UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ESPACIOS NORMADOS ASIMÉTRICOS E HIPERESPACIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
VICTOR DONJUÁN ARROYO

DIRECTORA
DRA. NATALIA JONARD PÉREZ, FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. SERGEY ANTONYAN, FACULTAD DE CIENCIAS
DR. GERARDO ACOSTA GARCÍA, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL 2021

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN-115819 *Estructuras asimétricas e hiperespacios*. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción

El objeto de estudio de este trabajo son los espacios asimétricos. Entre los ejemplos más conocidos de espacios asimétricos se encuentran los espacios cuasi-métricos y los espacios normados asimétricos. Aunque los resultados principales de la Sección 2 están centrados en espacios normados asimétricos, en los Preliminares (Sección 1) daremos una breve introducción a los espacios cuasi-métricos, pues la topología de un espacio normado asimétrico proviene de la teoría de espacios cuasi-métricos.

En esencia, una cuasi-métrica en un conjunto X es una función real no negativa en el producto $X \times X$ que satisface los axiomas de una métrica con la excepción de la simetría. Es decir, puede ocurrir que la "distancia" de x a y no sea igual a la "distancia" de y a x. De forma similar, una norma asimétrica es una función q no negativa en un espacio vectorial real X que satisface los axiomas de una norma salvo que la homogeneidad está restringida a números reales no negativos (i.e., $q(tx) = tq(x)$ para todo $t \geq 0$). En consecuencia, la norma asimétrica de un vector x no necesariamente coincide con la norma asimétrica de $-x$. Toda norma asimétrica induce una cuasi-métrica.

Algunos apuntes a destacar son que los espacios cuasi-métricos fueron introducidos en 1931 [43], y desde entonces se han estudiado sus propiedades y contrastes respecto a los espacios métricos. Por ejemplo, se pueden definir distintas nociones de sucesiones de Cauchy y completitud (ver, por ejemplo, [36] y [30]). La noción de compacidad secuencial, que en general no coincide con compacidad en espacios cuasi-métricos, ha sido estudiada en [29]. También existen nociones de conjuntos totalmente acotados y precompactos (ver [31] o [1]).

En la Sección 2, empezaremos viendo cómo se comportan los axiomas de separación en los espacios seminormados asimétricos. Todo espacio seminormado asimétrico es un grupo paratopológico equipado con la suma de espacio vectorial, pero no necesariamente es un grupo topológico. Como es bien sabido, todo grupo topológico T_0 es completamente regular, pero esto es falso en grupos paratopológicos en donde los axiomas T_0, T_1, T_2 y regularidad son no equivalentes dos a dos. Aunque es de destacar que la regularidad y la regularidad completa sí son equivalentes en grupos paratopológicos [10].

En general, una seminorma asimétrica puede no generar una topología T_0. Pero en el caso de una norma asimétrica, siempre obtenemos un espacio T_0 pero no necesariamente T_1. En esta parte, distinguimos el caso en el que nuestro espacio vectorial tiene dimensión finita, en cuyo caso veremos que los espacios normados asimétricos tienen propiedades topológicas muy fuertes. También veremos qué ocurre con el caso de los axiomas de Hausdorff y regularidad en un espacio de dimensión infinita.

Esta sección contendrá tres resultados fuertes que ya han sido publicados en [19]. Dichos resultados podemos resumirlos de la siguiente forma.

- Todo espacio normado asimétrico (X, q) tal que su bola unitaria cerrada es compacta es un espacio vectorial de dimensión finita. La prueba de este resultado es una corrección de un error encontrado en [23].

- Todo espacio normado asimétrico (X, q) que no es T_1 puede descomponerse como el producto de un espacio T_1 y un espacio que no es T_1. Ésta es una generalización de un teorema demostrado en [22].

- Calculamos la dimensión topológica (cubriente) de todo espacio normado asimétrico de dimensión finita.

En lo que concierne al tercer punto, es importante hacer énfasis en que usaremos la definición de dimensión topológica dada en [35]. La razón de esta elección es que es una definición que no requiere pedirle al espacio ninguna condición especial (como ser Hausdorff o algún otro axioma de separación).

En el Capítulo 3 estudiaremos hiperespacios de subconjuntos cerrados de un espacio topológico dado. Nuestro principal interés son los hiperespacios de subconjuntos convexos cerrados que no necesariamente son acotados, ya que dichos conjuntos están relacionados con las normas asimétricas de un espacio vectorial. La estructura de algunos hiperespacios de cerrados y de convexos han sido calculadas, por ejemplo [5, 6, 7, 9, 28, 34]. Muchos resultados que calculan estructuras de hiperespacios están basados en la teoría de G-espacios y en la métrica de Hausdorff en el hiperespacio de subconjuntos compactos. La razón de esto es que cuando X es un G-espacio, la acción inducida resulta continua en el hiperespacio.

Por lo tanto, centramos nuestra atención en estudiar cuándo un G-espacio métrico induce una acción continua en el hiperespacio de Hausdorff. Cuando el espacio no es métrico, podemos estudiar los hiperespacios con la topología de Vietoris y la topología de Fell. De hecho, plantearemos una pregunta más fundamental: cuándo una función continua $f : X \to Y$ induce una función continua en los correspondientes hiperespacios. Veremos que la respuesta a esta pregunta puede ser estudiada viendo a estas tres topologías como la simetrización de una topología *inferior* y una topología *superior*.

Finalmente, en la última parte de este trabajo probaremos que la función que a cada convexo de $\mathbb{R}^n$ le asigna su punto más cercano al origen es continua en el hiperespacio de convexos cerrados equipado con la topología de Fell. Ésta es una corrección de un lema que fue enunciado en [37]. También plantearemos algunas líneas de trabajo a futuro, especialmente la de encontrar la estructura topológica de ciertos hiperespacios de convexos cerrados equipados con la topología de Fell.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Nota preliminar sobre espacios topológicos

Con el propósito de evitar ambigüedad, vamos a especificar algunas definiciones importantes que usaremos durante todo este trabajo.

Sea X un espacio topológico. Entonces X es llamado

$\mathbf{T_0}$: si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.

$\mathbf{T_1}$: si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$.

$\mathbf{T_2}$ o **Hausdorff**: si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Regular: si para todo $x \in X$ y todo abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$, existe $V \subseteq X$ abierto tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

$\mathbf{T_3}$: si X es regular y T_1.

Completamente regular o **Tychonoff**: si para cada $x \in X$ y $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$, existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f^{-1}([0, 1)) \subseteq U$.

$\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$: si X es completamente regular y T_1.

Normal: si para todo $F \subseteq X$ cerrado y $U \subseteq X$ abierto tal que $F \subseteq U$ existe $V \subseteq X$ abierto tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

$\mathbf{T_4}$: si X es normal y T_1.

Por lo tanto, es claro que

$$T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow T_2 \Leftarrow T_3 \Leftarrow T_{3\frac{1}{2}} \Leftarrow T_4,$$

pero ni regular, completamente regular ni normal implican necesariamente T_2 (un ejemplo sencillo es el espacio indiscreto con más de un punto).

Las definiciones anteriores de axiomas de separación coinciden, por ejemplo, con las dadas por R. Engelking en su libro *General Topology* [20].

No supondremos a priori que un espacio topológico satisface alguno de los axiomas de separación a menos de que se especifique.

El siguiente resultado será de utilidad en este trabajo. Lo enunciamos y demostramos aquí, ya que nuestra impresión es que no suele ser enunciado con mucha frecuencia en la literatura de espacios topológicos.

Proposición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico regular y T_0. Entonces X es T_2, y por lo tanto T_3.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es T_0, sin pérdida de generalidad existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Como X es T_3, existen abiertos disjuntos V y W tales que $x \in V$ y $X \setminus U \subseteq W$. Como $y \in X \setminus U$, concluimos que V y W son abiertos disjuntos que contienen a x y a y, respectivamente. $\square$

Como otra observación, diremos que un espacio topológico X es **localmente compacto** si para todo $x \in X$ y todo abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ existe $V \subseteq X$ abierto tal que $\overline{V}$ es compacto y

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Como es sabido, pueden existir diferentes definiciones de compacidad local, aunque todas son equivalentes cuando X es Hausdorff.

Por otro lado, si X es un conjunto y τ_1 y τ_2 son dos topologías en X, llamaremos **supremo de las topologías τ_1 y τ_2** a la topología τ que tiene como subbase a $\tau_1 \cup \tau_2$.

Finalmente, si $t_n, t \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, usaremos la notación $t_n \to t$ para decir que la sucesión (t_n) converge a t cuando $\mathbb{R}$ tiene la topología usual.

1.2. Grupos

A lo largo de este texto usaremos la siguiente convención: si $(G, *)$ es un grupo algebraico, omitiremos el símbolo * en la operación $g * h$, donde $g, h \in G$. De manera que escribiremos simplemente gh. Sin embargo, en el caso en que G sea abeliano usaremos, como es usual, la notación $a + b$. El elemento neutro de G será denotado por e, o bien 0 si G es abeliano. El inverso de un elemento a será denotado a^{-1}, o bien $-a$ si G es abeliano.

Si $A, B \subseteq G$, entonces

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\},$$

o bien

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

si G es abeliano. Si, por ejemplo, B es un conjunto de un único punto $B = \{b\}$ denotaremos los conjuntos anteriores simplemente Ab, o bien $A+b$. También usaremos la notación

$$A^{-1} := \{a^{-1} : a \in A\},$$

o bien

$$-A := \{-a : a \in A\}$$

en caso de que G sea abeliano.

1.2.1. Grupos paratopológicos y grupos topológicos

Un grupo G equipado con una topología será llamado **grupo paratopológico** si la operación del grupo $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ es una función continua, en donde $G \times G$ tiene equipada la topología producto. Usaremos el símbolo τ_G para denotar a la topología de G cuando sea necesario. Si G es un grupo paratopológico y $a \in G$, es fácil ver que las traslaciones $g \mapsto ag$ y $g \mapsto ga$ son homeomorfismos.

Adicionalmente, la familia

$$\tau_G^- := \{U^{-1} : U \in \tau_G\}$$

es otra topología en G, llamada la **topología conjugada** de τ_G, tal que (G, τ_G^-) también es un grupo paratopológico. La función inversión $(G, \tau_G) \to (G, \tau_G^-)$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ es un homeomorfismo.

Por otro lado, un **grupo topológico** es un grupo paratopológico G tal que la función inversión $(G, \tau_G) \to (G, \tau_G)$, $g \mapsto g^{-1}$ es continua. En este caso, se tiene que la función inversión es homeomorfismo. No es difícil ver que un grupo G equipado con una topología es grupo topológico si y sólo si la función $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es continua.

Si G es un grupo paratopológico, τ_G tiene una *simetrización* natural. Sea τ_G^s el supremo de las topologías τ_G y τ_G^-. Entonces (G, τ_G^s) es un grupo topológico llamado **grupo topológico asociado** al grupo paratopológico G. Vamos a notar que τ_G^s es la menor topología en G con esta propiedad.

Proposición 1.2.1. *Sea G un grupo paratopológico. Entonces τ_G^s es la menor topología que contiene a τ_G en G y que hace a G un grupo topológico.*

Demostración. Sea τ una topología en G tal que (G, τ) es un grupo topológico y $\tau_G \subseteq \tau$. Como para todo $U \in \tau_G$ se tiene que $U \in \tau$, y τ es topología de grupo entonces, $U^{-1} \in \tau$. Por lo tanto $\tau_G \cup \tau_G^- \subseteq \tau$. Luego $\tau_G^s \subseteq \tau$.

Por otro lado, como las inversiones $(G, \tau_G) \to (G, \tau_G^-)$ y $(G, \tau_G^-) \to (G, \tau_G)$ son continuas, entonces la inversión de $(G, \tau_G^s) \to (G, \tau_G^s)$ es continua también. Un razonamiento similar muestra que la operación del grupo es continua en (G, τ_G^s), y por lo tanto este último es grupo topológico. $\square$

Vamos a ilustrar esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos $G = \mathbb{R}$, equipado con la suma usual y con la topología τ_G generada por todos los intervalos de la forma $(-\infty, r)$, $r \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que la suma usual de $\mathbb{R}$ es continua en $(\mathbb{R}, \tau_G)$, pero ningún intervalo de la forma*

$$-(-\infty, r) = (-r, \infty)$$

pertenece a τ_G. En consecuencia la función $t \mapsto -t$ no puede ser continua.

La topología conjugada τ_G^- es la generada por todos los intervalos de la forma (r, ∞), $r \in \mathbb{R}$. El grupo topológico asociado (G, τ_G^s) es $\mathbb{R}$ con su topología usual.

Notemos que el grupo paratopológico dado en el Ejemplo 1.2.2 es un espacio T_0 que no es T_1; para cualesquiera $a < b$ es fácil construir un abierto que contenga a a pero no a b, mientras que todo abierto que contenga a b necesariamente contiene a a.

En el Capítulo 2, y especialmente en la Sección 2.1, estudiaremos los axiomas de separación en cierta clase de grupos paratopológicos (los espacios normados asimétricos, que veremos más adelante). Por ello, conviene hacer notar cómo se comportan los axiomas de separación tanto en grupos topológicos como paratopológicos, ya que existen notables diferencias.

El siguiente es uno de los hechos más conocidos sobre grupos topológicos (la demostración puede ser consultada, por ejemplo, en [25]).

Teorema 1.2.3. *Todo grupo topológico T_0 es T_3.*

Por otro lado, existen grupos topológicos que no son T_0, y que son T_0 pero que no T_4.

Ejemplos 1.2.4. (1) *$\mathbb{R}$ con la topología indiscreta y la suma usual es un grupo topológico que no es T_0.*

(2) *Si $\mathbb{Z}$ tiene su estructura usual, entonces el grupo producto $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ es un grupo topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ que no es T_4. Otro ejemplo es el grupo topológico libre de un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ que no es normal ([8]).*

En contraste, existen ejemplos de grupos paratopológicos que muestran que los axiomas T_0, T_1, T_2 y T_3 son mutuamente no equivalentes.

Ejemplos 1.2.5. (1) *En el Ejemplo 1.2.2, dimos un ejemplo de un grupo paratopológico que es T_0 pero no T_1.*

(2) *Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual. Consideremos la topología τ en G tal que cada $k \in \mathbb{Z}$ tiene como base local a la familia*

$$\{\{k\} \cup [n, +\infty) \cap \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}, n > k\}.$$

Con esta topología, la suma en $\mathbb{Z}$ es continua. Si $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ con $k_1 < k_2$, sea $n = k_2 + 1$, con lo cual $\{k_1\} \cup [n, +\infty) \cap \mathbb{Z}$ es un abierto que contiene *a k_1 pero no a k_2. Mientras que $[k_2, \infty) \cap \mathbb{Z}$ es un abierto que contiene a k_2 y no a k_1. Luego $(\mathbb{Z}, \tau)$ es T_1. Claramente cualesquiera dos abiertos tienen intersección no vacía, luego $(\mathbb{Z}, \tau)$ no es T_2.*

(3) *Consideremos $G = \mathbb{R}^2$ con la suma usual, y la topología tal que cada $(x, y) \neq (0, 0)$ tiene la base local usual de bolas abiertas centradas en (x, y), y el punto $(0, 0)$ tiene como base local a los conjuntos*

$$V_n := \{(0,0)\} \cup \{(x, y) : 0 < x, y < 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\mathbb{R}^2$ equipado con esta topología resulta un grupo paratopológico Hausdorff que no es T_3 ([24, Capítulo 20, Sección 2])

Finalmente, fue una pregunta que permaneció abierta durante más de 60 años saber si los axiomas regular y completamente regular son equivalentes en grupos paratopológicos. La respuesta (afirmativa) fue demostrada en [10] por T. Banakh y A. Ravsky.

Teorema 1.2.6. *Todo grupo paratopológico regular es completamente regular.*

1.2.2. Acciones de grupos topológicos

Si G es un grupo y X es un conjunto, una acción de G en X es una función $\theta : G \times X \to X$ que satisface las siguientes dos condiciones:

(1) $\theta(e, x) = x$ para todo x.

(2) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

En este caso, decimos que G actúa en X.

Definición 1.2.7. *Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Diremos que G* **actúa continuamente** *en X, o bien que X es un* **G-espacio***, si existe una acción continua $\theta : G \times X \to X$.*

En la práctica, si X es un G-espacio omitiremos el símbolo θ y escribiremos simplemente gx en lugar de $\theta(g, x)$.

Para cada $x \in X$, el conjunto

$$G(x) := \{gx : g \in G\}$$

es llamado la **órbita** de x.

Las órbitas de un G-espacio X inducen una partición en clases de equivalencia de X. Esto es, si $x_1, x_2 \in X$ y $G(x_1) \cap G(x_2) \neq \emptyset$ entonces $G(x_1) = G(X_2)$. El conjunto de órbitas de un G-espacio X está denotado por X/G. Cuando equipamos a X/G con la topología cociente, el espacio resultante es llamado **espacio orbital**.

Por otro lado, si X es un G-espacio, cada $g \in G$ induce una función continua $l_g : X \to X$ definida por

$$l_g(x) = gx, \quad x \in X.$$

Es fácil comprobar que la función inversa de l_g es $l_{g^{-1}}$, y en consecuencia cada l_g es un homeomorfismo de X en X.

Si X es un espacio topológico, consideraremos

$$\operatorname{Hom} X := \{f : X \to X : f \text{ es homeomorfismo}\}.$$

Siempre asumiremos que $\operatorname{Hom}(X)$ tiene su estructura de grupo algebraico usual, es decir la composición usual de funciones. Cuando X es un G-espacio, la función dada por

$$\begin{aligned} G &\to \operatorname{Hom} X \\ g &\mapsto l_g \end{aligned}$$

es un monomorfismo de grupos. En este trabajo, cada $g \in G$ será identificado con l_g, y por lo tanto supondremos que G es un subgrupo algebraico de $\operatorname{Hom} X$. Para cada $g \in A$ y $A \subseteq X$, usaremos la notación

$$gA := l_g(A) = \{ga : a \in A\}.$$

1.2.3. Topologías en subgrupos de homeomorfismos

Como hemos hecho notar, cada G-espacio X tiene asociado un subgrupo algebraico de homeomorfismos que identificamos con G. En la Sección 3, estudiaremos la continuidad de ciertas acciones en hiperespacios de X y veremos que la continuidad recae en propiedades topológicas de G. A continuación vamos a definir tres topologías en subgrupos algebraicos de $\operatorname{Hom} X$ que nos serán de gran utilidad para estudiar la continuidad de acciones en hiperespacios.

Sea X un espacio topológico, y sea G un subgrupo algebraico de $\operatorname{Hom} X$. Para cualesquiera $A, B \subseteq X$, sea

$$[A, B] := \{f \in G : f(A) \subseteq B\}.$$

Vamos a considerar las siguientes tres topologías definidas en G.

Definición 1.2.8. (1) *La topología* **compacto-abierta** τ_{co} *en* G *es la topología generada por todos los conjuntos de la forma* $[K, V]$*, en donde* K *es compacto y* V *es abierto en* X*.*

(2) *La topología* **cerrado-abierta** τ_{ca} *en* G *es la topología generada por todos los conjuntos de la forma* $[C, V]$ *tales que* C *es cerrado y* V *es abierto en* X*.*

(3) *Si* X *es un espacio métrico, la topología de la* **convergencia uniforme en acotados** *en* X *es la topología generada por todos los conjuntos de la forma*

$$(A, f, \epsilon) := \{g \in G : d(f(x), g(x)) < \epsilon \ \forall x \in A\}$$

donde $A \subseteq X$ *es acotado,* $f \in G$ *y* $\epsilon > 0$*.*

Es importante notar que las topologías compacto-abierta y cerrado-abierta no necesariamente hacen que la composición o la inversión sean continuas en el grupo $\operatorname{Hom} X$. La siguiente proposición muestra condiciones suficientes para que esto ocurra. Esto fue probado en [4].

Proposición 1.2.9. *Sea* X *un espacio topológico.*

(1) *Si* X *es localmente compacto y* $\operatorname{Hom} X$ *está equipado con la topología compacto-abierta, entonces* $\circ : \operatorname{Hom} X \times \operatorname{Hom} X \to \operatorname{Hom} X$ *es continua.*

(2) *Si* X *es normal y* $\operatorname{Hom} X$ *está equipado con la topología cerrado-abierta entonces* $\operatorname{Hom} X$ *es un grupo topológico con la composición de funciones.*

Demostración. (1) Sean $K, U \subseteq X$ con K compacto y U abierto, y sea $(g, h) \in \circ^{-1}([K, U])$, es decir $g(h(K)) \subseteq U$, o equivalentemente $h(K) \subseteq g^{-1}(U)$. Como X es localmente compacto existe $V \subseteq X$ abierto tal que $\overline{V}$ es compacto y

$$h(K) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq g^{-1}(U).$$

Sea $W := [K, V] \times [\overline{V}, U]$. Entonces se tiene que $(g, h) \in W$. Si $(g', h') \in W$ entonces $g'(K) \subseteq V$ y $h'(\overline{V}) \subseteq U$, de donde se sigue que $h'(g'(K)) \subseteq U$. Esto prueba que $W \subseteq \circ^{-1}(K, U)$.

(2) Supongamos que X es normal. La continuidad de $\circ$, cuando $\operatorname{Hom} X$ está equipado con la topología cerrado-abierta, se prueba de manera análoga a (1) quitando la compacidad de $\overline{V}$.

Probemos ahora que la inversión en $(\operatorname{Hom} X, \tau_{ca})$ es continua. Notemos que si $C, U \subseteq X$ con C cerrado y U abierto, entonces $g \in [C, U]$ si y sólo si $g(C) \subseteq U$ si y sólo si $g^{-1}(X \setminus U) \subseteq X \setminus C$, es decir $g^{-1} \in [X \setminus U, X \setminus C]$. Como $X \setminus U$ es cerrado y $X \setminus C$ es abierto, entonces la inversión es un homeomorfismo. $\square$

1.3. Espacios cuasi-semimétricos y seminormados asimétricos

En esta sección introduciremos las definiciones y resultados básicos de espacios cuasi-métricos y espacios normados asimétricos. Aunque en la Sección 2 nos concentraremos casi en su totalidad en espacios normados asimétricos, en la Sección 3 también trabajaremos con cuasi-métricas al estudiar los hiperespacios inferior y superior de Hausdorff desde un punto de vista asimétrico. Para una lectura más profunda sobre espacios cuasi-métricos, puede consultarse [16].

1.3.1. Cuasi-semimétricas y cuasi-métricas

Una **cuasi-métrica** en un conjunto X es una función $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes tres condiciones para cualesquiera $x, y, z \in X$:

(1) $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0 \Rightarrow x = y$,

(2) $\rho(x, x) = 0$,

(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

El espacio (X, ρ) es llamado **espacio cuasi-métrico**.

Por otro lado, si ρ satisface la segunda y tercera condición entonces ρ es llamada **cuasi-pseudométrica** y el par (X, ρ) es un **espacio cuasi-pseudométrico**.

Cuando sea necesario, también consideraremos cuasi-pseudométricas *extendidas* (resp., cuasi-métricas *extendidas*), es decir, funciones $\rho : X \times X \to [0, \infty]$ que satisfacen las condiciones anteriores.

Vale hacer hincapié en que la diferencia entre una cuasi-pseudométrica y una pseudométrica (en el sentido usual), es que puede ocurrir que $\rho(x,y) \neq \rho(y,x)$. Toda cuasi-pseudométrica (resp., cuasi-métrica) ρ induce otra cuasi-pseudométrica (resp., cuasi-métrica) ρ^-, llamada **cuasi-pseudométrica conjugada** de ρ (resp., **cuasi-métrica conjugada**) definida por

$$\rho^-(x,y) := \rho(y,x).$$

A su vez, ρ induce una pseudométrica (resp., métrica) ρ^s, llamada **pseudométrica inducida** por ρ (resp., **métrica inducida**), definida por

$$\rho^s(x,y) := \max\{\rho(x,y), \rho^-(x,y)\}.$$

El par (X,ρ^-) es llamado espacio cuasi-pseudométrico conjugado de (X,ρ), y el par (X,ρ^s) es llamado espacio pseudométrico asociado a (X,ρ).

Si (X,ρ) es un espacio cuasi-pseudométrico, para cada $x \in X$ y $r > 0$ consideraremos los conjuntos

$$B_\rho(x,r) := \{y \in X : \rho(x,y) < r\},$$

$$B_\rho[x,r] := \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}.$$

El conjunto $B_\rho(x,r)$ es llamado **ρ-bola abierta** con centro x y radio r, y $B_\rho[x,r]$ es llamado **ρ-bola cerrada** con centro x y radio r.

En este contexto, equipamos al espacio cuasi-pseudométrico (X,ρ) con la topología τ_ρ generada por todas las ρ-bolas abiertas $B_\rho(x,r)$ $(x \in X, r > 0)$. Por la definición de ρ^s y ρ^-, para cada $x \in X$ y $r > 0$ se tiene que

$$B_{\rho^s}(x,r) = B_\rho(x,r) \cap B_{\rho^-}(x,r).$$

Este hecho implica que la topología generada por ρ^s es la topología supremo de τ_ρ y τ_{ρ^-}. Es decir:

Observación 1.3.1. *Si (X,ρ) es un espacio cuasi-pseudométrico, entonces τ_{ρ^s} es la menor topología que contiene a τ_ρ y τ_{ρ^-}.*

Es fácil ver que un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto en (X,ρ) si y sólo si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_\rho(x,r) \subseteq U$. Más aún, la definición de continuidad de funciones entre espacios cuasi-pseudométricos resulta natural y coincide con la noción de continuidad topológica.

Definición 1.3.2. *Sea* $f : (X, \rho) \to (Y, \mu)$ *una función entre espacios cuasi-pseudométricos.*

(1) *Si* $x \in X$*, decimos que* f *es continua en* x *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $y \in X$ *con* $\rho(x, y) < \delta$ *entonces* $\mu(f(x), f(y)) < \epsilon$*.*

(2) *Decimos que* f *es uniformemente continua si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x, y \in X$ *con* $\rho(x, y) < \delta$ *se tiene que* $\mu(f(x), f(y)) < \epsilon$*.*

En particular, obtenemos que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si f es continua en x, para todo $x \in X$.

Para cada $x \in X$, la familia de ρ-bolas abiertas $B_\rho(x, 1/n)$ con $n \in \mathbb{N}$ es una base local de x, por lo que (X, ρ) resulta un espacio primero numerable. Si $(x_n) \subseteq X$ es una sucesión, entonces

$$x_n \underset{\rho}{\to} x \quad \text{si y sólo si} \quad \rho(x, x_n) \to 0.$$

También

$$x_n \underset{\rho^-}{\longrightarrow} x \quad \text{si y sólo si} \quad \rho(x_n, x) \to 0.$$

Haremos notar ahora que un espacio cuasi-métrico siempre es T_0.

Proposición 1.3.3. *Todo espacio cuasi-métrico* (X, ρ) *es* T_0*.*

Demostración. Sea (X, ρ) un espacio cuasi-métrico y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como ρ es cuasi-métrica, no puede ocurrir que $\rho(x, y) = 0 = \rho(y, x)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\rho(x, y) > 0$. Sea $r := \rho(x, y)$ y sea $U := B_\rho(x, r)$. Es claro que $x \in U$, pero si ocurriera que $y \in U$ entonces tendría que ocurrir que $\rho(x, y) < r = \rho(x, y)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $y \notin U$, lo que prueba que X es T_0. □

Por otro lado, es claro que un espacio cuasi-pseudométrico (X, ρ) no necesariamente es T_0, por ejemplo tomando $\rho = 0$ se obtiene un espacio indiscreto.

Finalizamos con dos ejemplos de cuasi-métricas cuyas propiedades contrastan con las métricas en el sentido usual. El primero de ellos es un ejemplo de un espacio cuasi-métrico que no es T_1, y el segundo es T_4 pero no metrizable.

Ejemplos 1.3.4. (1) *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* $\rho(x,y) := (y-x)^+$, *en donde* $t^+ := \max\{t, 0\}$. *Entonces* ρ *es una cuasi-métrica en* X *tal que*

$$B_\rho(x,r) = (-\infty, x+r), \quad \text{para todo } x \in X \text{ y } r > 0.$$

La cuasi-métrica conjugada está dada por $\rho^-(x,y) = (x-y)^+ = (y-x)^-$ *(donde* $t^- := \max\{-t, 0\}$*) y* $B_{\rho^-}(x,r) = (x-r, \infty)$. *Además, la métrica asociada es la distancia usual* $\rho^s(x,y) = |x-y|$. *Cabe hacer notar que este espacio, equipado con la operación suma, es el grupo paratopológico del Ejemplo 1.2.2, el cual es* T_0 *pero no* T_1.

(2) *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y consideremos*

$$\rho(x,y) := \begin{cases} y - x & \text{si } y \geq x \\ 1 & \text{si } x > y \end{cases}$$

Una base de abiertos para (X, ρ) *está formada por la familia* $[x, x+\epsilon)$, *con* $x \in X$ *y* $1 > \epsilon > 0$, *por lo que* (X,ρ) *es la línea de Sorgenfrey. Por lo tanto* (X,ρ) *es un ejemplo de un espacio cuasi-métrico* T_4 *que no es metrizable. Además,* $\rho^s(x,y) = 1$ *para todo* $x \neq y$, *luego* (X, ρ^s) *es el espacio métrico discreto.*

1.3.2. Seminormas asimétricas y normas asimétricas

En este trabajo, todos los espacios vectoriales serán espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$.

Sea X un espacio vectorial. Una **norma asimétrica** en X es una función $q : X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes tres condiciones:

(1) Si $q(x) = q(-x) = 0$ entonces $x = 0$.

(2) $q(\alpha x) = \alpha q(x)$ para todo $x \in X$ y $\alpha \geq 0$.

(3) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Notemos que la segunda condición (llamada **homogeneidad positiva**) implica que $q(0) = 0$, y que la tercera condición es la desigualdad triangular usual o subaditividad. Claramente, una de las diferencias más importantes entre una norma asimétrica y una norma, es que puede ocurrir que $q(x) \neq q(-x)$.

Por otro lado, si q satisface la segunda y tercera condición entonces q es llamada **seminorma asimétrica** en este caso. El par (X, q) será llamado **espacio seminormado asimétrico** (respectivamente, **espacio normado asimétrico** si q es norma asimétrica).

Como es de esperarse, hay una relación natural entre cuasi-pseudométricas y seminormas asimétricas.

Proposición 1.3.5. *Sea X un espacio vectorial. Si q es una seminorma asimétrica en X entonces $\rho_q(x, y) := q(y-x)$ es una cuasi-pseudométrica en X. Si además q es norma asimétrica entonces ρ_q es cuasi-métrica.*

Demostración. Sean $x, y, z \in X$. Es claro que $\rho_q(x, x) = q(x - x) = 0$. Por otro lado,

$$\rho_q(x, z) = q(z - x + y - y) \leq q(y - x) + q(z - y) = \rho_q(x, y) + \rho_q(y, z).$$

Si suponemos que q es norma asimétrica, entonces la igualdad

$$q(y - x) = \rho_q(x, y) = 0 = \rho_q(y, x) = q(x - y)$$

implica que $y - x = 0$, por lo que ρ_q es cuasi-métrica. □

Para cada $x \in X$ y $r > 0$, denotaremos

$$B_q(x, r) := B_{\rho_q}(x, r) = \{y \in X : q(y - x) < r\},$$
$$B_q[x, r] := B_{\rho_q}[x, r] = \{y \in X : q(y - x) \leq r\}.$$

En este caso el conjunto $B_q(x, r)$ será llamado **q-bola abierta** con centro en x y radio r. Similarmente $B_q[x, r]$ será la q**-bola cerrada** con centro en x y de radio r. Los conjuntos

$$B_q(0, 1) = \{x \in X : q(x) < 1\}$$

y

$$B_q[0, 1] = \{x \in X : q(x) \leq 1\}$$

recibirán el nombre especial de **q-bola unitaria abierta** y **q-bola unitaria cerrada**, respectivamente.

Siempre asumiremos que un espacio seminormado asimétrico (X, q) está equipado con la topología que induce la cuasi-pseudométrica ρ_q, a menos de que se especifique lo contrario. Los conjuntos abiertos en (X, q) serán llamados **q-abiertos** (y de manera análoga **q-cerrados**, **q-compactos**, etc.).

Observación 1.3.6. *De la definición de topología en un espacio seminormado asimétrico se sigue que si $f : (X, q_X) \to (Y, q_Y)$ es una función entre espacios seminormados asimétricos, entonces f es continua en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $q_X(x - x_0) < \delta$ entonces $q_Y(f(x) - f(x_0)) < \epsilon$.*

Al estar equipado con una topología generada por una cuasi-pseudométrica, el espacio (X, q) tiene como base a las q-bolas abiertas cuyos radios son de la forma $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Luego (X, q) es un espacio primero numerable. Además, podemos caracterizar la convergencia de sucesiones de la siguiente manera.

Observación 1.3.7. *Todo espacio seminormado asimétrico (X, q) es primero numerable. Además, si $(x_n) \subseteq X$ y $x \in X$, entonces*

$$x_n \to x \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{n\to\infty} q(x_n - x) \to 0.$$

En el siguiente ejemplo notaremos que la q-bola cerrada $B_q[x, r]$ no es necesariamente un conjunto q-cerrado (en contraste con el caso de espacios normados).

Ejemplo 1.3.8. *(1) Consideremos $q : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por $q(t) = t^+ := \max\{t, 0\}$. Es fácil ver que q es una norma asimétrica en $\mathbb{R}$ y que q induce la cuasi-métrica del Ejemplo 1.3.4. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ se tiene que $B_q(t, r) = (-\infty, t + r)$ y $B_q[t, r] = (-\infty, t + r]$. Se sigue también que el complemento de toda q-bola cerrada no contiene ninguna q-bola abierta, y en consecuencia ninguna q-bola cerrada es un conjunto q-cerrado.*

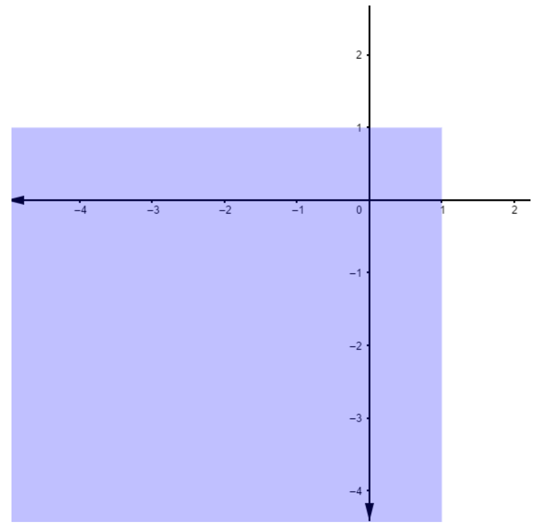
(2) El ejemplo anterior puede generalizarse fácilmente. En $\mathbb{R}^n$, consideremos la norma asimétrica $q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por

$$q(x) = x^+ := \max\{x_1^+, \dots, x_n^+, 0\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La q-bola unitaria $B_q[0, 1]$ de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$B_q[0, 1] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_n \leq 1\}.$$

Para $n = 2$, este conjunto se ilustra en la siguiente figura:



La norma q^s que induce la norma asimétrica q coincide con la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$.

Notemos que en el ejemplo anterior, el espacio normado asimétrico $(\mathbb{R}, q)$ coincide con el grupo paratopológico del Ejemplo 1.2.2. En general, resulta ser que todo espacio seminormado asimétrico es un grupo paratopológico, equipado con la suma de espacio vectorial $+ : X \times X \to X$.

Para probar esto, veremos primero que si (X, q) es un espacio seminormado asimétrico, entonces la topología producto $X \times X$ admite una seminorma asimétrica natural.

Lema 1.3.9. *Sean (X, q_X) y (Y, q_Y) espacios seminormados asimétricos. Entonces las siguientes funciones son seminormas asimétricas en $X \times Y$ que inducen la topología producto en $X \times Y$:*

(1) $q_1 : X \times Y \to [0, \infty)$ *dada por* $q_1(x, y) = q_X(x) + q_Y(y)$.

(2) $q_2 : X \times Y \to [0, \infty)$ *dada por* $q_2(x, y) = \text{máx}\{q_X(x), q_Y(y)\}$.

Adicionalmente, si q_X y q_Y son normas asimétricas, entonces q_1 y q_2 también lo son.

Demostración. Mostremos primero que q_1 es en efecto seminorma asimétrica en $X \times Y$.

Sean $\alpha \geq 0$ y $(x, y) \in X \times Y$. Entonces

$$q_1(\alpha(x, y)) = q_X(\alpha x) + q_Y(\alpha y) = \alpha(q_X(x) + q_Y(y)) = \alpha q_1(x, y).$$

Sean ahora $(x_i, y_i) \in X \times Y$, $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned} q_1((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= q_X(x_1 + x_2) + q_Y(y_1 + y_2) \\ &\leq (q_X(x_1) + q_X(x_2)) + (q_Y(y_1) + q_Y(y_2)) \\ &= q_1(x_1, y_1) + q_1(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Esto prueba que q_1 es seminorma asimétrica.

Demostraremos ahora que la topología producto en $X \times Y$ está inducida por la seminorma asimétrica q_1. Una vecindad básica de $(x, y) \in X \times Y$ en el espacio producto tiene la forma $B_{q_X}(x, \epsilon) \times B_{q_Y}(y, \epsilon)$. Por la definición de q_1, se sigue que

$$B_{q_1}((x, y), \epsilon) \subseteq B_{q_X}(x, \epsilon) \times B_{q_Y}(y, \epsilon).$$

Por otro lado, si $x_1 \in B_{q_X}(x, \epsilon/2)$ y $y_1 \in B_{q_Y}(y, \epsilon/2)$ entonces

$$q_1((x_1, y_1) - (x, y)) = q_X(x_1 - x) + q_Y(y_1 - y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Esto demuestra que

$$B_{q_X}(x, \epsilon/2) \times B_{q_Y}(y, \epsilon/2) \subseteq B_{q_1}((x, y), \epsilon).$$

Por lo tanto, la topología inducida por q_1 coincide con la topología producto en $X \times Y$.

Adicionalmente, si q_X y q_Y son normas asimétricas, entonces $q_1(x, y) = q_1(-x, -y) = 0$ implica que $q_X(x) = q_X(-x) = 0 = q_Y(y) = q_Y(-y)$. Como q_X y q_Y son normas asimétricas, entonces $x = 0 = y$, es decir, q_1 es norma asimétrica también.

De forma análoga se prueba el mismo resultado para q_2. $\square$

Proposición 1.3.10. *Sea (X, q) un espacio seminormado asimétrico. Entonces*

(1) *X es un grupo paratopológico equipado con la suma de espacio vectorial.*

(2) *Si $t > 0$, la función $x \mapsto tx$ es un homeomorfismo de X en X.*

(3) *Para todo $u \in X$, la función dada por $x \mapsto x + u$ es un homeomorfismo de X.*

Demostración. (1) Equipemos al producto $X \times X$ con la seminorma asimétrica q_1 como en el Lema 1.3.9. Sean $\epsilon > 0$ y $(x_0, y_0) \in X \times X$. Si $q_1((x, y) - (x_0, y_0)) < \epsilon$ entonces

$$q((x + y) - (x_0 + y_0)) \leq q(x - x_0) + q(y - y_0) = q_1((x, y) - (x_0, y_0)) < \epsilon.$$

Esto prueba que la función suma $+ : X \times X \to X$ es continua.

(2) Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Si $y \in X$ es tal que $q(y - x) < \epsilon/t$, entonces $q(ty - tx) < \epsilon$. Esto prueba la continuidad de la función $x \mapsto tx$. Como su inversa está dada por $x \mapsto (1/t)x$, se sigue que es un homeomorfismo.

(3) Por el inciso (1), la función $x \mapsto x + u$ es continua. Como su función inversa está dada por $x \mapsto x - u$, se sigue que es un homeomorfismo. □

No obstante, los espacios normados asimétricos pueden no ser grupos topológicos.

Observación 1.3.11. *En el Ejemplo 1.2.2, la función $t \mapsto -t$ no puede ser continua puesto que la imagen de cualquier intervalo $(-\infty, r)$ resulta un conjunto con interior vacío.*

Si X un espacio vectorial, recordemos que un subconjunto $A \subseteq X$ es llamado **convexo** si

$$ta + (1 - t)b \in A, \quad \text{para cualesquiera } a, b \in A \text{ y } t \in [0, 1].$$

Recordemos además que un subconjunto $A \subseteq X$ es llamado **absorbente** si para todo $x \in X$ existe $t > 0$ tal que $x \in tA$, es decir, si el conjunto $\{t > 0 : x \in tA\}$ es no vacío.

Proposición 1.3.12. *Sean (X, q) un espacio seminormado asimétrico, $x \in X$ y $r > 0$. Entonces el conjunto $B_q(x, r)$ es convexo, $B_q(0, r)$ es absorbente y*

$$B_q(x, r) = x + rB_q(0, 1). \tag{1.3.1}$$

En particular, todas las q-bolas abiertas son homeomorfas entre sí. El mismo resultado se obtiene si reemplazamos las q-bolas abiertas por las correspondientes q-bolas cerradas.

Demostración. Sean $y, z \in B_q(x, r)$ y $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\begin{aligned} q(ty + (1-t)z - x) &= q(ty + (1-t)z - (tx + (1-t)x)) \\ &\leq tq(y - x) + (1-t)q(z - x) \\ &< tr + (1-t)r \\ &= r. \end{aligned}$$

Por lo tanto $ty + (1-t)z \in B_q(x, r)$. Esto prueba que $B_q(x, r)$ es convexo.

Sea ahora $x_0 \in X$ fijo. Si $q(x_0) = 0$ entonces $x_0 \in B_q(0, r)$. De lo contrario, $x_0/(2q(x_0)) \in B_q(0, r)$, lo cual prueba que $B_q(0, r)$ es absorbente.

Finalmente, si $y \in B_q(x, r)$ entonces $y = x + r(y - x)/r$, donde $(y - x)/r \in B_q(0, 1)$. Y si $z \in B_q(0, 1)$ entonces $q(x + rz - x) = rq(z) < r$, lo que prueba la igualdad (1.3.1).

El hecho de que las q-bolas abiertas sean homeomorfas entre sí se sigue entonces de la Proposición 1.3.10.

El caso de las q-bolas cerradas es completamente análogo. □

1.3.3. Norma asimétrica conjugada y norma asociada

Sean X un espacio vectorial y q una seminorma asimétrica en X. Entonces q induce otra seminorma asimétrica q^- en X, llamada **seminorma asimétrica conjugada** de q, definida por

$$q^-(x) := q(-x), \quad x \in X.$$

De la definición de q^- se sigue que la cuasi-pseudométrica conjugada de la seminorma asimétrica q satisface la igualdad $\rho_q^- = \rho_{q^-}$. Además, para todo $x \in X$ y $r > 0$, se tiene la igualdad

$$B_{q^-}(x, r) = -B_q(x, r).$$

Por lo tanto, un conjunto $U \subseteq X$ es abierto en (X, q) si y sólo si $-U$ es abierto en (X, q^-). Esto muestra que q^- induce la topología conjugada del grupo paratopológico (X, q) (ver Sección 1.2.1). En particular, la función $x \mapsto -x$ es un homeomorfismo de (X, q) en (X, q^-).

A su vez, q induce una seminorma (en el sentido usual, es decir, simétrica) en el espacio X dada por

$$q^s(x) := \max\{q(x), q^-(x)\} = \max\{q(x), q(-x)\}, \quad x \in X.$$

La seminorma q^s induce la topología del grupo topológico asociado a (X, q) y $\rho_q^s = \rho_{q^s}$. El espacio seminormado (X, q^s) es llamado **espacio seminormado asociado** a (X, q). Naturalmente, si q es norma asimétrica entonces q^s es norma, y (X, q^s) es llamado **espacio normado asociado** a (X, q).

Como en espacios cuasi-pseudométricos, para cada $x \in X$ y $r > 0$, se tiene que

$$B_{q^s}(x, r) = B_q(x, r) \cap B_{q^-}(x, r).$$

En consecuencia, la topología de (X, q^s) es la topología supremo de las topologías generadas por q y q^-.

Recordemos que la q-bola cerrada no es necesariamente un conjunto q-cerrado (Ejemplo 1.3.8). Sin embargo, sí resulta un conjunto cerrado en el espacio seminormado asociado.

Proposición 1.3.13. *Sea (X, q) un espacio seminormado asimétrico, y sean $x \in X$ y $r > 0$. Entonces la q-bola cerrada $B_q[x, r]$ es un conjunto cerrado en (X, q^s).*

Demostración. Sea $(x_n) \subseteq B_q[x, r]$ una sucesión que converge a un punto z en (X, q^s). Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $q(x_n - x) \leq r$ y $q^s(x_n - z) \to 0$. Entonces, si $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$q(z - x) \leq q(z - x_n) + q(x_n - x) \leq q^s(z - x_n) + q(x_n - x) \leq q^s(z - x_n) + r.$$

Usando la convergencia $q^s(x_n - z) \to 0$, obtenemos que $q(z - x) \leq r$. Luego $z \in B_q[x, r]$. $\square$

La seminorma asimétrica, vista como función real, no es necesariamente continua en el espacio en el espacio (X, q), pero sí lo es en (X, q^s).

Proposición 1.3.14. *Sea (X, q) un espacio seminormado asimétrico. Entonces las funciones $q, q^{-} : (X, q^s) \to [0, \infty)$ son continuas (donde $[0, \infty)$ tiene la topología euclidiana).*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$ en (X, q^s). Entonces

$$\max\{q(x_n - x), q^{-}(x_n - x)\} \to 0.$$

Esto implica que las sucesiones $(q(x_n - x))$ y $(q^{-}(x_n - x))$ convergen a 0. Es decir, (x_n) converge a x tanto en (X, q) como en (X, q^{-}), lo cual prueba la continuidad de ambas funciones. $\square$

Definiremos ahora el concepto de equivalencia entre seminormas asimétricas.

Sea X un espacio vectorial. Decimos que dos seminormas asimétricas q y p son **equivalentes** si existen $M, N > 0$ tales que para cada $x \in X$ se tiene que

$$Mp(x) \leq q(x) \leq Np(x).$$

Equivalentemente, q y p son equivalentes si y sólo si existen $M, N > 0$ tales que

$$B_p(0, M) \subseteq B_q(0, 1) \subseteq B_p(0, N).$$

Lo anterior es válido también si cambiamos las bolas abiertas por las correspondientes bolas cerradas. Además, es fácil ver que dos seminormas asimétricas equivalentes inducen la misma topología en X.

Debido a que $q(x) \leq q^s(x)$ para cada $x \in X$, se tiene que

$$B_{q^s}(0, 1) \subseteq B_q(0, 1).$$

Por lo tanto, para que q y q^s sean equivalentes es necesario y suficiente que la q-bola abierta unitaria $B_q(0, 1)$ esté contenida en una q^s-bola.

Observación 1.3.15. *Sea (X, q) un espacio seminormado asimétrico. Entonces las topologías de (X, q) y (X, q^s) coinciden si y sólo si $B_q(0, 1)$ (o bien, $B_q[0, 1]$) es un conjunto q^s-acotado. En este caso, diremos que el espacio seminormado asimétrico (X, q) es* **seminormable** *por q^s. Si q es norma asimétrica, diremos que (X, q) es* **normable** *por q^s.*

1.3.4. Funcional de Minkowski

Sea X un espacio vectorial, y sea $A \subseteq X$ convexo y absorbente. La **funcional de Minkowski** respecto al conjunto A es la función definida mediante

$$p_A(x) = \text{ínf}\{t > 0 : x \in tA\}, \quad x \in X.$$

Un resultado conocido es que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $A = B[0,1]$ entonces $p_A(x) = \|x\|$ para cada $x \in X$. El siguiente resultado es una generalización de lo que ocurre en espacios normados.

Proposición 1.3.16. *Sea X un espacio vectorial y $A \subseteq X$ convexo y absorbente con $0 \in A$. Entonces la funcional de Minkowski $p_A : X \to [0, \infty)$ es una seminorma asimétrica. Si adicionalmente A no contiene rectas no triviales, entonces p_A es una norma asimétrica.*

Demostración. Sea $\alpha > 0$ y $x \in X$. Demostremos que $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$.

Sea $s \in \{t > 0 : \alpha x \in tA\}$. Es decir, $x \in (s/\alpha)A$. Esto implica que $p_A(x) \leq s/\alpha$, luego $\alpha p_A(x) \leq p_A(\alpha x)$.

Por otro lado, si $s \in \{t > 0 : x \in tA\}$, entonces $\alpha x \in \alpha s A$. Por lo tanto $p_A(\alpha x) \leq \alpha s$, lo cual implica que $p_A(\alpha x) \leq \alpha p_A(x)$.

Para verificar que la igualdad también se cumple si $\alpha = 0$, es suficiente ver que $p_A(0) = 0$. Esto se sigue de que $0 \in A$, puesto que en este caso $0 \in tA$ para todo $t > 0$.

Sean ahora $x, y \in X$ y verifiquemos que se cumple la desigualdad triangular.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, y sean $s, t > 0$ tales que $p_A(x) \leq t < p_A(x) + \epsilon$, $p_A(y) \leq s < p_A(y) + \epsilon$, $x \in tA$ y $y \in sA$. Sean $a \in A$ y $a' \in A$ tales que $x = ta$ y $y = sa'$, luego

$$\frac{x+y}{t+s} = \frac{t}{t+s}a + \frac{s}{t+s}a' \in A,$$

es decir, $p_A(x+y) \leq t + s < p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon$. Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se tiene que $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$. Esto prueba que p_A es seminorma asimétrica.

Finalmente, supongamos que $x \in A$ es tal que $p_A(x) = p_A(-x) = 0$. Entonces existen sucesiones $t_n, s_n > 0$ convergentes a 0 tales que $x \in t_n A$ y $-x \in s_n A$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la convexidad de A, el segmento que une a $(1/t_n)x$ y $(-1/s_n)x$ está contenido en A para todo $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, si $r \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $r < 1/t_n$ se tiene que rx pertenece al segmento que une a 0 y a $(1/t_n)x$, es decir $rx \in A$. Similarmente, si $r \leq 0$ entonces $rx \in A$. Esto muestra que A contiene al conjunto $\{rx : r \in \mathbb{R}\}$. Si A no contiene rectas no triviales, esto sólo puede pasar si $x = 0$. Por lo tanto p_A es norma asimétrica. $\square$

Finalmente, en este contexto, notemos que por el hecho de que A es convexo y $0 \in A$, se tiene que $tA \subseteq A$ para todo $t \in [0,1]$. Luego, de la definición de funcional de Minkowski, si $q = p_A$ se sigue directamente que

$$B_q(0,1) = \{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : p_A(x) \leq 1\} = B_q[0,1].$$

Más aún, la contención de la derecha se vuelve igualdad bajo cierta condición que muestra la siguiente proposición.

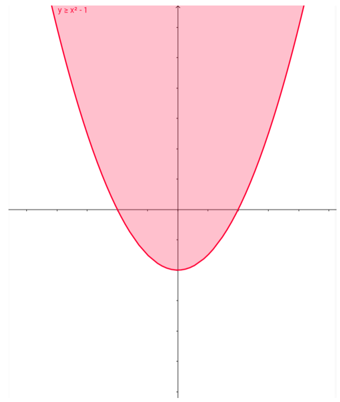
Proposición 1.3.17. *Sea X un espacio vectorial y $A \subseteq X$ convexo, absorbente con $0 \in A$. Sea $q = p_A$. Si A es q^s-cerrado, entonces $A = B_q[0,1]$.*

Demostración. Basta probar que $B_q[0,1] \subseteq A$. Sea $x \in B_q[0,1]$, es decir, $p_A(x) \leq 1$. Si $p_A(x) < 1$ entonces existe $t < 1$ tal que $x \in tA \subseteq A$. Supongamos entonces que $p_A(x) = 1$. Sea (t_n) una sucesión de números positivos tal que $t_n \to 1$ y $x \in t_n A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in A$ tal que $x = t_n a_n$. Entonces, si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$q^s(a_n - x) = \frac{1}{t_n} q^s(t_n a_n - t_n x) = \frac{1}{t_n} q^s(x - t_n x) = \frac{|1 - t_n|}{t_n} q^s(x).$$

Como $|1 - t_n| \to 0$, se sigue que (a_n) converge a x respecto de la seminorma q^s. Como A es q^s-cerrado, entonces $x \in A$. $\square$

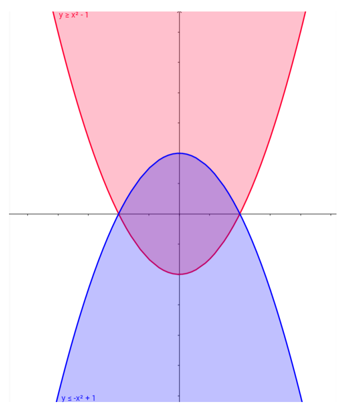
Ejemplo 1.3.18. *Consideremos el convexo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1\}$.. Sea q la norma asimétrica p_A. Entonces el conjunto $B_q[0,1] = A$.*



Notemos también que por las igualdades

$$B_{q^-}[0,1] = -A, \quad \text{y} \quad B_{q^s}[0,1] = B_q[0,1] \cap B_{q^-}[0,1],$$

entonces $B_{q^s}[0,1]$ *es el subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *que muestra la siguiente figura.*



1.3.5. Espacios derecho-acotados

Sea (X, q) un espacio seminormado asimétrico. Definimos

$$\theta_q := \{x \in X : q(x) = 0\}.$$

Recordemos que un subconjunto C de un espacio vectorial es llamado **cono convexo** si para cualesquiera $x, y \in C$ y $t, s \geq 0$ se tiene que $tx + sy \in C$.

Proposición 1.3.19. *Sea* (X, q) *un espacio seminormado asimétrico.*

(1) *El conjunto* θ_q *es un cono convexo* q^s*-cerrado.*

(2) *θ_q es la unión de todos los rayos de la forma $\{tx : t \geq 0\}$, $x \in X$, contenidos en $B_q[0,1]$.*

Demostración. Sean $x, y \in \theta_q$ y $t, s \geq 0$. Entonces

$$q(tx + sy) \leq tq(x) + sq(y) = 0.$$

Por lo tanto $tx + sy \in \theta_q$. Como $\theta_q = q^{-1}(0)$ y q es una función q^s-continua por la Proposición 1.3.14, entonces θ_q es q^s-cerrado.

Sea ahora C el conjunto formado por la unión de todos los rayos $\{tx : t \geq 0\}$ contenidos en $B_q[0,1]$. Si $z \in C$ entonces $q(tz) = tq(z) \leq 1$ para todo $t \geq 0$, por lo que necesariamente $q(z) = 0$ y en consecuencia $z \in \theta_q$. Recíprocamente, si $z \in \theta_q$ entonces $q(z) = 0$, luego es claro que $q(tz) = 0$ para todo $t \geq 0$. Es decir, $\{tz : t \geq 0\}$ está contenido en θ_q y por lo tanto también está contenido en $B_q[0,1]$. □

Ejemplos 1.3.20. (1) *En $\mathbb{R}^n$, sea q la norma asimétrica definida por*

$$q(x) = x^+ \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces

$$\theta_q = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \leq 0\}.$$

(2) *En $\mathbb{R}^2$, sea $q = p_A$, en donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1\}$. Entonces*

$$\theta_q = \{(0,y) : y \geq 0\}.$$

Si (X,q) es un espacio normado asimétrico, notemos que para cada $r > 0$, la contención

$$B_{q^s}(0,r) + \theta_q \subseteq B_q(0,r)$$

siempre es válida, pues si $x, z \in X$ son tales que $q^s(x) < r$ y $q(z) = 0$ entonces $q(x+z) \leq q(x) < r$. La contención de vuelta no es válida en general, como se muestra en los Ejemplos 1.3.20. Por lo tanto introducimos la siguiente definición.

Definición 1.3.21. *El espacio (X,q) es llamado* **derecho-acotado** *si existe $r > 0$ tal que*

$$B_q(0,r) \subseteq B_{q^s}(0,r) + \theta_q.$$

El siguiente teorema nos será de mucha utilidad, el cual reúne resultados originalmente publicados en [17] y [27].

Teorema 1.3.22. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico. Definamos $p : X \to [0, \infty)$ mediante*

$$p(x) := \inf\{q^s(x - y) : y \in \theta_q\}.$$

Entonces p tiene las siguientes propiedades:

(1) *p es una norma asimétrica.*

(2) *$q \leq p$, luego la topología de (X, p) es más fina que la de (X, q).*

(3) *$\theta_q = \theta_p$.*

(4) *$q^s = p^s$.*

(5) *$B_p(0, 1) \subseteq B_{p^s}(0, 1) + \theta_p$, es decir (X, p) es derecho-acotado.*

Demostración. (1) Sea $x \in X$ y supongamos que $p(x) = 0 = p(-x)$. Si $\epsilon > 0$ existen $y_1, y_2 \in \theta_q$ tales que $q^s(x - y_1), q^s(-x - y_2) < \epsilon$. Entonces tenemos que

$$q(x) \leq q(x - y_1) + q(y_1) \leq q^s(x - y_1) < \epsilon,$$

y análogamente $q(-x) < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se sigue que $q(x) = 0 = q(-x)$. Como q es norma asimétrica, $x = 0$.

No es difícil probar que $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $\alpha \geq 0$ y $x \in X$.

Finalmente, probemos la desigualdad triangular. Sean $x, z \in X$ y $\epsilon > 0$. Sean $y_1, y_2 \in \theta_q$ tales que $q^s(x - y_1) < p(x) + \epsilon$ y $q^s(z - y_2) < p(z) + \epsilon$. Entonces

$$q^s((x + z) - (y_1 + y_2)) \leq q^s(x - y_1) + q^s(z - y_2) < p(x) + p(z) + 2\epsilon.$$

Como $y_1 + y_2 \in \theta_q$ y $\epsilon > 0$ fue arbitrario, obtenemos que $p(x + z) \leq p(x) + p(z)$.

(2) Para cada $x \in X$ y $y \in \theta_q$ tenemos que $q(x) \leq q^s(x - y) + q(y) = q^s(x - y)$, luego $q(x) \leq p(x)$.

(3) Si $x \in \theta_q$ entonces $0 = q(x - x) \geq p(x)$, luego $p(x) = 0$.

Por (2), si $x \in \theta_p$, es decir $p(x) = 0$ entonces $q(x) = 0$.

(4) De la definición de p, poniendo $y = 0$ obtenemos que $p(x) \leq q^s(x)$ para todo $x \in X$. Esto implica también que $p(-x) \leq q^s(-x) = q^s(x)$, por lo tanto $p^s \leq q^s$.

Por (2) tenemos que $q(x) \leq p(x)$ para todo x, lo cual implica que $q^s \leq p^s$.

(5) Supongamos que $p(x) < 1$. Entonces existe $y \in \theta_q$ tal que $q^s(x - y) < 1$. Por lo tanto $x = (x-y)+y \in B_{q^s}(0,1)+\theta_q = B_{p^s}(0,1)+\theta_p$ por (3) y (4). $\square$

Capítulo 2

Dimensión y estructura de espacios normados asimétricos

2.1. Axiomas de separación

Recordemos que todo espacio seminormado asimétrico (X, q) es un grupo paratopológico con la suma de espacio vectorial de X. Si además q es norma asimétrica, entonces (X, q) es T_0, pero no necesariamente T_1. Estamos interesados en encontrar relaciones entre los axiomas de separación en espacios normados asimétricos bajo distintas condiciones.

2.1.1. Caracterizaciones de axiomas de separación

A continuación, veremos que en espacios seminormados asimétricos los axiomas T_0 y T_1 son relativamente fáciles de caracterizar.

Proposición 2.1.1. *Sea (X, q) un espacio seminormado asimétrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *q es una norma asimétrica.*

(2) *θ_q no contiene rectas de la forma $\{tb : t \in \mathbb{R}\}$, con $b \in X \setminus \{0\}$.*

(3) *(X, q) es un espacio T_0.*

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que q es una norma asimétrica. Si existiera $b \in X \setminus \{0\}$ tal que $tb \in \theta_q$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces en particular $q(b) = 0 = q(-b)$, contradiciendo que q es norma asimétrica.

(2)⇒(3) Supongamos ahora que θ_q no contiene rectas de la forma $\{tb : t \in \mathbb{R}\}$, con $b \neq 0$. Sean $x \neq y$ puntos distintos en X. Por hipótesis existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $q(t(x-y)) > 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t > 0$. Por la homogeneidad positiva, $q(x-y) > 0$. Si $r := q(x-y)$, es fácil checar que $B_q(y, r)$ contiene al punto y pero no contiene a x. Esto prueba que (X, q) es T_0.

(3)⇒(1) Finalmente, asumamos que (X, q) es T_0. Supongamos que existe $x \neq 0$ tal que $q(x) = 0 = q(-x)$. Sea $\epsilon > 0$. Como $q(-x) = 0$, entonces $0 \in B_q(x, \epsilon)$. Asimismo, como $q(x) = 0$ entonces $x \in B_q(0, \epsilon)$. Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, esto prueba que todo abierto que contiene a x también contiene a 0 y viceversa, contradiciendo que (X, q) es T_0. Por lo tanto $q(x) = 0 = q(-x)$ implica que $x = 0$, es decir, q es norma asimétrica. □

La proposición anterior nos dice que un espacio seminormado asimétrico es normado asimétrico si y sólo si el espacio es T_0. Ahora daremos una caracterización similar para el caso del axioma T_1.

Proposición 2.1.2. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\theta_q = \{0\}$.

(2) *θ_q no contiene rayos de la forma $\{tb : t \geq 0\}$, con $b \in X \setminus \{0\}$.*

(3) *(X, q) es un espacio T_1.*

Demostración. Si $\theta_q = \{0\}$ es claro que θ_q no contiene rayos no triviales.

Supongamos que θ_q no contiene rayos de la forma $\{tb : t \geq 0\}$, con $b \neq 0$. Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Por hipótesis existe $t > 0$ tal que $q(t(x-y)) > 0$, y de manera similar existe $s > 0$ tal que $q(s(y-x)) > 0$. En particular $r_1 := q(x-y) > 0$ y $r_2 := q(y-x) > 0$. Entonces $B_q(y, r_1)$ contiene a y pero no a x, y $B_q(x, r_2)$ contiene a x pero no a y. Por lo tanto (X, q) es T_1.

Finalmente, supongamos que (X, q) es T_1. Si existiera $x \neq 0$ tal que $q(x) = 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se tendría que la bola $B_q(0, \epsilon)$ contiene a x, es decir, no existe ningún abierto que contenga a 0 pero no a x. Esto contradice que (X, q) es T_1, y por lo tanto concluimos que $\theta_q = \{0\}$. □

El siguiente lema nos dice qué tipo de segmentos de recta pueden estar contenidos en las q-bolas abiertas o cerradas.

Lema 2.1.3. *Sea* (X, q) *un espacio seminormado asimétrico. Si la bola* $B_q[0, 1]$ *contiene un rayo de la forma* $\{a + tb : t \geq 0\}$*, entonces* $b \in \theta_q$*.*

Demostración. Por la desigualdad triangular, para todo $t \geq 0$ se tiene que

$$q(tb) = q(tb + a - a) \leq q(tb + a) + q(-a).$$

Luego, usando la hipótesis, obtenemos que para todo $t \geq 0$

$$q(tb) - q(-a) \leq q(tb + a) \leq 1.$$

Como $q(tb) = tq(b)$ para todo $t \geq 0$, lo anterior sólo puede ocurrir si $q(b) = 0$. Es decir, $b \in \theta_q$. □

A continuación veremos que en el caso de dimensión finita, es suficiente que un espacio normado asimétrico sea T_1 para que tenga todas las propiedades topológicas de un espacio normado. Probaremos primero el siguiente lema.

Lema 2.1.4. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *cerrado y convexo con* $0 \in A$*. Entonces* A *es acotado respecto a la norma euclidiana* $\|\cdot\|$ *(y por lo tanto, respecto a cualquier norma) si y sólo si* A *no contiene rayos de la forma* $\{tb : t \geq 0\}$*, con* $b \neq 0$*.*

Demostración. Si A es acotado, es claro que A no puede contener rayos no triviales.

Para probar la implicación recíproca, supongamos que A es no acotado. Sea $(a_n) \subseteq A$ una sucesión de puntos distintos de 0 tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \infty.$$

Por la compacidad de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión (b_n) definida por $b_n := a_n/\|a_n\|$ converge a algún punto $b \neq 0$. Si $t \geq 0$ existe N tal que $t/\|a_n\| \leq 1$ para toda $n \geq N$, luego

$$tb = \lim_{n\to\infty} (t/\|a_n\|)a_n \in A$$

pues A es cerrado y cada $(t/\|a_n\|)a_n \in A$ porque $0 \in A$ y A es convexo. □

El siguiente resultado fue probado en [23]. La siguiente es una demostración alterna de dicho resultado.

Proposición 2.1.5. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico T_1 de dimensión finita. Entonces las topologías de (X, q) y (X, q^s) coinciden, es decir, (X, q) es normable por q^s.*

Demostración. De acuerdo con la Observación 1.3.15, basta ver que $B_q[0, 1]$ es un conjunto q^s-acotado. En caso contrario, por el Lema 2.1.4, $B_q[0, 1]$ contiene un rayo de la forma $\{tb : t \geq 0\}$ con $b \neq 0$. Por el Lema 2.1.3, se tiene que $q(b) = 0$. Por la Proposición 2.1.2 necesariamente $b = 0$, lo cual es una contradicción. □

En contraste, recordemos que existen espacios cuasi-métricos que satisfacen axiomas de separación más fuertes que T_1, pero que no son topológicamente equivalentes a un espacio metrizable aún cuando el conjunto ambiente es $\mathbb{R}$.

Observación 2.1.6. *La línea de Sorgenfrey (Ejemplo 1.3.4) es un espacio cuasi-métrico normal que no es metrizable. Más aún, por la Proposición 2.1.5, la topología de la línea de Sorgenfrey no proviene de una norma asimétrica.*

El axioma T_2 fue caracterizado en [22]. Para mostrar esto, introducimos primero la siguiente definición.

Si q es una norma asimétrica en X, para cada $x \in X$ consideremos

$$\|x\|_q := \text{ínf}\{q(y) + q(y - x) : y \in X\}.$$

Lema 2.1.7. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico. Entonces $\|\cdot\|_q$ es una seminorma en X tal que $\|x\|_q \leq q(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Demostraremos que $\|\alpha x\|_q = |\alpha| \|x\|_q$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$. Por definición, es fácil ver que $\|0\|_q = 0$, por lo que la igualdad se cumple si $\alpha = 0$ o $x = 0$. Supongamos que $\alpha > 0$ y $x \in X \setminus \{0\}$. Como la función $y \mapsto \alpha y$ es una biyección de X en X, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_q &= \text{ínf}\{q(\alpha y) + q(\alpha y - \alpha x) : y \in X\} \\
&= \alpha\, \text{ínf}\{q(y) + q(y - x) : y \in X\} \\
&= \alpha \|x\|_q .
\end{aligned}$$

Para demostrar que $\|\alpha x\|_q = (-\alpha)\|x\|_q$ en el caso $\alpha < 0$, es suficiente demostrar que $\|-x\|_q = \|x\|_q$. Considerando la biyección de X en X dada por $y \mapsto y - x$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|-x\|_q &= \text{ínf}\{q(y-x) + q((y-x)-(-x)) : y \in X\}\\ &= \text{ínf}\{q(y-x) + q(y) : y \in X\}\\ &= \|x\|_q .\end{aligned}$$

Demostremos ahora la desigualdad triangular. Sean $x, z \in X$, y sean $y_1, y_2 \in X$ arbitrarios. Por la desigualdad triangular de la norma asimétrica q, se tiene que

$$q(y_1 + y_2) + q((y_1 + y_2) - (x + z)) \leq [q(y_1) + q(y_1 - x)] + [q(y_2) + q(y_2 - z)].$$

Lo anterior muestra que

$$\|x + z\|_q \leq [q(y_1) + q(y_1 - x)] + [q(y_2) + q(y_2 - z)].$$

Tomando ínfimos sobre $y_1 \in X$ y $y_2 \in X$, respectivamente, obtenemos que

$$\|x + z\|_q \leq \|x\|_q + \|z\|_q .$$

Esto demuestra que $\|\cdot\|_q$ es seminorma.

Finalmente, para cada $x \in X$ se tiene que

$$\|x\|_q = \|-x\|_q \leq q(0) + q(0 + x) = q(x),$$

lo cual prueba el resultado deseado. □

A continuación veremos que la condición de que la seminorma $\|\cdot\|_q$ sea una norma es precisamente lo que caracteriza que el espacio asimétrico (X, q) sea Hausdorff.

Proposición 2.1.8. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *Si $\|x\|_q = 0$ entonces $x = 0$.*

(2) *(X, q) es T_2.*

Demostración. Si $\|x\|_q = 0$ implica que $x = 0$, entonces la seminorma $\|\cdot\|_q$ es una norma. Por el Lema 2.1.7 se tiene que $\|x\|_q \leq q(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, la topología generada por q es más fina que la topología generada por $\|\cdot\|_q$. Como $(X, \|\cdot\|_q)$ es Hausdorff, entonces (X, q) también lo es.

Supongamos ahora que (X, q) es T_2. Sea $x \in X$ tal que $\|x\|_q = 0$. Por la definición de $\|\cdot\|_q$, existe una sucesión (x_n) tal que $(q(x_n))$ y $(q(x_n - x))$ convergen a 0. Es decir, la sucesión (x_n) converge en (X, q) tanto a 0 como al punto x. Como (X, q) es Hausdorff, necesariamente $x = 0$. □

Recordemos que en un espacio normado asimétrico, no necesariamente la q-bola cerrada es un conjunto q-cerrado (Ejemplo 1.3.8). De hecho, como veremos a continuación, si esto sucede entonces el espacio tiene que ser $T_{3\frac{1}{2}}$.

Proposición 2.1.9. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico. Si la bola cerrada $B_q[0, 1]$ es un conjunto q-cerrado, entonces X es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Si $B_q[0, 1]$ es un conjunto q-cerrado, entonces todas las q-bolas cerradas también son conjuntos q-cerrados. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces

$$x \in B_q(x, \epsilon/2) \subseteq \overline{B_q(x, \epsilon/2)} \subseteq B_q[x, \epsilon/2] \subseteq B_q(x, \epsilon),$$

en donde la segunda contención ocurre debido a que $B_q[x, \epsilon/2]$ es un conjunto q-cerrado. Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, esto prueba que X es T_3. Como todo espacio normado asimétrico es T_0 por la Proposición 2.1.1, entonces (X, q) es T_3 por la Proposición 1.1.1. Finalmente, como todo grupo paratopológico regular es completamente regular por el Teorema 1.2.6, obtenemos el resultado deseado. □

Aún no se sabe si el recíproco de la Proposición 2.1.9 es verdadero o no.

2.1.2. Axioma T_1 y compacidad

En [23, Teorema 13], se afirma que el siguiente resultado es cierto: si (X, q) es un espacio normado asimétrico T_1 tal que la bola $B_q[0, 1]$ es q-compacta, entonces X es de dimensión finita. Sin embargo, en la prueba de dicho resultado se utiliza el resultado [23, Corolario 11], el cual necesita de antemano que el espacio X sea de dimensión finita.

No obstante, dicha afirmación es verdadera como veremos en el siguiente teorema, el cual es un resultado original publicado en [19].

Teorema 2.1.10. *Sea (X,q) un espacio normado asimétrico T_1. Si la bola $B_q[0,1]$ es q-compacta entonces:*

(1) *$B_q[0,1]$ es q^s-acotada,*

(2) *X es normable por q^s,*

(3) *X es de dimensión finita.*

Demostración. Notemos primero que la esfera

$$S_q := B_q[0,1] \setminus B_q(0,1) = \{x \in X : q(x) = 1\}$$

es un conjunto q-cerrado en el subespacio $B_q[0,1]$, por ser el complemento del q-abierto $B_q(0,1)$. Como $B_q[0,1]$ es un conjunto q-compacto, entonces S_q es también un conjunto q-compacto en el subespacio $B_q[0,1]$. Esto implica a su vez que la esfera S_q es q-compacta en (X,q).

Probaremos ahora que $B_q[0,1]$ es q^s-acotada. Supongamos por el contrario que $B_q[0,1]$ no fuese q^s-acotada, entonces existe una sucesión $(x_n) \subseteq B_q[0,1]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} q^s(x_n) = \infty.$$

Como $q(x_n) \leq 1$, podemos asumir que $q(x_n) < q^s(x_n)$ y por lo tanto $q^s(x_n) = q(-x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$y_n = \frac{x_n}{q(-x_n)}.$$

Como $(y_n) \subseteq B_q[0,1]$, por compacidad podemos asumir sin pérdida de generalidad que (y_n) converge a un punto $y \in B_q[0,1]$ respecto a la topología inducida por q. Análogamente, como cada $-y_n \in S_q$ podemos suponer que $(-y_n)$ converge a un punto $z \in S_q$ (en particular, $z \neq 0$). Por la continuidad de la suma del espacio (X,q), la sucesión trivial $(y_n + (-y_n))$ converge a $y + z$ en (X,q). Luego, $y + z \in \overline{0}^q = \{0\}$ por ser X un espacio T_1, es decir $y = -z \neq 0$. Esto muestra que $(-y_n)$ converge a $-y$ en (X,q), y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} q^s(y_n - y) = \lim_{n\to\infty} \max\{q(y_n - y), q(-y_n + y)\} = 0.$$

En consecuencia, (y_n) converge a y en el espacio normado (X, q^s). Sea ahora $t \geq 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $t/q(-x_n) < 1$ para toda $n \geq N$. Si $n \geq N$, usando que $x_n \in B_q[0,1]$ tenemos que $q(ty_n) \leq 1$, es decir $ty_n \in B_q[0,1]$. Por lo tanto $ty \in B_q[0,1]$, puesto que $B_q[0,1]$ es un conjunto q^s-cerrado por la Proposición 1.3.13. Por el Lema 2.1.3, debe ocurrir que $y = 0$, lo que es una contradicción. Concluimos que $B_q[0,1]$ es q^s-acotada.

Finalmente, por la Observación 1.3.15 obtenemos que (X, q) es normable por q^s, es decir, las topologías de (X, q) y (X, q^s) coinciden. Como $B_{q^s}[0,1] \subseteq B_q[0,1]$ y $B_q[0,1]$ es un conjunto compacto, se tiene que $B_{q^s}[0,1]$ también lo es. Al ser la bola cerrada unitaria del espacio normado (X, q^s) compacta, necesariamente X es de dimensión finita. $\square$

2.1.3. Otras observaciones sobre axiomas de separación

Recordemos que, en general, en grupos paratopológicos los axiomas T_0, T_1, T_2 y regularidad no son equivalentes dos a dos (ver Ejemplos 1.2.5). Como los espacios normados asimétricos son grupos paratopológicos, es natural preguntarse si algunos de estos axiomas son equivalentes en esta clase de espacios.

Por la Proposición 2.1.1, toda norma asimétrica induce una topología T_0. Por otro lado, no es difícil dar ejemplos de espacios normados asimétricos que no sean T_1, como en el Ejemplo 1.3.8. Una pregunta interesante aquí es qué ocurre entre axiomas de separación que están entre T_0 y T_1. En [3], F. G. Arenas, J. Dontchev y M. Ganster definieron el axioma $T_{\frac{1}{4}}$ de la siguiente forma.

Definición 2.1.11. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio* $\mathbf{T}_{\frac{1}{4}}$ *si para cada $x \in X$ y cada colección finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $x \neq x_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $x_i \notin U$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, o bien $x \notin U$ y $x_i \in U$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

El axioma T_1 implica el axioma $T_{\frac{1}{4}}$, y $T_{\frac{1}{4}}$ implica T_0. No es difícil ver que existen espacios topológicos que muestran que las implicaciones recíprocas no son válidas. Sin embargo, en la clase de espacios normados asimétricos ocurre lo siguiente.

Proposición 2.1.12. *Todo espacio normado asimétrico* (X,q) *que es* $T_{\frac{1}{4}}$ *es* T_1.

Demostración. Supongamos que X no es T_1 y mostremos que X no puede ser $T_{\frac{1}{4}}$. Por la Proposición 2.1.2, como X no es T_1 existe $x \in \theta_q$ con $x \neq 0$. Toda vecindad de 0 contiene x, pues para toda $\epsilon > 0$ se tiene que $q(x) = 0 < \epsilon$, es decir $x \in B_q(0,\epsilon)$. Por otro lado, toda vecindad de x contiene al punto $2x$, pues $q(2x - x) = q(x) = 0$. Esto muestra que no existe ningún abierto U con la propiedad de que $0, 2x \in U$ y $x \notin U$ o bien $0, 2x \notin U$ y $x \in U$. $\square$

Recordemos que por el Teorema 1.2.6, todo grupo paratopológico regular es completamente regular. Así que este par de axiomas de separación son equivalentes en espacios normados asimétricos. Un resultado útil, tal como fue enunciado en la Proposición 2.1.9, es que todo espacio normado asimétrico (X,q) cuya q-bola cerrada $B_q[0,1]$ es un conjunto q-cerrado es un espacio completamente regular. Para ilustrar la utilidad de la Proposición 2.1.9, consideraremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.13. *Sea* $X = C_0[0,1]$ *el espacio vectorial de todas las funciones continuas* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tales que* $\int_0^1 f(t)dt = 0$. *Equipemos a* X *con la norma asimétrica definida por*

$$q(f) = \text{máx}\{f(t) : t \in [0,1]\}.$$

Entonces $B_q[0,1]$ *es un conjunto cerrado en el espacio normado asimétrico* (X,q), *y por lo tanto* (X,q) *es* $T_{3\frac{1}{2}}$.

Demostración. Denotemos $B = B_q[0,1]$. Sea $(f_n) \subseteq B$ una sucesión que converge a f, para alguna $f \in X$. Demostraremos que $f \in B$, es decir $q(f) \leq 1$.

Supongamos por el contrario que $q(f) > 1$. Entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $f(t_0) > 1$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, por la definición del espacio X tenemos que

$$0 = \int_0^1 (f_n(t) - f(t))dt = \int_0^1 (f_n(t) - f(t))^+ dt - \int_0^1 (f_n(t) - f(t))^- dt,$$

en donde la parte positiva y negativa de una función real g están definidas como $g^+ = \text{máx}\{g, 0\}$ y $g^- = \text{máx}\{-g, 0\}$. Como (f_n) converge a f en el espacio (X, q), se tiene que $q(f_n - f) \to 0$, es decir

$$\text{máx}\{(f_n(t) - f(t))^+ : t \in [0,1]\} \to 0.$$

Esto implica que $\int_0^1 (f_n(t) - f(t))^+ dt \to 0$. Necesariamente $(\int_0^1 (f_n(t) - f(t))^- dt)$ también converge a 0.

Por otro lado, como

$$f(t_0) > 1 \geq q(f_n) \geq f_n(t)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$, entonces existe un subintervalo cerrado $J \subseteq [0,1]$ que contiene a t_0 y tal que

$$f(t) - f_n(t) > \frac{1}{2}(f(t_0) - 1) > 0$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $t \in J$. Por lo tanto

$$\int_0^1 (f_n(t) - f(t))^- dt = \int_0^1 \text{máx}\{f(t) - f_n(t), 0\} dt \geq \int_J \frac{1}{2}(f(t_0) - 1) dt > 0.$$

Como el término $\int_J \frac{1}{2}(f(t_0) - 1) dt$ no depende de n, esto contradice el hecho de que $\int_0^1 (f_n(t) - f(t))^- dt \to 0$. □

Recordemos ahora que por la Proposición 2.1.5, se tiene que todo espacio normado asimétrico X que es T_1 y de dimensión finita es normable por q^s, es decir, las topologías de (X, q) y (X, q^s) coinciden, o equivalentemente el conjunto $B_q[0,1]$ es q^s-acotado. En particular, en dimensión finita el axioma T_1 implica todos los axiomas de separación que satisface un espacio métrico.

Por otro lado, es sabido que el espacio normado asimétrico del Ejemplo 2.1.13 no es un espacio vectorial topológico, pues la inversión no es una función continua (la demostración puede ser consultada en [15]). Esto muestra que en dimensión infinita, aunque un espacio normado asimétrico sea $T_{3\frac{1}{2}}$ no necesariamente es normable (es decir, no existe una norma que induzca su topología).

Un resultado más a mencionar es que todo espacio normado asimétrico (X, q) tal que θ_q tiene q^s-interior no vacío es un espacio normal. Esto se sigue de que todo espacio topológico X cuya dimensión cubriente es 0 es normal [35], junto con el Corolario 2.3.6 que demostraremos más adelante.

Corolario 2.1.14. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico tal que θ_q tiene q^s-interior no vacío. Entonces X es un espacio normal (no necesariamente T_4).*

En el siguiente ejemplo veremos que hay espacios normados asimétricos que no son regulares ni normales.

Ejemplo 2.1.15. *Sea $X = \mathbb{R}^2$ equipado con la norma asimétrica $q(x, y) := \max\{x^+, |y|\}$. Entonces X no es regular ni normal.*

Demostración. Sea F la cerradura del conjunto $\{(x, 1/x) : x > 0\}$ y $C := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Es fácil ver que C es q-cerrado y $F \cap C = \emptyset$. Consideremos una vecindad abierta $B_q((0, 0), \epsilon)$ del punto $(0, 0)$ y sea A un abierto que contenga a F. Claramente $(0, \epsilon/2) \in B_q((0, 0), \epsilon)$. Además $(2/\epsilon, \epsilon/2) \in F$, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$B_q((2/\epsilon, \epsilon/2), \delta) \subseteq A.$$

Como

$$q((0, \epsilon/2) - (2/\epsilon, \epsilon/2)) = 0 < \delta$$

tenemos que $(0, \epsilon/2) \in A$. Por lo tanto, cualesquiera dos abiertos que contienen a $(0, 0)$ y a F, respectivamente, no pueden ser disjuntos. Esto muestra que X no es T_3. Con un razonamiento análogo se demuestra que no puede haber dos conjuntos abiertos disjuntos que contengan a F y a C, respectivamente. □

En la literatura sobre espacios normados asimétricos, todos los espacios T_1 que encontramos tenían la propiedad de que su q-bola cerrada era un conjunto q-cerrado, y en consecuencia eran $T_{3\frac{1}{2}}$. Así que una pregunta interesante que nos hicimos fue que si el axioma T_1, incluso en dimensión infinita, es suficiente para garantizar que se satisfacen otros axiomas de separación más fuertes como T_2. Y consecuentemente, si el axioma T_2 implicaba $T_{3\frac{1}{2}}$. La respuesta a ambas preguntas es negativa. El siguiente par de ejemplos que lo muestran nos fueron sugeridos por T. Banakh, y a continuación mostramos los detalles.

Ejemplo 2.1.16. *Existe un espacio normado asimétrico T_1 de dimensión infinita que no es Hausdorff.*

Demostración. Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base de Schauder ortonormal estándar de ℓ_2. Consideremos el conjunto

$$S := \{-e_n, ne_n, (n+1)(e_{n+1}+e_1)\}_{n=1}^{\infty},$$

y sean B la envoltura convexa del conjunto S y X el espacio vectorial generado por B. Definamos la norma asimétrica q como la funcional de Minkowski p_B.

Primero demostraremos que (X,q) no es Hausdorff. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el punto $(n+1)(e_{n+1}+e_1) \in S$, de donde se sigue que $q((n+1)(e_{n+1}+e_1)) \leq 1$. Por lo tanto

$$q(e_{n+1}+e_1) \leq 1/(n+1),$$

es decir, la sucesión $(e_{n+1}+e_1)$ converge a 0 en (X,q). Por otro lado, como $(n+1)e_{n+1} \in S$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$q((e_{n+1}+e_1)-e_1) = q(e_{n-1}) = \frac{q((n+1)e_{n+1})}{n+1} \to 0.$$

De lo anterior se sigue que la sucesión $(e_{n+1}+e_1)$ converge tanto a 0 como a e_1, y así (X,q) no puede ser Hausdorff.

Para probar que (X,q) es T_1, bastará probar que B no contiene ningún rayo de la forma $\{tx : t \geq 0\}$ con $x \neq 0$.

Cada punto $x = (x_n) \in B$ puede escribirse de la forma

$$x = -\sum_{n=1}^{\infty} s_n e_n + \sum_{n=1}^{\infty} t_n n e_n + \sum_{n=1}^{\infty} r_n (n+1)(e_{n+1}+e_1),$$

donde $\{s_n, t_n, r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}(s_n+t_n+r_n) = 1$, y todos excepto una cantidad finita de los s_n, t_n, r_n son cero. Por lo tanto, las coordenadas del vector x pueden ser escritas como

$$x_1 = -s_1 + t_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)r_n,$$

$$x_k = -s_k + kt_k + kr_{k-1}, \quad \text{si } k \geq 2.$$

De esta representación concluimos que si $x = (x_n) \in B$, entonces $-1 \leq x_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Más aún, si $k \geq 2$ entonces $x_k \leq k$. Supongamos que existiera $x \in B \setminus \{0\}$ tal que B contiene al rayo $\{tx : t \geq 0\}$. Entonces $x_1 > 0$ y $x_k = 0$ para todo $k \geq 2$. Como todo el rayo $\{tx : t \geq 0\}$ está contenido en B, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_1 > 1$. Así, si $n \geq 2$ tenemos que

$$0 = x_n = -s_n + nt_n + nr_{n-1} \geq -s_n + nr_{n-1}.$$

Entonces $s_n \geq nr_{n-1}$ y por lo tanto

$$1 < x_1 = -s_1 + t_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)r_n \leq -s_1 + t_1 + \sum_{n=2}^{\infty} s_n \leq 1.$$

Esta contradicción muestra que (X, q) es un espacio T_1. □

Ahora mostraremos que el axioma T_2 no implica T_3 en un espacio normado asimétrico. Probaremos primero un lema auxiliar.

Lema 2.1.17. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico T_3. Entonces la cerradura $\overline{B_q[0,1]}$ es q-acotada, es decir, existe $k > 0$ tal que $\overline{B_q[0,1]} \subseteq B_q(0,k)$.*

Demostración. Por la regularidad, existe $r > 0$ tal que

$$B_q(0,r) \subseteq \overline{B_q(0,r)} \subseteq B_q(0,1).$$

Por lo tanto $\overline{B_q[0,r/2]} \subseteq B_q(0,1)$. Aplicando el homeomorfismo $x \mapsto (2/r)x$ se tiene que $\overline{B_q[0,1]} \subseteq B_q(0,2/r)$. □

Ejemplo 2.1.18. *Existe un espacio normado asimétrico (X, q) que es T_2 pero no es T_3.*

Demostración. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado tal que existe una funcional lineal discontinua $f : X \to \mathbb{R}$. Consideremos en X la función $q : X \to [0, \infty)$ definida por

$$q(x) := \text{máx}\{\|x\|, f(x)\}.$$

Notemos que q es una norma asimétrica en X. En efecto, como $\|\cdot\|$ es subaditiva y f es lineal, entonces q es subaditiva, puesto que para todo $x, y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}||x+y|| &= \max\{||x+y||, f(x+y)\} \\ &\leq \max\{||x||+||y||, f(x)+f(y)\} \\ &\leq \max\{||x||, f(x)\} + \max\{||y||, f(y)\} \\ &= ||x|| + ||y||.\end{aligned}$$

De la definición de q se sigue que para todo $\alpha \geq 0$ y $x \in X$ se tiene que $q(\alpha x) = \alpha q(x)$. Por otro lado, si $q(x) = 0$ necesariamente $\|x\| = 0$, por lo que $x = 0$. Esto prueba que q es norma asimétrica.

Sean $B_1 := B_q[0,1]$ y $B_2 := B_{\|\cdot\|}[0,1]$. Mostraremos que $\overline{B_1} = B_2$, en donde $\overline{B_1}$ es la q-cerradura de B_1.

Primero, notemos que por definición $\|x\| \leq q(x)$ para toda $x \in X$. Entonces $B_1 \subseteq B_2$, y así la topología generada por la norma $\|\cdot\|$ está contenida en la topología generada por la norma asimétrica q. Esto implica que (X,q) es Hausdorff y B_2 es q-cerrado, luego $\overline{B_1} \subseteq B_2$.

Para demostrar la otra contención, sea $x \in B_2$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x) \geq 0$. Como $f : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal discontinua, existe una sucesión $(x_n) \subseteq B_2$ tal que la sucesión de números reales $(f(x_n))$ diverge a $+\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$y_n := -\frac{x_n}{f(x_n)} f(x) + x.$$

Es claro que $\|y_n - x\| \to 0$. Por otro lado, $f(y_n - x) = -f(x) \leq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, luego $q(y_n - x) = \|y_n - x\| \to 0$. Es decir, (y_n) converge a x en el espacio (X, q).

Si $\|x\| < 1$ podemos suponer que $(y_n) \subseteq B_2$. Además, $f(y_n) = -f(x) + f(x) = 0$. Esto muestra que $q(y_n) = \|y_n\| \leq 1$, luego $(y_n) \subseteq B_1$ y por lo tanto $x \in \overline{B_1}$.

Si $\|x\| = 1$, sea $z_n := (1-1/n)x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $\|z_n\| = 1 - 1/n < 1$, por lo que $(z_n) \subseteq \overline{B_1}$ por el caso anterior. Como

$$q(z_n - x) = (1/n)q(-x) \to 0,$$

entonces $x \in \overline{\overline{B_1}} = \overline{B_1}$, como deseábamos. Concluimos que $B_2 = \overline{B_1}$.

Finalmente, como $f(B_2) = f(\overline{B_1})$ es un conjunto no-acotado en $\mathbb{R}$, y $f(x) \leq q(x)$ para toda $x \in X$, entonces el conjunto $\overline{B_1}$ no puede ser q-acotado. Por el Lema 2.1.17, concluimos que (X, q) no es un espacio regular. $\square$

Finalmente, el siguiente diagrama resume nuestros resultados en dimensión infinita.

$$
\begin{array}{ccccc}
B_q[0,1] \text{ es } q\text{-cerrado} & \Longrightarrow & T_3 & \Longleftrightarrow & T_{3\frac{1}{2}} \\
 & & \Big\Downarrow & & \\
 & & T_2 & & \\
 & & \Big\Downarrow & & \\
 & & T_1 & &
\end{array}
$$

2.2. Descomposición de espacios normados asimétricos

Si (X, q) es un espacio normado asimétrico, consideremos el conjunto

$$\ker \|\cdot\|_q := \{x \in X : \|x\|_q = 0\}.$$

Como $\|\cdot\|_q$ es una seminorma en X por el Lema 2.1.7, entonces $\ker \|\cdot\|_q$ es un subespacio vectorial de X.

En [22], se demostró que todo espacio normado asimétrico (X, q) se descompone como el producto $\ker \|\cdot\|_q \times X/\ker \|\cdot\|_q$, donde $X/\ker \|\cdot\|_q$ es un espacio cociente que definiremos en breve. Se demostró también que el espacio $X/\ker \|\cdot\|_q$ resulta siempre un espacio Hausdorff y, como veremos en esta sección, el subespacio $\ker \|\cdot\|_q$ es el subespacio más pequeño tal que el cociente resulta Hausdorff.

Como por la Proposición 2.1.8, si X es Hausdorff se tiene que $\ker \|\cdot\|_q$ es el subespacio trivial, entonces dicha descomposición sólo es de interés cuando (X, q) no es Hausdorff. Veremos que existe una generalización similar, en donde el cociente resulta T_1 (donde nuestro interés está en la descomposición de espacios que no son T_1), y veremos también que tiene algunos corolarios interesantes.

2.2.1. Espacios cociente

Sea (X,q) un espacio seminormado asimétrico. Si Y es un subespacio de X, recordemos que el espacio vectorial cociente de X por Y, denotado con X/Y, consiste de todas las clases laterales $x+Y$. La seminorma q induce la seminorma $w_Y : X/Y \to [0,\infty)$ definida por

$$w_Y(x+Y) := \text{ínf}\{q(x+y) : y \in Y\}.$$

Como $0 \in Y$ se tiene que $w_Y(x+Y) \leq q(x)$ para todo $x \in X$.

Proposición 2.2.1. *Sea (X,q) un espacio seminormado asimétrico. Si Y es un subespacio de X, la proyección canónica $\pi : X \to X/Y$ es una función cociente. Luego, la topología del espacio seminormado asimétrico $(X/Y, w_Y)$ coincide con la topología cociente inducida por π.*

Demostración. Es claro que el hecho de que $w_Y(\pi(x)) = w_Y(x+Y) \leq q(x)$ para todo $x \in X$ implica la continuidad de π. Para probar que π es abierta, afirmamos que si $x \in X$ y $r > 0$ entonces

$$\pi(B_q(x,r)) = B_{w_Y}(x+Y, r).$$

En efecto. Si $z \in B_q(x,r)$ entonces

$$w_Y(z-x+Y) \leq q(z-x) < r,$$

es decir $\pi(z) \in B_{w_Y}(x+Y,r)$.

Por otro lado, si $z+Y \in B_{w_Y}(x+Y,r)$ entonces existe $y \in Y$ tal que $q(z-x+y) < r$. Luego basta notar que $\pi(z) = \pi(z+y)$ y $z+y \in B_q(x,r)$. $\square$

La siguiente proposición es de interés porque nos dice exactamente cuándo un espacio normado asimétrico cociente es T_1.

Proposición 2.2.2. *Sean (X,q) un espacio normado asimétrico y Y un subespacio vectorial de X. Entonces el cociente X/Y es T_1 si y sólo si Y es q-cerrado.*

Demostración. Supongamos que X/Y es T_1. Sea $(y_n) \subseteq Y$ tal que $y_n \to x$ en el espacio (X,q). Es decir, $q(y_n - x) \to 0$, lo cual implica que $w_Y(-x+Y) = 0$. Como X/Y es T_1, entonces $-x \in Y$, es decir $x \in Y$.

Recíprocamente, si Y es q-cerrado y $w_Y(x+Y)=0$, entonces existe una sucesión $(y_n)\in Y$ tal que $q(y_n+x)\to 0$. Esto es, la sucesión (y_n) converge a $-x$. Como Y es q-cerrado, entonces $-x\in Y$, o equivalentemente, $x\in Y$. Esto prueba que X/Y es T_1. □

A continuación veremos otra propiedad que siempre satisface un cociente que es T_1.

Proposición 2.2.3. *Sean (X,q) un espacio normado asimétrico y Y un subespacio vectorial de X. Si X/Y es T_1, entonces $\overline{\langle\theta_q\rangle}\subseteq Y$, donde $\langle\theta_q\rangle$ denota el subespacio vectorial de X generado por θ_q, y $\overline{\langle\theta_q\rangle}$ la q-cerradura de éste.*

Demostración. Supongamos que X/Y es T_1 y sea $x\in\theta_q$, es decir $q(x)=0$. Entonces $w_Y(x+Y)=0$, lo cual implica que $x\in Y$ por ser X/Y un espacio T_1. Luego $\theta_q\subseteq Y$, y por lo tanto $\langle\theta_q\rangle\subseteq Y$. Por la Proposición 2.2.2, Y es q-cerrado, de donde concluimos que $\overline{\langle\theta_q\rangle}\subseteq Y$. □

La proposición anterior nos dice que cualquier subespacio Y de un espacio normado asimétrico (X,q) tal que X/Y es T_1 debe contener a $\overline{\langle\theta_q\rangle}$. Sería interesante que $\overline{\langle\theta_q\rangle}$ fuese el subespacio vectorial más pequeño con esta propiedad. Sin embargo como veremos más adelante en los Ejemplos 2.2.12, el conjunto $\overline{\langle\theta_q\rangle}$ no necesariamente es un subespacio vectorial.

Corolario 2.2.4. *Sea (X,q) un espacio normado asimétrico. Si Y_θ es el mínimo subespacio vectorial q-cerrado que contiene a θ_q, entonces X/Y_θ es T_1 y Y_θ es el subespacio más pequeño con esta propiedad.*

Mostraremos ahora que $\ker\|\cdot\|_q$ es el mínimo subespacio vectorial tal que $X/\ker\|\cdot\|_q$ es Hausdorff.

Proposición 2.2.5. *Sea (X,q) un espacio normado asimétrico y Y un subespacio vectorial de X. Si X/Y es T_2, entonces $\ker\|\cdot\|_q\subseteq Y$.*

Demostración. Observemos primero que la siguiente desigualdad se satisface:

$$\|x+Y\|_{w_Y}\leq\|x\|_q\,,\quad x\in X.$$

En efecto. Por definición, si $x\in X$,

$$\|x+Y\|_{w_Y}=\text{ínf}\{w_Y(x_0+Y)+w_Y(x_0-x+Y):x_0\in X\}.$$

Como

$$w_Y(x_0+Y) \leq q(x_0) \;\text{ y }\; w_Y(x_0-x+Y) \leq q(x_0-x)$$

para todo $x_0 \in X$, obtenemos

$$\|x+Y\|_{w_Y} \leq \inf\{q(x_0)+q(x_0-x) : x_0 \in X\} = \|x\|_q .$$

Esto prueba la desigualdad deseada. En consecuencia, si $x \in \ker \|\cdot\|_q$ entonces $\|x+Y\|_{w_Y} = 0$. Como X/Y es T_2, entonces $x+Y = Y$. Por lo tanto $x \in Y$. □

2.2.2. Descomposición de espacios no T_1

Definición 2.2.6. *Sean X un espacio vectorial y Y un subespacio vectorial de Y.*

(1) *Una* **proyección** *del subespacio Y es una función lineal $Q : X \to Y$ tal que $Q(y) = y$ para cada $y \in Y$.*

(2) *Si Z es un subespacio de X, decimos que Z es un* **complemento algebraico** *de Y si $X = Y \oplus Z$. Esto es, $Y \cap Z = \{0\}$ y $X = Y + Z$.*

(3) *Si (X,q) es un espacio normado asimétrico, diremos que el subespacio Y es* **topológicamente complementado** *si existe una proyección $Q : X \to Y$ tal que Q e $I-Q$ son funciones continuas en (X,q), donde $I : X \to X$ es la función identidad. El subespacio $Z := \mathrm{Im}(I-Q)$ es llamado un* **complemento topológico** *de Y.*

No es difícil ver que si $Q : X \to Y$ es una proyección, entonces $X = \mathrm{Im}\, Q \oplus \ker Q$.

Por otro lado, como ocurre en espacios normados, una transformación lineal entre espacios normados asimétricos $f : (X,q) \to (Y,p)$ es continua si y sólo si existe $K > 0$ tal que

$$p(f(x)) \leq Kq(x), \quad x \in X.$$

La demostración de este hecho es análoga a la del caso de los espacios normados. Esto nos da como resultado la siguiente observación.

Observación 2.2.7. *Un subespacio vectorial* Y *de* (X, q) *es topológicamente complementado si existe una proyección* $Q : X \to Y$ *y* $K > 0$ *tal que para toda* $x \in X$ *se tiene que*

$$\text{máx}\{q(Q(x)), q(x - Q(x))\} \leq Kq(x).$$

Para la demostración del siguiente teorema, si (X, q) y (Y, p) son espacios normados asimétricos, asumiremos que el producto $X \times Y$ está equipado con la norma asimétrica del máximo, es decir,

$$q^*(x, y) := \text{máx}\{q(x), p(y)\}, \quad (x, y) \in X \times Y.$$

La norma asimétrica q^* induce la topología producto en $X \times Y$ (Lema 1.3.9).

El siguiente teorema es uno de nuestros resultados originales ([19]).

Teorema 2.2.8. *Sea* (X, q) *un espacio normado asimétrico, y sean* Y *y* Z *subespacios vectoriales de* X *tales que* $X = Y \oplus Z$. *Denotemos con* P_Y *la proyección de* X *sobre* Y *a lo largo de* Z. *Consideremos* $\phi : Y \times Z \to X$ *y* $\psi : X/Y \to Z$ *definidas por* $\phi(y, z) = y + z$ *y* $\psi(x + Y) = (I - P_Y)(x)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) P_Y *e* $I - P_Y$ *son continuas.*

(2) ϕ *es un homeomorfismo.*

En este caso, $\psi : X/Y \to Z$ *es un homeomorfismo también.*

Demostración. Supongamos que P_Y e $I - P_Y$ son continuas. Claramente ϕ es un isomorfismo lineal cuya inversa está dada por

$$\phi^{-1}(x) = (P_Y(x), (I - P_Y)(x)).$$

Por la continuidad de P_Y e $I - P_Y$ se tiene que ϕ^{-1} es continua. Por otro lado, si $(y, z) \in Y \times Z$ tenemos que

$$q(\phi(y, z)) = q(y + z) \leq q(y) + q(z) \leq 2q^*(y, z),$$

es decir, ϕ es continua.

Supongamos ahora que ϕ es homeomorfismo. Usando la continuidad de ϕ^{-1}, existe $C > 0$ tal que para todo $x \in X$,

$$q^*(P_Y(x), (I - P_Y)(x)) = q^*(\phi^{-1}(x)) \leq Cq(x).$$

Esto prueba que P_Y e $I-P_Y$ son continuas, y como $Z = \mathrm{Im}(I-P_Y)$ entonces Z es un complemento topológico de Y.

Finalmente, vamos a mostrar que en este caso ψ es un homeomorfismo. La función inversa de ψ está dada por $\psi^{-1}(z) = z+Y$. Para cada $z+Y \in X/Y$ tenemos

$$w_Y(z+Y) = \text{ínf}\{q(z+y) : y \in Y\} \leq q(z+P_Y(-z)) = q(\psi(z+Y)),$$

por lo tanto ψ^{-1} es continua.

La continuidad de ψ se sigue del hecho de que $I-P_Y$ es continua. $\square$

En el caso de que uno de los complementos tenga dimensión finita, la descomposición toma la siguiente forma.

Proposición 2.2.9. *Sea (X,q) un espacio normado asimétrico y sea Y un subespacio vectorial q-cerrado de X. Si $X = Y \oplus Z$ y Z es de dimensión finita, entonces (Z,q) es linealmente homeomorfo a X/Y, y además Y y Z son complementos topológicos uno del otro.*

Demostración. Sea $Q : X \to Y$ la proyección sobre Y a lo largo de Z. Como la función $\psi : X/Y \to Z$ dada por $\psi(x+Y) = (I-Q)(x)$ es un isomorfismo lineal y Z es de dimensión finita, entonces X/Y es de dimensión finita también. Por ser Y q-cerrado y por la Proposición 2.2.2 tenemos que X/Y es un espacio normado asimétrico T_1. Por la Proposición 2.1.5, X/Y es normable. Por lo tanto, $\psi, -\psi : X/Y \to (Z, q^s)$ son continuas por ser funciones lineales entre espacios normados de dimensión finita. Las funciones $\psi, -\psi$ también resultan continuas si cambiamos el contradominio (Z,q^s) por el espacio (Z,q), pues la topología generada por q está contenida en la topología generada por q^s.

Si $\pi : X \to X/Y$ es la proyección cociente, para cada $x \in X$ tenemos que

$$-\psi(\pi(x)) = -\psi(x+Y) = Q(x) - x.$$

De donde se sigue que

$$Q = I + (-\psi)\circ\pi, \quad I - Q = \psi\circ\pi$$

son proyecciones continuas. Por lo tanto, Z es complemento topológico de Y y viceversa. Finalmente, como consecuencia del Teorema 2.2.8 se tiene que (Z,q) es linealmente homeomorfo a X/Y. $\square$

Cuando X es un espacio normado, si $Q : X \to Y$ es una proyección continua, entonces siempre se tiene que $\ker(I - Q)$ y $\ker Q$ son subespacios cerrados del espacio. La situación en espacios normados asimétricos es diferente, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.10. *Sea $X = \mathbb{R}^2$ y consideremos la norma asimétrica*

$$q(x, y) := \text{máx}\{x^+, |y|\}.$$

Es fácil ver que el conjunto $Y := \{(x, y) : y = 0\}$ es q-cerrado. Como $Z := \{(x, y) : x = 0\}$ es de dimensión finita y $X = Y \oplus Z$, entonces por la Proposición 2.2.9, Y y Z son complementos topológicos uno del otro. Sin embargo, Z no es q-cerrado puesto que todo punto de la forma (x, y) con $x > 0$ pertenece a la q-cerradura de Z.

Aunque el espacio Z en el ejemplo anterior no sea q-cerrado, aún puede tener buenas propiedades topológicas como veremos en el siguiente resultado.

Corolario 2.2.11. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico, y sea Y un subespacio q-cerrado de X. Si $X = Y \oplus Z$ y Z es de dimensión finita, entonces X es linealmente homeomorfo a $Y \times Z$ y Z es un subespacio T_1 de (X, q). En particular, Z es homeomorfo a un espacio euclidiano.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.9, Y es complementado topológicamente y Z es linealmente homeomorfo a X/Y. Por el Teorema 2.2.8, X es linealmente homeomorfo a $Y \times Z$. El espacio X/Y es T_1 por ser Y q-cerrado. Por lo tanto Z es T_1. $\square$

Recordemos que por la Proposición 2.2.3, cualquier subespacio Y de un espacio normado asimétrico (X, q) tal que el cociente X/Y es T_1 debe contener a $\overline{\langle\theta_q\rangle}$. Sin embargo es posible que $\overline{\langle\theta_q\rangle}$ no sea un subespacio vectorial. También puede ocurrir que $X = \overline{\langle\theta_q\rangle}$, en cuyo caso la descomposición del Corolario 2.2.11 resultaría trivial. Mostramos estas dos situaciones en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 2.2.12. (1) *Sea $X = \mathbb{R}^2$. Definamos la norma asimétrica q mediante*

$$q(x, y) := \frac{1}{2}\left(-y + \sqrt{4x^2 + y^2}\right).$$

Esta norma asimétrica satisface que

$$B_q(0, 1) = \{(x, y) : y > x^2 - 1\},$$

y $\theta_q = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. *La* q*-cerradura* $\overline{\langle\theta_q\rangle}$ *es todo el espacio* $\mathbb{R}^2$*, puesto que todo* q*-abierto no vacío intersecta a* θ_q*.*

(2) *Sean* X *y* q *como en el inciso anterior. Sea* $p : X \to [0,\infty)$ *definida por* $p(x,y) := \text{máx}\{|x|, y^-\}$*. Sea* $r : X \to [0,\infty)$ *definida mediante*

$$r(x,y) := \begin{cases} p(x,y) & si\ x \le 0 \\ q(x,y) & si\ x \ge 0 \end{cases}$$

Entonces r *es una norma asimétrica en* X*,* $\langle\theta_r\rangle = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ *y su* q*-cerradura es el conjunto* $\{(x,y) : x \le 0\}$ *la cual no es un subespacio vectorial de* X*.*

Para finalizar esta sección, demostraremos que existe una clase de espacios normados asimétricos para la cual $\overline{\langle\theta_q\rangle} = \langle\theta_q\rangle$. En particular, en este caso la q-cerradura de $\langle\theta_q\rangle$ sí resulta un subespacio vectorial.

Proposición 2.2.13. *Sea* (X,q) *un espacio normado asimétrico derecho-acotado con las siguientes dos propiedades:*

(1) $\langle\theta_q\rangle$ *es* q^s*-cerrado.*

(2) *Existe una norma* $\|\cdot\|$ *equivalente a* q^s *tal que* $(X,\|\cdot\|)$ *es un espacio de Hilbert.*

Entonces $\langle\theta_q\rangle$ *es un subespacio vectorial* q*-cerrado de* X*.*

En particular, si (X,q) *es un espacio normado asimétrico derecho-acotado de dimensión finita, entonces* $\langle\theta_q\rangle$ *es un subespacio vectorial* q*-cerrado de* X*.*

Demostración. Sea $Y := \langle\theta_q\rangle$. Por hipótesis Y es q^s-cerrado en el espacio de Hilbert $(X,\|\cdot\|)$. Luego $X = Y \oplus Y^\perp$, donde $Y^\perp$ es el complemento ortogonal de Y. Sea $N > 0$ tal que

$$N\|x\| \le q^s(x), \quad x \in X.$$

Por la ortogonalidad, para cada $y \in Y$ y $z \in Y^\perp$ ocurre que

$$\|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \ge \|z\|^2 .$$

Por lo tanto, para todo $y \in Y$ y $z \in Y^\perp$,

$$N\|z\| \le N\|y+z\| \le q^s(y+z).$$

Para probar que Y es q-cerrado, sea $(y_n) \subseteq Y$ una sucesión que converge a un punto x en el espacio (X, q), es decir, la sucesión $(q(y_n - x))$ converge a 0. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $q(y_n - x) \leq 1/n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como X es derecho-acotado, podemos hallar $r > 0$ tal que

$$B_q(0, 1) \subseteq B_{q^s}(0, r) + \theta_q,$$

o bien

$$B_q(0, 1/n) \subseteq B_{q^s}(0, r/n) + \theta_q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto $y_n - x \in B_{q^s}(0, r/n) + \theta_q$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $v_n \in \theta_q$ con la propiedad de que $y_n - x - v_n \in B_{q^s}(0, r/n)$. Sean $y \in Y$ y $z \in Y^\perp$ tales que $x = y + z$. Como $y_n - v_n - y \in Y$, entonces

$$N \|z\| = N \|-z\| \leq q^s(y_n - v_n - y - z) = q^s(y_n - v_n - x) < r/n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Concluimos que $z = 0$, y por lo tanto $x = y \in Y$, como se deseaba probar. $\square$

2.3. Dimensión topológica de espacios normados asimétricos

En esta sección, calcularemos la dimensión topológica (cubriente) de un espacio normado asimétrico. La definición que usaremos de dimensión topológica es la dimensión de Lebesgue o la dimensión cubriente. Hacemos énfasis en que esta definición no requiere que el espacio topológico satisfaga alguna condición extra, como ser Hausdorff o alguna condición similar. Para más información sobre teoría de la dimensión, el lector puede consultar [35].

El **orden** de una familia de subconjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de un conjunto X, no todos vacíos, es el máximo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que existe $M \subseteq \Lambda$ de cardinalidad $n + 1$ con la propiedad de que $\bigcap_{\lambda \in M} A_\lambda \neq \emptyset$, o bien es ∞ si no existe dicho número natural.

Definición 2.3.1. *Sea X un espacio topológico no vacío. La* **dimensión cubriente** *o* **dimensión topológica** *de X, denotada con $\dim X$, es el mínimo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que toda cubierta abierta finita de X tiene un refinamiento abierto de orden menor o igual que n, o bien es ∞ si no existe dicho n.*

En esta sección, si X es un espacio normado asimétrico, denotaremos con $\dim_a X$ su dimensión algebraica, es decir, la dimensión de espacio vectorial. De esta forma no nos confundiremos con el símbolo $\dim X$, que denotará la dimensión cubriente de X como espacio topológico.

Algunos de los ejemplos más comunes son:

Ejemplos 2.3.2 ([35])**.** (1) *Los intervalos* (a, b) *y* $[a, b]$ *con* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *tienen dimensión topológica* 1*. En* $\mathbb{R}^n$*, cualquier producto de la forma* $(a, b)^n$ *o* $[a, b]^n$ *con* $a < b$ *tiene dimensión* n*.*

(2) *Si* X *es un espacio normado de dimensión finita, entonces* $\dim X = \dim_a X$*. Si* X *es un espacio normado de dimensión infinita, entonces* $\dim X = \infty$*.*

La siguiente caracterización de dimensión topológica será de gran ayuda. La demostración puede consultarse en [35].

Proposición 2.3.3. *Para todo espacio topológico* X *no vacío, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\dim X \leq n$.

(2) *Si* $\{U_1, \ldots, U_{n+2}\}$ *es una cubierta abierta de* X*, entonces existe una cubierta abierta* $\{V_1, \ldots, V_{n+2}\}$ *tal que cada* $V_i \subseteq U_i$ *y* $\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \emptyset$*.*

2.3.1. Espacios de dimensión topológica cero

Primero, mostraremos que existe una clase de espacios normados asimétricos cuya dimensión topológica siempre es 0, sin importar su dimensión algebraica.

Lema 2.3.4. *Sea* (X, q) *un espacio normado asimétrico, y supongamos que existen* $x \in X$ *y* $\epsilon > 0$ *tales que* $B_q(x, \epsilon) \subseteq \theta_q$*. Si* $\mathcal{U}$ *es una cubierta* q*-abierta finita de* X*, entonces* $X \in \mathcal{U}$*.*

Demostración. Como $-nx \in X$ para toda $n \in \mathbb{N}$, existen una sucesión infinita de números naturales $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $U \in \mathcal{U}$ tales que $-n_j x \in U$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $r_j > 0$ tal que $B_q(-n_j x, r_j) \subseteq U$. Sea $y \in X$ fijo, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $2q(y) < m$. Es fácil ver que

$$\frac{\epsilon y}{m} + x \in B_q(x, \epsilon).$$

Usando el hecho de que $B_q(x,\epsilon) \subseteq \theta_q$, se tiene que $q(\epsilon y + mx) = 0$. Esto implica que

$$0 = q(\epsilon y + mx) = q(\epsilon y + (m+1)x - x),$$

es decir,

$$\epsilon y + (m+1)x \in B_q(x,\epsilon) \subseteq \theta_q,$$

por lo tanto $q(\epsilon y + (m+1)x) = 0$. Aplicando un argumento de inducción matemática, podemos ver que

$$q(\epsilon y + (m+k)x) = 0, \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}.$$

Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $n_j > m$. Aplicando lo anterior para $k = n_j - m$ obtenemos $q(\epsilon y + n_j x) = 0$. Es decir,

$$\epsilon y \in B_q(-n_j x, r_j) \subseteq U.$$

Como y fue escogido arbitrariamente, entonces $\epsilon y \in U$ para toda $y \in X$. Esto muestra que $X = U$. $\square$

El lema anterior nos permite establecer el mismo resultado con una hipótesis más débil.

Lema 2.3.5. *Sea (X,q) un espacio normado asimétrico tal que existen $x \in X$ y $\epsilon > 0$ con $B_{q^s}(x,\epsilon) \subseteq \theta_q$. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta q-abierta finita, entonces $X \in \mathcal{U}$.*

Demostración. En el Teorema 1.3.22, se demostró que existe una norma asimétrica p (no necesariamente equivalente a q) con la propiedad de que

$$B_p(0,1) \subseteq B_{q^s}(0,1) + \theta_q.$$

De hecho, $\theta_p = \theta_q$ y la topología inducida por p es más fina que la inducida por q. En particular, $\mathcal{U}$ es una cubierta p-abierta finita de X. Por lo tanto,

$$B_p(x,\epsilon) \subseteq B_{q^s}(x,\epsilon) + \theta_q \subseteq \theta_q + \theta_q = \theta_q = \theta_p,$$

luego, por el Lema 2.3.4, tenemos que $X \in \mathcal{U}$. $\square$

Corolario 2.3.6. *Sea (X,q) un espacio normado asimétrico tal que θ_q tiene q^s-interior no vacío. Entonces* $\dim X = 0$.

Demostración. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta q-abierta finita, entonces $X \in \mathcal{U}$ por el Lema 2.3.5. Luego, es claro que $\{X\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ cuyo orden es 0. □

El resultado anterior nos dice que si el cono θ_q de un espacio normado asimétrico (X, q) es lo suficientemente grande, entonces su dimensión topológica es 0. Ilustremos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.7. *Sea $X = \mathbb{R}^n$ con la norma asimétrica $q(x) := x^+$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene que*

$$\theta_q = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \leq 0\}.$$

La norma q^s es la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$, que es equivalente a la norma euclidiana. Como θ_q tiene interior euclidiano no vacío, entonces por el Corolario 2.3.6 se tiene que X tiene dimensión topológica 0.

2.3.2. Dimensión topológica en dimensión finita

En esta sección, caracterizamos la dimensión topológica de todo espacio normado asimétrico de dimensión (algebraica) finita.

El siguiente lema es una consecuencia directa de [2, Lema 3.2]

Lema 2.3.8. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico de dimensión finita. Entonces $\langle\theta_q\rangle = X$ si y sólo si θ_q tiene q^s-interior no vacío.*

Ahora probaremos el siguiente par de lemas.

Lema 2.3.9. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico de dimensión finita, con $0 \neq Y := \langle\theta_q\rangle \neq X$. Sea $\|\cdot\|$ una norma en X inducida por un producto interior, y supongamos que $X = Y \oplus Z$, donde $Z := Y^\perp$ es el complemento ortogonal de Y respecto al producto interior dado. Sean C y $\{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ subconjuntos de Z tales que $z_j \notin C$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Entonces existe un conjunto abierto U de X que satisface las siguientes dos propiedades:*

(1) *$Y + C \subseteq U$, y*

(2) *$Y + z_j$ no está contenido en U para cada $j \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Primero, observemos que el subespacio vectorial Z es T_1 debido a que $\theta_q \subseteq Y$. Por lo tanto Z es normable por q^s al ser de dimensión finita. Por hipótesis $z_j - c \in Z \setminus \{0\}$, de donde se obtiene que

$$q(z_j - c) > 0 \quad \text{para toda } j \in \mathbb{N}, \text{ y } c \in C.$$

Por ser X espacio vectorial de dimensión finita, podemos hallar $N > 0$ tal que

$$N \|x\| \leq q^s(x), \quad x \in X.$$

Siguiendo el mismo argumento de ortogonalidad empleado en la demostración de la Proposición 2.2.13, se sigue que para cada $y \in Y$ y $z \in Z$,

$$N \|y\| \leq q^s(y + z).$$

Como (Z, q^-) también es normable por q^s, en particular q y q^- son equivalentes. Luego existe $M > 0$ tal que

$$Mq(-z) \leq q(z), \quad z \in Z.$$

Sea $\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq \theta_q$ una base de Y. Definamos $y := \sum_{i=1}^m y_i \in \theta_q$. Notemos que necesariamente $y \neq 0$, de lo contrario $-y_m \in \theta_q$, y como $y_m \in \theta_q$ esto contradice que q es norma asimétrica.

Para cada $z \in Z$, $n \in \mathbb{N}$ y $r > 0$, consideremos

$$I_{n,z,r} := B_q(-ny + z, r) \cap Z.$$

Los conjuntos $I_{n,z,r}$ son abiertos en el espacio euclidiano Z. Claramente, si $r < r'$ entonces $I_{n,z,r} \subseteq I_{n,z,r'}$. Notemos que

$$\bigcap_{r>0} B_q(-ny + z, r) = \theta_q + (-ny + z),$$

de lo cual se sigue que

$$\bigcap_{r>0} I_{n,z,r} = \{z\}.$$

Denotemos el diámetro de cada $I_{n,z,r}$ con respecto de la norma q^s con $D(I_{n,z,r})$; es decir

$$D(I_{n,z,r}) := \sup\{q^s(z_1 - z_2) : z_1, z_2 \in I_{n,z,r}\}.$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in Z$,

$$\lim_{r \to 0^+} D(I_{n,z,r}) = 0.$$

Utilizaremos el hecho anterior para construir al conjunto deseado U como sigue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $c \in C$, sea $r_{n,c} > 0$ tal que

(a) $\max\{r_{n,c}, r_{n,c}/M\} < N \|y\|$,

(b) $D(I_{n,c,r_{n,c}}) < \min\{q(z_j - c) : j \leq n\}$.

Sea $B_{n,c} := B_q(-ny + c, r_{n,c})$.

Afirmación I: $Y + c \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,c}$.

Efectivamente, un elemento de $Y + c$ tiene la forma $y_0 + c$, donde $y_0 = \sum_{i=1}^m t_i y_i$ para algunos $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_i + k > 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Entonces

$$q(y_0 + c - (-ky + c)) = q(y_0 + ky) \leq \sum_{i=1}^{m} (t_i + k) q(y_i) = 0 < r_{k,c}.$$

Por lo tanto $y_0 + c \in B_{k,c}$. Esto prueba que $Y + c \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,c}$, como se deseaba.

Sea

$$U := \bigcup_{c \in C} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,c}.$$

De la Afirmación I se sigue que $Y + C \subseteq U$.

Sea $j \in \mathbb{N}$. Para probar que $Y + z_j$ no está contenido en U, bastará probar que $-jy + z_j \notin U$.

Supongamos por el contrario que existen $n \in \mathbb{N}$ y $c \in C$ tales que $-jy + z_j \in B_{n,c}$. Esto significa que

$$q(-jy + z_j - (-ny + c)) = q((-j + n)y + z_j - c) < r_{n,c}.$$

Llamemos $w = (-j + n)y + z_j - c$, de manera que $q(w) < r_{n,c}$.

Afirmación II: $j \leq n$.

Supongamos que se da lo contrario, es decir $j-n>0$. En particular $(j-n)y \in \theta_q$. Por lo tanto

$$q(w) = q((-j+n)y + z_j - c) \geq q(z_j - c) - q((j-n)y) = q(z_j - c).$$

Por otro lado,

$$q(-w) = q((j-n)y - z_j + c) \leq q((j-n)y) + q(-z_j + c) = q(-z_j + c).$$

Como $Mq(-z_j + c) \leq q(z_j - c)$. Luego, por las desigualdades anteriores, se tiene que $Mq(-w) \leq q(w) < r_{n,c}$. Por lo tanto, por la definición de $r_{n,c}$,

$$N|-j+n| \, \|y\| = N \, \|(-j+n)y\| \leq q^s(w) < \max\{r_{n,c}, r_{n,c}/M\} < N \, \|y\| \, .$$

Esto implica que $|-j+n| < 1$, lo cual es una contradicción porque $j \neq n$. Esto prueba la Afirmación II.

Notemos que $z_j \in B_{n,c}$, puesto que

$$q(z_j - (-ny + c)) = q(z_j + ny - c - jy + jy) \leq q(w) + q(jy) = q(w) < r_{n,c}.$$

De manera similar, $c \in B_{n,c}$, porque

$$q(c - (-ny + c)) = q(ny) = 0 < r_{n,c}.$$

Concluimos que $c, z_j \in I_{n,c,r_{n,c}}$. Pero por la Afirmación II ocurre que $j \leq n$, luego por (b) en la definición de $r_{n,c}$ implica que

$$q(z_j - c) \leq q^s(z_j - c) \leq D(I_{n,c,r_{n,c}}) < q(z_j - c).$$

Esta contradicción muestra que $-jn + z_j$ no puede pertenecer a $B_{n,z}$, lo cual completa la demostración. $\square$

Lema 2.3.10. *Sea (X,q) un espacio normado asimétrico y $Y = \langle\theta_q\rangle$. Supongamos que $Z \subseteq X$ es un subespacio vectorial de X tal que $X = Y + Z$. Si Y es de dimensión finita, entonces para cada cubierta abierta finita $\mathcal{U}$ de X y cada $z \in Z$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $Y + z \subseteq U$.*

Demostración. Tomemos una base $\{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq \theta_q$ de Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$x_n := -\sum_{i=1}^{k} n y_i + z.$$

Como la cubierta $\mathcal{U}$ es finita, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que U contiene una cantidad infinita de elementos de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de números naturales tal que $x_{n_j} \in U$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Si $j \in \mathbb{N}$, usando que U es abierto existe $\epsilon_j > 0$ tal que

$$B_q\left(-\sum_{i=1}^{k} n_j y_i + z, \epsilon_j\right) \subseteq U.$$

Sea $y + z \in Y + z$. Entonces $y = \sum_{i=1}^{k} t_i y_i$ para algunos $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_i + n_j > 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces

$$q\left(\sum_{i=1}^{k} t_i y_i + z + \sum_{i=1}^{k} n_j y_i - z\right) \leq \sum_{i=1}^{k} (t_i + n_j) q(y_i) = 0.$$

Luego,

$$y + z = \sum_{i=1}^{k} t_i y_i + z \in B_q\left(-\sum_{i=1}^{k} n_j y_i + z, \epsilon_j\right) \subseteq U.$$

Por lo tanto $Y + z \subseteq U$. $\square$

Usando los lemas anteriores, podemos encontrar una clase de espacios normados asimétricos de dimensión finita (como espacios vectoriales) cuya dimensión topológica es infinita, lo cual contrasta con los espacios normados.

Teorema 2.3.11. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico de dimensión finita tal que $0 \neq Y = \langle \theta_q \rangle \neq X$. Entonces $\dim X = \infty$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Usaremos la Proposición 2.3.3 para mostrar que no puede ocurrir que $\dim X \leq n$. Consideremos un producto interno en X de tal forma que $X = Y \oplus Z$, donde $Z = Y^{\perp}$. Como Z es T_1, se tiene que (Z, q) es normable, luego Z es homeomorfo a un espacio euclidiano. Sean $Z_1, \ldots, Z_{n+2} \subseteq Z$ densos y disjuntos dos a dos tales que $Z = \cup_{k=1}^{n+2} Z_k$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n+2\}$, sea $\{z_j^{(k)} : j \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable en Z_k, el cual es denso también en Z. Por el Lema 2.3.9, para cada $k \in \{1, \ldots, n+2\}$ existe un U_k abierto en X tal que U_k contiene a $Y + Z_k$ y U no contiene a $Y + z_j^{(i)}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n+2\} \setminus \{k\}$. Claramente

$$X = Y + Z = Y + \bigcup_{k=1}^{n+2} Z_k = \bigcup_{k=1}^{n+2} U_k.$$

Por lo tanto $\{U_1, \ldots, U_{n+2}\}$ es una cubierta abierta de X. Para aplicar la Proposición 2.3.3, supondremos que $\{V_1, \ldots, V_{n+2}\}$ es una cubierta abierta de X tal que $V_k \subseteq U_k$, y mostraremos que $\cap_{k=1}^{n+2} V_k \neq \emptyset$.

Consideremos el elemento $z_1^{(1)}$. Por el Lema 2.3.10, alguno de los V_k debe contener a $Y + z_1^{(1)}$, por lo tanto U_k también. Por construcción, solamente U_1 contiene a $Y + z_1^{(1)}$, entonces $k = 1$. En particular $z_1^{(1)} \in V_1$. Sea $m < n+2$ y supongamos que existe j tal que $z_j^{(m)} \in \cap_{k=1}^{m} V_k$. Como $\cap_{k=1}^{m} V_k$ es q-abierto, existe $\epsilon_m > 0$ tal que

$$B_q(z_j^{(m)}, \epsilon_m) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m} V_k.$$

Como la familia $\{z_i^{(m+1)}\}$ es densa, existe un $z_{j_0}^{(m+1)} \in B_q(z_j^{(m)}, \epsilon_m)$, entonces $z_{j_0}^{(m+1)} \in \bigcap_{k=1}^{m} V_k$. Aplicando el mismo argumento, $Y + z_{j_0}^{(m+1)}$ está contenido en algún elemento de $\{V_1, \ldots, V_{n+2}\}$, necesariamente debe ser V_{m+1} por construcción. En particular $z_{j_0}^{m+1} \in V_{m+1}$. Luego

$$\bigcap_{k=1}^{(m+1)} V_k \neq \emptyset.$$

Esto prueba que $\bigcap_{k=1}^{n+2} V_k \neq \emptyset$. $\square$

Ahora podemos decir a qué es igual la dimensión topológica de cada espacio normado asimétrico de dimensión finita ([19]).

Teorema 2.3.12. *Sea (X, q) un espacio normado asimétrico de dimensión finita. Sea $Y = \langle \theta_q \rangle$. Entonces*

(1) *Si* $Y = X$*, entonces* $\dim X = 0$.

(2) *Si* $0 \neq Y \neq X$*, entonces* $\dim X = \infty$.

(3) *Si* $Y = 0$*, entonces* $\dim X = \dim_a X$.

Demostración. (1) Por el Lema 2.3.8, θ_q tiene q^s-interior no vacío. Luego, por el Corolario 2.3.6, se tiene que $\dim X = 0$.

(2) Se sigue del Teorema 2.3.11.

(3) Si $Y = 0$, entonces θ_q es trivial, luego (X, q) es normable por ser de dimensión finita. Por lo tanto $\dim X = \dim_a X$. $\square$

Capítulo 3

Hiperespacios y trabajo a futuro

3.1. Motivación

Recordemos que un hiperespacio es una familia de subconjuntos cerrados de un espacio topológico X equipada con una cierta topología. Nuestro interés ha recaído en el estudio de hiperespacios desde un punto de vista asimétrico. De las secciones previas, hemos visto que un espacio normado asimétrico está determinado por un conjunto cerrado, convexo, absorbente y que tenga al origen en su interior. Es decir, a diferencia de los espacios normados hemos quitado las condiciones de que dicho convexo sea acotado y simétrico respecto al origen. Es por esto que uno de los objetivos originales era estudiar familias de subconjuntos convexos cerrados con estas características, equipadas con ciertas topologías.

La pregunta ahora es qué topologías podrían servir para estudiar familias de subconjuntos convexos cerrados no acotados. Dos de las topologías más conocidas son la topología de Vietoris y de Fell. En analogía con las normas asimétricas, veremos que estas topologías pueden ser divididas en topologías *inferiores y superiores*, y que las topologías de Fell y Vietoris son el supremo (simetrización) de dichas topologías más débiles. También veremos el caso de la distancia de Hausdorff, la cual también es la simetrización de dos cuasi-métricas.

Por otra parte, estamos interesados en estudiar las condiciones para las cuales un G-espacio X induce una acción continua en un hiperespacio. Este problema no está del todo resuelto, y de hecho tampoco lo está uno más básico: saber cuándo una función continua entre espacios topológicos induce una función continua entre hiperespacios. Mostraremos que la pregunta puede ser estudiada por partes, cuando los hiperespacios tienen una hipertopología inferior y una superior.

3.2. Hiperespacios

Sea X un espacio topológico. Consideraremos las siguientes familias de subconjuntos de X.

$$\mathcal{A}(X) := \{A \subseteq X : A \neq \emptyset\}.$$

$$\mathrm{CL}(X) := \{A \in \mathcal{A}(X) : A \text{ es cerrado}\}.$$

$$\mathcal{K}(X) := \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \text{ es compacto}\}.$$

Si (X, d) es un espacio métrico, consideraremos a la familia

$$\mathrm{BC}_d(X) := \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \text{ es acotado}\}.$$

En la práctica obviaremos quién es la métrica d, y la familia anterior será denotada simplemente por $\mathrm{BC}(X)$.

Y, finalmente, si X es un espacio normado consideraremos

$$\mathrm{Conv}(X) := \{A \in \mathrm{CL}(X) : \text{A es convexo}\}.$$

Adicionalmente, si $\mathcal{F}(X) \in \{\mathcal{A}(X), \mathrm{CL}(X), \mathcal{K}(X), \mathrm{BC}(X), \mathrm{Conv}(X)\}$ entonces $\mathcal{F}^*(X) := \mathcal{F}(X) \cup \{\emptyset\}$.

3.2.1. Distancias de Hausdorff y Attouch-Wets

Sea X un espacio métrico, y sean $A, B \subseteq X$ no vacíos. El *exceso de A sobre B* (respecto de la métrica d) está definido por la fórmula

$$e_d(A, B) := \sup\{d(a, B) : a \in A\} = \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N_\epsilon(B)\},$$

en donde $N_\epsilon(B) := \{x \in X : d(x, B) < \epsilon\}$. Claramente $e_d(A, B)$ puede ser ∞ y $e_d(A, B) \neq e_d(B, A)$, por ejemplo cuando $B \subseteq A$, B es acotado y A no lo es. Por otro lado, si $A \subseteq B$ entonces $e_d(A, B) = 0$. Por definición, si $B \neq \emptyset$ convenimos $e_d(\emptyset, B) = 0$.

Denotemos

$$d_{H^-}(A, B) := e_d(A, B),$$

$$d_{H^+}(A, B) := e_d(B, A).$$

Llamaremos a d_{H^-} **distancia inferior de Hausdorff** y a d_{H^+} **distancia superior de Hausdorff**.

Los siguientes dos resultados muestran que las distancias d_{H^-} y d_{H^+} no distinguen entre la cerradura de subconjuntos de un espacio X.

Lema 3.2.1. *Sean X un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{A}(X)$. Entonces se tiene que $d_{H^-}(A, B) = 0$ si y sólo si $A \subseteq \overline{B}$, y $d_{H^+}(A, B) = 0$ si y sólo si $B \subseteq \overline{A}$. En particular*

$$d_{H^-}(\overline{A}, A) = d_{H^-}(A, \overline{A}) = 0 = d_{H^+}(\overline{A}, A) = d_{H^+}(A, \overline{A}).$$

Demostración. Recordemos primero que $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x, A) = 0$. Notemos ahora que $\overline{A} = \bigcap_{\epsilon>0} N_\epsilon(A)$ para cualquier $A \subseteq X$. En efecto, si $x \in \overline{A}$ entonces $0 = d(x, \overline{A}) = d(x, A)$, luego $x \in N_\epsilon(A)$ para toda $\epsilon > 0$. Por otro lado, si $x \in N_\epsilon(A)$ para todo $\epsilon > 0$ entonces $d(x, A) = 0$, luego $x \in \overline{A}$.

Por lo tanto, por definición $d_{H^-}(A, B) = 0$ si y sólo si $A \subseteq N_\epsilon(B)$ para todo $\epsilon > 0$, es decir,

$$d_{H^-}(A, B) = 0 \text{ si y sólo si } A \subseteq \bigcap_{\epsilon>0} N_\epsilon(B) = \overline{B}.$$

Los casos restantes se prueban de manera análoga. $\square$

Proposición 3.2.2. *Sea X un espacio métrico. Entonces las funciones d_{H^-} y d_{H^+} satisfacen la desigualdad triangular en $\mathcal{A}(X)$, y además para cualesquiera $A, B \subseteq X$ se tiene que*

$$d_{H^-}(\overline{A}, \overline{B}) = d_{H^-}(A, B) \quad \text{ y } \quad d_{H^+}(\overline{A}, \overline{B}) = d_{H^+}(A, B).$$

Demostración. Probaremos el resultado para d_{H^-} (para d_{H^+} la prueba es análoga).

Para probar que d_{H^-} satisface la desigualdad triangular en $\mathcal{A}(X)$, veremos que si $A, B, C \in \mathcal{A}(X)$ entonces debe ocurrir que

$$e_d(A,B) \leq e_d(A,C) + e_d(C,B). \tag{3.2.1}$$

Si $e_d(A,C) = \infty$ o bien $e_d(C,B) = \infty$, el resultado se sigue inmediatamente. Por lo tanto, podemos suponer que $e_d(A,C), e_d(C,B) < \infty$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que $A \subseteq N_{\epsilon_1}(C)$, $C \subseteq N_{\epsilon_2}(B)$ y

$$\epsilon_1 < e_d(A,C) + \epsilon, \quad \epsilon_2 < e_d(C,B) + \epsilon.$$

Afirmamos que $A \subseteq N_{\epsilon_1+\epsilon_2}(C)$. En efecto, sea $a \in A$. Como $d(a,C) < \epsilon_1$ existe $c \in C$ tal que $d(a,c) < \epsilon_1$. Análogamente, existe $b \in B$ tal que $d(c,b) < \epsilon_2$. Por lo que $d(a,b) < \epsilon_1 + \epsilon_2$, es decir $d(a,B) < \epsilon_1 + \epsilon_2$. Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, entonces $d(a,B) \leq e_d(A,C) + e_d(C,B)$. Como $a \in A$ fue escogido arbitrariamente, concluimos que la desigualdad (3.2.1) es cierta, lo que prueba la desigualdad triangular para d_{H^-}.

De la desigualdad triangular y el Lema 3.2.1 se sigue que

$$d_{H^-}(\overline{A},\overline{B}) \leq d_{H^-}(\overline{A},A) + d_{H^-}(A,B) + d_{H^-}(B,\overline{B}) = d_{H^-}(A,B).$$

De forma análoga se prueba que $d_{H^-}(A,B) \leq d_{H^-}(\overline{A},\overline{B})$, lo cual prueba el resultado deseado. □

La proposición anterior nos dice que d_{H^-} y d_{H^+} satisfacen los axiomas de cuasi-pseudométricas. Resumimos esto en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3. *Sea X un espacio métrico. Entonces las funciones d_{H^-} y d_{H^+} son cuasi-pseudométricas extendidas en $\mathcal{A}(X)$, cuasi-métricas extendidas en* $\mathrm{CL}(X)$*, y cuasi-métricas en* $\mathrm{BC}(X)$.

Demostración. Claramente $d_{H^-}(A,A) = 0$ para todo $A \subseteq X$.

Por la Proposición 3.2.2, d_{H^-} satisface la desigualdad triangular en $\mathcal{A}(X)$, por lo tanto d_{H^-} es una cuasi-pseudométrica extendida en $\mathcal{A}(X)$.

Si $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ y $d_{H^-}(A,B) = 0 = d_{H^-}(B,A)$, entonces por el Lema 3.2.1 se tiene que

$$A \subseteq \overline{B} = B, \quad \text{y} \quad B \subseteq \overline{A} = A,$$

lo que muestra que d_{H^-} es cuasi-métrica extendida en $\mathrm{CL}(X)$.

Finalmente, si $A, B \in \mathrm{BC}(X)$ entonces $d_{H^-}(A,B) < \infty$. Por lo tanto d_{H^-} es cuasi-métrica en $\mathrm{BC}(X)$.

De forma análoga se obtiene el mismo resultado para d_{H^+}. $\square$

A partir de las distancias inferior y superior de Hausdorff, podemos obtener la definición de la conocida **distancia de Hausdorff** d_H como la simetrización de las cuasi-pseudométricas d_{H^-} y d_{H^+}, es decir

$$\begin{aligned} d_H(A,B) &:= \max\{d_{H^-}(A,B), d_{H^+}(A,B)\} \\ &= \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\} \\ &= \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N_\epsilon(B), B \subseteq N_\epsilon(A)\}. \end{aligned}$$

Como consecuencia del Corolario 3.2.3, la distancia de Hausdorff d_H en $\mathcal{A}(X)$, $\mathrm{CL}(X)$ y $\mathrm{BC}(X)$ resulta ser pseudométrica extendida, métrica extendida y métrica, respectivamente.

Las topologías que generan las distancias d_{H^-}, d_{H^+} y d_H en las posibles familias de subconjuntos cerrados de un espacio métrico X (i.e., $\mathcal{A}(X), \mathrm{CL}(X)$, etc.) serán llamadas topologías inferior de Hausdorff, superior de Hausdorff y de Hausdorff, respectivamente. Asimismo, usaremos los símbolos τ_{H^-}, τ_{H^+} y τ_H para denotar las topologías de los correspondientes hiperespacios. También usaremos los símbolos $\mathrm{CL}_{H^-}(X), \mathrm{BC}_{H^-}(X)$, etc., para referirnos a ellos.

Ahora definiremos la distancia de Attouch-Wets.

Sea X un espacio métrico y $A, B \subseteq X$ no vacíos. Si $x_0 \in X$, definimos la **distancia de Attouch-Wets** basada en el punto x_0 entre A y B mediante

$$d_{AW}(A,B) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\min\left\{\frac{1}{k}, \sup_{x\in B(x_0,k)} |d(x,A) - d(x,B)|\right\}\right\}.$$

El hiperespacio de cerrados $\mathrm{CL}(X)$ equipado con la topología generada por d_{AW} será denotado por $\mathrm{CL}_{AW}(X)$. Dicha topología no depende del punto x_0. Si X es un espacio normado, por comodidad escogeremos $x_0 = 0$.

La siguiente caracterización será de gran utilidad y nos ayuda a entender cómo se comporta d_{AW} geométricamente. La demostración puede ser consultada en [13, Teorema 3.1.7].

Teorema 3.2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $A_k, A \in \mathrm{CL}(X)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) *(A_k) converge a A en $\mathrm{CL}_{AW}(X)$.*

(2) *Para todo $B \subseteq X$ acotado,*

$$\lim_{k\to\infty} e_d(A \cap B, A_k) = 0 = \lim_{k\to\infty} e_d(A_k \cap B, A).$$

(3) *Existe una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos acotados de X cofinal en la familia de subconjuntos acotados de X, respecto a la inclusión de conjuntos, tal que para cada $B \in \mathcal{B}$ se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} e_d(A \cap B, A_k) = 0 = \lim_{k\to\infty} e_d(A_k \cap B, A).$$

La distancia de Attouch-Wets es muy útil para medir la cercanía entre conjuntos no acotados, cuya distancia de Hausdorff suele ser infinita. Ilustraremos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.5. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean L y L_k las rectas $y = 0$ y $y = (1/k)x$, respectivamente. Es claro que para cada $k \in \mathbb{N}$, $d_H(L, L_k) = \infty$.*

Consideremos $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $B_n = B[0, n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La familia $\mathcal{B}$ es cofinal en la familia de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^2$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} e_d(L_k \cap B_n, L) &= \sup\{d(x, L) : x \in L_k \cap B_n\} \\ &= \left\| \left(\frac{kn}{\sqrt{k^2+1}}, \frac{n}{\sqrt{k^2+1}} \right) - \left(\frac{kn}{\sqrt{k^2+1}}, 0 \right) \right\| \\ &= \frac{n}{\sqrt{k^2+1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} e_d(L_k \cap B_n, L) = 0$. Por otro lado,

$$e_d(L \cap B, L_k) \leq \left\| \left(n, \frac{1}{k} n \right) - (n, 0) \right\| = \frac{n}{k}.$$

Es decir, $\lim_{k\to\infty} e_d(L\cap B, L_k) = 0$. *Concluimos por el Teorema 3.2.4, que* (L_k) *converge a* L *en* $\mathrm{CL}_{AW}(\mathbb{R}^2)$.

3.2.2. Topología de Vietoris y de Fell

A continuación definiremos dos topologías que pueden ser consideradas en espacios topológicos que no son necesariamente metrizables.

Sea X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$E^+ := \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subseteq E\},$$

$$E^- := \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \cap E \neq \emptyset\}.$$

Definición 3.2.6. *Sea* X *un espacio topológico.*

(1) *La* **topología inferior de Vietoris** *en* $\mathrm{CL}(X)$ *es la topología* τ_{V^-} *generada por los conjuntos de la forma* U^-, *donde* $U \subseteq X$ *es abierto. Denotaremos este espacio con* $\mathrm{CL}_{V^-}(X)$.

(2) *La* **topología superior de Vietoris** *en* $\mathrm{CL}(X)$ *es la topología* τ_{V^+} *generada por los conjuntos de la forma* U^+, *donde* $U \subseteq X$ *es abierto. Denotaremos este espacio con* $\mathrm{CL}_{V^+}(X)$.

(3) *La* **topología de Vietoris** τ_V *en* $\mathrm{CL}(X)$ *es la topología supremo de la topología inferior de Vietoris* τ_{V^-}, *y la topología superior de Vietoris* τ_{V^+}. *Este espacio será denotado por* $\mathrm{CL}_V(X)$.

En este contexto, para cualesquiera subconjuntos E_1 y E_2 se tiene que $(E_1 \cap E_2)^+ = E_1^+ \cap E_2^+$, pero por otro lado puede ocurrir que $(E_1 \cap E_2)^- \neq E_1^- \cap E_2^-$. Por lo tanto, un abierto básico en la topología de Vietoris tiene la forma

$$W^+ \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^- \right),$$

en donde W y cada V_i son abiertos en X.

Introduciremos ahora a la topología de Fell.

Definición 3.2.7. *Sea* X *un espacio topológico.*

(1) *La* **topología superior de Fell** *en* $\mathrm{CL}(X)$ *es la topología* τ_{F^+} *generada por todos los conjuntos de la forma* $(X \setminus K)^+$*, en donde* K *es un subconjunto compacto de* X*. Este hiperespacio será denotado por* $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$*.*

(2) *La* **topología de Fell** *en* $\mathrm{CL}(X)$ *es la topología supremo* τ_F *de la topología inferior de Vietoris* τ_{V^-} *en* X*, y la topología superior de Fell* τ_{F^+} *en* X*. Denotaremos este hiperespacio con* $\mathrm{CL}_F(X)$*.*

Es claro que cuando X es un espacio Hausdorff, la topología de Vietoris es más fina que la topología de Fell.

Podemos extender la topología de Fell a la familia $\mathrm{CL}^*_F(X)$, declarando una base local de $\emptyset$ como la familia $\{A \in \mathrm{CL}^*(X) : A \subseteq (X \setminus K)\}$, con K compacto en X. Probablemente uno de los resultados más importantes sobre el espacio $\mathrm{CL}^*_F(X)$ es que siempre resulta compacto, sin importar cómo es el espacio base X. La demostración puede ser consultada en [13].

Teorema 3.2.8. *Sea* X *un espacio topológico. Entonces* $\mathrm{CL}^*_F(X)$ *es compacto.*

La siguientes proposiciones muestran qué relación existe entre las topologías inferiores y superiores de Hausdorff y de Vietoris. Aunque ambos resultados fueron probados en el caso general de espacios cuasi-uniformes ([14]), mostraremos aquí la prueba en el caso metrizable para ilustrar dicha relación.

Proposición 3.2.9 (c.f. [14, Lema 2.4])**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico.*

(1) *La topología inferior de Vietoris en* $\mathrm{CL}(X)$ *es más débil que la topología inferior de Hausdorff, es decir,* $\tau_{V^-} \subseteq \tau_{H^-}$*.*

(2) *La topología superior de Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$ *es más débil que la topología superior de Vietoris, es decir,* $\tau_{H^+} \subseteq \tau_{V^+}$*.*

Demostración. (1) Sea $V \subseteq X$ abierto y sea $A \in V^-$. Entonces $A \cap V \neq \emptyset$, por lo que existe un punto $a \in A \cap V$. Sea $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq V$. Supongamos que $B \in \mathrm{CL}(X)$ es tal que $d_{H^-}(A, B) < \delta$. Entonces existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, es decir $b \in B(a, \delta) \subseteq V$ y en consecuencia $B \in V^-$. Esto muestra que $B_{d_{H^-}}(A, \delta) \subseteq V^-$, y por lo tanto $\tau_{V^-} \subseteq \tau_{H^-}$.

(2) Sean $A \in \mathrm{CL}(X)$ y $\delta > 0$. Si $C \in B_{d_{H^+}}(A, \delta)$, entonces $d_{H^+}(A, C) =$

$e_d(C, A) < \delta$. Sea $t > 0$ tal que

$$e_d(C, A) < t < \delta,$$

de modo que si $U := N_t(A)$ entonces U es abierto en X y $C \subseteq U$. Luego, U^+ es una vecindad abierta de C en la topología superior de Vietoris. Más aún, si $Q \in U^+$ entonces $e_d(Q, A) \leq t < \delta$. Es decir,

$$C \in U^+ \subseteq B_{d_{H^+}}(A, \delta),$$

y por lo tanto $B_{d_{H^+}}(A, \delta)$ es abierto en la topología superior de Vietoris. $\square$

En un espacio métrico, cuando nos restringimos a la familia de subconjuntos compactos tenemos las contenciones recíprocas.

Proposición 3.2.10 (c.f. [14, Teorema 2.5])**.** *Sea (X, d) un espacio métrico.*

(1) *La topología inferior de Hausdorff en $\mathcal{K}(X)$ coincide con la topología inferior de Vietoris.*

(2) *La topología superior de Hausdorff en $\mathcal{K}(X)$ coincide con la topología superior de Vietoris.*

(3) *La topología de Hausdorff en $\mathcal{K}(X)$ coincide con la topología de Vietoris.*

Demostración. (1) Por la Proposición 3.2.9, ya sabemos que $\tau_{V^-} \subseteq \tau_{H^-}$ en $\mathrm{CL}(X)$, y por lo tanto también en $\mathcal{K}(X)$. Para demostrar que en $\mathcal{K}(X)$ se cumple que $\tau_{H^-} \subseteq \tau_{V^-}$, tomemos $A \in \mathcal{K}(X)$ y $\delta > 0$. Si $C \in B_{d_{H^-}}(A, \delta)$ entonces

$$d_{H^-}(A, C) = e_d(A, C) < \delta.$$

Luego existe $0 < t < \delta$ tal que $A \subseteq N_t(C)$. Sea $0 < \epsilon < \delta - t$. Como C es compacto, existen $c_1, \ldots, c_k \in C$ tales que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i,$$

en donde $U_i := B(c_i, \epsilon/2)$. Sea $\mathcal{U} := \cap_{i=1}^{k} U_i^- \in \tau_{V^-}$. Claramente $\mathcal{U}$ es una vecindad abierta de C en τ_{V^-}. Afirmamos que $\mathcal{U} \subseteq B_{d_{H^-}}(A, \delta)$. En efecto, sea $Q \in \mathcal{U}$. Como $A \subseteq N_t(C)$, para cada $a \in A$ existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < t$.

Además, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $d(c, c_i) < \epsilon/2$. Como $Q \in \mathcal{U}$, entonces $Q \cap U_i \neq \emptyset$, por lo que existe $q \in Q$ tal que $d(c_i, q) < \epsilon/2$. Así,

$$d(a, q) \leq d(a, c) + d(c, c_i) + d(c_i, q) < t + \epsilon.$$

Concluimos que $e_d(A, Q) \leq t + \epsilon < \delta$ y por lo tanto $Q \in B_{d_{H^-}}(A, \delta)$. Esto muestra que $\tau_{H^-} \subseteq \tau_{V^-}$.

(2) Nuevamente, por la Proposición 3.2.9, ya sabemos que $\tau_{H^+} \subseteq \tau_{V^+}$, por lo que es suficiente demostrar que $\tau_{V^+} \subseteq \tau_{H^+}$. Sean $A, U \subseteq X$ con A compacto, U abierto y $A \in U^+$, es decir $A \subseteq U$. Por la compacidad de A podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $N_\delta(A) \subseteq U$. Por lo tanto, si $C \in B_{d_{H^+}}(A, \delta)$ entonces

$$d_{H^+}(A, C) = e_d(C, A) < \delta,$$

luego $C \subseteq N_\delta(A) \subseteq U$, o equivalentemente, $C \in U^+$. Concluimos que

$$A \in B_{d_{H^+}}(A, \delta) \subseteq U^+.$$

Esto muestra que todo elemento de U^+ es punto interior de U^+ con respecto de la topología τ_{H^+}, y por lo tanto $\tau_{V^+} \subseteq \tau_{H^+}$.

(3) Esto es una consecuencia directa de (1) y (2). □

3.3. Continuidad de funciones inducidas en hiperespacios

Con el objetivo de responder a la pregunta de cuándo un grupo topológico G induce una acción continua en el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ de un G-espacio X, necesitamos primero responder una pregunta más simple: cuándo una función continua induce una función continua en los correspondientes hiperespacios.

Sean X y Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es una función (no necesariamente continua, ni cerrada), definimos la **función inducida** de f como la función $\widetilde{f} : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$ definida por

$$\widetilde{f}(A) := \overline{f(A)}.$$

El objetivo de esta sección es estudiar la continuidad de $\widetilde{f}$ en función de f, los espacios X y Y, y las diferentes hipertopologías que podemos considerar en $\mathrm{CL}(X)$, $\mathrm{CL}(Y)$ y sus subespacios. En algunos casos, la continuidad de $\widetilde{f}$ implica la continuidad de la función original f.

En algunos contextos (tales como los sistemas dinámicos [11, 42]) la función inducida $\widetilde{f}$ juega un papel muy importante, y ésta ha sido estudiada desde hace tiempo. Por ejemplo, en [32] se estudió el caso de $\widetilde{f}$ en el hiperespacio $\mathcal{A}(X)$ equipado con la topología de Vietoris, en donde $\widetilde{f}$ siempre resulta continua si f lo es. Nosotros estudiaremos el caso de $\mathrm{CL}(X)$ equipado con la topología de Vietoris.

Por otro lado, es sabido que si f es continua, X y Y son espacios métricos compactos y $\mathrm{CL}(X)$ y $\mathrm{CL}(Y)$ están equipados con la topología de Hausdorff, entonces $\widetilde{f}$ es continua ([34]). Lo mismo sucede si consideramos $K(X)$ y $K(Y)$, aunque X y Y no sean compactos (ver Corolario 3.3.3). Aquí veremos otros casos cuando X y Y no son compactos.

En general, el problema de caracterizar la continuidad de la función inducida en los distintos hiperespacios no está del todo esclarecido. Por ejemplo, cuando consideramos la topología inducida por la distancia de Attouch-Wets en $\mathcal{K}(X)$ entonces la función inducida puede no ser continua, como mostramos a continuación.

Ejemplo 3.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico no-acotado. Entonces existe una función 1-Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$ tal que la función inducida $\widetilde{f} : \mathcal{K}_{AW}(X) \to \mathcal{K}_{AW}(\mathbb{R})$ no es continua, donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y supongamos que la distancia d_{AW} en X está basada en el punto x_0. Similarmente, la distancia d_{AW} en $\mathbb{R}$ estará basada en 0. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \tan^{-1}(d(x_0, x)), \quad x \in X.$$

Entonces f es 1-Lipschitz, puesto que

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |\tan^{-1}(d(x_0, x)) - \tan^{-1}(d(x_0, y))| \\ &\leq |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y).\end{aligned}$$

Sea $(x_n) \subseteq X$ una sucesión tal que $d(x_0, x_n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A(n) := \{x_0, x_n\}$. Veamos que la sucesión $(A(n))$ converge a $\{x_0\}$ en $\mathcal{K}_{AW}(X)$.

Sean $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/(1+k) < \epsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 2k$. Si $n \geq N$, usando que $d(x_0, x_n) \geq n > 2k$, obtenemos que para toda $x \in B(x_0, k)$ se tiene que $d(x, x_n) > k > d(x, x_0)$, y por lo tanto

$$d(x, A(n)) = d(x, x_0).$$

De lo anterior se sigue que

$$\sup_{x \in B(x_0,k)} |d(x, A(n)) - d(x, \{x_0\})| = 0.$$

Por lo tanto $d_{AW}(A(n), \{x_0\}) \leq 1/(k+1) < \epsilon$ para toda $n \geq N$.

Por otro lado, para cada $n \geq 2$ se tiene que $d(x_0, x_n) \geq 2$ y por lo tanto

$$2 > \tan^{-1}(d(x_0, x_n)) \geq \tan^{-1}(2) > 1.$$

Luego, si $n \geq 2$ entonces

$$\sup_{x \in B(0,2)} \left|d\left(x, \{0, \tan^{-1}(d(x_0, x_n))\}\right) - d(x, \{0\})\right| > 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} d_{AW}\left(\widetilde{f}(A(n)), \widetilde{f}(\{x_0\})\right) &\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \sup_{x \in B(0,2)} |d(x, \widetilde{f}(A(n))) - d(x, \{0\})|\right\} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\left(\widetilde{f}(A(n))\right)$ no converge a $\widetilde{f}(\{x_0\}) = \{0\}$, por lo que $\widetilde{f}$ no es continua. $\square$

Como muestra el ejemplo anterior, incluso en familias de conjuntos con buenas propiedades topológicas (compactos) puede ocurrir que un homeomorfismo no induzca una función continua en el hiperespacio de Attouch-Wets.

En contraste, la función inducida en el hiperespacio de Vietoris se comporta bien en espacios normales. Concretamente, de [32, Teorema 5.3] y [32, Teorema 5.10] se siguen las siguientes afirmaciones.

Proposición 3.3.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Entonces:*

(1) *f es continua si y sólo si $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{V^-}(X) \to \mathrm{CL}_{V^-}(Y)$ es continua.*

(2) *Si Y es normal y f es continua, entonces $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{V^+}(X) \to \mathrm{CL}_{V^+}(Y)$ es continua.*

(3) *Si Y es normal y f es continua, entonces $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_V(X) \to \mathrm{CL}_V(Y)$ es continua.*

(4) *Si Y es Hausdorff y f es continua, entonces $\widetilde{f} : \mathcal{K}_V(X) \to \mathcal{K}_V(Y)$ es continua.*

En consecuencia, en espacios metrizables la función inducida es continua en el hiperespacio de conjuntos compactos equipado con la topología de Hausdorff.

Corolario 3.3.3. *Si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios métricos, entonces $\widetilde{f} : \mathcal{K}_H(X) \to \mathcal{K}_H(Y)$ es continua.*

Demostración. Se sigue de que $\mathcal{K}_H(X) = \mathcal{K}_V(X)$, por la Proposición 3.2.10, y de la continuidad de la función inducida en el espacio de Vietoris por la Proposición 3.3.2. □

Con respecto a la topología de Fell y la función inducida, podemos probar un resultado análogo al de los incisos (2) y (3) de la Proposición 3.3.2 como mostraremos a continuación. Recordemos además que una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es llamada **propia** si para cada compacto $K \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de X.

Proposición 3.3.4. *Sea Y un espacio Hausdorff localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua y propia, entonces $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{F^+}(X) \to \mathrm{CL}_{F^+}(Y)$ es continua. En consecuencia, $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ es continua.*

Demostración. Sea $K \subseteq Y$ compacto y $A \in \mathrm{CL}(X)$ tal que $\widetilde{f}(A) \in (Y \setminus K)^+$, lo cual es equivalente a que $K \subseteq Y \setminus \overline{f(A)}$. Como Y es localmente compacto y Hausdorff, existe un conjunto abierto $W \subseteq Y$ tal que $\overline{W}$ es compacto y

$$K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq Y \setminus \overline{f(A)}$$

o bien,

$$\overline{f(A)} \subseteq Y \setminus \overline{W} \subseteq Y \setminus W \subseteq Y \setminus K.$$

Por lo tanto, $(X \setminus f^{-1}(\overline{W}))$ es una vecindad abierta de A en $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$, y además, para todo $B \in (X \setminus f^{-1}(\overline{W}))$ se tiene que $f(B) \subseteq Y \setminus W$. Como W es abierto, se sigue que

$$\widetilde{f}(B) = \overline{f(B)} \subseteq Y \setminus W \subseteq Y \setminus K.$$

Esto prueba que $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{F^+}(X) \to \mathrm{CL}_{F^+}(Y)$ es continua. Por lo tanto, por la Proposición 3.3.2 (1) y recordando que la topología de Fell τ_F se obtiene como la topología supremo de las topologías τ_{V^-} y τ_{F^+}, obtenemos que $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ es continua. □

En [42], los autores consideraron el caso $f : X \to X$, en donde X es un espacio Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable, y probaron que $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(X)$ resulta continua si f es **perfecta** (es decir, si f es cerrada y cada fibra $f^{-1}(y)$ es compacta). Aunque en algunas partes la prueba es similar, aquí presentamos una demostración en un caso más general, sin pedir que los espacios X y Y sean localmente compactos o segundo numerables.

Teorema 3.3.5. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios Hausdorff.*

(1) *Si f es perfecta, entonces $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{F^+}(X) \to \mathrm{CL}_{F^+}(Y)$ es continua. En particular, $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ es continua.*

(2) *Si f es cerrada, no es constante y $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ es continua, entonces f es perfecta.*

(3) *Si f es cerrada, entonces $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ es continua si y sólo si f es perfecta o constante.*

Demostración. (1) Como f es perfecta, f es cerrada, y en consecuencia la función inducida está dada por $\widetilde{f}(A) = f(A)$ para todo $A \in \mathrm{CL}(X)$. Si $K \subseteq Y$ es compacto, tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{f}^{-1}\left(Y \setminus K\right) &= \{A \in \mathrm{CL}(X) : f(A) \subseteq Y \setminus K\} \\ &= \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subseteq f^{-1}(Y \setminus K)\} \\ &= \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subseteq X \setminus f^{-1}(K)\} \\ &= (X \setminus f^{-1}(K))^{+}.\end{aligned}$$

Como f es perfecta, entonces f es propia ([20, Teorema 3.7.2]). y por lo tanto $(X \setminus f^{-1}(K))^{+} = \widetilde{f}^{-1}\left(Y \setminus K\right)$ es abierto en el espacio $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$. Así, obtenemos que $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{F^+}(X) \to \mathrm{CL}_{F^+}(Y)$ es continua. Por la Proposición 3.3.2 (1), la función inducida $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ también es continua.

(2) Sea $y \in f(X)$. Como X es Hausdorff, el conjunto $(Y \setminus \{y\})^{+}$ es abierto. Por la continuidad de $\widetilde{f}$, el conjunto

$$O := \widetilde{f}^{-1}\left((Y \setminus \{y\})^{+}\right) = \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subseteq X \setminus \{f^{-1}(y)\}\}$$

es abierto en $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$. Como f no es constante, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq y$. Esto implica que $\{x\} \in O$, por lo cual existen $K \subseteq X$ compacto y $V_1, \ldots, V_n \subseteq X$ abiertos tales que

$$\{x\} \in \mathcal{U} := (X \setminus K)^{+} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) \subseteq O.$$

Por otro lado, para cada $z \in f^{-1}(y)$ el conjunto $\{x, z\}$ pertenece a $\mathrm{CL}(X)$, pero $\{x, z\} \notin O$. En particular, $\{x, z\} \notin \mathcal{U}$. Como $x \in X \setminus K$ y $x \in V_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $z \notin X \setminus K$ y por lo tanto $z \in K$. Esto implica que $f^{-1}(y)$ es un subconjunto cerrado contenido en K, luego $f^{-1}(y)$ es compacto.

(3) Esto es una consecuencia directa de (1) y (2). $\square$

Ahora consideraremos la función inducida en el hiperespacio de conjuntos acotados y cerrados (equipado con la topología de Hausdorff). Un problema con esto es que no siempre se puede asegurar que la función inducida esté bien definida, esto es, que la imagen de un conjunto acotado puede no ser acotada incluso si la función es uniformemente continua (por ejemplo, la función identidad $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en donde el dominio está equipado con la métrica discreta y el contradominio con la métrica euclidiana).

Por lo anterior, recordemos que una función entre espacios métricos $f : X \to Y$ es llamada **acotada** si para todo subconjunto $A \subseteq X$ acotado se tiene que $f(A)$ es acotado en Y. Recordemos además que f es **uniformemente continua en acotados** si para todo subconjunto $A \subseteq X$ acotado, se tiene que f es uniformemente continua en A.

Proposición 3.3.6. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos acotada y uniformemente continua en acotados. Entonces las siguiente funciones inducidas son continuas.*

(1) $\widetilde{f} : \mathrm{BC}_{H^-}(X) \to \mathrm{BC}_{H^-}(Y)$,

(2) $\widetilde{f} : \mathrm{BC}_{H^+}(X) \to \mathrm{BC}_{H^+}(Y)$,

(3) $\widetilde{f} : \mathrm{BC}_{H}(X) \to \mathrm{BC}_{H}(Y)$.

Demostración. (1) Sean $A \in \mathrm{BC}(X)$ y $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en el conjunto acotado $N_1(A)$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $a, b \in N_1(A)$ con $d(a,b) < \delta_0$ se tiene que $d(f(a), f(b)) < \epsilon$. Definamos $\delta := \text{mín}\{\delta_0, 1\}$ y sea $B \in \mathrm{BC}(X)$ tal que $d_{H^-}(A,B) < \delta$. Sea $a \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$. Por la elección de δ, se tiene que $b \in N_1(A)$ y $d(a,b) < \delta_0$, por lo que $d(f(a), f(b)) < \epsilon$. Esto prueba que $d(f(a), f(B)) < \epsilon$. Como $a \in A$ fue escogido arbitrariamente, tenemos que

$$d_{H^-}(\overline{f(A)}, \overline{f(B)}) = d_{H^-}(f(A), f(B)) = \sup_{a \in A} d(f(a), f(B)) \leq \epsilon,$$

lo cual prueba la continuidad de $\widetilde{f}$ en A.

(2) Sean $A \in \mathrm{BC}(X)$ y $\epsilon > 0$. Elijamos δ_0 tal que para todo $a, b \in N_1(A)$ con $d(a,b) < \delta_0$ se tiene que $d(f(a), f(b)) < \epsilon$, y sea $\delta := \text{mín}\{\delta_0, 1\}$. Supongamos que $B \in \mathrm{BC}(X)$ es tal que $d_{H^+}(A,B) < \delta$. Si $b \in B$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \delta$. Por lo tanto se tiene que $b \in N_1(A)$ y $d(a,b) < \delta_0$, por lo que $d(f(a), f(b)) < \epsilon$. Esto muestra que $d(f(b), f(A)) < \epsilon$, y por lo tanto

$$d_{H^+}(\overline{f(A)}, \overline{f(B)}) = d_{H^+}(f(A), f(B)) = \sup_{b \in B} d(f(b), f(A)) \leq \epsilon.$$

(3) Como $d_H = \text{máx}\{d_{H^-}, d_{H^+}\}$, la continuidad de $\widetilde{f}$ se sigue por los pasos hechos tanto en (1) como en (2). $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra que la continuidad uniforme en acotados de f es esencial en la proposición anterior.

Ejemplo 3.3.7. *Sean $X = (0,1)$ y $Y = [-1,1]$ equipados con la topología usual. Consideremos la función $f : X \to Y$ definida por $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$. Afirmamos que $\widetilde{f} : \mathrm{BC}_H(X) \to \mathrm{BC}_H(Y)$ no es continua. En efecto, sea $A := \{1/(2\pi n) : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que $A \in \mathrm{BC}(X)$ y que $\widetilde{f}(A) = \{0\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $A_k \in \mathrm{BC}(X)$ mediante*

$$A_k := A \cup \left[\frac{1}{2\pi(k+1)}, \frac{1}{2\pi k}\right].$$

Entonces se tiene que $d_H(A_k, A) \to 0$, pero $\widetilde{f}(A_k) = [-1,1]$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo que $\widetilde{f}(A_k)$ no puede converger a $\widetilde{f}(A)$. Por lo tanto $\widetilde{f}$ no es continua.

Por otro lado, la continuidad uniforme de $f : X \to Y$ es una condición más fuerte que siempre garantiza la continuidad de la función inducida $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_H(X) \to \mathrm{CL}_H(Y)$. Esto fue demostrado en [26, Teorema 3].

Proposición 3.3.8. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *f es uniformemente continua.*

(2) *$\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{H^-}(X) \to \mathrm{CL}_{H^-}(Y)$ es uniformemente continua.*

(3) *$\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{H^+}(X) \to \mathrm{CL}_{H^+}(Y)$ es uniformemente continua.*

(4) *$\widetilde{f} : \mathrm{CL}_H(X) \to \mathrm{CL}_H(Y)$ es uniformemente continua.*

Estamos interesados ahora en encontrar condiciones para las que la función inducida resulte continua en el hiperespacio de cerrados con la métrica de Attouch-Wets. A diferencia del hiperespacio de Hausdorff, la función inducida de una función continua en el hiperespacio de Attouch-Wets no necesariamente es continua aún cuando la función f tenga propiedades más fuertes incluso que la continuidad uniforme, tal como vimos en el Ejemplo 3.3.1.

Finalizamos esta sección probando que una función continua f sí induce una función continua en el hiperespacio de Attouch-Wets cuando f satisface cierta condición. Probaremos primero el siguiente lema.

Lema 3.3.9. *Sea (X,d) un espacio métrico. Sean $A_1, A_2, A_3 \subseteq X$, y sea B una bola abierta del espacio (X,d). Entonces se tiene que:*

(1) *Si* $A_1 \subseteq A_2$ *entonces* $e_d(A_1, A_3) \leq e_d(A_2, A_3)$.

(2) $e_d(A_1 \cap B, A_3) = e_d(\overline{A_1} \cap B, A_3)$.

Demostración. (1) Como $A_1 \subseteq A_2$ entonces

$$\{d(x, A_3) : x \in A_1\} \subseteq \{d(x, A_3) : x \in A_2\}.$$

Luego, por la definición de e_d se sigue que $e_d(A_1, A_3) \leq e_d(A_2, A_3)$.

(2) Por (1), es claro que $e_d(A_1 \cap B, A_3) \leq e_d(\overline{A_1} \cap B, A_3)$, por lo que es suficiente demostrar la otra desigualdad.

Sea $x \in \overline{A_1} \cap B$, entonces existe $(x_n) \subseteq A_1$ tal que $x_n \to x$. Como B es abierto y $x \in B$, existen $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $x_N \in A_1 \cap B$ y $d(x, x_N) < \epsilon$. Entonces

$$d(x, A_3) \leq d(x, x_N) + d(x_N, A_3) < \epsilon + e_d(A_1 \cap B, A_3).$$

Por lo tanto

$$e_d(\overline{A_1} \cap B, A_3) = \sup\{d(x, A_3) : x \in \overline{A_1} \cap B\} \leq e_d(A_1 \cap B, A_3).$$

□

Teorema 3.3.10. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre espacios métricos uniformemente continua en acotados, y supongamos que* f *satisface la siguiente condición: existe* $c > 0$ *tal que*

$$c \cdot d(x_1, x_2) \leq d(f(x_1), f(x_2)) \quad \textit{para cada } x_1, x_2 \in X. \tag{3.3.1}$$

Entonces $\widetilde{f} : \mathrm{CL}_{AW}(X) \to \mathrm{CL}_{AW}(Y)$ *es continua.*

Demostración. Supongamos que $(A_k) \subseteq \mathrm{CL}_{AW}(X)$ es una sucesión convergente a A en $\mathrm{CL}_{AW}(X)$. Utilizaremos el Teorema 3.2.4 para demostrar que $\left(\widetilde{f}(A_k)\right)$ converge a $\widetilde{f}(A)$ en $\mathrm{CL}_{AW}(Y)$.

Sea $x_0 \in X$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$B_n^Y := B(f(x_0), c \cdot n), \quad \text{y} \quad B_n^X := B(x_0, n).$$

Es claro que la familia $\mathcal{B} := \{B_n^Y : n \in \mathbb{N}\}$ es cofinal en la familia de subconjuntos acotados de Y. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para aplicar el Teorema 3.2.4, demostraremos primero que

$$\lim_{k\to\infty} e_d\left(\overline{f(A)} \cap B_n^Y, \overline{f(A_k)}\right) = 0.$$

Por el Lema 3.3.9 (2), para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$e_d\left(\overline{f(A)} \cap B_n^Y, \overline{f(A_k)}\right) = e_d\left(f(A) \cap B_n^Y, \overline{f(A_k)}\right) = e_d\left(f(A) \cap B_n^Y, f(A_k)\right).$$

Como f satisface la desigualdad (3.3.1), entonces

$$f(A) \cap B_n^Y \subseteq f(A \cap B_n^X).$$

Por lo tanto, por el Lema 3.3.9 (1), es suficiente demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} e_d\left(f(A \cap B_n^X), f(A_k)\right) = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis f es uniformemente continua en el conjunto acotado B_{n+1}^X. Sea $\delta > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in B_{n+1}^X$ con $d(x_1, x_2) < \delta$ se tiene que $d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

Por la convergencia de la sucesión (A_k) en $\mathrm{CL}_{AW}(X)$ y el Teorema 3.2.4, sabemos que $\lim_{k\to\infty} e_d\left(A \cap B_n^X, A_k\right) = 0$. Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$,

$$e_d(A \cap B_n^X, A_k) < \min\{\delta, 1\}.$$

Sean $k \geq K$ y $f(x) \in f(A \cap B_n^X)$ con $x \in A \cap B_n^X$. Como $d(x, A_k) < \min\{\delta, 1\}$ existe $w \in A_k$ tal que $d(x, w) < \min\{\delta, 1\}$. Esto implica que $x, w \in B_{n+1}^X$ y $d(x, w) < \delta$, por lo que $d(f(x), f(w)) < \epsilon$. Es decir, $d(f(x), f(A_k)) < \epsilon$. Concluimos que

$$e_d(f(A \cap B_n^X), f(A_k)) = \sup\{d(f(x), f(A_k)) : x \in A \cap B_n^X\} \leq \epsilon,$$

como se deseaba demostrar.

Análogamente se demuestra que

$$\lim_{k\to\infty} e_d\left(\overline{f(A_k)} \cap B_n^Y, \overline{f(A)}\right) = 0.$$

Como $n \in \mathbb{N}$ fue escogido arbitrariamente, concluimos que $\left(\widetilde{f}(A_k)\right)$ converge a $\widetilde{f}(A)$. $\square$

3.4. Acciones continuas en hiperespacios

Sea X un G-espacio. Entonces la acción continua de G en X induce una acción algebraica en $\mathrm{CL}(X)$, dada por

$$(g, A) \mapsto gA.$$

Llamaremos a esta acción la **acción inducida**. Estamos interesados en saber bajo qué condiciones la acción inducida de un G-espacio resulta continua, cuando $\mathrm{CL}(X)$ tiene las distintas topologías introducidas anteriormente.

Como hemos mencionado con anterioridad, en [4] se estudió bajo qué condiciones suficientes $\operatorname{Hom} X$ resulta un grupo topológico con la topología cerrado-abierta (ver Proposición 1.2.9). Por otro lado, si $\operatorname{Hom} X$ no es un grupo topológico entonces no necesariamente la acción de $\operatorname{Hom} X$ es continua en $\mathrm{CL}(X)$ (con la topología de Fell o Vietoris). Este problema fue ampliamente estudiado en [18]. En particular, en [18, Teorema 4.1], se prueba que para un espacio localmente compacto X, se tiene que $\operatorname{Hom} X$ equipado con la topología compacto-abierta es un grupo topológico si y sólo si la función evaluación $\operatorname{Hom} X \times \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(X)$ es continua. Siguiendo argumentos similares, podemos probar algunas generalizaciones para un grupo topológico G que es subgrupo algebraico de $\operatorname{Hom} X$, y X un G-espacio.

El siguiente resultado muestra que la acción inducida de un G-espacio X siempre es continua en $\mathrm{CL}_{V^-}(X)$. La técnica usada en este resultado es similar a la usada en [18, Teorema 4.1-5].

Proposición 3.4.1. *Sea X un G-espacio. Entonces $\mathrm{CL}_{V^-}(X)$ es un G-espacio con la acción inducida.*

Demostración. Sean $(g, A) \in G \times \mathrm{CL}(X)$ y $V \subseteq X$ abierto, y supongamos que $gA \in V^-$. Sea $a \in A$ tal que $ga \in V$. Como la acción de G en X es continua, existen abiertos $U \subseteq G$ y $W \subseteq X$ tales que $g \in U$, $a \in W$, y $hy \in V$ para todo $h \in U$ y $y \in W$. Claramente $U \times W^-$ es una vecindad de (g, A) en $G \times \mathrm{CL}_{V^-}(X)$. Sea $(h, B) \in U \times W^-$, luego existe $b \in B$ tal que $b \in W$, y por lo tanto $hb \in V$. Esto muestra que $hB \in V^-$, lo cual prueba que la acción inducida es continua. □

El siguiente resultado es bien conocido en la teoría de G-espacios.

Lema 3.4.2. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Entonces $\tau_{co} \subseteq \tau_G$, en donde τ_{co} es la topología compacto-abierta en G.*

Demostración. Sea $[K, U]$ un abierto básico en la topología compacto-abierta de G. Probaremos que $[K, G] \in \tau_G$. Sea $g \in [K, U]$, es decir, $gK \subseteq U$. Para cada $k \in K$, sean $U_k \in \tau_G$ y $V_k \subseteq X$ abiertos tales que $g \in U_k$, $k \in V_k$ y

$$U_k V_k := \{hy : h \in U_k, y \in V_k\} \subseteq U.$$

Como K es compacto, existen $k_1, \dots, k_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}$. Sea $U_0 := \bigcap_{i=1}^n U_{k_i}$, entonces U_0 es una vecindad abierta de g en τ_G. Así, para cada $h \in U_0$ y cada $k \in K$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $k \in V_{k_i}$. Por lo tanto $hk \in U_{k_i} V_{k_i} \subseteq U$. Esto muestra que $g \in U_0 \subseteq [K, U]$, como se deseaba probar. $\square$

Lema 3.4.3. *Sea X un G-espacio. Entonces:*

(1) *$[A, B] \subseteq G$ es abierto si y sólo si $[X \setminus B, X \setminus A]$ es abierto en G.*

(2) *Si K es compacto y U es abierto en X, entonces $[X \setminus U, X \setminus K]$ es abierto en G.*

Demostración. (1) Sea $g \in G$. Notemos que se tienen las siguientes equivalencias:

$$gA \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq g^{-1}B \Leftrightarrow g^{-1}(X \setminus B) = X \setminus g^{-1}B \subseteq X \setminus A.$$

Por lo tanto, $g \in [A, B]$ si y sólo si $g^{-1} \in [X \setminus B, X \setminus A]$. Esto muestra que $[X \setminus B, X \setminus A]$ es la imagen del conjunto $[A, B]$ bajo la función inversión $g \mapsto g^{-1}$, la cual es un homeomorfismo de G. Por lo tanto $[X \setminus B, X \setminus A]$ es abierto si y sólo si $[A, B]$ lo es.

(2) Por el Lema 3.4.2, tenemos que $[K, U] \in \tau_{co} \subseteq \tau_G$. Luego, por el inciso (1) obtenemos que $[X \setminus U, X \setminus K]$ es también un elemento de τ_G. $\square$

Ahora demostraremos que existen condiciones suficientes para que un G-espacio induzca una acción continua en $\mathrm{CL}_F(X)$.

Teorema 3.4.4. *Sea X un G-espacio Hausdorff localmente compacto. Entonces la acción inducida de G en $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$ es continua, y por lo tanto la acción inducida en $\mathrm{CL}_F(X)$ también lo es.*

Demostración. Sea $K \subseteq X$ compacto, y sea $(g, A) \in G \times \mathrm{CL}(X)$ tal que $gA \in (X \setminus K)^+$. Esto implica que $gA \subseteq X \setminus K$, y por lo tanto $g^{-1}K \subseteq X \setminus A$. Como X es localmente compacto y Hausdorff, existe $V \subseteq X$ abierto tal que $\overline{V}$ es compacto y

$$g^{-1}K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus A,$$

de donde se sigue que

$$gA \subseteq g(X \setminus \overline{V}) \subseteq g(X \setminus V) \subseteq X \setminus K.$$

Consideremos

$$O := [X \setminus V, X \setminus K] \times (X \setminus \overline{V})^+.$$

Por el Lema 3.4.3, O es un abierto en $G \times \mathrm{CL}_{F^+}(X)$ que contiene a (g, A). Sea ahora $(h, B) \in O$, entonces se tiene que

$$hB \subseteq h(X \setminus \overline{V}) \subseteq h(X \setminus V) \subseteq X \setminus K.$$

Esto prueba que $hB \in (X \setminus K)^+$, y por lo tanto la acción inducida de G en $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$ es continua.

Finalmente, como ya sabíamos que la acción inducida de G en $\mathrm{CL}_{V^-}(X)$ es continua (por la Proposición 3.4.1), se tiene que también es continua en $\mathrm{CL}_F(X)$. □

El siguiente ejemplo muestra que la compacidad local es esencial en el teorema anterior.

Ejemplo 3.4.5. *Sea $G = \mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, el grupo multiplicativo del campo $\mathbb{Q}$, y sea $X = \mathbb{Q}$. Equipemos a X y a G con sus respectivas topologías usuales. Es claro que X es un G-espacio, en donde la acción es la multiplicación usual. Demostraremos que la acción inducida en $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$ no es continua.*

Demostración. Consideremos el siguiente subconjunto compacto de X,

$$K := \{1\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Sea A un subconjunto cerrado no vacío de X tal que $A \subseteq X \setminus K$, es decir, $1 \cdot A \in (X \setminus K)^+$. Afirmamos que la acción inducida de G en $\mathrm{CL}_{F^+}(X)$ no es continua en el punto $(1, A)$.

Sea $\epsilon > 0$, y sea F un subconjunto compacto de X tal que $A \in (X \setminus F)^+$. Sea $\delta > 0$ tal que $1-\epsilon < 1/(1+\delta)$. Mostraremos que $(X \setminus K)^+$ no puede contener a la imagen bajo la acción de G del conjunto $(1-\epsilon, 1+\epsilon) \times (X \setminus F)^+$.

Como F es compacto en $\mathbb{Q}$, entonces F no puede contener al conjunto $(1, 1+\delta) \cap \mathbb{Q}$. Por lo tanto, existe $v \in (1, 1+\delta) \cap \mathbb{Q}$ tal que $v \in X \setminus F$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon/2$ y sea $r := v^{-1}(1+1/n)$. Entonces $r \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ y $\{v\} \in (X \setminus F)^+$, lo que implica que $(r, \{v\}) \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \times (X \setminus F)^+$. Pero $rv = 1 + 1/n \in K$. Esto prueba que la acción inducida no es continua. □

Ahora enunciamos el resultado correspondiente para el caso de los hiperespacios de Vietoris.

Proposición 3.4.6. *Sea G un grupo topológico y X un G-espacio. Entonces se cumple lo siguiente:*

(1) *Si la acción inducida de G en $\mathrm{CL}_{V^+}(X)$ es continua, entonces $\tau_{ca} \subseteq \tau_G$, en donde τ_{ca} denota a la topología cerrado-abierta de G.*

(2) *Si $\tau_{ca} \subseteq \tau_G$ y X es un espacio normal, entonces $\mathrm{CL}_{V^+}(X)$ es un G-espacio. En consecuencia, $\mathrm{CL}_V(X)$ también es un G-espacio.*

Demostración. (1) Sea $[C, U]$ un abierto básico de la topología cerrado-abierta en G, y sea $g \in [C, U]$, esto es, $g(C) \in U^+$. Como la acción inducida de G en $\mathrm{CL}_{V^+}(X)$ es continua, existen abiertos $W \in \tau_G$ y $V \subseteq X$ tales que $g \in W$, $C \in V^+$ y $WV^+ \subseteq U^+$. Luego, para cada $h \in W$ y $x \in C \subseteq V$ se tiene que $hx \in U$, es decir $W \subseteq [C, U]$. Esto prueba que $[C, U] \in \tau_{ca}$.

(2) Consideremos un abierto $W \subseteq X$ y sea $(g, A) \in G \times \mathrm{CL}(X)$ tal que $gA \in W^+$. Esto último equivale a que

$$g^{-1}(X \setminus W) \subseteq X \setminus A.$$

Como g^{-1} es un homeomorfismo, el conjunto $g^{-1}(X \setminus W)$ es cerrado en X, y como X es un espacio normal existe $U \subseteq X$ abierto tal que

$$g^{-1}(X \setminus W) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus A.$$

Como por hipótesis tenemos que $\tau_{ca} \subseteq \tau_G$, el conjunto $O := [X \setminus U, W]$ es una vecindad abierta de g en τ_G. Por otro lado, el conjunto $(X \setminus \overline{U})^+$ es una vecindad abierta de A en $\mathrm{CL}_{V^+}(X)$. Finalmente, observemos que $hB \in W^+$

para cada $h \in O$ y $B \in (X \setminus \overline{U})^+$. Esto prueba la continuidad de la acción inducida. $\square$

Como la distancia de Hausdorff no se comporta bien en $\mathrm{CL}(X)$ (especialmente cuando X no es acotado), no es de extrañar que la acción inducida de G no sea continua (considérese, por ejemplo, la acción inducida del grupo ortogonal $O(n)$ en $\mathrm{CL}_H(\mathbb{R}^n)$), salvo, quizá, si cada $g \in G$ es uniformemente continua (como en el caso de la función inducida en la Proposición 3.3.8). Una condición más débil puede ser dada en el subespacio $\mathrm{BC}_H(X)$, por lo que en este caso también pediremos que cada $g \in G$, como función $g : X \to X$, sea acotada y así la acción inducida esté bien definida.

Sin embargo, en general la acción inducida en $\mathrm{BC}_H(X)$ puede no resultar continua incluso cuando el grupo G es compacto y X es un G-espacio de Banach ([28, Ejemplo 3.1]).

En la siguiente proposición mostraremos que existen condiciones suficientes para que la acción inducida sea continua en $\mathrm{BC}_H(X)$, donde X es un G-espacio métrico. Una de estas condiciones es que τ_G contenga a la topología de la convergencia uniforme en acotados (ver Definición 1.2.8).

Proposición 3.4.7. *Sea G un grupo topológico y X un G-espacio métrico. Supongamos que los homeomorfismos de X inducidos por cada $g \in G$ son acotados y uniformemente continuos en acotados. Si τ_G contiene a la topología de la convergencia uniforme en acotados, entonces las acciones inducidas de G en los hiperespacios $\mathrm{BC}_{H^-}(X), \mathrm{BC}_{H^+}(X)$ y $\mathrm{BC}_H(X)$ son continuas.*

Demostración. Demostraremos que la acción inducida de G en $\mathrm{BC}_{H^-}(X)$ es continua. Sean $(g, A) \in G \times \mathrm{BC}(X)$ y $\epsilon > 0$. Como g es uniformemente continua en el conjunto acotado $N_{\epsilon/2}(A)$, existe $\delta > 0$ tal que si $a, a' \in N_{\epsilon/2}(A)$ y $d(a, a') < \delta$ entonces $d(ga, ga') < \epsilon/2$. Sea $\epsilon' := \min\{\epsilon/2, \delta\}$ y sea

$$W := (N_{\epsilon/2}(A), g, \epsilon/2) \times B_{H^-}(A, \epsilon').$$

Claramente, W es una vecindad abierta de (g, A) en el espacio producto $G \times \mathrm{BC}_{H^-}(X)$. Sean $(h, B) \in W$ y $a \in A$. Como $d_{H^-}(A, B) < \epsilon'$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon'$, por lo que $b \in N_{\epsilon/2}(A)$ y $d(a, b) < \delta$. Por lo tanto $d(ga, gb) < \epsilon/2$. Más aún, como $b \in N_{\epsilon/2}(A)$, por la definición de W tenemos que $d(gb, hb) < \epsilon/2$. Así,

$$d(ga, hb) \leq d(ga, gb) + d(gb, hb) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Esto prueba que

$$d_{H^-}(gA, hB) = \sup_{a \in A} d(ga, hB) \leq \epsilon,$$

y por lo tanto la acción inducida de G es continua en $\mathrm{BC}_{H^-}(X)$.

De manera similar se prueba que la acción inducida de G en $\mathrm{BC}_{H^+}(X)$ es continua, y por ambos casos se sigue que dicha acción es continua en $\mathrm{BC}_H(X)$. $\square$

Finalmente, en el caso en que cada $g \in G$ es uniformemente continua, eso nos da una condición suficientemente fuerte para garantizar la continuidad de la acción inducida incluso en el hiperespacio de cerrados $\mathrm{CL}_H(X)$, siempre y cuando τ_G contenga a la topología de la convergencia uniforme. La prueba de este resultado la omitimos por ser análoga al caso a la del caso de $\mathrm{BC}_H(X)$.

Proposición 3.4.8. *Sea G un grupo topológico X un G-espacio métrico. Supongamos que los homeomorfismos de X inducidos por cada $g \in G$ son uniformemente continuos. Entonces si τ_G contiene a la topología de la convergencia uniforme, se tiene que las acciones inducidas de G en los hiperespacios* $\mathrm{CL}_{H^-}(X)$, $\mathrm{CL}_{H^+}(X)$ *y* $\mathrm{CL}_H(X)$ *son continuas.*

3.5. Otros resultados y trabajo a futuro

Sea X un espacio normado. Consideremos $Y \subseteq X$ no vacío y definamos

$$\mathrm{CC}(Y) := \mathcal{K}(Y) \cap \mathrm{Conv}(Y).$$

Equiparemos a $\mathrm{CC}(Y)$ con la métrica de Hausdorff y lo denotaremos con $\mathrm{CC}_H(Y)$. También consideraremos al subespacio

$$\mathrm{CB}(Y) := \{A \in \mathrm{CC}(Y) : int(A) \neq \emptyset\},$$

en donde $int(A)$ denota el interior de A. Consideremos también al cubo de Hilbert $Q := [0,1]^{\mathbb{N}}$

No es difícil ver que el hiperespacio $\mathrm{CC}_H(\mathbb{R})$ es homeomorfo a un semiplano cerrado, y el hiperespacio $\mathrm{CB}_H(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, en [33] se demostró que para $n \geq 2$ se tiene que $\mathrm{CC}(K)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert Q, para cada $K \in CC(\mathbb{R}^n)$ de dimensión mayor o igual a 2, y $\mathrm{CC}_H(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a $Q \setminus \{0\}$ (el cubo de Hilbert perforado).

En los artículos [6] y [7], S. Antonyan calculó la estructura del subespacio $\mathcal{B}(n)$ $(n \geq 2)$ de $\mathrm{CB}_H(\mathbb{R}^n)$ cuyos elementos son simétricos respecto al origen. Usando la acción del grupo general lineal $\mathrm{GL}(n)$ en $\mathcal{B}(n)$ probó que este último es homeomorfo a $\mathbb{R}^p \times Q$, donde $p = n(n+1)/2$.

En [5], S. Antonyan y N. Jonard calcularon la estructura del hiperespacio $\mathrm{CB}_H(\mathbb{R}^n)$, demostrando que $\mathrm{CB}_H(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo al producto $Q \times \mathbb{R}^{n(n+3)/2}$.

En [37], K. Sakai y Z. Yang calcularon la estructura de $\mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n)$, demostrando que

$$\mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times [0,1], \quad \text{y} \quad \mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times Q, \text{ para cada } n > 1.$$

En dicho artículo, además, K. Sakai y Z. Yang consideraron la siguiente función: Si $\mathbb{R}^n$ tiene su norma usual, para cada $A \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$ existe un único punto $p(A) \in A$ tal que $p(A)$ es el punto más cercano de A al origen 0. La existencia y unicidad de este punto se debe a que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach reflexivo y estrictamente convexo ([21]). Es decir, $p(A)$ es el punto en donde se alcanza el mínimo de la función norma $\|\cdot\|$ en el conjunto A. En [37, Lema 2], se afirma que la función

$$p : \mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

es continua, sin embargo la prueba de esta afirmación contiene un error, y de hecho sólo se demuestra que la función $\mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ dada por $A \mapsto \|p(A)\|$ es continua.

A continuación daremos una demostración de que la función p definida arriba es continua.

Proposición 3.5.1. *La función* $p : \mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *es continua.*

Demostración. Sean $A \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$ y $\epsilon > 0$. Si $p(A) = 0$, entonces claramente $B(0,\epsilon)^-$ es una vecindad abierta de A en $\mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n)$ tal que si $B \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\|p(A) - p(B)\| = \|p(B)\| < \epsilon.$$

Supongamos que $p(A) \neq 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \|p(A)\|$ y

$$4\,\|p(A)\|\,\delta + \delta^2 < \epsilon^2.$$

Usando la continuidad de la función $A \mapsto \|P(A)\|$, existe un abierto $O \subseteq \mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n)$ que contiene a A tal que para todo $B \in O$ se tiene que

$$\|P(B)\| \in (\|P(A)\| - \delta, \|P(A)\| + \delta).$$

Definamos la funcional lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left\langle x, \frac{P(A)}{\|P(A)\|} \right\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

y consideremos el hiperplano

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \|P(A)\|\}.$$

Es inmediato ver que H es un hiperplano soporte de la bola cerrada $B[0, \|P(A)\|]$ en el punto $P(A)$, es decir

$$B[0, \|P(A)\|] \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \|P(A)\|\}.$$

Por otro lado, como A y la bola abierta $B(0, \|P(A)\|)$ son convexos disjuntos, por el Teorema de Separación de Convexos ([12]), existen una funcional lineal continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$B(0, \|P(A)\|) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \alpha\}, \quad \text{y} \quad A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq \alpha\}.$$

Necesariamente $g(P(A)) = \alpha$. Por lo tanto, el conjunto

$$H' := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \alpha\}$$

es un hiperplano soporte de $B[0, \|P(A)\|]$ en el punto $P(A)$. Por la unicidad del hiperplano soporte en cada punto de la frontera de cada bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ ([12]), concluimos que $H = H'$. En particular

$$A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \|P(A)\|\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle x, \frac{P(A)}{\|P(A)\|} \right\rangle \geq \|P(A)\| \right\}.$$

Sea $W := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle x, \frac{P(A)}{\|P(A)\|} \right\rangle > \|P(A)\| - \delta \right\}$ y consideremos el compacto

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \in [\|P(A)\| - \delta, \|P(A)\| + \delta]\} \cap (\mathbb{R}^n \setminus W).$$

Por lo tanto $A \in O \cap (\mathbb{R}^n \setminus K)^+$, y para todo $B \in O \cap (\mathbb{R}^n \setminus K)^+$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|P(B) - P(A)\|^2 &= \langle P(B) - P(A), P(B) - P(A) \rangle \\ &= \|P(B)\|^2 + \|P(A)\|^2 - 2\langle P(B), P(A) \rangle \\ &< (\|P(A)\| + \delta)^2 + \|P(A)\|^2 - 2(\|P(A)\|^2 - \delta \|P(A)\|) \\ &< 4\delta \|P(A)\| + \delta^2 < \epsilon^2. \end{aligned}$$

Esto demuestra la continuidad de p en A. $\square$

Finalmente, consideremos las siguientes familias.

$$\mathrm{Conv}^0(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n) : 0 \in A\}.$$

$$\mathrm{Conv}^{00}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n) : 0 \in int(A)\}.$$

$$\mathrm{Conv}^{\infty}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathrm{Conv}^0(\mathbb{R}^n) : A \text{ es no-acotado}\}.$$

Por los resultados vistos en espacios seminormados asimétricos, cada elemento $A \in \mathrm{Conv}^{00}(\mathbb{R}^n)$ corresponde a la bola unitaria cerrada de una seminorma asimétrica de $\mathbb{R}^n$ (por ser A convexo y absorbente). A su vez, podemos considerar a la familia $CC^{00}(\mathbb{R}^n)$ formada por todos los elementos compactos de $\mathrm{Conv}^{00}(\mathbb{R}^n)$. Cada elemento de $CC^{00}(\mathbb{R}^n)$ determina una norma asimétrica T_1 de $\mathbb{R}^n$, mientras que la familia $\mathrm{Conv}^{\infty,0}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Conv}^{00}(\mathbb{R}^n) \setminus CC^{00}(\mathbb{R}^n)$ determina todas las seminormas asimétricas de $\mathbb{R}^n$ que no son T_1.

Estamos interesados en saber qué estructura topológica tienen cuando equipamos estas familias con la topología de Fell.

Por un lado, como no es difícil probar que la función $\phi : \mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n) \times [0,1] \to \mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\phi(A,t) = \begin{cases} A + B[0, t/(1-t)] & \text{si } t < 1 \\ \mathbb{R}^n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

es continua, entonces $\mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$ es contraíble.

En [37, Proposition 1], se demostró que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Conv}^*_F(\mathbb{R}^n)$ (i.e., $\mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n) \cup \{\emptyset\}$) es un subespacio cerrado de $\mathrm{CL}^*_F(\mathbb{R}^n)$ el cual es compacto, y por lo tanto $\mathrm{Conv}^*_F(\mathbb{R}^n)$ también es compacto. Más aún, no es difícil ver que si (A_λ) es una red en $\mathrm{Conv}_F^0(\mathbb{R}^n)$ convergente a un $A \in \mathrm{Conv}_F^*(\mathbb{R}^n)$, entonces $0 \in A$. Esto es, $\emptyset$ no es un punto de clausura de $\mathrm{Conv}_F^0(\mathbb{R}^n)$, y por lo tanto $\mathrm{Conv}_F^0(\mathbb{R}^n)$ es compacto también.

De hecho, puede demostrarse que $\mathrm{Conv}_F^0(\mathbb{R}^n)$ es una **Q-variedad**, esto es, un espacio localmente homeomorfo a Q. Consideremos

$$CC^0(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Conv}^0(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{Conv}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

es decir, $CC^0(\mathbb{R}^n)$ consiste de todos los subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al origen.

Notemos primero que por [38, Teorema 3], $CC_F(\mathbb{R}^n) = CC_V(\mathbb{R}^n)$. Además, por la Proposición 3.2.10, se tiene que $CC_V(\mathbb{R}^n) = CC_H(\mathbb{R}^n)$. En lo que sigue, asumiremos que $CC(\mathbb{R}^n)$ y sus subespacios tienen esta hipertopología en común.

Para mostrar que $\mathrm{Conv}_F^0(\mathbb{R}^n)$ es una Q-variedad, consideremos

$$Z = \{A \in CC^0(\mathbb{R}^n) : 0 \in \partial A\}.$$

Notemos que $CC^0(\mathbb{R}^n) \setminus Z = CC^{00}(\mathbb{R}^n)$. De [5, Lema 3.1], se deduce que $CC^{00}(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto abierto de $CC(\mathbb{R}^n)$, por lo que $CC^{00}(\mathbb{R}^n)$ también resulta abierto en $CC^0(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia, Z es un subconjunto cerrado de $CC^0(\mathbb{R}^n)$. Además, por ser $CC(\mathbb{R}^n)$ una Q-variedad, entonces $CC^{00}(\mathbb{R}^n)$ es una Q-variedad también.

Por otro lado, si (X, d) es un espacio métrico, un subconjunto cerrado $A \subseteq X$ es llamado **Z-conjunto** si para cada $\epsilon > 0$ existe una función $f : X \to X \setminus A$ tal que $d(x, f(x)) < \epsilon$ para cada $x \in X$ ([5]).

Para aplicar lo anterior, usaremos el hecho de que $\mathrm{CL}_F(\mathbb{R}^n)$ es metrizable y además la métrica de Attouch-Wets es compatible con la topología de $\mathrm{CL}_F(\mathbb{R}^n)$ ([13]).

Consideremos la función $f_\epsilon : CC^0(\mathbb{R}^n) \to CC^0(\mathbb{R}^n) \setminus Z$ dada por $f_\epsilon(A) = A + B[0, \epsilon/2]$ para cada $\epsilon > 0$. Por la definición de la métrica de Attouch-Wets basada en el punto $0 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $d_{AW}(f_\epsilon(A), A) < \epsilon$. Es decir, Z es un Z-conjunto de $CC^0(\mathbb{R}^n)$.

Como Z es un Z-conjunto y $CC^0(\mathbb{R}^n) \setminus Z = CC^{00}(\mathbb{R}^n)$ es Q-variedad, entonces $CC^0(\mathbb{R}^n)$ es Q-variedad ([40]).

Notemos ahora que $\mathrm{Conv}^{\infty}_F(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto cerrado de $\mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$. Esto se sigue por la demostración de [13, Lema 3.2.2], ya que si (A_n) fuese una sucesión de elementos de $\mathrm{Conv}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ convergente a un elemento de $CC^0(\mathbb{R}^n)$ respecto a la métrica de Attouch-Wets, entonces debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que A_n es acotado para cada $n \geq N$, lo que contradice que $A_n \in \mathrm{Conv}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, observemos que $\mathrm{Conv}^{\infty}_F(\mathbb{R}^n)$ es un Z-conjunto de $\mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$, puesto que $CC^0(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Conv}^0(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{Conv}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, y para cada $\epsilon > 0$ la función $h_\epsilon : \mathrm{Conv}^0(\mathbb{R}^n) \to CC^0(\mathbb{R}^n)$ definida por $h_\epsilon(A) = A \cap B[0, \epsilon/(1-\epsilon)]$ satisface que $d_{AW}(h_\epsilon(A), A) < \epsilon$ para cada $A \in \mathrm{Conv}^0(\mathbb{R}^n)$. Como $CC^0(\mathbb{R}^n)$ es Q-variedad, entonces $\mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$ es Q-variedad.

Como $\mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$ es una Q-variedad, contraíble y compacta entonces es homeomorfo a Q por el resultado [41, Teorema 7.5.8]. Es decir, hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 3.5.2. *El hiperespacio* $\mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$ *es homeomorfo al cubo de Hilbert* Q.

Por otro lado, la restricción de ϕ a $\mathrm{Conv}^{\infty}_F(\mathbb{R}^n)$ demuestra que $\mathrm{Conv}^{\infty}_F(\mathbb{R}^n)$ es contraíble. Como este espacio es cerrado en $\mathrm{Conv}^0_F(\mathbb{R}^n)$, es compacto también, pero no está todavía claro qué estructura topológica tiene. Por otro lado, $\mathrm{Conv}^{00}_F(\mathbb{R}^n)$ es contraíble pero no es compacto.

Sea ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$M(n) = \{A \in CC(\mathbb{B}^n) : A \cap \mathbb{S}^{n-1} \neq \emptyset\}.$$

En [5], fue demostrado que $M(n)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, y el espacio orbital $M(n)/O(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur $BM(n)$, en donde $O(n)$ es el grupo ortogonal.

Después de toda la discusión anterior, cerramos este capítulo con un par de preguntas que nos gustaría responder en un futuro.

Pregunta 3.5.3. *¿Qué estructura topológica tiene* $\mathrm{Conv}^{\infty}_F(\mathbb{R}^n)$*? ¿Es homeomorfo al cubo de Hilbert? Asimismo, ¿qué estructura tienen los espacios* $\mathrm{Conv}^{\infty,0}_F(\mathbb{R}^n)$ *y* $CC^{00}_F(\mathbb{R}^n)$*?*

Sea M cualquiera de los tres espacios mencionados en la pregunta anterior. En virtud del Teorema 3.4.4, tanto el grupo ortogonal $O(n)$ como el grupo general lineal $\mathrm{GL}(n)$ actúan continuamente en M. Luego, tiene sentido realizar la siguiente pregunta.

Pregunta 3.5.4. *¿Qué estructura tienen los espacios orbitales* $M/O(n)$ *y* $M/\operatorname{GL}(n)$*? ¿Es alguno de éstos homeomorfo al compacto de Banach-Mazur* $M(n)$*?*

Bibliografía

[1] C. Alegre, I. Ferrando, L.M. García-Raffi, E.A. Sánchez Pérez, *Compactness in asymmetric normed spaces*, Topology Appl. 155 (2008), 527–539.

[2] C.D. Aliprantis, R. Tourky, *Cones and Duality*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 84, AMS, Providence, 2007.

[3] F.G. Arenas, J. Dontchev, M. Ganster, *On λ-sets and the dual of generalized continuity*, QA in General Topology 15 (1997), 3-13.

[4] R. Arens, *Topologies for homeomorphism groups*, American Journal of Mathematics, Vol. 68, No. 4 (1946), 593-610.

[5] S.A. Antonyan, N. Jonard-Pérez, *Affine group acting on hyperspaces of compact convex subsets of* $\mathbb{R}^n$, Fundamenta Mathematicae 223(2) (2013), 99-136.

[6] S.A. Antonyan, *The topology of the Banach-Mazur compactum*, Fund. Math. 1966, no. 3 (2000), 209-232.

[7] S.A. Antonyan, *West's Problem on equivariant hyperspaces and Banach-Mazur compacta*, Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003), 3379-3404. *Corrigendum to West's Problem on equivariant hyperspaces and Banach-Mazur compacta*, Trans. Amer. Math. Soc., 358, (12) (2006), 5631-5633.

[8] A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press and World Scientific, Paris–Amsterdam 2008.

[9] T. Banakh, M. Kurihara, K. Sakai, *Hyperspaces of normed linear spaces with the Attouch–Wets topology*, Set-Valued Analysis 11 (2003), 21–36.

[10] T. Banakh, A. Ravsky, *Each regular paratopological group is completely regular*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 1373-1382.

[11] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps*, Chaos, Solitons & Fractals, 25 (2005) 681–685.

[12] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1982).

[13] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, MAIA 268, Kluwer Acad. Publ., 1993.

[14] G. Berthiaume, *On quasi-uniformities in hyperspaces*, Proc Am Math Soc, Vol. 66 No. 2 (1977) 335-343.

[15] P.A. Borodin, *The Banach-Mazur theorem for spaces with an asymmetric norm and its applications in convex analysis*, Mat. Zametki 69 (2001), no. 3, 329–337.

[16] S. Cobzas, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Frontiers in Mathematics, 2013.

[17] J. Conradie, *Asymmetric norms, cones and partial orders*, Topology Appl. 193 (2015), 100-115.

[18] A. Di Concilio, *Action on hyperspaces*, Topology Proceedings 41 (2013) 1-14.

[19] V. Donjuán, N. Jonard-Pérez, *Separation axioms and covering dimension of asymmetric normed spaces*, Quaestiones Mathematicae 43(4) (2019), 1-25.

[20] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[21] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2011.

[22] L.M. García Raffi, S. Romaguera, E.A. Sánchez Pérez, *On Hausdorff asymmetric normed linear spaces*, Houston J. Math. 29 (2003), 717-728.

[23] L.M. García Raffi, *Compactness and finite dimension in asymmetric normed linear spaces*, Topology Appl. 153 (2005), 844-853.

[24] K.P. Hart, J. van Mill, P. Simon, *Recent Progress in General Topology III*, Atlantis Press, 2014.

[25] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. 1, Segunda Ed, Springer Verlag, New York, 1979.

[26] G. Hitchcock, *Topologies on uniform hyperspaces*, Quaestiones Mathematicae 29 (2006) 299–311.

[27] N. Jonard-Pérez, E.A. Sánchez-Pérez, *Local compactness in right bounded asymmetric normed spaces*, Quaestiones Mathematicae (2017), 1-15.

[28] N. Jonard-Pérez, *Equivariant absolute extensor property on hyperspaces of convex sets*, Topology and its Applications 177 (2014) 88–96.

[29] H.-P.A. Künzi, *A note on sequentially compact quasi-pseudometric spaces*, Monatsh. Math. 95 (1983), 219–220.

[30] H.-P.A. Künzi, *Complete quasi-pseudo-metric spaces*, Acta Math. Hungar. 59 (1992), 121–146.

[31] P.Th. Lambrinos, *On precompact quasi-uniform structures*, Proc. Amer. Math. Soc. 62 (1977), 365–366.

[32] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) 152-182.

[33] S.B. Nadler, Jr., J.E. Quinn, N.M. Stavrakas, *Hyperspaces of compact convex sets*, Pacific J. Math, 83 (1979), 441-462.

[34] S.B. Nadler, *Hyperspace of Sets: A Text with Research Questions*, Monographsand Textbooks in Pure and Applied Mathematics, M. Dekker, 1978.

[35] A.R. Pears, *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[36] I.L. Reilly, P.V. Subrahmanyam, M.K. Vamanamurthy, *Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces*, Monatsh. Math. 93 (1982), 127–140.

[37] K. Sakai, Z. Yang, *The spaces of closed convex sets in Euclidean spaces with the Fell topology*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics 55(2) (2007), 139-143.

[38] K. Sakai, Z. Yang, *The space of limits of continua in the Fell topology*, Houston Journal of Mathematics. 29 (2003), 327-337.

[39] L.A. Steen and J.A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover, New York, 1995.

[40] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds*, Fundamenta Mathematicae 106 (1980), 31-40.

[41] J. Van Mill, *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction*, North-Holland Math. Library 43, Amsterdam, 1989.

[42] Y. Wang, G. Wei, W. H. Campbell, and S. Bourquin, *A framework of induced hyperspace dynamical systems equipped with the hit-or-miss topology*, Chaos, Solitons and Fractals 41, no. 4 (2009) 1708-1717.

[43] W.A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, Amer. J. Math 53 (1931), 675-684.