



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN ASTROFÍSICA
ASTROFÍSICA TEÓRICA

EMISIÓN SINCROTRÓN EN OBJETOS HH

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:
MANUEL DE JESÚS CHIMAL HERNÁNDEZ

DR. PABLO FABIAN VELAZQUEZ BRITO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO , SEPTIEMBRE 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Emisión sincrotrón en objetos HH

Manuel de Jesús Chimal Hernández

Resumen

El presente trabajo presenta un modelo magnetohidrodinámico (MHD) de un jet protoestelar en condiciones similares a las registradas en HH-80. El objetivo principal es reproducir emisiones no térmicas como las observadas por Carrasco-González et al. (2010) .

Los aspectos generales de nuestro modelo son las condiciones físicas de un sistema protoestelar tipo HH-80 y un efecto de precesión para romper la axisimetría de modelos que cuentan con una única dirección de propagación. La intención de agregar este efecto es ver los efectos que tiene sobre la evolución de las regiones donde se puede observar emisiones no térmicas.

Para el análisis del sistema presentamos la evolución de las siguientes variables físicas: densidad en dos planos, emisión en rayos X y emisión no térmica linealmente polarizada. Por otro lado mostramos mapas de comparación entre la presión magnética y la presión mecánica, con la finalidad de ver el comportamiento del parámetro β y poder determinar la dominancia del gas o del campo magnético en las distintas regiones del modelo. Además presentamos la presencia y distribución de emisiones medias de rayos X y emisiones no térmicas y su relación con la presencia del campo magnético en el jet.

Generamos mapas de la fracción de polarización y analizamos la distribución de los valores adoptados en diferentes épocas de la simulación mostrando su relación con la turbulencia generada dentro del jet por efecto de la condicisión de precesión.

Finalmente presentamos mapas de la orientación del ángulo de posición χ_B del campo magnético en el plano del cielo $y'z'$ y la distribución de sus valores.

Índice general

Summary	1
1. Introducción: objetos HH	5
1.1. Jets astrofísicos	5
1.2. Modelos clásicos para el estudio de jets protoestelares	6
1.3. Justificación del trabajo	8
1.4. Antecedentes	8
1.5. Propuesta de investigación	9
2. Mecanismos físicos en jets astrofísicos	13
2.1. Emisiones térmica y no térmicas	13
2.2. Mecanismos de aceleración de Fermi	14
2.2.1. Procesos de Fermi a primer orden	14
2.2.2. Proceso de aceleración de Fermi a segundo orden	17
3. Magnetohidrodinámica (MHD) en plasmas	21
3.1. mhd	21
3.1.1. Ecuación de continuidad de masa	22
3.1.2. Ecuación de momento	23
3.1.3. Ley generalizada de Ohm	24
3.1.4. Ecuación de energía	25
3.1.5. Conjunto completo de ecuaciones MHD	26
3.2. Aproximación de Riemann en un sistema MHD ideal de multi estados: HLLD	27
3.2.1. Planteamiento teórico del problema MHD	27
3.2.2. Ecuaciones MHD en solución numérica	28
3.2.3. Aproximación HLLD al problema de Riemann	29
4. Modelo	33
4.1. Condiciones iniciales	33
4.2. GUACHO	37
5. Resultados	39
5.1. Mapas de densidad y campo magnético	39
5.2. Emisiones térmicas y no térmicas	39
5.3. Fracción de polarización y dirección del campo magnético	47
6. Conclusiones	51

7. Apéndice	53
7.1. Hidrodinámica numérica	53
7.1.1. Momento Cero	53
7.1.2. Primer Momento	54
7.1.3. Segundo Momento	56
7.1.4. Cerradura del sistema de ecuaciones	57

Capítulo 1

Introducción: objetos HH

Podemos decir que para estudiar los fenómenos de escala astronómica contamos principalmente con dos tipos de fuentes de información: la gravitacional, a través de la cual podemos tener conocimiento sobre la interacción de masas, la electromagnética y partículas relativistas, con la que podemos determinar la composición, las condiciones físicas en las que se encuentran los objetos y los procesos que se llevan a cabo en cierto momento.

En ambos casos se busca encontrar modelos teóricos que permitan describir los fenómenos observados. En nuestro caso nos limitaremos a la información electromagnética, la cual es dividida según el tipo de emisión que se observe. Por un lado se observan fenómenos altamente energéticos como los destellos de rayos gamma, mientras que por otro lado se encuentra la radiación de fondo, aunque ambos casos corresponden a información electromagnética, los modelos teóricos empleados para su descripción no son los mismos.

En astrofísica existe la limitante de no poder realizar observaciones controladas a sus objetos de estudio. Sin embargo, hay casos donde los objetos de estudio son eventos recurrentes en el universo visible permitiendo así estudiar sus características y así poder entenderlos. Múltiples estudios han demostrado que la forma en que describimos fenómenos en laboratorio, resulta útil al momento de describir lo ocurrido en los fenómenos astrofísicos.

Dentro del estudio de la naturaleza existen casos donde las observaciones muestran que los modelos para describir lo que sucede en cierto fenómeno, no son los apropiados o no son completos. La astrofísica no es la excepción a esto y es aquí de donde partimos para nuestro trabajo. La observación de radiación no térmica en jets protoestelares no es algo que se espere según los modelos clásicos que los describen, es por eso que planteamos escenarios hipotéticos con condiciones físicas coherentes que puedan dar una explicación a las observaciones.

A continuación haremos una introducción a los temas necesarios para poder contextualizar nuestro trabajo. Comenzaremos por describir qué son los jets astrofísicos, seguido de los modelos clásicos que los describen. Posteriormente hablaremos de las observaciones que dan origen a nuestro trabajo, seguido de los antecedentes que existen en la explicación del fenómeno y finalmente nuestra propuesta de investigación.

1.1. Jets astrofísicos

En astrofísica, cuando hablamos de jets nos referimos a flujos de partículas altamente colimadas observados en los polos de objetos compactos. Las escalas a las que se observan estos fenómenos son amplias, desde objetos protoestelares hasta núcleos de galaxias. Si bien las condiciones que existen en cada uno de los escenarios y las características de sus respectivos

jets son muy distintas, los mecanismos que los originan resultan muy similares. Aunque el origen de los jets aún no es algo resuelto, en general existe el consenso de que los mecanismos que los originan son procesos de acreción entre la fuente y un disco de gas circundante (Frank et al. 2014), por lo tanto las características de los jets están sujetas a las propiedades de la fuente así como de las condiciones en que se da el proceso de acreción.

De lo anterior tenemos que los jets mostrarán cierto tipo de características según su origen y por lo tanto podemos clasificarlos. Por un lado tenemos los jets cuyo origen es en objetos compactos colapsados como estrellas de neutrones, agujeros negros estelares o de alta masa como los presentes en núcleos activos de galaxias, donde las condiciones dan lugar a que las partículas eyectadas alcancen velocidades relativistas (Hujeirat et al. 2003), (Beall 2012).

Por otro lado, tenemos aquellos donde las partículas que constituyen al jet tienen velocidades clásicas de unas cuantas decenas a centenas de kilómetros por segundo, ~ 50 a ~ 1000 km s^{-1} (Anglada et al. 2018). Este tipo de jets es observado en estrellas jóvenes o en proceso de formación (Canto & Raga 1995), a los cuales nos referiremos como jets protoestelares y también en ellos nos centraremos durante este trabajo.

En esencia los jets protoestelares son flujos de partículas altamente colimadas que emergen desde las partes internas del disco de acreción que forma las estrellas jóvenes que se encuentran inmersas en nubes opacas de gas y polvo, lo cual dificulta la observación de los procesos internos (Zinnecker & Yorke 2007). El estudio de los jets protoestelares puede brindar información sobre los procesos que se realizan durante las primeras fases de evolución estelar.

En los escenarios donde la extinción de luz en las nubes de formación estelar es baja, es posible observar la componente óptica de los jets comúnmente llamada objetos HH, nombre que recibe de Herbig (1951), Herbig (1952) y Haro (1952), quienes fueron los primeros en reportar el avistamiento de estos objetos, aunque fue hasta que Dopita et al. (1982) asociaron los objetos HH a flujos tipo 'chorro' o 'jets' (Figura 1.1).

La morfología de los jets consiste principalmente en una serie de nudos que siguen la línea de propagación del flujo bipolar desde la fuente, típicamente con anchos de entre $0.''6$ a $0.''8$ y una separación de algunos arcosegundos y en algunos casos largas zonas de choques que se encuentran a lo largo del jet (Reipurth et al. 1997). Por otra parte, se puede concluir a través de la observación de su movimiento propio y sus velocidades radiales que la velocidad de propagación es típicamente del orden de cientos de kilómetros por segundo (Reipurth et al. 1992).

1.2. Modelos clásicos para el estudio de jets protoestelares

Hablaremos brevemente de las características observadas en los jets con el objetivo de justificar los modelos que los describen, nos enfocaremos en el origen de emisiones observadas ya que es en ese tema donde se centra nuestro objeto de estudio.

Comencemos por plantear el escenario más simplista que describa el fenómeno para poco a poco volverlo más realista justificando sus partes. De inicio podemos considerar que los jets protoestelares se mueven a través de un medio circundante con características muy diferentes, por lo que podemos considerar el caso de dos medios interactuando entre sí, lo cual sugiere que puede ser tratado como un problema de hidrodinámica donde existen dos componentes. La primera componente corresponde a una nube molecular densa que rodea a la

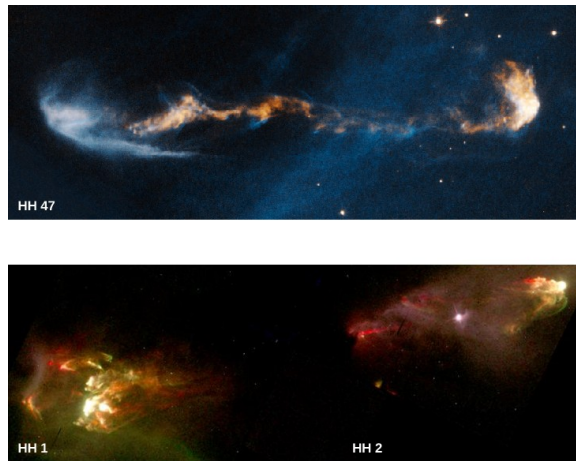


Figura 1.1: Estructura de los flujos de partículas eyectados durante la formación estelar conocidos como jets. Arriba: Imagen de HH47, objeto protoestelar encontrado a aproximadamente 1500 años luz de distancia desde la Tierra, se observan las regiones de choque principal y un desarrollo interno con un comportamiento complejo, posiblemente debido a la presencia de algún objeto acompañante. Abajo: objetos HH 1 y HH 2, localizados en la constelación de Orión, con una longitud aproximada de un año luz, fueron los primeros objetos identificados por Herbig (1951), Herbig (1952) y Haro (1952), Haro (1953). (Créditos: "HH 47": modificación del trabajo hecho por NASA, ESA, y P. Hartigan (Rice University); "HH 1 and HH 2: modificación del trabajo hecho por J. Hester, WFPC2 Team, NASA)

segunda componente, el jet que emerge desde el centro de formación estelar. Podemos asumir que la primera componente es un medio estático donde se propaga el fluido de la segunda componente. Estas condiciones representan las condiciones físicas de un choque caliente para un plasma rápido moviéndose a través de un medio denso (Reipurth et al. 1992). Este es el caso más simple pues asumimos demasiadas cosas, que el flujo es constante, que la línea de propagación del jet es perpendicular al plano del proceso de acreción y que no existe ninguna otra componente.

Para volver más realista el modelo podemos agregar variabilidad al flujo eyectado. Justificamos esa consideración al tener en cuenta que las observaciones muestran series de nudos a lo largo de un mismo jet (Reipurth et al. 1992) y un comportamiento más caótico. Los altos valores para el movimiento propio de los nudos muestran que estos no pueden ser resultado de un sistema estacionario (Raga 1993). La variabilidad en el proceso de eyección se considera como el resultado de la interacción del campo magnético arrastrado de forma centrífuga por el disco de acreción y la región correspondiente a la magnetósfera de la estrella (Zanni et al. 2007).

Podemos completar un escenario plausible si tenemos en cuenta que la línea de propagación de los nudos no es en una única dirección, las observaciones presentadas por (Riera et al. 2011) muestran que la dirección en que se desplaza el material expulsado en el jet es una que puede ser descrita por efectos de precesión (Riera et al. 2014). La precesión está asociada a diferencias entre el plano del disco de acreción y del plano de rotación de la estrella central, rompiendo así la simetría de propagación del material.

El estudio de los jets no es un tema aislado, sino que mantiene una estrecha relación con el entendimiento de las etapas tempranas de evolución estelar, es decir, que la estrella en formación depende tanto del jet como el jet de ella, mientras que los procesos de acreción

suministran material y energía al jet, el jet remueve el exceso de momento angular que de no ser transferido impediría la continuación de los procesos de acreción (Anglada et al. 2018).

De las anteriores consideraciones podemos resumir los modelos utilizados en simulaciones numéricas hidrodinámicas, un jet protoestelar inmerso en una nube molecular densa, con variabilidad en sus eyecciones y un efecto de precesión periódico.

1.3. Justificación del trabajo

Ya hemos mencionado los aspectos generales para el estudio de un jet protoestelar, sin embargo nos hemos limitado a mencionar sus partes morfológicas y los procesos que se aceptan como sus causas. Nos hace falta mencionar la parte electromagnética del jet, es decir, los tipos de emisiones que se espera encontrar para un objeto con las características que hemos mencionado.

Podemos clasificar las emisiones de radiación provenientes de un jet según su longitud de onda, mientras que los trabajos presentados por Dopita et al. (1982) y Stocke et al. (1982), fueron la base del concepto actual de que los objetos HH son las manifestaciones ópticas de los jets provenientes de estrellas jóvenes. También existen emisiones en la banda de frecuencias del radio cuyas principales fuentes de emisión son procesos del tipo libre-libre y aunque en general son emisiones débiles, son importantes para el entendimiento de objetos encontrados en nubes con una alta opacidad y son conocidos como radio jets estelares (Anglada 1996).

Los radio jets estelares resultan muy útiles al momento de estudiar las etapas de formación estelar, ya que permiten observar y determinar de forma precisa la posición de los flujos eyectados que se encuentran inmersos en nubes densas de gas y polvo. También permiten estudiar la composición del material expulsado por la estrella central años atrás, la cual al comparar con la composición de la nube molecular donde se encuentra el objeto es posible obtener información sobre la evolución del material durante el proceso. Por otra parte, las observaciones en el tiempo de los radio jets estelares permiten entender la dinámica del fenómeno brindando información sobre la causa del movimiento, precisión o el movimiento orbital de sistemas binarios. (Anglada et al. 2018).

Dada la velocidad con la que se propaga el material de los jets su estudio fue ampliamente realizado a través de las emisiones térmicas de procesos tipo libre-libre mostrando características de índices espectrales positivos (Anglada 1996). Sin embargo diversos trabajos presentan observaciones donde se ha reportado índices espectrales negativos (Rodríguez et al. 1993), (Rodríguez et al. 2005) que corresponden a emisión no térmica. Dichas emisiones suelen encontrarse en algunos nudos de choque fuertes y suele asociarse a pequeños grupos de electrones relativistas que pueden ser acelerados en las zonas de choque.

Dicho lo anterior podemos plantear el objeto de estudio en nuestro trabajo: el estudio de emisión sincrotrón en jets protoestelares.

1.4. Antecedentes

Garay et al. (2003) observaron que IRAS 16547-4247, un objeto altamente colimado, mostraba valores de índices espectrales negativos significativamente diferentes a -0.1, valor asociado a emisión del tipo libre-libre ópticamente delgada, lo cual sugería la presencia de emisiones no térmicas.

Benaglia et al. (2010) mencionan la posibilidad de que en las regiones de choques externas, se pudieran dar choques fuertes difusivos acelerando las partículas dando lugar a emisiones no térmicas asociadas con los índices espectrales negativos que observaron en IRAS 16547-4636.

Carrasco-González et al. (2010) a través de observaciones realizadas al objeto HH 80-81 confirmaron la presencia de emisiones no térmicas (sincrotrón), y por lo tanto la presencia de partículas relativistas en jets protoestelares (Figura 1.2) (Carrasco-González et al. 2010). La emisión no térmica fue detectada en las zonas de choques fuertes contra el medio denso, adicionalmente, este tipo de emisiones fueron observadas en algunos puntos a lo largo del interior del radio jet, lo cual sugería que la aceleración de partículas también sucedía en choques internos (Rodríguez-Kamenetzky et al. 2017). Los estudios realizados mostraron que son necesarias velocidades altas, superiores o iguales a los 500 km s^{-1} y un medio denso.

La detección de emisión no térmica en jets protoestelares abre la posibilidad de estudiar los campos magnéticos en estos objetos, ya que la emisión linealmente polarizada está directamente relacionada con la estructura de los campos magnéticos que contribuyen a su formación.

Cécere et al. (2016) publican un trabajo donde realizan estudios sobre la emisión sincrotrón en objetos protoestelares a través de modelos magnetohidrodinámicos. Muestran un modelo 2.5D en simulaciones de alta y baja densidad, abordando los casos donde se generan eyecciones de material de forma constante y variable respecto al tiempo, así mismo consideran los casos de la presencia de un campo magnético inicial con una distribución toroidal y helicoidal. Sus resultados muestran que la presencia de emisión térmica está principalmente distribuida en la zona de choque principal, es decir donde el material tiene contacto con el medio denso de la nube. Por otro lado, las emisiones no térmicas se encuentran principalmente en los nudos internos, mostrando también que la variabilidad en la eyección de material resulta ser un factor importante al generar emisiones sincrotrón, debido a que el material expulsado a velocidades menores es alcanzado por material con velocidades superiores en tiempos posteriores produciendo esto zonas de choques internos. Sus modelos también muestran una relación entre el grado de polarización y la distribución del campo magnético, ya se observa que para los casos donde el campo magnético tiene una estructura toroidal el grado de polarización tiende a ser alto, caso contrario con la distribución helicoidal, donde el grado de polarización es bajo.

Las observaciones realizadas por Rodríguez-Kamenetzky et al. (2016) muestran mapas de índices espectrales y distribución de energía espectral en las diferentes regiones de Serpens. Sus resultados muestran una diferencia entre la naturaleza de la emisión en la región central, los lóbulos y la emisión extendida. Mientras que la región central muestra valores positivos (0.3) para el índice espectral, sugiriendo que la emisión es debida a emisión del tipo libre-libre ópticamente gruesa. Por otro lado, en las regiones externas los valores del índice espectral van cercanos a 0 o menores a 0 . En algunas regiones se observan valores de -0.36 ± 0.03 sugiriendo un origen no térmico.

1.5. Propuesta de investigación

Teniendo en cuenta las observaciones de emisiones no térmicas en objetos protoestelares y el antecedente de modelos magnetohidrodinámicos como el presentado por Cécere et al. (2016), planteamos nuestra propuesta de investigación.

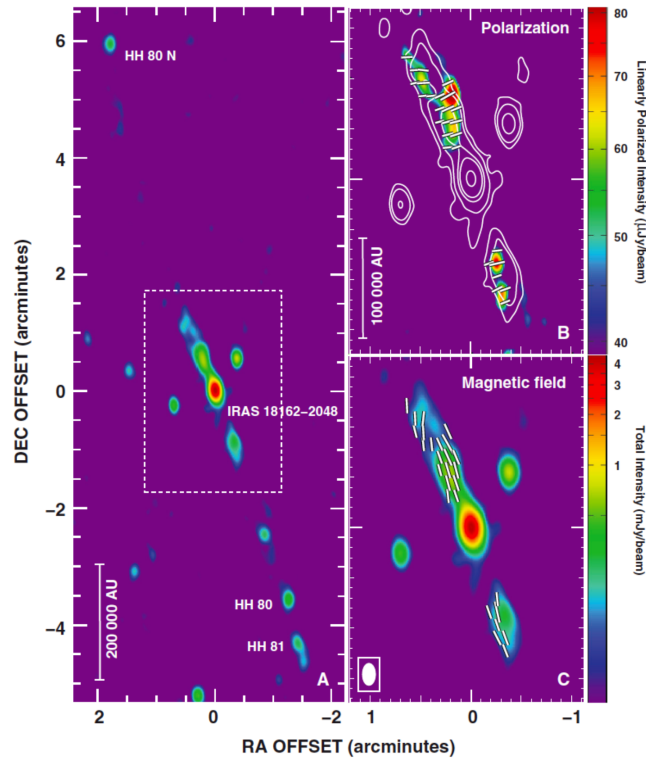


Figura 1.2: Imágenes de emisiones no térmicas en HH 80-81. Del lado izquierdo se muestra la intensidad total de emisión a 6 cm distribuida desde la fuente central hacia los objetos HH. Del lado derecho superior se muestra un acercamiento a la zona central del objeto mostrando la intensidad total a través de isocontornos, las emisiones linealmente polarizadas en mapa de color y en barras blancas la dirección de la polarización. Del lado derecho inferior se muestra la dirección del campo magnético. Fuente Original: Carrasco-González et al. (2010), derechos de autor por AAS.

A través de un modelo magnetohidrodinámico (MHD) buscamos reproducir emisión no térmica bajo las condiciones observadas en un objeto protoestelar. Para ello consideramos el caso de una fuente inmersa en una nube densa con un campo magnético intrínseco que sigue una distribución toroidal. También asumimos una variabilidad de eyección y para romper con la axisimetría presentada en el trabajo base, añadimos un efecto de precesión periódico. De esta forma esperamos reproducir la morfología compleja en la distribución de las emisiones no térmicas (Vig et al. 2018). Por otro lado realizamos un análisis sobre la dirección de eyección, del campo magnético y la emisión no térmica. Realizamos un análisis de la interacción entre la presión mecánica y la presión magnética para determinar las zonas de dominancia entre el gas y el campo magnético en las diferentes regiones de sistema. Por otro lado reproducimos los valores en la fracción de polarización y su evolución con el tiempo para determinar el cambio según el medio se vuelve más turbulento.

Presentamos nuestro trabajo a través de la siguiente estructura: En el capítulo 2 describimos la física de las emisiones no térmicas en jets astrofísicos, también describimos los mecanismos de aceleración Fermi, los cuales proponemos como responsables de la aceleración de partículas a velocidades relativistas. En el capítulo 3 describimos la física involucrada en los modelos MHD para plasmas. A lo largo del capítulo 4 describiremos en detalle nuestro modelo empleado durante nuestras simulaciones, sus parámetros y su geometría, adicionalmente haremos mención del código MHD Guacho que fue el utilizado durante el trabajo. En el capítulo 5 mostraremos los resultados obtenidos a través de nuestras simulaciones y finalmente en el capítulo 6 detallaremos las conclusiones sobre los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Emisión no térmica en jets astrofísicos

El presente capítulo será desarrollado en dos partes principales: la emisión sincrotrón y los mecanismos de aceleración de Fermi. La primera sección nos es de interés para explicar de forma detallada el modelo teórico con el cual se describe la emisión no térmica observada en jets protoestelares, describiremos su concepto, los cálculos de su potencia y su espectro de energía. En la segunda sección hablaremos de los mecanismos de aceleración de Fermi, con los cuales pretendemos justificar el aceleramiento a velocidades relativistas de partículas cargadas en las zonas de choque donde se observa radiación no térmica.

2.1. Emisiones térmica y no térmicas

Considerando que una de las motivaciones es la presencia de emisiones no térmicas en objetos proto estelares, es importante mencionar el origen de estas.

Tomando como punto de partida la emisión continua debida a la interacción de iones y electrones en el plasma del jet, podemos dividir esta en dos, emisiones térmicas y no térmicas. Las emisiones térmicas son aquellas originadas por procesos que mantienen una relación con la temperatura de la fuente, mientras que las no térmicas son aquellas que pueden involucrar a otro tipo de procesos.

En radio astronomía se define la emisión espectral como:

$$S_\nu \propto \nu^\alpha, \quad (2.1)$$

donde α se conoce como índice espectral y su valor está asociado a el tipo de emisión que lo origina. Valores de $\alpha \geq 0$ corresponde a procesos térmicos, por otro lado $\alpha < 0$ y $\alpha \geq -1$ están asociados con procesos térmicos del tipo libre-libre ópticamente delgados, y finalmente $\alpha < -1$ se asocian con procesos no térmicos como la emisión sincrotrón.

Sin embargo, las mediciones tienen errores asociados por los que no es inmediata la determinación del proceso que lo origina. Rodríguez-Kamenetzky et al. 2017 muestran como los valores del índice espectral pueden ser una mezcla de más de un proceso, como la emisión libre-libre y emisiones sincrotrón.

Dado que la emisión sincrotrón está asociada con procesos realizados por partículas con velocidades relativistas, y debido a que la velocidad con la que es expulsado el material desde la fuente central son del orden de $10^2 - 10^3 \text{ km s}^{-1}$, entonces es importante la detección de emisión linealmente polarizada, la cual está directamente asociada con emisiones sincrotrón.

2.2. Mecanismos de aceleración de Fermi

Los efectos de radiación sincrotrón están asociados a fenómenos donde la velocidad de las partículas alcanza valores relativistas, por lo que no es un tipo de emisión esperada en jets asociados a objetos protoestelares, donde el rango de velocidades a la cual es eyectado el material alcanza unos cientos de km s^{-1} , velocidad demasiado baja para generar emisiones linealmente polarizadas de origen no térmico. Sin embargo, unos pocos objetos HH muestran velocidades cercanas a unos miles de km s^{-1} por lo que sería posible observar en algunas regiones chocadas de jets protoestelares emisión sincrotrón. Las partículas que emiten este tipo de radiación son aceleradas por mecanismos difusivos en los choques. Por ello abordaremos el estudio de los procesos de Fermi, los cuales explican el mecanismo de aceleración de estas partículas a velocidades relativistas, permitiendo así que estas emitan este tipo de radiación.

2.2.1. Procesos de Fermi a primer orden

Supongamos un choque al cual lo dividiremos en dos zonas, primero, la zona pre choque al cual le asociaremos una velocidad del medio \vec{u}_1 y segundo, la zona post choque con una velocidad del medio \vec{u}_2

Colocándonos en el sistema de referencia de la región postchoque, la velocidad de la mismo será $\mathbf{v} = -(u_1 - u_2) \hat{x}$. Considerando que las partículas del plasma alcanzan la zona chocada, entonces la probabilidad de pasar de la zona pre choque a la zona post choque es distinto de cero. Para expresar la probabilidad de salto asumiremos que el problema tiene simetría en el eje de dirección de la partícula, por lo tanto podemos dividir el flujo en dos hemisferios, el izquierdo y el derecho, por lo que el desarrollo será análogo en cualquier caso. Por otro lado asumimos un choque plano.

La idea es determinar el cambio de energía E y momento p que experimentan las partículas, luego de cruzar el choque y regresar. En primer lugar emplearemos las transformaciones de Lorentz, para ver como se escriben E y p en el sistema de referencia de la zona post choque. Tenemos que los valores de la energía están dados por

$$E_{post} = \gamma_v (E - \mathbf{v}\mathbf{p}), \quad (2.2)$$

$\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$, $\mathbf{v} = -v\hat{x}$ y $\mathbf{p} = p\mu\hat{x}$, siendo μ el coseno del ángulo de incidencia, con lo que podemos reescribir la ecuación como

$$E_{post} = \gamma (E + vp\mu). \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta que $v \simeq c$, entonces $p \simeq E/c$ y sustituyendo en la ecuación 2.3 nos queda

$$E_{post} = \gamma E \left(1 + \frac{v}{c}\mu\right). \quad (2.4)$$

A continuación, consideremos que la partícula puede regresar a la zona pre choque, con un momento $\mathbf{p}_{post} = p_{post}\mu' \hat{x}$, donde μ' es el coseno del ángulo de regreso y $p_{post} = E_d/c$. Las partículas que regresan observan choques de frente y tienen ángulos de regreso comprendidos en $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. La zona pre chocada tiene una velocidad $\mathbf{v}_{pre} = v\hat{x}$, desde el sistema de referencia de la zona postchoque. La energía se expresa como:

$$\begin{aligned} E_{pre} &= \gamma (E_{post} - \mathbf{v}_{pre}\mathbf{p}_{post}) \quad ; \quad \vec{p}_{post} = p_{post}\mu' \hat{x} \\ E_{pre} &= \gamma \left(E_{post} - vp_{post}\mu' \right) \quad ; \quad -1 \leq \mu' \leq 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

por lo que nos queda

$$E_{pre} = \gamma^2 E \left(1 + \frac{v}{c} \mu\right) \left(1 - \frac{v}{c} \mu'\right). \quad (2.6)$$

Por lo tanto el cambio de energía en un solo cruce está dado por:

$$\Delta E = E_u - E = E \left[\gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c} \mu\right) \left(1 - \frac{v}{c} \mu'\right) - 1 \right]. \quad (2.7)$$

La probabilidad de transición de la zona pre choque a la post choque puede ser expresada como

$$P(\mu) = \frac{\text{flujo en dirección dada por } \mu}{\text{flujo en uno de los hemisferios}} = \frac{\Phi_\nu}{J}, \quad (2.8)$$

donde μ es el coseno del ángulo formado entre el vector normal al choque y el momento de la partícula. La densidad de flujo que atraviesa el choque es

$$J = \int d\Omega \frac{N}{4\pi} v \mu, \quad (2.9)$$

donde N es la densidad numérica de partículas, v la velocidad del fluido, $d\Omega$ es diferencial de ángulo sólido y está expresado como $-d\mu d\phi = \sin \theta d\theta d\phi$, y $0 < \theta \leq \pi/2$, $0 < \phi \leq 2\pi$ y $0 \leq \mu \leq 1$. Por lo tanto

$$J = - \int_0^1 \frac{2\pi}{4\pi} N v \mu d\mu = - \int_1^0 \frac{1}{2} N v \mu d\mu = \frac{Nv}{2} \frac{\mu^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{Nv}{4}. \quad (2.10)$$

Por otro lado, el flujo en la dirección dada por μ

$$\Phi_\mu = \frac{1}{2} N v \mu. \quad (2.11)$$

Por lo tanto la probabilidad de cruce es

$$P = \frac{\Phi_\mu}{J} = \frac{\frac{1}{2} N v \mu}{\frac{1}{4} N v} = 2\mu. \quad (2.12)$$

Ahora calculamos la probabilidad en el sistema de referencia primado, es decir μ' , donde $\theta' + \theta = \pi$, por lo tanto $d\theta' = -d\theta$ y $\theta' = \pi - \theta$, mientras que el ángulo sólido en el estado primado es

$$\int d\Omega' \cos \theta' = 2\pi \int_{\theta'=0}^{\pi/2} \sin \theta' d\theta' \cos \theta' = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \cos \theta, \quad (2.13)$$

con lo cual podemos calcular

$$P(\mu') = -2\pi \int_{-1}^0 \mu' d\mu = 2\pi \mu'. \quad (2.14)$$

Ya calculada la probabilidad de salto entre la zona pre choque y la post choque, calculamos el valor esperado de la fracción del cambio de energía

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = - \int_0^1 d\mu 2\mu \int_{-1}^0 d\mu' 2\mu' \left[(\gamma^2 - 1) + \gamma^2 \frac{v}{c} \mu - \gamma^2 \frac{v}{c} \mu' - \gamma^2 \frac{v}{c} \mu \mu' \right]. \quad (2.15)$$

Integrando μ' y evaluando

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle &= -4 \int_0^1 \mu d\mu \left[\frac{-\gamma^2 - 1}{2} - \gamma^2 \frac{v}{c} \frac{\mu}{2} - \frac{\gamma^2 v}{3c} - \gamma^2 \left(\frac{v}{c} \right) \frac{\mu}{3} \right] \\ \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle &= -4 \left[\frac{-\gamma^2 - 1}{4} - \frac{\gamma^2 v}{6c} - \frac{\gamma^2 v}{6c} - \frac{\gamma^2}{9} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \\ \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle &= (\gamma^2 - 1) + \frac{4}{3} \gamma^2 \frac{v}{c} + \frac{4}{9} \gamma^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2,\end{aligned}\tag{2.16}$$

considerando $v \ll c$ entonces $\gamma \rightarrow 1$, quedando la energía promedio después de un cruce

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{4v}{3c}.\tag{2.17}$$

Ahora consideremos el caso opuesto, donde las partículas de la zona post choque entran a la zona pre choque. Dado que la probabilidad de retorno no es 1, entonces podemos calcularla como

$$P_{\text{retorno}} = 1 - \eta\tag{2.18}$$

donde η es la probabilidad de que la partícula se vaya y está expresada como

$$\eta = \frac{u_2 N}{\frac{1}{4} N v}.\tag{2.19}$$

Como $v \approx c$, entonces resulta

$$\eta = \frac{4u_2}{c},\tag{2.20}$$

por lo tanto la probabilidad de retorno puede ser expresada como

$$P_{\text{ret}} = 1 - \frac{4u_2}{c}.\tag{2.21}$$

Todo lo anterior refiere a que una partícula solo cruza de la zona pre choque a la post choque y regresa una sola vez, sin embargo, el hecho de mantenerse en la región de choque hace que pueda llevar a cabo k eventos de saltos, por lo tanto es necesario expresar como cambia su energía en múltiples eventos, así como N , entonces

$$\begin{aligned}E_1 &= \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right) E_0 ; N_1 = P_{\text{retorno}} N_0 \\ E_2 &= \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right) E_1 ; N_2 = P_{\text{retorno}} N_1 \\ &\dots \\ E_k &= \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right) E_{k-1} ; N_k = P_{\text{retorno}} N_{k-1},\end{aligned}\tag{2.22}$$

por lo tanto

$$E_k = \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)^k E_0. ; N_k = P_{\text{retorno}}^k N_0.\tag{2.23}$$

Podemos desarrollar el término de la energía del k -ésimo cruce

$$\begin{aligned}\ln \left(\frac{E_k}{E_0} \right) &= k \ln \left[\left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right) \right] \\ \ln \left(\frac{N_k}{N_0} \right) &= k \ln \left[1 - \frac{4u_2}{c} \right],\end{aligned}\tag{2.24}$$

desarrollando el logaritmo natural a primer orden, es decir, $\ln(1+x) \simeq x$ para $x \ll 1$

$$-\frac{4u_2}{c} \ln\left(\frac{E_k}{E_0}\right) = \frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{c} \ln\left(\frac{N_k}{N_0}\right) \quad (2.25)$$

$$N_k = N_0 \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^{-S}$$

donde S es

$$S = \frac{3u_2}{u_1 - u_2} = \frac{3}{r - 1}, \quad (2.26)$$

siendo $r = u_1/u_2$, la relación de salto de las condiciones de Rankine-Hugoniot para la velocidad. Para poder hallar el espectro derivamos esta última expresión respecto a la energía, obteniendo:

$$dN_k = C E_k^p dE_k, \quad (2.27)$$

con $p = -(s + 1)$, por lo tanto

$$p = \frac{r + 2}{r - 1} \implies \alpha = \frac{p - 1}{2} \quad (2.28)$$

donde α es el índice espectral del flujo de emisión sincrotrón.

Para un choque fuerte adiabático $r \rightarrow 4$ y $p \rightarrow 2$, que corresponde al caso de nuestro interés.

2.2.2. Proceso de aceleración de Fermi a segundo orden

Para el proceso a segundo orden asumiremos dos casos, uno donde la partícula impacta de frente con la nube y otro donde la partícula alcanza a la nube (Figura 2.1), en ambos caso consideramos que la partícula tiene una masa considerablemente pequeña respecto a la nube $m_p \ll M_n$, donde m_p es la masa de la partícula y M_n es la masa de la nube.

Para el primer caso consideramos que la partícula tiene un momento $m_p \mathbf{v}$, donde \mathbf{v} es el vector velocidad de la partícula en dirección x y la nube tiene un vector de velocidad $-\mathbf{v}$ en dirección opuesta a x (Figura 2.2). Antes de la colisión la partícula tiene una energía E y un momento p , entonces, para el sistema primado, que es el de la nube, tenemos que el momento y la velocidad es

$$\vec{p} = p \hat{x} ; \quad \mathbf{v} = v \hat{x} \quad (2.29)$$

por lo tanto

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} + p \frac{v}{c} \right) ; \quad p' = \gamma \left(p \frac{v}{c^2} E \right). \quad (2.30)$$

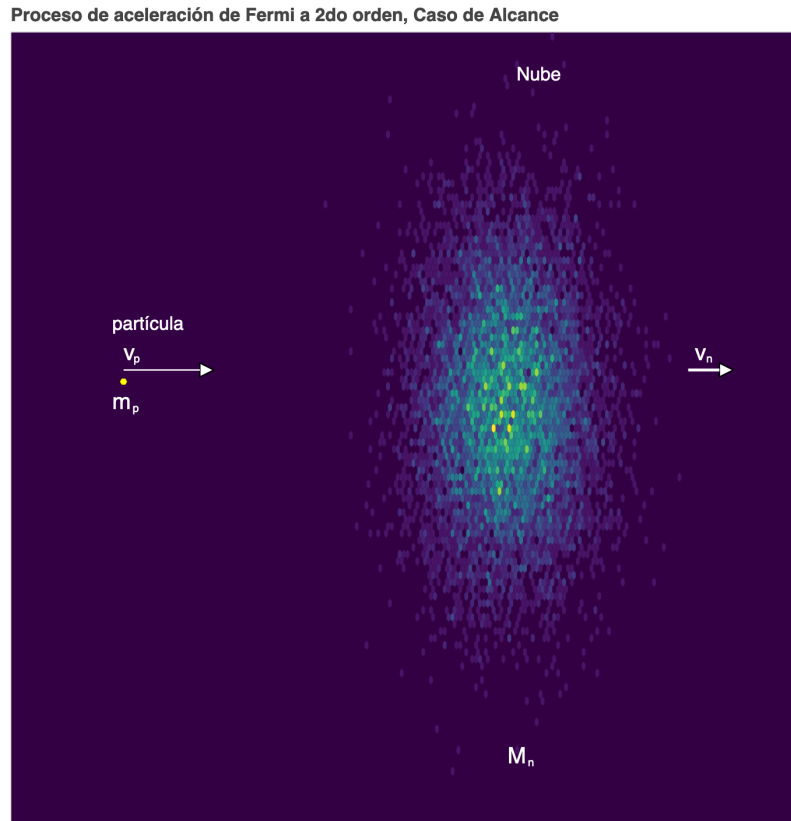


Figura 2.1: Escenario donde se desarrolla un mecanismo de aceleración de Fermi a segundo orden en caso de Alcance. La partícula y la nube tienen vectores de velocidad con la misma dirección, sin embargo la magnitud de la velocidad de la partícula es mayor que la de la nube, logrando una colisión eventualmente.

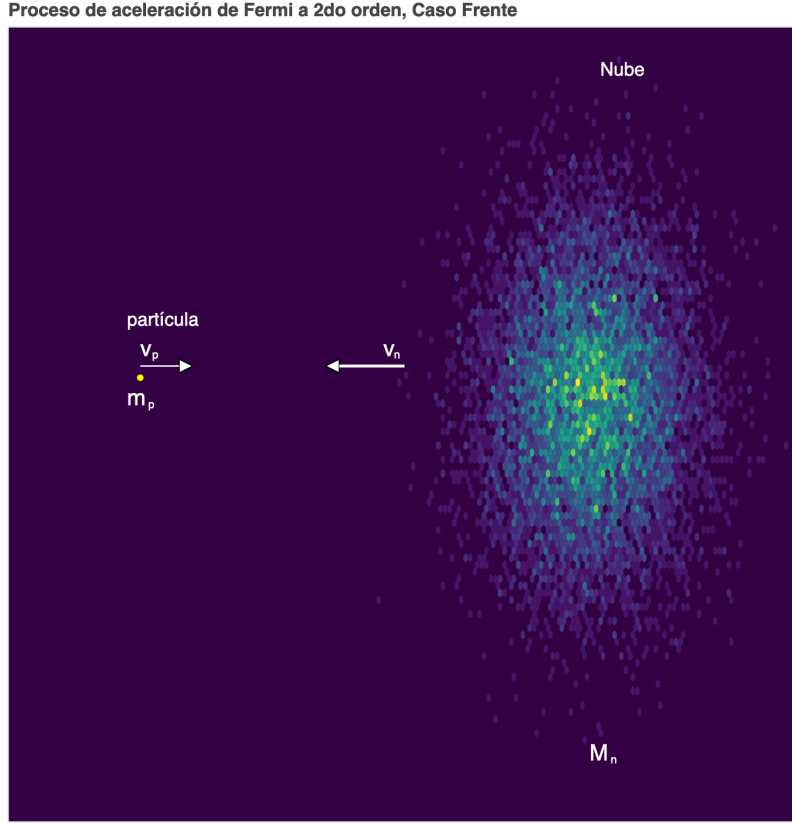


Figura 2.2: Escenario donde se desarrolla un mecanismo de aceleración de Fermi a segundo orden en caso de Frente. La partícula y la nube tienen vectores de velocidad con direcciones opuestas y la masa M de la nube es mucho mayor a la masa m de la partícula

Ahora, después del impacto, en el sistema de laboratorio biprimado

$$\frac{E''}{c} = \gamma \left(\frac{E'}{c} - \frac{\vec{v}\vec{p}'}{c} \right) ; \quad \mathbf{p}' = -p'\hat{x} ; \quad \mathbf{v} = v\hat{x}. \quad (2.31)$$

Si comparamos E'' en función de E'

$$E_f'' = \gamma \left(E' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}' \right), \quad (2.32)$$

donde E_f'' es la energía de Fermi desde el sistema del laboratorio biprimado en el choque de frente. Sustituyendo en la ecuación 2.30, queda

$$\begin{aligned} E_f'' &= \gamma \left[\gamma (E + pv) + v\gamma \left(p + \frac{v}{c^2} E \right) \right] \\ E_f'' &= \gamma^2 E \left[1 + \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] + 2\gamma^2 vp \\ \Delta E &= E_f'' - E = 2\gamma^2 v \left(\frac{vE}{c^2} + p \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

A continuación vamos a analizar el caso donde las partículas alcanzan por detrás a la nube. Nuevamente la partícula inicia con E y p tal que

$$\mathbf{p} = p\hat{x} ; \quad c = v\hat{x}, \quad (2.34)$$

entonces

$$E' = \gamma(E - vp) \quad ; \quad p' = \gamma\left(p - \frac{vE}{c^2}\right). \quad (2.35)$$

En la colisión $\mathbf{p}' \rightarrow -\mathbf{p}'$. Para el sistema biprimado del laboratorio

$$\frac{E''}{c} = \gamma\left(\frac{E'}{c} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}'}{c}\right) \quad ; \quad \mathbf{p}' = -p' \hat{x} \quad ; \quad \mathbf{v} = -v \hat{x}, \quad (2.36)$$

por lo tanto la energía de Fermi en el sistema del laboratorio biprimado en un choque por alcance

$$\begin{aligned} E_a'' &= \gamma(E' - vp') \\ E_a'' &= \gamma\left[\gamma(E - vp) - v\gamma\left(p - \frac{vE}{c^2}\right)\right] \\ E_a'' &= \gamma^2 E \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) - 2\gamma^2 vp \\ \Delta E_a &= E_a'' - E = -2\gamma^2 v \left(p - \frac{Ev}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Calculamos los tiempos característicos para los eventos de frente τ_f y de alcance τ_a

$$\tau_f = \frac{\Delta}{v + V} \quad ; \quad \tau_a = \frac{\Delta}{v - V} \quad (2.38)$$

La probabilidad de cada caso es

$$P_f = \frac{\frac{1}{\tau_f}}{\frac{1}{\tau_f} + \frac{1}{\tau_a}} \quad ; \quad P_a = \frac{\frac{1}{\tau_a}}{\frac{1}{\tau_f} + \frac{1}{\tau_a}} \quad (2.39)$$

Para la energía total tomamos ambos casos

$$P_f = \frac{u + v}{2v} \quad ; \quad P_a = \frac{u - v}{2u}, \quad (2.40)$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{total}} &= P_f \Delta E_f + P_a \Delta E_a \\ &= \frac{1}{2} \frac{u + v}{v} 2\gamma^2 v \left(p + \frac{Ev}{c^2}\right) - \frac{1}{2} \frac{u - v}{v} 2\gamma^2 v \left(p - \frac{vE}{c^2}\right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde

$$|p| = |\vec{v}| \frac{E}{c^2}, \quad (2.42)$$

por lo tanto la energía total que gana la partícula en este proceso es:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{total}} &= \gamma^2 \frac{v}{u} \frac{E}{c^2} \left[(u + v)^2 - (u - v)^2\right] \\ \Delta E_{\text{total}} &= 4\gamma^2 E \left(\frac{v}{c}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

De lo anterior podemos obtener que para las condiciones de un sistema proto estelar, el proceso de aceleración de Fermi a primer orden es significativo, mientras que el caso de segundo orden no es por su dependencia del cuadrado inverso de c , dado que las velocidades del sistema son más bien del orden clásico, haciendo a este último despreciable.

Capítulo 3

Magnetohidrodinámica (MHD) en plasmas

Para poder entender lo que sucede dentro de un sistema astrofísico es necesario tener en cuenta que no hay un laboratorio donde se pueda explorar el espacio de parámetros de forma exhaustiva para poder describir el sistema, por lo que es necesario recurrir a métodos indirectos como lo son las simulaciones numéricas las cuales nos puedan mostrar una forma aproximada de la evolución temporal del sistema y a través de ellas poder caracterizarlo. Si bien las simulaciones numéricas forman una herramienta útil para estudiar fenómenos hidrodinámicos en astrofísica, estas no tienen ningún valor científico cuando las consideraciones físicas no representan el sistema estudiado o cuando los resultados distan de representarlo.

Es por lo anterior que describiremos las partes teóricas más fundamentales que involucran el uso de un código MHD. Este capítulo está dividido en dos secciones: en la primera sección (3.1) nos enfocamos en resolver el problema de un plasma con influencia de campos eléctricos \mathbf{E} y magnéticos \mathbf{B} a través del conjunto de ecuaciones MHD, mientras que en la segunda sección (3.2.3) se describe la aproximación de Riemann empleada para resolver de forma numérica un problema de MHD ideal. Se incluye un apéndice donde se deducen el conjunto de ecuaciones hidrodinámicas para un plasma.

3.1. Magnetohidrodinámica: MHD

En el apéndice se desarrolla a detalle la obtención de las ecuaciones de hidrodinámica, sin embargo nuestro principal interés yace en considerar plasmas con campos magnéticos, por lo que vamos a tomar la consideración de que el plasma está constituido de partículas cargadas que interactúan entre sí, sumado a que puede haber la presencia de campos magnéticos por donde fluye el plasma, haciendo que la contribución de campos eléctricos y magnéticos sean importantes. En el caso de los jets astrofísicos se ha observado la presencia de campos magnéticos a lo largo del flujo de partículas, es por eso que emplear únicamente las ecuaciones de hidrodinámica sería no considerar todos los efectos involucrados respecto a su dinámica. A continuación desarrollaremos una forma en que podemos obtener las ecuaciones de magnetohidrodinámica para un plasma constituido por e cantidad de especies.

Si quisiéramos emplear la linealidad de la Ley de Ohm en las ecuaciones debemos hacer ciertas consideraciones que resultan complicadas de aceptar ya que partimos de saber que el plasma está compuesto de cargas positivas y negativas libres como resultado de la ionización del gas, entonces podemos asumir que es eléctricamente neutro, mas aún, que la densidad de cargas neta es despreciable. Por otro lado, dado que la velocidad de desplazamiento del

fluido es baja comparada con el tiempo característico del plasma entonces la corriente de desplazamiento puede ser considerada pequeña respecto a la corriente de conducción. Ya que son demasiadas consideraciones, partimos de las ecuaciones deducidas en la sección anterior y de las consideraciones mencionadas, obteniendo cada uno de los momentos de forma independiente.

Para poder deducir las ecuaciones MHD haremos dos consideraciones. Primera, que la densidad de masa puede ser definida como la suma de las densidades de masa de cada una de las especies dentro del plasma, es decir

$$\rho_m = \Sigma \rho_{ms} \quad (3.1)$$

donde ρ_m es la densidad de masa total y ρ_{ms} es la densidad de masa por especie, que a su vez puede ser expresada como $\rho_{ms} = m_s n_s$.

Segunda, que podemos definir la velocidad del fluido como el promedio de las velocidades de las especies, pesado por sus masas, es decir

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\rho_m} \Sigma \rho_{ms} \mathbf{U}_s, \quad (3.2)$$

donde \mathbf{U}_s es la velocidad promedio definida en la Ec. 7.5.

3.1.1. Ecuación de continuidad de masa

Para deducir la ecuación de continuidad de masa MHD partimos de la ecuación de continuidad de masa HD (Ec. 7.9)

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{U}_s) = 0, \quad (3.3)$$

la cual multiplicamos por m_s ,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} m_s + m_s \nabla \cdot (n_s \mathbf{U}_s) = 0, \quad (3.4)$$

haciendo uso de que $\rho_{ms} = m_s n_s$, nos queda

$$\frac{\partial \rho_{ms}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{U}_s) = 0. \quad (3.5)$$

Ahora, si sumamos sobre todas las especies tenemos que

$$\frac{\partial \Sigma \rho_{ms}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\Sigma \rho_{ms} \mathbf{U}_s \right) = 0, \quad (3.6)$$

usando las definiciones de densidad de masa 3.1 y de velocidad 3.2, obtenemos

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0. \quad (3.7)$$

Podemos notar que la ecuación resultante depende de la velocidad del fluido.

3.1.2. Ecuación de momento

Para deducir la ecuación de momento MHD debemos tener en cuenta que el fluido contiene cargas y partir de la ecuación de momentos que está dada como

$$\frac{\partial (m_s n_s U_s)}{\partial t} + \nabla \cdot (m_s n_s U_s U_s) = n_s e_s (E + U_s \times B) - \nabla \cdot \vec{P}_s + \frac{\delta_c \mathbf{p}_s}{\partial t}, \quad (3.8)$$

donde $\frac{\delta_c \mathbf{p}_s}{\partial t}$ es la contribución de la fuerza de arrastre colisional, e_s la carga total por especie, \mathbf{p}_s la presión por especie y \vec{P}_s en tensor de presión. Ahora, sumando sobre todas las especies obtenemos

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{ms} U_s) + \sum_s \nabla \cdot (\rho_{ms} U_s U_s) = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \left(\sum_s \vec{P}_s \right) + \sum_s \frac{\delta_c \mathbf{p}_s}{\partial t} \quad (3.9)$$

donde $\rho_q = \sum_s n_s e_s$ y $\mathbf{J} = \sum_s n_s e_s \mathbf{U}_s$.

Como el momento total es conservado en cada colisión, entonces el término $\sum_s \delta_c \mathbf{p}_s / \delta t = 0$, por lo que introducimos un nuevo tensor de presión en el sistema de referencia que se mueve con la velocidad del plasma,

$$\vec{P}_{0s} = m_s \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f_s d^3v. \quad (3.10)$$

Podemos escribir la presión total como

$$\vec{P}_0 = \sum_s \vec{P}_{0s}, \quad (3.11)$$

por lo que podemos reescribir la Ec. 3.9 como

$$\begin{aligned} & \sum_s \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{ms} \mathbf{U}_s) + \sum_s \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s) \\ &= \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \vec{P}_0 + \sum_s \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{W}_s \mathbf{W}_s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ahora, desarrollamos cada uno de los miembros de la ecuación, para el lado izquierdos podemos desarrollar asumiendo $\mathbf{U}_s = \mathbf{W}_s + \mathbf{U}$, quedando

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{ms} \mathbf{W}_s) + \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{W}_s \mathbf{W}_s) + \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{W}_s \mathbf{U}) \\ & \quad + \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{U} \mathbf{W}_s) + \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{U} \mathbf{U}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si sumamos las cantidades sobre todas las especies y teniendo en cuenta que $\sum \rho_{ms} \mathbf{W}_s = 0$ la ecuación de momento puede ser escrita como

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{ms} \mathbf{U}) + \sum_s \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{U} \mathbf{U}) + \sum_s \nabla \cdot (\rho_{ms} \mathbf{W}_s \mathbf{U}). \quad (3.14)$$

Por lo que la ecuación 3.12 queda como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U} \mathbf{U}) = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \vec{P}_0. \quad (3.15)$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad 3.7 podemos reescribir la ecuación de momentos como

$$\rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right] = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \vec{P}_0, \quad (3.16)$$

notamos que el elemento que está dentro de los corchetes corresponde a la derivada total igual que en la ecuación 7.25.

La interpretación de esta ecuación refiere a que la razón de carga del momento por elemento de fluido es igual a la suma del campo eléctrico, magnético y las fuerzas de presión actuando sobre el mismo elemento de fluido. Nótese que no se hicieron consideraciones, que la solución resulta exacta pues se tomaron como premisas los resultados del primero y segundo momento de la ecuación de Boltzmann.

3.1.3. Ley generalizada de Ohm

Como mencionamos al principio, el plasma es un medio con cargas libres, por lo tanto conductor, y resulta importante poder definir como depende la densidad de corriente respecto al campo eléctrico. Como mencionamos al principio partir de la Ley de Ohm resulta difícil en el sentido que las consideraciones hacen del resultado algo poco riguroso. Sin embargo, el uso de la ley de Ohm en MHD es amplio, y es una razonable aproximación si el camino libre medio es corto comparado con el tiempo característico del sistema, es por eso que resulta conveniente escribir una ley general de Ohm.

Para poder hacer dicha derivación es necesario hacer las siguientes consideraciones, comenzando por el hecho de que el plasma consta de dos componentes, por un lado los electrones (e) y por el otro las cargas positivas de iones (i). Por otro lado asumimos que la fuerza de arrastre sobre la s -ésima especie es proporcional a la diferencia de velocidad entre la especie s -ésima y r -ésima y puede ser expresada como:

$$\frac{\delta_c \mathbf{P}_s}{\delta t} = -n_s m_s \nu_{sr} (\mathbf{U}_s - \mathbf{U}_r), \quad (3.17)$$

donde ν_{sr} es la frecuencia efectiva de colisión entre dos especies.

Ahora tomamos las ecuaciones de momento para los iones y los electrones. La ecuación de momento para iones está expresada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n_i \mathbf{U}_i) + \nabla \cdot (m_i n_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) = n_i e [\mathbf{E} + \mathbf{U}_i \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \vec{P}_i - n_i m_i \nu_{ie} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e), \quad (3.18)$$

mientras que para los electrones la ecuación de momento queda expresada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_e n_e \mathbf{U}_e) + \nabla \cdot (m_e n_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e) = -n_e e [\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \vec{P}_e - n_e m_e \nu_{ei} (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i), \quad (3.19)$$

sabemos que la densidad de corriente es proporcional a $(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e)$, si multiplicamos las ecuaciones 3.19 y 3.18 por m_i y m_e respectivamente, restando ambas ecuaciones y asumiendo que $n_e = n_i = n$ obtenemos

$$\begin{aligned} m_e m_i \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [n (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e)] + \nabla \cdot [n (\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e)] \right\} \\ = e \rho_m \mathbf{E} + en (m_s \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e) \times \mathbf{B} - m_e \nabla \cdot \vec{P}_i + m_i \nabla \cdot \vec{P}_e \\ - m_e m_i n \nu_{ie} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e) + m_i m_e n \nu_{ei} (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $\rho_m = n(m_i + m_e)$ es la densidad de masa. Como las fuerzas de arrastre de iones y electrones están en equilibrio $m_e \nu_{ei} = m_i \nu_{ie}$. Los últimos dos términos de la ecuación los podemos escribir de la siguiente manera,

$$-m_e m_i n \nu_{ie} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e) + m_i m_e n \nu_{ei} (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i) = e \rho_m \left(\frac{m_e \nu_{ei}}{n e^2} \right) \mathbf{J}, \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{J} = n(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e)$ es la densidad de corriente y el elemento del paréntesis derecho es la resistividad definida como

$$\frac{m_e \nu_{ei}}{n e^2} = \frac{1}{\sigma} = \eta. \quad (3.22)$$

Para desarrollar el término $m_e \mathbf{U}_i + m_i \mathbf{U}_e$ podemos hacer uso de la ecuación de velocidad de un fluido $\mathbf{U} = (m_e \mathbf{U}_e + m_i \mathbf{U}_i) / (m_e + m_i)$ y de la ecuación de densidad de corriente $\mathbf{J} = ne (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e)$ dando como resultado

$$m_e \mathbf{U}_i + m_i \mathbf{U}_e = (m_e + m_i) \mathbf{U} - (m_i - m_e) \frac{\mathbf{J}}{en}. \quad (3.23)$$

Por último, para el lado izquierdo de la ecuación utilizamos la ecuación de densidad de corriente, entonces la derivada parcial respecto al tiempo $\frac{\partial}{\partial t}$ se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial t} [n (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e)] = \frac{1}{e} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (3.24)$$

Para desarrollar el término ∇ de la ecuación 3.20 podemos simplificar los cálculos si notamos que la ecuación 3.17 es válida únicamente si la diferencia $\delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i$ de velocidades es pequeña. Entonces, el término $(\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e)$ puede ser expandido en series de potencias para una cantidad pequeña $\delta \mathbf{U}$, que en una aproximación a primer orden, es decir $\mathbf{U} \approx \mathbf{U}_i$ para $m_e \ll m_i$ y $\mathbf{U} = -\delta \mathbf{U}$, puede ser expresada

$$\nabla \cdot [n (\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e)] = \frac{1}{e} \nabla \cdot (\mathbf{J} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{J}), \quad (3.25)$$

Teniendo estos resultados, podemos sustituir las ecuaciones 3.25 y 3.21 en 3.20, considerando que $m_e \ll m_i$ y omitiendo el término de presión por parte de los iones dado que el factor m_e/m_i es despreciable, quedando

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{1}{en} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla \cdot \vec{P}_e + \frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{J}) \right]. \quad (3.26)$$

Ésta es la llamada ecuación generalizada de la ley de Ohm. Notamos que si podemos recuperar la forma lineal de la ley de Ohm si todos los términos de la derecha son lo suficientemente pequeños.

Debido a que la frecuencia de colisión tiende a cero, entonces la conductividad tiende a infinito, por lo que la ecuación 3.26 se reduce a

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0, \quad (3.27)$$

un plasma que obedece esta ecuación es llamado plasma idea MHD. Resulta natural ver que la componente de velocidad perpendicular a \mathbf{B} está dada por $\mathbf{U}_\perp = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ mientras que la componente paralela del campo eléctrico E_\parallel respecto al campo \mathbf{B} es idénticamente cero.

Para un plasma colisional, si despreciamos todos los elementos de la derecha en la ecuación 3.26 nos queda

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \eta \mathbf{J}, \quad (3.28)$$

que es la forma resistiva de la ley de Ohm. Esta forma suele ser empleada en modelos no por su rigor, sino porque representa de forma simple las cantidades más importantes derivadas de un modelo ideal MHD.

3.1.4. Ecuación de energía

El conjunto de ecuaciones deducido para un plasma MHD no representa un sistema cerrado, al igual que en el caso HD, por lo que es necesario incluir una ecuación de estado

apropiada al sistema y así cerrarlo.

Por un lado, si asumimos que hay suficientes colisiones para poder establecer una distribución de velocidades isotrópicas Maxwelliana, entonces la presión del plasma es isotrópica y su gradiente puede ser expresado como $\nabla \cdot \vec{P} = \nabla P$. Teniendo en cuenta estas condiciones, podemos asumir un modelo politrópico que describa la energía como una ley de potencias de la forma

$$\frac{d}{dt} (P \rho_m^{-\gamma}) = 0, \quad (3.29)$$

donde γ es el índice politrópico. Al tomar una ecuación de estado de esta forma, podemos aprovechar los posibles valores de γ para poder describir diferentes situaciones físicas.

Es posible usar un modelo politrópico para describir los diferentes sistemas desde un punto de vista reduccionista, haciendo que este describa diferentes sistemas según el valor del índice politrópico.

Por otro lado, si no hay suficientes colisiones para poder establecer una distribución de velocidades isotrópicas, entonces la presión será anisotrópica y solo puede ser representada por medio de un tensor. Si suponemos que el movimiento de una partícula es de forma azimutal respecto al campo magnético, entonces el tensor de presión puede ser expresado

$$\vec{\vec{P}}_s = \begin{bmatrix} P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & P_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde P_{\perp} y P_{\parallel} son las componentes perpendiculares y paralelas al campo magnético local. Si consideramos una variación lenta en el proceso adiabático de tal manera que no haya flujo de calor, las componentes paralelas y perpendiculares obedecen que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P_{\perp}}{\rho_m B} \right) = 0 \quad (3.31)$$

y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P_{\perp}^2 P_{\parallel}}{\rho_m^5} \right) = 0, \quad (3.32)$$

que corresponde al conocido sistema Chew-Coldberberg-Low (CGL).

3.1.5. Conjunto completo de ecuaciones MHD

Es necesario que las ecuaciones obtenidas para la descripción resistiva MHD del plasma, la ecuación de fluido y la ley de Ohm satisfagan auto consistencia y estén acopladas con las ecuaciones de Maxwell. Para poder lograr esto, es necesario hacer dos aproximaciones. Primero, ya que la variación temporal es considerada baja, entonces la corriente de desplazamiento es ignorada respecto a la corriente de condición. Esto a su vez implica que la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas y la velocidad del fluido en el modelo resistivo MHD es más pequeña que la velocidad de la luz, lo cual quiere decir que el resultado es esencialmente no relativista. Segundo, la densidad de carga ρ_q es cero, despreciando el efecto de cargas separadas. Finalmente que la presión es un escalar que sigue el modelo politrópico 3.29. Con

estas consideraciones podemos escribir el conjunto de ecuaciones resistivas MHD

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} && \text{Ley de Ampere,} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t && \text{Ley de Faraday,} \\
 \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) &= 0 && \text{Ecuación de continuidad de masa,} \\
 \rho_m \frac{d\mathbf{U}}{dt} &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P && \text{ecuación de momento,} \\
 \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{J} && \text{Ley de Ohm,} \\
 \frac{d}{dt} (P \rho_m^{-\gamma}) &= 0 && \text{modelo politrópico para la energía.}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

De este conjunto de ecuaciones si tomamos la divergencia de la ley de Ampere, podemos obtener la condición para la continuidad de carga $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, la cual siempre es válida cuando se asume que $\rho_q = 0$. Por otra parte podemos notar que la ecuación de continuidad de carga no es una ecuación independiente, ya que implica la ley de Ampere. Además, la aproximación $\rho_q = 0$, que algunas veces refiere a la condición de cuasi neutralidad, no implica que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Aplicando la ley de Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_q / \epsilon_0$, la condición de cuasi neutralidad $n_e = n_i \equiv n$ requiere que $|\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}| / (ne) \ll 1$. Entonces, la ley de Gauss es retirada de las ecuaciones de resistividad MHD y el campo electrico \mathbf{E} es ahora obtenido a partir de la ley de Ohm (3.28).

3.2. Aproximación de Riemann en un sistema MHD ideal de multi estados: HLLD

En esta sección desarrollaremos los cálculos numéricos para una aproximación a la solución de un sistema MHD ideal a través de la solución de Riemann de multi estados. Tomaremos como punto de partida el conocimiento sobre las aproximaciones a la solución de Harten-Lax-van Leer (HLL) para el sistema MHD ideal.

3.2.1. Planteamiento teórico del problema MHD

En astrofísica, al igual que en otras áreas espaciales, en laboratorio y más, el conjunto de ecuaciones MHD representa el comportamiento macroscópico de fenómenos que se presentan en dichos campos, por lo que realizar estimaciones a través de ellas resulta útil al momento de entender, simular o representar el estado de los diversos fenómenos. En el caso particular de fenómenos astrofísicos, las soluciones resultantes de las ecuaciones MHD deben satisfacer el hecho de que hay cantidades físicas que siempre son positivas, tales como la presión y la densidad, lo cual no siempre se logra en simulaciones de soluciones numéricas de las ecuaciones, por lo que es necesario que los métodos utilizados en dichas simulaciones sean robustos y físicamente correctos para poder tomar como válido el resultado. Lo anterior convierte como elemento fundamental la búsqueda de modelos robustos capaces de evitar valores negativos dentro de las soluciones.

Históricamente hay una serie de modelos que han pretendido satisfacer la necesidad de resultados siempre positivos a través de la solución del conjunto de ecuaciones MHD, tales como el método de división de vectores de flujo (FVS, por sus siglas en inglés) y el método para la solución de Riemann HLLC (La C corresponde a la onda de 'Contacto'). Para el caso de la solución HLLC asume una discontinuidad de contacto entre los dos estados intermedios del sistema que puede ser resuelta de forma aislada y exacta. Existen otros esquemas que

cumplen la condición de devolver resultados enteramente positivos, sin embargo, no pueden resolver el problema de discontinuidades y es por eso que han ido quedando fuera de los esquemas conocidos.

A continuación plantearemos las ecuaciones que definen el sistema MHD con la notación común dentro de la resolución del problema en una dimensión, se puede encontrar este desarrollo en más detalle en el artículo "*A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics*" de Takahiro Miyoshi, Kanya Kusano (2004) Miyoshi & Kusano (2005)

3.2.2. Ecuaciones MHD en solución numérica

Para poder dar una solución al conjunto MHD es preciso comenzar con dar una definición general de la solución de un sistema conservativo hiperbólico de una dimensión, que está descrito como

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (3.34)$$

Para esta solución general, los valores propios del Jacobiano son reales, y está definido como

$$A = \frac{\partial F}{\partial U}, \quad (3.35)$$

donde \mathbf{F} es la función de flujos del sistema y \mathbf{U} el vector de variables conservativas. Para este tipo de sistemas los valores propios son un conjunto de ecuaciones completo.

Planteamos las ecuaciones MHD en una dimensión y definimos el vector de variables conservativas \mathbf{U} y el vector de flujos \mathbf{F}

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_T - B_x^2 \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ (e + p_T) u - B_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

donde $v = (u, v, w)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ y p_T es la presión total está dada como

$$p_T = p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \quad y \quad p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \right) \quad (3.37)$$

En el caso de 1D, la componente B_x está dada como constante por la condición de divergencia libre.

Los valores propios de este conjunto de ecuaciones corresponden a dos ondas de Alfvén, cuatro a una onda magneto-acústica y una para una onda entrópica:

$$\lambda_{2,6} = u \mp c_a, \quad \lambda_{1,7} = u \mp c_f, \quad \lambda_{3,5} = u \mp c_s, \quad \lambda_4 = u, \quad (3.38)$$

donde

$$c_a = \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho}}, \quad c_{f,s} = \left[\frac{\gamma p + |\mathbf{B}|^2 \pm \sqrt{(\gamma p + |\mathbf{B}|^2)^2 - 4\gamma p B_x^2}}{2\rho} \right]^{1/2}, \quad (3.39)$$

de donde se satisface de forma inmediata que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6 \leq \lambda_7, \quad (3.40)$$

los cuales a veces coinciden dependiendo de la orientación del campo magnético, por lo tanto el conjunto de ecuaciones MHD no son estrictamente hiperbólicas, y en consecuencia, el conjunto de valores propios no se obtiene de forma inmediata. Debido a lo anterior, la solución al problema de Riemann puede ser una composición de ondas de compresión y ondas incompresibles, a diferencia de solo un choque ordinario y ondas vacuas. Esta solución no es algo fácil de resolver en el problema de Riemann para un sistema MHD en general, sin embargo, la solución a la discontinuidad se puede considerar como una onda regular tal que permite seguir la solución de Rankine-Hugoniot,

$$\mathbf{S}[U] = \mathbf{F}, \quad (3.41)$$

donde \mathbf{S} es la velocidad de discontinuidad y \mathbf{F} indica el salto de condiciones entre componentes, \mathbf{U}_1 y \mathbf{U}_2 . Ahora, si consideramos soluciones para las cuales $u_1, u_2 \neq S$, es decir, que hay un transporte neto de partículas entre las discontinuidades y que $B_x \neq 0$, podemos obtener tres diferentes soluciones. La primera es el caso de una solución compresible, es decir, que $\rho_1 < \rho_2$ y $u_1 > u_2$, entonces se tiene ondas rápidas y lentas. En ambos choques se conserva el signo de la componente tangencial del campo magnético, haciendo que el campo magnético se concentre en la zona de choque rápido y se debilite en la zona de choque débil. La segunda solución es cuando se tiene una condición de incompresibilidad. Es decir que $\rho_1 = \rho_2$ y $u_1 = u_2$, lo que establece las siguientes relaciones a lo largo de la discontinuidad que se mueve a la velocidad de Alfvén λ_2 o λ_6 :

$$[\rho] = [p] = [B_y^2 + B_z^2] = 0, \quad \pm\sqrt{\rho}[v] = [B_y], \quad \pm\sqrt{\rho}[w] = [B_z], \quad (3.42)$$

a esta solución se le llama choque de Alfvén. Las cantidades termodinámicas que no cambian a lo largo de la discontinuidad como lo son ρ y p son llamadas el rotacional de discontinuidad. Por otro lado, la discontinuidad que se mueve a la velocidad de la onda de entropía λ_4 debe satisfacer

$$[B_y] = [B_z] = [v] = [w] = [p] = 0, \quad (3.43)$$

para el caso donde $B_x \neq 0$, mientras que para el caso donde $B_x = 0$ se tiene que

$$\left[p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \right] = 0. \quad (3.44)$$

La discontinuidad formada por las dos componentes es llamada discontinuidad de contacto, que al igual que la velocidad de las componentes y el campo magnético deben ser continuas. La ecuación 3.44 indica que la velocidad tangencial y el campo magnético tangencial debe tener un salto a través de la discontinuidad, a esto se le llama discontinuidad tangencial.

3.2.3. Aproximación HLLD al problema de Riemann

Se propone el método de solución de Riemann HLLD como una alternativa a la ausencia de tratamiento de las condiciones de salto en el método HLLC. Se parte de la premisa de que el método HLLC tiene inconsistencias entre la suposición de la velocidad normal constante y la aproximación de dos estados en los estados intermedios del problema de Riemann.

Se toman como punto de partida las consideraciones básicas del método HLLC, es decir, que la velocidad normal es constante en el abanico Riemann que lleva a la conclusión de que la velocidad de la malla de Riemann corresponde a la velocidad media de la onda. Por otro lado, la presión total es constante sobre todo el abanico de Riemann. Los choques lentos no pueden ser formados dentro del abanico de Riemann y la discontinuidad se propaga con las ondas de Alfvén, que a su vez son generadas. estas últimas dos conclusiones sugieren que el abanico de Riemann puede ser dividido en cuatro estados intermedios \mathbf{U}_L^* , \mathbf{U}_L^{**} , \mathbf{U}_R^* , \mathbf{U}_R^{**} , por lo tanto consideramos un problema de cuatro estados separados por una onda de entropía y dos de Alfvén. S_M y S_L^* , S_R^* .

El siguiente desarrollo se hace siguiendo el libro de "Modelling Pulsar Wind Nebulae" Torres (2017). Entonces, evaluamos la velocidad normal promedio del método HLL

$$S_M = \frac{(S_R - u_R) \rho_R u_R - (S_L - u_L) \rho_L u_L - p_{T_R} + p_{T_L}}{(S_R - u_R) \rho_R - (S_L - u_L) \rho_L}. \quad (3.45)$$

Ya que se considera que la velocidad normal es constante sobre el abanico de Riemann, se cumple que

$$u_L^* = u_L^{**} = u_R^{**} = u_R^* = S_M. \quad (3.46)$$

Adicionalmente, se asume que la presión total es constante, por lo que

$$p_{T_L}^* = p_{T_L}^{**} = p_{T_R}^{**} = p_{T_R}^* = p_T^*. \quad (3.47)$$

A partir de la igualdad $p_R^* = p_T^* = p_{T_R}^*$ podemos escribir de forma explícita la presión total p_T^*

$$p_T^* = \frac{(S_R - u_R) \rho_R p_{T_L} - (S_L - u_L) \rho_L p_{T_R} + \rho_L \rho_R (S_R - u_R) (S_L - u_L) (u_R - u_L)}{(S_R - u_R) \rho_R - (S_L - u_L) \rho_L}. \quad (3.48)$$

De la ecuación 3.47 podemos notar que las discontinuidades de contacto, rotacional y tangencial pueden ser formadas en el abanico de Riemann bajo esa restricción.

Ya definido S_M y p_T^* las cantidades \mathbf{U}_α^* y \mathbf{U}_α pueden ser obtenidas a través de las superficie de contacto S_α y están dadas como

$$S_\alpha \begin{bmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y_\alpha}^* \\ B_{z_\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y_\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z_\alpha}^* \\ B_{y_\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z_\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{bmatrix} = S_\alpha \begin{bmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y_\alpha} \\ B_{z_\alpha} \\ e_\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y_\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z_\alpha} \\ B_{y_\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ B_{z_\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_T^*) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

donde $\alpha = L$ o R . Se puede notar que la segunda elección de la matriz es consistente elección de S_M y p_T^* .

De la primera ecuación podemos obtener la relación

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M}. \quad (3.50)$$

Tomando la tercera y quinta ecuación de 3.49 y resolviendo simultáneamente tenemos que

$$\nu_\alpha^* = \nu_\alpha - B_x B_{y\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2}, \quad (3.51)$$

$$B_{y\alpha}^* = B_{y\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2}. \quad (3.52)$$

Tomando la cuarta y sexta ecuación y resolviendo simultáneamente, se obtiene

$$w_\alpha^* = w_\alpha - B_x B_{z\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2}, \quad (3.53)$$

$$B_{z\alpha}^* = B_{z\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2}. \quad (3.54)$$

Para evitar indeterminaciones en 3.51 y 3.54 cuando $S_M = u_\alpha$, $S_\alpha = u_\alpha \pm c_{f\alpha}$, $B_{y\alpha} = B_{z\alpha} = 0$ y $B_x^2 \geq \gamma p_\alpha$, se puede remplazar $\nu_\alpha^* = \nu_\alpha$, $w_\alpha^* = w_\alpha$ y $B_{y\alpha} = B_{z\alpha} = 0$ ya que no hay choque en S_α , es decir $\rho_\alpha^* = \rho_\alpha$, $u_\alpha^* = u_\alpha$ y $p_{T\alpha}^* = p_{T\alpha}$.

Finalmente, con la séptima ecuaciones de 3.49 y con 3.51 y 3.54 se tienen

$$e_\alpha^* = \frac{(S_\alpha - u_\alpha) e_\alpha - p_{T\alpha} u_\alpha + p_{T\alpha}^* S_M + B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*)}{S_\alpha - S_M} \quad (3.55)$$

Entonces consideramos los estados intermedios internos \mathbf{U}^{**} , para las condiciones de salto de la ecuación de continuidad a través de un S arbitrario, donde $S_L < S < S_M$ o $S_M < S < S_R$,

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^*, \quad (3.56)$$

mientras que la condición de salto

$$p_{T\alpha}^{**} = p_{T\alpha}^*. \quad (3.57)$$

Es necesario que para 3.56 la velocidad propagación de ondas de Alfvén en los estados intermedios estén evaluadas como

$$S_L^a = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}}, \quad S_R^* = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}. \quad (3.58)$$

Con lo que se puede establecer las condiciones de salto para la componente tangencial del campo magnéticos y la velocidad a través de S_M

$$S_M \begin{bmatrix} \rho_L^* v_L^{**} \\ \rho_L^* w_L^{**} \\ B_{yL}^{**} \\ B_{zL}^{**} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L^* v_L^{**} S_M - B_x B_{yL}^{**} \\ \rho_L^* w_L^{**} S_M - B_x B_{zL}^{**} \\ B_{yL}^{**} - B_x v_L^{**} \\ B_{zL}^{**} - B_x w_L^{**} \end{bmatrix} = S_M \begin{bmatrix} \rho_R^* v_R^{**} \\ \rho_R^* w_R^{**} \\ B_{yR}^{**} \\ B_{zR}^{**} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_R^* v_R^{**} S_M - B_x B_{yR}^{**} \\ \rho_R^* w_R^{**} S_M - B_x B_{zR}^{**} \\ B_{yR}^{**} - B_x v_R^{**} \\ B_{zR}^{**} - B_x w_R^{**} \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

de donde al considerar $B_x \neq 0$ resultan las siguiente relaciones

$$v_L^{**} = v_L^* \equiv v^{**} \quad (3.60)$$

$$w_L^{**} = w_L^* \equiv w^{**} \quad (3.61)$$

$$B_{yL}^{**} = B_{yL}^{**} \equiv B_{yL}^{**} \quad (3.62)$$

$$B_{zL}^{**} = B_{zL}^{**} \equiv B_{zL}^{**}. \quad (3.63)$$

Si consideramos $B_x = 0$ tenemos

$$(S_R - S_R^*) \mathbf{U}_R^* + (S_R^* - S_M) \mathbf{U}_R^{**} + (S_M - S_L^*) \mathbf{U}_L^{**} + (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - S_R \mathbf{U}_R + S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0, \quad (3.64)$$

de donde se deriva que

$$v^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_L^* + \sqrt{\rho_R^*} v_R^* + (B_{yR}^* - B_{yL}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (3.65)$$

$$w^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} w_L^* + \sqrt{\rho_R^*} w_R^* + (B_{zR}^* - B_{zL}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (3.66)$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{yR}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{yL}^* + (v_R^* - v_L^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (3.67)$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{zR}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{zL}^* + (w_R^* - w_L^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (3.68)$$

donde $\text{sign}(B_x)$ es 1 para $B_x > 0$ y -1 para $B_x < 0$. Por otro lado la condición de densidad de energía a través de S_α^* queda expresada como

$$e_\alpha^{**} = e_\alpha^* \mp \sqrt{\rho_\alpha^*} (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sign}(B_x), \quad (3.69)$$

donde los signos corresponden a $\alpha = L$ y R .

De esta forma puede ser derivado el conjunto completo de estados intermedios, \mathbf{U}_L^* , \mathbf{U}_L^{**} , \mathbf{U}_R^* y \mathbf{U}_R^{**} con sus respectivos flujos \mathbf{F}_L^* , \mathbf{F}_L^{**} , \mathbf{F}_R^* y \mathbf{F}_R^{**} .

En general, los flujos quedan expresados como

$$\mathbf{F}_{HLLD} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{si } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_L^* & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_L^*, \\ \mathbf{F}_L^{**} & \text{si } S_L^* \leq 0 \leq S_M, \\ \mathbf{F}_R^{**} & \text{si } S_M \leq 0 \leq S_R^*, \\ \mathbf{F}_R^* & \text{si } S_R^* \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_R & \text{si } S_R < 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Capítulo 4

Modelo

Nuestro trabajo se basa en crear un modelo MHD para estudiar la presencia de emisiones no térmicas en un sistema que se apegue a las condiciones físicas observadas de un jet protoestelar, teniendo como objetivo reproducir de forma sintética la emisión sincrotrón en las zonas de choque, además de analizar la influencia de cada una de las consideraciones impuestas al modelo sobre la emisión.

Nuestro modelo cuenta con las siguientes suposiciones: i) Se asume que el jet se desarrolla en un escenario protoestelar, esto quiere decir que la densidad del material eyectados es hasta tres órdenes de magnitud más baja que la densidad del medio circundante simulando la correspondencia entre la densidad del flujo protoestelar y la de una nube molecular; ii) Cuenta con variabilidad, por lo tanto el flujo de material desde la fuente protoestelar hacia el medio es expulsado a intervalos de tiempo definidos, lo cual correspondería con el hecho de que el material acretado por el objeto no es capturado de forma constante, sino que este es suministrado en tiempos discretos; iii) asumimos que existe un proceso de precesión en la dirección de propagación del jet, este efecto se asume debido a las posibles variaciones de la dirección del momento angular transferido del disco acretado al objeto central. iv) Existe un campo magnético intrínseco en la fuente con geometría toroidal, tomando como base lo planteado en el trabajo base Cécere et al. (2016), donde se muestra el grado de polarización.

4.1. Condiciones iniciales

A continuación presentamos las condiciones iniciales que hemos asumido para nuestro trabajo. Comenzando con la motivación de agregar un efecto de precesión en la dirección de propagación del jet, planteamos una orientación del jet fuera de la línea de visión a través de un par de rotaciones sobre los ejes \hat{x} y \hat{z} .

Partimos de considerar dos sistemas, el primero como un sistema de referencia fijo no primado $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ correspondiente a la línea de visión del cielo y el segundo como un sistema primado correspondiente al cilindro fijo en el jet $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ (Figura 4.1). La diferencia entre ambos sistemas se expresa al aplicar dos rotaciones, la primera consta de rotar el sistema primado en un ángulo $-\alpha$ sobre el eje x del sistema no primado, mientras que la segunda implica rotar en un ángulo ψ el sistema primado sobre el eje z no primado.

Podemos expresar el sistema del plano del cielo en función del sistema primado, partimos de que

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y} \quad (4.1)$$

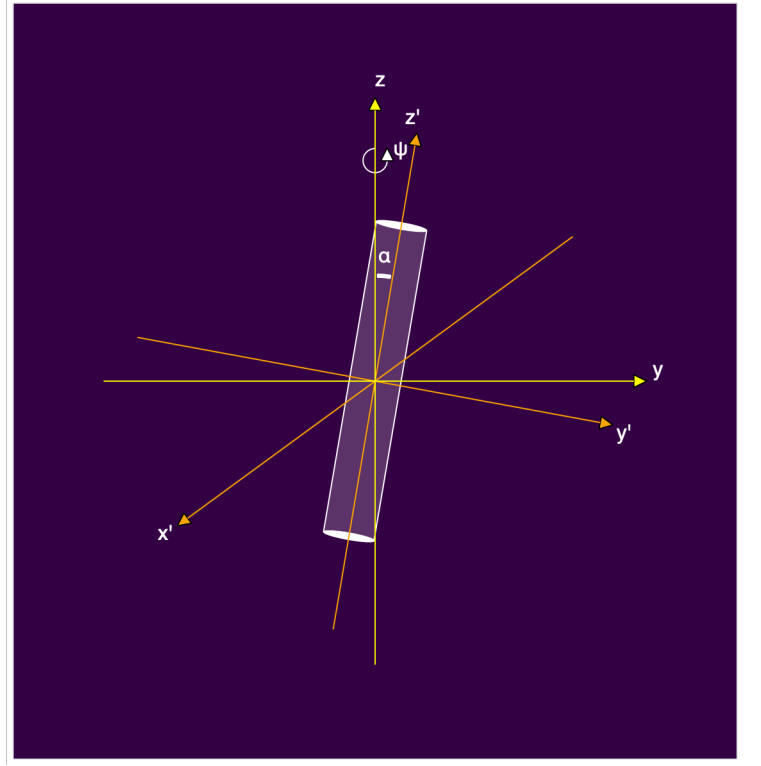


Figura 4.1: Sistemas coordenados sobre el sistema del jet. Los ejes no primados S corresponden al sistema de referencia en el plano del cielo, mientras que el sistema primado S' corresponde al marco de referencia visto desde el jet.

donde ϕ es el ángulo azimutal del cilindro y α es el ángulo entre los sistemas primados respecto a su coordenada \hat{z} .

Ahora, aplicando una rotación sobre el eje \hat{x} en un ángulo $-\alpha$, tenemos

$$R(\hat{x}, -\alpha) \hat{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \alpha \cos \phi \\ -\sin \alpha \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Esta rotación es necesaria para poder ver como cambia la dirección azimutal, lo cual permite ver el comportamiento del campo magnético del jet.

Ahora, rotando respecto al eje \hat{z} en un ángulo ψ , nos queda

$$R(\hat{z}, \psi) R(\hat{x}, -\alpha) \hat{\phi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \alpha \cos \phi \\ -\sin \alpha \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \alpha \cos \phi \\ -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \alpha \cos \phi \\ -\sin \alpha \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Desde las observaciones en el plano del cielo tenemos que

$$\sin \phi = \frac{y_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} ; \quad \cos \phi = \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, si queremos expresar las componentes del sistema primado desde el sistema del plano del cielo, basta con invertir la relación de rotación, quedando:

$$\vec{r}' = R(\hat{x}, \alpha) R(\hat{z}, -\psi) = \quad (4.5)$$

$$= R(\hat{x}, \alpha) \begin{bmatrix} -\cos \psi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(\hat{x}, \alpha) \begin{bmatrix} -\cos \psi x + \sin \phi y \\ -\sin \psi x + \cos \phi y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \psi x + \sin \phi y \\ -\sin \psi x + \cos \phi y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \psi x + \sin \phi y \\ -\cos \alpha \sin \psi x + \cos \alpha \cos \phi y - \sin \alpha z \\ -\sin \alpha \sin \psi x + \sin \alpha \cos \phi y + \cos \alpha z \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, el sistema primado expresado en términos del sistema del plano en el cielo resulta:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \psi x + \sin \phi y \\ -\cos \alpha \sin \psi x + \cos \alpha \cos \phi y - \sin \alpha z \\ -\sin \alpha \sin \psi x + \sin \alpha \cos \phi y + \cos \alpha z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Por lo que tenemos las restricciones de que para estar dentro del jet es necesario que:

$$\left(x'^2 + y'^2\right)^{1/2} < r_j \quad (4.9)$$

y

$$z' < l_j, \quad (4.10)$$

donde r_j es el radio del jet y l_j es su longitud.

Ya fijado el sistema de referencia, ahora definimos las ecuaciones que definirán el periodo de precesión,

$$\tau_p = \frac{x_{tot}}{f_q v_j \cos \alpha}, \quad (4.11)$$

donde x_{tot} es el tamaño total de la caja del modelo, v_j la velocidad del jet, f_q el factor de precesión y α el ángulo de apertura entre los ejes z y z' del sistema no primado y el sistema primado respectivamente. Mientras que el periodo de variabilidad queda determinado

$$\tau_v = \frac{\tau_p}{f_q}. \quad (4.12)$$

Al ser un objeto protoestelar el objeto a simular, consideramos una caja de cómputo tal que está escalada a una longitud de 1 pc en el eje \hat{z} y 0.5 pc en los ejes \hat{x} y \hat{y} . La velocidad del flujo eyectado v_{jet0} es del orden de miles de kilómetros por segundo. La longitud y su radio es del orden de centésimas de parsec, mientras que su temperatura la correspondiente al orden de miles de grados Kelvin.

Asumimos que la variabilidad en la velocidad de eyección es periódica y senoidal. Tomamos un ángulo de apertura de una decena de grados ya que los jets protoestelares no tienen una simetría fija y los nudos asociados al jet distan en ángulos pequeños al eje de su propagación. Agregamos una componente inicial de campo magnético a lo largo del ángulo ϕ siguiendo la condición (Figura 4.2) y siguiendo la dirección del eje de propagación \hat{z} del material del jet.

$$B_\phi(r) = \begin{cases} B_m \left(\frac{r}{R_m} \right) & 0 \leq r < R_m; \\ B_m \left(\frac{R_m}{r} \right) & R_m \leq r < R_{jet}; \\ 0 & r \geq R_{jet} \end{cases} \quad (4.13)$$

Presentamos los valores iniciales para el jet en la tabla 4.1 y las condiciones iniciales para el medio en la tabla ??.

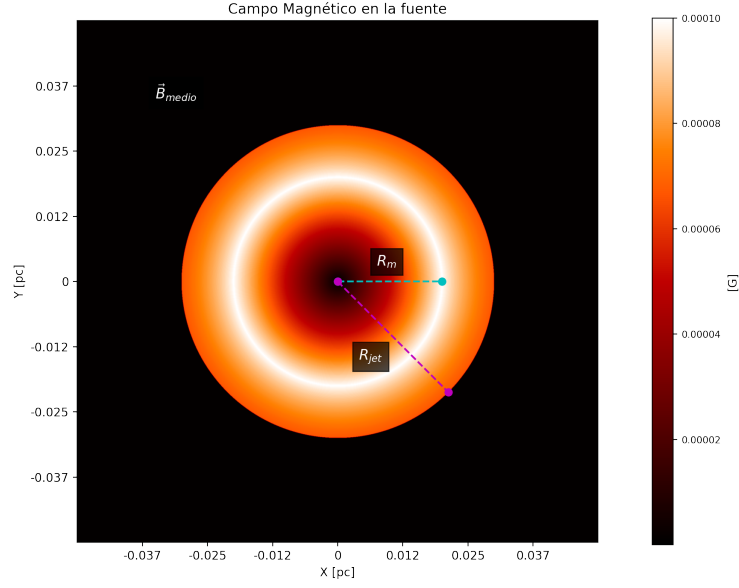


Figura 4.2: Corte transversal del campo magnético en la fuente del jet, el cual sigue una morfología toroidal teniendo como máximo R_m y decayendo hasta cero al borde del jet, mientras que en el medio suponemos un campo magnético nulo, por lo tanto la influencia de campos magnéticos en las zonas de choque será directamente al campo arrastrado desde el origen del jet.

Considerando las velocidades de movimiento propio de HH 80-81 reportadas por Marti et al. (1995), tomamos una velocidad de eyección para el jet de $v_{jet} = 10^3 km s^{-1}$.

Parámetro	Valor
R_{jet}	3.6×10^{16} cm
R_m	1.8×10^{16} cm
L_{jet}	1.8×10^{16} cm
α	10°
n_{jet}	5×10^2 cm $^{-3}$
T_{jet}	10000 K
v_{jet0}	1000×10^5 cm s $^{-1}$
Δv_{jet}	300×10^5 cm s $^{-1}$
f_p	3
f_q	2
B_m	0.1×10^{-3} G

Tabla 4.1: Parámetros físicos del jet, donde R_{jet} es el radio del jet, R_m el semiradio del toro donde se impone el campo magnético, L_{jet} la longitud del jet, α el semiángulo de apertura del jet, n_{jet} la densidad inicial del flujo eyectado por el jet, T_{jet}

El modelo fue desarrollado empleando el código MHD GUACHO (Sección 4.2). Nuestro estudio se basa en una solución 3D con una máxima extensión espacial de 8×10^{-4} pc. Los parámetros computacionales son presentados en la Tabla 4.2 donde se muestran las condiciones computacionales empleadas para el modelo.

Parámetro	Valor	
n_x	600	px
n_y	600	px
n_z	1200	px
C	0.25	
η	0.05	

Tabla 4.2: Lista de valores computacionales para simular nuestro modelo. Se tiene una resolución espacial total de una caja de $1 \times 0.5 \times 0.5$ pc con una resolución computacional de $1200 \times 600 \times 600$ pixels, dando lugar a una máxima resolución espacial de 8×10^{-4} pc. También se muestran los valores del número de Courant C y la viscosidad artificial η empleada.

4.2. Código MHD: GUACHO

Para poder desarrollar una simulación MHD es necesario contar con un código capaz de satisfacer las condiciones que garanticen un resultado aproximado a la realidad, que en el caso de jets astrofísicos implica que los valores obtenidos durante toda la simulación para las variables de presión y densidad sean siempre positivos. Por otro lado que sigan las ecuaciones MHD y un método numérico robusto.

En nuestro trabajo hicimos uso del código MHD llamado GUACHO Villarreal D'Angelo et al. (2018), el cual resuelve el problema de un sistema MHD en una malla cartesiana. El código MHD GUACHO toma las ecuaciones de transporte radiativo como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\
\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{I} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{4\pi} \right] &= \mathbf{f}_g, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} \left(E + P + \frac{B^2}{4\pi} \right) - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}{4\pi} \right] &= G_{rad} - L_{rad} + \mathbf{f}_g \cdot \mathbf{u}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde ρ es la densidad, \mathbf{u} es la velocidad, P es la presión térmica, B es el campo magnético y E es la densidad de energía total, \mathbf{I} es la matriz identidad, \mathbf{f}_g es la fuerza gravitacional, G_{rad} las ganancias radiativas y L_{rad} son las pérdidas debidas a radiación.

La ecuación de estado que se utiliza para cerrar el sistema de ecuaciones es

$$E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)} + \frac{B^2}{8\pi} \tag{4.15}$$

donde γ es la razón entre las capacidades caloríficas. La ecuación 4.15 relaciona la densidad de energía y la presión térmica.

Las ecuaciones 4.14 son resueltas sobre la malla a través del método Godunov a segundo orden (Apéndice 7.1), mientras que los flujos son calculados con la solución de Riemann HLLD descrita en la sección 3.2.3, por otra parte, atendiendo la necesidad de ser un código robusto GUACHO emplea un limitador de pendiente *minmod* para garantizar la estabilidad

del código, el cual consiste en

$$\mathit{minmod} = \begin{cases} \mathit{min} & \text{si todo es positivo,} \\ \mathit{max} & \text{si todo es negativo,} \\ 0 & \text{si no todo es positivo o no todo es negativo.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Finalmente, para poder satisfacer la condición de que la divergencia de campo magnético siempre fuera cercana a cero se implementa el esquema de interpolación de flujo de diferencia central.

Capítulo 5

Resultados

Realizamos una simulación numérica con las condiciones iniciales descritas en la sección anterior. Dejamos el modelo alcanzar un tiempo de evolución de 930 años. Debido a la interacción del fluido eyectado contra un medio circundante denso, tenemos como resultado choques principales y gracias a la variabilidad en la velocidad de eyección podemos observar choques internos dentro del jet. La suposición de un efecto de precesión dio como resultado una distribución caótica en los diversos parámetros físicos y así rompiendo con la condición de axisimetría, tratando de reproducir efectos con mayor apego a las observaciones. Todos los mapas están normalizados a su valor máximo alcanzado durante toda la muestra temporal.

5.1. Mapas de densidad y campo magnético

En la figura 5.1 y 5.2 se muestra la evolución temporal de la densidad en los planos yz y xz , respectivamente. Luego de 930 años de evolución, ambas figuras muestran el desarrollo de una envolvente que en la proyección xz parece bipolar, mientras que en la proyección yz , se hace más notable la formación una envolvente cuadrupolar.

La precesión produce estructuras en zig-zag en ambas proyecciones, pero se hace más patente en la proyección yz . En la figura 5.1 los nudos se mueven en una dirección que se aparta del eje vertical. En cambio, en la figura 5.2, estas estructuras parecen más alineadas

En simulaciones donde se incluye el campo magnético, surge la pregunta de si el gas o el campo magnético dominan la dinámica del sistema. Por ello, en la figura 5.3 se muestra una comparación de las distribuciones del parámetro β ($= 8\pi P/B^2$), presión y magnitud total del campo magnético. Notamos que en la parte externa de la envolvente, la dinámica está dominada por el fluido, ya que estas regiones se encuentran valores de $\beta > 1$. En cambio, en las regiones internas, el que domina la dinámica es el campo magnético, puesto que allí se observan $\beta < 1$. Lo último es consistente con el hecho de que estas regiones son cercanas a la zona donde se impone el jet, y donde la magnitud de \mathbf{B} es mayor.

5.2. Emisiones térmicas y no térmicas

En las figuras 5.4 y 5.5 podemos observar la evolución temporal de las emisiones no térmicas (emisión sincrotrón linealmente polarizada) y térmicas (rayos X, $0.1 - 0.7 \times 10^{-17}$ ergs $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$) respectivamente. Estos mapas corresponden a la proyección yz .

La emisividad en sincrotrón $i(\nu)$ se calcula como: (Cécere et al. 2016):

$$i(\nu) = C_2 v^{4\alpha} \rho B_{\perp}^{\alpha+1} \nu^{-\alpha}, \quad (5.1)$$

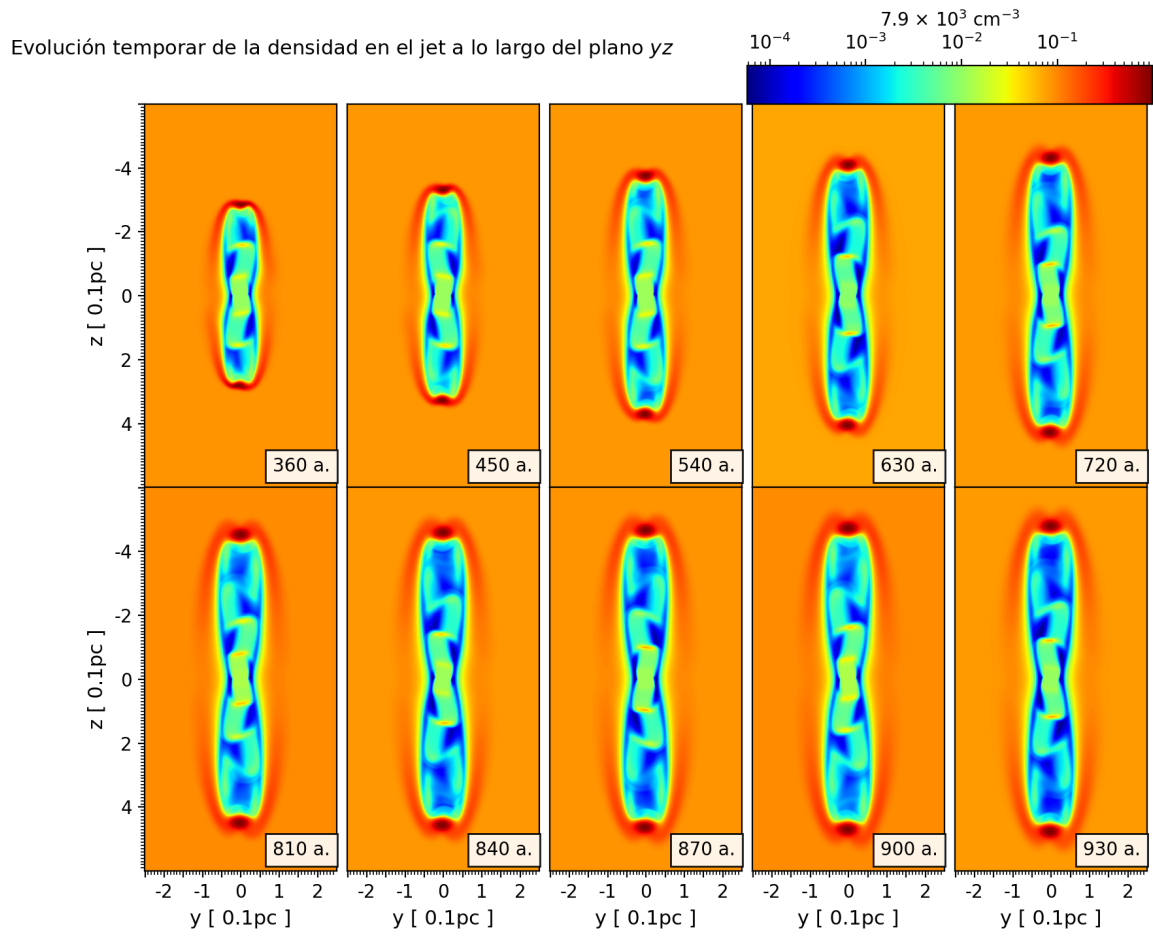


Figura 5.1: Mapa de densidad estratificada en el plano yz . Se muestra la evolución del choque principal y la propagación de los nudos internos a lo largo del tiempo. La escala está normalizada a un valor máximo $\rho_{max} = 7.9 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$

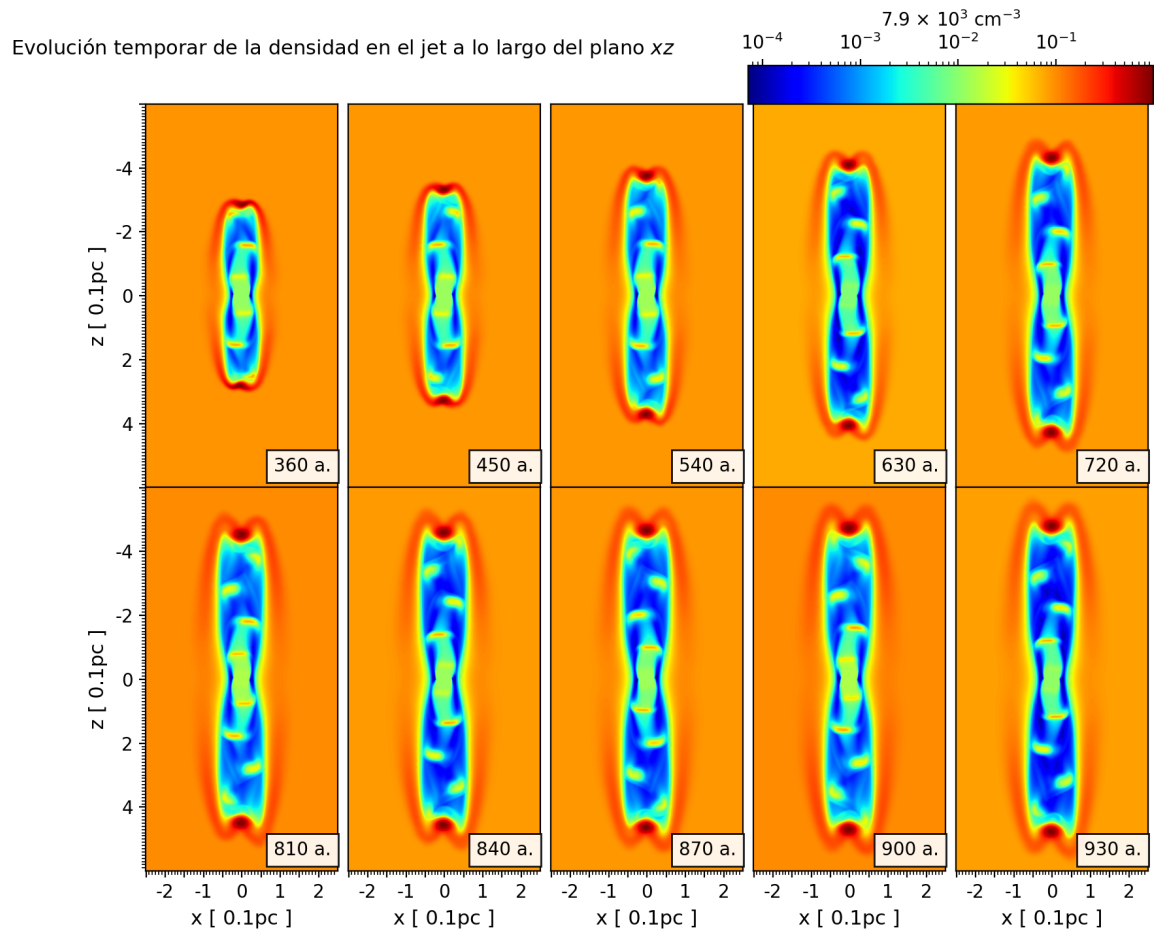


Figura 5.2: Mapa de densidad estratificada en el plano xz . Se muestra la evolución del choque principal y la propagación de los nudos internos a lo largo del tiempo. La escala está normalizada a un valor máximo $\rho_{max} = 7.9 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$

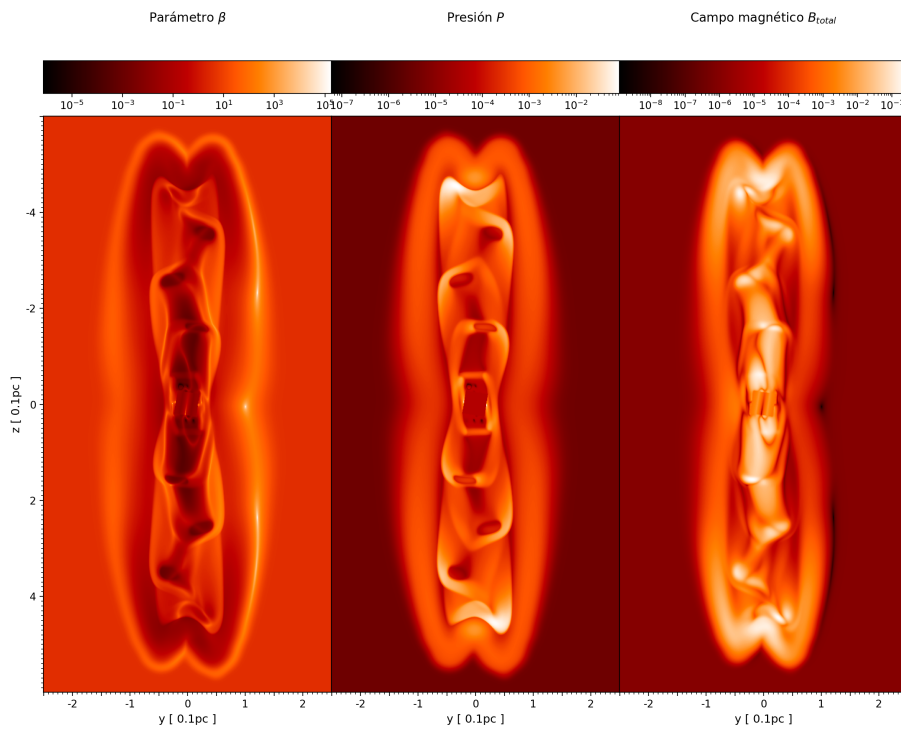


Figura 5.3: Comparación del parámetro β respecto a los valores normalizados de la presión P y el campo magnético total B_{total} a 900 años de evolución del jet. El valor de normalización para la presión es de $1.11 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$ y para el campo magnético es de $1.03 \times 10^{-3} \text{ G}$

donde v es la velocidad del gas, ρ es su densidad, B_{\perp} es la magnitud del campo magnético en la plano del cielo, ν es la frecuencia observada y α es el índice espectral del flujo en sincrotrón. Esta emisividad se calcula para cada punto de la malla computacional. Si elegimos el plano $x'z'$ como el plano del cielo, podemos obtener la intensidad integrando esta emisividad a lo largo de la dirección y' , que será la línea de visión, obteniendo:

$$I(x', z', \nu) = \int i_{\nu} dy' \quad (5.2)$$

Parte de la emisión sincrotrón puede ser linealmente polarizada. Para poder estudiar esta emisión debemos obtener los parámetros de Stokes, los que podemos calcular como (Ávila Aroche et al. (2020), Cécere et al. (2016)):

$$Q(x', z') = \int_{LOS} f_p i(\nu) \cos 2\chi dy', \quad (5.3)$$

$$U(x', z') = \int_{LOS} f_p i(\nu) \sin 2\chi dy', \quad (5.4)$$

siendo χ el ángulo de posición local del campo magnético (en el plano del cielo y medido respecto a la dirección z') y f_p el factor de polarización, el cual es función del índice espectral:

$$f_p = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 5/3}. \quad (5.5)$$

Con las expresiones anteriores se puede calcular la intensidad de la emisión linealmente polarizada usando la expresión siguiente:

$$I_p(x', z', \nu) = \sqrt{Q_B^2(x', z', \nu) + U_B^2(x', z', \nu)}. \quad (5.6)$$

De acuerdo a la figura 5.4, la emisión linealmente polarizada se concentra principalmente en los choques principales. En cambio, la emisión térmica en rayos X, muestra una serie de nudos internos tal como se observan en la figura 5.5. , por otro lado, en la figura 5.6 se muestran las evolución temporal de ambas emisiones y el traslapamiento de ambas emisiones de las regiones de los choques principales. Finalmente en la figura 5.7 se muestra la presencia del campo magnético en su componente z y las regiones de emisión linealmente polarizada y rayos x, así también se muestra la distribución de los valores medios a lo largo de los ejes z y y .

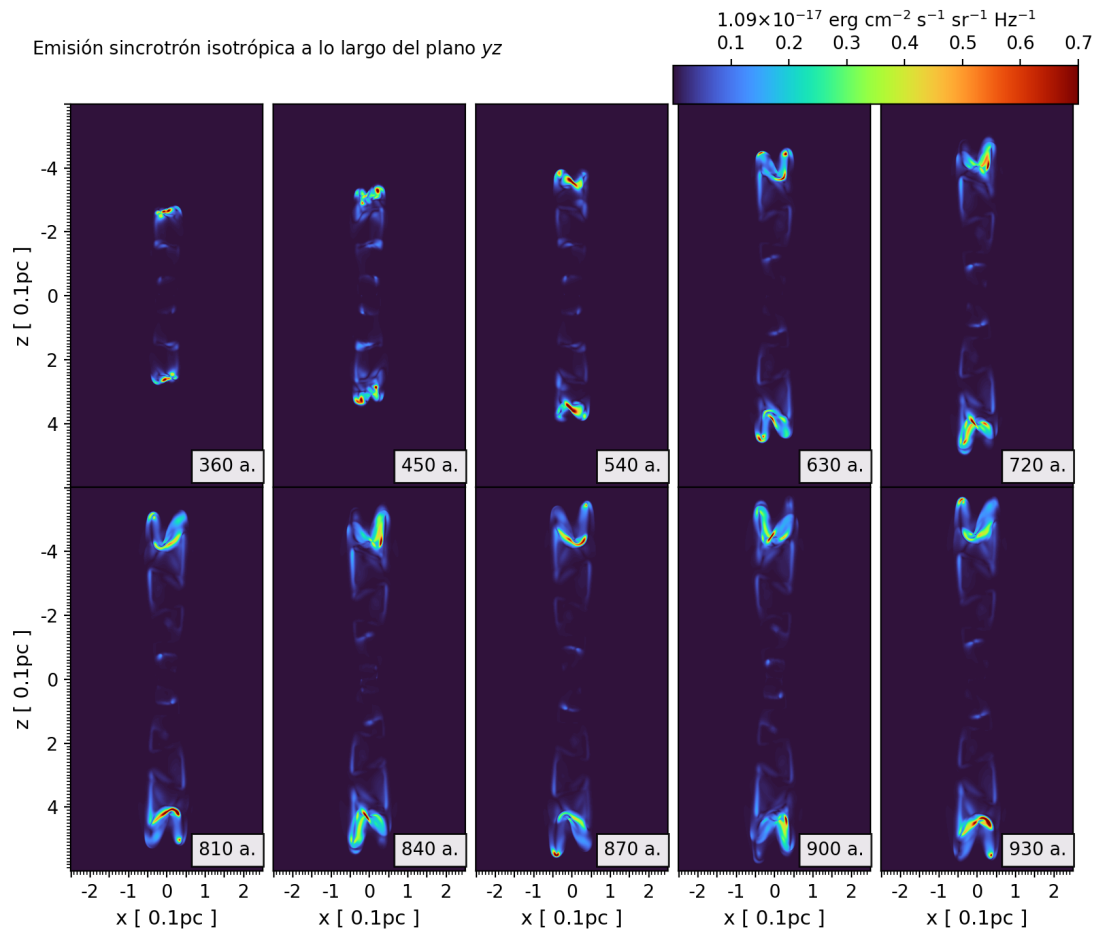


Figura 5.4: Evolución temporal de intensidad de emisión linealmente polarizada. Se calcula emisión isotrópica en el plano yz .

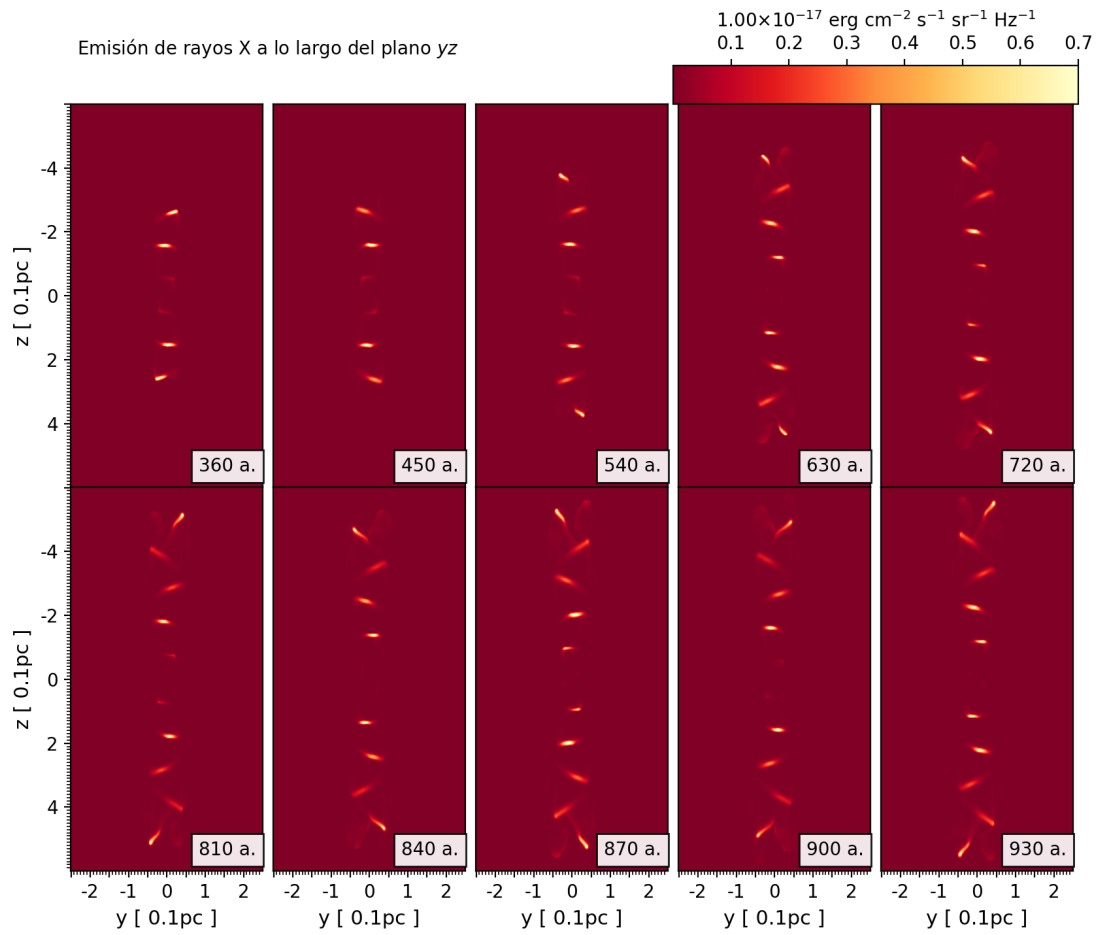


Figura 5.5: Lo mismo que la figura anterior, pero mostrando la intensidad de emisión de rayos x en el plano yz .

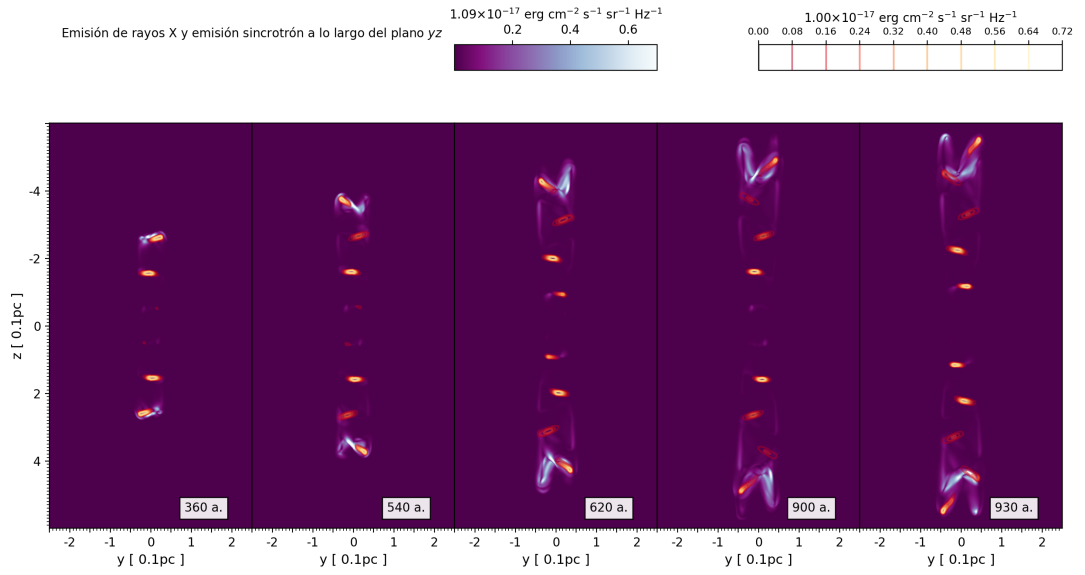


Figura 5.6: Comparación de la distribución de la emisión térmica de rayos X y la emisión linealmente polarizada, como funciones del tiempo.

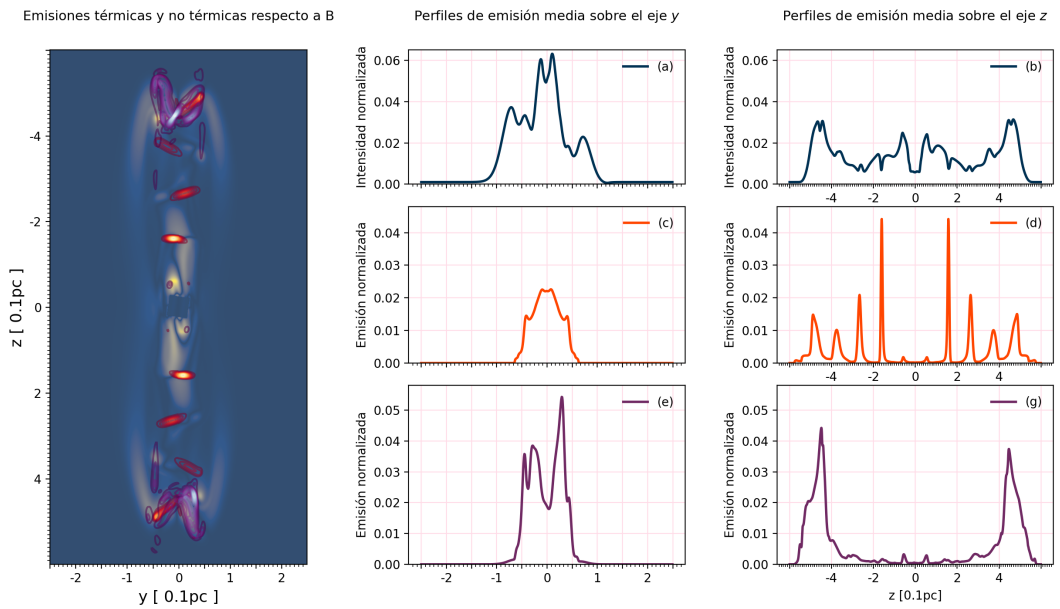


Figura 5.7: (izq.) Comparación de distribución del campo magnético en el plano yz con la emisión en rayos X y emisión linealmente polarizada. (a) Perfil promedio del campo magnético visto desde el eje y , (b) perfil promedio del campo magnético visto desde el eje z , (c) perfil promedio de la emisión en rayos X en el eje y , (d) perfil promedio de la emisión en rayos X en el z , (e) perfil promedio de la emisión linealmente polarizada a lo largo del eje y , (f) perfil promedio de la emisión linealmente polarizada a lo largo del eje z . El valor máximo del campo magnético es de 1.03×10^{-3} G, mientras que el valor máximo de la emisión de rayos X es de 1×10^{-17} egs $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ y para la emisión linealmente polarizada es de 1.09×10^{-17} (unidades arbitrarias)

5.3. Fracción de polarización y dirección del campo magnético

La figura 5.8 muestra la evolución temporal del grado de polarización de nuestro modelo. La fracción de polarización se obtiene a partir de las intensidades I_p e I , como:

$$\Pi = I_p(x', z', \nu) / I(x', z', \nu). \quad (5.7)$$

En esta figura se observa un comportamiento turbulento en el mapa de Π . En la figura 5.9 se muestra una serie de histogramas de la distribución de π a diferentes tiempos. Todos estos histogramas muestran un comportamiento similar en el tiempo, pero es importante destacar que un pequeño porcentaje de Π alcanza su valor teórico máximo. Para tiempos de evolución entre 360 y 540 años, este valor es del 10%. Este valor baja un poco ($\sim 8\%$) a 900 años de evolución. Esto mostraría una tendencia a la baja de la fracción de polarización con respecto al tiempo. En otras palabras, el material de jet se vuelve más turbulento.

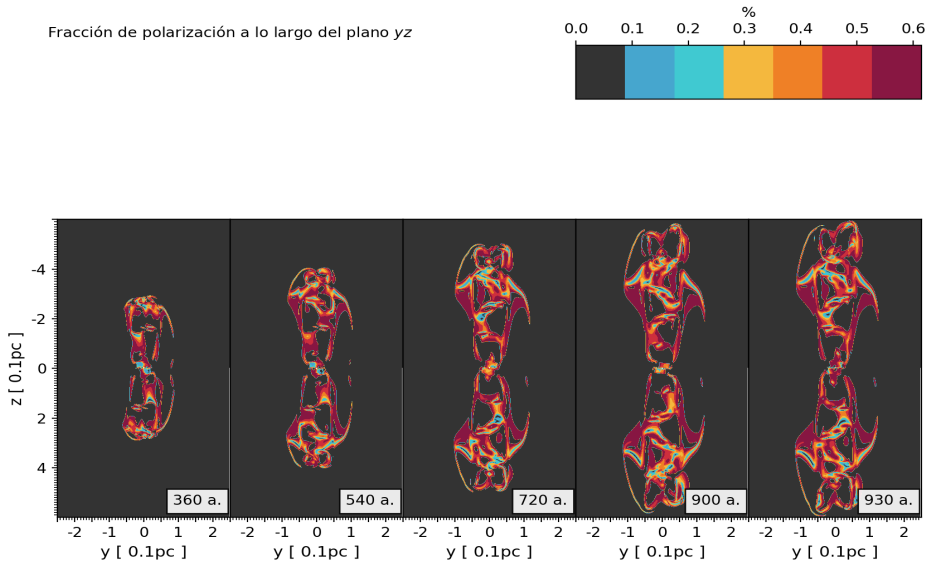


Figura 5.8: Evolución temporal de la fracción de polarización (proyección yz).

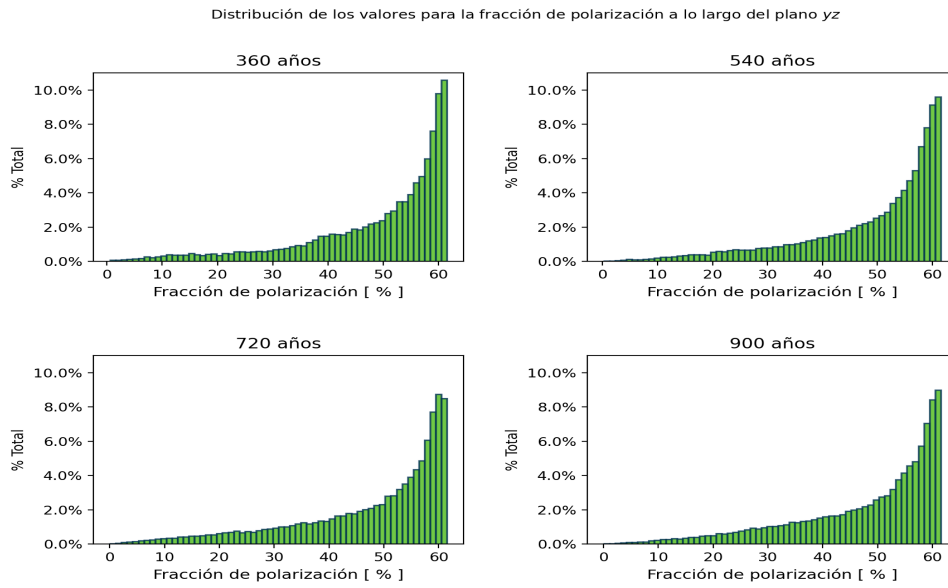


Figura 5.9: Distribución de los valores de la fracción de polarización en diferentes momentos del tiempo.

Las figuras 5.10 y 5.11 muestran la emisión linealmente polarizada para la parte superior e inferior, respectivamente. Los mapas sintéticos corresponden a un tiempo de integración de 900 años. A estas imágenes se le superpone la orientación del ángulo de posición χ_B (flechas blancas) del campo magnético en el plano del cielo (en este caso el plano $y'z'$). El χ_B se calcula a partir de los mapas de los parámetros de Stokes U y Q de la siguiente manera:

$$\chi_B(y', z') = \frac{1}{2} \tan^{-1}(U_B(y', z', \nu)/Q_B(y', z', \nu)). \quad (5.8)$$

Analizando estos resultados, se observa que la orientación de χ_B resulta caótica en ambos lóbulos del jet. Esto se desprende claramente al analizar la distribuciones del ángulo χ_B en ambos lóbulos, en la figura 5.12.

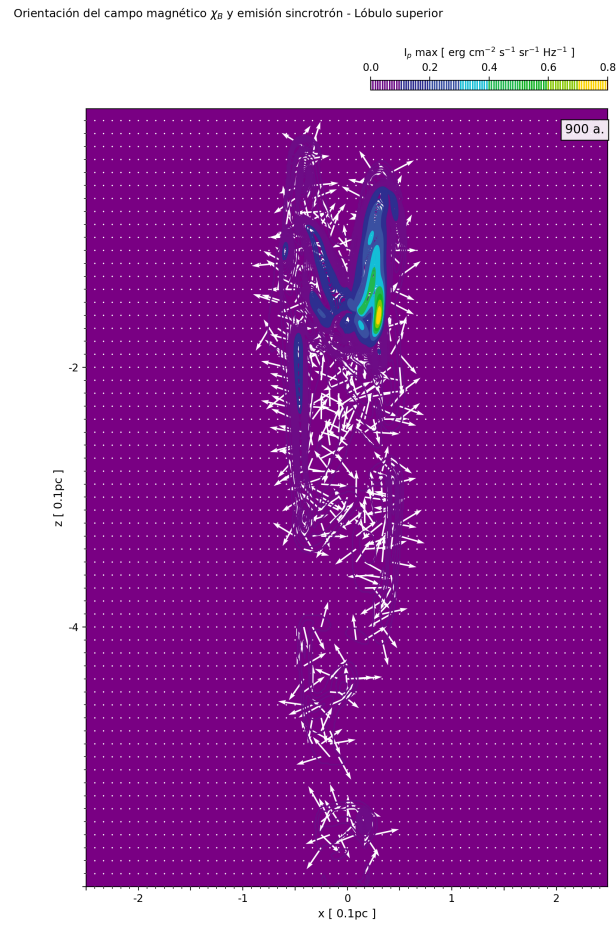


Figura 5.10: Emisión sincrotrón en lóbulo superior del jet con un $I_{p \text{ max}} = 1.25 \times 10^{-18}$ (en unidades arbitrarias, isocontornos). Las flechas blancas indican los vectores de χ_B . Evolución de la simulación a 900 años.

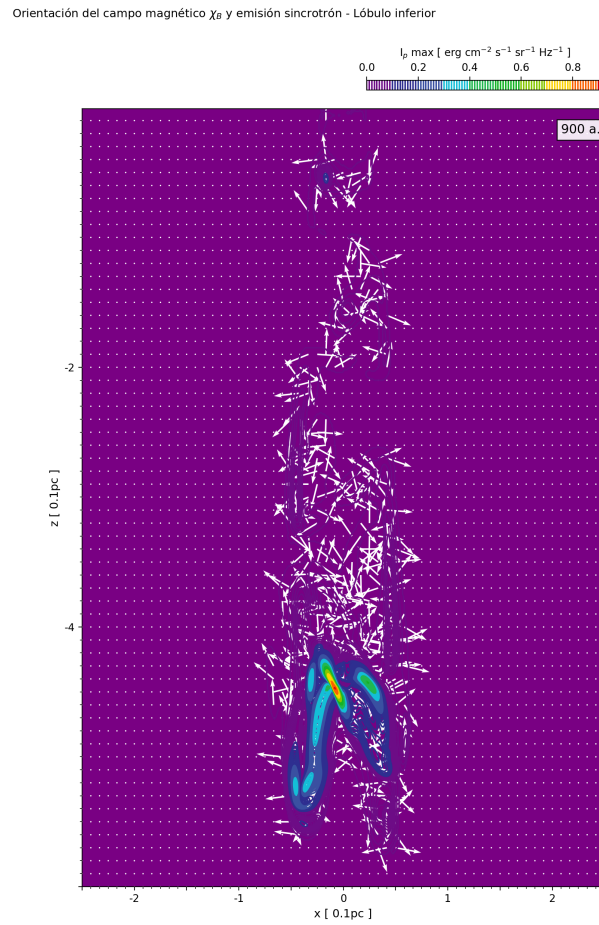


Figura 5.11: Igual que en la figura 5.10, pero para el lóbulo inferior del jet.

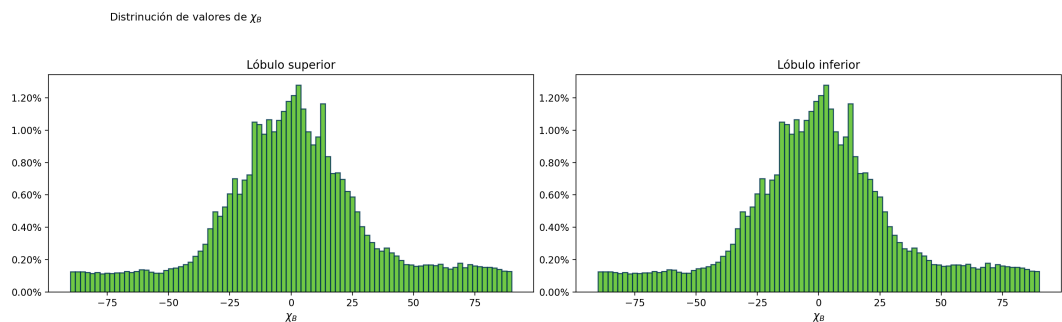


Figura 5.12: Distribución de los valores adoptados por el ángulo χ_B en el lóbulo superior (izquierda) y en el lóbulo inferior derecha. Se muestra una distribución centrada al valor 0 pero no dominante, dando una distribución más homogénea entre los valores de -50 y 50° .

Capítulo 6

Conclusiones

Presentamos un modelo 3D MHD en el cual se simularon las condiciones similares a las observadas en el objeto protoestelar HH 80. Se estudio la propagación de un jet magnetizado en un medio uniforme. Se consideró que el jet posee una velocidad de eyección dependiente del tiempo. A partir de los resultados numéricos, se generaron mapas sintéticos en sincrotrón (emisión linealmente polarizada) y rayos-X (emisión térmica).

En este trabajo, al ser simulaciones 3D, relajamos la hipótesis de axisimetría (empleada en trabajos previos como el de Cécere et al. (2016)), introduciendo la posibilidad de que el jet posea un movimiento de precesión. El objetivo era analizar si un jet magnetizado con precesión, puede producir una disminución en la fracción de polarización.

Los mapas sintéticos en rayos X y en sincrotrón, muestran choques principales con fuerte emisión. En rayos X también se observan una serie de estructuras internas brillantes, las cuales resultan más débiles en los mapas en radio. Estas estructuras internas son choques secundarios inducidos principalmente por la variabilidad de eyección del jet. En contraste, en los mapas sintéticos obtenidos de las simulaciones 2D axisimétricas de Cécere et al. (2016), se observa que los choques secundarios son fuertes emisores de emisión sincrotrón, mientras que la emisión térmica se concentraba en los choques principales. Esta discrepancia se debe a la precesión. En nuestro caso el material del jet es expulsado en diferentes direcciones por lo que el gas del jet interactúa directamente con el medio circundante, favoreciendo la emisión en rayos X ya que se generan choques radiativos. En cambio, en una simulación axisimétrica, los choques secundarios se producen cuando material del jet más lento son alcanzados por material más rápido. Dado que el material más rápido se propaga en un medio menos denso (ya que fue previamente barrido) los choques son de naturaleza adiabática, favoreciendo la emisión en sincrotrón. Esta discrepancia nos indica que si hay precesión, su cono de semiapertura debe ser más pequeño que el empleado en nuestras simulaciones. Sin embargo, lo importante a destacar es que la precesión si logra el objetivo de generar niveles bajos de polarización lineal, ya que produce una distribución más caótica del campo magnético, a lo largo de la línea de visión. Esto favorece que a lo largo de una línea de visión dada, se tengan campos magnéticos con dirección de oscilación ortogonales entre si.

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Hidrodinámica numérica

Partiendo de la ecuación de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{\partial_c f}{\partial t} \quad (7.1)$$

podemos calcular los momentos

7.1.1. Momento Cero

Tomamos la Ec. 7.1, multiplicamos por $v^0 = 1$ e integramos sobre el espacio de velocidades, dando como resultado

$$\int_V \frac{\partial f_e}{\partial t} d^3v + \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla f_e d^3v + \frac{1}{m_e} \int_V \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e d^3v = \int_V \frac{\partial_c f_e}{\partial t} d^3v. \quad (7.2)$$

Integramos el primero de los miembros del lado izquierdo

$$\int_V \frac{\partial f_e}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \int_V f_e d^3v = \frac{\partial n_e}{\partial t}, \quad (7.3)$$

donde n_e es la densidad numérica promedio por especie. Ahora pasamos a integrar el segundo miembro del lado izquierdo, quedando

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \nabla f_e d^3v = \nabla \cdot \int_V \mathbf{v} f_e d^3v = \nabla \cdot (n_e \mathbf{U}_e), \quad (7.4)$$

donde \mathbf{U}_e es la velocidad promedio por especie y está definida como

$$\mathbf{U}_s = \frac{1}{n_e} \int_V \mathbf{v} f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (7.5)$$

y n_e es la densidad numérica y está definida como

$$n_e = \int_V f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (7.6)$$

Seguimos con la última integral del lado izquierdo haciendo uso del **Teorema de Gauss**, pasando de una ecuación integrada sobre todo el volumen a una sobre una superficie indefinida,

$$\int_V \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s d^3v = \int_V \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F} f_e) d^3v = \int_S (\mathbf{F} f_e) \cdot d\mathbf{s}_v = 0. \quad (7.7)$$

Esto asumimos que $f(\mathbf{v})$ decae lo suficientemente rápido en velocidades grandes.

Por otro lado, la integral del lado derecho nos queda

$$\int_V \frac{\partial_c f_e}{\partial t} d^3v = \frac{\partial_c n_e}{\partial t} = 0, \quad (7.8)$$

ya que se asume que las colisiones no cambian la densidad numérica de las especies.

Ahora entonces, tenemos como resultado para el momento cero de la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{U}_e) = 0, \quad (7.9)$$

quedando la ecuación de continuidad para cada especie en el plasma.

7.1.2. Primer Momento

Para obtener el primer momento de la ecuación de Boltzmann es necesario multiplicar la Ec. 7.1 por \mathbf{v} , sin embargo es más apropiado multiplicar por el momento $m_e \mathbf{v}$ por especie e integrar sobre todo el espacio de velocidades, quedando

$$m_e \int_V \mathbf{v} \frac{\partial f_e}{\partial t} d^3v + m_e \int_V \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla f_s) d^3v + \int_V \mathbf{v} (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e) d^3v = m_e \int_V \mathbf{v} \frac{\delta_c f_e}{\delta t} d^3v. \quad (7.10)$$

Ahora empezamos por resolver cada una de las integrales de izquierda a derecha.

La primera integral se puede escribir de la siguiente manera,

$$m_e \int_V \frac{\partial f_e}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \left(m_e \int_V \mathbf{v} f_e d^3v \right) = \frac{\partial}{\partial t} (m_e n_e \mathbf{U}_e). \quad (7.11)$$

Para resolver la segunda integral requerimos aplicar la siguiente identidad

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = (\mathbf{v} - \mathbf{U}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s) + \mathbf{U}_s\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{U}_s - \mathbf{U}_s\mathbf{U}_s, \quad (7.12)$$

aplicándola en la segunda integral tenemos

$$\begin{aligned} m_e \int_V \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla f_e) d^3v &= \nabla \cdot \left[m_e \int_V \mathbf{v}\mathbf{v} f_e d^3v \right] \\ m_e \int_V \mathbf{v}\mathbf{v} f_e d^3v &= m_e \int_V (\mathbf{v} - \mathbf{U}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s) f_e d^3v + m_e n_e \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s. \end{aligned}$$

La primera integral de la derecha corresponde al tensor de presión que está definido como

$$\tilde{\mathbf{P}}_e = \int_V m_e (\mathbf{v} - \mathbf{U}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s) f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (7.13)$$

Ahora diferenciando sobre todas las variables, nos queda

$$m_e \int_V \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla f_e) d^3v = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}_e + \nabla \cdot (m_e n_e \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s). \quad (7.14)$$

Para la tercera integral de la Ec. 7.10 podemos expresarla en términos de sus componentes

$$\int_V \mathbf{v} (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e) d^3v = \int_V (v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}) \left[\frac{\partial}{\partial v_x} (F_x f_e) + \frac{\partial}{\partial v_y} (F_y f_e) + \frac{\partial}{\partial v_z} (F_z f_e) \right] d^3v,$$

lo cual resulta en nueve integrales que deben ser calculadas, sin embargo, seis de ellas son del tipo

$$\int_V v_y \frac{\partial}{\partial v_z} (F_z f_e) d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y dv_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v_z} (F_z f_e) dv_z, \quad (7.15)$$

que puede ser calculada directamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v_z} (F_z f_e) dv_z = [F_z f_e] = 0 \quad (7.16)$$

si es que asumimos que f_e va a cero lo suficientemente rápido para velocidades infinitas. Por otro lado, las tres integrales restantes son del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x dy \int_{-\infty}^{\infty} dv_z v_z \frac{\partial}{\partial v_z} (F_z f_e), \quad (7.17)$$

las cuales pueden ser integradas por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_z v_z \frac{\partial}{\partial v_z} (F_z f_e) = [v_z F_z f_e]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F_z f_e dv_z = - \int_{-\infty}^{\infty} F_z f_e dv_z, \quad (7.18)$$

ya que el primer término del lado derecho es cero si nuevamente asumimos que f_e va a cero lo suficientemente rápido para velocidades infinitas. Ahora ya podemos expresar la Ec. 7.1.2 como

$$\int_V \mathbf{v} (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e) d^3v = \int_V \mathbf{F} f_e d^3v \quad (7.19)$$

Si sustituimos \mathbf{F} por la fuerza de Lorentz e integramos obtenemos

$$\int_V \mathbf{v} (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e) d^3v = -e_e n_e (E + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}). \quad (7.20)$$

Por último, la integral del lado derecho en la Ec. 7.10 puede ser escrita como

$$m_s \int_V \mathbf{v} \frac{\delta_c f_e}{\delta t} d^3v = \frac{\delta \mathbf{p}_e}{\delta t}, \quad (7.21)$$

donde $\delta_c \mathbf{p}_e / \delta t$ es la razón promedio del cambio de momento por unidad de volumen debido a las colisiones en el plasma, que representa la fuerza de arrastre debido a las colisiones. Ahora bien, usando todos los resultados obtenidos para cada una de las integrales en las Ecuaciones 7.11, 7.14, 7.20, 7.21, podemos reescribir la Ec. 7.10 como

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_e n_e \mathbf{U}_s) + \nabla \cdot (m_e n_e \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s) = n_e e_e (\mathbf{E} + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \vec{P}_e + \frac{\delta_c \mathbf{p}_e}{\delta t}. \quad (7.22)$$

Si expandimos la derivada temporal sobre los términos de la izquierda en la ecuación y usamos la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$, nos queda

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (m_e n_e \mathbf{U}_s) + \nabla \cdot (m_e n_e \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s) \\ &= m_e n_e \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} + m_e \mathbf{U}_s \left[\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{U}_s) \right] + m_e n_e (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad Ec. 7.9, el término de los corchetes es cero, por lo tanto, el primero momento de la ecuación de Boltzmann resulta

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} + (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s \right] = n_e e_e [\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \vec{P}_s + \frac{\delta_c \mathbf{p}_s}{\delta t} \quad (7.24)$$

Podemos ver que lo que está dentro de los corchetes es lo que en mecánica de fluidos se llama la *derivada convectiva*. Por otro lado, el término $\partial \mathbf{U}_s / \partial t$ da la razón de cambio de velocidades debido a las variación temporal, mientras que el término $(\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s$ indica la razón de cambio de la velocidad debido al espaciamiento. Si tomamos un elemento de volumen que se mueve

a velocidad \mathbf{U}_s , la derivada convectiva es simplemente la derivada total, $d\mathbf{U}_s/dt$, evaluada a lo largo de la trayectoria del elemento de fluido, quedando así

$$\frac{d\mathbf{U}_s}{dt} = \frac{\partial\mathbf{U}_s}{\partial t} + (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s, \quad (7.25)$$

por lo que podemos reescribir la Ec. 7.24 de la siguiente manera

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{U}_s}{dt} = n_e e_e [\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \vec{P}_s + \frac{\delta_c \mathbf{P}_s}{\delta t} \quad (7.26)$$

A esta ecuación se le conoce como la *ecuación de momento*, que es conocida como la segunda Ley de Newton para un plasma con e-especies, donde el término de la izquierda representa la razón de carga de momento por unidad de volumen evaluado en un elemento de volumen dado, tal como si fueran partículas. Por otro lado, el término de la derecha es la fuerza electromagnética por unidad de volumen, mientras que el segundo término es la fuerza por unidad de volumen debido al gradiente de presión y, finalmente, el tercer término representa la fuerza de arrastre por unidad de volumen.

7.1.3. Segundo Momento

Para poder obtener el segundo momento es necesario multiplicar la Ecuación de Boltzmann (7.1) por el tensor $\mathbf{v}\mathbf{v}$ e integrando sobre todo el espacio de velocidades. Dado que es una matriz simétrica de 3×3 , con nueve elementos, de los cuales solo seis son independientes. Resolvemos la traza de la matriz, la que es obtenida al multiplicar la Ecuación de Boltzmann (7.1) por la energía cinética $1/2 m_e v^2$ y se integra sobre todo el espacio de velocidades, quedando

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_e \int_V v^2 \frac{\partial f_e}{\partial t} d^3v + \frac{1}{2} m_e \int_V v^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla f_e) d^3v \\ & + \frac{1}{2} \int_V v^2 (\mathbf{F} \cdot \nabla_v f_e) d^3v = \frac{1}{2} m_e \int_V v^2 \frac{\delta f_e}{\delta t} d^3v. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Nuevamente vamos resolviendo cada uno de los miembros de las integrales. Resolvemos el primer miembro del lado izquierdo,

$$\frac{1}{2} m_e \int_V v^2 \frac{\partial f_e}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \frac{1}{2} m_e v^2 f_e d^3v \right) = \frac{\partial W_e}{\partial t}, \quad (7.28)$$

donde W_e es la densidad de energía cinética, que está expresada como

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} m_e v^2 f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (7.29)$$

La segunda integral queda resuelta como

$$\frac{1}{2} m_e \int_V v^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla f_e) d^3v = \nabla \cdot \left(\int_V \frac{1}{2} m_e \mathbf{v} v^2 f_e d^3v \right) = \nabla \cdot \mathbf{Q}_e, \quad (7.30)$$

donde

$$\mathbf{Q}_e = \int_V \frac{1}{2} m_e v^2 \nabla f_e d^3v, \quad (7.31)$$

es el flujo de energía cinética. La tercera integral se puede resolver integrando por partes y despreciando la contribución en velocidades que tienden a infinito, quedando

$$\frac{1}{2} \int_V v^2 (\mathbf{F} \cdot \nabla_v f_e) d^3v = -\frac{1}{2} \int_V f_e (\mathbf{F} \cdot \nabla_v v^2) d^3v. \quad (7.32)$$

Teniendo en cuenta que $\nabla_v v^2 = 2\mathbf{v}$, que $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ e introduciendo la fuerza de Lorentz, la integral del lado derecho de la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\frac{1}{2} \int_V v^2 (\mathbf{F} \cdot \nabla_v f_e) d^3v = -e_e \mathbf{E} \cdot \int_V \mathbf{v} f_e d^3v = -\mathbf{E} \cdot (n_r e_e \mathbf{U}_s) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e, \quad (7.33)$$

donde \mathbf{J}_e , es la contribución de corriente por especie e .

Tomando los resultados en las ecuaciones 7.28, 7.30 y 7.33, entonces el segundo momento de Boltzmann puede ser expresado como

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_e - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e = \int_V \frac{1}{2} m_e v^2 \frac{\delta_c f_e}{\delta t} d^3v. \quad (7.34)$$

Al segundo momento de la ecuación de Boltzmann se le conoce como *ecuación de energía*, que hace referencia a la conservación de energía por especie en el plasma. El término $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e$ es la contribución del efecto Joules por cada especie, y el término de colisión en el lado derecho está dado por la razón de transferencia de energía por colisiones entre diferentes especies. Haciendo la suma de las contribuciones sobre todos las especies dentro del plasma, dando como resultado

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \quad (7.35)$$

donde $W = \sum_e W_e$ es la densidad de energía cinética total, $\mathbf{Q} = \sum_e \mathbf{Q}_e$ es el flujo total de energía cinética, y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ es el calentamiento por efecto Joules.

7.1.4. Cerradura del sistema de ecuaciones

Para todo momento n de la ecuación de Boltzmann (7.1) siempre la ecuación de solución implica el momento $(n+1)$ de la función de distribución, es decir que el momento cero de las ecuaciones de Boltzmann implica al primer momento \mathbf{U}_s . Esto se debe al término $\mathbf{v} \cdot \nabla f_e$ en la ecuación de Boltzmann incrementa los momentos en un orden. En términos generales, esto implica que el conjunto de ecuaciones siempre será insuficiente para poder resolver todas las incógnitas. Para poder hacer de este conjuntos de ecuaciones en un sistema cerrado es necesario hacer uso de una ecuación de estado conocida de la termodinámica, esto solo es válido si hay suficientes colisiones para mantener al plasma en un estado de equilibrio térmico local. Existen diversas ecuaciones de estado, sin embargo, aquí solo desarrollaremos la ecuación de estado de enfriamiento de un plasma debido a que nuestro trabajo hace únicamente uso de ésta.

Para desarrollar la ecuación de estado de un plasma frío, asumimos que la temperatura es baja debido a que la presión es despreciable, es decir que $\bar{P}_s = 0$ para algún n_e , por lo que la ecuación de momento queda expresada

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{U}_s}{dt} = n_e e_e [\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}] + \frac{\delta_c \mathbf{p}_s}{\delta t}. \quad (7.36)$$

Si consideramos que la fuerza de arrastre es cero, entonces, la densidad numérica n_e puedes ser factorizada de la ecuación. Por lo que la ecuación de momento queda expresada como

$$m_e \frac{d\mathbf{U}_s}{dt} = e_e [\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}], \quad (7.37)$$

que es la ecuación de movimiento para una partícula de masa m_e con carga e_e en una onda dentro de un plasma frío, desplazándose con la velocidad \mathbf{U}_s , que es la velocidad del fluido y es independiente de las coordenadas \mathbf{r} y del tiempo t , a diferencia de cuando la ecuación de

estado involucra la velocidad de cada una de las partículas v_e . Esto es importante debido a que la derivada de convección consiste en dos términos,

$$\frac{d\mathbf{U}_s}{dt} = \frac{\partial\mathbf{U}_s}{\partial t} + (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s. \quad (7.38)$$

Entonces tenemos dos casos, el primero es cuando la amplitud la pequeña, es decir $\mathbf{U}_s = 0$, en el cual el término de la derecha puede ser despreciado, quedando

$$\frac{d\mathbf{U}_{s1}}{dt} \simeq \frac{\partial\mathbf{U}_s}{\partial t} \quad (7.39)$$

El operador de derivada total tiende a la frecuencia de la onda $d/dt \rightarrow (-i\omega)$ es una buena aproximación. Por otro lado si la velocidad del medio no es despreciable, es decir, $\mathbf{U}_s \neq 0$, entonces la linearización del operador $d\mathbf{U}_s/dt$ es

$$\frac{d\mathbf{U}_{e1}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{U}_{e1}}{\partial t} + (\mathbf{U}_{e0} \cdot \nabla) \mathbf{U}_{e1} \quad (7.40)$$

Aplicando la transformación de Fourier, la ecuación puede ser expresada como

$$(-i\omega') \tilde{\mathbf{U}}_{e1} = (-i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_{e0}) \tilde{\mathbf{U}}_{e1} \quad (7.41)$$

donde ω' es la frecuencia en el sistema de referencia moviéndose con la partícula.

Bibliografía

- Anglada, G. 1996, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 93, *Radio Emission from the Stars and the Sun*, ed. A. R. Taylor & J. M. Paredes, 3–14
- Anglada, G., Rodríguez, L. F., & Carrasco-González, C. 2018, *Astron. & Astrophys., Reviews*, 26, 3
- Beall, J. H. 2012, *Mem. Soc. Astron. Italiana*, 83, 283
- Benaglia, P., Ribó, M., Combi, J. A., et al. 2010, *Astron. & Astrophys.*, 523, A62
- Canto, J. & Raga, A. C. 1995, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 277, 1120
- Carrasco-González, C., Rodríguez, L. F., Anglada, G., et al. 2010, *Science*, 330, 1209
- Cécere, M., Velázquez, P. F., Araudo, A. T., et al. 2016, *Astrophysical Journal*, 816, 64
- Dopita, M. A., Schwartz, R. D., & Evans, I. 1982, *Astrophysical Journal, Letters*, 263, L73
- Frank, A., Ray, T. P., Cabrit, S., et al. 2014, in *Protostars and Planets VI*, ed. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 451
- Garay, G., Brooks, K. J., Mardones, D., & Norris, R. P. 2003, *Astrophysical Journal*, 587, 739
- Haro, G. 1952, *Astrophysical Journal*, 115, 572
- Haro, G. 1953, *Astrophysical Journal*, 117, 73
- Herbig, G. H. 1951, *Astrophysical Journal*, 113, 697
- Herbig, G. H. 1952, *Journal of the Royal Astron. Soc. of Canada*, 46, 222
- Hujeirat, A., Livio, M., Camenzind, M., & Burkert, A. 2003, *Astron. & Astrophys.*, 408, 415
- Marti, J., Rodríguez, L. F., & Reipurth, B. 1995, *Astrophysical Journal*, 449, 184
- Miyoshi, T. & Kusano, K. 2005, *Journal of Computational Physics*, 208, 315
- Raga, A. C. 1993, *Astrophysics and Space Science*, 208, 163
- Reipurth, B., Hartigan, P., Heathcote, S., Morse, J. A., & Bally, J. 1997, *Astronomical Journal*, 114, 757
- Reipurth, B., Raga, A. C., & Heathcote, S. 1992, *Astrophysical Journal*, 392, 145
- Riera, A., Raga, A. C., Velázquez, P. F., Haro-Corzo, S. A. R., & Kajdic, P. 2011, *Astron. & Astrophys.*, 533, A118

- Riera, A., Velázquez, P. F., Raga, A. C., Estalella, R., & Castrillón, A. 2014, *Astron. & Astrophys.*, 561, A145
- Rodríguez, L. F., Garay, G., Brooks, K. J., & Mardones, D. 2005, *Astrophysical Journal*, 626, 953
- Rodríguez, L. F., Martí, J., Canto, J., Moran, J. M., & Curiel, S. 1993, 25, 23
- Rodríguez-Kamenetzky, A., Carrasco-González, C., Araudo, A., et al. 2017, *Astrophysical Journal*, 851, 16
- Rodríguez-Kamenetzky, A., Carrasco-González, C., Araudo, A., et al. 2016, *Astrophysical Journal*, 818, 27
- Stoche, J. T., Mundt, R., & Stockman, H. S. 1982, in *Bulletin of the AAS*, Vol. 14, 927
- Torres, D. 2017, *Modelling Pulsar Wind Nebulae*, *Astrophysics and Space Science Library* (Springer International Publishing)
- Vig, S., Veena, V. S., Mandal, S., Tej, A., & Ghosh, S. K. 2018, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 474, 3808
- Villarreal D'Angelo, C., Esquivel, A., Schneiter, M., & Sgró, M. A. 2018, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 479, 3115
- Zanni, C., Ferrari, A., Rosner, R., Bodo, G., & Massaglia, S. 2007, *Astron. & Astrophys.*, 469, 811
- Zinnecker, H. & Yorke, H. W. 2007, *Annual Review of Astron and Astrophys*, 45, 481
- Ávila Aroche, A., Velázquez, P. F., Camps-Fariña, A., Toledo-Roy, J. C., & Esquivel, A. 2020, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 495, 2112