



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SIMULACIÓN DE DISPERSIÓN
ULTRASÓNICA DE MICROESFERAS
VISCOELÁSTICAS

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Física

PRESENTA:

Irene Guadalupe Quiterio Pérez

DIRECTOR DE TESIS:

Raúl Patricio Esquivel Sirvent



Ciudad Universitaria, CD. MX., 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Quiterio

Pérez

Irene Guadalupe

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

313344800

2. Datos del tutor

Dr.

Esquivel

Sirvent

Raúl Patricio

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Medina

Gómez

Lucía

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Escobar

Sotomayor

Juan Valentín

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Velasco

Segura

Roberto

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Iturrarán

Viveros

Ursula Xiomara

7. Datos del trabajo escrito

SIMULACIÓN DE DISPERSIÓN ULTRASÓNICA DE MICROESFERAS VISCOELÁSTICAS

páginas 114

2021

A mis padres.

Agradecimientos

A mis padres, Everardo y Juana, por su apoyo incondicional, cariño y paciencia. A mi hermana, Mariana, por creer en mí, hacerme reír y apoyarme en los días más complicados. Al resto de mi familia, por siempre tener palabras de apoyo para mí.

A Luisa, Aris y Marco, por ser parte de mi vida durante la carrera y brindarme su amistad, apoyo y cariño.

A David, mi amigo y compañero durante la tesis, sin el cual, este camino hubiera sido más complicado.

A Faby, que siempre creyó que yo podría lograr lo que me propusiera, gracias por todos estos años de amistad.

Y al Dr. Raúl Esquivel y el Dr. Iván Rosado, les agradezco el conocimiento y tiempo que han compartido conmigo.

Resumen/Abstract

El estudio de la dispersión de ondas de ultrasonido en tejido biológico es de gran relevancia para las aplicaciones médicas, sin embargo, resulta ser un problema complicado de estudiar debido a las diferentes componentes que conforman al medio. Por ello, una primera aproximación a este problema es analizar los posibles constituyentes de forma aislada, y suponer que estos presentan una geometría simple, como lo son esferas y cilindros; con los cuales se busca simular a las lesiones y fibras del tejido, respectivamente.

Este trabajo se centra en el estudio de dispersores con geometría esférica, los cuales están compuestos por un material viscoelástico y rodeados de un fluido viscoso, además de considerar que dichas esferas también puede ser de un material elástico y presentar una coraza viscoelástica. Esto como parte de la primera aproximación al problema planteado.

Con este fin, se desarrollaron códigos computacionales que permiten simular la dispersión ultrasónica producida por dichos blancos, haciendo uso del método de condiciones a la frontera para la solución al problema de la dispersión y el modelo de Havriliak-Negami para la descripción de los materiales viscoelásticos. Estos programas se generaron en dos lenguajes de programación los cuales fueron MATLAB y Python.

Para su validación se reprodujeron los patrones de dispersión presentados por Hasheminejad, S. y Harsini B. (2003); y Hasheminejad, S. y Safari. N (2005), a partir de los cuales se encontró que los programas desarrollados en Python, generan patrones de directividad que concuerdan con lo reportado en la literatura, mientras que los de Matlab difieren en algunos casos. Además, mediante las distribuciones de presión dispersada, se lograron observar algunas tendencias que presentan los patrones de dispersión debido a los factores de pérdida de los materiales viscoelásticos y a la frecuencia con la cual se está incidiendo sobre el blanco.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
1. Introducción	1
1.1. Justificación	1
1.2. Ultrasonido Médico	1
1.3. Microesferas viscoelásticas	3
1.3.1. Células de tumores mamarios	3
1.3.2. Medios de contraste	4
1.4. Objetivos	7
2. Medios acústicos	9
2.1. Sólido Elástico, Lineal, Homogéneo e Isotrópico	9
2.1.1. Constantes elásticas	10
2.2. Fluidos	11
2.3. Sólido viscoelástico, Lineal, Homogéneo e Isotrópico	12
3. Propagación de ondas acústicas	17
3.1. Ecuación de onda para un fluido	18
3.2. Ecuación de onda para un sólido	20
3.3. Ecuación de onda para un medio no homogéneo	20
3.4. Impedancia acústica	22
3.5. Intensidad y potencia acústica	23
4. Dispersión	25
4.1. Métodos para la solución del problema de dispersión	26
4.1.1. Condiciones de frontera	26
4.1.2. Función de Green	28
4.2. Sección transversal de dispersión	32

4.3. Presión incidente	34
4.3.1. Método analítico	34
4.3.2. Método del espectro angular	37
5. Dispersión de ondas acústicas en un medio viscoso por una esfera viscoelástica	41
5.1. Dispersión de ondas acústicas en una esfera viscoelástica	42
5.2. Dispersión de ondas acústicas en una esfera elástica con coraza viscoelástica . . .	46
6. Resultados: Implementación y validación	49
6.1. Implementación	50
6.2. Validación	52
6.2.1. Esfera viscoelástica	54
6.2.2. Esfera con coraza	58
7. Conclusiones	67
A. Apéndice	69
A.1. Ecuación de estado para un fluido	69
A.2. Solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas	70
A.3. Módulo dinámico	72
A.4. Vector de desplazamiento, velocidad de partícula y tensor de esfuerzo en coordena- das esféricas	73
A.5. Esfera viscoelástica	74
A.6. Esfera con coraza	75
A.7. Esfera viscoelástica (Python)	77
A.8. Esfera elástica con coraza viscoelástica (MATLAB)	80
A.9. Códigos de MATLAB	87
A.10. Códigos de Python	100

Introducción

1.1. Justificación

La solución al problema de la dispersión ha sido determinado para un grupo limitado de formas, entre ellos, los cilindros y las esferas. Dicho problema puede ser encontrado cuando se estudia el cuerpo humano, en específico cuando se hace uso del ultrasonido con fines médicos. En esos casos se pueden aproximar los dispersores encontrados en la anatomía humana como cilindros y esferas. Aunque existen varios modelos que permiten explicar el fenómeno de dispersión no se logra describir por completo todo el sistema, ya que es difícil obtener mediciones cuantitativas dado que se desconocen muchos parámetros [1], por lo que se puede esperar que al profundizar en el conocimiento sobre este fenómeno, la información obtenida de él ayude a maximizar el contenido diagnóstico de una imagen de ultrasonido.

Este trabajo de tesis se centra en simular el fenómeno de dispersión de objetos esféricos y de esta forma poder aplicar el conocimiento adquirido en dispersores con geometría similar en el cuerpo humano, brindando así una herramienta que permita predecir cómo será la interacción y qué factores afectan en mayor medida a los ecos recibidos durante el proceso de diagnóstico. De igual manera, se propone la simulación de imágenes de ultrasonido con lo cual se pretende conocer la eficiencia del método utilizado en la descripción de la dispersión. A largo plazo se espera que el proyecto ayude en el diseño de medios de contraste más eficientes para las aplicaciones que sean necesarias.

A continuación se describirán algunos conceptos preliminares que serán utilizados en este trabajo.

1.2. Ultrasonido Médico

El término ultrasonido se refiere a ondas sonoras con frecuencias superiores al rango audible, 20 KHz [2]. El uso de este tipo de ondas en la medicina puede entrar en dos categorías: el diagnóstico y el terapéutico. El ultrasonido diagnóstico, es una de las técnicas más utilizadas para la obtención de imágenes de la anatomía humana y emplea un intervalo de frecuencias de 1 a 20 MHz. Por otro lado, el ultrasonido terapéutico emplea frecuencias por arriba de los 500 KHz [3].

El origen del uso del ultrasonido como una herramienta que permite visualizar la anatomía humana, viene del principio de ecolocalización que utilizan algunos animales para poder conocer su entorno, esto mediante la emisión de ondas de sonido y la interpretación de los ecos producidos por los objetos que los rodean, debido a su interacción con las ondas emitidas [4]. Esto aplicado al ultrasonido diagnóstico se conoce como técnica de pulso-eco. Esta consiste en enviar un pulso de ondas de ultrasonido, mediante un transductor, que se encuentra en contacto con alguna parte del cuerpo. Dicho pulso se propaga en el interior del cuerpo siguiendo una trayectoria definida, durante su propagación se encontrará con cambios de impedancia acústica.

La impedancia acústica es una medida de la resistencia de un material a comprimirse y descomprimirse bajo la acción del pulso de ultrasonido. Esos cambios en la impedancia están relacionados con la densidad y la rigidez del material, por consiguiente, tendrán una repercusión en la velocidad a la cual se propaga el pulso. La velocidad media de propagación en tejidos blandos es de 1540 m/s [2]. Cuando el pulso se encuentra con un cambio de impedancia, esto produce ecos, los cuales se emiten en diferentes direcciones, generando un efecto de dispersión. Algunos de estos ecos, son captados por el transductor, y al analizar su amplitud proporcionan información sobre los elementos con los que interactuaron [5]. La amplitud del eco depende de tres factores principales: las propiedades de impedancia en la interfaz, la amplitud del pulso cuando alcanza la interfaz y la energía perdida por el eco en su camino de regreso al detector [2].

Si se realiza el mismo procedimiento pero modificando ligeramente la dirección a la que es emitido el pulso, es factible obtener información sobre un volumen dado [5]. A partir de los ecos detectados es posible construir una imagen de brillo, también denominada Modo B, en la que cada punto está asociado con la posición relativa de donde se originó el eco, con lo cual, se puede generar un mapa de las estructuras al interior del cuerpo [6]. El brillo de la imagen estará relacionado con la amplitud del eco, cuanto mayor es la amplitud más brillante será la sección en la imagen.

Por lo general, la imagen en modo B se parece mucho a la anatomía que podría verse a simple vista si el cuerpo pudiera cortarse en el mismo plano. La mayoría de los órganos tienen una estructura característica que da lugar a un patrón de dispersión definido, el cual proporciona gran parte de la información diagnóstica contenida en la imagen ecográfica [5]. Los límites anatómicos anormales y las alteraciones en el comportamiento de dispersión de los tejidos pueden indicar patologías [6]. Por ejemplo, en el hígado, los tumores sólidos dispersan menos que el tejido normal, mientras que en los tejidos con enfermedades difusas se dispersa más [1].

La formación de imágenes de ultrasonido implica una amplia gama de procesos físicos. Para poder tener una mejor comprensión de cómo aplicar el ultrasonido como un método de diagnóstico médico, es esencial adquirir conocimiento sobre ellos, algunos de los cuales son: la generación y propagación de las ondas ultrasónicas en medios similares a los tejidos, además de la reflexión, dispersión, difracción y la absorción de las ondas, junto con el procesamiento de ecos para crear una imagen reconocible [6].

En la práctica, las variaciones en la velocidad de propagación, impedancia, absorción y dispersión, proporciona información sobre la estructura del tejido. Esto a su vez se ve reflejado en la forma que adquiere la imagen de ultrasonido, por lo cual, el conocimiento de los parámetros mencionados anteriormente y sus alteraciones ante cambios de frecuencia, temperatura, edad, patología, entre otros, es de suma importancia para poder comprender y realizar un uso más

eficiente del ultrasonido como una técnica de diagnóstico [1].

Una de las ventajas de esta técnica para la obtención de imágenes es que permite obtener imágenes en tiempo real utilizando equipos que pueden ser portátiles, además de que es una de las modalidades de obtención de imágenes más económicas y hace uso de radiación no ionizante [7]. Entre las desventajas que presenta este método es que la adquisición e interpretación llega a ser subjetiva, puesto que hay una gran variedad de parámetros involucrados en el manejo del equipo [8].

1.3. Microesferas viscoelásticas

Como ya se mencionó, el estudio de la dispersión en esferas puede ayudar a la comprensión de la presencia de este fenómeno en ciertos elementos biológicos dada su semejanza geométrica, por ejemplo, las células de tumores mamarios y medios de contraste.

El problema de dispersión por esferas ha sido estudiado tanto para esferas compuestas de un material elástico [9-11], viscoelástico [9, 12]; esferas con una o dos membranas ya sea elásticas o viscoelásticas [13, 14], o una combinación de ambas [15]; así como esferas con un núcleo elástico y un recubrimiento viscoelástico [16]. Todas estas variantes de esferas, sumergidas en un fluido, el cual puede ser viscoso o no. La descripción de los materiales (elásticos y viscoelásticos) y del fluido, se abordarán en el Capítulo 2.

1.3.1. Células de tumores mamarios

El cáncer de mama en la actualidad sigue siendo un problema de salud pública a nivel mundial [17]. En México, es la primera causa de muerte en mujeres por cáncer [18]. Entre las modalidades relevantes para la obtención de imágenes mamarias se encuentra la mamografía y la ecografía, donde esta última es aceptada como el complemento más útil de la mamografía en el diagnóstico [19], además de ser la herramienta principal utilizada en la detección de anomalías en mujeres jóvenes menores de 35 años [20].

Los avances en el desarrollo del equipo de ultrasonido han permitido mejorar la visualización y caracterización de las lesiones mamarias mediante propiedades específicas observadas en las que son de tipo benignas frente a las malignas [21].

Los tejidos biológicos son heterogéneos a diferentes niveles [22], al estudiar el fenómeno de dispersión acústica estos se pueden modelar como fluidos no homogéneos [23]. La presencia de cáncer en un tejido induce un incremento en las heterogeneidades, ya que se presentan cambios en las estructuras y propiedades físicas de las células, las cuales se mezclan con células sanas y modifican la organización de este [22]. Por ello, la simulación de la dispersión de ondas ultrasónicas de células de tumores permite conocer cuáles son los efectos que se apreciarán en la estructura de los tejidos debido a su existencia y en consecuencia, abre la posibilidad de mejorar la información que se obtiene de un imagen de ultrasonido, lo cual puede verse reflejado en un aumento en la eficiencia y precisión de la detección de patologías in vivo.

Entre los modelos que se han utilizado para simular la dispersión de ondas de células se encuentra el de R. E. Baddour, et al. (2004) [24], en el cual consideró que el elemento más dispersivo de la célula es el núcleo, debido a que la impedancia acústica media es mayor que la del resto de la célula, por lo que hizo la aproximación de que esta se encuentra compuesta solo por el núcleo, además de tomar en consideración que en muchos casos los núcleos de las células son relativamente isotrópico y casi esféricos, por lo que propone modelar la célula como un único dispersor esférico con propiedades mecánicas similares a las del núcleo.

Por su parte, O. Falou, et al. (2006) [25], modeló la dispersión celular de dos formas, la primera considerando una esfera elástica que representa al núcleo, el cual está rodeado de una capa de un fluido que representa al citoplasma. Mientras que la segunda consistió en tomar en cuenta la misma esfera elástica para el núcleo, pero la diferencia ahora radicaba en que la coraza que rodea al núcleo y que corresponde al citoplasma también era elástica.

Finalmente, Timothy E. Doyle, et al. (2007) [22], consideró el fenómeno de dispersión múltiple de las células como si fuera producido por partículas a las cuales les colocó un núcleo en su interior, por lo que se tiene una estructura concéntrica núcleo-capa, la cual colocó en un medio, para así poder simular el núcleo de la célula, el citoplasma que rodea al núcleo y la matriz extracelular en la que se encuentran las células, Fig.1.1; donde a cada uno de los componente se le pueden asignar propiedades de un fluido, un sólido o un viscoelástico.

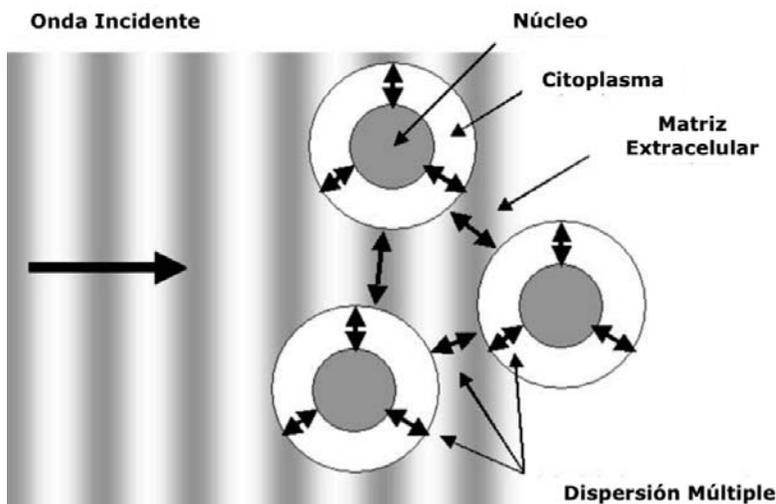


Fig. 1.1: Diagrama de los procesos de dispersión y estructuras celulares simulados por, Timothy E. Doyle, et al.(2007) [26].

1.3.2. Medios de contraste

Cuando se adquiere una imagen de ultrasonido médico no siempre se obtiene un contraste notorio entre los componentes de la zona que se está analizando, lo cual impide obtener información que permita realizar un diagnóstico, por ejemplo, en el caso de la detección del flujo sanguíneo, en las imágenes no se aprecia una diferencia entre la sangre y el tejido, ya que en esos casos la dispersión acústica es débil [27]. Para mejorar esto, se ha hecho uso de medios de contraste, los cuales son microburbujas generalmente llenas de un gas. Estas se inyecta en el cuerpo y permiten

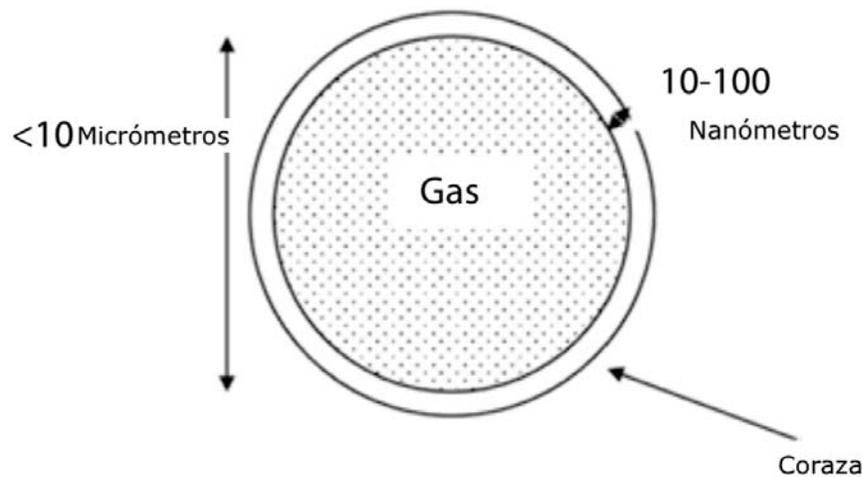


Fig. 1.2: Estructura de un medio de contraste (microburbuja), imagen tomada de [6].

incrementar la dispersión en las regiones que así lo requieren y de esta manera aumentar el poder diagnóstico de las ecografías.

El aumento de la dispersión del sonido se debe a la compresibilidad del gas que se encuentra en el interior de la microburbuja y a la diferencia de impedancia acústica presente entre el contrastante y el tejido circundante [6].

Las microburbujas también pueden contener un líquido o material sólido, pero se ha observado que las primeras son las más efectivas. Además, los medios de contraste pueden o no tener una coraza delgada, Fig.1.2, en caso de no tenerla se conoce como microbubujas de gas libre, las cuales se disuelven rápidamente en el sangre; mientras que aquellas que la poseen, esta les ayuda a prevenir la disolución y rotura durante su paso a través del órgano de interés [6].

Para el caso de los medios de contraste con coraza esta debe formarse de materiales que sean compatibles con el organismo, por lo que comúnmente están hechas de grasas y proteínas (albúmina) [6], pero también, llegan a estar compuestas por polímeros que le otorgan mayor rigidez a la microburbuja, además, se puede tener un doble recubrimiento con una capa externa de material biocompatible y una interna de polímero [20].

El diámetro medio de los contrastantes se encuentra en un rango de 3-5 μm [5], algunas de las características de estos medios de contraste que afectan sus propiedades de dispersión son su compresibilidad, densidad y tamaño; por ello, la variación de dichos parámetros permite tener microburbujas con diferentes cualidades, por ejemplo, el tiempo de vida y su respuesta a las señales de ultrasonido [28].

Como se ha mencionado el comportamiento de los medios de contraste dentro de un campo acústico depende de múltiples factores, entre los cuales se encuentran, la composición del contrastante, su tamaño, la frecuencia utilizada y la presión que inciden sobre ellos, todo esto conlleva a la obtención de diferentes imágenes. Por lo anterior, es útil estudiar y simular cómo es el cambio de la dispersión ante la variación de los diversos parámetros involucrados en el problema.

Cuando el haz de ultrasonido entra en contacto con el contrastante se pueden obtener comportamientos lineales y no lineales como reacción ante el estímulo [6]. Por ello, existen dos formas de modelar la interacción de las microburbujas y el sonido, las cuales son, la dispersión y el enfoque dinámico [29], donde el primero de ellos se describe desde la perspectiva de un sistema cuasi-estático, el cual considera cambios de amplitudes pequeñas y la dispersión total se obtiene a partir de una suma lineal [30]. Mientras que el segundo, se desarrolla con base en una modificación de la ecuación de Rayleigh-Plesset y toma en cuenta efectos no lineales [27]. Esta parte no será desarrollada en este proyecto.

Entre los trabajos realizados para simular la interacción de las ondas acústicas con los contrastantes se encuentra el de Ye (1996) [31], donde se modelaron a los contrastantes como microesferas llenas de gas, rodeadas de albumina (proteína), la cual se comportaba siguiendo la descripción de un sólido elástico y se estudió los cambios de la dispersión debido a la variación en los espesores del recubrimiento.

La ventaja de utilizar la descripción de la dispersión es que es matemáticamente más fácil poder introducir las condiciones de frontera relacionadas con el recubrimiento seleccionado para la microburbuja, además de que permite tratar el problema de la dispersión múltiple. Sin embargo, al ser un modelo lineal, no considera efectos como la posible destrucción de la burbuja que se relaciona con características no lineales [29].

1.4. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es desarrollar una herramienta de simulación de la dispersión ultrasónica producida por microesferas viscoelásticas al ser expuesta a campos de ultrasonido médico. Con base en el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

- 1.- Revisión bibliográfica del problema de dispersión de ondas acústicas de esferas elásticas, así como el cálculo de su sección transversal de dispersión y el patrón de dispersión.
- 2.- Revisión bibliográfica para la dispersión de ondas acústicas de esferas viscoelásticas y su comparación con el caso elástico.
- 3.- Generalización del modelo de dispersión de esferas al problema de esferas compuestas de un núcleo elástico rodeado de una coraza viscoelástica.
- 4.- Simulación de imágenes de ultrasonido clínico producidas por estructuras con corazas viscoelásticas.

Esta tesis consta de seis secciones. En el capítulo 2, se presenta la descripción de un fluido viscoso y de materiales viscoelásticos. En el capítulo 3, se describe la propagación de ondas acústicas en medios homogéneos y no homogéneos. El capítulo 4, plantea dos métodos diferentes de abordar el problema de la dispersión. En el capítulo 5, se exponen los dos sistemas a estudiar en este proyecto. Por otro lado, en el capítulo 6, se plantea la validación de los programas desarrollados y se discuten los patrones de dispersión obtenidos. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del proyecto y trabajos a futuro.

Medios acústicos

Una onda es una perturbación de las propiedades del medio que transmite energía pero no materia, la cual puede clasificarse en mecánica o electromagnética dependiendo si necesitan de un medio o no, para propagarse, respectivamente. A su vez, las ondas mecánicas se dividen en longitudinales (compresionales), transversales (de corte) y superficiales [3]. En la categoría de ondas mecánicas longitudinales, se encuentran las ondas acústicas, las cuales se definen como pequeñas oscilaciones de presión $p(\vec{x}, t)$ en un medio acústico [32, 33].

Este tipo de ondas serán abordadas a lo largo del trabajo. En este capítulo, se plantea la descripción de los materiales en los cuales se pueden propagar, por ejemplo, los sólidos elásticos y viscoelásticos, así como fluidos viscosos y no viscosos.

2.1. Sólido Elástico, Lineal, Homogéneo e Isotrópico

Un **sólido elástico** es aquel que cumple con la característica de que una vez que se elimina el estímulo que provoca la deformación, el cuerpo regresa a su estado original de forma inmediata, de modo que la tasa de aplicación del esfuerzo no tiene ningún efecto en la respuesta [3]. Por otro lado, la **linealidad** implica que la relación entre el tensor de esfuerzo (σ) y el tensor de deformación infinitesimal (ϵ) es lineal, por lo que se puede expresar siguiendo una analogía a la ley de Hooke ¹,

$$\sigma = \mathbf{C}\epsilon, \tag{2.1}$$

donde la constante de proporcionalidad \mathbf{C} , es conocida como el tensor de elasticidad ² [3].

Por otro lado, la **homogeneidad** del medio significa que las propiedades mecánicas son las mismas para todas las partículas que lo componen, lo cual implica que el tensor de elasticidad no tendrá una dependencia espacial [3].

¹A lo largo de este trabajo, se seguirá la siguiente notación para diferenciar las cantidades tensoriales y vectoriales, la primeras se escribirán utilizando "**bold face**", mientras que los vectores se denotarán con un acento en forma de flecha.

²En este trabajo σ y ϵ son tensores de rango 2, mientras que el tensor de constantes de elasticidad \mathbf{C} es de cuarto rango, por lo que se pueden expresar como $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$, haciendo uso de la notación de suma.

Por último, la condición de **isotropía** hace referencia a que las propiedades mecánicas del medio serán las mismas sin importar la dirección, lo cual se refleja en la condición de que el tensor de elasticidad sea invariante ante cualquier transformación de base ortogonal [3].

Las suposiciones anteriores permiten que el tensor de elasticidad pase de tener 81 coeficientes independientes a solo dos, los cuales se conocen como constantes de Lamé, λ y μ , las cuales tiene unidades de fuerza por unidad de área. Para un sólido con dichas características la ecuación constitutiva tiene la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda e \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{I} es el tensor de identidad y e es la dilatación ($e = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$).

2.1.1. Constantes elásticas

Las constantes elásticas permiten conocer cuál será el comportamiento de un sólido elástico ante diferentes esfuerzos, entre estos parámetros se encuentran:

- Módulo de compresión volumétrica (M), el cual está relacionado con el cambio por unidad de volumen de un sólido ante esfuerzos normales.
- Módulo de corte (G), cuantifica la resistencia de un sólido a deformarse ante esfuerzos tangenciales.
- Módulo de Young (Y), expresa la razón que existe entre un esfuerzo uniaxial y la deformación en la misma dirección.
- Razón de Poisson (ν), cuantifica la razón de la deformación lateral y axial ante un esfuerzo longitudinal.

Cuando se tiene un sólido elástico, isotrópico y lineal, como ya se mencionó anteriormente solo dos de estos parámetros son independientes, por lo que se pueden expresar las demás constantes en términos de ellos como se muestra en la Tabla 2.1.

	λ	μ	Y	G	ν	M
Y, ν	$\frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{Y}{2(1+\nu)}$	Y	$\frac{Y}{2(1+\nu)}$	ν	$\frac{(1-\nu)Y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
G, ν	$\frac{2\nu}{1-2\nu}G$	G	$2G(1+\nu)$	G	ν	$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$
λ, μ	λ	μ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	μ	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$

Tabla 2.1: Conversiones de constantes elásticas, para un sólido elástico, isotrópico y lineal.

2.2. Fluidos

Un fluido es aquel material que en su estado de reposo no presenta resistencia a esfuerzos cortantes, por lo que el módulo de corte es cero, $G = 0$, en esta definición se consideran a los líquidos, gases y plasmas, donde la diferencia entre ellos radica en su valor de compresibilidad [3, 34].

Cuando un fluido se encuentra en reposo solo experimenta esfuerzos normales, en específico esfuerzos debido a la presión hidrostática, p_0 , ya que los esfuerzos cortantes provocan que el fluido se deforme continuamente; por lo que el tensor de esfuerzos, σ , en un punto del medio en reposo puede expresarse como [35],

$$\sigma = -p_0 \mathbf{I}. \quad (2.3)$$

Por otro lado, si el fluido se encuentra en movimiento y presenta viscosidad, los esfuerzos cortantes deben ser considerados, por lo que el tensor de esfuerzo se puede separar en dos componentes, una que no considera efectos de viscosidad y otra que sí los toma en cuenta,

$$\sigma = -p \mathbf{I} + \sigma', \quad (2.4)$$

donde σ' es el tensor de esfuerzos viscosos, el cual está asociado con la disipación de energía y tiene una dependencia con la tasa de deformación. En este caso, la expresión para la presión dependerá si el fluido es compresible o incompresible, en el primero caso la presión se encuentra relacionada con otras variables termodinámicas como la densidad y la entropía mediante la ecuación de estado, $p = p(\rho, s)$, mientras que en el segundo, la presión es una variable mecánica independiente [36].

Si además se considera que el fluido es lineal, la relación entre el esfuerzo σ' y la tasa de deformación \mathbf{D} , se puede expresar linealmente con un constante de proporcionalidad igual al tensor de viscosidad \mathbf{C}_v . Si el fluido además de ser lineal y viscoso, es isotrópico, implicará que el tensor de viscosidad pasa de tener 81 coeficientes, a solo dos coeficiente independientes, λ_v y μ_v , donde el primero de ellos se conoce como coeficiente de dilatación viscoso y el segundo como coeficiente de viscosidad tangencial [36], permitiendo expresar el tensor de viscosidad de la siguiente forma:

$$\sigma' = \lambda_v \Delta \mathbf{I} + 2\mu_v \mathbf{D}, \quad (2.5)$$

donde $\Delta = D_{ii}$ se conoce como tasa de dilatación. Con lo anterior se tiene que la ecuación constitutiva para un fluido newtoniano, es decir, un fluido que cumple con las características de ser compresible, isotrópico, lineal y viscoso es la siguiente ³:

$$\sigma = \left[-p - \frac{2}{3}\mu_v \Delta + \mu_b \Delta \right] \mathbf{I} + 2\mu_v \mathbf{D}, \quad (2.6)$$

³Si el fluido es incompresible se tiene que $\Delta = 0$, ya que los medios incompresible cumplen que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

donde $\mu_b = \lambda_v + \frac{2}{3}\mu_v$ es la viscosidad volumétrica.

2.3. Sólido viscoelástico, Lineal, Homogéneo e Isotrópico

Se denominan materiales viscoelásticos a aquellos que presentan cualidades de materiales elásticos y viscosos [35]. Entre sus características se encuentra que la relación que existe entre el esfuerzo y la deformación es dependiente del tiempo, por lo que la deformación no solo depende de la magnitud del esfuerzo sino también de la historia con la que se ejerció; además de poder almacenar y disipar energía [35, 37, 38].

Algunos fenómenos que presentan los materiales viscoelásticos son [39]:

- Arrastre o fluencia, está relacionado con un aumento progresivo de la deformación ante un esfuerzo constante, Fig.2.1a).
- Relajación, el cual consiste en un disminución temporal del esfuerzo debido a una deformación constante, Fig.2.1b).
- Histéresis, cuando se aplica un esfuerzo de manera cíclica, en la curva de esfuerzo-deformación se presenta un desfase entre el esfuerzo y la deformación, debido a la disipación de energía, Fig.2.1c).

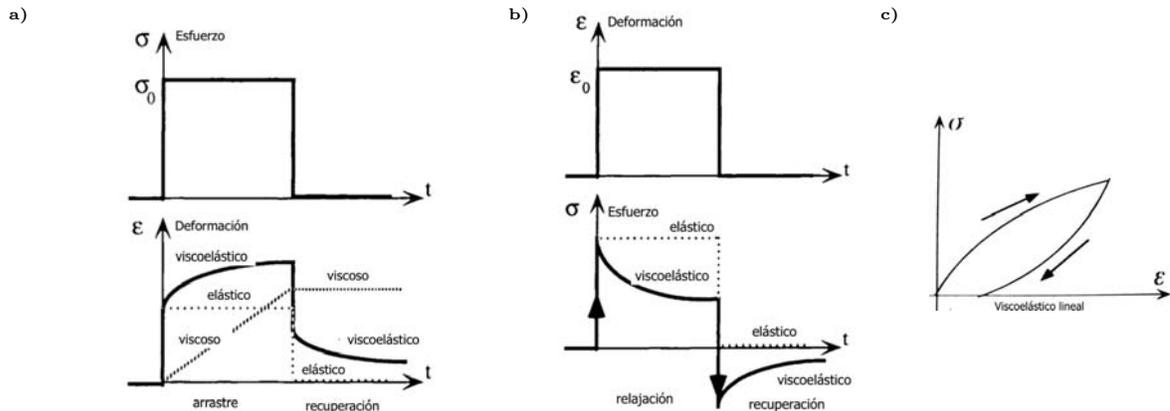


Fig. 2.1: Fenómenos en materiales viscoelásticos: a) Fenómeno de arrastre o fluencia para un material elástico, viscoso y viscoelástico; b) Fenómeno de relajación para un material elástico y viscoelástico; c) Ciclo de histéresis. Imágenes tomadas de [40].

La caracterización de la respuesta viscoelástica de un material se realiza mediante pruebas de relajación de esfuerzo, recuperación de arrastre y respuesta dinámica ante estímulos que varían sinusoidalmente con el tiempo [35, 41].

Para la descripción de los experimentos de relajación y recuperación se puede considerar que se aplica un esfuerzo unidimensional cuya dependencia temporal está descrita mediante la

función escalón de Heaviside $H(t)$ y cuya magnitud al tiempo $t = 0$ es σ_0 . Para el caso de la relajación se considera una deformación de la forma [39],

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t), \quad E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}, \quad (2.7)$$

donde la razón entre el esfuerzo y la deformación constante, $E(t)$, se le denomina módulo de relajación de esfuerzos [39].

En el caso del fenómeno de recuperación, el esfuerzo se expresa como,

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t), \quad J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0}, \quad (2.8)$$

donde la razón entre la deformación y el esfuerzo constante, $J(t)$, se define como la complianza de arrastre [39].

Una manera de comprender la física detrás del comportamiento de un viscoelástico, es mediante la generación de modelos, por ejemplo, aquellos construidos a partir de resortes y amortiguadores que representan elementos elásticos y viscosos lineales, respectivamente [39]. Algunos modelos clásicos a partir de resortes y amortiguadores son el de Maxwell, Kelvin-Voigt y el sólido lineal estándar, Fig.2.2.

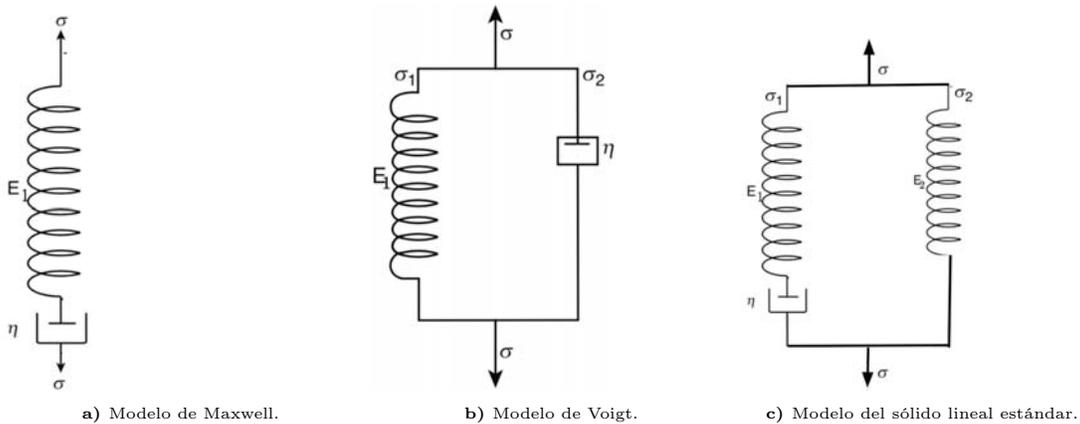


Fig. 2.2: Modelos reológicos: a) Modelo de Maxwell, b) Modelo de Voigt y c) Modelo del sólido lineal estándar. Imágenes tomadas de [42].

El modelo de Maxwell consiste en un arreglo en serie de un amortiguador y un resorte, la desventaja de este modelo es que no permite describir la respuesta de los materiales viscoelásticos ante esfuerzos constantes. Por otro lado, el modelo de Kelvin-Voigt se compone de un arreglo en paralelo de un resorte y amortiguador, la limitación que presenta es que no permite modelar el fenómeno de arrastre. Por último, el modelo del sólido lineal estándar es una combinación de los dos modelos anteriores y es el modelo más simple que permite modelar el comportamiento de los materiales viscoelásticos tanto en experimentos de arrastre como relajación.

Además de estos modelos, existen otros más complejos como el modelo de Havriliak-Negami (H-N), el cual utiliza cinco parámetros para poder describir la respuesta dinámica de los materiales

viscoelásticos [43-45]; dicho modelo será el que se empleará para este trabajo.

A pesar de que los materiales viscoelásticos no se componen de amortiguadores y resortes y que en algunas situaciones aunque se utilicen combinaciones con más componentes no es posible representar con precisión el comportamiento real de ellos, este planteamiento es de utilidad para comprenderlos de forma cualitativa y en algunos casos estos modelos proporcionan expresiones matemáticas para $E(t)$ y $J(t)$ que pueden usarse para ajustar los datos obtenidos experimentalmente [39].

Un estímulo que es común en los materiales viscoelásticos es el de perturbaciones oscilatorias, el estudio de esta interacción es relevante para el ultrasonido médico, ya que los tejidos biológicos pueden comportarse como materiales viscoelásticos y una forma de determinar sus propiedades es sometiéndolos a oscilaciones periódicas [46]. Si se aplica un esfuerzo oscilante de la forma [39],

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos \omega t, \quad (2.9)$$

donde σ_0 es la amplitud del esfuerzo y ω la frecuencia angular, la deformación resultante para un material viscoelástico se describe como [39],

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (2.10)$$

donde se tiene que la respuesta a la deformación es una oscilación a la misma frecuencia que el esfuerzo, pero presenta un desfase en un ángulo de fase δ , Fig.2.3. Este ángulo se denomina ángulo de pérdida [39]. Al expandir la función trigonométrica en la respuesta de deformación, se obtiene,

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos \delta \cos \omega t + \epsilon_0 \sin \delta \sin \omega t, \quad (2.11)$$

donde el primer término está completamente en fase con el esfuerzo como ocurriría en un material elástico ideal, mientras que el segundo término contribuye al desfase observado. Si $\delta = \frac{\pi}{2}$, entonces la deformación está completamente fuera de fase con el esfuerzo, el cual es un comportamiento observado en los materiales viscosos.

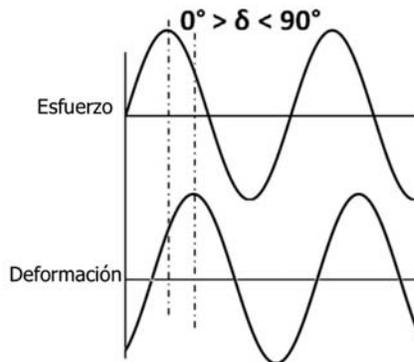


Fig. 2.3: Desfase esfuerzo-deformación. Imagen tomada de [47].

Si por el contrario se aplica una deformación oscilante

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos \omega t, \quad (2.12)$$

se tiene que el esfuerzo puede expresarse como,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 \cos(\omega t - \delta) \\ &= \sigma_0 \cos \delta \cos \omega t + \sigma_0 \sin \delta \sin \omega t, \\ &= \epsilon_0 (E' \cos \omega t - E'' \sin \omega t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde la cantidad E' es una medida de cuán en fase está el esfuerzo con la deformación y por lo tanto, corresponde a la capacidad que tiene el sistema de almacenar energía, es decir, se encuentra relacionado con la contribución elástica y se llama módulo de almacenamiento; mientras que E'' , es una medida de qué tan fuera de fase está la tensión con la deformación, lo cual se relaciona con cuánta energía se puede disipar en forma de calor, esto debido a la parte viscosa del material y se denomina módulo de pérdida [39, 48]. Además, el ángulo de pérdida se puede expresar mediante la tangente y los términos E' y E'' , como

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'}. \quad (2.14)$$

Los módulos de almacenamiento y pérdida, E' y E'' , generalmente se escriben como la parte real e imaginaria de un módulo complejo, llamado módulo dinámico [39]:

$$E^* = E' + i E'', \quad (2.15)$$

algunas expresiones para el módulo dinámico de los modelos presentados anteriormente se encuentran en el Apéndice A.3. El módulo complejo podrá representar a algunos de los módulos de Young (Y), corte (G) o de compresión volumétrica (M), dependiendo del tipo de esfuerzo que se esté aplicando y estos módulos adquirirán una expresión compleja dependiente de la frecuencia.

En cuanto a la ecuación constitutiva que describe a éste tipo de sólidos si se considera que es lineal, homogéneo e isotrópico, su expresión es análoga a la de un sólido elástico,

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda^*(\omega) e \mathbf{I} + 2\mu^*(\omega) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.16)$$

con la diferencia de que $\lambda^*(\omega)$ y $\mu^*(\omega)$ son las constantes de Lamé complejas y con dependencia en la frecuencia, debido a la forma del módulo dinámico.

Propagación de ondas acústicas

Para describir la propagación de ondas acústica se debe tener en cuenta que estas imparten movimiento al medio a medida que se propagan, generándose desplazamientos locales [49]. El estado de movimiento de un material se puede comprender a partir de conocer su velocidad de partícula y dos funciones termodinámicas en cualquier tiempo y posición del espacio [3]. Si el movimiento de las partículas se presenta bajo **condiciones adiabáticas**, es decir, las compresiones y expansiones de la onda son lo bastante rápidas como para que no exista transferencia de energía, se plantean las siguientes cuatro ecuaciones para explicar la cinemática:

1. Ecuación de movimiento:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{B} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad (3.1)$$

el primer término da información sobre la fuerzas superficiales; mientras que el segundo está relacionado con las fuerzas de largo alcance \vec{B} , para este trabajo no se consideran fuerzas de largo alcance, por lo que, $\vec{B} = \vec{0}$.

2. Ecuación de continuidad:

$$\rho \nabla \cdot \vec{v} + \frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (3.2)$$

donde $\frac{D}{Dt}$ representa un derivada material¹. Si el medio es incompresible, es decir, su volumen se mantiene constante, se cumple que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, por lo tanto, la derivada material de la densidad será cero.

3. Ecuación constitutiva: permite relacionar el esfuerzo con la deformación y adquiere una forma diferente si se analiza un sólido o un fluido.
4. Ecuación de estado: presenta la relación que existe entre las variables termodinámicas, como puede ser la densidad, la entropía y la presión.

¹La derivada material se define como [34],

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{x_i, f_{ija}} + \vec{v} \cdot \nabla, \quad (3.3)$$

donde \vec{v} corresponde a la velocidad de partícula.

A partir de las cuales se puede deducir la expresión para la ecuación de onda en los diferentes materiales en los que se propaga la onda acústica ²

3.1. Ecuación de onda para un fluido

La ecuación de onda permite modelar cómo es la propagación de perturbaciones de densidad y presión debido a una onda en un fluido. Si se considera que el medio en el que se propagan las ondas es homogéneo e isotrópico, y que tiene una densidad y presión de equilibrio, ρ_0 y p_0 , respectivamente. Además de que el estado en equilibrio, es un estado en reposo, es decir, la velocidad de partícula es nula, $\vec{v}_0 = \vec{0}$. La ecuación de onda puede obtenerse mediante el siguiente planteamiento.

Si en el medio se presentan perturbaciones de densidad, ρ' , y presión, p' , es posible definir el valor total de la densidad, presión y velocidad de la siguiente forma:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t), \quad (3.4)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + p'(\vec{r}, t), \quad (3.5)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \vec{v}'(\vec{r}, t), \quad (3.6)$$

si las perturbaciones son pequeñas:

$$|\rho'| \ll \rho_0, \quad |p'| \ll p_0, \quad |\vec{v}'| \ll c_0, \quad (3.7)$$

donde c_0 es la velocidad de propagación de la onda en el medio. A partir de estas consideraciones se pueden reexpresar las ecuaciones de continuidad y de movimiento de la siguiente forma:

La ecuación de continuidad (3.2), puede expresarse como:

$$\frac{d\rho'}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.8)$$

sustituyendo en (3.8) la ecuación de estado para un fluido (A.4)³ se tiene que,

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{dp'}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.9)$$

²A lo largo de los siguientes desarrollos no se hará explícita la dependencia de ρ , p y \vec{v} , pero se supondrá que tiene una dependencia espacial y temporal (\vec{r}, t) .

³El desarrollo de la ecuación de estado para un fluido puede encontrarse en el Apéndice A.1.

Empleando las ecuaciones (3.1) y (2.6), se obtiene la ecuación de movimiento para esta clase de fluidos en términos de la velocidad de partícula, \vec{v} , a esta ecuación se le conoce como ecuación de Navier-Stokes para un fluido newtoniano compresible [3],

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \left(\mu_b + \frac{1}{3}\mu_v \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \mu_v \nabla^2 \vec{v}. \quad (3.10)$$

Aplicando las consideraciones previas a la ecuación de movimiento de Navier-Stokes (3.10), se obtiene la siguiente expresión,

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \left(\mu_b + \frac{1}{3}\mu_v \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \mu_v \nabla^2 \vec{v}. \quad (3.11)$$

Si se descompone el vector de velocidad de partícula en la suma de dos vectores,

$$\vec{v} = \vec{v}_L + \vec{v}_T, \quad (3.12)$$

donde \vec{v}_L es la componente longitudinal que cumple que su rotacional es cero, y \vec{v}_T es la componente transversal que cumple que su divergencia es nula. Sustituyendo (3.12) en (3.11), se obtienen dos ecuaciones [50]:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_L}{\partial t} = -\nabla p' + \left(\mu_b + \frac{4}{3}\mu_v \right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}_L), \quad (3.13)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_T}{\partial t} = -\mu_v \nabla \times (\nabla \times \vec{v}_T), \quad (3.14)$$

donde (3.13) describe la propagación de ondas longitudinales y (3.14) la propagación de ondas transversales. Al calcular la derivada temporal de ambas ecuaciones y sustituyendo en ellas la expresión (3.9), se obtiene que,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_L}{\partial t^2} = c_0^2 \rho_0 \nabla^2 \vec{v}_L + \left(\mu_b + \frac{4}{3}\mu_v \right) \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \vec{v}_L), \quad (3.15)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_T}{\partial t} = \mu_v \nabla^2 \vec{v}_T, \quad (3.16)$$

donde estas dos expresiones son las ecuaciones de onda longitudinal (3.15) y transversal (3.16), de amplitud pequeña para un fluido viscoso, en términos de la velocidad de partícula. Si el fluido no fuera viscoso los parámetros μ_v y μ_b son cero, y solo se tiene la ecuación de onda longitudinal,

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_L}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \vec{v}_L. \quad (3.17)$$

Las ecuaciones de onda anteriores se pueden expresar en términos de la presión utilizando la siguiente relación:

$$\nabla p = -\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (3.18)$$

3.2. Ecuación de onda para un sólido

En el caso de la ecuación de onda para un sólido elástico, lineal, homogéneo e isotrópico. Esta se obtiene a partir de conocer la ecuación de movimiento, la cual se deduce utilizando (2.2) y (3.1), obteniendo que la ecuación de movimiento para un sólido con estas características en términos del desplazamiento, \vec{u} , está dada de la siguiente forma,

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.19)$$

dicha expresión se conoce como ecuación de movimiento de Navier [34].

Si se descompone el vector de desplazamiento en la suma de dos vectores,

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t \quad (3.20)$$

donde \vec{u}_l es la componente longitudinal o de compresión, que cumple con que su rotacional es cero, y \vec{u}_t es la componente transversal o cortante, que tiene la característica de que su divergencia es nula. Sustituyendo (3.20) en (3.19) se obtienen dos ecuaciones [50]:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_l), \quad (3.21)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \vec{u}_t, \quad (3.22)$$

donde estas dos expresiones son las ecuaciones de onda longitudinal (3.21) y transversal (3.22) para un sólido elástico en términos del vector de desplazamiento. En caso de que se trate de un sólido viscoelástico la diferencia radificará en las características de las constantes de Lamé.

3.3. Ecuación de onda para un medio no homogéneo

Hasta el momento solo se ha mencionado cómo es la ecuación de onda cuando esta se propaga en un medio homogéneo, en general la mayor parte los medios y los tejidos biológicos presentan cierto grado de heterogeneidad. Por lo que es necesario conocer cómo es la ecuación de onda para estos casos.

El procedimiento para obtener la ecuación de onda es análogo al presentado en 3.1, pero

en este caso además de considerar las perturbaciones de densidad y presión generadas por la propagación de la onda acústica en el medio, se tienen que tomar en cuenta las que se generan debido a la falta de homogeneidad. Por lo que se tiene que la compresibilidad, la densidad y la presión total se expresan como,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{x}_0 + \vec{v}'(\vec{r}, t), \quad (3.23)$$

$$\kappa(\vec{r}) = \kappa_0 + \delta\kappa_e(\vec{r}) \equiv \kappa_e, \quad (3.24)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \delta\rho_e(\vec{r}) + \rho'(\vec{r}, t) \equiv \rho_e + \rho', \quad (3.25)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + p'(\vec{r}, t), \quad (3.26)$$

donde $\delta\kappa_e$ y $\delta\rho_e$ son el cambio de compresibilidad y densidad debido a la no homogeneidad del medio.

En este caso la ecuación de estado se plantea de una forma más general que en el caso del medio homogéneo, para ello se utiliza la ecuación de compresibilidad adiabática,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s, \quad (3.27)$$

donde esta expresión relaciona el cambio de densidad y presión de una partícula acústica al propagarse en un medio y de donde se obtiene que las tasas de cambio de la presión y densidad siguen la siguiente relación,

$$\kappa \rho \frac{Dp}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt}, \quad (3.28)$$

$$\kappa \rho \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho, \quad (3.29)$$

la cual describe la ecuación de estado para este caso [50]. Si a esta expresión se le aplican los valores totales de compresibilidad, densidad, presión y velocidad, y se consideran perturbaciones pequeñas, se tiene que, ⁴

$$\kappa_e \rho_e \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \nabla \rho_e. \quad (3.30)$$

Expresando bajo las condiciones descritas la ecuación de continuidad, y sustituyendo en ella la ecuación de estado (3.30) se obtiene,

⁴Al analizar el segundo término del lado derecho de la expresión (3.29), se tiene que,

$$\vec{v} \cdot \nabla p = \vec{v}' \cdot \nabla p_0 + \vec{v}' \cdot \nabla p'$$

donde $\nabla p_0 = 0$ ya que p_0 es independiente de la posición; mientras que $\vec{v}' \cdot \nabla p' = 0$ dado que se trata de un término de segundo orden.

$$\kappa_e \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.31)$$

En cuanto a la ecuación de movimiento si se considera que el medio es no viscoso se tiene que,

$$\rho_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p' = 0. \quad (3.32)$$

Derivando temporalmente (3.31) y sustituyendo (3.32)

$$\kappa_e \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_e} \nabla p' \right), \quad (3.33)$$

para finalmente obtener la ecuación de onda se debe añadir de ambos lados de la igualdad, la ecuación de un medio homogéneo,

$$\rho_0 \kappa_0 \left(\frac{\kappa_e - \kappa_0}{\kappa_0} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \right) \nabla p \right] = \nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (3.34)$$

definiendo

$$\gamma_\kappa = \frac{\kappa_e - \kappa_0}{\kappa_0}, \quad \gamma_\rho = \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e}, \quad (3.35)$$

se tiene que,

$$\frac{\gamma_\kappa}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot [\gamma_\rho \nabla p] = \nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (3.36)$$

donde en el lado derecho de la expresión se presentan los términos de la ecuación de onda para un medio uniforme, mientras que del lado izquierdo se encuentran los términos que corresponden a una fuente de radiación, que representan la dispersión de energía debido a las características no homogéneas del medio [50].

3.4. Impedancia acústica

Un concepto relevante en la descripción de la propagación de ondas acústicas en presencia de dos medios con diferentes propiedades acústica es la impedancia. La cual se define como la razón entre la fuerza acústica total a una frecuencia dada que actúa en un área específica y la velocidad de partícula a esa misma frecuencia [50],

$$Z_a(\vec{r}, \omega) = \frac{|\vec{F}(\vec{r}, \omega)|}{|\vec{v}(\vec{r}, \omega)|}. \quad (3.37)$$

Al expresar (3.37) en términos de la presión se obtiene la impedancia acústica específica,

$$Z(\vec{r}, \omega) = \frac{p(\vec{r}, \omega)}{|\vec{v}(\vec{r}, \omega)|}. \quad (3.38)$$

En el caso particular de que la onda acústica que se propaga es armónica, plana y que el medio es no viscoso, la fuerza total, la presión y la velocidad se pueden escribir como fasores, en dicha representación se obtiene que el fasor de velocidad (\tilde{v}) se describe como [50]:

$$\tilde{v} = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 c_0} \hat{r}, \quad (3.39)$$

donde ρ_0 y c_0 son la densidad y la velocidad de propagación en el medio y \hat{r} es el vector unitario en la dirección de propagación. Por lo tanto, la impedancia acústica se puede expresar de la siguiente forma:

$$\tilde{Z} = Z_0 = \rho_0 c_0, \quad (3.40)$$

la cual se conoce como impedancia característica del medio.

3.5. Intensidad y potencia acústica

Además de la impedancia acústica, existen otros conceptos importantes en la descripción de la propagación de ondas acústicas, lo cuales son la intensidad y la potencia. Para obtener sus expresiones se debe conocer cómo es la energía del medio en el que se propagan las ondas. Al considerar un volumen arbitrario V a través del cual se propaga una onda, la energía total en V aumenta, debido al incremento de la energía cinética y potencial de las partículas acústicas que se encuentran en él [50].

La energía total en V , se puede obtener a partir de considerar un diferencial de volumen δV ; en el cual la energía cinética, δE_{KE} , está dada por,

$$\delta E_{KE} = \frac{1}{2} \rho_0 |\tilde{v}|^2 \delta V, \quad (3.41)$$

mientras que la energía potencial, δE_{PE} , se puede determinar a partir del trabajo hecho por la presión para realizar un cambio en el volumen; por lo que, δE_{PE} se expresa como,

$$\delta E_{PE} = \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \delta V. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, la energía total en dicho diferencial es:

$$\begin{aligned}\delta E &= \delta E_{\text{KE}} + \delta E_{\text{PE}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\rho_0 |\tilde{v}|^2 + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \delta V.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Finalmente integrando sobre todo el volumen V se obtiene la energía total,

$$E(\vec{r}, t) = \int_V \frac{1}{2} \left[\rho_0 |\tilde{v}|^2 + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \delta V.\quad (3.44)$$

A partir de ella se expresa la potencia acústica, W , como la relación de la energía total que fluye a través de V , es decir, [50]

$$W(t) = -\frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t},\quad (3.45)$$

donde al sustituir (3.44) en (3.45) y hacer uso de la ecuación de movimiento y el teorema de Gauss se llega a que,

$$W(t) = \int_{S_0} p \vec{v} \cdot \hat{n} dS,\quad (3.46)$$

donde S_0 es la superficie que rodea al volumen V y \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie que apunta en dirección hacia afuera de la superficie.

A la cantidad vectorial $p \vec{v}$ se le conoce como intensidad instantánea $\vec{I}(\vec{r}, t)$, que se define como el flujo instantáneo de energía por unidad de área que fluye fuera de la superficie dS [50]. Si se considera una onda armónica plana para un medio no viscoso, el promedio temporal de la intensidad está dado como [50]:

$$\bar{I} = \frac{|\tilde{p}|^2}{2\rho c_0}.\quad (3.47)$$

Dispersión

Como se mencionó en el Capítulo 3, la propagación de las ondas puede ocurrir en medios homogéneo o no homogéneos. Cuando la propagación ocurre en un medio que presenta variaciones espaciales de impedancia acústica, como es el caso de los tejidos biológicos, se presentan dos fenómenos importantes, la absorción y la dispersión, los cuales están relacionados con la pérdida de energía de la onda, y a la combinación de ellos se le denomina atenuación.

El primero de estos fenómenos consiste en una transformación de energía acústica en otro tipo de energía como puede ser calor, energía química o luz [3]. Mientras que el segundo, radica en un redireccionamiento de energía de la onda, donde dicha energía aparece comúnmente en una dirección diferente a la incidente, Fig.4.1; la reflexión y la refracción se encuentran descritos como casos límites de la dispersión [1, 3]. El fenómeno de dispersión será el tema clave a lo largo de este trabajo.

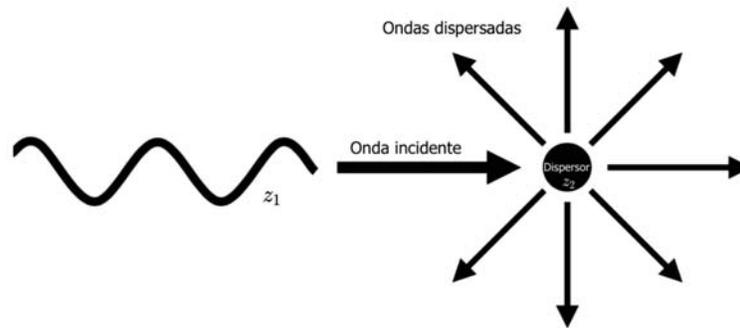


Fig. 4.1: Dispersión de una onda debido a un cambio de impedancia acústica, donde z_1 es la impedancia del medio circundante y z_2 la impedancia del dispersor esférico, con $z_1 \neq z_2$ [6].

La dispersión puede clasificarse con relación a la distribución de los dispersores en el medio y también conforme a la relación que guarda el tamaño del dispersor con la longitud de la onda incidente. De acuerdo con la primera clasificación se puede presentar dispersión única (single scattering) o múltiple (multiple scattering) Fig. 4.2 [51].

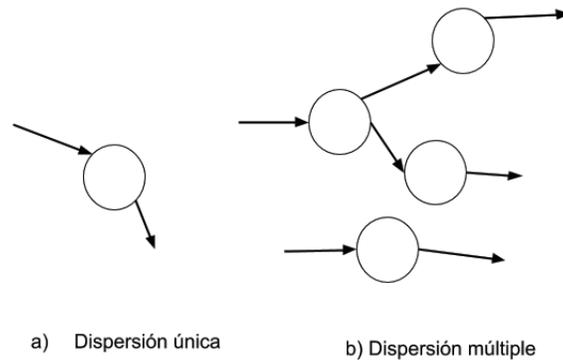


Fig. 4.2: Tipos de dispersión [51].

Para la segunda clasificación, se considera la dimensión más grande del dispersor, a , y se compara con la longitud de la onda incidente, λ , de donde se tienen los siguientes casos [52]:

- Si $a \ll \lambda$, se conoce como dispersión de Rayleigh,
- Si $a \approx \lambda$, se presentan efectos de difracción y refracción,
- Si $a \gtrsim \lambda$, se tiene dispersión de Mie,
- Si $a \gg \lambda$, se observa reflexión especular.

Durante este trabajo la palabra dispersión o esparcimiento (del inglés scattering) no debe confundirse con la palabra dispersión (del inglés dispersion) la cual se refiere a la dependencia de la velocidad de fase con la frecuencia.

4.1. Métodos para la solución del problema de dispersión

Estudiar el problema de dispersión para sistemas biológicos es complejo, ya que la estructura también lo es, por ello una primera aproximación para la solución de este problema es considera que la onda acústica que incide sobre el dispersor es una onda armónica plana y que los dispersores tiene geometrías simétricas y simples [50].

Existen dos métodos principales para resolver el campo de presión dispersado debido a la falta de homogeneidad en el medio, el método de condiciones de frontera y la función Green [53], los cuales serán abordados a continuación, para el caso de dispersores con geometría esférica.

4.1.1. Condiciones de frontera

El método consiste en suponer que la ecuación de onda para un medio homogéneo es válida tanto dentro como fuera del dispersor, donde su solución se obtiene al utilizar condiciones de frontera para la superficie del dispersor. Además de ser útil si se conocen las características del

dispersor, y en especial cuando se tiene una geometría simple. La desventaja del método es que no es aplicable para dispersores con una composición no uniforme o que su forma sea irregular [53].

El sistema para el cual se busca conocer la presión dispersada está compuesto por una onda plana armónica que incide sobre un dispersor esférico de radio a , Fig.4.3.

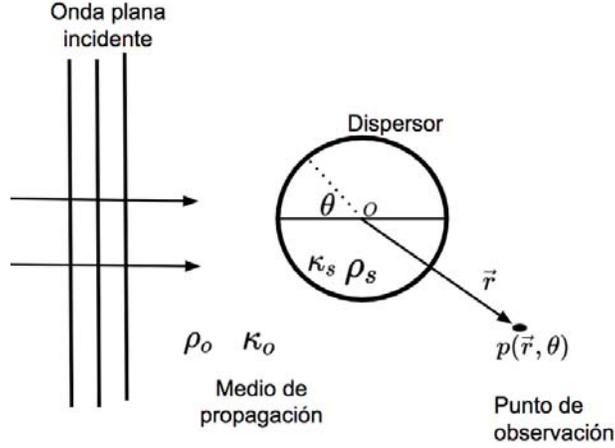


Fig. 4.3: Onda plana incidente en un dispersor esférico.

Al sustituir la expresión para la onda plana armónica en la ecuación de onda, esto lleva a la ecuación de Helmholtz, por lo que este método busca expresar su solución,

$$\nabla^2 p(\vec{r}) + k^2 p(\vec{r}) = 0, \quad (4.1)$$

en términos de una serie infinita de polinomios ortogonales, para posteriormente imponer condiciones de frontera adecuadas en la superficie de dispersor para encontrar los coeficientes de expansión [50].

Debido a la geometría del dispersor, la solución para la ecuación de Helmholtz puede plantearse mediante el método de separación de variables de la siguiente forma¹:

$$p_s(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (4.2)$$

si se considera que el origen del sistema se encuentra en el centro del dispersor, Fig.4.3, el sistema cumple con tener simetría azimutal, es decir, el campo en cualquier posición \vec{r} , es independiente de ϕ , por lo que la solución a dicha ecuación se reduce a solo dos variables, lo que permite resolver un problema en dos dimensiones,

$$p_s(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta), \quad (4.3)$$

al sustituir esta expresión en la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas, se obtienen

¹El factor $e^{i\omega t}$ relacionado con la dependencia temporal, no se denotará explícitamente a lo largo del desarrollo, pero sí se tomará en consideración.

dos ecuaciones una que dependerá de posición radial y otra con dependencia angular y cuyas soluciones se describen en el Apéndice A.2 y están dadas por (A.15) y (A.17).

Al sustituir estas expresiones en (4.3), se tiene que la presión dispersada puede ser descrita como,

$$p_s(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n j_n(kr) - i B_n n_n(kr)] P_n(\cos \theta), \quad (4.4)$$

donde A_n y B_n son los coeficiente de expansión, j_n es la función esférica de Bessel, n_n es la función esférica de Neumann y P_n son los polinomios de Legendre. Los valores de los coeficientes de expansión se obtienen haciendo uso de las condiciones de frontera en la superficie de la esfera, las cuales dependen de las características del medio circundante al dispersor y este mismo.

4.1.2. Función de Green

Este método permite estudiar problemas con distribuciones de dispersores más complejos que el método anterior, ya que obtiene la solución a la ecuación de onda primero para un dispersor puntal, y posteriormente se realiza la suposición de que se tiene una fuente que está compuesta de varios dispersores, por lo que, para obtener la contribución total del campo dispersado, se suman cada una de las contribuciones de los dispersores mediante una integral sobre el volumen de la fuente.

El planteamiento de este método considera un volumen de dispersión V_s con forma arbitraria el cual está descrito por la propiedades acústicas ρ_e y κ_e , las cuales puede variar dentro de dicho volumen, además de suponer que V_s se encuentra rodeado por un medio infinito con constantes ρ_0 y κ_0 , Fig.4.4 [50].

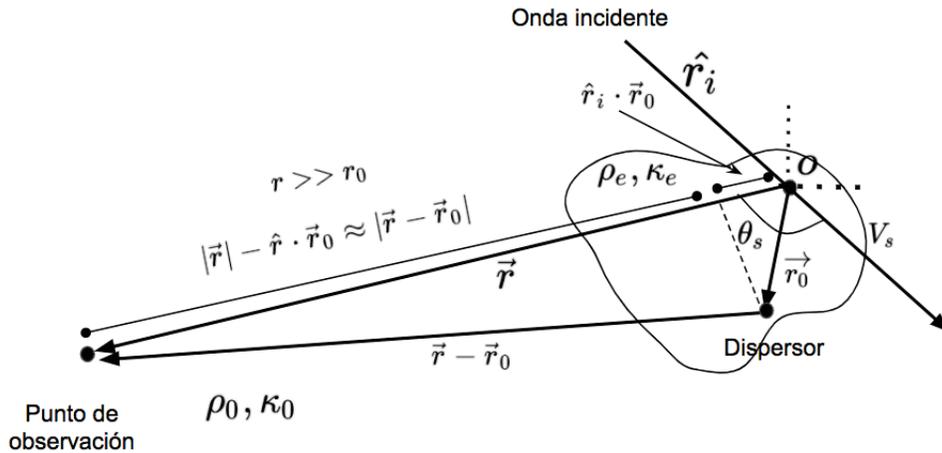


Fig. 4.4: Diagrama para la solución del problema de dispersión mediante el método de la función de Green [50].

Para encontrar la presión acústica dispersada se utiliza la ecuación de onda no homogénea (3.36), y por conveniencia el término de las fuentes de radiación se denota como $f(\vec{r}, t)$,

$$\nabla^2 \underline{p} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = -f(\vec{r}, t), \quad (4.5)$$

donde

$$f(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma_\kappa}{c_0^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} - \nabla \cdot [\gamma_\rho \nabla \underline{p}]. \quad (4.6)$$

Lo siguiente es aplicar la transformada de Fourier a (4.5), para obtener la ecuación de Helmholtz no homogénea,²

$$\nabla^2 \underline{p} + k^2 \underline{p} = -F(\vec{r}, \omega), \quad (4.7)$$

donde

$$F(\vec{r}, \omega) = \gamma_\kappa k^2 \underline{p} - \nabla \cdot [\gamma_\rho \nabla \underline{p}]. \quad (4.8)$$

Por otro lado, la ecuación de Helmholtz en términos de la función de Green, tiene la siguiente forma,

$$\nabla^2 G(\vec{r} | \vec{r}_0) + k^2 G(\vec{r} | \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (4.9)$$

Tanto en (4.7) como en (4.9) el término $k = \frac{\omega}{c_0}$, es el número de onda del medio circundante.

Al multiplicar por G y F las expresiones (4.7) y (4.9), respectivamente y luego restar las ecuaciones y finalmente, integrar sobre un volumen V que contenga al volumen V_s y utilizando el teorema de Green ³, se obtiene que la expresión integral para la presión total,

$$\underline{p}(\vec{r}, \omega) = \int_S \left[G \frac{\partial \underline{p}}{\partial n} - \underline{p} \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_0 + \int_{V_s} G(\vec{r} | \vec{r}_0) F(\vec{r}_0, \omega) dV_0, \quad (4.11)$$

donde el subíndice 0 indica que las integrales se están realizando respecto a \vec{r}_0 . Como se ha hecho el supuesto de que el medio que rodea al volumen de dispersores es infinito, la integral de superficie puede simplificarse al considerarse, un volumen esférico el cual cumple que $R \rightarrow \infty$, por lo que la contribución de la dispersión en la superficie es mínima, pero si se considera que la presión incide desde ∞ esta será constante en la superficie, por tanto la integral de superficie se considera

²La transformada de Fourier de la presión se denotará como $\underline{p} = \underline{p}(\vec{r}, \omega)$, mientras que la transformada del término fuente se representará como $F = F(\vec{r}, \omega)$.

³Teorema de Green:

$$\int_s \left[A \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial A}{\partial n} \right] ds = \int_v [A \nabla^2 B - B \nabla^2 A] dv, \quad (4.10)$$

donde s es la superficie del volumen v, y n denota la normal a la superficie s.

como el campo de presión incidente [53],

$$\underline{p}(\vec{r}, \omega) = \underline{p}_i + \int_{V_s} G(\vec{r}|\vec{r}_0)F(\vec{r}_0, \omega) dV_0, \quad (4.12)$$

utilizando que $\underline{p} = \underline{p}_i + \underline{p}_s$, se tiene que la presión dispersada se expresa como,

$$\underline{p}_s = \int_{V_s} G(\vec{r}|\vec{r}_0)F(\vec{r}_0, \omega) dV_0, \quad (4.13)$$

$$\underline{p}_s = \int_{V_s} \{ \gamma_\kappa(\vec{r}_0)k^2 \underline{p}(\vec{r}_0) G(\vec{r}|\vec{r}_0) - \nabla \cdot [\gamma_\rho(\vec{r}_0)\nabla \underline{p}] G(\vec{r}|\vec{r}_0) \} dV_0, \quad (4.14)$$

el segundo término de esta integral puede reexpresar utilizando la siguiente propiedad $\nabla \cdot (a\vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla a + a \nabla \cdot \vec{b}$, donde al segundo término de la nueva expresión se le puede aplicar el teorema de Gauss para obtener una integral de superficie, pero dado que la superficie no contiene componentes no homogéneos esta integral será cero, quedando la siguiente expresión para la presión dispersada,

$$\underline{p}_s = \int_{V_s} \{ \gamma_\kappa(\vec{r}_0)k^2 \underline{p}(\vec{r}_0) G(\vec{r}|\vec{r}_0) + \gamma_\rho(\vec{r}_0)[\nabla G(\vec{r}|\vec{r}_0) \cdot \nabla \underline{p}(\vec{r}_0)] \} dV_0, \quad (4.15)$$

como ambos términos de la expresión dependen de \underline{p} , es necesario utilizar aproximaciones para evaluar la presión dispersada.

Una de las aproximaciones que se realiza para este método es considera que la dispersión es débil, lo cual implica que la presión incidente será mayor que la dispersada, por lo que la onda incidente es casi constante a lo largo de su paso por el volumen de dispersión, a esta aproximación de se le conoce como aproximación de Born; dicha consideración permite ignorar la dispersión múltiple que puede ocurrir en el sistema [50].

Otra aproximación que se realiza es considerar que el punto de observación se encuentra suficientemente alejado del volumen de dispersión, lo cual permite utilizar una expresión aproximada para la función de Green [50],

$$\begin{aligned} G(\vec{r}|\vec{r}_0) &= \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}, \\ &\longrightarrow \frac{1}{4\pi r} e^{ik(\vec{r}-\hat{r}\cdot\vec{r}_0)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

cuyo gradiente es

$$\nabla G(\vec{r}|\vec{r}_0) \approx ik \hat{r} G(\vec{r}|\vec{r}_0), \quad (4.17)$$

donde \hat{r} es un vector unitario en la dirección de observación \vec{r} .

Si se considera que la onda incidente es una onda plana, la presión y su gradiente se

expresan como,

$$\underline{p}_i = p_i e^{-ik(\hat{r}_i \cdot \vec{r})}, \quad \nabla \underline{p}_i = ik \underline{p}_i \hat{r}_i. \quad (4.18)$$

Sustituyendo las expresiones para la función de Green y la presión en (4.15), y considerando que el ángulo formado entre la dirección incidente y la de observación es θ_s , el cual se conoce como ángulo de dispersión, se tiene que la presión dispersada es,

$$\underline{p}_s(\vec{r}, \hat{r}_i) = p_i \frac{e^{-ikr} k^2}{4\pi r} \int_{V_s} \{\gamma_\kappa(\vec{r}_0) + \gamma_\rho(\vec{r}_0) \cos \theta_s\} e^{ik\vec{r}_0 \cdot (\hat{r} - \hat{r}_i)} dV_0, \quad (4.19)$$

también se puede definir un vector de dispersión, \vec{k}_s , cuya magnitud esté relacionada con el ángulo de dispersión,

$$\vec{k}_s = k(\hat{r} - \hat{r}_i), \quad |\vec{k}_s| = k_s = 2k \sin \frac{\theta_s}{2}. \quad (4.20)$$

Sustituyendo el vector de dispersión en la presión dispersada, se obtiene,

$$\underline{p}_s(\vec{r}, \vec{k}_s) = p_i \frac{e^{-ikr} k^2}{r} \Theta(\vec{k}_s), \quad (4.21)$$

donde

$$\Theta(\vec{k}_s) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{V_s} \{\gamma_\kappa(\vec{r}_0) + \gamma_\rho(\vec{r}_0) \cos \theta_s\} e^{ik\vec{r}_0 \cdot \vec{k}_s} dV_0, \quad (4.22)$$

describe la distribución angular de la presión dispersada. Estas expresiones describen el campo de presión dispersado por una onda plana que incide sobre un región no homogénea, cuando se consideran la aproximación de Born y un punto de observación lejano.

Si se considera el caso particular de dispersores esféricos, cuyo radio a es menor que la longitud de onda, es decir, $ka \ll 1$, y su compresibilidad y densidad son constantes en el volumen de dispersión, la presión dispersada puede expresarse como [54]:

$$\underline{p}_s(\vec{r}) = p_i \frac{e^{-ikr} k^2}{3r} \{ \langle \gamma_\kappa \rangle + \langle \gamma_\rho \rangle \cos \theta_s \}, \quad (4.23)$$

donde $\langle \gamma_\kappa \rangle$ y $\langle \gamma_\rho \rangle$ son los valores promedios de γ_κ y γ_ρ , respectivamente.

4.2. Sección transversal de dispersión

Una forma de relacionar la teoría de dispersión con la parte experimental, es mediante las secciones transversales. En general, estas se utilizan para vincular mediciones de potencia acústica con la estructura y composición del medio que se está modelando [53].

La sección transversal total acústica (σ_t), se define como la potencia incidente que se pierde debido a las interacciones con el medio, entre la intensidad incidente y es la suma de las secciones transversales de absorción (σ_a) y dispersión (σ_s) [1, 53],

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{W}{I_i}, \\ &= \sigma_a + \sigma_s,\end{aligned}\tag{4.24}$$

la cual posee unidades de área.

De manera análoga se define la sección transversal de dispersión,

$$\sigma_s = \frac{W_s}{I_i}.\tag{4.25}$$

En el caso de la dispersión de Rayleigh, la potencia dispersada es proporcional a la sexta potencia del tamaño del dispersor e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda, es decir [6]:

$$W_s \propto \frac{a^6}{\lambda^4} = a^6 f^4.\tag{4.26}$$

Cuando se coloca un detector de apertura finita lejos del volumen de dispersión, solo se obtiene información sobre una fracción de la potencia total dispersada. Es decir, se obtiene la sección transversal diferencial de dispersión,

$$\sigma_{\text{dis}} = \frac{d\sigma_s}{d\Omega},\tag{4.27}$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido, esta sección relaciona un diferencial de la potencia dispersada, $dW_s = \bar{I}_s dA$, con la intensidad incidente.

Al considerar un dispersor con geométrica esférica, el diferencial de área puede escribirse en términos del ángulo sólido ($r^2 d\Omega$) [53], por lo que la sección transversal diferencial para un dispersor esférico es,

$$\sigma_{\text{dis}} = \frac{\bar{I}_s r^2 d\Omega}{I_i d\Omega} = \frac{\bar{I}_s r^2}{\bar{I}_i},\tag{4.28}$$

lo cual describe como es la distribución angular de la potencia dispersada.

Esta distribución de potencia angular puede ser observada mediante los patrones de

dispersión, los cuales son diagramas polares, donde se aprecia cuáles son las direcciones preferentes en las que ocurre dispersión, por ejemplo, si observan lóbulos en la dirección en la que se propaga la onda incidente se dice que hay dispersión hacia adelante, si por el contrario hay lóbulos en la dirección contraria a la onda incidente se tiene retrodispersión.

Los patrones formados guardan relación con la longitud de la onda incidente y el tamaño de los dispersores. Por ejemplo, cuando la longitud de onda es pequeña en comparación con el diámetro de la esfera, la mayor parte de la onda incidente se refleja como retrodispersión, con poca propagación en la dirección de la onda incidente, por el contrario cuando la longitud de onda es grande, la reflexión se ve disminuida por la interferencia entre las ondas, pero la contribución a la dispersión hacia adelante mejora [51], lo anterior se puede apreciar en la Fig.4.5.

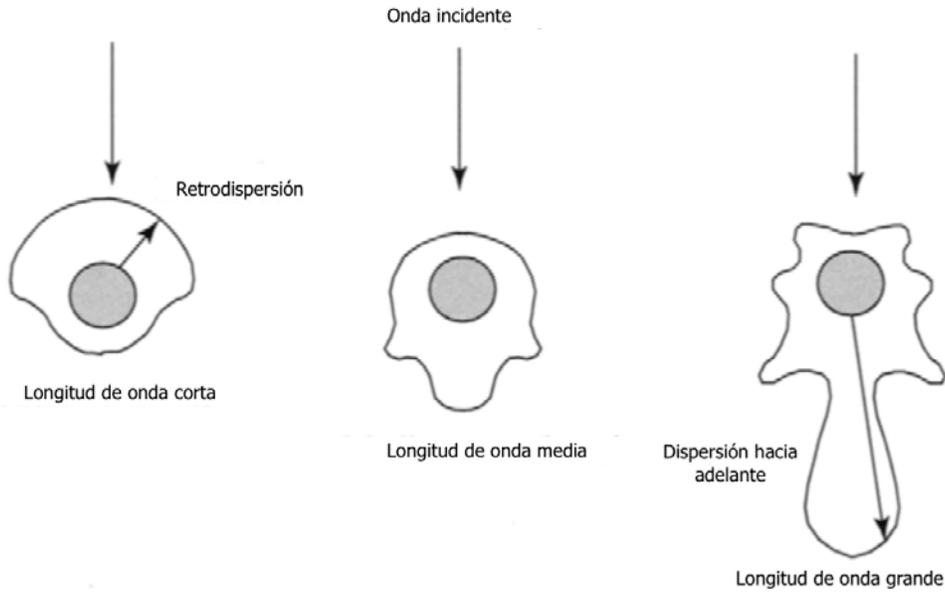


Fig. 4.5: Patrones de dispersión, para distintas relaciones entre la longitud de onda y el tamaño del dispersor. Imagen tomada de [51].

A partir de la sección transversal diferencial de dispersión se puede obtener el valor total de esta, integrando sobre toda la superficie del dispersor, en específico para el caso esférico, cuando la esfera tiene un radio a , la sección transversal total de dispersión es,

$$\sigma_s = \int \sigma_{\text{dis}} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\bar{I}_s a^2}{\bar{I}_i} \sin\theta d\theta d\phi, \quad (4.29)$$

la cual se interpreta como el área normal al haz incidente que intercepta una cantidad de potencia incidente igual a la potencia dispersa [53].

4.3. Presión incidente

Como se mostró anteriormente, el campo de dispersión se encuentra en función de la presión incidente, por lo que es necesario conocerla. En los equipos de ultrasonido, esta presión es generada por un transductor, por ello su valor dependerá de los parámetros de operación, como son la geometría y la frecuencia de emisión del transductor, pero también de las propiedades acústicas del medio.

Para calcular el campo producido se necesitan dos elementos importantes, el primero es la ecuación de onda en la cual se concentra la información sobre las propiedades acústica del medio donde se propaga la onda, y el segundo son las condiciones de frontera, que están relacionadas con cómo es el campo que se produce justo en el fuente, debido a la forma del transductor [3].

Existen dos métodos que permiten obtener la expresión del campo producido por un fuente los cuales son: el método analítico que consiste en resolver la ecuación de onda para las condiciones de frontera de la fuente y el método del espectro angular. El desarrollo de ambos métodos se presentará a continuación, y se partirá de las suposiciones de que la propagación de la onda es lineal y que ocurre en un fluido isotrópico, homogéneo y no viscoso. Además de que la derivación estará en términos del potencial escalar de velocidad el cual cumple con siguientes relaciones:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi(\vec{r}, t), \quad p(\vec{r}, t) = \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}(\vec{r}, t). \quad (4.30)$$

4.3.1. Método analítico

El desarrollo de este método es similar al utilizando para determinar la presión dispersada mediante la función de Green, 4.1.2. Este método parte de definir la ecuación de onda no homogénea, y calcular su transformada de Fourier para obtener la ecuación de Helmholtz,

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = -f(\vec{r}, t), \quad (\nabla^2 + k^2)\Phi = -F(\vec{r}, \omega), \quad (4.31)$$

donde $f(\vec{r}, t)$ representa la distribución espacial de una fuente ⁴.

El problema consiste en determinar la distribución del campo producido por una fuente arbitraria que se encuentra dentro de una superficie S_0 , Fig.4.6

⁴A lo largo del desarrollo se considerará que $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ y que $\Phi = \Phi(\vec{r}, \omega)$

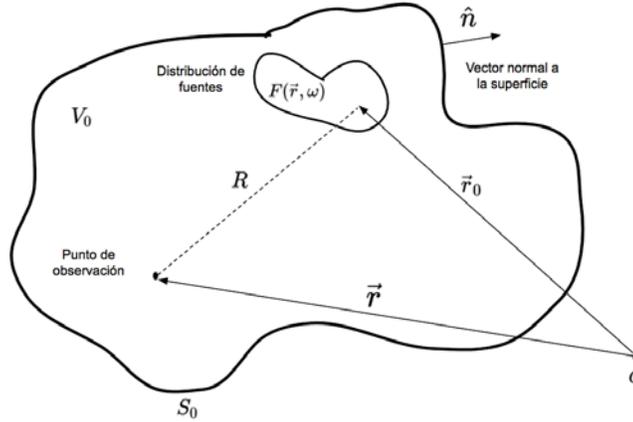


Fig. 4.6: Geometría del sistema analizado para obtener el campo acústico mediante el método analítico [50].

Al utilizar la función de Green se obtiene la siguiente expresión para el potencial de velocidad, la cual es análoga a la expresión (4.11),

$$\Phi(\vec{r}, \omega) = \int_{S_0} \left[G(\vec{r}|\vec{r}_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_0)}{\partial n} \right] dS + \int_{V_0} G(\vec{r}|\vec{r}_0) F(\vec{r}_0, \omega) dV, \quad (4.32)$$

donde la integral de superficie está relacionada con las contribuciones al campo acústico debido a las fuentes que se encuentran en la superficie S_0 , mientras que el término de volumen contiene la contribución al campo debido a las fuentes que se encuentran dentro de S_0 .

Si se considera que las fuentes se encuentran en la superficie, Fig.4.7, la expresión anterior se puede simplificar,

$$\Phi(\vec{r}, \omega) = \int_{S_0} \left[G(\vec{r}|\vec{r}_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_0)}{\partial n} \right] dS, \quad (4.33)$$

donde se obtiene que dada un fuente con forma arbitraria, el potencial puede determinarse a partir de las condiciones de frontera, ya que al estar las fuentes en la superficie esto implica que el comportamiento de la fuente será parte de las condiciones de contorno [3].

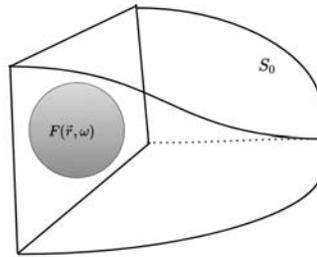


Fig. 4.7: Representación de las fuentes en la superficie S_0 .

Se pueden especificar dos tipos de condiciones de frontera [3]:

- Condición de Dirichlet: en esta condición de frontera se cumple que,

$$[G]_{S_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial n} \right]_{S_0} \neq 0, \quad (4.34)$$

lo cual implica que se debe de conocer el valor de Φ en S_0 . Si se tiene una onda armónica esto equivale a conocer la distribución de presión en la superficie.

- Condición de Neumann: en esta condición se cumple que,

$$[G]_{S_0} \neq 0, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial n} \right]_{S_0} = 0, \quad (4.35)$$

por lo que es necesario conocer $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ en S_0 , de (4.30), se tiene que esto es igual a la velocidad normal, por lo que se necesita conocer la componente normal de la velocidad de partícula, es decir, se necesita conocer qué tan rápido oscila la fuente.

Para encontrar la función de Green que satisfaga las condiciones de frontera tanto de Dirichlet como de Neumann, esta se obtiene mediante el método de imágenes Fig.4.8, de donde se tiene que,

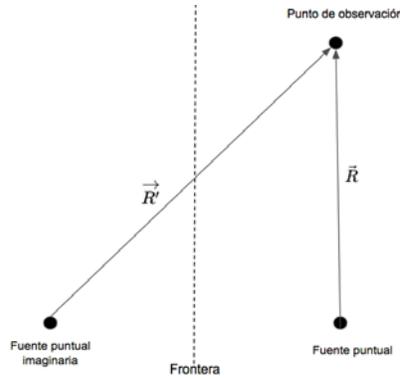


Fig. 4.8: Geometría utilizada para el método de imágenes.

$$G_D = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR'}}{R'} \right), \quad G_N = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{e^{-ikR'}}{R'} \right), \quad (4.36)$$

donde G_D satisface la condición de Dirichlet y G_N la de Neumann. Sustituyendo las condiciones de frontera en (4.33) se obtienen la siguientes dos expresiones:

$$\Phi_D(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \Phi \frac{e^{-ikR}}{R} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \cos(\hat{n}, \hat{R}) dS_0, \quad (4.37)$$

$$\Phi_N(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS_0, \quad (4.38)$$

a las cuales se les conoce como ecuaciones de difracción de Rayleigh-Sommerfeld en el dominio de Fourier. Para expresarlas en el dominio del tiempo se hace uso de la transformada inversa de Fourier obteniendo que,

$$\begin{aligned} \Phi_D(\vec{r}, t) &\approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\hat{n}, \hat{R}) \frac{i\omega\Phi}{c_0 R} e^{-i\omega(t-R/c_0)} d\omega dS_0, \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{P(t-R/c_0)}{\rho_0 c_0 R} \cos(\hat{n}, \hat{R}) dS_0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

y,

$$\begin{aligned} \Phi_N(\vec{r}, t) &\approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-R/c_0)}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\omega dS_0, \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{v_n(t-R/c_0)}{R} dS_0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde $t - R/c_0$ es el tiempo de retardo, que es el tiempo que le toma a la onda llegar a la posición R con una velocidad c_0 desde la fuente. Estas expresiones son válidas cuando se cumple que el punto de observación es tal que $R \gg \lambda/2\pi$ y la superficie donde está la fuente es plana.

La expresión (4.39) se conoce como ecuación de superficie de liberación de presión, mientras que (4.40) se conoce como la integral de Rayleigh la cual implica que se puede conocer el potencial de velocidad en un punto cualquiera si se conoce cómo es la componente normal de la velocidad en el plano de la fuente.

4.3.2. Método del espectro angular

Este método permite derivar el campo acústico producido por una distribución bidimensional de una fuente plana, mediante las suposiciones de que la fuente es monocromática, que la distribución de campo generado está a lo largo del eje $x_3 = z$, además de que las frecuencias espaciales en las direcciones $x_1 = x$ y $x_2 = y$ se expresan como k_1 y k_2 , respectivamente [3].

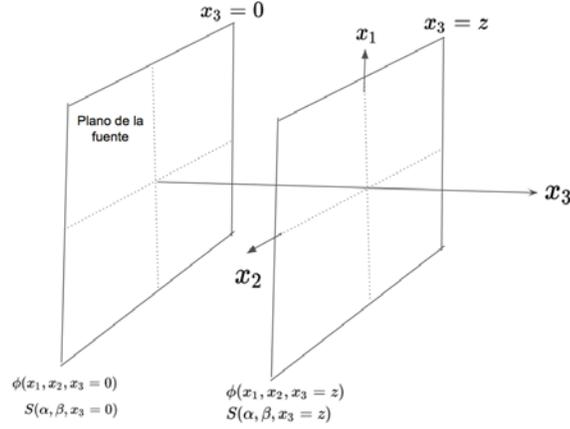


Fig. 4.9: Geometría utilizada para el método del espectro angular.

Para el desarrollo de este método se considera que el potencial de velocidades $\phi(x_1, x_2, x_3 = z)$ es una función que cumple con que exista su transformada de Fourier y por tanto su transformada inversa, de donde se obtiene lo siguiente [55]:

$$\phi(x_1, x_2, x_3 = z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(k_1, k_2, x_3 = z) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{F}(\phi(x_1, x_2, x_3 = z)) = S(k_1, k_2, x_3 = z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, x_2, x_3 = z) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad (4.42)$$

donde a la transformada de Fourier bidimensional se le conoce como densidad espectral.

La interpretación física de las ecuaciones anteriores se obtiene al considerar una onda plana armónica y expresarla en términos de sus cosenos directores, considerando que la dirección de propagación está representada por el vector $\vec{k} = k\hat{k} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + k_3\vec{x}_3$,

$$\psi = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = e^{i\omega t} e^{-ik(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)}, \quad (4.43)$$

donde los cosenos direccionales de la onda son $\alpha = \hat{k} \cdot \hat{x}_1, \beta = \hat{k} \cdot \hat{x}_2$ y $\gamma = \hat{k} \cdot \hat{x}_3$. Como solo se requieren dos ángulos para especificar a un plano $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}$.

Si se analiza el plano de la fuente, $z = 0$, se tiene que:

$$S(\alpha, \beta, x_3 = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, x_2, x_3 = 0) e^{ik(\alpha x_1 + \beta x_2)} dx_1 dx_2, \quad (4.44)$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3 = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, \beta, x_3 = 0) e^{-ik(\alpha x_1 + \beta x_2)} d\alpha d\beta, \quad (4.45)$$

donde al multiplicar (4.45) por la dependencia temporal, se obtiene la expresión de una onda

armónica plana, lo cual indica que hay diferentes contribuciones dependiendo la dirección de propagación de la onda, mientras que el término del espectro angular está asociado con la modulación de la magnitud de la onda. Por lo anterior, el potencial de velocidad puede ser representando por la suma de un número infinito de ondas planas cuyas direcciones tienen una distribución angular sobre el ángulo sólido en el plano de la fuente [3].

Para determinar el potencial de velocidad en un plano $x_3 = z$ en términos del potencial en el plano $x_3 = 0$, se tiene que tomar en cuenta que ambos potenciales deben satisfacer la ecuación de Helmholtz homogénea $(\nabla^2 + k^2)\phi = 0$, por lo que al sustituir $\phi(x_1, x_2, x_3 = z)$ se obtiene que

$$S(\alpha, \beta, x_3 = z) = C_1 e^{-ik\gamma x_3} + C_2 e^{ik\gamma x_3}, \quad (4.46)$$

donde C_1 y C_2 dependen solo de k_1 y k_2 . Si se considera que γ es real, los dos términos de la ecuación anterior representan ondas viajando en la dirección $+x_3$ y $-x_3$. Dado que por condiciones de frontera no hay una onda que se propague en dirección $-x_3$, entonces $C_2 = 0$ y por tanto $C_1 = S(\alpha, \beta, x_3 = 0)$. Por lo que para cualquier distancia x_3 de la fuente se tiene que,

$$S(\alpha, \beta, x_3 = z) = S(\alpha, \beta, x_3 = 0) e^{ik\gamma x_3} = S(\alpha, \beta, x_3 = 0) H(k_1, k_2, x_3 = z), \quad (4.47)$$

$$H(k_1, k_2, x_3 = z) = e^{-i|k_3|z} = e^{-iz\sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}}, \quad (4.48)$$

donde H es la función de transferencia de frecuencias espectrales o también llamada función de propagación, la cual expresa que en el dominio de Fourier el efecto de la propagación de una onda es añadir una fase a S y cumple con que su magnitud es 1.

Con lo anterior el potencial de velocidad en $x_3 = z$, queda definido como [55],

$$\phi(x_1, x_2, x_3 = z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, \beta, x_3 = 0) H(k_1, k_2, x_3 = z) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2, \quad (4.49)$$

lo cual expresa que para calcular el potencial de velocidad a cualquier distancia $x_3 = z$, se tiene que conocer el potencial en la fuente, posteriormente calcular la densidad espectral en el plano de la fuente, multiplicarla por la función de propagación y calcular la transformada inversa de Fourier.

Dispersión de ondas acústicas en un medio viscoso por una esfera viscoelástica

El objetivo de este trabajo es simular la dispersión de ondas de ultrasonido de microesferas viscoelásticas, para ello se plantean dos sistemas para los cuales se desea simular dicha dispersión. El primero de ellos consiste en una esfera viscoelástica, Fig.5.1 y el segundo es una esfera viscoelástica con coraza también viscoelástica, Fig.5.2, ambas esferas rodeadas de un fluido viscoso. Como se mencionó anteriormente en la Sección 4.1, existen dos métodos para calcular la presión dispersada, el método que se empleará para dichos sistemas es el de condiciones de frontera.

Las suposiciones que se realizan para estos sistemas es que el fluido además de ser viscoso es incompresible, y que los materiales viscoelásticos son homogéneos, isotrópicos y lineales. Además de considerar una onda incidente la cual cumple con ser armónica, monocromática con frecuencia ω , plana, con una propagación adiabática y amplitud pequeña. Asimismo, debido a la geometría se considera simetría azimutal, por lo que la descripción solo será en las coordenadas (r, θ) .

5.1. Dispersión de ondas acústicas en una esfera viscoelástica

El procedimiento que se utiliza para obtener la presión dispersada consiste en plantear las ecuaciones de onda para los potenciales de velocidad y desplazamiento, para el fluido y el sólido, respectivamente. Para ello se hace uso del teorema de descomposición de Helmholtz, el cual permite describir el campo de velocidades y de desplazamiento mediante potenciales escalares y vectoriales, los cuales se asocian a las componentes longitudinales y transversales, planteadas en el Capítulo 3.

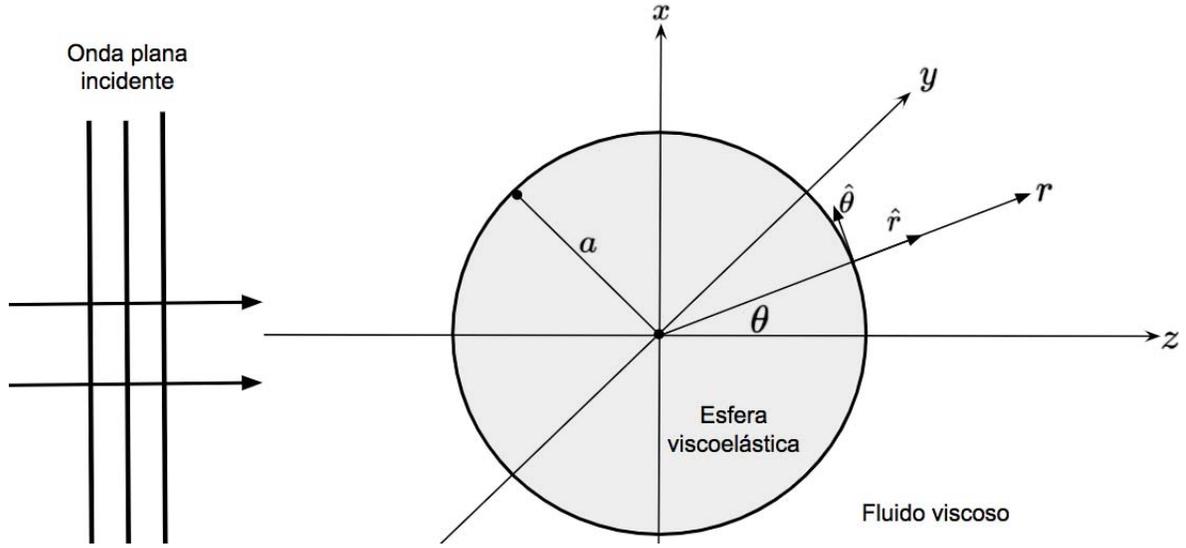


Fig. 5.1: Diagrama esfera viscoelástica rodeada de un fluido viscoso.

Por el teorema de descomposición de Helmholtz se tiene que el vector de velocidad de partícula para el fluido se expresa como:

$$\vec{v} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi}, \quad (5.1)$$

donde dicha expresión está relacionada con (3.12), por lo que se tiene que:

$$\vec{v}_L = -\nabla\phi, \quad \vec{v}_T = \nabla \times \vec{\psi}, \quad (5.2)$$

representan las componentes longitudinal y transversal del vector de velocidad del fluido.

Aplicando (5.2) a las ecuaciones de onda longitudinal (3.15) y transversal (3.16), se obtiene que,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left[c^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3}\mu + \mu_b \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^2 \phi, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\psi}, \quad (5.4)$$

son las expresiones para la ecuación de onda en términos del potencial escalar y vectorial, respectivamente, las cuales se pueden reexpresar en el espacio de frecuencias como:

$$(\nabla^2 + k_c^2) \phi(\mathbf{r}, \theta, \omega) = 0, \quad (\nabla^2 + k_s^2) \vec{\psi}(\mathbf{r}, \theta, \omega) = 0, \quad (5.5)$$

donde k_c y k_s son los vectores de onda complejos para la onda longitudinal (compresional) y de corte (shear) para un fluido viscoso, respectivamente, y tienen la siguiente forma:

$$k_c = \frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{\omega \mu}{2\rho c^2} \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_b}{\mu} \right) \right), \quad (5.6)$$

$$k_s = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \rho}{2\mu}}. \quad (5.7)$$

En cuanto al sólido viscoelástico, utilizando el teorema de descomposición de Helmholtz se tiene que el vector de desplazamiento se expresa como:

$$\vec{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \vec{\Psi}. \quad (5.8)$$

donde dicha expresión está relacionada con (3.20), por lo que se tiene que:

$$\vec{u}_l = -\nabla \Phi, \quad \vec{u}_t = \nabla \times \vec{\Psi}, \quad (5.9)$$

representan las componentes longitudinal y transversal del vector de desplazamiento del sólido.

Al sustituir (5.9) en las ecuaciones de onda longitudinal (3.21) y transversal (3.22) para un sólido viscoelástico se tiene que:

$$\rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = (\lambda^* + 2\mu^*) \nabla^2 \Phi, \quad (5.10)$$

$$\rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\Psi} = \mu^* \nabla^2 \vec{\Psi}, \quad (5.11)$$

son las expresiones para la ecuación de onda en términos del potencial escalar y vectorial. Las cuales expresadas en el espacio de las frecuencias tienen la siguiente forma,

$$(\nabla^2 + K_c^{*2}) \Phi(\mathbf{r}, \theta, \omega) = 0, \quad (\nabla^2 + K_s^{*2}) \vec{\Psi}(\mathbf{r}, \theta, \omega) = 0, \quad (5.12)$$

donde K_c^* y K_s^* son los vectores de onda complejos para la onda longitudinal (compresional) y de corte (shear) para un sólido viscoelástico respectivamente, y sus expresiones son las siguientes:

$$K_c^* = \frac{\omega}{\sqrt{[\lambda^*(\omega) + 2\mu^*(\omega)]/\rho_s}}, \quad (5.13)$$

$$K_s^* = \frac{\omega}{\sqrt{\mu^*(\omega)/\rho_s}}, \quad (5.14)$$

donde λ^* y $\mu^*(\omega)$ son las constantes de Lamé complejas las cuales se pueden expresar en términos del módulo dinámico de corte, cuya expresión dependerá del modelo viscoelástico empleado,

$$\lambda^*(\omega) = \frac{2\nu}{(1-2\nu)}G^*(\omega), \quad \mu^*(\omega) = G^*(\omega). \quad (5.15)$$

Dado que para este problema se considera una onda plana incidente, su expresión en coordenadas esféricas está dada de la siguiente forma:

$$\phi_{\text{inc}}(r, \theta) = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(k_c r) P_n(\cos \theta). \quad (5.16)$$

donde ϕ_0 es la amplitud, j_n son las funciones de Bessel de primera especie y P_n son los polinomios de Legendre.

A partir de las ecuaciones de onda definidas y expresando sus soluciones en coordenadas esféricas, se tiene que los potenciales de velocidad para un fluido no acotado son:

$$\phi_c(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n A_n h_n^{(1)}(k_c r) P_n(\cos \theta), \quad (5.17)$$

$$\psi(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) i^n B_n h_n^{(1)}(k_s r) P_n'(\cos \theta), \quad (5.18)$$

donde $P_n' = \left(\frac{d}{d\theta}\right) P_n$, $h_n^{(1)}$ son las funciones de Hankel esféricas de primera especie, A_n y B_n son coeficientes a determinar mediante condiciones de frontera.

Para el caso del sólido viscoelástico los potenciales pueden expresarse como:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n C_n j_n(K_c^* r) P_n(\cos \theta), \quad (5.19)$$

$$\Psi(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) i^n D_n j_n(K_s^* r) P_n'(\cos \theta), \quad (5.20)$$

donde C_n y D_n son coeficientes a determinar mediante condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera que se deben satisfacer para este sistema son:

- Continuidad en las componentes de las velocidades a ambos lados de la interfase, es decir,

$$v_r(r, \theta, \omega)]_{r=a} = -i\omega u_r(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad v_\theta(r, \theta, \omega)]_{r=a} = -i\omega u_\theta(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad (5.21)$$

lo cual asegura que exista un contacto entre el fluido y el sólido.

- Continuidad en las componentes del tensor de esfuerzos, es decir,

$$T_{rr}(r, \theta, \omega)]_{r=a} = T_{rr}^s(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad T_{r\theta}(r, \theta, \omega)]_{r=a} = T_{r\theta}^s(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad (5.22)$$

donde el superíndice s indica que es la componente del sólido. Esta condición asegura que no se tiene fuentes en la frontera.

Las componentes de las condiciones de frontera se encuentran en función de los potenciales descritos anteriormente, las expresiones en coordenadas esféricas para el vector de desplazamiento, velocidad de partícula y el tensor de esfuerzos se describen en el Apéndice A.4. Al sustituir (5.16-5.20) en (A.22-A.26), y evaluar las condiciones de frontera, se genera un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (A_n , B_n , C_n y D_n), las cuales se encuentran explícitamente en el Apéndice A.5, al resolver el sistema se obtiene los valores de los coeficientes.

La expresión para la presión dispersada se encuentra a partir de (A.25), de donde se tiene que p_s es:

$$p_s = -i\omega\rho\phi_c(r, \theta, \omega) + k_c^2 \left(\mu_b + \frac{4}{3}\mu \right) \phi_c(r, \theta, \omega), \quad (5.23)$$

la cual se encuentra solo en función del coeficiente A_n .

5.2. Dispersión de ondas acústicas en una esfera elástica con coraza viscoelástica

En el caso de una esfera viscoelástica con coraza, el planteamiento para el fluido viscoso y el material viscoelástico es análogo al del sistema anterior, la diferencia radica en el número de potenciales que se deben definir, así como las condiciones de frontera.

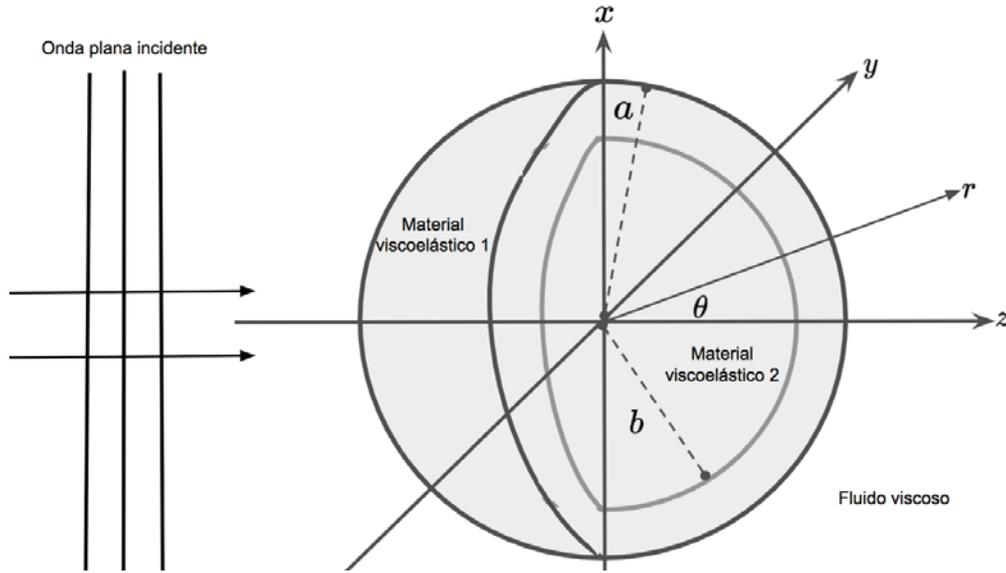


Fig. 5.2: Diagrama esfera viscoelástica con coraza viscoelástica rodeada de un fluido viscoso.

La onda incidente armónica plana tiene la misma expresión que (5.16), en el caso de las ondas en el fluido éstas son iguales a (5.17) y (5.18) ya que se considera un fluido no acotado.

Para los potenciales en el sólido viscoelástico se plantean dos para la coraza y dos para el núcleo. Los potenciales de la coraza son los siguientes:

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n [C_n h_n^{(1)}(K_{c1}^* r) + D_n h_n^{(2)}(K_{c1}^* r)] P_n(\cos \theta), \quad (5.24)$$

$$\Psi_1(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n [E_n h_n^{(1)}(K_{s1}^* r) + F_n h_n^{(2)}(K_{s1}^* r)] P_n'(\cos \theta), \quad (5.25)$$

donde $h_n^{(2)}$ son las funciones esféricas de Bessel de segunda especie y el subíndice uno indica que describen al medio 1 (coraza).

En el caso del núcleo, como se requiere que el potencial esté definido para cualquier punto solo se utilizan las función de primera especie de Bessel, es decir, eliminando n_n se evita una singularidad en el centro de la esfera,

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n G_n j_n(K_{c2}^* r) P_n(\cos \theta), \quad (5.26)$$

$$\Psi_2(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n Q_n j_n(K_{s2}^* r) P_n'(\cos \theta), \quad (5.27)$$

donde el subíndice dos se refiere a que se está describiendo al medio 2 (núcleo).

Las condiciones de frontera que deben mantenerse en las interfaces del material, fluido-coraza y coraza-núcleo son:

- Continuidad de las velocidades, es decir,

Fluido – Coraza

Coraza – Núcleo

$$v_r(r, \theta, \omega)]_{r=a} = -i\omega u_r^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad u_r^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = u_r^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}, \quad (5.28)$$

$$v_\theta(r, \theta, \omega)]_{r=a} = -i\omega u_\theta^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad u_\theta^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = u_\theta^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}. \quad (5.29)$$

- Continuidad en las componentes del tensor de esfuerzo, es decir,

Fluido – Coraza

Coraza – Núcleo

$$T_{rr}(r, \theta, \omega)]_{r=a} = T_{rr}^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad T_{rr}^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = T_{rr}^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}, \quad (5.30)$$

$$T_{r\theta}(r, \theta, \omega)]_{r=a} = T_{r\theta}^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=a}, \quad T_{r\theta}^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = T_{r\theta}^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}. \quad (5.31)$$

En procedimiento final es análogo al del arreglo anterior, sustituyendo los potenciales en (A.22-A.26) y evaluando las condiciones de frontera se obtiene un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas ($A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n$ y Q_n), las cuales se encuentran explícitamente en el Apéndice A.6, para obtener los valores de los coeficientes se debe resolver el sistema de ecuaciones. De igual forma la expresión para la presión dispersada está descrita por (5.23).

Siguiendo el procedimiento planteado anteriormente se puede realizar una generalización del problema para considerar una esfera con múltiples capas al aplicar condiciones de frontera para cada capa y resolver el sistema de ecuaciones.

Resultados: Implementación y validación

Se desarrollaron códigos computacionales que permiten calcular la presión dispersada por el método de condiciones de frontera para los dos sistemas mencionados en el Capítulo 5, dichos programas se realizaron en dos lenguajes de programación, lo cuales fueron MATLAB y Python.

Para los programas desarrollados en MATLAB tanto para la esfera viscoelástica como para la esfera con coraza, el método que se utilizó para la solución del sistema de ecuaciones fue el de determinantes, mientras que para los códigos de Python se utilizó la función "*linsolve*".

En ambos códigos se hizo uso de las funciones especiales de Bessel, Hankel y Legendre, ya predeterminadas de MATLAB y Python, en el caso en el que las derivadas de primer y segundo orden de Bessel y Hankel, no estuvieran definidas, se crearon funciones que las calcularan utilizando las expresiones (10.1.22) de [56] y la expresión en [57].

En cuanto a la forma de la expresión de la presión dispersada se consideró que la detección se realiza en campo lejano, es decir, para $k_c r \rightarrow \infty$. Por lo que, se puede utilizar una aproximación para la función de Hankel en (5.23), de acuerdo con (11.160a) de [58], por ello la presión dispersada toma la siguiente forma,

$$p_s = \frac{\phi_0}{k_c r_\infty} \left[\left(\frac{4\mu}{3} + \mu_b \right) k_c^2 - i\omega\rho \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} (2n+1) A_n P_n(\cos\theta) e^{i(k_c r_\infty - \pi/2)}. \quad (6.1)$$

Para la validación de los códigos realizados se buscó replicar los patrones de presión dispersada presentados por Hasheminejad S. y Harsini B. (2003) [12], para la esfera viscoelástica; mientras que para la esfera con coraza se pretendió reproducir los patrones reportados por Hasheminejad S. y Safari N. (2005) [16], donde para ambos sistemas los materiales viscoelásticos se describen mediante el modelo de Havriliak-Negami. En dichos artículos se plantea la condición de que a campo lejano $r_\infty = 10a$ y que $\phi_0 = 1$, por lo que la expresión de la presión utilizada es la siguiente:

$$P_s = \frac{1}{10k_c a} \left[\left(\frac{4\mu}{3} + \mu_b \right) k_c^2 - i\omega\rho \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} (2n+1) A_n P_n(\cos\theta) e^{i(10k_c a - \pi/2)}. \quad (6.2)$$

En los códigos desarrollados se implementaron las ecuaciones (5.6), (5.7), (5.13), (5.14), (5.15), (6.2), (A.21) y (A.27-A.38).

6.1. Implementación

Para el sistema de la esfera viscoelástica, rodeada de un fluido viscoso, Hasheminejad, S. y Harsini, B. (2003), consideraron una esfera con un radio de $5 \times 10^{-4} \text{m}$, la cual estaba formada por un polímero, a los polímeros que utilizaron los nombraron como 18, 19 y 20 y cuyos parámetros para el modelo de Havriliak-Negami se encuentran en la Tabla. 6.1. Mientras que para el fluido viscoso utilizaron glicerina, cuyos parámetros se describe en la Tabla. 6.2. Además, consideraron que la onda incidente podía tener alguna de las frecuencias mostradas en la Tabla 6.3.

Parámetros	Polímero 18	Polímero 19	Polímero 20
G_0 [N/m ²]	3.372×10^6	5.019×10^6	12.71×10^6
G_∞ [N/m ²]	1.453×10^9	0.8089×10^9	1.678×10^9
ρ_s [kg/m ³]	1.101×10^3	1.096×10^3	1.1339×10^3
τ [s]	3.139×10^{-9}	1.702×10^{-1}	7.764×10^{-9}
α	0.4822	0.4941	0.2609
β	0.4116	0.1356	0.1973
ν	0.4	0.4	0.4

Tabla 6.1: Parámetros para el modelo de Havriliak-Negami, [59].

Parámetros	Valor numérico
μ [kg/ms]	0.95
μ_b [kg/ms]	0.95
c [m/s]	1.91×10^3
ρ [kg/m ³]	1250

Tabla 6.2: Parámetros para la glicerina [12].

ka	Frecuencia angular (ω) [rad/s]	Frecuencia [Hz]
0.1	3.82×10^5	6.08×10^4
1	3.82×10^6	6.08×10^5
4	1.53×10^7	2.43×10^6
10	3.82×10^7	6.08×10^6

Tabla 6.3: Frecuencias utilizadas para la esfera viscoelástica y esfera con coraza.

De estas frecuencias planteadas, se tiene que las frecuencias adimensionales $ka = 0.1$ y 1 , se encuentran en el rango de dispersión Rayleigh, por lo que se espera que los patrones sean

uniformes; mientras que para $ka = 10$, la longitud de onda es mayor que el tamaño del dispersor pero no lo suficiente como para que se observe reflexión especular, por lo que se tendrá dispersión de Mie, con lo cual se espera que los patrones tenga una mayor contribución en dispersión hacia adelante, esto de acuerdo a lo planteado en el Capítulo 4.

En el caso del sistema esfera-coraza-fluido, Hasheminejad S. y Safari N. (2005), consideraron esferas con un radio externo $a = 5 \times 10^{-4} \text{m}$ y cuyo radio interno, b , podía estar expresado por algunas de las siguientes razones $b/a = 1, 0.9, 0.5$ o 0.2 . Además, plantearon que la esfera interna estaba formada de acero, cuyas propiedades elásticas están descritas en la Tabla.6.4, mientras que la coraza estaba compuesta de un polímero, el cual puede ser el 18 o 19, mencionados anteriormente. Para este sistema la onda incidente podía tener frecuencia $ka = 0.1, 1$ o 10 .

Parámetros	Valor numérico
$G \text{ [N/m}^2\text{]}$	8.077×10^{10}
ν	0.2999
$\rho \text{ [kg/m}^3\text{]}$	7850

Tabla 6.4: Parámetros para el acero [60].

Para la obtención de los diagramas de dispersión en ambos sistemas, se calculó la presión dispersada en un rango de ángulos de 0 a 2π , (6.2), mientras que para el número de términos de la suma presente en la expresión de la presión dispersada, se consideraron 50 términos para la esfera elástica y 40 para la esfera con coraza.

Un aspecto importante de mencionar, acerca de los polímeros empleados es que en el rango de frecuencias analizado el polímero 18 tiene un mayor factor de pérdida, por lo que es un material que disipa mayor energía, mientras que el polímero 19, es el que tiene el menor factor de pérdida, Fig.6.1, lo cual se espera que genere una diferencia notable en los patrones de dispersión obtenidos para ambos polímeros.

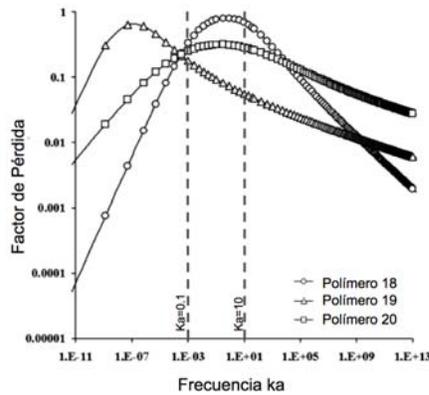


Fig. 6.1: Factor de Pérdida, $G''(\omega)/G'(\omega) = \text{Módulo de pérdida/Módulo de almacenamiento}$ para los polímeros utilizados, empleando los datos de la Tabla 6.1. Imagen tomada de [12].

6.2. Validación

A continuación, se muestran los diagramas de dispersión, obtenidos tanto para la esfera viscoelástica como para la esfera con coraza, dadas las características planteadas por Hasheminejad, S. y Harsini, B. (2003), y, Hasheminejad S. y Safari N. (2005), respectivamente. En el primero de los casos se obtuvieron los mismos diagramas tanto para el programa realizado en MATLAB como en Python, por lo que en esta sección solo se mostrarán las imágenes obtenidas en MATLAB, mientras que las de Python se podrán consultar en el Apéndice A.7. Para el caso de las esferas de acero rodeadas de un coraza viscoelástica, no todas las formas obtenidas en MATLAB coincidieron con lo reportado en la literatura, debido a esto fue que se planteó la posibilidad de que se estuviera teniendo algún error de programación, por lo que se optó por desarrollar los programas en otro lenguaje de programación (Python) con la finalidad de no generar el mismo error, dado que no se tiene conocimiento sobre cuál podría ser el posible error.

Del programa desarrollado en Python se obtuvo que los patrones de dispersión simulados sí coinciden con lo reportado en la literatura. Por lo anterior, en esta sección solo se analizarán los patrones de dispersión obtenidos de Python, en tanto que los patrones de MATLAB se encuentran en el Apéndice A.8.

En las Fig. 6.2 y 6.3, se muestran los patrones reportados en la literatura y con los cuales se validó este proyecto.

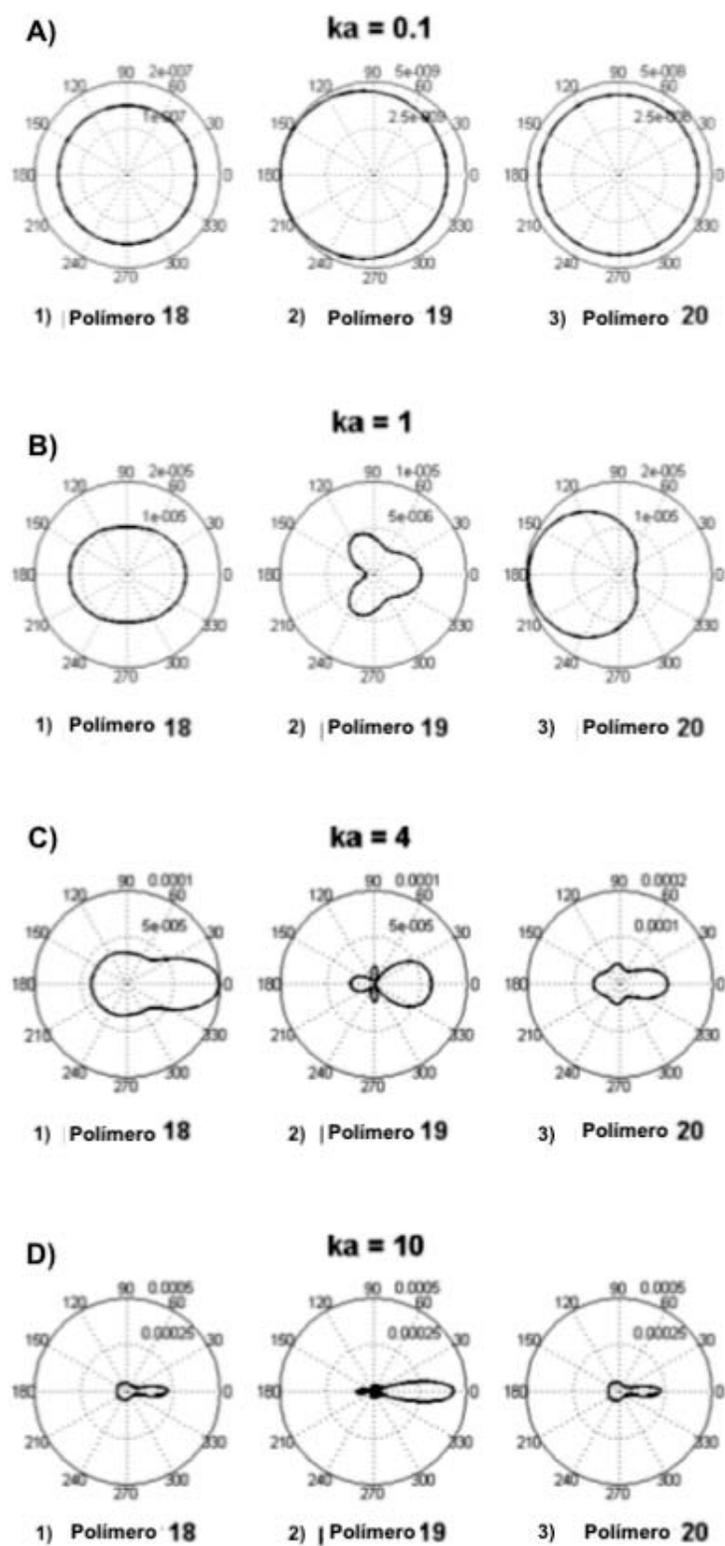


Fig. 6.2: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, evaluada a campo lejano, para esferas de polímero 18, 19 y 20 inmersas en glicerina; a frecuencias A) $ka = 0.1$, B) $ka = 1$, C) $ka = 4$ y D) $ka = 10$. Imagen tomada de [12].

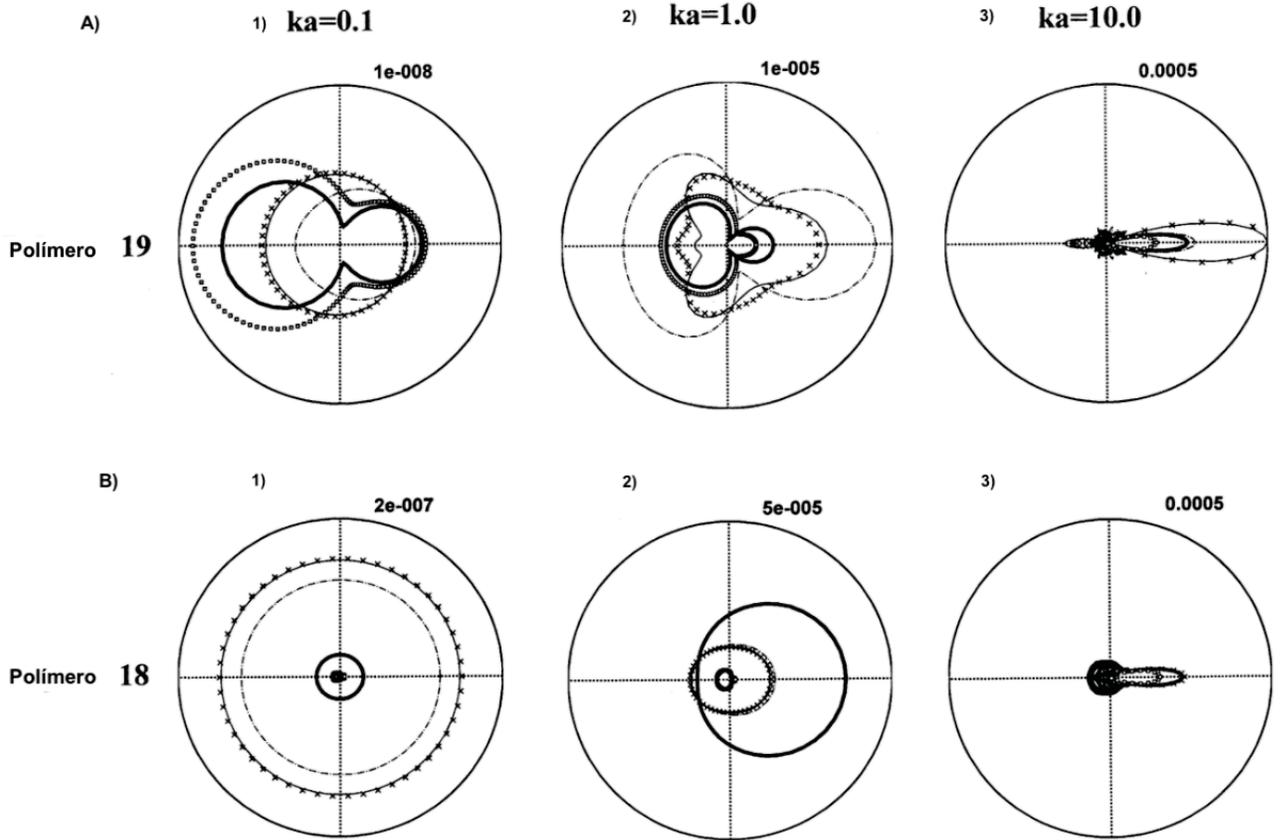


Fig. 6.3: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, evaluada a campo lejano, para esferas de polímero A) 19 y B) 18 inmersas en glicerina, para frecuencias y espesores de recubrimiento seleccionados. [\square $b/a = 1$ (esfera de acero); — $b/a = 0.9$; - - - $b/a = 0.5$; - · - · $b/a = 0.2$; \times $b/a = 0$ (esfera de polímero)]. Imagen tomada de [16].

6.2.1. Esfera viscoelástica

Los patrones de directividad presentados en las Fig. 6.4, 6.5 y 6.6, corresponden a la presión dispersada por una esfera compuesta de polímero 18, 19 y 20, respectivamente, donde para cada polímero se hizo incidir sobre la esfera una onda con cuatro frecuencias diferentes, $ka = 0.1, 1, 4$ y 10 . Dichos patrones fueron comparados con los encontrados en [12], de donde se obtuvo que en general, los patrones presentan el mismo comportamiento a excepción del caso para el polímero 19 y la frecuencia adimensional $ka = 1$, Fig. 6.5b), el cual es el único que no concuerda con lo encontrado en la literatura, Fig. 6.2B.2).

Debido a que se obtuvo el mismo patrón para el programa realizado en Python, Fig. A.2b), y que los demás patrones sí coinciden con lo reportado por Hasheminejad S. y Harsini B. (2003), es posible descartar que esto se deba a un error de programación y se plantea como posibilidad que esté relacionado con los valores utilizados en el cálculo numérico, ya que se observó que para una viscosidad de corte, μ , y volumétrica, μ_b , de 1.49 kg/ms se obtiene un patrón similar al encontrado en la literatura pero orientado en dirección opuesta.

De los patrones obtenidos es interesante analizar la direccionalidad de las ondas dispersadas

a medida que se varía la frecuencia. En la Fig. 6.4 se puede observar que conforme se aumenta la frecuencia, los patrones de dispersión comienzan a direccionarse, encontrándose una tendencia a presentar dispersión hacia adelante, mientras que en las otras direcciones se mantiene uniforme. Este efecto está relacionado con que a mayor frecuencia, menor es la longitud de onda, por lo que para altas frecuencias se observa que el tamaño del dispersor es aproximadamente igual a la longitud de la onda incidente, lo cual es una condición para que se presente dispersión de Mie, cuya característica es exhibir una mayor contribución en la dispersión en la dirección hacia adelante.

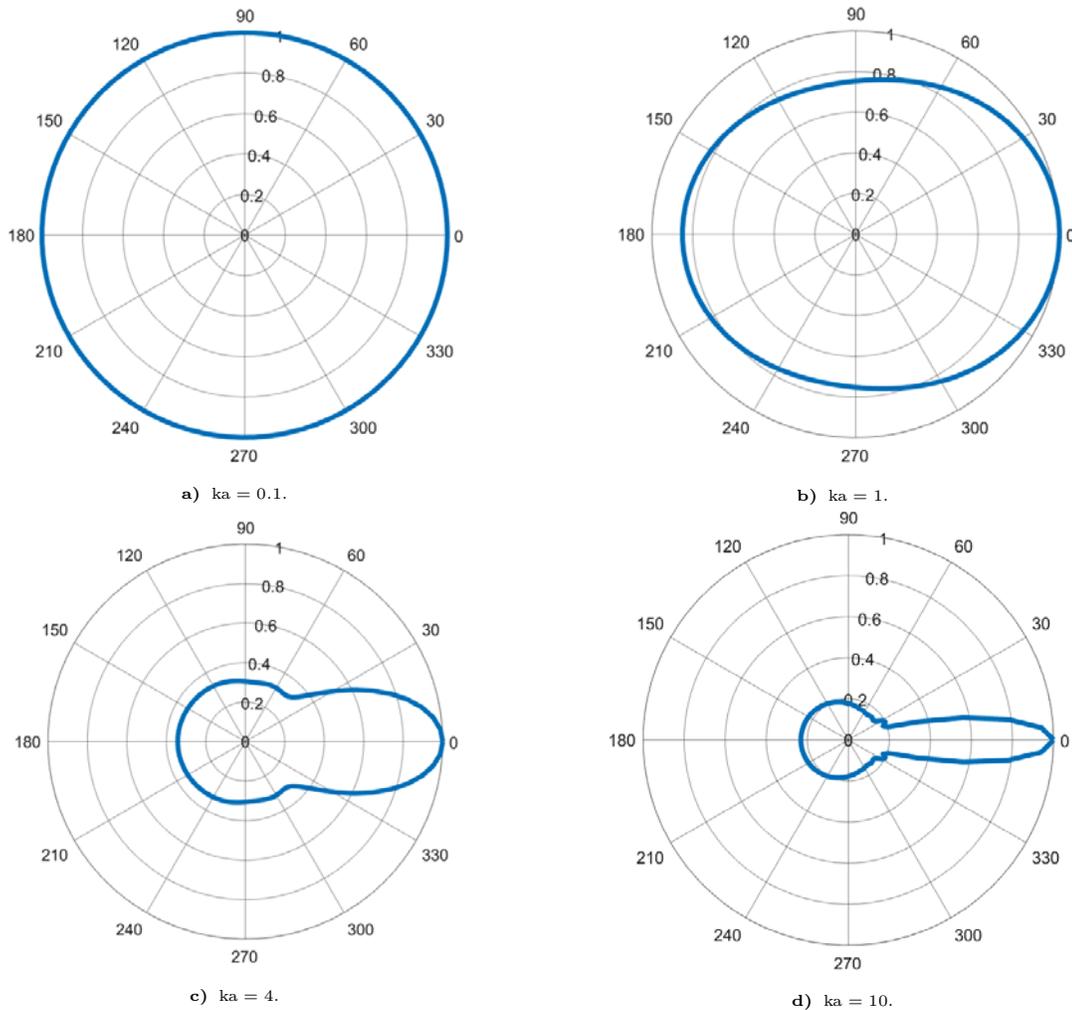


Fig. 6.4: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de polímero 18 inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$, c) $ka = 4$ y d) $ka = 10$, obtenidos en MATLAB.

Para el polímero 19, Fig. 6.5 se presenta la misma predisposición de los patrones a direccionarse hacia adelante conforme se aumenta la frecuencia de la onda incidente. Además de que estos patrones tienen la característica de ser más direccionados que los del polímero 18, lo cual está relacionado con el hecho de que el polímero 19 tiene un factor de pérdida menor que el polímero 18, Fig. 6.1, lo que genera que los patrones para el polímero 19 no sean tan uniformes

como los del caso anterior, ya que existe un menor amortiguamiento de las ondas, por lo que se dispone de mayor energía para la dispersión de ellas.

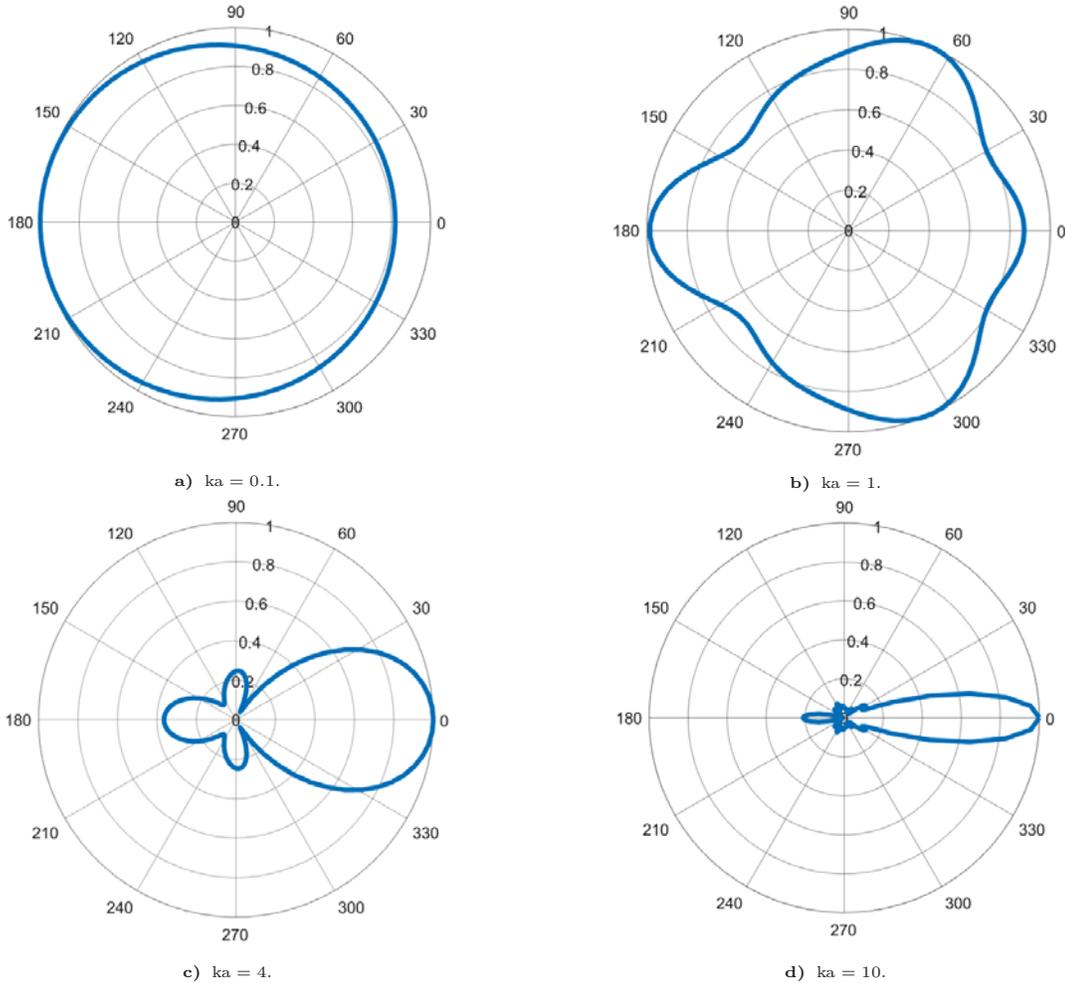


Fig. 6.5: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de polímero 19 inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$, c) $ka = 4$ y d) $ka = 10$, obtenidos en MATLAB.

Por último, para el polímero 20, Fig. 6.5, de igual forma se presenta una tendencia a formarse patrones direccionados conforme se aumenta la frecuencia, siendo dominante la dispersión hacia enfrente comparada con la retrodispersión. En el caso de la frecuencia $ka = 1$, Fig. 6.6b), se observa que se tiene el caso de una dispersión casi nula en la dirección hacia enfrente, comportamiento que no se había observado para los casos anteriores, lo cual implica que hay una interferencia destructiva entre las ondas dispersadas y la onda incidente, en dicha región por ello su contribución disminuye.

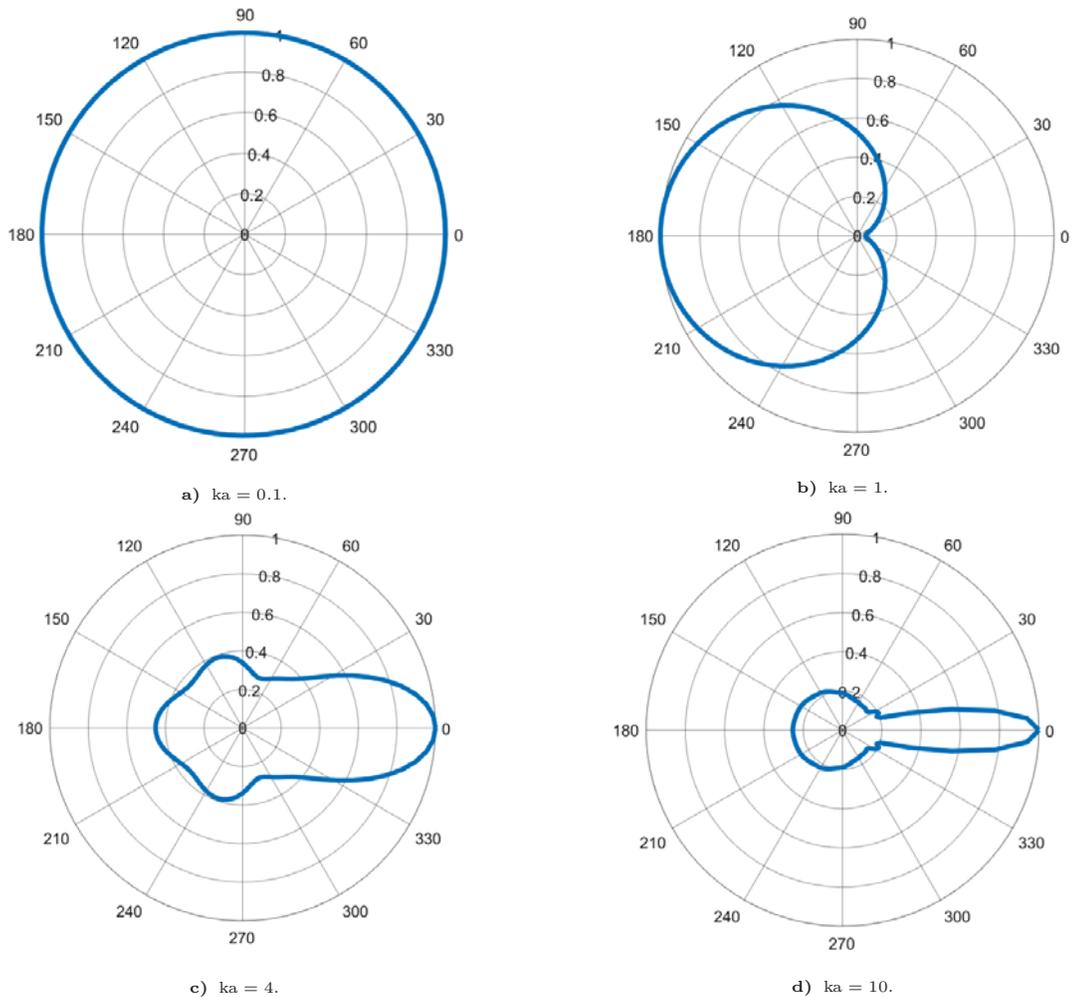


Fig. 6.6: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de polímero 20 inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$, c) $ka = 4$ y d) $ka = 10$, obtenidos en MATLAB.

Al comparar los patrones generados por las esferas de polímeros 18, 19 y 20, se observa que a bajas frecuencias, es decir, $ka = 0.1$, los patrones de dispersión son similares lo cual coincide con que para dicha frecuencia estos polímeros tiene el mismo factor de pérdida, Fig. 6.1, por lo tanto se tiene la misma absorción de energía acústica para los tres materiales. Además de que a bajas frecuencias, la longitud de la onda incidente es mayor que el tamaño del dispersor por lo que la uniformidad de los patrones obtenidos está relacionada con la dispersión de Rayleigh.

Mientras que a frecuencias altas, $ka = 10$, el factor de pérdida del polímero 20 es más cercano al del polímero 18, por lo que se esperaba que sus patrones fueran similares y que presentaran un comportamiento relacionado con la dispersión de Mie, lo cual al comparar Fig. 6.4d) y 6.6d), se observa que se cumple.

6.2.2. Esfera con coraza

En las Fig. 6.7, 6.8 y 6.9, se encuentran los patrones de directividad de una esfera de acero recubierta de polímero 18, al utilizar las frecuencias $ka = 0.1, 1$ y 10 , respectivamente, donde en cada caso se evaluaron tres diferentes espesores de recubrimiento. Mientras que las Fig. 6.10, 6.11 y 6.12, se presentan los patrones de dispersión para una esfera de acero rodeada de una coraza de polímero 19, al incidir sobre ella ondas con frecuencias de $ka = 0.1, 1$ y 10 , respectivamente, para cada frecuencia se evaluaron diferentes relaciones entre el tamaño de la coraza y la esfera. Por otro lado, en la Fig. 6.13, se muestra la presión dispersada por una esfera de acero, para las frecuencias $ka = 0.1, 1$ y 10 .

Para el caso de las esferas elásticas con coraza viscoelástica inmersas en glicerina, al comparar los patrones obtenidos con los reportados en [16], no en todos se logra tener la certeza que de los resultados replicados concuerden, esto debido a la forma en que son reportados los resultados por Hasheminejad S. y Safari N. (2005) [16], dado que en sus diagramas, ellos superponen todos los patrones obtenidos para los diferentes espesores dado un polímero y una frecuencia, y en el caso de frecuencias altas al estar estos superpuestos y los patrones ser muy similares no se logra distinguir con claridad la forma de cada patrón.

Sin embargo, al observar la forma general de dichos patrones y compararla con los resultados obtenidos mediante los programas de MATLAB y Python, se tiene que sí siguen dicha distribución, por lo que en general, es posible decir que los patrones presentan el comportamiento esperado, con la excepción de que para el polímero 19 a una frecuencia adimensional de 1 y una razón entre los radios de $b/a = 0.5$, Fig. 6.11b), el patrón de directividad no coincide con el encontrado en la literatura, Fig. 6.3 A.2), al igual que el caso de la esfera viscoelástica de polímero 19 para $ka = 1$, no se considera que esto se deba a un error de programación ya que el mismo patrón se obtuvo para el programa de Matlab, Fig. A.8b), además de que las otras figuras presentadas sí coincide con lo reportado por Hasheminejad S. y Safari N. (2005) [16], de igual forma al utilizar una viscosidad de corte y volumétrica para la glicerina de 1.49 kg/ms , la forma del patrón se asemeja más a lo esperado, por lo que se plantea que se trata de una diferencia en los valores utilizados para la generación de ese patrón y que no son mencionados en el artículo de referencia.

Cuando se considera un recubrimiento de polímero 18, para la esfera de acero y se varía su espesor, para una frecuencia de onda incidente de $ka = 0.1$, Fig. 6.7, se observa que los patrones de dispersión no se ven afectados por la variación de los espesores del material y presentan un patrón de dispersión homogéneo, es decir, sin ninguna dirección preferencial.

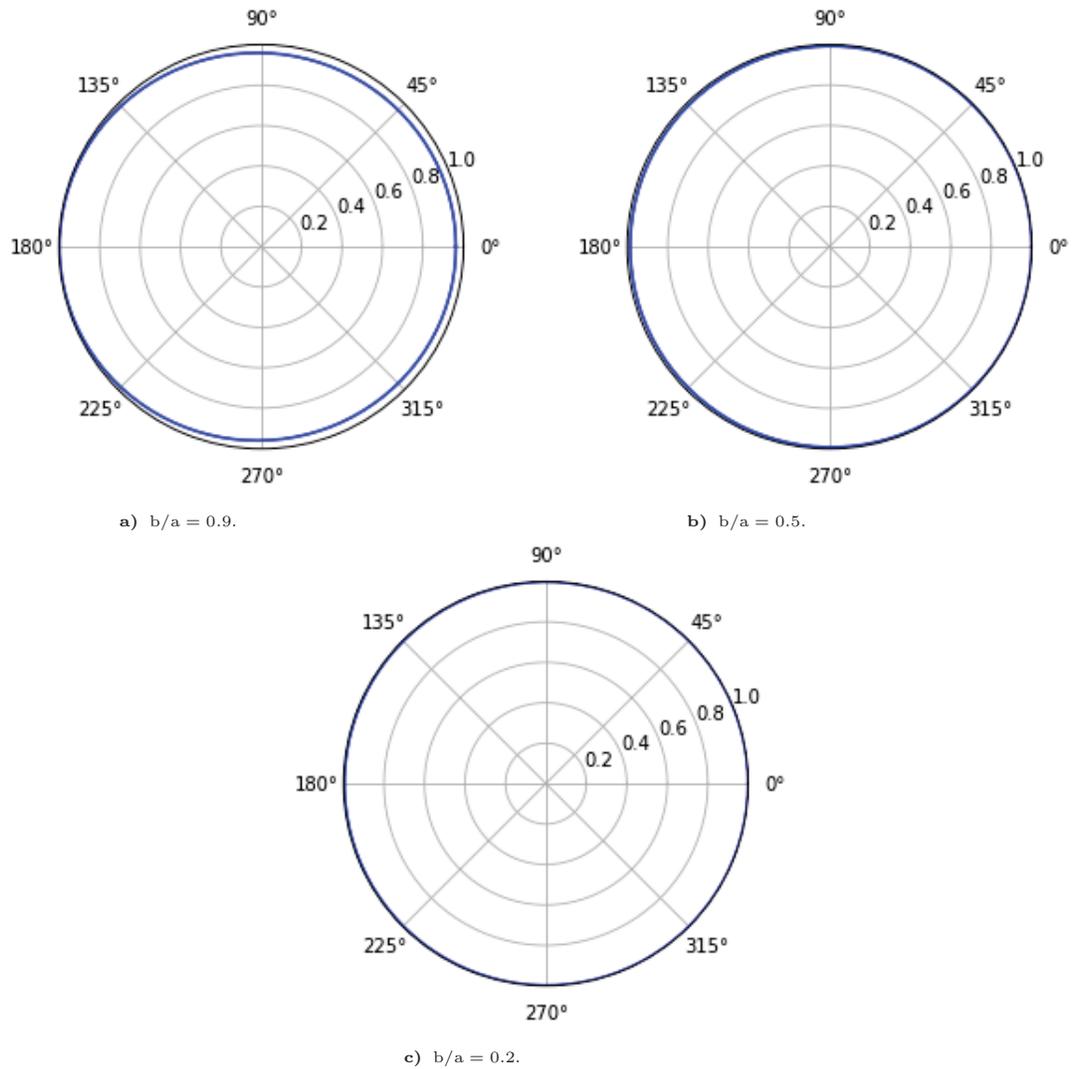


Fig. 6.7: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 18 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 0.1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en Python.

En el caso del mismo polímero 18, al evaluarlo a una frecuencia de $ka = 1$, Fig. 6.8, se observa que conforme aumenta el espesor, el patrón de dispersión deja de presentar cierta direccionalidad y se vuelve casi homogéneo. Por lo tanto, para esta frecuencia el patrón de directividad presenta una dependencia con el espesor del material viscoelástico.

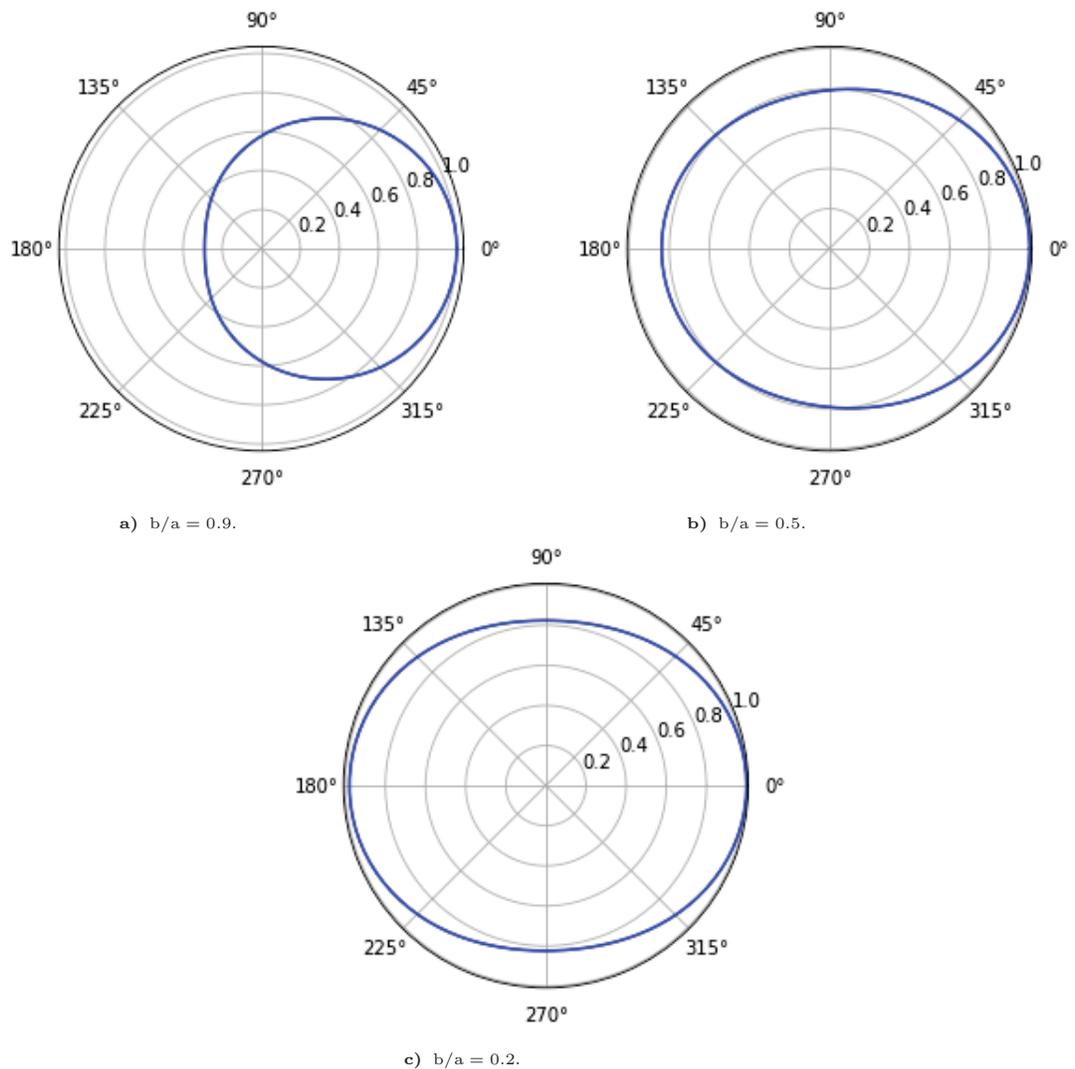


Fig. 6.8: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 18 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en Python.

Por último, para el caso del polímero 18 y una frecuencia de $ka = 10$, Fig. 6.9, para todos los espesores evaluados se observa una contribución de dispersión hacia adelante, con patrones de dispersión similares, teniendo una contribución uniforme para las demás direcciones. Por lo que, al igual que para el caso de la frecuencia $ka = 0.1$, la variación en el espesor de la coraza no representa un cambio significativo en los patrones de direccionalidad.

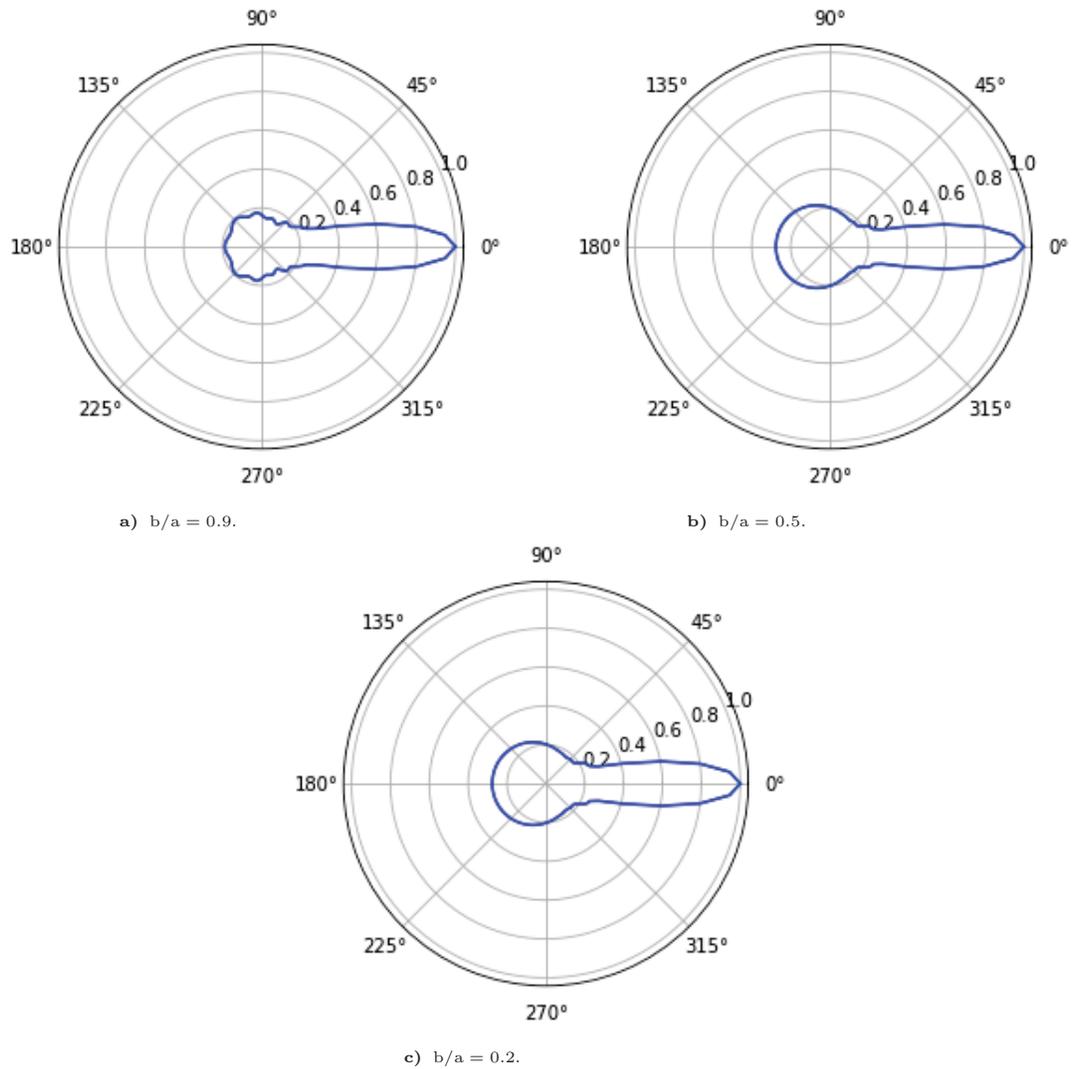


Fig. 6.9: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 18 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 10$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en Python.

Al comparar los patrones del polímero 18 para un espesor dado y las tres frecuencias, se observa que en todos los casos al aumentar la frecuencia, los patrones se vuelven direccionales y todos presentan una tendencia al aumento de la presión dispersada hacia adelante, lo cual como se mencionó anteriormente para el caso de la esfera viscoelástica, está relacionado con que el tamaño del dispersor y la longitud de onda son aproximadamente iguales para altas frecuencias, por lo tanto, se observa un comportamiento relacionado con la dispersión de Mie.

En el caso del polímero 19 a una frecuencia de $ka = 0.1$, Fig. 6.10, se observa la presencia de direccionalidad en los patrones de dispersión conforme el espesor del polímero disminuye, pasando de un patrón homogéneo a uno con una contribución notable en retrodispersión comparada con la dispersión hacia adelante, por lo que se puede decir que existe una relación entre el espesor del polímero y la direccionalidad del patrón obtenido.

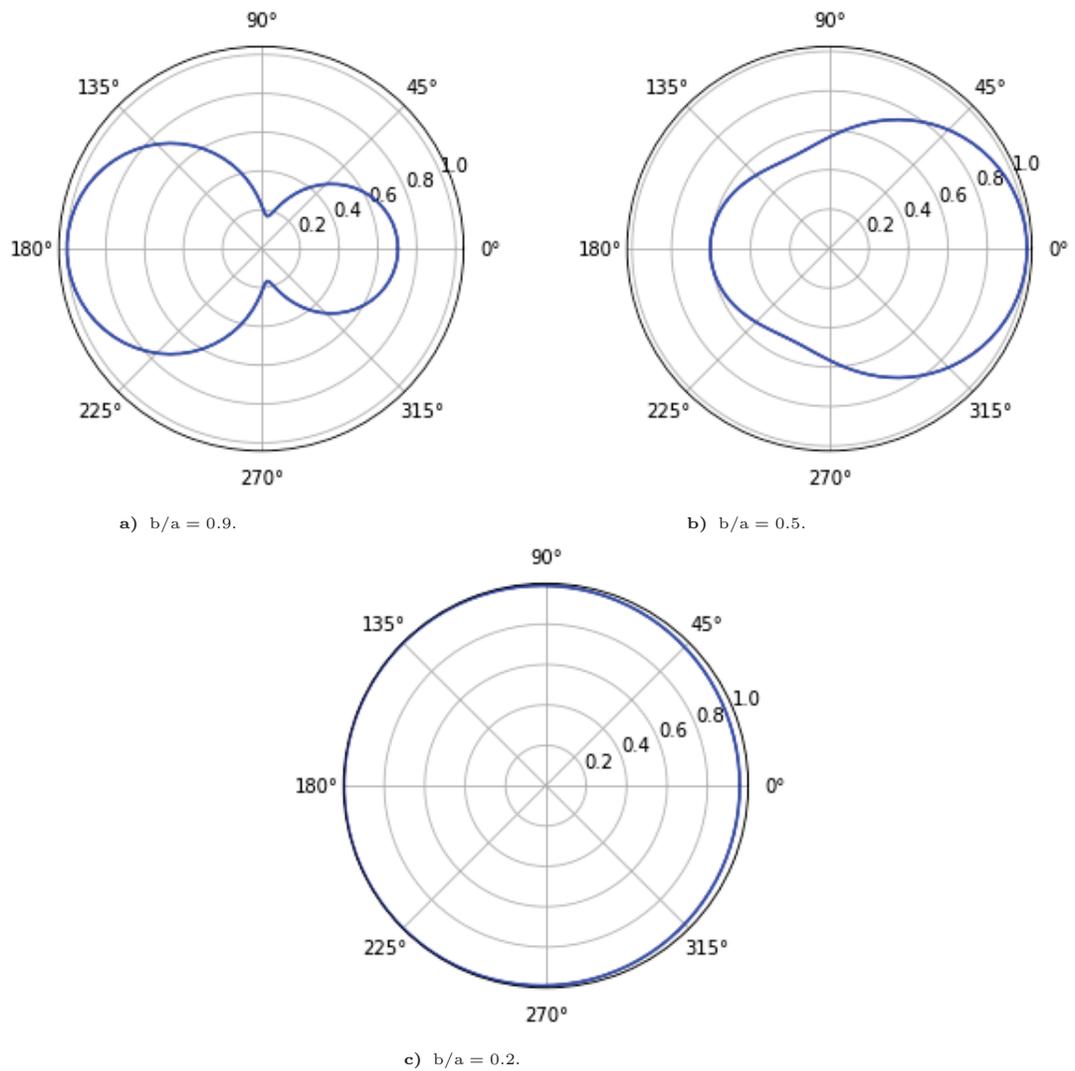


Fig. 6.10: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 19 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 0.1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en Python.

En cuanto a la variación de la forma de los patrones de direccionalidad ante el aumento del espesor del polímero 19 al considerarse una frecuencia de $ka = 1$, se observa que conforme el espesor aumenta hay un cambio evidente en las direccionalidad de los patrones; por lo que el espesor está directamente relacionado con la direccionalidad de la presión dispersada.

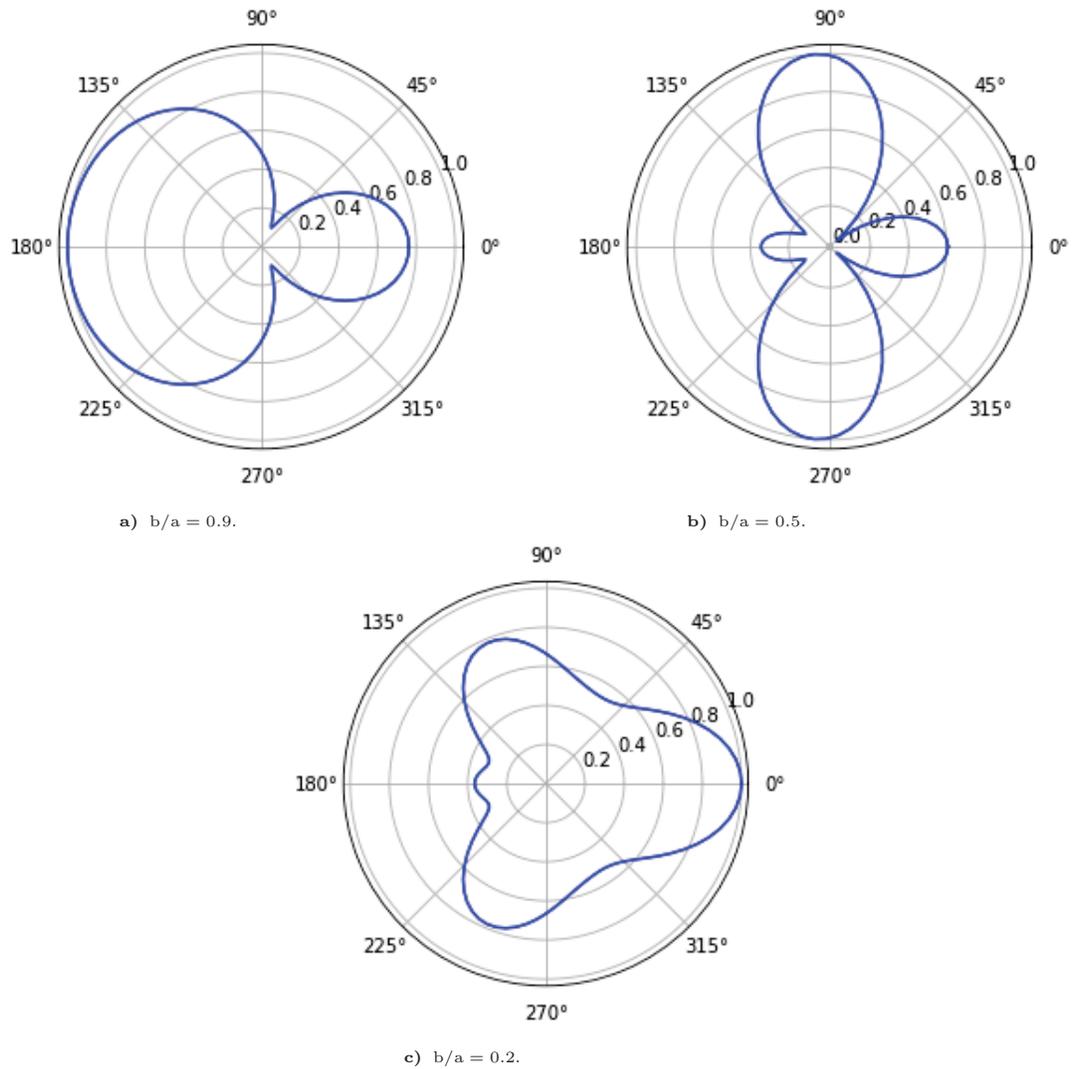


Fig. 6.11: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 19 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en Python.

Por último, para el polímero 19 y una frecuencia de 10, Fig. 6.12, para los tres espesores se tiene en general un patrón de dispersión similar con una contribución dominante hacia enfrente y conforme el espesor se incrementa se observa un aumento en la presión retrodispersada, mientras que en los demás ángulos la dispersión disminuye. Por lo que, en comparación con las frecuencias anteriores, se tiene que la dependencia en la forma que adquieren los patrones de direccionalidad ante el cambio en el espesor del polímero no es de gran relevancia.

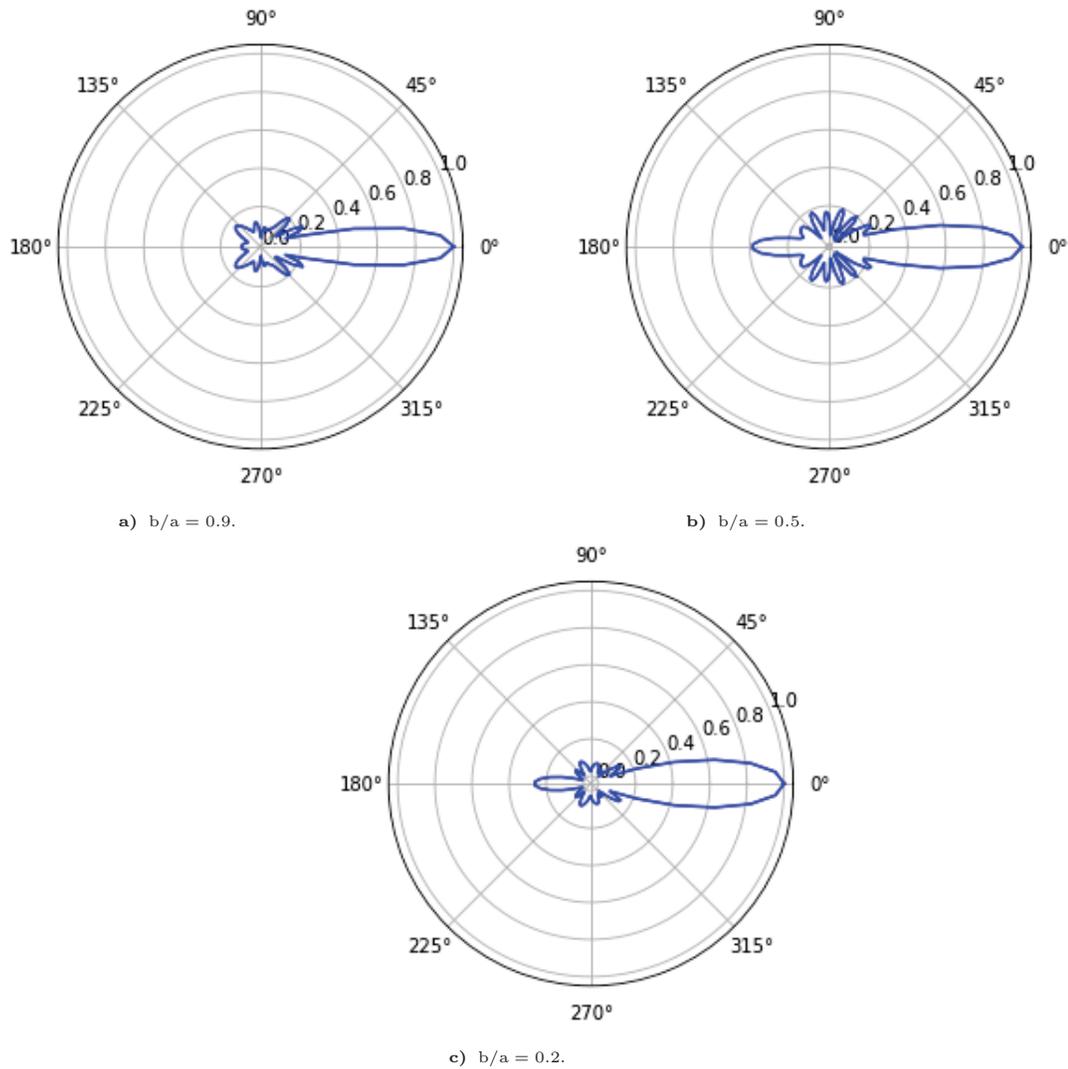


Fig. 6.12: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 19 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 10$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en Python.

Al comparar los patrones de dispersión del polímero 19 para espesores iguales y diferentes frecuencias se observan patrones más direccionales y un aumento en la dispersión hacia adelante, conforme la frecuencia se incrementa, lo cual está relacionado con la dispersión de Mie. Otro aspecto es que para frecuencias de $ka = 0.1$ y 1 , los patrones de dispersión dependen en gran medida del espesor del polímero 19.

Al contrastar los patrones obtenidos para el polímero 18 y 19, se tiene que los de este último son más direccionales, lo cual concuerda con los observado también para las esferas viscoelásticas, y que está relacionado con el factor de pérdida de los polímeros dado el modelo viscoelástico utilizado, ya que a mayor factor de pérdida, menor es la energía disponible para la dispersión y por consiguiente, los patrones son más uniformes. Relacionado con esto, también se tiene que al comparar los patrones de dispersión para el polímero 18 y 19, a bajas frecuencias, $ka = 0.1$, si se

sigue el mismo razonamiento que en el caso de las esferas viscoelásticas al tener estos polímeros el mismo factor de pérdida para dicha frecuencia, se esperaría que los patrones obtenidos fueran similares, pero al compararlos se observa que esto solo es cierto conforme el espesor del polímero aumenta.

Además de analizar los casos de las esferas con recubrimiento, se calculó el patrón de dispersión para la esfera elástica de acero, cuyos patrones se muestran en la Fig. 6.13, donde se observa que conforme aumenta la frecuencia el patrón se vuelve más direccional, y la dispersión hacia adelante es dominante con respecto a la dispersión hacia atrás; esto debido a que la longitud de onda disminuye y no se cumple la condición para la dispersión uniforme de Rayleigh.

En cuanto a la semejanza de los patrones de los polímeros con respecto a los presentados por la esfera de acero, se tiene que a bajas frecuencias $ka = 0.1$ y 1 , y para el cubrimiento con menor espesor $b/a = 0.9$, los patrones de presión dispersada se asemejan más a los del polímero 19. Por otro lado, para altas frecuencias, $ka = 10$, los patrones que se asemejan más a los del acero, son los del polímero 18 para los espesores $b/a = 0.5$ y 0.2 .

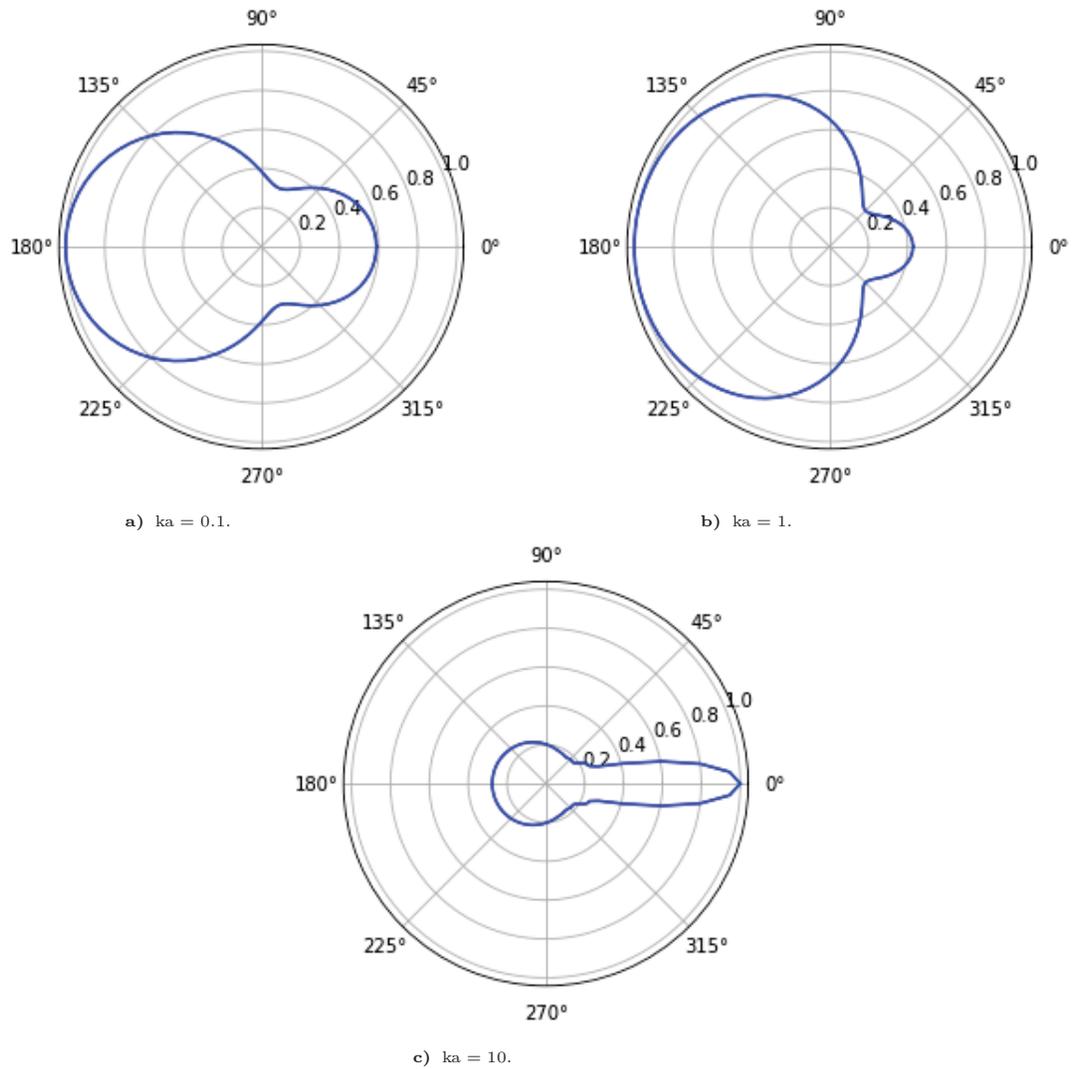


Fig. 6.13: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$ y c) $ka = 10$, obtenidos en Python.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue desarrollar y validar una herramienta de simulación de dispersión ultrasónica producida por microesferas viscoelásticas. Con la finalidad de poder realizar una primera aproximación a un problema más complejo como lo es la dispersión de ondas de ultrasonido en un medio biológico. Para el cual, como primera aproximación se plantea el estudio de los dos constituyentes principales, esferas y cilindros, rodeados cada uno de un medio homogéneo, para lo cuales el siguiente paso es considerar que ambos tienen una coraza. Algunas de las modificaciones que se pueden ir realizando al problema es la consideración de dispersión múltiple, interacción simultánea de una onda de ultrasonido con ambos elementos, entre otros, de forma que se puede ir agregando complejidad al sistema hasta poder simular la situación que ocurre en un tejido biológico.

De los programas desarrollados en los dos lenguajes de programación, para el problema de la esfera viscoelástica ambos cumplieron con el objetivo, mientras que el caso de la esfera elástica con coraza viscoelástica, el que mejor cumplió con dicho objetivo fue el de Python.

Mediante la replicación de los resultados obtenidos por Hasheminejad, S. , Harsini B. y Safari. No se logró validar los algoritmos realizados para la simulación de la dispersión acústica. A partir de los patrones de directividad generados para la presión dispersada, se observó que los materiales con mayor factor de pérdida presentan patrones uniformes; mientras que a menor factor, mayor será la direccionalidad. Además, a altas frecuencias, los patrones se vuelven direccionales y presentan una tendencia al aumento de la dispersión hacia adelante.

A pesar de que existen programas que permiten calcular la dispersión de ondas acústicas debido a dispersores esféricos, el propósito de realizar este proyecto fue conocer la física que hay detrás del problema de dispersión acústica, de forma que en un futuro el conocimiento adquirido permita abordar problemas con estructuras más complejas.

Como trabajo a futuro se propone desarrollar una herramienta que permita la simulación de imágenes de ultrasonido clínico producidas por estructuras con corazas viscoelásticas, por ejemplo, células de tumores mamarios y medios de contraste. Lo cual permitirá mejorar la comprensión de la respuesta dinámica de esta clase de dispersores viscoelásticos ante un campo acústico y ayudar en la caracterización a partir de mediciones en el laboratorio.

Además de explorar si las matrices obtenidas para el problema de dispersión de ondas de

7. CONCLUSIONES

ultrasonido de esferas elásticas con coraza viscoelástica, cumplen con ser *"ill conditioned"*, y que debido a esto los patrones de dispersión obtenidos en MATLAB no coincidan con lo reportado en la literatura.

A.1. Ecuación de estado para un fluido

Al propagarse una onda en un fluido ante condiciones adiabáticas y de entropía constante, la ecuación de estado para dicho fluido puede expresarse mediante una serie de Taylor [34, 61]:

$$p(\rho, S) = p(\rho) = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=\text{cte}} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{S=\text{cte}} (\rho - \rho_0)^2 + \dots, \quad (\text{A.1})$$

donde ρ_0 y p_0 son la densidad y presión del medio antes de la propagación de la onda. Definiendo a las perturbaciones del sistema como $p' = p - p_0$ y $\rho' = \rho - \rho_0$, se tiene que:

$$p' = \rho' \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=\text{cte}} + \frac{1}{2!} \rho'^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{S=\text{cte}} + \dots \quad (\text{A.2})$$

En el caso de que se tengan variaciones pequeñas de presión y densidad, se puede considerar la aproximación lineal de la ecuación de estado (A.2),

$$p' = \rho' \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=\text{cte}}, \quad (\text{A.3})$$

donde $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = c_0^2$, con c_0 igual a la velocidad de propagación de la onda en el medio. Por lo que la ecuación de estado para un fluido es:

$$p' = c_0^2 \rho'. \quad (\text{A.4})$$

A.2. Solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas

A continuación se muestra el procedimiento para obtener la solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas.

La expresión de la ecuación de onda en coordenadas esféricas es la siguiente:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (\text{A.5})$$

Utilizando el método de separación de variables:

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t), \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right] = \frac{1}{T c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (\text{A.7})$$

Analizando la dependencia temporal,

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2, \quad (\text{A.8a})$$

$$T'' + k^2 c^2 T = 0. \quad (\text{A.8b})$$

la ecuación anterior es la de un oscilador armónico que tiene dos soluciones linealmente independientes:

$$T(t) = T_0 e^{\pm i k c t} = T_0 e^{\pm i \omega t}. \quad (\text{A.9})$$

En cuanto a la dependencia azimutal (ϕ),

$$-\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - k^2 r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = -m^2, \quad (\text{A.11a})$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad (\text{A.11b})$$

la ecuación anterior es la de un oscilador armónico que tiene dos soluciones linealmente independientes:

$$\Phi(\phi) = \Phi_0 e^{\pm im\phi} = \Phi_0 e^{\pm im\phi}. \quad (\text{A.12})$$

Analizando la parte polar (θ)

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2\theta} = -k^2, \quad (\text{A.13a})$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -k^2 r^2, \quad (\text{A.13b})$$

→

$$\frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -n(n+1), \quad (\text{A.14a})$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0. \quad (\text{A.14b})$$

La ecuación anterior corresponde con la ecuación asociada de Legendre, por lo que su solución es de la forma:

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \quad (\text{A.15})$$

donde n toma números enteros y $m = -n, \dots, n$, si el sistema tiene simetría azimutal, los polinomios asociados de Legendre se convierten en solo los polinomios de Legendre P_n .

Finalmente, analizando la dependencia radial,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - n(n+1) + k^2 r^2 = 0, \quad (\text{A.16})$$

esta ecuación tiene la forma de la ecuación de Bessel y su solución es la combinación de las funciones esféricas de Bessel de primer (j_n) y segundo (n_n) orden, para una onda saliente se tiene que la expresión es [50]:

$$R(r) = A_n j_n(kr) - B_n n_n(kr). \quad (\text{A.17})$$

Por lo anterior, la solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas es:

$$\Psi_n = \sum_n T_0 e^{\pm i\omega t} \Phi_0 e^{\pm im\phi} P_n^m(\cos\theta) [A_n j_n(kr) + B_n n_n(kr)]. \quad (\text{A.18})$$

A.3. Módulo dinámico

A continuación se muestran las componentes del módulo dinámico para diferentes modelos viscoelásticos:

Modelo de Maxwell:

$$E' = \frac{E\tau_r^2\omega^2}{1 + \omega^2\tau_r^2}, \quad E'' = \frac{E\tau_r\omega}{1 + \omega^2\tau_r^2}, \quad (\text{A.19})$$

donde E es la constante de elasticidad del resorte, η es el coeficiente de viscosidad, ω es la frecuencias angular y $\tau_r = \eta/E$ [3].

Modelo del Sólido lineal estándar:

$$E' = E_2 + E_1 \frac{\omega^2\tau_c^2}{\omega^2\tau_c^2 + 1}, \quad E'' = E_1 \frac{\omega^2\tau_c}{\omega^2\tau_c^2 + 1}, \quad (\text{A.20})$$

donde E_1 y E_2 son las constantes de elasticidad de los resortes, η es el coeficiente de viscosidad, ω es la frecuencias angular y $\tau_c = \eta/E_1$ [40].

Modelo H-N:

$$E' = E_\infty + \frac{(E_0 - E_\infty) \cos(\beta k)}{[1 + 2\omega^\alpha \tau^\alpha \cos \gamma + \omega^{2\alpha} \tau^{2\alpha}]^{\beta/2}}, \quad E'' = \frac{(E_0 - E_\infty) \sin(\beta k)}{[1 + 2\omega^\alpha \tau^\alpha \cos \gamma + \omega^{2\alpha} \tau^{2\alpha}]^{\beta/2}}, \quad (\text{A.21})$$

donde E_0 y E_∞ son los valores del módulo complejo cuando la frecuencia se aproxima a 0 e ∞ , respectivamente; ω es la frecuencia angular; $\tau = 1/\omega_0$ con ω_0 la frecuencia central; α y β son parámetros adimensionales con valores mayores que cero y menores que uno, que controlan el ancho y la asimetría del pico de pérdida, respectivamente y $\gamma = \alpha\pi/2$ [13, 44].

A.4. Vector de desplazamiento, velocidad de partícula y tensor de esfuerzo en coordenadas esféricas

Las expresiones para las componentes radial y angular del vector de desplazamiento y velocidad se obtienen haciendo uso del operador gradiente y rotacional en coordenadas esféricas, de donde se obtiene que:

$$\mathbf{u}_r^{si} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\Psi_i \sin \theta)}{\partial \theta}, \quad \mathbf{u}_\theta^{si} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \Psi_i)}{\partial r}, \quad (\text{A.22})$$

son las componentes del vector de desplazamientos, donde el superíndice si indica el tipo de sólido viscoelástico que se tiene en el caso del sistema de esfera con coraza, donde el núcleo se denota por $s1$ y la coraza por $s2$; mientras que para el vector de velocidad se tiene:

$$\mathbf{v}_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\psi \sin \theta)}{\partial \theta}, \quad \mathbf{v}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \psi)}{\partial r}, \quad (\text{A.23})$$

donde $\phi = \phi_{inc} + \phi_c$.

En el caso de las componentes del tensor de deformación para el fluido, las expresiones de obtienen haciendo uso de (2.6), donde las expresiones para \mathbf{D} y Δ se encuentran descritas en coordenadas esféricas. Por lo que, la expresiones son las siguientes:

$$\mathbf{T}_{rr} = -p + \left(\mu_b - \frac{2}{3} \mu \right) \Delta + 2\mu \left(\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial r} \right), \quad \mathbf{T}_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\mathbf{v}_\theta}{r} \right), \quad (\text{A.24})$$

donde

$$p = -i\omega\rho\phi + \left(\mu_b + \frac{4}{3}\mu \right) \Delta, \quad (\text{A.25})$$

y $\Delta = \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = -\nabla^2 \phi = k_c^2 \phi$.

Para obtener las componentes del sólido viscoelástico se utiliza (2.16), expresando el tensor de deformación infinitesimal en coordenadas esféricas, se obtiene que:

$$\mathbf{T}_{rr}^{si} = 2\mu_{si}^* \frac{\partial \mathbf{u}_r^{si}}{\partial r} + \lambda_i^* \epsilon_i, \quad \mathbf{T}_{r\theta}^{si} = \mu_{si}^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}_r^{si}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{si}}{\partial r} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{si}}{r} \right), \quad (\text{A.26})$$

donde $\epsilon_i = \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}_{si} = \nabla^2 \Phi_i = -K_{ci}^{*2} \Phi_i$ y el índice si indica qué material viscoelástico se está analizando en el sistema de esfera con coraza.

A.5. Esfera viscoelástica

Al evaluar las condiciones de frontera para la esfera viscoelástica se obtienen las siguientes cuatro ecuaciones:

- **Primera condición:** esta corresponde a $v_r(r, \theta, \omega)]_{r=a} = -i\omega u_r(r, \theta, \omega)]_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & -k_c h_n^{(1)'}(k_c a) A_n + \frac{1}{r} n(n+1) h_n^{(1)}(k_s a) B_n + i\omega K_c^* j_n'(K_c^* a) C_n + \frac{1}{r} i\omega n(n+1) j_n(K_s^* a) D_n \\ & = \phi_0 k_c j_n'(k_c a) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

- **Segunda condición:** corresponde a $v_\theta(r, \theta, \omega)]_{r=a} = -i\omega u_\theta(r, \theta, \omega)]_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} h_n^{(1)}(k_c a) A_n - \left[\frac{1}{a} h_n^{(1)}(k_s a) + k_s h_n^{(1)'}(k_s a) \right] B_n - \frac{1}{a} i\omega j_n(K_c^* a) C_n - i\omega \left[\frac{1}{a} j_n(K_s^* a) \right. \\ & \left. + k_s^* j_n'(K_s^* a) \right] D_n = -\frac{1}{a} \phi_0 j_n(k_c a). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

- **Tercera condición:** corresponde a $T_{rr}(r, \theta, \omega)]_{r=a} = T_{rr}^s(r, \theta, \omega)]_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & \left[(i\omega\rho - 2\mu k_c^2) h_n^{(1)}(k_c a) - 2\mu k_c^2 h_n^{(1)''}(k_c a) \right] A_n + \left[\frac{2}{a} n(n+1) \mu k_s h_n^{(1)'}(k_s a) - \frac{2}{a^2} n(n+1) \right. \\ & \left. \mu h_n^{(1)}(k_s a) \right] B_n + K_c^{*2} \left[\lambda^* j_n(K_c^* a) - 2\mu^* j_n''(K_c^* a) \right] C_n + \frac{2\mu^*}{a^2} \left[j_n(K_s^* a) - K_s^* a j_n'(K_s^* a) \right] \\ & n(n+1) D_n = - \left[(i\omega\rho - 2\mu k_c^2) j_n(k_c a) - 2\mu k_c^2 j_n''(k_c a) \right] \phi_0. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

- **Cuarta condición:** corresponde a $T_{r\theta}(r, \theta, \omega)]_{r=a} = T_{r\theta}^s(r, \theta, \omega)]_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & 2\mu \left[k_c a h_n^{(1)'}(k_c a) - h_n^{(1)}(k_c a) \right] A_n + \mu \left[h_n^{(1)}(k_s a) (2 - n(n+1)) - k_s^2 a^2 h_n^{(1)''}(k_s a) \right] B_n \\ & + 2\mu_s^* \left[K_c^* a j_n'(K_c^* a) - j_n(K_c^* a) \right] C_n + \mu_s^* \left\{ j_n(K_s^* a) (n(n+1) - 2) + K_s^{*2} a^2 j_n''(K_s^* a) \right\} D_n \\ & = 2\mu \left[j_n(k_c a) - k_c a j_n'(k_c a) \right] \phi_0. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$ a excepción de las ecuaciones A.28 y A.30, donde $n = 1, 2, \dots$

A.6. Esfera con coraza

Al evaluar las condiciones de frontera para la esfera con coraza se obtienen las siguientes ocho ecuaciones:

- **Primera condición:** corresponde a $v_r(r, \theta, \omega)|_{r=a} = -i\omega u_r^{s1}(r, \theta, \omega)|_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & -k_c A_n h_n^{(1)'}(k_c a) + \frac{n(n+1)}{a} B_n h_n^{(1)}(k_s a) + i\omega K_{c1}^* \left[C_n h_n^{(1)'}(K_{c1}^* a) + D_n h_n^{(2)'}(K_{c1}^* a) \right] \\ & + i\omega \frac{n(n+1)}{a} \left[E_n h_n^{(1)}(K_{s1}^* a) + F_n h_n^{(2)}(K_{s1}^* a) \right] = k_c \phi_0 j_n'(k_c a) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

- **Segunda condición:** corresponde a $v_\theta(r, \theta, \omega)|_{r=a} = -i\omega u_\theta^{s1}(r, \theta, \omega)|_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & A_n h_n^{(1)}(k_c a) - \left[h_n^{(1)}(k_s a) + k_s a h_n^{(1)'}(k_s a) \right] B_n - i\omega \left[C_n h_n^{(1)}(K_{c1}^* a) + D_n h_n^{(2)}(K_{c1}^* a) \right] \\ & - i\omega \left\{ \left[h_n^{(1)}(K_{s1}^* a) + K_{s1}^* a h_n^{(1)'}(K_{s1}^* a) \right] E_n + \left[h_n^{(2)}(K_{s1}^* a) + K_{s1}^* a h_n^{(2)'}(K_{s1}^* a) \right] F_n \right\} \\ & = -\phi_0 j_n(k_c a) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

- **Tercera condición:** corresponde a $T_{rr}(r, \theta, \omega)|_{r=a} = T_{rr}^{s1}(r, \theta, \omega)|_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & \left[(i\omega\rho - 2\mu k_c^2) h_n^{(1)}(k_c a) - 2\mu k_c^2 h_n^{(1)''}(k_c a) \right] A_n - \frac{2\mu n(n+1)}{a^2} \left[h_n^{(1)}(k_s a) - k_s a h_n^{(1)'}(k_s a) \right] B_n \\ & - K_{c1}^{*2} \left\{ \left[2\mu_{s1}^* h_n^{(1)''}(K_{c1}^* a) - \lambda_1^* h_n^{(1)}(K_{c1}^* a) \right] C_n + \left[2\mu_{s1}^* h_n^{(2)''}(K_{c1}^* a) - \lambda_1^* h_n^{(2)}(K_{c1}^* a) \right] D_n \right\} \\ & + \frac{2\mu_{s1}^* n(n+1)}{a^2} \left\{ \left[h_n^{(1)}(K_{s1}^* a) - K_{s1}^* a h_n^{(1)'}(K_{s1}^* a) \right] E_n + \left[h_n^{(2)}(K_{s1}^* a) - K_{s1}^* a h_n^{(2)'}(K_{s1}^* a) \right] F_n \right\} \\ & = - \left[(i\omega\rho - 2\mu k_c^2) j_n(k_c a) - 2\mu k_c^2 j_n''(k_c a) \right] \phi_0 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

- **Cuarta condición:** corresponde a $T_{r\theta}(r, \theta, \omega)|_{r=a} = T_{r\theta}^{s1}(r, \theta, \omega)|_{r=a}$,

$$\begin{aligned} & -2\mu \left[h_n^{(1)}(k_c a) - k_c a h_n^{(1)'}(k_c a) \right] A_n + \mu \left\{ [2 - n(n+1)] h_n^{(1)}(k_s a) - k_s^2 a^2 h_n^{(1)''}(k_s a) \right\} B_n \\ & + 2\mu_{s1}^* \left\{ \left[K_{c1}^* a h_n^{(1)'}(K_{c1}^* a) - h_n^{(1)}(K_{c1}^* a) \right] C_n + \left[K_{c1}^* a h_n^{(2)'}(K_{c1}^* a) - h_n^{(2)}(K_{c1}^* a) \right] D_n \right\} \\ & - \mu_{s1}^* \left\{ [2 - n(n+1)] h_n^{(1)}(K_{s1}^* a) - K_{s1}^{*2} a^2 h_n^{(1)''}(K_{s1}^* a) \right\} E_n - \mu_{s1}^* \left\{ [2 - n(n+1)] h_n^{(2)}(K_{s1}^* a) \right. \\ & \left. - K_{s1}^{*2} a^2 h_n^{(2)''}(K_{s1}^* a) \right\} F_n = 2\mu \left[j_n(k_c a) - k_c a j_n'(k_c a) \right] \phi_0 \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

▪ **Quinta condición:** corresponde a $u_r^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = u_r^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}$,

$$\begin{aligned}
& - K_{c1}^* \left[C_n h_n^{(1)'}(K_{c1}^* b) + D_n h_n^{(2)'}(K_{c1}^* b) \right] - \frac{n(n+1)}{b} \left[E_n h_n^{(1)}(K_{s1}^* a) + F_n h_n^{(2)}(K_{s1}^* b) \right] \\
& + K_{c2}^* j_n'(K_{c2}^* b) G_n + \frac{n(n+1)}{b} Q_n j_n(K_{s2}^* b) = 0
\end{aligned} \tag{A.35}$$

▪ **Sexta condición:** corresponde a $u_\theta^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = u_\theta^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}$,

$$\begin{aligned}
& C_n h_n^{(1)}(K_{c1}^* b) + D_n h_n^{(2)}(K_{c1}^* b) + \left[h_n^{(1)}(K_{s1}^* b) + K_{s1}^* b h_n^{(1)'}(K_{s1}^* b) \right] E_n + \left[h_n^{(2)}(K_{s1}^* b) \right. \\
& \left. + K_{s1}^* b h_n^{(2)'}(K_{s1}^* b) \right] F_n - G_n j_n(K_{c2}^* b) - \left[j_n(K_{s2}^* b) + K_{s2}^* b j_n'(K_{s2}^* b) \right] Q_n = 0
\end{aligned} \tag{A.36}$$

▪ **Séptima condición:** corresponde a $T_{rr}^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = T_{rr}^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}$,

$$\begin{aligned}
& K_{c1}^{*2} \left\{ \left[\lambda_1^* h_n^{(1)}(K_{c1}^* b) - 2\mu_{s1}^* h_n^{(1)''}(K_{c1}^* b) \right] C_n + \left[\lambda_1^* h_n^{(2)}(K_{c1}^* b) - 2\mu_{s1}^* h_n^{(2)''}(K_{c1}^* b) \right] D_n \right\} \\
& - \frac{2n(n+1)}{b^2} \mu_{s1}^* \left\{ \left[-h_n^{(1)}(K_{s1}^* b) + K_{s1}^* b h_n^{(1)'}(K_{s1}^* b) \right] E_n + \right. \\
& \left. \left[-h_n^{(2)}(K_{s1}^* b) + K_{s1}^* b h_n^{(2)'}(K_{s1}^* b) \right] F_n \right\} + K_{c2}^{*2} \left[2\mu_{s2}^* j_n''(K_{c2}^* b) - \lambda_2^* j_n(K_{c2}^* b) \right] G_n \\
& - \frac{2\mu_{s2}^* n(n+1)}{b^2} \left[j_n(K_{s2}^* b) - K_{s2}^* b j_n'(K_{s2}^* b) \right] Q_n = 0
\end{aligned} \tag{A.37}$$

▪ **Octava condición:** corresponde a $T_{r\theta}^{s1}(r, \theta, \omega)]_{r=b} = T_{r\theta}^{s2}(r, \theta, \omega)]_{r=b}$,

$$\begin{aligned}
& 2\mu_{s1}^* \left[K_{c1}^* b h_n^{(1)'}(K_{c1}^* b) - h_n^{(1)}(K_{c1}^* b) \right] C_n + 2\mu_{s1}^* \left[K_{c1}^* b h_n^{(2)'}(K_{c1}^* b) - h_n^{(2)}(K_{c1}^* b) \right] D_n \\
& - \mu_{s1}^* \left\{ [2 - n(n+1)] h_n^{(1)}(K_{s1}^* b) - K_{s1}^{*2} b^2 h_n^{(1)''}(K_{s1}^* b) \right\} E_n \\
& - \mu_{s1}^* \left\{ [2 - n(n+1)] h_n^{(2)}(K_{s1}^* b) - K_{s1}^{*2} b^2 h_n^{(2)''}(K_{s1}^* b) \right\} F_n \\
& - 2\mu_{s2}^* \left[K_{c2}^* b j_n'(K_{c2}^* b) - j_n(K_{c2}^* b) \right] G_n \\
& + \mu_{s2}^* \left[[2 - n(n+1)] j_n(K_{s2}^* b) - K_{s2}^* b j_n''(K_{s2}^* b) \right] Q_n = 0
\end{aligned} \tag{A.38}$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$ a excepción de las ecuaciones A.32, A.34, A.36 y A.38 donde $n = 1, 2, \dots$

A.7. Esfera viscoelástica (Python)

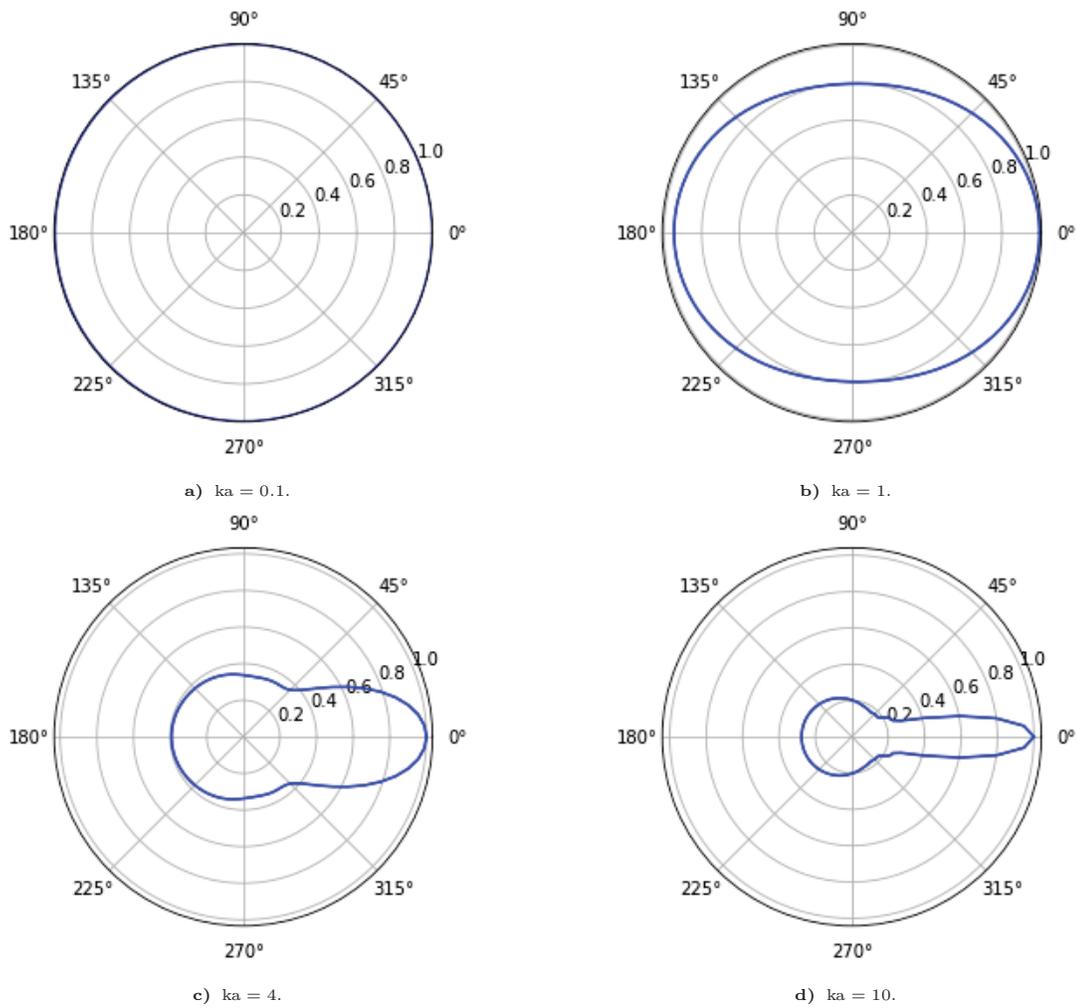


Fig. A.1: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de polímero 18 inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$, c) $ka = 4$ y d) $ka = 10$, obtenidos en Python.

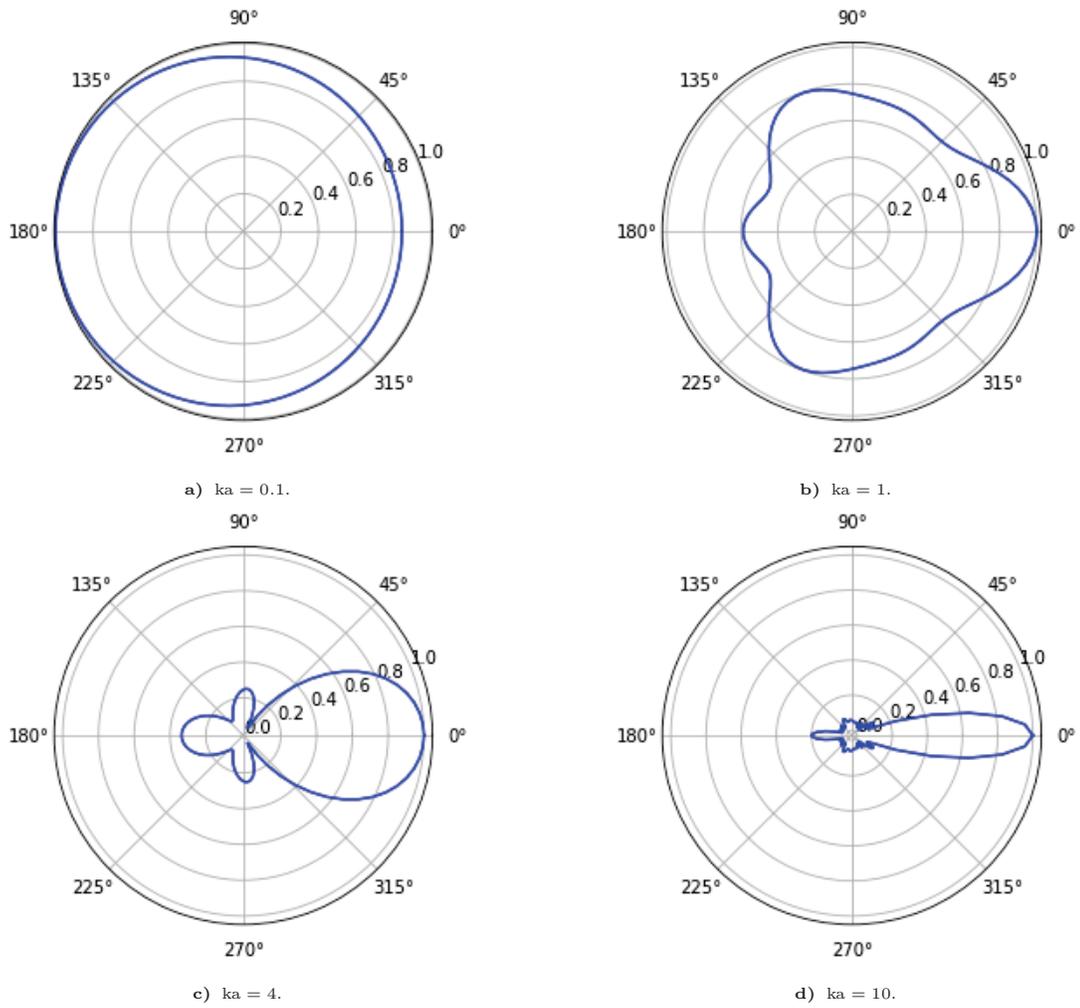


Fig. A.2: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de polímero 19 inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$, c) $ka = 4$ y d) $ka = 10$, obtenidos en Python.

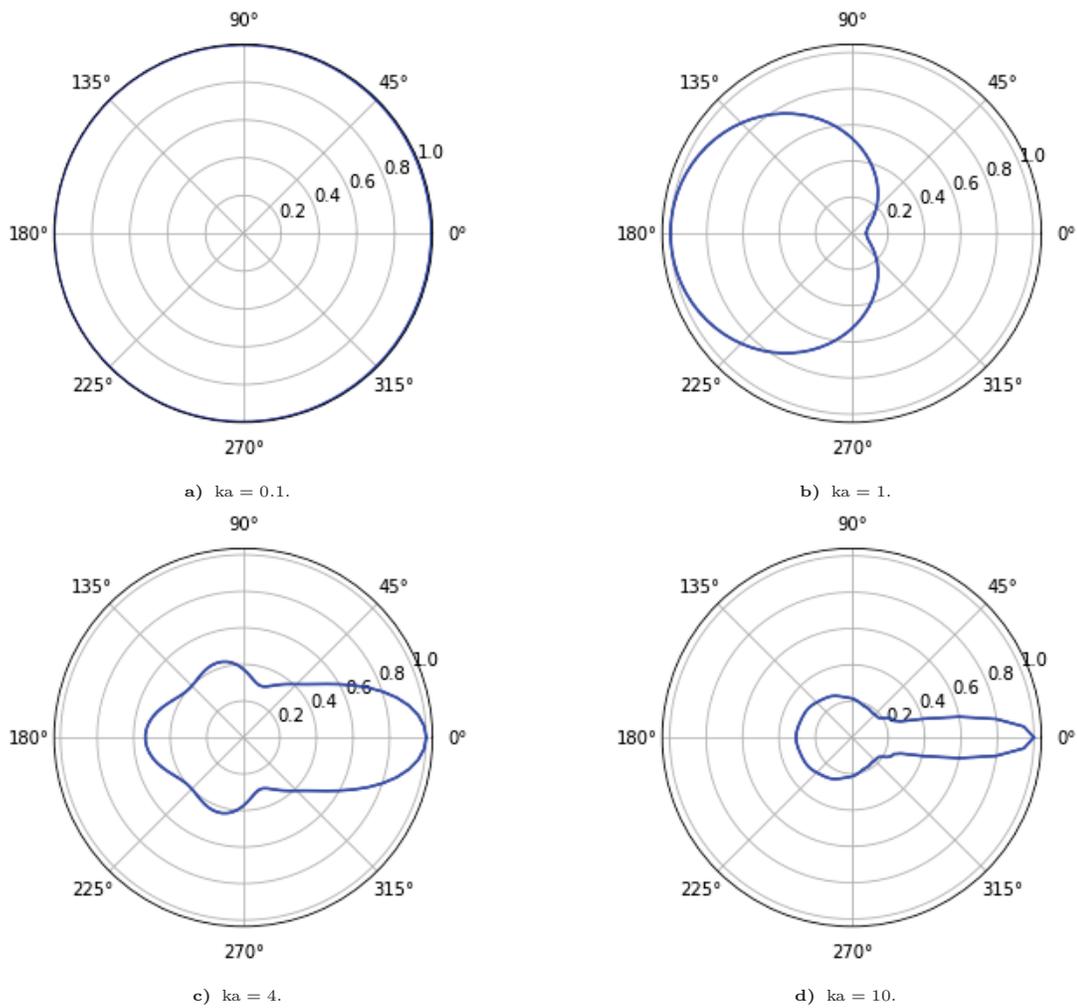


Fig. A.3: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de polímero 20 inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$, c) $ka = 4$ y d) $ka = 10$, obtenidos en Python.

A.8. Esfera elástica con coraza viscoelástica (MATLAB)

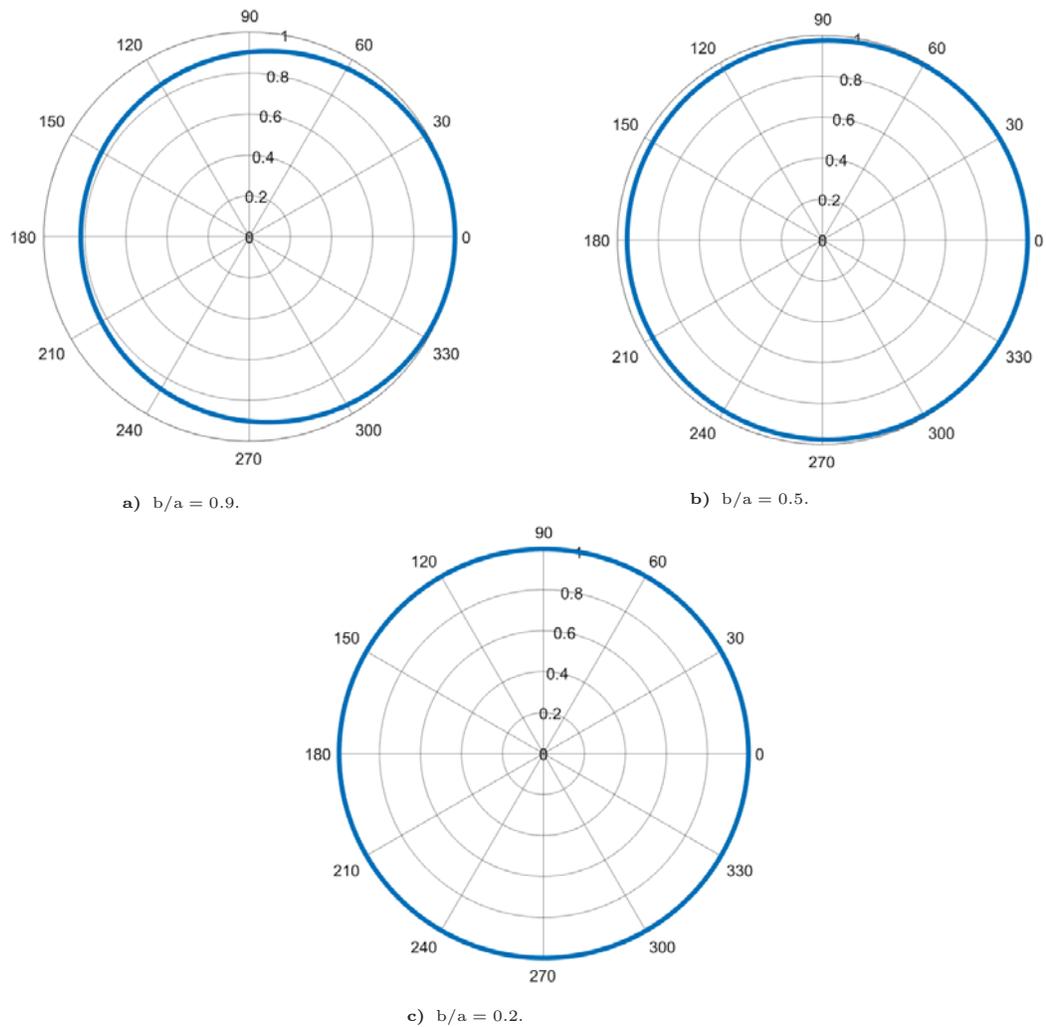


Fig. A.4: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 18 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 0.1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en MATLAB.

A.8 Esfera elástica con coraza viscoelástica (MATLAB)

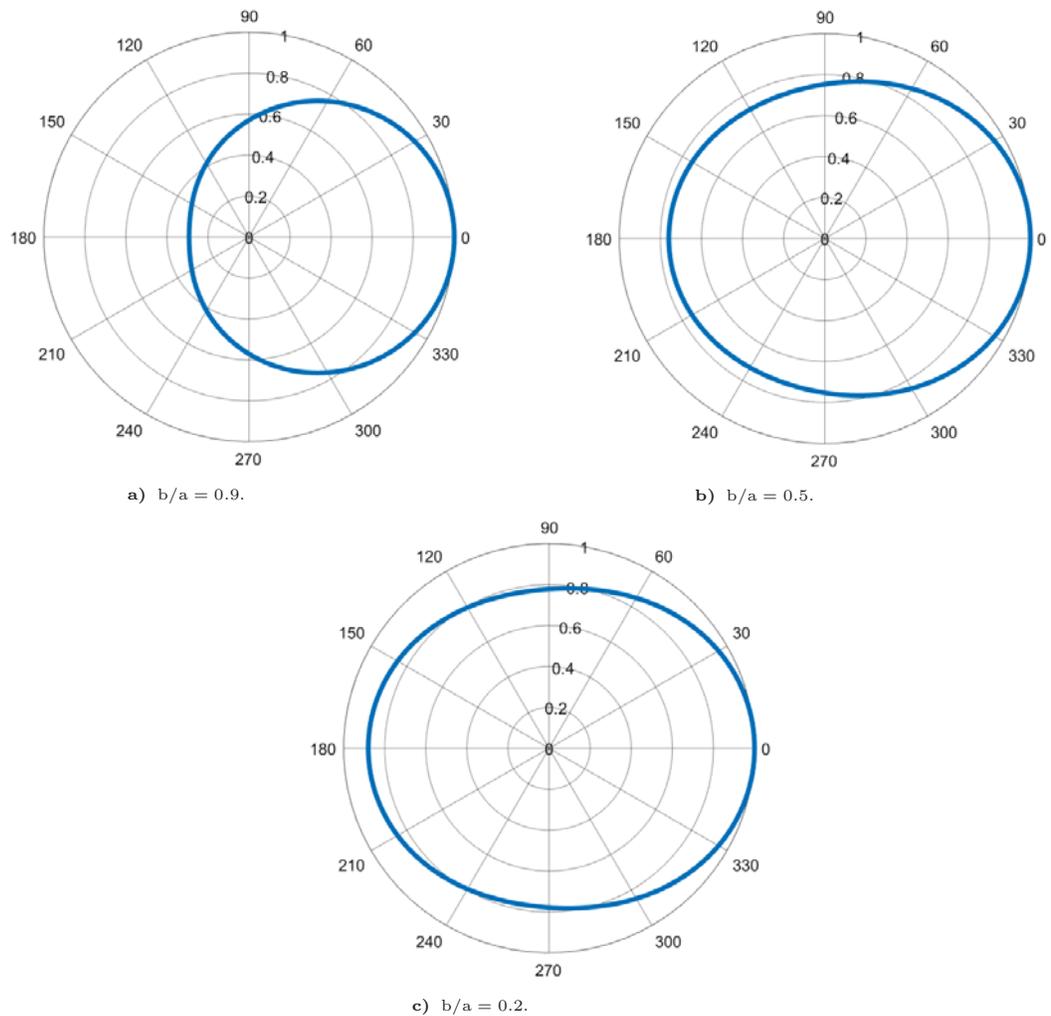


Fig. A.5: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 18 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en MATLAB.

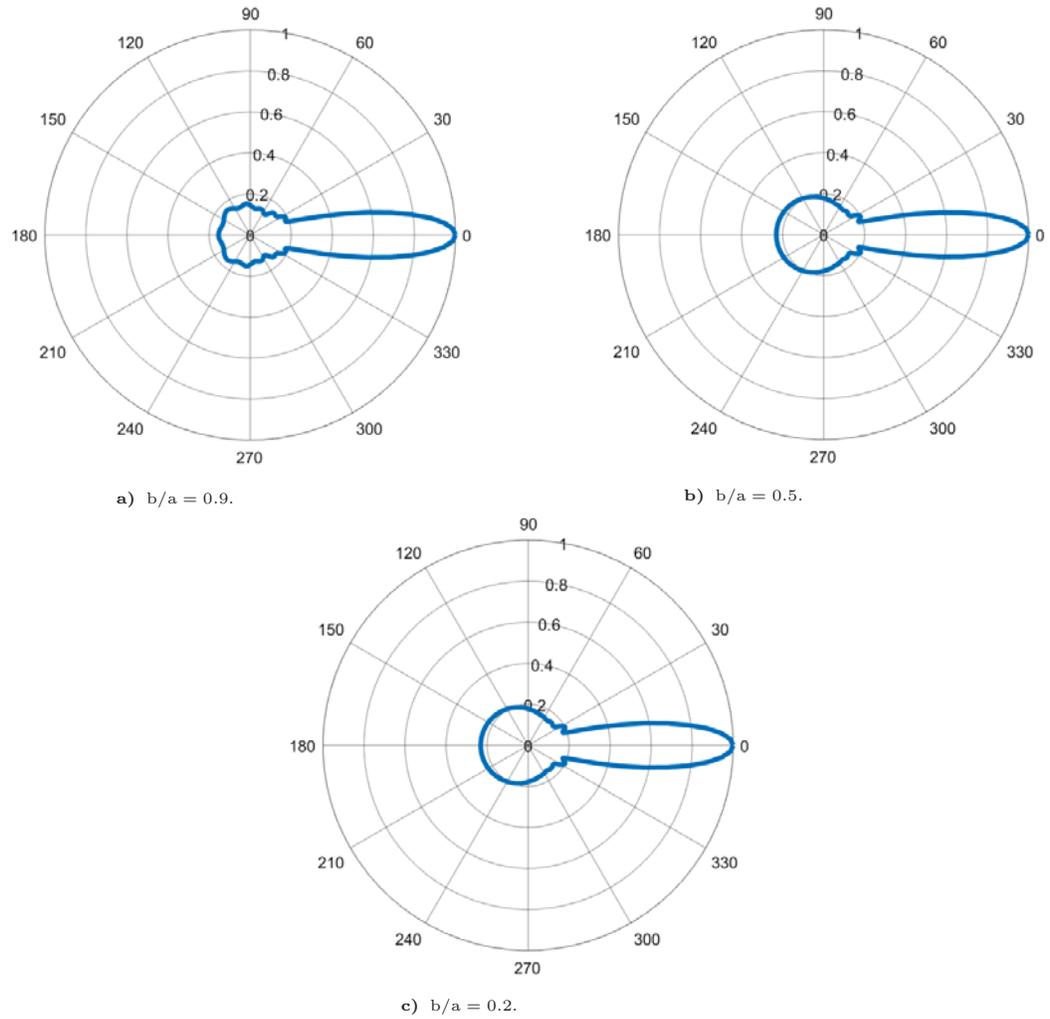


Fig. A.6: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 18 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 10$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en MATLAB.

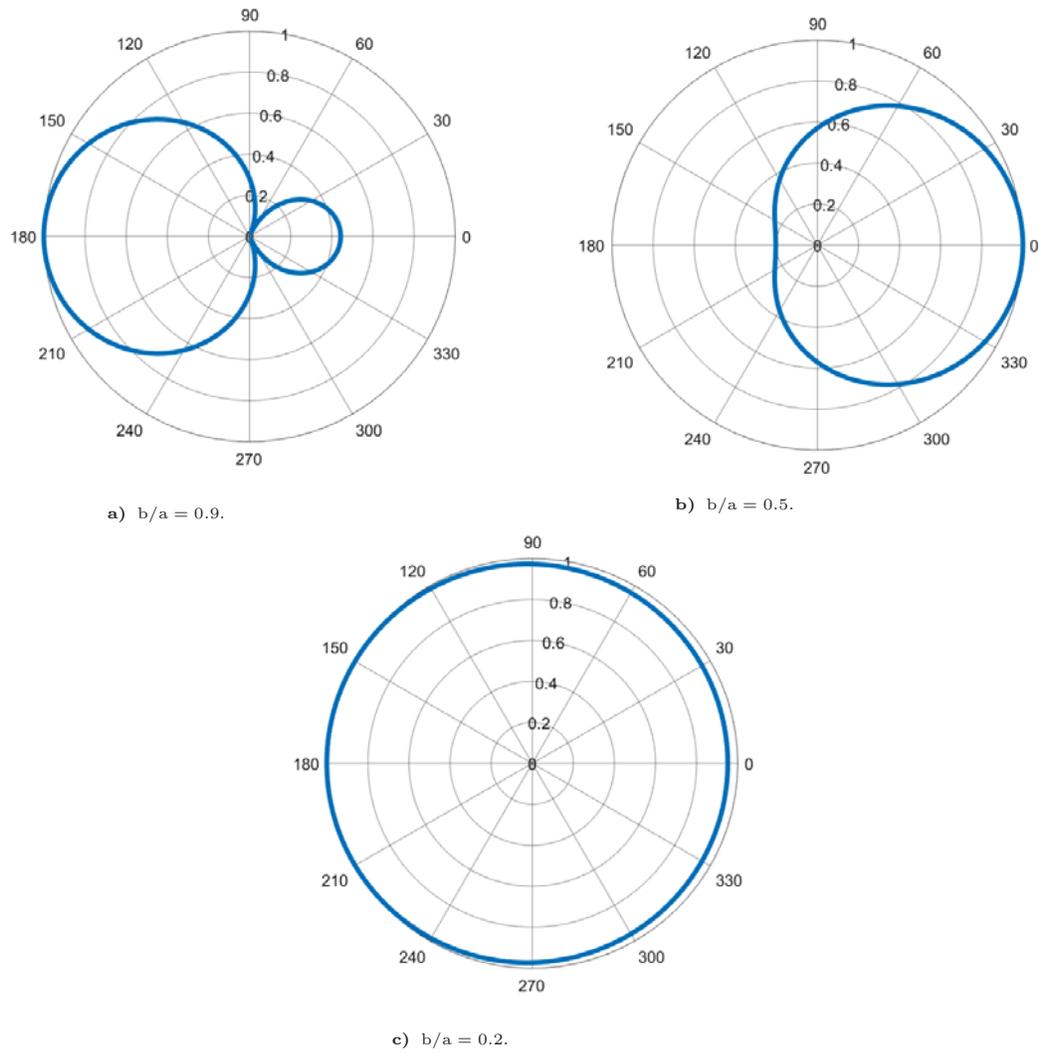


Fig. A.7: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 19 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 0.1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en MATLAB.

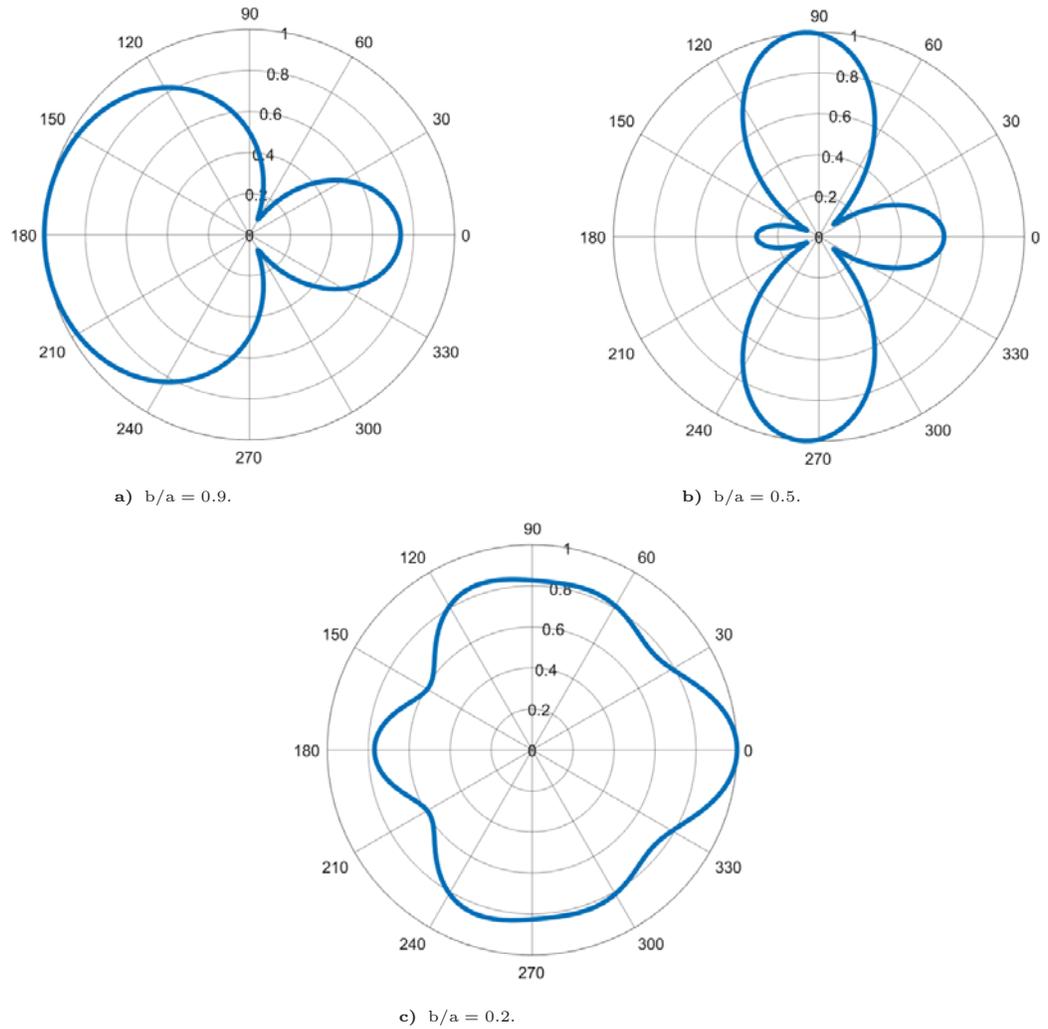


Fig. A.8: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 19 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 1$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en MATLAB.

A.8 Esfera elástica con coraza viscoelástica (MATLAB)

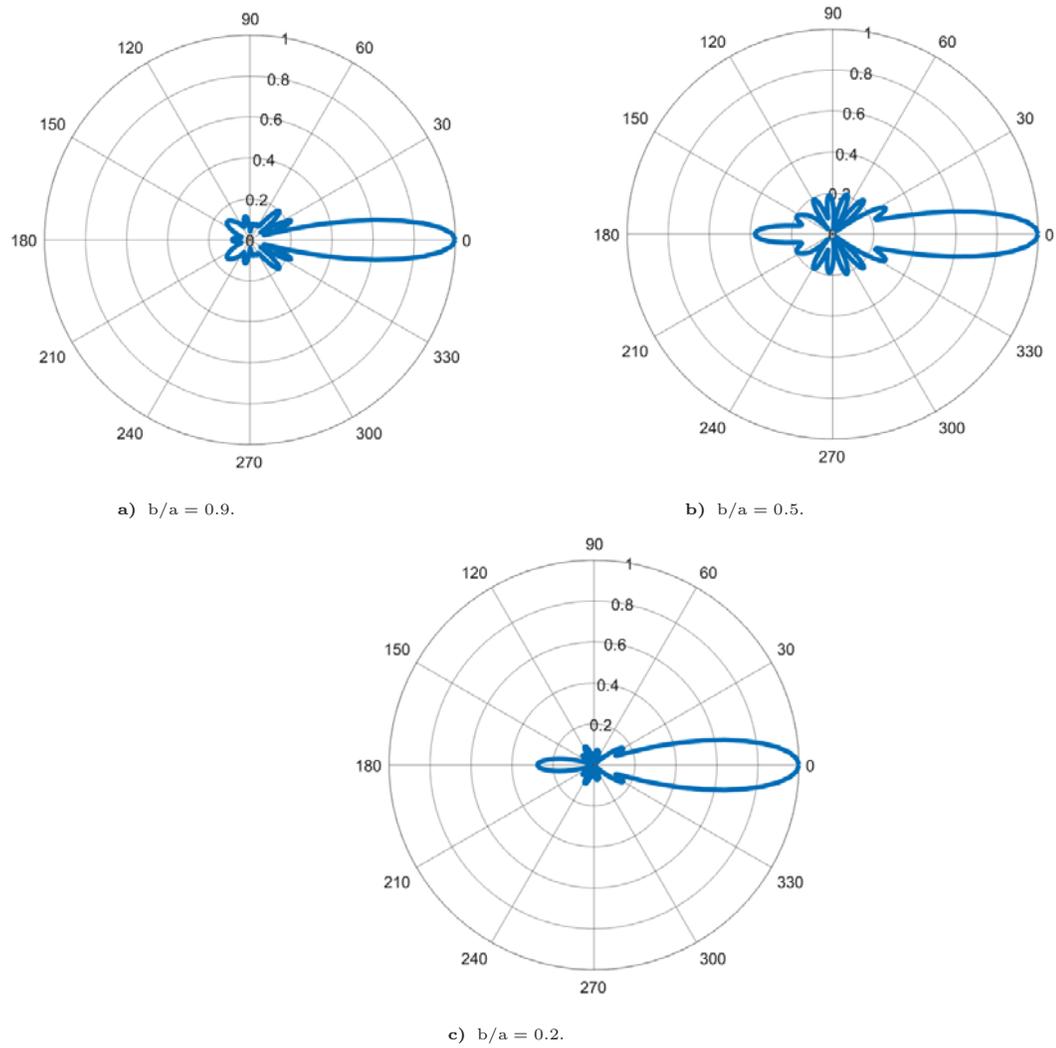


Fig. A.9: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero recubierta de polímero 19 inmersa en glicerina, para la frecuencia $ka = 10$, considerando diferentes razones entre los radios de las esferas, b (núcleo-acero) y a (coraza-polímero); a) $b/a = 0.9$, b) $b/a = 0.5$ y c) $b/a = 0.2$, obtenidos en MATLAB.

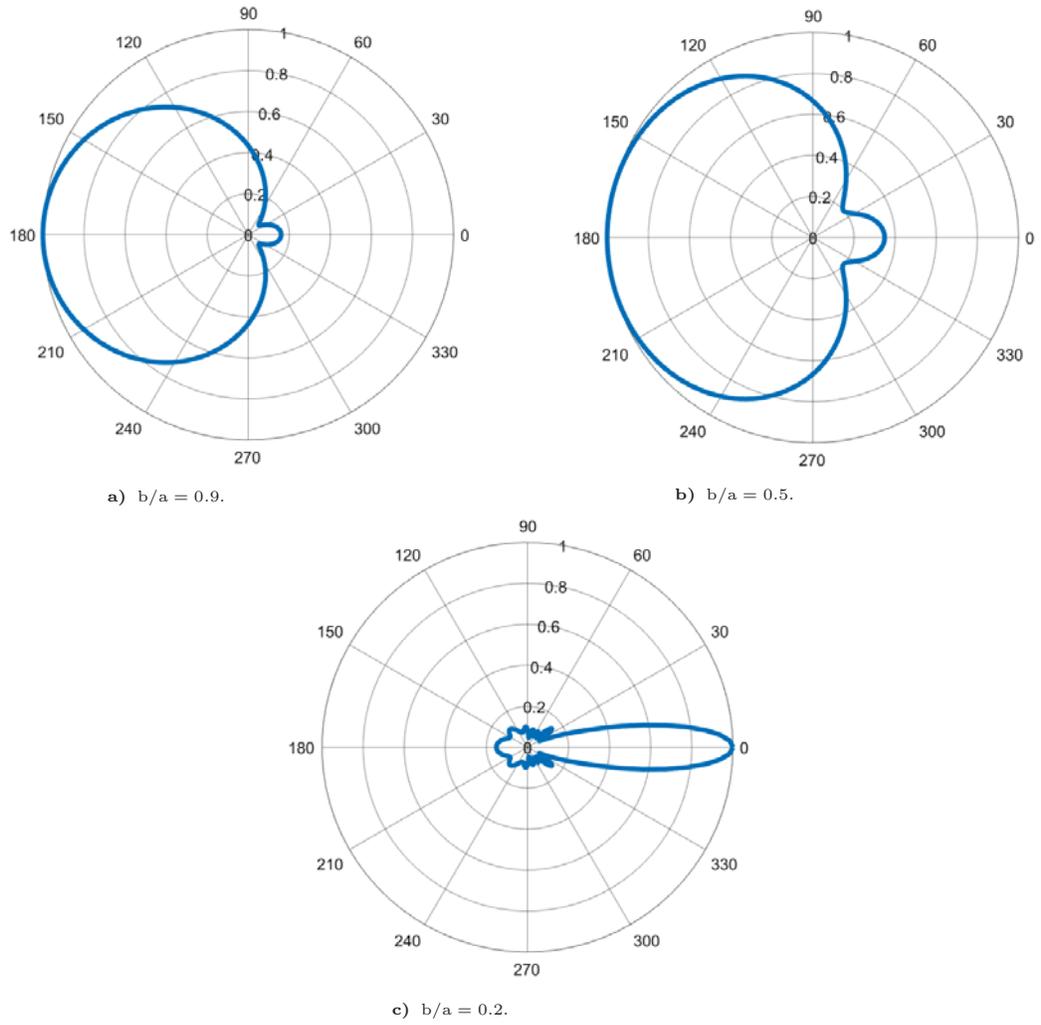


Fig. A.10: Patrones de presión dispersada, $|p_s|/\rho c^2$, normalizada y evaluada a campo lejano, para una esfera de acero inmersa en glicerina, para las frecuencias: a) $ka = 0.1$, b) $ka = 1$ y c) $ka = 10$, obtenidos en MATLAB.

A.9. Códigos de MATLAB

Esfera viscoelástica

```

1 function [jdn, jdn2, jn, hn, hdn, hdn2, a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3,
   d4, I1, I2, I3, I4, kc, a01, a03, c01, c03, I01, I03]=f_especiales_2(a, n, w, nu, c, mu, mu_b
   , rho_l, rho_s, phi_0, G0_1, Ginf_1, alpha_1, beta_1, tau_1)
2 %Esta funcion permite obtener los coeficientes An, Bn, Cn, Dn, In(terminos
3 %independientes) para el sistema de ecuaciones de la dispersion acustica de una
4 %esfera viscoelastica rodeada de un fluido viscoso. Basado en el
5 %procedimiento de S.M.Hasheminejad, B. Harsini 2003. Effects of dynamic
   viscoelastic properties on acoustic
6 %diffraction by a solid sphere submerged in a viscous fluid.
7 %Obs. Para las ecuaciones (28) y (30) los coeficientes de orden cero se
8 %calculan independiente a los de mayor orden.
9
10 %Las variables que acepta la funcion son:
11 %
12 %Radio de la esfera (a) [m]
13 %Los ordenes para la solucion del sistema (n)
14 %Angulo polar en radianes (theta)
15 %Frecuencia angular (w) [rad/s]
16 %Razon de poisson para la esfera (nu_1)
17 %Velocidad en el fluido circundante (c) [m/s]
18 %Modulo de viscosidad tangencial de corte (mu) [kg/ms]
19 %Modulo de viscosidad volumetrica (mu_b) [kg/ms]
20 %Densidad del fluido (rho_l) [kg/m^3]
21 %Densidad de la esfera (rho_s) [kg/m^3]
22 %Amplitud de la onda plana incidente (phi_0) [m^2/s]
23 %-----Parametros del modelo viscoelastico de Havriliak-Negami (HN)-----
24 %Modulo de relajacion (G0_1) [pa]
25 %Modulo no relajado (Ginf_1) [pa]
26 %Ancho de la relajacion (alpha_1) [0<alpha_1<1]
27 %Asimetria de la relajacion (beta_1) [0<beta_1<1]
28 %Tiempo de relajacion (tau_1) [s]
29
30 jn=@jb;
31 jdn=@jd;
32 jdn2=@jd2;
33 hn=@hb;
34 hdn=@hd1;
35 hdn2=@hd2;
36 function y=jb(n, x)
37 % Esta funcion calcula la funcion de Bessel de primera especie "jn"
38 y=(sqrt(pi./(2*x))).*besselj(n+0.5, x);
39 end
40
41 function y=jd(n, x)
42 %Esta funcion calcula la derivada de la funcion de Bessel de primera especie
43 y=-jb(n+1, x)+(n.*jb(n, x))./x;
44 end
45
46 function y=jd2(n, x)
47 %Esta funcion calcula la segunda derivada de la funcion de Bessel de
48 %primer orden
49 y=(1/4)*jb(n-2, x)+((3-2*(x.^2))./(4*x.^2)).*jb(n, x)+(1./(2*x)).*jb(n+1, x)
   +(1/4)*jb(n+2, x)-(1./(2*x)).*jb(n-1, x);

```

```

50 %wolfram https://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/SphericalBesselJ/20/01/02/0008/
51 end
52
53 function y=hb(n,x)
54 % Esta funcion calcula la funcion de Hankel
55 y=(sqrt(pi./(2*x))).*besselh(n+0.5,1,x);
56 end
57
58 function y=hd1(n,x)
59 %Esta funcion calcula la primera derivada de la funcion de Hankel
60 y=-hb(n+1,x)+(n.*hb(n,x))./x;
61 end
62
63 function y=hd2(n,x)
64 % Esta funcion calcula la segunda derivada de la funcion de Hankel
65 y=(1/4)*hb(n-2,x)+((3-2*(x.^2))./(4*x.^2)).*hb(n,x)+(1./(2*x)).*hb(n+1,x)
66 +(1/4)*hb(n+2,x)-(1./(2*x)).*hb(n-1,x);
67 %wolfram https://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/SphericalBesselJ/20/01/02/0008/
68 end
69
70 %Se calcula el modulo de corte "mod_corte" utilizando
71 %el modelo de HN. Donde g1 corresponde al modulo de almacenamiento y
72 %g2 al modulo de perdida.
73
74 k=atan((w.^(alpha_1)*tau_1^(alpha_1)*sin(alpha_1*pi/2))./(1+w.^(alpha_1)*
75 tau_1^(alpha_1)*cos(alpha_1*pi/2)));
76 g1= Ginf_1+((G0_1-Ginf_1).*cos(beta_1*k))./(1+2*w.^(alpha_1)*tau_1^(alpha_1)
77 *cos(alpha_1*pi/2)+w.^(2*alpha_1)*tau_1^(2*alpha_1)).^(beta_1/2);
78 g2=((Ginf_1-G0_1).*sin(beta_1.*k))./(1+2*w.^(alpha_1)*tau_1^(alpha_1)*cos(
79 alpha_1*pi/2)+w.^(2*alpha_1)*tau_1^(2*alpha_1)).^(beta_1/2);
80 mod_corte=g1+1i*g2;
81
82 %Se calculan las constantes de Lamé complejas L1 y L2.
83
84 L1= (2*nu*mod_corte)./(1-2*nu);
85 L2=mod_corte;
86
87 %Se calculan los vectores de onda tanto para el fluido
88 %como para el solido donde:
89 %kc, y ks son los vectores de onda de compresion y corte para el fluido [1/m
90 ]
91 %Kc y Ks son los vectores de onda de compresion y corte para el
92 viscoelastico [1/m]
93
94 kc=(w./c).*(1+((1i*w*mu)./(2*rho_1*c^2)).*((4/3)+mu_b/mu));
95
96 ks=(1+1i)*sqrt((w*rho_1)./(2*mu));
97
98 Kc=w./sqrt((L1+2*L2)/rho_s);
99 Ks=w./sqrt(L2/rho_s);
100
101 %
102 x_kc=kc*a;

```

```

100     x_ks=ks*a;
101     x_Kc=Kc*a;
102     x_Ks=Ks*a;
103
104     %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
105     %coeficiente an para ordenes mayores que cero.
106
107     a1=-kc.*hdn(n,x_kc);
108
109     a2=(1/a)*hn(n, x_kc);
110
111     a3=((1i*w*rho_l-2*mu*(kc.^2)).*hn(n, x_kc)-2*mu*(kc.^2).*hdn2(n, x_kc));
112
113     a4=(2*mu)*((1/a)*hdn(n,x_kc).*kc-(1/a^2)*hn(n, x_kc));
114
115     %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
116     %coeficiente bn para ordenes mayores que cero.
117
118     b1=(1/a)*hn(n,x_ks).*(n.*(n+1));
119
120     b2=-((1/a)*hn(n,x_ks)+ks.*hdn(n,x_ks));
121
122     b3=(2*mu)*((1/a)*hdn(n,x_ks).*ks-hn(n,x_ks)*(1/a^2)).*(n.*(n+1));
123
124     b4=mu*((2-(n+1).*n)*(1/a^2).*hdn(n,x_ks)-(ks.^2).*hdn2(n,x_ks));
125
126     %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
127     %coeficiente cn para ordenes mayores que cero.
128
129     c1=1i*w.*Kc.*jdn(n, x_Kc);
130
131     c2=-1i*w.*jn(n, x_Kc)*(1/a);
132
133     c3=(Kc.^2).*(-2*L2.*jdn2(n, x_Kc)+L1.*jn(n, x_Kc));
134
135     c4=(2*L2).*((1/a)*jdn(n, x_Kc).*Kc-jn(n,x_Kc)*(1/a^2));
136
137     %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
138     %coeficiente dn para ordenes mayores que cero.
139
140     d1=1i*w.*jn(n,x_Ks).*(n.*(n+1))*(1/a);
141
142     d2=-1i*w.*((1/a)*jn(n,x_Ks)+ Ks.*jdn(n,x_Ks));
143
144     d3=- (2*L2).*((1/a)*jdn(n,x_Ks).*(Ks)-(1/a^2)*jn(n,x_Ks)).*(n.*(n+1)) ;
145
146     d4=L2.*((-2+n.*(n+1))*(1/a^2).*jn(n,x_Ks)+(Ks.^2).*jdn2(n,x_Ks));
147
148     %Estas expresiones corresponde a los terminos independientes para ordenes
149     %mayores que cero.
150
151     I1=kc*phi_0.*jdn(n,x_kc);
152
153     I2=-phi_0*jn(n,x_kc)*(1/a);
154
155     I3=-((1i*w*rho_l-2*mu*(kc.^2)).*jn(n,x_kc)-2*mu*(kc.^2).*jdn2(n,x_kc))*phi_0
156     ;

```

```

156 I4=2*mu*phi_0*((1/a^2)*jn(n,x_kc)-(1/a)*jdn(n,x_kc).*kc);
157
158 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican a los
159 %coeficientes para el orden cero.
160
161 a01=-kc.*hdn(0,x_kc);
162 a03=((1i*w*rho_1-2*mu*(kc.^2)).*hn(0,x_kc)-2*mu*(kc.^2).*hdn2(0,x_kc));
163 c01=1i*w.*Kc.*jdn(0,x_Kc);
164 c03=(Kc.^2).*(-2*L2.*jdn2(0,x_Kc)+L1.*jn(0,x_Kc));
165 I01=kc*phi_0.*jdn(0,x_kc);
166 I03=-((1i*w*rho_1-2*mu*(kc.^2)).*jn(0,x_kc)-2*mu*(kc.^2).*jdn2(0,x_kc))*
    phi_0;
167 end
168
169 [jdn,jdn2,jn,hn,hdn,hdn2,a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4,c1,c2,c3,c4,d1,d2,d3,d4,I1,I2,
    I3,I4,kc,a01,a03,c01,c03,I01,I03]=f_especiales_2(a,n,w,nu,c,mu,mu_b,rho_1,
    rho_s,phi_0,G0_1,Ginf_1,alpha_1,beta_1,tau_1);
170
171 %Matrices para el orden cero
172
173 M0=[a01 c01;a03 c03];
174 M02=[I01 c01;I03 c03];
175 f0=det(M02)/det(M0);
176
177 w_size=size(w,1); %Regresa el tamaño de la matriz de frecuencias en la primera
    dimension (renglones)
178 n_size=size(n,2); %Regresa el tamaño de la matriz de ordenes en la segunda
    dimension (columnas)
179 theta_size=size(theta,2); %Regresa el tamaño de la matriz de angulos en la
    tercera dimension
180 h_3=[];
181 for i=1:w_size
182     h_2=[f0];
183     for j=1:n_size
184         % Metodo de determinantes
185         M=[a1(i,j) b1(i,j) c1(i,j) d1(i,j);a2(i,j) b2(i,j) c2(i,j) d2(i,j); a3(i
            ,j) b3(i,j) c3(i,j) d3(i,j); a4(i,j) b4(i,j) c4(i,j) d4(i,j) ] ;
186         M2=[I1(i,j) b1(i,j) c1(i,j) d1(i,j);I2(i,j) b2(i,j) c2(i,j) d2(i,j); I3(
            i,j) b3(i,j) c3(i,j) d3(i,j); I4(i,j) b4(i,j) c4(i,j) d4(i,j) ] ;
187         f=det(M2)/det(M);
188         h_2=[h_2 f];
189     end
190     h_3=[h_3;h_2];
191 end
192
193 n1=0:40;
194 n1_size=size(n,2);
195 %Este ciclo anidado calcula la presin dispersada, para cada orden, frecuencia y
    angulo
196 P_s=[];
197 for i=1:theta_size
198     Ps_2=[];
199     for j=1:n1_size
200         Ps_1=[];
201         for k=1:w_size
202             P=(phi_0./(kc*a*10)).*(((4*mu/3)+mu_b)*(kc.^2)-1j*w*rho_1).*(-(1j^(n1
                (j)+1))).*(2*n1(j)+1).*h_3(k,j).*(exp(1j*(kc*a-(n1(j)*pi)/2)))*legendreP(n1(
                j),cos(theta(i)));

```

```
203     Ps_1=[Ps_1 P];
204     end
205     Ps_2=[Ps_2 Ps_1];
206     end
207     P_s=cat(3,P_s,Ps_2);
208 end
209
210 P_total=sum(P_s,2);           %Suma las presiones dispersadas para
    todos los ordenes
211 sigma=(abs(P_total))/(rho_l.*c.^2); %Presion dispersada adimensional
212 sigma2=sigma./max(sigma);     %Presion dispersada normalizada
213 polarplot(theta,sigma2(1,:), 'LineWidth',3) %Patron de dispersion
```

Esfera elástica con coraza viscoelástica

```

1 function [jdn, jdn2, jn, hn, hdn, hdn2, HN, HDN, HDN2, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, B1, B2, B3,
   B4, B5, B6, B7, B8, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, E1, E2, E3, E4,
   E5, E6, E7, E8, F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, Q1, Q2, Q3, Q4, Q5,
   Q6, Q7, Q8, I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, kc, A10, C10, D10, G10, I10, A30, C30, D30, G30, I30,
   A50, C50, D50, G50, I50, A70, C70, D70, G70, I70]=f_especiales_c2(a,b,n,w,nu_1,nu_2,c
   ,mu,mu_b,rho_1,rho_s1,rho_s2,phi_0,G0_1,Ginf_1,alpha_1,beta_1,tau_1,G)
2 %Esta funcion permite obtener los coeficientes An,Bn,Cn,Dn,En,Fn,Gn,Qn,In(
   terminos
3 %independientes) para el sistema de ecuaciones de la dispersion acustica de una
4 %esfera viscoelastica rodeada de un fluido viscoso. Basado en el
5 %procedimiento de S.M.Hasheminejad,N.Safari 2003. Journal of the sound and
6 % vibration.
7 %Obs. Para las ecuaciones (27b,d,g,h) los coeficientes de orden cero se
8 %calculan independiente a los de mayor orden.
9
10 %Las variables que acepta la funcion son:
11 %
12 %Radio de la coraza (a) [m]
13 %Radio del nucleo (b) [m]
14 %Los ordenes para la solucion del sistema (n)
15 %Angulo polar en radianes (theta)
16 %Frecuencia angular (w) [rad/s]
17 %Razon de poisson para la coraza (nu_1)
18 %Razon de poisson para el nucleo (nu_2)
19 %Velocidad en el fluido circundante (c) [m/s]
20 %Modulo de viscosidad tangencial de corte (mu) [kg/ms]
21 %Modulo de viscosidad volumetrica (mu_b) [kg/ms]
22 %Densidad del fluido circundante (rho_1) [kg/m^3]
23 %Densidad de la coraza (rho_s1) [kg/m^3]
24 %Densidad del nucleo (rho_s2) [kg/m^3]
25 %Amplitud de la onda plana incidente (phi_0) [m^2/s]
26 %-----Parametros del modelo viscoelastico de Havriliak-Negami (HN)-----
27 %Modulo de relajacion (coraza) (G0_1) [pa]
28 %Modulo no relajado (coraza) (Ginf_1) [pa]
29 %Modulo de relajacion (nucleo) (G0_2) [pa]
30 %Modulo no relajado (nucleo) (Ginf_2) [pa]
31 %Ancho de la relajacion (coraza) (alpha_1) [0<alpha_1<1]
32 %Asimetria de la relajacion (coraza) (beta_1) [0<beta_1<1]
33 %Tiempo de relajacion (coraza) (tau_1) [s]
34 %Ancho de la relajacion (nucleo) (alpha_2) [0<alpha_1<1]
35 %Asimetria de la relajacion (nucleo) (beta_2) [0<beta_1<1]
36 %Tiempo de relajacion (nucleo) (tau_2) [s]
37
38 jn=@jb;
39 jdn=@jd;
40 jdn2=@jd2;
41 hn=@hb;
42 hdn=@hd1;
43 hdn2=@hd2;
44 HN=@HB;
45 HDN=@HD1;
46 HDN2=@HD2;
47 function y=jb(n,x)
48 % Esta funcion calcula la funcion de Bessel de primera especie "jn"
49 y=(sqrt(pi./(2*x))).*besselj(n+0.5,x);
50 end

```

```

51
52 function y=jd(n,x)
53 %Esta funcion calcula la derivada de la funcion de Bessel de primera especie
54 y=-jb(n+1,x)+(n.*jb(n,x))./x;
55 end
56
57 function y=jd2(n,x)
58 %Esta funcion calcula la segunda derivada de la funcion de Bessel de
59 %primer orden
60 y=(1/4)*jb(n-2,x)+((3-2*(x.^2))./(4*x.^2)).*jb(n,x)+(1./(2*x)).*jb(n+1,x)
61 +(1/4)*jb(n+2,x)-(1./(2*x)).*jb(n-1,x);
62 %wolfram https://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/SphericalBesselJ/20/01/02/0008/
63 end
64
65 function y=hb(n,x)
66 % Esta funcion calcula la funcion de Hankel
67 y=(sqrt(pi./(2*x))).*besselh(n+0.5,1,x);
68 end
69
70 function y=hd1(n,x)
71 %Esta funcion calcula la primera derivada de la funcion de Hankel
72 y=-hb(n+1,x)+(n.*hb(n,x))./x;
73 end
74
75 function y=hd2(n,x)
76 % Esta funcion calcula la segunda derivada de la funcion de Hankel
77 y=(1/4)*hb(n-2,x)+((3-2*(x.^2))./(4*x.^2)).*hb(n,x)+(1./(2*x)).*hb(n+1,x)
78 +(1/4)*hb(n+2,x)-(1./(2*x)).*hb(n-1,x);
79 %wolfram https://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/SphericalBesselJ/20/01/02/0008/
80 end
81
82 function y=HB(n,x)
83 % Esta funcion calcula la funcion de hankel de segundo orden
84 y=(sqrt(pi./(2.*x))).*besselh(n+0.5,2,x);
85 end
86
87 function y=HD1(n,x)
88 %Esta funcion calcula la primera derivada de la funcion de Hankel de
89 %segundo orden
90 y=-HB(n+1,x)+(n.*HB(n,x))./x;
91 end
92
93 function y=HD2(n,x)
94 % Esta funcion calcula la segunda derivada de la funcion de Hankel de
95 % segundo orden
96 y=(1/4).*HB(n-2,x)+((3-2.*(x.^2))./(4.*x.^2)).*HB(n,x)+(1./(2.*x)).*HB(n+1,x)
97 +(1/4).*HB(n+2,x)-(1./(2.*x)).*HB(n-1,x);
98 end
99
100 %Se calcula el modulo de corte "mod_corte", donde g1 corresponde al modulo
101 % de almacenamiento
102 % y g2 al modulo de perdida. En caso de que se tenga un material
103 viscoelastico se utiliza el
104 %el modelo de Havriliak-Negami (HN).
105
106 %Coraza (medio1_viscoelastico)

```

```

102
103     s=atan((w.^(alpha_1)*tau_1^(alpha_1)*sin(alpha_1*pi/2))./(1+w.^(alpha_1)*
104     tau_1^(alpha_1)*cos(alpha_1*pi/2)));
105
106     g1= Ginf_1+(((G0_1-Ginf_1)*cos(beta_1*s))./(1+2*w.^(alpha_1)*tau_1^(alpha_1)
107     *cos(alpha_1*pi/2)+w.^(2*alpha_1)*tau_1^(2*alpha_1)).^(beta_1/2));
108
109     g2=((Ginf_1-G0_1)*sin(beta_1.*s))./((1+2*w.^(alpha_1)*tau_1^(alpha_1)*cos(
110     alpha_1*pi/2)+w.^(2*alpha_1)*tau_1^(2*alpha_1)).^(beta_1/2));
111
112     mod_corte_C=g1+1i*g2;
113
114     %Nucleo (medio 2)
115     %Para del nucleo hay dos opciones que sea viscoelastico o elastico:
116     %En caso de ser elastico utilizar esta parte :
117
118     mod_corte_N=G;
119
120     %En caso de ser viscoelastico utilizar lo siguiente:
121
122     %%          k_2=atan((w.^(alpha_2).*tau_2.^(alpha_2).*sin(alpha_2*pi/2))./(1+w.^(
123     alpha_2).*tau_2.^(alpha_2).*cos(alpha_2*pi/2)));
124
125     %%          g1_n=Ginf_2+(((G0_2-Ginf_2).*cos(beta_2.*k_2))./(1+2.*w.^(alpha_2).*
126     tau_2.^(alpha_2).*cos(alpha_2*pi/2)+w.^(2.*alpha_2).*tau_2.^(2.*alpha_2)).^(
127     beta_2./2));
128
129     %%          g2_n=((Ginf_2-G0_2).*sin(beta_2.*k_2))./(1+2.*w.^(alpha_2).*tau_2.^(
130     alpha_2).*cos(alpha_2*pi/2)+w.^(2.*alpha_2).*tau_2.^(2.*alpha_2)).^(beta_2
131     ./2);
132
133     %%          mod_corte_N=g1n+1i.*g2n;
134
135     %Se calculan las constantes de Lamé complejas L1 y L2, tanto
136     %para la coraza 'C' como para el nucleo 'N'
137
138     L1_C= (2*nu_1*mod_corte_C)/(1-2*nu_1);
139
140     L2_C=mod_corte_C;
141
142     L1_N= (2*nu_2*mod_corte_N)/(1-2*nu_2);
143
144     L2_N=mod_corte_N;
145
146     % Se calculan los vectores de onda tanto para el fluido
147     %como para el sistema coraza-nucleo donde:
148     %kc, y ks vector de onda de compresion y corte para el fluido [1/m]
149     %Kc y Ks vector de onda de compresion y corte para el solido,
150     %donde 1 esta relacionado con la coraza y 2 con el nucleo [1/m]
151
152     kc=(w./c).*(1+((1i*w*mu)/(2*rho_1*(c^2)))*((4/3)+(mu_b/mu)));
153
154     ks=(1+1i)*sqrt((w.*rho_1)/(2*mu));
155
156     Kc_1=w./sqrt((L1_C+2*L2_C)/rho_s1);
157
158     Ks_1=w./sqrt(L2_C/rho_s1);

```

```

152 Kc_2=w./sqrt((L1_N+2*L2_N)/rho_s2);
153
154 Ks_2=w./sqrt(L2_N/rho_s2);
155
156 x_kc=kc*a;
157 x_ks=ks*a;
158 x_Kc_1=Kc_1*a;
159 x_Kc_1b=Kc_1*b;
160 x_Ks_1=Ks_1*a;
161 x_Ks_1b=Ks_1*b;
162 x_Kc_2=Kc_2*b;
163 x_Ks_2=Ks_2*b;
164
165 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
166 %coeficiente an para ordenes mayores que cero.
167
168 A1=-kc.*hdn(n,x_kc);
169
170 A2=hn(n,x_kc);
171
172 A3=(1i*w*rho_l-2*mu*(kc.^2)).*hn(n,x_kc)-2*mu*(kc.^2).*hdn2(n,x_kc);
173
174 A4=(2*mu)*(a*hdn(n,x_kc).*kc-hn(n,x_kc));
175
176 A5=0*n.*w;
177
178 A6=0*n.*w;
179
180 A7=0*n.*w;
181
182 A8=0*n.*w;
183
184 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
185 %coeficiente bn para ordenes mayores que cero.
186
187 B1=(1/a)*hn(n,x_ks).*(n.*(n+1));
188
189 B2=-hn(n,x_ks)-x_ks.*hdn(n,x_ks);
190
191 B3=-((2*mu*n.*(n+1))/(a^2)).*(hn(n,x_ks)-x_ks.*hdn(n,x_ks));
192
193 B4=mu.*((2-n.*(n+1)).*hn(n,x_ks)-(x_ks.^2).*hdn2(n,x_ks));
194
195 B5=0*n.*w;
196
197 B6=0*n.*w;
198
199 B7=0*n.*w;
200
201 B8=0*n.*w;
202
203 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
204 %coeficiente cn para ordenes mayores que cero.
205
206 C1=1i*w.*Kc_1.*hdn(n,x_Kc_1);
207
208 C2=-1i*w.*hn(n,x_Kc_1);
209

```

```

210 C3=- (Kc_1.^2) .* (2*L2_C.*hdn2(n,x_Kc_1)-L1_C.*hn(n,x_Kc_1));
211
212 C4=(2*L2_C) .* (hdn(n,x_Kc_1).*x_Kc_1-hn(n,x_Kc_1));
213
214 C5=-Kc_1.*hdn(n,x_Kc_1b);
215
216 C6=hn(n,x_Kc_1b);
217
218 C7=(Kc_1.^2) .* (L1_C.*hn(n,x_Kc_1b)-2*L2_C.*hdn2(n,x_Kc_1b));
219
220 C8=(2*L2_C) .* (hdn(n,x_Kc_1b).*x_Kc_1b-hn(n,x_Kc_1b));
221
222 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
223 %coeficiente dn para ordenes mayores que cero.
224
225 D1=1i*w.*Kc_1.*HD1(n,x_Kc_1);
226
227 D2=-1i.*w.*HN(n,x_Kc_1);
228
229 D3=- (Kc_1.^2) .* (2*L2_C.*HDN2(n,x_Kc_1)-L1_C.*HN(n,x_Kc_1)) ;
230
231 D4=(2*L2_C) .* (x_Kc_1.*HDN(n,x_Kc_1)-HN(n,x_Kc_1));
232
233 D5=-Kc_1.*HDN(n,x_Kc_1b);
234
235 D6=HN(n,x_Kc_1b);
236
237 D7=(Kc_1.^2) .* (L1_C.*HN(n,x_Kc_1b)-2*L2_C.*HDN2(n,x_Kc_1b));
238
239 D8=(2*L2_C) .* (x_Kc_1b.*HDN(n,x_Kc_1b)-HN(n,x_Kc_1b));
240
241 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
242 %coeficiente 'en' para ordenes mayores que cero.
243
244 E1=((1i*w.*n.*(n+1))/a) .* (hn(n,x_Ks_1));
245
246 E2=(-1i*w) .* (hn(n,x_Ks_1)+x_Ks_1.*hdn(n,x_Ks_1));
247
248 E3=((2*L2_C.*n.*(n+1))/(a^2) .* (hn(n,x_Ks_1)-x_Ks_1.*hdn(n,x_Ks_1)) ;
249
250 E4=-L2_C .* ((2-n.*(n+1)) .* hn(n,x_Ks_1)-(x_Ks_1.^2) .* hdn2(n,x_Ks_1));
251
252 E5=(-(n.*(n+1))/b) .* hn(n,x_Ks_1b);
253
254 E6=hn(n,x_Ks_1b)+x_Ks_1b.*hdn(n,x_Ks_1b);
255
256 E7=(-(2*n.*(n+1)*L2_C)/(b^2) .* (-hn(n,x_Ks_1b)+x_Ks_1b.*hdn(n,x_Ks_1b));
257
258 E8=-L2_C*((2-n.*(n+1)) .* hn(n,x_Ks_1b)-(x_Ks_1b.^2) .* hdn2(n,x_Ks_1b));
259
260 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
261 %coeficiente fn para ordenes mayores que cero.
262
263 F1=((1i*w.*n.*(n+1))/a) .* (HN(n,x_Ks_1));
264
265 F2=(-1i*w) .* (HN(n,x_Ks_1)+x_Ks_1.*HDN(n,x_Ks_1));
266
267 F3=((2*L2_C.*n.*(n+1))/(a^2) .* (HN(n,x_Ks_1)-x_Ks_1.*HDN(n,x_Ks_1));

```

```

268
269 F4=-L2_C*((2-n.*(n+1)).*HN(n,x_Ks_1)-(x_Ks_1.^2).*HDN2(n,x_Ks_1));
270
271 F5=(-(n.*(n+1))/b).*HN(n,x_Ks_1b);
272
273 F6=HN(n,x_Ks_1b)+x_Ks_1b.*HDN(n,x_Ks_1b);
274
275 F7=(-(2*n.*(n+1).*L2_C)/(b^2)).*(-HN(n,x_Ks_1b)+x_Ks_1b.*HDN(n,x_Ks_1b));
276
277 F8=-L2_C*((2-n.*(n+1)).*HN(n,x_Ks_1b)-(x_Ks_1b.^2).*HDN2(n,x_Ks_1b));
278
279 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
280 %coeficiente gn para ordenes mayores que cero.
281
282 G1=0*n.*w;
283
284 G2=0*n.*w;
285
286 G3=0*n.*w;
287
288 G4=0*n.*w;
289
290 G5=Kc_2.*jdn(n,x_Kc_2);
291
292 G6=-jn(n,x_Kc_2);
293
294 G7=(Kc_2.^2).*(2*L2_N.*jdn2(n,x_Kc_2)-L1_N.*jn(n,x_Kc_2));
295
296 G8=-2*L2_N.*(x_Kc_2.*jdn(n,x_Kc_2)-jn(n,x_Kc_2));
297
298 %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican al
299 %coeficiente qn para ordenes mayores que cero.
300
301 Q1=0*n.*w;
302
303 Q2=0*n.*w;
304
305 Q3=0*n.*w;
306
307 Q4=0*n.*w;
308
309 Q5=((n.*(n+1))/b).*jn(n,x_Ks_2);
310
311 Q6=-jn(n,x_Ks_2)-x_Ks_2.*jdn(n,x_Ks_2);
312
313 Q7=(-(2*L2_N.*n.*(n+1))/(b^2)).*(jn(n,x_Ks_2)-x_Ks_2.*jdn(n,x_Ks_2));
314
315 Q8=L2_N.*((2-n.*(n+1)).*jn(n,x_Ks_2)-(Ks_2.^2).*jdn2(n,x_Ks_2));
316
317 %Estas expresiones corresponde a los terminos independientes para ordenes
318 %mayores que cero.
319
319 I1=kc.*phi_0.*jdn(n,x_kc);
320
321 I2=-phi_0*jn(n,x_kc);
322
323 I3=-((1i*w*rho_1-2*mu*(kc.^2)).*jn(n,x_kc)-2*mu*(kc.^2).*jdn2(n,x_kc))*phi_0
;

```

```

324
325     I4=2*mu*phi_0*(jn(n,x_kc)-jdn(n,x_kc).*x_kc);
326
327     I5=0*n.*w;
328
329     I6=0*n.*w;
330
331     I7=0*n.*w;
332
333     I8=0*n.*w;
334
335     %Estas expresiones corresponde a los valores que multiplican a los
336     %coeficientes para el orden cero.
337
338     A10= -kc.*hdn(0,x_kc);
339     C10=1i*w.*Kc_1.*hdn(0,x_Kc_1);
340     D10=1i*w.*Kc_1.*HD1(0,x_Kc_1);
341     G10=0;
342     I10=kc.*phi_0.*jdn(0,x_kc);
343
344     A30=(1i*w*rho_1-2*mu*(kc.^2)).*hn(0,x_kc)-2*mu*(kc.^2).*hdn2(0,x_kc);
345     C30=-(Kc_1.^2).*(2*L2_C.*hdn2(0,x_Kc_1)-L1_C.*hn(0,x_Kc_1));
346     D30=-(Kc_1.^2).*(2*L2_C.*HDN2(0,x_Kc_1)-L1_C.*HN(0,x_Kc_1));
347     G30=0;
348     I30=-((1i*w*rho_1-2*mu*(kc.^2)).*jn(0,x_kc)-2*mu*(kc.^2).*jdn2(0,x_kc))*
349     phi_0;
350
351     A50=0;
352     C50=-Kc_1.*hdn(0,x_Kc_1b);
353     D50=-Kc_1.*HDN(0,x_Kc_1b);
354     G50=Kc_2.*jdn(0,x_Kc_2);
355     I50=0;
356
357     A70=0;
358     C70=(Kc_1.^2).*(L1_C.*hn(0,x_Kc_1b)-2*L2_C.*hdn2(0,x_Kc_1b));
359     D70=(Kc_1.^2).*(L1_C.*HN(0,x_Kc_1b)-2*L2_C.*HDN2(0,x_Kc_1b));
360     G70=(Kc_2.^2).*(2*L2_N.*jdn2(0,x_Kc_2)-L1_N.*jn(0,x_Kc_2));
361     I70=0;
362 end
363
364 [jdn,jdn2,jn,hn,hdn,hdn2,HN,HDN,HDN2,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,B1,B2,B3,B4,B5,B6,
365 B7,B8,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,
366 E8,F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,
367 I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8,kc,A10,C10,D10,G10,I10,A30,C30,D30,G30,I30,A50,C50,
368 D50,G50,I50,A70,C70,D70,G70,I70]=f_especiales_c2(a,b,n,w,nu_1,nu_2,c,mu,mu_b
369 ,rho_1,rho_s1,rho_s2,phi_0,G0_1,Ginf_1,alpha_1,beta_1,tau_1,G);
370
371
372 %Matrices para el orden cero
373
374 M0=[A10 C10 D10 G10;A30 C30 D30 G30; A50 C50 D50 G50; A70 C70 D70 G70];
375 M02=[I10 C10 D10 G10;I30 C30 D30 G30; I50 C50 D50 G50; I70 C70 D70 G70];
376 f0=det(M02)/det(M0);
377
378 w_size=size(w,1); %Regresa el tamaño de la matriz de frecuencias en la primera
379     dimension (renglones)
380 n_size=size(n,2); %Regresa el tamaño de la matriz de ordenes en la segunda
381     dimension (columnas)

```

A.9 Códigos de MATLAB

```

374 theta_size=size(theta,2); %Regresa el tamaño de la matriz de ángulos en la
    tercera dimension
375 h_3=[];
376 for i=1:w_size
377     h_2=[f0];
378     for j=1:n_size
379         % Metodo de determinantes
380             M=[A1(i,j) B1(i,j) C1(i,j) D1(i,j) E1(i,j) F1(i,j) G1(i,j) Q1(i,j);A2(i,
j) B2(i,j) C2(i,j) D2(i,j) E2(i,j) F2(i,j) G2(i,j) Q2(i,j); A3(i,j) B3(i,j)
C3(i,j) D3(i,j) E3(i,j) F3(i,j) G3(i,j) Q3(i,j);
381             A4(i,j) B4(i,j) C4(i,j) D4(i,j) E4(i,j) F4(i,j) G4(i,j) Q4(i,j); A5(i
,j) B5(i,j) C5(i,j) D5(i,j) E5(i,j) F5(i,j) G5(i,j) Q5(i,j);A6(i,j) B6(i,j)
C6(i,j) D6(i,j) E6(i,j) F6(i,j) G6(i,j) Q6(i,j);
382             A7(i,j) B7(i,j) C7(i,j) D7(i,j) E7(i,j) F7(i,j) G7(i,j) Q7(i,j);A8(i,
j) B8(i,j) C8(i,j) D8(i,j) E8(i,j) F8(i,j) G8(i,j) Q8(i,j)];
383             M2=[I1(i,j) B1(i,j) C1(i,j) D1(i,j) E1(i,j) F1(i,j) G1(i,j) Q1(i,j);I2(i
,j) B2(i,j) C2(i,j) D2(i,j) E2(i,j) F2(i,j) G2(i,j) Q2(i,j);I3(i,j) B3(i,j)
C3(i,j) D3(i,j) E3(i,j) F3(i,j) G3(i,j) Q3(i,j);
384             I4(i,j) B4(i,j) C4(i,j) D4(i,j) E4(i,j) F4(i,j) G4(i,j) Q4(i,j); I5(i
,j) B5(i,j) C5(i,j) D5(i,j) E5(i,j) F5(i,j) G5(i,j) Q5(i,j);I6(i,j) B6(i,j)
C6(i,j) D6(i,j) E6(i,j) F6(i,j) G6(i,j) Q6(i,j);
385             I7(i,j) B7(i,j) C7(i,j) D7(i,j) E7(i,j) F7(i,j) G7(i,j) Q7(i,j);I8(i,
j) B8(i,j) C8(i,j) D8(i,j) E8(i,j) F8(i,j) G8(i,j) Q8(i,j)];
386             f=det(M2)/det(M);
387             h_2=[h_2 f ];
388         end
389     h_3=[h_3;h_2];
390 end
391
392
393 n1=0:40;
394 n1_size=size(n,2);
395 %Este ciclo anidado calcula la presión dispersada, para cada orden, frecuencia y
    ángulo
396 P_s=[];
397 for i=1:theta_size
398     Ps_2=[];
399     for j=1:n1_size
400         Ps_1=[];
401         for k=1:w_size
402             P=(phi_0./(kc*a*10)).*(((4*mu/3)+mu_b)*(kc.^2)-1j*w*rho_l).*(-(1j^(n1
(j)+1))).*(2*n1(j)+1).*h_3(k,j).*(exp(1j*(kc*a-(n1(j)*pi)/2)))*legendreP(n1(
j),cos(theta(i)));
403             Ps_1=[Ps_1 P];
404         end
405         Ps_2=[Ps_2 Ps_1];
406     end
407     P_s=cat(3,P_s,Ps_2);
408 end
409
410 P_total=sum(P_s,2); %Suma las presiones dispersadas para
    todos los ordenes
411 sigma=(abs(P_total))/(rho_l.*c.^2); %Presión dispersada adimensional
412 sigma2=sigma./max(sigma); %Presión dispersada normalizada
413 polarplot(theta,sigma2(1,:), 'LineWidth',3) %Patrón de dispersión

```

A.10. Códigos de Python

Esfera viscoelástica

```

1 import numpy as np
2 import importlib
3 from FP1_US import *
4
5 # import our own files and reload
6 import FP1_US
7 importlib.reload(FP1_US)
8 import CP1_US
9 importlib.reload(CP1_US)
10
11 n=np.array([np.arange(1,51)]) #Ordenes
12 a=5e-4 #Radio de la esfera
13 ka=10 #Frecuencia adimensional
14 theta=np.array([np.linspace(0,2*np.pi,100)]) #Angulos de medicion
15
16 material=CP1_US.viscoelastic_sphere(n,a,ka,theta)
17 material.coefficients()
18 material.scatter_pressure()
19 material.plot_radiation_pressure()
20
21 import math as mt
22 import math
23 from scipy.special import jv,yv,hankel1,hankel2,spherical_jn,spherical_yn,jvp,
    yvp,h1vp,h2vp,legendre
24
25
26 # Polinomios de Legendre
27 def legendref(n,x):
28     if type(n) is int:
29
30         polynomial_legendre=legendre(n)
31         legendre_function=polynomial_legendre(np.cos(x))
32         return legendre_function
33     elif n[0]==0:
34         polynomial_legendre=[legendre(i) for i in n]
35         legendre_function=np.array([polynomial_legendre[i](np.cos(x)) for i in n]).
    T
36     return legendre_function
37     elif n[0]==1:
38         polynomial_legendre=[legendre(i) for i in n]
39         legendre_function=np.array([polynomial_legendre[i](np.cos(x)) for i in n
    -1]).T
40     return legendre_function
41
42 #Primera derivada de los polinomios de Legendre
43 def legendrep1(n,x):
44     first_derivate_legendre=(-(n+1))*((np.cos(x)/np.sin(x))*legendre_n-(1/np.sin
    (x))*legendre_n1)
45     return first_derivate_legendre
46
47 #Segunda derivada de la funcion de Bessel de primera especie
48 def spherical_jn2(n,x):
49     second_derivate_spherical_bessel_first_type=3*np.sqrt(mt.pi)*jv(n+1/2,x)\

```

```

50     /np.power(2*x,5/2)-2*np.sqrt(mt.pi)*jvp(n+1/2,x,1)/np.power(2*x,3/2)+jvp
      (n+1/2,x,2)*np.sqrt(mt.pi/(2*x))
51     return second_derivate_spherical_bessel_first_type
52
53 #Segunda derivada de la funcion de Bessel de segunda especie
54 def spherical_yn2(n,x):
55     second_derivate_spherical_bessel_second_type=3*np.sqrt(mt.pi)*yv(n+1/2,x)/\
56     pow(2*x,5/2)-2*np.sqrt(mt.pi)*yvp(n+1/2,x,1)/pow(2*x,3/2)+yvp(n+1/2,x,2)
      *\
57     np.sqrt(mt.pi/(2*x))
58     return second_derivate_spherical_bessel_second_type
59
60 #Funcion de Hankel esferica de primer orden
61 def spheh1(n,x):
62     function_spherical_hankel_first_type=np.sqrt(np.pi/(2*x))*hankel1(n+0.5,x)
63     return function_spherical_hankel_first_type
64
65 #Primera derivada de la funcion de hankel de primer orden
66 def spheh1p1(n,x):
67     first_derivate_spherical_hankel_first_type=-np.sqrt(np.pi)*hankel1(n+1/2,x)
      /\
68     np.power(2*x,3/2)+np.sqrt(np.pi/(2*x))*h1vp(n+1/2,x,1)
69     return first_derivate_spherical_hankel_first_type
70
71 #Segunda derivada de la funcion de hankel de primer orden
72 def spheh1p2(n,x):
73     second_derivate_spherical_hankel_fisrt_type=3*np.sqrt(np.pi)*hankel1(n+1/2,x)
      /\
74     np.power(2*x,5/2)-2*np.sqrt(np.pi)*h1vp(n+1/2,x,1)/np.power(2*x,3/2)+
      h1vp(n+1/2,x,2)\
75     *np.sqrt(np.pi/(2*x))
76     return second_derivate_spherical_hankel_fisrt_type
77
78 # Funcion de Hankel esferica de segundo orden
79 def spheh2(n,x):
80     function_spherical_hankel_second_type=np.sqrt(np.pi/(2*x))*hankel2(n+0.5,x)
81     return function_spherical_hankel_second_type
82
83 #Primera derivada de la funcion de Hankel de segundo orden
84 def spheh2p1(n,x):
85     first_derivate_spherical_hankel_second_type=-np.sqrt(mt.pi)*hankel2(n+1/2,x)
      /\
86     np.power(2*x,3/2)+np.sqrt(mt.pi/(2*x))*h2vp(n+1/2,x,1)
87     return first_derivate_spherical_hankel_second_type
88
89 #Segunda derivada de la funcion de Hankel de segundo orden
90 def spheh2p2(n,x):
91     second_derivate_spherical_hankel_second_type=3*np.sqrt(mt.pi)*hankel2(n+1/2,
      x)/\
92     np.power(2*x,5/2)-2*np.sqrt(mt.pi)*h2vp(n+1/2,x,1)/np.power(2*x,3/2)+
      h2vp(n+1/2,x,2)*np.sqrt(mt.pi/(2*x))
93     return second_derivate_spherical_hankel_second_type
94
95
96 import pandas as pd
97 import matplotlib.pyplot as plt
98 from FP1_US import spheh1p1, spheh1p2, spheh1, spheh2p1, spheh2p2, spheh2,
      spherical_jn2, legendref, legendrep1

```

```

99 # import our own files and reload
100 import FP1_US
101 importlib.reload(FP1_US)
102
103 class Material_characterization():
104
105     def __init__(self,n,a,ka,theta):
106         self.n=n
107         self.a=a
108         self.ka=ka
109         self.theta=theta
110
111         ##### Cambiar ruta del archivo
112         archivo = 'C://Users//Thinkpad//Downloads//drive-download-20210420
T024620Z-001//DatosPolimeros.xlsx'
113
114         medio= pd.read_excel(archivo, sheet_name='Glicerina')
115         self.c,self.rho_l,self.mu,self.mu_b=medio.values.T
116
117         polymer18=pd.read_excel(archivo,sheet_name='Polymer20')
118         self.G02,self.G_inf2,self.alpha2,self.beta2,self.tau2,self.rho_s2,self.
nu2=polymer18.values.T
119
120         #Se utiliza el modelo de Havriliak-Negami para obtener los valores del
modulo de corte para los materiales viscoelásticos
121         #donde g1 corresponde al modulo de almacenamiento y g2 al modulo de perdida
122         self.phi=1.0
123         self.w=(self.ka*self.c/self.a)
124         self.k_core=np.arctan((np.power(self.w,self.alpha2)*np.power(self.tau2,
self.alpha2)\
125             *np.sin(self.alpha2*np.pi/2))/(1+np.power(self.w,self.alpha2)*np.
power(self.tau2,self.alpha2)\
126             *np.cos(self.alpha2*np.pi/2)))
127
128         self.g1_core= self.G_inf2+((self.G02-self.G_inf2)*np.cos(self.beta2*self
.k_core))\
129             /np.power(1+2*np.power(self.w,self.alpha2)*np.power(self.tau2,self.
alpha2)\
130                 *np.cos(self.alpha2*np.pi/2)+np.power(self.w,2*self.alpha2)\
131                 *np.power(self.tau2,2*self.alpha2),self.beta2/2)
132
133         self.g2_core=((self.G_inf2-self.G02)*np.sin(self.beta2*self.k_core))/\
134             np.power(1+2*np.power(self.w,self.alpha2)*np.power(self.tau2,self.
alpha2)\
135                 *np.cos(self.alpha2*np.pi/2)+np.power(self.w,2*self.alpha2)\
136                 *np.power(self.tau2,2*self.alpha2),self.beta2/2)
137
138         self.shear_core=self.g1_core+1j*self.g2_core #Modulo de corte
139
140         #Constantes de Lamé
141
142         self.Lambda_core=(2*self.nu2*self.shear_core)/(1-2*self.nu2)
143
144         self.Mu_core=self.shear_core
145
146         #ks vector de onda de corte (shear) kc vector de onda longitudinal (
compresion) tanto para el solido
147         #como para el fluido (fluid)

```

```

148
149     self.fluid_kc=(self.w/self.c)*(1+((1j*self.w*self.mu)/(2*self.rho_l*np.
power(self.c,2)))\
150         *(4/3+(self.mu_b/self.mu)))
151     self.fluid_ks=(1+1j)*np.sqrt((self.w*self.rho_l)/(2*self.mu))
152
153     self.kc=self.w/(np.sqrt((self.Lambda_core+2*self.Mu_core)/self.rho_s2))
154     self.ks=self.w/(np.sqrt(self.Mu_core/self.rho_s2))
155
156
157 class viscoelastic_sphere(Material_characterization):
158
159     def coefficients(self):
160         self.x_kc=self.kc*self.a
161         self.x_ks=self.ks*self.a
162         self.x_fluid_kc=self.fluid_kc*self.a
163         self.x_fluid_ks=self.fluid_ks*self.a
164
165         # Expresiones que corresponde a los valores que multiplican a los
coeficientes para el orden cero
166
167         self.a_01=-self.fluid_kc*spheh1p1(0,self.x_fluid_kc)
168         self.a_03=(1j*self.w*self.rho_l-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2))*
spheh1(0,self.x_fluid_kc)\
169             -2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)*spheh1p2(0,self.x_fluid_kc)
170         self.c_01=1j*self.w*self.kc*spherical_jn(0,self.x_kc,derivative=True)
171         self.c_03=self.Lambda_core*np.power(self.kc,2)*spherical_jn(0,self.x_kc
)-2*self.Mu_core\
172             *np.power(self.kc,2)*spherical_jn2(0,self.x_kc)
173         self.I_01=self.phi*self.fluid_kc*spherical_jn(0,self.x_fluid_kc,
derivative=True)
174         self.I_03=2*self.phi*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)*spherical_jn2(0,
self.x_fluid_kc)\
175             -self.phi*(1j*self.w*self.rho_l-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)
)\
176             *spherical_jn(0,self.x_fluid_kc)
177
178         # Estas expresiones corresponden a los valores que multiplican a los
coeficientes para ordenes mayores que cero
179
180         self.a_1=-self.fluid_kc*spheh1p1(self.n,self.x_fluid_kc)
181         self.a_2=(1/(self.a))*spheh1(self.n,self.x_fluid_kc)
182         self.a_3=(1j*self.w*self.rho_l-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2))*
spheh1(self.n,self.x_fluid_kc)\
183             -2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)*spheh1p2(self.n,self.
x_fluid_kc)
184         self.a_4=(2/(self.a))*self.mu*spheh1p1(self.n,self.x_fluid_kc)*self.
fluid_kc\
185             -(2/np.power(self.a,2))*spheh1(self.n,self.x_fluid_kc)*self.mu
186
187         self.b_1=(1/(self.a))*spheh1(self.n,self.x_fluid_ks)*(self.n*(self.n+1)
)
188         self.b_2=(-1/(self.a))*spheh1(self.n,self.x_fluid_ks)-self.fluid_ks*
spheh1p1(self.n,self.x_fluid_ks)
189         self.b_3=(2/(self.a))*(self.n*(self.n+1))*self.mu*self.fluid_ks*
spheh1p1(self.n,self.x_fluid_ks)\
190             -(2/(np.power(self.a,2)))*(self.n*(self.n+1))*self.mu*spheh1(self.n
,self.x_fluid_ks)

```

```

191     self.b_4=(-1/np.power(self.a,2))*(self.n*(self.n+1))*self.mu*spheh1(
self.n,self.x_fluid_ks)\
192         +(2/(np.power(self.a,2))*self.mu*spheh1(self.n,self.x_fluid_ks)-
self.mu\
193         *np.power(self.fluid_ks,2)*spheh1p2(self.n,self.x_fluid_ks)
194
195     self.c_1=1j*self.w*self.kc*spherical_jn(self.n,self.x_kc,derivative=
True)
196     self.c_2=-1j*self.w*spherical_jn(self.n,self.x_kc)*(1/(self.a))
197     self.c_3=self.Lambda_core*np.power(self.kc,2)*spherical_jn(self.n,self.
x_kc)\
198         -2*self.Mu_core*np.power(self.kc,2)*spherical_jn2(self.n,self.x_kc)
199     self.c_4=(2/(self.a))*self.kc*self.Mu_core*spherical_jn(self.n,self.
x_kc,derivative=True)\
200         -(2/(np.power(self.a,2))*self.Mu_core*spherical_jn(self.n,self.
x_kc)
201
202     self.d_1=(1/(self.a))*1j*self.w*(self.n*(self.n+1))*spherical_jn(self.n
,self.x_ks)
203     self.d_2=(-1/(self.a))*1j*self.w*spherical_jn(self.n,self.x_ks)-1j*self
.w*self.ks\
204         *spherical_jn(self.n,self.x_ks,derivative=True)
205     self.d_3=(2/np.power(self.a,2))*(self.n*(self.n+1))*self.Mu_core*
spherical_jn(self.n,self.x_ks)\
206         -(2/(self.a))*(self.n*(self.n+1))*self.Mu_core*self.ks*spherical_jn
(self.n,self.x_ks,derivative=True)
207     self.d_4=(-2/(np.power(self.a,2))*self.Mu_core*spherical_jn(self.n,
self.x_ks)\
208         +(1/(np.power(self.a,2)))*(self.n*(self.n+1))*self.Mu_core*
spherical_jn(self.n,self.x_ks)\
209         +self.Mu_core*np.power(self.ks,2)*spherical_jn2(self.n,self.x_ks)
210
211     self.I_1=self.phi*self.fluid_kc*spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc,
derivative=True)
212     self.I_2=(-1/(self.a))*self.phi*spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc)
213     self.I_3=2*self.phi*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)*spherical_jn2(
self.n,self.x_fluid_kc)\
214         -self.phi*(1j*self.w*self.rho_l-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)
)*spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc)
215     self.I_4=(-2/(self.a))*self.phi*self.mu*self.fluid_kc\
216         *spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc,derivative=True)+(2/(np.power(
self.a,2)))\
217         *self.phi*self.mu*spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc)
218
219
220     def scatter_pressure(self):
221
222         #Se genera una matriz con los coeficientes del orden cero y el vector de
solucion para obtener An
223         # en orden cero
224
225         self.A_0=np.array([[self.a_01,self.c_01],[self.a_03,self.c_03]]).reshape
(2,2)
226         self.B_0=np.array([[self.I_01],[self.I_03]]).reshape(2,1)
227         self.An0=np.linalg.solve(self.A_0,self.B_0)
228
229         #Se generan matrices para los coeficientes, por columnas estan los
ordenes de iteracion

```

```

230     #por renglones estan el numero de coeficientes en este caso 4
231
232     self.Aa=[np.array([[self.a_1[0,j],self.a_2[0,j],self.a_3[0,j],self.a_4
[0,j]]) for j in self.n-1]
233     self.Ab=[np.array([[self.b_1[0,j],self.b_2[0,j],self.b_3[0,j],self.b_4
[0,j]]) for j in self.n-1]
234     self.Ac=[np.array([[self.c_1[0,j],self.c_2[0,j],self.c_3[0,j],self.c_4
[0,j]]) for j in self.n-1]
235     self.Ad=[np.array([[self.d_1[0,j],self.d_2[0,j],self.d_3[0,j],self.d_4
[0,j]]) for j in self.n-1]
236     self.Ai=[np.array([[self.I_1[0,j],self.I_2[0,j],self.I_3[0,j],self.I_4
[0,j]]) for j in self.n-1]
237
238     #Se generan las matrices a resolver y regresa una lista con el numero de
frecuencias
239     #y en cada frecuencia matrices de 4x4 para cada orden
240
241     self.A=[np.array([self.Aa[0][0][:,j],self.Ab[0][0][:,j],self.Ac[0][0][:,
j],self.Ad[0][0][:,j])).T for j in self.n-1]
242     self.B=[np.array([self.Ai[0][0][:,j])).T for j in self.n-1]
243
244     ##### An es para ordenes mayores a cero, filas son los ordenes, columnas
las soluciones para a,b,cy d, indice va sobre frecuencias
245
246     self.An=np.linalg.solve(self.A,self.B).reshape(len(self.n.T),4,1)
247
248     ##### Filas frecuencia, columnas ordenes, An_total inicia con el orden 0
249
250     self.An_total=np.array([np.append(self.An0[0,0],self.An[:,0])])
251
252
253     self.n0=np.append(0,self.n)
254
255     #Presion dispersada
256
257     self.P=(spheh1(self.n0,self.x_fluid_kc*10))*((4/3*self.mu+self.mu_b)*np.
power(self.fluid_kc,2)\
258     -1j*self.w*self.rho_l)*(np.power(1j,self.n0))*(2*self.n0+1)*
self.An_total\
259     *legendref(self.n0,self.theta)
260     self.sum_P=self.P.sum(axis=2)
261     self.sigma=abs(self.sum_P)/(self.rho_l*np.power(self.c,2)) #Presion
adimensional
262
263     self.Msigma1=max(self.sigma)
264     self.Normalizado=self.sigma/self.Msigma1 #Presion normalizada
265
266     def plot_radiation_pressure(self):
267
268     plt.figure()
269     plt.polar(self.theta.reshape(-1),self.Normalizado,'b')

```

Esfera elástica con coraza viscoelástica

```

1 import numpy as np
2 import importlib
3 import FCP1
4 importlib.reload(FCP1)
5 import CCP1
6 importlib.reload(CCP1)
7
8 n=np.array([np.arange(1,41)])          #Ordenes
9 a=5.0e-4                               #Radio externo de la esfera
10 b_a_ratio=0.2                          #1 esfera de acero, 0.9,0.5,0.2,0
    esfera de polimero; razon entre el radio interno y externo
11 ka=10                                  #Frecuencia adimensional
12 theta=np.array(np.linspace(0,2*np.pi,100)) #Angulos de medicion
13 s=CCP1.coated_sphere(n,a,b_a_ratio,ka,theta)
14 s.coefficients()
15 s.scatter_pressure()
16 s.plot_radiation_pressure()
17
18 import math as mt
19 import math
20 from scipy.special import jv,yv,hankel1,hankel2,spherical_jn,spherical_yn,jvp,
    yvp,h1vp,h2vp,legendre
21
22 # Polinomios de Legendre
23 def legendref(n,x):
24     if type(n) is int:
25
26         polynomial_legendre=legendre(n)
27         legendre_function=polynomial_legendre(np.cos(x))
28         return legendre_function
29     elif n[0]==0:
30         polynomial_legendre=[legendre(i) for i in n]
31         legendre_function=np.array([polynomial_legendre[i](np.cos(x)) for i in n]).
    T
32     return legendre_function
33     elif n[0]==1:
34         polynomial_legendre=[legendre(i) for i in n]
35         legendre_function=np.array([polynomial_legendre[i](np.cos(x)) for i in n
    -1]).T
36     return legendre_function
37
38 #Primera derivada de los polinomios de Legendre
39 def legendre1(n,x):
40     first_derivate_legendre=(-(n+1))*((np.cos(x)/np.sin(x))*legendre_n-(1/np.sin
    (x))*legendre_n1)
41     return first_derivate_legendre
42
43 #Segunda derivada de la funcion de Bessel de primera especie
44 def spherical_jn2(n,x):
45     second_derivate_spherical_bessel_first_type=3*np.sqrt(mt.pi)*jv(n+1/2,x)\
46         /np.power(2*x,5/2)-2*np.sqrt(mt.pi)*jvp(n+1/2,x,1)/np.power(2*x,3/2)+jvp
    (n+1/2,x,2)*np.sqrt(mt.pi)/(2*x)
47     return second_derivate_spherical_bessel_first_type
48
49 #Segunda derivada de la funcion de Bessel de segunda especie
50 def spherical_yn2(n,x):

```

```

51     second_derivate_spherical_bessel_second_type=3*np.sqrt(mt.pi)*yv(n+1/2,x)/\
52     pow(2*x,5/2)-2*np.sqrt(mt.pi)*yvp(n+1/2,x,1)/pow(2*x,3/2)+yvp(n+1/2,x,2)
    *\
53     np.sqrt(mt.pi/(2*x))
54     return second_derivate_spherical_bessel_second_type
55
56 #Funcion de Hankel esferica de primer orden
57 def spheh1(n,x):
58     function_spherical_hankel_first_type=np.sqrt(np.pi/(2*x))*hankel1(n+0.5,x)
59     return function_spherical_hankel_first_type
60
61 #Primera derivada de la funcion de Hankel de primer orden
62 def spheh1p1(n,x):
63     first_derivate_spherical_hankel_first_type=-np.sqrt(np.pi)*hankel1(n+1/2,x)
64     /\
65     np.power(2*x,3/2)+np.sqrt(np.pi/(2*x))*h1vp(n+1/2,x,1)
66     return first_derivate_spherical_hankel_first_type
67
68 #Segunda derivada de la funcion de Hankel de primer orden
69 def spheh1p2(n,x):
70     second_derivate_spherical_hankel_fisrt_type=3*np.sqrt(np.pi)*hankel1(n+1/2,x)
71     /\
72     np.power(2*x,5/2)-2*np.sqrt(np.pi)*h1vp(n+1/2,x,1)/np.power(2*x,3/2)+
73     h1vp(n+1/2,x,2)\
74     *np.sqrt(np.pi/(2*x))
75     return second_derivate_spherical_hankel_fisrt_type
76
77 # Funcion de Hankel esferica de segundo orden
78 def spheh2(n,x):
79     function_spherical_hankel_second_type=np.sqrt(np.pi/(2*x))*hankel2(n+0.5,x)
80     return function_spherical_hankel_second_type
81
82 #Primera derivada de la funcion de Hankel de segundo orden
83 def spheh2p1(n,x):
84     first_derivate_spherical_hankel_second_type=-np.sqrt(mt.pi)*hankel2(n+1/2,x)
85     /\
86     np.power(2*x,3/2)+np.sqrt(mt.pi/(2*x))*h2vp(n+1/2,x,1)
87     return first_derivate_spherical_hankel_second_type
88
89 #Segunda derivada de la funcion de Hankel de segundo orden
90 def spheh2p2(n,x):
91     second_derivate_spherical_hankel_second_type=3*np.sqrt(mt.pi)*hankel2(n+1/2,
92     x)/\
93     np.power(2*x,5/2)-2*np.sqrt(mt.pi)*h2vp(n+1/2,x,1)/np.power(2*x,3/2)+
94     h2vp(n+1/2,x,2)*np.sqrt(mt.pi/(2*x))
95     return second_derivate_spherical_hankel_second_type
96
97 import pandas as pd
98 import matplotlib.pyplot as plt
99 from FCP1 import spheh1p1,spheh1p2,spheh1,spheh2p1,spheh2p2,spheh2,spherical_jn2
100 ,legendref,legendrep1
101 # import our own files and reload
102 import FCP1
103 importlib.reload(FCP1)
104
105 class Material_characterization():
106
107     def __init__(self,n,a,b_a_ratio,ka,theta):

```

```

101     self.n=n
102     self.a=a
103     self.b_a_ratio=b_a_ratio
104     self.ka=ka
105     self.theta=theta
106     self.phi=1.0
107     ##### Cambiar ruta del archivo
108     archivo = 'C://Users//Thinkpad//Downloads//coraza//DatosPolimeros.xlsx'
109
110     medio= pd.read_excel(archivo, sheet_name='Glicerina')
111     self.c,self.rho_l,self.mu,self.mu_b=medio.values.T
112     steel=pd.read_excel(archivo,sheet_name='Steel')
113     self.rho_s2,self.nu2,self.E,self.shear_core=steel.values.T
114     polymer18=pd.read_excel(archivo,sheet_name='Polymer18')
115     self.G0,self.G_inf,self.alpha,self.beta,self.tau,self.rho_s1,self.nu1=
polymer18.values.T
116
117     #Se utiliza el modelo de Havriliak-Negami para obtener los valores del
modulo de corte para los materiales viscoelásticos
118     #donde g1 corresponde al modulo de almacenamiento y g2 al modulo de perdida
119
120     self.w=(self.ka*self.c/self.a)
121     self.k_coating=np.arctan((np.power(self.w,self.alpha)*np.power(self.tau,
self.alpha)\
122         *np.sin(self.alpha*np.pi/2))/(1+np.power(self.w,self.alpha)*np.
power(self.tau,self.alpha)\
123         *np.cos(self.alpha*np.pi/2)))
124
125     self.g1_coating= self.G_inf+((self.G0-self.G_inf)*np.cos(self.beta*self.
k_coating))\
126     /np.power(1+2*np.power(self.w,self.alpha)*np.power(self.tau,
self.alpha)\
127     *np.cos(self.alpha*np.pi/2)+np.power(self.w,2*self.alpha)\
128     *np.power(self.tau,2*self.alpha),self.beta/2)
129
130     self.g2_coating=((self.G_inf-self.G0)*np.sin(self.beta*self.k_coating))
/\
131     np.power(1+2*np.power(self.w,self.alpha)*np.power(self.tau,self
.alpha)\
132     *np.cos(self.alpha*np.pi/2)+np.power(self.w,2*self.alpha)\
133     *np.power(self.tau,2*self.alpha),self.beta/2)
134
135     self.shear_coating=self.g1_coating+1j*self.g2_coating      #Modulo de
corte coraza
136
137     # Constantes de Lamé tanto para la coraza (coating) como para el nucleo
(core)
138
139     self.Lambda_coating=(2*self.nu1*self.shear_coating)/(1-2*self.nu1)
140     self.Lambda_core=(2*self.nu2*self.shear_core)/(1-2*self.nu2)
141     self.Mu_coating=self.shear_coating
142     self.Mu_core=self.shear_core
143
144     #ks vector de onda de corte (shear) kc vector de onda longitudinal (
compresion) tanto para el solido [coraza (coating), nucleo (core)]
145     #como para el fluido (fluid)
146
147     self.fluid_kc=(self.w/self.c)*(1+((1j*self.w*self.mu)/(2*self.rho_l*np.

```

```

148     power(self.c,2))\
149         *(4/3+(self.mu_b/self.mu))
150     self.fluid_ks=(1+1j)*np.sqrt((self.w*self.rho_1)/(2*self.mu))
151
152     self.coating_kc=self.w/np.sqrt((self.Lambda_coating+2*self.Mu_coating)/
153     self.rho_s1)
154     self.coating_ks=self.w/np.sqrt(self.Mu_coating/self.rho_s1)
155     self.core_kc=self.w/np.sqrt((self.Lambda_core+2*self.Mu_core)/self.
156     rho_s2)
157     self.core_ks=self.w/np.sqrt(self.Mu_core/self.rho_s2)
158
159 class coated_sphere(Material_characterization):
160
161     def coefficients(self):
162         self.b=(self.b_a_ratio*self.a)
163         self.x_fluid_kc=self.fluid_kc*self.a
164         self.x_fluid_ks=self.fluid_ks*self.a
165         self.x_coating_kcA=self.coating_kc*self.a
166         self.x_coating_kcB=self.coating_kc*self.b
167         self.x_coating_ksA=self.coating_ks*self.a
168         self.x_coating_ksB=self.coating_ks*self.b
169         self.x_core_kcB=self.core_kc*self.b
170         self.x_core_ksB=self.core_ks*self.b
171
172 # Expresiones que corresponde a los valores que multiplican a los coeficientes
173 para el orden cero
174     self.a_01=-self.fluid_kc*spheh1p1(0,self.x_fluid_kc)
175     self.a_03=((1j*self.w)*self.rho_1-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2))\
176         *spheh1(0,self.x_fluid_kc)-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)*
177     spheh1p2(0,self.x_fluid_kc)
178     self.a_05=np.zeros(1)
179     self.a_07=np.zeros(1)
180
181     self.c_01=(1j)*self.w*self.coating_kc*spheh1p1(0,self.x_coating_kcA)
182     self.c_03=-np.power(self.coating_kc,2)*(2*self.Mu_coating*spheh1p2(0,
183     self.x_coating_kcA)\
184         -self.Lambda_coating*spheh1(0,self.x_coating_kcA))
185     self.c_05=-self.coating_kc*spheh1p1(0,self.x_coating_kcB)
186     self.c_07=np.power(self.coating_kc,2)*(self.Lambda_coating*spheh1(0,self
187     .x_coating_kcB)\
188         -2*self.Mu_coating*spheh1p2(0,self.x_coating_kcB))
189
190     self.d_01=(1j*self.w*self.coating_kc)*(spheh2p1(0,self.x_coating_kcA))
191     self.d_03=-np.power(self.coating_kc,2)*(2*self.Mu_coating*spheh2p2(0,
192     self.x_coating_kcA)\
193         -self.Lambda_coating*spheh2(0,self.x_coating_kcA))
194     self.d_05=-self.coating_kc*spheh2p1(0,self.x_coating_kcB)
195     self.d_07=np.power(self.coating_kc,2)*(self.Lambda_coating*spheh2(0,self
196     .x_coating_kcB)\
197         -2*self.Mu_coating*spheh2p2(0,self.x_coating_kcB))
198
199     self.G_01=np.zeros(1)
200     self.G_03=np.zeros(1)
201     self.G_05=self.core_kc*spherical_jn(0,self.x_core_kcB,derivative=True)
202     self.G_07=np.power(self.core_kc,2)*(2*self.Mu_core*spherical_jn2(0,self.
203     x_core_kcB)\
204         -self.Lambda_core*spherical_jn(0,self.x_core_kcB))

```

```

196     self.I_01=self.fluid_kc*self.phi*spherical_jn(0,self.x_fluid_kc,
197     derivative=True)
198     self.I_03=-((1j*self.w*self.rho_l-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2))\
199     *spherical_jn(0,self.x_fluid_kc)-2*self.mu*np.power(self.
200     fluid_kc,2)\
201     *spherical_jn2(0,self.x_fluid_kc))*self.phi
202     self.I_05=np.zeros(1)
203     self.I_07=np.zeros(1)
204 # Estas expresiones corresponden a los valores que multiplican a los
205     coeficientes para ordenes mayores que cero
206
207     self.a_1=-self.fluid_kc*spheh1p1(self.n,self.x_fluid_kc)
208     self.a_2=spheh1(self.n,self.x_fluid_kc)
209     self.a_3=((1j*self.w)*self.rho_l-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2))*
210     spheh1(self.n,self.x_fluid_kc)\
211     -2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)*spheh1p2(self.n,self.
212     x_fluid_kc)
213     self.a_4=(-2*self.mu)*(spheh1(self.n,self.x_fluid_kc)-self.x_fluid_kc*
214     spheh1p1(self.n,self.x_fluid_kc))
215     self.a_5=np.zeros((1,len(self.n.T)))
216     self.a_6=np.zeros((1,len(self.n.T)))
217     self.a_7=np.zeros((1,len(self.n.T)))
218     self.a_8=np.zeros((1,len(self.n.T)))
219
220     self.b_1=(1/(self.a))*spheh1(self.n,self.x_fluid_ks)*(self.n+1)*(self.n)
221     self.b_2=-1*(spheh1(self.n,self.x_fluid_ks)+self.x_fluid_ks*spheh1p1(
222     self.n,self.x_fluid_ks))
223     self.b_3=((-2*self.mu*self.n*(self.n+1))/np.power(self.a,2))*(spheh1(
224     self.n,self.x_fluid_ks)\
225     -self.x_fluid_ks*spheh1p1(self.n,self.x_fluid_ks))
226     self.b_4=self.mu*((2-(self.n)*(self.n+1))*spheh1(self.n,self.x_fluid_ks)
227     -np.power(self.x_fluid_ks,2)\
228     *spheh1p2(self.n,self.x_fluid_ks))
229     self.b_5=np.zeros((1,len(self.n.T)))
230     self.b_6=np.zeros((1,len(self.n.T)))
231     self.b_7=np.zeros((1,len(self.n.T)))
232     self.b_8=np.zeros((1,len(self.n.T)))
233
234     self.c_1=(1j)*self.w*self.coating_kc*spheh1p1(self.n,self.x_coating_kcA)
235     self.c_2=-1j*self.w*spheh1(self.n,self.x_coating_kcA)
236     self.c_3=-np.power(self.coating_kc,2)*(2*self.Mu_coating*spheh1p2(self.n
237     ,self.x_coating_kcA)\
238     -self.Lambda_coating*spheh1(self.n,self.x_coating_kcA))
239     self.c_4=(2*self.Mu_coating)*(spheh1p1(self.n,self.x_coating_kcA)*self.
240     x_coating_kcA\
241     -spheh1(self.n,self.x_coating_kcA))
242     self.c_5=-self.coating_kc*spheh1p1(self.n,self.x_coating_kcB)
243     self.c_6=spheh1(self.n,self.x_coating_kcB)
244     self.c_7=np.power(self.coating_kc,2)*(self.Lambda_coating*spheh1(self.n,
245     self.x_coating_kcB)\
246     -2*self.Mu_coating*spheh1p2(self.n,self.x_coating_kcB))
247     self.c_8=(2*self.Mu_coating)*(spheh1p1(self.n,self.x_coating_kcB)\
248     *self.x_coating_kcB-spheh1(self.n,self.x_coating_kcB))
249
250     self.d_1=(1j*self.w*self.coating_kc)*(spheh2p1(self.n,self.x_coating_kcA
251     ))

```

```

241     self.d_2=-1j*self.w*(spheh2(self.n,self.x_coating_kcA))
242     self.d_3=-np.power(self.coating_kc,2)*(2*self.Mu_coating*spheh2p2(self.n
, self.x_coating_kcA)\
243         -self.Lambda_coating*spheh2(self.n,self.x_coating_kcA))
244     self.d_4=(2*self.Mu_coating)*(self.x_coating_kcA*spheh2p1(self.n,self.
x_coating_kcA)\
245         -spheh2(self.n,self.x_coating_kcA))
246     self.d_5=-self.coating_kc*spheh2p1(self.n,self.x_coating_kcB)
247     self.d_6=spheh2(self.n,self.x_coating_kcB)
248     self.d_7=np.power(self.coating_kc,2)*(self.Lambda_coating*spheh2(self.n,
self.x_coating_kcB)\
249         -2*self.Mu_coating*spheh2p2(self.n,self.x_coating_kcB))
250     self.d_8=(2*self.Mu_coating)*(self.x_coating_kcB*spheh2p1(self.n,self.
x_coating_kcB)\
251         -spheh2(self.n,self.x_coating_kcB))
252
253     self.E_1=((1j*self.w*self.n*(self.n+1))/self.a)*(spheh1(self.n,self.
x_coating_ksA))
254     self.E_2=(-1j*self.w)*(spheh1(self.n,self.x_coating_ksA)+self.
x_coating_ksA*spheh1p1(self.n,self.x_coating_ksA))
255     self.E_3=((2*self.Mu_coating*self.n*(self.n+1))/np.power(self.a,2))*(
spheh1(self.n,self.x_coating_ksA)\
256         -self.x_coating_ksA*spheh1p1(self.n,self.x_coating_ksA))
257     self.E_4=-self.Mu_coating*((2-(self.n)*(self.n+1))*spheh1(self.n,self.
x_coating_ksA)\
258         -np.power(self.x_coating_ksA,2)*spheh1p2(self.n,self.
x_coating_ksA))
259     self.E_5=(-(self.n*(self.n+1))/self.b)*spheh1(self.n,self.x_coating_ksB)
260     self.E_6=spheh1(self.n,self.x_coating_ksB)+self.x_coating_ksB*spheh1p1(
self.n,self.x_coating_ksB)
261     self.E_7=((-(2*self.n*(self.n+1))/np.power(self.b,2))*self.Mu_coating)\
262         *(-spheh1(self.n,self.x_coating_ksB)+self.x_coating_ksB*
spheh1p1(self.n,self.x_coating_ksB))
263     self.E_8=-self.Mu_coating*((2-(self.n)*(self.n+1))*spheh1(self.n,self.
x_coating_ksB)\
264         -np.power(self.x_coating_ksB,2)*spheh1p2(self.n,self.
x_coating_ksB))
265
266     self.F_1=((1j*self.w*self.n*(self.n+1))/self.a)*(spheh2(self.n,self.
x_coating_ksA))
267     self.F_2=(-1j*self.w)*(spheh2(self.n,self.x_coating_ksA)+self.
x_coating_ksA*spheh2p1(self.n,self.x_coating_ksA))
268     self.F_3=((2*self.Mu_coating*self.n*(self.n+1))/np.power(self.a,2))\
269         *(spheh2(self.n,self.x_coating_ksA)-self.x_coating_ksA*spheh2p1
(self.n,self.x_coating_ksA))
270     self.F_4=-self.Mu_coating*((2-(self.n)*(self.n+1))*spheh2(self.n,self.
x_coating_ksA)\
271         -np.power(self.x_coating_ksA,2)*spheh2p2(self.n,self.
x_coating_ksA))
272     self.F_5=(-(self.n*(self.n+1))/self.b)*spheh2(self.n,self.x_coating_ksB)
273     self.F_6=spheh2(self.n,self.x_coating_ksB)+self.x_coating_ksB*spheh2p1(
self.n,self.x_coating_ksB)
274     self.F_7=((-(2*self.n*(self.n+1))/np.power(self.b,2))*self.Mu_coating)\
275         *(-spheh2(self.n,self.x_coating_ksB)+self.x_coating_ksB*
spheh2p1(self.n,self.x_coating_ksB))
276     self.F_8=-self.Mu_coating*((2-(self.n)*(self.n+1))*spheh2(self.n,self.
x_coating_ksB)\
277         -np.power(self.x_coating_ksB,2)*spheh2p2(self.n,self.

```

```

x_coating_ksB))
278
279     self.G_1=np.zeros((1,len(self.n.T)))
280     self.G_2=np.zeros((1,len(self.n.T)))
281     self.G_3=np.zeros((1,len(self.n.T)))
282     self.G_4=np.zeros((1,len(self.n.T)))
283     self.G_5=self.core_kc*spherical_jn(self.n,self.x_core_kcB,derivative=
True)
284     self.G_6=-spherical_jn(self.n,self.x_core_kcB)
285     self.G_7=np.power(self.core_kc,2)*(2*self.Mu_core*spherical_jn2(self.n,
self.x_core_kcB)\
286         -self.Lambda_core*spherical_jn(self.n,self.x_core_kcB))
287     self.G_8=-2*self.Mu_core*(self.x_core_kcB*spherical_jn(self.n,self.
x_core_kcB,derivative=True)\
288         -spherical_jn(self.n,self.x_core_kcB))
289
290     self.Q_1=np.zeros((1,len(self.n.T)))
291     self.Q_2=np.zeros((1,len(self.n.T)))
292     self.Q_3=np.zeros((1,len(self.n.T)))
293     self.Q_4=np.zeros((1,len(self.n.T)))
294     self.Q_5=((self.n*(self.n+1))/self.b)*spherical_jn(self.n,self.
x_core_ksB)
295     self.Q_6=-spherical_jn(self.n,self.x_core_ksB)-self.x_core_ksB*
spherical_jn(self.n,self.x_core_ksB,derivative=True)
296     self.Q_7=(-(2*self.Mu_core*self.n*(self.n+1))/np.power(self.b,2))\
297         *(spherical_jn(self.n,self.x_core_ksB)-self.x_core_ksB*
spherical_jn(self.n,self.x_core_ksB,derivative=True))
298     self.Q_8=self.Mu_core*((2-(self.n)*(self.n+1))*spherical_jn(self.n,self.
x_core_ksB)\
299         -np.power(self.core_ks,2)*spherical_jn2(self.n,self.x_core_ksB))
300
301     self.I_1=self.fluid_kc*self.phi*spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc,
derivative=True)
302     self.I_2=-self.phi*spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc)
303     self.I_3=-((1j*self.w*self.rho_l-2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2))*
spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc)\
304         -2*self.mu*np.power(self.fluid_kc,2)*spherical_jn2(self.n,self.
x_fluid_kc))*self.phi
305     self.I_4=2*self.mu*self.phi*(spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc)-
spherical_jn(self.n,self.x_fluid_kc,derivative=True)*self.x_fluid_kc)
306     self.I_5=np.zeros((1,len(self.n.T)))
307     self.I_6=np.zeros((1,len(self.n.T)))
308     self.I_7=np.zeros((1,len(self.n.T)))
309     self.I_8=np.zeros((1,len(self.n.T)))
310
311     def scatter_pressure(self):
312
313         #Se genera una matriz con los coeficientes del orden cero y el vector de
solucion para obtener An
314         # en orden cero
315
316         self.A_0=np.array([[self.a_01, self.c_01, self.d_01, self.G_01],[self.
a_03,self.c_03, self.d_03, self.G_03],[self.a_05,self.c_05, self.d_05, self.
G_05],[self.a_07,self.c_07,self.d_07,self.G_07]]).astype(complex).reshape
(4,4)
317         self.B_0=np.array([self.I_01,self.I_03,self.I_05,self.I_07]).astype(
complex)
318         self.An0=np.linalg.solve(self.A_0,self.B_0)

```

```

319
320     self.Aa=[np.array([[self.a_1[0,j],self.a_2[0,j],self.a_3[0,j],self.a_4
[0,j],self.a_5[0,j],self.a_6[0,j],self.a_7[0,j],self.a_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
321     self.Ab=[np.array([[self.b_1[0,j],self.b_2[0,j],self.b_3[0,j],self.b_4
[0,j],self.b_5[0,j],self.b_6[0,j],self.b_7[0,j],self.b_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
322     self.Ac=[np.array([[self.c_1[0,j],self.c_2[0,j],self.c_3[0,j],self.c_4
[0,j],self.c_5[0,j],self.c_6[0,j],self.c_7[0,j],self.c_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
323     self.Ad=[np.array([[self.d_1[0,j],self.d_2[0,j],self.d_3[0,j],self.d_4
[0,j],self.d_5[0,j],self.d_6[0,j],self.d_7[0,j],self.d_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
324     self.AE=[np.array([[self.E_1[0,j],self.E_2[0,j],self.E_3[0,j],self.E_4
[0,j],self.E_5[0,j],self.E_6[0,j],self.E_7[0,j],self.E_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
325     self.AF=[np.array([[self.F_1[0,j],self.F_2[0,j],self.F_3[0,j],self.F_4
[0,j],self.F_5[0,j],self.F_6[0,j],self.F_7[0,j],self.F_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
326     self.AG=[np.array([[self.G_1[0,j],self.G_2[0,j],self.G_3[0,j],self.G_4
[0,j],self.G_5[0,j],self.G_6[0,j],self.G_7[0,j],self.G_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
327     self.AQ=[np.array([[self.Q_1[0,j],self.Q_2[0,j],self.Q_3[0,j],self.Q_4
[0,j],self.Q_5[0,j],self.Q_6[0,j],self.Q_7[0,j],self.Q_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
328     self.AI=[np.array([[self.I_1[0,j],self.I_2[0,j],self.I_3[0,j],self.I_4
[0,j],self.I_5[0,j],self.I_6[0,j],self.I_7[0,j],self.I_8[0,j]]) for j in
self.n-1]
329
330     self.A=[np.array([self.Aa[0][0][:,j],self.Ab[0][0][:,j],self.Ac[0][0][:,
j],self.Ad[0][0][:,j],self.AE[0][0][:,j],self.AF[0][0][:,j],self.AG[0][0][:,
j],self.AQ[0][0][:,j])).T for j in self.n-1]
331     self.B=[np.array([self.AI[0][0][:,j])).T for j in self.n-1]
332
333     ##### An es para ordenes mayores a cero, filas son los ordenes, columnas
las soluciones para a,b,cy d, indice va sobre frecuencias
334
335     self.An=np.linalg.solve(self.A,self.B).reshape(len(self.n.T),8,1)
336
337
338     ##### Filas frecuencia, columnas ordenes, An_total inicia con el orden 0
339
340     self.An_total=np.array([np.append(self.An0[0,0],self.An[:,0])])
341
342     self.n0=np.append(0,self.n)
343
344     #Presion dispersada
345
346     self.P=(spheh1(self.n0,self.x_fluid_kc*10))*(((4/3)*self.mu+self.mu_b)*
np.power(self.fluid_kc,2)\
347     -1j*self.w*self.rho_l)*(np.power(1j,self.n0))*(2*self.n0+1)*
self.An_total\
348     *legendref(self.n0,self.theta)
349     self.sum_P=self.P.sum(axis=1)
350     self.sigma=abs(self.sum_P)/(self.rho_l*np.power(self.c,2)) #Presion
adimensional
351
352     self.Msigma1=max(self.sigma)

```

```
353     self.Normalizado=self.sigma/self.Msigma1 #Presion normalizada
354
355     def plot_radiation_pressure(self):
356
357         plt.figure()
358         plt.polar(self.theta.reshape(-1),self.Normalizado,'b')
```

Bibliografía

- [1] C. R. Hill, J. C. Bamber y G. R. ter Haar. *Physical principles of medical ultrasonics*. WILEY, 2004 (citado en las págs. 1-3, 25, 32).
- [2] I. M. Rosado-Mendez. Ultrasound physics for the clinician. En *Obstetric Imaging: Fetal Diagnosis and Care*, páginas 693-695. Elsevier, 2018 (citado en las págs. 1, 2).
- [3] I. M. R. Mendez. Principios físicos del ultrasonido médico, notas de clase, 2020 (citado en las págs. 1, 9-11, 17, 19, 25, 34, 35, 37, 39, 72).
- [4] T. L. Szabo. *Diagnostic ultrasound imaging: inside out*. Academic Press, 2004 (citado en la pág. 2).
- [5] J. T. Bushberg y J. M. Boone. *The essential physics of medical imaging*. Lippincott Williams & Wilkins, 2011 (citado en las págs. 2, 5).
- [6] P. R. Hoskins, K. Martin y A. Thrush. *Diagnostic ultrasound: physics and equipment*. CRC Press, 2019 (citado en las págs. 2, 5, 6, 25, 32).
- [7] J. Mamou y M. L. Oelze. *Quantitative ultrasound in soft tissues*. Springer, 2013 (citado en la pág. 3).
- [8] L. Castañeda. *Cuantificación de propiedades acústicas del tejido cerebral a través de técnicas de retrodispersión ultrasónica*, Facultad de Ciencias. UNAM, 2018 (citado en la pág. 3).
- [9] B. Á. Peterson, V. V. Varadan y V. K. Varadan. Scattering of acoustic waves by elastic and viscoelastic obstacles immersed in a fluid. *Wave Motion*, **2**(1):23-38, 1980 (citado en la pág. 3).
- [10] W. H. Lin y A. Raptis. Acoustic scattering by elastic solid cylinders and spheres in viscous fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **73**(3):736-748, 1983 (citado en la pág. 3).
- [11] J. J. Faran Jr. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *The Journal of the acoustical society of America*, **23**(4):405-418, 1951 (citado en la pág. 3).
- [12] S. Hasheminejad y B Harsini. Effects of dynamic viscoelastic properties on acoustic diffraction by a solid sphere submerged in a viscous fluid. *Archive of Applied Mechanics*, **72**(9):697-712, 2003 (citado en las págs. 3, 49-51, 53, 54).
- [13] S. M. Hasheminejad. Acoustic scattering by a fluid-encapsulating spherical viscoelastic membrane including thermoviscous effects. *Journal of Mechanics*, **21**(4):205-215, 2005 (citado en las págs. 3, 72).
- [14] T. Hasegawa, Y. Hino, A. Annou, H. Noda, M. Kato y N. Inoue. Acoustic radiation pressure acting on spherical and cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **93**(1):154-161, 1993 (citado en la pág. 3).

- [15] G. Gaunaurd y A. Kalnins. Resonances in the sonar cross sections of coated spherical shells. *International Journal of Solids and Structures*, **18**(12):1083-1102, 1982 (citado en la pág. 3).
- [16] S. Hasheminejad y N. Safari. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids. *Journal of sound and vibration*, **280**(1-2):101-125, 2005 (citado en las págs. 3, 49, 54, 58).
- [17] U. Veronesi, A. Goldhirsch, P. Boyle, R. Orecchia y G. Viale. Breast cancer. *Discovery medicine*, **5**(27):271-277, 2009 (citado en la pág. 3).
- [18] INSP. Cáncer de mama, una prioridad para la salud de las mexicanas. url: <https://www.insp.mx/avisos/5090-octubre-cancer-mama-19.html#sup1>, 2020. Accedido 20-11-2020 (citado en la pág. 3).
- [19] P. B. Gordon. Ultrasound for breast cancer screening and staging. *Radiologic Clinics*, **40**(3):431-441, 2002 (citado en la pág. 3).
- [20] P. L. Allan, G. M. Baxter y M. J. Weston. *Clinical Ultrasound, 2-Volume Set E-Book: Expert Consult: Online and Print*. Elsevier Health Sciences, 2011 (citado en las págs. 3, 5).
- [21] J. C. Massengale y R. F. Brem. Use of ultrasound in breast disease. *Ultrasound Quarterly*, **18**(3):149-159, 2002 (citado en la pág. 3).
- [22] T. E. Doyle, K. H. Warnick y B. L. Carruth. Histology-based simulations for the ultrasonic detection of microscopic cancer in vivo. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **122**(6):EL210-EL216, 2007 (citado en las págs. 3, 4).
- [23] M. F. Insana. Modeling acoustic backscatter from kidney microstructure using an anisotropic correlation function. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **97**(1):649-655, 1995 (citado en la pág. 3).
- [24] R. E. Baddour, M. D. Sherar, J. Hunt, G. Czarnota y M. C. Kolios. High-frequency ultrasound scattering from microspheres and single cells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **117**(2):934-943, 2005 (citado en la pág. 4).
- [25] M. Kolios, O. Falou y J. Kumaradas. P3e-3 finite element modeling of ultrasound scattering by spherical objects and cells. En *2006 IEEE Ultrasonics Symposium*, páginas 2072-2075. IEEE, 2006 (citado en la pág. 4).
- [26] T. E. Doyle, A. T. Tew, K. H. Warnick y B. L. Carruth. Simulation of elastic wave scattering in cells and tissues at the microscopic level. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **125**(3):1751-1767, 2009 (citado en la pág. 4).
- [27] J. S. Allen, D. E. Kruse y K. W. Ferrara. Shell waves and acoustic scattering from ultrasound contrast agents. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, **48**(2):409-418, 2001 (citado en las págs. 4, 6).
- [28] H. S. Thomsen, R. N. Muller, R. F. Mattrey y R. Agati. *Trends in contrast media*. Springer, 1999 (citado en la pág. 5).
- [29] C. X. Deng y F. L. Lizzi. A review of physical phenomena associated with ultrasonic contrast agents and illustrative clinical applications. *Ultrasound in medicine & biology*, **28**(3):277-286, 2002 (citado en la pág. 6).
- [30] J. Chen, K. S. Hunter y R. Shandas. Wave scattering from encapsulated microbubbles subject to high-frequency ultrasound: contribution of higher-order scattering modes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **126**(4):1766-1775, 2009 (citado en la pág. 6).
- [31] Z. Ye. On sound scattering and attenuation of albutex® bubbles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **100**(4):2011-2028, 1996 (citado en la pág. 6).
- [32] E. Hecht. *Óptica*. Pearson Madrid España, 2017 (citado en la pág. 9).

- [33] F. Ihlenburg. *Finite element analysis of acoustic scattering*, volumen 132. Springer Science & Business Media, 2006 (citado en la pág. 9).
- [34] W. M. Lai, D. H. Rubin, E. Krempl y D. Rubin. *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2009 (citado en las págs. 11, 17, 20, 69).
- [35] J. N. Reddy. *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge university press, 2007 (citado en las págs. 11, 12).
- [36] E. W. Chaves. *Notes on continuum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2013 (citado en la pág. 11).
- [37] M. C. Tanzi, S. Farè y G. Candiani. *Foundations of biomaterials engineering*. Academic Press, 2019 (citado en la pág. 12).
- [38] J. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. Elsevier, 2012 (citado en la pág. 12).
- [39] L. Anand y S. Govindjee. *Continuum Mechanics of Solids*. Oxford University Press, USA, 2020 (citado en las págs. 12-15).
- [40] R. S. Lakes. *Viscoelastic solids*, volumen 9. CRC press, 1998 (citado en las págs. 12, 72).
- [41] R. M. Guedes. *Creep and fatigue in polymer matrix composites*. Woodhead Publishing, 2019 (citado en la pág. 12).
- [42] R. M. Guedes. *Creep and fatigue in polymer matrix composites*. Woodhead Publishing, 2019 (citado en la pág. 13).
- [43] J. Janzen y A. K. Gautesen. Analytic relaxation modulus expression for a viscoelastic liquid with complex viscosity following a havriliak–negami model a. *Journal of Rheology*, **62**(5):1109-1114, 2018 (citado en la pág. 14).
- [44] Y. Zhao, H. Liu, L. Bai e Y. Tan. Characterization of linear viscoelastic behavior of asphalt concrete using complex modulus model. *Journal of materials in civil engineering*, **25**(10):1543-1548, 2013 (citado en las págs. 14, 72).
- [45] R. A. Kalgaonkar, S. Nandi, S. S. Tambe y J. P. Jog. Analysis of viscoelastic behavior and dynamic mechanical relaxation of copolyester based layered silicate nanocomposites using havriliak–negami model. *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, **42**(14):2657-2666, 2004 (citado en la pág. 14).
- [46] Y.-c. Fung. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. Springer Science & Business Media, 2013 (citado en la pág. 14).
- [47] K. Jlassi, M. M. Chehimi y S. Thomas. *Clay-polymer nanocomposites*. Elsevier, 2017 (citado en la pág. 14).
- [48] K. Jlassi, M. M. Chehimi y S. Thomas. *Clay-polymer nanocomposites*. Elsevier, 2017 (citado en la pág. 15).
- [49] A. Doicu. Acoustic and electromagnetic scattering analysis using discrete sources. *Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources*, ISBN: 978-0-12-219740-6, p. ix-xi., 2000 (citado en la pág. 17).
- [50] R. S. Cobbold. *Foundations of biomedical ultrasound*. Oxford university press, 2006 (citado en las págs. 19-24, 26-28, 30, 35, 71).
- [51] B. M. Lempriere. *Ultrasound and elastic waves: frequently asked questions*. Elsevier, 2003 (citado en las págs. 25, 26, 33).
- [52] F. Torres. *Análisis del patrón de moteado de imágenes de ultrasonido clínico del tálamo de macacos Rhesus neonatos expuestos a anestesia*. Tesis de maestría, UNAM, 2020 (citado en la pág. 26).
- [53] K. K. Shung y G. A. Thieme. *Ultrasonic scattering in biological tissues*. CRC press, 1992 (citado en las págs. 26, 27, 30, 32, 33).

- [54] P. M. Morse y K. U. Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton university press, 1986 (citado en la pág. 31).
- [55] M. E. Schafer. The angular spectrum method of transducer characterization. *Ultrasonic Exposimetry*:257, 1992 (citado en las págs. 38, 39).
- [56] M Abramovitz e I Stegun. Handbook of mathematical functions 1965. *National Bureau of Standards*, 1979 (citado en la pág. 49).
- [57] WOLFRAM. Sphericalbesselj, 2007. URL: <https://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/SphericalBesselJ/20/01/02/0008/>. [Web; accedido el 04-03-2021] (citado en la pág. 49).
- [58] G. B. Arfken y H. J. Weber. *Mathematical methods for physicists*, 1999 (citado en la pág. 49).
- [59] B. Hartmann, G. F. Lee y J. D. Lee. Loss factor height and width limits for polymer relaxations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **95**(1):226-233, 1994 (citado en la pág. 50).
- [60] S. M. Hasheminejad y S. Kazemirad. Dynamic viscoelastic effects on sound wave scattering by an eccentric compound circular cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, **318**(3):506-526, 2008 (citado en la pág. 51).
- [61] A. D. Pierce. *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*. Springer, 2019 (citado en la pág. 69).