



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

MODELO DE MEZCLA DE QUARKS CON SIMETRÍA S_3 MODULAR Y 3 DOBLETES DE HIGGS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
CARLOS DAVID CERÓN ERAZO

TUTOR PRINCIPAL:
DRA. MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RÍOS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. ERIC VÁZQUEZ JÁUREGUI
INSTITUTO DE FÍSICA

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a mis padres y a mis hermanos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres, Carmela Erazo y Habacuc Cerón y a mis hermanos, Néstor Cerón y Javier Cerón por su apoyo durante este proceso.

A la Dra. Myriam Mondragón por todo el conocimiento que me brindó y la paciencia que tuvo. Su guía fue fundamental para culminar este trabajo.

A los miembros del comité tutor, el Dr. Luis Fernando Urrutia y el Dr. Eric Vázquez.

A los sinodales, el Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez, el Dr. Peter Otto Hess Bechstedt, el Dr. Juan Carlos Gómez Izquierdo y el Dr. José Alberto Martín Ruiz. Sus comentarios y sugerencias fueron muy importantes en esta tesis.

Al CONACYT por el apoyo económico recibido.

Al Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM y al Instituto de Física.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN111518 y IN109321. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

1. Introducción	1
2. Revisión del Modelo Estándar	3
2.1. Quarks y leptones	3
2.2. Bosones de norma, rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs	5
2.2.1. Rompimiento espontáneo de simetría	6
2.2.2. Mecanismo de Higgs	7
2.3. Matriz de mezcla de quarks V_{CKM}	9
3. Conceptos básicos de grupos y formas modulares	11
3.1. Definición y propiedades de grupos	11
3.2. Grupo de permutaciones S_3	13
3.3. Grupos modulares	15
4. Formas modulares para simetría S_3 y tres dobletes de Higgs	21
4.1. Modelos multi-Higgs con simetría S_3	22
4.1.1. Tres dobletes de Higgs	23
4.1.2. Potencial de Higgs para tres dobletes de Higgs con simetría S_3	23
4.2. Construcción de formas modulares para S_3	24
4.3. Asignaciones bajo S_3 y matriz de masas	27
4.4. Cálculo de matriz V_{CKM}	31
5. Conclusiones y perspectivas	39

A. Clases laterales (cosets) de un grupo	41
B. Tablas de posibles matrices para cuatro dobletes de Higgs	43

Resumen

Un problema abierto que el Modelo Estándar no resuelve es acerca del origen de la jerarquía de masas entre los fermiones. Se han propuesto diferentes alternativas adicionando grupos extra al grupo de norma del Modelo Estándar o construyendo modelos híbridos con algunos de ellos. Se ha mostrado que la simetría S_3 ha dado buenos resultados si se introducen, además, tres dobletes de Higgs con su potencial invariante de S_3 . Sin embargo, al tomar en cuenta las condiciones de minimización del potencial de Higgs, la matriz V_{CKM} resultante exhibe una simetría residual con ceros en algunas entradas. Siguiendo el éxito de S_3 , se propone una extensión del Modelo Estándar por medio del mismo grupo, pero obtenida a partir de la simetría modular. Al hacerlo de esta manera, se toman en cuenta ciertas funciones especiales conocidas como formas modulares, las cuales tienen una transformación particular bajo la aplicación del grupo modular. Al considerar una simetría modular, es posible asignar a los campos de quarks y a los campos de Higgs una nueva cantidad conocida como peso modular que, junto con la simetría de S_3 , produce nuevas restricciones sobre la forma en que se construye el lagrangiano del sector de Yukawa y, por lo tanto, los acoples que estarán en términos de las formas modulares. Una asignación adecuada de los campos de quarks y Higgs en S_3 y sus pesos modulares permite escribir una matriz de masa con ceros de textura. Al calcular los elementos de la matriz de mezcla de quarks V_{CKM} se encuentra que, efectivamente, la matriz V_{CKM} no exhibe ceros en ninguna de sus entradas y son comparables a los datos suministrados por el PDG.

Abstract

An open problem that the Standard Model does not solve is about the origin of the mass hierarchy among fermions. Different alternatives have been proposed by adding extra groups to the Gauge group of the Standard Model or by building hybrid models with some of them. It has been shown that the S_3 symmetry has given good results if, in addition, three Higgs doublets with their invariant potential of S_3 are introduced. However, when taking into account the minimization conditions of the Higgs potential, the resulting matrix V_{CKM} exhibits a residual symmetry with zeros in some entries. Following the success of S_3 , an extension of the Standard Model is proposed by means of the same group, but obtained from modular symmetry. In doing so, certain special functions known as modular forms are taken into account, which have a particular transformation under the application of the modular group. By considering a modular symmetry, it is possible to assign to the quark fields and Higgs fields a new quantity known as the modular weight which, together with the symmetry of S_3 , produces new constraints on the way the Yukawa sector Lagrangian is built and hence the couplings, which will be in terms of modular forms. A proper assignment of the

quark and Higgs fields in S_3 and their modular weights allows a mass matrix with texture zeros to be written. When calculating the elements of the quark mixing matrix V_{CKM} , it is found that, indeed, the V_{CKM} matrix does not exhibit zeros in any of its inputs and they are comparable to the data provided by the PDG.

Capítulo 1

Introducción

Una pregunta abierta que el Modelo Estándar no ha podido responder es acerca de la estructura de sabor. Para resolver esta cuestión, se han propuesto varios modelos basados en grupos finitos tales como S_3 , A_4 , S_4 , entre otros, donde se han obtenido buenos resultados. Siguiendo esta dirección, una forma de abordar el problema es extender el Modelo Estándar con los grupos finitos anteriormente mencionados pero a partir del grupo modular Γ , que ha sido ampliamente utilizado en teoría de cuerdas y otras áreas [1, 2]. Este grupo podría dar una explicación a la estructura de sabor por medio de funciones holomórficas conocidas como formas modulares [3]. Las formas modulares poseen una transformación particular bajo el grupo Γ y permiten describir, en términos de ellas, acoples de Yukawa, ángulos de mezcla y masas de quarks y leptones. Lo anterior hace la diferencia entre usar directamente los grupos finitos y el grupo modular, proporcionando así una aparente ventaja por las restricciones nuevas que aparecen.

En [4] utilizan formas modulares para encontrar ángulos de mezcla y matrices de masas utilizando A_4 modular para las masas de los leptones y S_3 modular para la matriz CKM.

En [5] se utilizan formas modulares en el marco de supersimetría para describir la masa de los neutrinos por medio del operador de Weinberg y también por medio del mecanismo See-saw. También, en [6–8], utilizan Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 y Γ_5 que corresponden a S_3 , A_4 , S_4 y A_5 , respectivamente, como maneras alternativas de utilizar el grupo modular Γ . Dado que la simetría S_3 ha probado ser exitosa, tanto con y sin supersimetría [9–11], para explicar las masas y mezclas de quarks y leptones, se pondrá especial atención a esta simetría y se estudiará qué ventajas se obtienen de suponer una simetría modular sobre una simetría del sabor convencional. Para lograrlo, se va a considerar Γ_2 cuyo isomorfismo es S_3 , además, se van a introducir tres dobletes de Higgs junto con su potencial invariante de S_3 .

El capítulo 2 se presenta una revisión del Modelo Estándar y sus principales características. Así mismo, en el capítulo 3 se realiza una introducción de algunas propiedades generales de grupos. Luego, se introduce el grupo de simetría S_3 y, por último, el grupo modular y su relación con algunos grupos finitos de simetría. El capítulo 4 contiene la aplicación del grupo modular finito Γ_2 a un modelo del sector de Yukawa, con tres dobletes de Higgs y las asignaciones correspondientes. También se presentan los elementos de la matriz de mezcla de quarks, V_{CKM} y la respectiva comparación con los datos experimentales por medio de la función χ^2 .

Capítulo 2

Revisión del Modelo Estándar

En la física moderna existen, actualmente, dos grandes pilares para describir los fenómenos que ocurren en el universo: la relatividad general, que engloba la dinámica de los objetos más grandes y da una explicación geométrica del origen de la gravedad. Por otro lado, está la teoría cuántica de campos, que se encarga de describir la física a escalas de distancia pequeñas pero energéticamente altas, esto es, en un rango de $\sim MeV$ a $\sim GeV$.

El logro más exitoso de la teoría cuántica de campos es el Modelo Estándar. En ella se explica la interacción de las diferentes partículas fundamentales, como también el origen de sus masas con el mecanismo de Higgs. El Modelo Estándar ordena a las partículas en fermiones y bosones. Los fermiones, a su vez, se dividen en seis quarks, tres leptones cargados y sus respectivos leptones neutros asociados, los neutrinos. Estos componen la materia bariónica. Los bosones son las partículas mediadoras de las interacciones conocidas hasta el momento, exceptuando la gravedad. Se conocen también como bosones de norma ya que surgen de imponer la simetría de norma o gauge. Estas interacciones son: la interacción electromagnética, mediada por el fotón, la interacción nuclear fuerte, mediada por el gluón y la interacción nuclear débil, mediadas por los bosones W^\pm y Z_0 , cabe resaltar que esta interacción es la única que viola la simetría CP. Por último, está el bosón de Higgs en el mecanismo de Higgs para la generación de masa. A pesar de la gran precisión en las predicciones del modelo estándar, se sabe que no es un modelo completo ya que no explica la jerarquía de masas ni la masa de los neutrinos, no da explicación del patrón de mezcla en los quarks y tampoco da una explicación sobre qué partículas podrían componer la materia oscura.

En este capítulo se hará una revisión breve del modelo estándar, de las partículas fundamentales y de sus interacciones [12–17].

2.1. Quarks y leptones

Los quarks y leptones pertenecen al sector fermiónico del modelo estándar y están subdivididos en tres familias o generaciones. La primera familia de quarks se compone de quarks up y down, la segunda familia de charm y strange, y la tercera familia de top y bottom. Además, poseen espín

$1/2$, carga eléctrica fraccionaria, es decir, $1/3$ para los tipo up y $-2/3$ para los tipo down. También tienen carga de color la cual se manifiesta solo en las interacciones fuertes y está dada en tres formas diferentes convencionalmente conocidas como rojo (r), verde (g) y azul (b). Se usará la notación q_i para los quarks, donde q puede ser u o d si es tipo up o tipo down, respectivamente, e $i = 1, 2, 3$ que corresponde a las tres generaciones. Para los leptones, la primera familia de leptones cargados se compone del electrón, la segunda familia del muón y la tercera familia de partícula tau, todas con carga eléctrica de valor -1 , además, cada uno posee un neutrino asociado que son leptones neutros. No poseen carga de color y tienen espín $1/2$. La notación para los leptones cargados será e_i y para los neutrinos correspondientes será ν_i , con $i = 1, 2, 3$ para las diferentes generaciones.

Tanto los quarks y leptones como los bosones de norma, respetan la simetría de norma dada por el grupo

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y, \quad (2.1)$$

donde $SU(3)_C$ incluye la simetría de las interacciones fuertes, es decir, la simetría de color y ocho bosones de norma G^i , con $i = 1, \dots, 8$, que sirven como los mediadores de la interacción fuerte, por lo tanto, poseen carga de color pero no tienen masa ni carga eléctrica. $SU(2)_L \times U(1)_Y$ representa las interacciones electrodébiles y actúa únicamente para las partículas izquierdas, esto es, $q_L = P_L q$, con $P_{L(R)} = (1/2)(1 - (+)\gamma_5)$ el proyector izquierdo (derecho). $SU(2)_L$ posee tres bosones de norma que se denotan como W^i , con $i = 1, 2, 3$ y $U(1)_Y$ tiene un bosón de norma denominado B . Las representaciones irreducibles (ver sección 3.1) que los quarks y leptones tienen bajo este grupo de norma son las siguientes:

Para $SU(3)_C$, los quarks se representan en tripletes ya que poseen carga de color. Los demás campos serán singletes debido a la ausencia de ésta. Para $SU(2)_L \times U(1)_Y$ los fermiones izquierdos se representan en dobletes mientras que los derechos en singletes. Se utilizará la siguiente nomenclatura a partir de ahora

$$Q_i = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix}, \quad u_{iR}, \quad d_{iR} \quad (2.2)$$

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ e_{iL} \end{pmatrix}, \quad e_{iR}.$$

En $U(1)_Y$ la hipercarga se define como

$$Y = Q - T_3 \quad (2.3)$$

donde Q es la carga eléctrica y T_3 es la tercera componente del isospin. En resumen, los números cuánticos asociados al grupo de norma del Modelo Estándar son

$$\begin{aligned} Q_i &\rightarrow \{3, 2, 1/6\} \\ L_i &\rightarrow \{1, 2, -1/2\} \\ u_{iR} &\rightarrow \{3, 1, 2/3\} \\ d_{iR} &\rightarrow \{3, 1, -1/3\} \\ e_{iR} &\rightarrow \{1, 1, -1\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Es de notar que, por consistencia, el Modelo Estándar no considera neutrinos derechos. Así, el lagrangiano del sector fermiónico del modelo estándar es

$$\mathcal{L}_f = i \sum_{m=1}^3 (\bar{Q}_{mL} \not{D} Q_{mL} + \bar{L}_{mL} \not{D} L_{mL} + \bar{u}_{mR} \not{D} u_{mR} + \bar{d}_{mR} \not{D} d_{mR} + \bar{e}_{mR} \not{D} e_{mR}), \quad (2.5)$$

con $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ y D_μ la derivada covariante.

El sector de Higgs, que contiene el término cinético del campo de Higgs y su potencial, tiene un rol importante en el rompimiento espontáneo de la simetría (SSB) y el mecanismo de Higgs para la generación de masas. El término del sector de Higgs en el lagrangiano es

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi), \quad (2.6)$$

donde ϕ es un doblete electrodébil cuyos números cuánticos son $\phi \rightarrow \{1, 2, 1/2\}$, el potencial de Higgs es $V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$ y $D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu$, donde g y g' son los acoples para $SU(2)$ y $U(1)$, respectivamente. Los acoples de ϕ y los leptones están contenidos en el sector de Yukawa, dado por

$$-\mathcal{L}_y = \sum_{m,n=1}^3 (Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{\phi} u_{nR} + Y_{mn}^d \bar{Q}_m \phi d_{nR} + Y_{mn}^e \bar{L}_m \phi e_{nR} + Y_{mn}^\nu \bar{L}_m \tilde{\phi} \nu_{nR}) + \text{h.c.} \quad (2.7)$$

En (2.7), los factores Y_{mn}^i , con $i = u, d, e, \nu$, son las componentes matriciales de Yukawa para los quarks tipo up, down, leptones cargados y neutrinos, respectivamente. Además, se define $\tilde{\phi} = i\sigma^2 \phi^\dagger$ para lograr la invariancia en \mathcal{L}_y ya que este campo transforma como $\tilde{\phi} \rightarrow \{1, 2, -1/2\}$.

Finalmente, los términos cinéticos para los bosones de norma están contenidos en el sector de norma del modelo estándar, \mathcal{L}_g

$$-\mathcal{L}_g = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} + \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} + \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde G^i son los 8 bosones de norma de $SU(3)_C$, W^i son los 3 bosones de norma de $SU(2)_L$ y B es el bosón de norma de $U(1)_Y$. De esta forma, el lagrangiano del modelo estándar es

$$\mathcal{L}_{sm} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_y + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_g. \quad (2.9)$$

2.2. Bosones de norma, rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

Hasta ahora, los términos masivos de los campos no han sido incluidos ya que no son invariantes de norma. La forma de generar las masas tanto de los bosones de norma como de los leptones, exceptuando los neutrinos, es a través del mecanismo de Higgs [18–21].

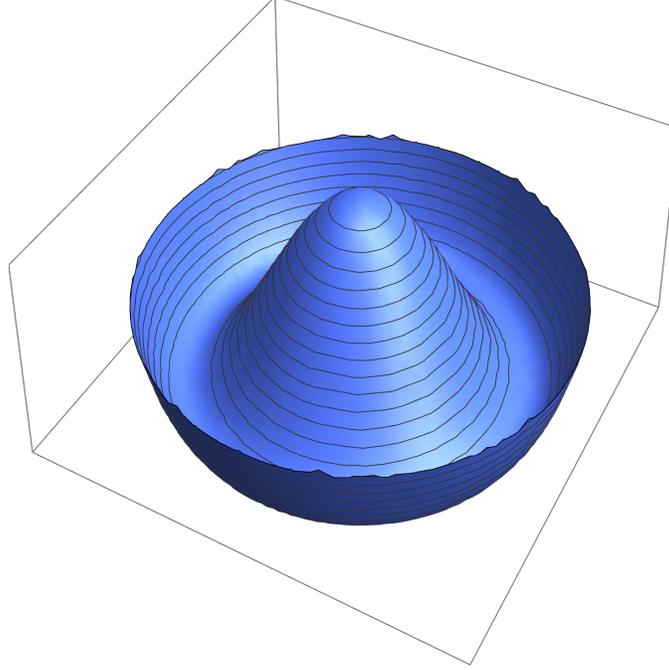


Figura 2.1: Forma del potencial para las condiciones $\lambda > 0$ y $\mu^2 < 0$. Presenta un máximo en el centro y un círculo de mínimos en la base.

2.2.1. Rompimiento espontáneo de simetría

El rompimiento espontáneo de simetría ocurre cuando, bajo una transformación, el lagrangiano deja de ser invariante al tomar un valor de vacío que no es simétrico. A continuación se presenta un modelo simple para su ilustración y, posteriormente, aplicarlo en la teoría electrodébil. Se considera un campo complejo de la forma $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ con α un parámetro constante, y la simetría global $U(1)$, esto es $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$. El campo ϕ está gobernado por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - V(\phi), \quad (2.10)$$

con $V(\phi) = \mu^2(\phi^* \phi) + \lambda(\phi^* \phi)^2$. Reescribiendo el lagrangiano en términos de ϕ_1 y ϕ_2 se obtiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (2.11)$$

Esto significa que el potencial en términos de ϕ_1 y ϕ_2 es

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (2.12)$$

La forma del potencial depende de λ y μ^2 . Se tomará $\lambda > 0$ y, para este caso, $\mu^2 < 0$. La forma del potencial, con estas condiciones, se presenta en la figura 2.1. El potencial tiene dos puntos críticos, uno que es un máximo en $\phi = 0$ y un círculo de mínimos que satisface $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\mu^2/\lambda \equiv \nu^2$. La simetría se rompe una vez que ϕ toma un valor específico en el vacío. Sin pérdida de generalidad, se escogerá uno de los mínimos del círculo tal que $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \langle \phi \rangle =$

$\nu/\sqrt{2}$, es decir, $\phi_1 \rightarrow \nu + \phi'_1$ y $\phi_2 \rightarrow \phi'_2$. Con esta elección, la simetría $U(1)$ se ha perdido, lo que implica, por el teorema de Goldstone, que debe haber un bosón sin masa. Reescribiendo el lagrangiano se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi'_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi'_2)^2 \\ &- \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + \lambda\nu^2\phi_1'^2 + \lambda\nu\phi_1'^3 + \frac{1}{4}\lambda\phi_1'^4 + \frac{1}{4}\lambda\phi_2'^4 + \lambda\nu\phi_1'\phi_2'^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi_1'^2\phi_2'^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde se observa que, efectivamente, hay una partícula sin masa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi'_1)^2 + \lambda\nu^2\phi_1'^2 &\rightarrow \text{Partícula masiva asociada a } \phi'_1. \\ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi'_2)^2 &\rightarrow \text{Partícula asociada a } \phi'_2 \text{ sin masa por el teorema de Goldstone.} \end{aligned}$$

Los términos restantes son interacciones entre dos y tres campos.

2.2.2. Mecanismo de Higgs

En el Modelo Estándar, el mecanismo de Higgs hace uso del mismo potencial (2.12) pero siendo ϕ un doblete electrodébil. Las masas de los bosones de norma surgen con el rompimiento espontáneo de simetría en el sector de Higgs (2.6) siguiendo un procedimiento similar al de la sección anterior. El sector de Higgs está dado por

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi), \quad (2.14)$$

con $V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger \phi) + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$ y $D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu$. El doblete de Higgs tiene la forma general

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Ahora, al tomar un valor de vacío de tal manera que $\langle \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 \rangle = \langle \phi_4 \rangle = 0$ y $\langle \phi_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\nu$ y parametrizar en el gauge unitario, se obtiene que

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

donde se ha utilizado la relación $\mu^2 = -\lambda\nu^2$ que surge de minimizar el potencial y con h un campo real conocido como el bosón de Higgs. De esta forma \mathcal{L}_ϕ se puede escribir en dos partes, en una parte están los términos de masa; en la otra parte están los términos de h y los términos de interacción, por lo tanto,

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{4}g^2\nu^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{2}\nu^2(g^2 + g'^2)\frac{1}{4}\left(\frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\right)^2 - \lambda\nu^2 h^2 + \text{Términos de int}, \quad (2.17)$$

con $W^\pm = (W^1 \mp iW^2)/\sqrt{2}$. Al definir Z_μ como

$$Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.18)$$

se obtiene

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{4}g^2\nu^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{2}\nu^2(g^2 + g'^2)\frac{1}{4}Z_\mu Z^\mu - \lambda\nu^2 h^2 + \text{Términos de int.} \quad (2.19)$$

Así, los bosones W^\pm son los bosones físicos mediadores en la corriente cargada débil y Z es el bosón mediador en la corriente neutra débil. El bosón asociado a la interacción electromagnética, el fotón A , es transversal a Z , es decir,

$$A_\mu = \frac{gW_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (2.20)$$

De la expresión en (2.19), se obtienen las masas asociadas a los bosones mediadores y al bosón de Higgs. Estos son

$$\begin{aligned} m_W &= g\nu/2, \\ m_Z &= (\sqrt{g^2 + g'^2})\nu/2 \\ m_A &= 0, \\ m_\phi &= \sqrt{2\lambda}\nu, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde se infiere que $m_A = 0$ ya que no hay un término cuadrático de A . Es de notar que la cantidad de grados de libertad de los campos no cambia después del rompimiento espontáneo de simetría, esto es, se obtienen cuatro bosones vectoriales (tres con masa y uno no masivo) y un bosón escalar que en total suman 12 grados de libertad. En el caso de los leptones, los términos de masa se observan en el sector de Yukawa. Después del rompimiento espontáneo de simetría, el sector de Yukawa se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=1}^3 (Y_{mn}^u \bar{u}_m(\nu + h)u_{nR} + Y_{mn}^d \bar{d}_m(\nu + h)d_{nR} \\ &\quad + Y_{mn}^e \bar{e}_m(\nu + h)e_{nR} + Y_{mn}^\nu \bar{\nu}_m(\nu + h)\nu_{nR}) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.22)$$

La anterior expresión se puede reescribir de forma matricial al definir $u_L = (u_{1L} \ u_{2L} \ u_{3L})^T$ y similarmente para u_R y los leptones, entonces

$$\mathcal{L}_y = -(\bar{u}_L M^u u_R + \bar{d}_L M^d d_R + \bar{e}_L M^e e_R + \bar{\nu}_L M^\nu \nu_R) + \text{Términos de int} + \text{h.c.}, \quad (2.23)$$

donde las componentes de M^u se han definido como $M_{mn}^i = (1/\sqrt{2})\nu Y_{mn}^i$ para $i = u, d, e, \nu$. Los términos de interacción incluyen productos de h y los demás campos. Para encontrar los términos de masa es necesario cambiar de la base electrodébil a la base de masas para los leptones, en la cual las matrices M son diagonales. Esto se logra al introducir las matrices de cambio de base, $A_R^{f\dagger} f_{L,R}$, como

$$f_R^m = A_R^{f\dagger} f_R \quad f_L^m = A_L^{f\dagger} f_L, \quad (2.24)$$

con $f = u, d, e, \nu$. Las matrices A_R^f y A_L^f son las matrices que diagonalizan M^f , es decir,

$$M_D^f = A_L^{f\dagger} M^f A_R^f, \quad (2.25)$$

donde la diagonal de M_D^f contiene los términos de masa de los leptones.

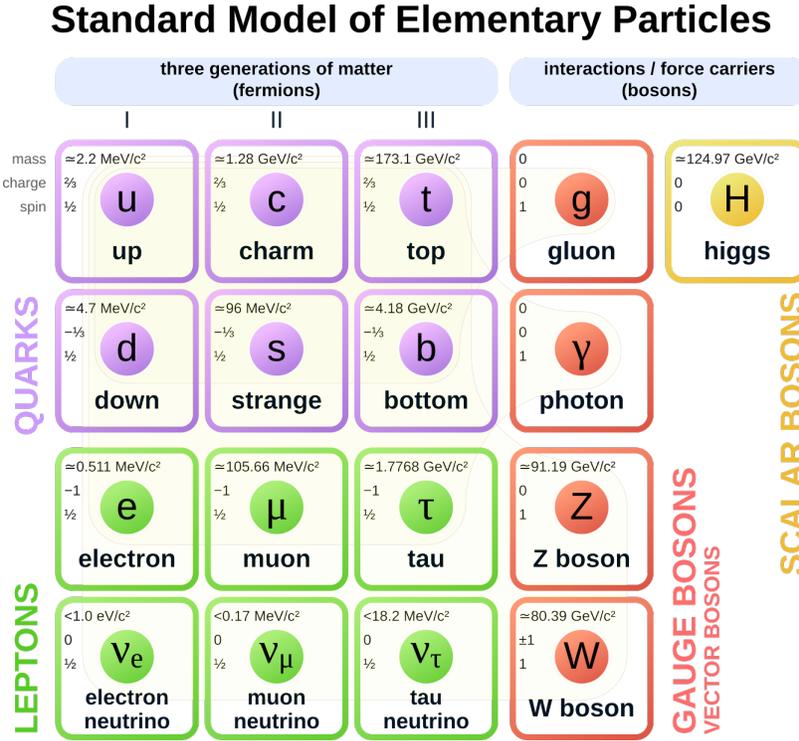


Figura 2.2: Partículas elementales con información de masa, carga, espín y la familia a la que corresponden. Imagen bajo licencia de Creative Commons ¹

2.3. Matriz de mezcla de quarks V_{CKM}

La matriz de mezcla de quarks, también conocida como matriz V_{CKM} , por Gabbibo, Kobayashi y Maskawa, se define como

$$V_q = A_L^u A_L^d. \quad (2.26)$$

De manera análoga, se define la matriz de mezcla de leptones, también conocida como matriz PMNS por Pontecorvo, Maki, Nakagawa y Sakata como

$$V_l = A_L^\nu A_L^e. \quad (2.27)$$

Aquí se pondrá especial atención a la matriz V_{CKM} . Su interpretación se puede inferir a partir de las corrientes cargadas que cambian sabor en la interacción débil. En la base de masas, definida en (2.24), las corrientes cargadas son

$$J^{u\dagger} = 2\bar{u}_L^m A_L^{u\dagger} A_L^d d_L^m + 2\bar{\nu}_L^m A_L^{\nu\dagger} A_L^e e_L^m = 2\bar{u}_L^m V_q d_L^m + 2\bar{\nu}_L^m V_l e_L^m \quad (2.28)$$

$$J^u = 2\bar{d}_L^m A_L^{d\dagger} A_L^u u_L^m + 2\bar{e}_L^m A_L^{e\dagger} A_L^\nu \nu_L^m = 2\bar{d}_L^m V_q^\dagger u_L^m + 2\bar{e}_L^m V_l^\dagger \nu_L^m. \quad (2.29)$$

De las corrientes anteriores se puede observar que los quarks que se acoplan con los tipo up en la interacción débil son quarks tipo down pero en una base diferente. El cambio de base está

¹Autor: MissMJ. Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/00/Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg

dado por la matriz V_q y se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} d'_{1L}{}^m \\ d'_{2L}{}^m \\ d'_{3L}{}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{uc} & V_{ub} \\ V_{sd} & V_{sc} & V_{sb} \\ V_{td} & V_{tc} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1L}^m \\ d_{2L}^m \\ d_{3L}^m \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

De esta forma, son los quarks d' los que se acoplan con los quarks tipo up, análogamente para el caso conjugado. Una interpretación similar se realiza para V_l , también conocida como matriz de mezcla de neutrinos o matriz PMNS.

La matriz de mezcla se puede generalizar a N familias, en este caso habrían $2N^2$ parámetros para su determinación, sin embargo, al ser unitaria, N^2 de sus parámetros quedan determinados. Además, para la extensión de N familias, habrían N campos de partículas que pueden absorber las fases de la matriz más una fase global, por lo tanto, los parámetros efectivos para determinar V_q son $N^2 - 2N + 1$. De los anteriores parámetros, $F(F - 1)/2$ son ángulos, llamados ángulos de mezcla, y $(F - 1)(F - 2)/2$ son fases. Para el caso $F = 3$, existen tres ángulos de mezcla y una fase. En el caso de $F = 2$ hay un ángulo y cero fases. A este ángulo se le conoce como el ángulo de Cabbibo y fue la primera matriz en ser propuesta [22]. Años después, la matriz de mezcla fue extendida a tres familias por Kobayashi y Maskawa [23].

Capítulo 3

Conceptos básicos de grupos y formas modulares

La teoría de grupos y, en particular, los grupos de Lie, han sido de gran utilidad para describir simetrías en diferentes áreas de la física. El momento angular, el grupo de Lorentz o el grupo de Poincaré en relatividad son algunos ejemplos de su aplicabilidad. En física de partículas, los grupos $SU(3)$ y $SU(2)$ son utilizados para describir el modelo estándar con el producto $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Debido a que el Modelo Estándar no ha dado una explicación satisfactoria para la jerarquía de masas, ángulos de mezcla o la masa de neutrinos, entre otros problemas, se ha intentado extender el modelo agregando simetrías adicionales bajo diferentes grupos, entre ellos se encuentran S_3 , S_4 , A_3 , A_4 , Q_6 [7, 9, 24–27]. Una alternativa que se ha explorado con estos grupos, es su aplicación a partir de isomorfismos del grupo modular finito Γ_N [5, 8, 28–34].

En este capítulo se hará una introducción breve sobre las principales propiedades de grupos, y se pondrá especial atención en el grupo de permutaciones S_3 y de los grupos modulares Γ y Γ_n .

3.1. Definición y propiedades de grupos

La información sobre grupos y su aplicación en física se puede encontrar en [35–37].

Un grupo se define a partir de un conjunto G y una operación binaria que se denotará por $*$, que satisfacen las siguientes propiedades para cualquier par de elementos a, b y $c \in G$

- La operación $a * b = c \in G$ (es decir, es una operación que está dentro del grupo)
- Las operaciones son asociativas: $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- Existe el elemento neutro: sea $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$.

- Existe el elemento inverso: sea a, b tal que $a * b = e$ entonces a b se le llama el inverso de a y se representa como a^{-1} .

Finalmente, si para todo par de elementos a, b se satisface que $a * b = b * a$ entonces se dice que el grupo es abeliano (conmuta bajo la operación $*$), de lo contrario, se dirá que es no abeliano.

Algunos ejemplos de grupos conocidos son los siguientes

- \mathbb{Z} : El conjunto de números enteros forma un grupo bajo la operación de suma.
- $O(n)$: Grupo de rotaciones de dimensión n .
- $SU(n)$: Grupo especial unitario, el cual es un grupo de Lie.
- S_n : Grupo de permutaciones de n elementos.
- Z_n : Grupo cíclico de orden n .

Para trabajar adecuadamente con grupos, es necesario tener una representación en algún espacio vectorial. Sea G un grupo y $g \in G$, una representación del grupo es una transformación que asigna a g una matriz M de dimensión $n \times n$, $g \rightarrow M(g)$, tal que $M(g)$ actúa sobre un espacio vectorial V de dimensión n y, además, debe preservar el álgebra del grupo, esto es, para $g_1, g_2 \in G$ se debe satisfacer $M(g_1 g_2) = M(g_1) M(g_2)$.

Así, el espacio vectorial debe satisfacer las siguientes propiedades, en notación de Dirac. Para $|i\rangle, |j\rangle \in V$, se tiene

- La base debe ser ortonormal, es decir, $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$.
- Debe satisfacer la relación de clausura $\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbf{1}$.
- Para un elemento $|i\rangle$ se tiene que $|i\rangle = M_{ij}(g) |j\rangle$, donde $M_{ij}(g)$ es la representación del elemento g .
- Dos representaciones serán equivalentes si se tiene una transformación para todos los elementos del grupo $M' = U M U^\dagger$, con U una matriz unitaria.

Cuando la dimensión del espacio vectorial coincide con el orden del grupo, se dice que la representación es regular. Se dice que $M(g)$ es una representación reducible si se logra escribir como una matriz diagonal a bloques, es decir

$$M(g) = \begin{pmatrix} M_1(g) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3(g) & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_k(g) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

En este caso, cada submatriz es una representación de g y se escribe como

$$M(g) = M_1(g) \oplus M_2(g) \oplus M_3(g) \oplus \dots \oplus M_k(g). \quad (3.2)$$

Si una representación no se puede escribir como una matriz diagonal a bloques entonces se dice que es una representación irreducible (irrep).

3.2. Grupo de permutaciones S_3

Una forma de reducir la cantidad de parámetros libres del Modelo Estándar es agregar un grupo de simetría adicional que, para este caso, será S_3 . Por lo tanto, es importante realizar una revisión de este grupo y sus representaciones [38].

El grupo S_3 describe la permutación de tres elementos $\{x_1, x_2, x_3\}$, donde el total de combinaciones es

$$e : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (3.3)$$

$$a_1 : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{x_2, x_1, x_3\}, \quad (3.4)$$

$$a_2 : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{x_3, x_2, x_1\}, \quad (3.5)$$

$$a_3 : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_2\}, \quad (3.6)$$

$$a_4 : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{x_3, x_1, x_2\}, \quad (3.7)$$

$$a_5 : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_1\}. \quad (3.8)$$

Es decir, el grupo contiene un total de seis elementos (tiene orden seis); sin embargo, algunos elementos pueden obtenerse a partir de operaciones de otros elementos, por ejemplo

$$a_1 a_2 = a_5, \quad (3.9)$$

$$a_2 a_1 = a_4, \quad (3.10)$$

$$a_4 a_2 = a_2 a_1 a_2 = a_3. \quad (3.11)$$

Si se redefine $a_1 = a$ y $a_2 = b$, entonces todos los elementos del grupo quedan definidos de la siguiente manera

$$\{e, a, b, ab, ba, bab\}, \quad (3.12)$$

donde se debe notar que $bab = aba$. De esta forma los generadores de S_3 son a y b .

Una manera usual de visualizar la acción del grupo es como rotaciones de un triángulo equilátero, donde a, b, bab son reflexiones del triángulo y ab, ba son rotaciones por $2\pi/3$ (ver figura 3.1). Para los elementos de S_3 también se satisface que

$$a^2 = b^2 = (bab)^2 = \mathbf{1} \quad (3.13)$$

$$(ab)^3 = (ba)^3 = \mathbf{1}, \quad (3.14)$$

lo que nos permite agrupar los elementos en tres tipos de acción (invariante, rotación y reflexión), conocidas como clases de conjugación

$$C_1 : \{e\}, \quad C_2 : \{ab, ba\}, \quad C_3 : \{a, b, bab\}, \quad (3.15)$$

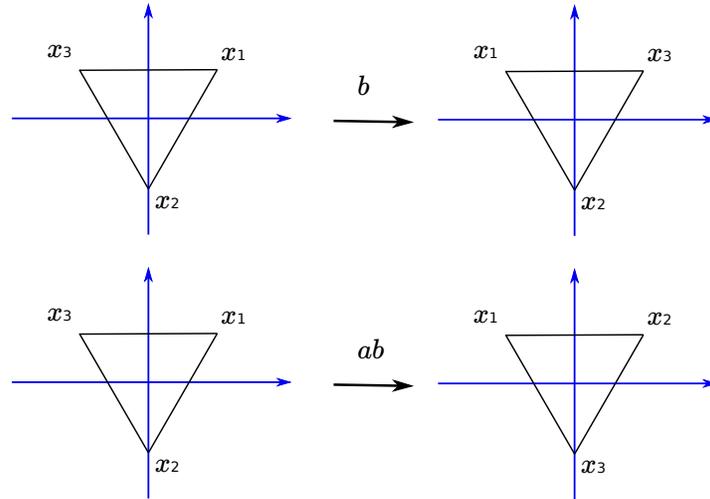


Figura 3.1: Ejemplo de la acción de la reflexión b y la rotación ab sobre un triángulo equilátero.

donde el subíndice indica el número de elementos en cada clase.

Un resultado importante en teoría de grupos indica que el número de representaciones irreducibles es igual al número de clases de conjugación, y utilizando la relación de ortogonalidad en S_3 , permite construir un sistema de ecuaciones para encontrar la dimensión de las representaciones irreducibles. Este sistema de ecuaciones es

$$\sum_n m_n = 3 \quad (3.16)$$

$$\sum_n m_n n^2 = 6 \quad (3.17)$$

donde m_n indica el número de representaciones irreducibles de dimensión n .

La única solución que satisface el sistema de ecuaciones es $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$, es decir, hay dos representaciones irreducibles de dimensión 1 y una representación de dimensión 2.

Otro hecho particular de las clases de conjugación es la característica de cada clase de conjugación, que en una representación dada, es la traza de la representación. En la tabla 3.1 se han resumido las características de S_3 para cada representación. La representación que no es trivial corresponde a la dimensión 2, la característica en esta dimensión permite encontrar una representación adecuada. Para lograrlo, se hará uso de la expresión (3.13) y de la clase de conjugación C_3 cuya característica en la representación de dimensión 2 es 0. Definiendo a como

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

se puede proponer a b como

$$b = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

	χ_1	$\chi_{1'}$	χ_2
C_1	1	1	2
C_2	1	1	-1
C_3	1	-1	0

Tabla 3.1: Características χ de cada representación para S_3 [38].

Por lo tanto, los elementos del grupo restantes quedan definidos como

$$bab = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$ab = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$ba = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

donde θ es el ángulo de inclinación de los ejes de simetría del triángulo equilátero.

3.3. Grupos modulares

Las simetrías modulares ya se han implementado en algunas áreas de la física como en modelos de branas magnetizadas [39, 40], compactificación de orbifolds [41–44], entre otros [45–50]. El grupo de simetría S_3 mencionado en la sección anterior, ha dado buenos acercamientos respecto a la solución de los problemas de la física de partículas [9–11, 51]. En busca de una nueva simetría que permita explicar los patrones de mezcla, se ha propuesto la simetría modular como una alternativa a través del isomorfismo entre el grupo modular finito Γ_2 y S_3 . En esta sección se hará una descripción breve sobre la definición y propiedades del grupo modular como también de las formas modulares y su relación con S_3 . Parte de la información aquí mencionada se puede encontrar en [3, 52–54].

Para definir los grupos modulares finitos, se debe definir primero el grupo modular Γ como

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}. \quad (3.23)$$

A partir de este grupo, se define la transformación inhomogénea (fraccionaria) γ sobre un parámetro τ como

$$\gamma(\tau) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\tau) \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \quad (3.24)$$

con $\tau \in \hat{\mathbb{C}}$ ($\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} - \{\infty\}$). Es de notar que las matrices $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ y $-\mathbf{1}_{2 \times 2}$ llevan a la misma transformación, por lo cual las matrices asociadas a γ forman el grupo $\bar{\Gamma} \equiv PSL_2(\mathbb{Z}) =$

$SL_2(\mathbb{Z})/\{\mathbf{1}_{2 \times 2}, -\mathbf{1}_{2 \times 2}\}$. Este grupo puede ser generado por

$$\begin{aligned} S &: \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \\ T &: \tau \rightarrow \tau + 1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

que en Γ corresponden a las matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

que deben satisfacer

$$S^2 = \mathbf{1} \quad \text{y} \quad (ST)^3 = \mathbf{1}. \quad (3.27)$$

Una característica importante sobre esta transformación es que aplica únicamente sobre el semiplano complejo superior \mathcal{H} definido como

$$\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}, \quad (3.28)$$

ya que si $\tau \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Im}[\gamma(\tau)] &= \text{Im}\left[\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right] = \text{Im}\left[\frac{(a\tau + b)(c\tau + d)^*}{|c\tau + d|^2}\right] \\ &= \frac{1}{|c\tau + d|^2} \text{Im}[ac|\tau|^2 + ad\tau + bc\tau^* + bd] \\ &= \frac{1}{|c\tau + d|^2} (ad\text{Im}[\tau] + bc\text{Im}[\tau^*]) \\ &= \frac{1}{|c\tau + d|^2} \text{Im}[\tau], \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se han utilizado las relaciones $\text{Im}[\tau] = -\text{Im}[\tau^*]$ y $ad - bc = 1$.

Como $\tau \in \mathcal{H}$, entonces, $\text{Im}[\tau] > 0$. Esto permite concluir que $\text{Im}[\gamma(\tau)] > 0$, es decir que γ actúa de \mathcal{H} a \mathcal{H} .

Para definir los grupos finitos que se utilizarán en este trabajo, se debe definir primero los subgrupos del grupo modular conocidos como subgrupos de congruencia o también conocidos como grupos de congruencia principal homogéneos de nivel N , $\Gamma(N)$. Se definen imponiendo una restricción de modularidad sobre las entradas de las matrices en Γ , esto es

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (3.30)$$

Similarmente, se puede definir la transformación inhomogénea correspondiente $\gamma(N)$ cuyas matrices asociadas pertenecen a $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)/\{\mathbf{1}_{2 \times 2}, -\mathbf{1}_{2 \times 2}\}$. En la definición (3.30) se observa que para el caso particular $N = 1$ se obtiene el grupo Γ ya que todas las matrices de Γ son iguales a la matriz identidad módulo 1 y que tanto para $N = 1$ y $N = 2$, la matriz identidad $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ y $-\mathbf{1}_{2 \times 2}$ son indistinguibles, es decir, llevan a la misma transformación en $\gamma(N)$.

Como $\bar{\Gamma}(N)$ es un subgrupo normal de $\bar{\Gamma}$, se puede definir el grupo modular finito Γ_N como el grupo cociente

$$\Gamma_N \equiv \bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}(N). \quad (3.31)$$

Algunas propiedades de grupos cocientes y clases laterales se pueden encontrar en el apéndice A. Se puede mostrar que existe un isomorfismo entre algunos grupos modulares finitos y ciertos grupos de rotaciones de polígonos regulares. Estos isomorfismos son

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &\simeq S_3 \\ \Gamma_3 &\simeq A_4 \\ \Gamma_4 &\simeq S_4 \\ \Gamma_5 &\simeq A_5. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para $N > 5$, los isomorfismos a grupos de simetría se hace más complejo de encontrar [33]. En la tabla 3.2 se presentan el orden de diferentes grupos modulares finitos $|\Gamma_N|$. Estos órdenes están determinados por la expresión

$$|\Gamma_N| = \frac{1}{2}N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad N > 2, \quad (3.33)$$

con p un número primo. En el capítulo 4 se hará mayor énfasis en el isomorfismo entre Γ_2 y S_3 . Se observa que para $\Gamma(N)$, el generador T cumple

$$T^N \in \Gamma(N). \quad (3.34)$$

Esto sucede porque

$$T^N = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}. \quad (3.35)$$

La modularidad aritmética indica que $a = b \pmod{N}$ es equivalente a $a - b = kN$, con k siendo algún entero. Para T^N esta condición se satisface incluso para la entrada (12), ya que $N - 0 = kN$ si $k = 1$. De esta forma, surge una nueva condición en los generadores para $\bar{\Gamma}$. Ahora deben satisfacer

$$\begin{aligned} S^2 &= \mathbf{1} \\ (ST)^3 &= \mathbf{1} \\ T^N &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Existen ciertas funciones holomórficas que dependen del módulo τ , que bajo el grupo Γ transforman como

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad (3.37)$$

conocidas como formas modulares de peso k . Puesto que la matriz identidad y su negativo equivalen a la misma transformación en $\bar{\Gamma}$, entonces k debe ser un número par. Esto se debe a que para 1, la forma modular transforma como

$$f(\tau) = 1^k f(\tau) \quad (3.38)$$

N	$d_k(\Gamma(N))$	$ \Gamma_N $	Γ_N
2	$k/2 + 1$	6	S_3
3	$k + 1$	12	A_4
4	$2k + 1$	24	S_4
5	$5k + 1$	60	A_5

Tabla 3.2: Dimensión de los espacios vectoriales formados por los grupos cocientes Γ_N en función del peso k . En la tercera columna se presenta el orden de $|\Gamma_N|$ desde $N = 2$ hasta $N = 5$ [5].

y para -1 transforma como

$$f(\tau) = (-1)^k f(\tau). \quad (3.39)$$

Como la transformación debe ser equivalente en los dos casos, entonces, $1^k = (-1)^k$, que se satisface si k cumple la propiedad de ser par. La anterior propiedad no se cumple en general para $\Gamma(N)$ ya que $-1_{2 \times 2}$ no pertenece a $\Gamma(N)$ para $N > 2$. Otra propiedad de las formas modulares es que las funciones constantes en \mathcal{H} son formas modulares de peso cero y que las funciones cero son formas modulares de cualquier peso. Para T^N , las formas modulares transforman como

$$f(T^N \tau) = f(\tau + N) = f(\tau), \quad (3.40)$$

es decir, $f(\tau)$ es periódica en \mathcal{H} , lo que permite desarrollar en series de Fourier [3, 52]

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad (3.41)$$

con $q = e^{2\pi i \tau}$. El conjunto de formas modulares forma un espacio vectorial denotado por $d_k(\Gamma(N))$. La dimensión de los espacios vectoriales para algunos grupos cocientes Γ_N , se muestra en la tabla 3.2 [5]. Un tipo especial de formas modulares son las cusp formas (cusp forms) que se definen como las formas modulares cuyo primer término a_0 en su expansión en series, es cero. Las función Eta de Dedekind $\eta(\tau)$ son un ejemplo de cusp forma y se utilizan para crear nuevas formas modulares, como será el caso más adelante. Esta función se define como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad (3.42)$$

donde $q = e^{2\pi i \tau}$.

Puesto que las formas modulares forman un espacio vectorial, se puede mostrar que para una representación unitaria de Γ_N , las formas modulares transforman como [5, 33]

$$f(\tau) \rightarrow (c\tau + d)^k \rho(\gamma) f(\tau), \quad (3.43)$$

donde $f(\tau) = (f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_n(\tau))^T$, con $n = d_k(\Gamma(N))$ y $\rho(\gamma)$ son matrices unitarias de la representación del grupo que cumplen

$$\rho(S)^2 = \mathbf{1}_{n \times n}, \quad \rho(T)^N = \mathbf{1}_{n \times n}, \quad \rho(ST)^3 = \mathbf{1}_{n \times n}. \quad (3.44)$$

La importancia de las formas modulares aparece en el momento en que se describen los diferentes acoples de quarks en la matriz de masas. El requerimiento de que el lagrangiano debe ser invariante de un grupo de simetría, que en este caso será S_3 , limita la cantidad de parámetros libres. Ahora, el requerimiento de invariancia modular, es decir, peso modular cero, restringe la forma que pueden tener estos parámetros libres del modelo, particularmente, en el sector de Yukawa. Esto ocurre porque a cada campo de quarks se le debe asignar un peso modular, que junto al peso modular de las formas, debe dar cero. Existe cierta libertad para escoger el peso modular de los campos, esto se debe a que los campos no se toman como formas modulares sino que se asume que transforman de la misma manera. Así, el peso modular en la transformación de los campos podría ser negativo o impar, algo que no es posible para las formas modulares. Esto limita la cantidad de términos posibles, ya que no todos los acoples podrán satisfacer dicha restricción y, de esta forma, la matriz de masas de quarks tendrá una estructura que depende, en gran medida, de las formas modulares usadas, cuya dependencia es de un único parámetro complejo τ .

Capítulo 4

Formas modulares para simetría S_3 y tres dobletes de Higgs

En los capítulos anteriores se ha mencionado cómo ha sido utilizada la simetría del grupo S_3 para extender el Modelo Estándar. Una de las razones es la diferencia de masa que hay entre la tercera familia y las primeras dos. Esta asimetría puede ser tratada con S_3 debido a la forma que tienen sus representaciones irreducibles, esto es $\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}' \oplus \mathbf{2}$, ya que la tercera familia, tanto la parte izquierda como la derecha, puede ser asignada en el singlete simétrico o antisimétrico lo que lleva a matriz jerárquica.

En este capítulo se introducirá el modelo propuesto que extiende el Modelo Estándar con el grupo S_3 modular. Para ello, se hará una mención de modelos multi Higgs con simetría S_3 [10] y se introducirá el potencial de Higgs con tres dobletes electrodébiles y su minimización [55].

A partir de ahora, los generadores de S_3 se tomarán para $\theta = 4\pi/3$. Por lo tanto, en la representación de dimensión 2 serán

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & a &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & b &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & (4.1) \\ ab &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & ba &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & bab &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es de interés encontrar las expresiones que toman los productos tensoriales de dos dobletes de S_3 bajo la representación anterior. Las reglas de producto para dos dobletes $x = \{x_1, x_2\}$ y $y = \{y_1, y_2\}$ son las siguientes

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_2 = (x_1y_1 + x_2y_2)_1 \oplus (x_1y_2 - x_2y_1)_{1'} \oplus \begin{pmatrix} x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1y_1 - x_2y_2 \end{pmatrix}_2 \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 \otimes (y')_{1'} = \begin{pmatrix} -x_2y' \\ x_1y' \end{pmatrix}_2 \quad (4.3)$$

$$(x')_{1'} \otimes (y')_{1'} = (x'y')_1. \quad (4.4)$$

Estas reglas son utilizadas para descomponer los productos tensoriales en el lagrangiano del sector de Yukawa una vez se hacen las asignaciones en dobletes y singletes del grupo.

	(f_{1L}, f_{2L})	(f_{1R}, f_{2R})	f_{SL}	f_{SR}	(H_1, H_2)	H_S	H_A
$SU(2)$	2	1	2	1	2	2	2
S_3	2	2	1	1	2	1	1'

 Tabla 4.1: Números cuánticos de $SU(2)$ y S_3 para el modelo con cuatro dobletes de Higgs.

4.1. Modelos multi-Higgs con simetría S_3

El Modelo Estándar, estudiado en el capítulo 2, considera solo un doblete de Higgs para explicar la generación de masas con el mecanismo de Higgs. Sin embargo, podrían existir más. Algunos modelos multi Higgs con simetría S_3 han sido estudiados en [9, 56–63].

Se han trabajado, principalmente, modelos multi Higgs con simetría S_3 con uno, tres y cuatro dobletes de Higgs. En esta sección se hará una revisión del modelo con tres dobletes de Higgs y se harán algunos comentarios sobre los resultados en algunos de los otros modelos.

En el caso de un doblete de Higgs, este se asigna en el singlete simétrico 1 pero no es suficiente para generar una matriz de masa adecuada. Es usual asignar al singlete 1 la tercera familia de partículas, en este caso la obtención de una matriz de masa adecuada se logra al considerar una simetría de sabor permutacional $S_{3L} \otimes S_{3R}$ y su ruptura [58].

En el caso de cuatro dobletes de Higgs, dos de ellos se asignarán en un doblete de S_3 y los restantes se asignarán en los singletes simétrico y antisimétrico, respectivamente. Los otros campos se asignan de la siguiente manera: la primera y segunda familia se asignan en un doblete de S_3 , de tal forma que los dos dobletes electrodébiles forman un doblete, de la misma manera la parte derecha de los quarks tipo up de las primeras dos familias y también para los tipo down. la tercera familia de quarks se asignan a al singlete simétrico de S_3 . En la tabla 4.1 se muestran las asignaciones mencionadas. La notación a usar será la siguiente

$$f_{SL} = (b_L, t_L), \quad f_{SR} = t_R, \quad f_{SR} = b_R$$

$$\begin{pmatrix} f_{1L} \\ f_{2L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_L, d_L) \\ (c_L, s_L) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{1R} \\ f_{2R} \end{pmatrix}_{f=u} = \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{1R} \\ f_{2R} \end{pmatrix}_{f=d} = \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Así, el lagrangino en el sector de Yukawa es [10]

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{Y_f} = & Y_1^f (\bar{f}_{SL} f_{SR} H_S) + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_2^f (\bar{f}_{1S} f_{1R} + \bar{f}_{2S} f_{2R}) H_S + \\ & \frac{1}{2} Y_3^f [(\bar{f}_{1L} H_2 + \bar{f}_{2L} H_1) f_{1R} + (\bar{f}_{1L} H_1 - \bar{f}_{2L} H_2) f_{2R}] + \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} Y_4^f (\bar{f}_{1L} f_{2R} - \bar{f}_{2L} f_{1R}) H_A + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_5^f (\bar{f}_{1L} H_1 + \bar{f}_{2L} H_2) f_{SR} + \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} Y_6^f [\bar{f}_{SL} (H_1 f_{1R} + H_2 f_{2R})] + h.c., \quad f = d, e, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde Y_j^f , con $j = 1 \cdots 6$, son los acoples de Yukawa. La matriz de masa después del rompimiento espontáneo de simetría es

$$\mathcal{M}_{S_3}^f = \begin{pmatrix} \sqrt{2}Y_2^f v_S + Y_3^f v_2 & Y_3^f v_1 + \sqrt{2}Y_4^f v_A & \sqrt{2}Y_5^f v_1 \\ Y_3^f v_1 - \sqrt{2}Y_4^f v_A & \sqrt{2}Y_2^f v_S - Y_3^f v_2 & \sqrt{2}Y_5^f v_2 \\ \sqrt{2}Y_6^f v_1 & \sqrt{2}Y_6^f v_2 & 2Y_1^f v_S \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

con v_1, v_2, v_S , y v_A , los VEVs de los cuatro Higgses.

4.1.1. Tres dobletes de Higgs

Para el caso de tres dobletes de Higgs, se va a considerar una asignación similar a mencionada anteriormente pero con $H_A \rightarrow 0$. De manera, la asignación de los campos de Higgs es similar a los campos de fermiones con el fin de conservar la estructura jerárquica de la matriz de masa. Por lo tanto, las asignaciones de los campos de Higgs pueden ser de dos formas: en $\mathbf{2}$ y $\mathbf{1}$ o en $\mathbf{2}$ y $\mathbf{1}'$. Las matrices de masa para este caso y el caso donde la tercera familia y el tercer campo de Higgs se asignan al singlete antisimétrico, se presentan en la tabla 4.2, donde se han definido las cantidades

$$\begin{aligned} \mu_1^f &\equiv \sqrt{2}Y_2^f v_S, & \mu_2^f &\equiv Y_3^f w_2, & \mu_3^f &\equiv 2Y_1^f v_S, \\ \mu_4^f &\equiv Y_3^f w_1, & \mu_5^f &\equiv \sqrt{2}Y_4^f v_A, & \mu_6^f &\equiv \sqrt{2}Y_5^f w_1, \\ \mu_7^f &\equiv \sqrt{2}Y_5^f w_2, & \mu_8^f &\equiv \sqrt{2}Y_6^f w_1, & \mu_9^f &\equiv \sqrt{2}Y_6^f w_2, \\ \nu_3^f &\equiv 2Y_1^f v_A. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para cuatro dobletes de Higgs, se presenta una tabla similar en el apéndice B.

Es de notar que con estos modelos es posible construir una matriz de ceros de textura o una matriz NNI (Nearest Neighbour Interaction) que son útiles para obtener una matriz de mezcla de quarks adecuada.

4.1.2. Potencial de Higgs para tres dobletes de Higgs con simetría S_3

La introducción de un potencial de Higgs se puede realizar si a cada acople del potencial se le asigna un peso modular cero que, junto con los dobletes de Higgs de peso cero, darán como resultado un potencial invariante modular. El potencial de Higgs a considerar está compuesto por tres dobletes electrodébiles y que, además, respete la simetría adicional de S_3 . El potencial más general bajo esta simetría se escribe como

$$\begin{aligned} V &= \mu_1^2 \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2 \right) + \mu_0^2 \left(H_S^\dagger H_S \right) + \frac{a}{2} \left(H_S^\dagger H_S \right)^2 + b \left(H_S^\dagger H_S \right) \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2 \right) \\ &+ \frac{c}{2} \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2 \right)^2 + \frac{d}{2} \left(H_1^\dagger H_2 - H_2^\dagger H_1 \right)^2 + e f_{ijk} \left(\left(H_S^\dagger H_i \right) \left(H_j^\dagger H_k \right) + h.c. \right) \\ &+ f \left\{ \left(H_S^\dagger H_1 \right) \left(H_1^\dagger H_S \right) + \left(H_S^\dagger H_2 \right) \left(H_2^\dagger H_S \right) \right\} + \frac{g}{2} \left\{ \left(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2 \right)^2 + \left(H_1^\dagger H_2 + H_2^\dagger H_1 \right)^2 \right\} \\ &+ \frac{h}{2} \left\{ \left(H_S^\dagger H_1 \right) \left(H_S^\dagger H_1 \right) + \left(H_S^\dagger H_2 \right) \left(H_S^\dagger H_2 \right) + \left(H_1^\dagger H_S \right) \left(H_1^\dagger H_S \right) + \left(H_2^\dagger H_S \right) \left(H_2^\dagger H_S \right) \right\}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

	\mathcal{F}_L	\mathcal{F}_R	Matrices de masa	Posibles texturas de masas
A	$\mathbf{2}, \mathbf{1}$	$\mathbf{2}, \mathbf{1}$	$\begin{pmatrix} \mu_1^f + \mu_2^f & \mu_4^f & \mu_6^f \\ \mu_4^f & \mu_1^f - \mu_2^f & \mu_7^f \\ \mu_8^f & \mu_9^f & \mu_3^f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \mu_2^f sc(3-t^2) & 0 \\ \mu_2^f sc(3-t^2) & -2\mu_2^f c^2(1-3t^2) & \mu_7^f/c \\ 0 & \mu_7^f/c & \mu_3^f - \mu_1^f - \mu_2^f c^2(1-3t^2) \end{pmatrix}$
A'				$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_2^f & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_2^f & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_7^f \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_9^f & \mu_3^f - \mu_1^f \end{pmatrix}$
B	$\mathbf{2}, \mathbf{1}'$	$\mathbf{2}, \mathbf{1}'$	$\begin{pmatrix} \mu_1^f + \mu_2^f & \mu_4^f & \mu_7^f \\ \mu_4^f & \mu_1^f - \mu_2^f & -\mu_6^f \\ -\mu_9^f & \mu_8^f & \mu_3^f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\mu_4^f c^2(1-3t^2) & 0 \\ -\mu_4^f c^2(1-3t^2) & 2\mu_4^f sc(3-t^2) & -\mu_6^f/c \\ 0 & -\mu_6^f/c & \mu_3^f - \mu_1^f + \mu_4^f sc(3-t^2) \end{pmatrix}$
B'				$\begin{pmatrix} 0 & -2\mu_4^f & 0 \\ -2\mu_4^f & 0 & -2\mu_6^f \\ 0 & 2\mu_8^f & \mu_3^f - \mu_1^f \end{pmatrix}$

Tabla 4.2: Matrices de masa en la tercera columna para tres dobletes de Higgs. \mathcal{F}_L y \mathcal{F}_R indican la asignación de las partes izquierda y derecha de los campos, respectivamente, donde las primeras dos familias están en $\mathbf{2}$ y la tercera familia en $\mathbf{1}$ o $\mathbf{1}'$. El caso A presenta la matriz cuando la tercera familia está asignada al singlete simétrico. El caso B presenta la matriz cuando la tercera familia está asignada al singlete antisimétrico. La cuarta columna es una rotación de las matrices de la tercera columna por un ángulo θ , donde se han definido $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$ y $t = \tan \theta$. A' es el caso particular con $\theta = \pi/6$. B' es el caso particular con $\theta = \pi/3$. [10]

donde $f_{112} = f_{121} = f_{211} = -f_{222} = 1$ y a, b, c, d, e, f, g y h son los autoacoplamientos. Al imponer las condición de la primera derivada del potencial igual a cero en la minimización, surge una relación de dos VEVs dada por [55]

$$v_1^2 = 3v_2^2, \quad (4.10)$$

donde los VEVs están denotados como

$$\langle 0 | H_1 | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1; \quad \langle 0 | H_2 | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2; \quad \langle 0 | H_s | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}v_s, \quad (4.11)$$

y se debe satisfacer que $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_s^2} = v = 246 \text{ GeV}$. La relación (4.10) será de utilidad más adelante para reducir el número de parámetros libres.

4.2. Construcción de formas modulares para S_3

Es necesario construir las formas modulares para la representación $\mathbf{2}$ de S_3 . El procedimiento para su construcción está basado en los métodos usados en [5] por Feruglio y extendido a S_3 en [4] por Kobayashi.

Primero se considera la transformación bajo Γ de la expresión $\frac{d}{d\tau} \log(\sum_i f_i(\tau))$, que es una forma

modular de peso 2. Para demostrarlo se debe notar que

$$\begin{aligned}
 d\tau &\rightarrow d\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \\
 &= \frac{a(c\tau + d)d\tau - (a\tau + b)cd\tau}{(c\tau + d)^2} \\
 &= d\tau \left(\frac{ac\tau + ad - ac\tau - bc}{(c\tau + d)^2}\right) \\
 &= \frac{ad - bc}{(c\tau + d)^2}d\tau \\
 &= (c\tau + d)^{-2}d\tau,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

es decir que

$$\frac{d}{d\tau} \rightarrow (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau}. \tag{4.13}$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \log\left(\sum_i f_i(\tau)\right) &= \sum_i \frac{1}{f_i(\tau)} \frac{d}{d\tau} f_i(\tau) \\
 &\rightarrow \sum_i \frac{1}{(c\tau + d)^{k_i} f_i(\tau)} (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau} [(c\tau + d)^{k_i} f_i(\tau)] \\
 &= \sum_i \frac{(c\tau + d)^2 [k_i c (c\tau + d)^{k_i - 1} f_i(\tau) + (c\tau + d)^{k_i} \frac{d}{d\tau} f_i(\tau)]}{(c\tau + d)^{k_i} f_i(\tau)} \\
 &= \sum_i (c\tau + d) k_i c + \sum_i (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau} \log f_i(\tau).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Así, si $\sum_i k_i = 0$, la derivada del logaritmo de f_i es una forma modular de peso 2.

Una candidata a forma modular de peso 2 puede ser construida a partir de la función Eta de Dedekind, que se define como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \tag{4.15}$$

donde $q = e^{2\pi i \tau}$. La función $\eta(\tau)$ es un tipo especial de forma modular debido a su peso modular de $1/2$ y es útil para construir otras formas modulares ya que, bajo transformaciones de los generadores S y T , se obtiene un álgebra cerrada. Las transformaciones son

Bajo T

$$\begin{aligned}
 \eta(2\tau) &\rightarrow e^{i\pi/6} \eta(2\tau), \\
 \eta(\tau/2) &\rightarrow \eta((\tau + 1)/2), \\
 \eta((\tau + 1)/2) &\rightarrow e^{i\pi/12} \eta(\tau/2).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

y bajo S

$$\begin{aligned}\eta(2\tau) &\rightarrow \sqrt{\frac{-i\tau}{2}}\eta(\tau/2), \\ \eta(\tau/2) &\rightarrow \sqrt{-i3\tau}\eta(2\tau), \\ \eta((\tau+1)/2) &\rightarrow e^{-i\pi/12}\sqrt{-i\tau}\eta((\tau+1)/2).\end{aligned}\tag{4.17}$$

La forma modular general en términos de la función $\eta(\tau)$ se puede escribir como

$$Y(\alpha, \beta, \gamma|\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\alpha \log \eta \left(\frac{\tau}{2} \right) + \beta \log \eta \left(\frac{\tau+1}{2} \right) + \gamma \log \eta(2\tau) \right),\tag{4.18}$$

que satisface

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ Y(\alpha, \beta, \gamma|\tau) &\xrightarrow{S} \tau^2 Y(\gamma, \beta, \alpha|\tau) \\ Y(\alpha, \beta, \gamma|\tau) &\xrightarrow{T} Y(\beta, \alpha, \gamma|\tau)\end{aligned}\tag{4.19}$$

ya que

$$\frac{d}{d\tau} \xrightarrow{S} \tau^2 \frac{d}{d\tau} \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\tau} \xrightarrow{T} \frac{d}{d\tau}.\tag{4.20}$$

Puesto que $\Gamma_2 \simeq S_3$, es necesario utilizar una representación de los generadores de S y T en S_3 que satisfaga $S^2 = T^2 = (ST)^2 = 1$. La representación a utilizar es la siguiente

$$\rho(S) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\tag{4.21}$$

donde se observa que también son los generadores de S_3 . De esta forma, para un doblete definido como $Y(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau))^T$ las expresiones anteriores quedarán como

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ Y(S\tau) &= Y(-1/\tau) = \tau^2 \rho(S) Y(\tau) \\ Y(T\tau) &= Y(\tau+1) = \rho(T) Y(\tau)\end{aligned}\tag{4.22}$$

o utilizando la forma general de la forma modular de peso 2

$$\begin{aligned}Y(\alpha, \beta, \gamma|\tau) &\xrightarrow{S} \tau^2 \rho(S) Y(\gamma, \beta, \alpha|\tau) \\ Y(\alpha, \beta, \gamma|\tau) &\xrightarrow{T} \rho(T) Y(\beta, \alpha, \gamma|\tau).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Las últimas dos ecuaciones generan un sistema de ecuaciones que relacionan los parámetros α, β y γ . Bajo T , la primera componente se puede reescribir como

$$\frac{d}{d\tau} \left(\log \eta \left(\frac{\tau}{2} \right) [\beta + \alpha] + \log \eta \left(\frac{\tau+1}{2} \right) [\alpha + \beta] + \log \eta(2\tau) [2\gamma] \right) = 0,\tag{4.24}$$

que lleva a la relación $\alpha = -\beta$ y $\gamma = 0$. Sustituyendo las relaciones anteriores, se observa que $Y_1(\tau)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \left(\alpha \log \eta \left(\frac{\tau}{2} \right) + \alpha \log \eta \left(\frac{\tau+1}{2} \right) \right) \\ &= C_1 Y(1, -1, 0|\tau), \end{aligned} \quad (4.25)$$

con $C_1 = \alpha$. Con un procedimiento similar y Utilizando (4.22) se calcula la otra componente, quedando el doblete de formas modulares de S_3 como

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= C_1 Y(1, -1, 0|\tau) \\ Y_2(\tau) &= C_2 Y(1, 1, -2|\tau) \end{aligned} \quad (4.26)$$

La transformación bajo S relaciona las constantes C_1 y C_2 donde se obtiene la relación siguiente

$$C_1 = \sqrt{3}C_2. \quad (4.27)$$

Las formas modulares de peso 2 para S_3 , con $C_2 = i/2\pi$, son

$$Y_1(\tau) = \frac{\sqrt{3}i}{4\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/2)}{\eta(\tau/2)} - \frac{\eta'((\tau+1)/2)}{\eta((\tau+1)/2)} \right), \quad (4.28)$$

$$Y_2(\tau) = \frac{i}{4\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/2)}{\eta(\tau/2)} + \frac{\eta'((\tau+1)/2)}{\eta((\tau+1)/2)} - \frac{8\eta'(2\tau)}{\eta(2\tau)} \right), \quad (4.29)$$

donde la prima indica la derivada respecto a τ . En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran la parte real e imaginaria de las formas modulares $Y_1(\tau)$ y $Y_2(\tau)$, respectivamente. Según la asignación que se realice, serán de utilidad las formas modulares de peso cuatro. Se obtienen del producto tensorial del doblete de formas modulares de peso dos [4], por lo tanto, usando (4.2)

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = Y_s^{(4)} + \begin{pmatrix} Y_1^{(4)} \\ Y_2^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

donde el singlete antisimétrico se anula. Además, se ha definido

$$\begin{aligned} Y_s^{(4)} &= Y_1^2 + Y_2^2 \\ Y_1^{(4)} &= 2Y_1Y_2 \\ Y_2^{(4)} &= Y_1^2 - Y_2^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.3. Asignaciones bajo S_3 y matriz de masas

Hasta ahora se han introducido los elementos para construir un modelo de tres dobletes de Higgs bajo simetría S_3 modular, esto es, $SU(3)_C \times SU_L(2) \times U_y(1) \times \Gamma_2$. Es importante mencionar que se va a suponer que la transformación bajo el grupo modular también debe ser impuesta para los campos de quarks con el fin de asignarles un peso modular, es decir,

$$\phi \rightarrow (c\tau + d)^{k_\phi} \phi, \quad (4.32)$$

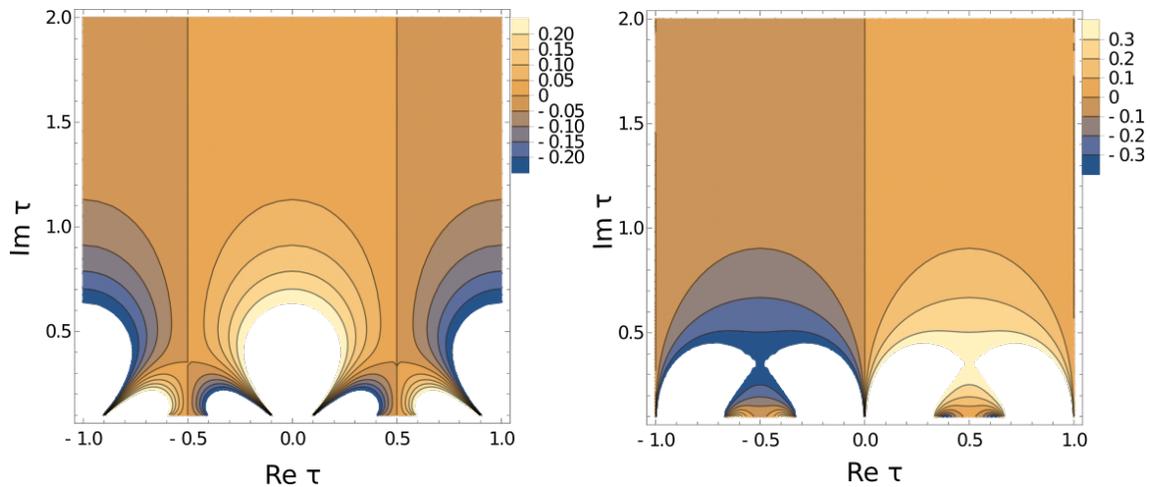


Figura 4.1: Parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de la forma modular $Y_1(\tau)$. El color naranja indica valores que tienden a hacia los positivos y el color azul indica valores que tienden hacia negativos. Los espacios en blanco son parte del corte al calcular cantidades muy pequeñas o muy grandes.

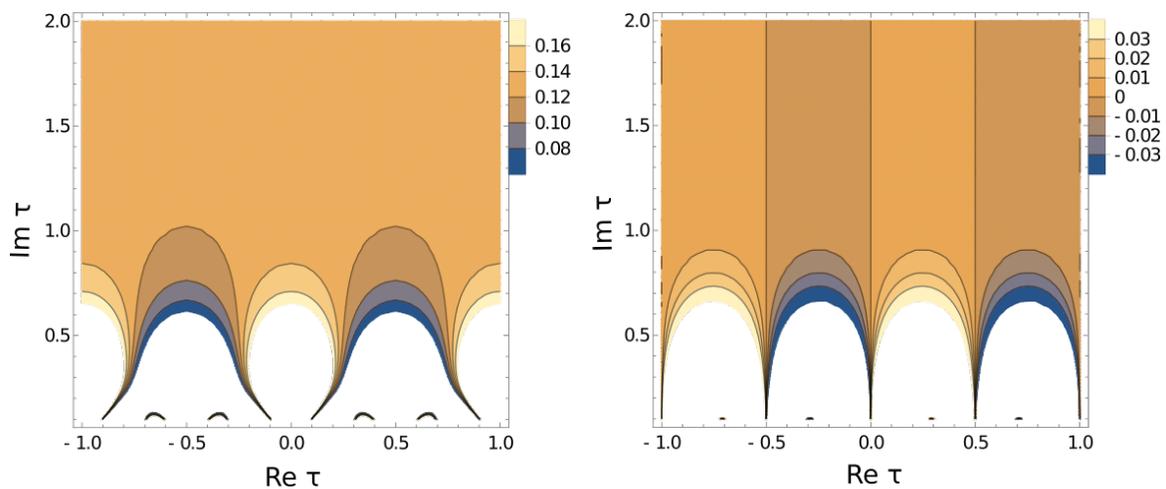


Figura 4.2: Parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de la forma modular $Y_2(\tau)$. El color naranja indica valores que tienden a hacia los positivos y el color azul indica valores que tienden hacia negativos. Los espacios en blanco son parte del corte al calcular cantidades muy pequeñas o muy grandes.

donde k_ϕ es el peso modular. Se debe aclarar que esta suposición podría motivarse si se considera a la simetría modular de los quarks como una simetría residual de una más fundamental en el límite a bajas energías. Puesto que los campos no son formas modulares, existe la libertad de escoger el peso modular en su transformación para obtener una matriz de masa adecuada.

Además de los campos de quarks y Higgs, se tendrán formas modulares que, para este caso, serán de peso dos y cuatro, agregando más restricciones sobre la forma del sector de Yukawa del lagrangiano. La asignación de los campos de quarks y Higgs para S_3 se realiza de tal forma que la suma de los pesos modulares sea cero, lo que implica que el lagrangiano es invariante modular. Existen diferentes opciones para la asignación, a pesar de ello, son limitadas las asignaciones que eviten un exceso de parámetros libres o por el contrario, matrices poco útiles para un modelo.

Como ejemplo, una asignación donde únicamente las formas modulares y los dobletes electrodébiles sean dobletes de S_3 y los pesos modulares sean -2 , excepto para los campos de Higgs, conllevan a matrices con 26 parámetros libres reales, en principio. En esta asignación, la forma de la matriz de masa (tanto para u y d) es

$$M = \begin{pmatrix} C_1 v_1 Y_1^{(4)} & C_2 v_2 Y_1^{(4)} & C_3 v_3 Y_1^{(4)} \\ C_1 v_1 Y_2^{(4)} & C_2 v_2 Y_2^{(4)} & C_3 v_3 Y_2^{(4)} \\ C_4 v_1 Y_s^{(4)} & C_5 v_2 Y_s^{(4)} & C_6 v_3 Y_s^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Puesto que esta asignación posee varios parámetros libres, no es conveniente, pues ya tendría tantos parámetros libres como tiene el Modelo Estándar.

La asignación propuesta es la siguiente: los dobletes electrodébiles izquierdos de la primera y segunda familia, Q_1 y Q_2 serán un doblete en S_3 , así mismo, los singletes derechos tipo up y tipo down, u_{1R} , u_{2R} y d_{1R} , d_{2R} . El doblete electrodébil izquierdo de la tercera familia, Q_3 , y los singletes derechos de la tercera familia, u_{3R} y d_{3R} serán singletes de S_3 . Para los Higgses, dos de ellos, H_1 y H_2 , formarán un doblete de S_3 , mientras que el tercero, H_s será un singlete simétrico. Respecto a los pesos modulares, todos los dobletes de S_3 tendrán peso -2 y los singletes y higgses tendrán peso 0. Estas asignaciones están resumidas en la tabla 4.3. Esta asignación permite escribir el lagrangiano en el sector de Yukawa como en Ec.(4.36), donde se han utilizado formas modulares de peso cuatro. Para comprimir la notación, se puede redefinir los dobletes de S_3 como

$$Q = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} u_{1R} \\ u_{2R} \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}; \quad (4.34)$$

$$Y^{(4)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(4)} \\ Y_2^{(4)} \end{pmatrix}; \quad Y^{(2)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(2)} \\ Y_2^{(2)} \end{pmatrix};$$

Así, el lagrangino en el sector de Yukawa es

	(Q_1, Q_2)	(q_1, q_2)	Q_3	q_3	(H_1, H_2)	H_s	$(Y_1^{(2,4)}(\tau), Y_2^{(2,4)}(\tau))$	$Y_s^{(4)}(\tau)$
$SU(2)$	2	1	2	1	2	2	1	1
S_3	2	2	1	1	2	1	2	1
k	-2	-2	0	0	0	0	(2, 4)	4

Tabla 4.3: Cargas, asignaciones y pesos modulares de $SU(2)$ y S_3 . El superíndice (2, 4) en las formas modulares indica que son de peso modular 2 o 4. El subíndice s indica el singlete simétrico de la forma modular de peso 4.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_y^{(u)} = & C_1 \bar{Q} \otimes u \otimes \tilde{H} \otimes Y^{(4)} + C_2 \bar{Q} \otimes u \otimes \tilde{H} \otimes Y_s^{(4)} + C_3 \bar{Q} \otimes u \otimes \tilde{H}_s \otimes Y^{(4)} \\
 & + C_4 \bar{Q} \otimes u \otimes \tilde{H}_s \otimes Y_s^{(4)} + C_5 \bar{Q} \otimes u_{3R} \otimes \tilde{H} \otimes Y^{(2)} + C_6 \bar{Q} \otimes u_{3R} \otimes \tilde{H}_s \otimes Y^{(2)} \\
 & + C_7 \bar{Q}_3 \otimes u \otimes \tilde{H} \otimes Y^{(2)} + C_8 \bar{Q}_3 \otimes u \otimes \tilde{H}_s \otimes Y^{(2)} + C_9 \bar{Q}_3 \otimes u_{3R} \otimes \tilde{H}_s + \text{h.c.}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Una vez se han aplicado las reglas del producto tensorial, el lagrangiano $\mathcal{L}_y^{(u)}$ toma la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_y^{(u)} = & C_1 \{ [\alpha + \gamma] (\bar{Q}_1 u_{1R} \tilde{H}_1 Y_1^{(4)} + \bar{Q}_2 u_{2R} \tilde{H}_2 Y_2^{(4)}) + [\alpha - \gamma] (\bar{Q}_1 u_{1R} \tilde{H}_2 Y_2^{(4)} + \bar{Q}_2 u_{2R} \tilde{H}_1 Y_1^{(4)}) \\
 & + [\beta + \gamma] (\bar{Q}_1 u_{2R} \tilde{H}_2 Y_1^{(4)} + \bar{Q}_2 u_{1R} \tilde{H}_1 Y_2^{(4)}) + [\gamma - \beta] (\bar{Q}_1 u_{2R} \tilde{H}_1 Y_2^{(4)} + \bar{Q}_2 u_{1R} \tilde{H}_2 Y_1^{(4)}) \} \\
 & + C_2 (\bar{Q}_1 u_{2R} \tilde{H}_1 Y_s^{(4)} + \bar{Q}_2 u_{1R} \tilde{H}_1 Y_s^{(4)} + \bar{Q}_1 u_{1R} \tilde{H}_2 Y_s^{(4)} - \bar{Q}_2 u_{2R} \tilde{H}_2 Y_s^{(4)}) \\
 & + C_3 (\bar{Q}_1 u_{2R} \tilde{H}_s Y_1^{(4)} + \bar{Q}_2 u_{1R} \tilde{H}_s Y_1^{(4)} + \bar{Q}_1 u_{1R} \tilde{H}_s Y_2^{(4)} - \bar{Q}_2 u_{2R} \tilde{H}_s Y_2^{(4)}) \\
 & + C_4 (\bar{Q}_1 u_{1R} \tilde{H}_s Y_s^{(4)} + \bar{Q}_2 u_{2R} \tilde{H}_s Y_s^{(4)}) \\
 & + C_5 (\bar{Q}_1 u_{3R} \tilde{H}_2 Y_1^{(2)} + \bar{Q}_2 u_{3R} \tilde{H}_1 Y_1^{(2)} + \bar{Q}_1 u_{3R} \tilde{H}_1 Y_2^{(2)} - \bar{Q}_2 u_{3R} \tilde{H}_2 Y_2^{(2)}) \\
 & + C_6 (\bar{Q}_1 u_{3R} \tilde{H}_s Y_1^{(2)} + \bar{Q}_2 u_{3R} \tilde{H}_s Y_2^{(2)}) \\
 & + C_7 (\bar{Q}_3 u_{1R} \tilde{H}_2 Y_1^{(2)} + \bar{Q}_3 u_{2R} \tilde{H}_1 Y_1^{(2)} + \bar{Q}_3 u_{1R} \tilde{H}_1 Y_2^{(2)} - \bar{Q}_3 u_{2R} \tilde{H}_2 Y_2^{(2)}) \\
 & + C_8 (\bar{Q}_3 u_{1R} \tilde{H}_s Y_1^{(2)} + \bar{Q}_3 u_{2R} \tilde{H}_s Y_2^{(2)}) \\
 & + C_9 \bar{Q}_3 u_{3R} \tilde{H}_s + \text{h.c.}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Después del rompimiento espontáneo de simetría, los elementos de matriz $M_{ij}^{(u)}$ quedan determinados por

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{(u)} &= (\alpha + \gamma)v_1Y_1^{(4)} + (\alpha - \gamma)v_2Y_2^{(4)} + C_2v_2Y_s^{(4)} + C_3v_sY_2^{(4)} + C_4v_sY_s^{(4)} \\
 M_{12}^{(u)} &= (\beta + \gamma)v_2Y_1^{(4)} + (\gamma - \beta)v_1Y_2^{(4)} + C_2v_1Y_s^{(4)} + C_3v_sY_1^{(4)} \\
 M_{13}^{(u)} &= C_5(v_2Y_1^{(2)} + v_1Y_2^{(2)}) + C_6v_sY_1^{(2)} \\
 M_{21}^{(u)} &= (\beta + \gamma)v_1Y_2^{(4)} + (\gamma - \beta)v_2Y_1^{(4)} + C_2v_1Y_s^{(4)} + C_3v_sY_1^{(4)} \\
 M_{22}^{(u)} &= (\alpha + \gamma)v_2Y_2^{(4)} + (\alpha - \gamma)v_1Y_1^{(4)} - C_2v_2Y_s^{(4)} - C_3v_sY_2^{(4)} + C_4v_sY_s^{(4)} \\
 M_{23}^{(u)} &= C_5(v_1Y_1^{(2)} - v_2Y_2^{(2)}) + C_6v_sY_2^{(2)} \\
 M_{31}^{(u)} &= C_7(v_2Y_1^{(2)} + v_1Y_2^{(2)}) + C_8v_sY_1^{(2)} \\
 M_{32}^{(u)} &= C_7(v_1Y_1^{(2)} - v_2Y_2^{(2)}) + C_8v_sY_2^{(2)} \\
 M_{33}^{(u)} &= C_9v_s,
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

con v_1 , v_2 y v_s los VEVs de los campos de Higgs. En este modelo los parámetros libres son α , β , γ , v_2 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 , C_7 , C_8 , C_9 y τ , aún así, la matriz refleja algunas simetrías entre sus componentes, lo que permitirá reducir o prescindir de algunos de ellos.

4.4. Cálculo de matriz V_{CKM}

Se desea obtener una matriz textura de ceros en la matriz de masa de quarks ya que así se puede obtener una V_{CKM} adecuada. La matriz de textura es

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^* & b & c \\ 0 & c^* & d \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Para satisfacer esta forma en la matriz de masas en se deben imponer las condiciones

$$M_{11} = 0 \quad M_{12} = M_{21}^* \quad M_{32} = M_{23}^* \quad M_{13} = M_{31} = 0., \tag{4.39}$$

que se satisfacen si

$$\begin{aligned}
 Re(\beta) &= 0; & C_3 &= 0; & C_4 &= 0; & C_5 &= C_7^*; \\
 C_6 &= -4(v_2/v_s)C_5; & C_8 &= -4(v_2/v_s)C_7; & \alpha &= -C_2 \in \mathbb{R} \\
 \tau &= i; & \gamma &= 0; & C_9, v_{1,2}, v_s &\in \mathbb{R}; .
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

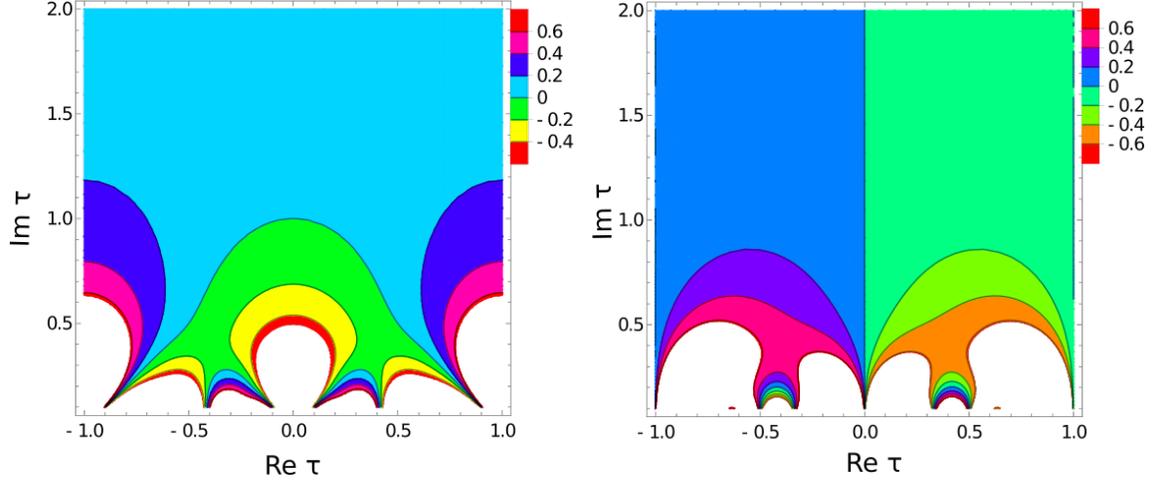


Figura 4.3: Parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de la expresión dada en M_{13} y M_{31} , es decir, $Y_2^{(2)}(\tau) - \sqrt{3}Y_1^{(2)}(\tau)$. Se observa que $Y_2^{(2)}(\tau) - \sqrt{3}Y_1^{(2)}(\tau) = 0$, tanto para su parte real como imaginaria, en el punto $\tau = i$, lo que garantiza que $M_{13} = M_{31} = 0$.

En el caso de la condición $M_{13} = M_{31} = 0$, la igualdad se satisface al utilizar las condiciones en C_6 y C_8 , la relación $v_1^2 = 3v_2^2$ que surge de minimizar el potencial y evaluar las formas modulares en $\tau = i$. Esta solución fue encontrada numéricamente, sin embargo, se cree que es posible demostrar la igualdad analíticamente. Al satisfacerse esta condición, también se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \sqrt{3}y_1 \\
 y_1^{(4)} &= 2\sqrt{3}y_1^2 \\
 y_2^{(4)} &= -2y_1^2 \\
 y_s^{(4)} &= 4y_1^2,
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

con $y_k = Y_k(i)$. La matriz de masa toma la forma

$$M^{(u)} = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{3}v_2y_1^2(C_2 + \beta) & 0 \\ 4\sqrt{3}v_2Y_2^2(C_2 - \beta) & -8v_2y_1^2C_2 & -4\sqrt{3}v_2y_1C_5 \\ 0 & -4\sqrt{3}v_2y_1C_5^* & C_9vs \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Para simplificar la notación, se definen parámetros

$$K_2 = 4\sqrt{3}v_2y_1^2C_2; \quad K_\beta = 4\sqrt{3}v_2y_1^2\beta; \quad K_5 = 4\sqrt{3}v_2y_1C_5; \quad K_9 = C_9vs \tag{4.43}$$

Entonces, la matriz de masa es

$$\hat{M}^{(u)} = \begin{pmatrix} 0 & K_2 + K_\beta & 0 \\ K_2 - K_\beta & -\frac{2}{\sqrt{3}}K_2 & -K_5 \\ 0 & -K_5^* & K_9 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

En [10, 64] se presenta un método para diagonalizar una matriz de textura de ceros como también una expresión para los elementos de matriz de V_{CKM} . Siguiendo el procedimiento, en la matriz

$M^{(u)}$ puede ser extraída dos de sus fases por medio de una matrices diagonal con información de éstas, esto es

$$P_f = \text{diag}(1, e^{i\phi_1}, e^{i(\phi_1-\phi_2)}) \quad (4.45)$$

donde ϕ_1 es la fase de $K_2 + K_\beta$ y ϕ_2 es la fase de K_5 . Por lo tanto, se define una nueva matriz, $\bar{M}^{(u)}$ tal que

$$M^{(u)} = P_f^\dagger \bar{M}^{(u)} P_f, \quad (4.46)$$

Por lo tanto,

$$\bar{M}^{(u)} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ K & -\frac{2}{\sqrt{3}}K \cos(\phi_1) & -|K_5| \\ 0 & -|K_5| & K_9 \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

con $K = \sqrt{K_2^2 + K_\beta^2}$ y $\cos \phi_1 = K_2/K$. Se debe notar que el total de parámetros que describen la matriz son cinco: K , K_5 , K_9 , ϕ_1 y ϕ_2 .

Las matrices poseen tres invariantes, es decir, cantidades independientes de la representación. Estos son: la traza, el determinante y la traza del cuadrado de la matriz. En la base de masas, la matriz $M^{(u)}$ es diagonal, así que se puede relacionar las masas de los quarks con los elementos de matriz por medio de los invariantes. Los eigenvalores de la matriz de masa se pueden escribir en términos de las razones entre las masas, es decir, $\tilde{\sigma}_i = m_i/m_3$ tanto para tipo up como tipo down. Por lo tanto, en estas expresiones, la matriz de masa diagonal tiene la forma $M_D = \text{diag}(\tilde{\sigma}_1, -\tilde{\sigma}_2, 1)$. A partir de los invariantes se pueden obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_1}}{K_9} \\ \cos \phi_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (K_9 - \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 - 1) \sqrt{\frac{K_9}{\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2}} \\ K_5 &= \sqrt{\frac{(1 - K_9)(K_9 - \tilde{\sigma}_1)(K_9 - \tilde{\sigma}_2)}{K_9}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

De esta forma, todos los elementos de la matriz pueden ser descritos con un único parámetro, K_9 . Cabe resaltar que este procedimiento es análogo para el caso $M^{(d)}$, por lo tanto, los parámetros libres totales que quedan para las matrices de masa son: K_{9u} , K_{9d} , ϕ_{2u} y ϕ_{2d} . La relación de la fase $\phi_{1(u,d)}$ y K_9 restringe los posibles valores de K_9 ya que se debe satisfacer $-1 < \cos \phi_{1(u,d)} < 1$. Los elementos de la matriz de mezcla de quarks se calcula con el producto de las matrices que diagonalizan la matriz de masas. Al tener presente que deben diagonalizar M y deben ser unitarias, se puede construir un sistema de ecuaciones para cada una de las

matrices, A_L y A_R . Con la definición de las cantidades

$$\begin{aligned}
 \delta_{u,d} &= 1 - K_{g_{u,d}} \\
 \xi_1^{u,d} &= 1 - \tilde{\sigma}_{u,d} - \delta_{u,d}, \\
 \xi_2^{u,d} &= 1 + \tilde{\sigma}_{c,s} - \delta_{u,d}, \\
 \mathcal{D}_{1(u,d)} &= (1 - \delta_{u,d})(\tilde{\sigma}_{u,d} + \tilde{\sigma}_{c,s})(1 - \tilde{\sigma}_{u,d}), \\
 \mathcal{D}_{2(u,d)} &= (1 - \delta_{u,d})(\tilde{\sigma}_{u,d} + \tilde{\sigma}_{c,s})(1 + \tilde{\sigma}_{c,s}), \\
 \mathcal{D}_{3(u,d)} &= (1 - \delta_{u,d})(1 - \tilde{\sigma}_{u,d})(1 + \tilde{\sigma}_{c,s}).
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

se expresan los elementos de la matriz de mezcla como

$$\begin{aligned}
 V_{ud}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_s \xi_1^u \xi_1^d}{\mathcal{D}_{1u} \mathcal{D}_{1d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_d}{\mathcal{D}_{1u} \mathcal{D}_{1d}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \xi_1^u \xi_1^d + \sqrt{\delta_u \delta_d \xi_2^u \xi_2^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{us}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_d \xi_1^u \xi_2^d}{\mathcal{D}_{1u} \mathcal{D}_{2d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_s}{\mathcal{D}_{1u} \mathcal{D}_{2d}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \xi_1^u \xi_2^d + \sqrt{\delta_u \delta_d \xi_2^u \xi_1^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{ub}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_s \delta_d \xi_1^u}{\mathcal{D}_{1u} \mathcal{D}_{3d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u}{\mathcal{D}_{1u} \mathcal{D}_{3d}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \delta_d \xi_1^u - \sqrt{\delta_u \xi_2^u \xi_1^d \xi_2^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{cd}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_s \xi_2^u \xi_1^d}{\mathcal{D}_{2u} \mathcal{D}_{1d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_d}{\mathcal{D}_{2u} \mathcal{D}_{1d}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \xi_2^u \xi_1^d + \sqrt{\delta_u \delta_d \xi_1^u \xi_2^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{cs}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_d \xi_2^u \xi_2^d}{\mathcal{D}_{2u} \mathcal{D}_{2d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_s}{\mathcal{D}_{2u} \mathcal{D}_{2d}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \xi_2^u \xi_2^d + \sqrt{\delta_u \delta_d \xi_1^u \xi_1^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{cb}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_s \delta_d \xi_2^u}{\mathcal{D}_{2u} \mathcal{D}_{3d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_c}{\mathcal{D}_{2u} \mathcal{D}_{3d}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \delta_d \xi_2^u - \sqrt{\delta_u \xi_1^u \xi_1^d \xi_2^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{td}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_s \delta_u \xi_1^d}{\mathcal{D}_{3u} \mathcal{D}_{1d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_d}{\mathcal{D}_{3u} \mathcal{D}_{1d}}} \left(\sqrt{\delta_u(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \xi_1^d - \sqrt{\delta_d \xi_1^u \xi_2^u \xi_2^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{ts}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_d \delta_u \xi_2^d}{\mathcal{D}_{3u} \mathcal{D}_{2d}}} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_s}{\mathcal{D}_{3u} \mathcal{D}_{2d}}} \left(\sqrt{\delta_u(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \xi_2^d - \sqrt{\delta_d \xi_1^u \xi_2^u \xi_1^d} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}, \\
 V_{tb}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_d \tilde{\sigma}_s \delta_u \delta_d}{\mathcal{D}_{3u} \mathcal{D}_{3d}}} + \left(\sqrt{\frac{\xi_1^u \xi_2^u \xi_1^d \xi_2^d}{\mathcal{D}_{3u} \mathcal{D}_{3d}}} + \sqrt{\frac{\delta_u \delta_d (1 - \delta_u)(1 - \delta_d)}{\mathcal{D}_{3u} \mathcal{D}_{3d}}} e^{i\phi_2} \right) e^{i\phi_1}.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

De las definiciones en (4.49) y las expresiones anteriores, se observa que $K_{g(u,d)}$ debe satisfacer $m_{c,s} < K_{g(u,d)} < 1$. Esto garantiza que la matriz de mezcla sea unitaria ya que el carácter complejo de los elementos de matriz proviene, únicamente, de las exponenciales complejas. Para el análisis del modelo, se utilizará la función χ^2 que es particularmente útil para comparar modelos con datos experimentales. Se define como

$$\sum_n \frac{(O_n - P_n)^2}{\sigma_n^2}, \tag{4.51}$$

Quarks	Masas [GeV] (PDG) (2020)	Masas en \overline{MS} (M_Z) [GeV]
m_u	$2.16^{+0.49}_{-0.26} \times 10^{-3}$	$0.0011^{+0.0003}_{-0.0001}$
m_d	$4.67^{+0.48}_{-0.17} \times 10^{-3}$	$0.00246^{+0.00026}_{-0.0001}$
m_s	$93^{+11}_{-5} \times 10^{-3}$	$0.0499^{+0.0006}_{-0.0027}$
m_c	1.27 ± 0.02	0.63 ± 0.04
m_b	$4.18^{+0.03}_{-0.02}$	2.8 ± 0.04
m_t	172.76 ± 0.30	172.66 ± 0.30

Tabla 4.4: Información de las masas de quarks del PDG (2020) [65] y las masas en el esquema \overline{MS} a la escala de M_Z . Las masas fueron calculadas a cuatro loops tanto para α_s como para las masas. El paquete utilizado fue RunDec para Mathematica.

	Valor numérico (PDG) (2019)
$ V_{ud} $	0.97440 ± 0.00010
$ V_{us} $	0.22452 ± 0.00044
$ V_{ub} $	0.00365 ± 0.00012
\mathcal{J}	$(3.18 \pm 0.15) \times 10^{-5}$

Tabla 4.5: Norma de los valores numéricos de los elementos de matriz V_{CKM} que se utilizaron en el ajuste de χ^2 . Los valores se pueden encontrar en [65]

donde O_n son los datos obtenidos de manera experimental y P_n son los valores obtenidos de manera teórica con el modelo a comparar. Debido a la unitariedad de la matriz de mezcla, basta con ajustar solo cuatro observables, por lo tanto, se hará un análisis de los resultados del modelo propuesto con una función χ^2 construida como

$$\chi^2 = \frac{(|V_{ud}^{\text{th}}| - |V_{ud}|)^2}{\sigma_{V_{ud}}^2} + \frac{(|V_{us}^{\text{th}}| - |V_{us}|)^2}{\sigma_{V_{us}}^2} + \frac{(|V_{ub}^{\text{th}}| - |V_{ub}|)^2}{\sigma_{V_{ub}}^2} + \frac{(\mathcal{J}_q^{\text{th}} - \mathcal{J}_q)^2}{\sigma_{\mathcal{J}_q}^2}, \quad (4.52)$$

donde \mathcal{J} es el invariante de Jarlskog. La tabla 4.5 contiene los valores experimentales para los términos en la función χ^2 . La tabla 4.4 contiene los datos sobre las masas que serán utilizados para el cálculo teórico de los elementos de matriz de V_{CKM} con ayuda de las ecuaciones en (4.50) y que están presentes en χ^2 . Las masas en la tercera columna están en el esquema \overline{MS} a la escala del bosón Z , M_Z . Los cálculos de las masas fueron realizados con el paquete de Mathematica RunDec [66]. Los parámetros libres se ajustaron de tal forma que χ^2 sea mínima. Para este ajuste, se ha definido el invariante de Jarlskog como

$$\mathcal{J}^{\text{th}} = \text{Im}\{V_{cs}^{\text{th}} V_{tb}^{\text{th}} V_{cb}^{\text{th}*} V_{ts}^{\text{th}*}\}. \quad (4.53)$$

Las razones de las masas y sus errores se presentan en la tabla 4.6. El cálculo de la minimización fue realizado con Mathematica para los parámetros libres K_{9u} , K_{9d} , ϕ_{2u} y ϕ_{2d} . Al fijar las razones de las masas en su valor central, se obtuvo un valor de $\chi^2 = 25.4548$ y su valor normalizado $\chi_n^2 = 6.3637$. Como $\chi^2 \gg 1$, indica que, para los valores experimentales fijos en su valor central, no existen parámetros que permitan obtener valores adecuados para $|V_{ud}|$, $|V_{us}|$, $|V_{ub}|$ y

	Valor central y error
$\tilde{\sigma}_u$	$(6.37 \pm 0.59) \times 10^{-6}$
$\tilde{\sigma}_d$	$(8.78 \pm 0.48) \times 10^{-4}$
$\tilde{\sigma}_s$	0.0178 ± 0.00046
$\tilde{\sigma}_c$	0.00364 ± 0.00023

Tabla 4.6: Valores centrales de las razones de las masas y su error estándar.

\mathcal{J} . Sin embargo, al permitir la variación de las razones de masas a un sigma de sus errores experimentales, la minimización que se obtuvo fue $\chi^2 = 4.5346$ y su valor normalizado $\chi_n^2 = 1.1336$. Al ser un valor cercano a 1, indica que los parámetros pueden ajustarse adecuadamente.

	Valores en el ajuste
K_{9u}	0.9965
K_{9d}	0.9816
ϕ_{2u}	0.4480
ϕ_{2d}	0.43261
χ^2	25.4548
χ_n^2	6.3637

Tabla 4.7: Valores de los parámetros libres para el ajuste con los valores de las razones de las masas fijo en su valor central y la respectiva obtención de χ^2 con su valor normalizado, es decir, dividido entre los grados de libertad, en este caso, por cuatro

En la tabla 4.7 se presentan los valores de los parámetros del ajuste para las razones de las masas fijas. En este ajuste, la matriz de mezcla se expresa como

$$V_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} 0.9743 & 0.2250 & 0.003127 \\ 0.2244 & 0.9715 & 0.07566 \\ 0.01693 & 0.07380 & 0.9971 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

con $\mathcal{J}^{th} = 3.02 \times 10^{-5}$.

En la tabla 4.8 se presentan los parámetros de ajuste para el caso donde las razones de las masas pueden variar dentro de su error. En este ajuste, la matriz de mezcla toma la forma

$$V_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} 0.9743 & 0.2251 & 0.003543 \\ 0.2243 & 0.9707 & 0.08585 \\ 0.01935 & 0.08371 & 0.996 \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

con $\mathcal{J}^{th} = 3.09 \times 10^{-5}$. Con los valores teóricos de la matriz de mezcla se puede extraer el ángulo de violación de CP. Este corresponde a

$$\delta = Arg \left(\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right) = 1.487 \text{ rad} = 85.19^\circ. \quad (4.56)$$

	Valores en el ajuste
$\tilde{\sigma}_u$	6.67×10^{-6}
$\tilde{\sigma}_d$	9.14×10^{-4}
$\tilde{\sigma}_s$	0.0182
$\tilde{\sigma}_c$	0.00388
K_{9u}	0.9961
K_{9d}	0.9779
ϕ_{2u}	2.5310
ϕ_{2d}	2.5168
χ^2	4.5346
χ_n^2	1.1336

Tabla 4.8: Valores de los parámetros libres para el ajuste con los valores de las razones de las masas variable dentro del error y la respectiva obtención de χ^2 con su valor normalizado, es decir, dividido entre los grados de libertad, en este caso, por cuatro.

Cabe resaltar que la función χ^2 es sensible a los cambios tanto en los errores como en los valores centrales. Otro factor a tener en cuenta son los parámetros libres totales, pues al ser pocos, se ha visto limitado las posibilidades de realizar un ajuste adecuado a cuatro parámetros experimentales. El método a utilizar en la minimización afecta considerablemente el valor mínimo. Así, en las condiciones apropiadas podría encontrarse un valor con una χ^2 menor a la presentada en este trabajo.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

A partir de la simetría modular y el grupo modular finito $\Gamma_2 \simeq S_3$, junto con tres dobletes de Higgs, se ha logrado construir una extensión del modelo estándar con pocos parámetros libres totales. El modelo se realizó introduciendo formas modulares construidas a partir de la función $\eta(\tau)$. Luego, bajo la simetría propuesta y después de realizar una asignación de los campos, se calculó el lagrangiano del sector de Yukawa. Después del rompimiento espontáneo de simetría, el total de bosones escalares fue nueve y se encontró las matrices de masa de quarks. Algunos de los parámetros se ajustaron de tal forma que se obtuvieran matrices de masas con ceros de textura quedando un total de 10 parámetros libres entre las matrices para tipo up, down y Vevs. En el cálculo de la matriz de mezcla, se utilizaron expresiones analíticas que permitieron reducir a 4 parámetros totales libres. Estas fueron ajustadas a cuatro observables obteniendo el mejor ajuste de los parámetros libres a $\chi^2 = 4.5346$ y su valor normalizado de $\chi_n^2 = 1.1336$. La inclusión del potencial de Higgs fue posible debido a la imposición sobre los pesos modulares a cero de sus acoples y de los dobletes de Higgs. La libertad en las asignaciones, tanto en la simetría de Γ_2 como en la invariancia modular, es amplia ya que se generan más productos por la introducción de un doblete extra de formas modulares en comparación a una simetría S_3 convencional.

Al final, en este trabajo, la elección de la asignación particular y la restricción de llevarla a ceros de textura, resultó en 4 parámetros libres, incluyendo los VEVs del potencial de Higgs. Por lo tanto, suponer una simetría modular y la utilización de formas modulares con las suposiciones indicadas sobre los parámetros, permite encontrar un ajuste de orden uno en χ_n^2 con pocos parámetros libres totales, lo que indica que la simetría adicional da un buen acercamiento respecto al patrón de mezcla de quarks.

Una extensión a lo aquí expuesto es considerar otras asignaciones bajo S_3 y diferentes pesos modulares. La introducción de potenciales de Higgs, cuyos acoples tengan peso modular y, por tanto, sean formas modulares, podrían ser útiles en la libertad para construir matrices de masa y obtener un buen acercamiento a la matriz de mezcla de quarks. Es posible, además, construir modelos híbridos con otros grupos modulares finitos Γ_N , por ejemplo, A_4 cuyo isomorfismo es con Γ_3 .

Apéndice A

Clases laterales (cosets) de un grupo

Para un grupo G , un subgrupo H de G y $g \in G$, se define

$$\begin{aligned} gH &= \{gh : h \in H\} && \text{Clase lateral izquierda de } H \text{ en } G \\ Hg &= \{gh : h \in H\} && \text{Clase lateral derecha de } H \text{ en } G. \end{aligned}$$

Un subgrupo N de G es normal si, para cada elemento $g \in G$, las clases laterales izquierda y derecha son iguales, en este caso no es necesario hacer diferencia entre clase lateral izquierda o derecha. Al conjunto de todas las clases laterales de un subgrupo normal N en G se llama conjunto cociente y se denota como G/N .

Como ejemplo, se considera el grupo de los números enteros $Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ y el subgrupo $2Z$ correspondiente a los enteros múltiplos de 2. Como $2Z$ es normal entonces las clases laterales izquierda y derecha son iguales y corresponden a

$$\begin{aligned} & \vdots \\ -2 + 2Z & \rightarrow 2n \\ -1 + 2Z & \rightarrow 2n + 1 \\ 0 + 2Z & \rightarrow 2n \\ 1 + 2Z & \rightarrow 2n + 1 \\ 2 + 2Z & \rightarrow 2n \\ & \vdots \end{aligned}$$

con $n \in Z$. Es de notar que solo hay dos clases laterales diferentes, en este caso, los conjuntos de números pares e impares. Estas dos clases son isomorfas al grupo cíclico Z_2 .

Apéndice B

Tablas de posibles matrices para cuatro dobletes de Higgs

\mathcal{F}_L	\mathcal{F}_R	Matrices de masa	Posibles texturas de masa
$\mathbf{2}, \mathbf{1}$	$\mathbf{2}, \mathbf{1}$	$\begin{pmatrix} \mu_1^f + \mu_2^f & \mu_4^f + \mu_5^f & \mu_6^f \\ \mu_4^f - \mu_5^f & \mu_1^f - \mu_2^f & \mu_7^f \\ \mu_8^f & \mu_9^f & \mu_3^f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \mu_2^f sc(3-t^2) + \mu_5^f & 0 \\ \mu_2^f sc(3-t^2) & -2\mu_2^f c^2(1-3t^2) & \mu_7^f/c \\ -\mu_5^f & \mu_7^{f*}/c & \mu_3^f - \mu_1^f - \mu_2^f c^2(1-3t^2) \\ 0 & & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_2^f + \mu_5^f & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_2^f - \mu_5^f & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_7^f \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_8^f & \mu_3^f - \mu_1^f \end{pmatrix}$
$\mathbf{2}, \mathbf{1}'$	$\mathbf{2}, \mathbf{1}'$	$\begin{pmatrix} \mu_1^f + \mu_2^f & \mu_4^f + \mu_5^f & \mu_7^f \\ \mu_4^f - \mu_5^f & \mu_1^f - \mu_2^f & -\mu_6^f \\ \mu_9^f & -\mu_8^f & \mu_3^f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\mu_4^f c^2(1-3t^2) + \mu_5^f & 0 \\ -\mu_4^f c^2(1-3t^2) & 2\mu_4^f cs(3-t^2) & -\mu_6^f/c \\ -\mu_5^f & -\mu_6^{f*}/c & \mu_3^f - \mu_1^f + \mu_4^f sc(3-t^2) \\ 0 & & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -2\mu_4^f + \mu_5^f & 0 \\ -2\mu_4^f - \mu_5^f & 0 & -2\mu_6^f \\ 0 & -2\mu_8^f & \mu_3^f - \mu_1^f \end{pmatrix}$

Tabla B.1: Matrices de masa en la tercera columna para cuatro dobletes de Higgs. \mathcal{F}_L y \mathcal{F}_R indican la asignación de las partes izquierda y derecha de los campos, respectivamente, donde las primeras dos familias están en $\mathbf{2}$ y la tercera familia en $\mathbf{1}$ o $\mathbf{1}'$. La cuarta columna es una rotación de las matrices de la tercera columna por un ángulo θ , donde se han definido $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$ y $t = \tan \theta$. Las matrices abajo de las matrices rotadas indican un caso particular de rotación. Para el primer caso, el ángulo de rotación es $\theta = \pi/6$. Para el segundo caso, el ángulo de rotación es $\theta = \pi/3$ [10].

Apéndice B. Tablas de posibles matrices para cuatro dobletes de Higgs

\mathcal{F}_L	\mathcal{F}_R	Matrices de masa	Posibles texturas de masa
$\mathbf{2}, \mathbf{1}'$	$\mathbf{2}, \mathbf{1}$	$\begin{pmatrix} \mu_1^f + \mu_2^f & \mu_4^f + \mu_5^f & \mu_6^f \\ \mu_4^f - \mu_5^f & \mu_1^f - \mu_2^f & \mu_7^f \\ \mu_9^f & -\mu_8^f & \nu_3^f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & 0 & A_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{23} \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & B_{32} & B_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}$
			$\begin{pmatrix} 0 & A'_{12} & 0 \\ A'_{21} & 0 & A'_{23} \\ A'_{32} & 0 & A'_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B'_{12} & B'_{23} \\ B'_{21} & 0 & 0 \\ 0 & B'_{32} & B'_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}$
$\mathbf{2}, \mathbf{1}$	$\mathbf{2}, \mathbf{1}'$	$\begin{pmatrix} \mu_1^f + \mu_2^f & \mu_4^f + \mu_5^f & \mu_7^f \\ \mu_4^f - \mu_5^f & \mu_1^f - \mu_2^f & -\mu_6^f \\ \mu_8^f & \mu_9^f & \nu_3^f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{23} \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & 0 & B_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}$
			$\begin{pmatrix} 0 & A'_{12} & A'_{23} \\ A'_{21} & 0 & 0 \\ 0 & A'_{32} & A'_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B'_{12} & 0 \\ B'_{21} & 0 & B'_{23} \\ B'_{32} & 0 & B'_{33}(\mu_3^f \rightarrow \nu_3^f) \end{pmatrix}$

Tabla B.2: Matrices de masa en la tercera columna para cuatro dobletes de Higgs. \mathcal{F}_L y \mathcal{F}_R indican la asignación de las partes izquierda y derecha de los campos, respectivamente, donde las primeras dos familias están en $\mathbf{2}$ y la tercera familia en $\mathbf{1}$ o $\mathbf{1}'$. La cuarta columna es una rotación de las matrices de la tercera columna por un ángulo θ , donde se han definido $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$ y $t = \tan \theta$. Las matrices abajo de las matrices rotadas indican un caso particular de rotación. Para el primer caso, el ángulo de rotación es $\theta = \pi/6$. Para el segundo caso, el ángulo de rotación es $\theta = \pi/3$ [10].

Bibliografía

- [1] CS Lam. *A 2-3 symmetry in neutrino oscillations*. *Physics Letters B* **507**(1-4), 214–218 (2001). DOI: [10.1016/S0370-2693\(01\)00465-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00465-8).
- [2] Lance Dixon, Daniel Friedan, Emil Martinec, and Stephen Shenker. *The conformal field theory of orbifolds*. *Nuclear Physics B* **282**, 13–73 (1987). DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90676-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90676-6).
- [3] Fred Diamond and Jerry Michael Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228. Springer (2005).
- [4] Tatsuo Kobayashi, Yusuke Shimizu, Kenta Takagi, Morimitsu Tanimoto, Takuya H Tatsuihi, and Hikaru Uchida. *Finite modular subgroups for fermion mass matrices and baryon/lepton number violation*. *Physics Letters B* **794**, 114–121 (2019). DOI: [10.1016/j.physletb.2019.05.034](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.05.034).
- [5] Ferruccio Feruglio. *Are neutrino masses modular forms?* *arXiv preprint arXiv:1706.08749* - (2019). DOI: [10.1142/9789813238053_0012](https://doi.org/10.1142/9789813238053_0012).
- [6] Tatsuo Kobayashi, Kentaro Tanaka, and Takuya H. Tatsuishi. *Neutrino mixing from finite modular groups*. *Phys. Rev. D* **98**, 016004 (2018). DOI: [10.1103/PhysRevD.98.016004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.016004).
- [7] JT Penedo and ST Petcov. *Lepton masses and mixing from modular S_4 symmetry*. *Nuclear Physics B* **939**, 292–307 (2019). DOI: doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2018.12.016.
- [8] PP Novichkov, JT Penedo, ST Petcov, and AV Titov. *Modular A_5 symmetry for flavour model building*. *Journal of High Energy Physics* **2019**(4), 174 (2019). DOI: [10.1007/JHEP04\(2019\)174](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2019)174).
- [9] F Gonzalez Canales, A , and M Mondragon. *The S_3 flavour symmetry: Neutrino masses and mixings*. *Fortschritte der Physik* **61**(4-5), 546–570 (2013). DOI: [10.1002/prop.201200121](https://doi.org/10.1002/prop.201200121).
- [10] F González Canales, A Mondragón, M Mondragón, UJ Saldaña Salazar, and L Velasco-Sevilla. *Quark sector of S_3 models: classification and comparison with experimental data*. *Physical Review D* **88**(9), 096004 (2013). DOI: [10.1103/PhysRevD.88.096004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.096004).
- [11] A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Peinado. *Lepton masses, mixings and FCNC in a minimal $S(3)$ -invariant extension of the Standard Model*. *Phys. Rev. D* **76**, 076003 (2007). DOI: [10.1103/PhysRevD.76.076003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.076003).

- [12] Allen Martin Francis Halzen. *Quarks and Leptons*. John Wiley and Sons (1984).
- [13] Paul Langacker. *The standard model and beyond*. CRC Press, Taylor & Francis Group, (2019).
- [14] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press (2014).
- [15] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons (2020).
- [16] Gordon Kane. *Modern elementary particle physics: explaining and extending the standard model*. Cambridge University Press (2017).
- [17] Steven Weinberg. *A model of leptons*. *Physical review letters* **19**(21), 1264 (1967). DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1264](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1264).
- [18] Sheldon L Glashow. *Partial-symmetries of weak interactions*. *Nuclear physics* **22**(4), 579–588 (1961). DOI: [10.1016/0029-5582\(61\)90469-2](https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90469-2).
- [19] Peter W Higgs. *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*. *Physical Review Letters* **13**(16), 508 (1964). DOI: [10.1103/PhysRevLett.13.508](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.508).
- [20] Georges Aad, Tatevik Abajyan, B Abbott, J Abdallah, S Abdel Khalek, Ahmed Ali Abdelalim, R Aben, B Abi, M Abolins, OS AbouZeid, et al. *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*. *Physics Letters B* **716**(1), 1–29 (2012). DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.020](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020).
- [21] François Englert and Robert Brout. *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*. *Physical Review Letters* **13**(9), 321 (1964). DOI: [10.1103/PhysRevLett.13.321](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.321).
- [22] Nicola Cabibbo. *Unitary symmetry and leptonic decays*. *Physical Review Letters* **10**(12), 531 (1963). DOI: [10.1103/PhysRevLett.10.531](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.531).
- [23] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. *CP-violation in the renormalizable theory of weak interaction*. *Progress of theoretical physics* **49**(2), 652–657 (1973). DOI: [10.1143/PTP.49.652](https://doi.org/10.1143/PTP.49.652).
- [24] Diego Cogollo and Joao P Silva. *Two Higgs doublet models with an S_3 symmetry*. *Physical Review D* **93**(9), 095024 (2016). DOI: [10.1103/PhysRevD.93.095024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.095024).
- [25] Dipankar Das, Ujjal Kumar Dey, and Palash B Pal. *Quark mixing in an S_3 symmetric model with two Higgs doublets*. *Physical Review D* **96**(3), 031701 (2017). DOI: [10.1103/PhysRevD.96.031701](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.031701).
- [26] Hajime Ishimori and Tatsuo Kobayashi. *Towards minimal S_4 lepton flavor model*. *Journal of High Energy Physics* **2011**(10), 82 (2011). DOI: [10.1007/JHEP10\(2011\)082](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2011)082).
- [27] Juan Carlos Gómez-Izquierdo, F Gonzalez-Canales, and M Mondragón. *On Q_6 flavor symmetry and the breaking of $\mu \leftrightarrow \tau$ symmetry*. *International Journal of Modern Physics A* **32**(28n29), 1750171 (2017). DOI: [10.1142/S0217751X17501718](https://doi.org/10.1142/S0217751X17501718).

- [28] PP Novichkov, ST Petcov, and M Tanimoto. *Trimaximal neutrino mixing from modular A_4 invariance with residual symmetries*. *Physics Letters B* **793**, 247–258 (2019). DOI: [10.1016/j.physletb.2019.04.043](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.04.043).
- [29] Tatsuo Kobayashi, Naoya Omoto, Yusuke Shimizu, Kenta Takagi, Morimitsu Tanimoto, and Takuya H Tatsuishi. *Modular A_4 invariance and neutrino mixing*. *Journal of High Energy Physics* **2018**(11), 196 (2018). DOI: [10.1007/JHEP11\(2018\)196](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)196).
- [30] Reinier de Adelhart Toorop, Ferruccio Feruglio, and Claudia Hagedorn. *Finite modular groups and lepton mixing*. *Nuclear Physics B* **858**(3), 437–467 (2012). DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2012.01.017](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2012.01.017).
- [31] Ferruccio Feruglio and Andrea Romanino. *Neutrino Flavour Symmetries*. *arXiv preprint arXiv:1912.06028* - (2019).
- [32] Takaaki Nomura and Hiroshi Okada. *A modular A_4 symmetric model of dark matter and neutrino*. *Physics Letters B* **797**, 134799 (2019). DOI: [10.1016/j.physletb.2019.134799](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.134799).
- [33] Xiang-Gan Liu and Gui-Jun Ding. *Neutrino masses and mixing from double covering of finite modular groups*. *Journal of High Energy Physics* **2019**(8), 1–21 (2019). DOI: [10.1007/JHEP08\(2019\)134](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2019)134).
- [34] Ivo de Medeiros Varzielas, Stephen F King, and Ye-Ling Zhou. *Multiple modular symmetries as the origin of flavor*. *Physical Review D* **101**(5), 055033 (2020). DOI: [10.1103/PhysRevD.101.055033](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.055033).
- [35] Pierre Ramond. *Group theory: a physicist's survey*. Cambridge University Press (2010).
- [36] David Steven Dummit and Richard M Foote. *Abstract algebra*, volume 3. Wiley Hoboken (2004).
- [37] George B Arfken and Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists*. American Association of Physics Teachers (1999).
- [38] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Ohki, Yusuke Shimizu, Hiroshi Okada, and Morimitsu Tanimoto. *Non-Abelian discrete symmetries in particle physics*. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **183**, 1–163 (2010). DOI: [10.1143/PTPS.183.1](https://doi.org/10.1143/PTPS.183.1).
- [39] Daniel Cremades, Luis E Ibáñez, and Fernando Marchesano. *Computing Yukawa couplings from magnetized extra dimensions*. *Journal of High Energy Physics* **2004**(05), 079 (2004). DOI: [10.1088/1126-6708/2004/05/079](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/05/079).
- [40] Tatsuo Kobayashi, Satoshi Nagamoto, Shintaro Takada, Shio Tamba, and Takuya H Tatsuishi. *Modular symmetry and non-Abelian discrete flavor symmetries in string compactification*. *Physical Review D* **97**(11), 116002 (2018). DOI: [10.1103/PhysRevD.97.116002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.116002).
- [41] Michał Spaliński. *Duality transformations in twisted Narain compactifications*. *Nuclear Physics B* **377**(1-2), 339–368 (1992). DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90027-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90027-9).
- [42] Shahram Hamidi and Cumrun Vafa. *Interactions on orbifolds*. *Nuclear Physics B* **279**(3-4), 465–513 (1987). DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90006-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90006-X).

- [43] J Erler, D Jungnickel, and J Lauer. *Dependence of Yukawa couplings on the axionic background moduli of $Z N$ orbifolds*. *Physical Review D* **45**(10), 3651 (1992). DOI: [10.1103/PhysRevD.45.3651](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.45.3651).
- [44] J Lauer, J Mas, and Hans Peter Nilles. *Duality and the role of nonperturbative effects on the world-sheet*. *Physics Letters B* **226**(3-4), 251–256 (1989). DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)91190-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)91190-8).
- [45] Takaaki Nomura, Hiroshi Okada, and Oleg Popov. *A modular A_4 symmetric scotogenic model*. *Physics Letters B* **803**, 135294 (2020).
- [46] Takaaki Nomura, Hiroshi Okada, and Sudhanwa Patra. *An Inverse Seesaw model with A_4 -modular symmetry*. *Nuclear Physics B* **967**, 115395 (2021).
- [47] Takaaki Nomura and Hiroshi Okada. *A two loop induced neutrino mass model with modular A_4 symmetry*. *Nuclear Physics B* **966**, 115372 (2021).
- [48] Mu-Chun Chen, Saúl Ramos-Sánchez, and Michael Ratz. *A note on the predictions of models with modular flavor symmetries*. *Physics Letters B* **801**, 135153 (2020). DOI: [10.1016/j.physletb.2019.135153](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.135153).
- [49] PP Novichkov, JT Penedo, and ST Petcov. *Fermion mass hierarchies, large lepton mixing and residual modular symmetries*. *Journal of High Energy Physics* **2021**(4), 1–49 (2021). DOI: [10.1007/JHEP04\(2021\)206](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2021)206).
- [50] PP Novichkov, JT Penedo, and ST Petcov. *Double cover of modular S_4 for flavour model building*. *Nuclear Physics B* **963**, 115301 (2021). DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2020.115301](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2020.115301).
- [51] PF Harrison and WG Scott. *Permutation symmetry, tri-bimaximal neutrino mixing and the S_3 group characters*. *Physics Letters B* **557**(1-2), 76–86 (2003). DOI: [10.1016/S0370-2693\(03\)00183-7](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(03)00183-7).
- [52] Bruno Schoeneberg. *Elliptic modular functions: an introduction*, volume 203. Springer Science & Business Media (2012).
- [53] Robert C Gunning. *Lectures on Modular Forms.(AM-48), Volume 48*. Princeton University Press (2016).
- [54] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. University of Chicago press (1992).
- [55] M Gómez-Bock, M Mondragón, and A Pérez-Martínez. *Scalar and gauge sectors in the 3-Higgs Doublet Model under the S_3 -symmetry*. *arXiv preprint arXiv:2102.02800* - (2021).
- [56] O Felix Beltran, M Mondragon, and E Rodriguez-Jauregui. *Conditions for vacuum stability in an S_3 extension of the Standard Model*. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 171, page 012028. IOP Publishing (2009).
- [57] Dipankar Das and Ujjal Kumar Dey. *Analysis of an extended scalar sector with S_3 symmetry*. *Physical Review D* **89**(9), 095025 (2014). DOI: [10.1103/PhysRevD.89.095025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.095025).

- [58] A Mondragon and E Rodriguez-Jauregui. *Breaking of the flavor permutational symmetry: Mass textures and the CKM matrix*. *Physical Review D* **59**(9), 093009 (1999). DOI: [10.1103/PhysRevD.59.093009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.093009).
- [59] A Mondragon and E Rodriguez-Jauregui. *CP violating phase δ_{13} and the quark mixing angles θ_{13} , θ_{23} , and θ_{12} from flavor permutational symmetry breaking*. *Physical Review D* **61**(11), 113002 (2000). DOI: [10.1103/PhysRevD.61.113002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.113002).
- [60] Jisuke Kubo, Alfonso Mondragón, Myriam Mondragón, and Ezequiel Rodríguez-Jáuregui. *The flavor symmetry*. *Progress of theoretical physics* **109**(5), 795–807 (2003). DOI: [10.1143/PTP.109.795](https://doi.org/10.1143/PTP.109.795).
- [61] Ferruccio Feruglio and Yin Lin. *Fermion mass hierarchies and flavour mixing from a minimal discrete symmetry*. *Nuclear physics B* **800**(1-2), 77–93 (2008). DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2008.02.008](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2008.02.008).
- [62] Tatsuo Kobayashi, Yuji Omura, and Koichi Yoshioka. *Flavor symmetry breaking and vacuum alignment on orbifolds*. *Physical Review D* **78**(11), 115006 (2008). DOI: [10.1103/PhysRevD.78.115006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.115006).
- [63] Davide Meloni. *S_3 as a flavour symmetry for quarks and leptons after the Daya Bay result on θ_{13}* . *Journal of High Energy Physics* **2012**(5), 124 (2012). DOI: [10.1007/JHEP05\(2012\)124](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2012)124).
- [64] J Barranco, F Gonzalez Canales, and A Mondragon. *Universal mass texture, CP violation and quark-lepton complementarity*. *arXiv preprint arXiv:1004.3781* - (2010). DOI: [10.1088/1742-6596/171/1/012063](https://doi.org/10.1088/1742-6596/171/1/012063).
- [65] *Review of Particle Physics*. *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2020**(8) (2020). DOI: [10.1093/ptep/ptaa104](https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104).
- [66] KG Chetyrkin, Johann H Kühn, and Matthias Steinhauser. *RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses*. *Computer Physics Communications* **133**(1), 43–65 (2000). DOI: [10.1016/S0010-4655\(00\)00155-7](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(00)00155-7).