



Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Maestría en Ciencias (Física)

Autoorganización dinámica en gases ultrafríos

T E S I S

que para optar por el grado de
Maestro en Ciencias (Física)

PRESENTA:

Brahym Ríos Sánchez

Tutor Principal:

Dr. Santiago Francisco Cabellero Benítez, Instituto de Física

Miembros del comité tutor:

Dr. Daniel Sahagún Sánchez, Instituto de Física

Dr. José Francisco Récamier Angelini, Instituto de Ciencias Físicas

Ciudad Universitaria, CD. MX. Septiembre de 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria.

Este trabajo está dedicado a mi familia, quienes con su esfuerzo y apoyo incondicional me brindaron muchas de las posibilidades que hoy me permiten escribir aquí estas palabras; a mis profesores, quienes con paciencia, pasión y dedicación buscaron la mejor manera de transmitirme sus conocimientos y enseñanzas; y a mis amigos, quienes con su calidez me han mostrado el lado más humano de la academia e hicieron del proceso de aprendizaje algo ameno. A todos ustedes, gracias.

Agradecimientos.

Quiero comenzar agradeciendo al profesor Santiago F. Caballero Benítez por todo el apoyo que me ha brindado a lo largo de estos dos años. Más allá de ayudarme a mejorar mis malos hábitos de distraerme con todo lo que hay por aprender, y por mostrar total disposición para discutir sobre asuntos académicos, su metodología de investigación y su forma de ejercer la física como profesión me quedarán de ejemplo para afrontar las vicisitudes inherentes al ejercicio de la academia. También quiero agradecer a Aldo Cao Narváez, Alejandro Hernández Cáseres, Miguel Torres Acosta y a Juan Carlos Obeso Jureidini, quienes entre café, buena comida y pláticas agradables compartieron conmigo sus pasiones y paradigmas sobre la vida. De manera especial quiero agradecerle a Miriam Sánchez Curiel, quien con cariño no dudó en brindarme todo su apoyo incondicional en los momentos donde sentía que no podía continuar. Asimismo quiero agradecer a la gente linda de México que conocí durante mi estancia, ya que en ningún momento me hicieron sentir como un extraño en estas bellas tierras.

Finalmente agradezco al programa de becas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por el soporte económico brindado en la beca de maestría, en el proyecto A1-S-30934 y en el proyecto DGAPA-PAPIIT: IN109619, los cuales fueron fundamentales en el proceso de formación y elaboración de este trabajo.

Índice

Índice de figuras	6
Resumen	7
Abstract	8
1. Introducción.	9
2. Modelo de Dicke.	11
2.1. Derivación del modelo de Dicke.	12
2.2. Transiciones de fase en el modelo de Dicke.	14
2.2.1. Aproximación de campo medio en el modelo de Dicke.	14
2.2.2. Transformación de Holstein Primakoff.	16
3. Autoorganización de gases ultrafríos.	19
3.1. Autoorganización asistida por una cavidad: experimento de Esslinger.	19
3.2. Formulación teórica de la autoorganización asistida por una cavidad.	22
3.2.1. Derivación del modelo.	23
3.2.2. Aproximación de campo medio.	26
3.2.3. Relación entre autoorganización y superradiancia.	29
3.3. Autoorganización en cavidad: caso unidimensional.	31
4. Autoorganización dinámica.	35
4.1. Modelo de autoorganización dinámica de Ostermann.	36
4.2. Inestabilidad dinámica del estado homogéneo.	39
4.2.1. Sistema de ecuaciones adimensionales.	39
4.2.2. Espectro de excitaciones debajo del umbral de autoorganización.	40
4.3. Resultados numéricos: autoorganización de átomos y radiación.	43
4.4. Adenda: autoorganización dinámica en sistemas de tres niveles.	45
5. Conclusiones.	49
6. Apéndices.	50
6.1. Ecuación de Gross Pitaevskii.	50
6.2. Curva crítica en el modelo de Dicke para $\lambda \sim \lambda_c$	52
6.3. Cálculo del espectro de excitaciones debajo del umbral de autoorganización.	53
6.4. Evolución temporal en tiempo real e imaginario.	55
6.5. Autoorganización en BEC de tres niveles: ecuaciones de campo medio.	56
6.6. Programa en Mathematica: <i>Numerical notes on self-organization of a Bose-Einstein condensate in an optical cavity.</i>	58
Referencias	64

Índice de figuras

1.	Diagrama de fase del modelo de Dicke a $T = 0$. La curva continua representa el diagrama de fase obtenido por la descripción termodinámica dada en la ecuación (14), mientras que las curvas azul y roja describen la ocupación del modo de materia y radiación, dados por las relaciones (24) y (25) respectivamente. En este diagrama $\omega_a = \omega_c = 10$ y $\lambda_c(0) = \sqrt{\omega_a \omega_c}/2 = 5$	18
2.	Esquema del contexto experimental de Esslinger, el cual consiste de un BEC confinado en una cavidad óptica bombeada transversalmente por un modo estacionario de un haz coherente. El condensado se autoorganiza en una estructura periódica que dispersa de manera superradiante fotones hacia el interior de la cavidad dado que la intensidad del haz de bombeo P supere un valor crítico P_c	19
3.	Observación experimental de la transición de fase de autoorganización en donde se reporta: a) Número medio de fotones (línea continua) e intensidad del haz de bombeo (línea punteada) en función del tiempo. b) y c) Distribución de momentos del BEC en el estado normal. d) Emergencia de las componentes de momentum $(p_x, p_z) = (\pm \hbar k_p, \pm \hbar k_p)$ que señalan la transición de fase al estado autoorganizado. Figura tomada de [1].	20
4.	Diagrama de fase del sistema experimental en donde se reporta: a) Número medio de fotones en la cavidad en función de la potencia del haz de bombeo y la desintonía de la cavidad. b) y c) Evolución temporal del número medio de fotones para las dos configuraciones particulares señaladas en la Figura a). La línea punteada corresponde a la curva crítica. Figura tomada de [1].	23
5.	Estructura general del diagrama de fases del modelo de Esslinger. La línea punteada corresponde a la curva crítica definida por la ecuación (48).	29
6.	Diagrama de fases del modelo de autoorganización en una dimensión. Se representa en el código de colores el número medio de fotones en la cavidad por átomo, en función de la energía efectiva del modo de la cavidad y la intensidad del haz de bombeo. La línea punteada roja corresponde a la curva crítica dada en la ecuación (54). Parámetros: $L = 5\lambda_p$, $Ng_c/\lambda_p = 10E_R$, $N\hbar U_0 = -100E_R$, $\hbar\kappa = 200E_R$ y $\hbar\Delta_c = -300E_R$	33
7.	Autoorganización en una dimensión. Las Figuras a) y d) corresponden al potencial óptico y a la densidad del condensado en el estado autoorganizado para $\sqrt{N\hbar\eta} = 150$ (amarillo) y $\sqrt{N\hbar\eta} = 300$ (azul) respectivamente. Las Figuras b) y e) son un acercamiento a la región sombreada en las Figuras a) y d) en donde se observa que el condensado se localiza en la subred impar definida por los mínimos del potencial óptico. La Figura c) muestra el parámetro de orden en donde se evidencia la transición de fase de autoorganización para $\sqrt{N\hbar\eta_c} \approx 31.6E_R$, mientras que la Figura f) muestra el número medio de fotones por átomo en la cavidad. Parámetros: mismos que en la Figura 6.	34
8.	Representación del modelo de autoorganización de Ostermann: condensado 1D bombeado por dos modos contrapropagantes con polarización ortogonal. Para valores de la intensidad mayores al valor crítico emerge de manera dinámica un potencial óptico periódico acompañado de un perfil autoorganizado en la densidad del condensado. Figura tomada de [2].	35

9.	Estado estacionario en el régimen de autoorganización. La figura izquierda muestra la densidad del condensado, mientras que la figura derecha muestra la intensidad del campo que incide desde el lado derecho del condensado (rojo), desde el lado izquierdo (verde) y la intensidad total, correspondiente a su suma (azul). La intensidad de los campos se reporta en unidades de $cE_r/(\lambda_0 A)$. Los parámetros empleados en la simulación son $L = 10\lambda_0$, $I_L = I_R = 50E_r$, $\zeta = 0.2$, $\tilde{g}_c = 1$ y $m\omega_x^2\lambda_0^2 = 0.001E_r$	43
10.	Acercamiento a la zona sombreada en el la gráfica del perfil de intensidad de los campos mostrada en la Figura 9. El valor máximo de la intensidad de los campos incidentes está desplazado en relación a la posición del máximo de densidad. Los parámetros de la simulación son los mismos que los empleados en la Figura 9.	44
11.	Evolución temporal del estado homogéneo en donde se observa la autoorganización dinámica. Los parámetros empleados en la simulación son los mismos que en la Figura 9.	45
12.	Transición de fase superradiante. En la figura se muestran el número de átomos máximamente dispersados $ N_1 $ (azul), $ N_2 $ (naranja) y la amplitud de los modos del campo $ \alpha $ en función de la frecuencia efectiva η_{ef} , en donde se observa un valor crítico $\sqrt{N}\eta_{ef}^c \approx 1.4\omega_r$ a partir del cual hay excitación macroscópica de los modos de la cavidad. Los parámetros empleados en la simulación son $\Delta\phi = 1.71\pi$, $\Phi = 0.09\pi$ y $(\Delta_c, U_{ef}, \kappa) = (-8, -1, 2)\omega_r$	47
13.	Autoorganización espacial. En la figura se muestran el perfil de densidad del condensado y el potencial óptico para $\sqrt{N}\eta_{ef} = 2.5\omega_r$ empleando el mismo conjunto de parámetros que en la Figura 12.	48
14.	Comparación entre el código realizado en Mathematica (rojo) y XMDS2 (azul). Los parámetros de la simulación son $V(x) = 100 \cos^2(x) + 0,5x^2$, $N_x = 4601$, $L = 200\lambda$ y $\tilde{g}_c = 10^3$	51

Resumen.

La autoorganización en sistemas de átomos ultrafríos es un fenómeno colectivo que se caracteriza por la emergencia espontánea de un patrón periódico en el perfil de densidad de un sistema atómico a baja temperatura como consecuencia de su interacción con modos clásicos y cuánticos del campo de radiación. Este comportamiento ha sido observado experimentalmente en la emergencia del estado supersólido en un condensado de Bose Einstein (BEC) confinado en una cavidad óptica. En este trabajo de grado se presenta un desarrollo teórico enfocado en la descripción de los elementos esenciales para caracterizar el proceso de autoorganización de un BEC confinado en una cavidad y en espacio libre. En particular se investigan estos sistemas bajo la aproximación de campo medio con el objetivo de identificar el parámetro de orden que indica la transición al estado autoorganizado, estudiar el régimen de parámetros en donde el estado homogéneo del BEC se hace inestable y caracterizar las condiciones bajo las cuales el proceso de autoorganización se puede generar de manera dinámica y en ausencia de la cavidad óptica. Asimismo se implementa el método numérico de evolución temporal en tiempo real e imaginario para verificar los desarrollos anteriores en el caso en donde el BEC se considera un sistema unidimensional. Dentro de los resultados obtenidos se destacan la identificación de símiles que permiten establecer una relación entre la autoorganización de un BEC confinado en una cavidad y la transición de fase superradiante en el modelo de Dicke; y las expresiones analíticas que caracterizan el umbral de intensidad de los modos del campo bajo el cual se predice la transición al estado autoorganizado.

Abstract

Self-organization in ultracold atom systems is a collective phenomenon characterized by the spontaneous emergence of a periodic pattern in the density profile of an atomic system at low temperature as a consequence of its interaction with classical and quantum modes of the radiation field. This behavior has been observed experimentally in the emergence of the supersolid state in a Bose-Einstein condensate (BEC) confined in a high finesse optical cavity. This thesis presents a theoretical development focused on the description of the essential elements to characterize the self-organization process of a BEC confined in a cavity and in free space. In particular, these systems are investigated under the mean-field approximation for the purpose of identify the order parameter that indicates the transition to the self-organized state, study the regime of parameters where the homogeneous BEC becomes unstable and characterize the conditions under which the self-organization process can be generated dynamically and in the absence of the optical cavity. Likewise, the numerical method of temporal evolution in real and imaginary time is implemented to verify the previous developments in the case where the BEC is considered a one-dimensional system. Among the obtained results, the identification of similes that allow establishing a relationship between the self-organization of a BEC confined in a cavity and the superradiant phase transition in the Dicke model stand out and the analytical expressions that characterize the intensity threshold of the field modes under which the transition to the self-organizing state is predicted.

1. Introducción.

El concepto de autoorganización se ha desarrollado en diversos campos de conocimiento con el objetivo de caracterizar el surgimiento espontáneo de patrones ordenados en el estado de sistemas físicos, biológicos, sociales, entre otros. Ejemplos de esto abarcan temas tan amplios que van desde cuestiones filosóficas que indagan sobre la necesidad de una inteligencia diseñadora para crear orden en la naturaleza, el crecimiento de cristales mesoscópicos generado por procesos de autoensamble de estructuras nanométricas [3], la formación espontánea de análogos a flujo laminar en el tráfico terrestre en función de la densidad de vehículos en las vías [4] y la aparición de patrones ordenados en los diagramas de espaciotiempo de autómatas celulares [5]. Una característica común en estos sistemas es que, pese a ser un fenómeno global que se manifiesta en el comportamiento colectivo, la transición al estado autoorganizado se da principalmente en función de las interacciones locales entre los constituyentes del sistema sin la necesidad de un agente externo que lo regule como un todo. De manera general los mecanismos que dan origen a la autoorganización dependen de procesos de retroalimentación positiva que promuevan cambios en el estado del sistema [6, 7]. Esto permite que la configuración no autoorganizada se haga inestable debido a la amplificación de fluctuaciones aleatorias, lo que bajo condiciones iniciales adecuadas puede conducir al sistema a realizar el estado ordenado que es, por lo general, robusto a fluctuaciones substanciales [8]. Adicional a la emergencia espontánea de ordenamiento espacial o temporal, los sistemas que exhiben autoorganización se pueden identificar por la coexistencia de múltiples estados estables explorables en función de las condiciones iniciales y por la existencia de bifurcaciones bajo la variación de sus parámetros.

En el contexto de los sistemas conformados por ensambles atómicos confinados en cavidades ópticas, se ha demostrado que los efectos mecánicos de la luz sobre el movimiento del centro de masa de los átomos y la subsecuente retroacción del gas sobre la luz por procesos de dispersión pueden dar origen a dinámica no lineal, inestabilidades y transiciones de fase fuera del equilibrio [9, 10, 11]. Estos fenómenos se pueden fundamentar en el hecho de que los campos reflejados dentro del interior de una cavidad de alta reflectancia se propagan a través del ensamble atómico múltiples veces y, como consecuencia, los fotones podrán ser dispersados de manera sucesiva por diferentes átomos, lo que de manera efectiva induce interacciones entre átomos que son de largo alcance y alteran significativamente las propiedades críticas del ensamble atómico en ausencia de los campos [12]. Otra característica importante de estos sistemas es que la dinámica de la materia y la radiación están fuertemente acopladas: por un lado el ensamble de átomos actúa como medio óptico que afecta el estado de los campo en la cavidad, mientras que por otro lado el campo configura un potencial óptico que retroalimenta el estado de los átomos. Las interacciones interatómicas de largo alcance mediadas por el campo pueden generar inestabilidades en la densidad del ensamble atómico que den lugar a la autoorganización espacial. De manera concreta, se ha mostrado que una nube térmica de átomos que interactúan con un modo de una cavidad de alta reflectancia exhibe una transición de fase a partir de un umbral crítico en la intensidad de un haz de bombeo que incide sobre los átomos [13, 14, 15]. Por debajo de dicho umbral las fluctuaciones térmicas actúan como un mecanismo de retroalimentación negativa que estabiliza el estado homogéneo de la nube, mientras que radiación del haz de bombeo dispersada dirigida hacia el interior de la cavidad interfiere destructivamente. En contraste con lo anterior, si la intensidad del haz de bombeo supera el umbral crítico los átomos se autoorganizan formando una estructura de densidad periódica que dispersa de manera eficiente la radiación del haz de bombeo hacia el interior de la cavidad, de donde emerge un potencial óptico adicional que

actúa como mecanismo de retroalimentación positiva al estabilizar el estado autoorganizado, maximizando así la dispersión de fotones hacia el interior de la cavidad. Con base en este esquema teórico se han implementado contextos experimentales que demuestran el fenómeno de autoorganización en vapores atómicos confinados en cavidades ópticas [16, 17]. Esto ha dado lugar a un vasto número de propuestas conceptualmente relacionadas en donde se caracterizan los efectos de las interacciones interatómicas inducidas por los campos sobre la dinámica de condensados de Bose Einstein confinados en cavidades ópticas, dentro de las cuales destacamos el experimento realizado por el equipo de Esslinger [1]. En su trabajo los autores evidencian que la autoorganización de un BEC confinado en una cavidad óptica de alta reflectancia es equivalente a la transición superradiante del modelo de Dicke, lo cual resulta además en la realización pionera de un modelo de Dicke efectivo.

Este trabajo presenta un desarrollo teórico enfocado en la descripción de los elementos esenciales para caracterizar el proceso de autoorganización de un condensado de Bose Einstein confinado en una cavidad y en espacio libre. En el capítulo 2 se desarrolla la derivación del modelo de Dicke y se discute la transición de fase superradiante empleando los formalismos de campo medio y la transformación de Holstein Primakoff. En el capítulo 3 se presenta una discusión sobre el contexto experimental de Esslinger y se desarrolla un modelo teórico que describe la autoorganización y su relación con la transición de fase superradiante del modelo de Dicke. En el capítulo 4 se presenta una breve revisión sobre el modelo de autoorganización en ausencia de cavidad propuesto por el equipo de Ostermann [2] con el objetivo de identificar el mecanismo de retroalimentación positiva que da lugar a la transición al estado organizado. Finalmente, en el capítulo 5 se concluye el desarrollo del trabajo y se mencionan algunas perspectivas para investigaciones posteriores.

2. Modelo de Dicke.

El modelo de Dicke describe la dinámica emergente en la interacción del campo de radiación cuantizado dentro de una cavidad con un ensamble de N sistemas emisores de dos niveles¹ idénticos e independientes. Este modelo se caracteriza por exhibir una transición de fase tipo Hepp Lieb [18] en donde se observa la existencia de un valor crítico del parámetro de acoplamiento radiación materia a partir del cual hay emisión colectiva de radiación, cuya densidad de energía es proporcional al número de emisores, si la longitud de onda asociada al modo del campo es mucho mayor que extensión del sistema atómico. Este fenómeno es denominado superradiancia debido a que la intensidad de la radiación emitida en este proceso es mucho mayor que la intensidad de la emitida por procesos de emisión espontánea bajo las mismas condiciones, siendo en este último caso la densidad de energía emitida proporcional a \sqrt{N} .

En función de la relevancia que ha tenido el modelo de Dicke en el desarrollo de los fundamentos teóricos de la óptica cuántica y la materia condensada [11, 19], su realización experimental continúa siendo un campo activo de investigación. Dentro de las propuestas enfocadas en superar las limitaciones experimentales asociadas a lograr el régimen de acoplamiento fuerte, necesario en la observación de la transición de fase superradiante, se distingue el modelo de Domokos *et. al* [20] en donde la dinámica del centro de masa de los átomos que constituyen un BEC confinado en una cavidad de alta reflectancia, la cual es bombeada por un haz coherente, realiza una transición de fase conocida como autoorganización espacial. En su trabajo los autores muestran que el modelo efectivo que describe la transición de fase de autoorganización puede ser mapeado al modelo de Dicke, en donde la constante de acoplamiento radiación materia está definida en función de la intensidad del haz de bombeo, condición que permite un control experimental versátil del régimen de acoplamiento fuerte. Estas predicciones fueron posteriormente verificadas por el equipo de Esslinger *et al.* [1] dando origen a una realización experimental del modelo de Dicke en sistemas de gases ultrafríos confinados en cavidades ópticas, siendo la descripción de este contexto experimental y su relación con el modelo de Dicke desarrolladas en el siguiente capítulo de esta tesis. Otras realizaciones efectivas de modelos tipo Dicke están basadas en sistemas disipativos conformados por ensambles atómicos de cuatro niveles acoplados con el campo de radiación vía emisión Raman estimulada [21], en sistemas de arreglos de uniones superconductoras acopladas a modos bosónicos realizados por resonadores de microondas [22] así como en condensados de Bose Einstein espinoiales acoplados con el modo de una cavidad [23].

En este capítulo se presenta una breve descripción del modelo de Dicke mencionando las aproximaciones bajo las cuales subyace su construcción y las características que sugieren la existencia de la transición de fase superradiante. Posteriormente se formaliza la descripción de la transición de fase superradiante en el contexto de la aproximación de campo medio y la transformación de Holstein Primakoff para terminar con la discusión del diagrama de fase obtenido por dichos métodos.

¹Ejemplos de estos sistemas pueden ser átomos de dos niveles efectivos, puntos cuánticos, pares de nitrógeno-vacante en defectos cristalinos y uniones superconductoras.

2.1. Derivación del modelo de Dicke.

El modelo de Dicke consiste de un ensamble de N átomos idénticos de dos niveles acoplados en interacción dipolar a un modo cuantizado del campo de radiación en una cavidad de alta reflectancia. Los átomos se consideran en posiciones fijas ocupando un volumen V cuyas dimensiones son mucho menores que la longitud de onda del modo de la cavidad, de tal manera que el campo se puede considerar constante a lo largo de la extensión del ensamble de átomos. Los aspectos relevantes en la formulación del modelo de Dicke se pueden identificar al describir la interacción de los electrones en un átomo con el modo cuantizado del campo de radiación, siendo directa la extensión al caso de N átomos debido a que éstos se consideran idénticos, independientes entre sí e interactúan de la misma manera con el modo del campo. El hamiltoniano que describe un sistema de N_e electrones ligados a un núcleo con posición de equilibrio fija, acoplados al campo de radiación cuantizado en una cavidad óptica de alta reflectancia, viene dado por el acoplamiento mínimo:

$$H^{(1)} = \left[\frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^{N_e} (\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i))^2 + V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_e}) \right] + \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_k a_{k,\lambda}^\dagger a_{k,\lambda} \quad (1)$$

en donde \mathbf{p}_i , \mathbf{r}_i son el momentum y la posición del i -ésimo electrón respecto a la posición del núcleo del átomo, e es la magnitud de la carga del electrón, m_e es la masa del electrón y V_c denota al potencial que describe las interacciones electrostáticas electrón-electrón y electrón-núcleo que definen la estructura de niveles del átomo. Adicionalmente $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{k,\lambda} A_{k,\lambda} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{k,\lambda} + \text{h.c.}) \epsilon_{k,\lambda}$ es el potencial vectorial cuantizado, en donde $a_{k,\lambda}$ es el operador de aniquilación de un fotón del campo con momentum \mathbf{k} y estado de polarización λ , $\epsilon_{k,\lambda}$ y $A_{k,\lambda}$ corresponden al vector de polarización y a la amplitud del potencial, respectivamente. En el *gauge* de Coulomb se establece la condición de transversalidad $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$, de la cual se puede demostrar que $[\mathbf{p}, \mathbf{A}(\mathbf{r})] = 0$. Teniendo en cuenta esto el hamiltoniano anterior puede escribirse como:

$$H^{(1)} = \left[\frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^{N_e} p_i^2 + V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_e}) \right] + \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_k a_{k,\lambda}^\dagger a_{k,\lambda} + \frac{e}{m_e} \sum_{i=1}^{N_e} \left(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + \frac{e}{2} A^2(\mathbf{r}_i) \right) \quad (2)$$

En la expresión anterior el primer término define la estructura de niveles del átomo y el segundo corresponde la energía del campo de radiación en la cavidad, mientras que el acoplamiento entre el átomo y el campo tiene como contribuciones a la interacción dipolar, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$, y al término diamagnético $A^2(\mathbf{r})$, las cuales involucran procesos de uno y dos fotones respectivamente. Asumiendo como predeterminada la estructura de niveles E_n del átomo definida mediante la relación:

$$H_A = \frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{p}_i^2 + V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_e}) = \sum_n E_n |n\rangle \langle n| \quad (3)$$

siendo n una etiqueta que denota un conjunto de números cuánticos que describe los estados $|n\rangle$ del átomo, se puede hacer uso de completez de esta base de estados atómicos para expresar la interacción dipolar como:

$$\begin{aligned} \frac{e}{m_e} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) &= \frac{\hbar}{\sqrt{N}} \sum_{k,\lambda} \sum_{m,n} \left[\left(\frac{e\sqrt{N}}{\hbar m_e} A_{k,\lambda} \sum_{i=1}^{N_e} \langle n | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i \cdot \epsilon_{k,\lambda} | m \rangle \right) |n\rangle \langle m| a_{k,\lambda} + \text{h.c.} \right] \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{N}} \sum_{k,\lambda} \sum_{m,n} [g_{n,m}^{k,\lambda} |n\rangle \langle m| a_{k,\lambda} + \text{h.c.}] \end{aligned} \quad (4)$$

Reemplazando las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación (2) se obtiene:

$$H^{(1)} = \sum_n E_n |n\rangle\langle n| + \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_k a_{k,\lambda}^\dagger a_{k,\lambda} + \frac{\hbar}{\sqrt{N}} \sum_{k,\lambda} \sum_{m,n} \left(g_{n,m}^{k,\lambda} |n\rangle\langle m| a_{k,\lambda} + \text{h.c.} \right) + \frac{e^2}{2m_e} \sum_{i=1}^{N_e} A^2(\mathbf{r}_i) \quad (5)$$

Para el caso en donde la longitud de onda de todos los modos de la cavidad sea mucho mayor que la longitud de localización de los estados del ensamble atómico, la cual está caracterizada por el radio de Bohr a_B en el caso de sistemas hidrogenoides, se puede despreciar la variación del perfil espacial de dichos modos en la extensión del ensamble. Esta consideración permite hacer la aproximación $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \approx 1$ dado que $a_B/\lambda_k \ll 1$, razón por la cual es conocida como aproximación de onda larga. De lo anterior se pueden determinar las reglas de selección de las transiciones atómicas dipolares al tener en cuenta que los elementos de matriz del operador de momentum satisfacen $\langle n|\mathbf{p}_i|m\rangle = \frac{im}{\hbar} \langle n|[H_A, \mathbf{r}_i]|m\rangle = \frac{im}{\hbar} (E_n - E_m) \langle n|\mathbf{r}_i|m\rangle$, de donde se observa que la interacción dipolar sólo acopla estados de paridad opuesta. Despreciar la variación del perfil espacial del campo en la cavidad resulta en que el acoplamiento radiación materia $g_{n,m}^{k,\lambda}$ adquiere el mismo valor para todos los átomos del ensamble debido a que son idénticos. El hamiltoniano de Dicke se obtiene al incorporar la energía de todos los átomos y su interacción con el modo del campo en la ecuación (5) teniendo en cuenta que todos tienen el mismo conjunto de estados accesibles y el mismo espectro de energía, lo que resulta en este caso:

$$H = \sum_{i=1}^N \sum_n E_n |n\rangle_i \langle n| + \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_k a_{k,\lambda}^\dagger a_{k,\lambda} + \frac{\hbar}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \sum_{k,\lambda} \sum_{m,n} \left[g_{n,m}^{k,\lambda} |n\rangle_i \langle m| a_{k,\lambda} + \text{h.c.} \right] + \frac{e^2}{2m_e} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}_{i,j}) \quad (6)$$

en donde $|n\rangle_i \langle m|$ es el operador de proyección que corresponde a la transición electrónica $|m\rangle \rightarrow |n\rangle$ del átomo número i y $\mathbf{r}_{i,j}$ es el operador de posición del j -ésimo electrón ligado al i -ésimo núcleo. Este hamiltoniano es general y permite el estudio de las propiedades de un ensamble de emisores de múltiples niveles de energía acoplados a una cavidad multimodal en aproximación de onda larga, siendo en particular las propiedades superradiantes de un ensamble de sistemas emisores de tres niveles acoplado a dos modos del campo exploradas en las referencias [24, 25]. El sistema de estudio más sencillo al que se puede reducir el hamiltoniano en la ecuación (6) sin perder las nociones de la fenomenología de la superradiancia, consiste en el caso en donde la frecuencia de un modo del campo es cuasiresonante con una transición dipolar particular del átomo. Como consecuencia, las propiedades de emisión del ensamble se pueden describir de manera efectiva considerando solamente los estados de paridad opuesta $|n\rangle \in \{|g\rangle, |e\rangle\}$ del átomo que participan en la transición, acoplados a un modo cuasiresonante de la cavidad con momentum k y polarización λ determinados. Si adicionalmente se asume que la intensidad del campo en la cavidad es débil, la contribución diamagnética $A^2(\mathbf{r})$ a la energía del sistema es despreciable en relación la contribución de la interacción dipolar. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores el hamiltoniano expresado en la ecuación (6) se reduce a:

$$H = \hbar\omega_a \sum_{i=1}^N \sigma_{z,i} + \hbar\omega_c a^\dagger a + \frac{\hbar\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (\sigma_{+,i} + \sigma_{-,i})(a + a^\dagger) \quad (7)$$

en donde se introduce la energía de transición atómica $\hbar\omega_a = E_e - E_g$ y $\lambda = g_{e,g} = g_{g,e}^*$, el cual se puede definir como un parámetro real bajo una elección adecuada de las fases

globales de los estados atómicos. Asimismo se definen los operadores $\sigma_{z,i} = (|e\rangle_i\langle g| - |g\rangle_i\langle e|)/2$, $\sigma_{i,+} = |e\rangle_i\langle g| = \sigma_{-,i}^\dagger$ y se omiten la etiquetas de polarización y momentum en la escritura de los operadores del campo. Definiendo los operadores colectivos $J_z = \sum_{i=1}^N \sigma_{z,i}$, $J_\pm = \sum_{i=1}^N \sigma_{\pm,i}$ y el operador $2J_x = J_+ + J_-$, el hamiltoniano que describe el modelo de Dicke viene dado por [26, 27]:

$$\boxed{\frac{H}{\hbar} = \omega_a J_z + \omega_c a^\dagger a + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}(a + a^\dagger) J_x} \quad (8)$$

La existencia de una posible transición de fase en el modelo de Dicke se hace manifiesta al comparar el estado base del sistema en dos límites analíticos: en el caso $\lambda = 0$ el estado base corresponde a la configuración en donde todos los átomos se encuentran en el estado base, que corresponde al autoestado de menor energía del operador J_z , y el campo de radiación se encuentra en el estado de vacío. En contraste a lo anterior, en el límite de acople fuerte $\lambda \rightarrow \infty$ la interacción entre la radiación y el ensamble atómico gobierna la dinámica del sistema, siendo en este caso el estado base dado por la configuración donde todos los átomos están polarizados en el estado $|-\rangle_j = (|e\rangle_j - |g\rangle_j)/\sqrt{2}$ y el campo de radiación está en el estado coherente. Esta diferencia significativa en la estructura y fenomenología del estado base en función de la variación del parámetro de acoplamiento, en donde en el primer límite el estado base se caracteriza por no tener excitaciones de los estados de la radiación y la materia (estado normal), mientras que en el segundo hay excitaciones macroscópicas en el espectro de ambos subsistemas (estado superradiante) es un posible precursor de una transición de fase en el límite termodinámico [28]. Esta transición entre el estado normal y el estado superradiante puede describirse en la aproximación de campo medio, en donde se identifica un parámetro de orden y se minimiza el funcional de energía libre respecto a dicho parámetro para determinar el comportamiento crítico del sistema, o bien mediante la transformación de Holstein Primakoff, en donde el hamiltoniano de Dicke se mapea a un sistema de osciladores acoplados a temperatura cero en el límite termodinámico. Ambos acercamientos se discuten a continuación.

2.2. Transiciones de fase en el modelo de Dicke.

2.2.1. Aproximación de campo medio en el modelo de Dicke.

El estado normal y el estado superradiante se distinguen por la ocupación macroscópica del modo del campo de radiación en la cavidad. Esto sugiere que el parámetro de orden asociado a la transición de fase está vinculado a la intensidad del campo en la cavidad, la cual es cero en la fase normal y no nula en la fase superradiante. La idea anterior se puede formalizar en el contexto de la aproximación de campo medio al linealizar el hamiltoniano de Dicke dado en la ecuación (8) por medio de la aproximación $a \approx \alpha + \delta a$, en donde $\alpha = \langle a \rangle$ es el parámetro de orden y δa describe las fluctuaciones de a respecto al estado de equilibrio termodinámico. Considerando lo anterior, el hamiltoniano de Dicke a orden $\mathcal{O}(\delta a^0)$ se puede escribir como:

$$H_{\text{MF}} = \hbar\omega_c\alpha^2 + \sum_{j=1}^N h_j, \quad h_j = \hbar\omega_a\sigma_{z,j} + \frac{4\hbar\lambda\alpha}{\sqrt{N}}\sigma_{x,j} \quad (9)$$

siendo h_j el hamiltoniano que describe el estado de uno de los átomos cuyo espectro de energía está dado por la expresión $E_\pm = \pm\hbar\sqrt{\frac{\omega_a^2}{4} + \frac{4\lambda^2}{N}\alpha^2}$. Teniendo en cuenta que los átomos son idénticos y no interactúan entre si se puede determinar de manera directa la función de partición

del sistema, el cual se reduce el cálculo de $\text{Tre}^{-\beta H_{\text{MF}}} = e^{-\beta\omega_c\alpha^2}[\text{Tre}^{-\beta h_j}]^N$ bajo estas condiciones, siendo entonces:

$$Z(\alpha) = \text{Tre}^{-\beta H_{\text{MF}}} = e^{-\beta\hbar\omega_c\alpha^2}[2 \cosh(\beta E(\alpha))]^N \quad (10)$$

en donde $E(\alpha) = |E_{\pm}|$, $\beta = 1/k_B T$ y k_B es la constante de Boltzmann. De este resultado se obtiene el funcional de energía libre del sistema definida en relación a la función de partición mediante la expresión:

$$F(\alpha) = -\frac{1}{\beta} \ln(Z(\alpha)) = \hbar\omega_c\alpha^2 - \frac{N}{\beta} \ln[2 \cosh(\beta E(\alpha))] \quad (11)$$

De acuerdo a la teoría de transiciones de fase de Ginzburg Landau, el valor del parámetro de acoplamiento críticos y el diagrama de fase que describen la transición de fase superradiante se pueden determinar minimizando el funcional (11) respecto al parámetro de orden α [29]. En particular la exploración de los extremos del funcional de energía libre permite definir el comportamiento crítico del sistema cerca a la transición de fase, de donde se puede establecer el valor de los exponentes críticos del sistema evaluando la ley de potencias que define al parámetro de orden cerca a la región crítica para caracterizar la clase de universalidad y su concordancia con las leyes de escalamiento. Los extremos del funcional de energía libre dado en la ecuación (11) vienen dados por la condición:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha \left(\frac{\omega_c}{2\hbar\lambda^2} - \frac{\tanh(\beta E(\alpha))}{E(\alpha)} \right) = 0 \quad (12)$$

en donde $\alpha = 0$ describe la fase normal, mientras que la solución a la ecuación trascendental:

$$E(\alpha) = \frac{2\hbar\lambda^2}{\omega_c} \tanh(\beta E(\alpha)) \quad (13)$$

definida en el caso $\alpha \neq 0$, describe la fase superradiante. En el límite de baja temperatura $\beta \rightarrow \infty$ la solución a la ecuación trascendental mencionada viene dada por:

$$\alpha^2 = \frac{N}{\lambda^2} \left(\lambda^2 + \frac{\omega_c\omega_a}{4} \right) \left(\lambda^2 - \frac{\omega_c\omega_a}{4} \right) \quad (14)$$

Al ser $\alpha^2 > 0$ se determina que la fase superradiante se realiza en el sistema a $T = 0$ si $\lambda > \sqrt{\omega_c\omega_a}/2 \equiv \lambda_c(0)$, siendo en otro caso $\alpha = 0$. De acuerdo a esta solución la intensidad de la radiación emitida por el ensamble atómico en la fase superradiante es proporcional al número de emisores, siendo esta característica la razón por la cual a este fenómeno de emisión se le denomina superradiancia. Los resultados anteriores sugieren que en la fase superradiante la interacción radiación materia induce la emisión colectiva y coherente de radiación de todos los átomos, lo cual contrasta significativamente con el carácter aleatorio y no correlacionado de la emisión espontánea del mismo ensamble si se considera que todos los emisores son independientes entre si. Adicionalmente el resultado obtenido en la ecuación (14) indica que para valores cercanos del acoplamiento crítico el parámetro de orden escala como $\alpha \sim \sqrt{\lambda - \lambda_c(0)}$, por lo que el exponente crítico asociado al parámetro de orden es $\beta = 1/2$, lo cual es un indicio de que la clase de universalidad de los fenómenos críticos en el modelo de Dicke corresponde a la de campo medio. La dependencia en la temperatura del valor del acoplamiento crítico $\lambda_c(T)$ se puede determinar bajo la condición $F''(\alpha = 0) = 0$, siendo en este caso:

$$\left. \frac{d^2 F}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \lambda_c(T) = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c\omega_a \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_a}{2}\right)} \quad (15)$$

donde se tiene que en el límite $\beta \rightarrow \infty$ el resultado anterior se reduce al valor crítico de λ previamente obtenido. Si bien el diagrama de fase y el exponente crítico asociado al parámetro de orden se obtuvieron para el límite $T = 0$, estos son resultados generales que se mantienen para $T \neq 0$. Esta afirmación se puede verificar al expandir los términos de la ecuación (12) a segundo orden en α para considerar la dependencia del parámetro de orden y el acoplamiento crítico en la temperatura. Posterior a un cálculo directo que se detalla en el complemento 6.2, se obtiene que el parámetro de orden cerca a la región crítica satisface:

$$\alpha = \sqrt{Nf(\lambda)(\lambda - \lambda_c(T))} \quad (16)$$

siendo $f(\lambda)$ una función bien definida en $\lambda = \lambda_c$. Este resultado comprueba nuevamente lo previamente establecido sobre la emisión superradiante y sobre el parámetro de orden en el caso $T = 0$.

2.2.2. Transformación de Holstein Primakoff.

La aproximación de campo medio es equivalente a considerar una descripción semiclásica del campo electromagnético, razón por la cual este enfoque no permite explorar directamente la transición de fase cuántica ya que desconoce este aspecto de los estados del campo de radiación. En particular los aspectos cuánticos de la transición de fase están codificados en las fluctuaciones δa del operador de campo, pero estas fueron despreciadas al considerar la aproximación de campo a orden cero en los desarrollos de la sección anterior. Una manera de extender el estudio de la transición de fase superradiante desarrollado en la sección anterior teniendo en cuenta el carácter cuántico de ambos subsistemas consiste en emplear la transformación de Holstein Primakoff dada por [30]:

$$\sum_{j=1}^N J_z = \sigma_{z,j} = b^\dagger b - \frac{N}{2}, \quad J_+ = \sum_{j=1}^N \sigma_{j,+} = \frac{\sqrt{N}b^\dagger}{2} \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b}{N}} + \text{h.c} \quad (17)$$

Estas transformaciones mapean los operadores de espín colectivos a los operadores de un oscilador armónico bosónico al truncar el espacio de Hilbert, de tal manera que en el límite termodinámico las excitaciones colectivas y las fluctuaciones en el estado base del modelo de Dicke se pueden identificar con las del sistema bosónico, siendo en este caso $J_x \rightarrow \frac{\sqrt{N}}{2}(b + b^\dagger)$. Reemplazando estas transformaciones en el hamiltoniano dado en la ecuación (8) se obtiene que en el límite termodinámico el hamiltoniano de Dicke se puede expresar como:

$$H_{\text{HP}} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_z b^\dagger b + \hbar\lambda(a + a^\dagger)(b + b^\dagger) \quad (18)$$

el cual es formalmente equivalente al hamiltoniano que describe la dinámica de dos osciladores cuánticos unidimensionales acoplados. El estado base de este sistema se puede determinar empleando la representación de posición y momentum generalizados, definidos mediante las expresiones $a = \sqrt{\omega_c/2\hbar}(x_a + ip_a/\omega_c)$ y $b = \sqrt{\omega_a/2\hbar}(x_b + ip_b/\omega_a)$, con la finalidad de desacoplar los osciladores empleando la representación de modos normales:

$$H_{\text{HP}} = \frac{1}{2}P^T \sigma_0 P + \frac{1}{2}X^T M X \quad (19)$$

siendo $X = (x_a, x_b)^T$, $P = (p_a, p_b)^T$ y $M = \frac{1}{2}(\omega_c^2 + \omega_a^2)\sigma_0 + 2\lambda\sqrt{\omega_c\omega_a}\sigma_x + \frac{1}{2}(\omega_c^2 - \omega_z^2)\sigma_z$, donde σ_j son las matrices de Pauli. La matriz M se puede diagonalizar por medio de una rotación

respecto al eje y en ángulo $\theta/2$ al considerar que su estructura es equivalente a la representación matricial de un sistema de espín $1/2$ interactuando con un campo magnético homogéneo $B = (2\lambda\sqrt{\omega_c\omega_a}, 0, \frac{1}{2}(\omega_c^2 - \omega_a^2))$, es decir:

$$M = R(y; \theta/2) \text{Diag}(\omega_+^2, \omega_-^2) R(y; -\theta/2) \quad (20)$$

en donde:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(\omega_c^2 + \omega_a^2) \pm \sqrt{4\lambda^2\omega_c\omega_a + \frac{1}{4}(\omega_c^2 - \omega_a^2)^2} \quad (21)$$

y:

$$\cos(\theta) = \frac{\omega_c^2 - \omega_a^2}{\sqrt{16\lambda^2\omega_c\omega_a + (\omega_c^2 - \omega_a^2)^2}} \quad (22)$$

De acuerdo a lo anterior el hamiltoniano de Dicke bajo la transformación de Holstein Primakoff se diagonaliza en los modos normales definidos mediante $X_{\pm} = R(y, \theta/2)X$ y $P_{\pm} = R(y, \theta/2)P$, los cuales conservan el álgebra canónica de los operadores de posición y momentum debido a que la transformación $R(y, \theta/2)$ es unitaria. De estas consideraciones se sigue que el hamiltoniano del sistema desacoplado en sus modos normales está dado por:

$$H_{\text{HP}} = \left(\frac{1}{2}p_+^2 + \frac{1}{2}\omega_+^2 x_+^2\right) + \left(\frac{1}{2}p_-^2 + \frac{1}{2}\omega_-^2 x_-^2\right) \quad (23)$$

Del resultado anterior se puede determinar de manera inmediata el estado base, el cual corresponde al producto tensorial de los estados base de cada modo normal, siendo en particular los valores esperados de los operadores de los modos normales en el estado base $\langle x_a^2 \rangle = \hbar/2\omega_c$, $\langle x_b^2 \rangle = \hbar/2\omega_a$, $\langle p_a^2 \rangle = \hbar\omega_c/2$ y $\langle p_b^2 \rangle = \hbar\omega_a/2$. La relaciones $X_{\pm} = R(y, \theta/2)X$ y $P_{\pm} = R(y, \theta/2)P$ se puede invertir para determinar la ocupación del modo del campo de radiación $\langle a^\dagger a \rangle$ y la excitación colectiva del ensamble atómico $\langle b^\dagger b \rangle$ en función de los valores esperados de los operadores de modos normales. El desarrollo de esta línea de ideas conlleva a la obtención de los dos resultados importantes:

$$\langle a^\dagger a \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{\omega_c}{\omega_+} + \frac{\omega_+}{\omega_c} \right] \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{4} \left[\frac{\omega_c}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_c} \right] \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \quad (24)$$

y:

$$\langle b^\dagger b \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{\omega_a}{\omega_+} + \frac{\omega_+}{\omega_a} \right] \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{4} \left[\frac{\omega_a}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_a} \right] \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \quad (25)$$

de donde se observa que las ocupaciones de ambos modos divergen para $\omega_- = 0$. Imponiendo esta condición en (21) se establece que el valor crítico del acoplamiento a partir del cual se realiza la transición de fase superradiante es $\lambda_c(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_a\omega_c}$. Los resultados obtenidos se resumen en la Figura 1, en donde se exhibe el diagrama de fase termodinámico de la transición de fase superradiante descrito en la ecuación (14), la ocupación del modo del campo de radiación cuantizado dada en (24) y la ocupación del modo colectivo del sistema atómico dado en (25). De este diagrama de fase se puede observar que ambos métodos propuestos para caracterizar la transición de fase predicen el mismo valor crítico del parámetro de acoplamiento a $T = 0$, sin embargo la fenomenología y el mecanismo subyacente a la transición son completamente distintos: por un lado en la descripción termodinámica presentada bajo la aproximación de campo medio, la transición de fase es conducida por fluctuaciones térmicas del sistema que favorecen la minimización de la energía libre del ensamble atómico a baja temperatura. Por otro lado en caso

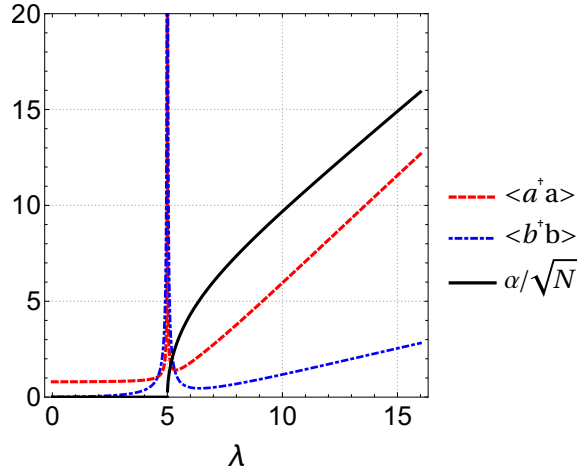


Figura 1: Diagrama de fase del modelo de Dicke a $T = 0$. La curva continua representa el diagrama de fase obtenido por la descripción termodinámica dada en la ecuación (14), mientras que las curvas azul y roja describen la ocupación del modo de materia y radiación, dados por las relaciones (24) y (25) respectivamente. En este diagrama $\omega_a = \omega_c = 10$ y $\lambda_c(0) = \sqrt{\omega_a \omega_c}/2 = 5$.

de estudio donde ambos subsistemas están cuantizados la transición de fase superradiante está conducida por la divergencia del número de ocupación del modo colectivo del ensamble atómico y del modo de la cavidad, siendo esto evidenciado en las curvas punteadas para $\lambda = \lambda_c = 5$. Otro aspecto observado en la figura que marca una diferencia entre transición de fase superradiante cuántica de la termodinámica corresponde a la ley de potencias que sigue el parámetro de orden en la región crítica, en donde en el caso termodinámico éste escala como $\alpha \sim \sqrt{\lambda - \lambda_c}$ mientras que en la descripción cuántica la ocupación del modo es una función lineal en el parámetro de acoplamiento, lo que sugiere que la transición de fase cuántica del modelo de Dicke podría no pertenecer a la clase de universalidad de campo medio, siendo necesaria la caracterización de otros exponentes críticos para formalizar esta proposición. Un aspecto interesante que sugiere la transición de fase superradiante es la emergencia de correlaciones en los estados del ensamble atómico aún cuando todos los emisores son independientes entre sí. Una posible explicación a esta fenomenología se puede esbozar en el contexto de la aproximación de onda larga considerada en la construcción del modelo de Dicke, en donde los emisores son indistinguibles en la escala de la longitud de onda del modo, por lo que no hay un acoplamiento preferencial de la radiación con la materia. En este caso la emisión o absorción de un fotón ocasionada por un átomo particular del ensamble va a ser sentida por los demás átomos debido a que todos están acoplados al mismo campo. Por lo tanto, se propone que las correlaciones emergentes entre los emisores corresponden a un acoplamiento no local mediado por la interacción indistinguible de cada emisor con el modo del campo.

3. Autoorganización de gases ultrafríos.

La autoorganización en sistemas de átomos ultrafríos es un fenómeno colectivo que se caracteriza por la emergencia espontánea de un patrón periódico en el perfil de densidad de un sistema atómico a baja temperatura como consecuencia de su interacción con modos clásicos y cuánticos del campo de radiación. Para establecer los elementos importantes en la descripción y caracterización de la autoorganización en gases ultrafríos resulta conveniente comenzar con la revisión de la fenomenología de la autoorganización basada en un contexto experimental concreto. En este capítulo se presenta un breve resumen de algunos resultados relacionados a la observación experimental de la autoorganización de un gas superfluido confinado en una cavidad óptica realizada por el equipo de trabajo de Esslinger [1], resaltando los elementos característicos del sistema que permiten definir un modelo formal que describa la autoorganización y su relación con la transición de fase superradiante del modelo de Dicke. Posteriormente se explora la transición de fase de autoorganización empleando la aproximación de campo medio para identificar los parámetros de orden y determinar el diagrama de fase del sistema. Finalmente se emplea el método numérico de evolución temporal en tiempo imaginario para caracterizar la autoorganización en la versión unidimensional del contexto experimental de Esslinger discutido por P. Domokos *et al.* en [31].

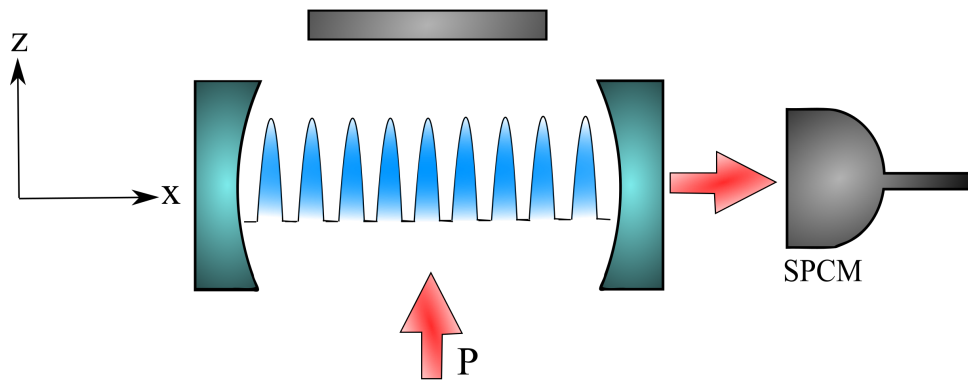


Figura 2: Esquema del contexto experimental de Esslinger, el cual consiste de un BEC confinado en una cavidad óptica bombeada transversalmente por un modo estacionario de un haz coherente. El condensado se autoorganiza en una estructura periódica que dispersa de manera superradiante fotones hacia el interior de la cavidad dado que la intensidad del haz de bombeo P supere un valor crítico P_c .

3.1. Autoorganización asistida por una cavidad: experimento de Esslinger.

El contexto experimental llevado a cabo por el equipo de Esslinger consiste de la preparación de un BEC diluido de átomos de ^{87}Rb confinado en una cavidad óptica de Fabry-Pérot de alta reflectancia preparada en el estado de vacío. En esta configuración el condensado es bombeado por un haz coherente que se propaga en dirección transversal al eje de la cavidad. En el lado opuesto de la cavidad respecto la posición del haz de bombeo se ubica un espejo con el objetivo de generar un potencial óptico en función de la interferencia de los haces contrapropagantes, el

modo de la cavidad y su interacción con el condensado, como se ilustra en la Figura 2. La frecuencia del haz de bombeo se fija por debajo de la frecuencia asociada a la transición electrónica dipolar menos energética del átomo, de tal manera que la desintonía entre el haz de bombeo y el átomo es mucho mayor que el ancho espectral de las líneas de absorción del átomo. Como consecuencia los procesos de emisión espontánea y estimulada de los átomos son fuertemente suprimidos y sus efectos sobre la dispersión efectiva entre los fotones del haz de bombeo y el modo de la cavidad son despreciables. En otras palabras, se considera que el efecto sobre los campos producido por el condensado entendido como medio óptico es el de introducir cambios en la fase debido a procesos de dispersión elástica, lo que resulta en la interferencia de los modos del haz de bombeo y de la cavidad dando origen a un potencial óptico susceptible a la dinámica del condensado. Basado en todo lo anterior la fenomenología del sistema se puede capturar en una descripción teórica que considere un solo nivel del átomo acoplado a los estados del campo por medio de un potencial óptico generado por procesos de dispersión coherente de fotones.

Bajo este contexto experimental los autores realizaron el registro del conteo del número de fotones que se escapaban por los espejos de la cavidad y de la distribución de momentos de la densidad del condensado, en función de la intensidad del haz de bombeo, empleando la técnica de resolución de imagen en tiempo de vuelo (*time-of-flight imaging* en inglés) la cual consiste en someter el condensado al potencial óptico mientras se libera del potencial de confinamiento, tomando imágenes de éste mientras se expande balísticamente, con la finalidad de resolver el patrón de difracción. Parte de los resultados experimentales obtenidos por el equipo de Esslinger son mostrados en la Figura 3: cuando la intensidad se mantiene por debajo de un umbral crítico no hay un conteo significativo de fotones en la cavidad, lo que además viene acompañado de un perfil de densidad del condensado que adquiere componentes $p_z = \pm 2\hbar k_p = \pm 4\pi\hbar/\lambda_p$ en su distribución de momentos debido a la dispersión de fotones del haz de bombeo de longitud de onda λ_p como se puede apreciar en la Figura 3c. Esto sugiere que por debajo de la intensidad

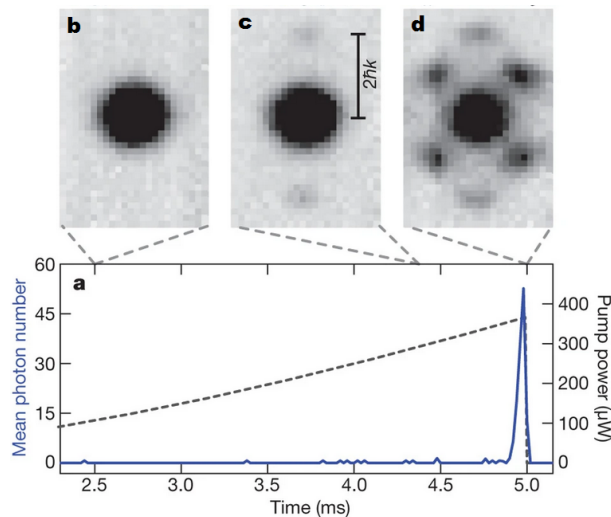


Figura 3: Observación experimental de la transición de fase de autoorganización en donde se reporta: a) Número medio de fotones (línea continua) e intensidad del haz de bombeo (línea punteada) en función del tiempo. b) y c) Distribución de momentos del BEC en el estado normal. d) Emergencia de las componentes de momentum $(p_x, p_z) = (\pm\hbar k_p, \pm\hbar k_p)$ que señalan la transición de fase al estado autoorganizado. Figura tomada de [1].

crítica no hay un acoplamiento efectivo entre el haz de bombeo y el modo de la cavidad debido a que cada átomo del condensado dispersa el haz de bombeo con una fase arbitraria, lo que resulta en la interferencia destructiva de la radiación dispersada hacia el interior de la cavidad, razón por la cual el potencial óptico al que el condensado es sometido solo tiene la contribución del modo estacionario del haz de bombeo en dirección z , siendo su efecto la generación de las componentes de momentum p_z que resultan ser despreciables en comparación con la distribución de momentos previamente definida por los potenciales externos que lo confinan, como se evidencia en la diferencia de sombreados de los picos p_z en relación a la distribución inicial mostrada en la Figura 3b. A este estado del sistema en donde no hay fotones en la cavidad y el perfil de densidad del condensado no cambia significativamente en su interacción con el haz de bombeo se denomina estado normal.

Una vez alcanzado el valor crítico de la intensidad del haz de bombeo en $t = 4.8\text{ms}$ es detectado un incremento abrupto y significativo en el número de fotones en la cavidad, fenómeno que se puede entender en el contexto de la dispersión de Rayleigh superradiante observada experimentalmente por el equipo de W. Ketterle [32], de donde se establece que el condensado dispersa la radiación del haz de bombeo de manera coherente y direccionada hacia el interior de la cavidad si el vector de polarización del haz de bombeo y la dirección del eje de la cavidad son ortogonales [33]. En contraste con el estado normal la excitación del modo de la cavidad contribuye a la emergencia dinámica de un potencial óptico bidimensional cuya estructura espacial está condicionada por el proceso de dispersión de Rayleigh, el cual introduce un desfase concreto $\Delta\phi$ en el haz de bombeo que da origen a configuraciones en donde los modos de la cavidad y haz de bombeo están en fase ($\Delta\phi = 0$) o contrafase ($\Delta\phi = \pi$) distinguibles experimentalmente bajo detección heterodina, dando lugar a un potencial cuadrado de periodicidad espacial λ_p que rompe la simetría continua Z_2 del desfase entre campos [34]. En estas configuraciones del potencial óptico se generan fluctuaciones en la densidad del condensado por la redistribución de sus átomos debido a gradientes de energía: si estas fluctuaciones son lo suficientemente grandes el condensado es preparado en un estado en donde los átomos se localizan mayoritariamente en los máximos o mínimos de una de las dos configuraciones del potencial cuadrado, estado en el que se maximiza la dispersión de Rayleigh superradiante del haz de bombeo hacia el interior de la cavidad generando un mecanismo de retroalimentación positiva que estabiliza este perfil de densidad. Como consecuencia la interacción del condensado con los modos del campo genera la autoorganización dinámica de los átomos formando un perfil de densidad periódico que es reminiscente al de las estructuras cristalinas, siendo la evidencia de este proceso la emergencia de componentes de momentum $(p_x, p_z) = (\pm\hbar k_p, \pm\hbar k_p)$ observadas en la distribución de momentos mostrada en la Figura 3d. Es conveniente mencionar que el estado autoorganizado rompe con la simetría de traslación espacial continua como ocurre en los estados cristalinos del estado sólido, sin embargo esto no permite identificar directamente a la autoorganización como un mecanismo de cristalización debido a que es necesario caracterizar otras propiedades físicas como lo son las correlaciones de densidad. Aún así algunos experimentos muestran que el proceso de autoorganización de un BEC es identificable con la transición de fase del estado superfluido al estado supersólido debido a la existencia de rotones [35] y al orden diagonal de largo alcance [36] que exhibe el estado autoorganizado.

En su trabajo el equipo de Esslinger asevera que la transición al estado autoorganizado es identificable con la transición de fase superradiante del modelo de Dicke entre el estado ho-

mogéneo² $(p_x, p_z) = (0, 0)$ y el estado periódico $(p_x, p_z) = (\pm\hbar k_p, \pm\hbar k_p)$ del condensado, en donde el proceso de dispersión de un fotón del haz de bombeo hacia el interior de la cavidad es representado por el operador colectivo $a^\dagger J_+$ mientras que el proceso de dispersión de un fotón de la cavidad hacia su exterior es capturado por el operador $a J_+$, de tal manera que la inclusión de los procesos inversos a los previamente mencionados permite inferir que el hamiltoniano de interacción radiación materia en este sistema es de la forma $V \sim \lambda(a + a^\dagger)(J_+ + J_-)$ siendo λ el parámetro de acoplamiento radiación-materia. Los autores dieron soporte experimental a esta afirmación caracterizando el diagrama de fases del sistema. Para lograr esto detectaron el número medio de fotones en la cavidad en función de la intensidad del haz de bombeo y en función de la desintonía Δ_c entre la frecuencia de la cavidad y la frecuencia del haz de bombeo, reportando los resultados obtenidos en la Figura 4. En este diagrama se verifica la existencia del régimen de intensidad para el cual no se detecta un número significativo de fotones en la cavidad correspondiente al estado normal, separado por la curva crítica λ_{cr} del régimen autoorganizado en donde hay dispersión de fotones hacia el interior de la cavidad. Este comportamiento está en concordancia con el diagrama de fases del modelo de Dicke descrito por el acoplamiento crítico $\lambda_{cr} = \sqrt{\omega_c \omega_z}/2$ bajo la identificación adecuada de la frecuencia efectiva de la cavidad ω_c , la frecuencia efectiva del sistema de dos estados ω_z y la constante de acoplamiento radiación-materia efectiva λ como se muestra en las secciones subsiguientes. Una característica importante del sistema que se observa en el diagrama de fases es que a partir de un valor negativo de Δ_c el acoplamiento crítico λ_{cr} depende linealmente del valor crítico de la potencia del haz de bombeo P_{cr} , lo que representa una ventaja significativa en cuanto a la realización y el control experimental de la transición de fase superradiante en sistemas de átomos fríos en comparación con su contra parte en los sistemas de estado sólido, en donde el régimen de acoplamiento fuerte necesario para observar la transición de fase superradiante está limitado por propiedades de los átomos difícilmente manipulables. Desde el punto de vista de la materia condensada el acoplamiento efectivo entre el modo de la cavidad y el haz de bombeo induce interacciones efectivas de largo alcance entre los átomos que constituyen el condensado, las cuales dan origen al mecanismo de autoorganización y en general enriquecen las propiedades críticas del sistema [28]. A continuación se presenta el desarrollo de métodos que permiten formalizar la caracterización de la transición de fase de autoorganización en el contexto experimental de Esslinger.

3.2. Formulación teórica de la autoorganización asistida por una cavidad.

Para describir de manera formal los aspectos relevantes de la autoorganización discutidos en la sección anterior, es conveniente comenzar con la definición del hamiltoniano de un cuerpo que describe la dinámica de los átomos del condensado y posteriormente incluir las interacciones entre átomos bajo la aproximación de Born. Este procedimiento es adecuado en el régimen de baja energía y en el límite de alta desintonía, condiciones bajo las cuales fue realizado el experimento de Esslinger.

²En donde se desprecian las componentes de momentum introducidas por el haz de bombeo en el estado normal.

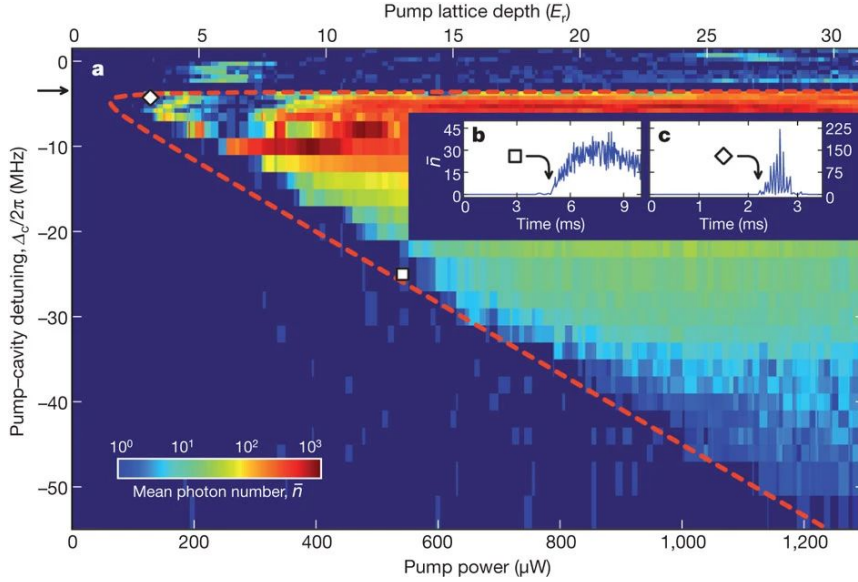


Figura 4: Diagrama de fase del sistema experimental en donde se reporta: a) Número medio de fotones en la cavidad en función de la potencia del haz de bombeo y la desintonía de la cavidad. b) y c) Evolución temporal del número medio de fotones para las dos configuraciones particulares señaladas en la Figura a). La línea punteada corresponde a la curva crítica. Figura tomada de [1].

3.2.1. Derivación del modelo.

El sistema atómico bajo consideración consiste de un BEC que está constituido por átomos bosónicos de masa m que tiene una estructura de niveles definida por un potencial de interacción interno V_{int} entre sus constituyentes. Considerando el régimen de alta desintonía bajo el cual se desarrolla el experimento de Esslinger es suficiente tener en cuenta dos estados no degenerados y de distinta paridad, denotados como $|g\rangle$ y $|e\rangle$, para describir los grados de libertad internos del átomo. El hamiltoniano de un cuerpo que describe la dinámica del átomo desacoplada de la radiación viene dado por:

$$H_A = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + \left(\frac{p_r^2}{2\mu} + V_{\text{int}} \right) = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + \hbar\omega_{eg}\sigma_+\sigma_- \quad (26)$$

en donde el primer término corresponde a la energía cinética del centro de masa y el segundo corresponde a la energía de movimiento relativo del sistema de masa reducida μ interactuando con el potencial V_{int} . La información de los dos niveles relevantes se captura en los operadores de transición $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$ y en su diferencia de energía $\hbar\omega_{eg}$. Para describir el acoplamiento del átomo con los dos modos del campo se asume que la interacción radiación-materia es dipolar en donde se debe tener en cuenta que la dinámica del centro de masa del átomo es relevante en el fenómeno de autoorganización, por lo que es necesario considerar la variación espacial del perfil de los campos y su traslape con las funciones de onda $\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \sigma \rangle$. Para este efecto la función de onda del átomo se centra en la posición del centro de masa \mathbf{r} , de tal manera que la interacción del átomo con el modo de la cavidad se puede expresar bajo la aproximación de onda rotante como [37]:

$$H_{AC} = -i\hbar \left(\frac{1}{\hbar} \int d\mathbf{r}' \psi_e^*(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}_c^{(+)}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}') \psi_g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \right) \sigma_+ a + \text{h.c} \quad (27)$$

siendo $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ el momento dipolar eléctrico del átomo, $\mathbf{E}_c^{(+)}(\mathbf{r})$ la parte de frecuencia positiva del campo eléctrico en la cavidad y a el operador de aniquilación de un fotón del modo de la cavidad de momentum $k_c \sim k_p$. De manera análoga se plantea el hamiltoniano que describe la interacción del átomo con el campo del haz de bombeo $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$:

$$H_{AP} = -i\hbar \left(\frac{1}{\hbar} \int d\mathbf{r}' \psi_e^*(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}') \psi_g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \right) e^{-i\omega_p t} \sigma_+ + \text{h.c} \quad (28)$$

con $\omega_p = ck_p$ en función de la condición de cuasiresonancia entre el modo de la cavidad y el del haz de bombeo. Una característica importante de los potenciales de interacción anteriores es que en contraste con el modelo de Jaynes-Cummings y el modelo de Dicke, las variaciones espaciales de los modos del campo dan origen a frecuencias de Rabi que dependen de manera dinámica de la posición del centro de masa de los átomos, siendo este acoplamiento el mecanismo relevante en el cual subyace la autoorganización. Teniendo en cuenta que la energía del modo de la cavidad viene dada por $H_C = \hbar\omega_c a^\dagger a$, el hamiltoniano de un cuerpo que describe la dinámica de un átomo del condensado viene dado por $H^{(1)} = H_A + H_C + H_{AC} + H_{AP}$ [38]:

$$H^{(1)} = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_{eg} \sigma_+ \sigma_- - i\hbar h(\mathbf{r})(\sigma_+ e^{-i\omega_p t} - \sigma_- e^{i\omega_p t}) - i\hbar g(\mathbf{r})(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger) \quad (29)$$

en donde las frecuencias de Rabi $g(\mathbf{r})$ y $h(\mathbf{r})$ se consideraron reales dada la configuración de modos estacionarios del contexto experimental. Este hamiltoniano se puede simplificar realizando la transformación unitaria $U(t) = \exp[i\omega_p t(\sigma_+ \sigma_- + a^\dagger a)]$ bajo la cual la dinámica del sistema físico se puede describir por el hamiltoniano de interacción $H_I = i\hbar(\partial_t U)U^\dagger + UH^{(1)}U^\dagger$ que no depende del tiempo. Lo anterior se demuestra empleando el lema de Baker-Campbell-Hausdorff para determinar la manera en la que los operadores que definen el hamiltoniano transforman bajo $U(t)$:

$$U(t)\sigma_+U^\dagger(t) = e^{i\omega_p t\sigma_+\sigma_-}\sigma_+e^{-i\omega_p t\sigma_+\sigma_-} = \sigma_+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\omega_p t)^n}{n!} [\sigma_+\sigma_-, \sigma_+]_n = e^{i\omega_p t}\sigma_+ \quad (30)$$

estando los conmutadores anidados que resultan de la expansión representados con la notación compacta $[A, B]_n$ definida bajo la relación iterativa $[A, B]_n = [A, [A, B]_{n-1}]$, en donde $[A, B]_1 \equiv [A, B]$ y siendo en particular $[\sigma_+\sigma_-, \sigma_+]_1 = \sigma_+$. De manera análoga se determina que $U(t)a^\dagger U^\dagger(t) = e^{i\omega_p t}a^\dagger$. Introduciendo las desintonías $\Delta_a = \omega_p - \omega_{eg}$ y $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$ el hamiltoniano del sistema en el cuadro de interacción, el cual se puede interpretar como el resultado de trasladarse a un sistema de referencia que rota con la frecuencia del haz de bombeo, viene dado por:

$$H_I = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} - \hbar\Delta_c a^\dagger a - \hbar\Delta_a \sigma_+ \sigma_- - i\hbar h(\mathbf{r})(\sigma_+ - \sigma_-) - i\hbar g(\mathbf{r})(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger) \quad (31)$$

Teniendo en cuenta que la extensión al espacio de Fock de un hamiltoniano de un cuerpo se puede expresar como [39] $O = \sum_{\alpha, \beta} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}', \beta | O^{(1)} | \mathbf{r}, \alpha \rangle \Psi_\alpha(\mathbf{r})$, en donde los índices de la suma denotan los estados del hamiltoniano de un cuerpo, la ecuación (31) se puede expresar en segunda cuantización de la siguiente manera:

$$H_I = -\hbar\Delta_c a^\dagger a - \frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{r} \Psi_g^\dagger(\mathbf{r}) \nabla^2 \Psi_g(\mathbf{r}) + \int d^2r \Psi_e^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \hbar\Delta_a \right) \Psi_e(\mathbf{r}) \\ + i\hbar \int d\mathbf{r} \Psi_g^\dagger(\mathbf{r}) (h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})a^\dagger) \Psi_e(\mathbf{r}) - i\hbar \int d\mathbf{r} \Psi_e^\dagger(\mathbf{r}) (h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})a) \Psi_g(\mathbf{r}) \quad (32)$$

De este hamiltoniano se puede determinar la evolución temporal de los operadores de campo empleando la ecuación de movimiento de Heisenberg, de la cual se obtiene en este caso el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas:

$$-i\hbar\partial_t\Psi_e(\mathbf{r}) = [H_I, \Psi_e(\mathbf{r})] = \hbar\Delta_a\Psi_e(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_e(\mathbf{r}) + i\hbar(h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})a)\Psi_g(\mathbf{r}) \quad (33)$$

$$-i\hbar\partial_t\Psi_g(\mathbf{r}) = [H_I, \Psi_g(\mathbf{r})] = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_g(\mathbf{r}) - i\hbar(h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})a^\dagger)\Psi_e(\mathbf{r}) \quad (34)$$

$$\partial_t a = \frac{i}{\hbar}[H_I, a] - \kappa a = \frac{i}{\hbar}\left(\hbar\Delta_c a - i\hbar\int d\mathbf{r}\Psi_g^\dagger(\mathbf{r})g(\mathbf{r})\Psi_e(\mathbf{r})\right) - \kappa a \quad (35)$$

En la ecuación de Heisenberg del operador a se incluye el término $-\kappa a$ para dar cuenta del decaimiento del modo de la cavidad debido a pérdidas de fotones por los espejos, lo que resulta en la ecuación de Heisenberg-Langevin ampliamente estudiada en el contexto de los sistemas abiertos. Bajo el régimen de alta desintonía $|\Delta_a| \gg 0$ el estado excitado del átomo se puede eliminar adiabáticamente debido a que alcanza una configuración estacionaria en un intervalo de tiempo corto en relación al tiempo característico de la dinámica espacial del átomo de dos niveles. Adicionalmente la contribución a la energía total dada por el término $\hbar\Delta_a\Psi_e$ es mayor que la contribución de la energía cinética del átomo en el estado excitado si la temperatura del sistema es lo suficientemente baja. Heurísticamente lo anterior significa que de ser el átomo excitado por la absorción de un fotón éste decaería a su estado base antes de desplazarse significativamente, por lo que las interacciones que induce este proceso se pueden considerar locales tanto en espacio como en tiempo, de tal manera que el estado excitado llega a una configuración estacionaria definida por los valores instantáneos de los demás grados de libertad del sistema. De manera formal la eliminación adiabática se puede implementar en la ecuación de movimiento de Heisenberg del operador $\Psi_e(\mathbf{r})$ considerando $\partial_t\Psi_e(\mathbf{r}) = 0$ y despreciando el término $\nabla^2\Psi_e(\mathbf{r})$ comparado con $\hbar\Delta_a\Psi_e$. De este proceso se obtiene que en el régimen adiabático el operador de campo correspondiente al estado excitado viene dado por:

$$\Psi_e(\mathbf{r}) \approx -\frac{i}{\Delta_a}(h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})a)\Psi_g(\mathbf{r}) \quad (36)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (34) y en la ecuación (35) se obtiene:

$$-i\hbar\partial_t\Psi_g(\mathbf{r}) \approx \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_g(\mathbf{r}) - \frac{\hbar}{\Delta_a}\left(h^2(\mathbf{r}) + h(\mathbf{r})g(\mathbf{r})(a + a^\dagger) + g^2(\mathbf{r})a^\dagger a\right)\Psi_g(\mathbf{r}) \quad (37)$$

$$\partial_t a \approx i\Delta_c a - \frac{i}{\Delta_a}\int d\mathbf{r}\Psi_g^\dagger(\mathbf{r})g(\mathbf{r})(h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})a)\Psi_g(\mathbf{r}) - \kappa a \quad (38)$$

Para facilitar el estudio del comportamiento del sistema es conveniente introducir un hamiltoniano efectivo que reproduzca la dinámica de los operadores de campo contemplada en la ecuación (37) y en la ecuación (38). Expresado de manera concisa el hamiltoniano efectivo se define mediante las relaciones:

$$-i\hbar\partial_t\Psi_g(\mathbf{r}) = [H_{\text{ef}}, \Psi_g(\mathbf{r})] \quad \text{y} \quad \partial_t a = \frac{i}{\hbar}[H_{\text{ef}}, a] - \kappa a \quad (39)$$

Se puede verificar directamente que el hamiltoniano que satisface las ecuaciones de movimiento bajo la eliminación adiabática del estado excitado es:

$$H_{\text{ef}} = -\Delta_c a^\dagger a + \int d\mathbf{r}\Psi_g^\dagger(\mathbf{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_0\phi_p^2(\mathbf{r}) + \hbar\eta\phi_p(\mathbf{r})\phi_c(\mathbf{r})(a + a^\dagger) + \hbar U_0\phi_c^2(\mathbf{r})a^\dagger a\right]\Psi_g(\mathbf{r}) \quad (40)$$

en donde se introduce $\hbar h^2(\mathbf{r})/\Delta_a = V_0\phi_p^2(\mathbf{r})$, $h(\mathbf{r})g(\mathbf{r})/\Delta_a = \eta\phi_p(\mathbf{r})\phi_c(\mathbf{r})$ y $g_r^2(\mathbf{r})/\Delta_a = U_0\phi_c^2(\mathbf{r})$. De la forma en la que está expresada el hamiltoniano se observa que el efecto del haz de bombeo es el de generar un potencial óptico de profundidad $V_0 = \hbar\Omega_p^2/\Delta_a$ y perfil espacial $\phi_p(\mathbf{r})$, en donde Ω_p denota el valor máximo de la frecuencia de Rabi asociada al acoplamiento del átomo con el haz de bombeo. Adicionalmente se evidencia que se produce una desintonía efectiva en la frecuencia de la cavidad que depende de la densidad del condensado dado el traslape de la función de onda del estado base con el potencial óptico $\hbar U_0\phi_c^2(\mathbf{r})$ inducido por la cavidad, siendo $U_0 = g_0^2/\Delta_a$ y g_0 el valor máximo de la frecuencia de Rabi del acoplamiento átomo-cavidad. El proceso de dispersión de fotones mediado por el condensado da lugar al acoplamiento dinámico entre el modo de la cavidad y el modo del haz de bombeo, el cual resulta en la contribución $\hbar\eta\phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})$ al potencial óptico cuya profundidad depende de la frecuencia de Rabi de dos fotones $\eta = g_0\Omega_p/\Delta_a$. Es importante enfatizar que la frecuencia de Rabi η depende del campo eléctrico del haz de bombeo en la interacción dipolar, por lo que su valor puede ser controlado experimentalmente variando la intensidad del haz de bombeo. Introduciendo la interacción entre pares de átomos bajo la aproximación de Born se obtiene finalmente el hamiltoniano de interacción radiación-materia que condensa los aspectos importantes de la discusión fenomenológica de la autoorganización basada en el contexto experimental de Esslinger:

$$H = -\hbar\Delta_c a^\dagger a + \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(H_0 + g_c \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) + \hbar\eta\phi_p(\mathbf{r})\phi_c(\mathbf{r})(a + a^\dagger) + \hbar U_0\phi_c^2(\mathbf{r})a^\dagger a \right) \Psi(\mathbf{r}) \quad (41)$$

siendo $H_0 = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V_0\phi_p^2(\mathbf{r})$ el hamiltoniano en ausencia de la excitación del modo de la cavidad e interacciones entre átomos; adicionalmente se omite el subíndice g que denota al estado base en la escritura de los operadores de campo. Cabe resaltar que la inclusión del (pseudo)potencial de interacción de contacto en el paso anterior requiere que el sistema atómico esté en un régimen de baja temperatura lejos de resonancias de Feshbach, caso contrario la dispersión entre átomos podría dar lugar a transiciones electrónicas que deben ser consideradas en el proceso de eliminación adiabática del estado excitado. La transición al estado autoorganizado se puede dilucidar del hamiltoniano dado en la ecuación (41) al comparar resultados en dos casos límite: cuando no hay fotones en la cavidad la única contribución al potencial óptico está dada por el haz de bombeo, de tal manera que el estado base del condensado se define por la ocupación macroscópica del estado de Bloch de más baja energía del hamiltoniano de red periódica H_0 . Sin embargo si el modo de la cavidad es excitado de manera tal que la energía del haz de bombeo, $\hbar\eta$, es mucho mayor que la energía de retroceso $E_R = \hbar^2 k_p^2/2m$, la energía cinética del centro de masa de los átomos es despreciable en comparación con la energía de interacción del condensado dada en el potencial óptico, de tal manera que en el límite de Thomas-Fermi se obtiene $|\langle\Psi(\mathbf{r})\rangle|^2 \propto \phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})$, expresión que corresponde al perfil de densidad periódico característico de la autoorganización. En las próximas dos secciones se caracteriza de manera formal esta transición bajo la aproximación de campo medio y empleando una expansión de dos modos para demostrar la relación entre autoorganización y superradiancia.

3.2.2. Aproximación de campo medio.

La aproximación de campo medio permite simplificar el tratamiento algebraico bajo el cual se describen las propiedades de un sistema físico debido a que los efectos detallados de la interacción entre sus constituyentes son capturados por funciones que describen en promedio las correlaciones entre distintos grados de libertad del sistema. En este caso de estudio el estado del colectivo de átomos es descrito por una función de onda del condensado $\langle\Psi(\mathbf{r})\rangle = \psi(\mathbf{r})$,

mientras que el estado de los fotones en la cavidad es descrito por un campo $\langle a \rangle = \alpha$ identificable con el límite semiclásico del estado coherente. Siguiendo el procedimiento presentado en la implementación de la aproximación de campo medio en el modelo de Dicke, se considera que las fluctuaciones $\delta\Psi$ del operador $\Psi(\mathbf{r}, t)$ y las fluctuaciones δa del operador de a son pequeñas en comparación de sus valores promedio $\psi(\mathbf{r})$ y α respectivamente, de tal manera que al reemplazar $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) + \delta\Psi$ y $a = \alpha + \delta a$ en la ecuación (41) y conservar los términos de orden cero en las fluctuaciones se tiene que la función de onda del condensado $\psi(\mathbf{r}, t)$ satisface la EGP dada por (ver el apéndice 6.1):

$$\left(H_0 + g_c |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \hbar\eta\phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})(\alpha + \alpha^*) + \hbar U_0 |\alpha|^2 \phi_c^2(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r}, t) \quad (42)$$

en donde la estructura de los modos del campo y su interacción con el condensado está contenida en el potencial óptico $V_{\text{opt}}(\mathbf{r}, \alpha) = V_0\phi_p^2(\mathbf{r}) + \hbar\eta\phi_p(\mathbf{r})\phi_c(\mathbf{r})(\alpha + \alpha^*) + \hbar U_0\phi_c^2(\mathbf{r})|\alpha|^2$. Siguiendo este mismo procedimiento se obtiene la ecuación para la amplitud del campo α de la ecuación (38) al conservar solo los términos de orden cero en las fluctuaciones de los campos:

$$\partial_t\alpha = i(\Delta_c - U_0B + i\kappa)\alpha - i\eta\Theta \quad (43)$$

siendo $\Theta = \langle \psi(\mathbf{r})|\phi_p(\mathbf{r})\phi_c(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r}) \rangle$ y $B = \langle \psi(\mathbf{r})|\phi_c^2(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r}) \rangle$. Formalmente la dinámica del condensado y del campo en la cavidad está bien descrita por la solución a las ecuaciones de campo medio acopladas (42) y (43) dado un estado inicial del sistema, sin embargo resulta conveniente introducir una aproximación adicional sobre ésta última para obtener información acerca del parámetro de orden que caracteriza la transición a la fase autoorganizada: si la escala de tiempo en la cual ocurre la dinámica del centro de masa de los átomos (\hbar/E_R) es mucho mayor que el inverso de la tasa de decaimiento del modo del campo en la cavidad κ , se puede emplear la aproximación adiabática para describir la evolución temporal de dicho modo. En esta situación la amplitud del campo α evoluciona de manera adiabática en función del estado instantáneo del condensado de manera que $\partial_t\alpha \approx 0$ y:

$$\alpha \approx \frac{\eta\Theta}{\Delta_c - U_0B + i\kappa} \quad (44)$$

Debido a que la excitación colectiva del modo de la cavidad indica el umbral bajo el cual se realiza la autoorganización resulta natural identificar la cantidad Θ como el parámetro de orden, de modo que en la fase normal $\Theta = 0$ mientras que en la fase autoorganizada $\Theta \neq 0$. Asimismo la cantidad U_0B genera una desintonía efectiva de la frecuencia de la cavidad Δ_c que depende del estado del condensado. Al valor de B se conoce como parámetro de *bunching* a causa de introducir una asimetría en la contribución del modo de la cavidad y el haz del bombeo al potencial óptico total que afecta el grado de localización de los átomos en los sitios pares o impares de la red óptica.

De acuerdo al método propuesto en la referencia [31], el valor de la intensidad crítica se puede determinar a partir del análisis de estabilidad del estado normal al realizar una iteración del método de evolución en tiempo imaginario empleando las ecuaciones (42) y (44). El procedimiento consiste en proponer una expansión de dos modos de la función de onda del condensado donde se capturen fluctuaciones al estado normal que produzcan excitaciones del modo de la cavidad, posteriormente comparar las tasas de decaimiento de las fluctuaciones y del estado normal al realizar un paso de la evolución en tiempo imaginario e identificar la condición sobre la intensidad bajo la cual el estado homogéneo tiene una tasa de decaimiento mayor. Este método se basa en la idea de que las fluctuaciones en la densidad del condensado se

hacen cada vez más significativas a medida que la intensidad se acerca a su valor crítico, de tal manera que el estado homogéneo se hace inestable dando lugar a la realización del estado autoorganizado inducida por la emergencia del potencial óptico. La evolución en tiempo imaginario garantiza que el estado autoorganizado sea el estado estacionario resultante de la dinámica transitoria entre ambos estados. Teniendo en cuenta que $\Theta = \langle \phi_p(\mathbf{r})\phi_c(\mathbf{r}) \rangle$ y considerando la solución de la EGP en el límite de Thomas Fermi se propone la expansión en dos modos $\psi(\mathbf{r}, t_0) = \psi_0(\mathbf{r}, t_0)(1 + \varepsilon\phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r}))$, en donde $\psi_0(\mathbf{r}, t_0)$ corresponde a la función del condensado en el estado normal y $\varepsilon \ll 1$. Reemplazando esta expansión en la ecuación (44) se obtiene:

$$\alpha = \frac{\eta(\Theta_0 + 2\varepsilon N_{\text{ef}})}{\Delta_c - U_0 B_0 + i\kappa + U_0 \varepsilon \int d\mathbf{r} |\psi_0|^2 \phi_c^3 \phi_p} = \frac{2\eta N_{\text{ef}}(\Delta_c - U_0 B_0 - i\kappa)}{(\Delta_c - U_0 B_0)^2 + \kappa^2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (45)$$

tal que Θ_0, B_0 son respectivamente el parámetro de orden y el parámetro de *bunching* de la fase normal y $N_{\text{ef}} \equiv \langle \psi_0(\mathbf{r}) | \phi_p^2(\mathbf{r}) \phi_c^2(\mathbf{r}) | \psi_0(\mathbf{r}) \rangle$ es el número efectivo de átomos máximamente dispersados. Aquí es conveniente recordar que de acuerdo a la manera en la que está expresada la ecuación (42) la función de onda del condensado está normalizada respecto al número N de átomos que lo constituyen. Teniendo en cuenta lo anterior la evolución en tiempo imaginario³ del parámetro de orden $\psi(\mathbf{r})$ viene dada por:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\tau} = - \left(H_0 + E_{\text{int}}(1 + 2\varepsilon\phi_c\phi_p) + \frac{4\hbar\eta^2 N_{\text{ef}}(\Delta_c - U_0 B_0)}{(\Delta_c - U_0 B_0)^2 + \kappa^2} \varepsilon\phi_c\phi_p \right) \psi_0(1 + \varepsilon\phi_c\phi_p) \quad (46)$$

donde $NE_{\text{int}} = g_c \int d\mathbf{r} |\psi_0|^4$ es la contribución energética en campo medio a la relación de dispersión definida por los potenciales ópticos. Al considerar que el potencial químico del estado normal se define mediante la relación $H_0\psi_0 = \mu_0\psi_0$ y que los procesos de dispersión de fotones por el condensado resultan en un incremento de su energía δE respecto a su valor en el estado homogéneo, es decir $H_0\varepsilon\psi_0\phi_c\phi_p = \delta E\varepsilon\psi_0\phi_c\phi_p$, se pueden reagrupar los términos de la expresión anterior de manera que:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\tau} = -\mu_0\psi_0 - \left[\frac{4\hbar\eta^2 N_{\text{ef}}(\Delta_c - U_0 B_0)}{(\Delta_c - U_0 B_0)^2 + \kappa^2} + 3E_{\text{int}} + \delta E \right] \varepsilon\psi_0\phi_c\phi_p = -\mu_0\psi_0 - \nu\varepsilon\psi_0\phi_c\phi_p \quad (47)$$

De este resultado se observa que cerca del valor crítico de la intensidad del haz de bombeo el estado base tiene una tasa de decaimiento proporcional al potencial químico μ_0 , mientras que las fluctuaciones a este estado que dan lugar a la transición de fase de autoorganización decaen a una tasa proporcional al factor ν que depende de la intensidad del haz de bombeo (la cual es proporcional a η^2) y cuyo valor corresponde al término entre corchetes. Si $\mu_0 < \nu$ las fluctuaciones en la densidad del condensado se estabilizan dando como resultado un estado estacionario en la fase normal, caso contrario el estado homogéneo se vuelve inestable en función de su tasa de decaimiento mayor en relación a la del estado autoorganizado. Como consecuencia de esto la condición $\mu_0 = \nu$ define el valor de la intensidad crítica η_c^2 para el cual se realiza la transición de autoorganización en el contexto experimental de Esslinger:

$$\boxed{\sqrt{N_{\text{ef}}\hbar\eta_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(U_0 B_0 - \Delta_c)^2 + \kappa^2}{U_0 B_0 - \Delta_c}} \sqrt{\delta E + 3E_{\text{int}} - \mu_0}} \quad (48)$$

³Que en este caso corresponde a la aplicación del operador de evolución temporal infinitesimal dado por la expresión $U = 1 - i\Delta t H/\hbar$ haciendo $\Delta t \rightarrow -i\Delta\tau$.

Esta expresión es idéntica a la relación que define el valor crítico de la frecuencia de Rabi λ_{cr} para la cual ocurre la transición de fase superradiante en el modelo de Dicke con decaimiento del modo de la cavidad, lo cual se hace evidente al identificar a la frecuencia de Rabi crítica, la frecuencia de la cavidad y la energía del emisor de dos niveles con las cantidades $\lambda_{cr} = \sqrt{N_{ef}}\eta_c$, $\omega_c = U_0 B_0 - \Delta_c$ y $\hbar\omega_a = \delta E + 3E_{int} - \mu_0$ respectivamente [27]. Según la ecuación (48) existe una cota en la desintonía de la cavidad para la cual no se puede observar la autoorganización independientemente del valor de la intensidad del haz de bombeo, característica que se evidencia en el diagrama de fases mostrado en la Figura 5. Desde el punto de vista experimental lo anterior implica que es necesaria una configuración en la cual el traslape entre los modos del campo y la densidad del condensado es máximo, de tal forma que el valor de la desintonía crítica sea mínimo y se faciliten las condiciones bajo las cuales se observan la transición de fase. Adicionalmente el valor de la intensidad crítica depende del número de átomos en el condensado como $N^{-1/2}$, por lo que la transición de fase de autoorganización es susceptible a la reducción de átomos en el estado condensado debido al aumento de temperatura inducido por los campos.

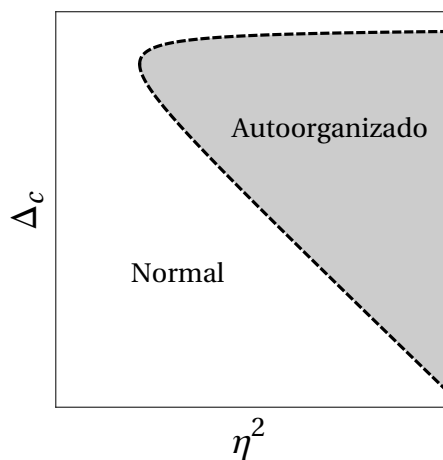


Figura 5: Estructura general del diagrama de fases del modelo de Esslinger. La línea punteada corresponde a la curva crítica definida por la ecuación (48).

3.2.3. Relación entre autoorganización y superradiancia.

La existencia de un valor crítico en la intensidad del haz de bombeo para la cual se observa una excitación macroscópica del modo de la cavidad, así como la equivalencia entre la frecuencia de Rabi crítica λ_{cr} y la intensidad crítica dada en la ecuación (48), son características de la transición de fase de autoorganización que sugieren una relación conceptual con la transición de fase superradiante del modelo de Dicke. Al considerar las ideas expuestas en la sección anterior se establece que algunos aspectos cuantitativos de la autoorganización dinámica pueden ser desarrollados en una descripción de dos modos del condensado, $\Psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r})c_0 + \psi_1(\mathbf{r})c_1$, siendo $\psi_0(\mathbf{r})$ el estado de Bloch de más baja energía definido por el potencial óptico generado por el haz de bombeo mientras que $\psi_1(\mathbf{r}) \propto \psi_0(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})\phi_c(\mathbf{r})$ es el estado resultante de la dispersión de fotones de la red óptica emergente en el estado autoorganizado. Los operadores c_0 y c_1 aniquilan a un átomo en el estado ψ_0 y ψ_1 respectivamente y satisfacen la condición de completéz $c_0^\dagger c_0 + c_1^\dagger c_1 = 1$, mientras que estas funciones de onda están normalizadas respecto al número de átomos N con el propósito de mantener la notación consistente con los desarrollos de la sección

previa⁴. Para simplificar la discusión se desprecian tanto los procesos de dispersión entre átomos del condensado como la pérdida de fotones de la cavidad, haciendo $g_c = 0$ y $\kappa = 0$, de tal forma que al reemplazar la expansión de dos modos del operador de campo en el hamiltoniano dado en la ecuación (41) se obtiene:

$$\begin{aligned}
H = & -\hbar\Delta_c a^\dagger a + [\langle\psi_0|H_0|\psi_0\rangle + \hbar U_0 B_0 a^\dagger a + \hbar\eta\Theta_0(a + a^\dagger)]c_0^\dagger c_0 + \\
& [\langle\psi_1|H_0|\psi_1\rangle + \hbar U_0 B_1 a^\dagger a + \hbar\eta\Theta_1(a + a^\dagger)]c_1^\dagger c_1 + \\
& [\hbar U_0 \langle\psi_1|\phi_c^2(\mathbf{r})|\psi_0\rangle a^\dagger a + \hbar\eta \langle\psi_1|\phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})|\psi_0\rangle (a + a^\dagger)](c_0^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_0)
\end{aligned} \tag{49}$$

En la derivación de este resultado se considera sin pérdida de generalidad que $\psi_0(\mathbf{r})$ es una función real, construcción que se justifica debido a la no degeneración del estado base y al hecho de que H_0 conmuta con el operador de inversión temporal; asimismo se mantiene la notación B_n y Θ_n para denotar al parámetro de *bunching* y al parámetro de orden asociado al estado ψ_n . Definiendo $E_0 = \langle\psi_0|H_0|\psi_0\rangle$ como la energía del estado normal, $\delta E = \langle\psi_1|H_0|\psi_1\rangle$ al incremento de energía del condensado debido a los procesos de dispersión de fotones que configuran el potencial óptico y dan lugar al estado autoorganizado e introduciendo la representación de Schwinger de momentum angular definida por $2J_z = c_1^\dagger c_1 - c_0^\dagger c_0$, $J_+ = J_x + iJ_y = c_1^\dagger c_0$ y $J_- = J_+^\dagger$ [40], el hamiltoniano que describe el proceso de autoorganización de un condensado en ausencia de interacciones entre átomos y pérdidas en la cavidad resulta en:

$$\frac{H}{\hbar} = \left[\omega_a J_z + \omega_c a^\dagger a + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}(a + a^\dagger)J_x \right] + (U_0 M a^\dagger a + \eta\Theta_1(a + a^\dagger))c_1^\dagger c_1 + 2U_0 \langle\psi_1|\phi_c^2|\psi_0\rangle a^\dagger a J_x \tag{50}$$

en donde $M = B_1 - B_0$. Exceptuando los últimos dos términos la expresión anterior corresponde al hamiltoniano del modelo de Dicke, el cual describe el comportamiento de un sistema de N emisores idénticos de dos niveles con energía $\hbar\omega_a = \delta E - E_0$ que interactúan con un modo del campo de una cavidad óptica de frecuencia $\omega_c = U_0 B_0 - \Delta_c$ en función de la frecuencia de Rabi $\lambda = \sqrt{N}\eta \langle\psi_1|\phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})|\psi_0\rangle$, cuyo valor puede ser controlado experimentalmente de manera versátil al modificar la potencia del haz de bombeo. El último término en la ecuación (50) es cero en función de la conservación del momentum en los procesos de dispersión de Rayleigh; en particular el potencial óptico generado por el modo de la cavidad, $\hbar U_0 \phi_c^2(\mathbf{r})$, introduce componentes de momentum $(p_x, p_z) = (\pm 2\hbar k_p, 0)$ sobre la distribución del estado normal $|\psi_0\rangle$ que dan como resultado un estado ortogonal a $|\psi_1\rangle$. Los otros dos términos adicionales corresponden a un desplazamiento de la energía del estado autoorganizado del condensado que depende dinámicamente del estado del campo en la cavidad. Si bien la inclusión de estos términos modifica la dinámica global del modelo de Dicke caracterizada en el capítulo anterior, es de esperar que no tengan influencia alguna en el valor de la intensidad crítica ya que cuando $\eta \rightarrow \eta_c^-$ se tiene $\langle a \rangle = 0$, lo que anula sus contribuciones en campo medio debajo del umbral para el cual ocurre la autoorganización [20]. Con base en esto el valor crítico de la intensidad del haz de bombeo está dado mediante la expresión:

$$\sqrt{N}\hbar \langle\psi_1|\phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})|\psi_0\rangle \eta_c = \frac{1}{2} \sqrt{(U_0 B_0 - \Delta_c)(\delta E - E_0)} \tag{51}$$

resultado que se obtiene de la expresión general dada en la ecuación (48) bajo la apropiada identificación $\sqrt{N_{\text{ef}}} = \sqrt{N} \langle\psi_1|\phi_c(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})|\psi_0\rangle$ y $\mu_0 = E_0$. Como consecuencia se establece que

⁴Una manera equivalente de abordar este desarrollo es considerar las funciones ψ_0 y ψ_1 normalizadas a la unidad mientras que $c_0^\dagger c_0 + c_1^\dagger c_1 = N$.

la dinámica del centro de masa de los átomos de un BEC confinado en una cavidad óptica de alta reflectancia bombeada transversalmente por un haz coherente es una realización del modelo de Dicke, de tal manera que la transición del estado normal al estado autoorganizado se corresponde con la transición de fase cuántica de la fase normal a la fase superradiante. La ruptura espontánea de la simetría de inversión del modelo de Dicke, dada por la invarianza del hamiltoniano bajo la transformación $a \rightarrow -a$ y $J_{\pm} \rightarrow -J_{\pm}$, es realizada como el rompimiento de la simetría de traslación espacial continua en la transición de fase de autoorganización, en donde los átomos se localizan en los sitios de la subred par o impar en función del signo de $\langle J_x \rangle = \Theta$; y como el rompimiento de la simetría continua Z_2 , en donde los procesos de dispersión de fotones en el estado autoorganizado generan un potencial óptico que restringe el valor de la fase relativa entre los campos del haz de bombeo y la cavidad a tomar uno de dos posibles valores que difieren en π .

Los resultados anteriores son relevantes bajo diversas perspectivas: por un lado presentan un marco formal bajo el cual se puede comprender y caracterizar la autoorganización de un condensado confinado en una cavidad al ser este fenómeno identificable con la transición de fase superradiante. Por otro lado la propuesta del equipo experimental de Esslinger resulta ser pionera en la realización del modelo de Dicke. La dependencia del parámetro de acoplamiento radiación-materia con la intensidad del haz de bombeo permite sobrepasar la dificultad de acceder experimentalmente al régimen de acoplamiento fuerte necesario en la observación de la superradiancia, siendo esto una de las limitantes principales por la cual la observación de este fenómeno en sistemas de estado sólido ha sido elusiva. Adicionalmente esta propuesta es versátil en cuanto al control y manipulación experimental de las propiedades de sus constituyentes se refiere, razón por la cual ha motivado la implementación de distintos esquemas experimentales para estudiar los fenómenos de interacción radiación materia en el régimen de acoplamiento ultrafuerte [41], los efectos de la degeneración continua del estado base en la formación de supersólidos bosónicos [42], la emergencia de posibles estados topológicos superradiantes en gases de Fermi ultrafríos confinados en cavidades ópticas [43] y la observación de los novedosos cristales de tiempo disipativos [44], por mencionar algunos.

De manera general este tipo de contextos experimentales establecen un vínculo directo con los formalismos de la materia condensada y la óptica cuántica, lo que retroalimenta la validación de modelos e impulsa desarrollos técnicos y tecnológicos. En particular las interacciones de largo alcance entre los constituyentes de la materia inducidas por su interacción con los modos del campo enriquecen los comportamientos y propiedades críticas de los sistemas de materia ultrafría, lo que los hace excelentes candidatos para ser implementados como plataformas de simulación cuántica en el estudio experimental de la fenomenología de una amplia gama sistemas físicos que abarcan desde el estudio de los fundamentos de la materia condensada hasta las aplicaciones en información cuántica.

3.3. Autoorganización en cavidad: caso unidimensional.

En esta sección se resumen de manera breve algunos resultados importantes relacionados al modelo de autoorganización en una dimensión, propuesto por Domokos y su equipo en [31], con la finalidad de ilustrar de manera concreta las características más importantes en relación a la fenomenología de la autoorganización en gases ultrafríos. En esta propuesta teórica se presentan soluciones numéricas a las ecuaciones de campo medio acopladas, las cuales requieren

un bajo costo y complejidad computacional para ser determinadas y pese a las aproximaciones y simplificaciones no pierden generalidad en cuanto a los aspectos que caracterizan la transición de fase de autoorganización, razones por las cuales se considera importante la revisión de este sistema para concluir este capítulo. En el anexo 6.6 el lector podrá encontrar un código implementado en Mathematica de donde se obtienen los resultados que se reportan en esta sección.

El sistema físico de interés se puede entender en este contexto como la versión unidimensional del experimento de Esslinger, en donde se asume que el condensado está confinado a lo largo del eje de la cavidad, de tal manera que la dinámica del centro de masa de los átomos se considera únicamente en la dirección del eje x según el sistema de referencia mostrado en la Figura 2. Esta configuración se puede realizar experimentalmente en el régimen en donde las frecuencias de la trampa armónica transversales al eje de la cavidad son mucho mayores en relación al valor de la frecuencia longitudinal. Dada la geometría de este sistema el potencial óptico generado por el modo estacionario del haz de bombeo es constante en la extensión del condensado, por lo tanto se considera que el perfil espacial de este modo viene dado por $\phi_p(\mathbf{r}) = 1$. Asumiendo que la función del modo de la cavidad es $\phi_c(\mathbf{r}) = \cos(k_px)$, la EGP dada en la expresión (42) se reduce en este caso a:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \hbar U_0 |\alpha|^2 \cos^2(k_px) + 2\hbar\eta \text{Re}(\alpha) \cos(k_px) + g_c |\psi(x,t)|^2 \right) \psi(x,t) = i\hbar \partial_t \psi(x,t) \quad (52)$$

siendo $\text{Re}(\alpha)$ la parte real de α . Bajo la simplificación del modo espacial del haz de bombeo, el valor del parámetro de orden está dado por $\Theta = \langle \psi(x) | \cos(k_px) | \psi(x) \rangle$ mientras que el parámetro de *bunching* resulta en $B = \langle \psi(x) | \cos^2(k_px) | \psi(x) \rangle$. Las características de la autoorganización se pueden indagar a partir del análisis del potencial óptico autoconsistente resultante de la eliminación adiabática del estado de la cavidad y de su efecto sobre el estado estacionario del condensado, siendo en este caso:

$$V_{\text{opt}}(x) = \left[\frac{2\hbar\eta^2 \Theta (\Delta_c - U_0 B)}{(\Delta_c - U_0 B)^2 + \kappa^2} \right] \cos(k_px) + \left[\frac{\hbar U_0 \eta^2 \Theta^2}{(\Delta_c - U_0 B)^2 + \kappa^2} \right] \cos^2(k_px) \quad (53)$$

donde se observa que $V_{\text{opt}}(x) = V_1 \cos(k_px) + V_2 \cos^2(k_px)$ consiste de una suma de potenciales de periodicidad espacial λ_p y $\lambda_p/2$. Debido a que la segunda contribución al potencial no depende del signo del parámetro de orden ni del signo de la desintonía efectiva de la cavidad $\delta_c = \Delta_c - U_0 B$, no discrimina entre la subred par o impar en donde se localizan los átomos en el estado autoorganizado, motivo por el cual se anticipa que dicho término no define las propiedades críticas de la autoorganización en este sistema. En función de lo anterior se establece que el estado homogéneo $\psi_0 = \sqrt{N/L}$, siendo L la longitud del condensado y $\mu_0 = g_c N/L$ el valor del potencial químico asociado a tal estado, es solución estacionaria de las ecuaciones (44) y (52) con $\alpha(\psi_0) = 0$ ya que en este caso $V_{\text{opt}}(x) = 0$. Para ilustrar el mecanismo de retroalimentación positiva que da lugar a la inestabilidad del estado homogéneo se considera la situación $\Delta_c < -NU_0$. Si una fluctuación de longitud λ_p en la densidad del condensado resulta en un estado donde $\Theta < 0$, el potencial óptico inducido por dicha fluctuación será tal que $V_1 > 0$. En este caso los átomos del condensado se desplazan hacia las posiciones definidas por la condición $k_px = (2n + 1)\pi$ que corresponde a la ubicación de los mínimos del potencial óptico generado por la fluctuación. Simultáneamente el proceso de acumulación de átomos en estos sitios satisface la condición de dispersión de Bragg, dando como resultado un incremento

en la tasa de dispersión de fotones hacia el interior de la cavidad que deriva en un aumento en la amplitud del potencial óptico en V_1 , lo que nuevamente favorece la localización de los átomos en la subred $k_p x = (2n + 1)\pi$. El sistema alcanza el estado estacionario una vez que la ganancia en energía potencial es compensada por los procesos de dispersión entre átomos. Habiendo obtenido una expresión explícita para el estado normal, dada en este caso por la función de onda $\psi_0 = \sqrt{N/L}$, se pueden determinar de manera directa las cantidades que definen el valor de la intensidad crítica en la ecuación (48), los cuales corresponden a $N_{ef} = B_0 = N/2$, $E_{int} = \mu_0 = g_c N/L$ y $\delta E = \hbar^2 k_p^2 / 2m = \hbar\omega_R$. Con base en estos resultados se concluye que el valor de la intensidad crítica en el modelo de autoorganización en una dimensión viene dada por:

$$\sqrt{N}\eta_c = \sqrt{\frac{(\Delta_c - NU_0/2)^2 + \kappa^2}{NU_0 - 2\Delta_c}} \sqrt{\omega_R + \frac{2Ng_c}{\hbar L}} \quad (54)$$

La discusión anterior se resume en la Figura 6 y en la Figura 7, siendo estos los resultados obtenidos al resolver numéricamente el estado estacionario de la ecuación de campo medio (52) empleando el método de evolución temporal en tiempo imaginario: dada una función de onda de prueba se determina el potencial químico integrando la ecuación estacionaria derivada de (52) al proponer la separación $\psi(x, t) = e^{-i\mu t/\hbar}\psi(x)$. Posteriormente se determina el potencial óptico y se utiliza para calcular un paso de evolución en tiempo imaginario usando el método *split step Fourier*. El estado resultante se normaliza y se define como la nueva función de onda de prueba, repitiendo este proceso hasta registrar la convergencia del potencial químico. En la Figura 6 se

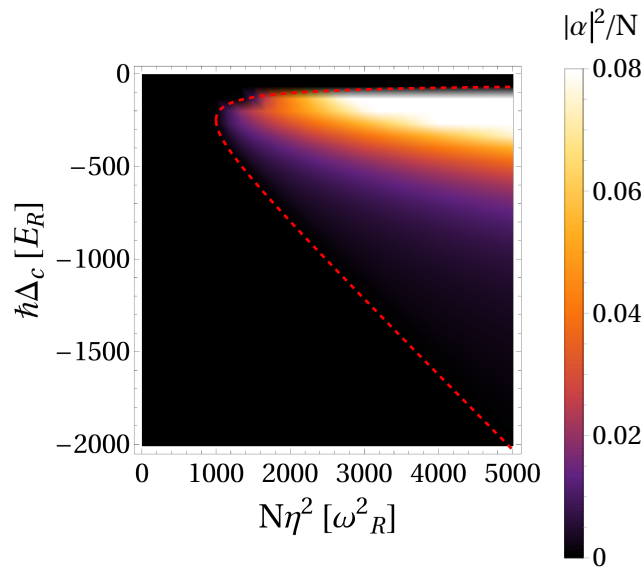


Figura 6: Diagrama de fases del modelo de autoorganización en una dimensión. Se representa en el código de colores el número medio de fotones en la cavidad por átomo, en función de la energía efectiva del modo de la cavidad y la intensidad del haz de bombeo. La línea punteada roja corresponde a la curva crítica dada en la ecuación (54). Parámetros: $L = 5\lambda_p$, $Ng_c/\lambda_p = 10E_R$, $N\hbar U_0 = -100E_R$, $\hbar\kappa = 200E_R$ y $\hbar\Delta_c = -300E_R$.

muestra el diagrama de fases en campo medio obtenido al resolver numéricamente la ecuación (52), en donde se evidencia la correspondencia con los resultados analíticos obtenidos bajo la aproximación de campo medio y eliminación adiabática del modo de la cavidad, siendo además este resultado consistente con el diagrama de fase determinado para el modelo de Esslinger y

con el diagrama de fases experimental reportado en la Figura 4. En particular este resultado captura de manera adecuada el desplazamiento efectivo de la frecuencia de la cavidad debido al traslape del modo de la cavidad con la función de onda del condensado, motivo por el cual no se observa la autoorganización en la condición de resonancia $\Delta_c = 0$. En la Figura 7 se muestra el potencial óptico y la distribución de densidad del condensado para dos valores de intensidad superiores al umbral crítico $\sqrt{N\hbar\eta_c} \approx 31.6E_R$, el cual fue determinado empleando la ecuación (54). Las subfiguras 7.a) y 7.d) son evidencia de la ruptura espontánea de la simetría de traslación continua del estado homogéneo, ya que muestran la emergencia espontánea de un patrón de periodo λ_p en el perfil de la densidad del condensado que se hace más localizado a medida que se aumenta el valor de la intensidad del haz de bombeo. Esta característica se puede explicar al observar el crecimiento monótono del parámetro de orden en función de la intensidad del haz de bombeo para $\eta > \eta_c$ teniendo en cuenta que el potencial óptico es proporcional al valor de dicho parámetro, como consecuencia el potencial óptico se hace más profundo en función del aumento en la intensidad favoreciendo localización de los átomos. Asimismo la localización de la densidad en los $x_n = (2n + 1)\lambda_p/2$ es consistente con el hecho de que $\Theta < 0$, debido a que $\Theta(\Delta_c - NU_0) > 0$ por lo que estas posiciones coinciden con los mínimos de intensidad.

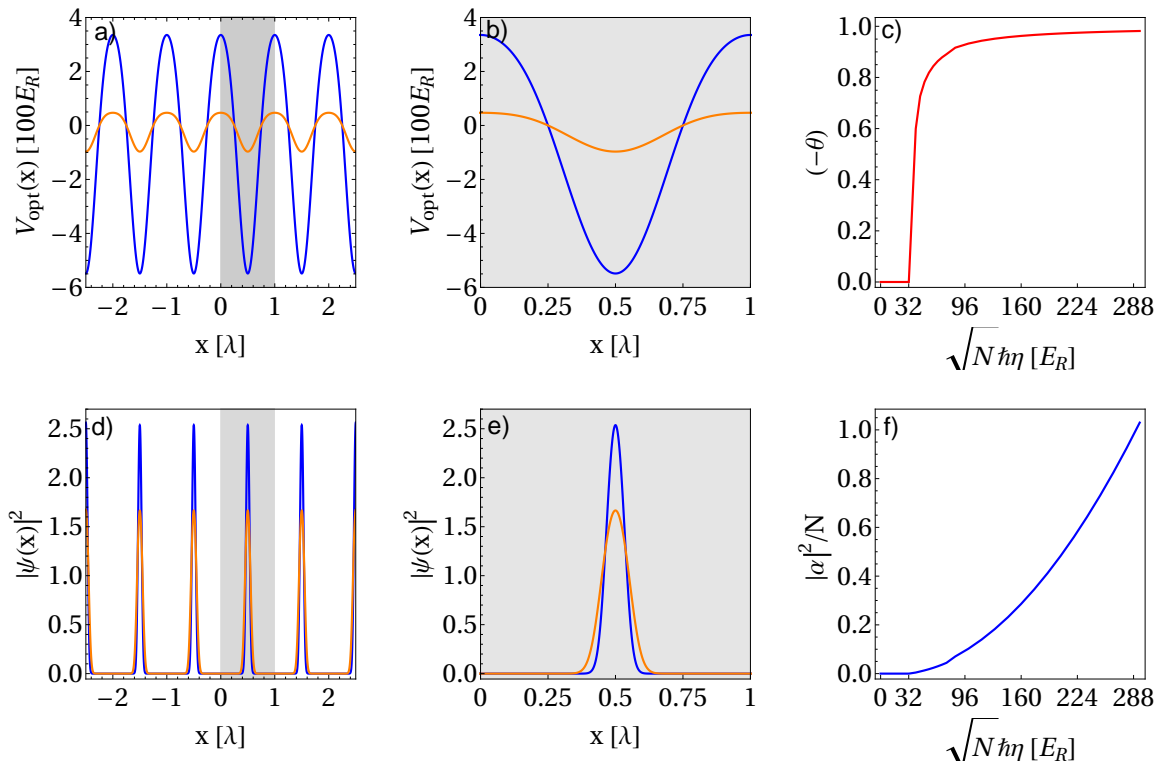


Figura 7: Autoorganización en una dimensión. Las Figuras a) y d) corresponden al potencial óptico y a la densidad del condensado en el estado autoorganizado para $\sqrt{N\hbar\eta} = 150$ (amarillo) y $\sqrt{N\hbar\eta} = 300$ (azul) respectivamente. Las Figuras b) y e) son un acercamiento a la región sombreada en las Figuras a) y d) en donde se observa que el condensado se localiza en la subred impar definida por los mínimos del potencial óptico. La Figura c) muestra el parámetro de orden en donde se evidencia la transición de fase de autoorganización para $\sqrt{N\hbar\eta_c} \approx 31.6E_R$, mientras que la Figura f) muestra el número medio de fotones por átomo en la cavidad. Parámetros: mismos que en la Figura 6.

4. Autoorganización dinámica.

En la sección anterior se discute la manera en la que la autoorganización de un BEC confinado en una cavidad óptica, es resultado de un proceso de retroalimentación positiva en donde un haz de bombeo induce un perfil de densidad periódico en el condensado que maximiza la dispersión de fotones hacia el interior de la cavidad. En esta contexto físico la cavidad óptica tiene un papel fundamental en la estructura del estado autoorganizado debido a que fija y configura de manera externa los modos espaciales del potencial óptico bajo los cuales se genera la localización de los átomos del condensado. Una cuestión interesante relacionada a lo anterior es si el fenómeno de autoorganización de un BEC se puede realizar en ausencia de cavidad, de tal manera que tanto el perfil de densidad como el potencial óptico se estructuren de manera dinámica en función de la interacción radiación materia. Un ejemplo destacado de un sistema de átomos ultrafríos que exhibe autoorganización dinámica es desarrollado por el equipo de S. Ostermann [2]. En este trabajo los autores proponen la existencia de un régimen en donde emerge un patrón periódico en el perfil de densidad de un condensado en el espacio libre, el cual es bombeado por dos haces contrapropagantes de polarización ortogonal, acompañado de la emergencia de una red óptica dinámica en función del estado del condensado, predicción que fue verificada experimentalmente por el equipo de Ketterle [45].

En este capítulo se presenta una breve revisión sobre el modelo de autoorganización dinámica en ausencia de cavidad propuesto por el equipo de Ostermann [2]. Para este fin se presenta una breve discusión de las ecuaciones que describen la dinámica del estado del condensado y el perfil espacial de los campos haciendo énfasis en la derivación de las condiciones de frontera. Posteriormente se discute una manera en la que se puede determinar el umbral en la intensidad de los haces de bombeo que da origen al estado autoorganizado a partir del análisis del espectro de excitaciones del sistema. Finalmente se discuten los resultados obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones acopladas de manera numérica en donde se evidencia la cristalización del perfil espacial de la densidad y los modos del campo.

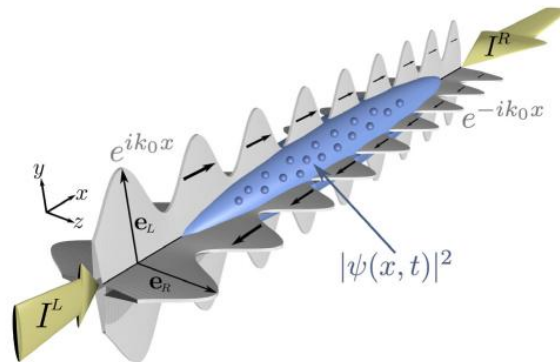


Figura 8: Representación del modelo de autoorganización de Ostermann: condensado 1D bombeado por dos modos contrapropagantes con polarización ortogonal. Para valores de la intensidad mayores al valor crítico emerge de manera dinámica un potencial óptico periódico acompañado de un perfil autoorganizado en la densidad del condensado. Figura tomada de [2].

4.1. Modelo de autoorganización dinámica de Ostermann.

El sistema físico propuesto por Ostermann *et al.* consiste de un condensado de Bose Einstein alargado cuasi-unidimensional⁵ por el cual se propagan dos haces coherentes contrapropagantes de polarización ortogonal como se muestra en la Figura 8. La energía de los haces se configura altamente desintonizada de la energía asociada a las transiciones electrónicas de los átomos, de tal manera que la respuesta óptica del condensado se pueda caracterizar por una polarizabilidad lineal real. Este régimen dispersivo permite despreciar los efectos de respuesta óptica no lineal del condensado que contribuyan a la interferencia de los haces contrapropagantes. En este sistema la dinámica de la materia y la radiación están fuertemente acopladas: por un lado el condensado de Bose Einstein actúa como medio óptico que afecta la propagación de los haces contrapropagantes, por otro lado éstos configuran un potencial externo que retroalimenta el estado del condensado afectando su índice de refracción. Dada la geometría del condensado se considera que la dinámica de los átomos está restringida en la dimensión longitudinal, de modo que el estado del condensado $\psi(x, t)$ es descrito por la ecuación de Gross Pitaevskii:

$$i\hbar\partial_t\psi(x, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) \right] \psi(x, t) + \frac{g_c N}{A} |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) \quad (55)$$

siendo g_c el parámetro que captura la interacción efectiva entre átomos debido a procesos de dispersión de onda s , N es el número de átomos en estado condensado, m la masa de un átomo y A el área de la sección transversal del condensado. De acuerdo a la manera en la que está expresada la ecuación anterior la función de onda del condensado satisface la condición de normalización $\int dx |\psi(x, t)|^2 = 1$. La energía potencial total $V(x)$ asociada al sistema tiene contribuciones del potencial de la trampa armónica de frecuencia ω_x que confina, define la geometría del condensado y del potencial óptico asociado a interacción dipolar de los átomos del condensado con los haces contrapropagantes, siendo entonces:

$$V(x) = V_{\text{trap}}(x) + V_{\text{opt}}(x) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 - \frac{\alpha}{A} \left[|\mathbf{E}_L(x)|^2 + |\mathbf{E}_R(x)|^2 \right] \quad (56)$$

donde α es la polarizabilidad lineal del átomo y $\mathbf{E}_L(x)$ ($\mathbf{E}_R(x)$) es el campo eléctrico del haz que se propaga desde el lado izquierdo (derecho) del condensado, evaluado en la posición x , según el sistema de referencia empleado en la Figura 8. La aproximación de régimen óptico lineal se implementa en la interacción dipolar al considerar la relación entre el momento dipolar \mathbf{p} del átomo y el campo eléctrico externo \mathbf{E} dada por $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$, razón por la cual el potencial óptico dado en la ecuación (56) depende de la intensidad de los campos contrapropagantes. Adicionalmente al considerar ortogonales los estados de polarización de los haces incidentes se obtiene que la intensidad del campo eléctrico total en el interior del condensado es $|\mathbf{E}(x)|^2 = |\mathbf{E}_L(x) + \mathbf{E}_R(x)|^2 = |\mathbf{E}_L(x)|^2 + |\mathbf{E}_R(x)|^2$. La propagación de los haces se puede describir formalmente al resolver las ecuaciones de Maxwell despreciando los efectos de retardo inducidos por el condensado y asumiendo la aproximación adiabática, en donde se establece que el perfil espacial de los campos se define instantáneamente por el estado del condensado en cada instante de tiempo. Las condiciones que establecen las aproximaciones anteriores se pueden realizar experimentalmente en sistemas de átomos neutros diluidos en donde el índice de refracción es cercano a la unidad, de manera tal que el tiempo de propagación de los haces en el interior del condensado es despreciable en relación a la escala de tiempo característica de

⁵Esta configuración del condensado se puede realizar aumentando las frecuencias transversales de la trampa armónica en relación a la frecuencia longitudinal

la dinámica del condensado.

Una manera simplificada de incorporar las consideraciones previas en una descripción que permita entender la manera en la que los haces incidentes se propagan a través del condensado se puede elaborar partiendo de las ecuaciones de Maxwell para medios isotrópicos, no magnetizables y sin fuentes libres de campos, de donde se obtiene la ecuación de onda $\nabla^2 \mathbf{E} = \partial_t(\nabla \times \mathbf{B})$. En el régimen óptico lineal el campo eléctrico se relaciona con el vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} por medio de la susceptibilidad eléctrica χ de manera que $\mathbf{D} = \epsilon(1 + \chi)\mathbf{E}$ [46], mientras que el campo magnético \mathbf{H} y el campo de inducción \mathbf{B} se vinculan en este caso mediante $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. En las expresiones anteriores las cantidades ϵ y μ son la permitividad y permeabilidad del medio óptico, respectivamente. Teniendo en cuenta la ecuación de Ampère Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}$ se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \mu \times \mathbf{H} + \mu \nabla \times \mathbf{H} \approx \epsilon \mu (1 + \chi) \partial_t \mathbf{E} \quad (57)$$

tal que la ecuación de onda que describe la propagación de los campos en el interior del condensado resulta en $\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu (1 + \chi) \partial_t^2 \mathbf{E} \approx 0$. En la expresión anterior se implementa la aproximación adiabática haciendo $\partial_t \chi \approx 0$. Al considerar la separación de variables $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r})$ se concluye que la propagación de las ondas a través del interior de un medio óptico lineal con las características previamente establecidas adquiere un perfil espacial definido por la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 (1 + \chi) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx 0, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (58)$$

En el modelo de autoorganización dinámica [2] los autores proponen que los efectos de retardo en la propagación de los campos se pueden eliminar adiabáticamente, de manera que el perfil espacial de los campos $\mathbf{E}_L = E_L(x) \mathbf{e}_L$ y $\mathbf{E}_R = E_R(x) \mathbf{e}_R$ satisface las ecuaciones de Helmholtz:

$$\partial_x^2 E_{L,R}(x) + k_0^2 [1 + \chi(x)] E_{L,R}(x) = 0 \quad (59)$$

siendo $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ la magnitud del vector de onda de los campos planos incidentes, λ_0 la longitud de onda que se asume igual en ambos campos, \mathbf{e}_L (\mathbf{e}_R) corresponde al vector de polarización del campo que incide en la frontera izquierda (derecha) del condensado mientras que $\chi(x)$ es la susceptibilidad óptica del condensado, la cual está relacionada con su densidad mediante la expresión:

$$\chi(x) = \frac{\alpha N}{\epsilon_0 A} |\psi(x)|^2 \quad (60)$$

Las ecuaciones de Helmholtz (59) deben resolverse de manera consistente con las condiciones de frontera impuestas por las ecuaciones de Maxwell, en particular con la condición de continuidad del vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} en las fronteras debido a la ausencia de cargas libres en el condensado. Con el objetivo de identificar las condiciones de frontera en función de parámetros de los campos incidentes resulta conveniente analizar la propagación de uno de los haces y posteriormente tener en cuenta la simetría cilíndrica del sistema para establecer las condiciones de frontera del haz que se propaga en dirección opuesta. Teniendo en cuenta lo anterior se considera el caso del campo incidente en la frontera izquierda del condensado ubicada en la posición $x_0 = -L/2$, en donde L es la longitud del condensado: debido a que éste campo se propaga desde el aire se asume que es una onda plana de amplitud A_L y vector de onda \mathbf{k}_0 determinados. Una vez alcanzada la interfaz aire-condensado parte de la energía del campo incidente se disipa en la formación de una onda reflejada de amplitud B_L y vector de onda $-\mathbf{k}_0$, mientras que el resto de la energía queda contenida en el campo transmitido al interior del condensado $E_L(x)$ correspondiente a la solución de la ecuación de Helmholtz (59). De manera

concisa, el campo eléctrico que se propaga desde el extremo izquierdo del condensado viene dado por la expresión:

$$\mathbf{E}(x) = \begin{cases} (A_L e^{ik_0(x-x_0)} + B_L e^{-ik_0(x-x_0)})\mathbf{e}_L & \text{si } x < x_0 \\ E_L(x)\mathbf{e}_L & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \quad (61)$$

De la condición de continuidad del vector de desplazamiento eléctrico⁶ se establece que las condiciones de frontera de la ecuación de Helmholtz (59) para el campo \mathbf{E}_L son en este caso:

$$E_L(x_0) = A_L + B_L \quad (62)$$

$$\partial_x E_L(x_0) = ik_0(A_L - B_L) \quad (63)$$

en donde la amplitud del campo reflejado está relacionada con la amplitud A_L de la onda plana en función del coeficiente de reflexión R del condensado mediante $B_L = RA_L$. Para determinar el valor de B_L y establecer completamente las condiciones de frontera es necesario especificar el valor de R , el cual dependen a su vez del índice de refracción del condensado n_c y por tanto es función de la susceptibilidad. Estas relaciones pueden explorarse al despejar A_L y B_L de las ecuaciones (62) y (63) de tal forma que

$$R = \frac{B_L}{A_L} = \left(1 + \frac{i}{k_0} \frac{\partial_x E_L(x_0)}{E_L(x_0)}\right) \left(1 - \frac{i}{k_0} \frac{\partial_x E_L(x_0)}{E_L(x_0)}\right)^{-1} = \frac{1 - n_c(x_0)}{1 + n_c(x_0)} \quad (64)$$

El último término en la expresión anterior corresponde a la forma del coeficiente de reflexión expresado en términos del índice de refracción del condensado [47]. De este resultado se establece la importante relación:

$$n_c(x_0) = -\frac{i}{k_0} \frac{\partial_x E_L(x_0)}{E_L(x_0)} \quad (65)$$

Para el caso particular donde el condensado de Bose Einstein es homogéneo la susceptibilidad dada en la ecuación (60) es constante, siendo entonces la solución de la ecuación de Helmholtz (59) dada por:

$$E_L(x) = \alpha \exp[i(k_0 \sqrt{1 + \chi(x_0)}(x - x_0) + \phi)] \quad (66)$$

Reemplazando la cantidad anterior en la ecuación (65) se concluye que la relación entre el índice de refracción y la susceptibilidad del condensado viene dada por:

$$n_c(x_0) = \sqrt{1 + \chi(x_0)} \quad (67)$$

Pese a que el resultado anterior fue obtenido para el caso homogéneo constituye una comprobación de un resultado general debido a que cerca a la frontera el condensado es localmente homogéneo y el campo eléctrico es continuo. El perfil espacial del campo eléctrico dada por (61) se determina de manera unívoca al especificar la amplitud A_L y el vector de onda \mathbf{k}_0 del campo incidente, la susceptibilidad del condensado y las condiciones de frontera de la ecuación de Helmholtz:

$$E_L(x_0) = (1 + R)A_L = \frac{2}{1 + n_c(x_0)}A_L, \quad \partial_x E_L(x_0) = ik_0(1 - R)A_L = ik_0 n_c(x_0)E_L(x_0) \quad (68)$$

⁶En donde adicionalmente se asume que la permitividad eléctrica del condensado corresponde al valor de la permitividad del aire.

Adicionalmente si un campo plano de amplitud A_R y vector de onda $-\mathbf{k}_0$ incide el extremo derecho del condensado ubicado en la posición $x_R = x_0 + L$, las condiciones de frontera del campo \mathbf{E}_R que se propaga al interior del condensado son en este caso:

$$E_R(x_R) = \frac{2}{1 + n_c(x_R)} A_R, \quad \partial_x E_R(x_R) = ik_0 n_c(x_R) E_R(x_R) \quad (69)$$

lo cual se puede verificar al proponer que el campo eléctrico incidente viene dado por la expresión $\mathbf{E}(x) = (A_R e^{-ik_0(x-x_0)} + B_R e^{ik_0(x-x_0)}) \mathbf{e}_R$ para $x > x_R$.

4.2. Inestabilidad dinámica del estado homogéneo.

Debido a que la dinámica del condensado y de los campos contrapropagantes está fuertemente acoplada por la dependencia del índice de refracción con la densidad del condensado, es una tarea difícil establecer sus propiedades y características de manera analítica para configuraciones iniciales arbitrarias del sistema. A pesar de esto las ecuaciones de Helmholtz (59) tienen soluciones analíticas en el caso en donde la densidad del condensado es homogénea lo que permite obtener una forma analítica del potencial óptico al que está sometido el condensado, de tal manera que su espectro de excitaciones se pueda determinar de manera exacta al linealizar la EGP y las ecuaciones de Helmholtz respecto al estado homogéneo. Lo anterior permite caracterizar la estabilidad del estado homogéneo e identificar las condiciones para las cuales ocurre la transición de autoorganización observada experimentalmente por el equipo de Ketterle [45], asimismo abre una ruta por la cual se pueden caracterizar las propiedades críticas del sistema por debajo del umbral crítico. Teniendo en cuenta lo anterior se comienza esta sección introduciendo un conjunto de parámetros adimensionales para reescribir las ecuaciones del sistema, las cuales se emplean en cálculo del espectro de excitaciones.

4.2.1. Sistema de ecuaciones adimensionales.

Retomando la definición de la energía de retroceso introducida en el capítulo anterior⁷, $E_r = \hbar^2 k_0^2 / (2m) = \hbar \omega_r$, e introduciendo el parámetro de tiempo adimensional $\tilde{t} = \omega_r t$, la longitud adimensional $\tilde{x} = x / \lambda_0$ y los campos reescalados $\tilde{E}_{L,R}(x) = \sqrt{\alpha / A} E_{L,R}(x)$, la EGP dada en (55) se puede expresar en términos de estas nuevas cantidades de la siguiente manera:

$$i \partial_{\tilde{t}} \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \left[-\frac{1}{(2\pi)^2} \partial_{\tilde{x}}^2 + \frac{V_{\text{trap}}(\tilde{x})}{E_r} - \frac{|\tilde{E}(\tilde{x})|^2}{E_r} \right] \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{g}_c |\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t})|^2 \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad (70)$$

siendo $|\tilde{E}(\tilde{x})|^2 = |\tilde{E}_L(\tilde{x})|^2 + |\tilde{E}_R(\tilde{x})|^2$ la intensidad del campo eléctrico total en el interior del condensado y $\tilde{g}_c = g_c N / (A \lambda_0 E_r)$. Asimismo la definición de $\tilde{x} = x / \lambda_0$ requiere la transformación $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \sqrt{\lambda_0} \psi(\tilde{x})$ con la finalidad de conservar la condición de normalización de la función de onda del condensado. Por otro lado la ecuación de Helmholtz (59) se puede expresar en términos de los parámetros adimensionales introducidos como:

$$\partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{E}_{L,R}(\tilde{x}) + (2\pi)^2 (1 + \zeta |\tilde{\psi}(\tilde{x})|^2) \tilde{E}_{L,R}(\tilde{x}), \quad \zeta = \frac{\alpha N}{\epsilon_0 A \lambda_0} \quad (71)$$

⁷En este capítulo se denota con la letra r minúscula el subíndice que denota la energía de retroceso. Lo anterior es para evitar confusión con la amplitud del campo incidente desde la derecha, desafortunadamente denotado por E_R .

donde ζ es una cantidad adimensional que caracteriza la intensidad del acoplamiento entre el campo eléctrico y el condensado. De acuerdo a la ecuación (71) las condiciones de frontera correspondientes a los campos reescalados se pueden obtener de (68) y de (69) haciendo $k_0 \rightarrow \tilde{k}_0 = 2\pi$ y $n_c(x) \rightarrow \tilde{n}_c(\tilde{x}) = \sqrt{1 + \zeta|\tilde{\psi}(\tilde{x}_0)|^2}$ de manera que:

$$\tilde{E}_L(\tilde{x}_0) = \frac{2}{1 + \tilde{n}_c(\tilde{x}_0)} \tilde{A}_L, \quad \partial_{\tilde{x}} \tilde{E}_L(\tilde{x}_0) = 2\pi i \tilde{n}_c(\tilde{x}_0) \tilde{E}_L(\tilde{x}_0) \quad (72)$$

$$\tilde{E}_R(\tilde{x}_0) = \frac{2}{1 + \tilde{n}_c(\tilde{x}_R)} \tilde{A}_R, \quad \partial_{\tilde{x}} \tilde{E}_R = 2\pi i \tilde{n}_c(\tilde{x}_R) \tilde{E}_R(\tilde{x}_R) \quad (73)$$

4.2.2. Espectro de excitaciones debajo del umbral de autoorganización.

En el capítulo anterior se establece la existencia de un valor crítico de la intensidad del haz de bombeo para el cual el estado homogéneo del condensado se hace inestable y da lugar a la formación del perfil de densidad periódico característico de la autoorganización. La estrategia a desarrollar para establecer el régimen de estabilidad dinámica del estado homogéneo e identificar el valor de la intensidad crítica de los haces de bombeo para el cual ocurre la autoorganización en el modelo de Ostermann consiste en linealizar las ecuaciones adimensionales y mostrar que el espectro de excitaciones diverge para un valor específico del momento de la onda incidente en función del valor de la intensidad de los haces de bombeo. En el estado homogéneo la densidad del condensado viene dada por $\tilde{\psi}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sqrt{\lambda_0/L}$. La ecuación de Helmholtz puede integrarse analíticamente para determinar el perfil espacial de los haces contrapropagantes:

$$\mathbf{E}_{L,R}^{(0)} = C_{L,R} \exp(\pm i k_{\text{eff}} \tilde{x}) \mathbf{e}_{L,R} \quad (74)$$

donde el signo mas (menos) corresponde a la propagación del campo $\mathbf{E}_L^{(0)}$ ($\mathbf{E}_R^{(0)}$) mientras que $k_{\text{eff}} = 2\pi\sqrt{1 + \zeta\lambda_0/L}$ es la magnitud del vector de momentum efectivo que adquieren los campos en su propagación por el condensado. La estabilidad de este estado del sistema se determina al linealizar la EGP y las ecuaciones de Helmholtz (70) y (71), respectivamente, al proponer fluctuaciones al estado de la forma $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_0 + \delta\tilde{\psi})e^{-i\mu\tilde{t}}$ y $\tilde{E}_{L,R} = \tilde{E}_{L,R}^{(0)} + \delta\tilde{E}_{L,R}^{(0)}$ y conservar los factores lineales en las fluctuaciones del estado del condensado y en las fluctuaciones de los campos contrapropagantes. Al simplificar la notación omitiendo la tilde en la escritura de los campos y las variables adimensionales y los argumentos de las funciones involucradas, la linealización de las ecuaciones de Helmholtz adimensionales (71) resulta de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_x^2 E_{L,R}^{(0)} + 4\pi^2 [1 + \zeta |\psi_0|^2] E_{L,R}^{(0)} \right) + \left(\partial_x^2 \delta E_{L,R}^{(0)} + 4\pi^2 [1 + \zeta |\psi_0|^2] \delta E_{L,R}^{(0)} \right) \\ & + 4\pi^2 \zeta (\psi_0 \delta \psi_0^* + \psi_0^* \delta \psi_0) E_{L,R}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

En la expresión anterior los primeros dos términos corresponden a la ecuación de Helmholtz adimensional para los campos estacionarios y sus fluctuaciones, respectivamente, mientras que el tercer término acopla los campos con las fluctuaciones en la densidad del condensado inducidas por la interacción radiación materia. De acuerdo a lo anterior la ecuación que describe las fluctuaciones en los campos incidentes es entonces:

$$\partial_x^2 \delta E_{L,R}^{(0)}(x) + 4\pi^2 [1 + \zeta |\psi_0(x)|^2] \delta E_{L,R}^{(0)}(x) + 4\pi^2 \zeta [\psi_0(x) \delta \psi_0^*(x) + \psi_0^*(x) \delta \psi_0(x)] E_{L,R}^{(0)}(x) = 0 \quad (76)$$

La linealización de la ecuación de Gross Pitaevskii adimensional (70) puede llevarse a cabo siguiendo el mismo procedimiento ilustrado en el desarrollo de la linealización de la ecuación de

Helmholtz adimensional. Expandiendo el estado del condensado y de los campos considerando a primer orden las fluctuaciones respecto a sus configuraciones de equilibrio en estado estacionario se obtiene:

$$\begin{aligned}
i\partial_t(\delta\psi_0) + \mu\delta\psi_0 = & \left[-\frac{1}{4\pi^2}\partial_x^2 + \frac{V_{\text{trap}}}{E_r} - \frac{1}{E_r} \left(|E_L^{(0)}|^2 + |E_R^{(0)}|^2 \right) + \tilde{g}_c |\psi_0|^2 - \mu \right] \psi_0 - \frac{1}{4\pi^2}\partial_x^2(\delta\psi_0) \\
& + \frac{V_{\text{trap}}}{E_r}\delta\psi_0 - \frac{1}{E_r} \left[(E_L^{(0)*}\delta E_L^{(0)} + E_R^{(0)*}\delta E_R^{(0)} + c.c.) \psi_0 + \left(|E_L^{(0)}|^2 + |E_R^{(0)}|^2 \right) \delta\psi_0 \right] \\
& + \tilde{g}_c \left(2|\psi_0|^2 \delta\psi_0 + \psi_0^2 \delta\psi_0^* \right)
\end{aligned} \tag{77}$$

El primer término del lado derecho corresponde a la EGP adimensional (igualada a cero) asociada al estado estacionario. Esta observación permite identificar el valor del potencial químico μ del estado estacionario al multiplicar la EGP adimensional por ψ_0^* e integrar sobre la extensión del condensado, siendo en particular $\mu_0 E_r = (g_c N/AL) - |E_L^{(0)}|^2 - |E_R^{(0)}|^2$ el valor del potencial químico del estado homogéneo del condensado en ausencia del potencial de la trampa armónica. Al tener esto en cuenta, la ecuación (77) se reduce a:

$$\begin{aligned}
i\partial_t(\delta\psi_0(x)) = & -\frac{1}{4\pi^2}\partial_x^2(\delta\psi_0(x)) + \frac{V_{\text{trap}}(x)}{E_r}\delta\psi_0(x) + \frac{1}{E_r} \left(|E_L^{(0)}(x)|^2 + |E_R^{(0)}(x)|^2 \right) \delta\psi_0(x) \\
& - \frac{1}{E_r} \left(E_L^{(0)}(x)^* \delta E_L^{(0)}(x) + E_R^{(0)}(x)^* \delta E_R^{(0)}(x) + c.c. \right) \psi_0(x) \\
& + \tilde{g}_c \left(2|\psi_0(x)|^2 \delta\psi_0(x) + \psi_0^2(x) \delta\psi_0^*(x) \right) - \mu\delta\psi_0(x)
\end{aligned} \tag{78}$$

De manera general, la solución a las ecuaciones (76) y (78) permite caracterizar la estabilidad de un estado arbitrario del sistema. En el caso particular en donde el estado de interés sea el estado homogéneo, el espectro de excitaciones del sistema se puede determinar de manera analítica al resolver las ecuaciones anteriores en el espacio de momentos bajo la introducción de la transformada de Fourier inversa $f(x) = \sum_q e^{iqx} f(q)$. Lo anterior conlleva a que la ecuación (76) se pueda expresar de la siguiente manera⁸:

$$\delta E_{L,R}^{(0)}(q) = \frac{4\pi^2\zeta\sqrt{\lambda_0/L}}{q^2 - k_{\text{eff}}^2} \left[\delta\psi_0(q \mp k_{\text{eff}}) + \delta\psi_0^*(\pm k_{\text{eff}} - q) \right] C_{L,R} \tag{79}$$

en donde el signo superior (inferior) en \pm y \mp corresponde a las fluctuaciones en el campo $E_L^{(0)}(q)$ ($E_R^{(0)}(q)$) y $V_{\text{trap}}(x) = 0$. Al introducir la transformada de Fourier en los elementos de (78), reemplazar la ecuación (79) y reagrupar términos, las fluctuaciones al estado homogéneo del condensado quedan descritas por la solución a la ecuación:

$$i\partial_t\delta\psi_0(q) = \left[\frac{q^2}{(2\pi)^2} + \frac{\tilde{g}_c\lambda_0}{L} - \frac{8\pi^2\zeta\lambda_0}{LE_r} \frac{I_{\text{tot}}}{q^2 - 4k_{\text{eff}}^2} \right] \delta\psi_0(q) + \left[\frac{\tilde{g}_c\lambda_0}{L} - \frac{8\pi^2\zeta\lambda_0}{LE_r} \frac{I_{\text{tot}}}{q^2 - 4k_{\text{eff}}^2} \right] \delta\psi_0^*(-q) \tag{80}$$

siendo $I_{\text{tot}} = |C_L|^2 + |C_R|^2$ la intensidad del campo total en el interior del condensado. Al definir el vector $\delta\Psi_0(q) = (\delta\psi_0(q), \delta\psi_0^*(-q))^T$ es posible mostrar que las fluctuaciones en el estado del condensado satisfacen una ecuación diferencial de primer orden de la forma

⁸Los pasos intermedios en la derivación del espectro de excitaciones debajo del umbral de autoorganización se desarrollan en el apéndice 6.3

$\partial_t \delta \Psi_0(q) = R(q) \delta \Psi_0(q)$, en donde los autovalores a la derecha de la matriz $R(q)$ constituyen el espectro de excitaciones. Imponiendo la condición $\det(R(q) - I_2 \omega_q) = 0$ se determina el espectro de excitaciones del sistema debajo del umbral de autoorganización, en donde el estado homogéneo es estacionario [2]:

$$\hbar^2 \omega_q^2 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \frac{2g_c N}{AL} - \frac{32\pi^2 A \zeta^2}{cNL} \frac{1}{q^2 - 4k_{\text{eff}}^2} (I_L + I_R) \right] \quad (81)$$

siendo I_L (I_R) la intensidad del campo incidente en el extremo izquierdo (derecho) del condensado y c la velocidad de la luz en el vacío. En este espectro de excitaciones los primeros dos términos del lado derecho corresponden al espectro de Bogoliubov de un BEC débilmente interactuante [48] mientras que el término adicional caracteriza los procesos de dispersión de los átomos en el condensado inducidos por la interacción con los modos contrapropagantes del campo. De la relación anterior se concluye que para $q_c = 2k_{\text{eff}}$ las fluctuaciones en la densidad del condensado divergen, lo cual es un indicativo de la inestabilidad del estado homogéneo que permite establecer las condiciones para las cuales ocurre la autoorganización. Debido a que la solución de onda viajera (74) bajo la cual se obtiene el espectro de excitaciones asume de manera implícita que la formación de modos estacionarios de los campos por procesos de reflexión en las fronteras internas del condensado es despreciable, el umbral bajo el cual ocurre la autoorganización debe ser determinado en el límite $L \rightarrow \infty$. Los efectos de tamaño finito del condensado se pueden incluir en el espectro de excitaciones (81) al considerar que los valores de q están discretizados en múltiplos de $2\pi/L$, dando como resultado una brecha de energía en $q = 2k_{\text{eff}} + 2\pi/L$ para valores finitos de L , lo cual es reminiscente a la emergencia de rotones en la formación de estructuras cristalinas debido a la ruptura de la simetría de traslación continua [49]. Lo anterior sugiere que la expresión $\omega_{q_c+2\pi/L=0}$ define el umbral de comportamiento crítico debido a que establece las condiciones bajo las cuales la brecha de energía se cierra. En el límite termodinámico $L \rightarrow \infty$, con N/AL constante, la intensidad crítica (que por simplicidad se asume igual para ambos haces incidentes) bajo la cual ocurre la transición de autoorganización viene dada por:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \omega_{q_c+2\pi/L=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = \frac{\hbar^2 k_0^3 c N}{4\pi A m \zeta^2} = \left(\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right) \frac{cN}{2\pi A \zeta^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right) = \frac{c E_r N}{\lambda_0 A} \frac{1}{\zeta^2} \quad (82)$$

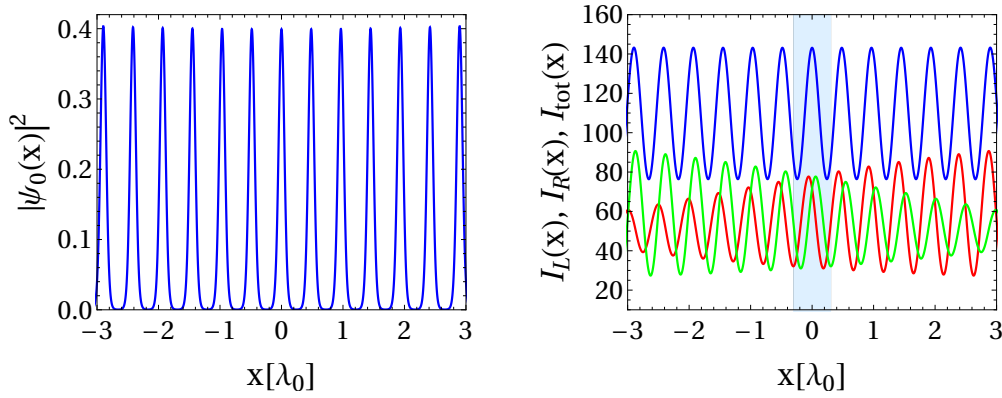


Figura 9: Estado estacionario en el régimen de autoorganización. La figura izquierda muestra la densidad del condensado, mientras que la figura derecha muestra la intensidad del campo que incide desde el lado derecho del condensado (rojo), desde el lado izquierdo (verde) y la intensidad total, correspondiente a su suma (azul). La intensidad de los campos se reporta en unidades de $cE_r/(\lambda_0 A)$. Los parámetros empleados en la simulación son $L = 10\lambda_0$, $I_L = I_R = 50E_r$, $\zeta = 0.2$, $\tilde{g}_c = 1$ y $m\omega_x^2\lambda_0^2 = 0.001E_r$.

4.3. Resultados numéricos: autoorganización de átomos y radiación.

El modelo de autoorganización de Ostermann es esencialmente distinto al modelo de autoorganización asistido por una cavidad descrito en el capítulo anterior: más allá de que en el modelo de Ostermann se proponga la implementación de dos haces contrapropagantes que inciden de manera longitudinal en el condensado como mecanismo para generar la autoorganización, la diferencia fundamental radica en que el estado de los campos se configura de manera dinámica en función de la interacción radiación materia, mientras que en el caso de la autoorganización inducida por una cavidad óptica el modo del campo (y por tanto el potencial óptico) es predefinido de manera externa por las propiedades de la cavidad una vez que las fluctuaciones de la densidad del condensado exciten dicho modo por la dispersión de fotones del haz de bombeo hacia su interior. Esta diferencia es lo que conduce al fenómeno de autoorganización dinámica, como se muestra en esta sección.

La solución de las ecuaciones adimensionales acopladas (70)-(73) se puede determinar de manera autoconsistente empleando una variante del método de evolución temporal en tiempo real e imaginario, cuyas bases se discuten en el complemento (6.4). El procedimiento consiste en calcular la evolución temporal del estado homogéneo del condensado $\tilde{\psi}_0 = \sqrt{\lambda_0/L}$ para un valor de la intensidad de los haces incidentes mayor al valor crítico dado en la ecuación (82). En cada paso del método de evolución temporal se determinan las condiciones de frontera dadas en (72) y (73), las cuales se emplean para propagar ambos campos en la región del condensado al resolver la ecuación de Helmholtz adimensional (71) por el método de Runge Kutta 4. Estos campos propagados definen un nuevo potencial óptico que sirve para determinar el estado del condensado en la siguiente iteración del método. Este procedimiento continua hasta registrar la convergencia del potencial químico del condensado, el cual se puede obtener de la ecuación (70):

$$\mu = \int d\tilde{x} \tilde{\psi}^*(\tilde{x}, \tilde{t}) \left[-\frac{1}{(2\pi)^2} \partial_{\tilde{x}}^2 + \frac{V_{\text{trap}}(\tilde{x})}{E_r} - \frac{|\tilde{E}(\tilde{x})|^2}{E_r} + \tilde{g}_c |\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t})|^2 \right] \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad (83)$$

siendo el uso de la transformada rápida de Fourier una forma conveniente de calcular la segunda derivada de la función de onda del condensado en la expresión anterior. La inestabilidad del estado homogéneo se muestra en la Figura 9, en donde se aprecia que la evolución temporal en tiempo imaginario converge a una configuración en donde hay modulación espacial periódica en la densidad del condensado que indica el rompimiento de la simetría de traslación continua del estado homogéneo. En contraste con el estado normal⁹, el perfil de intensidad de los campos

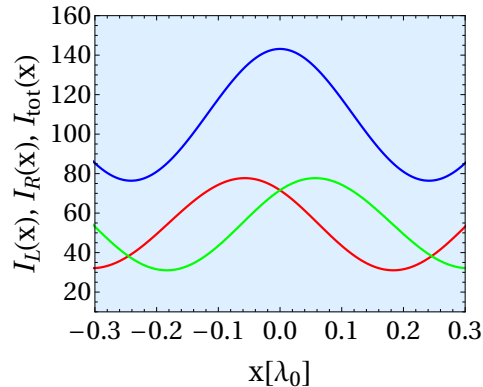


Figura 10: Acercamiento a la zona sombreada en el la gráfica del perfil de intensidad de los campos mostrada en la Figura 9. El valor máximo de la intensidad de los campos incidentes está desplazado en relación a la posición del máximo de densidad. Los parámetros de la simulación son los mismos que los empleados en la Figura 9.

incidentes decae a medida que se propagan en el interior del condensado. Este efecto tiene origen en la dispersión de los campos producida por la distribución de densidad periódica característica de la autoorganización, la cual de manera intuitiva se puede considerar como una rejilla de difracción. Este proceso se maximiza debido a que la separación d entre dos máximos consecutivos de densidad del condensado coincide con la longitud de onda de los campos, que según el espectro de excitaciones dado en la ecuación (81) satisface $d = 2\pi/q_c$, es decir:

$$d = \frac{\pi}{k_{\text{eff}}} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{1 + \frac{\zeta\lambda_0}{L}}} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\epsilon_0}n}} \quad (84)$$

Aun cuando hay decaimiento en el perfil de intensidad de cada campo incidente, la intensidad total $I_{\text{tot}} = I_L + I_R$ evidencia la emergencia de una red óptica cuyas propiedades no están externamente predefinidas ya que dependen dinámicamente de la densidad del condensado y de la longitud de onda e intensidad de los campos incidentes. En la Figura 10 se muestra un acercamiento a la región sombreada en el perfil de intensidad de la Figura 9, en donde se exhibe que la posición de los máximos de intensidad de los campos incidentes no coincide con la posición del máximo de densidad. Como consecuencia de esto los átomos que constituyen al condensado están sometidos a gradientes de potencial debido a que no se localizan en las posiciones de los mínimos locales de energía configurados por cada campo incidente. Por un lado, estos gradientes generan el mecanismo de autoorganización ya que inducen fluctuaciones en la densidad del condensado, las cuales no se estabilizan si el valor de la intensidad de los haces incidentes supera el umbral crítico. Por otro lado inducen un acoplamiento fuerte entre

⁹En donde el efecto del condensado sobre los campos es el de introducir dispersión óptica sin modular la intensidad de los campos incidentes.

el campo y los átomos que de manera efectiva generan interacciones de largo alcance entre átomos. Lo anterior debido a que al despreciar los efectos de retardo en la propagación de los campos su energía se puede distribuir de manera instantánea en los grados de libertad de los átomos. Finalmente en la Figura 11 se muestra la evolución temporal del estado homogéneo

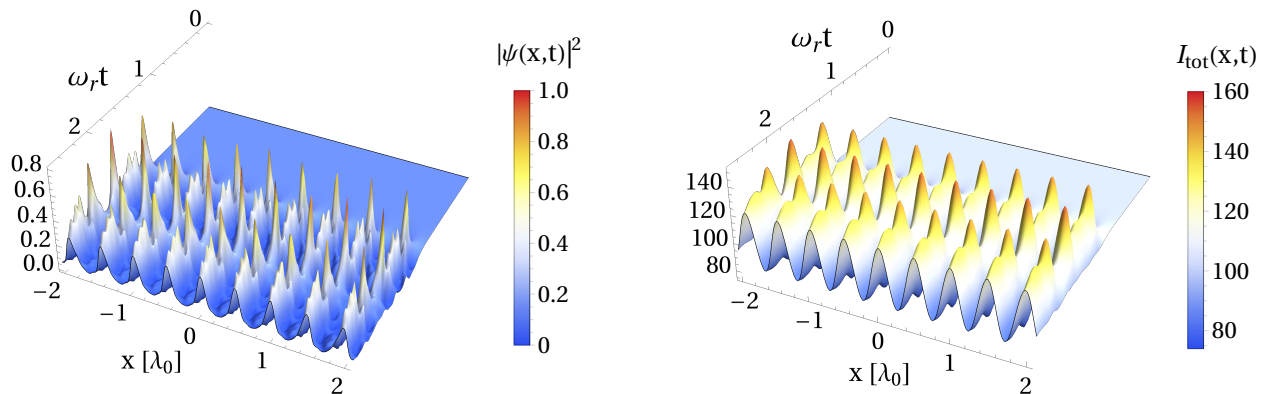


Figura 11: Evolución temporal del estado homogéneo en donde se observa la autoorganización dinámica. Los parámetros empleados en la simulación son los mismos que en la Figura 9.

y del perfil de intensidad constante bajo las mismas condiciones empleadas en el cómputo del estado estacionario. De este resultado se observa que a pesar de despreciar los efectos de retardo en la propagación de los campos existe un valor de tiempo, caracterizado por el inverso de la frecuencia de retroceso, a partir del cual se generan oscilaciones entre el estado autoorganizado y el estado homogéneo tanto en la densidad del condensado como en la distribución de intensidad total de los campos. Esta inestabilidad dinámica que da lugar a la formación de estructuras periódicas en la densidad del condensado y en la intensidad de los campos, las cuales recuerdan a las fases cristalinas del estado sólido, se conoce como autoorganización dinámica.

4.4. Adenda: autoorganización dinámica en sistemas de tres niveles.

El estado supersólido se caracteriza por la existencia simultánea de orden de largo alcance diagonal y no diagonal como consecuencia de la ruptura espontánea de las simetrías continuas de traslación espacial e invarianza de norma [50]. Teniendo en cuenta esto, el fenómeno de autoorganización en condensados de Bose Einstein sugiere un mecanismo para la realización del estado supersólido debido a que el estado estacionario resultante rompe la simetría de traslación y mantiene las propiedades superfluidas características de la fase condensada [51]. Esto se evidencia en el modelo de Ostermann discutido en la sección anterior, en donde la autoorganización se manifiesta en la emergencia del potencial óptico periódico sin recurrir a la preselección de modos espaciales específicos introducida por una cavidad óptica. Pese a esto, dada la naturaleza clásica de los modos del campo en este modelo no se hace evidente una posible conexión entre la transición de autoorganización y la superradiancia dentro del formalismo aquí presentado.

Motivados por la diversidad de configuraciones de materia cuántica que surgen en gases ultrafríos multicomponentes [52, 53, 54, 55], por la autoorganización espacial como un posible mecanismo para realizar el estado supersólido y por indagar sobre posible relación con la transición de fase superradiante del modelo de Dicke, proponemos el estudio de la autoorganización espinorial en condensados de tres niveles. De manera concreta, proponemos caracterizar el estado estacionario

de un condensado de Bose Einstein de átomos de tres niveles en configuración V confinados en el eje de una cavidad anular por un potencial de gran intensidad en las direcciones transversales, de tal manera que el sistema se puede considerar unidimensional. Los átomos son bombeados transversalmente por un haz coherente de frecuencia ω_p que induce las transiciones $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ y $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ con una frecuencia de Rabi real Ω la cual se asume la misma para todas las transiciones. Asimismo, las transiciones $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ y $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ son inducidas por un par de modos degenerados contrapropagantes de la cavidad anular, a_{\pm} , los cuales se acoplan a los átomos mediante las funciones de modo $g_{\pm}(x) = g_0 e^{\pm i k_c x}$. En el régimen dispersivo de alta desintonía la dinámica del estado excitado $|2\rangle$ se puede determinar por eliminación adiabática. Adicionalmente, en el límite termodinámico la aproximación de campo medio provee una descripción adecuada para caracterizar la autoorganización en este sistema y permite indagar sobre los efectos físicos derivados de la inclusión del estado $|1\rangle$. Esto a partir de la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas que se determinan siguiendo el mismo procedimiento desarrollado en el capítulo 3. Al considerar solo los términos que conserven el número de excitaciones del sistema bajo interacción dipolar, el hamiltoniano que describe la dinámica de un átomo del condensado en la configuración descrita viene dado por:

$$H^{(1)} = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \hbar \sum_{i=1}^2 \omega_i \sigma_{i,i} \right) + \hbar \omega_c (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + \hbar \Omega \left[e^{-i\omega_p t} (\sigma_{1,0} + \sigma_{2,0}) + \text{h.c.} \right] \\ + \hbar [(g_+(x)a_+ + g_-(x)a_-)(\sigma_{1,0} + \sigma_{2,0}) + \text{h.c.}] \quad (85)$$

en donde $\hbar\omega_i$ es la energía del i -ésimo estado relativa al valor de la energía del estado base, $p_x^2/2m$ es la energía cinética del centro de masa del átomo y $\hbar\omega_c$ es la energía de cada uno de los modos de la cavidad; mientras que $g_{+(-)}(x)$ corresponde a la frecuencia de acoplamiento del átomo con el modo $a_{+(-)}$ y Ω denota al valor de la frecuencia de Rabi en el acoplamiento del haz de bombeo con el átomo. Además se introduce la siguiente notación para en operadores de transición atómica $\sigma_{i,j} \equiv |i\rangle\langle j|$. Al definir el operador $U(t) = \exp[i\omega_p t(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2}) + a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-]$, el hamiltoniano de un átomo resultante de la transformación $H = i\hbar(\partial_t U)U^\dagger + UH^{(1)}U^\dagger$ no depende explícitamente del tiempo:

$$H = \left(\frac{p_x^2}{2m} - \hbar \sum_{i=1}^2 \omega_i \sigma_{i,i} \right) - \hbar \Delta_c (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + \hbar \Omega [\sigma_{1,0} + \sigma_{2,0} + \text{h.c.}] \\ + \hbar [(g_+(x)a_+ + g_-(x)a_-)(\sigma_{1,0} + \sigma_{2,0}) + \text{h.c.}] \quad (86)$$

siendo $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$ y $\Delta_i = \omega_p - \omega_i$ la desintonía de la cavidad y de los estados atómicos relativa a la frecuencia del haz de bombeo, respectivamente. La dinámica del colectivo de átomos se describe al generalizar el hamiltoniano de un cuerpo empleando el formalismo de segunda cuantización. En el apéndice 6.5 se muestra que las ecuaciones de campo medio asociadas a la amplitud de los campos $\langle a_{\pm} \rangle = \alpha_{\pm} = |\alpha_{\pm}| e^{\pm i\phi_{\pm}}$ y $\langle \Psi_0(x) \rangle = \psi_0(x)$, resultantes de la eliminación adiabática de los estados excitados vienen dadas por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0(x) + \hbar U_{\text{ef}} \left| e^{-ik_c x} \alpha_+^* + e^{ik_c x} \alpha_-^* + \frac{\eta_{\text{ef}}}{U_{\text{ef}}} \right|^2 \psi_0(x) = i\hbar \partial_t \psi_0(x) \quad (87)$$

$$i\delta_t \alpha_{\pm} = -(\Delta_c - U_{\text{ef}} N + i\kappa) \alpha_{\pm} + U_{\text{ef}} N_{\pm 2} \alpha_{\mp} + \eta_{\text{ef}} N_{\pm 1} \quad (88)$$

con $\Delta_{\text{ef}} = \Delta_1 \Delta_2 / (\Delta_1 + \Delta_2)$, $U_{\text{ef}} = g_0^2 / \Delta_{\text{ef}}$ y $\eta_{\text{ef}} = g_0 \Omega / \Delta_{\text{ef}}$. También se introducen las fracciones de átomos máximamente dispersados por los modos de la cavidad con momentum k_c y $2k_c$:

$$|N_{\pm m}| = \left| \int dx \psi_0^*(x) e^{\mp i m k_c x} \psi_0(x) \right| \quad (89)$$

Cabe resaltar que bajo la eliminación adiabática de los dos niveles excitados en el esquema V, el hamiltoniano efectivo se reduce al estudiado en la referencia [51] con una desintonía efectiva Δ_{ef} que depende de la desintonía de los dos niveles. En este trabajo los autores muestran que en el estado estacionario de la dinámica disipativa del sistema, la expresión $\langle \Psi_0(x) \rangle$ describe la emergencia de un supersólido acompañada de la excitación superradiante de los modos de la cavidad si la intensidad del haz de bombeo η_{ef} supera un umbral crítico. Para mostrar esto calculamos numéricamente el estado estacionario de las ecuaciones (87) y (88) empleando el método de evolución temporal en tiempo imaginario. Debido a que en la fase homogénea el condensado posee simetría de inversión espacial dada por $\psi_0(-x) = \psi_0(x)$, se tiene que $N_{\pm m} = N_{\mp m}$. En este caso $|\alpha_+| = |\alpha_-| = |\alpha|$, de tal manera que el potencial óptico al que está sometido el condensado en el estado estacionario cerca al umbral crítico viene dado por:

$$V_{\text{opt}}(x, \alpha) = 2U_{\text{ef}} |\alpha|^2 \cos(2k_c x + 2\Delta\phi) + 4\eta_{\text{ef}} |\alpha| \cos(k_c x + \Delta\phi) \cos(\Phi) \quad (90)$$

tal que $\Delta\phi = (\phi_+ - \phi_-)/2$ y $2\Phi = \phi_+ + \phi_-$. De esta expresión se observa que el efecto de $\Delta\phi$ sobre la fenomenología del estado autoorganizado es desplazar la posición de los máximos de densidad del condensado. Dado esto fijamos los valores de las fases en las amplitudes de campo α_{\pm} sin pérdida de generalidad en la obtención de los resultados que se muestran a continuación. En este sistema el mecanismo de autoorganización es conceptualmente similar a la del modelo

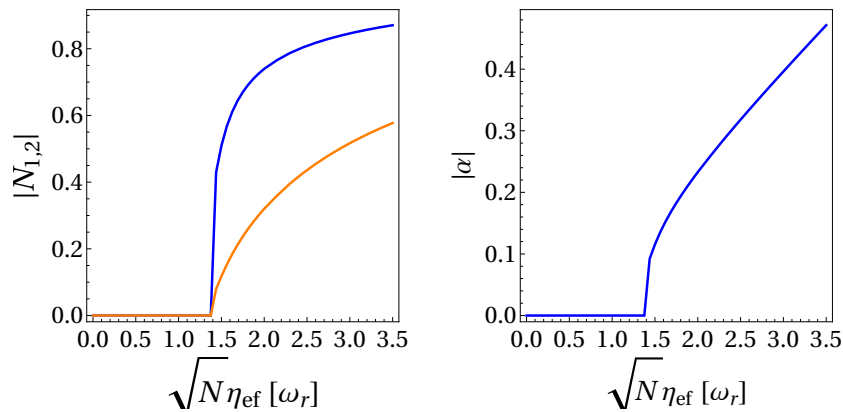


Figura 12: Transición de fase superradiante. En la figura se muestran el número de átomos máximamente dispersados $|N_1|$ (azul), $|N_2|$ (naranja) y la amplitud de los modos del campo $|\alpha|$ en función de la frecuencia efectiva η_{ef} , en donde se observa un valor crítico $\sqrt{N}\eta_{\text{ef}}^c \approx 1.4\omega_r$ a partir del cual hay excitación macroscópica de los modos de la cavidad. Los parámetros empleados en la simulación son $\Delta\phi = 1.71\pi$, $\Phi = 0.09\pi$ y $(\Delta_c, U_{\text{ef}}, \kappa) = (-8, -1, 2)\omega_r$.

de Ostermann: la intensidad de los modos contrapropagantes forma una red óptica de manera espontánea que no requiere condiciones de frontera concretas en los campos para su configuración. Sin embargo, es bien sabido que la interacción entre átomos es fundamental en la estabilización del estado superfluido del condensado de Bose Einstein. En esta propuesta se puede justificar la ausencia del potencial de interacción entre átomos debido a que los acoplamientos radiación materia dominan la dinámica del sistema. Asimismo es de esperar que bajo la aproximación de dos modos en el estado del condensado, el modelo de autoorganización propuesto pueda ser identificado con el modelo de Dicke de dos modos del campo. De acuerdo con esto se puede anticipar que el valor crítico de la intensidad del haz de bombeo cumpla una ecuación similar a

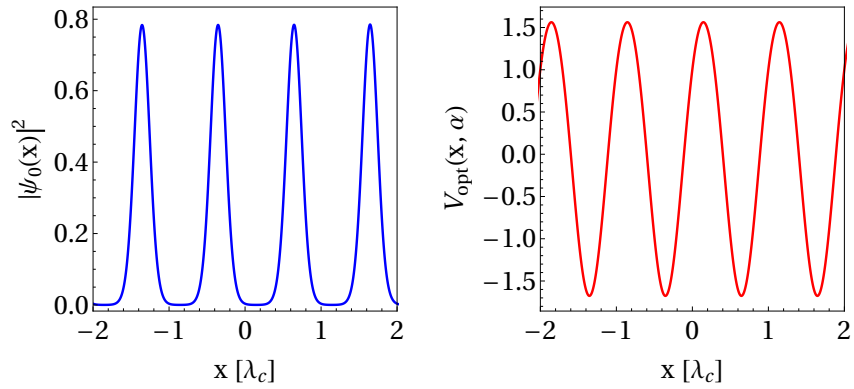


Figura 13: Autoorganización espacial. En la figura se muestran el perfil de densidad del condensado y el potencial óptico para $\sqrt{N}\eta_{\text{ef}} = 2.5\omega_r$ empleando el mismo conjunto de parámetros que en la Figura 12.

(48) cerca del umbral de transición¹⁰, en donde se observa que el efecto de la interacción entre átomos sobre la autoorganización es aumentar el umbral crítico de la intensidad. Dado esto, se puede argumentar que existe un régimen para el cual el estado supersólido con $g_c = 0$ se puede conectar adiabáticamente con el estado $g_c \neq 0$, por lo tanto esta propuesta contempla la emergencia de un estado supersólido genuino bajo las condiciones experimentales adecuadas [56].

¹⁰Para regiones alejadas de la curva crítica la aproximación de dos modos del condensado se vuelve imprecisa debido a la excitación de componentes de momentum adicionales.

5. Conclusiones.

En este trabajo se presenta una formulación teórica que describe el proceso de autoorganización de un condensado de Bose Einstein confinado en una cavidad y en espacio libre, con el objetivo de establecer las condiciones para las cuales estos sistemas realizan una transición al estado autoorganizado. Comenzando con el análisis de estabilidad del estado homogéneo se identifica la existencia del régimen de intensidad de los haces de bombeo que da lugar a la autoorganización, mostrando además que el mecanismo que subyace a esta transición se debe a la divergencia en las fluctuaciones de la densidad para un valor concreto de la intensidad, del cual se obtuvo una expresión analítica para ambas configuraciones. Del análisis del sistema en donde el condensado se encuentra confinado en una cavidad se evidencia la existencia de un umbral en la intensidad del haz de bombeo para la cual se generan excitaciones macroscópicas del modo de la cavidad. Como consecuencia de esto se pudo establecer que la dinámica del centro de masa de los átomos de un condensado confinado en una cavidad óptica actúa como un colectivo de sistemas efectivos de dos estados que permite una realización del modelo de Dicke, de lo cual se establece una correspondencia entre la transición de autoorganización y la transición superradiante bajo la adecuada identificación de parámetros y simetrías entre ambos sistemas. Siguiendo la misma metodología se concluye que el mecanismo que genera la autoorganización del condensado en espacio libre es esencialmente el mismo que en el caso del sistema confinado en la cavidad, siendo la diferencia fundamental entre ambas configuraciones la emergencia de una red óptica cuyas propiedades no están predefinidas de manera externa al sistema, sino que dependen de la dinámica acoplada del condensado y los campos. Es importante mencionar que a pesar de las semejanzas con algunas propiedades de los sistemas cristalinos, las ideas aquí desarrolladas no son suficientes para establecer una conexión formal entre cristalización y autoorganización. Lo anterior debido a que es necesario caracterizar propiedades como lo son el orden de largo alcance no diagonal, el factor de estructura, el tiempo de vida y la longitud de correlación en las excitaciones del estado autoorganizado para discernir una posible relación entre ambos fenómenos.

Debido a la versatilidad experimental que ofrecen los sistemas constituidos por gases ultrafríos acoplados a modos del campo de radiación, su implementación y caracterización en aras del desarrollo de los fundamentos de la materia condensada y la óptica cuántica se explora cada vez más. A partir de los desarrollos presentados en este trabajo proponemos indagar sobre la viabilidad de las siguientes extensiones:

- Caracterizar efectos ópticos no lineales y análogos de texturas de espín en la propuesta del modelo de autoorganización en sistemas de tres niveles.
- La preparación de estados no triviales del campo cuantizado haciendo uso del condensado en el estado autoorganizado como medio activo.
- Extender la discusión del modelo de Ostermann al considerar conceptos del formalismo de las transiciones de fase dinámicas en la caracterización de la autoorganización.
- Estudiar los efectos de la modulación temporal en la intensidad de los haces contrapropagantes para indagar sobre la posibilidad de proponer un contexto experimental en donde se manifieste la realización de un cristal de tiempo.

6. Apéndices.

6.1. Ecuación de Gross Pitaevskii.

El formalismo que describe el estado inhomogéneo de un BEC diluido bajo la aproximación de campo medio está contenido en la ecuación de Gross-Pitaevskii (EGP), en la cual se considera que el parámetro de orden de la fase condensada $\psi(x, t)$ evoluciona obedeciendo la ecuación diferencial no lineal [57]:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + g_c |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{r}, t) \quad (91)$$

en donde $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ es el potencial externo al que están sometidos los átomos (ej. potenciales de confinamiento) y g_c es un parámetro que caracteriza la dispersión entre dos átomos del condensado a bajas energías y está relacionado con la longitud de dispersión a mediante la expresión $g_c = 4\pi\hbar^2 a/m$. La derivación de la EGP se sustenta en el límite de baja temperatura, en donde los procesos de colisión dominantes son a baja energía, la depleción de los átomos en la fase condensada debido a fluctuaciones térmicas y cuánticas es despreciable en relación a la densidad de átomos en estado condensado; y en la condición de gas diluido, bajo la cual se considera que el alcance de la interacción entre átomos, caracterizada por la longitud de dispersión, es mucho menor que la distancia media entre átomos dada por $(N/V)^{-1/3}$, siendo N el número de átomos que conforman el condensado y V el volumen en el que se distribuyen. Las condiciones anteriores permiten capturar los efectos complejos del potencial de interacción entre átomos con un potencial efectivo (o pseudo-potencial) de dos cuerpos cuyo comportamiento a largas distancias coincida con el potencial de interacción, de manera que el potencial efectivo reproduzca las propiedades de la dispersión a bajas energías en el límite asintótico definidas por el potencial de interacción real. En adición, las colisiones a baja energía que ocurren en la región de la distribución de momentos térmicamente activa son independientes de la energía de los átomos. De acuerdo a esto todos los aspectos relevantes de la interacción entre átomos están caracterizados totalmente por la longitud de dispersión. Teniendo bajo consideración lo anteriormente expuesto, el hamiltoniano que describe la dinámica del estado de un gas diluido de bosones a baja temperatura tiene la estructura:

$$H = \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \right) \Psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}') V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \Psi(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}) \quad (92)$$

siendo $\Psi(\mathbf{r})$ el operador de campo que aniquila un bosón en la posición \mathbf{r} y satisface el álgebra $[\Psi(\mathbf{r}), \Psi^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $[\Psi(\mathbf{r}), \Psi(\mathbf{r}')] = 0$. La evolución temporal del operador de campo se determina mediante la ecuación de movimiento de Heisenberg $i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = -[H, \Psi(\mathbf{r}, t)]$, siendo en este caso:

$$i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \int d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}', t) V(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \Psi(\mathbf{r}', t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (93)$$

Para simplificar el tratamiento de la dinámica del condensado es conveniente hacer uso de la aproximación de campo medio, la cual consiste en considerar que las fluctuaciones de los operadores de campo son despreciables en relación a su valor medio en el estado estable, de manera que $\Psi(\mathbf{r}, t) \approx \langle \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta\Psi = \psi(\mathbf{r}, t) + \delta\Psi$, en donde la función de onda del condensado satisface la condición de normalización $\int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = N$. Reemplazando esta expansión en la

ecuación (93) y despreciando los términos de orden lineal en las fluctuaciones $\delta\Psi$ o superior se obtiene una ecuación para el valor medio del operador de campo:

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \int d\mathbf{r}'\psi^*(\mathbf{r}',t)V(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|)\psi(\mathbf{r}',t) \right] \psi(\mathbf{r},t) \quad (94)$$

De manera general, el potencial de interacción $V(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|)$ depende de los detalles de los constituyentes del sistema de muchos cuerpos. Sin embargo, es posible mostrar que en el régimen de baja temperatura y en el límite diluido los procesos de dispersión mayoritarios son de tipo onda s , los cuales se caracterizan por ser de corto alcance y por estar definidos en función de la longitud de dispersión a . Lo anterior es capturado en la forma del potencial de interacción [58]:

$$V(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|) = g_c\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \quad (95)$$

que al reemplazar en la ecuación (94) conduce a la famosa ecuación de Gross Pitaevskii.

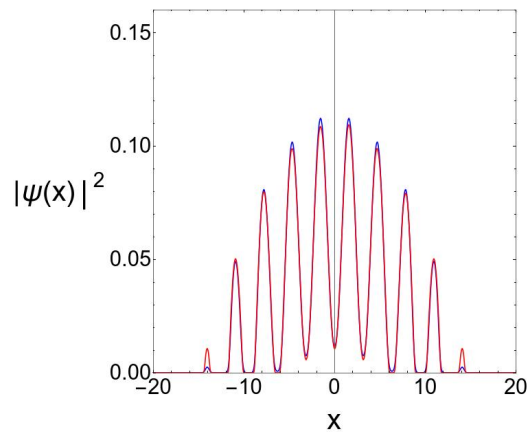


Figura 14: Comparación entre el código realizado en Mathematica (rojo) y XMDS2 (azul). Los parámetros de la simulación son $V(x) = 100\cos^2(x) + 0,5x^2$, $N_x = 4601$, $L = 200\lambda$ y $\tilde{g}_c = 10^3$

6.2. Curva crítica en el modelo de Dicke para $\lambda \sim \lambda_c$.

El diagrama de fases que describe la transición de fase superradiante se determina mediante la resolución para α de la ecuación trascendental ($\hbar = 1$):

$$\omega_c E(\alpha) = 2\lambda^2 \tanh(\beta E(\alpha)), \quad E(\alpha) = \sqrt{\frac{\omega_a^2}{4} + \frac{4\lambda^2}{N}\alpha^2} \quad (96)$$

Para describir el comportamiento crítico del modelo de Dicke en la región $\lambda \sim \lambda_c$ se puede expandir ambos lados de la ecuación anterior hasta segundo orden en α teniendo en cuenta $E(\alpha) \approx \frac{\omega_a}{2} + \frac{4\lambda^2}{N\omega_a}\alpha^2$, de forma que:

$$\tanh(\beta E(\alpha)) = \frac{e^{\beta E(\alpha)} - e^{-\beta E(\alpha)}}{e^{\beta E(\alpha)} + e^{-\beta E(\alpha)}} \approx \frac{e^{\beta \frac{\omega_a}{2}} \left(1 + \frac{4\beta\lambda^2}{N\omega_a}\alpha^2\right) - e^{-\beta \frac{\omega_a}{2}} \left(1 - \frac{4\beta\lambda^2}{N\omega_a}\alpha^2\right)}{e^{\beta \frac{\omega_a}{2}} \left(1 + \frac{4\beta\lambda^2}{N\omega_a}\alpha^2\right) + e^{-\beta \frac{\omega_a}{2}} \left(1 - \frac{4\beta\lambda^2}{N\omega_a}\alpha^2\right)} \quad (97)$$

$$\tanh(\beta E(\alpha)) \approx \frac{1 + \frac{4\beta\lambda^2\alpha^2}{N\omega_a} \coth\left(\frac{\beta\omega_a}{2}\right)}{\coth\left(\frac{\beta\omega_a}{2}\right) + \frac{4\beta\lambda^2\alpha^2}{N\omega_a}} \quad (98)$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_c(T) = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c\omega_a \coth\left(\frac{\beta\omega_a}{2}\right)}$, el resultado anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\tanh(\beta E(\alpha)) \approx \frac{1}{4\omega_a} \frac{N\omega_a^2\omega_c + 16\beta\lambda_c^2\lambda^2\alpha^2}{N\lambda_c^2 + \beta\omega_c\lambda^2\alpha^2} \quad (99)$$

Empleando este resultado en la ecuación (96), reagrupando y conservando los términos de orden α^2 se obtiene que la curva crítica que separa la fase normal de la superradiante, en función del parámetro de acoplamiento λ , satisface:

$$\alpha = \sqrt{Nf(\lambda)(\lambda - \lambda_c(T))}, \quad f(\lambda) = \frac{\lambda + \lambda_c}{\lambda^2} \left[\frac{8\lambda_c^2}{\omega_a^2} + \left(\frac{\omega_c}{\lambda_c^2} - \frac{16\lambda_c^2}{\omega_a^2\omega_c} \right) \beta\lambda^2 \right]^{-1} \quad (100)$$

6.3. Cálculo del espectro de excitaciones debajo del umbral de autoorganización.

En este apartado se detalla la derivación del espectro de excitaciones debajo del umbral de autoorganización presentada la sección 4.2.2. Para valores de la intensidad total por debajo del umbral crítico el estado estacionario del condensado está dado por $\psi_0(x) = \sqrt{\lambda_0/L}$, mientras que el perfil espacial de los campos contrapropagantes es $E_{L,R}^{(0)}(x) = C_{L,R}e^{\pm ik_{\text{eff}}x}$. Bajo esta configuración inicial, las fluctuaciones de los campos descritas por la ecuación (76) se reducen a:

$$\partial_x^2 \delta E_{L,R}^{(0)}(x) + k_{\text{eff}}^2 \delta E_{L,R}^{(0)}(x) + 4\pi^2 \zeta \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} C_{L,R} (\delta\psi_0(x) + \delta\psi_0^*(x)) e^{\pm ik_{\text{eff}}x} = 0 \quad (101)$$

Introduciendo la transformada inversa de Fourier $f(x) = \sum_k e^{ikx} f(k)$ en los elementos que definen la ecuación anterior se obtiene:

$$\sum_k (k_{\text{eff}}^2 - k^2) e^{ikx} \delta E_{L,R}^{(0)}(k) + 4\pi^2 \zeta \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} C_{L,R} \sum_k \left(e^{i(k \pm k_{\text{eff}})x} \delta\psi_0(k) + e^{i(-k \pm k_{\text{eff}})x} \delta\psi_0^*(k) \right) = 0 \quad (102)$$

Multiplicando la expresión anterior por e^{-iqx} , integrando sobre la extensión del condensado e imponiendo condiciones de frontera periódicas se obtiene:

$$(k_{\text{eff}}^2 - q^2) \delta E_{L,R}^{(0)}(q) + 4\pi^2 \zeta \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} C_{L,R} \left(\delta\psi_0(q \mp k_{\text{eff}}) + \delta\psi_0^*(\pm k_{\text{eff}} - q) \right) = 0 \quad (103)$$

Que al despejar $E_{L,R}^{(0)}(q)$ resulta en:

$$\delta E_{L,R}^{(0)}(q) = \frac{4\pi^2 \zeta \sqrt{\lambda_0/L}}{q^2 - k_{\text{eff}}^2} \left[\delta\psi_0(q \mp k_{\text{eff}}) + \delta\psi_0^*(\pm k_{\text{eff}} - q) \right] C_{L,R} \quad (104)$$

Por otro lado, la ecuación (78) que describe las fluctuaciones en la densidad del condensado se reduce a:

$$\begin{aligned} i\partial_t(\delta\psi_0(x)) = & -\frac{1}{4\pi^2} \partial_x^2(\delta\psi_0(x)) - \left(\mu_0 + \frac{I_{\text{tot}}}{E_r} - 2\frac{\tilde{g}_c \lambda_0}{L} \right) \delta\psi_0(x) + \frac{\tilde{g}_c \lambda_0}{L} \delta\psi_0^*(x) \\ & - \frac{1}{E_r} \left(C_L^* e^{-ik_{\text{eff}}x} \delta E_L^{(0)}(x) + C_R^* e^{ik_{\text{eff}}x} \delta E_R^{(0)}(x) + \text{c.c.} \right) \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} \end{aligned} \quad (105)$$

siendo $\mu_0 = -(I_{\text{tot}}/E_r) + (\tilde{g}_c \lambda_0/L)$ el potencial químico asociado al estado homogéneo del condensado en ausencia de trampa armónica. Al emplear la transformada inversa de Fourier en la expresión anterior y hacer uso de la ecuación (104) se obtiene:

$$\begin{aligned} i \sum_k e^{ikx} \partial_t \delta\psi_0(k) = & \sum_k \left(\frac{k^2}{4\pi^2} + \frac{\tilde{g}_c \lambda_0}{L} \right) e^{ikx} \delta\psi_0(k) + \frac{\tilde{g}_c \lambda_0}{L} \sum_k e^{-ikx} \delta\psi_0^*(k) \\ & - \frac{4\pi^2 \zeta \lambda_0}{LE_r} \sum_k \left[\frac{e^{i(k-k_{\text{eff}})x}}{k^2 - k_{\text{eff}}^2} \left(\delta\psi_0(k - k_{\text{eff}}) + \delta\psi_0^*(k_{\text{eff}} - k) \right) |C_L|^2 \right. \\ & \left. + \frac{e^{i(k+k_{\text{eff}})x}}{k^2 - k_{\text{eff}}^2} \left(\delta\psi_0(k + k_{\text{eff}}) + \delta\psi_0^*(-k_{\text{eff}} - k) \right) |C_R|^2 + \text{c.c.} \right] \end{aligned} \quad (106)$$

Multiplicando por e^{-iqx} e integrando:

$$i\partial_t\delta\psi_0(q) = \left(\frac{q^2}{4\pi^2} + \frac{\tilde{g}_c\lambda_0}{L}\right)\delta\psi_0(q) + \frac{\tilde{g}_c\lambda_0}{L}\delta\psi_0^*(-q) - \frac{4\pi^2\zeta\lambda_0}{LE_r} \left[\frac{\delta\psi_0(q) + \delta\psi_0^*(-q)}{(q + k_{\text{eff}})^2 - k_{\text{eff}}^2}\right] I_{\text{tot}} \\ - \frac{4\pi^2\zeta\lambda_0}{LE_r} \left[\frac{\delta\psi_0(q) + \delta\psi_0^*(-q)}{(q - k_{\text{eff}})^2 - k_{\text{eff}}^2}\right] I_{\text{tot}} \quad (107)$$

Reagrupando términos se obtiene la expresión:

$$i\partial_t\delta\psi_0(q) = \left[\frac{q^2}{(2\pi)^2} + \frac{\tilde{g}_c\lambda_0}{L} - \frac{8\pi^2\zeta\lambda_0}{LE_r} \frac{I_{\text{tot}}}{q^2 - 4k_{\text{eff}}^2}\right]\delta\psi_0(q) + \left[\frac{\tilde{g}_c\lambda_0}{L} - \frac{8\pi^2\zeta\lambda_0}{LE_r} \frac{I_{\text{tot}}}{q^2 - 4k_{\text{eff}}^2}\right]\delta\psi_0^*(-q) \\ = A(q)\delta\psi_0(q) + B(q)\delta\psi_0^*(-q) \quad (108)$$

Al tomar el complejo conjugado de la ecuación anterior, las ecuaciones resultantes se pueden escribir de manera matricial como $i\partial_t\Psi_0(q) = R(q)\Psi_0(q)$:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \delta\psi_0(q) \\ \delta\psi_0^*(-q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(q) & B(q) \\ -B(q) & -A(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi_0(q) \\ \delta\psi_0^*(-q) \end{pmatrix} \quad (109)$$

en donde se tuvo cuenta que $A(q)$ y $B(q)$ son funciones pares de q . Esto es debido a que el estado homogéneo tiene simetría de inversión espacial. El espectro de excitaciones se determina de la condición $\det(R(q) - I_2\omega_q) = 0$, que en este caso corresponde a $\omega_q^2 = (A(q) + B(q))(A(q) - B(q))$:

$$\omega_q^2 = \frac{q}{(2\pi)^2} \left[\frac{q}{(2\pi)^2} + \frac{2\tilde{g}_c\lambda_0}{L} - \frac{16\pi^2\zeta\lambda_0}{LE_r} \frac{I_{\text{tot}}}{q^2 - 4k_{\text{eff}}^2} \right] \quad (110)$$

Al emplear el sistema de unidades inicial, la expresión anterior se transforma en la ecuación presentada en la sección 4.2.2.

6.4. Evolución temporal en tiempo real e imaginario.

La evolución temporal de un estado inicial dado $\psi(x, t)$ puede determinarse numéricamente por el método pseudoespectral *split step Fourier method*, el consiste en calcular de manera aproximada el operador de evolución temporal por medio de composiciones de intervalos de tiempo infinitesimales Δt . Lo anterior se lleva a cabo teniendo en cuenta que a orden $O(\Delta t)$ [59]:

$$\psi(x, t + \Delta t) \approx e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t}\psi(x, t) \approx e^{-\frac{i}{2\hbar}\Delta tV}e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta tT}e^{-\frac{i}{2\hbar}\Delta tV}\psi(x, t)$$

en donde T y V son los operadores de energía cinética y potencial, respectivamente. La relación anterior puede calcularse de manera eficiente representando el estado intermedio $\phi_1(x, t) = e^{-\frac{i}{2\hbar}\Delta tV}\psi(x, t)$ en la base de momentos y el estado $\phi_2(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta tT}\phi_1(x, t)$ en el espacio de posiciones por medio de la transformada de Fourier \mathcal{F} y su inversa. De acuerdo a esto el método se fundamenta en la implementación algoritmos pseudoespectrales para calcular de manera eficiente la expresión:

$$\psi(x, t + \Delta t) \approx e^{-\frac{i}{2\hbar}\Delta tV}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\Delta t}\mathcal{F}\left[e^{-\frac{i}{2\hbar}\Delta tV}\psi(x, t)\right]\right] \quad (111)$$

De manera general el algoritmo se puede implementar de la siguiente manera:

- Definir las mallas de posición y momento y un criterio de convergencia (por ejemplo la convergencia del potencial químico o la convergencia de la fidelidad).
- Definir un estado inicial a evolucionar.
- Computar el estado ϕ_1 implementando la transformada rápida de Fourier.
- Computar el estado ϕ_2 implementando la transformada inversa de Fourier.
- Calcular $\psi(x, t + \Delta t)$ y evaluar criterio de convergencia.
- Normalizar el estado obtenido y asignarlo como el nuevo estado inicial $\psi(x, t)$.

La normalización del estado en el último paso es de vital importancia para el correcto funcionamiento del método cuando se trata de hallar un estado estacionario de un hamiltoniano por medio de evolución en el tiempo imaginario ya que en este caso la evolución es disipativa y no conserva la norma de los estados. En la Figura 14 se muestra los resultados obtenidos de la implementación del método de *split step Fourier* en Mathematica para evaluar, por medio de evolución en tiempo imaginario $\Delta t = -i\tau$, el estado estacionario de EGP adimensional (70) empleando el potencial indicado en descripción de la imagen. Los resultados son contrastados con los obtenidos empleando el software XMDS2.

La solución de las ecuaciones de Helmholtz adimensionales (71) se obtuvieron por el método de Runge Kutta 4 propagando los campos desde los extremos del condensado bajo las condiciones iniciales dadas en (72) y (73). Por otro lado el cómputo del estado estacionario del condensado en la fase autoorganizada fue realizado al resolver la EGP adimensional (70) partiendo del estado homogéneo. Por cada ciclo la salida del método de *split step Fourier* se emplea como entrada del método Runge Kutta 4 para determinar las condiciones de frontera de las ecuaciones de Helmholtz y la intensidad total que define el nuevo potencial óptico en la EGP, de tal manera que este proceso autoconsistente continua hasta verificar la convergencia del potencial químico del condensado.

6.5. Autoorganización en BEC de tres niveles: ecuaciones de campo medio.

La dinámica del colectivo de átomos se describe al generalizar el hamiltoniano de un cuerpo dado en la ecuación (86) empleando el formalismo de segunda cuantización, siendo:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \Psi_0^\dagger(x) \partial_x^2 \Psi_0(x) + \sum_{i=1}^2 \int dx \Psi_i^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 - \hbar \Delta_i \right) \Psi_i(x) + \left[\hbar \sum_{i=1}^2 \int dx \Psi_i^\dagger(x) (g_+(x) a_+ + g_-(x) a_- + \Omega) \Psi_0(x) + \text{h.c.} \right] - \hbar \Delta_c (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) \quad (112)$$

en donde el operador de campo $\Psi_i^\dagger(x)$ crea un átomo con estado $|i\rangle$ en la posición x . Debido a que estos operadores de campo describen sistemas bosónicos satisfacen el álgebra $[\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)] = \delta_{i,j} \delta(x-y)$. Las ecuaciones de movimiento para los operadores de campo vienen dadas por:

$$[H, \Psi_0(x)] = \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi_0(x) - \hbar (g_+^*(x) a_+^\dagger + g_-^*(x) a_-^\dagger + \Omega) (\Psi_1(x) + \Psi_2(x)) = -i\hbar \partial_t \Psi_0(x) \quad (113)$$

$$[H, \Psi_1(x)] = -\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 - \hbar \Delta_1 \right) \Psi_1(x) - \hbar (g_+(x) a_+ + g_-(x) a_- + \Omega) \Psi_0(x) = -i\hbar \partial_t \Psi_1(x) \quad (114)$$

$$[H, \Psi_2(x)] = -\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 - \hbar \Delta_2 \right) \Psi_2(x) - \hbar (g_+(x) a_+ + g_-(x) a_- + \Omega) \Psi_0(x) = -i\hbar \partial_t \Psi_2(x) \quad (115)$$

$$[H, a_+] = \hbar \Delta_c a_+ - \hbar \int dx \Psi_0^\dagger(x) g_+^*(x) (\Psi_1(x) + \Psi_2(x)) = -i\hbar (\partial_t a_+ + \kappa a_+) \quad (116)$$

$$[H, a_-] = \hbar \Delta_c a_- - \hbar \int dx \Psi_0^\dagger(x) g_-^*(x) (\Psi_1(x) + \Psi_2(x)) = -i\hbar (\partial_t a_- + \kappa a_-) \quad (117)$$

En el límite dispersivo $|\Delta_2| \gg |\Delta_c|$ y $|\Delta_2| \gg |\Delta_1|$ el estado excitado $\Psi_2(x)$ alcanza una configuración estacionaria y de baja ocupación en una escala de tiempo mucho menor que el inverso de la frecuencia de retroceso, por lo cual dicho estado se puede eliminar adiabáticamente en la ecuación (115):

$$\Psi_2(x) \approx \frac{1}{\Delta_2} (g_+(x) a_+ + g_-(x) a_- + \Omega) \Psi_0(x) \quad (118)$$

Reemplazando el resultado anterior en las ecuaciones (113), (116) y (117) se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi_0(x) + \frac{\hbar}{\Delta_2} (g_+^*(x) a_+^\dagger + g_-^*(x) a_-^\dagger + \Omega) (g_+(x) a_+ + g_-(x) a_- + \Omega) \Psi_0(x) = i\hbar \partial_t \Psi_0(x) - \hbar (g_+^*(x) a_+^\dagger + g_-^*(x) a_-^\dagger + \Omega) \Psi_1(x) \quad (119)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 - \hbar \Delta_1 \right) \psi_1(x) + \hbar g_0 \left(e^{ik_c x} \alpha_+ + e^{-ik_c x} \alpha_- + \frac{\Omega}{g_0} \right) \psi_0(x) = i\hbar \partial_t \psi_1(x) \quad (120)$$

$$\hbar \Delta_c a_\pm + i\hbar (\partial_t a_\pm + \kappa a_\pm) - \frac{\hbar}{\Delta_2} \int dx \Psi_0^\dagger(x) g_\pm^*(x) (g_+(x) a_+ + g_-(x) a_- + \Omega) \Psi_0(x) = \hbar \int dx \Psi_0^\dagger(x) g_\pm^*(x) \Psi_1(x) \quad (121)$$

El estado estacionario de los campos se puede determinar de las ecuaciones (121) imponiendo la condición $\partial_t a_\tau = 0$, con $\tau \in \{+, -\}$, lo que resulta en:

$$a_+ = \frac{1}{\Delta_c - \frac{\hbar}{\Delta_2} \left(\int dx \Psi_0^\dagger(x) |g_+(x)|^2 \Psi_0(x) \right) + i\kappa} \left[\frac{1}{\Delta_2} \int dx \Psi_0^\dagger g_+^*(x) (g_-(x) a_- + \Omega) \Psi_0(x) + \int dx \Psi_0^\dagger(x) g_+^*(x) \Psi_1(x) \right] \quad (122)$$

$$a_- = \frac{1}{\Delta_c - \frac{\hbar}{\Delta_2} \left(\int dx \Psi_0^\dagger(x) |g_-(x)|^2 \Psi_0(x) \right) + i\kappa} \left[\frac{1}{\Delta_2} \int dx \Psi_0^\dagger g_-^*(x) (g_+(x) a_+ + \Omega) \Psi_0(x) + \int dx \Psi_0^\dagger(x) g_-^*(x) \Psi_1(x) \right] \quad (123)$$

En donde se debe tener en cuenta la conservación del número total de átomos N , tal que:

$$\int dx (|\psi_0(x)|^2 + |\psi_1(x)|^2) = N \quad (124)$$

Si en adición a todo lo anterior se implementa también la eliminación adiabática del estado excitado $\Psi_1(x)$ en la ecuación (120) se obtienen las ecuaciones de campo medio mostradas en el texto principal.

6.6. Programa en Mathematica: *Numerical notes on self-organization of a Bose-Einstein condensate in an optical cavity.*

Preliminary definitions.

SetDirectory[NotebookDirectory[]];

(* Physical parameters *)

$L_x = 5$; (* BEC length in units of λ *)

$g = 10$; (* Reduced atom-atom coupling *)

$U_0 = -100$; (* Atom-cavity coupling *)

$\kappa = 200$; (* Cavity linewidth in units of ω_r *)

$\Delta c = -300$; (* Cavity detuning relative to pump frequency *)

$m = 2\pi^2$ (* Atom mass *)

(* Simulation parameters *)

$N_x = 6001$; (* Number of position grid points. Set as odd number. *)

$M = (N_x - 1)/2$; (* To flip the function values as it is required to fast Fourier transform algorithm *)

$dx = \frac{L_x}{(N_x - 1)}$; (* Position step *)

$dk = \frac{2\pi}{(N_x - 1) * dx}$; (* Momentum step *)

$dt = 10^{-3}$; (* Time step *)

$N_t = 5000$; (* Numer of time steps *)

$x = \text{Table}[-0.5 * L_x + (i - 1) * dx, \{i, 1, N_x\}]$; (* Position grid values. *)

$k = \text{Table}[\frac{-\pi}{dx} + (i - 1) * dk, \{i, 1, N_x\}]$; (* Momentum grid values. *)

Stationary state: Split Step Fourier Method.

(* Add a random perturbation to check method stability *)

$\phi_{00} = \text{Table}[\frac{2}{L_x} (1 - i^2), \{i, 1, \text{Dimensions}[x][[1]]\}] + 0.01 \text{RandomReal}[\{-1, 1\}, N_x]$;

$\text{norm}_{00} = \text{Conjugate}[\phi_{00}] \cdot \phi_{00} * dx$; (* Initial state norm *)

$\phi_0 = \phi_{00} / \text{Sqrt}[\text{norm}_{00}]$; (* Normalized initial state *)

$f_0 = \text{Thread}[\{x, \text{Abs}[\phi_0]^2\}]$; (* Initial state wavefunction *)

(* Chemical potential calculation *)

$\mu_{\text{pot}}[\text{mass}_-, \text{Vo}_{\text{pt}}_-, \text{gato}_-, \text{wavefunction}_-] := \text{Module}[\{m = \text{mass}, V = \text{Vo}_{\text{pt}}, g = \text{gato},$
 $\psi = \text{wavefunction}, \psi_{\text{aux}}, D2\psi\},$

$\psi_{\text{aux}} = \text{RotateRight}[\text{Fourier}[\text{RotateLeft}[\psi, M]], M]$;

$D2\psi = -\text{RotateRight}[\text{InverseFourier}[\text{RotateLeft}[k^2 * \psi_{\text{aux}}, M]], M]$; (* Second derivate *)

$\text{Chop} \left[\left(\frac{-1}{2 * m} * \text{Conjugate}[\psi] \cdot D2\psi + V \cdot (\text{Abs}[\psi])^2 + g * (\text{Abs}[\psi])^2 \cdot (\text{Abs}[\psi])^2 \right) * dx \right]$
 $];$

(* Stationary state via split step Fourier Method *)

(* Set typeEvolution= 1 for real time and typeEvolution= $-I$ for imaginary time evolution. *)

GPSolver[state_, intensity_, Ntime_, typeEvolution_] :=
Module[{ $\phi0 = \text{state}$, $\eta = \text{intensity}$, $Nt = \text{Ntime}$, $te = \text{typeEvolution}$, $M, l, \mu0, \alpha0, v, \phiaux0, \phiaux1,$
 $\psiev, \text{norm}\psiev, \phiev, \mu f, \text{err}\mu0, \text{err}\alpha0, \alpha$ },

(*Initialization*)

$M = (Nx - 1)/2$; (* To calculate Fourier transform *)
 $\mu0 = \mu\text{pot}[m, v, g, \phi0]$; (* Chemical potential using μpot function *)
 $l = 1$;
 $\text{err}\mu0 = 1, 0$; (* Error in chemical potential *)
 $\text{err}\alpha0 = 1, 0$; (* Error in cavity field amplitude *)

$\alpha0 = \frac{\eta * (\text{Abs}[\phi0])^2 * \text{Cos}[2 * \pi * x] * dx}{\Delta c - (U0 * (\text{Abs}[\phi0])^2 * (\text{Cos}[2 * \pi * x])^2 * dx) + I * \kappa}$; (* Field amplitude *)

Monitor[
While [$\text{err}\mu0 > 10^{-7} \wedge l < Nt + 1$,

(* Optical potential *)

$v = (\text{Abs}[\alpha0])^2 * U0 * (\text{Cos}[2 * \pi * x])^2 + (\alpha0 + \text{Conjugate}[\alpha0]) * \eta * \text{Cos}[2 * \pi * x]$;

(* Split step Fourier Method *)

$\phiaux0 = \text{RotateRight} [\text{Fourier} [\text{RotateLeft} [\text{Exp} [\frac{-dt * te * I}{2} (v + g * \text{Abs}[\phi0]^2)] \phi0, M]], M]$;
 $\phiaux1 = \text{RotateRight} [\text{InverseFourier} [\text{RotateLeft} [\text{Exp} [\frac{-dt * te * I}{2 * m} * k^2] \phiaux0, M]], M]$;
 $\psiev = \text{Exp} [\frac{-dt * te * I}{2} (v + g * \text{Abs}[\phi0]^2)] \phiaux1$; (* Evolved wavefunction *)
 $\text{norm}\psiev = \frac{1 - \text{Conjugate}[\psiev] * \psiev * dx}{I + 1} (te - 1) + 1$; (* Norm of evolved wavefunction *)
 $\phiev = \psiev / \text{Sqrt}[\text{norm}\psiev]$; (* Wavefunction normalization *)

$\alpha = \frac{\eta * (\text{Abs}[\phiev])^2 * \text{Cos}[2 * \pi * x] * dx}{\Delta c - (U0 * (\text{Abs}[\phiev])^2 * (\text{Cos}[2 * \pi * x])^2 * dx) + I * \kappa}$; (* Evolved field amplitude *)

(* Set error as the convergence of chemical potential using μpot function *)

$\mu f = \mu\text{pot}[m, v, g, \phiev]$;
 $\text{err}\mu0 = \text{Abs}[(\mu0 - \mu f)]$;
 $\text{err}\alpha0 = \text{Abs}[\alpha - \alpha0]$;

(* Set new inputs *)

$\phi0 = \phiev // \text{Chop}$;
 $\mu0 = \mu f$;
 $\alpha0 = \alpha$;

```

l++;];
,{l, errμ0, errα0}];

{φ0, α0}(* Stationary state wavefunction and field amplitud *)
]

```

BEC self-organization.

```
(* Self-organization regimen *)
```

```
data = GPSolver[φ0, 300, Nt, -I];
data2 = GPSolver[φ0, 150, Nt, -I];
```

```
(* Normal Regimen *)
```

```
data3 = GPSolver[φ0, 70, Nt, -I];
data4 = GPSolver[φ0, 30, Nt, -I];
```

```
(* States *)
```

```
state = data[[1]];
state2 = data2[[1]];
state3 = data3[[1]];
state4 = data4[[1]];
```

```
(* BEC density plots *)
```

```
organizedStates = ListPlot[{Thread[{x, (Abs[state])2}], Thread[{x, (Abs[state2])2}]},
FrameTicks → {{Automatic, False}, {Automatic, False}},
PlotRange → {{-0,5Lx, 0,5Lx}, All}, Joined → True,
PlotStyle → {{Blue, Thickness[0,008]}, {Orange, Thickness[0,008]}},
Frame → True,
FrameTicksStyle → Directive[Black, 20],
FrameLabel → {"x [λ]", |ψ(x)|2},
LabelStyle → {FontSize → 20, FontFamily → "Times", Black},
RotateLabel → True,
AspectRatio → 1,
Prolog → {GrayLevel[0,85], Rectangle[{0, -0,2}, {1, 2,8}]},
Axes → False,
ImageSize → 400];
```

```
(* Zoom into shaded region *)
```

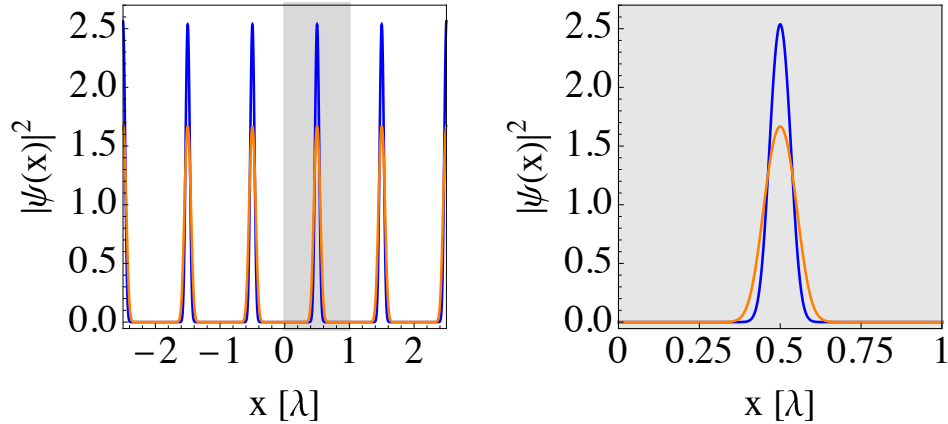
```
zoomStates = ListPlot[{Thread[{x, (Abs[state])2}], Thread[{x, (Abs[state2])2}]},
FrameTicks → {{Automatic, False}, {{0, 0,25, 0,5, 0,75, 1}, False}},
PlotRange → {{0, 1}, All}, Joined → True,
PlotStyle → {{Blue, Thickness[0,008]}, {Orange, Thickness[0,008]}},
Frame → True,
FrameTicksStyle → Directive[Black, 20],
```

```

FrameLabel → {"x [ $\lambda$ "],  $|\psi(x)|^2$ },
LabelStyle → {FontSize → 20, FontFamily → "Times", Black},
RotateLabel → True,
AspectRatio → 1,
Prolog → {GrayLevel[0,90], Rectangle[Scaled[{0, 0}], Scaled[{1, 1}]]},
Axes → False,
ImageSize → 400];

```

```
GraphicsGrid[{{organizedStates, zoomStates}}, ImageSize → 500]
```



Optical potential.

(* Self-organization regimen *)

```

 $\alpha$  = data[[2]];
 $\alpha 2$  = data2[[2]];

```

(* Normal regimen *)

```

 $\alpha 3$  = data3[[2]];
 $\alpha 4$  = data4[[2]];

```

(* Optical potential in the self-organized regimen *)

```

V1org = Thread[{x, (2 * Re[ $\alpha$ ] * 300 * Cos[2 *  $\pi$  * x] + (Abs[ $\alpha$ ])2 * U0 * (Cos[2 *  $\pi$  * x])2) / 100}];
V2org = Thread[{x, (2 * Re[ $\alpha 2$ ] * 100 * Cos[2 *  $\pi$  * x] + (Abs[ $\alpha 2$ ])2 * U0 * (Cos[2 *  $\pi$  * x])2) / 100}];

```

(* Optical potential plots *)

```

Voptorgl = ListPlot[{V1org, V2org},
PlotRange → {{-0,5 * Lx, 0,5 * Lx}, {-6, 4}}, Joined → True,
PlotStyle → {{Blue, Thickness[0,008]}, {Orange, Thickness[0,008]}},
Frame → True,
FrameTicksStyle → Directive[Black, 20],
FrameLabel → {"x [ $\lambda$ "],  $V_{opt}(x)$  [ $100E_R$ ]},
LabelStyle → {FontSize → 20, FontFamily → "Times", Black},
RotateLabel → True,
Prolog → {GrayLevel[0,80], Rectangle[{0, -6}, {1, 6}]},

```

```

AspectRatio → 1,
Axes → False,
ImageSize → 400];

```

(* Zoom into shaded region *)

```

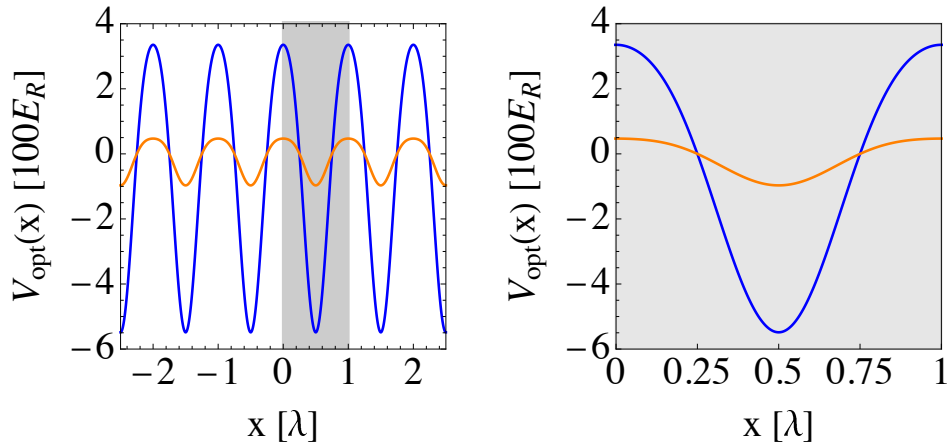
zoomVoptorgl = ListPlot[{V1org, V2org},
FrameTicks → {{Automatic, False}, {{0, 0, 25, 0, 5, 0, 75, 1}, False}},
PlotRange → {{0, 1}, {-6, 4}},
Joined → True,
PlotStyle → {{Blue, Thickness[0,008]}, {Orange, Thickness[0,008]}},
Frame → True,
FrameTicksStyle → Directive[Black, 20],
FrameLabel → {"x [ $\lambda$ ]",  $V_{\text{opt}}(x)$  [ $100E_R$ ]},
LabelStyle → {FontSize → 20, FontFamily → "Times", Black},
RotateLabel → True,
Prolog → {GrayLevel[0,9], Rectangle[Scaled[{0, 0}], Scaled[{1, 1}]]},
Axes → False,
AspectRatio → 1,
ImageSize → 400];

```

```

GraphicsGrid[{{Voptorgl, zoomVoptorgl}}, ImageSize → 500]

```



Order parameter.

```

 $\theta$ val = {};
Ival = {};

```

(* Set the values of order parameter zero below the self organisation threshold *)

```

AppendTo[ $\theta$ val, {0, 0}];
AppendTo[ $\theta$ val, {15, 0}];
AppendTo[ $\theta$ val, {31, 0}];
AppendTo[ $\theta$ val, {31, 5, 0}];
AppendTo[ $\theta$ val, {32, 1, 0}];

```

(* Calculate the order parameter and field intensity above the threshold *)

```
For[i = 0, i ≤ 7, i++,
dat = GPSolver[φ0, 35 + 5 * i, Nt, -I];
θ = (Abs[dat[[1]]])2.Cos[2 * π * x] * dx;
AppendTo[θval, {40 + 5 * i, θ}];
];
```

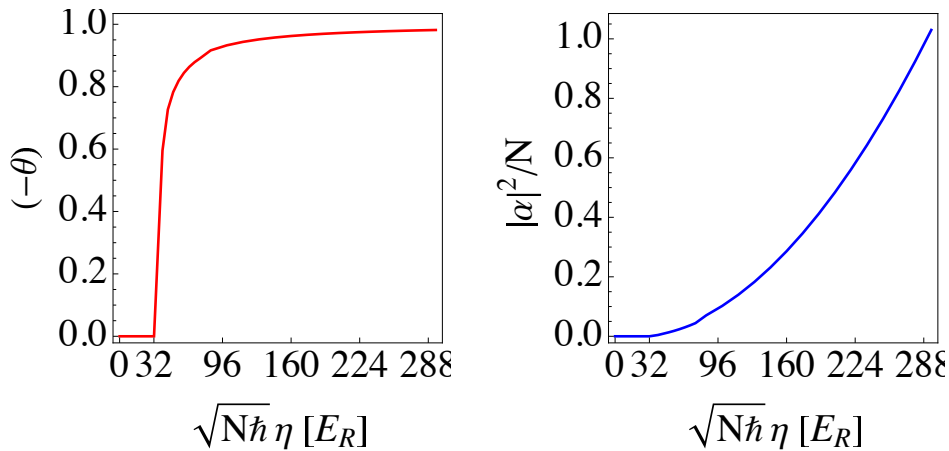
```
For[i = 0, i ≤ 14, i++,
dat = GPSolver[φ0, 85 + 15 * i, Nt, -I];
θ = (Abs[dat[[1]]])2.Cos[2 * π * x] * dx;
AppendTo[θval, {85 + 15 * i, θ}];
];
```

```
d = Dimensions[θval][[1]];
θvalaux = Table[{θval[[i]][[1]], -θval[[i]][[2]]}, {i, 1, d}];
```

(* Order parameter and field intensity plots *)

```
order = ListLinePlot[θvalaux,
FrameTicks → {{Automatic, None}, {{0, 32, 96, 160, 224, 288}, None}},
PlotRange → All, Joined → True,
PlotStyle → {{Red, Thickness[0,008]}},
Frame → True,
FrameLabel → {√Nħη [ER], “(-θ)”},
LabelStyle → {FontSize → 20, FontFamily → “Times”, Black},
RotateLabel → True,
AspectRatio → 1,
ImageSize → 400];
```

```
GraphicsGrid[{{order, Iplot}}, ImageSize → 500]
```



Referencias

- [1] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger. The dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity. *Nature*, 464:1301–6, 04 2010.
- [2] S. Ostermann, F. Piazza, and H. Ritsch. Spontaneous crystallization of light and ultracold atoms. *Physical Review X*, 6(2):021026, 2016.
- [3] S. B. Betzler, A. Wisnet, B. Breitbach, C. Mitterbauer, J. Weickert, L. Schmidt-Mende, and C. Scheu. Template-free synthesis of novel, highly-ordered 3d hierarchical nb3o7(oh) superstructures with semiconductive and photoactive properties. *J. Mater. Chem. A*, 2:12005–12013, 2014.
- [4] B. S. Kerner. Experimental features of self-organization in traffic flow. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3797–3800, Oct 1998.
- [5] B. Hellouin de Menibus and M. Sablik. Self-organization in cellular automata: A particle-based approach. In Giancarlo Mauri and Alberto Leporati, editors, *Developments in Language Theory*, pages 251–263, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [6] S. Camazine, J. Deneubourg, N. R. Franks, J. Sneyd, G. Theraula, and E. Bonabeau. *Self-Organization in Biological Systems*. Princeton University Press, 2020.
- [7] E. Bonabeau, M. Dorigo, and G. Theraulaz. Swarm intelligence - from natural to artificial systems. In *Studies in the sciences of complexity*. Oxford University Press, 1999.
- [8] S. Diaz, D. Mendez, and R. Kraemer. A review on self-healing and self-organizing techniques for wireless sensor networks. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 28(05):1930005, 2019.
- [9] J. K. Asbóth, P. Domokos, H. Ritsch, and A. Vukics. Self-organization of atoms in a cavity field: Threshold, bistability, and scaling laws. *Phys. Rev. A*, 72:053417, Nov 2005.
- [10] S. Gopalakrishnan, B. L. Lev, and P. M. Goldbart. Atom-light crystallization of bose-einstein condensates in multimode cavities: Nonequilibrium classical and quantum phase transitions, emergent lattices, supersolidity, and frustration. *Phys. Rev. A*, 82:043612, Oct 2010.
- [11] F. Piazza, P. Strack, and W. Zwerger. Bose–einstein condensation versus dicke–hepp–lieb transition in an optical cavity. *Annals of Physics*, 339:135–159, 2013.
- [12] F. Mivehvar, F. Piazza, T. Donner, and H. Ritsch. Cavity QED with Quantum Gases: New Paradigms in Many-Body Physics. 2 2021.
- [13] P. Domokos, P. Horak, and H. Ritsch. Semiclassical theory of cavity-assisted atom cooling. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 34(2):187–198, jan 2001.
- [14] P. Domokos and H. Ritsch. Collective cooling and self-organization of atoms in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 89:253003, Dec 2002.
- [15] D. Nagy, J. K. Asbóth, P. Domokos, and H. Ritsch. Self-organization of a laser-driven cold gas in a ring cavity. *Europhysics Letters (EPL)*, 74(2):254–260, apr 2006.

- [16] A. T. Black, H. W. Chan, and V. Vuleti. Observation of collective friction forces due to spatial self-organization of atoms: From rayleigh to bragg scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 91:203001, Nov 2003.
- [17] Y. Yoshikawa, Y. Torii, and T. Kuga. Superradiant light scattering from thermal atomic vapors. *Phys. Rev. Lett.*, 94:083602, Mar 2005.
- [18] Y. K. Wang and F. T. Hioe. Phase transition in the dicke model of superradiance. *Phys. Rev. A*, 7:831–836, Mar 1973.
- [19] D. S. Shapiro, W. V. Pogosov, and Yu. E. Lozovik. Universal fluctuations and squeezing in a generalized dicke model near the superradiant phase transition. *Phys. Rev. A*, 102:023703, Aug 2020.
- [20] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai, and P. Domokos. Dicke-model phase transition in the quantum motion of a bose-einstein condensate in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 104:130401, Apr 2010.
- [21] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins, and H. J. Carmichael. Proposed realization of the dicke-model quantum phase transition in an optical cavity qed system. *Phys. Rev. A*, 75:013804, Jan 2007.
- [22] A. A. Houck, H. E. Türeci, and K. Jens. On-chip quantum simulation with superconducting circuits. *Nature Physics*, 8(4):292–299, April 2012.
- [23] C. Hamner, C. Qu, Y. Zhang, J. Chang, M. Gong, C. Zhang, and P. Engels. Dicke-type phase transition in a spin-orbit-coupled bose-einstein condensate. *Nature communications*, 5:4023, 05 2014.
- [24] A. Baksic, P. Nataf, and C. Ciuti. Superradiant phase transitions with three-level systems. *Phys. Rev. A*, 87:023813, Feb 2013.
- [25] M. Hayn, C. Emary, and T. Brandes. Phase transitions and dark-state physics in two-color superradiance. *Phys. Rev. A*, 84:053856, Nov 2011.
- [26] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93:99–110, Jan 1954.
- [27] P. Kirton, M. M. Roses, J. Keeling, and E. G. Torre. Introduction to the dicke model: From equilibrium to nonequilibrium, and vice versa. *Advanced Quantum Technologies*, 2(1-2):1800043, 2019.
- [28] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, 2 edition, 2011.
- [29] L. D. Landau and E.M. Lifshitz. Chapter xiv - phase transitions of the second kind and critical phenomena. In *Statistical Physics (Third Edition)*, pages 446 – 516. Butterworth-Heinemann, Oxford, third edition edition, 1980.
- [30] J. A. Gyamfi. An introduction to the holstein-primakoff transformation, with applications in magnetic resonance. *arXiv: Other Condensed Matter*, 2019.
- [31] D. Nagy, G. Szirmai, and P. Domokos. Self-organization of a bose-einstein condensate in an optical cavity. *The European Physical Journal D*, 48, 03 2008.

- [32] S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Superradiant rayleigh scattering from a bose-einstein condensate. *Science*, 285(5427):571–574, 1999.
- [33] M. G. Moore and P. Meystre. Theory of superradiant scattering of laser light from bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 83:5202–5205, Dec 1999.
- [34] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke, and T. Esslinger. Exploring symmetry breaking at the dicke quantum phase transition. *Phys. Rev. Lett.*, 107:140402, Sep 2011.
- [35] L. Chomaz, R. Bijnen, D. Petter, G. Faraoni, S. Baier, J. Becher, M. Mark, F. Waechtler, L. Santos, and F. Ferlaino. Observation of the roton mode in a dipolar quantum gas. *Nature Physics*, 14, 05 2018.
- [36] S. Gopalakrishnan, B. Lev, and P. Goldbart. Emergent crystallinity and frustration with bose-einstein condensates in multimode cavities. *Nature Physics*, 5:845–850, 10 2009.
- [37] D. Walls and G. Milburn. *Quantum optics*. Springer-Verlag, 2 edition, 2008.
- [38] I.B. Mekhov, C. Maschler and H. Ritsch. Ultracold atoms in optical lattices generated by quantized light fields. *The European Physical Journal D*, 46:545–560, 2008.
- [39] Y. V. Nazarov and J. Danon. *Advanced Quantum Mechanics: A Practical Guide*. Cambridge University Press, 2013.
- [40] J. J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2017.
- [41] A. Frisk Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta, and F. Nori. Ultrastrong coupling between light and matter. *Nature*, 1:19–40, 01 2019.
- [42] J. Léonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Esslinger, and T. Donner. Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry. *Nature*, 543:87–90, 03 2017.
- [43] Farokh Mivehvar, Helmut Ritsch, and Francesco Piazza. Superradiant topological peierls insulator inside an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 118:073602, Feb 2017.
- [44] H. Keßler, P. Kongkhambut, C. Georges, L. Mathey, J. Cosme, and A. Hemmerich. Observation of a dissipative time crystal. *arXiv:2012.08885. Manuscrito sometido para publicación*, 12 2020.
- [45] I. Dimitrova, W. Lunden, J. Amato-Grill, N. Jepsen, Y. Yu, M. Messer, T. Rigaldo, G. Puentes, D. Weld, and W. Ketterle. Observation of two-beam collective scattering phenomena in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 96:051603, Nov 2017.
- [46] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics; 2nd ed.* Wiley, New York, NY, 1975.
- [47] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017.
- [48] C. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, 2002.

- [49] S. M. Roccuzzo and F. Ancilotto. Supersolid behavior of a dipolar bose-einstein condensate confined in a tube. *Phys. Rev. A*, 99:041601, Apr 2019.
- [50] M. Boninsegni and N. V. Prokofev. Colloquium: Supersolids: What and where are they? *Rev. Mod. Phys.*, 84:759–776, May 2012.
- [51] F. Mivehvar, S. Ostermann, F. Piazza, and H. Ritsch. Driven-dissipative supersolid in a ring cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 120:123601, Mar 2018.
- [52] S. Ostermann, H. Ritsch, and F. Mivehvar. Many-body phases of a planar bose-einstein condensate with cavity-induced spin-orbit coupling. *Phys. Rev. A*, 103:023302, Feb 2021.
- [53] S. F. Caballero-Benitez and I. B. Mekhov. Quantum optical lattices for emergent many-body phases of ultracold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 115:243604, Dec 2015.
- [54] K. Lozano-Méndez, A. Cásares, and S. Caballero-Benitez. Spin entanglement and order competition via long-range interactions in spinor quantum optical lattices, 11 2020.
- [55] C. Madroñero, G. A. Domínguez-Castro, L. A. González-García, and R. Paredes. Persistence of ferromagnetic domains in a disordered two-dimensional lattice. *Phys. Rev. A*, 102:033304, Sep 2020.
- [56] J. Leonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Esslinger, and T. Donner. Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry. *Nature*, 543:87–90, 03 2017.
- [57] F. Dalfovo, L. Pitaevskii, and S. Stringari. Bose einstein condensates. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk - USP FIZ NAUK*, 167, 12 2005.
- [58] A. J. Leggett. Bose-einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.*, 73:307–356, Apr 2001.
- [59] Nicholas Parker and Carlo Barenghi. *A primer on quantum fluids*. 08 2016.