de las ondas electromagnéticas que eran reflejadas por el pistón, lo que permitía el intercambio de energía radiante entre las distintas frecuencias de la radiación [52].

establece que la energía media de un oscilador armónico de frecuencia  $\omega$ , que representa un modo de oscilación del campo de radiación [2, 6], en equilibrio termodinámico con un baño térmico a temperatura  $T$  es función únicamente de dicha temperatura absoluta y de su frecuencia [1],

$$\mathcal{E}(T, \omega) = \omega f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (\text{C.1})$$

siendo  $f$  una función arbitraria por determinar<sup>3</sup>.

Las deducciones usuales de la ley de Wien no garantizan su aplicabilidad en el cero absoluto [2]. Sin embargo, mediante el uso de argumentos de continuidad que involucran la condicionante de que el calor específico de la radiación de cierta frecuencia se mantenga finito para toda temperatura, puede suponerse que la ley de Wien es aplicable en el límite de temperatura cero [53]. De manera alternativa, mediante la aplicación de la segunda ley de la termodinámica al movimiento cuasiestático de los dipolos oscilantes de las paredes de la cavidad que encierra la radiación es posible deducir una versión generalizada de la ley de Wien que garantice su aplicabilidad en el cero absoluto [54]. Así, se tiene que la ley de Wien puede expresarse en el límite atómico como

$$\mathcal{E}_0(\omega) \equiv \mathcal{E}(0, \omega) = \omega f(\infty), \quad (\text{C.2})$$

donde  $f(\infty)$  debe tener un valor finito.

La elección del valor de la constante anterior es de máximo interés pues si se elige que  $f(\infty) = 0$  se recupera el resultado clásico de nulo movimiento en el cero absoluto [9]. No obstante, si se supone que en el límite del cero absoluto la función de la ley de Wien es constante pero no nula,  $f(\infty) = \mathcal{A}$ , entonces, se tiene que en el límite atómico aún existen movimientos y con ellos una energía de punto cero dada por

$$\mathcal{E}_0(\omega) = \mathcal{A}\omega = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (\text{C.3})$$

De esta forma, se obtiene que la energía media de un modo de oscilación del campo es proporcional a su frecuencia<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>La incapacidad de la física del siglo XIX para hallar de forma teórica la función universal  $f$  que se ajustara de manera correcta a los resultados experimentales marcó el fracaso definitivo de la teoría clásica en el problema de la radiación de cuerpo negro.

<sup>4</sup> $\mathcal{A} \neq 0$  implica una violación del principio de equipartición de la energía por parte del oscilador ya que su energía media en equilibrio se vuelve función de su frecuencia. Así, la física que surge de este hecho necesariamente trasciende la física clásica [1].

El valor de la constante  $\mathcal{A}$  debe ser universal ya que determina el espectro de equilibrio en el cero absoluto [8], el cual es de carácter universal de acuerdo con la ley de Kirchhoff [1]. En la actualidad se sabe que el valor de dicha constante es  $\hbar/2$ . Sin embargo, es importante notar que por la forma en la que han sido deducidos los resultados anteriores, la presencia de esta constante no implica ninguna connotación cuántica [1].

Para establecer contacto entre la energía media de un modo de oscilación del campo de radiación  $\mathcal{E}(T, \omega)$  y su densidad espectral  $\rho(T, \omega)$  debe notarse que la cantidad  $\rho(T, \omega)d\omega$  corresponde a la energía electromagnética por unidad de volumen de un ancho de banda  $d\omega$  que contiene a  $\omega$ ; de forma que se satisface que

$$\rho(T, \omega) = N(\omega)\mathcal{E}(T, \omega), \quad (\text{C.4})$$

donde  $N(\omega)$  denota la densidad de estados contenidos en la cavidad, tal que  $N(\omega)d\omega$  es el número de modos de oscilación de frecuencia  $\omega$  por unidad de volumen contenidos en un ancho de banda  $d\omega$ . Notando que la cantidad  $N(\omega)$  no depende de la temperatura del sistema y que puede ser determinada a partir de consideraciones geométricas [21], tal que esta es igual a

$$N(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}, \quad (\text{C.5})$$

se llega a que la ecuación (C.4) se reescribe como

$$\rho(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \mathcal{E}(T, \omega). \quad (\text{C.6})$$

Es importante destacar que, a pesar de que las ecuaciones (C.1) y (C.6) fueron originalmente deducidas para los osciladores materiales de la cavidad que contenía la radiación, el argumento de Nernst sobre la condición de equilibrio entre la materia y los modos del campo implica que el desarrollo hecho y, en particular, la ecuación (C.6) son válidos para ambos subsistemas [2]. Siendo así, de la ecuación (C.3) se obtiene finalmente que la densidad espectral del campo de radiación de punto cero es igual a

$$\rho_0(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \mathcal{E}_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}. \quad (\text{C.7})$$

Este resultado se considera la puerta de entrada de la constante de Planck a la electrodinámica estocástica como la medida de la intensidad de las fluctuaciones del campo de punto cero. Así, toda presencia de  $\hbar$  debe considerarse como evidencia de la acción del CPC [2].

## C.2. Contenido energético

El contenido energético del CPC es un resultado interesante de analizar pues al integrar su densidad espectral sobre todas las frecuencias se obtiene que su densidad de energía es divergente:

$$u_0 = \int_0^\infty \rho_0(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \rightarrow \infty. \quad (\text{C.8})$$

Este resultado está en conflicto con la ley de Stefan-Boltzmann<sup>5</sup>, la cual establece que la energía contenida por la radiación es finita para una temperatura finita dada. Sin embargo, a diferencia de la catástrofe ultravioleta del modelo de Rayleigh-Jeans, la divergencia de la ecuación (C.8) es un problema desconocido para la física clásica [2].

La divergencia planteada en la ecuación (C.8) hace necesaria la introducción de una cota superior en el espectro de frecuencias del campo de punto cero. Para justificar este corte, la electrodinámica estocástica recurre a dos argumentos<sup>6</sup>. El primero de ellos es la falta de evidencia de que las reglas de la electrodinámica puedan ser aplicables a frecuencias arbitrariamente altas [2], como se mencionó en el apéndice A. El otro es que el espectro expresado en la ecuación (C.7) ha sido deducido a partir del requerimiento de que sea un invariante de Lorentz, el cual es solamente una aproximación de un requerimiento más fundamental: la covarianza general. Así, es razonable suponer que un espectro que cumpla con todas las reglas de la relatividad general debe ser integrable, y que el espectro  $\rho_0(\omega)$  es únicamente una aproximación local a bajas frecuencias de dicho espectro [2]. Es importante remarcar que el problema de la densidad energética divergente del CPC es irrelevante en una descripción no relativista como la presente ya que, como se discutió en el apéndice A, un corte en las frecuencias tiene que ser introducido para recobrar la consistencia interna de la teoría.

La ecuación (C.8) es frecuentemente usada como objeción contra la existencia de un campo de punto cero real debido a que un campo con dicha

---

<sup>5</sup>La ley de Stefan-Boltzmann, obtenida empíricamente por J. Stefan en 1874 y deducida desde la termodinámica por L. Boltzmann en 1884, propone que la densidad de energía total radiada por un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura [2],  $u(T) = aT^4$ . La constante de proporcionalidad  $a$  es igual a  $4\sigma/c$ , siendo  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann.

<sup>6</sup>Estos argumentos son también los utilizados por la electrodinámica cuántica para asignarle un valor finito a la densidad energética del CPC [50].

cantidad de energía almacenada implicaría efectos electromagnéticos y gravitacionales enormes que no se podrían pasar por alto [2, 50]. Una estimación de la energía contenida por el CPC puede obtenerse a partir de la densidad de energía asociada a una banda de frecuencias específica,

$$u_0[\omega_1, \omega_2] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho_0(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{8\pi^2 c^3} (\omega_2^4 - \omega_1^4). \quad (\text{C.9})$$

Para la región visible del espectro electromagnético, longitudes de onda entre 400 y 700 nm, se tiene que la ecuación anterior implica una densidad energética de aproximadamente 200 erg/cm<sup>3</sup>. Por otro lado, para una cota superior razonable, como la frecuencia de Compton, se obtiene que la densidad de masa equivalente del campo electromagnético del vacío es igual  $2 \times 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>, o equivalentemente a  $10^{42}$  electrones/cm<sup>3</sup>. Debido a estos resultados, la imagen prevaleciente del CPC en la electrodinámica cuántica es la de un campo meramente virtual que produce efectos observables [6, 50], lo cual equivale a redefinir o renormalizar su energía como cero. No obstante, la energía no puede ser definida arbitrariamente como cero en un tratamiento totalmente relativista de la teoría [50], razón por la cual el contenido energético del CPC representa un problema abierto de la física contemporánea<sup>7</sup> [1].

La electrodinámica estocástica propone que los efectos electromagnéticos debidos al campo del vacío no pasan desapercibidos sino que, por el contrario, son sistemáticamente observados en forma de las propiedades cuánticas de la materia [2]. Por otro lado, los efectos gravitacionales de escala cósmica que deberían producirse debido a la gran masa equivalente del campo de radiación de punto cero simplemente no se observan [50]. Diversos mecanismos de compensación han sido sugeridos para explicar lo anterior [55]. Sin embargo, la gran variedad de hipótesis propuestas solo pone en evidencia que la solución de este problema aún es desconocida [2].

---

<sup>7</sup>La energía del vacío esta relacionada con el misterio del origen de la constante cosmológica de las ecuaciones de Einstein ya que cualquier contribución a la densidad de energía del vacío es equivalente a una constante cosmológica [55]. Esto puede verificarse al notar que el término  $\Lambda g_{\mu\nu}$  de las ecuaciones de Einstein puede reescribirse como  $-8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{vac}}$ , tal que la densidad de energía contenida por el vacío es igual a  $\rho^{\text{vac}} = T_{00}^{\text{vac}} = \Lambda/8\pi G$ . El problema con lo anterior es que los valores predichos por las diferentes teorías de campo para la densidad  $\rho^{\text{vac}}$  resultan ser muchos órdenes de magnitud mayores que cualquier valor consistente con las observaciones [55]. El problema de la constante cosmológica es de carácter fundamental, tal que su solución tendrá un impacto contundente en muchas áreas de la física y la astronomía [55]. En esta nota se ha normalizado  $c$  a la unidad.



# Apéndice D

## Cálculo de los coeficientes de difusión

A partir de las definiciones de los coeficientes de difusión  $D_{ij}^{xx}(t)$  y  $D_{ij}^{xp}(t)$ , ecuaciones (2.23) y (2.24), y de la ecuación (2.21), se obtiene que estos se expresan de la siguiente manera:

$$D_{ij}^{xx}(t) = \frac{e^2}{m^2} \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} \frac{S_0(\omega)}{\omega^2} \cos(\omega(t-t')) \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} d\omega dt'; \quad (\text{D.1})$$

$$D_{ij}^{xp}(t) = \frac{e^2}{m^2} \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} \frac{S_0(\omega)}{\omega^2} \cos(\omega(t-t')) \frac{\partial p_j}{\partial x'_i} d\omega dt', \quad (\text{D.2})$$

donde  $x_i \equiv x_i(t)$  y  $x'_i \equiv x_i(t')$  corresponden a dos instantes de la solución determinista de la ecuación de movimiento del sistema.

La ecuación (1.7) corresponde a la ecuación de movimiento en el caso del OA, por lo cual, la ecuación determinista a tratar es

$$\ddot{x}_i + \gamma \dot{x}_i + \omega_0^2 x_i = 0. \quad (\text{D.3})$$

Alternativamente, al utilizar la definición del momento (1.31) en la ecuación de movimiento (1.7), se obtiene que la ecuación determinista puede expresarse en términos del momento de la partícula como

$$\ddot{p}_i + \gamma \dot{p}_i + \omega_0^2 p_i = 0. \quad (\text{D.4})$$

Las ecuaciones (D.3) y (D.4) corresponden a las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de la posición y el momento, respectivamente, de un oscilador armónico amortiguado.

Utilizando los métodos usuales de resolución de ecuaciones diferenciales, como el método de la ecuación característica, es posible resolver las ecuaciones (D.3) y (D.4) tal que sus soluciones son:

$$x_i(t) = e^{-\gamma(t-t')/2} x_i(t') \left[ \cos \omega_1(t-t') - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1(t-t') \right] + \frac{p_1(t')}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')/2} \sin \omega_1(t-t'); \quad (\text{D.5})$$

$$p_i(t) = e^{-\gamma(t-t')/2} p_i(t') \left[ \cos \omega_1(t-t') + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1(t-t') \right] - \frac{m\omega_0^2 x_i(t')}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')/2} \sin \omega_1(t-t'), \quad (\text{D.6})$$

donde se satisface que la frecuencia  $\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - (\gamma/2)^2 \approx \omega_0^2$ , dado que  $\gamma \ll \omega_0$ . Estas soluciones implican que los factores  $\partial x_j / \partial x'_i$  y  $\partial p_j / \partial x'_i$  están dados por las siguientes oscilaciones amortiguadas:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \delta_{ij} e^{-\gamma(t-t')/2} \left[ \cos \omega_1(t-t') - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1(t-t') \right]; \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial x'_i} = -\delta_{ij} \frac{m\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')/2} \sin \omega_1(t-t'), \quad (\text{D.8})$$

tales que estos conducen a que los coeficientes de difusión se expresen de la siguiente manera:

$$D_{ij}^{xx} = \delta_{ij} \frac{e^2}{m^2} \int_0^\infty \frac{S_0(\omega)}{\omega^2} \left[ I(\omega) - \frac{\gamma}{2\omega_1} K(\omega) \right] d\omega; \quad (\text{D.9})$$

$$D_{ij}^{xp} = -\delta_{ij} \frac{e^2 \omega_0^2}{m\omega_1} \int_0^\infty \frac{S_0(\omega)}{\omega^2} K(\omega) d\omega, \quad (\text{D.10})$$

donde se han definido las funciones  $I(\omega)$  y  $K(\omega)$  como:

$$I(\omega) \equiv \int_0^\infty e^{-\gamma s/2} \cos(\omega s) \cos(\omega_1 s) ds; \quad (\text{D.11})$$

$$K(\omega) \equiv \int_0^\infty e^{-\gamma s/2} \cos(\omega s) \sin(\omega_1 s) ds. \quad (\text{D.12})$$

Las integrales presentes en las definiciones de las funciones  $I(\omega)$  y  $K(\omega)$  pueden resolverse analíticamente mediante desarrollos en series de Taylor, tal que los coeficientes de difusión se reescriben de manera explícita como:

$$D_{ij}^{xx} = \delta_{ij} \frac{\hbar\gamma^2}{4\pi m\omega_0^2} \left\{ \int_0^\infty \left[ \frac{1}{(\omega + \omega_1)^2 + (\gamma/2)^2} + \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2 + (\gamma/2)^2} \right] \omega d\omega - \frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty \left[ \frac{\omega + \omega_1}{(\omega + \omega_1)^2 + (\gamma/2)^2} - \frac{\omega - \omega_1}{(\omega - \omega_1)^2 + (\gamma/2)^2} \right] \omega d\omega \right\}; \quad (\text{D.13})$$

$$D_{ij}^{xp} = -\delta_{ij} \frac{\hbar\gamma}{2\pi\omega_1} \int_0^\infty \left[ \frac{\omega + \omega_1}{(\omega + \omega_1)^2 + (\gamma/2)^2} - \frac{\omega - \omega_1}{(\omega - \omega_1)^2 + (\gamma/2)^2} \right] \omega d\omega. \quad (\text{D.14})$$

Aun cuando las expresiones obtenidas en las ecuaciones (D.13) y (D.14) no son matemáticamente sencillas, estas permiten concluir que los coeficientes de difusión para el caso del oscilador armónico son diagonales e independientes del tiempo, es decir,

$$D_{ij}^{xx} = \delta_{ij} D^{xx}; \quad D_{ij}^{xp} = \delta_{ij} D^{xp}, \quad (\text{D.15})$$

siendo  $D^{xx}$  y  $D^{xp}$  coeficientes escalares y constantes [26].

Como se mostró en el apéndice B, se tiene que  $\gamma \ll \omega_0$  de tal modo que  $\omega_1$  posee un valor muy cercano a  $\omega_0$ . Esto implica que los coeficientes de difusión pueden aproximarse por:

$$D^{xx} \approx \frac{\hbar\gamma^2}{\pi m\omega_0^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 2(\gamma/2)^2(\omega^2 + \omega_0^2)}; \quad (\text{D.16})$$

$$D^{xp} \approx \frac{\hbar\gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\omega d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 2(\gamma/2)^2(\omega^2 + \omega_0^2)}. \quad (\text{D.17})$$

Debido a que el parámetro de tiempo  $\tau$  posee un valor extremadamente pequeño, se llega a que  $\tau\omega \ll 1$ , incluso para frecuencias tan altas como la de Compton. Esto implica que las contribuciones relevantes en las integrales de las ecuaciones (D.16) y (D.17) provienen de la resonancia localizada alrededor de  $\omega_0$  [2]. Adicionalmente, dado que  $\gamma \ll \omega_0$ , se tiene que la resonancia en cuestión es extremadamente angosta, razón por la cual es posible extender el intervalo de integración de dichas integrales sobre todo el eje real sin introducir un error apreciable [2].

De esta manera, las aproximaciones de línea estrecha de los coeficientes de difusión  $D^{xx}$  y  $D^{xp}$  pueden obtenerse de las ecuaciones (D.16) y (D.17) al aproximar la frecuencia  $\omega$  por  $\omega_0$  en sus respectivos integrandos, evitando dicha aproximación en la diferencia  $\omega - \omega_0$ , de tal modo que

$$D_0^{xx} = \frac{\hbar\gamma^2}{4\pi m\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} = \frac{\hbar\gamma}{2m\omega_0}; \quad (\text{D.18})$$

$$D_0^{xp} = \frac{\hbar\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \omega_0)d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} = 0. \quad (\text{D.19})$$

Utilizando la ecuación (1.45) y el resultado de la ecuación (D.18), es posible establecer una relación entre el coeficiente  $D^{xx}$  y la varianza en la posición  $\sigma_x^2$  en la aproximación línea estrecha,

$$D_0^{xx} = \gamma\sigma_{0x}^2. \quad (\text{D.20})$$

De esta forma, la ecuación (D.20) puede identificarse como una relación entre los coeficientes que cuantifican la disipación en el sistema mecánico y los parámetros que caracterizan las fluctuaciones del entorno, es decir, una relación de fluctuación-disipación [2].

# Bibliografía

- [1] DE LA PEÑA, L., CETTO, A. M. & VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. *The Emerging Quantum. The Physics behind Quantum Mechanics*. Springer Verlag, Berlín, 2015.
- [2] DE LA PEÑA, L. & CETTO, A. M. *The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics*. Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1996.
- [3] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*, segunda ed. John Wiley & Sons, Nueva York, 1975.
- [4] GOLDSTEIN, H., POOLE, C. & SAFKO, J. *Classical Mechanics*, tercera ed. Pearson Addison Wesley, 2002.
- [5] PÉREZ-BARRAGÁN, J. F. *Correcciones radiativas desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica*. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2018.
- [6] MILONNI, P. W. *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [7] BOYER, T. H. Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation. *Phys. Rev.* **D11** (1975), 790-808.
- [8] BRAFFORT, P. & TZARA, C. Énergie de l'oscillateur harmonique dans le vide. *Compt. Rend. Acad. Sc.* **239** (1954), 1779-1780.
- [9] BOYER, T. H. Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum without Quantum Assumptions. *Phys. Rev.* **182** (1969), 1374-1383.

- [10] MARSHALL, T. W. Statistical electrodynamics. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **61** (1965), 537–546.
- [11] COHEN-TANNOUDJI, C., DUPONT-ROC, J. & GRYNBERG, G. *Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics*. John Wiley, Hoboken, 1989.
- [12] WAGNIÈRE, G. The evaluation of three-dimensional rotational averages. *J. Chem. Phys.* **76** (1982), 473–480.
- [13] RISKEN, H. *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*, segunda ed. Springer, Berlín, 1989.
- [14] EINSTEIN, A. & HOPF, L. On a Theorem of the Probability Calculus and Its Application in the Theory of Radiation, 211-219. En: Beck, A. (trad.). *The Collected Papers of Albert Einstein, volume 3. The Swiss Years: Writings, 1909-1911*. Princeton University Press, Princeton, 1993 (Trabajo original publicado en 1910 en alemán). <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol3-trans/225>.
- [15] HILLERY, M., O'CONNELL, R. F., SCULLY, M. O. & WIGNER, E. P. Distribution functions in physics: fundamentals. *Phys. Rep.* **106** (1984), 121–167.
- [16] MARSHALL, T. W. Random Electrodynamics. *Proc. R. Soc. Lond.* **A276** (1963), 475-491.
- [17] CLAVERIE, P. & DINER, S. Stochastic electrodynamics and quantum theory. *Int. J. Quantum Chem.* **12** (1977), 41.
- [18] SANTOS, E. The Harmonic Oscillator in Stochastic Electrodynamics. *Nuovo Cim.* **B19** (1974), 57–89.
- [19] BOYER, T. H. General connection between random electrodynamics and quantum electrodynamics for free electromagnetic fields and for dipole oscillator systems. *Phys. Rev.* **D11** (1975), 809-830.
- [20] DE LA PEÑA-AUERBACH, L. & CETTO, A. M. The harmonic oscillator in a random electromagnetic field: Schrödinger's equation and radiative corrections. *Rev. Mex. Fís.* **25** (1976), 1–21.

- [21] DE LA PEÑA, L. *Introducción a la Mecánica Cuántica*, tercera ed. Fondo de Cultura Económica-UNAM, México D. F., 2006.
- [22] VAN KAMPEN, N. G. Stochastic differential equations. *Phys. Rep.* **24** (1976), 171–228.
- [23] DE LA PEÑA-AUERBACH, L. & CETTO, A. M. Derivation of quantum mechanics from stochastic electrodynamics. *J. Math. Phys.* **18** (1977), 1612–1622.
- [24] VAN KAMPEN, N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, tercera ed. North-Holland Personal Library, Ámsterdam, 2007.
- [25] CETTO, A. M., DE LA PEÑA, L. & VELASCO, R. M. Generalized Fokker-Planck Equations for Coloured, Multiplicative, Gaussian Noise. *Rev. Mex. Fís.* **31** (1984), 83–101.
- [26] DE LA PEÑA, L. & CETTO, A. M. The quantum harmonic oscillator revisited: A new look from stochastic electrodynamics. *J. Math. Phys.* **20** (1979), 469–483.
- [27] UHLENBECK, G. E. & ORNSTEIN, L. S. On the theory of Brownian Motion. *Phys. Rev.* **36** (1930), 823–841.
- [28] CHANDRASEKHAR, S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Rev. Mod. Phys.* **15** (1943), 1–89.
- [29] FRANÇA, H. M. & MARSHALL, T. W. Excited states in stochastic electrodynamics. *Phys. Rev.* **A38** (1988), 3258–3263.
- [30] WANG, M. C. & UHLENBECK, G. E. On the theory of Brownian Motion II. *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945), 323–342.
- [31] EINSTEIN, A. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat, 123-134. En: Beck, A. (trad.). *The Collected Papers of Albert Einstein, volume 2. The Swiss Years: Writings, 1900-1909*. Princeton University Press, Princeton, 1989 (Trabajo original publicado en 1905 en alemán). <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans/137>.

- [32] GOEDECKE, G. H. Stochastic Electrodynamics. III. Statistics of the Perturbed Harmonic Oscillator-Zero-Point Field System. *Found. Phys.* **13** (1983), 1195–1220.
- [33] ZACHOS, C. K., FAIRLIE, D. B. & CURTRIGHT, T. L. *Quantum Mechanics in Phase Space. An Overview with Selected Papers*. World Scientific, Singapur, 2005.
- [34] CLAVERIE, P., PESQUERA, L. & SOTO, F. Existence of a constant stationary solution for the hydrogen atom problem in Stochastic Electrodynamics. *Phys. Lett.* **A80** (1980), 113–116.
- [35] WIGNER, E. P. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.* **40** (1932), 749–759.
- [36] GROENEWOLD, H. On the Principles of Elementary Quantum Mechanics. *Physica* **12** (1946), 405–460.
- [37] SOTO-EGUIBAR, F. & CLAVERIE, P. Time evolution of the Wigner function. *J. Math. Phys.* **24** (1983), 1104–1109.
- [38] CURTRIGHT, T. L. & ZACHOS, C. K. Quantum Mechanics in Phase Space. *Asia Pac. Phys. Newslett.* **1** (2012), 37–46.
- [39] MOYAL, J. E. Quantum Mechanics as a Statistical Theory. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** (1949), 99–124.
- [40] BALLENTINE, L. E. *Quantum Mechanics. A Modern Development*. World Scientific, Singapur, 1998.
- [41] COHEN, L. Positive and Negative Joint Quantum Distributions, 97–117. En: Moore, G. T. & Scully, M. O. (eds.). *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics*. Plenum Press, Nueva York, 1986.
- [42] BARTLETT, M. S. Negative Probability. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **41** (1945), 71–73.
- [43] FAIRLIE, D. B. The Formulation of quantum mechanics in terms of phase space functions. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **60** (1964), 581–586.

- [44] SOTO, F. & CLAVERIE, P. When is the Wigner function of multi-dimensional systems nonnegative? *J. Math. Phys.* **24** (1983), 97–100.
- [45] CETTO, A. M., DE LA PEÑA, L. & VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. On the physical origin of the quantum operator formalism. *Quantum Stud.: Math. Found.* (2021). <https://doi.org/10.1007/s40509-020-00241-7>.
- [46] LORENTZ, H. A. *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*, segunda ed. B. G. Teubner, Leipzig, 1915.
- [47] KRAMERS, H. A. Fundamental difficulties of a theory of particles. *Ned. T. Natuurk.* **11** (1944), 134–140.
- [48] LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. *Course of Theoretical Physics, volume 2. The Classical Theory of Fields*. Pergamon, Oxford, 1975.
- [49] MONIZ, E. J. & SHARP, D. H. Radiation reaction in nonrelativistic quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* **D15** (1977), 2850–2865.
- [50] FEYNMAN, R. P., HIBBS, A. R. & STYER, D. F. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Publications, Nueva York, 2010.
- [51] CETTO, A. M. & DE LA PEÑA, L. Causal version of the Abraham-Lorentz equation for point particles. *Rev. Mex. Fís.* **29** (1983), 537–549.
- [52] GARCÍA-COLÍN, L. *La Naturaleza Estadística de la Teoría de los Cuantos*, segunda ed. El Colegio Nacional, México D. F., 2004.
- [53] JIMÉNEZ, J. L., DE LA PEÑA, L. & BRODY, T. A. Zero-point term in cavity radiation. *Am. J. Phys.* **48** (1980), 840–846.
- [54] COLE, D. C. Entropy and other thermodynamic properties of classical electromagnetic thermal radiation. *Phys. Rev.* **A42** (1990), 7006–7024.
- [55] WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989), 1–23.