



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS SOBRE
APOYOS ELÁSTICOS

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL

PRESENTA:
SERGIO SARMIENTO FRANCISCO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JAIME RETAMA VELASCO

CIUDAD NEZAHUALCOYOTL, ESTADO DE MÉXICO,
2021





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Resumen	XIII
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. Teoría de vigas sobre apoyos elásticos	1
1.2. Análisis de vigas	3
1.3. Objetivo	4
1.4. Justificación	4
1.5. Estructura de la tesis	4
2. Teoría de vigas	7
2.1. Euler-Bernoulli	8
2.1.1. Cimentación elástica	20
2.2. Timoshenko	22
2.2.1. Cimentación elástica	26
3. Apoyos elásticos	29
3.1. Modelo de Winkler	32
3.2. Modelo de Pasternak	35
3.3. Modelo elástico continuo	37
4. Solución numérica	39
4.1. Solución numérica aplicando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli	40
4.1.1. Primer ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro	41

4.1.2.	Segundo ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida.	53
4.1.3.	Tercer ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida.	63
4.1.4.	Cuarto ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro.	70
4.2.	Solución numérica aplicando la teoría de vigas de Timoshenko	76
4.2.1.	Quinto ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro	77
4.2.2.	Sexto ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida.	89
4.2.3.	Séptimo ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida.	99
4.2.4.	Octavo ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro.	105
4.3.	Análisis elástico y continuo	112
4.3.1.	Noveno ejemplo de aplicación: Viga apoyada sobre una masa de suelo continua con carga puntual al centro del claro.	112
4.3.2.	Décimo ejemplo de aplicación: Viga apoyada sobre una masa de suelo continua con carga repartida.	114
4.4.	Solución de los ejemplos de aplicación uno y dos con FEAP	116
4.4.1.	Primer caso solucionado con FEAP	116
4.4.2.	Segundo caso solucionado con FEAP	117
5.	Conclusiones	119
A.	Solución numérica de vigas sobre apoyos elásticos	123
A.1.	Solución numérica de vigas con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli	123
A.1.1.	Ejemplo 1: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro, aplicando la teoría de Euler-Bernoulli	123
A.1.2.	Ejemplo 2: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida	173
A.1.3.	Ejemplo 3: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida, aplicando la teoría de Euler-Bernoulli	226
A.1.4.	Ejemplo 4: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro, aplicando la teoría de Euler-Bernoulli	253

A.1.5. Ejemplo 5: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro, aplicando la teoría de Timoshenko	280
A.1.6. Ejemplo 6: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida, aplicando la teoría de Timoshenko	346
A.1.7. Ejemplo 7: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida, aplicando la teoría de Timoshenko	423
A.1.8. Ejemplo 8: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro, aplicando la teoría de Timoshenko	479

Índice de figuras

1.1. Viga sobre apoyos elásticos	2
2.1. Viga simplemente apoyada	7
2.2. Ejes coordenados en la viga	8
2.3. Esfuerzos de tensión y compresión	9
2.4. Deformación plana y perpendicular al eje neutro	9
2.5. Viga tipo cantiléver	10
2.6. Análisis de viga flexionada	10
2.7. Convención de signos para la curvatura	11
2.8. Curva de deflexión	12
2.9. Deformación de un elemento diferencial producido por momentos flexionantes	13
2.10. Comportamiento linealmente elástico	14
2.11. Distribución de esfuerzos en una viga de material linealmente elástico.	15
2.12. Convención de signos para la fuerza cortante V y el momento flexionante M	16
2.13. Elemento diferencial	17
2.14. Viga sometida a momentos M_0	18
2.15. Trabajo para una viga	19
2.16. Elemento diferencial sometido a momentos	20
2.17. Viga apoyada sobre cimentación elástica	21
2.18. Deformación plana pero no perpendicular al eje neutro	23
2.19. Curvatura de las secciones transversales debido a deformaciones por cortante	24
2.20. Deformación por cortante	24
2.21. Comparación de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko	25
2.22. Cimentación elástica	27
2.23. Elemento diferencial de una cimentación elástica	27

3.1. Elemento diferencial sobre resortes	30
3.2. Idealización del suelo por una serie de resortes, de acuerdo con el Modelo de Winkler	33
3.3. Deformación del área cargada	34
3.4. Capa de cortante del modelo de Pasternak	35
3.5. Modelo de Pasternak	37
3.6. Viga apoyada sobre un suelo continuo	37
3.7. Malla de elementos finitos para analizar un medio continuo	38
4.1. Convención de signos	39
4.2. Viga apoyada sobre una serie de resortes	40
4.3. Primer caso	42
4.4. Primer caso con tres resortes	42
4.5. Corte 1 que va de $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	43
4.6. Deformación para la viga con tres resortes para el primer caso	45
4.7. Primer caso con cuatro resortes	45
4.8. Deformación para la viga con cuatro resortes para el primer caso	46
4.9. Primer caso con cinco resortes	46
4.10. Deformación para la viga con cinco resortes para el primer caso	47
4.11. Primer caso con seis resortes	47
4.12. Deformación para la viga con seis resortes para el primer caso	48
4.13. Primer caso con siete resortes	48
4.14. Deformación para la viga con siete resortes para el primer caso	49
4.15. Primer caso con ocho resortes	49
4.16. Deformación para la viga con ocho resortes para el primer caso	50
4.17. Primer caso con nueve resortes	50
4.18. Deformación para la viga con nueve resortes para el primer caso	51
4.19. Primer caso con diez resortes	51
4.20. Deformación para la viga con diez resortes para el primer caso	52
4.21. Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	53
4.22. Segundo caso	54
4.23. Segundo caso con tres resortes	55

4.24. Deformación para la viga con tres resortes para el segundo caso	55
4.25. Segundo caso con cuatro resortes	56
4.26. Deformación para la viga con cuatro resortes para el segundo caso	56
4.27. Segundo caso con cinco resortes	57
4.28. Deformación de la viga con cinco resortes para el segundo caso	57
4.29. Segundo caso con seis resortes	58
4.30. Deformación para la viga con seis resortes para el segundo caso	58
4.31. Segundo caso con siete resortes	59
4.32. Deformación para la viga con siete resortes para el segundo caso	59
4.33. Segundo caso con ocho resortes	60
4.34. Deformación para la viga con ocho resortes para el segundo caso	60
4.35. Segundo caso con nueve resortes	61
4.36. Deformación para la viga con nueve resortes para el segundo caso	61
4.37. Segundo caso con diez resortes	62
4.38. Deformación para la viga con diez resortes para el segundo caso	62
4.39. Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	63
4.40. Tercer caso	63
4.41. Tercer caso con un resorte	64
4.42. Deformación con un resorte para el tercer caso	65
4.43. Tercer caso con dos resortes	65
4.44. Deformación con dos resortes para el tercer caso	66
4.45. Tercer caso con tres resortes	66
4.46. Deformación con tres resortes para el tercer caso	67
4.47. Tercer caso con cuatro resortes	67
4.48. Deformación con cuatro resortes para el tercer caso	68
4.49. Tercer caso con cinco resortes	68
4.50. Deformación con cinco resortes para el tercer caso	69
4.51. Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	69
4.52. Cuarto caso	70
4.53. Cuarto caso con un resorte	71
4.54. Deformación con un resorte para el cuarto caso	71
4.55. Cuarto caso con dos resortes	72

4.56. Deformación con dos resortes para el cuarto caso	72
4.57. Cuarto caso con tres resortes	73
4.58. Deformación con tres resortes para el cuarto caso	73
4.59. Cuarto caso con cuatro resortes	74
4.60. Deformación con cuatro resortes para el cuarto caso	74
4.61. Cuarto caso con cinco resortes	75
4.62. Deformación con cinco resortes para el cuarto caso	75
4.63. Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	76
4.64. Viga apoyada sobre una serie de resortes	77
4.65. Quinto caso	78
4.66. Quinto caso con tres resortes	78
4.67. Corte 1 que va de $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	79
4.68. Deformación para la viga con tres resortes para el quinto caso	81
4.69. Quinto caso con cuatro resortes	81
4.70. Deformación para la viga con cuatro resortes para el quinto caso	82
4.71. Quinto caso con cinco resortes	82
4.72. Deformación para la viga con cinco resortes para el quinto caso	83
4.73. Quinto caso con seis resortes	83
4.74. Deformación para la viga con seis resortes para el quinto caso	84
4.75. Quinto caso con siete resortes	84
4.76. Deformación para la viga con siete resortes para el quinto caso	85
4.77. Quinto caso con ocho resortes	85
4.78. Deformación para la viga con ocho resortes para el quinto caso	86
4.79. Quinto caso con nueve resortes	86
4.80. Deformación para la viga con nueve resortes para el quinto caso	87
4.81. Quinto caso con diez resortes	87
4.82. Deformación para la viga con diez resortes para el quinto caso	88
4.83. Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	88
4.84. Sexto caso	89
4.85. Sexto caso con tres resortes	90
4.86. Deformación para la viga con tres resortes para el sexto caso	91
4.87. Sexto caso con cuatro resortes	91

4.88. Deformación para la viga con cuatro resortes para el sexto caso	92
4.89. Sexto caso con cinco resortes	92
4.90. Deformación para la viga con cinco resortes para el sexto caso	93
4.91. Sexto caso con seis resortes	93
4.92. Deformación para la viga con seis resortes para el sexto caso	94
4.93. Sexto caso con siete resortes	94
4.94. Deformación para la viga con siete resortes para el sexto caso	95
4.95. Sexto caso con ocho resortes	95
4.96. Deformación para la viga con ocho resortes para el sexto caso	96
4.97. Sexto caso con nueve resortes	96
4.98. Deformación para la viga con nueve resortes para el sexto caso	97
4.99. Sexto caso con diez resortes	97
4.100 Deformación para la viga con diez resortes para el sexto caso	98
4.101 Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	98
4.102 Séptimo caso	99
4.103 Séptimo caso con un resorte	100
4.104 Deformación con un resorte para el séptimo caso	100
4.105 Séptimo caso con dos resortes	101
4.106 Deformación con dos resortes para el séptimo caso	101
4.107 Séptimo caso con tres resortes	102
4.108 Deformación con tres resortes para el séptimo caso	102
4.109 Séptimo caso con cuatro resortes	103
4.110 Séptimo caso con cuatro resortes para el séptimo caso	103
4.111 Séptimo caso con cinco resortes	104
4.112 Deformación con cinco resortes para el séptimo caso	104
4.113 Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	105
4.114 Octavo caso	105
4.115 Octavo caso con un resorte	106
4.116 Deformación con un resorte para el octavo caso	107
4.117 Octavo caso con dos resortes	107
4.118 Deformación con dos resortes para el octavo caso	108
4.119 Octavo caso con tres resortes	108

4.120	Deformación con tres resortes para el octavo caso	109
4.121	Octavo caso con cuatro resortes	109
4.122	Octavo caso con cuatro resortes para el octavo caso	110
4.123	Octavo caso con cinco resortes	110
4.124	Deformación con cinco resortes para el octavo caso	111
4.125	Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta	111
4.126	Noveno caso	112
4.127	Malla para el noveno caso	113
4.128	Deformación para el noveno caso	113
4.129	Décimo caso	114
4.130	Malla para el Décimo caso	115
4.131	Deformación para el décimo caso	115
4.132	Modelado de la viga con FEAP	116
4.133	Deformación para la solución con FEAP	117
4.134	Modelado de la viga con FEAP	118
4.135	Deformación para la solución con FEAP	118

Resumen

En el análisis estructural de vigas sobre apoyos elásticos existen diversas investigaciones que explican el comportamiento de las vigas cuando se encuentran apoyadas totalmente o parcialmente sobre una masa de suelo deformable, algunos modelos que ayudan a la solución de vigas sobre apoyos elásticos idealizan la masa de suelo donde se encuentra desplantada la viga como una serie de resortes a lo largo del claro de ésta, entre los modelos que utilizan resortes para la solución del problema también conocido como *cimentación elástica*, se encuentran el modelo de Winkler, que históricamente es el primer modelo que dio solución a dicho problema y que ha dado pauta a investigaciones más amplias al respecto, el modelo de Winkler a pesar de ser simple y considerar los resortes independientes uno con otro, es capaz de otorgar soluciones con gran aproximación a la solución exacta, el modelo de Winkler considera la deformación únicamente dentro del área que ocupa la viga y nunca fuera de ella, el parámetro que se considera para la aplicación del modelo es la constante de proporcionalidad de los resortes, que para este caso es la rigidez que mantienen los resortes ante cargas aplicadas sobre estos.

Otro modelo utilizado en el análisis de vigas sobre apoyos elásticos es el de Pasternak, éste es un modelo de dos parámetros, que es considerado una mejora al de Winkler; por la consideración de una capa de interacción entre la superficie de contacto de la viga y los resortes, es decir; los resortes en este modelo no se encuentran actuando de manera independiente, esta capa provoca que los resortes mantengan relación y efecto uno con otro, como sucede en realidad en el suelo. Los asentamientos que se producen en la cimentación también afectan a las estructuras cercanas a esta, o al suelo contiguo si es el caso, por lo que la consideración de la capa de interacción en los resortes mejora la aproximación a la solución otorgada con ayuda de este modelo. El modelo de Pasternak al igual que el de Winkler considera la constante de proporcionalidad de los resortes, sin embargo, Pasternak adiciona un parámetro extra, la interacción que mantienen los resortes mediante la capa de contacto con la estructura de cimentación.

Los modelos como el de Winkler y el de Pasternak suponen que la respuesta del suelo a las cargas externas son proporcionales a los desplazamientos en el punto donde se encuentra la reacción, esta suposición fue propuesta por primera vez por Emil Winkler en 1867, autor del modelo de Winkler. La aplicación de los modelos que utilizan resortes no es la única forma de solución que existe, otro método de solución que considera el suelo como un sólido continuo, elástico e isotrópico es el *método de los elementos finitos*, un método numérico que se ha utilizado para dar solución a ecuaciones diferenciales muy complejas

y en la actualidad es muy utilizado en diversos campos de la ciencia e ingeniería; con este método la proximidad a la solución exacta tiende a ser mucho mayor si es aplicado correctamente.

El método de los elementos finitos, aplicado a las cimentaciones elásticas, determina el comportamiento del suelo ante la presencia de cargas que son transmitidas mediante la estructura de cimentación, sustituyendo la solución exacta, que en diversas ocasiones es prácticamente imposible de obtener del sistema de ecuaciones diferenciales, por una solución discreta y discontinua, por lo tanto, aproximada. Para ello se realiza el proceso de discretización del problema, es decir, el suelo se divide en elementos finitos o pequeños elementos interconectados entre sí mediante puntos llamados nodos. Es un método que requiere un mayor número de elementos en el problema para que la solución aproximada sea mayor.

Los métodos mencionados para el análisis son capaces de ofrecer una aproximación tan amplia que incluso el margen de error podría ser considerado despreciable, para que eso sea posible se debe mantener un número considerable de elementos finitos o resortes (según sea el caso). Por otro lado es importante aclarar que al incluir una mayor cantidad de elementos, mayor será la complejidad del problema a resolver.

El presente trabajo tiene la finalidad de demostrar la aplicación del análisis estructural, en conjunto con el modelo de Winkler, y comparando las soluciones obtenidas con la solución exacta.

Abstract

In the structural analysis of beams on elastic supports there are several investigations that explain the behavior of the beams when they are fully or partially supported on a deformable soil mass, some models that help the solution of beams on elastic supports idealize the soil mass where the beam is deployed as a series of springs along the span of it, among the models that use springs for the solution of the problem also known as elastic segmentation, are the Winkler model, which historically is the first model that gave a solution to this problem and has given rise to more extensive research in this regard, Winkler's model, despite being simple and considering the springs independent of each other, is able to provide solutions with great approximation to the exact solution, Winkler's model considers the deformation only within the area occupied by the beam and never outside it, the parameter considered for the application of the model is the constant of proportionality of the springs, which in this case is the stiffness maintained by the springs under loads applied on them.

Another model used in the analysis of beams on elastic supports is that of Pasternak, this is a two-parameter model, which is considered an improvement to that of Winkler; by the consideration of an interaction layer between the contact surface of the beam and the springs, i.e.; the springs in this model are not acting independently, this layer causes the springs to maintain a relationship and effect with each other, as actually happens in the soil. The settlements that occur in the foundation also affect the structures close to it, or the adjacent soil if it is the case, so the consideration of the interaction layer in the springs improves the approximation to the solution given with the help of this model. Pasternak's model, like Winkler's, considers the constant of proportionality of the springs; however, Pasternak adds an extra parameter, the interaction that the springs maintain through the contact layer with the foundation structure.

Models such as Winkler's and Pasternak's assume that the response of the soil to external loads are proportional to the displacements at the point where the reaction is found, this assumption was first proposed by Emil Winkler in 1867, author of Winkler's model. The application of models using springs is not the only form of solution that exists, another solution method that considers the soil as a continuous, elastic and isotropic solid is the finite element method, a numerical method that has been used to solve very complex differential equations and is currently widely used in various fields of science and engineering; with this method the proximity to the exact solution tends to be much greater if it is applied correctly.

The finite element method, applied to elastic foundations, determines the behavior of the soil in the presence of loads that are transmitted through the foundation structure, replacing the exact solution, which in several occasions is practically impossible to obtain from the system of differential equations, by a discrete and discontinuous solution, therefore, approximate. For this purpose, the process of discretization of the problem is performed, i.e., the soil is divided into finite elements or small elements interconnected by points called nodes. It is a method that requires a larger number of elements in the problem so that the approximate solution is larger.

The methods mentioned for the analysis are capable of offering such a wide approximation that even the margin of error could be considered negligible, for that to be possible a considerable number of finite elements or springs (as the case may be) must be maintained. On the other hand, it is important to clarify that by including a greater number of elements, the greater the complexity of the problem to be solved.

The purpose of this work is to demonstrate the application of structural analysis, in conjunction with the Winkler model, and comparing the solutions obtained with the exact solution.

Capítulo 1

Introducción

El análisis estructural de vigas sobre apoyos elásticos es un problema que combina los principios de la ingeniería estructural con la ingeniería geotécnica, para este análisis es necesario conocer algunas características de la masa de suelo de desplante así como el comportamiento del elemento estructural. A este tipo de análisis se le conoce como interacción suelo-estructura [40].

La interacción suelo-estructura es el estudio del comportamiento de la interfaz entre la estructura de cimentación y la masa de suelo, dicho estudio tiene como objetivo encontrar la configuración de deformación y los elementos mecánicos tanto de la estructura como de la masa suelo, debido a las cargas que se transmiten a la estructura de cimentación por medio de la superestructura, la interacción consiste en obtener un sistema de fuerzas que aplicadas de manera simultánea a la estructura y al suelo se produzcan desplazamientos iguales entre los dos elementos [17, 31, 40], para que esto suceda se debe cumplir con las condiciones de equilibrio y continuidad de las ecuaciones fundamentales del análisis estructural.

1.1. Teoría de vigas sobre apoyos elásticos

La teoría de vigas sobre apoyos elásticos considera que las reacciones de suelo donde se encuentra apoyada la viga son proporcionales a los desplazamientos del punto al que corresponden a lo largo del claro de la viga. Esta suposición fue propuesta por primera vez en 1867 por Emil Winkler [33], con este supuesto fue propuesto el primer modelo que dio solución al problema de las cimentaciones elásticas y fue la base de investigaciones posteriores como es el caso de H. Zimmermann en 1888, M. Hetenyi en 1946, P.L Pasternak en 1954, entre otros[11, 23].

El objetivo de la interacción suelo-estructura es realizar un análisis en la estructura de cimentación considerando el efecto de la masa de suelo de desplante y cargas externas. En las cimentaciones sobre suelos compresibles surgen deformaciones o asentamientos de manera inevitable, debido a las cargas que se encuentran actuando sobre ésta, la presencia

de asentamientos depende del tipo de suelo y la geometría de la cimentación; prever estos asentamientos es gran importancia, ya que se producen efectos que pueden dañar la superestructura, tales como son momentos flexionantes y momentos de torsión [40].

El suelo responde a las cargas externas que se presentan en él, esta respuesta es el módulo de reacción del suelo k_s , dicho módulo se obtiene a partir de métodos especiales, como por ejemplo el método de Terzaghi [5, 36], el módulo de reacción del suelo varía de acuerdo al tipo de suelo [17].

Se muestra en la figura 1.1 una viga sobre apoyos elásticos en la cual, cada uno de los resortes representa la reacción del suelo en ese punto (Modelo de Winkler).

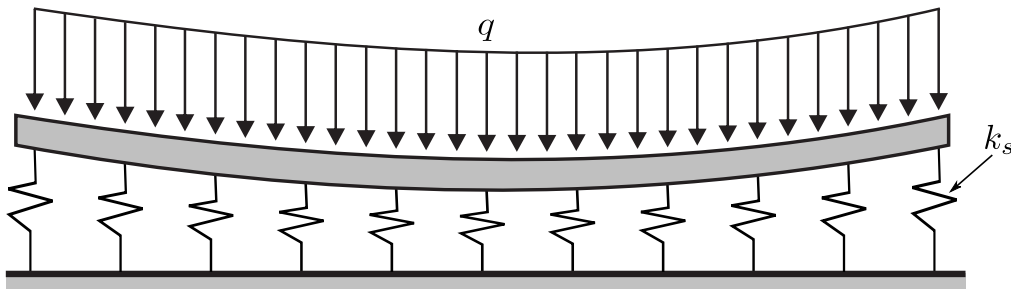


Figura 1.1: Viga sobre apoyos elásticos

El modelo de Winkler a pesar de ser simple mantiene buena aproximación a la solución exacta, sin embargo, este considera a los resortes independientes uno con otro, lo que significa que el modelo no considera la continuidad del suelo, para el modelo los efectos de deformación solo existen dentro del área que ocupa la cimentación, una de las complicaciones que puede presentar al utilizar un modelo donde se sustituye la masa de suelo por una serie de resortes, es encontrar las reacciones que cada uno de éstos representa, las vigas con un mayor número de resortes incrementa su grado de indeterminación estática o hiperestaticidad.

Otro modelo que hace uso de resortes en el análisis es el modelo de Pasternak, éste considera que los resortes no trabajan de manera independiente uno con otro y existe una capa en la superficie de contacto con la estructura de cimentación, lo que provoca un efecto continuo en todos los resortes, por lo que dichos efectos en el suelo no solo se presentan dentro del área de carga, ahora también existen fuera de ella [3, 23].

Inicialmente el estudio de vigas sobre apoyos elásticos estuvo dirigido a la aplicación en vías de ferrocarriles, sin embargo, la teoría tiene diversas aplicaciones en diversos campos de la ingeniería, en este caso la aplicación es en vigas sobre un medio elástico, como un método de solución aproximado, ya que el suelo por naturaleza mantiene características y propiedades que son mas complejas de lo que la teoría mantiene [40].

Existen otras soluciones que consideran al suelo como un sólido continuo, se obtienen a partir de la aplicación de métodos numéricos, como es el caso del método de los elementos finitos, este método se trato por primera vez en el libro *The Finite Element Method*, escrito por el profesor O. C. Zienkiewicz, aunque se sabe que existen trabajos más antiguos del

método escritos por R. Courant [41], el método es capaz de otorgar una solución discreta y discontinua, con una aproximación mayor a la solución exacta si se considera una cantidad suficiente en el análisis [6].

1.2. Análisis de vigas

En el análisis de vigas sobre apoyos elásticos, la viga a analizar se encuentra dentro de la teorías de vigas, dichas teorías se utilizan para explicar la cinemática de la deformación de las vigas; la teoría de vigas es parte de la mecánica de materiales, que permite obtener esfuerzos y deformaciones de estas.

Para realizar el análisis de la viga se recurre a las teorías que simplifican el problema de éstas, es posible aplicar la teoría de vigas tradicional, el cual históricamente es el primer modelo de vigas importante y que considera unicamente un campo de desplazamiento, la teoría fue inicialmente propuesta en parte por Leonhard P. Euler en conjunto con Jacob y Daniel Bernoulli [25, 30]. Por otro lado si la configuración de la viga que se analiza lo requiere, es necesario aplicar otra teoría que mejor se ajuste, la teoría de vigas de Stephen P. Timoshenko, que considera una deformación angular por cortante cuando la viga es peraltada [10]. Para el análisis de vigas se debe aplicar la teoría que mejor se adapte a la configuración de éstas.

Las teorías que se aplican en el análisis de las vigas, ya sea que la viga se encuentre sobre apoyos elásticos, apoyos simples o empotres son de gran utilidad para explicar su comportamiento, para poder elegir la teoría que mejor se adapte al análisis se requiere conocer la relación entre largo del claro y el peralte.

Considerando que en la estática el número de apoyos es igual a número de reacciones, las vigas pueden ser isostáticas ó hiperestáticas. Pero en el caso de las vigas sobre apoyos elásticos con frecuencia de trata de vigas hiperestáticas, ya que los modelos utilizados en el análisis, requiere el uso de diversos resortes.

La solución de los ejemplos que se muestran en el capítulo 5 utilizan uno de los métodos energéticos con mayor frecuencia en el análisis estructural, el segundo teorema de Castigliano publicado en 1879, que utiliza la energía de deformación complementaria para obtener la deflexión v en cualquier punto a lo largo del claro de la viga, en este caso los resortes [15]. El segundo teorema de Castigliano, que utiliza la energía de deformación para conocer la deflexión en cualquier punto requiere la ecuación de momento flexionante y fuerza cortante de cada una de las secciones que se obtienen de la viga [8], para la obtención de las ecuaciones se utiliza el método de cortes y secciones.

Utilizando los principios de la estática, métodos del análisis estructural y los modelos que idealizan la masa de suelo, así como métodos más avanzados como el método de los elementos finitos, es posible dar solución al problema que representa las vigas sobre apoyos elásticos [40].

1.3. Objetivo

Realizar el análisis para dar solución al problema de las cimentaciones elásticas utilizando modelos que simplifican al mismo, el problema se ha investigado durante un largo tiempo por diversos autores, que han aportado distintos supuestos, estas investigaciones tienen el objetivo de ayudar a brindar solución al problema.

Para realizar el análisis se utilizará como herramienta principal análisis estructural y los modelos que utilizan resortes; el uso del programa *Finite Element Analysis Program* (FEAP), herramienta auxiliar en la aplicación del *método de los elementos finitos*, serán de gran importancia para demostrar las soluciones y como ajustarse a la solución exacta

El presente trabajo va dirigido a estudiantes de ingeniería civil de octavo y noveno semestre interesados en el área de las estructuras ya que requiere de conocimiento pleno de las asignaturas de estática, comportamiento de materiales, mecánica de materiales, análisis estructural, mecánica de suelos y cimentaciones.

1.4. Justificación

En la actualidad se vuelve cada vez más común utilizar las computadoras como herramienta auxiliar en la solución de problemas complejos en la ingeniería, en el caso de la ingeniería estructural las computadoras han sido de gran ayuda en solución de problemas de mayor magnitud.

La presente tesis busca aplicar el análisis estructural con apoyo de tecnología computacional en la solución de problemas que involucran apoyos elásticos y que por lo tanto la solución puede llegar a ser compleja, por la gran cantidad de datos a trabajar en el análisis y lograr una correcta comparación de resultados.

Se busca acercar e incentivar a estudiantes de nivel licenciatura a hacer uso de herramientas computacionales en el análisis estructural y profundizar en el método de los elementos finitos, mejorando su desempeño académico y en su futuro laboral.

1.5. Estructura de la tesis

A continuación se da una descripción general del contenido de la tesis.

- Capítulo 2. En este capítulo se tratan las dos de las teorías que simplifican el problema de vigas y buscan explicar la cinemática de la deformación que las vigas presentan.
- Capítulo 3. Para el análisis de vigas sobre apoyos elásticos se hace uso de modelos que idealizan la masa de suelo, donde el elemento estructural se encuentra totalmente

apoyado en dicha masa de suelo, en éste capítulo se dan a conocer algunos modelos que son de gran utilidad para darle solución al problema de la cimentación elástica.

- Capítulo 4. Se presentan ejemplos de aplicación utilizando métodos del análisis estructural y modelos que ayudan a la solución, además de la aplicación del método de los elementos finitos y comparar los resultados obtenidos.
- Capítulo 5. Las conclusiones alcanzadas a partir de los resultados obtenidos de los ejemplos de solución.

Capítulo 2

Teoría de vigas

En el estudio de vigas prismáticas existen algunas teorías que tienen como objetivo explicar la cinemática de la deformación de éstas, este capítulo contiene dos teorías que se han estudiado durante mucho tiempo, de las cuales una de ellas se basa en un campo de desplazamiento, mientras que la otra en un campo de desplazamiento y deformación por fuerza cortante, las teorías a tratar en este capítulo son:

- Teoría de vigas de Euler-Bernoulli
- Teoría de vigas de Timoshenko

Una viga es un elemento estructural que se somete a cargas externas que actúan perpendicularmente a su eje longitudinal, cuando fuerzas o momentos externos actúan sobre la viga se generan esfuerzos y deformaciones en ésta, para determinarlos se requiere primeramente obtener las fuerzas internas y los momentos internos que se ejercen en la sección transversal de la viga. Se supone una viga simplemente apoyada (figura 2.1) de la cual se pueden obtener sus reacciones con ayuda de las ecuaciones fundamentales de la estática, sumatoria de fuerzas (ΣF) y sumatoria de momentos (ΣM_z).

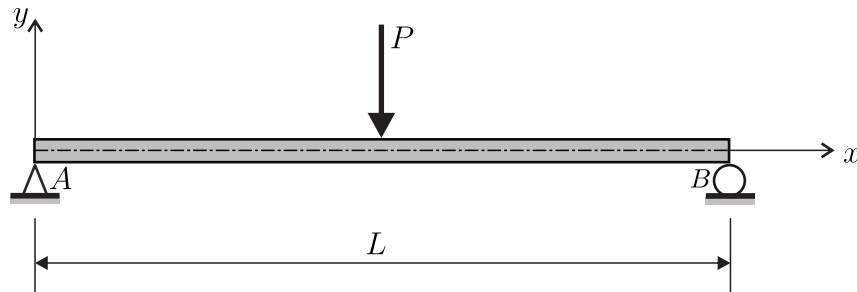


Figura 2.1: Viga simplemente apoyada

La teoría de vigas es parte de la mecánica de materiales, que permite obtener elementos mecánicos que existen en las vigas, teniendo en cuenta que las vigas son sólidos deforma-

bles, en ellas presenta un cambio en su configuración al encontrarse sometidas a fuerzas externas.

2.1. Euler-Bernoulli

La teoría tiene sus inicios aproximadamente en el siglo XVIII, históricamente fue el primer modelo de vigas importante, cuyos trabajos fueron iniciados por Leonhard Euler en conjunto con Jacob y Daniel Bernoulli, para este estudio se consideró un espacio tridimensional, en el cual el eje coordenado x atraviesa el centroide de la sección transversal y al mismo tiempo coincide con su eje longitudinal, mientras el eje coordenado y y el eje coordenado z coinciden con los momentos de inercia principales I_y e I_z como se muestra en la figura 2.2

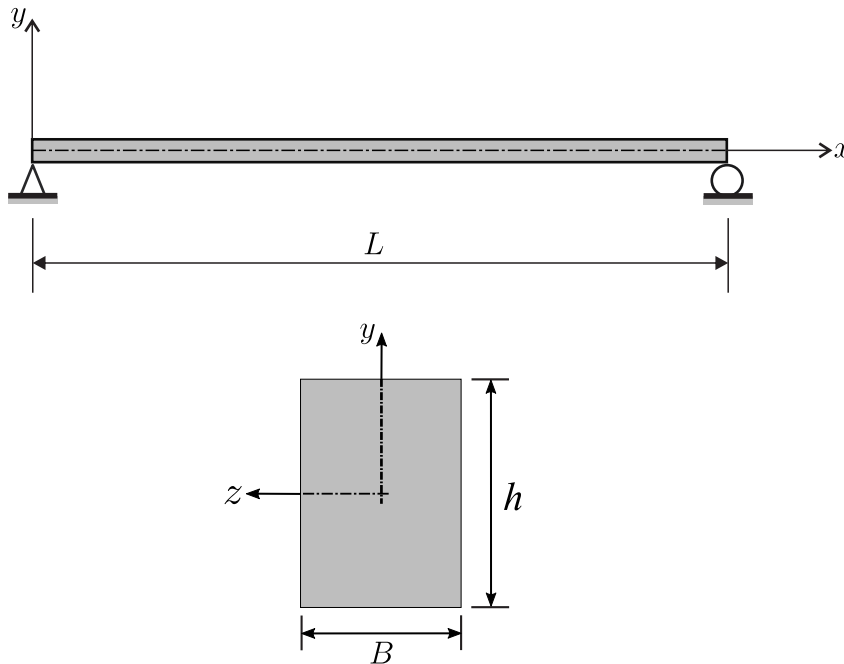


Figura 2.2: Ejes coordenados en la viga

En la teoría se realizan algunas simplificaciones, por las cuales es posible realizar la aproximación a los esfuerzos y deformaciones, que las vigas presentan al encontrarse sometidas a fuerzas externas, esta teoría se desarrolla únicamente en el campo de desplazamientos verticales. Una viga se encuentra dentro de la teoría de Euler-Bernoulli si la relación largo-peralte es mayor o igual a 10 ($\frac{L}{h} \geq 10$) [39].

Las hipótesis que se toman en cuenta para la formulación de la teoría, en la cual se considera flexión simple de la viga en el plano coordenado mostrado en la figura 2.2 son:

- Material con un comportamiento elástico-lineal, homogéneo e isótropo, que cumple con la ley de Hooke.

- Desplazamiento vertical v y giro θ en cada punto de la viga depende x .
- La fibra neutra solo muestra desplazamiento vertical y giro, es decir, no se presenta tensión o compresión alguna, como se muestra en la figura 2.3.
- Las deformaciones por cortante son mínimas y se consideran despreciables.
- La sección transversal permanece plana y perpendicular al eje neutro de la viga, aun cuando la deformación esté presente como se muestra en la figura 2.4.

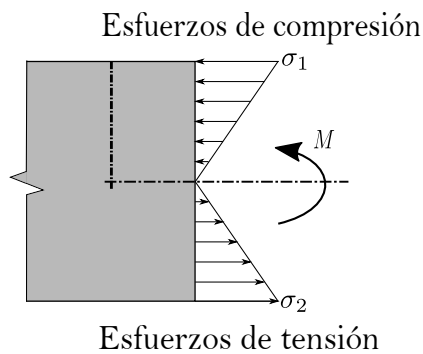


Figura 2.3: Esfuerzos de tensión y compresión

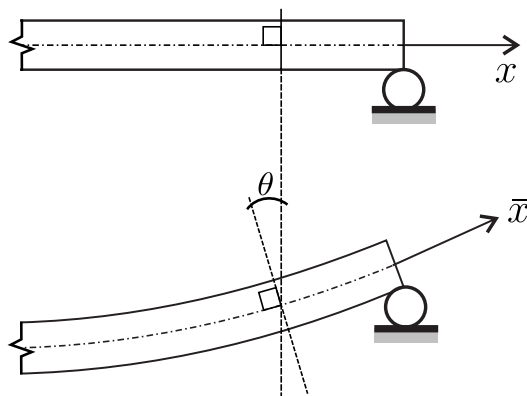


Figura 2.4: Deformación plana y perpendicular al eje neutro

Las cargas que actúan sobre la viga provocan flexión en la misma, lo que deforma el eje longitudinal en una curva.

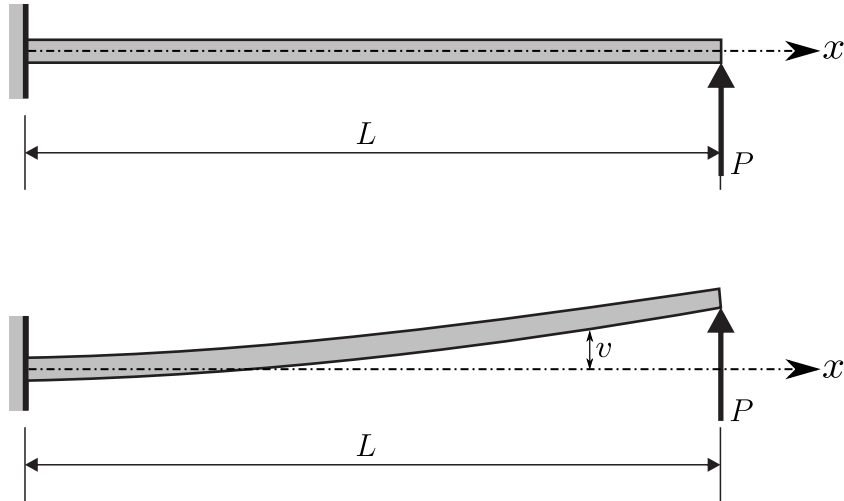


Figura 2.5: Viga tipo cantiléver

La figura 2.5 muestra la curva de flexión que presenta la viga sometida a una carga puntual, se consideran dos puntos (n_1 y n_2) sobre la curva de flexión y estos puntos se encuentran a una distancia x y dx respectivamente, posteriormente se trazan dos rectas normales en dichos puntos hasta la de intersección de ambas rectas, a este punto se le conoce como origen O (figura 2.6), la recta $\overline{On_1}$ se denomina radio de curvatura ρ , del cálculo diferencial se sabe que la curvatura κ de una circunferencia es igual el recíproco del radio de curvatura, por lo tanto es la misma en todos los puntos [9] y el producto del radio de curvatura ρ y $d\theta$ es igual al segmento de arco ds .

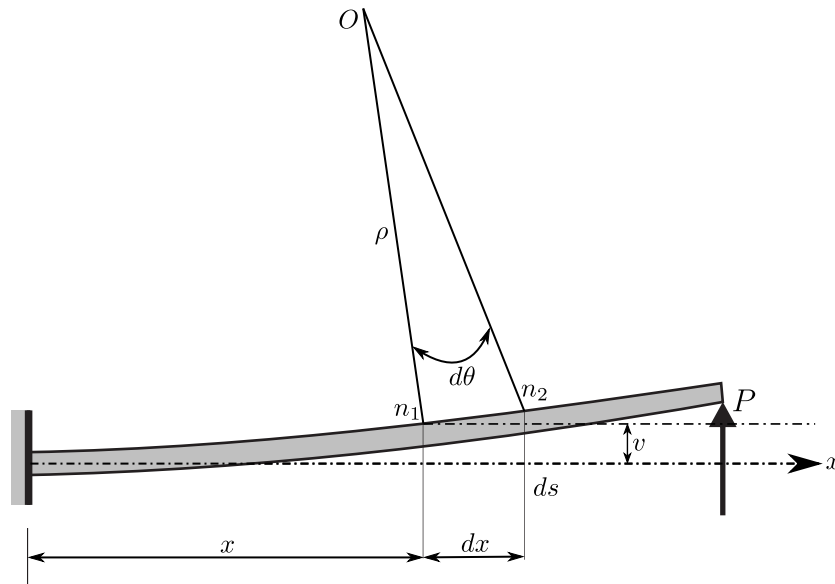


Figura 2.6: Análisis de viga flexionada

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{2.1}$$

$$\rho d\theta = ds \tag{2.2}$$

El ángulo $d\theta$ que se forma entre las rectas normales y θ es el ángulo de rotación que sufre la sección transversal a través de la curva, el segmento de arco ds es la distancia entre las normales, al ser un análisis de pequeñas deformaciones se considera que ds es casi plana por lo es casi igual a la proyección plana dx ($ds \approx dx$), de donde se obtiene.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \tag{2.3}$$

La curvatura y el radio de curvatura se encuentran en función de x a lo largo de su eje, es decir, la curvatura κ depende de x ; la convención de signos de la curvatura se define a partir de los ejes coordenados, donde cóncava hacia arriba es positiva y cóncava hacia abajo es negativa, como se muestra en la figura 2.7.

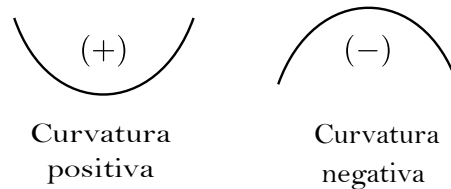


Figura 2.7: Convención de signos para la curvatura

Cuando a una viga se le aplica una carga, su eje longitudinal recto sufre una deformación curva, en donde existe un desplazamiento vertical (también llamada deflexión v) como se muestra en la figura 2.8,

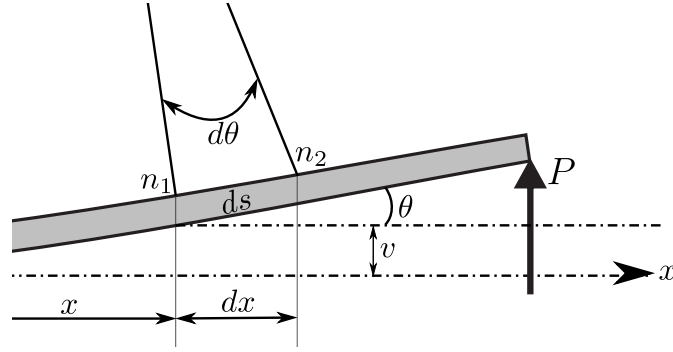


Figura 2.8: Curva de deflexión

De la ecuación 2.3 se sabe que curvatura es el recíproco del radio de curvatura, de acuerdo con el cálculo diferencial la pendiente de la curva de deflexión, es la primera derivada del desplazamiento con respecto a la distancia ($\frac{dv}{dx}$), se aprecia de la figura 2.6 que la pendiente es igual a la tangente del ángulo de rotación θ de donde resulta,

$$\tan\theta = \frac{dv}{dx} \quad (2.4)$$

Es importante saber que las ecuaciones 2.3 y 2.4 se encuentran basadas en las consideraciones geométricas, por lo que es aplicable cualquier viga sin importar el material del que se encuentre compuesta. Al ser un análisis de pequeñas deformaciones, las curvas de deflexión son extremadamente pequeñas y casi planas. Dado que θ es muy pequeño se aproxima la ecuación 2.4,

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{dv}{dx} \quad (2.5)$$

si se sustituye la ecuación 2.5 en la ecuación 2.3 se tiene:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.6)$$

Las deformaciones longitudinales en una viga se pueden determinar analizando la curvatura de ésta, para determinar dichas deformaciones se considera una sección de la viga con una distancia L_0 (figura 2.9), sobre la cuál se aplican momentos flexionantes y se trazan dos líneas rectas (mn y pq), que después de la deformación deben seguir planas y perpendiculares al eje longitudinal.

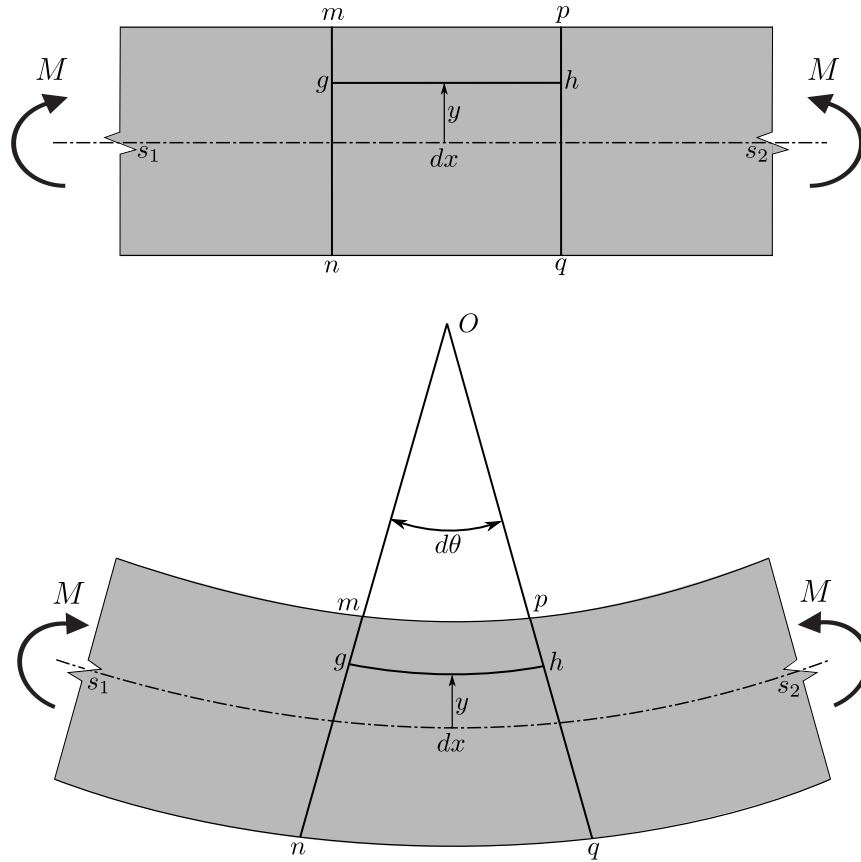


Figura 2.9: Deformación de un elemento diferencial producido por momentos flexionantes

Como resultado de la deformación por flexión las fibras del lado cóncavo se acortan, mientras que del lado convexo se alargan, por consecuencia las fibras del lado cóncavo sufren reducción y las que se encuentran del lado convexo sufren alargamiento, la línea $\overline{s_1s_2}$ es el eje neutro de la viga, en este último no se tiene cambio alguno, solo desplazamiento vertical; las secciones transversales mn y pq de la viga deformada se cortan del lado cóncavo y se forma el ángulo $d\theta$, estas líneas extienden hasta el punto de intersección llamado origen O , la longitud del origen hasta la superficie neutra es el radio de curvatura ρ y recordando que $\rho d\theta = dx$, la longitud L_0 de la línea gh después de la flexión es:

$$L_0 = (\rho - y)d\theta = dx - \frac{y}{\rho}dx \quad (2.7)$$

Como la longitud original de la línea gh es igual a dx , se deduce que el alargamiento es $L_0 - dx$ ó $-\frac{y}{\rho}dx$,

$$L_0 - dx = -\frac{y}{\rho}dx \quad (2.8)$$

La deformación ε_x es igual al alargamiento dividido entre la longitud dx , por lo tanto la relación deformación-curvatura esta dada como:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 muestra que las deformaciones longitudinales en la viga son proporcionales a la curvatura y éstas varían linealmente con la distancia desde la superficie neutra, sin importar la forma que tome el diagrama esfuerzo-deformación del material que compone la viga [8].

La ley constitutiva es la relación que tienen los esfuerzos con las deformaciones, para el caso de los materiales estructurales, se sabe que presentan la propiedad de elasticidad y se aplica la ley de Hooke [28]. Dicha ley que relaciona los esfuerzos con la deformación que se estableció experimentalmente, toma como hecho que el material debe ser homogéneo e isótropo [38].

La gran mayoría de los materiales estructurales tiene una región inicial sobre el diagrama esfuerzo-deformación, en donde el material se comporta de forma tanto lineal como elástica, dicho diagrama parte desde el origen O , en este punto no existe ningún esfuerzo y por ende ninguna deformación, en el eje de las abscisas se encuentra la deformación ε y en el eje de las ordenadas el esfuerzo σ , cuando un material se comporta elásticamente y a su vez presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, se dice que es linealmente elástico (figura 2.10). Por lo que se puede expresar de la siguiente forma,

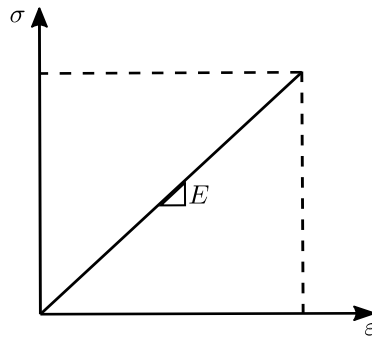


Figura 2.10: Comportamiento linealmente elástico

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.10)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material y es la pendiente de la región elástica de los materiales, su valor depende del material con el que se este trabajando. La ecuación 2.10 se conoce comúnmente como ley de Hooke, nombrada así en honor al científico inglés Robert Hooke [1635-1703], quien dedico gran parte de su vida al estudio de las propiedades

elásticas de los materiales [30]; la ecuación 2.10 se aplica para esfuerzos de tensión y compresión simples, la relación esfuerzo-deformación más común dentro de la ingeniería es la ecuación para un material linealmente elástico, para dichos materiales se sustituye la ecuación 2.9 en la ecuación 2.10 y se tiene:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -E\kappa y \quad (2.11)$$

Se considera el momento resultante de los esfuerzos σ_x que actúan sobre la sección transversal (figura 2.11), la fuerza $\sigma_x dA$ con respecto al elemento dA es igual a la diferencial de momento dM , por lo que se tiene,

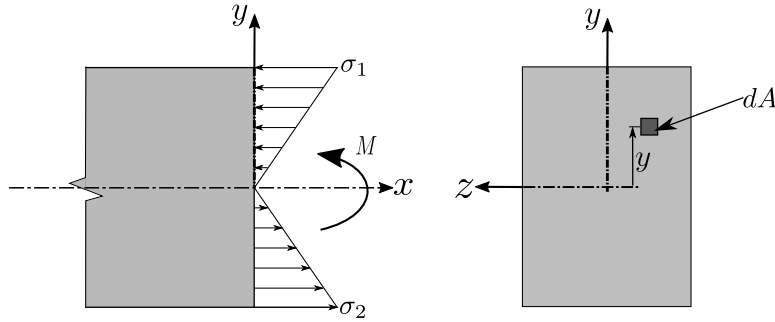


Figura 2.11: Distribución de esfuerzos en una viga de material linealmente elástico.

Para obtener la primera ecuación de la estática, se considera un elemento diferencial dA que se encuentra en la sección transversal de la viga y este se ubica a una distancia y del eje neutro, por lo tanto el esfuerzo σ_x .

$$dM = -\sigma_x y dA \quad (2.12)$$

Se integra la ecuación 2.12 y se obtiene,

$$M = -\int_A \sigma_x y dA \quad (2.13)$$

Como los elementos de la viga se encuentran trabajando a tensión y compresión se puede utilizar el diagrama esfuerzo-deformación para determinar los esfuerzos σ_x a partir de la deformación. La relación esfuerzo-deformación es comúnmente utilizada en materiales con un comportamiento elástico-lineal, para ello se tiene la ecuación 2.11

$$\sigma_x = -E\kappa y \quad (2.14)$$

la ecuación 2.14 demuestra que los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal varían linealmente con la distancia y desde la superficie neutra. Sustituyendo la ecuación 2.14 en la ecuación 2.13 se tiene,

$$M = E\kappa \int y^2 dA \quad (2.15)$$

Recordando que $\int y^2 dA$ se encuentra dado como momento de inercia I de la sección transversal [12] y considerando la convención de signos de la curvatura, la ecuación se simplifica.

$$M = \kappa EI \quad (2.16)$$

Considerando que el radio de curvatura es el recíproco de la curvatura se tiene:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.17)$$

La ecuación momento-curvatura 2.17 muestra que la curvatura es directamente proporcional al momento flexionante M e inversamente proporcional a la rigidez a la flexión EI [13].

Para mantener el sentido y dirección que las fuerzas y momentos toman es necesario establecer la convención de signos (figura 2.12)

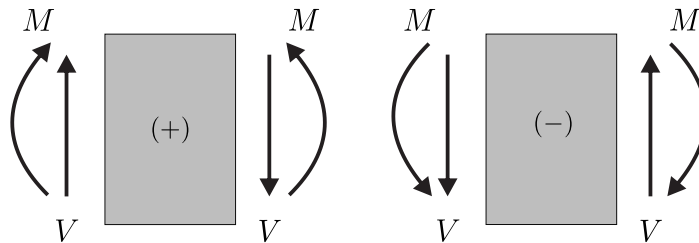


Figura 2.12: Convención de signos para la fuerza cortante V y el momento flexionante M

La carga q , la fuerza de cortante V y el momento flexionante M mantienen una relación entre sí, estas relaciones son de gran utilidad cuando se analizan dichas condiciones a lo largo de la viga. Para demostrar la relación se considera un elemento diferencial (figura 2.13) en la cual se toma la convención positiva presentada en figura 2.12.

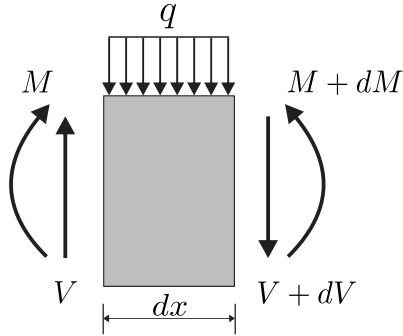


Figura 2.13: Elemento diferencial

Para la obtener la relación entre la carga y fuerza cortante se realiza ΣF_y ,

$$V - (V + dV) - qdx = 0$$

del análisis anterior se obtiene,

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (2.18)$$

En la ecuación 2.18 se muestra la relación de la fuerza cortante con la carga, por lo tanto al variar la fuerza cortante V con respecto de x es igual a $-q$. Ahora se procede a realizar ΣM_z sobre el mismo elemento diferencial obteniendo,

$$-M - qdx \left(\frac{dx}{2} \right) - (V + dV)dx + M + dM = 0$$

Los productos diferenciales por ser insignificantes en comparación con los demás términos presentes se desprecian, finalmente se obtiene la ecuación 2.19 la cual muestra la razón de variación del momento flexionante M con respecto de x que es igual a la fuerza cortante V ,

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (2.19)$$

En las ecuaciones 2.18 y 2.19 se muestra la relación existente entre la carga q , fuerza cortante V y momento flexionante M en la viga.

Ahora se igualan las ecuaciones 2.6 y 2.17 se obtiene la ecuación 2.20, ésta es la ecuación diferencial de segundo orden, que al darle solución se obtiene la ecuación de la curva

elástica y con dicha ecuación es posible obtener la deflexión v en cualquier punto de la viga.

$$EI \frac{d^2 v_B}{dx^2} = M \quad (2.20)$$

La rigidez a la flexión EI puede ser constante o variable y dependerá de la configuración la viga que se encuentre analizando; si la rigidez a la flexión EI es constante se trata de una viga prismática compuesta de un solo material.

Otras formas de la ecuación 2.20 se obtienen derivando y empleando la relación que mantienen la carga q , la fuerza cortante V y el momento flexionante M son:

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v_B}{dx^2} \right) = EI \frac{d^3 v_B}{dx^3} = \frac{dM}{dx} = V \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v_B}{dx^2} \right) = EI \frac{d^4 v_B}{dx^4} = \frac{dV}{dx} = -q \quad (2.22)$$

Otro concepto importante dentro de la teoría de Euler-Bernoulli es la energía de deformación, en la que se introduce el concepto de trabajo U , considerando que el material de la viga se comporta de forma linealmente elástica, éste debe cumplir con la ley de Hooke, las deflexiones y giros; se deben considerar pequeñas deformaciones. Se supone una viga sometida a dos momentos M_0 (figura 2.14).

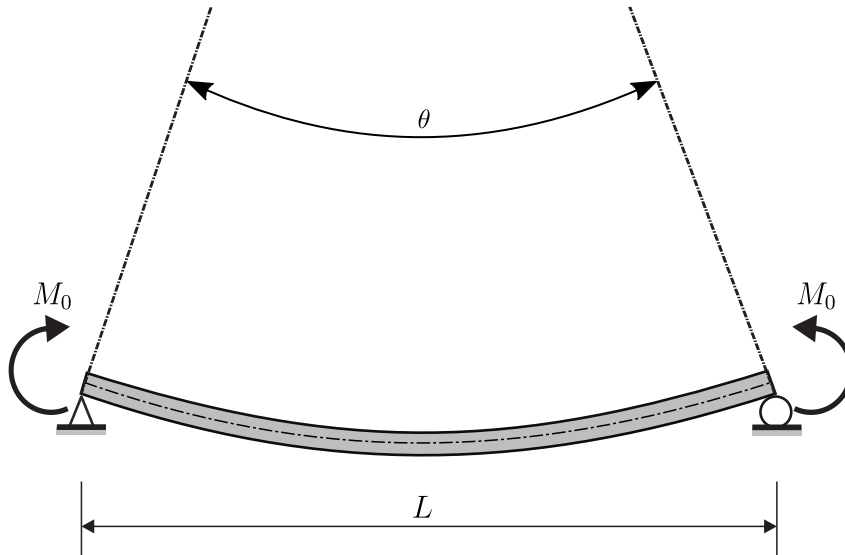


Figura 2.14: Viga sometida a momentos M_0

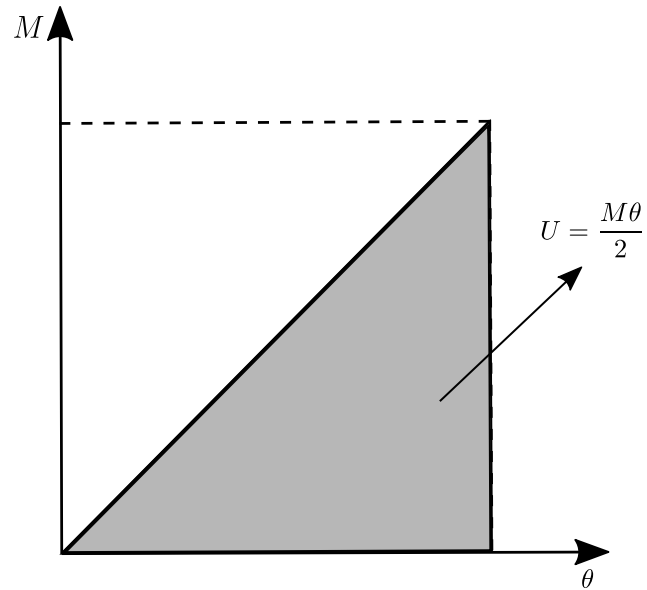


Figura 2.15: Trabajo para una viga

El trabajo para una viga sometida a dos momentos esta dado por la ecuación 2.23 (figura 2.15).

$$U = \frac{M\theta}{2} \quad (2.23)$$

Se sabe que la curva de deflexión es un segmento circular con una curvatura κ , definida en la ecuación momento-curvatura 2.17 y el ángulo formado por la deflexión (figura 2.14), se encuentra dado por $\theta = \frac{L}{\rho}$, considerando valores absolutos [8] se tiene,

$$\theta = \frac{ML}{EI} \quad (2.24)$$

Sustituyendo la ecuación 2.24 en la ecuación 2.23 se tiene,

$$U = \frac{M^2L}{2EI} \quad (2.25)$$

La ecuación 2.25 expresa la energía de deformación en términos de M , si el momento flexionante varía a lo largo de la viga entonces se debe obtener la energía de deformación con ayuda de un elemento diferencial (figura 2.16), donde ahora la longitud es dx ,

Se consideran valores absolutos y la energía de deformación dU almacenada en el elemento se define como,

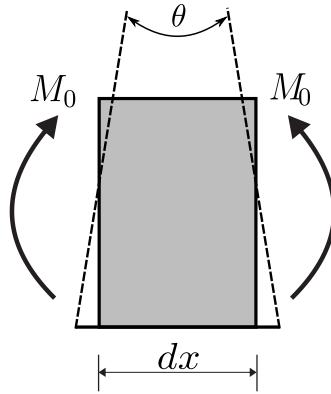


Figura 2.16: Elemento diferencial sometido a momentos

$$dU = \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2.26)$$

Se integra la ecuación 2.26 y se expresa la energía de deformación almacenada (ecuación 2.27) y se obtiene la energía de deformación de la viga.

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2.27)$$

2.1.1. Cimentación elástica

Las vigas sobre medios elásticos se basan en el concepto de la reacción de fuerzas del suelo donde se encuentra apoyada la viga y estas reacciones son proporcionales a la deflexión en el punto de interés, al determinar la ecuación diferencial que gobierna al modelo del problema de vigas antes mencionado es posible darle solución al mismo, este concepto fue introducido por Emil Winkler en 1867, quien fue el primer investigador en formular y resolver el problema de viga sobre cimientos deformables, éste modelo desarrollo las bases del análisis de rieles de ferrocarril [11].

La propuesta de E. Winkler fue la base del trabajo de H. Zimmerman en el análisis de vías de ferrocarriles publicado en 1888, inicialmente estos estudios fueron orientados principalmente al suelo como un apoyo, sin embargo, es posible aplicar esta teoría a otros campos de ingeniería. En el concepto de medio elástico como apoyo se observa un suelo que sostiene un durmiente con vías de tren, cuando éste pasa por la vía se observa un una deformación en el durmiente y en el suelo que lo sostiene, una vez que termina su trayecto vuelve a su estado original; por lo anterior se llega a la conclusión que el suelo es un medio elástico y con la aplicación de una fuerza considerable se presenta una deformación [33].

El estudio de las vigas apoyadas sobre medios elásticos ha llevado a distintos autores e

investigadores a idealizar el suelo de desplante del elemento estructural como una serie de resortes, dichas cimentaciones se definen como una viga desplantada sobre un medio continuo al que se le transmiten las cargas de la superestructura.

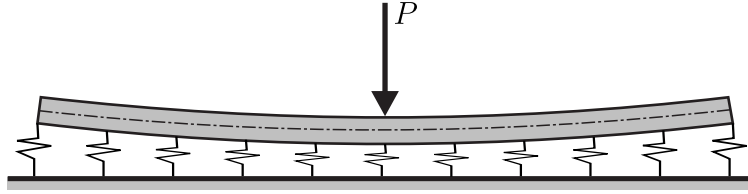


Figura 2.17: Viga apoyada sobre cimentación elástica

Se supone una viga apoyada totalmente sobre un suelo elástico y continuo (figura 2.17), que se deforma por acción de la carga aplicada en ésta, la respuesta del suelo continuo es en cada punto de la viga proporcional a la deflexión, con esta hipótesis se entiende que la reacción en cualquier punto de la viga se expresa como,

$$q = -k_s v \quad (2.28)$$

donde k_s es el módulo de reacción del suelo, v es la deflexión que presenta la viga y q es la reacción del suelo, esta hipótesis a pesar de ser simple otorga buenos resultados en muchos casos. Sustituyendo la ecuación 2.22 en la ecuación 2.28 resulta,

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -k_s v \quad (2.29)$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + k_s v = 0 \quad (2.30)$$

dividiendo todo entre la rigidez a la flexión EI se obtiene la ecuación 2.31 que es conocida como la ecuación diferencial de la cimentación elástica [11, 33].

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{k_s v}{EI} = 0 \quad (2.31)$$

Para darle solución al problema de las cimentaciones elásticas se utilizan algunos modelos como son el ya mencionado modelo de Winkler y el de Pasternak, éste último es un modelo de dos parámetros que propone una mejora al de Winkler.

En las cimentaciones elásticas se tiene que k es la constante de proporcionalidad de los

resortes o también conocida como elástica de muelle que se obtiene a partir del módulo de reacción del suelo k_s , el conocer estos parámetros son de gran importancia para la solución de los modelos que implican resortes y se encuentran relacionadas como,

$$k = k_s b \tag{2.32}$$

donde, b es la base de la sección transversal de la viga y el módulo de reacción de suelo k_s obtiene su valor a partir del tipo de suelo. La elástica de muelle o constante de proporcionalidad k no depende únicamente del tipo de suelo si no también de la configuración de la viga.

Para la obtención de la deflexión de la viga utilizando la teoría de Euler-Bernoulli es posible aplicar el segundo teorema de Castigliano, publicado en 1879 por Alberto Castigliano, quien fue un ingeniero y matemático italiano de ferrocarriles, reconocido por la publicación del teorema que dice: *”La primera derivada parcial de la energía complementaria de deformación de la estructura respecto a una de las acciones aplicadas es igual al desplazamiento a lo largo de esta acción”* [21, 14, 15].

$$v_B = \frac{\partial U_c}{\partial P} \tag{2.33}$$

Un apoyo elástico es un elemento que brinda soporte a la estructura y tiene una constante de proporcionalidad que permite una ligera deflexión, esto considerando que el resorte es elástico lineal; la deflexión v se puede obtener aplicando el segundo teorema de Castigliano.

2.2. Timoshenko

La teoría de vigas de Timoshenko o también conocida como teoría de vigas gruesas o peraltadas fue formulada por el ingeniero Ucraniano-Estadounidense Stephen Prokófievich Timoshenko, profesor emérito de mecánica para ingenieros de la Universidad de Stanford [8], quien estableció la teoría como un modelo matemático utilizado para describir la deformación transversal que existe en las vigas, esta teoría fue postulada aproximadamente en 1920.

Timoshenko propuso añadir la deformación producida por el efecto de la fuerza cortante, en el análisis de las vigas la teoría se desarrolla en un campo de desplazamiento y deformación angular por fuerza cortante, en gran medida se considera que la teoría es una mejora en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

Las vigas de Timoshenko se caracterizan principalmente por que son vigas gruesas o peraltadas, por lo que la deformación angular debida a la fuerza cortante es un factor de mayor relevancia y el desplazamiento vertical v se ve afectado por dicha deformación y

que provoca un giro adicional [18, 22, 25].

Una viga entra en la teoría de Timoshenko si la relación largo-peralte es menor a 10 ($\frac{L}{h} < 10$) [39].

Las hipótesis que se toman en cuenta para la formulación de teoría son:

- Material con un comportamiento elástico lineal, homogéneo e isótropo cumpliendo con la ley de Hooke.
- Desplazamiento vertical v en cada punto de la viga depende x .
- Deformación transversal depende del módulo de cortante G .
- La sección transversal permanece plana pero no necesariamente perpendicular al eje neutro de la viga después de la deformación como se muestra en la figura 2.18
- Supone la presencia de fuerzas de cortante en la sección transversal $\gamma_s \neq 0$

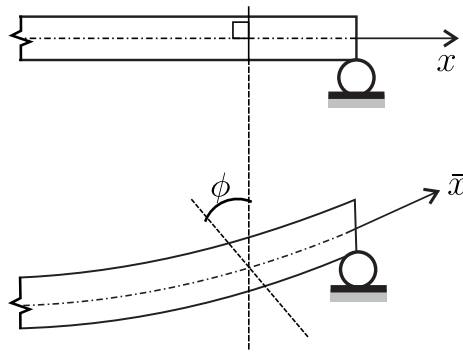


Figura 2.18: Deformación plana pero no perpendicular al eje neutro

Las ecuaciones de equilibrio en la teoría de Timoshenko se expresan de igual forma que en la teoría de Euler-Bernoulli (ecuaciones 2.18 y 2.19). El giro ϕ se encuentra presente y es consecuencia de la suma del giro por deflexión y la deformación por cortante o también llamada deformación angular, es decir, se agrega un giro adicional a θ y por lo tanto $\phi \neq \theta$. De igual forma ésta teoría se encuentra bajo el criterio de pequeñas deformaciones.

El concepto de las deformaciones angulares que ha sido incluido en esta teoría, parte del hecho de que las deformaciones suceden en consecuencia de la presencia de la fuerza cortante V y esta a su vez se produce una deflexión adicional [10].

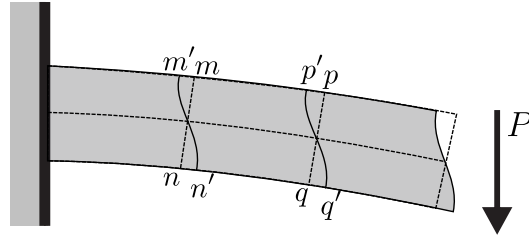


Figura 2.19: Curvatura de las secciones transversales debido a deformaciones por cortante

Considere un elemento diferencial sometido únicamente a fuerzas de cortante, que provocan la presencia de deformaciones en dicho elemento (figura 2.20),

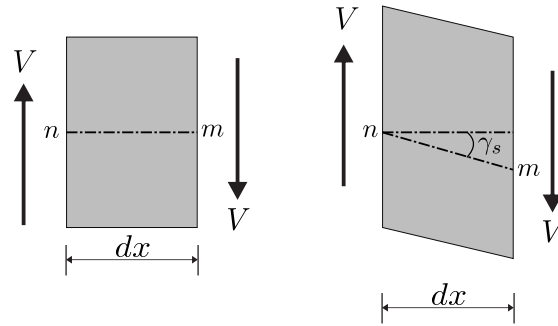


Figura 2.20: Deformación por cortante

La pendiente de la curva de deflexión debida únicamente a la fuerza cortante es aproximadamente igual a la deformación angular del eje neutro, la deflexión debida únicamente por cortante v_S está dada como,

$$\frac{dv_S}{dx} = \gamma_s = \frac{V}{GA_S} \quad (2.34)$$

De donde $\frac{V}{A_S}$ es el esfuerzo cortante medio obtenido de la división de la fuerza cortante y el área de cortante A_S y G es el módulo de cortante, el cual es una propiedad del material y se encuentra dado como,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.35)$$

donde ν es la relación de Poisson y E el módulo de elasticidad del material, por lo que el módulo de cortante G no es una propiedad elástica independiente del material ya que para su obtención es necesario conocer previamente la relación de Poisson y el módulo de elasticidad E . La relación de Poisson se define como el cociente de la deformación lateral y la deformación axial,

$$\nu = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}} \quad (2.36)$$

El cortante V es una función continua que se puede diferenciar con respecto de x , en el caso de que exista una carga continua q (ecuación 2.18), por lo tanto la deflexión producida por la fuerza cortante es,

$$\frac{d^2 v_s}{dx^2} = \frac{1}{GA} \cdot \frac{dV}{dx} = -\frac{q}{GA} \quad (2.37)$$

La deflexión en vigas de Timoshenko v_T es la suma de la deflexión obtenida en la teoría de Euler-bernoulli (ecuación 2.20) y la deflexión debido a fuerzas de cortante (ecuación 2.37) es decir,

$$\frac{d^2 v_T}{dx^2} = \frac{d^2 v_B}{dx^2} + \frac{d^2 v_S}{dx^2} \quad (2.38)$$

$$\frac{d^2 v_T}{dx^2} = -\frac{M}{EI} - \frac{q}{GA} \quad (2.39)$$

La diferencia de manera general entre la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko como se muestra en la sección 2.1 y 2.2, es principalmente la deformación angular debido a la presencia de fuerzas de cortante (fig. 2.21).

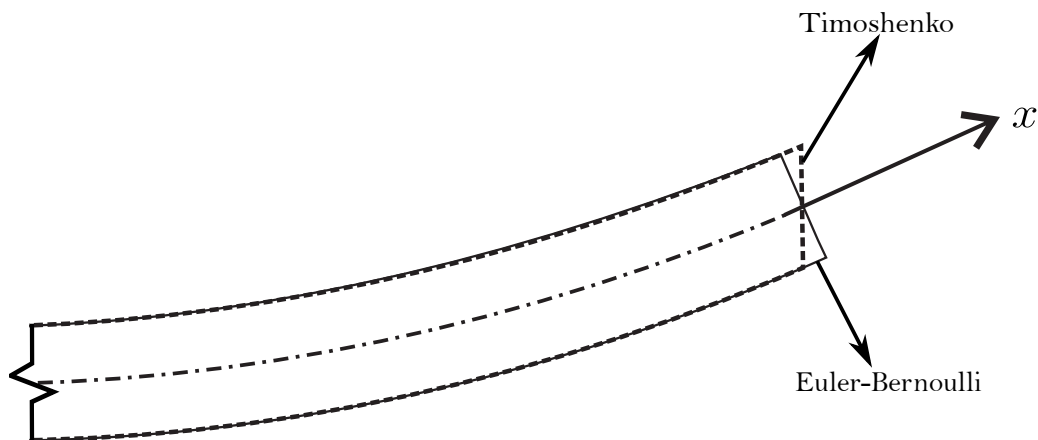


Figura 2.21: Comparación de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko

Al igual que en la teoría de Euler-Bernoulli, en esta teoría existe el concepto de energía

de deformación, pero ahora será por cortante, la energía se puede obtener de manera muy sencilla a partir del elemento diferencial mostrado en la figura 2.20 se aprecia que el trabajo realizado por la fuerza cortante V es igual a la energía de deformación dU almacenada en el elemento, esta dada como,

$$dU_s = \frac{V\gamma_s}{2}dx \quad (2.40)$$

Se sustituye la ecuación 2.34 en la ecuación 2.40, de donde se obtiene,

$$dU_s = \frac{V^2}{2GA_s}dx \quad (2.41)$$

Ahora se procede a integrar la ecuación 2.41, de donde finalmente se obtiene la ecuación 2.42, que representa la energía de deformación por cortante, la cual se suma a la energía de deformación de la viga,

$$U_s = \int \frac{V^2}{2GA_s}dx \quad (2.42)$$

De la suma de la energía de deformación se obtiene la ecuación que se aplica y se adapta a la teoría de vigas de Timoshenko, en dicha ecuación se considera no solo el momento flexionante, ahora se agrega el efecto de la fuerza cortante.

$$U_T = U_B + U_S \quad (2.43)$$

$$U_T = \int \frac{M^2}{2EI}dx + \int \frac{V^2}{2GA_s}dx \quad (2.44)$$

2.2.1. Cimentación elástica

En el diseño de las vigas apoyadas sobre un medio elástico se pueden tener algunas situaciones en donde el elemento estructural, por su configuración se encuentre dentro de la teoría de vigas de Timoshenko, esto se puede confirmar si la relación largo-peralte así lo indica.

Las vigas apoyadas sobre medios elásticos, como se menciona con anterioridad se basa en el concepto de reacciones del suelo, donde estas son proporcionales a la deflexión de la

viga en el punto donde dicha reacción se encuentre.

Se plantea el problema de una viga apoyada sobre un medio elástico (en este caso una serie de resortes) de sección transversal constante y sujeta a cargas verticales que actúan a lo largo del claro de la viga (figura 2.22). Al actuar las cargas sobre la viga, se produce una distribución de presiones y de acuerdo al supuesto de E. Winkler donde las reacciones son proporcionales a la deflexión en el punto donde se encuentre. También se supone que el suelo o medio de desplante no es capaz de soportar fuerzas de tensión [11, 19],

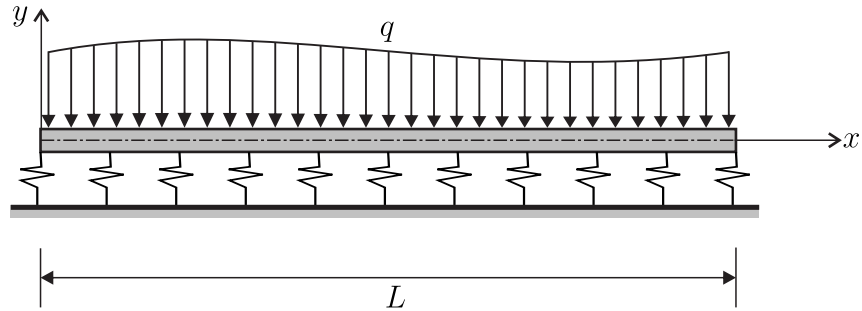


Figura 2.22: Cimentación elástica

Para el análisis se toma un elemento diferencial (figura 2.23) de la viga, el elemento será de gran ayuda para realizar el análisis y obtener la ecuación que gobierna a las cimentaciones elásticas.

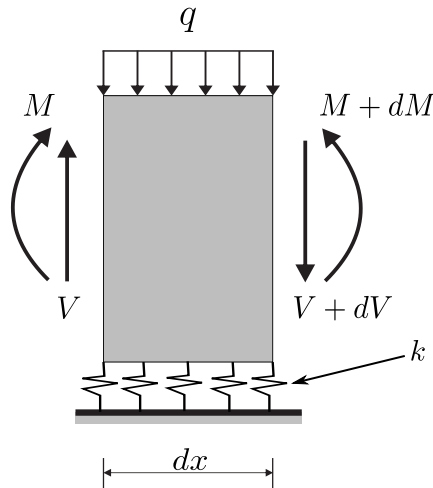


Figura 2.23: Elemento diferencial de una cimentación elástica

Se hace la sumatoria de fuerzas en el eje y (ΣF_y) considerando la convención de signos establecida,

$$V - (V + dV) + kvdx - qdx = 0$$

de donde se obtiene,

$$\frac{dV}{dx} = kv - q \quad (2.45)$$

De la ecuación 2.19 se conoce la relación que existe entre el momento y la fuerza cortante, de lo cual se deduce que la ecuación 2.45 se puede escribir de la siguiente forma.

$$\frac{d^2M}{dx^2} = kv - q \quad (2.46)$$

Sustituyendo la ecuación diferencial de segundo orden 2.20, considerando un momento negativo, en la ecuación 2.46 se obtiene:

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -kv + q \quad (2.47)$$

Finalmente se obtiene la ecuación diferencial 2.47, que es conocida como la ecuación diferencial ordinaria de la cimentación elástica, considerando la parte de la viga donde no existe una carga distribuida ($q = 0$), hace que la ecuación tome la siguiente forma [11, 19],

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -kv \quad (2.48)$$

Dividiendo la ecuación 2.48 entre la rigidez a la flexión EI y en términos positivos se obtiene,

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{kv}{EI} = 0 \quad (2.49)$$

Para la solución de los problemas de la cimentación elástica es suficiente aplicar la ecuación 2.49, ya que a partir de esta se puede obtener la solución a los casos que impliquen una carga distribuida q agregando la integral correspondiente.

Capítulo 3

Apoyos elásticos

En el estudio de los apoyos elásticos se encuentran diversos modelos que son de gran ayuda para aproximar una solución al problema de las cimentaciones elásticas, entre dichos modelos encontramos dos que con ayuda del análisis estructural es posible darle solución, dichas soluciones son aproximaciones a la solución exacta.

Por otro lado se sabe que el suelo de desplante de la cimentación en realidad es un medio elástico y continuo, al cual se le transmiten las cargas por medio de la superestructura, las acciones transmitidas son las que dan lugar a las deformaciones o asentamientos. Se atribuye la representación continua al suelo a partir del trabajo presentado por el matemático Joseph Boussinesq [2].

La continuidad del suelo se muestra cuando las deformaciones producidas en la cimentación analizada afecta a las estructuras cercanas, aun estando fuera del área de carga. El comportamiento elástico del suelo está dentro de la teoría de la elasticidad [29, 32] y analizar el suelo como un medio continuo provoca que obtener la solución requiera la aplicación de un método más específico, la solución puede aproximarse con ayuda del método de los elementos finitos (MEF).

Los modelos que se presentan en este capítulo son:

- Modelo de Winkler
- Modelo de Pasternak
- Modelo elástico continuo

Durante el análisis de las cimentaciones elásticas o vigas sobre apoyos elásticos se pueden presentar deformaciones en el suelo que se traducen en asentamientos, estos surgen cuando dicha cimentación se encuentra sujeta cargas externas, la presencia de asentamientos es inevitable, por lo que esto ha llevado a que algunos autores e investigadores tengan que idealizar el suelo como una serie de resortes elásticos, para poder comprenderlos de mejor forma [31].

Los resortes por naturaleza tienen una constante de proporcionalidad que también es llamada elástica del muelle k , obtener el valor de k no es una tarea sencilla, ya que éste no solo depende del tipo de suelo, si no también del área de la cimentación y la carga, k representa rigidez del resorte a la deformación y resistencia a las fuerzas que se le aplican, en el análisis estructural de vigas sobre apoyos elásticos, la constante de proporcionalidad se obtiene a partir del módulo de reacción del suelo k_s , la constante de proporcionalidad k es directamente proporcional al módulo de reacción del suelo k_s y la base de la sección transversal de la viga B [19], es decir,

$$k = k_s * B \tag{3.1}$$

La transmisión de cargas al suelo por medio de la superestructura provoca una distribución de esfuerzos en éste, cuya resultante tiene como respuesta el equilibrio de las fuerzas aplicadas, esto no depende únicamente de las propiedades del suelo donde se encuentra el desplante, si no también de las cargas presentadas; un incremento de cargas produce en el suelo una mayor deformación.

La deformación en el suelo es una curva continua, y en cambio la solución que el análisis estructural otorga es una aproximación, que se realiza cuando se sustituye la masa de suelo continua por una serie de resortes, es importante saber que mientras mayor sea la cantidad de resortes que se incluyan en la sustitución, mayor será la aproximación a la deformación real.

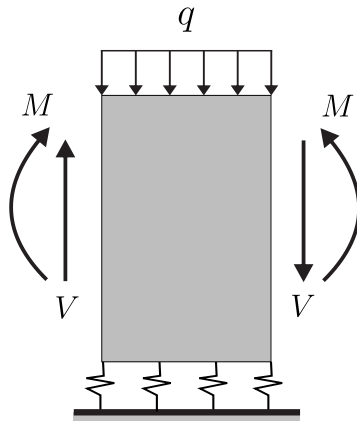


Figura 3.1: Elemento diferencial sobre resortes

El análisis de vigas sobre apoyos elásticos se basa en el concepto de reacción de fuerzas sobre el suelo de desplante, las cuales son proporcionales a cualquier punto de la deflexión presente en la viga, en un elemento diferencial los elementos mecánicos, momento flexionante y fuerza cortante serán positivos de acuerdo a la figura 3.1.

Módulo de reacción del suelo k_s

El valor de la constante de proporcionalidad k de los resortes es directamente proporcional al módulo de reacción del suelo k_s , y éste a su vez se asocia con la carga transmitida al suelo mediante una placa q , que genera el asentamiento v ; el módulo de reacción del suelo se define como la relación entre la carga capaz de generar un asentamiento en el área de interés, dicho módulo es un parámetro que describe la rigidez del suelo y su valor se determina con base en el asentamiento (ecuación 3.2).

$$k_s = \frac{v}{q(x)} \quad (3.2)$$

El módulo de reacción del suelo k_s se puede determinar mediante el método de Terzagui o con ayuda de software especializados como PLAXIS ó DSettlement, el módulo k_s varía de acuerdo al tipo de suelo, es decir, no es constante y aunque los asentamientos del suelo no siempre ocurren de inmediato, este valor se mantiene, existen dos tipos de asentamientos:

☞ Asentamientos elásticos o inmediatos.

☞ Asentamientos plásticos por consolidación a corto y a largo plazo.

Antes de realizar el análisis es necesario conocer el previamente el tipo de suelo y se debe considerar que el módulo de reacción del suelo k_s no es único y tampoco es constante, éste siempre será diferente para los distintos tipos de suelo. Los modelos que pretenden idealizar la masa de suelo como una serie de resortes utilizan este módulo para obtener la constante de proporcionalidad: actualmente existen algunos valores obtenidos previamente presentados en el trabajo del Ingeniero Joseph Bowles en 1997 [17], se muestran en la tabla 3.1.

Tipo de suelo	Módulo de reacción k_s (kN/m^3)
Arena suelta	4800-16000
Arena media densa	9600-80000
Arena densa	64000-128000
Arena arcillosa media densa	32000-48000
Arena limosa media densa	24000-48000
Suelo Arcilloso	
$q_a \leq 200$ KPa	12000-24000
$200 < q_a \leq 800$ KPa	24000-48000
$q_a > 800$ KPa	> 48000

Tabla 3.1: Intervalos del Módulo de reacción

Existen otros valores para el módulo de reacción del suelo según Terzaghi y Barkan [40] para diferentes tipos de suelo.

Módulo de reacción del suelo k_s Arenas (T/m^3)			
Tipo de arena	Suelta	Media	Densa
Seca o húmeda	555-1940	1940-9697	9697-33246
Saturada	832	2494	9697

Tabla 3.2: Intervalos del Módulo de reacción

El módulo de reacción del suelo k_s es de gran importancia, ya que gracias a él es posible conocer el valor que se le otorga a las constantes de proporcionalidad de los resortes en caso de que el modelo utilizado para el análisis lo requiera, con este valor se puede aproximar la rigidez que presentan los resortes, si el valor de la constante de proporcionalidad k llega a ser muy elevado provocará una rigidez alta en el resorte y por consecuencia el asentamiento será muy pequeño e incluso de ser demasiado elevado el asentamiento puede no presentarse, por lo que es necesario obtener correctamente el valor de k .

3.1. Modelo de Winkler

El modelo de Winkler presentado en 1867, nombrado así en honor a Emil Winkler, Ingeniero Civil Alemán, quien fue el primero en resolver el problema de la cimentación elástica, fue presidente de ingeniería de puentes y ferrocarriles en el instituto politécnico de Praga

[30]; el modelo supone que la presión de contacto en cualquier punto es proporcional al asentamiento presentado en el suelo, cada uno de estos puntos representa un apoyo en análisis estructural pero al mismo tiempo la deflexión de la viga [3, 31].

En el modelo de Winkler idealiza la masa de suelo donde se encuentra desplantada la viga y es sustituida por una serie de resortes que actúan de manera independiente uno con otro, es decir, se simula una viga apoyada sobre una serie de resortes como se muestra en la figura 3.2 [24, 16]

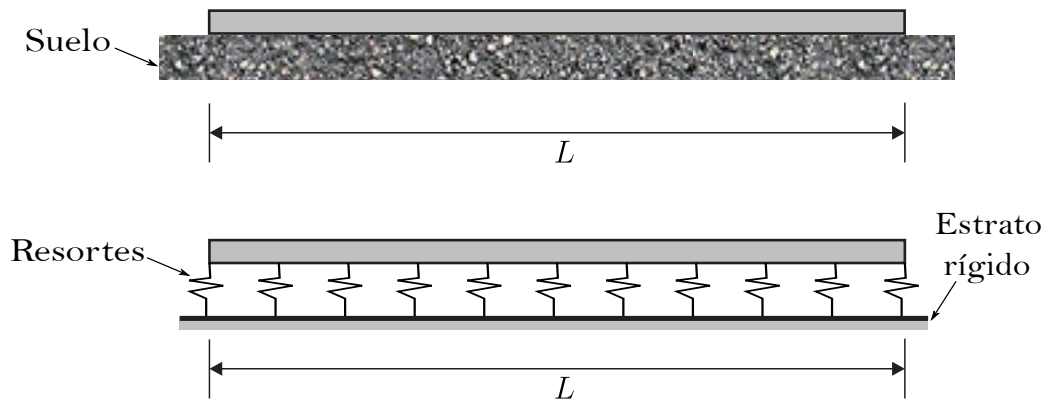


Figura 3.2: Idealización del suelo por una serie de resortes, de acuerdo con el Modelo de Winkler

El modelo considera que la carga aplicada es directamente proporcional a la constante de proporcionalidad k y la deflexión v como se muestra en la ecuación 3.3, el comportamiento de los resortes donde se tiene una carga reduce el tamaño del resorte y opone una resistencia a las fuerzas externas aplicadas [7], la reducción de los resortes representa la deflexión de la viga y su vez representa la deformación en el suelo.

$$q = kv \tag{3.3}$$

De la ecuación anterior es posible, obtener la deflexión v y se tiene,

$$v = \frac{q}{k} \tag{3.4}$$

Donde:

- ☞ q es la carga o la presión de contacto
- ☞ v es la deflexión
- ☞ k es la constante de proporcionalidad

La constante de proporcionalidad obtenida a partir del módulo de reacción del suelo, representa una carga que al ser aplicada sobre una superficie, produce un asentamiento, dicha constante en el modelo de Winkler es el único parámetro necesario para obtener la deformación del suelo.

El modelo de Winkler ésta basado en tres supuestos [31].

- La carga aplicada al suelo sólo produce asentamientos en el área de la viga y ningún efecto fuera de ella.
- El suelo puede resistir esfuerzos de tensión así como de compresión
- El tamaño y geometría de la cimentación no afectan al asentamiento producido.

Aunque los supuestos no siempre son precisos, por que en realidad las cargas que producen asentamientos si afectan al suelo fuera del área de carga, el suelo resiste muy poco a la tensión y los asentamientos no solo dependen de la carga si no también influye la geometría y tamaño de la estructura [31].

El suelo al ser un medio continuo tiene una deformación que se presenta en forma de una curva exacta, al hacer una sustitución del suelo por resortes independientes cada uno, la deformación será realizada por una serie de puntos, como una solución discreta, pero existe la posibilidad de error, si es que esta sustitución carece de elementos resorte, para que la aproximación obtenida por el modelo sea más aproximada a la solución exacta, requiere que la serie de resortes por la cual se ha sustituido el suelo contenga una cantidad considerable, de lo contrario el error en la curva puede ser alto.

Este modelo es simple y muy práctico, pero tiene sus limitaciones, su aplicación se restringe a rocas en donde los asentamientos producidos por la presencia de cargas externas no tiene mucha relevancia e incluso llegan a ser tan pequeñas que se consideran despreciables, de acuerdo con los supuestos del modelo, dicha deformación en el suelo sólo sucede dentro del área de carga como se muestra en la figura 3.3 [1, 4, 35]

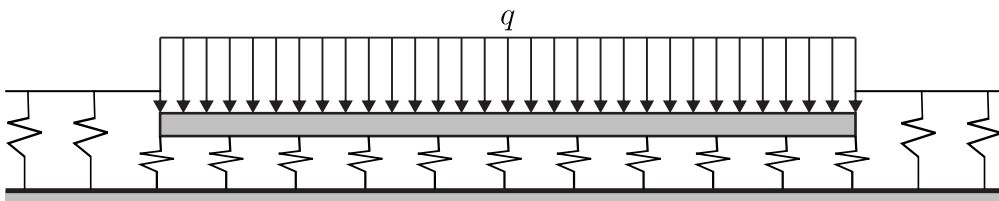


Figura 3.3: Deformación del área cargada

Otra de las limitaciones con la aplicación del modelo es la determinación de la constante de proporcionalidad k de los resortes, como se ha mencionado anteriormente la obtención de este requiere de la aplicación herramientas especializadas. El modelo idealiza los resortes trabajando de manera independiente, lo que puede representar una limitación, ya que en realidad se trata de un medio continuo.

3.2. Modelo de Pasternak

El modelo de Pasternak propuesto en 1954 por Peter Leont'evich Pasternak, Ingeniero Civil Ruso, que basado en el modelo de Winkler, desarrolló una mejora en el mismo, esta versión propone que la serie de resortes por la cual se ha sustituido la masa de suelo se encuentren interactuando uno con otro. Este modelo también se conoce como un modelo de dos parámetros, por que considera otro término además de la constante de proporcionalidad k , el segundo parámetro es el módulo de la capa de cortante G_P , dicho parámetro representa físicamente la interacción que tienen los resortes debido a la acción de corte e influye en el asentamiento [3, 20, 23, 37] hace al modelo más realista comparado con el modelo de un parámetro.

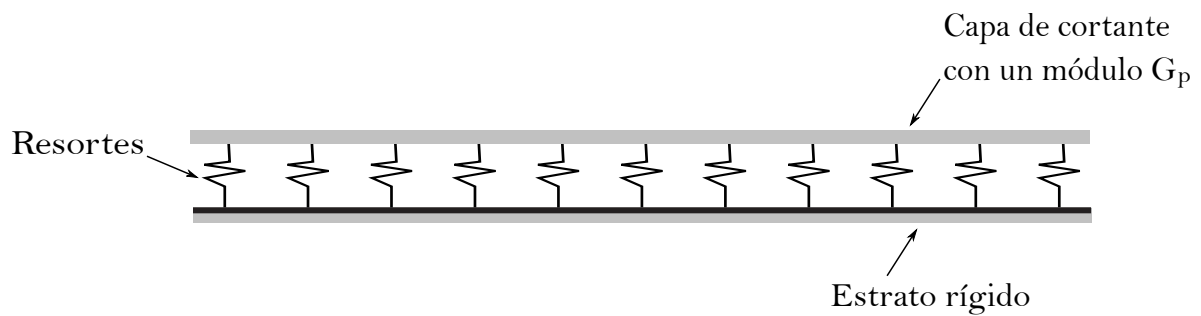


Figura 3.4: Capa de cortante del modelo de Pasternak

El parámetro mostrado en la figura 3.4 que se encuentra en la superficie del suelo es el módulo de la capa de cortante G_P , este representa una interacción entre los resortes en la superficie de contacto con el elemento estructural, este módulo y la constante de proporcionalidad en conjunto conforman al modelo de Pasternak (modelo de dos parámetros) [3, 5].

La relación carga y deflexión en éste modelo se encuentra dado como:

$$q = kv - G_p \nabla^2 v \quad (3.5)$$

Donde:

- ☞ q es la carga o la presión de contacto.
- ☞ v es la deflexión presentada en el punto de interés.
- ☞ k es la constante de proporcionalidad.
- ☞ G_P es el módulo de la capa de cortante.
- ☞ ∇^2 es el operador de Laplace.

El operador diferencial de Laplace esta definido como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.6)$$

La forma más general del modelo de Pasternak es la siguiente:

$$q = kv - G_P \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.7)$$

La respuesta del material a la fuerza cortante esta dada por el módulo de capa de cortante G_P y aunque dicho módulo se encuentra relacionado con el módulo de cortante G (sección 2.2), no es igual; las unidades son la diferencia principal, por un lado el módulo de cortante G se encuentra en kN/m^2 mientras que G_P en kN/m , G_P es el resultado de el módulo G por la profundidad efectiva P_e a la que se encuentra cortando el suelo [20] (ecuación 3.8).

$$G_P = G * P_e \quad (3.8)$$

Aunque en realidad no existe mucha información al respecto del módulo de la capa de cortante G_P , la información existente afirma que dicho módulo es un parámetro de interacción del suelo, es con este segundo parámetro que el modelo de Pasternak mejora al modelo de Winkler. La constante de proporcionalidad k y módulo de reacción del suelo k_s siguen siendo los mismos utilizados en el modelo de Winkler y se obtiene bajo los mismos criterios.

En el modelo de Pasternak idealiza la masa de suelo como un medio elástico y continuo que se sustituye por una serie de resortes, donde ahora se incluye la capa de cortante en el análisis, como se muestra en la figura 3.4 y al igual que en el modelo de Winkler para que la solución tenga una mayor aproximación se debe de contar con una cantidad considerable en la serie de resortes, mientras mayor sea la cantidad de resortes mayor será aproximación a la solución exacta[37, 34].

La diferencia principal entre el modelo de Winkler y el de Pasternak es la consideración de un segundo parámetro " G_P ", los resortes se encuentran conectados a una capa isotrópica e incompresible con una deformación por cortante. Pasternak al ser un modelo de dos parámetros, se considera una mejora en el modelo de Winkler adicionando la interacción de los resortes con la capa de cortante y con ello consiguiendo una mayor aproximación al problema de las cimentaciones elásticas.

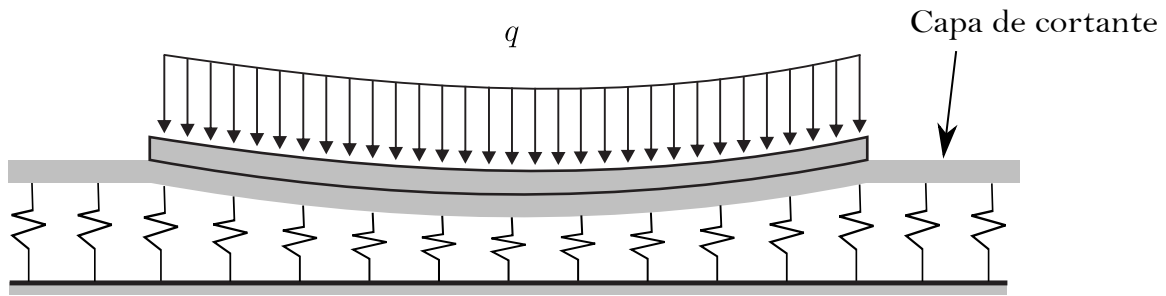


Figura 3.5: Modelo de Pasternak

El modelo de Pasternak se considera uno de los modelos de dos parámetros con mayor aproximación cuando se trata de que tan cercano es la realidad de las cimentaciones elásticas, pero también la solución es más compleja si se compara con el de Winkler, que es un modelo de un parámetro.

3.3. Modelo elástico continuo

Para el análisis del problema de la cimentación elástica cuando se considera el suelo como un medio continuo y elástico, se deben tener consideraciones previas, en este modelo no se idealiza la masa de suelo como una serie de resortes, como es el caso de los modelos de Winkler y Pasternak, para este modelo la masa de suelo se mantiene continua como se muestra en la figura 3.6 y se comporta como un material elástico respetando la ley de Hooke, la masa de suelo al que se le transfieren las cargas tendrá deformaciones de manera inevitable que dependen del área de carga, tipo de carga, magnitud de la carga y tipo de suelo[4].

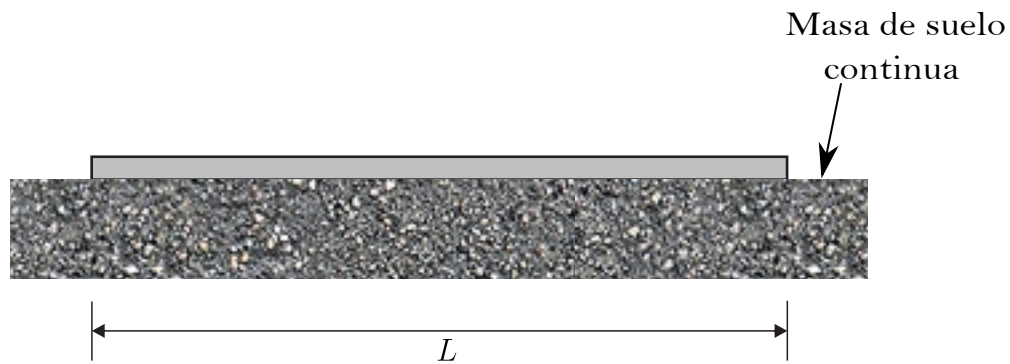


Figura 3.6: Viga apoyada sobre un suelo continuo

El análisis de la cimentación elástica como medio continuo se considera como un sólido deformable, por lo que es posible realizar el análisis aplicando el método de los elementos finitos o por sus siglas en inglés FEA (Finite Element Analysis), con frecuencia se recurre al

uso de software especializados para darle solución a problemas más complejos, los software más comunes que se encuentran son ABAQUS FEA, FEAP 8.5, ANSYS, NASTRAN, entre otros. El uso y la aplicación de este tipo de software puede ser de gran ayuda en la solución del problema de vigas sobre apoyos elásticos.

Para darle solución al problema se realiza un proceso de discretización en el sólido [6], el suelo se modela con elementos sólidos de material elástico, homogéneo e isotrópico con deformación plana, la interacción con la superestructura y el suelo se considera sin fricción y únicamente trabaja a compresión [4], se realiza una malla en el suelo de interés, ésta puede contener elementos triángulo o rectángulo, el tipo de elemento depende únicamente de quien realice el análisis, dicha malla (figura 3.7) ayudará a obtener la solución del problema.

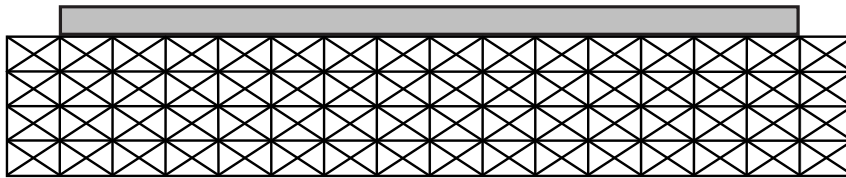


Figura 3.7: Malla de elementos finitos para analizar un medio continuo

El análisis de vigas apoyadas sobre un medio continuo elástico representa un problema más complejo, sin embargo, el resultado que arroja este análisis con el método de los elementos finitos se considera la una solución más aceptable por su gran aproximación a la solución exacta.

La diferencia que más destaca en el modelo elástico continuo si se compara con algún otro donde se idealiza el suelo de apoyo como una superficie de resortes, es la deformación que se tiene en el mismo, en el caso de los modelos con resortes, la constante de proporcionalidad k y el módulo de reacción del suelo " k_s " mantienen un valor que depende del tipo de suelo, es decir, el resorte tendrá una rigidez constante, pero cuando hablamos de un medio continuo se tiene una rigidez en todo el suelo de apoyo.

Los modelos donde se idealizan resortes a pesar de que son simples y prácticos al otorgar una solución con gran aproximación, como es el caso del modelo de Winkler, que aunque es un modelo de un parámetro, es de gran ayuda para darle solución al problema de la cimentación elástica, sin embargo, no es tan conveniente su aplicación de manera estricta ya que dichos modelos no consideran la continuidad del suelo.

Este método es considerado uno de los mejores para analizar el suelo como apoyo, sin embargo, no significa que el método no sea aplicable en cualquier otra rama de la ingeniería, actualmente es uno de los métodos más utilizados para solucionar distintos tipos de problemas.

Capítulo 4

Solución numérica

En éste capítulo se presentan algunos problemas de vigas sobre apoyos elásticos, a los cuales se les ha dado solución utilizando el modelo de Winkler y aplicando las teorías de vigas presentadas en el capítulo 2. Parte de los ejemplos mostrados se solucionaron con ayuda del software Wolfram Mathematica versión 12, debido a su capacidad de trabajo con distintas variables, gran memoria de operación y la creación de gráficos, otros ejemplos se han solucionado con ayuda de *Finite Element Analysis Program* (FEAP), desarrollado en la Universidad de California en Berkeley el por Prof. R. L. Taylor, [26] [27]

Los ejemplos tienen la finalidad de mostrar la deformación que presentan las vigas en cada caso. Es necesario mencionar que las soluciones mostradas son aproximaciones y los problemas mostrados suponen la presencia una carga que ha provocado un asentamiento elástico en el suelo, un ejemplo son los durmientes en una vía férrea que se deforma al pasar el ferrocarril y una vez terminado trayecto la vuelve a su estado original [33].

Los ejemplos de aplicación se solucionaron con la convención de signos mostrada en la figura 4.1, todos los ejemplos presentes se pueden revisar a detalle y de manera completa en el Anexo A.

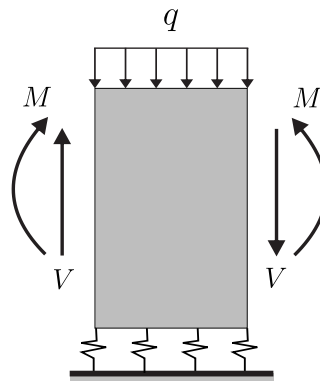


Figura 4.1: Convención de signos

4.1. Solución numérica aplicando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli

Los ejemplos mostrados han sido solucionados aplicando el modelo de Winkler y la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, así como el segundo teorema de Castigliano para dicha teoría, el segundo teorema de Castigliano (ecuación 4.1) mostrado en la sección 2.1 es de gran utilidad para encontrar la deflexión en el punto de interés,

$$v = \frac{\partial U_c}{\partial P} = \frac{1}{2EI} \int_0^L [M(x)]^2 dx \quad (4.1)$$

Considere una viga apoyada sobre una serie de resortes (figura 4.2),

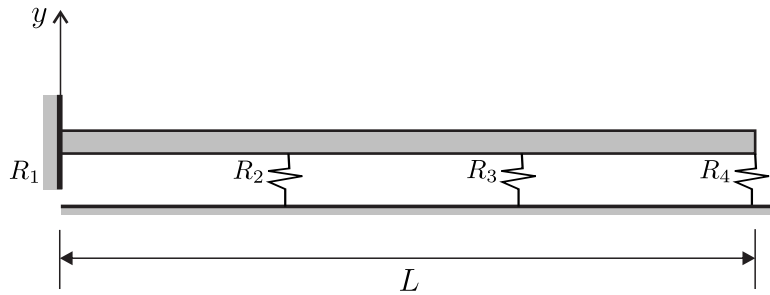


Figura 4.2: Viga apoyada sobre una serie de resortes

de acuerdo al modelo de Winkler la reacción de cada apoyo se encuentra relacionada con la deflexión en ese punto, como se muestra en la figura 4.2,

$$v_2 = -\frac{R_2}{k}$$

$$v_3 = -\frac{R_3}{k}$$

$$v_4 = -\frac{R_4}{k}$$

Para poder aplicar el segundo teorema de Castigliano es necesario conocer previamente la energía complementaria, ésta se encuentra en función de la distancia y de las reacciones que se encuentran a lo largo del claro de la viga, las ecuaciones de los momentos flexionantes

necesarios para calcular la energía complementaria, que se puede obtener con el método de cortes y secciones, para el ejemplo mostrado en la figura 4.2 la energía complementaria se obtiene de la siguiente forma:

$$U_c = \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{3}} [M(x, R_4)]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} [M(x, R_4, R_3)]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L [M(x, R_4, R_3, R_2)]^2 dx \quad (4.2)$$

Ahora que se tiene la energía complementaria es posible aplicar el segundo teorema de Castigliano para obtener cada una de las deflexiones que corresponde a cada resorte,

$$\frac{\partial U_c}{\partial R_2} = v_2$$

$$\frac{\partial U_c}{\partial R_3} = v_3$$

$$\frac{\partial U_c}{\partial R_4} = v_4$$

Sí se iguala cada deflexión v obtenida mediante el segundo teorema de Castigliano con el modelo de Winkler se obtiene un sistema de ecuaciones que al darle solución se obtienen las reacciones de los resortes.

4.1.1. Primer ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro

Se tiene, una viga apoyada sobre una masa de suelo la cual ya ha sido sustituida por una serie de resortes, aplicando el modelo de Winkler para aproximar una solución, se han incluido diez elementos resorte para este ejemplo.

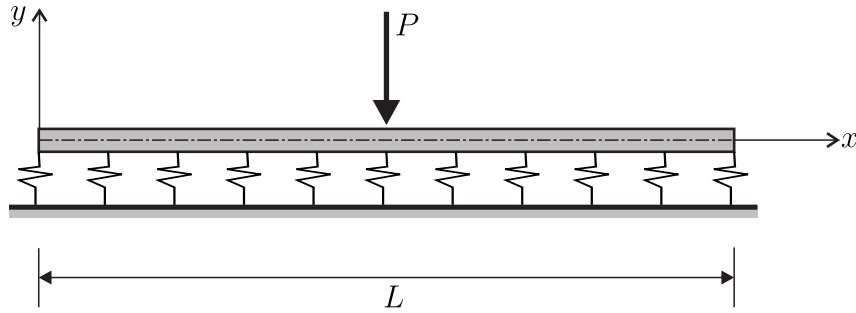


Figura 4.3: Primer caso

Para que se pueda apreciar como la solución se mayor aproximación si se incluye un mayor número de resortes, se dará solución al mismo problema presentado en la figura 4.3 incrementando los resortes, comenzando con tres hasta llegar a diez.

Primer ejemplo con tres resortes

En este primer ejemplo se solucionará a detalle para mostrar el procedimiento, para el resto de los ejemplos solo será mostrado el problema y solución.

Se procede a la obtención de las reacciones utilizando las ecuaciones fundamentales de la estática ΣM y ΣF_y , hay que destacar que al ser una viga con tres apoyos se tiene una viga hiperestática.

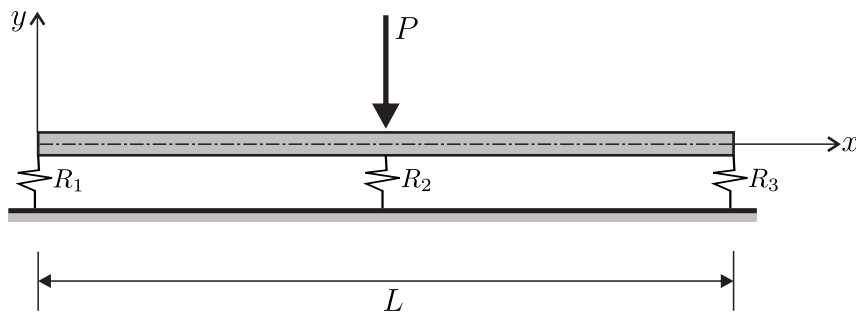


Figura 4.4: Primer caso con tres resortes

Se aplica Σ_y

$$R_1 + R_2 - P + R_3 = 0 \tag{4.3}$$

Para este caso, existen reacciones que son simétricas,

- $R_3 = R_1$

Entonces se obtiene la reacción,

$$\blacksquare R_1 = \frac{P-R_2}{2}$$

Se procede a realizar un corte al centro del claro de la viga para obtener la ecuación de momento,



Figura 4.5: Corte 1 que va de $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

Mediante el corte y ΣM se obtiene la ecuación de momento,

$$M(x) = \frac{P - R_2}{2} \cdot x \quad (4.4)$$

Sustituyendo la ecuación de momento 4.4 en la ecuación 4.1 y al ser un corte simétrico se tiene,

$$v = \frac{\partial U_c}{\partial R_2} = 2 \left[\frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P - R_2}{2} \cdot x \right)^2 dx \right]$$

Se soluciona y se tiene,

$$v = -\frac{L^3(P - R_2)}{48EI} \quad (4.5)$$

Recordando el modelo de Winkler en la ecuación 3.4, donde ahora la carga $q(x)$ es sustituida por la reacción del resorte R_2 se tiene

$$v = -\frac{R_2}{k} \quad (4.6)$$

Igualando la deflexión obtenida por el teorema de Castigliano (ecuación 4.5) con el modelo de Winkler (ecuación 4.6) se obtiene:

$$-\frac{R_2}{k} = -\frac{L^3(P - R_2)}{48EI} \quad (4.7)$$

La ecuación 4.7 es una ecuación de primer orden que al solucionar se obtiene la reacción R_2 ,

$$R_2 = \frac{kL^3P}{48EI + kL^3}$$

Conociendo la reacción R_2 se sustituye el valor de ésta en la ecuación 4.3 para así obtener las reacciones R_1 y R_3 que por simetría son iguales.

$$R_1 = R_3 = \frac{24EIP}{48EI + kL^3}$$

Se tienen los siguientes datos del problema,

- $B = 0.20 \text{ m}$
- $H = 0.30 \text{ m}$
- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000\sqrt{250\text{kg/cm}^2} = 221,359.44\text{kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $I_z = \frac{B*H^3}{12}$
- $L = 20 \text{ m}$
- $P = 100 \text{ N}$
- $EI = E_c * I_z$

Con los valores obtenidos a partir de la sustitución de los datos en las variables, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 4.6 la cual representa la deformación de la viga con tres resortes.

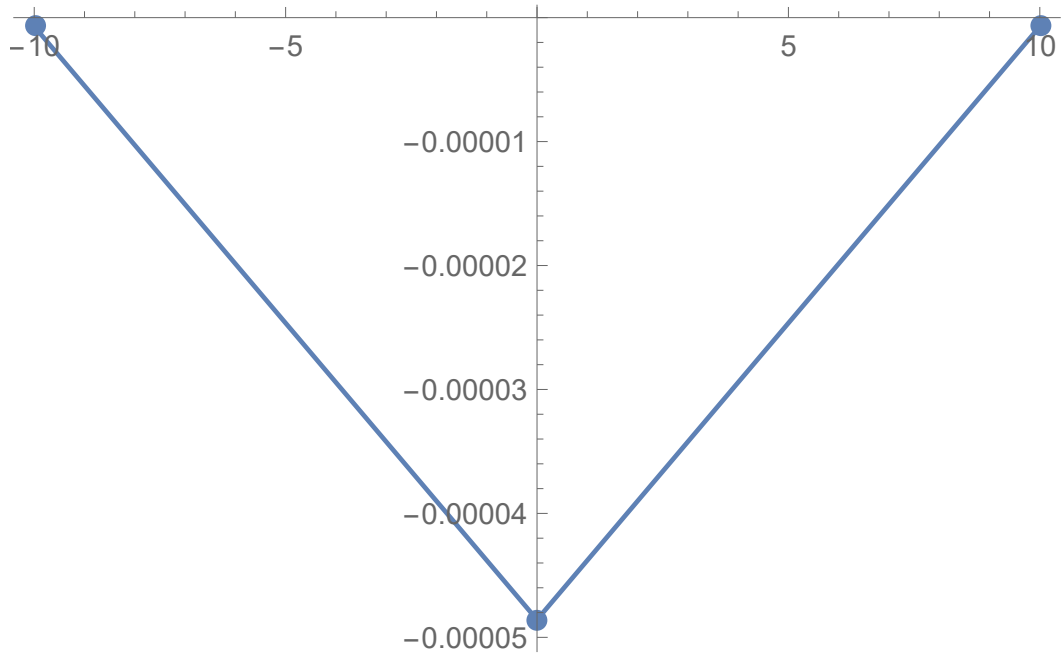


Figura 4.6: Deformación para la viga con tres resortes para el primer caso

Primer ejemplo con cuatro resortes

Para realizar una aproximación más cercana a la solución exacta se agrega un resorte más al problema, se tiene una viga apoyada sobre cuatro resortes,

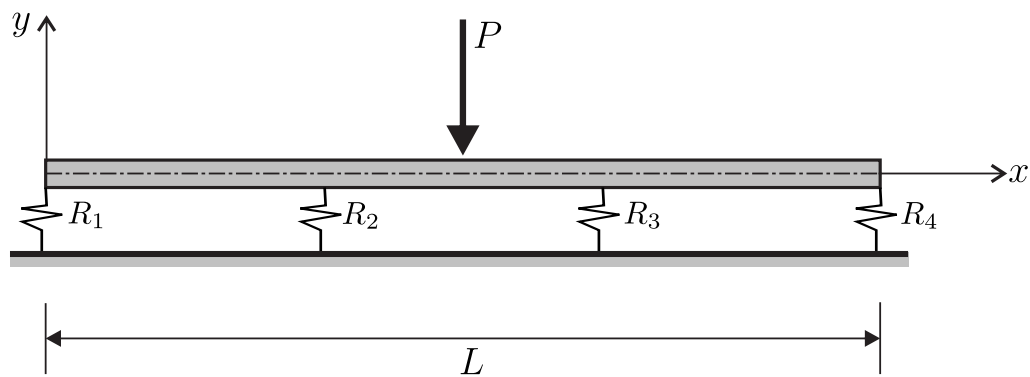


Figura 4.7: Primer caso con cuatro resortes

Al darle solución se obtiene,

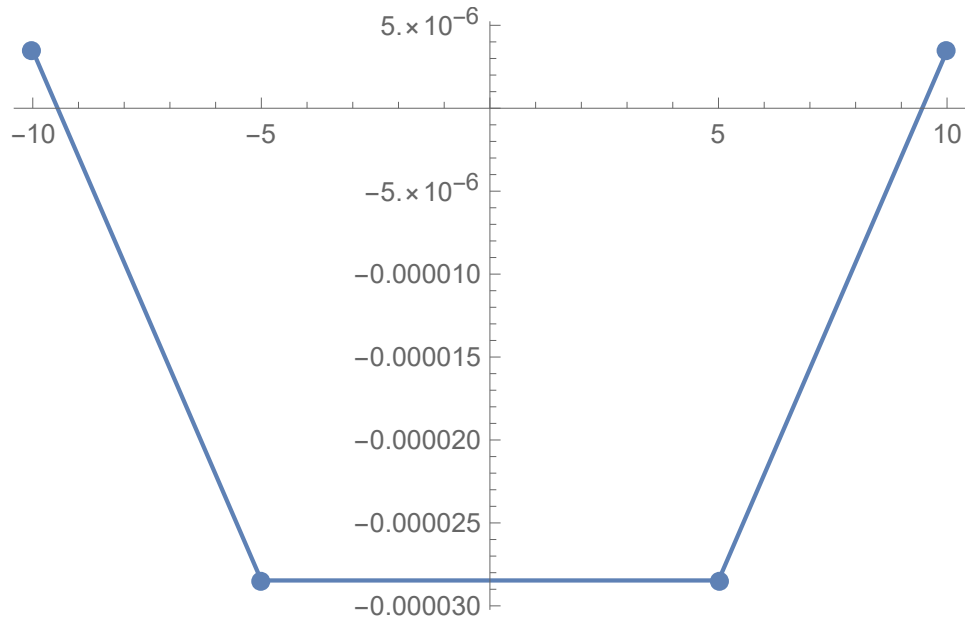


Figura 4.8: Deformación para la viga con cuatro resortes para el primer caso

La figura 4.8 muestra la deformación de la viga con cuatro resortes, con un resorte extra se puede notar el cambio que ésta sufre.

Conforme se agregan resortes a la viga la deformación tendrá un mayor cambio.

Primer ejemplo con cinco resortes

Se continúa agregando un quinto resorte a la viga, este nuevo apoyo dará un cambio más notorio y una forma diferente

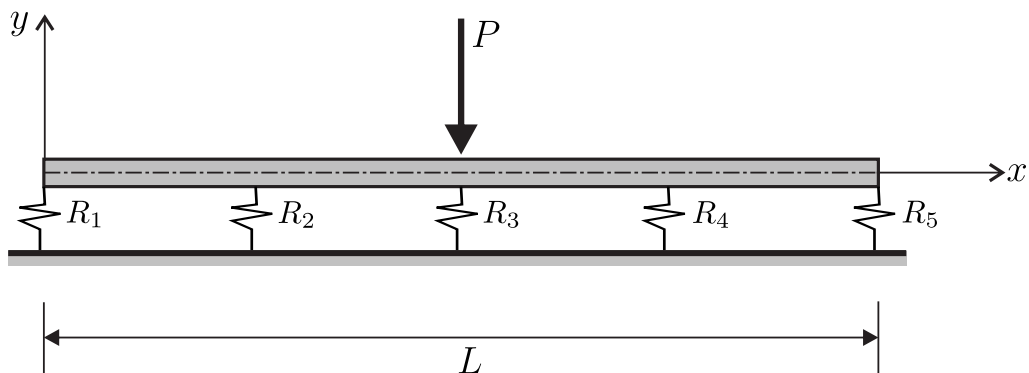


Figura 4.9: Primer caso con cinco resortes

Al solucionar la viga con cinco resortes se tiene,

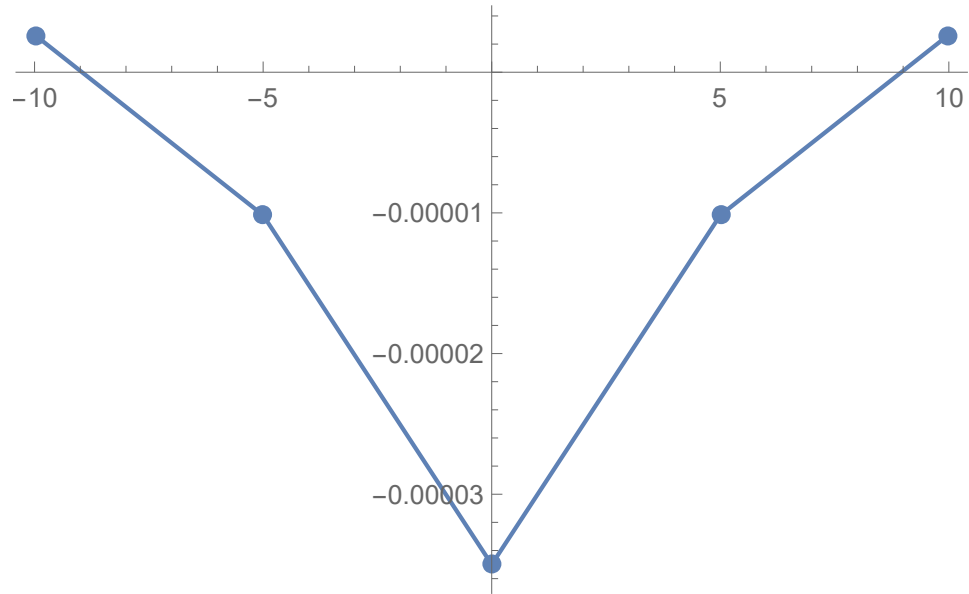


Figura 4.10: Deformación para la viga con cinco resortes para el primer caso

La figura 4.10 muestra como cambia la deformación de la viga con cinco resortes. Se puede ver claramente como va tomando otra forma la gráfica, esto debido al incremento en el número de resortes.

Primer ejemplo con seis resortes

Se tiene un sexto resorte en el problema.

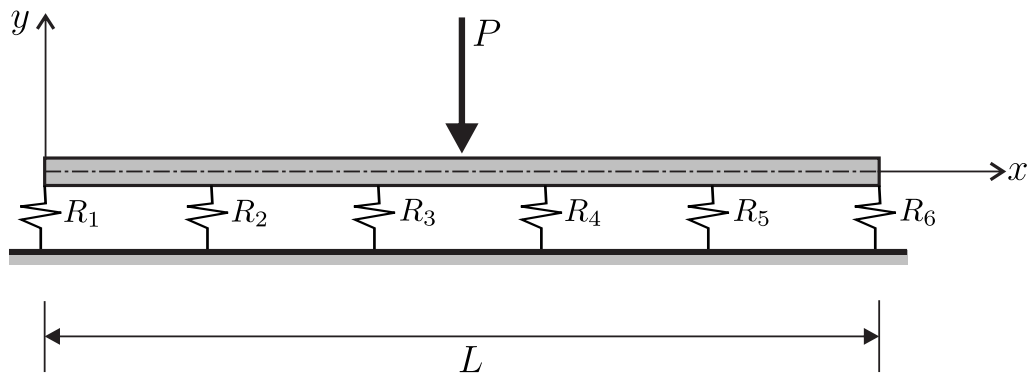


Figura 4.11: Primer caso con seis resortes

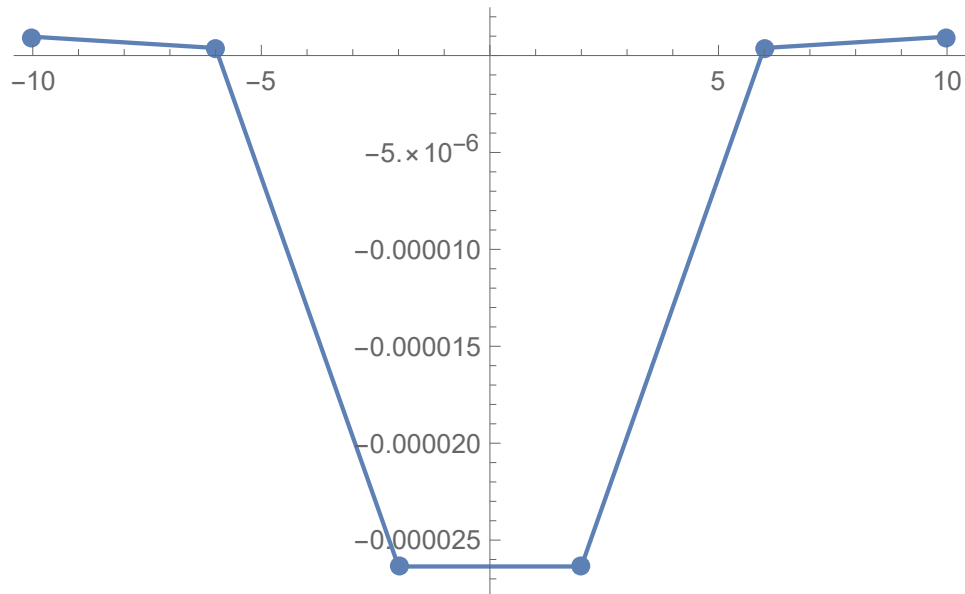


Figura 4.12: Deformación para la viga con seis resortes para el primer caso

La figura 4.12 muestra la deformación que la viga con seis resortes tiene.

Primer ejemplo con siete resortes

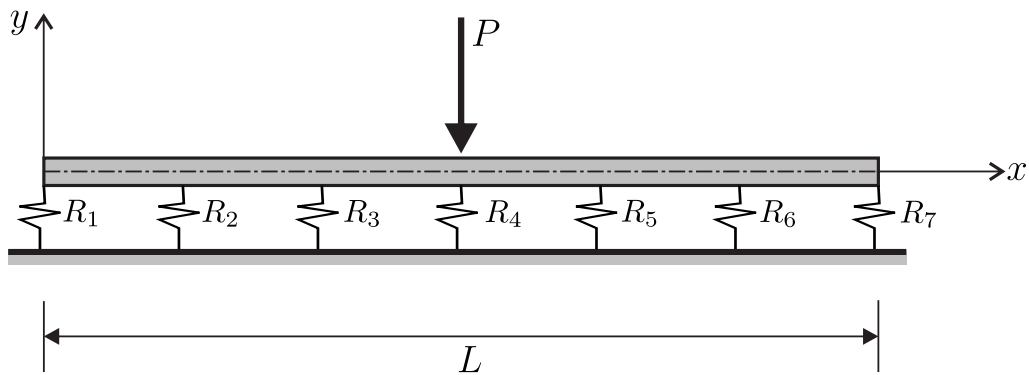


Figura 4.13: Primer caso con siete resortes

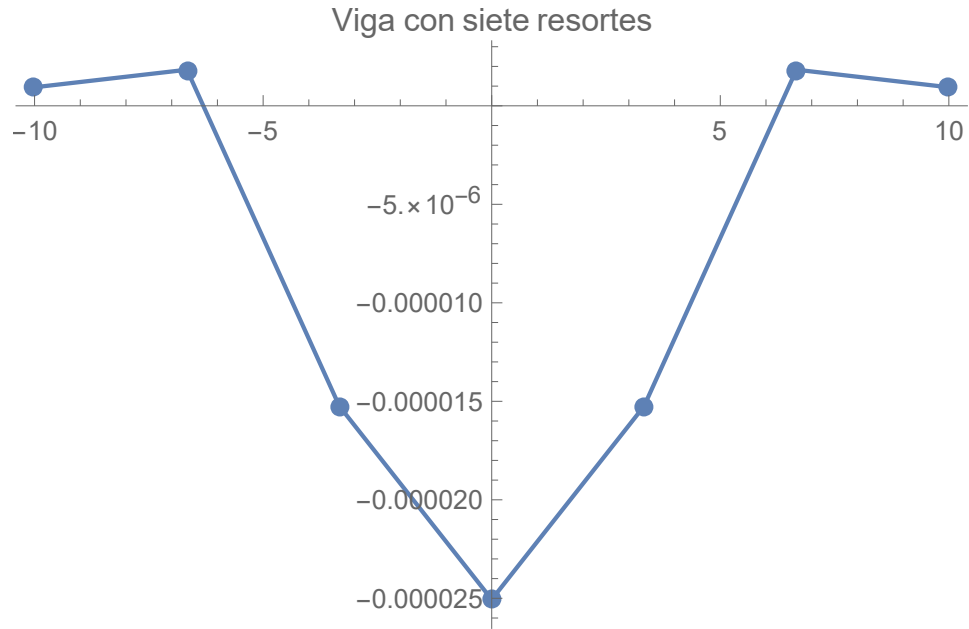


Figura 4.14: Deformación para la viga con siete resortes para el primer caso

Finalmente en la figura 4.14 se muestra la deformación que esta la viga con 7 resortes tendrá.

Primer ejemplo con ocho resortes

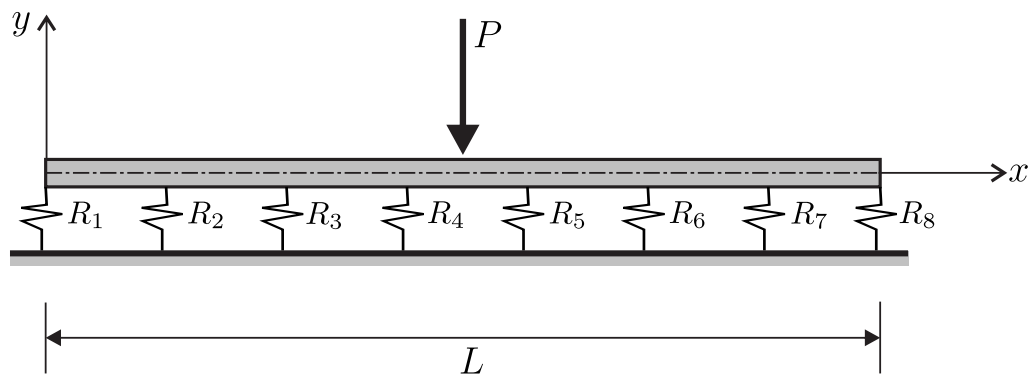


Figura 4.15: Primer caso con ocho resortes

La figura 4.16 muestra la deformación que tiene la viga con ocho resortes,

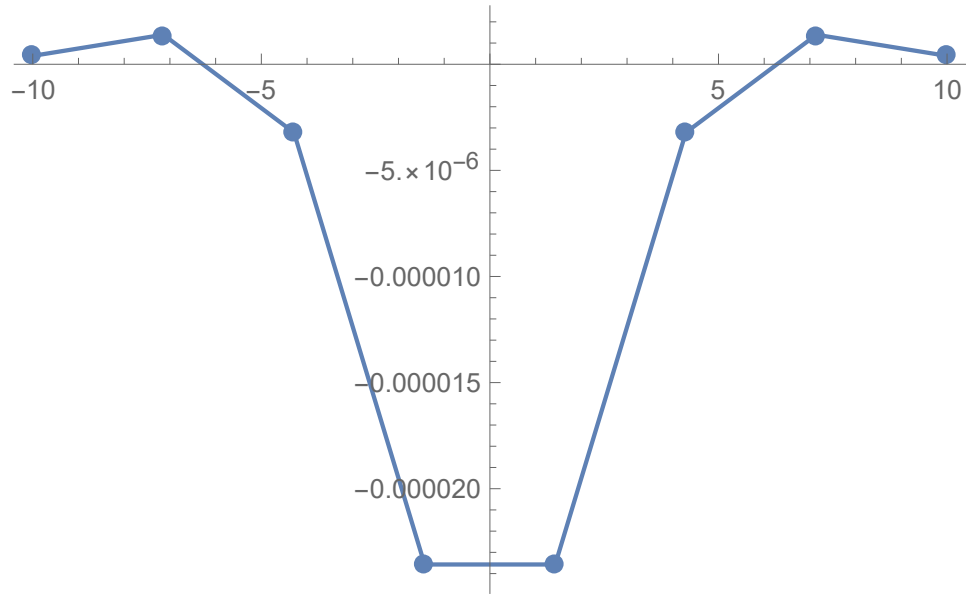


Figura 4.16: Deformación para la viga con ocho resortes para el primer caso

Primer ejemplo con nueve resortes

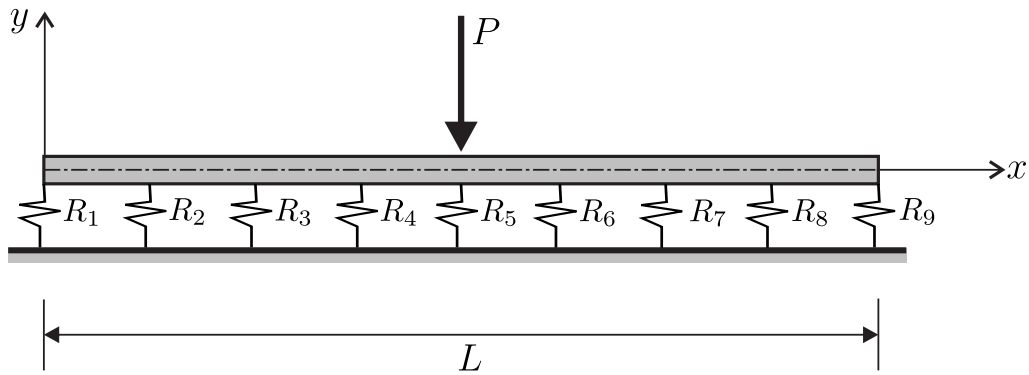


Figura 4.17: Primer caso con nueve resortes

La figura 4.18 muestra la deformación que presenta la viga con nueve resortes,

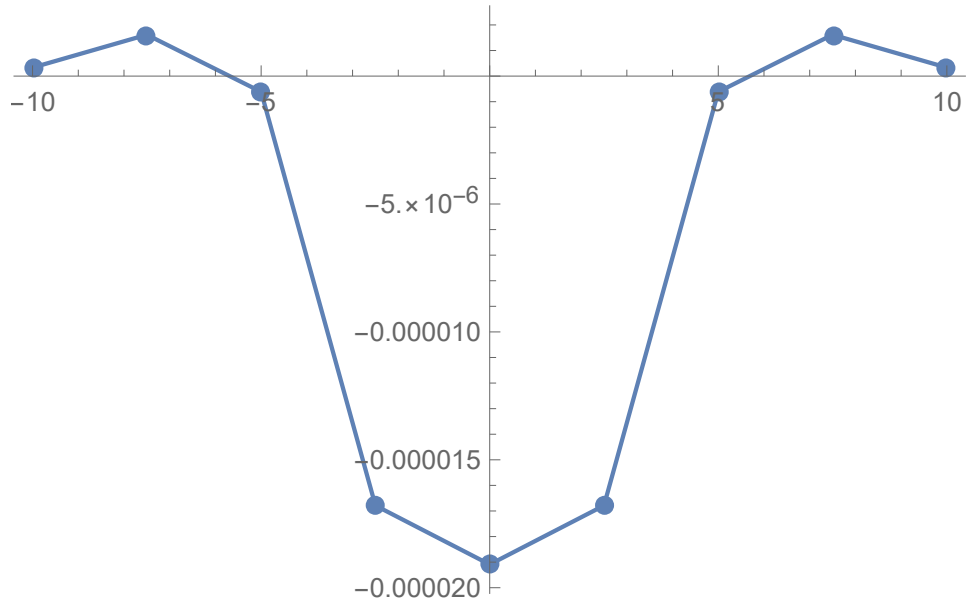


Figura 4.18: Deformación para la viga con nueve resortes para el primer caso

Primer ejemplo con diez resortes

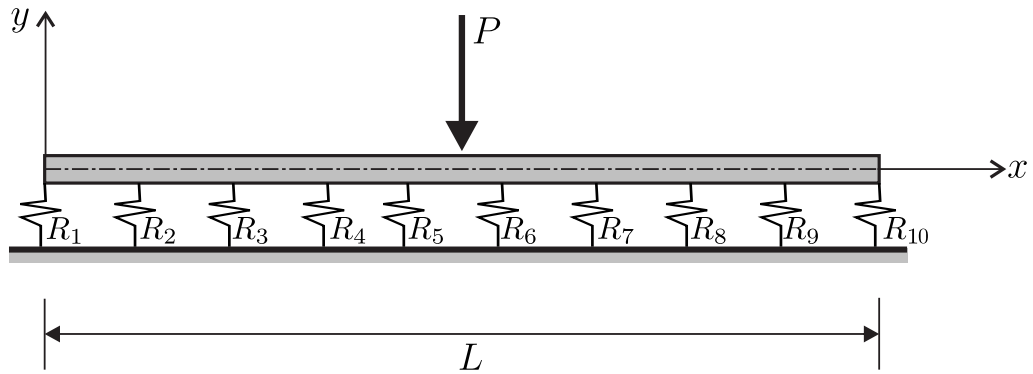


Figura 4.19: Primer caso con diez resortes

La figura 4.20 muestra la deformación que la viga con diez resortes presenta,

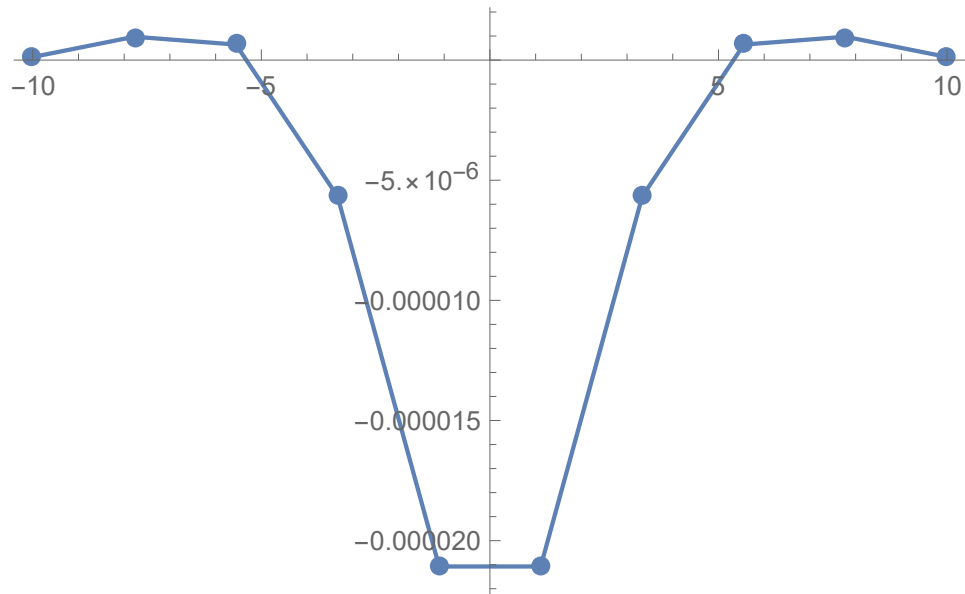


Figura 4.20: Deformación para la viga con diez resortes para el primer caso

El modelo de Winkler tiene una buena aproximación con la solución exacta, mientras mayor sea el número de resortes, mayor será la aproximación, por otro lado se debe tener en cuenta que mientras mayor sea el número de resortes mayor serán las reacciones que se deben obtener.

Comparativa de las soluciones obtenidas con la solución exacta.

La función para comparar el método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].

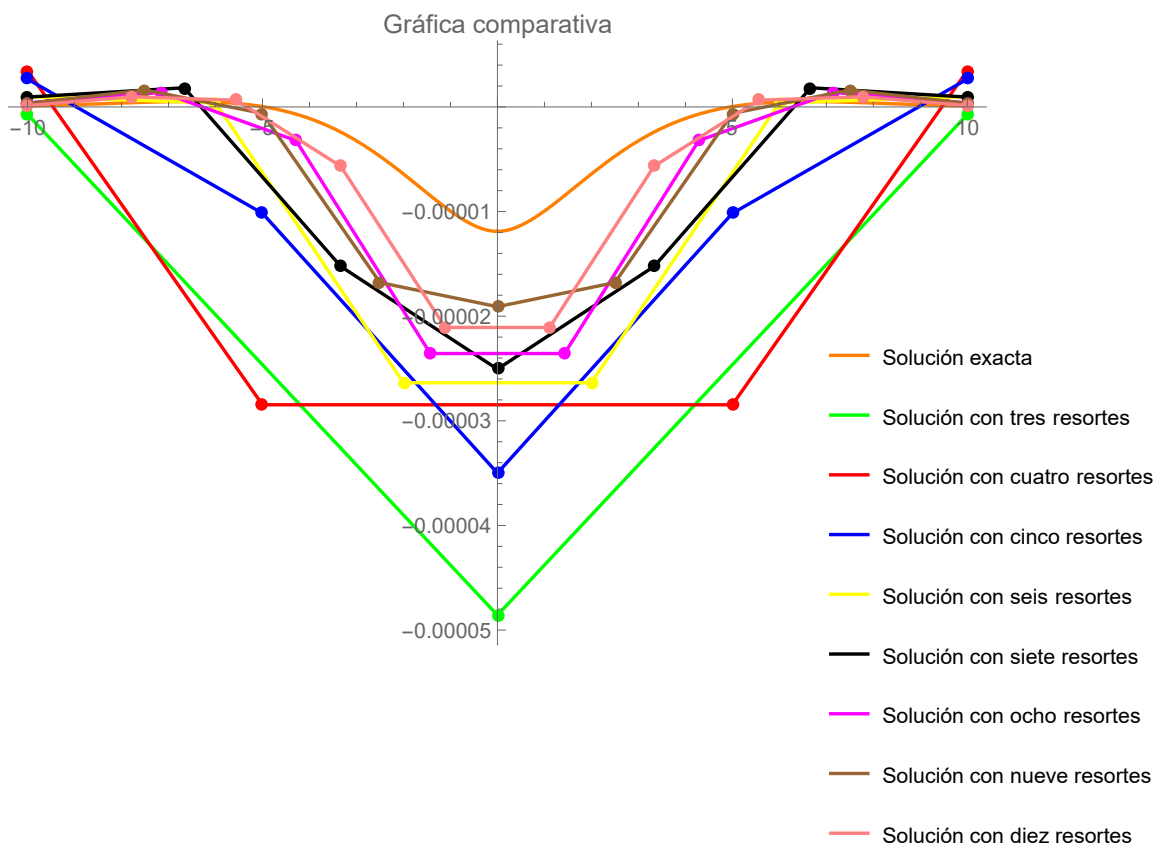


Figura 4.21: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.1.2. Segundo ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida.

En la 4.22 se presenta el siguiente problema, una viga con una carga repartida apoyada sobre los resortes, el ejemplo tendrá incremento de tres a diez resortes.

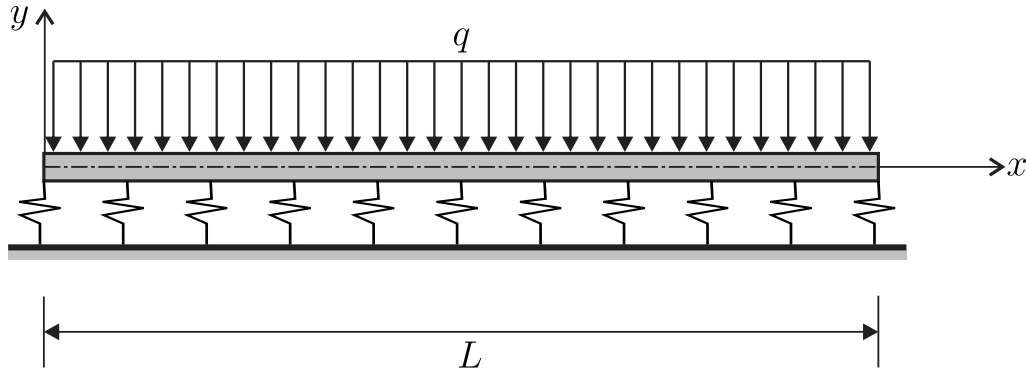


Figura 4.22: Segundo caso

El problema mostrado tendrá un incremento en el número de resortes con la intención de mostrar como será la aproximación a la solución exacta, de igual forma la intención es mostrar la diferencia entre la deformación presentada en la sección 4.1.1 donde se tiene una carga puntual al centro a el ejemplo actual, donde se tiene una carga distribuida a lo largo de claro.

Esta carga distribuida a lo largo del claro provocará deformaciones en los resortes de tal manera que trabajarán diferente a los presentados anteriormente,

Cuando el incremento de los elementos resorte se efectuó la obtención de las reacciones será más compleja puesto que las vigas son hiperestáticas y tiene tantas reacciones como apoyos, aunque los apoyos son resortes, si el modulo de reacción "k" llega a tener valores muy elevados éstos se pueden llegar a comportar como apoyos fijos, de ser así los apoyos o elementos resorte no permiten el desplazamiento que se necesita para obtener la deformación del suelo, por lo que entonces la idealización del suelo deja de ser funcional.

Los datos a trabajar en el segundo ejemplo son los siguientes:

- $B = 0.20 \text{ m}$
- $H = 0.30 \text{ m}$
- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000\sqrt{250\text{kg/cm}^2} = 221,359.44\text{kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $I_z = \frac{B*H^3}{12}$
- $L = 30 \text{ m}$
- $q = 100 \text{ N/m}$
- $EI = E_c * I_z$

Segundo ejemplo con tres resortes

Se tiene el siguiente ejemplo,

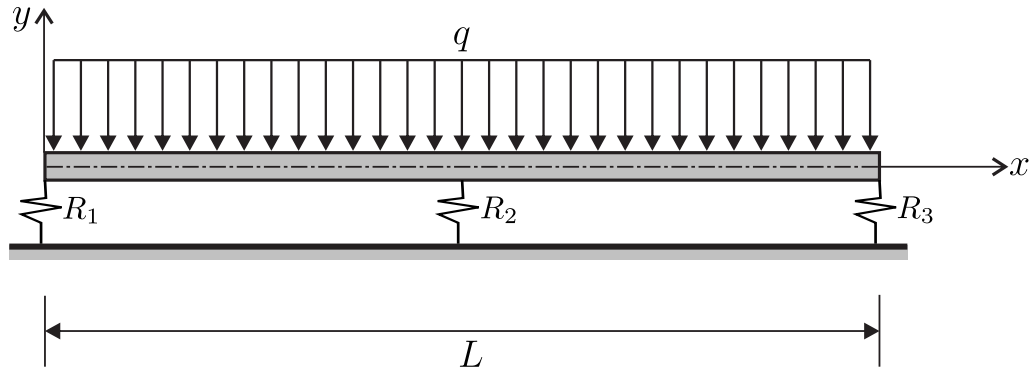


Figura 4.23: Segundo caso con tres resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con tres resortes, figura 4.24, como se puede observar, esta deformación con tres resortes tiene un error de aproximación bastante elevado y es necesario añadir un mayor número de resortes.

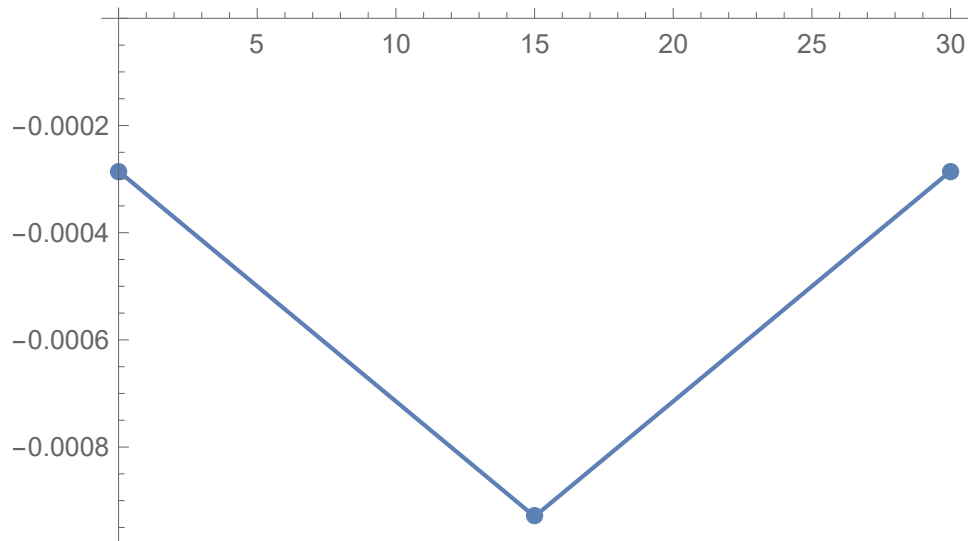


Figura 4.24: Deformación para la viga con tres resortes para el segundo caso

Se continúa con el problema agregando más elementos resorte a la viga, si se observa correctamente la deformación en los extremos es mayor a la del primer ejemplo con tres resortes, es decir, los extremos sienten más la carga distribuida si lo comparamos con una carga puntual.

Segundo ejemplo con cuatro resortes

Se tiene una viga con cuatro resortes en la cual, la deformación esperada será mas aproximada que con tres elementos resorte.

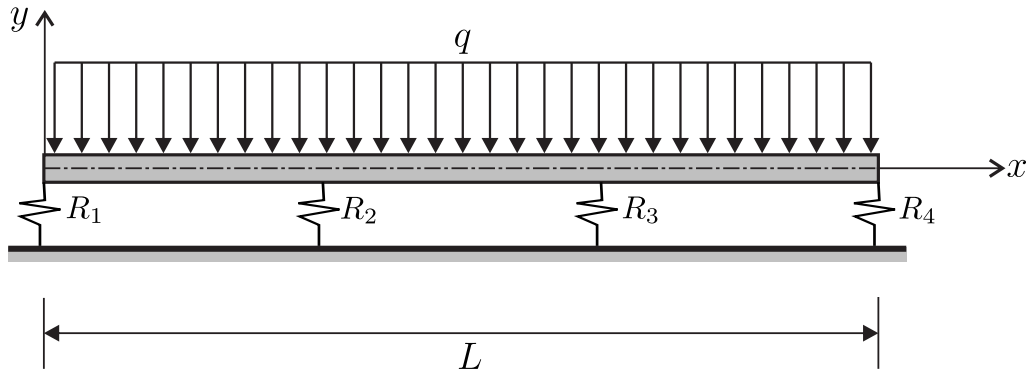


Figura 4.25: Segundo caso con cuatro resortes

La figura 4.26 muestra como es la deformación de la viga con cuatro resortes,

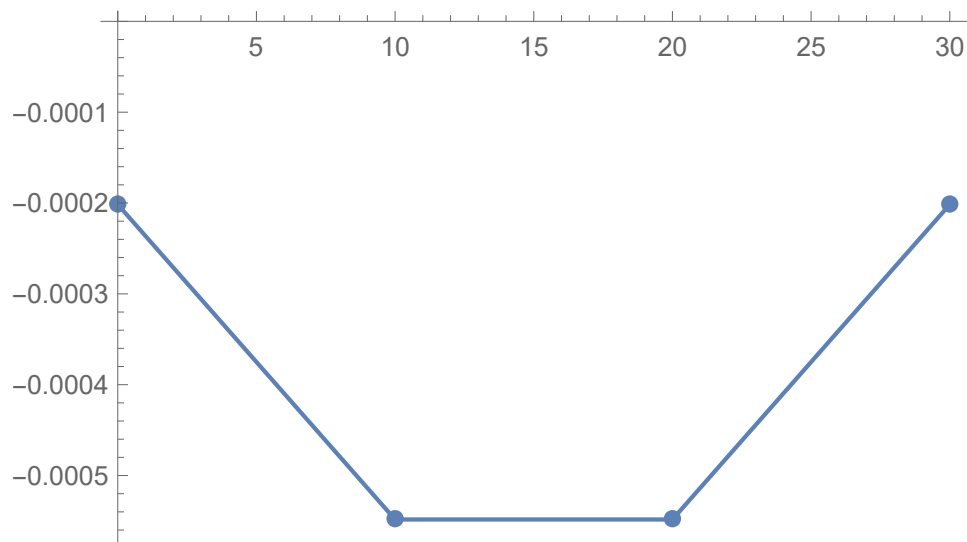


Figura 4.26: Deformación para la viga con cuatro resortes para el segundo caso

Conforme se agrega un mayor número de elementos resorte, las vigas comienzan a mostrar una deformación mas detallada, esto ya que cada resorte es un punto de deflexión en la viga.

Segundo ejemplo con cinco resortes

Ahora se consideran cinco resortes en la viga.

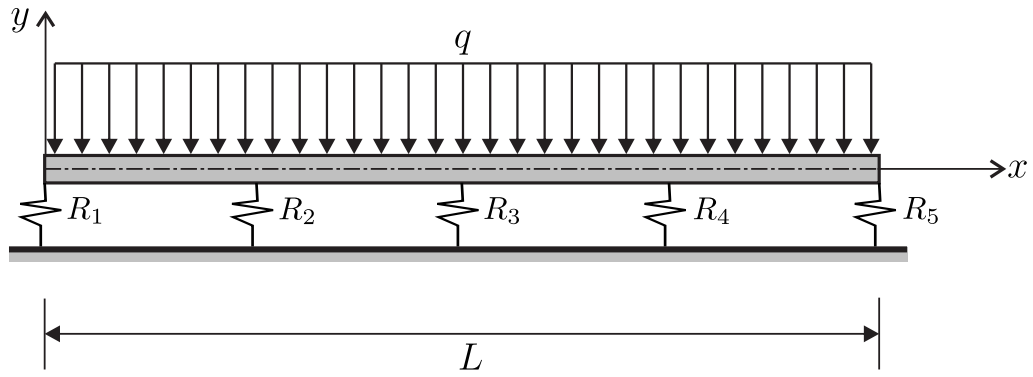


Figura 4.27: Segundo caso con cinco resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con cinco resortes (figura 4.28), ahora con el resorte adicional se puede apreciar un cambio en la deformación.

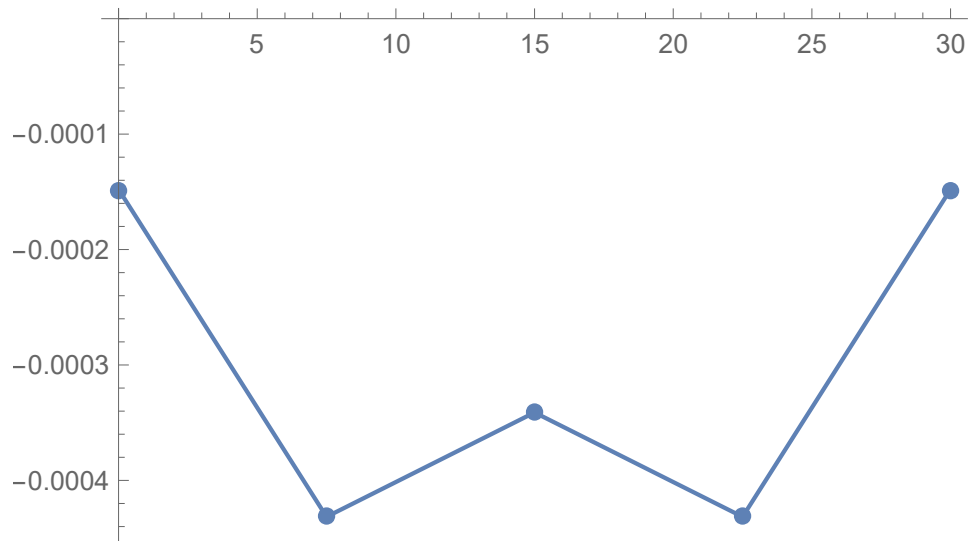


Figura 4.28: Deformación de la viga con cinco resortes para el segundo caso

Este resorte extra otorga más detalle en la deformación que la viga sufre al encontrarse apoyada totalmente en el suelo.

Segundo ejemplo con seis resortes

Se tiene,

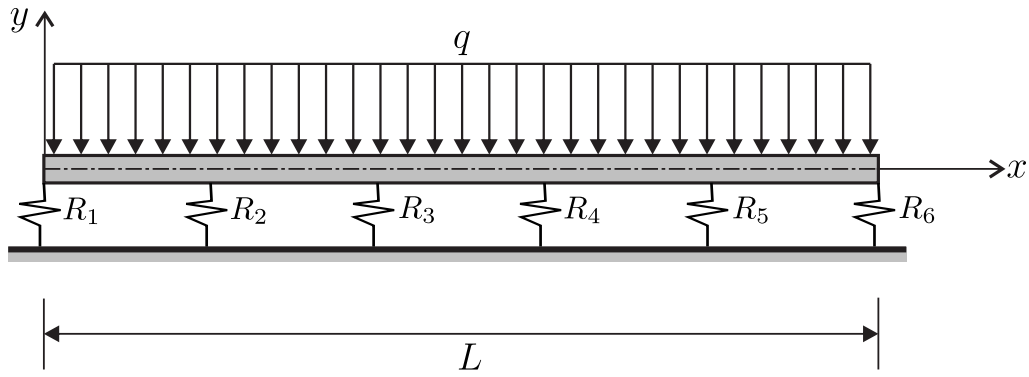


Figura 4.29: Segundo caso con seis resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con seis resortes, figura 4.30

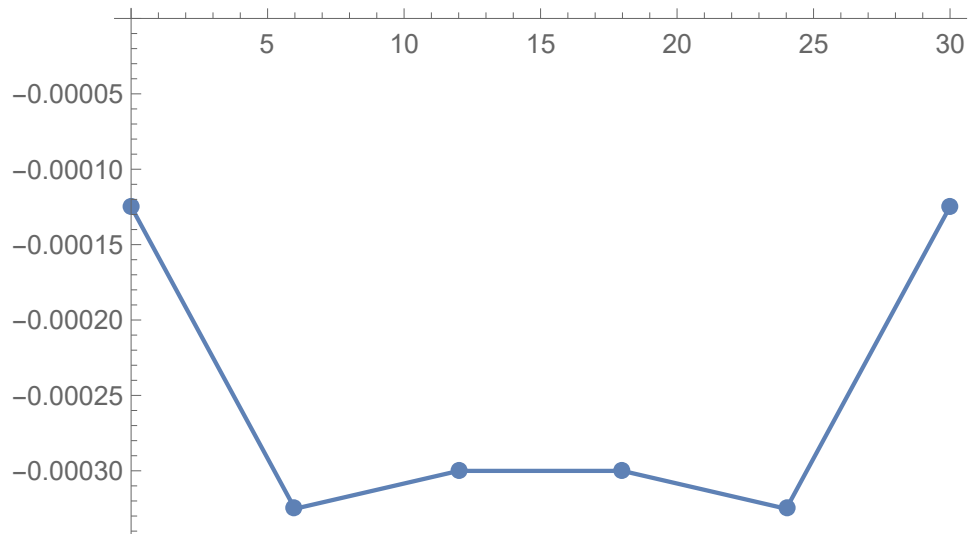


Figura 4.30: Deformación para la viga con seis resortes para el segundo caso

Segundo ejemplo con siete resortes

Se tiene,

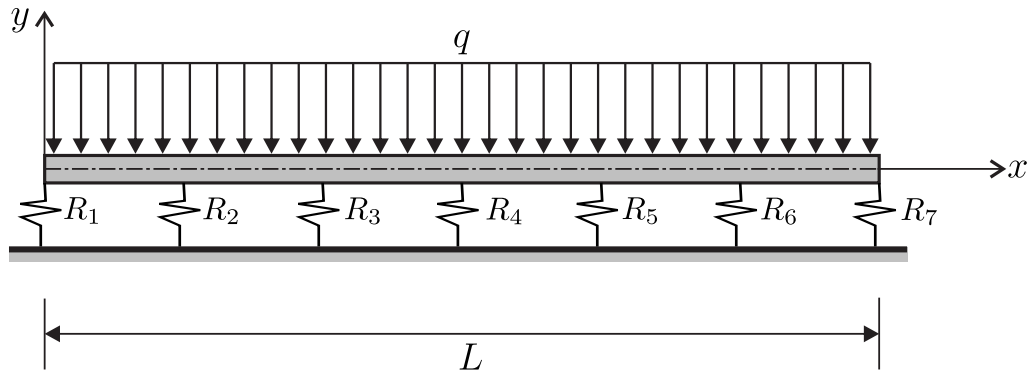


Figura 4.31: Segundo caso con siete resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con siete resortes, figura 4.32

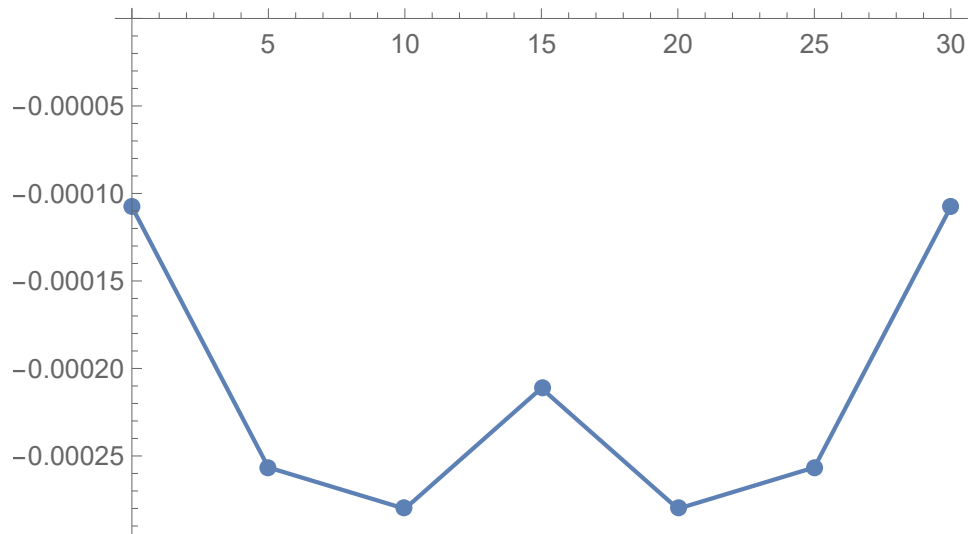


Figura 4.32: Deformación para la viga con siete resortes para el segundo caso

Segundo ejemplo con ocho resortes

Se tiene,

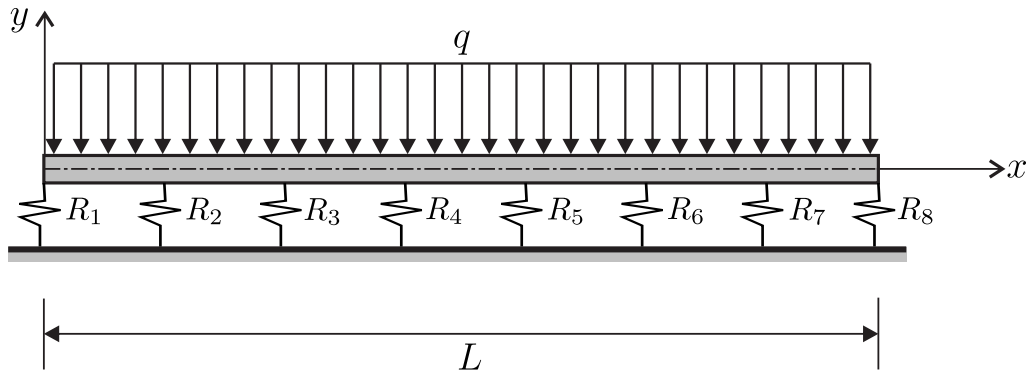


Figura 4.33: Segundo caso con ocho resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con ocho resortes, figura 4.34

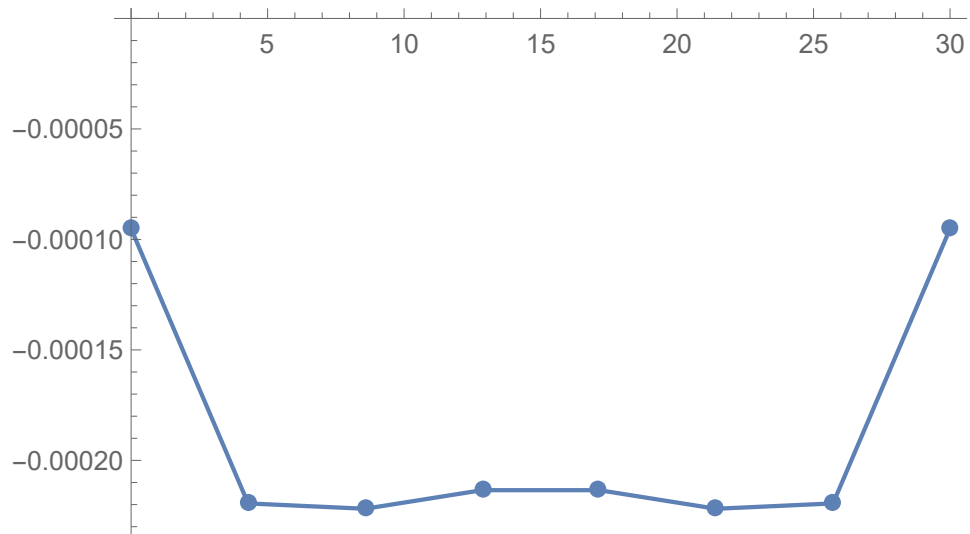


Figura 4.34: Deformación para la viga con ocho resortes para el segundo caso

Segundo ejemplo con nueve resortes

Se tiene,

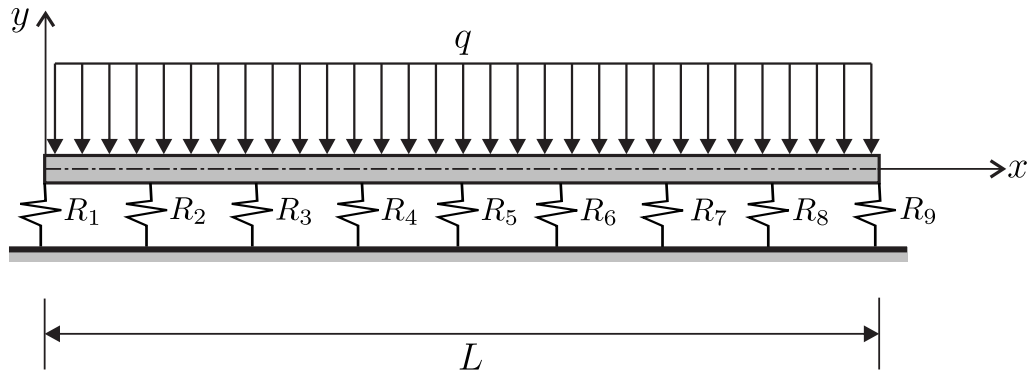


Figura 4.35: Segundo caso con nueve resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con nueve resortes, figura 4.36

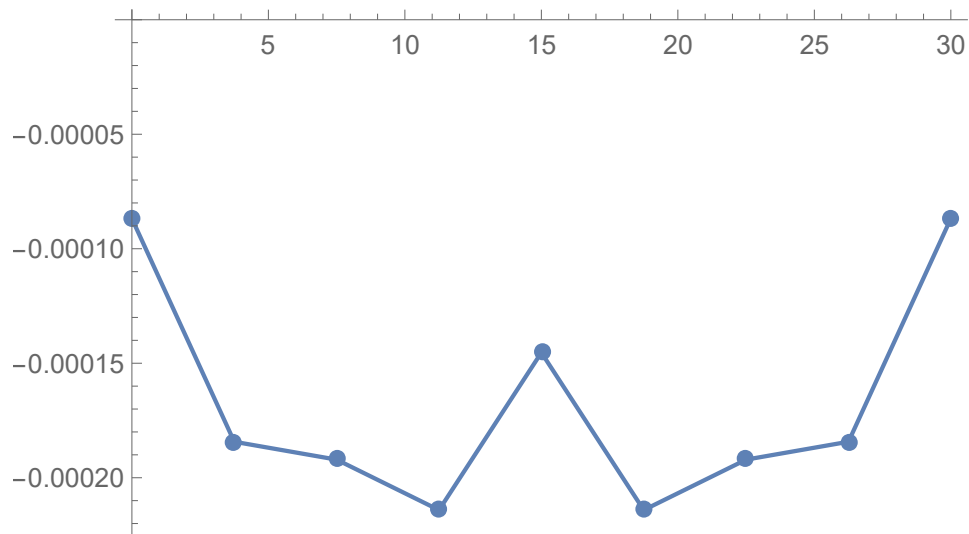


Figura 4.36: Deformación para la viga con nueve resortes para el segundo caso

Segundo ejemplo con diez resortes

Ahora se tiene el caso con diez resortes en el cual se puede apreciar que la viga comienza a mostrar una deformación mas cercana a la real,

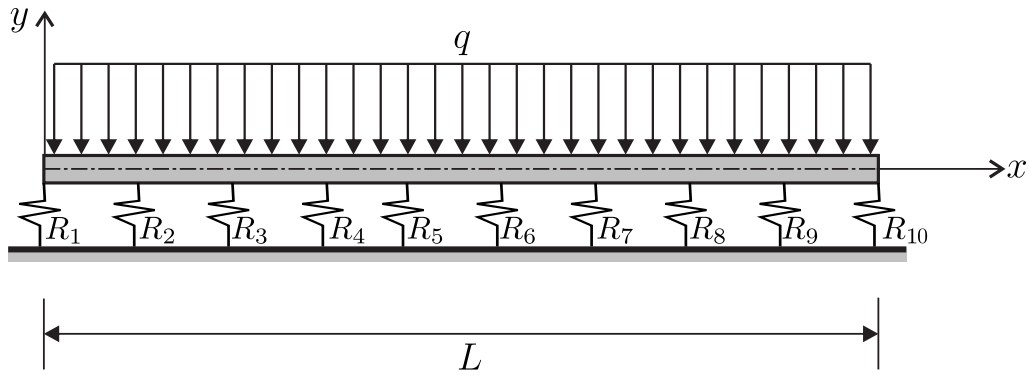


Figura 4.37: Segundo caso con diez resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con diez resortes, figura 4.38

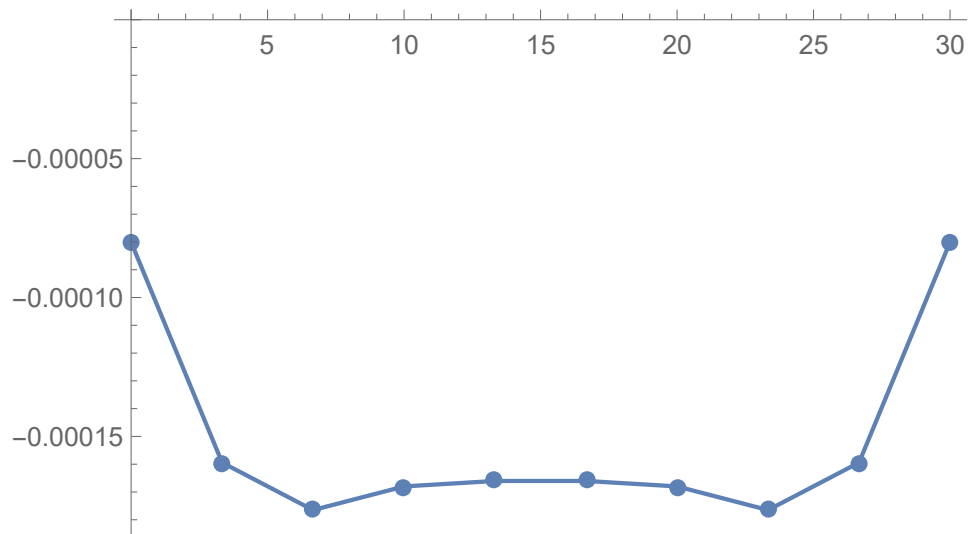


Figura 4.38: Deformación para la viga con diez resortes para el segundo caso

Comparación de las soluciones obtenidas y la solución exacta.

La función para realizar la comparación del método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].

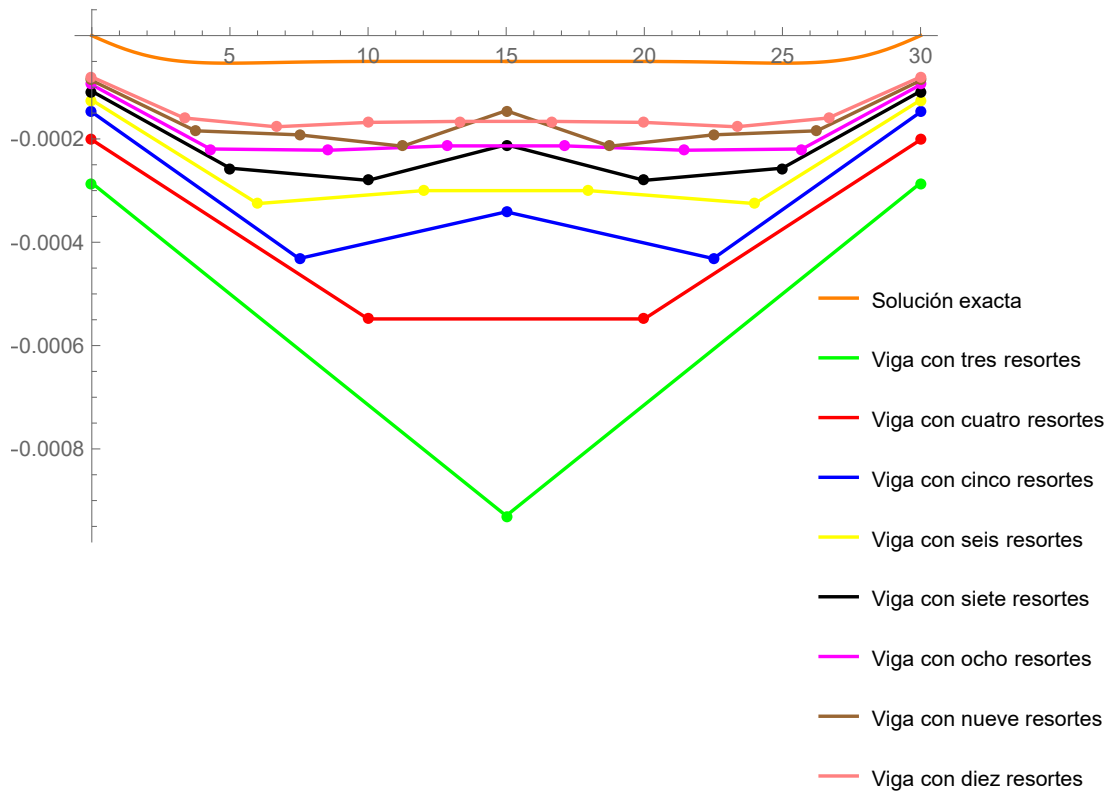


Figura 4.39: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.1.3. Tercer ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida.

Se tiene el siguiente problema, una viga con empotre y apoyada sobre cinco resortes con una carga repartida en el claro, al igual que los ejemplos anteriores se dará solución y se incrementa el número de resortes con la intención de mostrar como se vuelve mejor la aproximación.

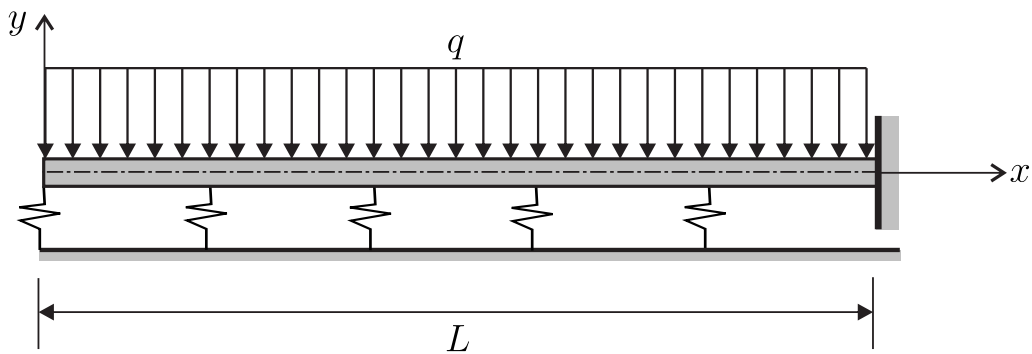


Figura 4.40: Tercer caso

Los datos para darle solución al tercer ejemplo son los siguientes:

- $B = 0.20 \text{ m}$
- $H = 0.30 \text{ m}$
- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000\sqrt{250\text{kg/cm}^2} = 221,359.44\text{kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $I_z = \frac{B*H^3}{12}$
- $L = 5 \text{ m}$
- $q = 200 \text{ N/m}$
- $EI = E_c * I_z$

Tercer ejemplo con un resorte

El primer caso del tercer ejemplo con un resorte en un extremo de la viga

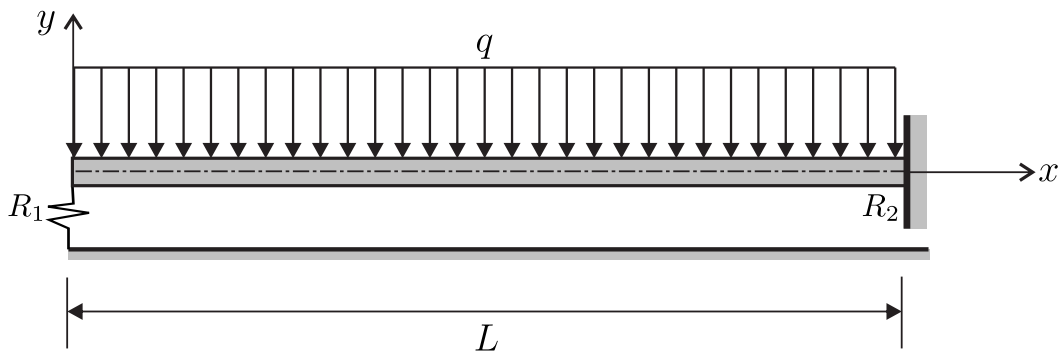


Figura 4.41: Tercer caso con un resorte

Se tiene la deformación de la viga con un resorte,

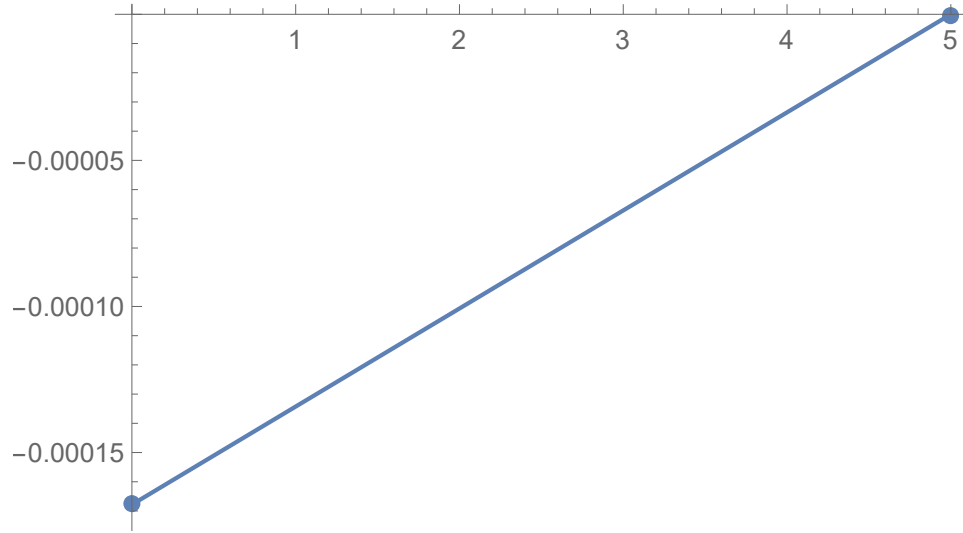


Figura 4.42: Deformación con un resorte para el tercer caso

Tercer ejemplo con dos resortes

Tercer ejemplo con dos resortes.

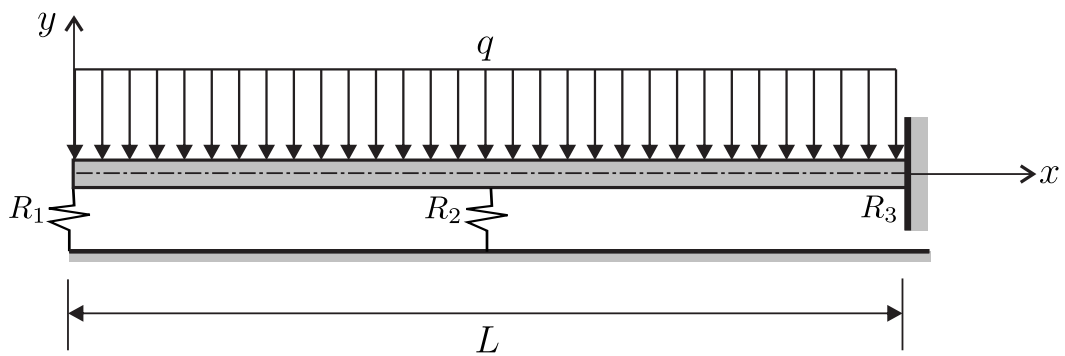


Figura 4.43: Tercer caso con dos resortes

Se tiene la deformación de la viga con dos resortes,

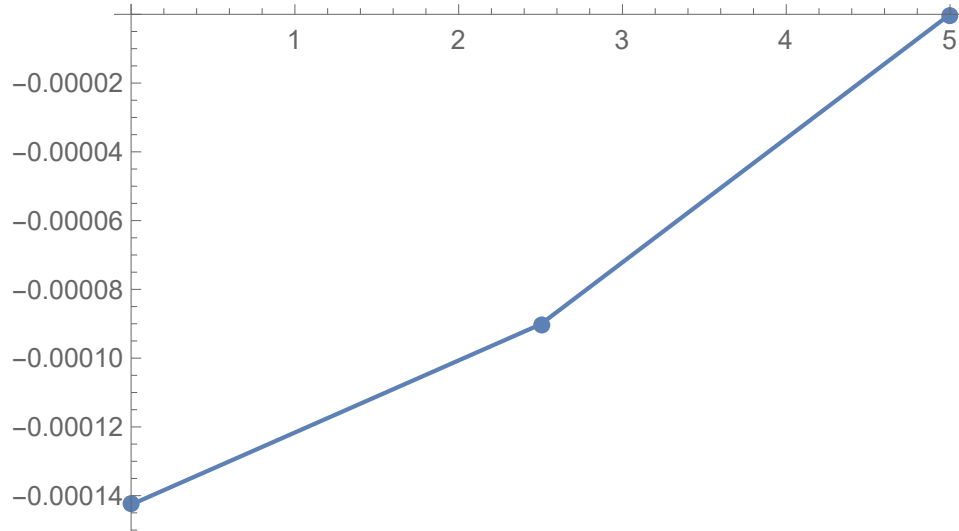


Figura 4.44: Deformación con dos resortes para el tercer caso

Tercer ejemplo con tres resortes

Tercer ejemplo con tres resortes.

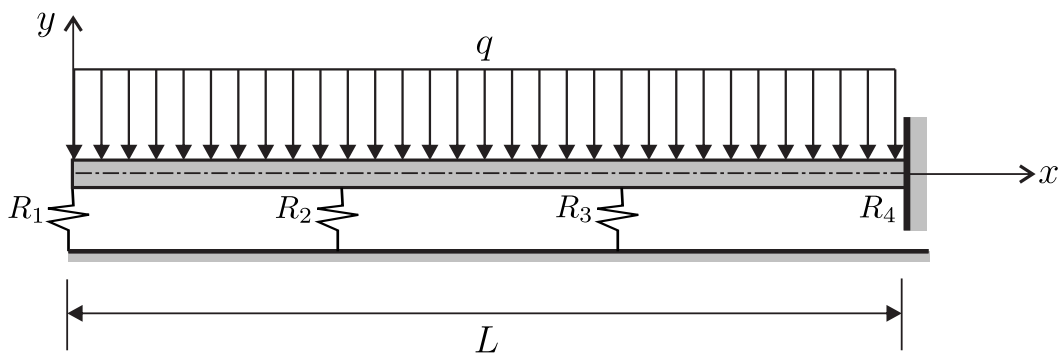


Figura 4.45: Tercer caso con tres resortes

Se tiene la deformación de la viga con tres resortes,

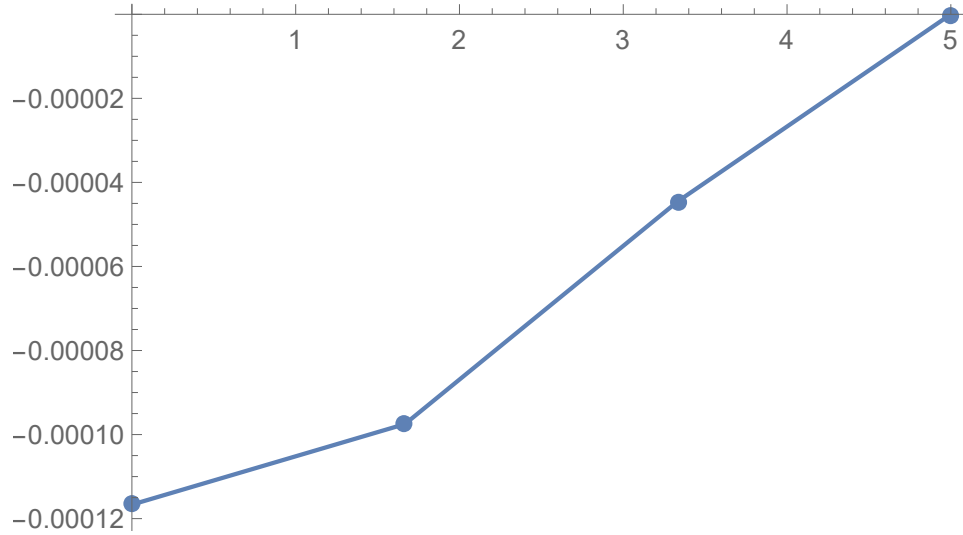


Figura 4.46: Deformación con tres resortes para el tercer caso

Tercer ejemplo con cuatro resortes

Tercer ejemplo con cuatro resortes.

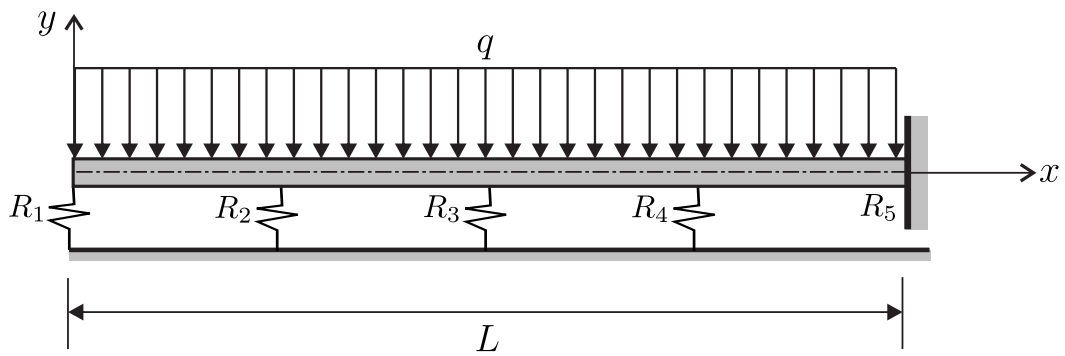


Figura 4.47: Tercer caso con cuatro resortes

Se tiene la deformación de la viga con cuatro resortes,

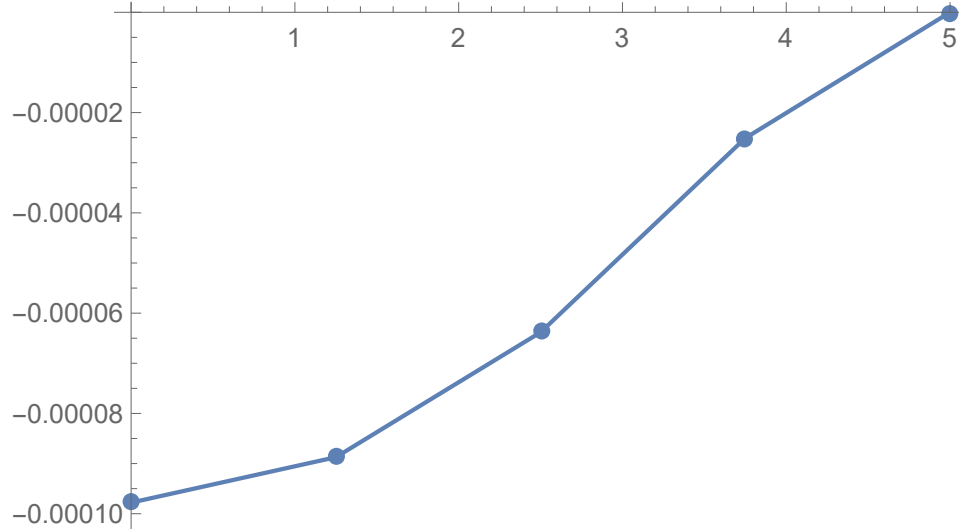


Figura 4.48: Deformación con cuatro resortes para el tercer caso

Tercer ejemplo con cinco resortes

Tercer ejemplo con cinco resortes.

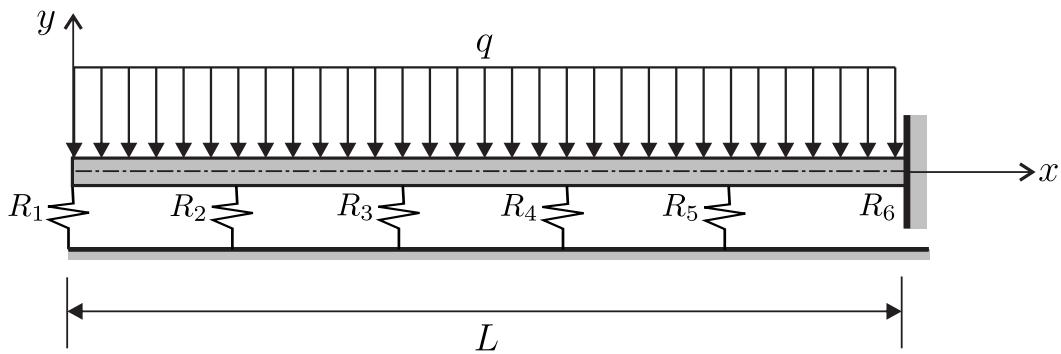


Figura 4.49: Tercer caso con cinco resortes

Se tiene la deformación de la viga con cinco resortes,

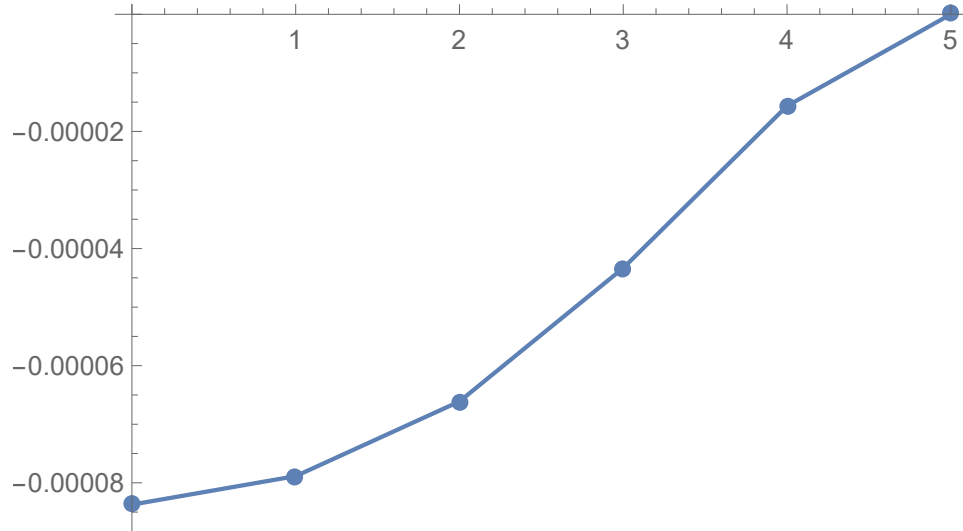


Figura 4.50: Deformación con cinco resortes para el tercer caso

Comparativa de las soluciones obtenidas y la solución exacta.

La función para comparar el método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].

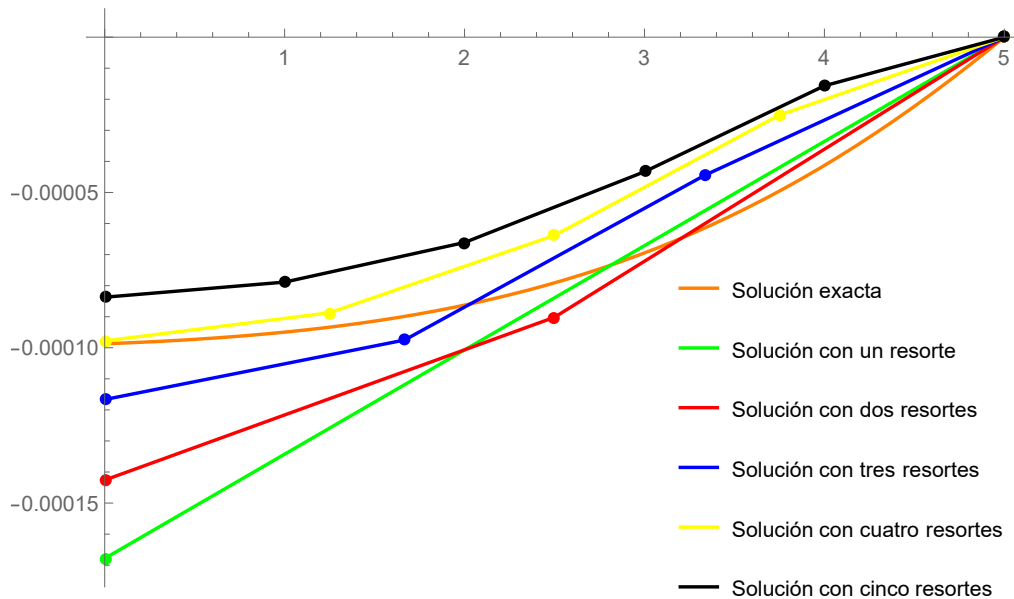


Figura 4.51: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.1.4. Cuarto ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro.

Se tiene el siguiente problema, una viga con empotre y apoyada sobre cinco resortes con una carga puntual al final del claro, al igual que los ejemplos anteriores se dará solución y se incrementa el número de resortes con la intención de mostrar como se vuelve mejor la aproximación.

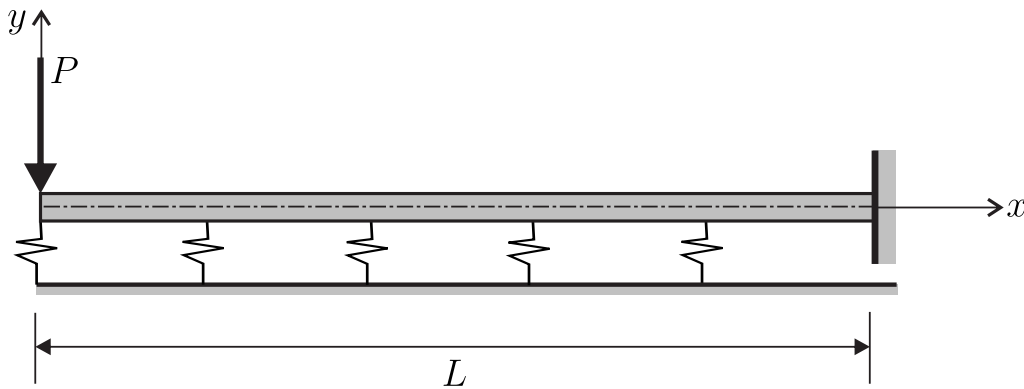


Figura 4.52: Cuarto caso

Los datos para darle solución al cuarto ejemplo son los siguientes:

- $B = 0.20 \text{ m}$
- $H = 0.30 \text{ m}$
- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000\sqrt{250\text{kg/cm}^2} = 221,359.44\text{kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $I_z = \frac{B*H^3}{12}$
- $L = 10 \text{ m}$
- $P = 100 \text{ N}$
- $EI = E_c * I_z$

Cuarto ejemplo con un resorte

El primer caso del tercer ejemplo con un resorte en un extremo de la viga

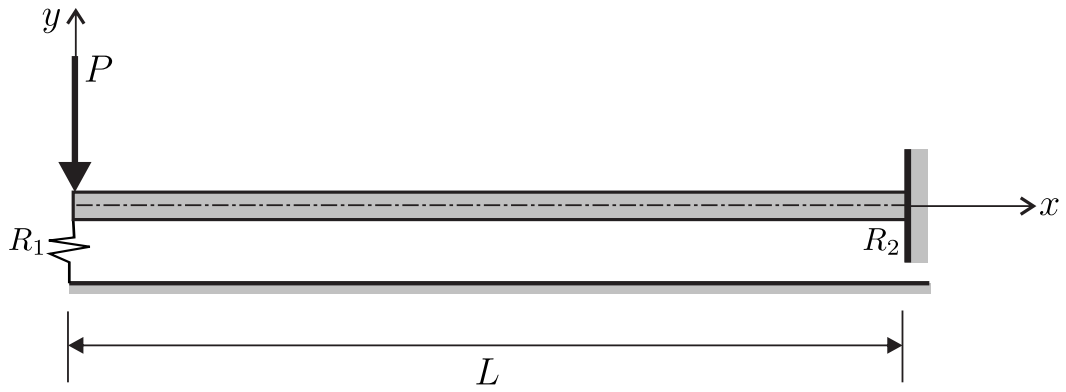


Figura 4.53: Cuarto caso con un resorte

Se tiene la deformación de la viga con un resorte,

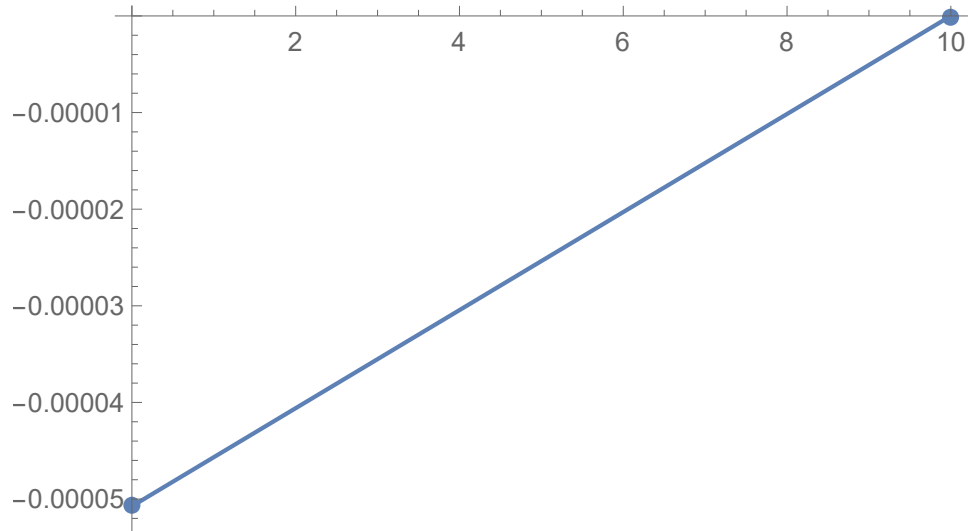


Figura 4.54: Deformación con un resorte para el cuarto caso

Cuarto ejemplo con dos resortes

Cuarto ejemplo con dos resortes.

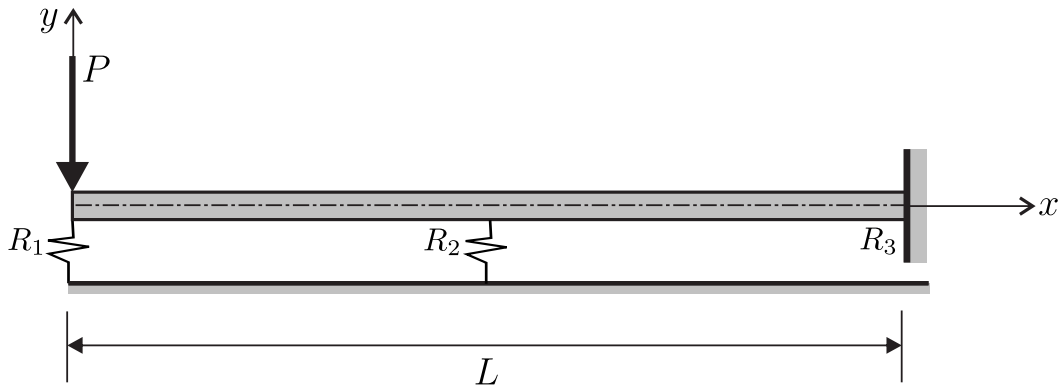


Figura 4.55: Cuarto caso con dos resortes

Se tiene la deformación de la viga con dos resortes,

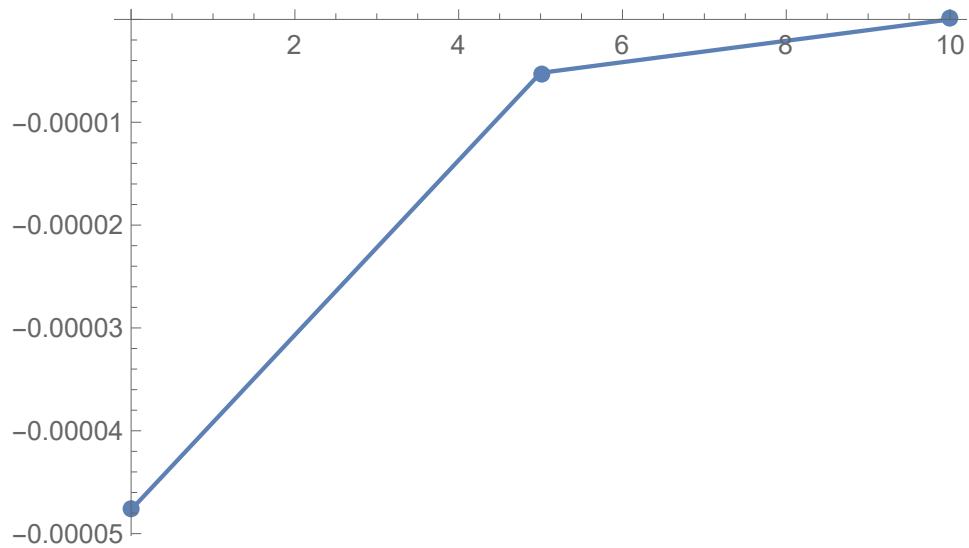


Figura 4.56: Deformación con dos resortes para el cuarto caso

Cuarto ejemplo con tres resortes

Cuarto ejemplo con tres resortes.

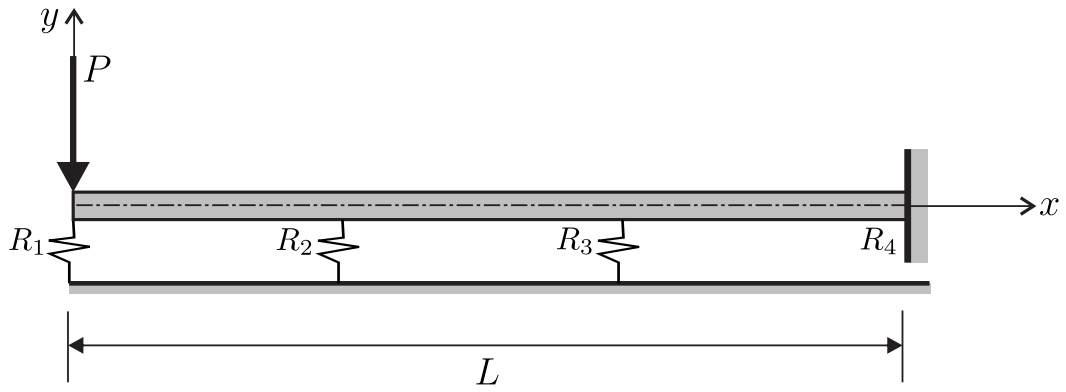


Figura 4.57: Cuarto caso con tres resortes

Se tiene la deformación de la viga con tres resortes,

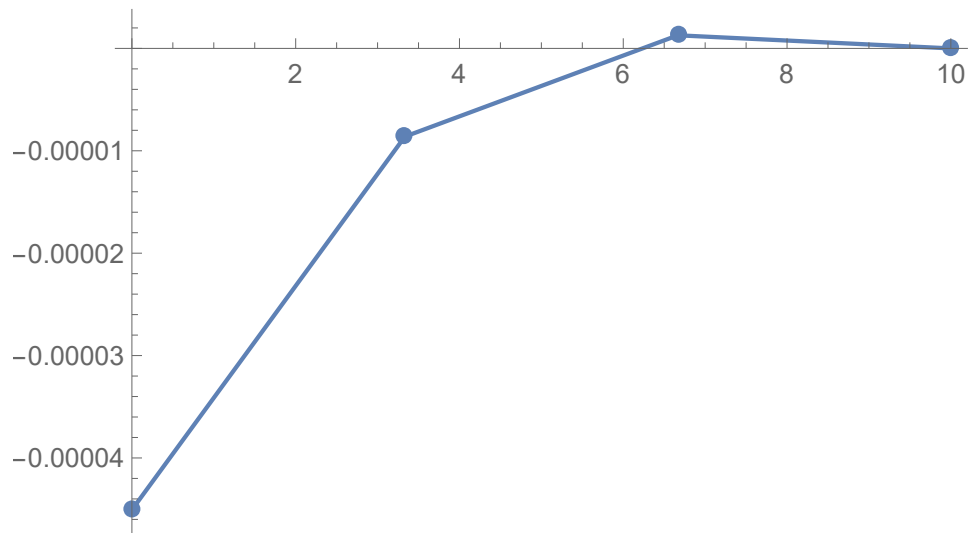


Figura 4.58: Deformación con tres resortes para el cuarto caso

Cuarto ejemplo con cuatro resortes

Cuarto ejemplo con cuatro resortes.

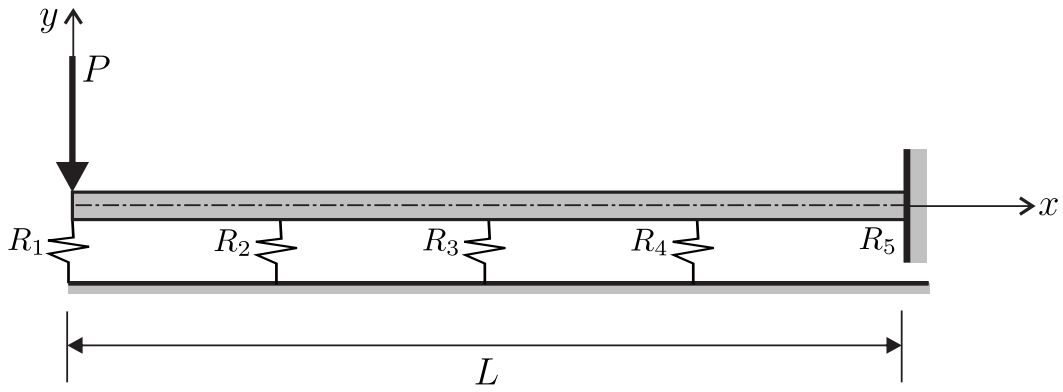


Figura 4.59: Cuarto caso con cuatro resortes

Se tiene la deformación de la viga con cuatro resortes,

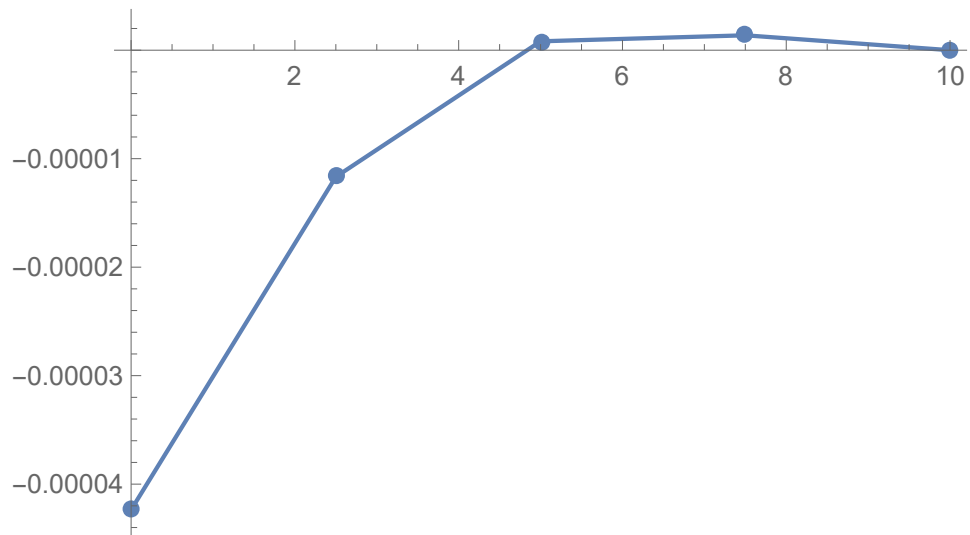


Figura 4.60: Deformación con cuatro resortes para el cuarto caso

Cuarto ejemplo con cinco resortes

Cuarto ejemplo con cinco resortes.

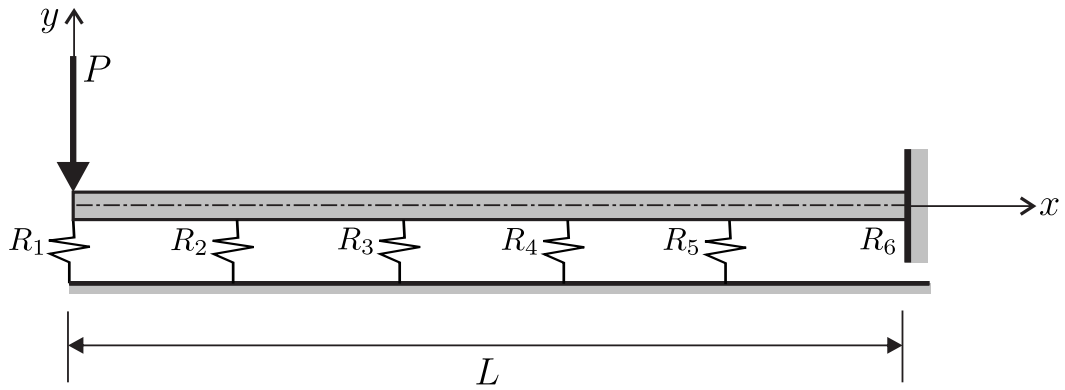


Figura 4.61: Cuarto caso con cinco resortes

Se tiene la deformación de la viga con cinco resortes,

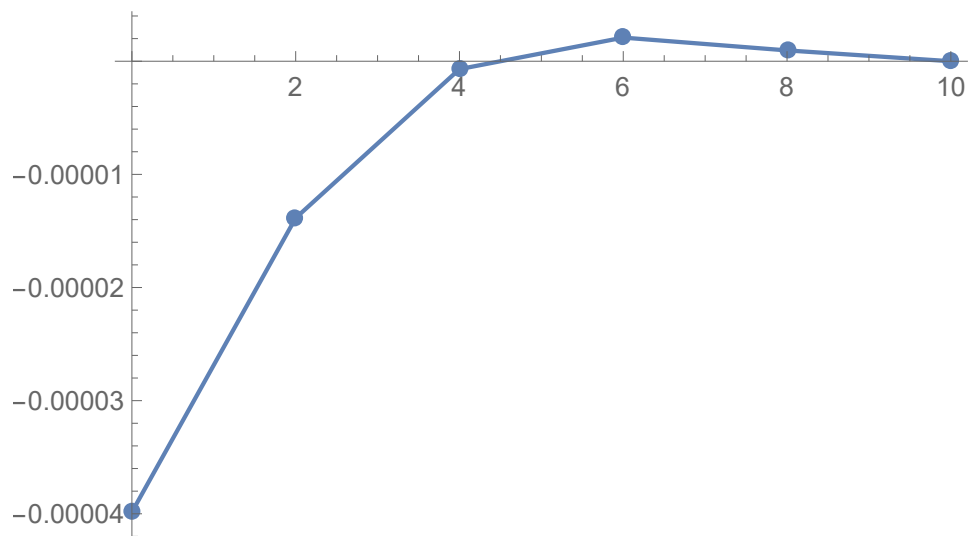


Figura 4.62: Deformación con cinco resortes para el cuarto caso

Comparación de las soluciones obtenidas y la solución exacta.

La función para comparar el método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].



Figura 4.63: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.2. Solución numérica aplicando la teoría de vigas de Timoshenko

Los ejemplos mostrados fueron solucionados para la teoría de vigas de Timoshenko aplicando el modelo de Winkler, así como el segundo teorema de Castigliano para dicha teoría, el segundo teorema de Castigliano mostrado en la sección 2.1 es de gran utilidad para encontrar la deflexión en el punto de interés,

$$v = \frac{\partial U_c}{\partial P} = \frac{1}{2EI} \int_0^L [M(x)]^2 dx + \frac{1}{2GA} \int_0^L [V(x)]^2 dx \quad (4.8)$$

Considere una viga sobre apoyada sobre una serie de resortes (figura 4.64),

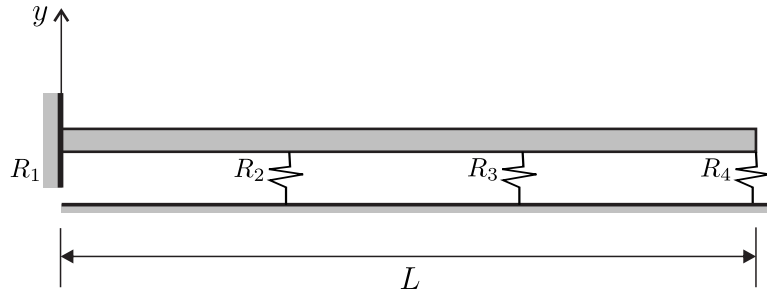


Figura 4.64: Viga apoyada sobre una serie de resortes

Para poder aplicar el teorema es necesario conocer previamente la energía complementaria, ésta se encuentra en función de la distancia y de las reacciones que se encuentran a lo largo del claro, los momentos flexionantes necesarios para calcular la energía complementaria se pueden obtener con el método de cortes y secciones, para el ejemplo mostrado en la figura 4.2 la energía complementaria queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 U_c = & \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{3}} [M(x, R_4)]^2 dx + \frac{1}{2GA} \int_0^{\frac{L}{3}} [V(x, R_4)]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} [M(x, R_4, R_3)]^2 dx \\
 & + \frac{1}{2GA} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} [V(x, R_4, R_3)]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L [M(x, R_4, R_3, R_2)]^2 dx + \frac{1}{2GA} \int_{\frac{2L}{3}}^L [V(x, R_4, R_3, R_4)]^2 dx
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Conociendo la energía complementaria es posible aplicar el segundo teorema de Castigliano.

4.2.1. Quinto ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro

Se tiene el siguiente problema, una viga apoyada sobre una masa de suelo la cual ya ha sido sustituida por elementos resorte, aplicando em modelo de Winkler, para aproximar una solución a la solución exacta, se han incluido diez elementos resorte para este ejemplo.

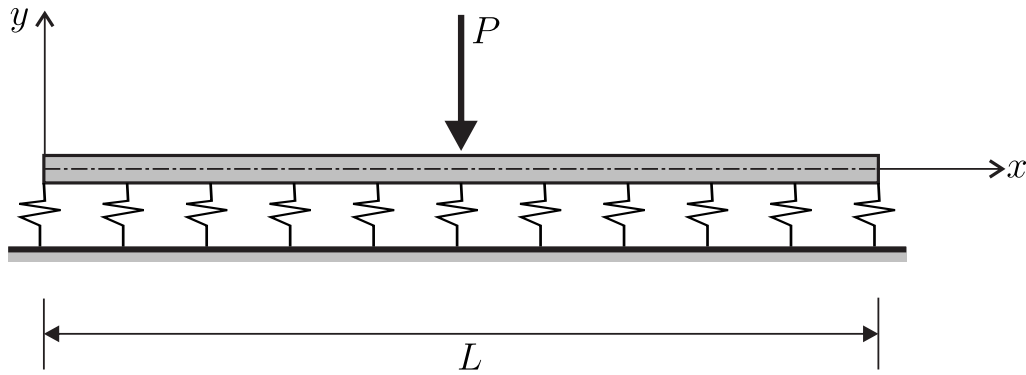


Figura 4.65: Quinto caso

Para demostrar que la solución será más aproximada si se incluye un mayor número de resortes, se dará solución al mismo problema presentado en la figura 4.3 incrementando los resortes, comenzando con tres y terminando en diez.

Quinto ejemplo con tres resortes

Este primer ejemplo se solucionará completamente para demostrar el procedimiento, para los otros ejemplos solo será mostrado el problema y solución.

Se procede a la obtención de las reacciones utilizando las ecuaciones fundamentales de la estática ΣM y ΣF_y , hay que destacar que al ser una viga con tres apoyos se tiene una viga hiperestática.

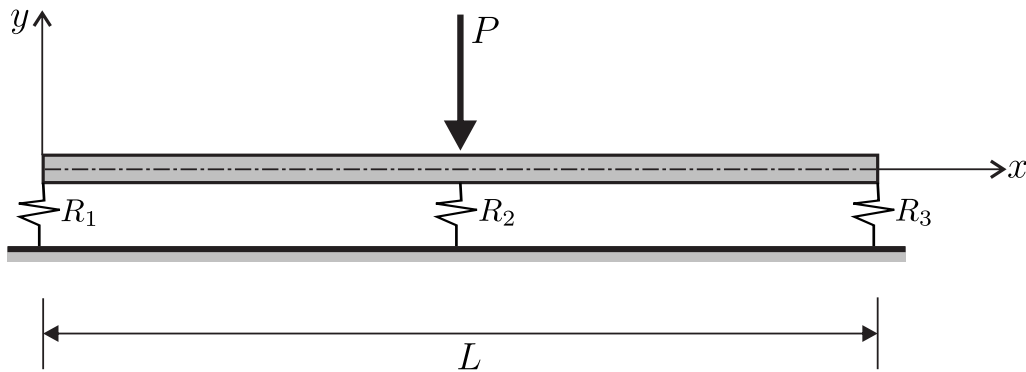


Figura 4.66: Quinto caso con tres resortes

Para este caso, existen reacciones que son simétricas

- $R_3 = R_1$

Se procede a realizar un corte al centro del claro de la viga para obtener la ecuación de momento,

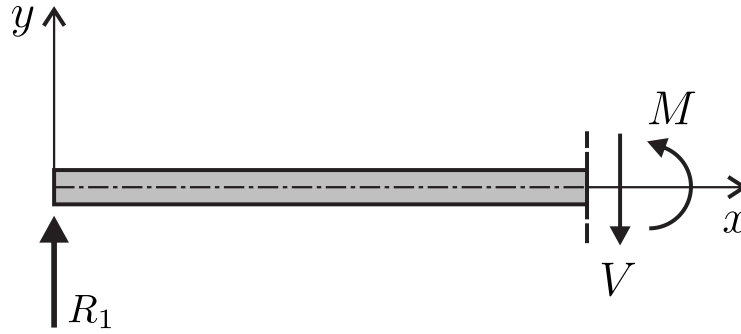


Figura 4.67: Corte 1 que va de $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

Mediante el corte y ΣM se obtiene la ecuación de momento,

$$M(x) = \frac{P - R_2}{2} \cdot x \quad (4.10)$$

Sustituyendo la ecuación 4.10 en la ecuación 4.1 y al simétrica y el corte se encuentra al centro del claro se tiene,

$$v = \frac{\partial U_c}{\partial R_2} = 2 \left[\frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P - R_2}{2} \cdot x \right)^2 dx \right]$$

Se resuelve la operación y se tiene,

$$v = -\frac{L^3(P - R_2)}{48EI} \quad (4.11)$$

Recordando el modelo de Winkler en la ecuación 3.4, donde ahora la carga $q(x)$ es sustituida por la reacción del suelo R_2 se tiene

$$v = -\frac{R_2}{k} \quad (4.12)$$

Igualando la deflexión presentada en la ecuación 4.5 con el modelo de Winkler en la ecuación 4.6 se obtiene,

$$-\frac{R_2}{k} = -\frac{L^3(P - R_2)}{48EI} \quad (4.13)$$

La ecuación 4.13 obtenida a partir de la igualdad antes realizada da como resultado una ecuación con una incógnita R_2 , al darle solución obtenemos la reacción R_2

$$R_2 = \frac{kL^3P}{48EI + kL^3}$$

Teniendo la reacción R_2 se aplica nuevamente ΣF_y para la obtención de los valores de R_1 y R_3 , se sabe que $R_1 = R_3$ por lo que obtiene,

$$R_1 = R_3 = \frac{24EIP}{48EI + kL^3}$$

Se otorgan los siguientes valores a las variables,

- $B = 0.80 \text{ m}$
- $H = 1.20 \text{ m}$
- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000\sqrt{250\text{kg/cm}^2} = 221,359.44\text{kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $I_z = \frac{B*H^3}{12}$
- $L = 60 \text{ m}$
- $P = 100 \text{ N}$
- $EI = E_c * I_z$
- $\nu = 0.35$
- $G = \frac{E_c}{2(1+\nu)}$
- $A = B * H$

Con los datos obtenidos a partir de la sustitución de valores en las variables, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 4.68 la cual representa la deformación que la viga con tres resortes.

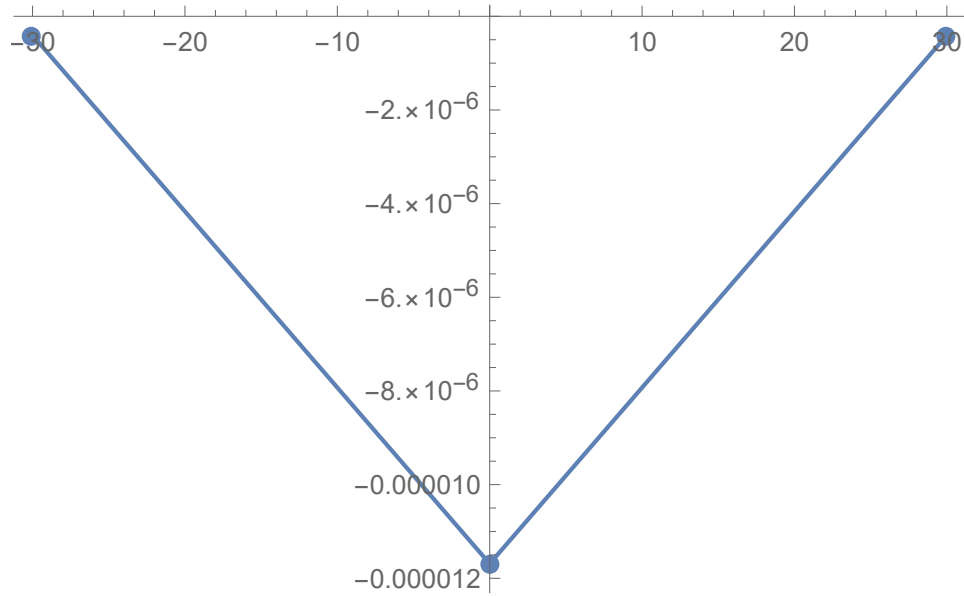


Figura 4.68: Deformación para la viga con tres resortes para el quinto caso

Quinto ejemplo con cuatro resortes

Para realizar una aproximación más cercana a la deformación real se agrega un resorte mas al problema, se tiene una viga apoyada sobre 4 resortes,

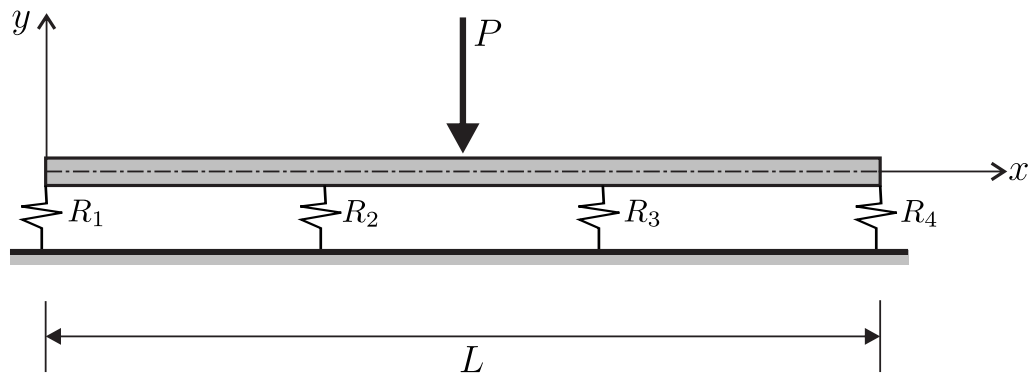


Figura 4.69: Quinto caso con cuatro resortes

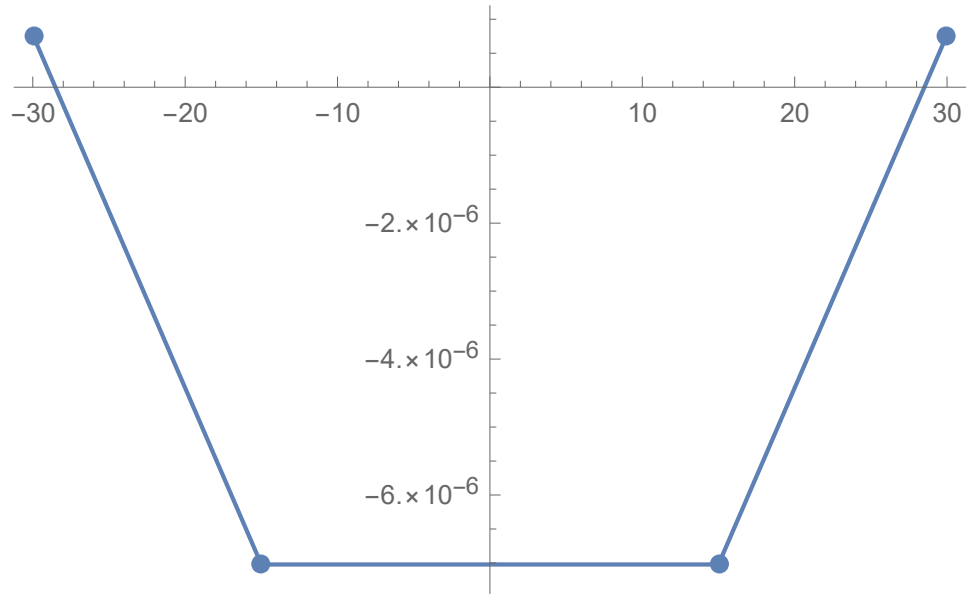


Figura 4.70: Deformación para la viga con cuatro resortes para el quinto caso

Quinto ejemplo con cinco resortes

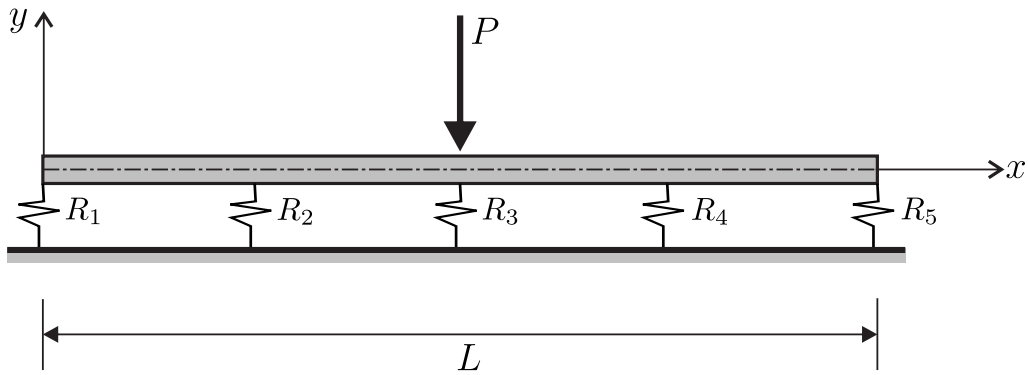


Figura 4.71: Quinto caso con cinco resortes

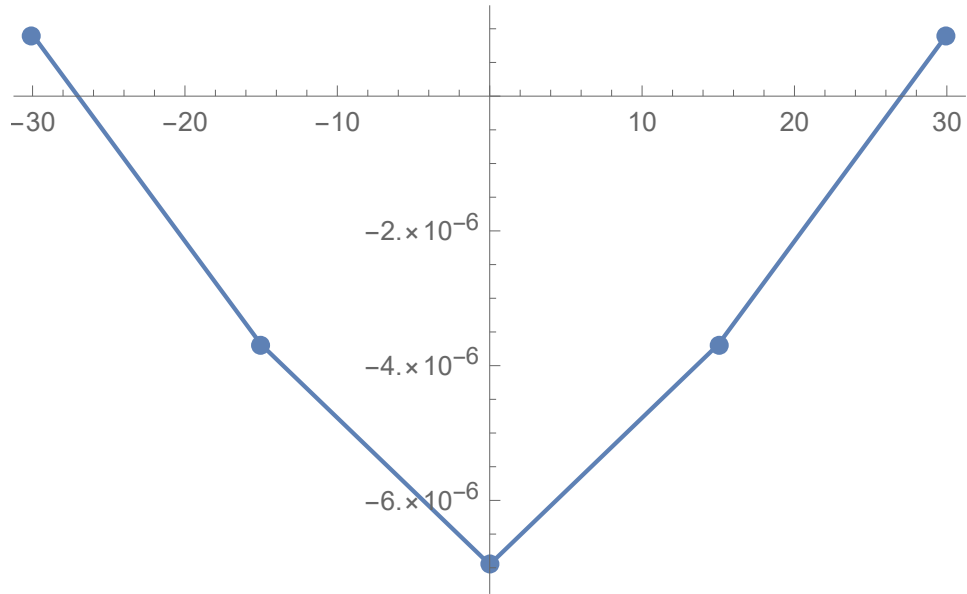


Figura 4.72: Deformación para la viga con cinco resortes para el quinto caso

La figura 4.72 muestra la deformación que tendrá la viga con cinco resortes, la deformación mostrada comienza a realizar una aproximación mas cerna a la deformación real que esta tendrá.

Quinto ejemplo con seis resortes

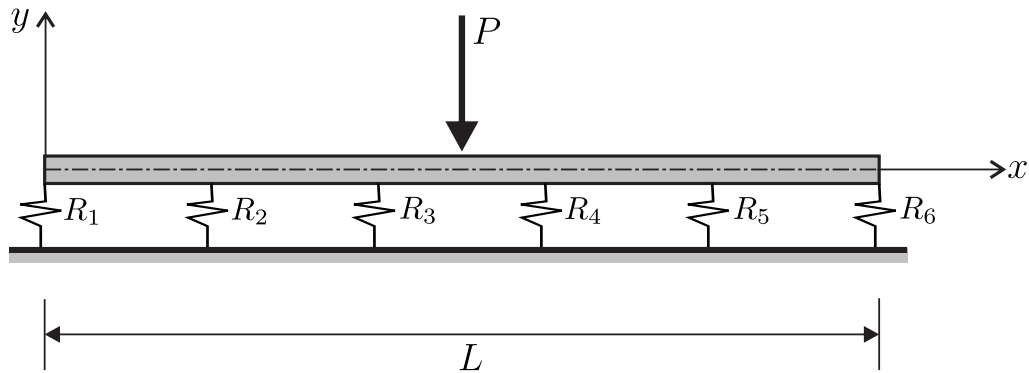


Figura 4.73: Quinto caso con seis resortes

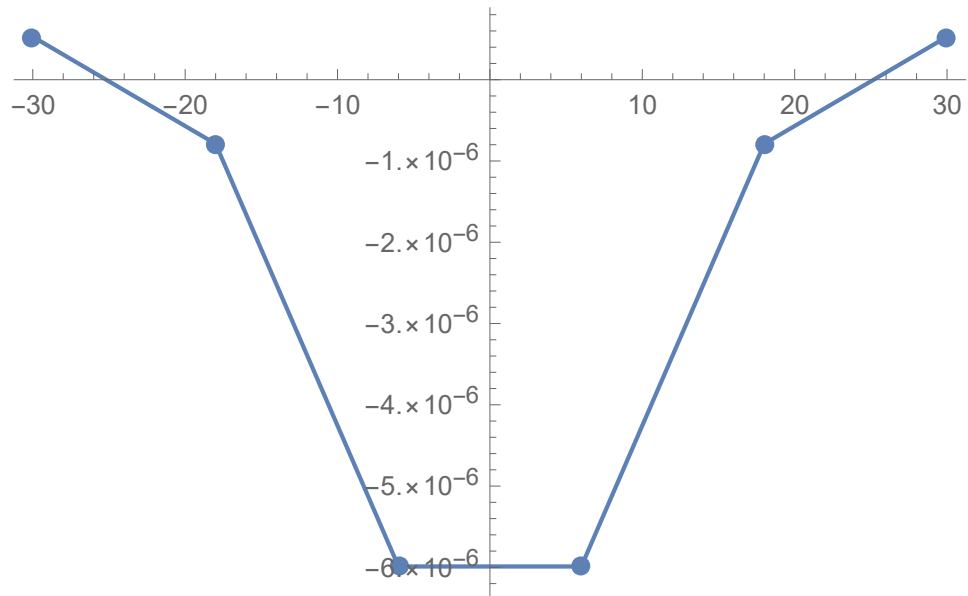


Figura 4.74: Deformación para la viga con seis resortes para el quinto caso

La figura 4.74 muestra la deformación que la viga con seis resortes tiene.

Quinto ejemplo con siete resortes

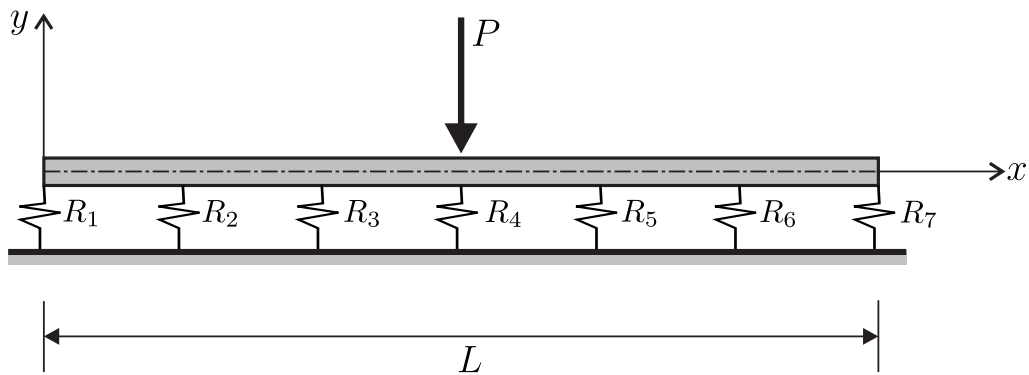


Figura 4.75: Quinto caso con siete resortes

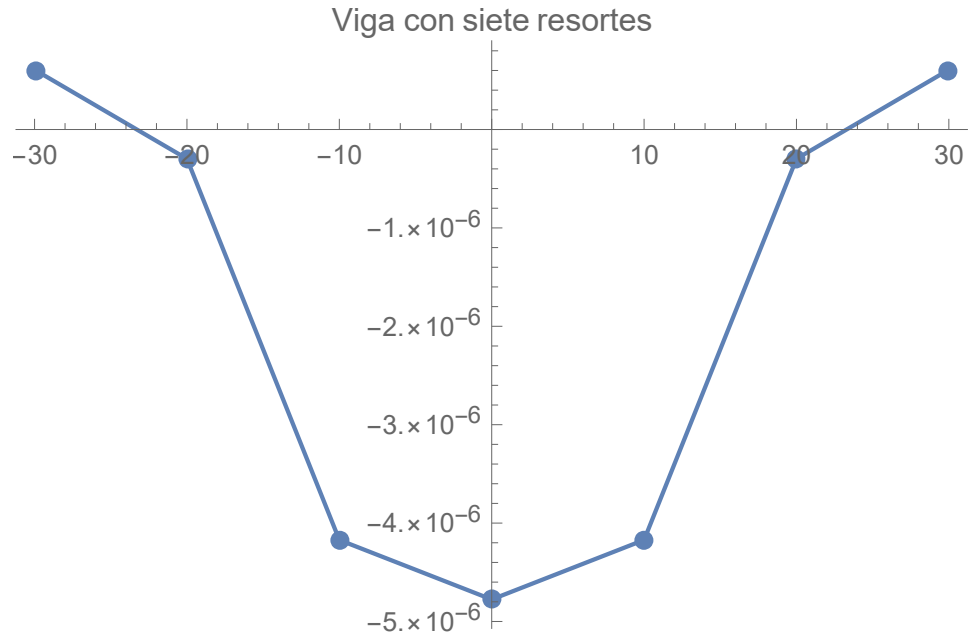


Figura 4.76: Deformación para la viga con siete resortes para el quinto caso

Finalmente en la figura 4.76 se muestra la deformación que esta la viga con 7 resortes tendrá.

Quinto ejemplo con ocho resortes

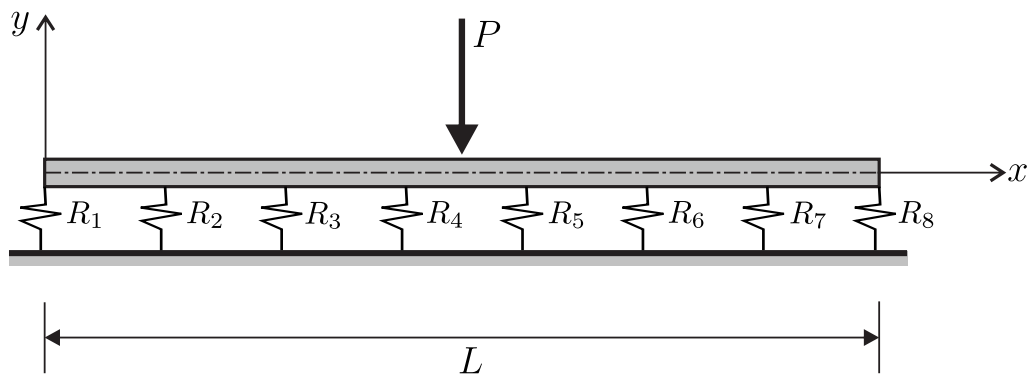


Figura 4.77: Quinto caso con ocho resortes

La figura 4.78 muestra la deformación que tiene la viga con ocho resortes,

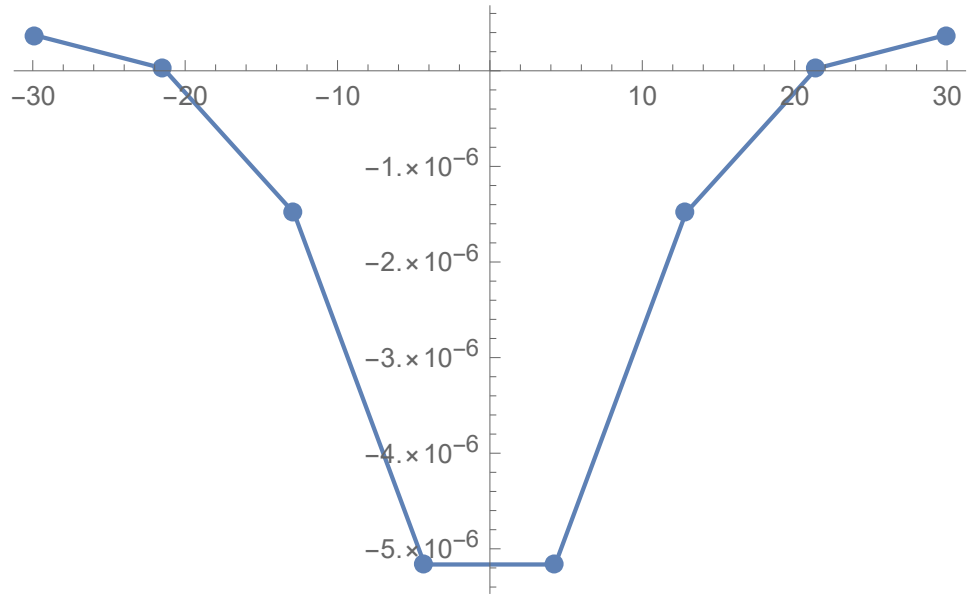


Figura 4.78: Deformación para la viga con ocho resortes para el quinto caso

Quinto ejemplo con nueve resortes

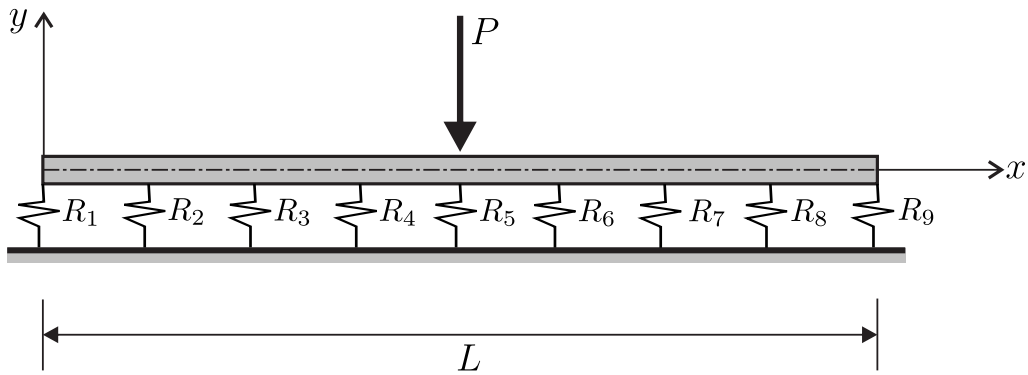


Figura 4.79: Quinto caso con nueve resortes

La figura 4.80 muestra la deformación que presenta la viga con nueve resortes,

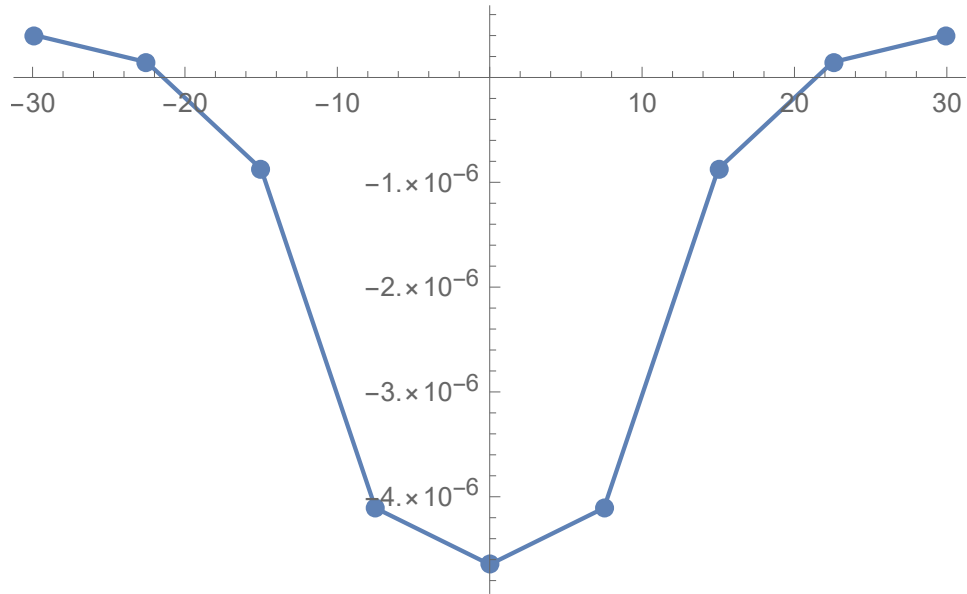


Figura 4.80: Deformación para la viga con nueve resortes para el quinto caso

Quinto ejemplo con diez resortes

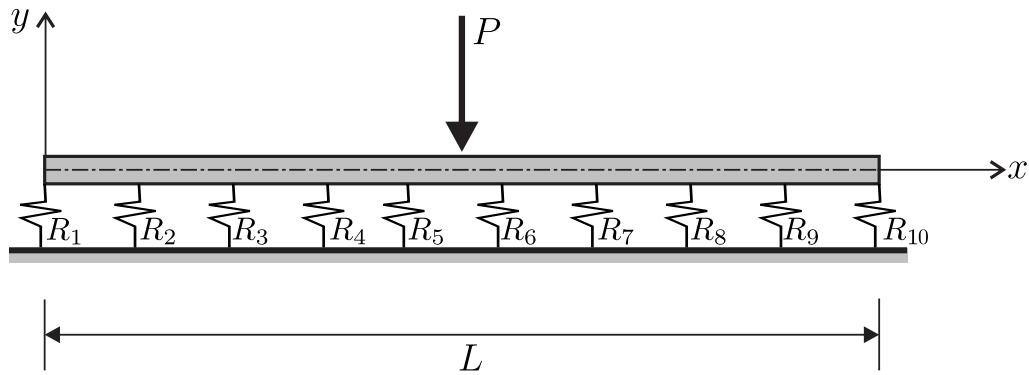


Figura 4.81: Quinto caso con diez resortes

La figura 4.82 muestra la deformación que la viga con diez resortes presenta,

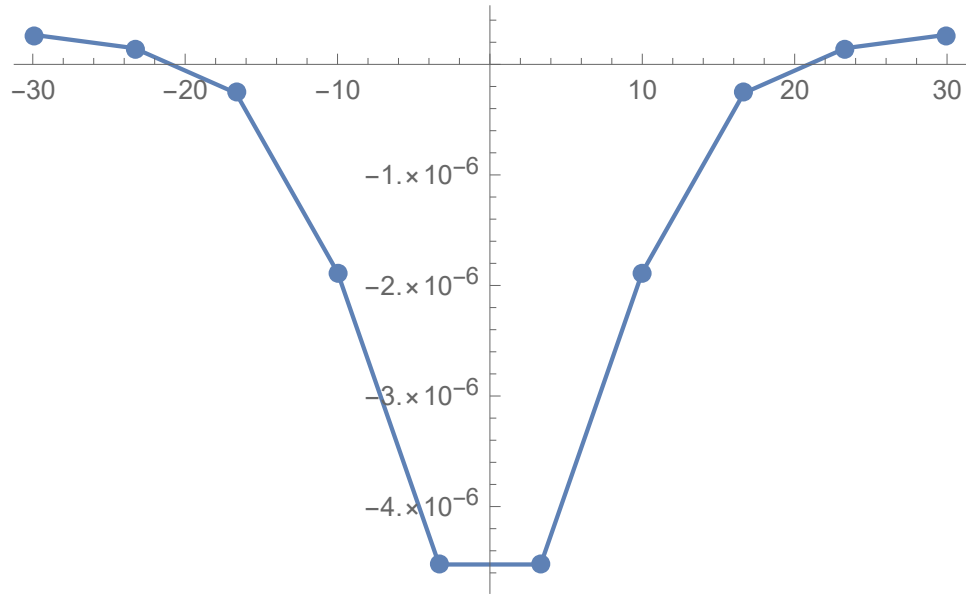


Figura 4.82: Deformación para la viga con diez resortes para el quinto caso

Comparación de las soluciones obtenidas y la solución exacta.

La función utilizada para comparar el método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].

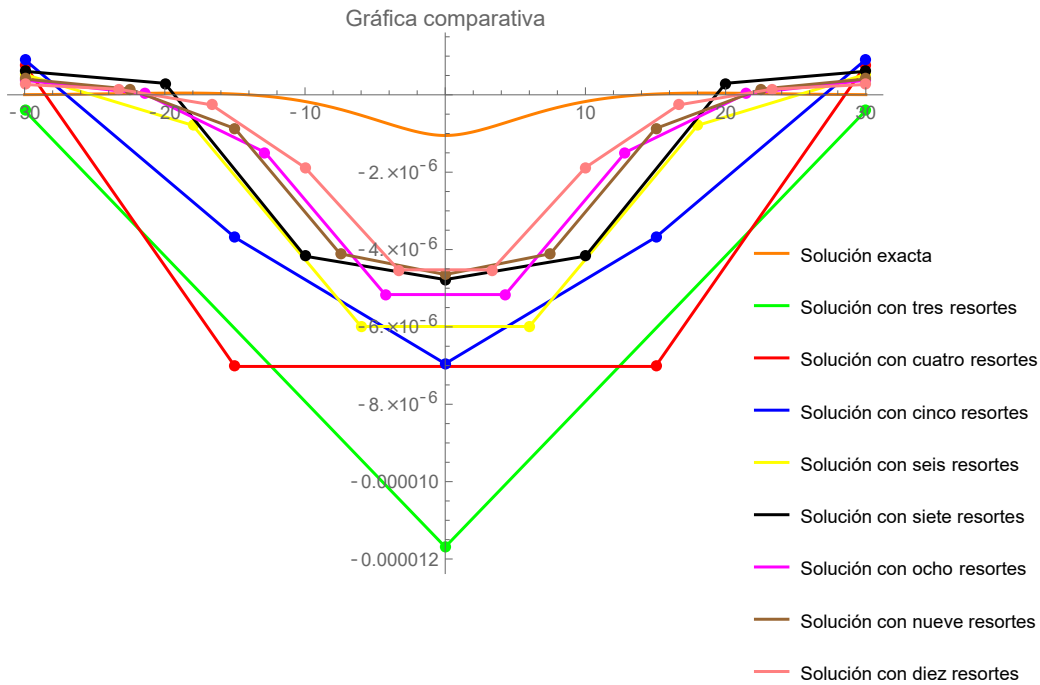


Figura 4.83: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.2.2. Sexto ejemplo de aplicación: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida.

En la figura 4.84 se presenta el siguiente problema, una viga con una carga repartida apoyada sobre los resortes, el ejemplo tendrá incremento de tres a diez resortes.

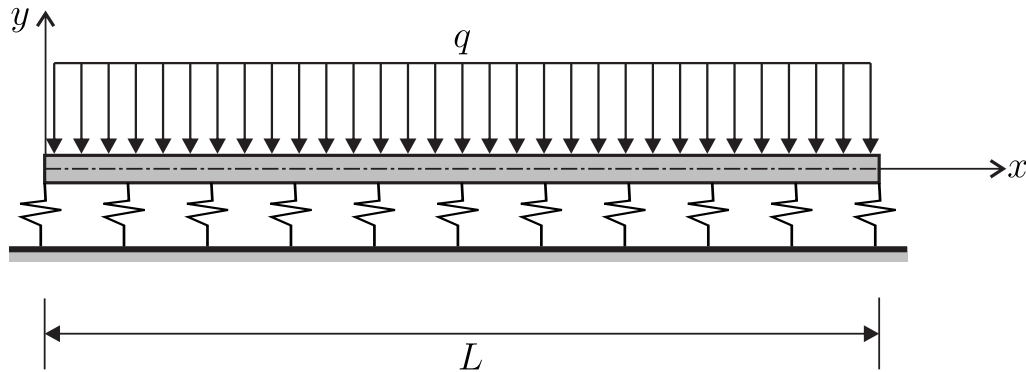


Figura 4.84: Sexto caso

El problema mostrado tendrá un incremento en el número de resortes con la intención de mostrar como será la aproximación a la solución exacta, de igual forma la intención es mostrar la diferencia entre la deformación presentada en la sección 4.2.1 donde se tiene una carga puntual al centro a el ejemplo actual, donde se tiene una carga distribuida a lo largo de claro.

Esta carga distribuida a lo largo del claro provoca deformaciones en los resortes de tal manera que los mismos trabajaran diferente a los presentados anteriormente,

Cuando el incremento de los elementos resorte se efectúe la obtención de las reacciones sera mas compleja puesto que el grado de hiperestaticidad de la viga aumenta, por lo que tiene tantas reacciones como apoyos, aunque los apoyos son resortes, si el módulo de reacción " k " llega a tener valores muy elevados estos se pueden llegar a comportar como apoyos fijos, de ser así los apoyos o elementos resorte no permiten el desplazamiento que se necesita para obtener la deformación del suelo, por lo que entonces la idealización del suelo deja de ser funcional.

Los valores que se trabajarán en el segundo ejemplo son los siguientes:

- $B = 0.80 \text{ m}$
- $H = 1.20 \text{ m}$
- $k_s = 120,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000 \sqrt{250 \text{ kg/cm}^2} = 221,359.44 \text{ kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$

- $I_z = \frac{B \cdot H^3}{12}$
- $L = 10 \text{ m}$
- $q = 250 \text{ N/m}$
- $EI = E_c \cdot I_z$
- $\nu = 0,35$
- $G = \frac{E_c}{2(1+\nu)}$
- $A = B \cdot H$

Sexto ejemplo con tres resortes

Se tiene el siguiente ejemplo,

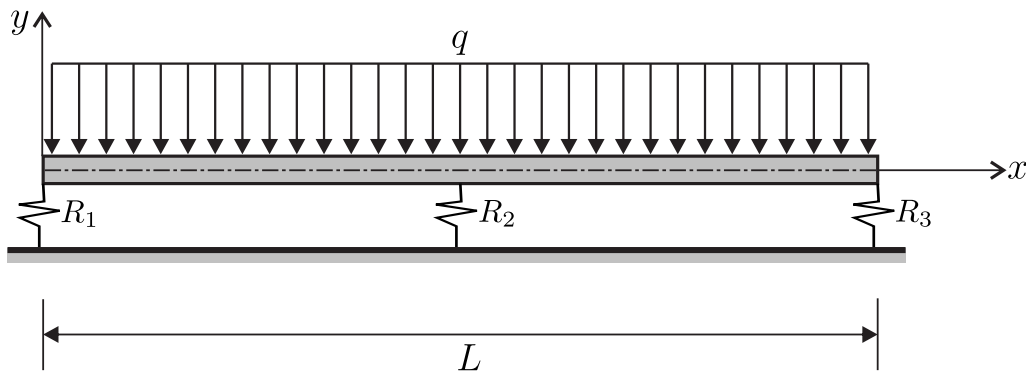


Figura 4.85: Sexto caso con tres resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con tres resortes, figura 4.86, como se puede observar, esta deformación con tres resortes tiene un error de aproximación bastante elevado y es necesario añadir un mayor número de resortes.

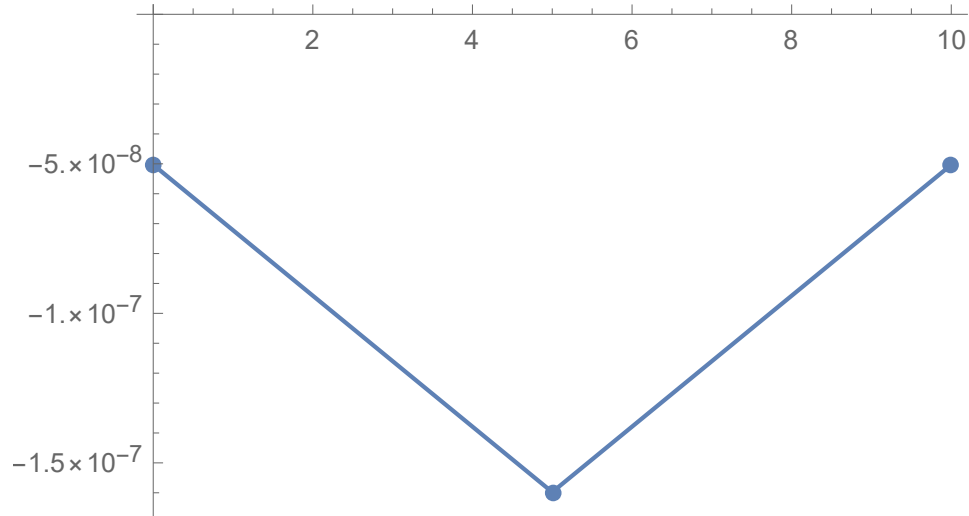


Figura 4.86: Deformación para la viga con tres resortes para el sexto caso

Se continúa con el problema agregando más elementos resorte a la viga, si se observa correctamente la deformación en los extremos es mayor a la del primer ejemplo con tres resortes, es decir, extremos resienten más la carga distribuida si lo comparamos con una carga puntual.

Sexto ejemplo con cuatro resortes

Se tiene una viga con cuatro resortes en la cual, la deformación esperada será mas aproximada que con tres elementos resorte,

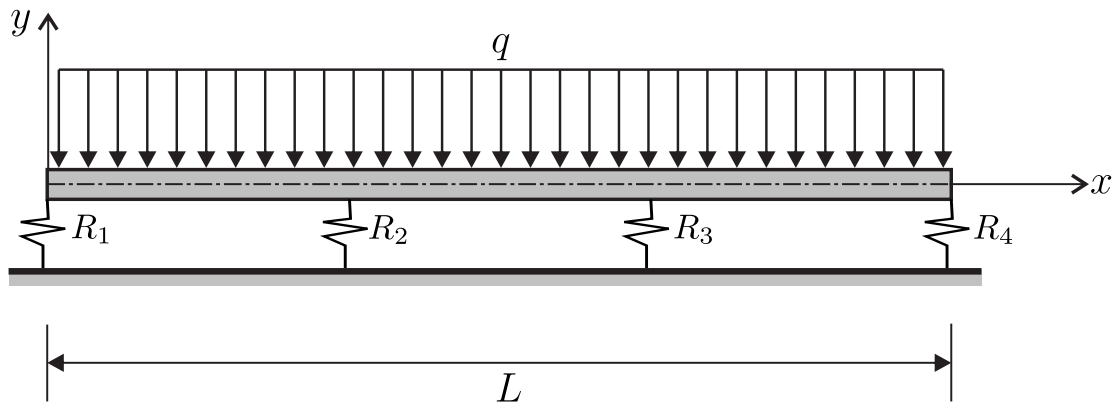


Figura 4.87: Sexto caso con cuatro resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con cuatro resortes, figura 4.88

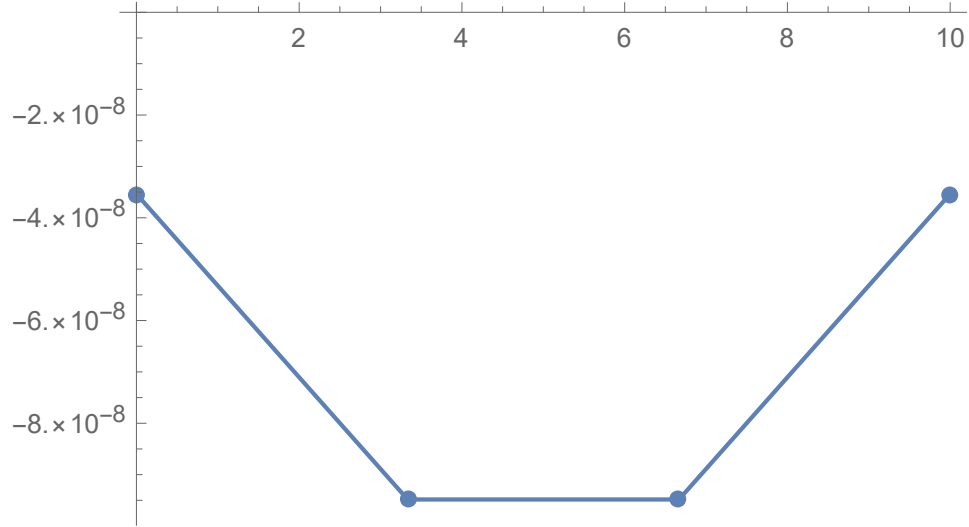


Figura 4.88: Deformación para la viga con cuatro resortes para el sexto caso

Conforme se van agregando mas elementos resorte las vigas comienzan a mostrar una forma mejor en la deformación.

Sexto ejemplo con cinco resortes

Se tiene,

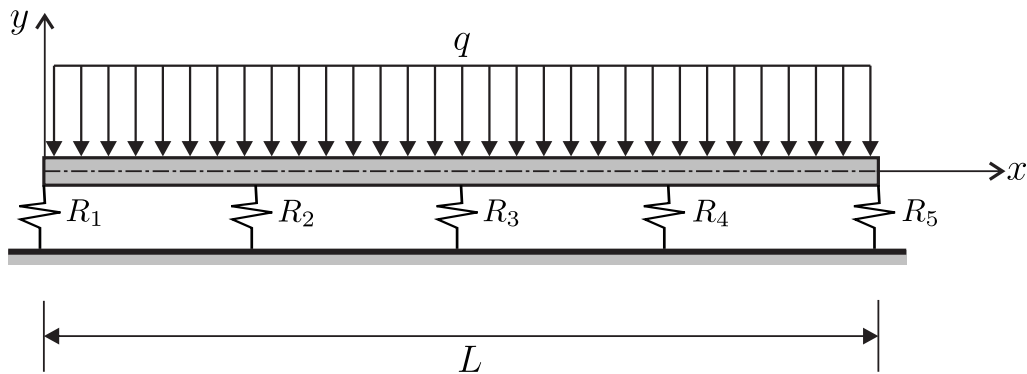


Figura 4.89: Sexto caso con cinco resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con cinco resortes, figura 4.90

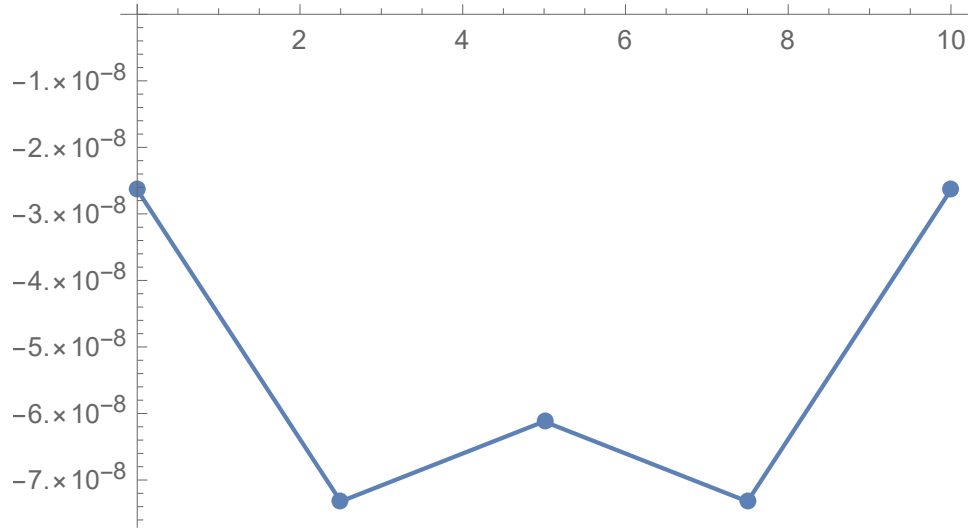


Figura 4.90: Deformación para la viga con cinco resortes para el sexto caso

Sexto ejemplo con seis resortes

Se tiene,

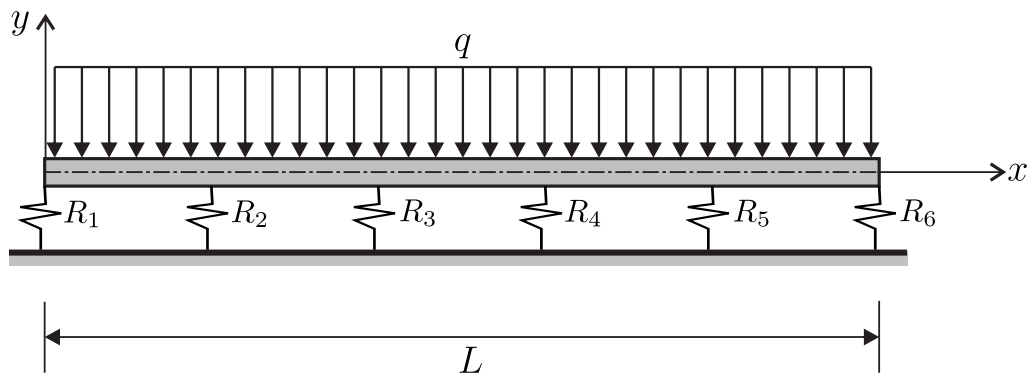


Figura 4.91: Sexto caso con seis resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con seis resortes, figura 4.92

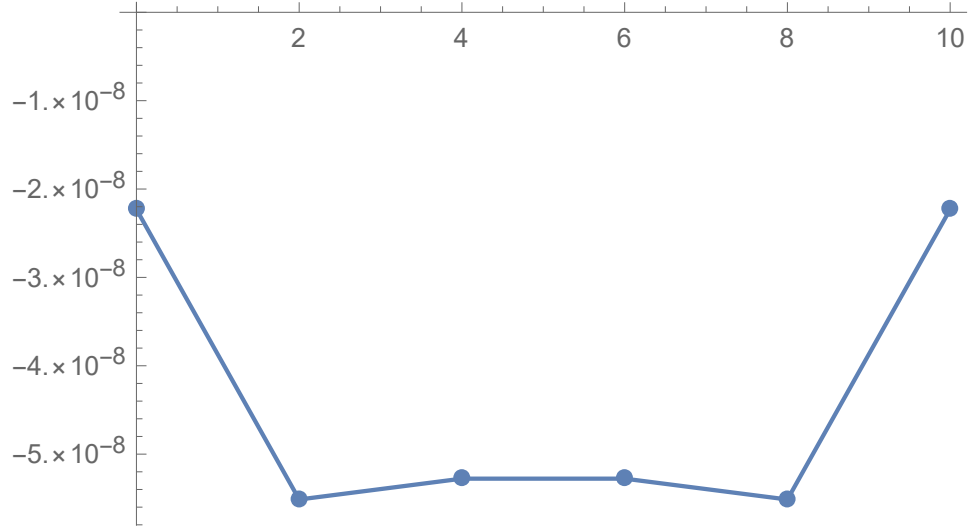


Figura 4.92: Deformación para la viga con seis resortes para el sexto caso

Sexto ejemplo con siete resortes

Se tiene,

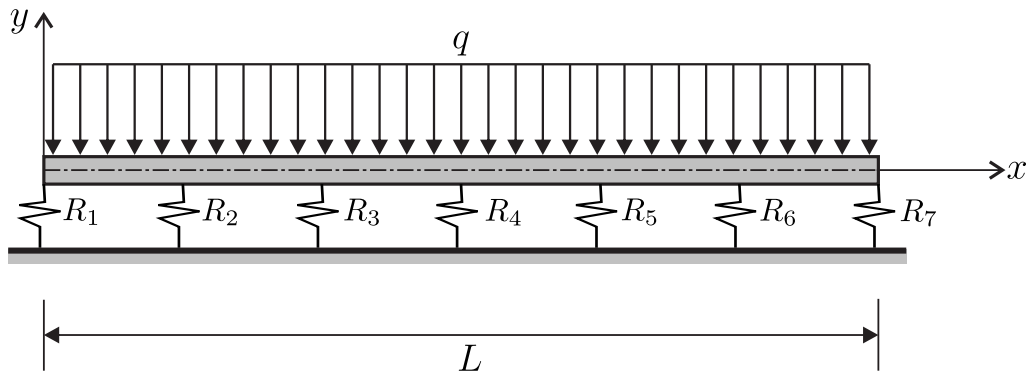


Figura 4.93: Sexto caso con siete resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con siete resortes, figura 4.94

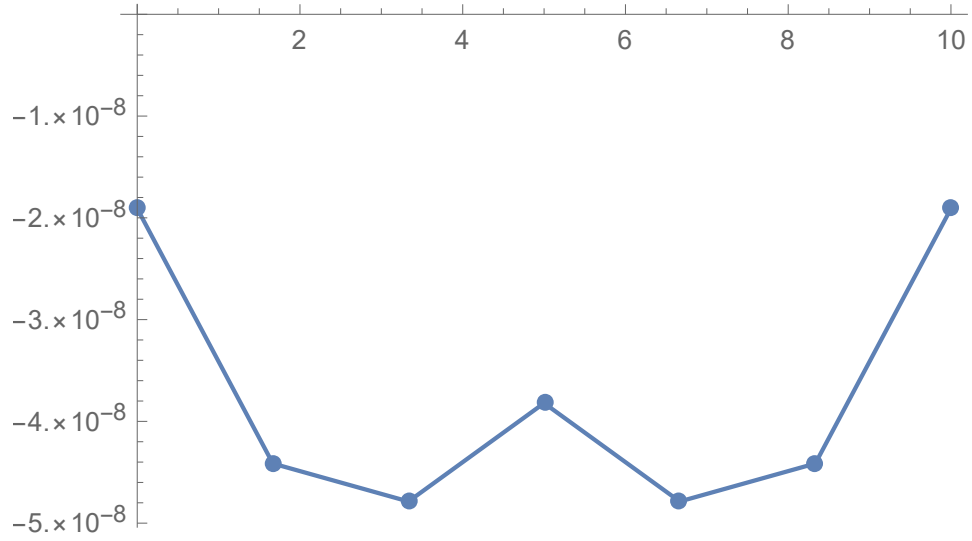


Figura 4.94: Deformación para la viga con siete resortes para el sexto caso

Sexto ejemplo con ocho resortes

Se tiene,

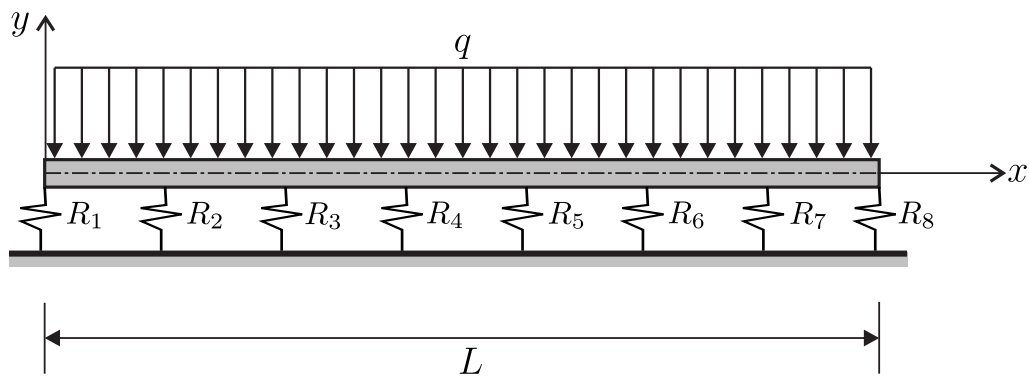


Figura 4.95: Sexto caso con ocho resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con ocho resortes, figura 4.96

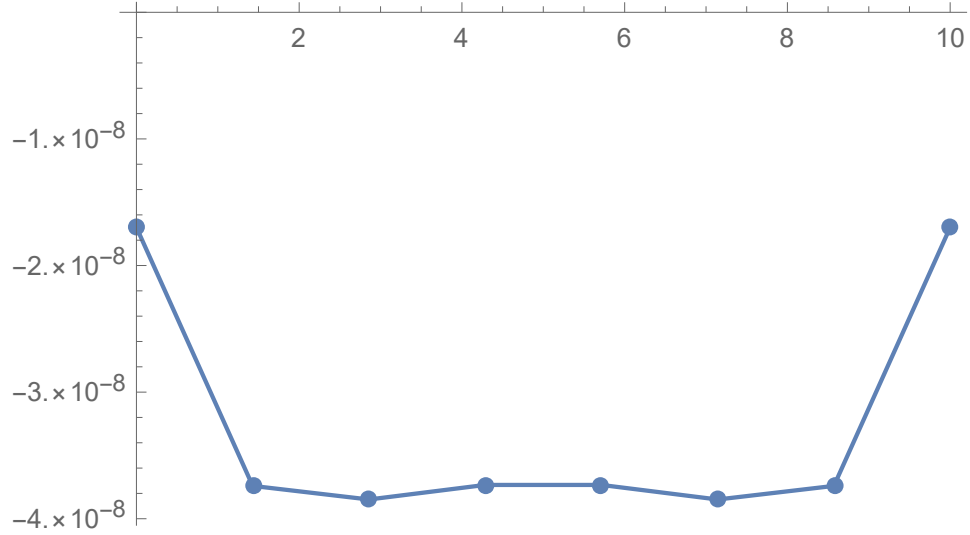


Figura 4.96: Deformación para la viga con ocho resortes para el sexto caso

Sexto ejemplo con nueve resortes

Se tiene,

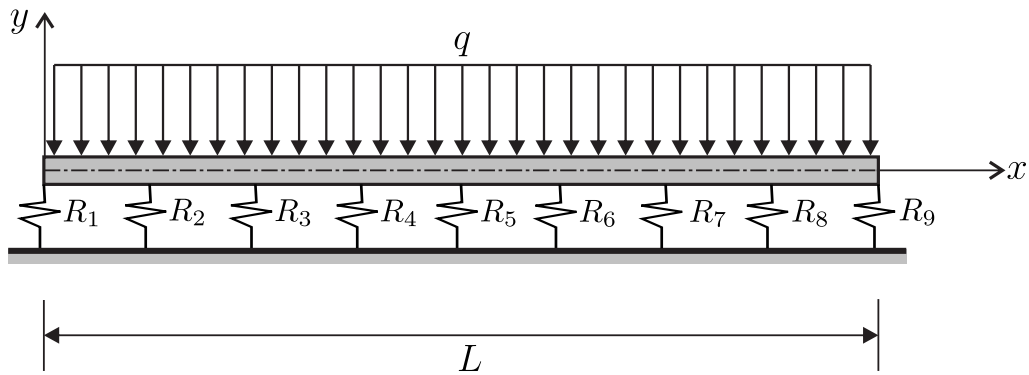


Figura 4.97: Sexto caso con nueve resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con nueve resortes, figura 4.98

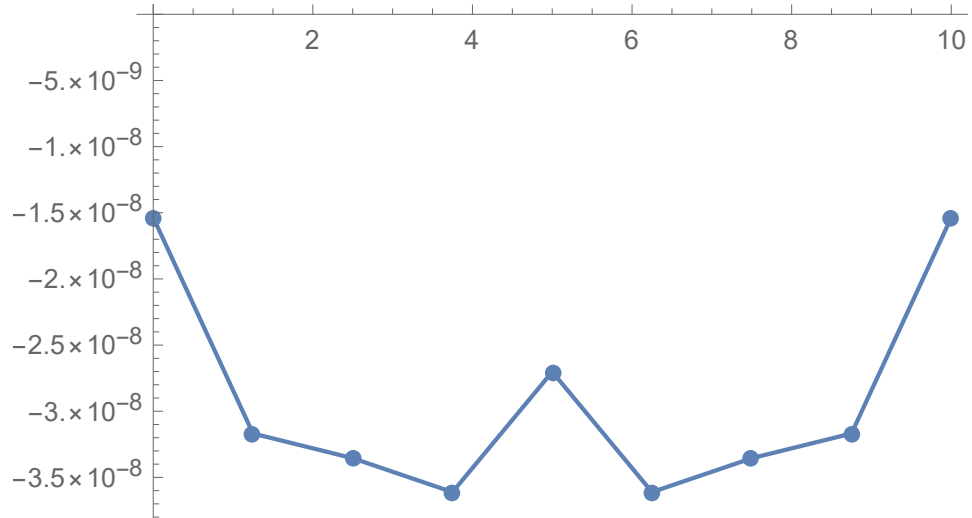


Figura 4.98: Deformación para la viga con nueve resortes para el sexto caso

Sexto ejemplo con diez resortes

Ahora se tiene el caso con diez resortes en el cual se puede apreciar que la viga comienza a mostrar una deformación mas cercana a la real,

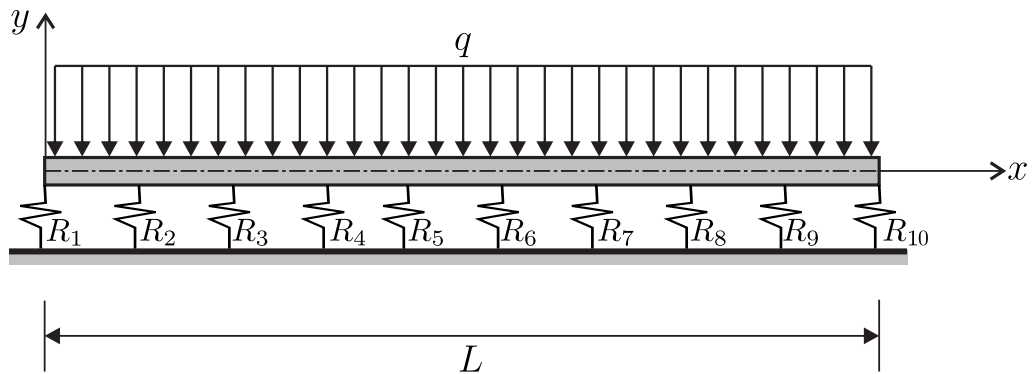


Figura 4.99: Sexto caso con diez resortes

Se tiene la siguiente deformación de la viga con diez resortes, figura 4.100

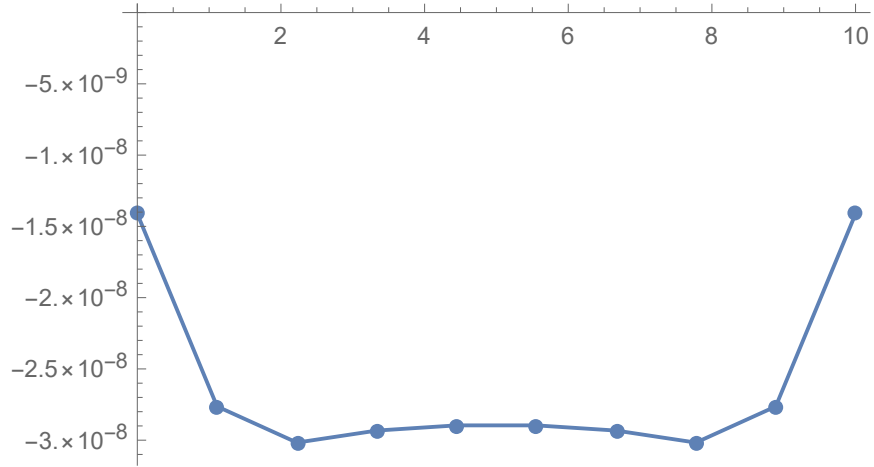


Figura 4.100: Deformación para la viga con diez resortes para el sexto caso

Comparación de las soluciones obtenidas y la solución exacta.

La función para comparar el método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].

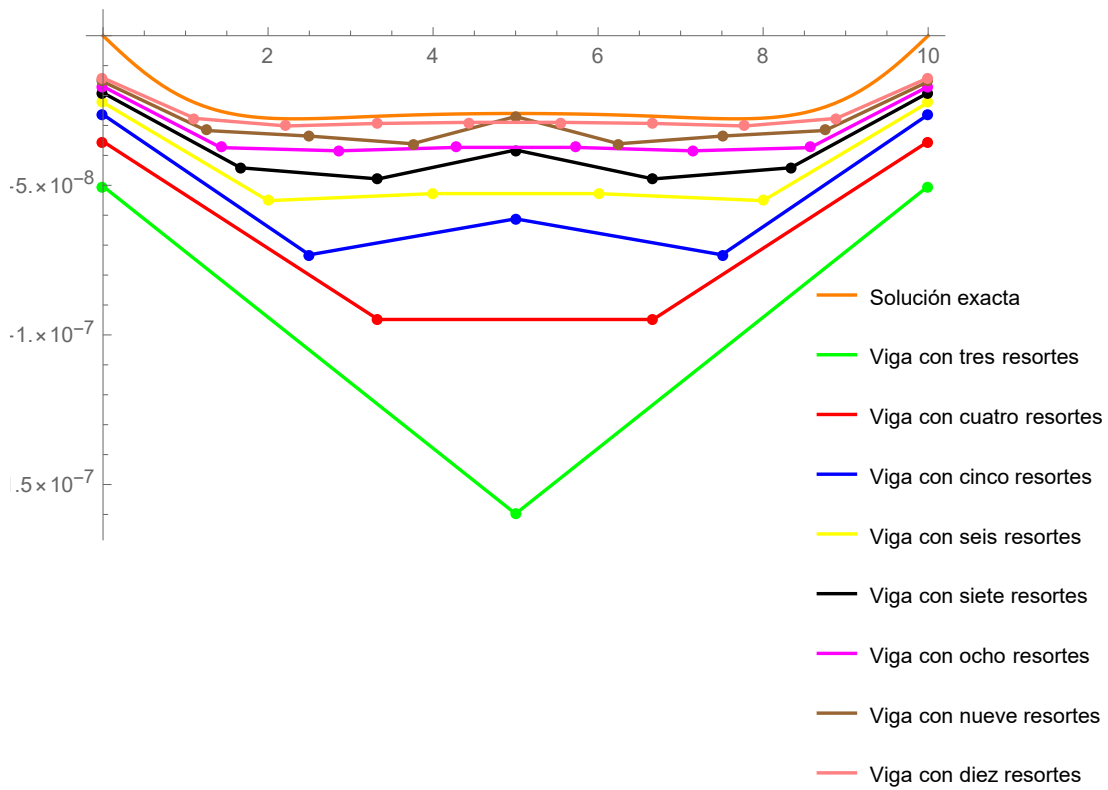


Figura 4.101: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.2.3. Séptimo ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida.

Se tiene el siguiente problema, una viga con empotre y apoyada sobre cinco resortes con una carga repartida en el claro, al igual que los ejemplos anteriores se dará solución y se incrementa el número de resortes con la intención de mostrar como se vuelve mejor la aproximación.

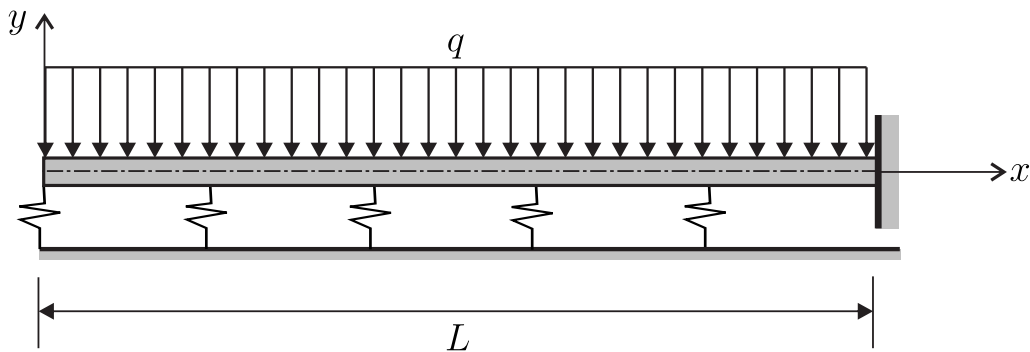


Figura 4.102: Séptimo caso

Los datos para darle solución al tercer ejemplo son los siguientes:

- $B = 0.80 \text{ m}$
- $H = 1.20 \text{ m}$
- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000 \sqrt{250 \text{ kg/cm}^2} = 221,359.44 \text{ kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $I_z = \frac{B * H^3}{12}$
- $L = 10 \text{ m}$
- $q = 100 \text{ N/m}$
- $EI = E_c * I_z$
- $\nu = 0.35$
- $G = \frac{E_c}{2(1+\nu)}$
- $A = B * H$

Séptimo ejemplo con un resorte

El séptimo caso del tercer ejemplo con un resorte en un extremo de la viga

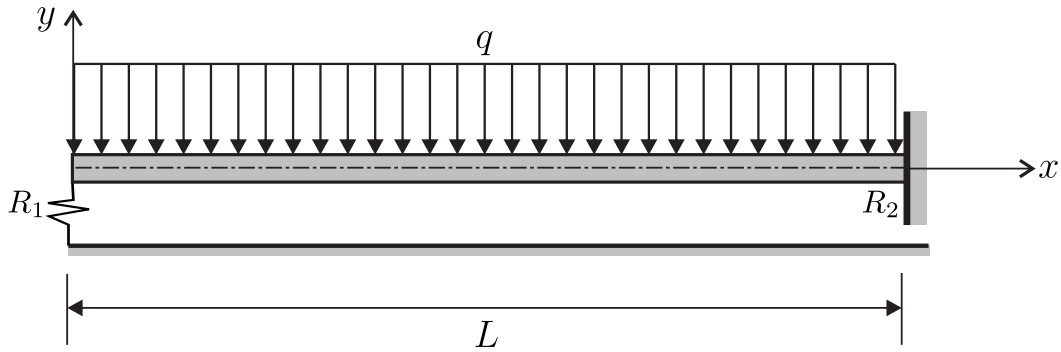


Figura 4.103: Séptimo caso con un resorte

Se tiene la deformación de la viga con un resorte,

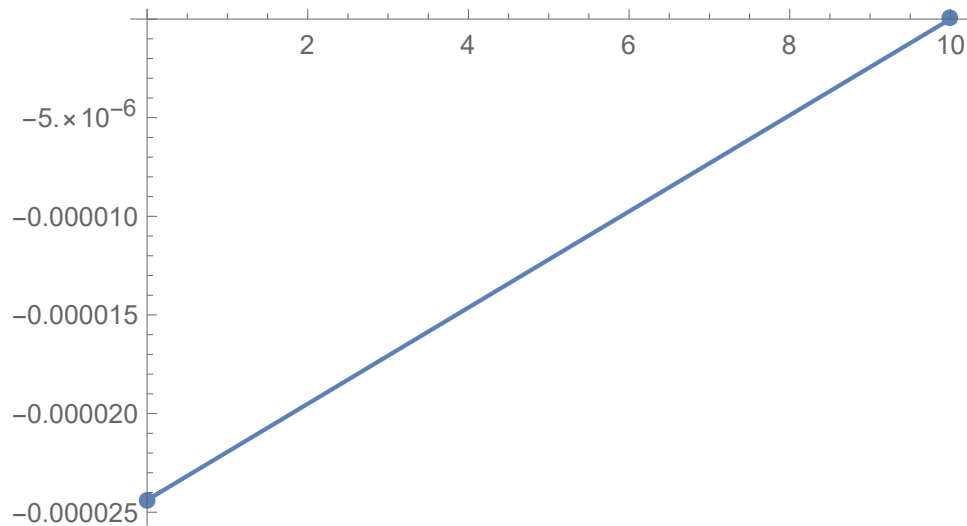


Figura 4.104: Deformación con un resorte para el séptimo caso

Séptimo ejemplo con dos resortes

Séptimo ejemplo con dos resortes.

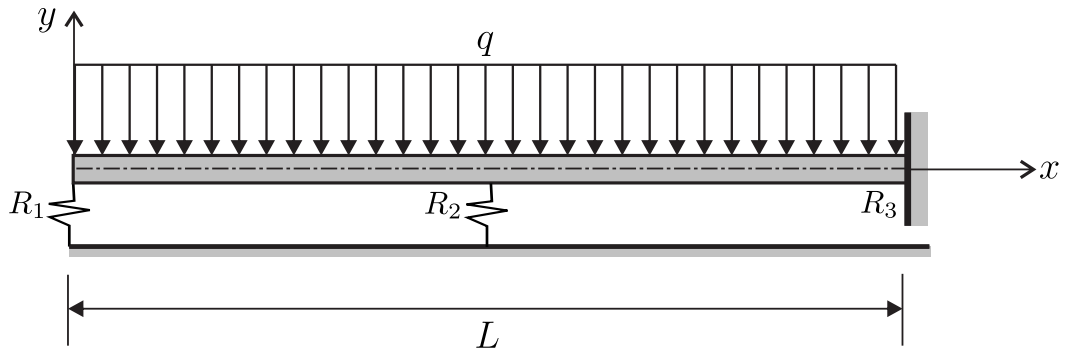


Figura 4.105: Séptimo caso con dos resortes

Se tiene la deformación de la viga con dos resortes,

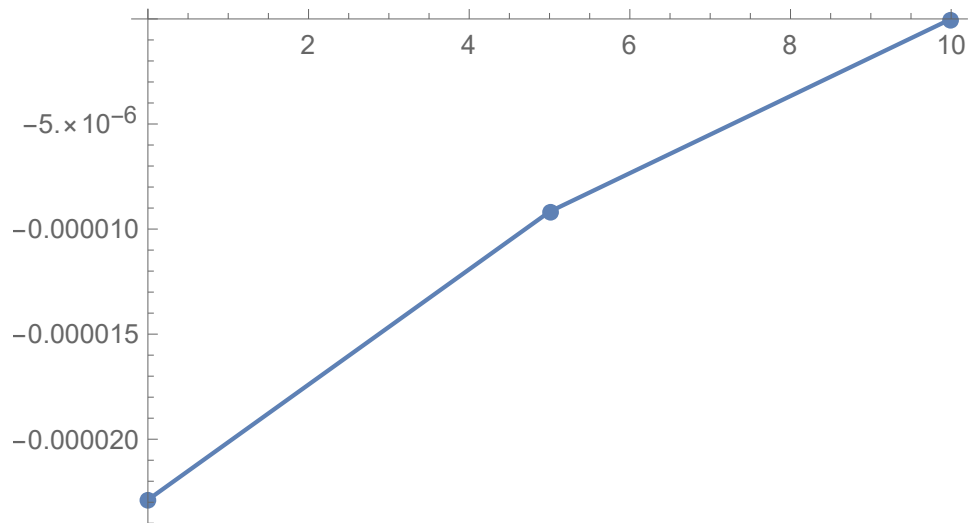


Figura 4.106: Deformación con dos resortes para el séptimo caso

Séptimo ejemplo con tres resortes

Séptimo ejemplo con tres resortes.

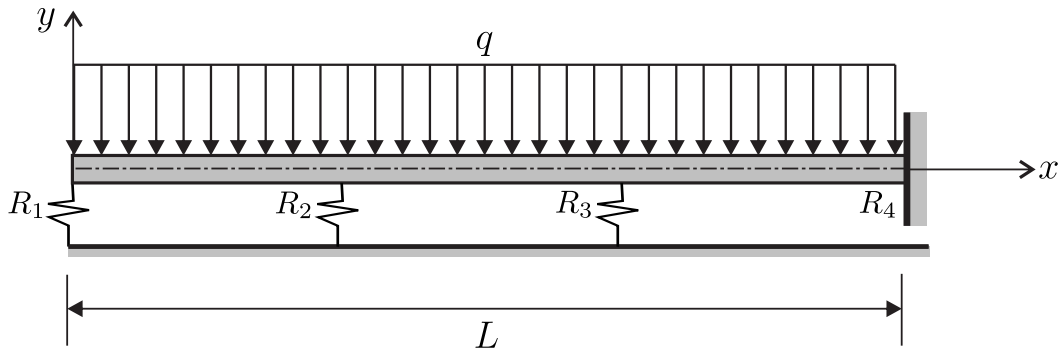


Figura 4.107: Séptimo caso con tres resortes

Se tiene la deformación de la viga con tres resortes,

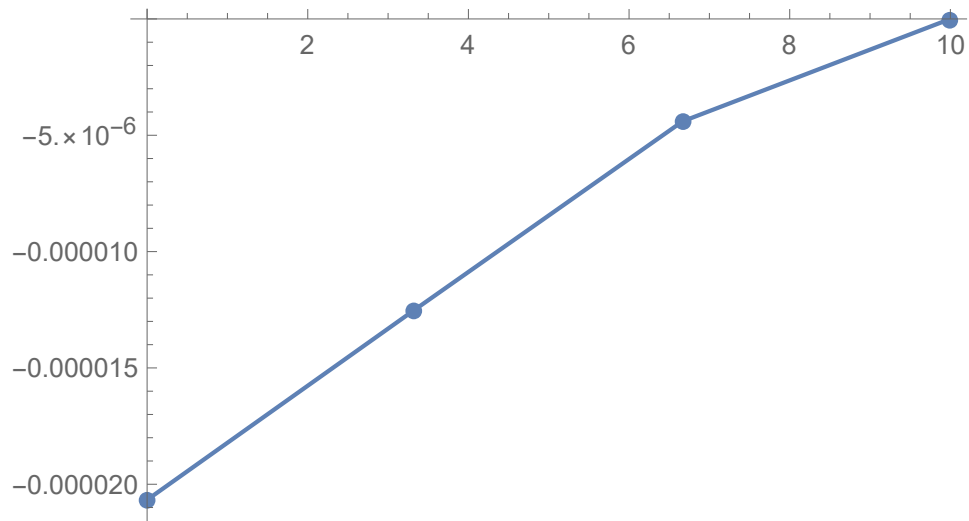


Figura 4.108: Deformación con tres resortes para el séptimo caso

Séptimo ejemplo con cuatro resortes

Séptimo ejemplo con cuatro resortes.

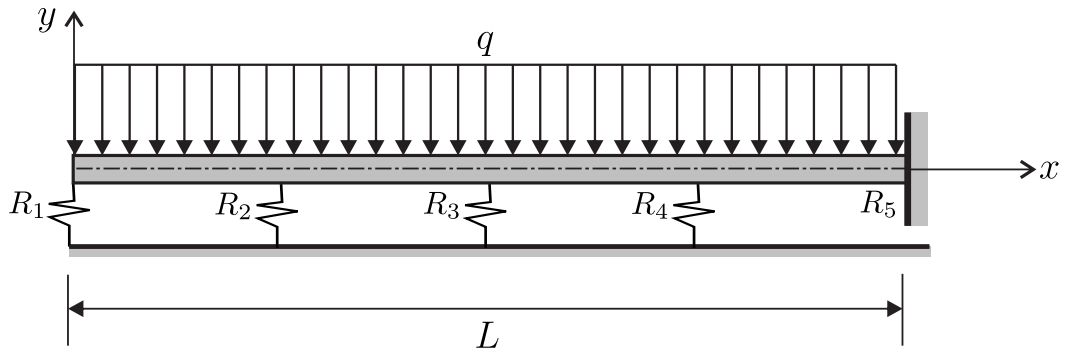


Figura 4.109: Séptimo caso con cuatro resortes

Se tiene la deformación de la viga con cuatro resortes,

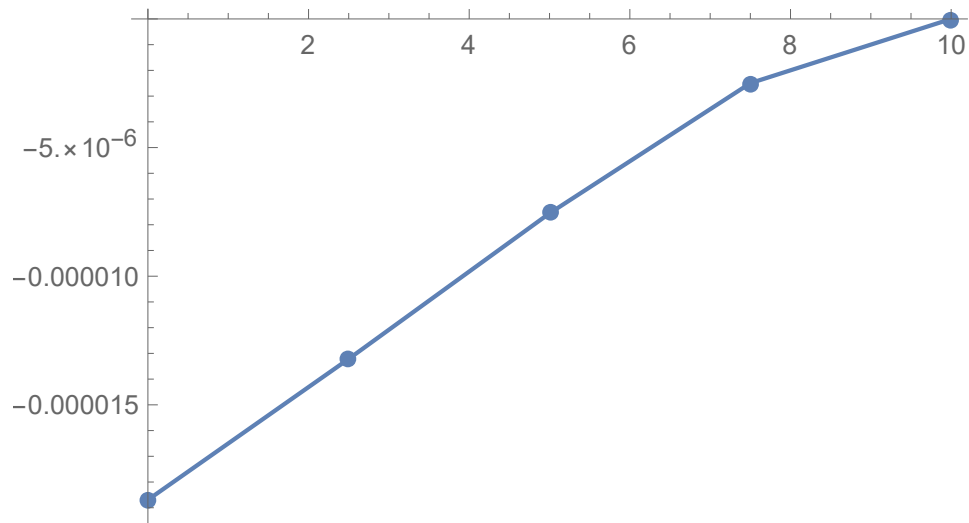


Figura 4.110: Séptimo caso con cuatro resortes para el séptimo caso

Séptimo ejemplo con cinco resortes

Séptimo ejemplo con cinco resortes.

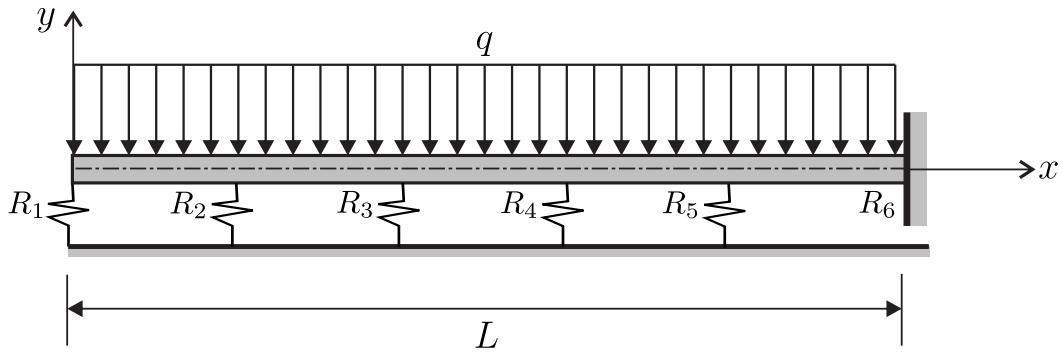


Figura 4.111: Séptimo caso con cinco resortes

Se tiene la deformación de la viga con cinco resortes,

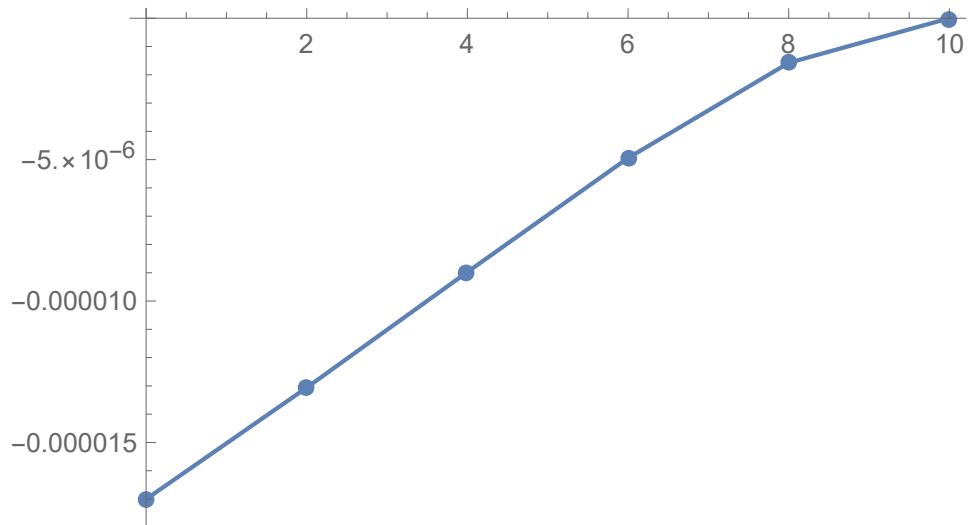


Figura 4.112: Deformación con cinco resortes para el séptimo caso

Comparación de las soluciones obtenidas y la solución exacta.

La función utilizada para comparar el método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].

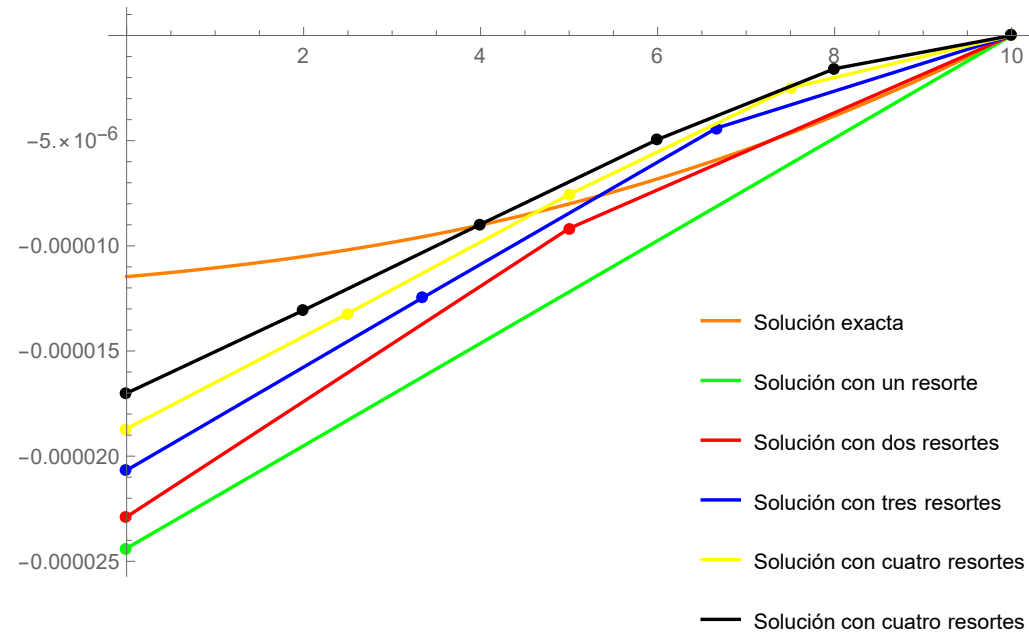


Figura 4.113: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.2.4. Octavo ejemplo de aplicación: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro.

Se tiene el siguiente problema, una viga con empotre y apoyada sobre cinco resortes con una carga puntual al final del claro, al igual que los ejemplos anteriores se dará solución y se incrementa el número de resortes con la intención de mostrar como se vuelve mejor la aproximación.

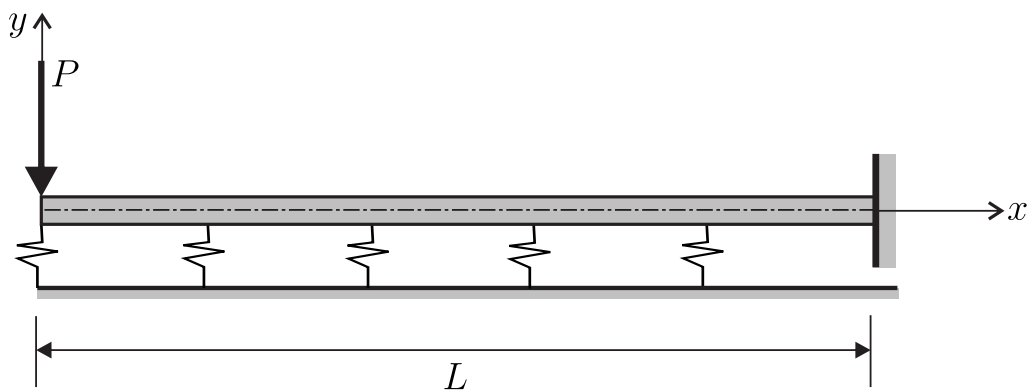


Figura 4.114: Octavo caso

Los datos para darle solución al octavo ejemplo son los siguientes:

- $B = 0.80 \text{ m}$
- $H = 1.20 \text{ m}$
- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $k = k_s * B$
- $E_c = 14,000 \sqrt{250 \text{ kg/cm}^2} = 221,359.44 \text{ kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $I_z = \frac{B * H^3}{12}$
- $L = 10 \text{ m}$
- $P = 100 \text{ N}$
- $EI = E_c * I_z$
- $\nu = 0.35$
- $G = \frac{E_c}{2(1+\nu)}$
- $A = B * H$

Octavo ejemplo con un resorte

El primer caso del tercer ejemplo con un resorte en un extremo de la viga

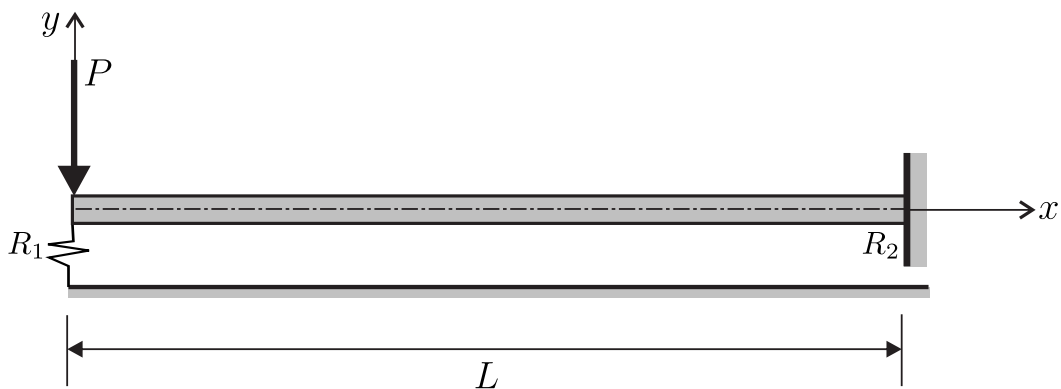


Figura 4.115: Octavo caso con un resorte

Se tiene la deformación de la viga con un resorte,

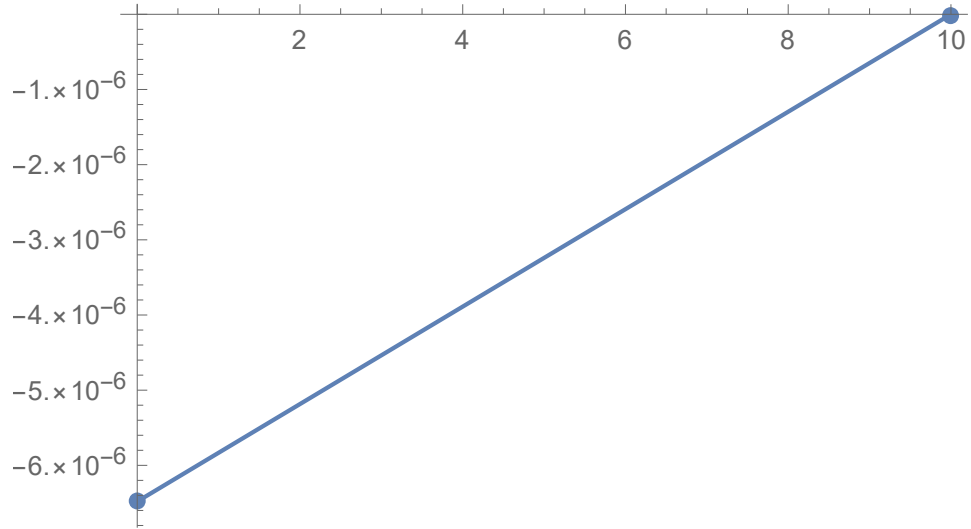


Figura 4.116: Deformación con un resorte para el octavo caso

Octavo ejemplo con dos resortes

Cuarto ejemplo con dos resortes.

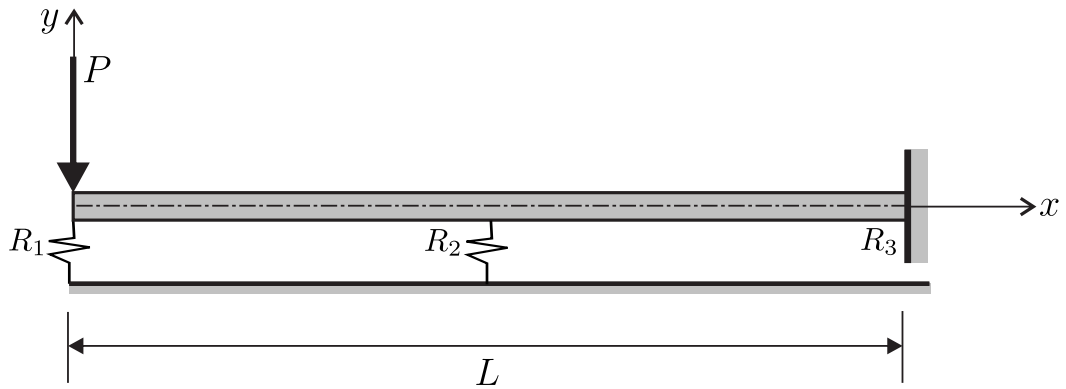


Figura 4.117: Octavo caso con dos resortes

Se tiene la deformación de la viga con dos resortes,

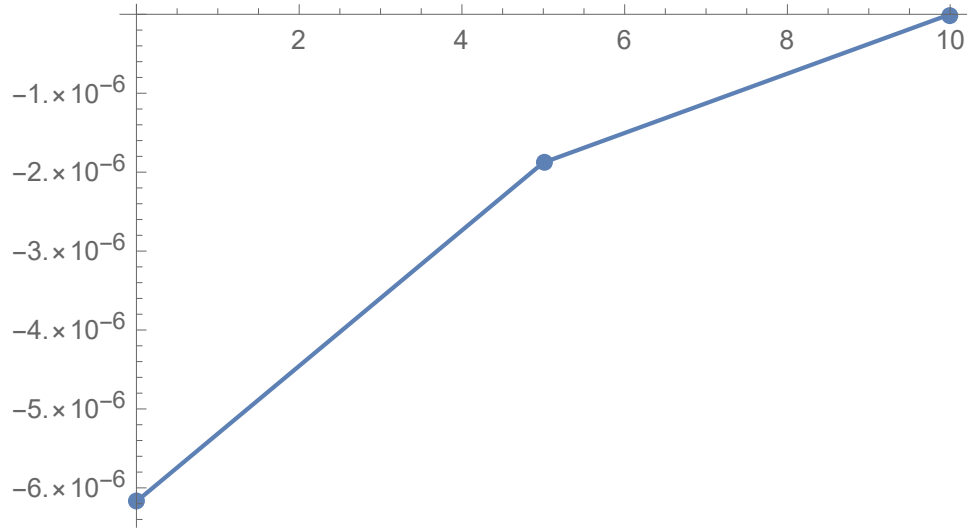


Figura 4.118: Deformación con dos resortes para el octavo caso

Octavo ejemplo con tres resortes

Cuarto ejemplo con tres resortes.

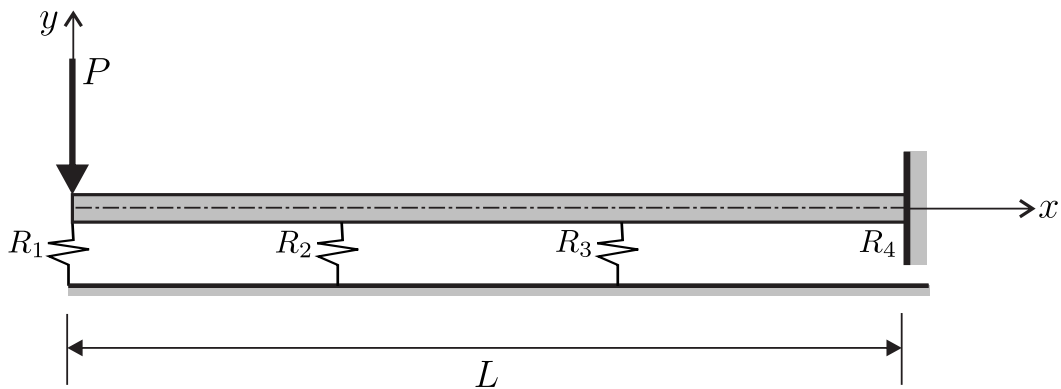


Figura 4.119: Octavo caso con tres resortes

Se tiene la deformación de la viga con tres resortes,

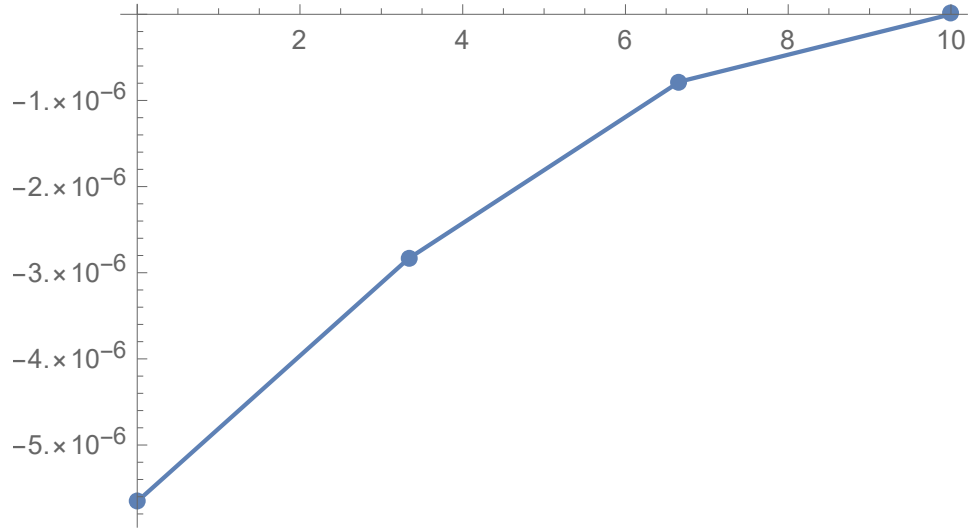


Figura 4.120: Deformación con tres resortes para el octavo caso

Octavo ejemplo con cuatro resortes

Cuarto ejemplo con cuatro resortes.

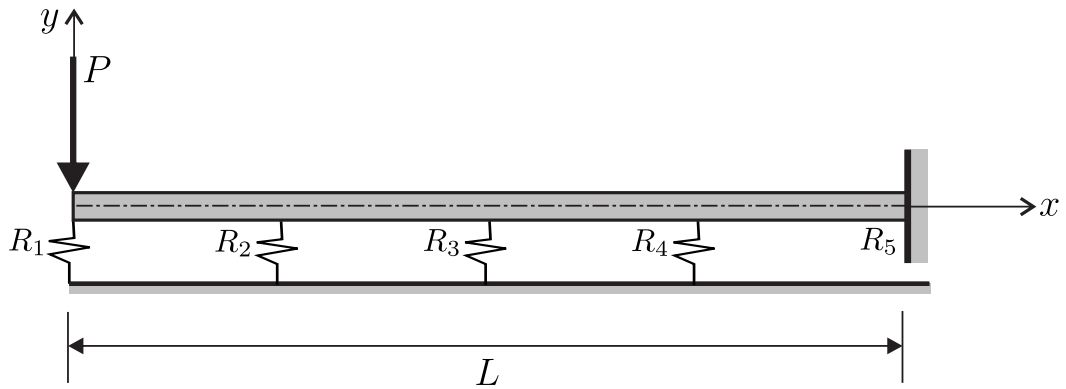


Figura 4.121: Octavo caso con cuatro resortes

Se tiene la deformación de la viga con cuatro resortes,

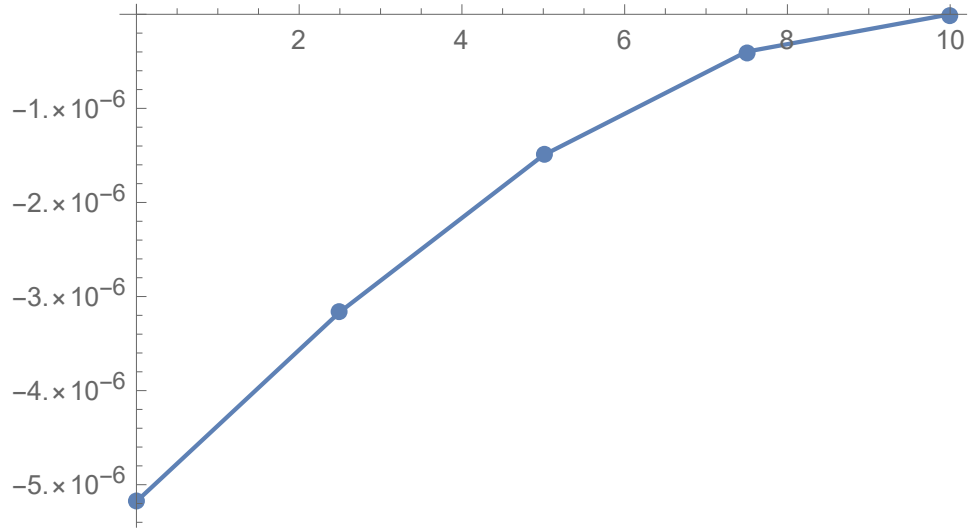


Figura 4.122: Octavo caso con cuatro resortes para el octavo caso

Octavo ejemplo con cinco resortes

Cuarto ejemplo con cinco resortes.

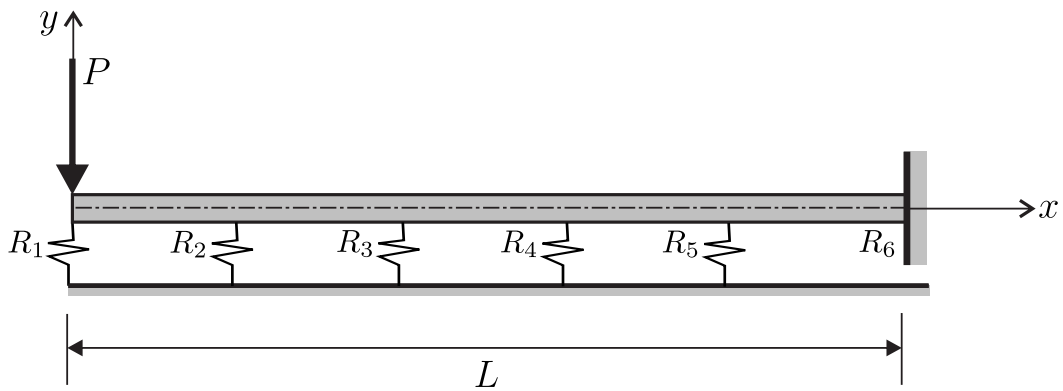


Figura 4.123: Octavo caso con cinco resortes

Se tiene la deformación de la viga con cinco resortes,

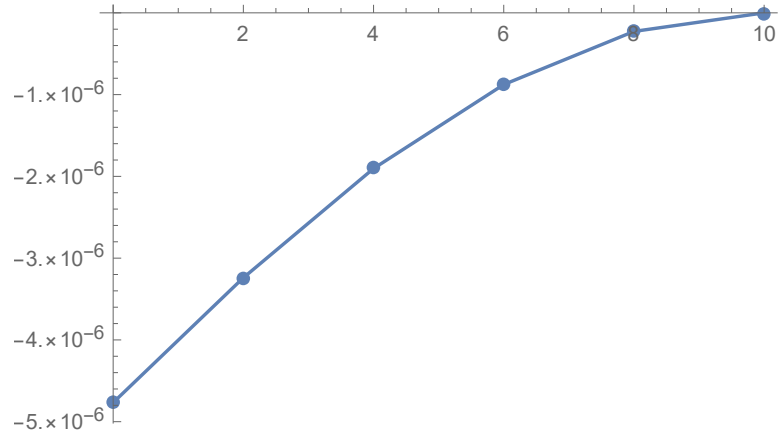


Figura 4.124: Deformación con cinco resortes para el octavo caso

Comparativa de las soluciones obtenidas y la solución exacta.

La función para poder hacer la comparación del método aproximado aplicado con la solución exacta fue otorgada por M. Hetényi en 1946 [11].

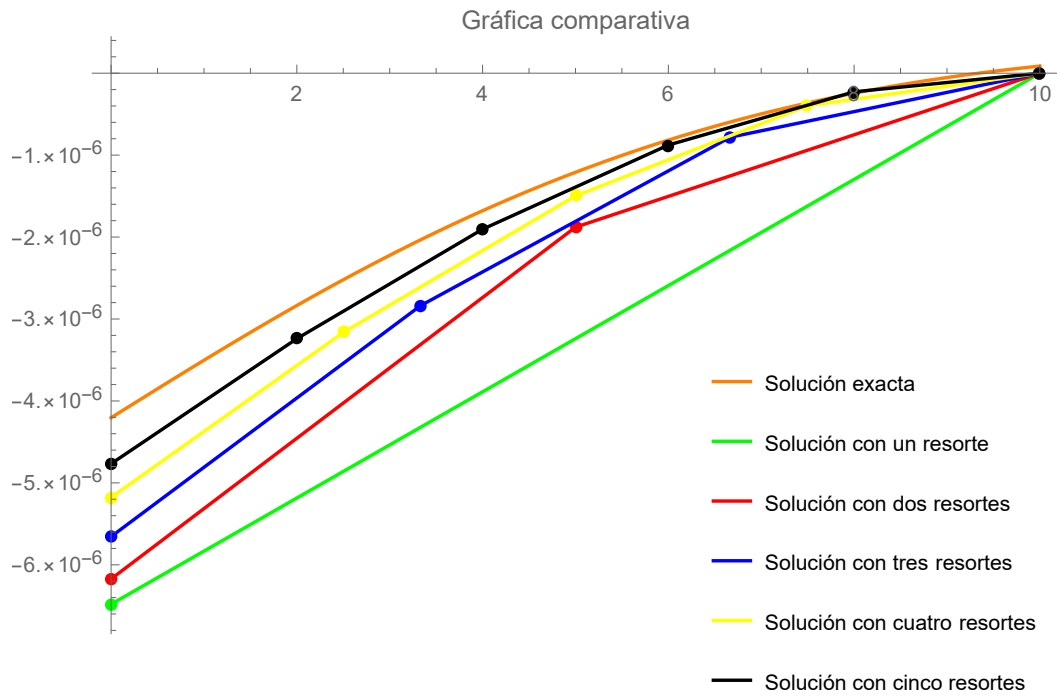


Figura 4.125: Comparación de gráficas obtenidas con la solución exacta

4.3. Análisis elástico y continuo

Ahora se presenta la solución al problema de las cimentaciones elásticas considerando al suelo como un medio elástico y continuo, el problema se solucionó con apoyo del Software FEAP 8.5 (Finite Element Analysis Program), la deformación que se encuentra es considerablemente mucho más cercana a la solución exacta.

4.3.1. Noveno ejemplo de aplicación: Viga apoyada sobre una masa de suelo continua con carga puntual al centro del claro.

Se tiene el siguiente caso,

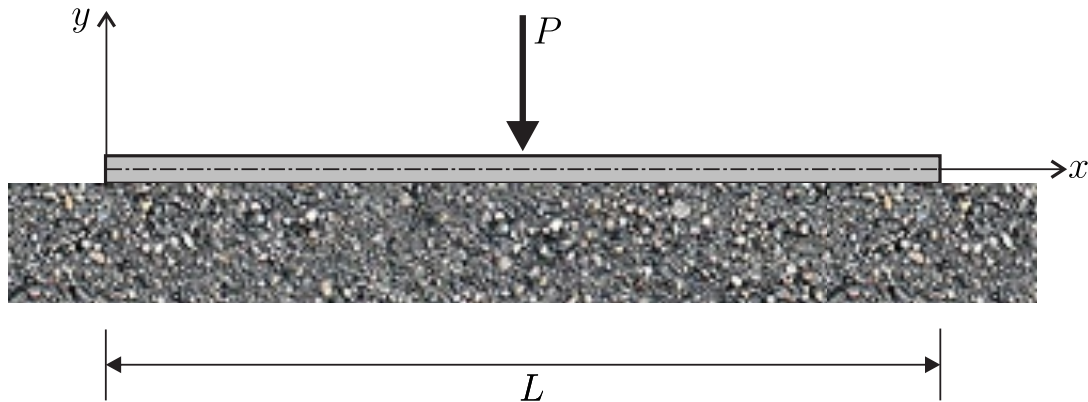


Figura 4.126: Noveno caso

donde se ha discretizado la masa de suelo sólida en una malla formada por elementos triangulo de primer orden, los datos utilizados para la solución son:

- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $L = 30 \text{ m}$
- $P = 100 \text{ N}$
- $E_c = 14,000\sqrt{250\text{kg/cm}^2} = 221,359.44\text{kg/cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N/m}^2$
- $\nu = 0,30$

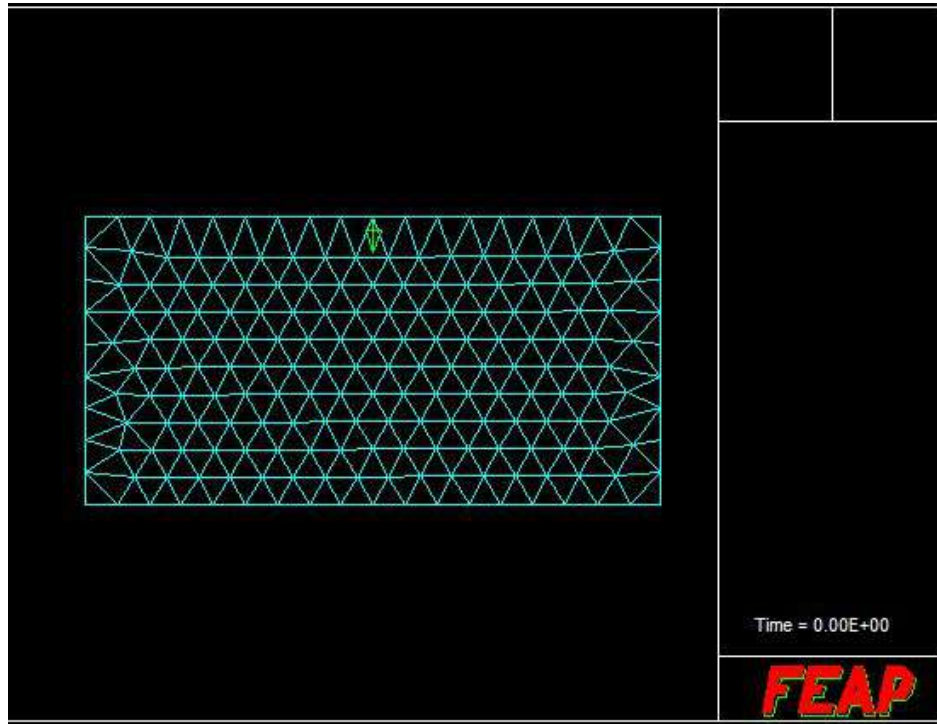


Figura 4.127: Malla para el noveno caso

La deformación que presenta este método es la siguiente,

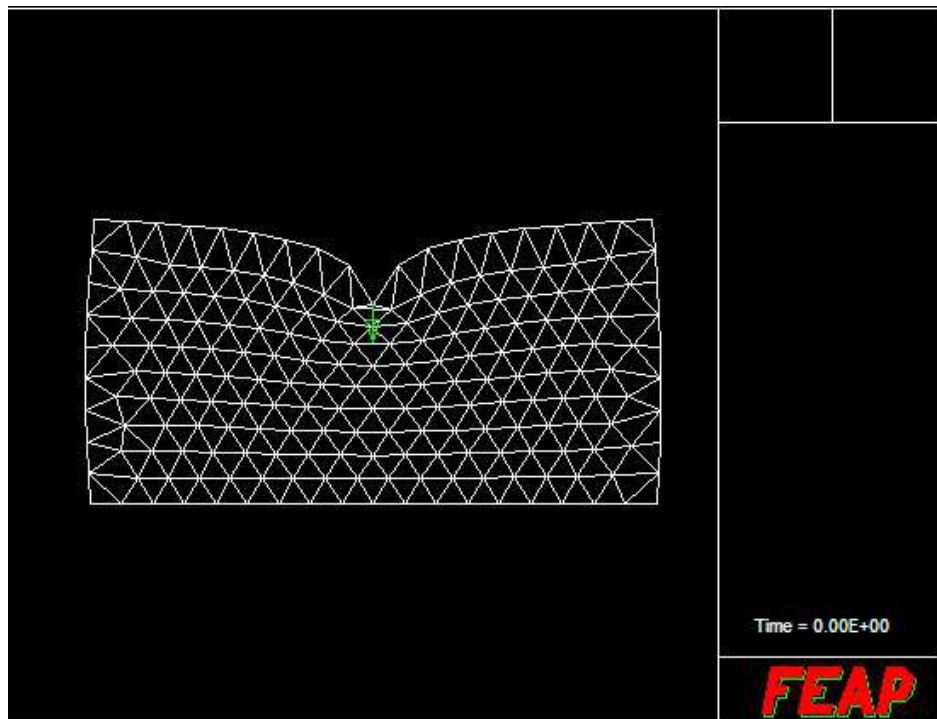


Figura 4.128: Deformación para el noveno caso

4.3.2. Décimo ejemplo de aplicación: Viga apoyada sobre una masa de suelo continua con carga repartida.

Se tiene el siguiente caso,

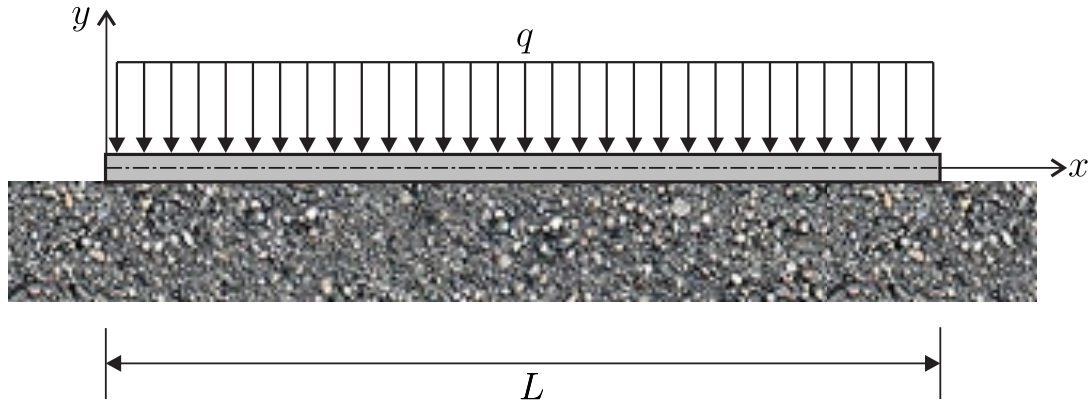


Figura 4.129: Décimo caso

donde se ha discretizado la masa de suelo sólida en una malla formada por elementos triangulo de primer orden, los datos utilizados para la solución son:

- $k_s = 10,000 \text{ KN}/\text{m}^3$
- $L = 10 \text{ m}$
- $q = 100 \text{ N}/\text{m}$
- $E_c = 14,000\sqrt{250\text{kg}/\text{cm}^2} = 221,359.44\text{kg}/\text{cm}^2 = 21,707,945,522.8 \text{ N}/\text{m}^2$
- $\nu = 0,3$

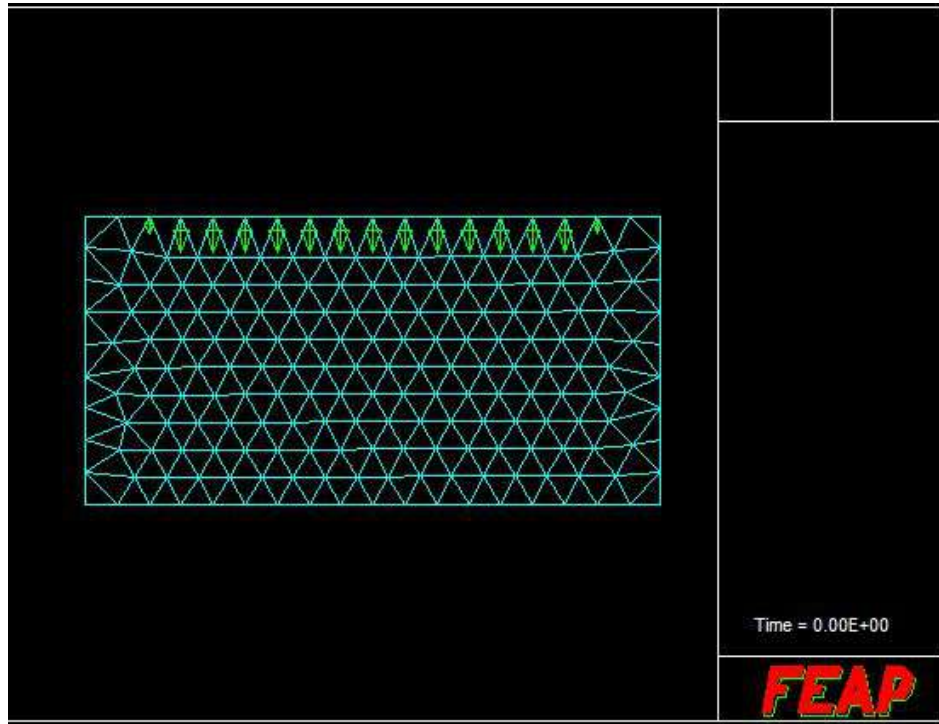


Figura 4.130: Malla para el Décimo caso

La deformación que presenta este método es la siguiente,

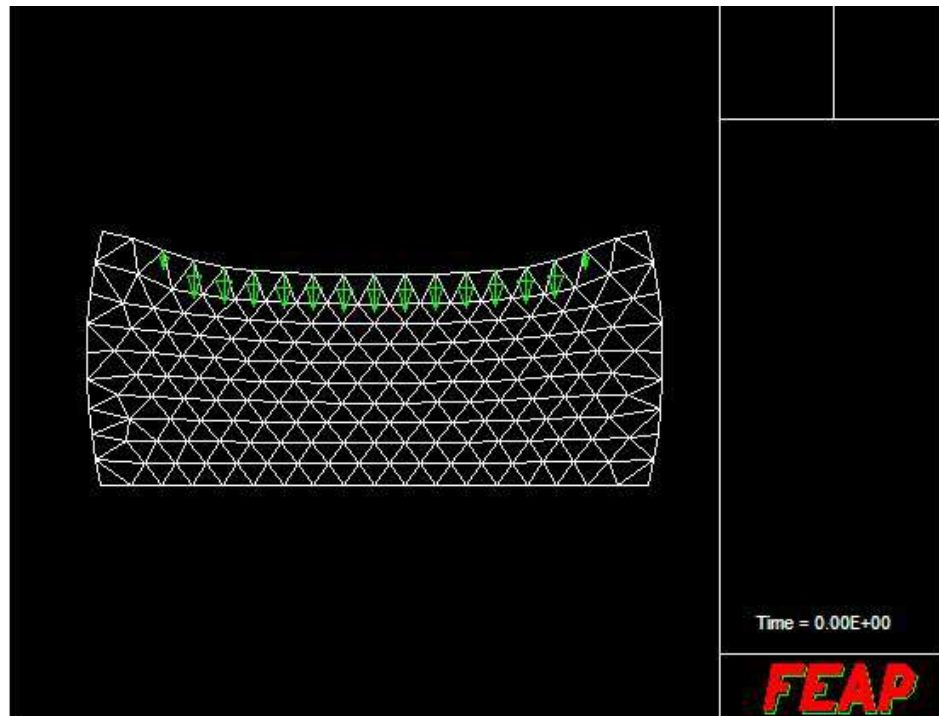


Figura 4.131: Deformación para el décimo caso

4.4. Solución de los ejemplos de aplicación uno y dos con FEAP

Se ha dado solución a los ejemplos de aplicación uno y dos con ayuda del Software FEAP, utilizando el modelo de Winkler.

4.4.1. Primer caso solucionado con FEAP

EL primer problema, viga con una carga puntual al centro del claro fue solucionado con FEAP.

Los datos utilizados para la solución son:

- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$
- $L = 10 \text{ m}$
- $P = 1000 \text{ N}$

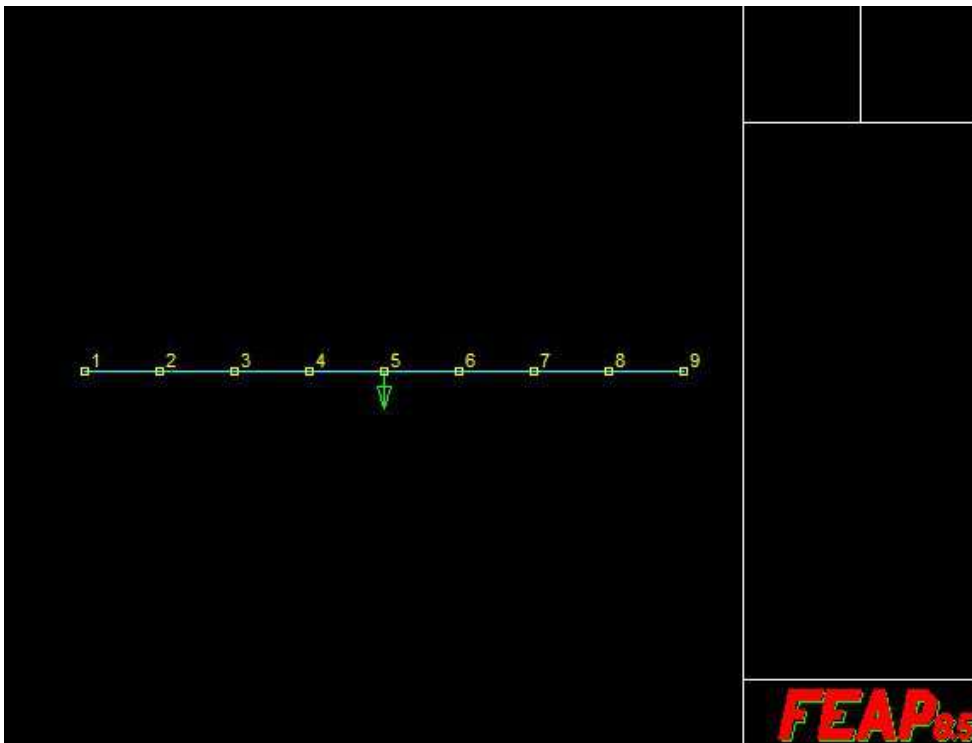


Figura 4.132: Modelado de la viga con FEAP

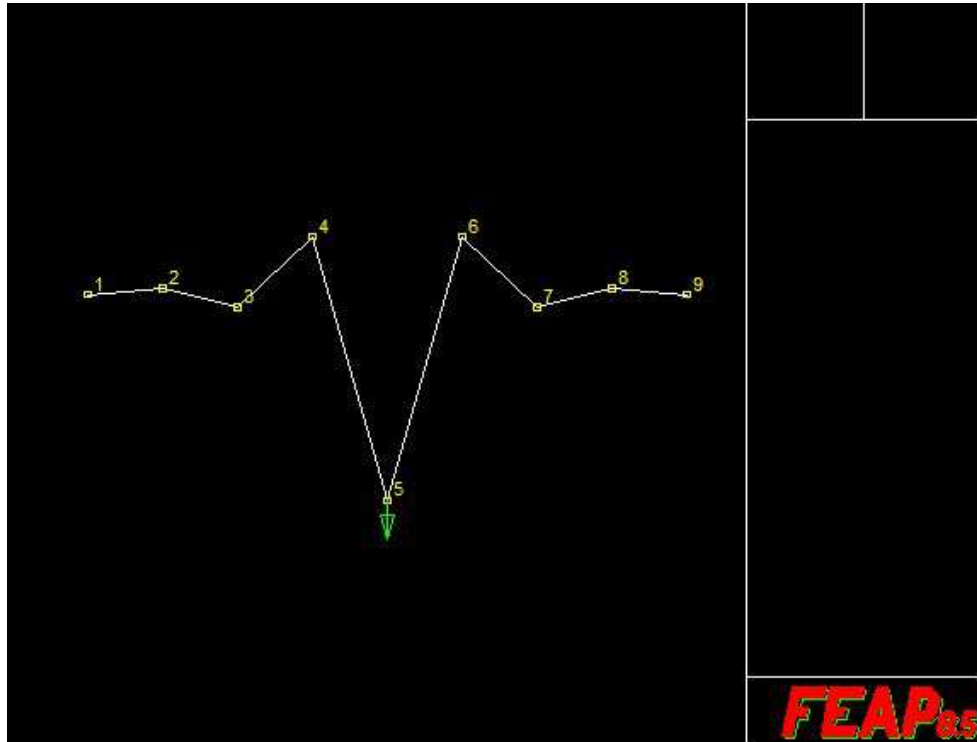


Figura 4.133: Deformación para la solución con FEAP

4.4.2. Segundo caso solucionado con FEAP

EL segundo problema, viga con una carga repartida fue solucionado con ayuda de FEAP.

Los datos utilizados para la solución son:

- $k_s = 10,000 \text{ KN/m}^3$

- $L = 10 \text{ m}$

- $q = 100 \text{ N/m}$

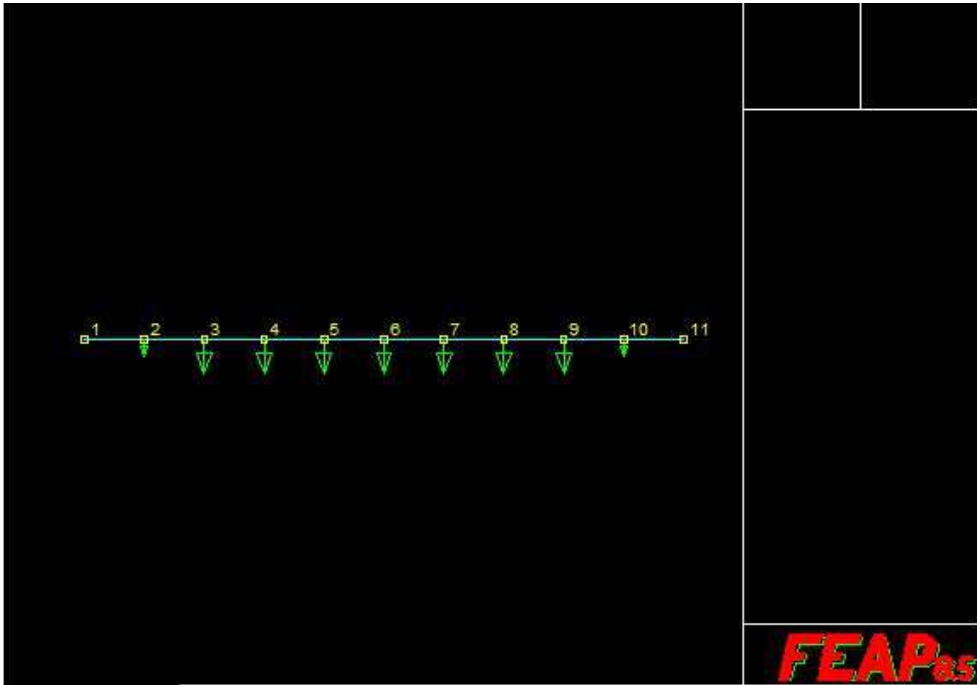


Figura 4.134: Modelado de la viga con FEAP

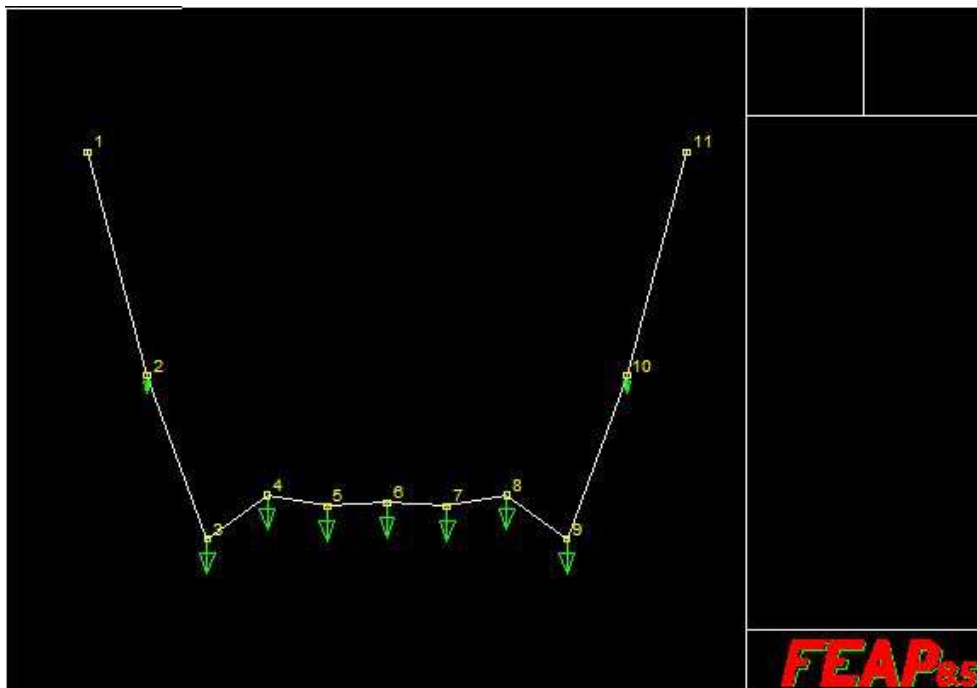


Figura 4.135: Deformación para la solución con FEAP

Capítulo 5

Conclusiones

El análisis de vigas sobre apoyos elásticos, también conocidas como *cimentaciones elásticas*, es un problema que por todas características y factores presentes resulta ser no tan simple, una vez que se obtiene la ecuación diferencial que gobierna a este problema es posible darle solución, sin embargo, en muchos casos la ecuación diferencial no puede ser solucionada de manera analítica, por lo que dicha solución requiere la aplicación de métodos numéricos, como por ejemplo el método de los elementos finitos, el cual es un método numérico que tiene diversas aplicaciones en la ingeniería estructural, pero también en diversos campos de la ingeniería y la ciencia.

Emil Winkler, Ingeniero Civil Alemán, quien fue el primero en darle solución al problema de las cimentaciones elásticas, donde presenta una teoría para vigas apoyadas sobre medios elásticos en la que considera que las reacciones del suelo sobre la viga son proporcionales a los desplazamientos del punto correspondiente a lo largo de la viga. Esta propuesta dio inicio a otras investigaciones, como en el caso del trabajo de H. Zimmermann sobre el análisis de vías de ferrocarriles [1888].

Con la propuesta del modelo Winkler en 1867, otros investigadores basados en su trabajo llegaron a realizar otros modelos y métodos de análisis, como es el caso de P. L. Pasternak en 1954, quien presentó un modelo de dos parámetros para darle solución al problema de las vigas sobre apoyos elásticos.

Aunque el modelo de Winkler considera únicamente la constante de proporcionalidad k de los resortes, lo cual lo convierte en un modelo de un parámetro y en este modelo los resortes actúan de manera independiente uno con otro, siendo así reacciones independientes, es un modelo perfectamente funcional, si se consideran mínimo de 5 a 7 resortes; en el caso de la solución aplicando el método de los elementos finitos, considero que es una herramienta de gran utilidad y con mayor precisión a pesar de ser soluciones discretas. Ambos métodos otorgan soluciones aproximadas y dependen de la cantidad de resortes y/o elementos que se consideren en el análisis.

En el caso del modelo de Pasternak, que es una mejora en el modelo de Winkler se considera un segundo parámetro, este parámetro es el módulo G_P , que representa la interacción de

los resortes y las superficie de contacto de la viga, es decir, los resortes ahora si mantienen una relación entre ellos, por que se puede considerar una mayor aproximación al problema real.

Los modelos con resortes otorgan soluciones aproximadas a la solución exacta, la aproximación depende de la cantidad de resortes que se consideren cuando se realiza la sustitución del suelo. Las soluciones que otorgan los modelos que utilizan resortes resultan de gran utilidad para darle solución a dichas vigas.

Las soluciones que se obtienen con ayuda del análisis estructural y aplicando los modelos antes mencionados son bastante útiles para entender el comportamiento que las vigas presentan e incluso con dicha solución se puede diseñar el armado del acero de refuerzo de estas si así se requiere, sin embargo, para que la solución pueda ser considerada "correcta" se debe incluir una cantidad considerable de resortes al momento de realizar la sustitución del suelo, de lo contrario la solución obtenida puede mantener un rango de error alto, por lo que dicha solución deja de ser útil.

La solución a los ejemplos mostrados en el capítulo 4, en los casos donde se idealiza la masa de suelo continua tiene una gran aproximación a la solución exacta y se demostró solucionando el mismo problema con un resorte más que el anterior, con una cantidad que se puede considerar alta de resortes, la solución tiende a ser mucho más detallada, pero darle solución llegó a ser más complejo, ya que cada resorte que se incluía en el problema es un apoyo más en el análisis, por lo que la viga se convertía en hiperestática, el grado de hiperestaticidad incrementaba de acuerdo a la cantidad de apoyos, que a su vez estas son reacciones, mientras mayor sea el número de resortes mayor serán las reacciones y más reacciones significa mejor detalle en la curva de deformación, pero por otro lado al ser de un alto grado de hiperestaticidad las ecuaciones fundamentales de la estática dejan de ser suficientes y se debe recurrir a otras herramientas.

En el caso del estudio de vigas prismáticas existen dos teorías que se utilizan para explicar la cinemática de la deformación de estas, ambas teorías son de gran utilidad para dicha finalidad, sin embargo, de acuerdo a la configuración de la viga, esta puede ser aplicable a una teoría u otra, esto se define por la relación largo-peralte de las vigas. En el caso de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, la relación es mayor o igual a 10 ($\frac{L}{h} \geq 10$), mientras que para la teoría de vigas de Timoshenko la relación largo-peralte es menor a 10 ($\frac{L}{h} < 10$).

La diferencia entre las teorías de vigas mencionadas es la consideración de la deformación angular o por cortante en la teoría de vigas de Timoshenko, esto no quiere decir que en la teoría de Euler-Bernoulli no exista la deformación angular, en realidad esta deformación llega a ser tan mínima que se considera despreciable. Ambas teorías explican el comportamiento de las vigas, pero deben ser aplicadas en sus respectivos casos.

La presente tesis contribuye principalmente en los ejemplos de solución y en las gráficas, ya que las soluciones que existen actualmente se direccionan únicamente a obtener las ecuaciones de las funciones, además de no existir una comparación de soluciones aproximadas con la solución exacta; por lo que las gráficas presentadas y la aplicación del método utilizado en esta tesis será de gran apoyo en futuras investigaciones, ya que incluso los

resortes se han considerado en cimentaciones profundas.

Para concluir, la solución obtenida con los modelos que utilizan resortes son de gran utilidad para aproximar la solución exacta, recomendando considerar una cantidad mínima de 5 a 7 resortes, con la intención de estimar la deformación; la cantidad final utilizada en el análisis será únicamente decisión y criterio del analista, considerando los límites que la tecnología otorga y la situación. La solución se puede considerar una solución discreta ya que los puntos que representan los resortes definen con mayor amplitud la curva de deformación.

Anexo A

Solución numérica de vigas sobre apoyos elásticos

A continuación se muestran la solución a detalle de los ejemplos mostrados en el capítulo 4, algunos ejemplos han sido solucionados con apoyo del Software *Wolfram Mathematica versión 12*. El Software se utiliza en distintas áreas de la ciencia e ingeniería, originalmente este software fue creado por el científico Stephen Wolfram quien se encuentra a cargo de un grupo de programadores y matemáticos que lo desarrollan en Wolfram Research.

Otros ejemplos se han solucionado con ayuda del Software *Finite Element Analysis Program ver. 8.5* (FEAP 8.5), programa desarrollado en la Universidad de Berkeley, California.

A.1. Solución numérica de vigas con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli

Se muestra la solución mediante el uso de Mathematica ver. 12, los ejemplos mostrados se encuentran resueltos unicamente para la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

A.1.1. Ejemplo 1: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro, aplicando la teoría de Euler-Bernoulli

Este primer ejemplo se solucionó en diversas ocasiones cambiando las condiciones de apoyo, éste ejemplo muestra las soluciones del problema de 3 a 10 resortes de apoyo. Los resortes de fueron agregados de uno en uno, demostrando que la solución con mayor cantidad de resortes tiene mayor aproximación.

(*VIGA CON TRES RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\text{In}[\#] := \text{D} \left[2 * \frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - R2}{2} \right) * x \right)^2 dx, R2 \right]$$

$$\text{Out}[\#] := - \frac{L^3 (P - R2)}{48 EI}$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE OBTIENE LA REACCIÓN R2*)

$$\text{Solve} \left[\left\{ - \left(\frac{L^3 (P - R2)}{48 EI} \right) == - (R2 / k) \right\}, \{R2\} \right]$$

$$\text{Out}[\#] := \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{k L^3 P}{48 EI + k L^3} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[\#] := R2 = \frac{k L^3 P}{48 EI + k L^3}$$

$$\text{Out}[\#] := \frac{k L^3 P}{48 EI + k L^3}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R3=R1*)

(*R1+R2-P+R1=0*)

$$\text{In}[\#] := \text{Solve} \left[\{R1 + R2 + -P + R1 == 0\}, \{R1\} \right]$$

$$\text{Out}[\#] := \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{24 EI P}{48 EI + k L^3} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[\#] := R1 = \frac{24 EI P}{48 EI + k L^3}$$

$$\text{Out}[\#] := \frac{24 EI P}{48 EI + k L^3}$$

$$\text{In}[\#] := R3 = R1$$

$$\text{Out}[\#] := \frac{24 EI P}{48 EI + k L^3}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 20 (*m*)
P = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

Out[ ]:= 0.2

Out[ ]:= 0.3

Out[ ]:= 10000000

Out[ ]:= 2.17079 × 1010

Out[ ]:= 0.00045

Out[ ]:= 2. × 106

Out[ ]:= 20

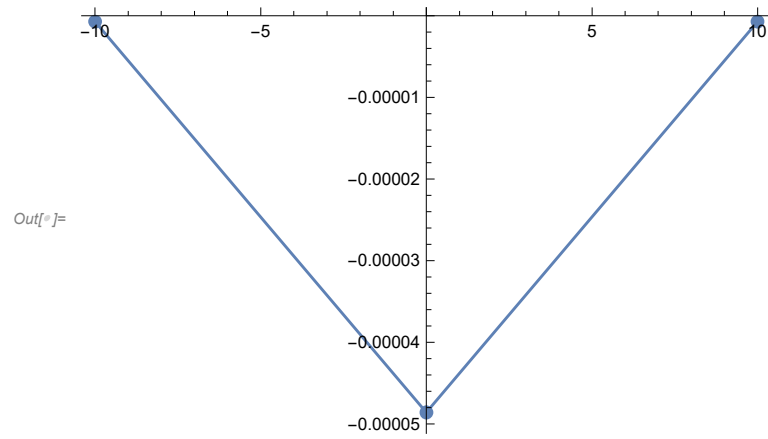
Out[ ]:= 100

Out[ ]:= 9.76858 × 106

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

In[ ]:= g1 = ListLinePlot[{{-L / 2, -R1 / k}, {0, -R2 / k}, {L / 2, -R3 / k}},
      |gráfico de línea de una lista
      AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
      |origen de ejes |rango de rep... |todo
g2 = ListPlot[{{-L / 2, -R1 / k}, {0, -R2 / k}, {L / 2, -R3 / k}},
      |representación de lista
      PlotStyle → PointSize[0.02],
      |estilo de repr... |tamaño de punto
      AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
      |origen de ejes |rango de rep... |todo
Show[g1, g2]
      |muestra

```



In[⁶]:= **-R1 / k**
-R2 / k
-R3 / k

Out[⁶]= -7.11784×10^{-7}

Out[⁶]= -0.0000485764

Out[⁶]= -7.11784×10^{-7}

(*VIGA CON 4 RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D_{\text{derivada}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{P - 2 R2}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx \right), R2 \right]$$

$$\text{Out[*]} = 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2)}{162 EI} + \frac{- \frac{5 L^3 P}{216} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI} \right)$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE OBTIENE LA REACCIÓN R2*)

$$\text{In[*]} := \text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2)}{162 EI} + \frac{- \frac{5 L^3 P}{216} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI} \right) = - \frac{R2}{k} \right\}, \{R2\} \right]$$

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{23 k L^3 P}{8 (81 EI + 5 k L^3)} \right\} \right\}$$

(*POR SIMETRÍA R4=R1, R3=R2*)

$$\text{In[*]} := R2 = \frac{23 k L^3 P}{8 (81 EI + 5 k L^3)}$$

$$\text{Out[*]} = \frac{23 k L^3 P}{8 (81 EI + 5 k L^3)}$$

$$\text{In[*]} := R3 = R2$$

$$\text{Out[*]} = \frac{23 k L^3 P}{8 (81 EI + 5 k L^3)}$$

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R4=R1, R3=R2*)

$$(*2R1+2R2-P=0*)$$

In[]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + -P == 0}, {R1}]

|resuelve

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{3 (108 EI - k L^3) P}{8 (81 EI + 5 k L^3)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{3 (108 EI - k L^3) P}{8 (81 EI + 5 k L^3)}$$

$$R4 = R1$$

$$\text{Out[]:= } \frac{3 (108 EI - k L^3) P}{8 (81 EI + 5 k L^3)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{3 (108 EI - k L^3) P}{8 (81 EI + 5 k L^3)}$$

```

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 20 (*m*)
P = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

```

Out[*]= 0.2

Out[*]= 0.3

Out[*]= 10 000 000

Out[*]= 2.17079×10^{10}

Out[*]= 0.00045

Out[*]= $2. \times 10^6$

Out[*]= 20

Out[*]= 100

Out[*]= 9.76858×10^6

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
In[ ]:= g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/4, -R2/k}, {L/4, -R3/k}, {L/2, -R4/k}},
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

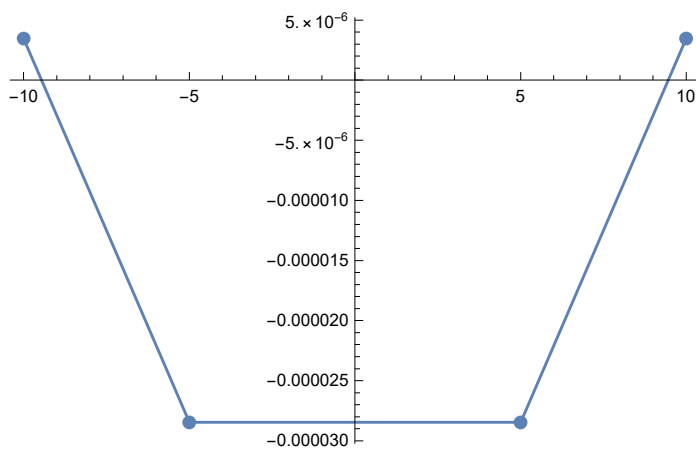
```
g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/4, -R2/k}, {L/4, -R3/k}, {L/2, -R4/k}},
```

```
  PlotStyle -> PointSize[0.02],
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

```
Show[g1, g2]
```

```
Out[ ]:=
```



(*VIGA CON 5 RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\text{In[*]} := \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - R3}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - R3}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx \right), R2 \right]$$

$$\text{Out[*]} = 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - R3)}{384 \text{EI}} + \frac{L^3 (-18 P + 24 R2 + 18 R3)}{1536 \text{EI}} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[*] :=

$$\text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - R3}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - R3}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx \right), R3 \right]$$

$$\text{Out[*]} = 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - R3)}{768 \text{EI}} + \frac{L^3 (-14 P + 18 R2 + 14 R3)}{1536 \text{EI}} \right)$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES R2 Y R3*)

$$\text{In[*]} := \text{Solve}\left[\left\{2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - R3)}{384 \text{EI}} + \frac{L^3 (-18 P + 24 R2 + 18 R3)}{1536 \text{EI}} \right) == -\frac{R2}{k}, \right.\right.$$

$$\left. 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - R3)}{768 \text{EI}} + \frac{L^3 (-14 P + 18 R2 + 14 R3)}{1536 \text{EI}} \right) == -\frac{R3}{k} \right\}, \{R2, R3\}$$

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{4224 \text{EI} k L^3 P}{147456 \text{EI}^2 + 9216 \text{EI} k L^3 + 7 k^2 L^6}, R3 \rightarrow \frac{(3072 \text{EI} k L^3 + 7 k^2 L^6) P}{147456 \text{EI}^2 + 9216 \text{EI} k L^3 + 7 k^2 L^6} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R2 = \frac{4224 EI k L^3 P}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$R3 = \frac{(3072 EI k L^3 + 7 k^2 L^6) P}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{4224 EI k L^3 P}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{(3072 EI k L^3 + 7 k^2 L^6) P}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R5 ES IGUAL A R1 Y R2 ES IGUAL A R4*)

(*2R1+2R2+R3-P=0*)

In[]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + -P + R3 == 0}, {R1}]

|resuelve

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1152 (64 EI^2 P - EI k L^3 P)}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{1152 (64 EI^2 P - EI k L^3 P)}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{1152 (64 EI^2 P - EI k L^3 P)}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

In[]:= R5 = R1

R4 = R2

$$\text{Out[]:= } \frac{1152 (64 EI^2 P - EI k L^3 P)}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{4224 EI k L^3 P}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

(*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.20 \text{ (m)}$$

$$H = 0.30 \text{ (m)}$$

$$k_s = 10000000 \text{ (N/m}^3\text{)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 21707945522.8 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (m}^4\text{)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (N/m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$L = 20 \text{ (m)}$$

$$P = 100 \text{ (N)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (N*m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$0.2^`$$

$$0.3^`$$

$$10000000$$

$$2.17079455228^` * ^10$$

$$0.00045^`$$

$$2.^` * ^6$$

$$20$$

$$100$$

$$9.768575485259999^` * ^6$$

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

$$g1 = \text{ListLinePlot} \left[\left\{ \left\{ -\frac{L}{2}, -R1/k \right\}, \left\{ -\frac{L}{4}, -R2/k \right\}, \{0, -R3/k\}, \left\{ \frac{L}{4}, -R4/k \right\}, \left\{ \frac{L}{2}, -R5/k \right\} \right\}, \right.$$

[gráfico de línea de una lista]

$$\text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$$

[origen de ejes]

[rango de rep... [todo]

$$g2 = \text{ListPlot} \left[\left\{ \left\{ -\frac{L}{2}, -R1/k \right\}, \left\{ -\frac{L}{4}, -R2/k \right\}, \{0, -R3/k\}, \left\{ \frac{L}{4}, -R4/k \right\}, \left\{ \frac{L}{2}, -R5/k \right\} \right\}, \right.$$

[representación de lista]

$$\text{PlotStyle} \rightarrow \text{PointSize}[0.02],$$

[estilo de repr... [tamaño de punto]

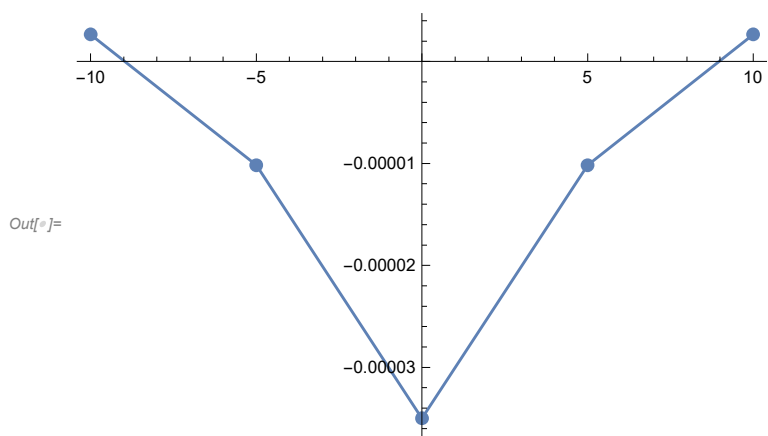
$$\text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$$

[origen de ejes]

[rango de rep... [todo]

$$\text{Show}[g1, g2]$$

[muestra]



In[f*]:=

- R1 / k**
- R2 / k**
- R3 / k**
- R4 / k**
- R5 / k**

Out[f*]= -2.66469×10^{-6}

Out[f*]= 0.0000101678

Out[f*]= 0.0000349937

Out[f*]= 0.0000101678

Out[f*]= -2.66469×10^{-6}

(*VIGA CON 6 RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & D_{\text{deriva}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\frac{(P - 2 R2 - 2 R3)}{2} * x \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\frac{(P - 2 R2 - 2 R3)}{2} * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{(P - 2 R2 - 2 R3)}{2} * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx \right), R2 \right] \\
 \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} + \frac{-\frac{3 L^3 P}{250} + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125}}{2 EI} + \frac{L^3 (-108 P + 96 (R2 + 2 R3))}{24000 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[*] :=

$$\begin{aligned}
 & D_{\text{deriva}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\frac{(P - 2 R2 - 2 R3)}{2} * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\frac{(P - 2 R2 - 2 R3)}{2} * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{(P - 2 R2 - 2 R3)}{2} * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx \right), R3 \right] \\
 \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} + \frac{-\frac{7 L^3 P}{375} + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375}}{2 EI} + \frac{L^3 (-216 P + 192 (R2 + 2 R3))}{24000 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES R2 Y R3*)

Solve [
|resuelve

$$\left\{ \begin{aligned} & 2 \left(- \left(\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} \right) + \left(- \left(\frac{3 L^3 P}{250} \right) + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125} \right) / \right. \\ & \left. (2 EI) + \left(L^3 (-108 P + 96 (R2 + 2 R3)) \right) / (24000 EI) \right) = - (R2 / k), \\ & 2 \left(- \left(\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} \right) + \left(- \left(\frac{7 L^3 P}{375} \right) + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375} \right) / \right. \\ & \left. (2 EI) + \left(L^3 (-216 P + 192 (R2 + 2 R3)) \right) / (24000 EI) \right) = - (R3 / k) \end{aligned} \right\}, \{R2, R3\}$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R2 \rightarrow - \frac{3 k (-8875 EI L^3 + 6 k L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}, R3 \rightarrow \frac{(44250 EI k L^3 + 91 k^2 L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R2 = - \frac{3 k (-8875 EI L^3 + 6 k L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$R3 = \frac{(44250 EI k L^3 + 91 k^2 L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{3 k (-8875 EI L^3 + 6 k L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{(44250 EI k L^3 + 91 k^2 L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R6=R1, R5=R2 Y R3=R4 *)

$$R5 = R2$$

$$R4 = R3$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{3 k (-8875 EI L^3 + 6 k L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{(44250 EI k L^3 + 91 k^2 L^6) P}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

In[]:=

Solve [{ 2 R1 + 2 R2 + 2 R3 - P == 0 }, { R1 }]| **resuelve**

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{3 (187500 EI^2 P - 4125 EI k L^3 P + k^2 L^6 P)}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{3 (187500 EI^2 P - 4125 EI k L^3 P + k^2 L^6 P)}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

R6 = R1

$$\text{Out[]:= } \frac{3 (187500 EI^2 P - 4125 EI k L^3 P + k^2 L^6 P)}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{3 (187500 EI^2 P - 4125 EI k L^3 P + k^2 L^6 P)}{8 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 20 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 20
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106

```

In[]:=

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

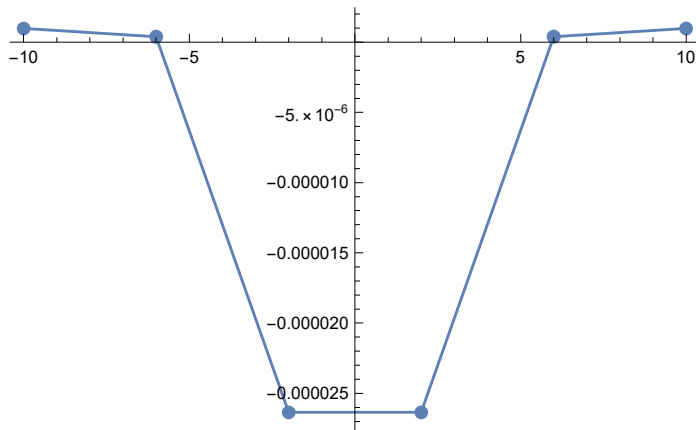
g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-3L/10, -R2/k}, {-L/10, -R3/k}, {L/10, -R4/k},
  gráfico de línea de una lista
  {3L/10, -R5/k}, {L/2, -R6/k}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  origen de ejes rango de rep... todo

g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-3L/10, -R2/k}, {-L/10, -R3/k}, {L/10, -R4/k}, {3L/10, -R5/k},
  representación de lista
  {L/2, -R6/k}}, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... tamaño de punto origen de ejes rango de rep... todo

Show[g1, g2]
muestra

```

Out[]:=



(*VIGA CON 7 RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[*]=

$$D \left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6} \right) \right)^2 dx \right], R2]$$

$$Out[*]= 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - R4)}{1296 EI} + \frac{L^3 (-18 P + 24 R2 + 18 (2 R3 + R4))}{5184 EI} + \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + R4)^2 + 3 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + R4) \right)^2}{648 EI (-P + R4)} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[*]:=

$$D\left[2 * \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x\right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6}\right)\right)^2 dx, R3\right]$$

$$Out[*]= 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - R4)}{1296 EI} + \frac{L^3 (-28 P + 36 R2 + 28 (2 R3 + R4))}{5184 EI} + \frac{-6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + R4)^2 + 6 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + R4)\right)^2}{648 EI (-P + R4)} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$D\left[2 * \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x\right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6}\right)\right)^2 dx, R4\right]$$

$$Out[*]= 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - R4)}{2592 EI} + \frac{L^3 (-14 P + 18 R2 + 14 (2 R3 + R4))}{5184 EI} + \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + R4)^2 + \frac{9}{2} L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + R4)\right)^2}{648 EI (-P + R4)} - \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + R4)^3 + \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + R4)\right)^3}{648 EI (-P + R4)^2} \right)$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES R2, R3 Y R4*)

In[]:=

$$\text{Solve}\left[\left\{2\left(-\frac{L^3(P-2R2-2R3-R4)}{1296EI} + \frac{L^3(-18P+24R2+18(2R3+R4))}{5184EI} + \frac{-3L^3(-P+R2+2R3+R4)^2 + 3L\left(L(R2+2R3) + \frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^2}{648EI(-P+R4)}\right)\right\} = -\frac{R2}{k},\right.$$

$$2\left(-\frac{L^3(P-2R2-2R3-R4)}{1296EI} + \frac{L^3(-28P+36R2+28(2R3+R4))}{5184EI} + \frac{-6L^3(-P+R2+2R3+R4)^2 + 6L\left(L(R2+2R3) + \frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^2}{648EI(-P+R4)}\right) = -\frac{R3}{k},$$

$$2\left(-\frac{L^3(P-2R2-2R3-R4)}{2592EI} + \frac{L^3(-14P+18R2+14(2R3+R4))}{5184EI} + \frac{-3L^3(-P+R2+2R3+R4)^2 + \frac{9}{2}L\left(L(R2+2R3) + \frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^2}{648EI(-P+R4)} - \frac{-L^3(-P+R2+2R3+R4)^3 + \left(L(R2+2R3) + \frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^3}{648EI(-P+R4)^2}\right) = -\frac{R4}{k}, \{R2, R3, R4\}$$

$$\text{Out[]} = \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{11664EI k L^3 (936EI - k L^3) P}{544195584EI^3 + 56687040EI^2 k L^3 + 80352EI k^2 L^6 + 13k^3 L^9}, \right. \right.$$

$$R3 \rightarrow \frac{29808EI k L^3 (648EI + k L^3) P}{544195584EI^3 + 56687040EI^2 k L^3 + 80352EI k^2 L^6 + 13k^3 L^9},$$

$$\left. \left. R4 \rightarrow \frac{(11337408EI^2 k L^3 + 40176EI k^2 L^6 + 13k^3 L^9) P}{544195584EI^3 + 56687040EI^2 k L^3 + 80352EI k^2 L^6 + 13k^3 L^9} \right\} \right\}$$

(*POR SIMETRÍA R6=R2 Y R5=R3 *)

$$\begin{aligned} \text{In[]:= } R2 &= \frac{11\,664\,EI\,k\,L^3\,(936\,EI - k\,L^3)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ R3 &= \frac{29\,808\,EI\,k\,L^3\,(648\,EI + k\,L^3)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ R4 &= \frac{(11\,337\,408\,EI^2\,k\,L^3 + 40\,176\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ R6 &= R2 \\ R5 &= R3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out[]:= } &\frac{11\,664\,EI\,k\,L^3\,(936\,EI - k\,L^3)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ \text{Out[]:= } &\frac{29\,808\,EI\,k\,L^3\,(648\,EI + k\,L^3)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ \text{Out[]:= } &\frac{(11\,337\,408\,EI^2\,k\,L^3 + 40\,176\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ \text{Out[]:= } &\frac{11\,664\,EI\,k\,L^3\,(936\,EI - k\,L^3)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ \text{Out[]:= } &\frac{29\,808\,EI\,k\,L^3\,(648\,EI + k\,L^3)\,P}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \end{aligned}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)
 (*POR SIMETRÍA R7=R1*)

$$\text{In[]:= Solve}[\{2\,R1 + 2\,R2 + 2\,R3 + -P + R4 == 0\}, \{R1\}]$$

[resuelve](#)

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1944\,(139\,968\,EI^3\,P - 3888\,EI^2\,k\,L^3\,P + EI\,k^2\,L^6\,P)}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{In[]:= } R1 &= \frac{1944\,(139\,968\,EI^3\,P - 3888\,EI^2\,k\,L^3\,P + EI\,k^2\,L^6\,P)}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9} \\ R7 &= R1 \end{aligned}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{1944\,(139\,968\,EI^3\,P - 3888\,EI^2\,k\,L^3\,P + EI\,k^2\,L^6\,P)}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{1944\,(139\,968\,EI^3\,P - 3888\,EI^2\,k\,L^3\,P + EI\,k^2\,L^6\,P)}{544\,195\,584\,EI^3 + 56\,687\,040\,EI^2\,k\,L^3 + 80\,352\,EI\,k^2\,L^6 + 13\,k^3\,L^9}$$


```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 20 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 20
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106

```

In[]:= (*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

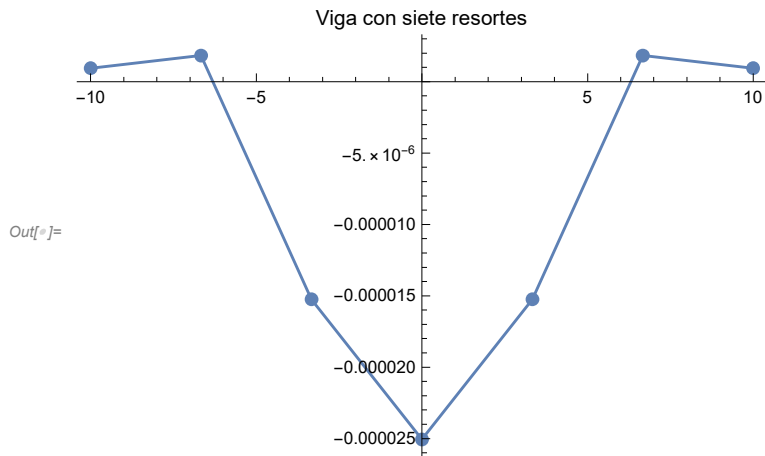
```

g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/3, -R2/k}, {-L/6, -R3/k}, {0, -R4/k},
  gráfico de línea de una lista
  {L/6, -R5/k}, {L/3, -R6/k}, {L/2, -R7/k}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  origen de ejes rango de rep... [todo]

g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/3, -R2/k}, {-L/6, -R3/k},
  representación de lista
  {0, -R4/k}, {L/6, -R5/k}, {L/3, -R6/k}, {L/2, -R7/k}},
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... tamaño de punto origen de ejes rango de rep... [todo]

Show[g1, g2, PlotRange -> All, PlotLabel -> "Viga con siete resortes"]
  muestra rango de rep... [todo] etiqueta de representación

```



(*VIGA CON 8 RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7} \right) \right)^2 dx \right), R2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[] = & 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4)}{2058 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-156 P + 96 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{65856 EI} + \frac{L^3 (-18 P + 4 (6 R2 + 9 (R3 + R4)))}{8232 EI} + \\
 & \left. \frac{L^3 (24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4))^2 - 6 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 R4))^2)}{8232 EI (P - 2 R4)} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7} \right) \right)^2 dx \right), R3 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[] = & 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4)}{2058 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-312 P + 192 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{65856 EI} + \frac{L^3 (-28 P + 4 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{8232 EI} + \\
 & \left. \frac{L^3 (48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4))^2 - 12 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 R4))^2)}{8232 EI (P - 2 R4)} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7}\right)\right)^2 dx, R4\right] \\
 \text{Out[*]} := & 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4)}{2058 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-468 P + 288 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{65856 \text{EI}} + \frac{L^3 (-28 P + 4 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{8232 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4))^2 - 18 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 R4))^2)}{8232 \text{EI} (P - 2 R4)} + \\
 & \left. \frac{L^3 (8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4))^3 + (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 R4))^3)}{4116 \text{EI} (P - 2 R4)^2} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES R2, R3 Y R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= Solve} \left[\left\{ 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4)}{2058 EI} + \right. \right. \right. \\
 & \frac{L^3 (-156 P + 96 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4))}{65856 EI} + \frac{L^3 (-18 P + 4 (6 R_2 + 9 (R_3 + R_4)))}{8232 EI} \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (24 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4))^2 - 6 (3 P - 2 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4))^2)}{8232 EI (P - 2 R_4)} \right) \right\} = -\frac{R_2}{k}, \right. \\
 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4)}{2058 EI} + \frac{L^3 (-312 P + 192 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4))}{65856 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-28 P + 4 (9 R_2 + 14 (R_3 + R_4)))}{8232 EI} + \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4))^2 - 12 (3 P - 2 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4))^2)}{8232 EI (P - 2 R_4)} \right) \right\} = -\frac{R_3}{k}, \right. \\
 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4)}{2058 EI} + \frac{L^3 (-468 P + 288 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4))}{65856 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-28 P + 4 (9 R_2 + 14 (R_3 + R_4)))}{8232 EI} + \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4))^2 - 18 (3 P - 2 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4))^2)}{8232 EI (P - 2 R_4)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (8 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4))^3 + (3 P - 2 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4))^3)}{4116 EI (P - 2 R_4)^2} \right) \right\} = -\frac{R_4}{k}, \{R_2, R_3, R_4\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R_2 \rightarrow \frac{9 k L^3 (16823807 EI^2 P - 26754 EI k L^3 P + 2 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}, \right. \right. \\
 R_3 \rightarrow -\frac{3 k L^3 (-92472114 EI^2 P - 74431 EI k L^3 P + 24 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}, \\
 \left. \left. R_4 \rightarrow -\frac{-352594053 EI^2 k L^3 P - 1238916 EI k^2 L^6 P - 341 k^3 L^9 P}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In[]:= } R2 &= \frac{9 k L^3 (16823807 EI^2 P - 26754 EI k L^3 P + 2 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \\ R3 &= - \frac{3 k L^3 (-92472114 EI^2 P - 74431 EI k L^3 P + 24 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \\ R4 &= - \frac{-352594053 EI^2 k L^3 P - 1238916 EI k^2 L^6 P - 341 k^3 L^9 P}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out[]:= } & \frac{9 k L^3 (16823807 EI^2 P - 26754 EI k L^3 P + 2 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \\ \text{Out[]:= } & - \frac{3 k L^3 (-92472114 EI^2 P - 74431 EI k L^3 P + 24 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \\ \text{Out[]:= } & - \frac{-352594053 EI^2 k L^3 P - 1238916 EI k^2 L^6 P - 341 k^3 L^9 P}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \end{aligned}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R8=R1, R7=R2, R6=R3 Y R5=R4 *)

In[]:=

$$R7 = R2$$

$$R6 = R3$$

$$R5 = R4$$

$$\begin{aligned} \text{Out[]:= } & \frac{9 k L^3 (16823807 EI^2 P - 26754 EI k L^3 P + 2 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \\ \text{Out[]:= } & - \frac{3 k L^3 (-92472114 EI^2 P - 74431 EI k L^3 P + 24 k^2 L^6 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \\ \text{Out[]:= } & - \frac{-352594053 EI^2 k L^3 P - 1238916 EI k^2 L^6 P - 341 k^3 L^9 P}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \end{aligned}$$

In[]:= **Solve**[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 - P == 0}, {R1}]

[resuelve](#)

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{3 (1452729852 EI^3 P - 48706686 EI^2 k L^3 P + 19551 EI k^2 L^6 P - k^3 L^9 P)}{8 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } \mathbf{R1} = \frac{3 \left(1452729852 EI^3 P - 48706686 EI^2 k L^3 P + 19551 EI k^2 L^6 P - k^3 L^9 P \right)}{8 \left(1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9 \right)}$$

$$\mathbf{R8 = R1}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{3 \left(1452729852 EI^3 P - 48706686 EI^2 k L^3 P + 19551 EI k^2 L^6 P - k^3 L^9 P \right)}{8 \left(1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9 \right)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{3 \left(1452729852 EI^3 P - 48706686 EI^2 k L^3 P + 19551 EI k^2 L^6 P - k^3 L^9 P \right)}{8 \left(1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9 \right)}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$\mathbf{B = 0.20 (*m*)}$$

$$\mathbf{H = 0.30 (*m*)}$$

$$\mathbf{ks = 10000000 (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$\mathbf{Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$\mathbf{Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$\mathbf{k = ks * B (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$\mathbf{L = 20 (*m*)}$$

$$\mathbf{P = 100 (*N*)}$$

[valor numérico]

$$\mathbf{EI = Ec * Iz (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$\text{Out[]:= } \mathbf{0.2}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{0.3}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{10000000}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{2.17079 \times 10^{10}}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{0.00045}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{2. \times 10^6}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{20}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{100}$$

$$\text{Out[]:= } \mathbf{9.76858 \times 10^6}$$

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

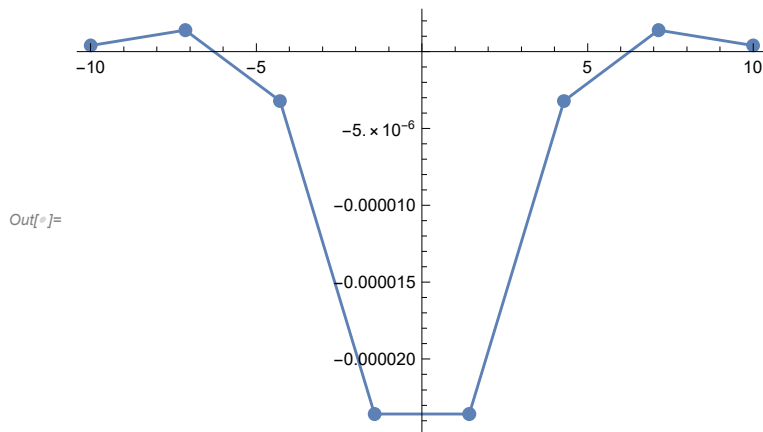
```

g1 = ListLinePlot[
  gráfico de línea de una lista
  {
    {-L/2, -R1/k}, {-5L/14, -R2/k}, {-3L/14, -R3/k}, {-L/14, -R4/k}, {L/14, -R5/k},
    {3L/14, -R6/k}, {5L/14, -R7/k}, {L/2, -R8/k}
  }, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

g2 = ListPlot[
  representación de lista
  {
    {-L/2, -R1/k}, {-5L/14, -R2/k}, {-3L/14, -R3/k}, {-L/14, -R4/k},
    {L/14, -R5/k}, {3L/14, -R6/k}, {5L/14, -R7/k}, {L/2, -R8/k}
  },
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```



(*VIGA CON 9 RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[*]=

$$D \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right.$$

$$\frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) \right)^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) \right)^2 dx +$$

$$\left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8} \right) \right)^2 dx \right], R2]$$

$$Out[*]= 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \right.$$

$$\frac{L^3 (-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} +$$

$$\frac{3 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{3}{4} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} +$$

$$\left. \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 3 L (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
 & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 dx\right], R3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
 & \frac{L^3 ((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^3)}{6144 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)^2} + \\
 & \frac{6 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{3}{2} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} + \\
 & \left. \frac{-6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 6 L (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
 & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 dx\right], R4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
 & \frac{L^3 ((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^3)}{6144 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)^2} + \\
 & \frac{9 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{9}{4} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} + \\
 & \frac{-6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 9 L (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} - \\
 & \left. \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^3 + (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^3}{768 EI (-P + 2 R4 + R5)^2} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R5*)

In[]:=

$$\begin{aligned}
 & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \quad \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \quad \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \quad \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 dx, R5\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]}= & 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{6144 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-3 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
 & \frac{L^3 ((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^3)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)^2} + \\
 & \frac{6 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{9}{8} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} - \\
 & \frac{L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^3 - \frac{1}{8} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^3}{1536 EI (-P + R5)^2} + \\
 & \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + \frac{9}{2} L (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} - \\
 & \left. \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^3 + (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^3}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)^2} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES R2, R3, R4 Y R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]}= & \text{Solve}\left[\left\{2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \right. \right. \right. \\
 & \frac{L^3 (-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} + \\
 & \left. \left. \frac{3 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{3}{4} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + \frac{9}{2} L (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^3 + (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^3}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)^2} \right) \right\}, R2, R3, R4, R5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 3 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right)^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} \right) = \\
& -\frac{R2}{k}, 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 (-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
& \frac{L^3 ((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^3)}{6144 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)^2} + \\
& \frac{6 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{3}{2} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} + \\
& \left. \frac{-6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 6 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right)^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} \right) = \\
& -\frac{R3}{k}, 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 (-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
& \frac{L^3 ((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^3)}{6144 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)^2} + \\
& \frac{9 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{9}{4} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} + \\
& \frac{-6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 9 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right)^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} - \\
& \left. \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^3 + \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right)^3}{768 EI (-P + 2 R4 + R5)^2} \right) = \\
& -\frac{R4}{k}, 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{6144 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 (-3 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
& \left. \frac{L^3 ((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^3)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)^2} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{6 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{9}{8} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} - \\
& \frac{L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^3 - \frac{1}{8} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^3}{1536 EI (-P + R5)^2} + \\
& \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + \frac{9}{2} L (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} - \\
& \left. \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^3 + (L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5))^3}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)^2} \right) = \\
& -\frac{R5}{k}, \{R2, R3, R4, R5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[4]= & \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \left(55296 EI k L^3 (6160384 EI^2 - 12288 EI k L^3 + k^2 L^6) P \right) / \left(22265110462464 EI^4 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right), \right. \right. \\
& R3 \rightarrow \left(73728 EI k L^3 (8650752 EI^2 + 1600 EI k L^3 - 3 k^2 L^6) P \right) / \left(22265110462464 EI^4 + \right. \\
& \left. \left. 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right), \right. \\
& R4 \rightarrow \left(3072 EI k L^3 (276037632 EI^2 + 835584 EI k L^3 + 173 k^2 L^6) P \right) / \left(22265110462464 EI^4 + \right. \\
& \left. \left. 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right), \right. \\
& R5 \rightarrow \left((463856467968 EI^3 k L^3 + 2203582464 EI^2 k^2 L^6 + 1069056 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) P \right) / \\
& \left. \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right\}
\end{aligned}$$

In[]:=

$$\begin{aligned}
 R2 &= (55\,296\,EI\,k\,L^3 (6\,160\,384\,EI^2 - 12\,288\,EI\,k\,L^3 + k^2\,L^6) P) / (22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + \\
 &\quad 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}) \\
 R3 &= (73\,728\,EI\,k\,L^3 (8\,650\,752\,EI^2 + 1600\,EI\,k\,L^3 - 3\,k^2\,L^6) P) / (22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + \\
 &\quad 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}) \\
 R4 &= (3072\,EI\,k\,L^3 (276\,037\,632\,EI^2 + 835\,584\,EI\,k\,L^3 + 173\,k^2\,L^6) P) / (22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + \\
 &\quad 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}) \\
 R5 &= ((463\,856\,467\,968\,EI^3\,k\,L^3 + 2\,203\,582\,464\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,069\,056\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}) P) / \\
 &\quad (22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \\
 &\quad 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12})
 \end{aligned}$$

$$\text{Out[]} = \frac{55\,296\,EI\,k\,L^3 (6\,160\,384\,EI^2 - 12\,288\,EI\,k\,L^3 + k^2\,L^6) P}{22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}}$$

$$\text{Out[]} = \frac{73\,728\,EI\,k\,L^3 (8\,650\,752\,EI^2 + 1600\,EI\,k\,L^3 - 3\,k^2\,L^6) P}{22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}}$$

$$\text{Out[]} = \frac{3072\,EI\,k\,L^3 (276\,037\,632\,EI^2 + 835\,584\,EI\,k\,L^3 + 173\,k^2\,L^6) P}{22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}}$$

$$\text{Out[]} = \frac{(463\,856\,467\,968\,EI^3\,k\,L^3 + 2\,203\,582\,464\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,069\,056\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}) P}{22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}}$$

(*POR SIMETRÍA R9=R1, R8=R2, R7=R3 Y R6=R4 *)

In[]:=

$$\begin{aligned}
 R8 &= R2 \\
 R7 &= R3 \\
 R6 &= R4
 \end{aligned}$$

$$\text{Out[]} = \frac{55\,296\,EI\,k\,L^3 (6\,160\,384\,EI^2 - 12\,288\,EI\,k\,L^3 + k^2\,L^6) P}{22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}}$$

$$\text{Out[]} = \frac{73\,728\,EI\,k\,L^3 (8\,650\,752\,EI^2 + 1600\,EI\,k\,L^3 - 3\,k^2\,L^6) P}{22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}}$$

$$\text{Out[]} = \frac{3072\,EI\,k\,L^3 (276\,037\,632\,EI^2 + 835\,584\,EI\,k\,L^3 + 173\,k^2\,L^6) P}{22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12}}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

In[]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5 - P == 0}, {R1}]

|resuelve

$$\text{Out[]} = \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(P - (147456 EI k L^3 (8650752 EI^2 + 1600 EI k L^3 - 3 k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - (110592 EI k L^3 (6160384 EI^2 - 12288 EI k L^3 + k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - (6144 EI k L^3 (276037632 EI^2 + 835584 EI k L^3 + 173 k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - ((463856467968 EI^3 k L^3 + 2203582464 EI^2 k^2 L^6 + 1069056 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})) \right) \right\} \right\}$$

$$\text{In[]} = R1 = \frac{1}{2} \left(P - (147456 EI k L^3 (8650752 EI^2 + 1600 EI k L^3 - 3 k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - (110592 EI k L^3 (6160384 EI^2 - 12288 EI k L^3 + k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - (6144 EI k L^3 (276037632 EI^2 + 835584 EI k L^3 + 173 k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - ((463856467968 EI^3 k L^3 + 2203582464 EI^2 k^2 L^6 + 1069056 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})) \right)$$

$$\text{Out[]} = \frac{1}{2} \left(P - (147456 EI k L^3 (8650752 EI^2 + 1600 EI k L^3 - 3 k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - (110592 EI k L^3 (6160384 EI^2 - 12288 EI k L^3 + k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - (6144 EI k L^3 (276037632 EI^2 + 835584 EI k L^3 + 173 k^2 L^6) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) - ((463856467968 EI^3 k L^3 + 2203582464 EI^2 k^2 L^6 + 1069056 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}) P) / (22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})) \right)$$

In[*]:= **R9 = R1**

$$\text{Out[*]} = \frac{1}{2} \left(P - \left(147456 EI k L^3 \left(8650752 EI^2 + 1600 EI k L^3 - 3 k^2 L^6 \right) P \right) / \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) - \left(110592 EI k L^3 \left(6160384 EI^2 - 12288 EI k L^3 + k^2 L^6 \right) P \right) / \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) - \left(6144 EI k L^3 \left(276037632 EI^2 + 835584 EI k L^3 + 173 k^2 L^6 \right) P \right) / \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) - \left(463856467968 EI^3 k L^3 + 2203582464 EI^2 k^2 L^6 + 1069056 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) P \right) / \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right)$$

In[*]:= **(*DATOS DEL PROBLEMA*)**

B = 0.20 (*m*)

H = 0.30 (*m*)

ks = 10000000 (*N/m^3*)

valor numérico

Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)

valor numérico

Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

k = ks * B (*N/m^2*)

valor numérico

L = 20 (*m*)

P = 100 (*N*)

valor numérico

EI = Ec * Iz (*N*m^2*)

valor numérico

Out[*]= 0.2

Out[*]= 0.3

Out[*]= 10000000

Out[*]= 2.17079×10^{10}

Out[*]= 0.00045

Out[*]= $2. \times 10^6$

Out[*]= 20

Out[*]= 100

Out[*]= 9.76858×10^6

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

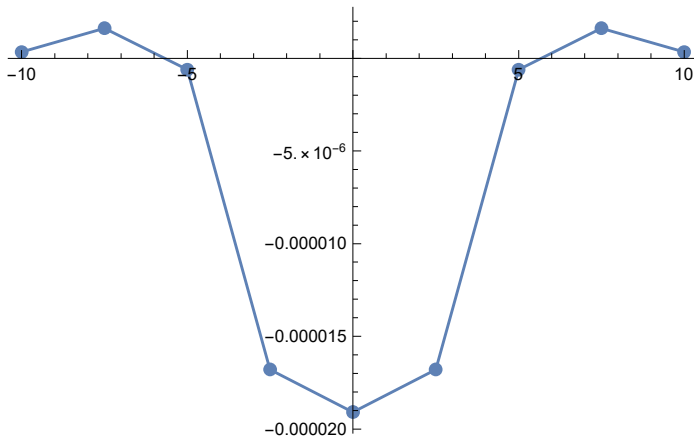
In[ ]:= g1 = ListLinePlot[
  gráfico de línea de una lista
  { { -L/2, -R1/k }, { -3L/8, -R2/k }, { -2L/8, -R3/k }, { -L/8, -R4/k }, { 0, -R5/k }, { L/8, -R6/k },
    { 2L/8, -R7/k }, { 3L/8, -R8/k }, { L/2, -R9/k } }, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [origen de ejes [rango de rep... [todo]

g2 = ListPlot[ { { -L/2, -R1/k }, { -3L/8, -R2/k }, { -2L/8, -R3/k }, { -L/8, -R4/k },
  representación de lista
  { 0, -R5/k }, { L/8, -R6/k }, { 2L/8, -R7/k }, { 3L/8, -R8/k }, { L/2, -R9/k } },
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [estilo de repr... [tamaño de punto [origen de ejes [rango de rep... [todo]

Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```

Out[]:=



(*VIGA CON 10 RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 D \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 EI} \right. \\
 \left. \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9} \right) \right)^2 \right. \\
 \left. dx \right], R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[*]= 2 \left(- \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-204 P + 96 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 EI} + \right. \\
 \frac{L^3 (-24 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))^2 + 6 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2}{17496 EI (P - 2 R5)} + \\
 \frac{L^3 (-24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
 \left. \frac{L^3 (24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 6 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2)}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \left. \int_{\frac{4L}{9}}^L \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 \right. \\
 & \left. dx\right], \text{R3}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} := & 2 \left(-\frac{L^3 (\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5})}{4374 \text{EI}} + \frac{L^3 (-408 \text{P} + 192 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 \text{R4} + 4 \text{R5}))}{139968 \text{EI}} + \right. \\
 & \left. \left(L^3 (-48 (-2 \text{P} + \text{R2} + 2 \text{R3} + 3 \text{R4} + 4 \text{R5})^2 + 12 (-3 \text{P} + 2 \text{R2} + 4 \text{R3} + 6 \text{R4} + 6 \text{R5})^2 \right) / \right. \\
 & \left. (17496 \text{EI} (\text{P} - 2 \text{R5})) + \left(L^3 (-48 (-\text{P} + \text{R2} + 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2 + 6 (-\text{P} + 2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2 \right) / \right. \\
 & \left. (17496 \text{EI} (\text{P} - 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))) + \right. \\
 & \left. \left(L^3 (-8 (-\text{P} + \text{R2} + 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^3 + (-\text{P} + 2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^3 \right) / \right. \\
 & \left. (8748 \text{EI} (\text{P} - 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2) + \right. \\
 & \left. \left(L^3 (48 (-\text{P} + \text{R2} + 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2 - 12 (3 \text{P} - 2 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 (\text{R4} + \text{R5})))^2 \right) / \right. \\
 & \left. (17496 \text{EI} (\text{P} - 2 (\text{R4} + \text{R5}))) \right) \left. \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \left. \int_{\frac{4L}{9}}^L \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 \right. \\
 & \left. dx\right], \text{R4}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} := & 2 \left(-\frac{\text{L}^3 (\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5})}{4374 \text{EI}} + \frac{\text{L}^3 (-612 \text{P} + 288 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 \text{R4} + 4 \text{R5}))}{139968 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{\text{L}^3 (-72 (-2 \text{P} + \text{R2} + 2 \text{R3} + 3 \text{R4} + 4 \text{R5})^2 + 18 (-3 \text{P} + 2 \text{R2} + 4 \text{R3} + 6 \text{R4} + 6 \text{R5})^2)}{17496 \text{EI} (\text{P} - 2 \text{R5})} + \\
 & \frac{\text{L}^3 (-48 (-\text{P} + \text{R2} + 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2 + 6 (-\text{P} + 2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2)}{17496 \text{EI} (\text{P} - 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))} + \\
 & \frac{\text{L}^3 (-8 (-\text{P} + \text{R2} + 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^3 + (-\text{P} + 2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^3)}{8748 \text{EI} (\text{P} - 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2} + \\
 & \frac{\text{L}^3 (48 (-\text{P} + \text{R2} + 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^2 - 18 (3 \text{P} - 2 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 (\text{R4} + \text{R5})))^2)}{17496 \text{EI} (\text{P} - 2 (\text{R4} + \text{R5}))} + \\
 & \left. \frac{\text{L}^3 (8 (-\text{P} + \text{R2} + 2 (\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}))^3 + (3 \text{P} - 2 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 (\text{R4} + \text{R5})))^3)}{8748 \text{EI} (\text{P} - 2 (\text{R4} + \text{R5}))^2} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= } & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \left. \int_{\frac{4L}{9}}^L \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9}\right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 \right. \\
 & \left. dx\right], R5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]:= } & 2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 \text{EI}} + \frac{L^3 (-816 P + 384 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-96 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^2 + 18 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2)}{17496 \text{EI} (P - 2 R5)} + \\
 & \frac{L^3 (-8 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^3 + (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^3)}{8748 \text{EI} (P - 2 R5)^2} + \\
 & \frac{L^3 (-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2)}{17496 \text{EI} (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
 & \frac{L^3 (-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3)}{8748 \text{EI} (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2} + \\
 & \frac{L^3 (48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 18 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2)}{17496 \text{EI} (P - 2 (R4 + R5))} + \\
 & \left. \frac{L^3 (8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^3)}{8748 \text{EI} (P - 2 (R4 + R5))^2} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES R2, R3, R4 Y R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= } & \text{Solve}\left[\left\{2 \left(-\frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 \text{EI}} + \frac{L^3 (-204 P + 96 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 \text{EI}} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-24 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^2 + 6 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2)}{17496 \text{EI} (P - 2 R5)} + \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (-8 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^3 + (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^3)}{8748 \text{EI} (P - 2 R5)^2} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2)}{17496 \text{EI} (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3)}{8748 \text{EI} (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 18 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2)}{17496 \text{EI} (P - 2 (R4 + R5))} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^3)}{8748 \text{EI} (P - 2 (R4 + R5))^2} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \right\} \right], R2, R3, R4, R5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left(-24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
& \left. \frac{L^3 \left(24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^2 - 6 (3P - 2 (R2 + 2R3 + 3 (R4 + R5)))^2}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} \right) = -\frac{R2}{k}, \\
2 \left(-\frac{L^3 (P - 2R2 - 2R3 - 2R4 - 2R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-408P + 192 (R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5))}{139968 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 \left(-48 (-2P + R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5) \right)^2 + 12 (-3P + 2R2 + 4R3 + 6R4 + 6R5)^2}{17496 EI (P - 2R5)} + \\
& \frac{L^3 \left(-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
& \left. \frac{L^3 \left(-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3}{8748 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2} + \right. \\
& \left. \frac{L^3 \left(48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^2 - 12 (3P - 2 (R2 + 2R3 + 3 (R4 + R5)))^2}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} \right) = -\frac{R3}{k}, \\
2 \left(-\frac{L^3 (P - 2R2 - 2R3 - 2R4 - 2R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-612P + 288 (R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5))}{139968 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 \left(-72 (-2P + R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5) \right)^2 + 18 (-3P + 2R2 + 4R3 + 6R4 + 6R5)^2}{17496 EI (P - 2R5)} + \\
& \frac{L^3 \left(-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
& \frac{L^3 \left(-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3}{8748 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2} + \\
& \frac{L^3 \left(48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^2 - 18 (3P - 2 (R2 + 2R3 + 3 (R4 + R5)))^2}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} + \\
& \left. \frac{L^3 \left(8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^3 + (3P - 2 (R2 + 2R3 + 3 (R4 + R5)))^3}{8748 EI (P - 2 (R4 + R5))^2} \right) = -\frac{R4}{k}, \\
2 \left(-\frac{L^3 (P - 2R2 - 2R3 - 2R4 - 2R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-816P + 384 (R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5))}{139968 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 \left(-96 (-2P + R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5) \right)^2 + 18 (-3P + 2R2 + 4R3 + 6R4 + 6R5)^2}{17496 EI (P - 2R5)} + \\
& \frac{L^3 \left(-8 (-2P + R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5) \right)^3 + (-3P + 2R2 + 4R3 + 6R4 + 6R5)^3}{8748 EI (P - 2R5)^2} + \\
& \left. \frac{L^3 \left(-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5)) \right)^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left(-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3 \right)}{8748 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2} + \\
& \frac{L^3 \left(48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 18 (3P - 2 (R2 + 2R3 + 3 (R4 + R5)))^2 \right)}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} + \\
& \left. \frac{L^3 \left(8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (3P - 2 (R2 + 2R3 + 3 (R4 + R5)))^3 \right)}{8748 EI (P - 2 (R4 + R5))^2} \right) = \\
& - \frac{R5}{k}, \{R2, R3, R4, R5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[] = & \left\{ \left\{ R2 \rightarrow - \left(\left(9 k L^3 \left(-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P \right) \right) / \right. \right. \\
& \left. \left(8 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) \right), \\
R3 \rightarrow & \left(9 k L^3 \left(527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P \right) \right) / \\
& \left(8 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right), \\
R4 \rightarrow & \frac{27 \left(110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P \right)}{8 \left(10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9 \right)}, \\
R5 \rightarrow & - \left(\left(-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P \right) / \right. \\
& \left. \left(8 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) \right) \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In[*]}:= \text{R2} &= - \left((9 k L^3 (-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P)) / \right. \\
&\quad \left. (8 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\
&\quad \quad \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \right) \\
\text{R3} &= (9 k L^3 (527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P)) / \\
&\quad (8 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \\
&\quad \quad 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \\
\text{R4} &= \frac{27 (110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P)}{8 (10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9)} \\
\text{R5} &= - \left((-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P) / \right. \\
&\quad \left. (8 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\
&\quad \quad \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \right) \\
\text{Out[*]}:= &- \left((9 k L^3 (-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P)) / \right. \\
&\quad \left. (8 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\
&\quad \quad \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \right) \\
\text{Out[*]}:= &(9 k L^3 (527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P)) / \\
&\quad (8 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \\
&\quad \quad 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \\
\text{Out[*]}:= &\frac{27 (110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P)}{8 (10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9)} \\
\text{Out[*]}:= &- \left((-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P) / \right. \\
&\quad \left. (8 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\
&\quad \quad \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \right)
\end{aligned}$$

(*POR SIMETRÍA R10=R1, R9=R2, R8=R3, R7=R4 Y R5=R6 *)

In[]:=

R9 = R2
R8 = R3
R7 = R4
R6 = R5

$$\text{Out[]} = - \left(9 k L^3 \left(-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P \right) \right) / \left(8 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[]} = \left(9 k L^3 \left(527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P \right) \right) / \left(8 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[]} = \frac{27 \left(110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P \right)}{8 \left(10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9 \right)}$$

$$\text{Out[]} = - \left(-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P \right) / \left(8 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

In[]:= **Solve**[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 + 2 R5 - P == 0}, {R1}]

[|resuelve](#)

$$\text{Out[]} = \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(P - \frac{27 \left(110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P \right)}{4 \left(10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9 \right)} + \left(9 k L^3 \left(-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P \right) \right) / \left(4 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) - \left(9 k L^3 \left(527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P \right) \right) / \left(4 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) + \left(-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P \right) / \left(4 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) \right) \right\} \right\}$$

$$In[]:= R1 = \frac{1}{2} \left(P - \frac{27 (110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P)}{4 (10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9)} + \right. \\ \left. (9 k L^3 (-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P)) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) - \right. \\ \left. (9 k L^3 (527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P)) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) + \right. \\ \left. (-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \right)$$

R10 =

R1

$$Out[]:= \frac{1}{2} \left(P - \frac{27 (110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P)}{4 (10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9)} + \right. \\ \left. (9 k L^3 (-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P)) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) - \right. \\ \left. (9 k L^3 (527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P)) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) + \right. \\ \left. (-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \right)$$

$$\text{Out}[*]= \frac{1}{2} \left(P - \frac{27 (110008287 EI^2 k L^3 P + 4455 EI k^2 L^6 P - 2 k^3 L^9 P)}{4 (10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9)} + \right. \\ \left. (9 k L^3 (-277780490613 EI^3 P + 679181598 EI^2 k L^3 P - 91854 EI k^2 L^6 P + 2 k^3 L^9 P)) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) - \right. \\ \left. (9 k L^3 (527666706018 EI^3 P - 241805655 EI^2 k L^3 P - 209952 EI k^2 L^6 P + 8 k^3 L^9 P)) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) + \right. \\ \left. (-7489612893348 EI^3 k L^3 P - 36264470958 EI^2 k^2 L^6 P - 16441866 EI k^3 L^9 P - 1273 k^4 L^{12} P) / \right. \\ \left. (4 (22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \\ \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12})) \right)$$

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.20 (*m*)$$

$$H = 0.30 (*m*)$$

$$k_s = 10000000 (*N/m^3*)$$

└valor numérico

$$E_c = 21707945522.8 (*N/m^2*)$$

└valor numérico

$$I_z = (B * H^3) / 12 (*m^4*)$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B (*N/m^2*)$$

└valor numérico

$$L = 20 (*m*)$$

$$P = 100 (*N*)$$

└valor numérico

$$EI = E_c * I_z (*N*m^2*)$$

└valor numérico

$$\text{Out}[*]= 0.2$$

$$\text{Out}[*]= 0.3$$

$$\text{Out}[*]= 10000000$$

$$\text{Out}[*]= 2.17079 \times 10^{10}$$

$$\text{Out}[*]= 0.00045$$

$$\text{Out}[*]= 2. \times 10^6$$

$$\text{Out}[*]= 20$$

$$\text{Out}[*]= 100$$

$$\text{Out}[*]= 9.76858 \times 10^6$$

In[]:= (*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

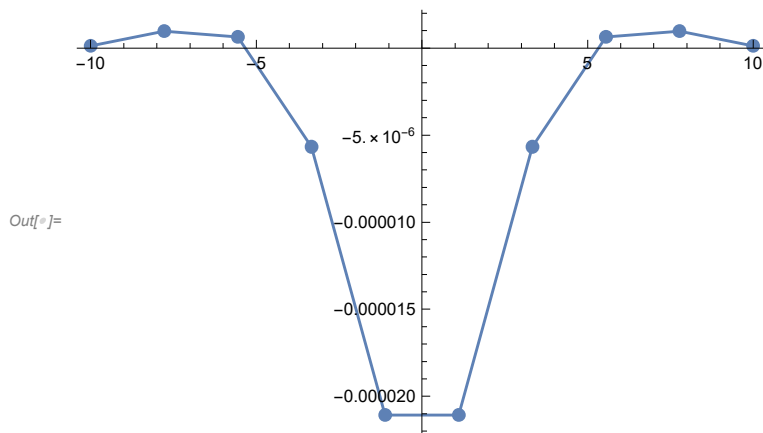
```

g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-7L/18, -R2/k}, {-5L/18, -R3/k},
  gráfico de línea de una lista
  {-L/6, -R4/k}, {-L/18, -R5/k}, {L/18, -R6/k}, {L/6, -R7/k}, {5L/18, -R8/k},
  {-L/18, -R5/k}, {L/18, -R6/k}, {L/6, -R7/k}, {5L/18, -R8/k}, {7L/18, -R9/k}, {L/2, -R10/k}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  origen de ejes rango de rep... todo

g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-7L/18, -R2/k}, {-5L/18, -R3/k}, {-L/6, -R4/k},
  representación de lista
  {-L/18, -R5/k}, {L/18, -R6/k}, {L/6, -R7/k}, {5L/18, -R8/k}, {7L/18, -R9/k}, {L/2, -R10/k}},
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... tamaño de punto origen de ejes rango de rep... todo

Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```



A.1.2. Ejemplo 2: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida

, aplicando la teoría de Euler-Bernoulli

In[]:=

(*VIGA CON TRES RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - R2}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx\right), R2\right]$$

$$\text{Out[]} = \frac{-\frac{5 L^4 q}{384} + \frac{L^3 R2}{48}}{EI}$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRA LA REACCIÓN R2*)

$$\text{In[]} = \text{Solve}\left[\left\{\frac{-\frac{5 L^4 q}{384} + \frac{L^3 R2}{48}}{EI} == -\frac{R2}{k}\right\}, \{R2\}\right]$$

$$\text{Out[]} = \left\{\left\{R2 \rightarrow \frac{5 k L^4 q}{8 (48 EI + k L^3)}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]} = R2 = \frac{5 k L^4 q}{8 (48 EI + k L^3)}$$

$$\text{Out[]} = \frac{5 k L^4 q}{8 (48 EI + k L^3)}$$

In[]:= (*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R3=R1*)

(*R1+R2-P+R1=0*)

$$\text{Solve}\left[\{2 * R1 + R2 - q * L == 0\}, \{R1\}\right]$$

[resuelve

$$\text{Out[]} = \left\{\left\{R1 \rightarrow \frac{3 (128 EI L q + k L^4 q)}{16 (48 EI + k L^3)}\right\}\right\}$$

In[]:=

$$R1 = \frac{3 (128 EI L q + k L^4 q)}{16 (48 EI + k L^3)}$$

$$\text{Out[]} = \frac{3 (128 EI L q + k L^4 q)}{16 (48 EI + k L^3)}$$

In[]:= **R3 = R1**

$$\text{Out[]:= } \frac{3 (128 EI L q + k L^4 q)}{16 (48 EI + k L^3)}$$


```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 30 (*m*)
  q = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 12 000 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 19 928 032 768 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 30
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 12 000 000 000
Out[ ]:= 19 928 032 768
Out[ ]:= 0.00045

```

In[*]:= (*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA CON 3 RESORTES*)

`g3 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, -R3 / k}}, AxesOrigin -> {0, 0},`
[gráfico de línea de una lista] [origen de ejes]

`PlotRange -> All, PlotStyle -> Green, PlotLegends -> {"Viga con tres resortes"}]`
[rango de rep... [todo] [estilo de repr... [verde] [leyendas de representación]

`g4 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, -R3 / k}},`
[representación de lista]

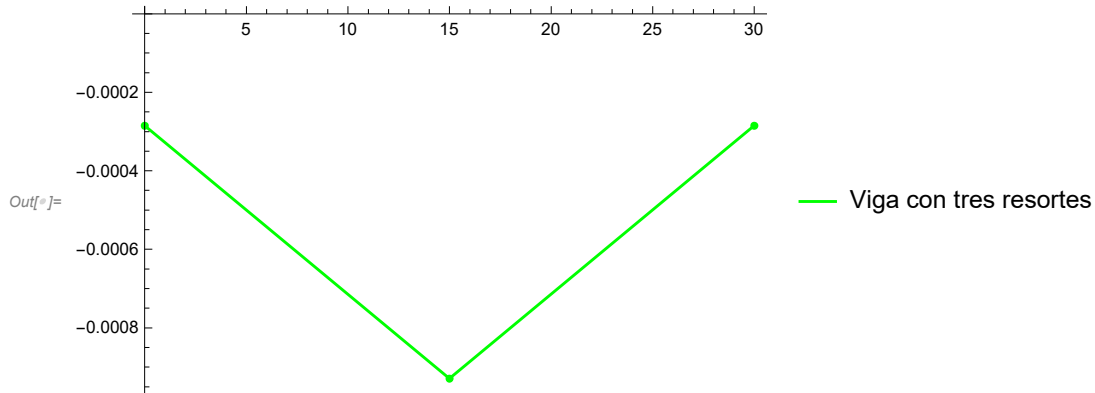
`PlotStyle -> Green, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]`
[estilo de repr... [verde] [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

Show[

[muestra]

`g3,`

`g4]`



In[]:= **(*VIGA CON CUATRO RESORTES*)**
(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)
(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right)\right)^2 dx\right), R2\right]$$

$$Out[]:= 2 \left(\frac{-\frac{L^4 q}{108} + \frac{2 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{-\frac{13 L^4 q}{972} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI} \right)$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)
(*SE ENCUENTRA LA REACCIÓN R2*)

$$In[]:= \text{Solve}\left[\left\{2 \left(\frac{-\frac{L^4 q}{108} + \frac{2 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{-\frac{13 L^4 q}{972} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI}\right) == -\frac{R2}{k}\right\}, \{R2\}\right]$$

$$Out[]:= \left\{\left\{R2 \rightarrow \frac{11 k L^4 q}{6 (81 EI + 5 k L^3)}\right\}\right\}$$

$$In[]:= R2 = \frac{11 k L^4 q}{6 (81 EI + 5 k L^3)}$$

$$Out[]:= \frac{11 k L^4 q}{6 (81 EI + 5 k L^3)}$$

(*POR SIMETRÍA LAS REACCIONES SON R1=R4 Y R2=R3 *)

$$In[]:= R3 = R2$$

$$Out[]:= \frac{11 k L^4 q}{6 (81 EI + 5 k L^3)}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)
(*2R1+2R2-P=0*)

$$In[]:= \text{Solve}\left[\{2 R1 + 2 R2 + -q * L == 0\}, \{R1\}\right]$$

$$Out[]:= \left\{\left\{R1 \rightarrow \frac{243 EI L q + 4 k L^4 q}{6 (81 EI + 5 k L^3)}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]:= } \mathbf{R1} = \frac{243 \text{ EI L q} + 4 \text{ k L}^4 \text{ q}}{6 (81 \text{ EI} + 5 \text{ k L}^3)}$$

$$\mathbf{R4} = \mathbf{R1}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{243 \text{ EI L q} + 4 \text{ k L}^4 \text{ q}}{6 (81 \text{ EI} + 5 \text{ k L}^3)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{243 \text{ EI L q} + 4 \text{ k L}^4 \text{ q}}{6 (81 \text{ EI} + 5 \text{ k L}^3)}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 30 (*m*)
q = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 12 000 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 19 928 032 768 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 30
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 12 000 000 000
Out[ ]:= 19 928 032 768
Out[ ]:= 0.00045

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA CON 4 RESORTES*)

```

```
In[ ]:= g5 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, -R4 / k}},
  gráfico de línea de una lista
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red,
  origen de ejes rango de rep... [todo estilo de repr... [rojo
```

```
  PlotLegends -> {"Viga con cuatro resortes"}]
  leyendas de representación
```

```
g6 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, -R4 / k}},
  representación de lista
```

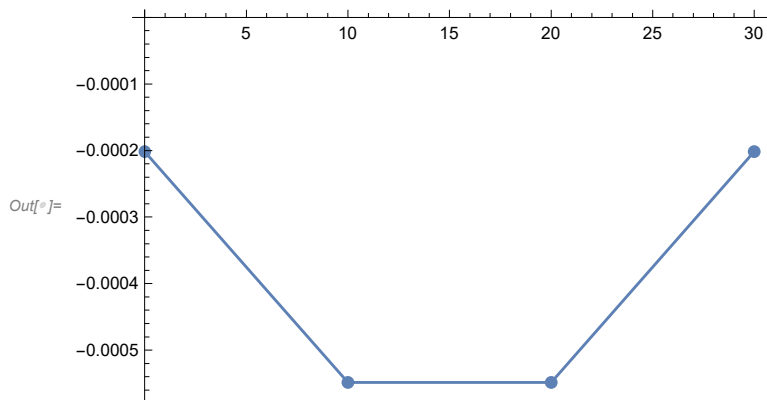
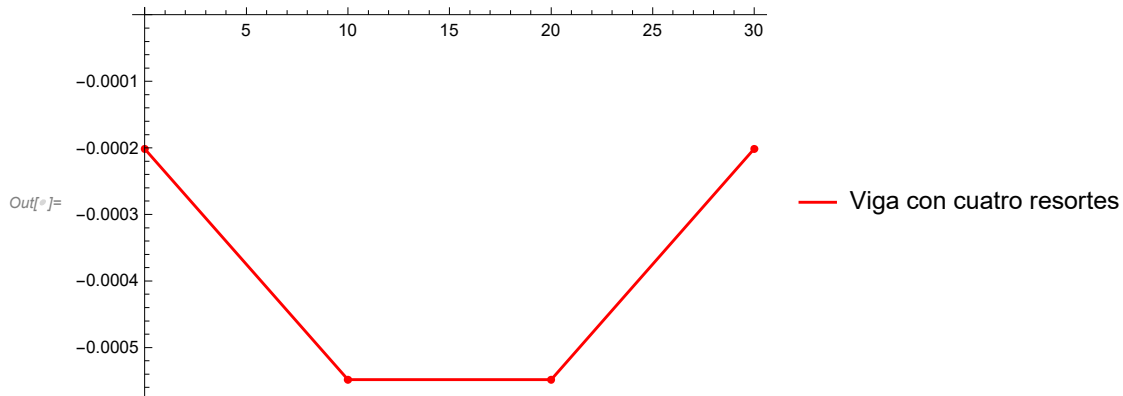
```
  PlotStyle -> Red, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... [rojo origen de ejes rango de rep... [todo
```

```
Show[
```

```
 muestra
```

```
 g5,
```

```
 g6]
```



(*VIGA CON CINCO RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\text{In[*]} := \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx \right), R2 \right]$$

$$\text{Out[*]} = 2 \left(\frac{-\frac{11 L^4 q}{768} + \frac{L^3 R2}{32} + \frac{3 L^3 R3}{128} + \frac{L^3 (-260 L q + 320 (2 R2 + R3))}{122880 \text{EI}} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\text{In[*]} := \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx \right), R3 \right]$$

$$\text{Out[*]} = 2 \left(\frac{-\frac{67 L^4 q}{6144} + \frac{3 L^3 R2}{128} + \frac{7 L^3 R3}{384} + \frac{L^3 (-130 L q + 160 (2 R2 + R3))}{122880 \text{EI}} \right)$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRA LAS REACCIONES R2 Y R3*)

$$\text{In[*]} := \text{Solve}\left[\left\{2 \left(\frac{-\frac{11 L^4 q}{768} + \frac{L^3 R2}{32} + \frac{3 L^3 R3}{128} + \frac{L^3 (-260 L q + 320 (2 R2 + R3))}{122880 \text{EI}} \right) == -\frac{R2}{k}, \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left(\frac{-\frac{67 L^4 q}{6144} + \frac{3 L^3 R2}{128} + \frac{7 L^3 R3}{384} + \frac{L^3 (-130 L q + 160 (2 R2 + R3))}{122880 \text{EI}} \right) == -\frac{R3}{k} \right\}, \{R2, R3\} \right]$$

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{2 k (1368 \text{EI} L^4 + k L^7) q}{147456 \text{EI}^2 + 9216 \text{EI} k L^3 + 7 k^2 L^6}, R3 \rightarrow -\frac{-15360 \text{EI} k L^4 q - 13 k^2 L^7 q}{8 (147456 \text{EI}^2 + 9216 \text{EI} k L^3 + 7 k^2 L^6)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R2 = \frac{2k (1368 EI L^4 + k L^7) q}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$R3 = - \frac{15360 EI k L^4 q - 13 k^2 L^7 q}{8 (147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{2k (1368 EI L^4 + k L^7) q}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{15360 EI k L^4 q - 13 k^2 L^7 q}{8 (147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}$$

(*POR SIMETRÍA R5=R1 Y R4=R2*)

$$\text{In[]:= } R4 = R2$$

$$\text{Out[]:= } \frac{2k (1368 EI L^4 + k L^7) q}{147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

$$\text{In[]:= } \text{Solve}[\{2 R1 + 2 R2 + -q * L + R3 == 0\}, \{R1\}]$$

[|resuelve](#)

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1179648 EI^2 L q + 14592 EI k L^4 q + 11 k^2 L^7 q}{16 (147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{1179648 EI^2 L q + 14592 EI k L^4 q + 11 k^2 L^7 q}{16 (147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}$$

$$R5 = R1$$

$$\text{Out[]:= } \frac{1179648 EI^2 L q + 14592 EI k L^4 q + 11 k^2 L^7 q}{16 (147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{1179648 EI^2 L q + 14592 EI k L^4 q + 11 k^2 L^7 q}{16 (147456 EI^2 + 9216 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}$$


```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 30 (*m*)
  q = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 12 000 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 19 928 032 768 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 30
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 12 000 000 000
Out[ ]:= 19 928 032 768
Out[ ]:= 0.00045

  (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

```
In[ ]:= g7 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, -R5 / k}},
  gráfico de línea de una lista
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Blue,
```

```
  origen de ejes rango de rep... todo estilo de repr... azul
```

```
  PlotLegends -> {"Viga con cinco resortes"}]
```

```
  leyendas de representación
```

```
g8 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, -R5 / k}},
  representación de lista
```

```
  PlotStyle -> Blue, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

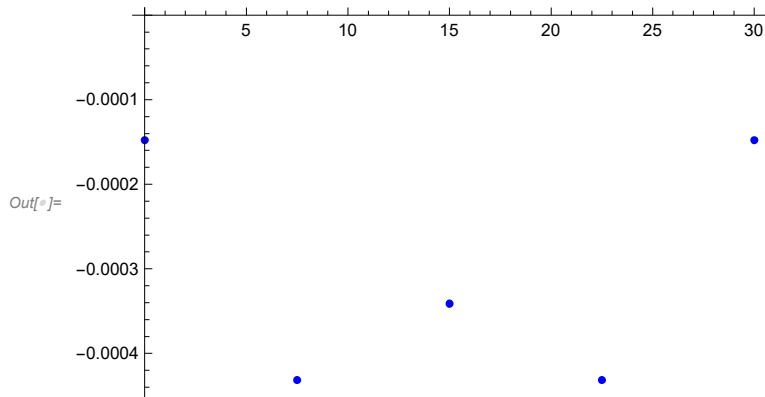
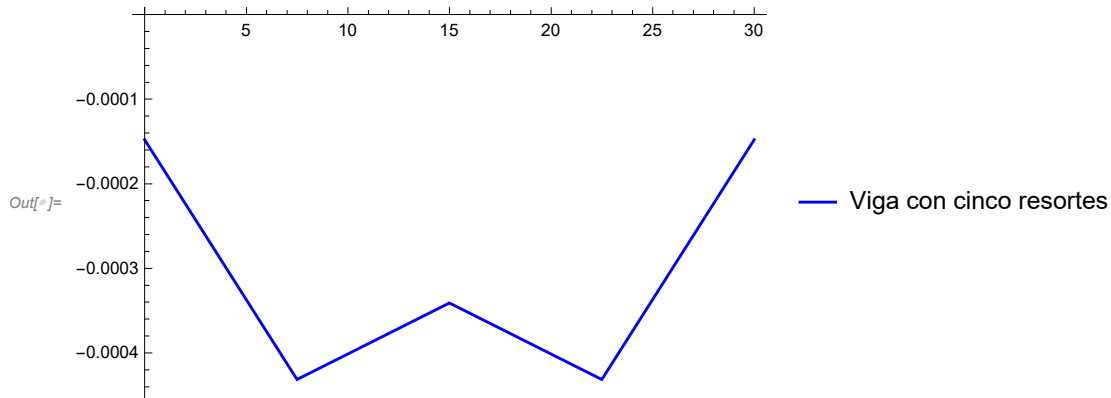
```
  estilo de repr... azul origen de ejes rango de rep... todo
```

```
Show[
```

```
  muestra
```

```
  g7,
```

```
  g8]
```



(*VIGA CON SEIS RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{D}_{\text{deriva}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
 \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{5}}^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R2 \\
 \text{Out[*]} = 2 \left(-\frac{31 L^4 q}{3750} + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125} + \frac{L^3 (-850 L q + 2000 (R2 + R3))}{750000 EI} + \frac{L^3 (-3700 L q + 6000 (R2 + 2 R3))}{1500000 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{D}_{\text{deriva}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
 \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{5}}^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R3 \\
 \text{Out[*]} = 2 \left(-\frac{19 L^4 q}{1500} + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375} + \frac{L^3 (-850 L q + 2000 (R2 + R3))}{750000 EI} + \frac{L^3 (-7400 L q + 12000 (R2 + 2 R3))}{1500000 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRA LAS REACCIONES R2 Y R3*)

Solve [
|resuelve

$$\left\{ 2 \left(\frac{-\frac{31 L^4 q}{3750} + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125}}{2 EI} + \frac{L^3 (-850 L q + 2000 (R2 + R3))}{750000 EI} + \frac{L^3 (-3700 L q + 6000 (R2 + 2 R3))}{1500000 EI} \right) = -\frac{R2}{k}, \right.$$

$$\left. 2 \left(\frac{-\frac{19 L^4 q}{1500} + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375}}{2 EI} + \frac{L^3 (-850 L q + 2000 (R2 + R3))}{750000 EI} + \frac{L^3 (-7400 L q + 12000 (R2 + 2 R3))}{1500000 EI} \right) = -\frac{R3}{k}, \{R2, R3\} \right\}$$

$$Out[] = \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{k (21750 EI L^4 + 43 k L^7) q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}, R3 \rightarrow -\frac{-34875 EI k L^4 q - 37 k^2 L^7 q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)} \right\} \right\}$$

$$In[] := R2 = \frac{k (21750 EI L^4 + 43 k L^7) q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$R3 = -\frac{-34875 EI k L^4 q - 37 k^2 L^7 q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$Out[] = \frac{k (21750 EI L^4 + 43 k L^7) q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$Out[] = -\frac{-34875 EI k L^4 q - 37 k^2 L^7 q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

(* AL SER SIMETRICA, LAS REACCIONES SON R1=R6, R2=R5 Y R3=R4*)

$$In[] := R5 = R2$$

$$R4 = R3$$

$$Out[] = \frac{k (21750 EI L^4 + 43 k L^7) q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$Out[] = -\frac{-34875 EI k L^4 q - 37 k^2 L^7 q}{10 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 - q * L == 0}, {R1}]

|resuelve

$$\text{Out[6]= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{3 (46875 EI^2 L q + 1100 EI k L^4 q + k^2 L^7 q)}{2 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[6]:= } R1 = \frac{3 (46875 EI^2 L q + 1100 EI k L^4 q + k^2 L^7 q)}{2 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

R6 = R1

$$\text{Out[6]= } \frac{3 (46875 EI^2 L q + 1100 EI k L^4 q + k^2 L^7 q)}{2 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[6]= } \frac{3 (46875 EI^2 L q + 1100 EI k L^4 q + k^2 L^7 q)}{2 (140625 EI^2 + 14625 EI k L^3 + 19 k^2 L^6)}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 30 (*m*)
  q = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 12 000 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 19 928 032 768 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 30
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 12 000 000 000
Out[ ]:= 19 928 032 768
Out[ ]:= 0.00045

```

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA CON 6 RESORTES*)

g9 = ListLinePlot [$\left\{ \left\{ 0, -R1 / k \right\}, \left\{ \frac{L}{5}, -R2 / k \right\}, \left\{ \frac{2L}{5}, -R3 / k \right\},$
gráfico de línea de una lista

$\left\{ \frac{3L}{5}, -R4 / k \right\}, \left\{ \frac{4L}{5}, -R5 / k \right\}, \left\{ L, -R6 / k \right\} \right]$, **AxesOrigin** → {0, 0},
origen de ejes

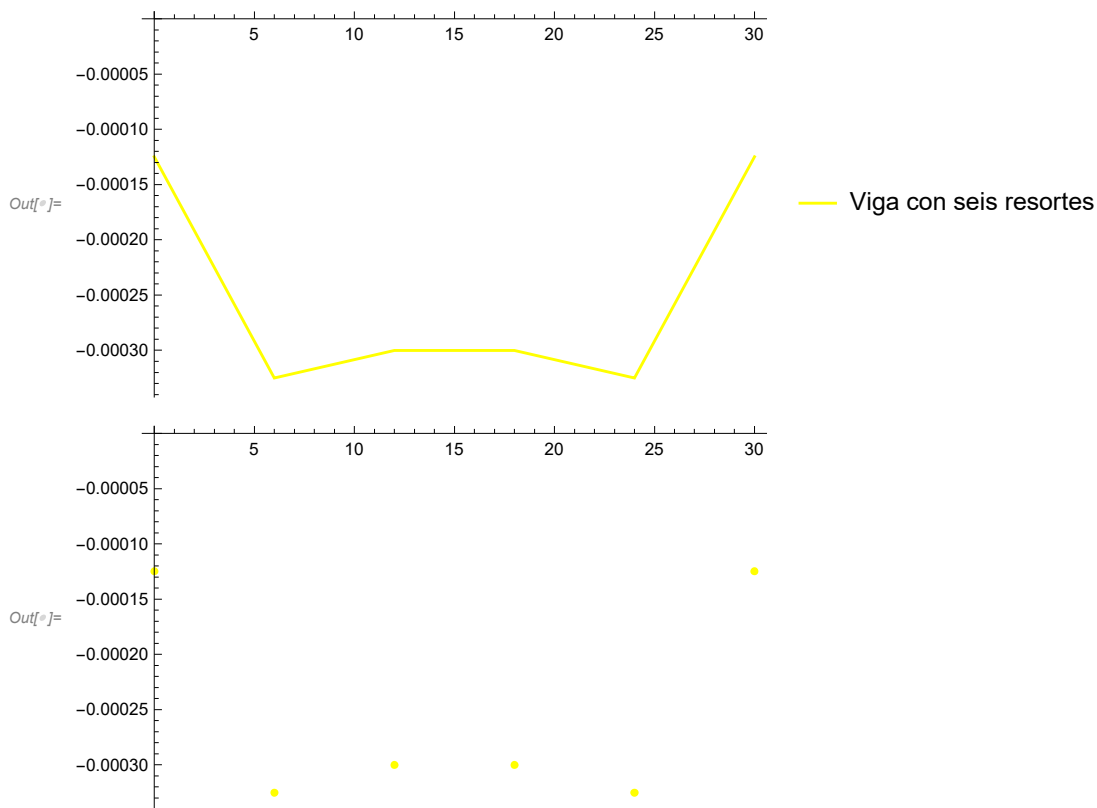
PlotRange → All, **PlotStyle** → Yellow, **PlotLegends** → {"Viga con seis resortes"}]
rango de rep... todo estilo de repr... amarillo leyendas de representación

g10 = ListPlot [$\left\{ \left\{ 0, -R1 / k \right\}, \left\{ \frac{L}{5}, -R2 / k \right\}, \left\{ \frac{2L}{5}, -R3 / k \right\}, \left\{ \frac{3L}{5}, -R4 / k \right\}, \left\{ \frac{4L}{5}, -R5 / k \right\},$
representación de lista

$\left\{ L, -R6 / k \right\} \right]$, **PlotStyle** → Yellow, **AxesOrigin** → {0, 0}, **PlotRange** → All]
estilo de repr... amarillo origen de ejes rango de rep... todo

Show[g9, g10]

muestra



(*VIGA CON SIETE RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$D_{\text{deriva}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{1L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \right. \\ \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{1L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6} \right) \right)^2 dx \right), R2]$$

$$Out[*]= 2 \left(\frac{L^3 (-210 L q + 240 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-1040 L q + 60 (24 (R2 + 2 R3) + 30 R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-800 L q + 60 (24 R2 + 18 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$D_{\text{deriva}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{1L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \right. \\ \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{1L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6} \right) \right)^2 dx \right), R3]$$

$$Out[*]= 2 \left(\frac{L^3 (-210 L q + 240 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-2080 L q + 60 (48 (R2 + 2 R3) + 60 R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-1230 L q + 60 (36 R2 + 28 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right)$$

In[*]:= (*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6} \right) \right)^2 dx \right], R4]$$

$$Out[*]= 2 \left(\frac{L^3 (-105 L q + 120 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-1305 L q + 60 (30 (R2 + 2 R3) + 38 R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-615 L q + 60 (18 R2 + 14 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right)$$

(*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN R2, R3 y R4*)

In[*]:=

$$\text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(\frac{L^3 (-210 L q + 240 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-1040 L q + 60 (24 (R2 + 2 R3) + 30 R4))}{311 040 EI} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{L^3 (-800 L q + 60 (24 R2 + 18 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right) == -\frac{R2}{k}, \right. \\ \left. 2 \left(\frac{L^3 (-210 L q + 240 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-2080 L q + 60 (48 (R2 + 2 R3) + 60 R4))}{311 040 EI} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{L^3 (-1230 L q + 60 (36 R2 + 28 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right) == -\frac{R3}{k}, \right. \\ \left. 2 \left(\frac{L^3 (-105 L q + 120 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-1305 L q + 60 (30 (R2 + 2 R3) + 38 R4))}{311 040 EI} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{L^3 (-615 L q + 60 (18 R2 + 14 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right) == -\frac{R4}{k} \right\}, \{R2, R3, R4\}]$$

$$Out[*]= \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{k L^4 (172 160 640 EI^2 + 309 744 EI k L^3 + 59 k^2 L^6) q}{24 (544 195 584 EI^3 + 56 687 040 EI^2 k L^3 + 80 352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}, \right. \right. \\ R3 \rightarrow \frac{k L^4 (147 806 208 EI^2 + 199 260 EI k L^3 + 25 k^2 L^6) q}{12 (544 195 584 EI^3 + 56 687 040 EI^2 k L^3 + 80 352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}, \\ \left. \left. R4 \rightarrow -\frac{-170 061 120 EI^2 k L^4 q - 225 504 EI k^2 L^7 q - 53 k^3 L^{10} q}{24 (544 195 584 EI^3 + 56 687 040 EI^2 k L^3 + 80 352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R2 = \frac{k L^4 (172\,160\,640 EI^2 + 309\,744 EI k L^3 + 59 k^2 L^6) q}{24 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$R3 = \frac{k L^4 (147\,806\,208 EI^2 + 199\,260 EI k L^3 + 25 k^2 L^6) q}{12 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$R4 = - \frac{-170\,061\,120 EI^2 k L^4 q - 225\,504 EI k^2 L^7 q - 53 k^3 L^{10} q}{24 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (172\,160\,640 EI^2 + 309\,744 EI k L^3 + 59 k^2 L^6) q}{24 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (147\,806\,208 EI^2 + 199\,260 EI k L^3 + 25 k^2 L^6) q}{12 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{-170\,061\,120 EI^2 k L^4 q - 225\,504 EI k^2 L^7 q - 53 k^3 L^{10} q}{24 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

(*POR SIMETRÍA R6=R2 Y R5=R3 *)

$$\text{In[]:= } R6 = R2$$

$$R5 = R3$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (172\,160\,640 EI^2 + 309\,744 EI k L^3 + 59 k^2 L^6) q}{24 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (147\,806\,208 EI^2 + 199\,260 EI k L^3 + 25 k^2 L^6) q}{12 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R7=R1*)

$$\text{In[]:= } \text{Solve}[\{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + R4 == 0\}, \{R1\}]$$

[resuelve](#)

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{13\,060\,694\,016 EI^3 L q + 254\,881\,728 EI^2 k L^4 q + 286\,416 EI k^2 L^7 q + 41 k^3 L^{10} q}{48 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{13\,060\,694\,016 EI^3 L q + 254\,881\,728 EI^2 k L^4 q + 286\,416 EI k^2 L^7 q + 41 k^3 L^{10} q}{48 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$R7 = R1$$

$$\text{Out[]:= } \frac{13\,060\,694\,016 EI^3 L q + 254\,881\,728 EI^2 k L^4 q + 286\,416 EI k^2 L^7 q + 41 k^3 L^{10} q}{48 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{13\,060\,694\,016 EI^3 L q + 254\,881\,728 EI^2 k L^4 q + 286\,416 EI k^2 L^7 q + 41 k^3 L^{10} q}{48 (544\,195\,584 EI^3 + 56\,687\,040 EI^2 k L^3 + 80\,352 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 30 (*m*)
q = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 12000000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 19928032768 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10000000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 30
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 12000000000
Out[ ]:= 19928032768
Out[ ]:= 0.00045

```

In[]:= (*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

```
In[ ]:= g11 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/6, -R2 / k}, {2L/6, -R3 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {3L/6, -R4 / k}, {4L/6, -R5 / k}, {5L/6, -R6 / k}, {L, -R7 / k}}, AxesOrigin -> {0, 0},
  origen de ejes
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Black, PlotLegends -> {"Viga con siete resortes"}]
  rango de rep... todo estilo de repr... negro leyendas de representación

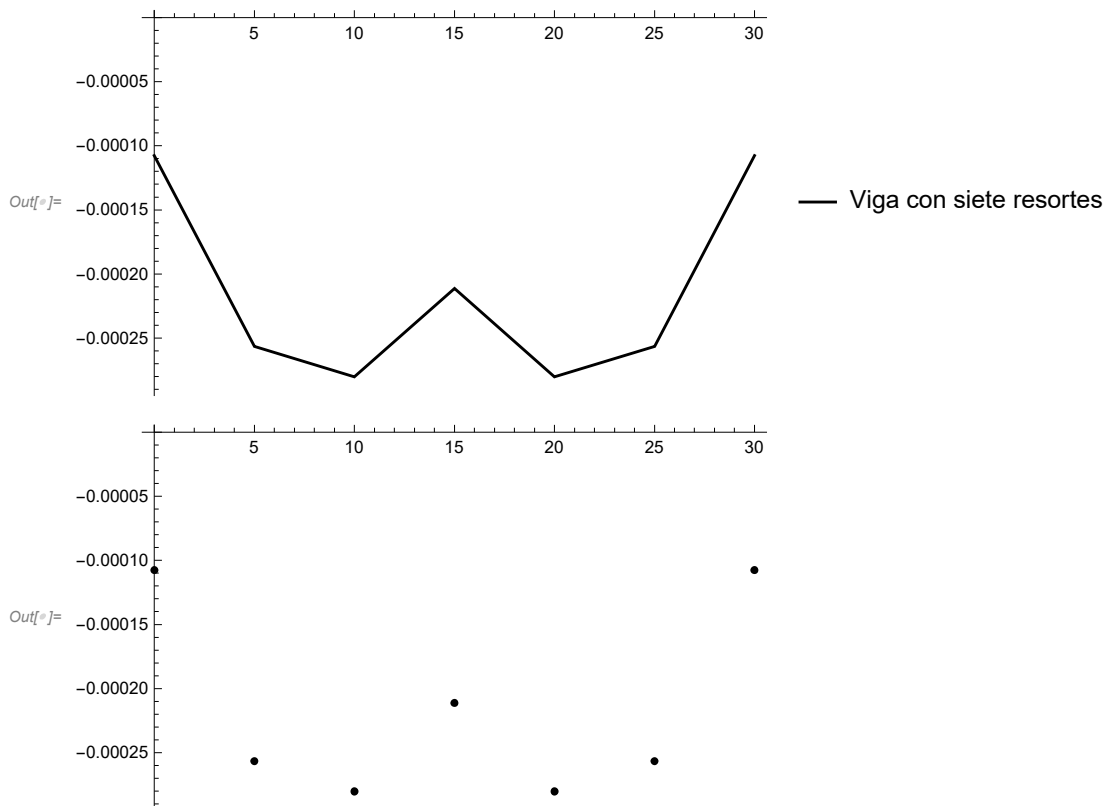
g12 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/6, -R2 / k}, {2L/6, -R3 / k}, {3L/6, -R4 / k}, {4L/6, -R5 / k},
  representación de lista
  {5L/6, -R6 / k}, {L, -R7 / k}}, PlotStyle -> Black, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... negro origen de ejes rango de rep... todo
```

Show[

muestra

g11,

g12]



(*VIGA CON OCHO RESORTES*)

(*SE APLICA EL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 In[] := & D \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{7}}^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7} \right) \right)^2 dx \right], R2] \\
 Out[] := & 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10220 L q + 11760 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-9380 L q + 1960 (6 (R2 + 2 R3) + 15 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-6860 L q + 1960 (6 R2 + 9 (R3 + R4)))}{4033680 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 In[] := & D \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{7}}^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7} \right) \right)^2 dx \right], R3] \\
 Out[] := & 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-20440 L q + 23520 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-18760 L q + 1960 (12 (R2 + 2 R3) + 30 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4033680 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{Int}[] := & \text{D} \left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7} \right) \right)^2 \right. \\
 & \left. dx \right], R4] \\
 & 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 \text{EI}} + \frac{L^3 (-30660 L q + 35280 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 \text{EI}} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-23590 L q + 1960 (15 (R2 + 2 R3) + 38 R4))}{4033680 \text{EI}} + \frac{L^3 (-10570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4033680 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

In[*]:= (*SE APLICA EL MODELO DE WINKLER*)

(*SE ENCUENTRAN R2, R3 y R4*)

$$\text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10220 L q + 11760 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \frac{L^3 (-9380 L q + 1960 (6 (R2 + 2 R3) + 15 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-6860 L q + 1960 (6 R2 + 9 (R3 + R4)))}{4033680 EI} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{R2}{k}, 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-20440 L q + 23520 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \frac{L^3 (-18760 L q + 1960 (12 (R2 + 2 R3) + 30 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4033680 EI} \right) \right. \right. \\ \left. \left. = -\frac{R3}{k}, 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-30660 L q + 35280 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \frac{L^3 (-23590 L q + 1960 (15 (R2 + 2 R3) + 38 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4033680 EI} \right) \right. \right. \\ \left. \left. = -\frac{R4}{k} \right\}, \{R2, R3, R4\} \right]$$

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ \begin{aligned} R2 &\rightarrow \frac{k L^4 (24958395 EI^2 + 85260 EI k L^3 + 23 k^2 L^6) q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}, \\ R3 &\rightarrow \frac{k L^4 (312358095 EI^2 + 721329 EI k L^3 + 137 k^2 L^6) q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}, \\ R4 &\rightarrow -\frac{-387535806 EI^2 k L^4 q - 616371 EI k^2 L^7 q - 143 k^3 L^{10} q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \end{aligned} \right\} \right\}$$

In[]:= (*POR SIMETRÍA, LAS REACCIONES SON R1=R8, R2=R7, R3=R6 Y R4=R5*)

$$R2 = \frac{k L^4 (24958395 EI^2 + 85260 EI k L^3 + 23 k^2 L^6) q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$R3 = \frac{k L^4 (312358095 EI^2 + 721329 EI k L^3 + 137 k^2 L^6) q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$R4 = - \frac{-387535806 EI^2 k L^4 q - 616371 EI k^2 L^7 q - 143 k^3 L^{10} q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (24958395 EI^2 + 85260 EI k L^3 + 23 k^2 L^6) q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (312358095 EI^2 + 721329 EI k L^3 + 137 k^2 L^6) q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{-387535806 EI^2 k L^4 q - 616371 EI k^2 L^7 q - 143 k^3 L^{10} q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

In[]:= **R7 = R2**

R6 = R3

R5 = R4

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (24958395 EI^2 + 85260 EI k L^3 + 23 k^2 L^6) q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^4 (312358095 EI^2 + 721329 EI k L^3 + 137 k^2 L^6) q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{-387535806 EI^2 k L^4 q - 616371 EI k^2 L^7 q - 143 k^3 L^{10} q}{14 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R8=R1*)

In[]:= **Solve**[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + 2 R4 == 0}, {R1}]

resuelve

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1089547389 EI^3 L q + 33882912 EI^2 k L^4 q + 43659 EI k^2 L^7 q + 8 k^3 L^{10} q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{1089547389 EI^3 L q + 33882912 EI^2 k L^4 q + 43659 EI k^2 L^7 q + 8 k^3 L^{10} q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{1089547389 EI^3 L q + 33882912 EI^2 k L^4 q + 43659 EI k^2 L^7 q + 8 k^3 L^{10} q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

In[]:= **R8 = R1**

$$\text{Out[]:= } \frac{1089547389 EI^3 L q + 33882912 EI^2 k L^4 q + 43659 EI k^2 L^7 q + 8 k^3 L^{10} q}{2 (1089547389 EI^3 + 158826150 EI^2 k L^3 + 320019 EI k^2 L^6 + 71 k^3 L^9)}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 30 (*m*)
  q = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 12 000 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 19 928 032 768 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 30
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 12 000 000 000
Out[ ]:= 19 928 032 768
Out[ ]:= 0.00045

```

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

```

In[ ]:= g13 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/7, -R2 / k}, {2L/7, -R3 / k}, {3L/7, -R4 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {4L/7, -R5 / k}, {5L/7, -R6 / k}, {6L/7, -R7 / k}, {L, -R8 / k}}, AxesOrigin -> {0, 0},
  origen de ejes

```

```

  PlotRange -> All, PlotStyle -> Magenta, PlotLegends -> {"Viga con ocho resortes"}]
  rango de rep... [todo [estilo de repr... [magenta [leyendas de representación

```

```

g14 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/7, -R2 / k}, {2L/7, -R3 / k}, {3L/7, -R4 / k},
  representación de lista

```

```

  {4L/7, -R5 / k}, {5L/7, -R6 / k}, {6L/7, -R7 / k}, {L, -R8 / k}},

```

```

  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... [tamaño de punto [origen de ejes [rango de rep... [todo

```

```

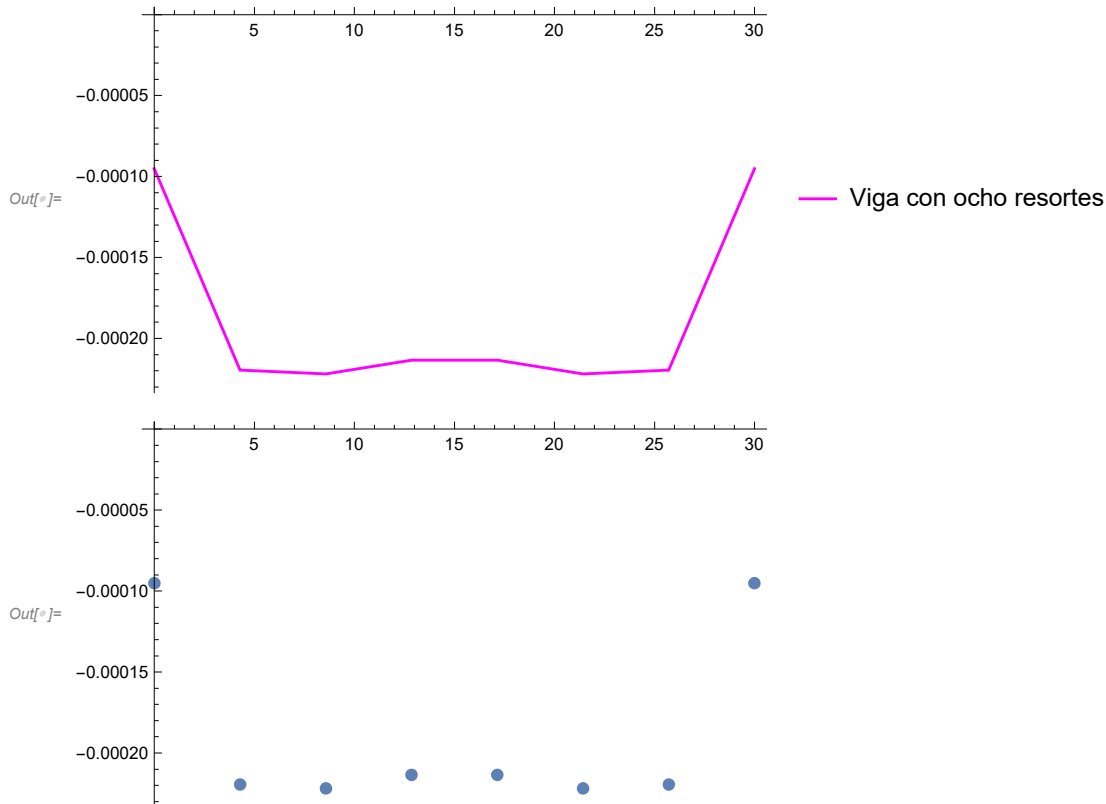
Show[
  muestra

```

```

  g13,
  g14]

```



(*VIGA CON NUEVE RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

In[]:=

$$\begin{aligned}
 & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 \right. \\
 & \left. dx\right], R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]}= & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5)\right)}{122 880 EI} + \frac{L^3 (-7520 L q + 320 (24 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 42 R5))}{3 932 160 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-4640 L q + 320 (24 R2 + 18 (2 (R3 + R4) + R5)))}{3 932 160 EI} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-6560 L q + 320 (24 R2 + 6 (8 R3 + 5 (2 R4 + R5)))}{3 932 160 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 \right. \\
 & \left. dx\right], R3] \\
 \text{Out[*]} := & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5)\right)}{122 880 \text{EI}} + \frac{L^3 (-15 040 L q + 320 (48 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 84 R5))}{3 932 160 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-13 120 L q + 320 (48 R2 + 96 R3 + 60 (2 R4 + R5)))}{3 932 160 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 R2 + 28 (2 (R3 + R4) + R5)))}{3 932 160 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{8}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 \right. \\
 & \left. dx\right], \text{R4}] \\
 \text{Out[*]} := & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4}) + \text{R5})\right)}{122880 \text{EI}} + \frac{L^3 (-22560 L q + 320 (72 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 \text{R4}) + 126 \text{R5}))}{3932160 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-16520 L q + 320 (60 \text{R2} + 120 \text{R3} + 76 (2 \text{R4} + \text{R5}))}{3932160 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 \text{R2} + 28 (2 (\text{R3} + \text{R4}) + \text{R5}))}{3932160 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{8}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 \right. \\
 & \left. dx\right], \text{R5}] \\
 \text{Out[*]} := & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{8} + 20 (2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4}) + \text{R5})\right)}{122 880 \text{EI}} + \frac{L^3 (-13 180 L q + 320 (42 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 \text{R4}) + 74 \text{R5}))}{3 932 160 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-8260 L q + 320 (30 \text{R2} + 60 \text{R3} + 38 (2 \text{R4} + \text{R5}))}{3 932 160 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-3580 L q + 320 (18 \text{R2} + 14 (2 (\text{R3} + \text{R4}) + \text{R5}))}{3 932 160 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE CALCULAN LAS REACCIONES*)

In[]:= Solve[
|resuelve

$$\left\{ 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R_2 + R_3 + R_4) + R_5) \right)}{122880 EI} + \frac{L^3 (-7520 L q + 320 (24 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 42 R_5))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-4640 L q + 320 (24 R_2 + 18 (2 (R_3 + R_4) + R_5)))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-6560 L q + 320 (24 R_2 + 6 (8 R_3 + 5 (2 R_4 + R_5))))}{3932160 EI} \right) \right\} = -\frac{R_2}{k},$$

$$2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R_2 + R_3 + R_4) + R_5) \right)}{122880 EI} + \frac{L^3 (-15040 L q + 320 (48 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 84 R_5))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-13120 L q + 320 (48 R_2 + 96 R_3 + 60 (2 R_4 + R_5)))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 R_2 + 28 (2 (R_3 + R_4) + R_5)))}{3932160 EI} \right) = -\frac{R_3}{k},$$

$$2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R_2 + R_3 + R_4) + R_5) \right)}{122880 EI} + \frac{L^3 (-22560 L q + 320 (72 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 126 R_5))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-16520 L q + 320 (60 R_2 + 120 R_3 + 76 (2 R_4 + R_5)))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 R_2 + 28 (2 (R_3 + R_4) + R_5)))}{3932160 EI} \right) = -\frac{R_4}{k},$$

$$2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{8} + 20 (2 (R_2 + R_3 + R_4) + R_5) \right)}{122880 EI} + \frac{L^3 (-13180 L q + 320 (42 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 74 R_5))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-8260 L q + 320 (30 R_2 + 60 R_3 + 38 (2 R_4 + R_5)))}{3932160 EI} + \frac{L^3 (-3580 L q + 320 (18 R_2 + 14 (2 (R_3 + R_4) + R_5)))}{3932160 EI} \right) = -\frac{R_5}{k}, \{R_2, R_3, R_4, R_5\}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & \left\{ \left\{ \begin{aligned} & \text{R2} \rightarrow \left(k \left(900\,533\,846\,016\,EI^3 L^4 + 2\,699\,034\,624\,EI^2 k L^7 + 957\,312\,EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\ & \left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right), \\ & \text{R3} \rightarrow \left(k \left(6\,609\,954\,668\,544\,EI^3 L^4 + 15\,075\,901\,440\,EI^2 k L^7 + 3\,440\,640\,EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\ & \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right), \\ & \text{R4} \rightarrow - \left(\left(-2\,147\,148\,103\,680\,EI^3 k L^4 q - 3\,973\,054\,464\,EI^2 k^2 L^7 q - 1\,007\,232\,EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \right. \\ & \quad \left. \left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right), \\ & \text{R5} \rightarrow - \left(\left(-4\,638\,564\,679\,680\,EI^3 k L^4 q - 8\,257\,536\,000\,EI^2 k^2 L^7 q - 2\,899\,968\,EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \right. \\ & \quad \left. \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right) \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In[*]} = & \text{R2} = \left(k \left(900\,533\,846\,016\,EI^3 L^4 + 2\,699\,034\,624\,EI^2 k L^7 + 957\,312\,EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\ & \left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \\
& \text{R3} = \left(k \left(6\,609\,954\,668\,544\,EI^3 L^4 + 15\,075\,901\,440\,EI^2 k L^7 + 3\,440\,640\,EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\ & \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \\
& \text{R4} = - \left(\left(-2\,147\,148\,103\,680\,EI^3 k L^4 q - 3\,973\,054\,464\,EI^2 k^2 L^7 q - 1\,007\,232\,EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \right. \\ & \quad \left. \left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right) \\
& \text{R5} = - \left(\left(-4\,638\,564\,679\,680\,EI^3 k L^4 q - 8\,257\,536\,000\,EI^2 k^2 L^7 q - 2\,899\,968\,EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \right. \\ & \quad \left. \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & \left(k \left(900\,533\,846\,016\,EI^3 L^4 + 2\,699\,034\,624\,EI^2 k L^7 + 957\,312\,EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\ & \left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & \left(k \left(6\,609\,954\,668\,544\,EI^3 L^4 + 15\,075\,901\,440\,EI^2 k L^7 + 3\,440\,640\,EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\ & \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & - \left(\left(-2\,147\,148\,103\,680\,EI^3 k L^4 q - 3\,973\,054\,464\,EI^2 k^2 L^7 q - 1\,007\,232\,EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \right. \\ & \quad \left. \left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & - \left(\left(-4\,638\,564\,679\,680\,EI^3 k L^4 q - 8\,257\,536\,000\,EI^2 k^2 L^7 q - 2\,899\,968\,EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \right. \\ & \quad \left. \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760\,EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

In[]:= **R8 = R2**
R7 = R3
R6 = R4

$$\text{Out[]:= } \left(k \left(900\,533\,846\,016\,EI^3\,L^4 + 2\,699\,034\,624\,EI^2\,k\,L^7 + 957\,312\,EI\,k^2\,L^{10} + 55\,k^3\,L^{13} \right) q \right) /$$

$$\left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \right.$$

$$\left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[]:= } \left(k \left(6\,609\,954\,668\,544\,EI^3\,L^4 + 15\,075\,901\,440\,EI^2\,k\,L^7 + 3\,440\,640\,EI\,k^2\,L^{10} + 187\,k^3\,L^{13} \right) q \right) /$$

$$\left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \right.$$

$$\left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[]:= } - \left(\left(-2\,147\,148\,103\,680\,EI^3\,k\,L^4\,q - 3\,973\,054\,464\,EI^2\,k^2\,L^7\,q - 1\,007\,232\,EI\,k^3\,L^{10}\,q - 49\,k^4\,L^{13}\,q \right) / \right.$$

$$\left. \left(4 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12} \right) \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R9=R1*)

In[]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + 2 R4 + R5 == 0}, {R1}]

[|resuelve](#)

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(L\,q - \left(k \left(900\,533\,846\,016\,EI^3\,L^4 + 2\,699\,034\,624\,EI^2\,k\,L^7 + 957\,312\,EI\,k^2\,L^{10} + 55\,k^3\,L^{13} \right) q \right) / \right. \right.$$

$$\left. \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12} \right) \right) - \right.$$

$$\left(k \left(6\,609\,954\,668\,544\,EI^3\,L^4 + 15\,075\,901\,440\,EI^2\,k\,L^7 + 3\,440\,640\,EI\,k^2\,L^{10} + 187\,k^3\,L^{13} \right) q \right) /$$

$$\left(8 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \right.$$

$$\left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12} \right) \right) +$$

$$\left(-4\,638\,564\,679\,680\,EI^3\,k\,L^4\,q - 8\,257\,536\,000\,EI^2\,k^2\,L^7\,q - 2\,899\,968\,EI\,k^3\,L^{10}\,q - 193\,k^4\,L^{13}\,q \right) /$$

$$\left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \right.$$

$$\left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12} \right) \right) +$$

$$\left(-2\,147\,148\,103\,680\,EI^3\,k\,L^4\,q - 3\,973\,054\,464\,EI^2\,k^2\,L^7\,q - 1\,007\,232\,EI\,k^3\,L^{10}\,q - 49\,k^4\,L^{13}\,q \right) /$$

$$\left. \left. \left. \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464\,EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \left. 6\,610\,747\,392\,EI^2\,k^2\,L^6 + 1\,781\,760\,EI\,k^3\,L^9 + 97\,k^4\,L^{12} \right) \right) \right) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
In[]:= R1 = & \frac{1}{2} \left(L q - \left(k \left(900\,533\,846\,016 EI^3 L^4 + 2\,699\,034\,624 EI^2 k L^7 + 957\,312 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\
& \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k \left(6\,609\,954\,668\,544 EI^3 L^4 + 15\,075\,901\,440 EI^2 k L^7 + 3\,440\,640 EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(8 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \left(-4\,638\,564\,679\,680 EI^3 k L^4 q - 8\,257\,536\,000 EI^2 k^2 L^7 q - 2\,899\,968 EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \\
& \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \left(-2\,147\,148\,103\,680 EI^3 k L^4 q - 3\,973\,054\,464 EI^2 k^2 L^7 q - 1\,007\,232 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \\
& \left. \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[]:= & \frac{1}{2} \left(L q - \left(k \left(900\,533\,846\,016 EI^3 L^4 + 2\,699\,034\,624 EI^2 k L^7 + 957\,312 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\
& \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k \left(6\,609\,954\,668\,544 EI^3 L^4 + 15\,075\,901\,440 EI^2 k L^7 + 3\,440\,640 EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(8 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \left(-4\,638\,564\,679\,680 EI^3 k L^4 q - 8\,257\,536\,000 EI^2 k^2 L^7 q - 2\,899\,968 EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \\
& \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \left(-2\,147\,148\,103\,680 EI^3 k L^4 q - 3\,973\,054\,464 EI^2 k^2 L^7 q - 1\,007\,232 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \\
& \left. \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$ln[6]:=$ **R9 = R1**

$$Out[6]:= \frac{1}{2} \left(L q - \left(k \left(900533846016 EI^3 L^4 + 2699034624 EI^2 k L^7 + 957312 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\ \left. \left(2 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) - \right. \\ \left. \left(k \left(6609954668544 EI^3 L^4 + 15075901440 EI^2 k L^7 + 3440640 EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\ \left. \left(8 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right) + \\ \left(-4638564679680 EI^3 k L^4 q - 8257536000 EI^2 k^2 L^7 q - 2899968 EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \\ \left(16 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\ \left(-2147148103680 EI^3 k L^4 q - 3973054464 EI^2 k^2 L^7 q - 1007232 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \\ \left. \left(2 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right)$$

$$ln[6]:= \frac{1}{2} \left(L q - \left(k \left(900533846016 EI^3 L^4 + 2699034624 EI^2 k L^7 + 957312 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\ \left. \left(2 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right) - \\ \left(k \left(6609954668544 EI^3 L^4 + 15075901440 EI^2 k L^7 + 3440640 EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\ \left(8 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right) + \\ \left(-4638564679680 EI^3 k L^4 q - 8257536000 EI^2 k^2 L^7 q - 2899968 EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \\ \left(16 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\ \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\ \left(-2147148103680 EI^3 k L^4 q - 3973054464 EI^2 k^2 L^7 q - 1007232 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \\ \left. \left(2 \left(22265110462464 EI^4 + 3246995275776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 6610747392 EI^2 k^2 L^6 + 1781760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[]} = & \frac{1}{2} \left(L q - \left(k \left(900\,533\,846\,016 EI^3 L^4 + 2\,699\,034\,624 EI^2 k L^7 + 957\,312 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\
& \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k \left(6\,609\,954\,668\,544 EI^3 L^4 + 15\,075\,901\,440 EI^2 k L^7 + 3\,440\,640 EI k^2 L^{10} + 187 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(8 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \left(-4\,638\,564\,679\,680 EI^3 k L^4 q - 8\,257\,536\,000 EI^2 k^2 L^7 q - 2\,899\,968 EI k^3 L^{10} q - 193 k^4 L^{13} q \right) / \\
& \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \left(-2\,147\,148\,103\,680 EI^3 k L^4 q - 3\,973\,054\,464 EI^2 k^2 L^7 q - 1\,007\,232 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q \right) / \\
& \left. \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 EI^4 + 3\,246\,995\,275\,776 EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 6\,610\,747\,392 EI^2 k^2 L^6 + 1\,781\,760 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12} \right) \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 30 (*m*)
q = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 12 000 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 19 928 032 768 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 30
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 12 000 000 000
Out[ ]:= 19 928 032 768
Out[ ]:= 0.00045

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

```

```

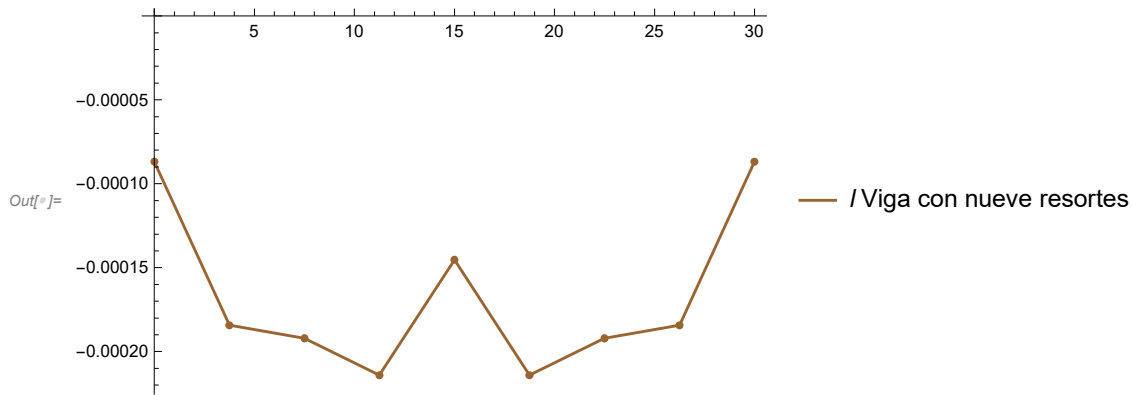
In[ ]:= g15 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/8, -R2 / k}, {2L/8, -R3 / k}, {3L/8, -R4 / k}, {4L/8, -R5 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {5L/8, -R6 / k}, {6L/8, -R7 / k}, {7L/8, -R8 / k}, {L, -R9 / k}}, AxesOrigin -> {0, 0},
  origen de ejes
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Brown, PlotLegends -> {"Viga con nueve resortes"} 1]
  rango de rep... todo estilo de repr... marrón leyendas de representación

g16 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/8, -R2 / k}, {2L/8, -R3 / k}, {3L/8, -R4 / k},
  representación de lista
  {4L/8, -R5 / k}, {5L/8, -R6 / k}, {6L/8, -R7 / k}, {7L/8, -R8 / k}, {L, -R9 / k}},
  PlotStyle -> Brown, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... marrón origen de ejes rango de rep... todo

Show[
  muestra
  g15,
  g16]

```

□



(*VIGA CON DIEZ RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} = & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 \\
 & dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \right. \\
 & \left. R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9}\right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 dx, R2] \\
 \text{Out[*]} = & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-7260 L q + 6480 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-6900 L q + 1080 (6 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 21 R5))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-4020 L q + 1080 (6 R2 + 9 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-5820 L q + 1080 (6 R2 + 3 (4 R3 + 5 (R4 + R5))))}{4723920 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \mathbf{D} \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \right) \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \left(\frac{1}{2 EI} \right) \right. \\
 & \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \left(\frac{1}{2 EI} \right) \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \left(\frac{1}{2 EI} \right) \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \left(\frac{1}{2 EI} \right) \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9} \right) \right)^2 dx \right), R3] \\
 \text{Out[]:= } & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)}{174 960 EI} + \frac{L^3 (-14 520 L q + 12 960 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9 447 840 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-13 800 L q + 1080 (12 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 42 R5))}{4 723 920 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-11 640 L q + 1080 (12 R2 + 24 R3 + 30 (R4 + R5)))}{4 723 920 EI} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4 723 920 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 \\
 & dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \right. \\
 & \left. R2 \left(x - \frac{L}{9}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9}\right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 dx, R4] \\
 \text{Out[*]} := & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174 960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-21 780 L q + 19 440 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9 447 840 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-20 700 L q + 1080 (18 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 63 R5))}{4 723 920 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-14 670 L q + 1080 (15 R2 + 30 R3 + 38 (R4 + R5)))}{4 723 920 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4 723 920 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= } & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 \\
 & dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{4L}{9}}^L \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \right. \\
 & \left. \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 dx, \text{R5}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]:= } & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110Lq}{3} + 80(R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-29040Lq + 25920(R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5))}{9447840 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-24210Lq + 1080(21(R2 + 2R3 + 3R4) + 74R5))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-14670Lq + 1080(15R2 + 30R3 + 38(R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-6210Lq + 1080(9R2 + 14(R3 + R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE CALCULAN LAS REACCIONES*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
 \text{Solve}\left[\left\{2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110Lq}{3} + 80(R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-7260Lq + 6480(R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5))}{9447840 \text{EI}} + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{L^3 (-6900Lq + 1080(6(R2 + 2R3 + 3R4) + 21R5))}{4723920 \text{EI}} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 (-4020 L q + 1080 (6 R_2 + 9 (R_3 + R_4 + R_5)))}{4723920 EI} + \\
& \left. \frac{L^3 (-5820 L q + 1080 (6 R_2 + 3 (4 R_3 + 5 (R_4 + R_5))))}{4723920 EI} \right) = -\frac{R_2}{k}, \\
2 & \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \right)}{174960 EI} + \frac{L^3 (-14520 L q + 12960 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5))}{9447840 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 (-13800 L q + 1080 (12 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 42 R_5))}{4723920 EI} + \\
& \frac{L^3 (-11640 L q + 1080 (12 R_2 + 24 R_3 + 30 (R_4 + R_5)))}{4723920 EI} + \\
& \left. \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R_2 + 14 (R_3 + R_4 + R_5)))}{4723920 EI} \right) = -\frac{R_3}{k}, \\
2 & \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \right)}{174960 EI} + \frac{L^3 (-21780 L q + 19440 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5))}{9447840 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 (-20700 L q + 1080 (18 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 63 R_5))}{4723920 EI} + \\
& \frac{L^3 (-14670 L q + 1080 (15 R_2 + 30 R_3 + 38 (R_4 + R_5)))}{4723920 EI} + \\
& \left. \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R_2 + 14 (R_3 + R_4 + R_5)))}{4723920 EI} \right) = -\frac{R_4}{k}, \\
2 & \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \right)}{174960 EI} + \frac{L^3 (-29040 L q + 25920 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5))}{9447840 EI} + \right. \\
& \frac{L^3 (-24210 L q + 1080 (21 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 74 R_5))}{4723920 EI} + \\
& \frac{L^3 (-14670 L q + 1080 (15 R_2 + 30 R_3 + 38 (R_4 + R_5)))}{4723920 EI} + \\
& \left. \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R_2 + 14 (R_3 + R_4 + R_5)))}{4723920 EI} \right) = -\frac{R_5}{k}, \{R_2, R_3, R_4, R_5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & \left\{ \left\{ \begin{aligned}
& \text{R2} \rightarrow \left(k \left(3\,723\,885\,740\,268\,EI^3 L^4 + 17\,668\,287\,486\,EI^2 k L^7 + 7\,860\,078\,EI k^2 L^{10} + 601 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right), \\
& \text{R3} \rightarrow \left(k \left(6\,956\,134\,879\,995\,EI^3 L^4 + 25\,321\,037\,886\,EI^2 k L^7 + 8\,422\,137\,EI k^2 L^{10} + 511 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right), \\
& \text{R4} \rightarrow - \frac{-4\,261\,625\,379\,EI^2 k L^4 q - 1\,469\,664\,EI k^2 L^7 q - 107 k^3 L^{10} q}{18 \left(10\,460\,353\,203\,EI^3 + 1\,937\,102\,445\,EI^2 k L^3 + 761\,076\,EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9 \right)}, \\
& \text{R5} \rightarrow \\
& - \left(\left(-10\,564\,956\,735\,030\,EI^3 k L^4 q - 21\,681\,198\,477\,EI^2 k^2 L^7 q - 7\,910\,379\,EI k^3 L^{10} q - 529 k^4 L^{13} q \right) / \right. \\
& \quad \left. \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) \right) \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In}[*]= \text{R2} = & \left(k \left(3\,723\,885\,740\,268\,EI^3 L^4 + 17\,668\,287\,486\,EI^2 k L^7 + 7\,860\,078\,EI k^2 L^{10} + 601 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & \left(k \left(3\,723\,885\,740\,268\,EI^3 L^4 + 17\,668\,287\,486\,EI^2 k L^7 + 7\,860\,078\,EI k^2 L^{10} + 601 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In}[*]= & \left(k \left(3\,723\,885\,740\,268\,EI^3 L^4 + 17\,668\,287\,486\,EI^2 k L^7 + 7\,860\,078\,EI k^2 L^{10} + 601 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In}[*]= \text{R3} = & \left(k \left(6\,956\,134\,879\,995\,EI^3 L^4 + 25\,321\,037\,886\,EI^2 k L^7 + 8\,422\,137\,EI k^2 L^{10} + 511 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & \left(k \left(6\,956\,134\,879\,995\,EI^3 L^4 + 25\,321\,037\,886\,EI^2 k L^7 + 8\,422\,137\,EI k^2 L^{10} + 511 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2 k^2 L^6 + 3\,921\,291\,EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{In[]:= R4} = - \frac{-4\,261\,625\,379\,EI^2\,k\,L^4\,q - 1\,469\,664\,EI\,k^2\,L^7\,q - 107\,k^3\,L^{10}\,q}{18\,(10\,460\,353\,203\,EI^3 + 1\,937\,102\,445\,EI^2\,k\,L^3 + 761\,076\,EI\,k^2\,L^6 + 53\,k^3\,L^9)}$$

$$\text{Out[]:=} - \frac{-4\,261\,625\,379\,EI^2\,k\,L^4\,q - 1\,469\,664\,EI\,k^2\,L^7\,q - 107\,k^3\,L^{10}\,q}{18\,(10\,460\,353\,203\,EI^3 + 1\,937\,102\,445\,EI^2\,k\,L^3 + 761\,076\,EI\,k^2\,L^6 + 53\,k^3\,L^9)}$$

$$\text{In[]:= R5} = - \left((-10\,564\,956\,735\,030\,EI^3\,k\,L^4\,q - 21\,681\,198\,477\,EI^2\,k^2\,L^7\,q - 7\,910\,379\,EI\,k^3\,L^{10}\,q - 529\,k^4\,L^{13}\,q) / \right. \\ \left. (18\,(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \\ \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2\,k^2\,L^6 + 3\,921\,291\,EI\,k^3\,L^9 + 265\,k^4\,L^{12})) \right)$$

$$\text{Out[]:=} - \left((-10\,564\,956\,735\,030\,EI^3\,k\,L^4\,q - 21\,681\,198\,477\,EI^2\,k^2\,L^7\,q - 7\,910\,379\,EI\,k^3\,L^{10}\,q - 529\,k^4\,L^{13}\,q) / \right. \\ \left. (18\,(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \\ \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2\,k^2\,L^6 + 3\,921\,291\,EI\,k^3\,L^9 + 265\,k^4\,L^{12})) \right)$$

In[]:=

R9 = R2

R8 = R3

R7 = R4

R6 = R5

$$\text{Out[]:=} (k\,(3\,723\,885\,740\,268\,EI^3\,L^4 + 17\,668\,287\,486\,EI^2\,k\,L^7 + 7\,860\,078\,EI\,k^2\,L^{10} + 601\,k^3\,L^{13})\,q) / \\ (18\,(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3\,k\,L^3 + \\ 11\,349\,985\,437\,EI^2\,k^2\,L^6 + 3\,921\,291\,EI\,k^3\,L^9 + 265\,k^4\,L^{12}))$$

$$\text{Out[]:=} (k\,(6\,956\,134\,879\,995\,EI^3\,L^4 + 25\,321\,037\,886\,EI^2\,k\,L^7 + 8\,422\,137\,EI\,k^2\,L^{10} + 511\,k^3\,L^{13})\,q) / \\ (18\,(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3\,k\,L^3 + \\ 11\,349\,985\,437\,EI^2\,k^2\,L^6 + 3\,921\,291\,EI\,k^3\,L^9 + 265\,k^4\,L^{12}))$$

$$\text{Out[]:=} - \frac{-4\,261\,625\,379\,EI^2\,k\,L^4\,q - 1\,469\,664\,EI\,k^2\,L^7\,q - 107\,k^3\,L^{10}\,q}{18\,(10\,460\,353\,203\,EI^3 + 1\,937\,102\,445\,EI^2\,k\,L^3 + 761\,076\,EI\,k^2\,L^6 + 53\,k^3\,L^9)}$$

$$\text{Out[]:=} - \left((-10\,564\,956\,735\,030\,EI^3\,k\,L^4\,q - 21\,681\,198\,477\,EI^2\,k^2\,L^7\,q - 7\,910\,379\,EI\,k^3\,L^{10}\,q - 529\,k^4\,L^{13}\,q) / \right. \\ \left. (18\,(22\,876\,792\,454\,961\,EI^4 + 4\,288\,744\,813\,230\,EI^3\,k\,L^3 + \right. \\ \left. 11\,349\,985\,437\,EI^2\,k^2\,L^6 + 3\,921\,291\,EI\,k^3\,L^9 + 265\,k^4\,L^{12})) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R10=R1*)

In[]:= Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + 2 R4 + 2 R5 == 0}, {R1}]
|resuelve

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ \text{R1} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\text{L q} - \left(\text{k} \left(6956134879995 \text{EI}^3 \text{L}^4 + 25321037886 \text{EI}^2 \text{kL}^7 + 8422137 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^{10} + 511 \text{k}^3 \text{L}^{13} \right) \text{q} \right) / \right. \right. \\ \left. \left(9 \left(22876792454961 \text{EI}^4 + 4288744813230 \text{EI}^3 \text{kL}^3 + 11349985437 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^6 + 3921291 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^9 + 265 \text{k}^4 \text{L}^{12} \right) \right) - \right. \\ \left. \left(\text{k} \left(3723885740268 \text{EI}^3 \text{L}^4 + 17668287486 \text{EI}^2 \text{kL}^7 + 7860078 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^{10} + 601 \text{k}^3 \text{L}^{13} \right) \text{q} \right) / \right. \\ \left. \left(9 \left(22876792454961 \text{EI}^4 + 4288744813230 \text{EI}^3 \text{kL}^3 + 11349985437 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^6 + 3921291 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^9 + 265 \text{k}^4 \text{L}^{12} \right) \right) + \right. \\ \left. -4261625379 \text{EI}^2 \text{kL}^4 \text{q} - 1469664 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^7 \text{q} - 107 \text{k}^3 \text{L}^{10} \text{q} \right) / \\ \left. 9 \left(10460353203 \text{EI}^3 + 1937102445 \text{EI}^2 \text{kL}^3 + 761076 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^6 + 53 \text{k}^3 \text{L}^9 \right) + \right. \\ \left. \left(-10564956735030 \text{EI}^3 \text{kL}^4 \text{q} - 21681198477 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^7 \text{q} - 7910379 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^{10} \text{q} - 529 \text{k}^4 \text{L}^{13} \text{q} \right) / \right. \\ \left. \left(9 \left(22876792454961 \text{EI}^4 + 4288744813230 \text{EI}^3 \text{kL}^3 + 11349985437 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^6 + 3921291 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^9 + 265 \text{k}^4 \text{L}^{12} \right) \right) \right\} \left. \right\}$$

$$\text{In[]:= } \text{R1} = \frac{1}{2} \left(\text{L q} - \left(\text{k} \left(6956134879995 \text{EI}^3 \text{L}^4 + 25321037886 \text{EI}^2 \text{kL}^7 + 8422137 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^{10} + 511 \text{k}^3 \text{L}^{13} \right) \text{q} \right) / \right. \\ \left. \left(9 \left(22876792454961 \text{EI}^4 + 4288744813230 \text{EI}^3 \text{kL}^3 + 11349985437 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^6 + 3921291 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^9 + 265 \text{k}^4 \text{L}^{12} \right) \right) - \right. \\ \left. \left(\text{k} \left(3723885740268 \text{EI}^3 \text{L}^4 + 17668287486 \text{EI}^2 \text{kL}^7 + 7860078 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^{10} + 601 \text{k}^3 \text{L}^{13} \right) \text{q} \right) / \right. \\ \left. \left(9 \left(22876792454961 \text{EI}^4 + 4288744813230 \text{EI}^3 \text{kL}^3 + 11349985437 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^6 + 3921291 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^9 + 265 \text{k}^4 \text{L}^{12} \right) \right) + \right. \\ \left. -4261625379 \text{EI}^2 \text{kL}^4 \text{q} - 1469664 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^7 \text{q} - 107 \text{k}^3 \text{L}^{10} \text{q} \right) / \\ \left. 9 \left(10460353203 \text{EI}^3 + 1937102445 \text{EI}^2 \text{kL}^3 + 761076 \text{EI} \text{k}^2 \text{L}^6 + 53 \text{k}^3 \text{L}^9 \right) + \right. \\ \left. \left(-10564956735030 \text{EI}^3 \text{kL}^4 \text{q} - 21681198477 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^7 \text{q} - 7910379 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^{10} \text{q} - 529 \text{k}^4 \text{L}^{13} \text{q} \right) / \right. \\ \left. \left(9 \left(22876792454961 \text{EI}^4 + 4288744813230 \text{EI}^3 \text{kL}^3 + 11349985437 \text{EI}^2 \text{k}^2 \text{L}^6 + 3921291 \text{EI} \text{k}^3 \text{L}^9 + 265 \text{k}^4 \text{L}^{12} \right) \right) \right)$$

R10 =
R1

$$\begin{aligned}
Out[*]= & \frac{1}{2} \left(L q - \left(k \left(6956134879995 EI^3 L^4 + 25321037886 EI^2 k L^7 + 8422137 EI k^2 L^{10} + 511 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\
& \left(9 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k \left(3723885740268 EI^3 L^4 + 17668287486 EI^2 k L^7 + 7860078 EI k^2 L^{10} + 601 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(9 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \quad \left. -4261625379 EI^2 k L^4 q - 1469664 EI k^2 L^7 q - 107 k^3 L^{10} q \right) + \\
& \frac{9 \left(10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9 \right)}{\left(-10564956735030 EI^3 k L^4 q - 21681198477 EI^2 k^2 L^7 q - 7910379 EI k^3 L^{10} q - 529 k^4 L^{13} q \right) /} \\
& \left(9 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]= & \frac{1}{2} \left(L q - \left(k \left(6956134879995 EI^3 L^4 + 25321037886 EI^2 k L^7 + 8422137 EI k^2 L^{10} + 511 k^3 L^{13} \right) q \right) / \right. \\
& \left(9 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k \left(3723885740268 EI^3 L^4 + 17668287486 EI^2 k L^7 + 7860078 EI k^2 L^{10} + 601 k^3 L^{13} \right) q \right) / \\
& \left(9 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) + \\
& \quad \left. -4261625379 EI^2 k L^4 q - 1469664 EI k^2 L^7 q - 107 k^3 L^{10} q \right) + \\
& \frac{9 \left(10460353203 EI^3 + 1937102445 EI^2 k L^3 + 761076 EI k^2 L^6 + 53 k^3 L^9 \right)}{\left(-10564956735030 EI^3 k L^4 q - 21681198477 EI^2 k^2 L^7 q - 7910379 EI k^3 L^{10} q - 529 k^4 L^{13} q \right) /} \\
& \left(9 \left(22876792454961 EI^4 + 4288744813230 EI^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11349985437 EI^2 k^2 L^6 + 3921291 EI k^3 L^9 + 265 k^4 L^{12} \right) \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

(*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.20 \text{ (m)}$$

$$H = 0.30 \text{ (m)}$$

$$k_s = 10\,000\,000 \text{ (N/m}^3\text{)}$$

└valor numérico

$$E_c = 21\,707\,945\,522.8 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

└valor numérico

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (m}^4\text{)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (N/m}^2\text{)}$$

└valor numérico

$$L = 30 \text{ (m)}$$

$$q = 100 \text{ (N)}$$

└valor numérico

$$EI = E_c * I_z \text{ (N*m}^2\text{)}$$

└valor numérico

$$B = 0.20 \text{ (m)}$$

$$H = 0.30 \text{ (m)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (N/m}^3\text{)}$$

└valor numérico

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

└valor numérico

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$\text{Out[]= } 0.2$$

$$\text{Out[]= } 0.3$$

$$\text{Out[]= } 10\,000\,000$$

$$\text{Out[]= } 2.17079 \times 10^{10}$$

$$\text{Out[]= } 0.00045$$

$$\text{Out[]= } 2. \times 10^6$$

$$\text{Out[]= } 30$$

$$\text{Out[]= } 100$$

$$\text{Out[]= } 9.76858 \times 10^6$$

$$\text{Out[]= } 0.2$$

$$\text{Out[]= } 0.3$$

$$\text{Out[]= } 12\,000\,000\,000$$

$$\text{Out[]= } 19\,928\,032\,768$$

$$\text{Out[]= } 0.00045$$

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

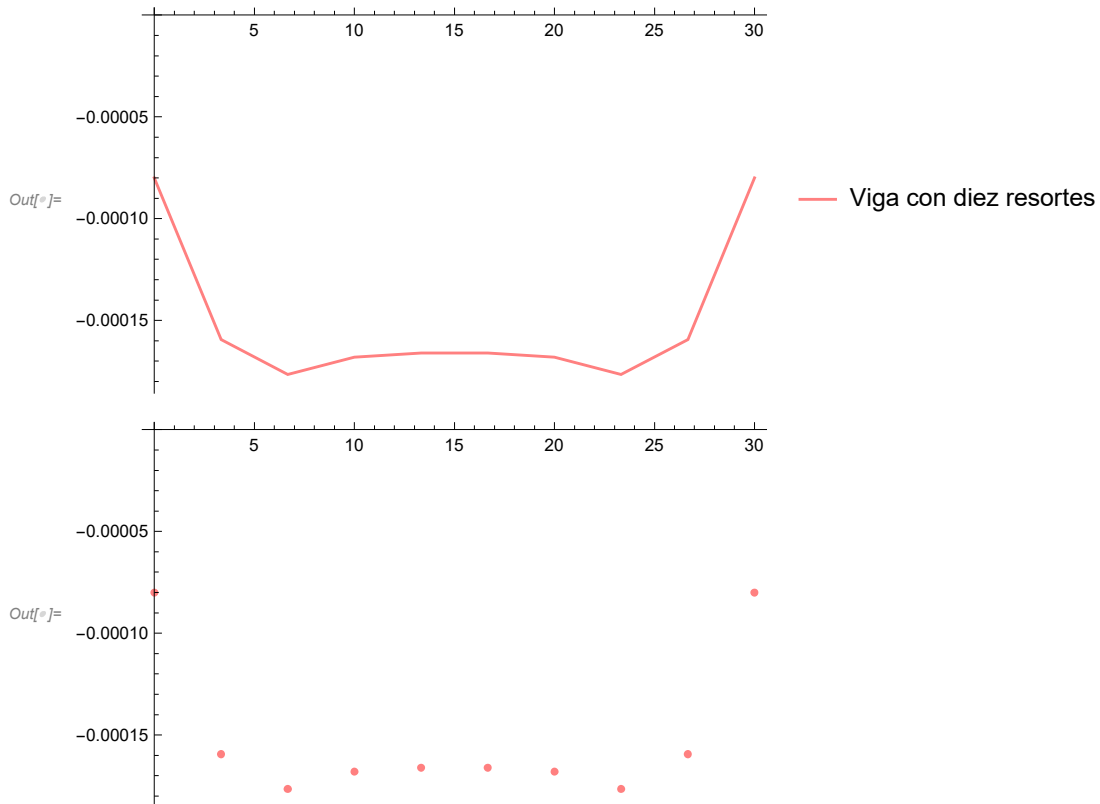
```

In[ ]:= g17 = ListLinePlot [
  gráfico de línea de una lista
  { {0, -R1 / k}, {L/9, -R2 / k}, {2L/9, -R3 / k}, {3L/9, -R4 / k}, {4L/9, -R5 / k}, {5L/9, -R6 / k},
    {6L/9, -R7 / k}, {7L/9, -R8 / k}, {8L/9, -R9 / k}, {L, -R10 / k} }, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Pink, PlotLegends -> {"Viga con diez resortes"} ]
  rango de rep... [todo [estilo de repr... [rosa [leyendas de representación

g18 = ListPlot [ { {0, -R1 / k}, {L/9, -R2 / k}, {2L/9, -R3 / k}, {3L/9, -R4 / k}, {4L/9, -R5 / k},
  representación de lista
  {5L/9, -R6 / k}, {6L/9, -R7 / k}, {7L/9, -R8 / k}, {8L/9, -R9 / k}, {L, -R10 / k} },
  PlotStyle -> Pink, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All ]
  estilo de repr... [rosa [origen de ejes [rango de rep... [todo

Show[g17, g18]
  muestra

```



A.1.3. Ejemplo 3: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida, aplicando la teoría de Euler-Bernoulli

(*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*PRIMER VIGA CON UN RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

In[]:=

$$D\left[\frac{1}{2 EI} \int_0^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx, R1\right]$$

$$\text{Out[]} = \frac{-\frac{L^4 q}{4} + \frac{2 L^3 R1}{3}}{2 EI}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve}\left[\left\{\frac{-\frac{L^4 q}{4} + \frac{2 L^3 R1}{3}}{2 EI} == -\frac{R1}{k}\right\}, \{R1\}\right]$$

$$\text{Out[]} = \left\{\left\{R1 \rightarrow \frac{3 k L^4 q}{8 (3 EI + k L^3)}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]} := R1 = \frac{3 k L^4 q}{8 (3 EI + k L^3)}$$

$$\text{Out[]} = \frac{3 k L^4 q}{8 (3 EI + k L^3)}$$

```

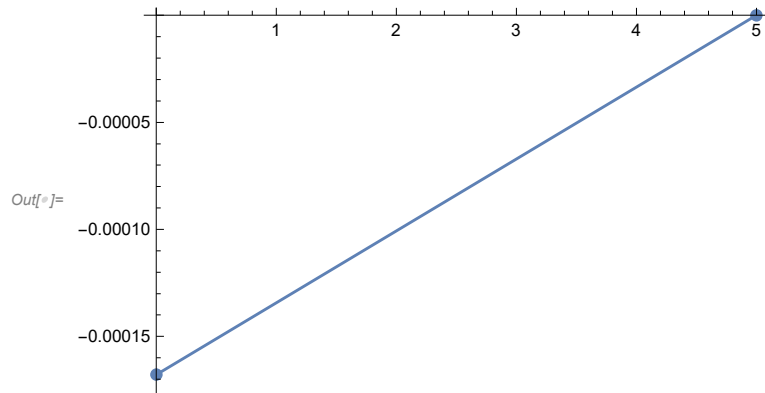
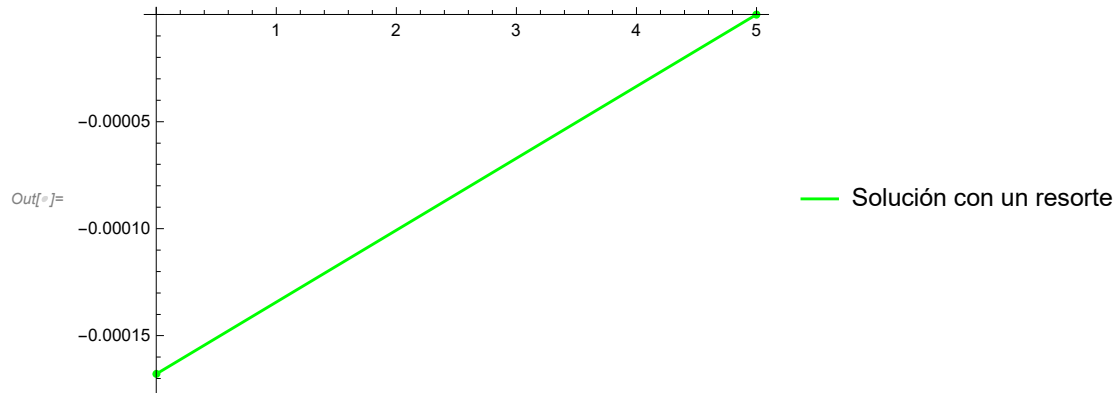
In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10000000 (*N/m^3*)
      [valor numérico]
  Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      [valor numérico]
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      [valor numérico]
  L = 5 (*m*)
  q = 200 (*N*)
      [valor numérico]
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      [valor numérico]

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10000000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 5
Out[ ]:= 200
Out[ ]:= 9.76858 × 106

In[ ]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)
  g1 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin → {0, 0},
      [gráfico de línea de una lista] [origen de ejes]
      PlotRange → All, PlotStyle → {Green}, PlotLegends → {"Solución con un resorte"}]
      [rango de rep... [todo [estilo de repre... [verde [leyendas de representación]
  g2 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}}, PlotStyle → {Green},
      [representación de lista] [estilo de repre... [verde]
      AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
      [origen de ejes] [rango de rep... [todo]
  Show[g1, g2]
      [muestra]

```



```
In[*]:= Clear[g1, g2, k, L, q, EI, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R9, G, A, B, H, ks, Es, Iz, v, Ec]  
|borra
```

(*VIGA EMPOTRADA CON 2 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

In[*]:=

$$D\left[\frac{1}{2 \cdot EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left((R1) \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 \cdot EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left((R1) \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx, R1\right]$$

$$\text{Out[*]} = \frac{-\frac{L^4 q}{64} + \frac{L^3 R1}{12}}{2 EI} + \frac{-\frac{15 L^4 q}{64} + \frac{7 L^3 R1}{12} + \frac{5 L^3 R2}{24}}{2 EI}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D\left[\frac{1}{2 \cdot EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left((R1) \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 \cdot EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left((R1) \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx, R2\right]$$

$$\text{Out[*]} = \frac{-\frac{17 L^4 q}{192} + \frac{5 L^3 R1}{24} + \frac{L^3 R2}{12}}{2 EI}$$

In[*]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve}\left[\left\{ \frac{-\frac{L^4 q}{64} + \frac{L^3 R1}{12}}{2 EI} + \frac{-\frac{15 L^4 q}{64} + \frac{7 L^3 R1}{12} + \frac{5 L^3 R2}{24}}{2 EI} == -\frac{R1}{k}, \frac{-\frac{17 L^4 q}{192} + \frac{5 L^3 R1}{24} + \frac{L^3 R2}{12}}{2 EI} == -\frac{R2}{k} \right\}, \{R1, R2\}\right]$$

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{k (2304 EI L^4 + 11 k L^7) q}{8 (2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}, R2 \rightarrow \frac{2 (51 EI k L^4 q + 2 k^2 L^7 q)}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6} \right\} \right\}$$

In[*]:=

$$R1 = \frac{k (2304 EI L^4 + 11 k L^7) q}{8 (2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}$$

$$R2 = \frac{2 (51 EI k L^4 q + 2 k^2 L^7 q)}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[*]} = \frac{k (2304 EI L^4 + 11 k L^7) q}{8 (2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6)}$$

$$\text{Out[*]} = \frac{2 (51 EI k L^4 q + 2 k^2 L^7 q)}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 5 (*m*)
q = 200 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

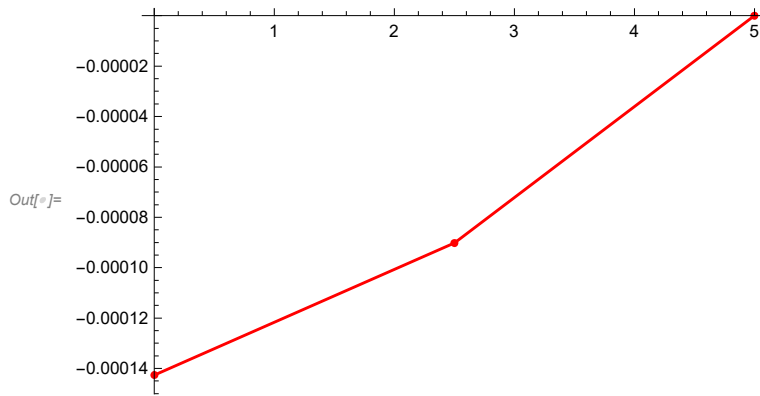
Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10000000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 5
Out[ ]:= 200
Out[ ]:= 9.76858 × 106

In[ ]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)
g3 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin → {0, 0},
      |gráfico de línea de una lista |origen de ejes
      PlotRange → All, PlotStyle → {Red}, PlotLegends → {"Solución con dos resortes"}]
      |rango de rep... |todo |estilo de repre... |rojo |leyendas de representación

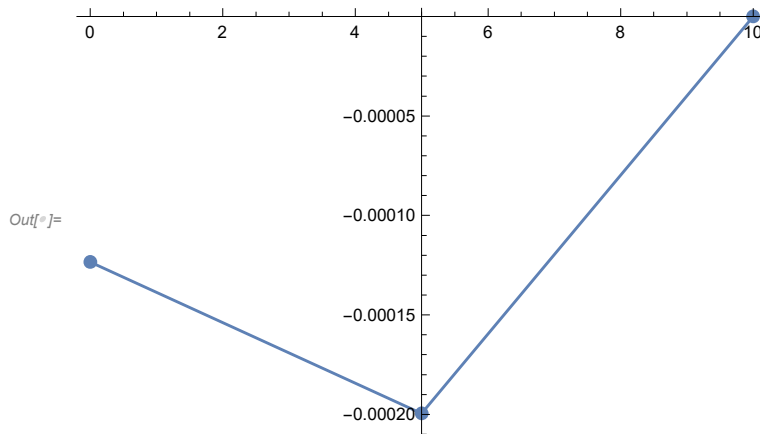
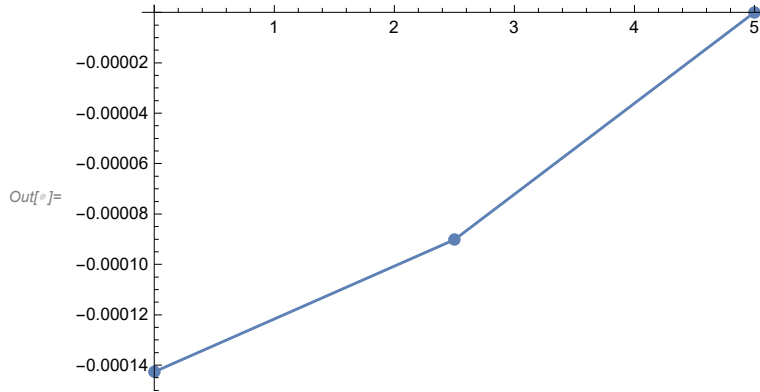
g4 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, 0}},
      |representación de lista
      PlotStyle → {Red}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
      |estilo de repre... |rojo |origen de ejes |rango de rep... |todo

Show[
|muestra
g3,
g4]

```

— Solución con dos resortes



In[*]:= (*VIGA EMPOTRADA CON 3 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3} \right) \right)^2 dx \right], R1\right] \\
 \text{Out[*]} = \frac{-\frac{L^4 q}{324} + \frac{2 L^3 R1}{81}}{2 EI} + \frac{-\frac{5 L^4 q}{108} + \frac{14 L^3 R1}{81} + \frac{5 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{L^3 (-975 L q + 60 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{9720 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3} \right) \right)^2 dx \right], R2\right] \\
 \text{Out[*]} = \frac{-\frac{17 L^4 q}{972} + \frac{5 L^3 R1}{81} + \frac{2 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{L^3 (-595 L q + 60 (23 R1 + 14 R2 + 5 R3))}{9720 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\text{In[]:= } \mathcal{D} \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3} \right) \right)^2 dx \right], R3 \right]$$

$$\text{Out[]:= } \frac{L^3 (-215 L q + 60 (8 R1 + 5 R2 + 2 R3))}{9720 EI}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve} \left[\left\{ \frac{-\frac{L^4 q}{324} + \frac{2 L^3 R1}{81}}{2 EI} + \frac{-\frac{5 L^4 q}{108} + \frac{14 L^3 R1}{81} + \frac{5 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{L^3 (-975 L q + 60 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{9720 EI} == -\frac{R1}{k}, \right. \right.$$

$$\left. \frac{-\frac{17 L^4 q}{972} + \frac{5 L^3 R1}{81} + \frac{2 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{L^3 (-595 L q + 60 (23 R1 + 14 R2 + 5 R3))}{9720 EI} == -\frac{R2}{k}, \right.$$

$$\left. \frac{L^3 (-215 L q + 60 (8 R1 + 5 R2 + 2 R3))}{9720 EI} == -\frac{R3}{k} \right\}, \{R1, R2, R3\}]$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ \begin{aligned} R1 &\rightarrow \frac{k L^4 (6377292 EI^2 + 35964 EI k L^3 + 41 k^2 L^6) q}{24 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}, \\ R2 &\rightarrow \frac{k L^4 (1784592 EI^2 + 48357 EI k L^3 + 59 k^2 L^6) q}{12 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}, \\ R3 &\rightarrow -\frac{-282123 EI^2 k L^4 q - 15633 EI k^2 L^7 q - 25 k^3 L^{10} q}{6 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)} \end{aligned} \right\} \right\}$$

$$\text{In[*]:= R1} = \frac{k L^4 (6377292 EI^2 + 35964 EI k L^3 + 41 k^2 L^6) q}{24 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{R2} = \frac{k L^4 (1784592 EI^2 + 48357 EI k L^3 + 59 k^2 L^6) q}{12 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{R3} = - \frac{-282123 EI^2 k L^4 q - 15633 EI k^2 L^7 q - 25 k^3 L^{10} q}{6 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[*]:=} \frac{k L^4 (6377292 EI^2 + 35964 EI k L^3 + 41 k^2 L^6) q}{24 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[*]:=} \frac{k L^4 (1784592 EI^2 + 48357 EI k L^3 + 59 k^2 L^6) q}{12 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

$$\text{Out[*]:=} - \frac{-282123 EI^2 k L^4 q - 15633 EI k^2 L^7 q - 25 k^3 L^{10} q}{6 (2125764 EI^3 + 944784 EI^2 k L^3 + 10611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9)}$$

```

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 5 (*m*)
  q = 200 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

```

Out[*]= 0.2

Out[*]= 0.3

Out[*]= 10 000 000

Out[*]= 2.17079×10^{10}

Out[*]= 0.00045

Out[*]= $2. \times 10^6$

Out[*]= 5

Out[*]= 200

Out[*]= 9.76858×10^6

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g5 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0},
  gráfico de línea de una lista origen de ejes
```

```
PlotRange -> All, PlotStyle -> {Blue}, PlotLegends -> {"Solución con tres resortes"}]
  rango de rep... todo estilo de repre... azul leyendas de representación
```

```
g6 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, 0}},
  representación de lista
```

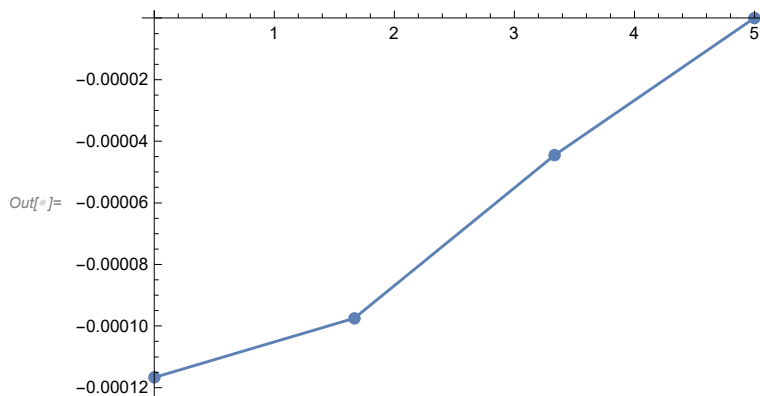
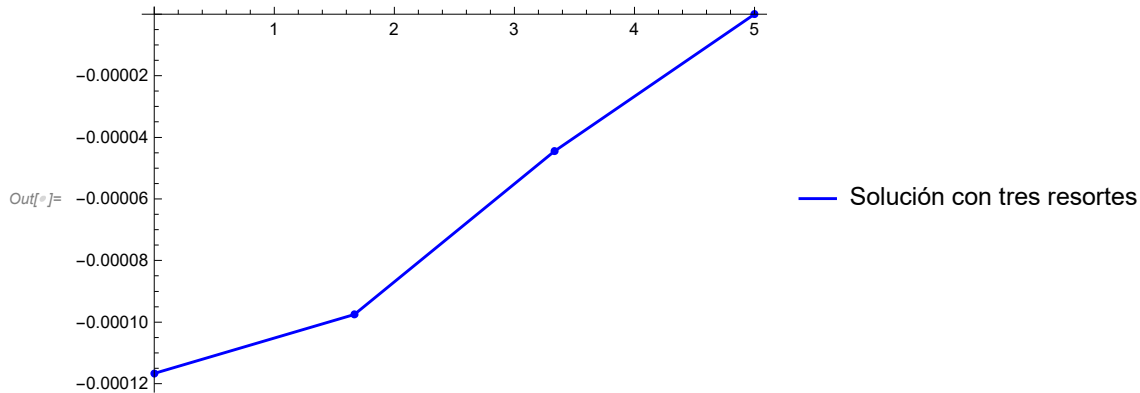
```
PlotStyle -> {Blue}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repre... azul origen de ejes rango de rep... todo
```

Show[

muestra

g5,

g6]



(*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*PRIMER VIGA CON CUATRO RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 \text{In}[] := & \text{D} \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{2L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{4}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx \right], R1] \\
 \text{Out}[] := & -\frac{L^4 q}{1024} + \frac{L^3 R1}{96} - \frac{15 L^4 q}{1024} + \frac{7 L^3 R1}{96} + \frac{5 L^3 R2}{192} + \frac{L^3 (-3900 L q + 320 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{122880 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-10500 L q + 320 (74 R1 + 53 R2 + 32 R3 + 11 R4))}{122880 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{In}[] := & \text{D} \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{2L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{4}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx \right], R2] \\
 \text{Out}[] := & -\frac{17 L^4 q}{3072} + \frac{5 L^3 R1}{192} + \frac{L^3 R2}{96} + \frac{L^3 (-2380 L q + 320 (23 R1 + 14 R2 + 5 R3))}{122880 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-7540 L q + 320 (53 R1 + 38 R2 + 23 R3 + 8 R4))}{122880 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{2L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4}\right)\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{4}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4}\right)\right)^2 dx\right], R3] \\
 \text{Out[]:= } & \frac{L^3 (-860 L q + 320 (8 R1 + 5 R2 + 2 R3))}{122880 EI} + \frac{L^3 (-4580 L q + 320 (32 R1 + 23 R2 + 14 R3 + 5 R4))}{122880 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{2L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4}\right)\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{4}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4}\right)\right)^2 dx\right], R4] \\
 \text{Out[]:= } & \frac{L^3 (-1620 L q + 320 (11 R1 + 8 R2 + 5 R3 + 2 R4))}{122880 EI}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\text{Solve}\left[\left\{\begin{aligned} & \frac{-\frac{L^4 q}{1024} + \frac{L^3 R1}{96}}{2 EI} + \frac{-\frac{15 L^4 q}{1024} + \frac{7 L^3 R1}{96} + \frac{5 L^3 R2}{192}}{2 EI} + \frac{L^3 (-3900 L q + 320 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{122 880 EI} + \\ & \frac{L^3 (-10 500 L q + 320 (74 R1 + 53 R2 + 32 R3 + 11 R4))}{122 880 EI} == -\frac{R1}{k}, \\ & -\frac{17 L^4 q}{3072} + \frac{5 L^3 R1}{192} + \frac{L^3 R2}{96} + \frac{L^3 (-2380 L q + 320 (23 R1 + 14 R2 + 5 R3))}{122 880 EI} + \\ & \frac{L^3 (-7540 L q + 320 (53 R1 + 38 R2 + 23 R3 + 8 R4))}{122 880 EI} == -\frac{R2}{k}, \\ & \frac{L^3 (-860 L q + 320 (8 R1 + 5 R2 + 2 R3))}{122 880 EI} + \frac{L^3 (-4580 L q + 320 (32 R1 + 23 R2 + 14 R3 + 5 R4))}{122 880 EI} == -\frac{R3}{k}, \\ & \frac{L^3 (-1620 L q + 320 (11 R1 + 8 R2 + 5 R3 + 2 R4))}{122 880 EI} == -\frac{R4}{k} \end{aligned}\right\}, \{R1, R2, R3, R3, R4\}\right]$$

$$\text{Out[]} = \left\{\left\{\begin{aligned} R1 \rightarrow & \frac{3 k (14 495 514 624 EI^3 L^4 + 96 927 744 EI^2 k L^7 + 160 256 EI k^2 L^{10} + 51 k^3 L^{13}) q}{16 (21 743 271 936 EI^4 + 11 324 620 800 EI^3 k L^3 + 157 040 640 EI^2 k^2 L^6 + 277 248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}, \\ R2 \rightarrow & \frac{k (3 630 956 544 EI^3 L^4 + 81 580 032 EI^2 k L^7 + 141 552 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13}) q}{2 (21 743 271 936 EI^4 + 11 324 620 800 EI^3 k L^3 + 157 040 640 EI^2 k^2 L^6 + 277 248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}, \\ R3 \rightarrow & -\frac{7 700 742 144 EI^3 k L^4 q - 336 125 952 EI^2 k^2 L^7 q - 633 216 EI k^3 L^{10} q - 187 k^4 L^{13} q}{8 (21 743 271 936 EI^4 + 11 324 620 800 EI^3 k L^3 + 157 040 640 EI^2 k^2 L^6 + 277 248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}, \\ R4 \rightarrow & -\frac{573 308 928 EI^3 k L^4 q - 39 186 432 EI^2 k^2 L^7 q - 101 664 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q}{2 (21 743 271 936 EI^4 + 11 324 620 800 EI^3 k L^3 + 157 040 640 EI^2 k^2 L^6 + 277 248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})} \end{aligned}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{3 k (14495514624 EI^3 L^4 + 96927744 EI^2 k L^7 + 160256 EI k^2 L^{10} + 51 k^3 L^{13}) q}{16 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

$$R2 = \frac{k (3630956544 EI^3 L^4 + 81580032 EI^2 k L^7 + 141552 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13}) q}{2 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

$$R3 = - \frac{-7700742144 EI^3 k L^4 q - 336125952 EI^2 k^2 L^7 q - 633216 EI k^3 L^{10} q - 187 k^4 L^{13} q}{8 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

$$R4 = - \frac{-573308928 EI^3 k L^4 q - 39186432 EI^2 k^2 L^7 q - 101664 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q}{2 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{3 k (14495514624 EI^3 L^4 + 96927744 EI^2 k L^7 + 160256 EI k^2 L^{10} + 51 k^3 L^{13}) q}{16 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k (3630956544 EI^3 L^4 + 81580032 EI^2 k L^7 + 141552 EI k^2 L^{10} + 55 k^3 L^{13}) q}{2 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{-7700742144 EI^3 k L^4 q - 336125952 EI^2 k^2 L^7 q - 633216 EI k^3 L^{10} q - 187 k^4 L^{13} q}{8 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

$$\text{Out[]:= } - \frac{-573308928 EI^3 k L^4 q - 39186432 EI^2 k^2 L^7 q - 101664 EI k^3 L^{10} q - 49 k^4 L^{13} q}{2 (21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12})}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 5 (*m*)
q = 200 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 5
Out[ ]:= 200
Out[ ]:= 9.76858 × 106

```

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g7 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0}},
  [gráfico de línea de una lista
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Yellow},
  [origen de ejes [rango de rep... [todo [estilo de repre... [amarillo
```

```
  PlotLegends -> {"Solución con cuatro resortes"}]
  [leyendas de representación
```

```
g8 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0}},
  [representación de lista
```

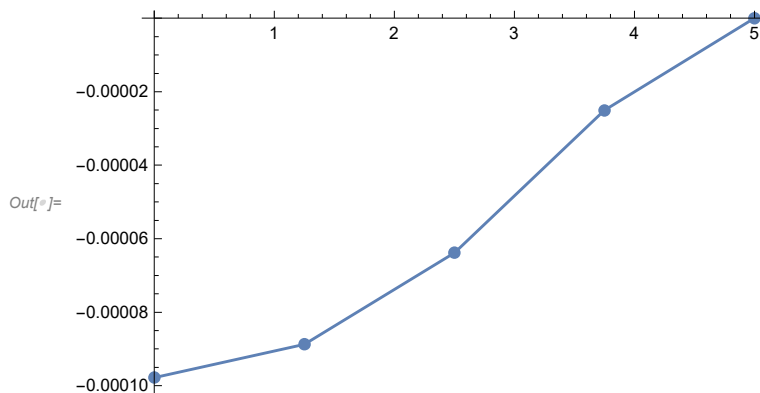
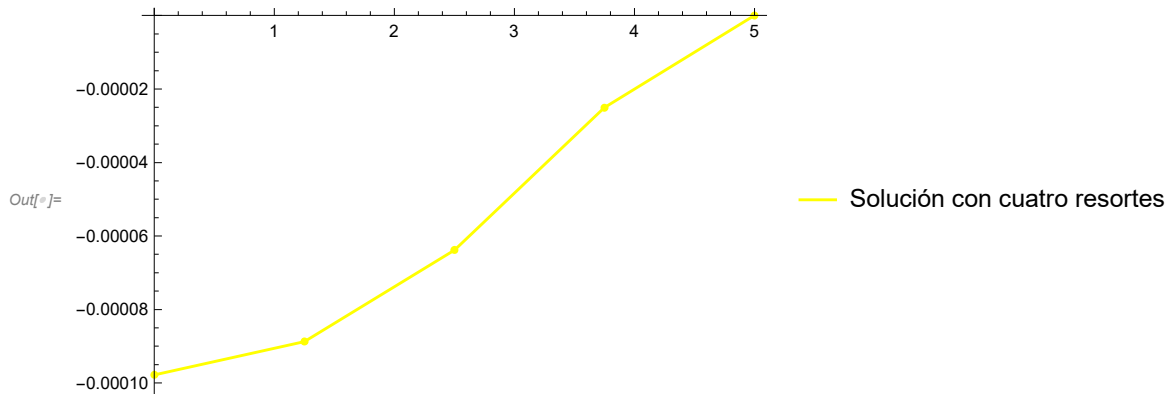
```
  PlotStyle -> {Yellow}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [estilo de repre... [amarillo [origen de ejes [rango de rep... [todo
```

Show[

[muestra

g7,

g8]



In[]:= (*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$D \left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_5^{2L} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{2L}^{3L} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{3L}^{4L} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{4L}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R1]$$

$$Out[]:= \frac{-\frac{L^4 q}{2500} + \frac{2 L^3 R1}{375}}{2 EI} + \frac{-\frac{3 L^4 q}{500} + \frac{14 L^3 R1}{375} + \frac{L^3 R2}{75}}{2 EI} + \frac{L^3 (-4875 L q + 500 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{375 000 EI} +$$

$$\frac{L^3 (-13 125 L q + 500 (74 R1 + 53 R2 + 32 R3 + 11 R4))}{375 000 EI} +$$

$$\frac{L^3 (-27 675 L q + 61 000 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - 13 500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{375 000 EI}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R2]$$

$$Out[]:= -\frac{17 L^4 q}{7500} + \frac{L^3 R1}{75} + \frac{2 L^3 R2}{375} + \frac{L^3 (-2975 L q + 500 (23 R1 + 14 R2 + 5 R3))}{375000 EI} +$$

$$\frac{L^3 (-9425 L q + 500 (53 R1 + 38 R2 + 23 R3 + 8 R4))}{375000 EI} +$$

$$\frac{1}{375000 EI} L^3 (-27675 L q - 13500 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) -$$

$$10500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + 6100 (L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5)))$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]} = & \frac{L^3 (-1075 L q + 500 (8 R1 + 5 R2 + 2 R3))}{375 000 EI} + \frac{L^3 (-5725 L q + 500 (32 R1 + 23 R2 + 14 R3 + 5 R4))}{375 000 EI} + \\
 & \frac{1}{375 000 EI} L^3 (-27 675 L q - 27 000 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - \\
 & 7500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + 6100 (2 L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5)))
 \end{aligned}$$

In[*]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & \frac{L^3 (-2025 L q + 500 (11 R1 + 8 R2 + 5 R3 + 2 R4))}{375000 EI} + \\
 & \frac{1}{375000 EI} L^3 (-27675 L q - 40500 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - \\
 & 4500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + 6100 (3 L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5)))
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & \frac{1}{375000 EI} L^3 (-27675 L q - 54000 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - \\
 & 1500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + 6100 (4 L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5)))
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\begin{aligned}
 \text{Solve} \left[\left\{ \frac{-\frac{L^4 q}{2500} + \frac{2L^3 R1}{375}}{2 EI} + \frac{-\frac{3L^4 q}{500} + \frac{14L^3 R1}{375} + \frac{L^3 R2}{75}}{2 EI} + \frac{L^3 (-4875 L q + 500 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{375 000 EI} + \right. \right. \\
 \left. \frac{L^3 (-13 125 L q + 500 (74 R1 + 53 R2 + 32 R3 + 11 R4))}{375 000 EI} + \right. \\
 \left. \frac{L^3 (-27 675 L q + 61 000 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - 13 500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{375 000 EI} = -\frac{R1}{k}, \right. \\
 \left. -\frac{17 L^4 q}{7500} + \frac{L^3 R1}{75} + \frac{2 L^3 R2}{375} + \frac{L^3 (-2975 L q + 500 (23 R1 + 14 R2 + 5 R3))}{375 000 EI} + \right. \\
 \left. \frac{L^3 (-9425 L q + 500 (53 R1 + 38 R2 + 23 R3 + 8 R4))}{375 000 EI} + \right. \\
 \left. \frac{1}{375 000 EI} L^3 (-27 675 L q - 13 500 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - \right. \\
 \left. 10 500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + 6100 (L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5))) = -\frac{R2}{k}, \right. \\
 \left. \frac{L^3 (-1075 L q + 500 (8 R1 + 5 R2 + 2 R3))}{375 000 EI} + \frac{L^3 (-5725 L q + 500 (32 R1 + 23 R2 + 14 R3 + 5 R4))}{375 000 EI} + \right. \\
 \left. \frac{1}{375 000 EI} L^3 (-27 675 L q - 27 000 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - \right. \\
 \left. 7500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + 6100 (2 L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5))) = -\frac{R3}{k}, \right. \\
 \left. \frac{L^3 (-2025 L q + 500 (11 R1 + 8 R2 + 5 R3 + 2 R4))}{375 000 EI} + \frac{1}{375 000 EI} \right. \\
 \left. L^3 (-27 675 L q - 40 500 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - 4500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + \right. \\
 \left. 6100 (3 L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5))) = -\frac{R4}{k}, \right. \\
 \left. \frac{1}{375 000 EI} L^3 (-27 675 L q - 54 000 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - 1500 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5) + \right. \\
 \left. 6100 (4 L q + 10 (R1 + R2 + R3 + R4 + R5))) = -\frac{R5}{k} \right\}, \{R1, R2, R3, R4, R5\}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[6]= } & \left\{ \left\{ \text{R1} \rightarrow \left(k \left(593\,261\,718\,750\,000\,EI^4 L^4 + 4\,661\,718\,750\,000\,EI^3 k L^7 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 9\,649\,687\,500\,EI^2 k^2 L^{10} + 4\,486\,500\,EI k^3 L^{13} + 571\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \right. \\
& \left. \left(40 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right) \right), \\
& \text{R2} \rightarrow \left(k \left(217\,687\,500\,000\,000\,EI^4 L^4 + 4\,476\,093\,750\,000\,EI^3 k L^7 + 9\,557\,437\,500\,EI^2 k^2 L^{10} + \right. \right. \\
& \left. \left. 5\,729\,625\,EI k^3 L^{13} + 821\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
& \left(20 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right), \\
& \text{R3} \rightarrow \left(k \left(70\,479\,492\,187\,500\,EI^4 L^4 + 2\,643\,468\,750\,000\,EI^3 k L^7 + 5\,714\,859\,375\,EI^2 k^2 L^{10} + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,677\,500\,EI k^3 L^{13} + 349\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
& \left(10 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right), \\
& \text{R4} \rightarrow - \left(\left(-72\,140\,625\,000\,000\,EI^4 k L^4 q - 4\,168\,335\,937\,500\,EI^3 k^2 L^7 q - 10\,845\,562\,500\,EI^2 k^3 L^{10} q - \right. \right. \\
& \left. \left. 5\,658\,750\,EI k^4 L^{13} q - 731\,k^5 L^{16} q \right) / \left(20 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right) \right), \\
& \text{R5} \rightarrow - \left(\left(-10\,362\,304\,687\,500\,EI^4 k L^4 q - 832\,570\,312\,500\,EI^3 k^2 L^7 q - 2\,889\,843\,750\,EI^2 k^3 L^{10} q - \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,206\,875\,EI k^4 L^{13} q - 361\,k^5 L^{16} q \right) / \left(10 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right) \right) \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

In[]:=

$$\begin{aligned}
R1 &= \left(k \left(593\,261\,718\,750\,000\,EI^4 L^4 + 4\,661\,718\,750\,000\,EI^3 k L^7 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 9\,649\,687\,500\,EI^2 k^2 L^{10} + 4\,486\,500\,EI k^3 L^{13} + 571\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
&\quad \left(40 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right) \\
R2 &= \left(k \left(217\,687\,500\,000\,000\,EI^4 L^4 + 4\,476\,093\,750\,000\,EI^3 k L^7 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 9\,557\,437\,500\,EI^2 k^2 L^{10} + 5\,729\,625\,EI k^3 L^{13} + 821\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
&\quad \left(20 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right) \\
R3 &= \left(k \left(70\,479\,492\,187\,500\,EI^4 L^4 + 2\,643\,468\,750\,000\,EI^3 k L^7 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 5\,714\,859\,375\,EI^2 k^2 L^{10} + 2\,677\,500\,EI k^3 L^{13} + 349\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
&\quad \left(10 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right) \\
R4 &= - \left(\left(-72\,140\,625\,000\,000\,EI^4 k L^4 q - 4\,168\,335\,937\,500\,EI^3 k^2 L^7 q - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 10\,845\,562\,500\,EI^2 k^3 L^{10} q - 5\,658\,750\,EI k^4 L^{13} q - 731\,k^5 L^{16} q \right) \right) / \\
&\quad \left(20 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right) \\
R5 &= - \left(\left(-10\,362\,304\,687\,500\,EI^4 k L^4 q - 832\,570\,312\,500\,EI^3 k^2 L^7 q - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,889\,843\,750\,EI^2 k^3 L^{10} q - 2\,206\,875\,EI k^4 L^{13} q - 361\,k^5 L^{16} q \right) \right) / \\
&\quad \left(10 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[]:= & \left(k \left(593\,261\,718\,750\,000\,EI^4 L^4 + 4\,661\,718\,750\,000\,EI^3 k L^7 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 9\,649\,687\,500\,EI^2 k^2 L^{10} + 4\,486\,500\,EI k^3 L^{13} + 571\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
&\quad \left(40 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[]:= & \left(k \left(217\,687\,500\,000\,000\,EI^4 L^4 + 4\,476\,093\,750\,000\,EI^3 k L^7 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 9\,557\,437\,500\,EI^2 k^2 L^{10} + 5\,729\,625\,EI k^3 L^{13} + 821\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
&\quad \left(20 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[]:= & \left(k \left(70\,479\,492\,187\,500\,EI^4 L^4 + 2\,643\,468\,750\,000\,EI^3 k L^7 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 5\,714\,859\,375\,EI^2 k^2 L^{10} + 2\,677\,500\,EI k^3 L^{13} + 349\,k^4 L^{16} \right) q \right) / \\
&\quad \left(10 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3 k^2 L^6 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375\,EI k^4 L^{12} + 181\,k^5 L^{15} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Out}[*]= - \left(\left(-72\,140\,625\,000\,000\,EI^4\,k\,L^4\,q - 4\,168\,335\,937\,500\,EI^3\,k^2\,L^7\,q - \right. \right. \\ \left. \left. 10\,845\,562\,500\,EI^2\,k^3\,L^{10}\,q - 5\,658\,750\,EI\,k^4\,L^{13}\,q - 731\,k^5\,L^{16}\,q \right) / \right. \\ \left. \left(20 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4\,k\,L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3\,k^2\,L^6 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2\,k^3\,L^9 + 1\,335\,375\,EI\,k^4\,L^{12} + 181\,k^5\,L^{15} \right) \right) \right)$$

$$\text{Out}[*]= - \left(\left(-10\,362\,304\,687\,500\,EI^4\,k\,L^4\,q - 832\,570\,312\,500\,EI^3\,k^2\,L^7\,q - \right. \right. \\ \left. \left. 2\,889\,843\,750\,EI^2\,k^3\,L^{10}\,q - 2\,206\,875\,EI\,k^4\,L^{13}\,q - 361\,k^5\,L^{16}\,q \right) / \right. \\ \left. \left(10 \left(118\,652\,343\,750\,000\,EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000\,EI^4\,k\,L^3 + 1\,165\,429\,687\,500\,EI^3\,k^2\,L^6 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 2\,543\,625\,000\,EI^2\,k^3\,L^9 + 1\,335\,375\,EI\,k^4\,L^{12} + 181\,k^5\,L^{15} \right) \right) \right)$$

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.20 \text{ (*m*)}$$

$$H = 0.30 \text{ (*m*)}$$

$$ks = 10\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

└valor numérico

$$Ec = 21\,707\,945\,522.8 \text{ (*N/m^2*)}$$

└valor numérico

$$Iz = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = ks * B \text{ (*N/m^2*)}$$

└valor numérico

$$L = 5 \text{ (*m*)}$$

$$q = 200 \text{ (*N*)}$$

└valor numérico

$$EI = Ec * Iz \text{ (*N*m^2*)}$$

└valor numérico

$$\text{Out}[*]= 0.2$$

$$\text{Out}[*]= 0.3$$

$$\text{Out}[*]= 10\,000\,000$$

$$\text{Out}[*]= 2.17079 \times 10^{10}$$

$$\text{Out}[*]= 0.00045$$

$$\text{Out}[*]= 2. \times 10^6$$

$$\text{Out}[*]= 5$$

$$\text{Out}[*]= 200$$

$$\text{Out}[*]= 9.76858 \times 10^6$$

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

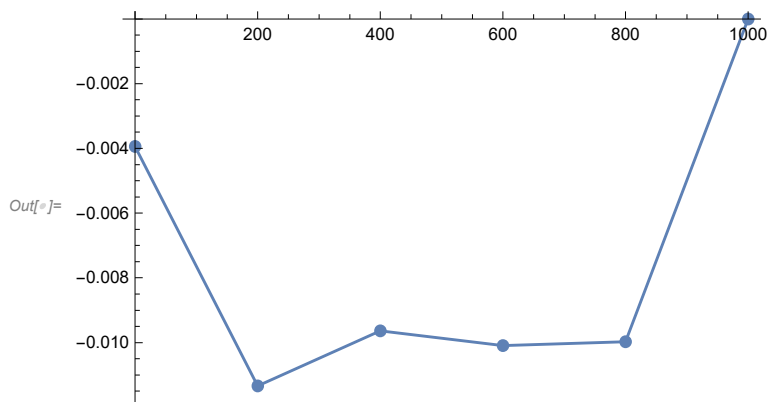
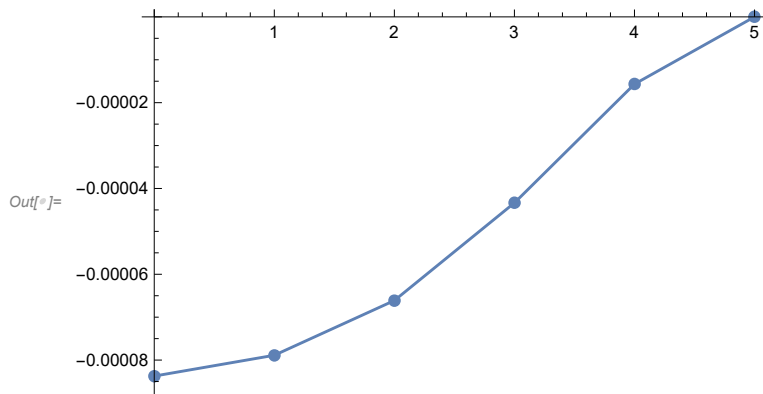
```

g9 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/5, -R2 / k}, {2L/5, -R3 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {3L/5, -R4 / k}, {4L/5, -R5 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [origen de ejes [rango de rep... [todo]

g10 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/5, -R2 / k}, {2L/5, -R3 / k}, {3L/5, -R4 / k}, {4L/5, -R5 / k},
  representación de lista
  {L, 0}}, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [estilo de repr... [tamaño de punto [origen de ejes [rango de rep... [todo]

Show[
  muestra
  g9,
  g10]

```



A.1.4. Ejemplo 4: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro, aplicando la teoría de Euler-Bernoulli

(*VIGA EMPOTRADA CON 1 RESORTES Y CARGA PUNTUAL*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

In[]:=

$$\text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^L (R1 * x - P * x)^2 dx\right], R1\right]$$

$$\text{Out[]} = -\frac{L^3 (P - R1)}{3 EI}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve}\left[\left\{-\frac{L^3 (P - R1)}{3 EI} = \frac{R1}{k}\right\}, \{R1\}\right]$$

$$\text{Out[]} = \left\{\left\{R1 \rightarrow -\frac{k L^3 P}{3 EI - k L^3}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]} := R1 = -\frac{k L^3 P}{3 EI - k L^3}$$

$$\text{Out[]} = -\frac{k L^3 P}{3 EI - k L^3}$$

```

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.20 (*m*)
H = 0.30 (*m*)
ks = 10000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 10 (*m*)
P = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

```

```
Out[*]= 0.2
```

```
Out[*]= 0.3
```

```
Out[*]= 10000000
```

```
Out[*]= 2.17079 × 1010
```

```
Out[*]= 0.00045
```

```
Out[*]= 2. × 106
```

```
Out[*]= 10
```

```
Out[*]= 100
```

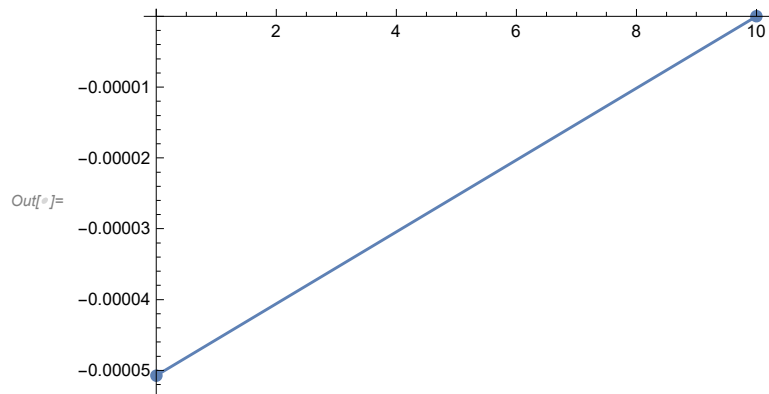
```
Out[*]= 9.76858 × 106
```

```
(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)
```

```

g1 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      |gráfico de línea de una lista |origen de ejes |rango de rep... |todo
g2 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}},
      |representación de lista
      PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      |estilo de repr... |tamaño de punto |origen de ejes |rango de rep... |todo
Show[
|muestra
g1,
g2]

```

```
In[ ]:= R1 / k
```

```
Out[ ]:= 0.0000507435
```

```
In[ ]:= Clear[g1, g2, k, L, P, EI, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R9, G, A, B, H, ks, Es, Iz, v, Ec]  
borra
```

(*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*PRIMER VIGA CON DOS RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[]:=

$$D\left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} ((R1) * x - P * (x)) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) ^ 2 dx\right], R1\right]$$

$$Out[]:= -\frac{L^3 (P - R1)}{24 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{48 EI}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$D\left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} ((R1) * x - P * (x)) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) ^ 2 dx\right], R2\right]$$

$$Out[]:= \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{48 EI}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

Solve[
[resuelve]

$$\left\{ -\frac{L^3 (P - R1)}{24 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{48 EI} == -\frac{R1}{k}, \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{48 EI} == -\frac{R2}{k} \right\}, \{R1, R2\}$$

$$Out[]:= \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{k (768 EI L^3 + 7 k L^6) P}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}, R2 \rightarrow \frac{240 EI k L^3 P}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6} \right\} \right\}$$

In[]:=

$$R1 = \frac{k (768 EI L^3 + 7 k L^6) P}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$R2 = \frac{240 EI k L^3 P}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k (768 EI L^3 + 7 k L^6) P}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{240 EI k L^3 P}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6}$$

In[]:= (*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

Solve[{R1 + R2 - P + R3 == 0}, {R3}]

[|resuelve](#)

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R3 \rightarrow \frac{144 (16 EI^2 P - EI k L^3 P)}{2304 EI^2 + 864 EI k L^3 + 7 k^2 L^6} \right\} \right\}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.20 \text{ (*m*)}$$

$$H = 0.30 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 10\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 21\,707\,945\,522.8 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$P = 100 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

Out[]:= 0.2

Out[]:= 0.3

Out[]:= 10 000 000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.00045

Out[]:= $2. \times 10^6$

Out[]:= 10

Out[]:= 100

Out[]:= 9.76858×10^6

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

In[]:= g1 = ListLinePlot [{ {0, -R1 / k}, { $\frac{L}{2}$, -R2 / k}, {L, 0} }, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
 [gráfico de línea de una lista] [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

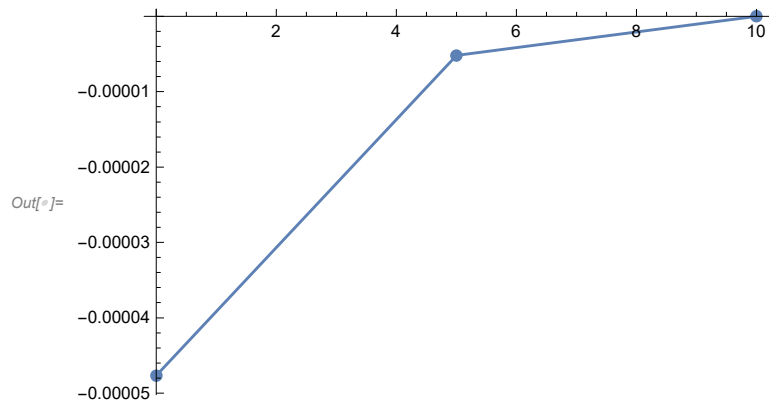
g2 = ListPlot [{ {0, -R1 / k}, { $\frac{L}{2}$, -R2 / k}, {L, 0} },
 [representación de lista]

PlotStyle -> PointSize [0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
 [estilo de repr... [tamaño de punto] [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

Show [
 [muestra]

g1,

g2]



In[]:= **R1 / k**
R2 / k

Out[]:= **0.000047679**

Out[]:= **5.19836 × 10⁻⁶**

(*VIGA EMPOTRADA CON 3 RESORTES Y CARGA PUNTUAL*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} ((R1) * x - P (x)) ^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - P (x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) \right) ^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - P (x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3}\right) \right) ^2 dx \right], R1] \\
 \text{Out[]:= } & -\frac{L^3 (P - R1)}{81 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{162 EI} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{162 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} ((R1) * x - P (x)) ^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - P (x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) \right) ^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - P (x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3}\right) \right) ^2 dx \right], R2] \\
 \text{Out[]:= } & \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{162 EI} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{162 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} ((R1) * x - P (x)) ^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - P (x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) \right) ^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - P (x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3}\right) \right) ^2 dx \right], R3] \\
 \text{Out[]:= } & \frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{162 EI}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve}\left[\left\{-\frac{L^3 (P - R1)}{81 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{162 EI} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{162 EI} = -\frac{R1}{k},\right.\right.$$

$$\left.\frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{162 EI} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{162 EI} = -\frac{R2}{k},\right.$$

$$\left.\frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{162 EI} = -\frac{R3}{k}\right\}, \{R1, R2, R3\}]$$

$$\text{Out[]}:= \left\{ \left\{ \begin{aligned} R1 &\rightarrow \frac{k L^3 (708 588 EI^2 + 10 044 EI k L^3 + 13 k^2 L^6) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}, \\ R2 &\rightarrow \frac{648 k L^3 (567 EI^2 + 2 EI k L^3) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}, \\ R3 &\rightarrow \frac{972 EI k L^3 (108 EI - k L^3) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9} \end{aligned} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]}:= R1 = \frac{k L^3 (708 588 EI^2 + 10 044 EI k L^3 + 13 k^2 L^6) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}$$

$$R2 = \frac{648 k L^3 (567 EI^2 + 2 EI k L^3) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}$$

$$R3 = \frac{972 EI k L^3 (108 EI - k L^3) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}$$

$$\text{Out[]}:= \frac{k L^3 (708 588 EI^2 + 10 044 EI k L^3 + 13 k^2 L^6) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}$$

$$\text{Out[]}:= \frac{648 k L^3 (567 EI^2 + 2 EI k L^3) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}$$

$$\text{Out[]}:= \frac{972 EI k L^3 (108 EI - k L^3) P}{2 125 764 EI^3 + 944 784 EI^2 k L^3 + 10 611 EI k^2 L^6 + 13 k^3 L^9}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.20 \text{ (m)}$$

$$H = 0.30 \text{ (m)}$$

$$k_s = 10000000 \text{ (N/m}^3\text{)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 21707945522.8 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (m}^4\text{)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (N/m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (m)}$$

$$P = 100 \text{ (N)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (N*m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

Out[]:= 0.2

Out[]:= 0.3

Out[]:= 10000000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.00045

Out[]:= $2. \times 10^6$

Out[]:= 10

Out[]:= 100

Out[]:= 9.76858×10^6

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

In[]:= $g1 = \text{ListLinePlot}[\{\{0, -R1/k\}, \{\frac{L}{3}, -R2/k\}, \{\frac{2L}{3}, -R3/k\}, \{L, 0\}\},$
 [gráfico de línea de una lista]

$\text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$
 [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

$g2 = \text{ListPlot}[\{\{0, -R1/k\}, \{\frac{L}{3}, -R2/k\}, \{\frac{2L}{3}, -R3/k\}, \{L, 0\}\},$
 [representación de lista]

$\text{PlotStyle} \rightarrow \text{PointSize}[0.02], \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$
 [estilo de rep... [tamaño de punto] [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

Show[
 [muestra]

g1,

g2]

(*VIGA EMPOTRADA CON 4 RESORTES Y CARGA PUNTUAL*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$In[*]:= D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx, R1 \right]$$

$$Out[*]= -\frac{L^3 (P - R1)}{192 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{384 EI} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{384 EI} + \frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}$$

In[*]:= (*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx, R2 \right]$$

$$Out[*]= \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{384 EI} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{384 EI} + \frac{L^3 (-6 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}$$

In[*]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx, R3 \right]$$

$$Out[*]= \frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{384 EI} + \frac{L^3 (-3 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}$$

In[*]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx, R4 \right]$$

$$Out[*]= \frac{L^3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2}{128 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\text{Solve}\left[\left\{-\frac{L^3 (P - R1)}{192 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{384 EI} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{384 EI} + \frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} = -\frac{R1}{k}, \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{384 EI} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{384 EI} + \frac{L^3 (-6 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} = -\frac{R2}{k}, \frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{384 EI} + \frac{L^3 (-3 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} = -\frac{R3}{k}, \frac{L^3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2}{128 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} = -\frac{R4}{k}\right\}, \{R1, R2, R3, R4\}$$

$$\text{Out[]} = \left\{\left\{\begin{aligned} R1 &\rightarrow \frac{k L^3 (7247757312 EI^3 P + 137723904 EI^2 k L^3 P + 267264 EI k^2 L^6 P + 97 k^3 L^9 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}, \\ R2 &\rightarrow \frac{384 k L^3 (11943936 EI^3 P + 96000 EI^2 k L^3 P + 59 EI k^2 L^6 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}, \\ R3 &\rightarrow \frac{2304 (983040 EI^3 k L^3 P - 5312 EI^2 k^2 L^6 P - 7 EI k^3 L^9 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}, \\ R4 &\rightarrow \frac{4608 EI k L^3 (135168 EI^2 - 2496 EI k L^3 + k^2 L^6) P}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}} \end{aligned}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{k L^3 (7247757312 EI^3 P + 137723904 EI^2 k L^3 P + 267264 EI k^2 L^6 P + 97 k^3 L^9 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

$$R2 = \frac{384 k L^3 (11943936 EI^3 P + 96000 EI^2 k L^3 P + 59 EI k^2 L^6 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

$$R3 = \frac{2304 (983040 EI^3 k L^3 P - 5312 EI^2 k^2 L^6 P - 7 EI k^3 L^9 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

$$R4 = \frac{4608 EI k L^3 (135168 EI^2 - 2496 EI k L^3 + k^2 L^6) P}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k L^3 (7247757312 EI^3 P + 137723904 EI^2 k L^3 P + 267264 EI k^2 L^6 P + 97 k^3 L^9 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{384 k L^3 (11943936 EI^3 P + 96000 EI^2 k L^3 P + 59 EI k^2 L^6 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{2304 (983040 EI^3 k L^3 P - 5312 EI^2 k^2 L^6 P - 7 EI k^3 L^9 P)}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{4608 EI k L^3 (135168 EI^2 - 2496 EI k L^3 + k^2 L^6) P}{21743271936 EI^4 + 11324620800 EI^3 k L^3 + 157040640 EI^2 k^2 L^6 + 277248 EI k^3 L^9 + 97 k^4 L^{12}}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.20 (*m*)
  H = 0.30 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 10 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico

Out[ ]:= 0.2
Out[ ]:= 0.3
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:= 2.17079 × 1010
Out[ ]:= 0.00045
Out[ ]:= 2. × 106
Out[ ]:= 10
Out[ ]:= 100
Out[ ]:= 9.76858 × 106

```

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
In[*]:= g1 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0}},
  [gráfico de línea de una lista
```

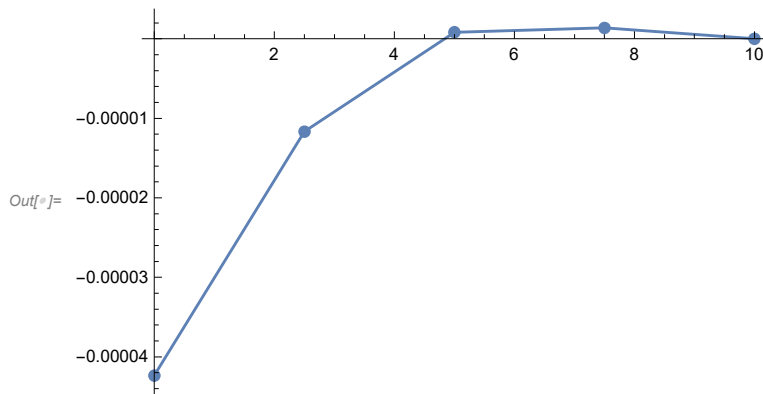
```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [origen de ejes [rango de rep... [todo
```

```
g2 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0}},
  [representación de lista
```

```
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [estilo de repr... [tamaño de punto [origen de ejes [rango de rep... [todo
```

```
Show[
  [muestra
```

```
  g1,
  g2]
```



```
In[*]:= R1 / k
R2 / k
R3 / k
R4 / k
```

Out[*]:= 0.0000423654

Out[*]:= 0.0000116741

Out[*]:= -8.18104×10^{-7}

Out[*]:= -1.37302×10^{-6}

In[]:= (*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*PRIMER VIGA CON CINCO RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx +$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx, R1 \right]$$

$$Out[]:= - \frac{L^3 (P - R1)}{375 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{750 EI} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{750 EI} +$$

$$\frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} -$$

$$\frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} +$$

$$\frac{L^3 (-12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 15 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} -$$

$$\frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & \text{D} \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx, R2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Out[]} = \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{750 EI} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{750 EI} + \\
 & \left(L^3 (-6 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2) \right) / \\
 & (750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)) - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \\
 & \left(L^3 (-9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 12 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2) \right) / \\
 & (750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)) - \\
 & \left(L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3) \right) / \\
 & (750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2)
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]}= & \frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{750 EI} + \frac{L^3 (-3 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \\
 & \frac{L^3 (-6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 9 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 D \left[\right. & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - P * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx, R4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[] = & \frac{L^3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2}{250 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \\
 & \frac{L^3 (-3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 6 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R5*)

$$D \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\ \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\ \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx \right], R5]$$

$$Out[]:= \frac{L^3 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2}{250 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\ \frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$Solve \left[\left\{ -\frac{L^3 (P - R1)}{375 EI} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{750 EI} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{750 EI} + \right. \right. \\ \left. \frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \right. \\ \left. \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \right. \\ \left. \frac{L^3 (-12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 15 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \right. \\ \left. \frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} \right] == -\frac{R1}{k}, \\ \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{750 EI} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{750 EI} + \\ \frac{L^3 (-6 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left(-(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^3 + (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \\
& \frac{L^3 \left(-9(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 + 12(-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = -\frac{R2}{k}, \\
& \frac{L^3 (-8P + 8R1 + 5R2 + 2R3)}{750 EI} + \frac{L^3 \left(-3(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^2 + 6(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^3 + (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \\
& \frac{L^3 \left(-6(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 + 9(-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = \\
& -\frac{R3}{k}, \frac{L^3 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2}{250 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^3 + (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \\
& \frac{L^3 \left(-3(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 + 6(-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = \\
& -\frac{R4}{k}, \frac{L^3 (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2}{250 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = \\
& -\frac{R5}{k} \}, \{R1, R2, R3, R4, R5\}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & \left\{ \left\{ \begin{aligned}
& \text{R1} \rightarrow \left(k L^3 \left(39\,550\,781\,250\,000 EI^4 P + 940\,781\,250\,000 EI^3 k L^3 P + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\,340\,562\,500 EI^2 k^2 L^6 P + 1\,299\,000 EI k^3 L^9 P + 181 k^4 L^{12} P \right) \right) / \\
& \quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
& \quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right), \\
& \text{R2} \rightarrow \left(7500 k L^3 \left(3\,712\,500\,000 EI^4 P + 47\,531\,250 EI^3 k L^3 P + 54\,900 EI^2 k^2 L^6 P + 11 EI k^3 L^9 P \right) \right) / \\
& \quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
& \quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right), \\
& \text{R3} \rightarrow - \left(\left(4500 k L^3 \left(-3\,796\,875\,000 EI^4 P + 2\,625\,000 EI^3 k L^3 P + 43\,375 EI^2 k^2 L^6 P + 13 EI k^3 L^9 P \right) \right) \right) / \\
& \quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
& \quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right), \\
& \text{R4} \rightarrow \left(2250 \left(3\,656\,250\,000 EI^4 k L^3 P - 53\,062\,500 EI^3 k^2 L^6 P - 19\,500 EI^2 k^3 L^9 P + 7 EI k^4 L^{12} P \right) \right) / \\
& \quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
& \quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right), \\
& \text{R5} \rightarrow \left(4500 EI k L^3 \left(492\,187\,500 EI^3 - 13\,500\,000 EI^2 k L^3 + 10\,875 EI k^2 L^6 - k^3 L^9 \right) P \right) / \\
& \quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
& \quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right) \} \}
\end{aligned}$$

In[]:=

$$\begin{aligned}
 R1 &= \left(k L^3 \left(39\,550\,781\,250\,000 EI^4 P + 940\,781\,250\,000 EI^3 k L^3 P + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. 2\,340\,562\,500 EI^2 k^2 L^6 P + 1\,299\,000 EI k^3 L^9 P + 181 k^4 L^{12} P \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
 &\quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right) \\
 R2 &= \left(7500 k L^3 \left(3\,712\,500\,000 EI^4 P + 47\,531\,250 EI^3 k L^3 P + 54\,900 EI^2 k^2 L^6 P + 11 EI k^3 L^9 P \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + \right. \\
 &\quad \left. 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right) \\
 R3 &= - \left(\left(4500 k L^3 \left(-3\,796\,875\,000 EI^4 P + 2\,625\,000 EI^3 k L^3 P + 43\,375 EI^2 k^2 L^6 P + 13 EI k^3 L^9 P \right) \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
 &\quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right) \\
 R4 &= \left(2250 \left(3\,656\,250\,000 EI^4 k L^3 P - 53\,062\,500 EI^3 k^2 L^6 P - 19\,500 EI^2 k^3 L^9 P + 7 EI k^4 L^{12} P \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + \right. \\
 &\quad \left. 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right) \\
 R5 &= \left(4500 EI k L^3 \left(492\,187\,500 EI^3 - 13\,500\,000 EI^2 k L^3 + 10\,875 EI k^2 L^6 - k^3 L^9 \right) P \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + \right. \\
 &\quad \left. 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[]:= &\left(k L^3 \left(39\,550\,781\,250\,000 EI^4 P + 940\,781\,250\,000 EI^3 k L^3 P + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. 2\,340\,562\,500 EI^2 k^2 L^6 P + 1\,299\,000 EI k^3 L^9 P + 181 k^4 L^{12} P \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + \right. \\
 &\quad \left. 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[]:= &\left(7500 k L^3 \left(3\,712\,500\,000 EI^4 P + 47\,531\,250 EI^3 k L^3 P + 54\,900 EI^2 k^2 L^6 P + 11 EI k^3 L^9 P \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + \right. \\
 &\quad \left. 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[]:= &- \left(\left(4500 k L^3 \left(-3\,796\,875\,000 EI^4 P + 2\,625\,000 EI^3 k L^3 P + 43\,375 EI^2 k^2 L^6 P + 13 EI k^3 L^9 P \right) \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + \right. \\
 &\quad \left. 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[]:= &\left(2250 \left(3\,656\,250\,000 EI^4 k L^3 P - 53\,062\,500 EI^3 k^2 L^6 P - 19\,500 EI^2 k^3 L^9 P + 7 EI k^4 L^{12} P \right) \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + \right. \\
 &\quad \left. 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[]:= &\left(4500 EI k L^3 \left(492\,187\,500 EI^3 - 13\,500\,000 EI^2 k L^3 + 10\,875 EI k^2 L^6 - k^3 L^9 \right) P \right) / \\
 &\quad \left(118\,652\,343\,750\,000 EI^5 + 71\,191\,406\,250\,000 EI^4 k L^3 + \right. \\
 &\quad \left. 1\,165\,429\,687\,500 EI^3 k^2 L^6 + 2\,543\,625\,000 EI^2 k^3 L^9 + 1\,335\,375 EI k^4 L^{12} + 181 k^5 L^{15} \right)
 \end{aligned}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.20 \text{ (m)}$$

$$H = 0.30 \text{ (m)}$$

$$k_s = 10000000 \text{ (N/m}^3\text{)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 21707945522.8 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (m}^4\text{)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (N/m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (m)}$$

$$P = 100 \text{ (N)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (N*m}^2\text{)}$$

[valor numérico]

$$\text{Out[]} = 0.2$$

$$\text{Out[]} = 0.3$$

$$\text{Out[]} = 10000000$$

$$\text{Out[]} = 2.17079 \times 10^{10}$$

$$\text{Out[]} = 0.00045$$

$$\text{Out[]} = 2. \times 10^6$$

$$\text{Out[]} = 10$$

$$\text{Out[]} = 100$$

$$\text{Out[]} = 9.76858 \times 10^6$$

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

$$g1 = \text{ListLinePlot} \left[\left\{ \left\{ 0, -R1 / k \right\}, \left\{ \frac{L}{5}, -R2 / k \right\}, \left\{ \frac{2L}{5}, -R3 / k \right\}, \right.$$

[gráfico de línea de una lista]

$$\left. \left\{ \frac{3L}{5}, -R4 / k \right\}, \left\{ \frac{4L}{5}, -R5 / k \right\}, \{L, 0\} \right\}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All} \left[\right]$$

[origen de ejes]

[rango de rep... [todo]

$$g2 = \text{ListPlot} \left[\left\{ \left\{ 0, -R1 / k \right\}, \left\{ \frac{L}{5}, -R2 / k \right\}, \left\{ \frac{2L}{5}, -R3 / k \right\}, \left\{ \frac{3L}{5}, -R4 / k \right\}, \left\{ \frac{4L}{5}, -R5 / k \right\}, \right.$$

[representación de lista]

$$\left. \left\{ L, 0 \right\} \right\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{PointSize} [0.02], \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All} \left[\right]$$

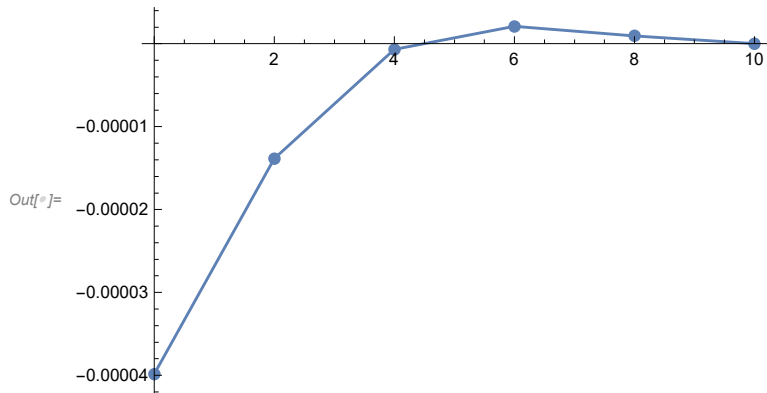
[estilo de repr... [tamaño de punto]

[origen de ejes]

[rango de rep... [todo]

Show[g1, g2]

[muestra]



$In[f_n] :=$ **R1 / k**

R2 / k

R3 / k

R4 / k

R5 / k

$Out[f_n] = 0.0000398505$

$Out[f_n] = 0.0000138529$

$Out[f_n] = 6.97747 \times 10^{-7}$

$Out[f_n] = -2.08979 \times 10^{-6}$

$Out[f_n] = -9.57398 \times 10^{-7}$

A.1.5. Ejemplo 5: Viga sobre apoyos elásticos con carga puntual al centro del claro, aplicando la teoría de Timoshenko

(*VIGA CON TRES RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\text{In[]:= } D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - R2}{2}\right) * x\right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P - R2}{2}\right)^2 dx\right), R2\right]$$

$$\text{Out[]:= } 2 \left(-\frac{L (P - R2)}{8 A G} - \frac{L^3 (P - R2)}{96 EI}\right)$$

In[]:=

$$\text{Solve}\left[\left\{2 \left(-\frac{L (P - R2)}{8 A G} - \frac{L^3 (P - R2)}{96 EI}\right) == -\frac{R2}{k}\right\}, \{R2\}\right]$$

$$\text{Out[]:= } \left\{\left\{R2 \rightarrow \frac{k (12 EI L + A G L^3) P}{48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]:= } R2 = \frac{k (12 EI L + A G L^3) P}{48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{k (12 EI L + A G L^3) P}{48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3}$$

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R3=R1*)

(*R1+R2-P+R1=0*)

$$\text{In[]:= } \text{Solve}\left[\{R1 + R2 + -P + R1 == 0\}, \{R1\}\right]$$

$$\text{Out[]:= } \left\{\left\{R1 \rightarrow \frac{24 A EI G P}{48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3}\right\}\right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{24 A EI G P}{48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{24 A EI G P}{48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3}$$

$$\text{In[]:= } R3 = R1$$

$$\text{Out[]:= } \frac{24 A EI G P}{48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3}$$

(*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.80 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.20 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 10\,000\,000 \text{ (*N/m}^3\text{*)}$$

└valor numérico

$$E_c = 21\,707\,945\,522.8 \text{ (*N/m}^2\text{*)}$$

└valor numérico

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m}^4\text{*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m}^2\text{*)}$$

└valor numérico

$$L = 60 \text{ (*m*)}$$

$$P = 100 \text{ (*N*)}$$

└valor numérico

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m}^2\text{*)}$$

└valor numérico

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

$$\text{Out[*]} = 0.8$$

$$\text{Out[*]} = 1.2$$

$$\text{Out[*]} = 10\,000\,000$$

$$\text{Out[*]} = 2.17079 \times 10^{10}$$

$$\text{Out[*]} = 0.1152$$

$$\text{Out[*]} = 8. \times 10^6$$

$$\text{Out[*]} = 60$$

$$\text{Out[*]} = 100$$

$$\text{Out[*]} = 2.50076 \times 10^9$$

$$\text{Out[*]} = 0.25$$

$$\text{Out[*]} = 8.68318 \times 10^9$$

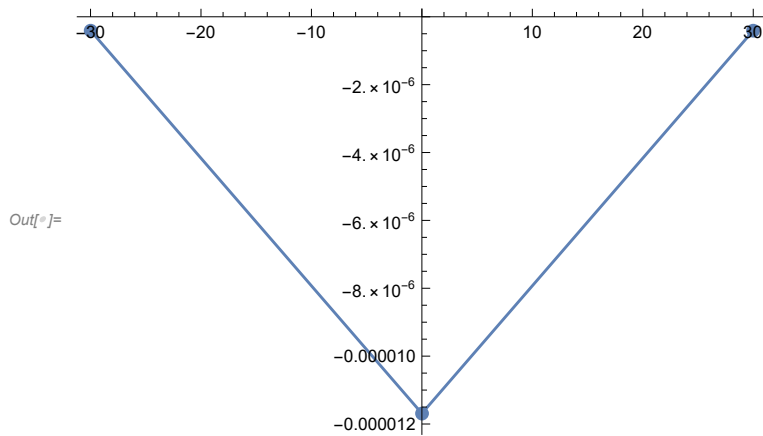
$$\text{Out[*]} = 0.96$$

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

In[ ]:= g1 = ListLinePlot[{{-L / 2, -R1 / k}, {0, -R2 / k}, {L / 2, -R3 / k}},
  gráfico de línea de una lista
  AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
  origen de ejes rango de rep... [todo]
g2 = ListPlot[{{-L / 2, -R1 / k}, {0, -R2 / k}, {L / 2, -R3 / k}}, PlotStyle → PointSize[0.02],
  representación de lista estilo de repr... tamaño de punto
  AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
  origen de ejes rango de rep... [todo]
Show[g1, g2]
muestra

```



In[]:= (*VIGA CON 4 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{P - 2 R2}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{P - 2 R2}{2} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2}{2} \right) + R2 \right)^2 dx \right), R2 \right]$$

$$Out[]:= 2 \left(- \frac{L (P - 2 R2)}{6 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2)}{162 EI} + \frac{- \frac{5 L^3 P}{216} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI} \right)$$

(*SE ENCUENTRA R2*)

$$In[]:= Solve\left[\left\{ 2 \left(- \frac{L (P - 2 R2)}{6 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2)}{162 EI} + \frac{- \frac{5 L^3 P}{216} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI} \right) == - \frac{R2}{k} \right\}, \{R2\} \right]$$

$$Out[]:= \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{k (216 EI L + 23 A G L^3) P}{8 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)} \right\} \right\}$$

(*POR SIMETRÍA R4=R1, R3=R2*)

$$In[]:= R2 = \frac{k (216 EI L + 23 A G L^3) P}{8 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)}$$

$$R3 = R2$$

$$Out[]:= \frac{k (216 EI L + 23 A G L^3) P}{8 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)}$$

$$Out[]:= \frac{k (216 EI L + 23 A G L^3) P}{8 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)}$$

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R4=R1, R3=R2*)

(*2R1+2R2-P=0*)

$$In[]:= Solve\left[\{2 R1 + 2 R2 + - P == 0\}, \{R1\} \right]$$

$$Out[]:= \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{3 (108 A EI G - A G k L^3) P}{8 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)} \right\} \right\}$$

In[]:=

$$R1 = \frac{3 (108 A E I G - A G k L^3) P}{8 (81 A E I G + 54 E I k L + 5 A G k L^3)}$$

$$R4 = R1$$

$$Out[]:= \frac{3 (108 A E I G - A G k L^3) P}{8 (81 A E I G + 54 E I k L + 5 A G k L^3)}$$

$$Out[]:= \frac{3 (108 A E I G - A G k L^3) P}{8 (81 A E I G + 54 E I k L + 5 A G k L^3)}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.80 (*m*)
H = 1.20 (*m*)
ks = 10000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 60 (*m*)
P = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
v = 0.35
G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
A = B * H

```

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10000000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 60

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
In[ ]:= g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/4, -R2/k}, {L/4, -R3/k}, {L/2, -R4/k}},
```

[gráfico de línea de una lista

```
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

[origen de ejes [rango de rep... [todo

```
g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/4, -R2/k}, {L/4, -R3/k}, {L/2, -R4/k}},
```

[representación de lista

```
    PlotStyle -> PointSize[0.02],
```

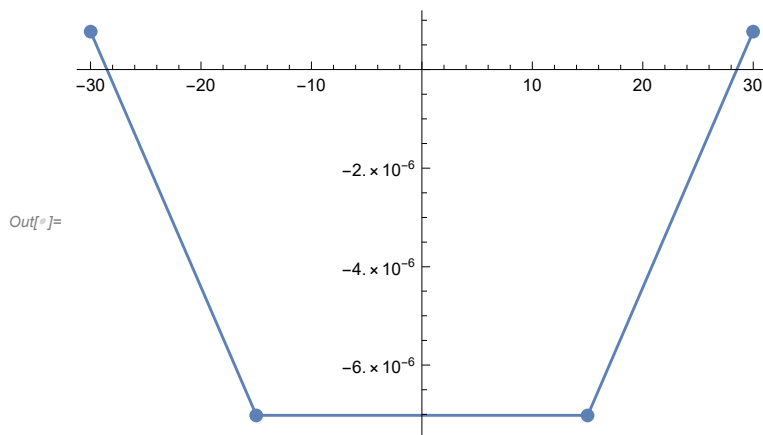
[estilo de repr... [tamaño de punto

```
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

[origen de ejes [rango de rep... [todo

```
Show[g1, g2]
```

[muestra



(*VIGA CON 5 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} = & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{EI}} \right. \right. \\
 & \left. \left. \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{\text{L}}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) + \text{R2} \right)^2 dx \right), \text{R2} \right] \\
 \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{\text{L} (\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3})}{8 \text{AG}} - \frac{\text{L}^3 (\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3})}{384 \text{EI}} + \frac{\text{L}^3 (-18 \text{P} + 24 \text{R2} + 18 \text{R3})}{1536 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} = & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{EI}} \right. \right. \\
 & \left. \left. \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{\text{L}}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3}}{2} \right) + \text{R2} \right)^2 dx \right), \text{R3} \right] \\
 \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{\text{L} (\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3})}{16 \text{AG}} - \frac{\text{L}^3 (\text{P} - 2 \text{R2} - \text{R3})}{768 \text{EI}} + \frac{\text{L}^3 (-14 \text{P} + 18 \text{R2} + 14 \text{R3})}{1536 \text{EI}} + \frac{\text{L} \left(-\text{R2} + \frac{1}{2} (-\text{P} + 2 \text{R2} + \text{R3}) \right)}{8 \text{AG}} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\text{In[]:= Solve}\left[\left\{2\left(-\frac{L(P-2R_2-R_3)}{8AG}-\frac{L^3(P-2R_2-R_3)}{384EI}+\frac{L^3(-18P+24R_2+18R_3)}{1536EI}\right)\right\}=-\frac{R_2}{k},\right.$$

$$\left.2\left(-\frac{L(P-2R_2-R_3)}{16AG}-\frac{L^3(P-2R_2-R_3)}{768EI}+\frac{L^3(-14P+18R_2+14R_3)}{1536EI}+\frac{L\left(-R_2+\frac{1}{2}(-P+2R_2+R_3)\right)}{8AG}\right)\right\}=-\frac{R_3}{k},\{R_2,R_3\}]$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R_2 \rightarrow \frac{384 A E I G k (96 E I L + 11 A G L^3) P}{(147456 A^2 E I^2 G^2 + 110592 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6)}, \right. \right.$$

$$R_3 \rightarrow \left. \left(\frac{(36864 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 3072 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6) P}{(147456 A^2 E I^2 G^2 + 110592 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6)} \right) \right\}$$

In[]:= R2 =

$$\frac{384 A E I G k (96 E I L + 11 A G L^3) P}{147456 A^2 E I^2 G^2 + 110592 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

R3 =

$$\frac{(36864 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 3072 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6) P}{147456 A^2 E I^2 G^2 + 110592 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{384 A E I G k (96 E I L + 11 A G L^3) P}{147456 A^2 E I^2 G^2 + 110592 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{(36864 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 3072 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6) P}{147456 A^2 E I^2 G^2 + 110592 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R5 ES IGUAL A R1 Y R2 ES IGUAL A R4*)

(*2R1+2R2+R3-P=0*)

In[]:=

$$\text{Solve}[\{2 R_1 + 2 R_2 + -P + R_3 == 0\}, \{R_1\}]$$

resuelve

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R_1 \rightarrow \frac{(1152 (64 A^2 E I^2 G^2 P - A^2 E I G^2 k L^3 P))}{(147456 A^2 E I^2 G^2 + 110592 A E I^2 G k L + 9216 E I^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 E I G^2 k L^3 + 960 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6)} \right\} \right\}$$

In[]:= **R1 =**

$$\frac{1152 (64 A^2 EI^2 G^2 P - A^2 EI G^2 k L^3 P)}{147456 A^2 EI^2 G^2 + 110592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

Out[]:=

$$\frac{1152 (64 A^2 EI^2 G^2 P - A^2 EI G^2 k L^3 P)}{147456 A^2 EI^2 G^2 + 110592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

In[]:= **R5 = R1**

R4 = R2

$$\frac{1152 (64 A^2 EI^2 G^2 P - A^2 EI G^2 k L^3 P)}{147456 A^2 EI^2 G^2 + 110592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

Out[]:=

$$\frac{384 A EI G k (96 EI L + 11 A G L^3) P}{147456 A^2 EI^2 G^2 + 110592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.80 (*m*)
  H = 1.20 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 60 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  v = 0.35
  G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
  A = B * H

Out[ ]:= 0.8
Out[ ]:= 1.2
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:=  $2.17079 \times 10^{10}$ 
Out[ ]:= 0.1152
Out[ ]:=  $8. \times 10^6$ 
Out[ ]:= 60
Out[ ]:= 100
Out[ ]:=  $2.50076 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.35
Out[ ]:=  $8.03998 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.96

```

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/4, -R2/k}, {0, -R3/k}, {L/4, -R4/k}, {L/2, -R5/k}},
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

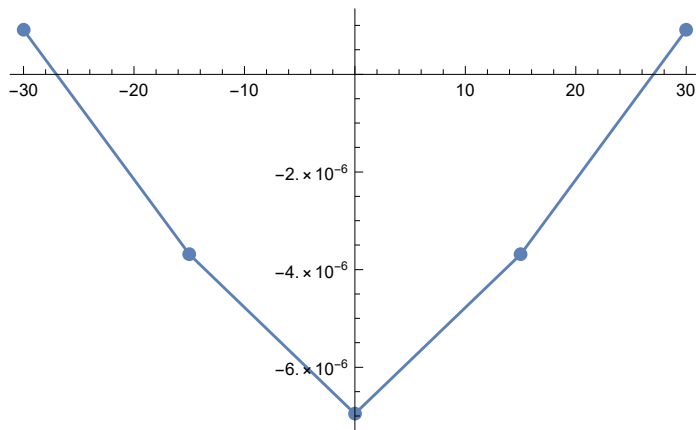
```
g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/4, -R2/k}, {0, -R3/k}, {L/4, -R4/k}, {L/2, -R5/k}},
```

```
  PlotStyle -> PointSize[0.02],
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

```
Show[g1, g2]
```

```
Out[*]:=
```



In[*]:= (*VIGA CON 6 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \right. \right. \\
 & \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx \right], R2]
 \end{aligned}$$

$$\text{Out[*]} = 2 \left(-\frac{L (P - 2 R2 - 2 R3)}{10 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} + \frac{-\frac{3 L^3 P}{250} + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125}}{2 EI} + \frac{L^3 (-108 P + 96 (R2 + 2 R3))}{24000 EI} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[]:=

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx \right), R3]$$

$$Out[]:= 2 \left(-\frac{L (R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3))}{5 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3)}{10 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} + \frac{-\frac{7 L^3 P}{375} + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375}}{2 EI} + \frac{L^3 (-216 P + 192 (R2 + 2 R3))}{24000 EI} \right)$$

In[]:= (*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(-\frac{L (P - 2 R2 - 2 R3)}{10 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} + \frac{-\frac{3 L^3 P}{250} + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125}}{2 EI} + \frac{L^3 (-108 P + 96 (R2 + 2 R3))}{24000 EI} \right) == -\frac{R2}{k}, \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left(-\frac{L (R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3))}{5 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3)}{10 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3)}{750 EI} + \frac{-\frac{7 L^3 P}{375} + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375}}{2 EI} + \frac{L^3 (-216 P + 192 (R2 + 2 R3))}{24000 EI} \right) == -\frac{R3}{k}, \{R2, R3\} \right]$$

$$Out[]:= \left\{ \left\{ R2 \rightarrow -\left((3 A G k (-75000 EI^2 L - 8875 A E I G L^3 + 6 A G k L^6) P) / (8 (140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6)) \right), R3 \rightarrow \left((450000 A EI^2 G k L + 90000 EI^2 k^2 L^2 + 44250 A^2 EI G^2 k L^3 + 10050 A EI G k^2 L^4 + 91 A^2 G^2 k^2 L^6) P \right) / (8 (140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6)) \right\} \right\}$$

In[*]:= R2 =

$$- \left((3 A G k (-75 000 E I^2 L - 8875 A E I G L^3 + 6 A G k L^6) P) / (8 (140 625 A^2 E I^2 G^2 + 168 750 A E I^2 G k L + 22 500 E I^2 k^2 L^2 + 14 625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6)) \right)$$

$$R3 = \left((450 000 A E I^2 G k L + 90 000 E I^2 k^2 L^2 + 44 250 A^2 E I G^2 k L^3 + 10 050 A E I G k^2 L^4 + 91 A^2 G^2 k^2 L^6) P \right) / \left(8 (140 625 A^2 E I^2 G^2 + 168 750 A E I^2 G k L + 22 500 E I^2 k^2 L^2 + 14 625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6) \right)$$

$$Out[*]= - \left((3 A G k (-75 000 E I^2 L - 8875 A E I G L^3 + 6 A G k L^6) P) / (8 (140 625 A^2 E I^2 G^2 + 168 750 A E I^2 G k L + 22 500 E I^2 k^2 L^2 + 14 625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6)) \right)$$

$$Out[*]= \left((450 000 A E I^2 G k L + 90 000 E I^2 k^2 L^2 + 44 250 A^2 E I G^2 k L^3 + 10 050 A E I G k^2 L^4 + 91 A^2 G^2 k^2 L^6) P \right) / \left(8 (140 625 A^2 E I^2 G^2 + 168 750 A E I^2 G k L + 22 500 E I^2 k^2 L^2 + 14 625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6) \right)$$

In[*]:=

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R6=R1, R5=R2 Y R3=R4 *)

R5 = R2

R4 = R3

$$Out[*]= - \left((3 A G k (-75 000 E I^2 L - 8875 A E I G L^3 + 6 A G k L^6) P) / (8 (140 625 A^2 E I^2 G^2 + 168 750 A E I^2 G k L + 22 500 E I^2 k^2 L^2 + 14 625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6)) \right)$$

$$Out[*]= \left((450 000 A E I^2 G k L + 90 000 E I^2 k^2 L^2 + 44 250 A^2 E I G^2 k L^3 + 10 050 A E I G k^2 L^4 + 91 A^2 G^2 k^2 L^6) P \right) / \left(8 (140 625 A^2 E I^2 G^2 + 168 750 A E I^2 G k L + 22 500 E I^2 k^2 L^2 + 14 625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6) \right)$$

In[*]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 - P == 0}, {R1}]

[resuelve](#)

$$Out[*]= \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \left(3 (187 500 A^2 E I^2 G^2 P - 4125 A^2 E I G^2 k L^3 P - 150 A E I G k^2 L^4 P + A^2 G^2 k^2 L^6 P) \right) / \left(8 (140 625 A^2 E I^2 G^2 + 168 750 A E I^2 G k L + 22 500 E I^2 k^2 L^2 + 14 625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6) \right) \right\} \right\}$$

$$\text{In[*]:= R1 = (3 (187500 A^2 EI^2 G^2 P - 4125 A^2 EI G^2 k L^3 P - 150 A EI G k^2 L^4 P + A^2 G^2 k^2 L^6 P)) / (8 (140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6))$$

R6 =

R1

$$\text{Out[*]:= (3 (187500 A^2 EI^2 G^2 P - 4125 A^2 EI G^2 k L^3 P - 150 A EI G k^2 L^4 P + A^2 G^2 k^2 L^6 P)) / (8 (140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6))$$

$$\text{Out[*]:= (3 (187500 A^2 EI^2 G^2 P - 4125 A^2 EI G^2 k L^3 P - 150 A EI G k^2 L^4 P + A^2 G^2 k^2 L^6 P)) / (8 (140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6))$$

In[]:=

(*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.80 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.20 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 10\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

└valor numérico

$$E_c = 21\,707\,945\,522.8 \text{ (*N/m^2*)}$$

└valor numérico

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

└valor numérico

$$L = 60 \text{ (*m*)}$$

$$P = 100 \text{ (*N*)}$$

└valor numérico

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

└valor numérico

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10 000 000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 60

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-3L/10, -R2/k}, {-L/10, -R3/k}, {L/10, -R4/k},
  gráfico de línea de una lista
  {3L/10, -R5/k}, {L/2, -R6/k}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  origen de ejes rango de rep... todo
```

```
g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-3L/10, -R2/k}, {-L/10, -R3/k}, {L/10, -R4/k}, {3L/10, -R5/k},
  representación de lista
  {L/2, -R6/k}}, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... tamaño de punto origen de ejes rango de rep... todo
```

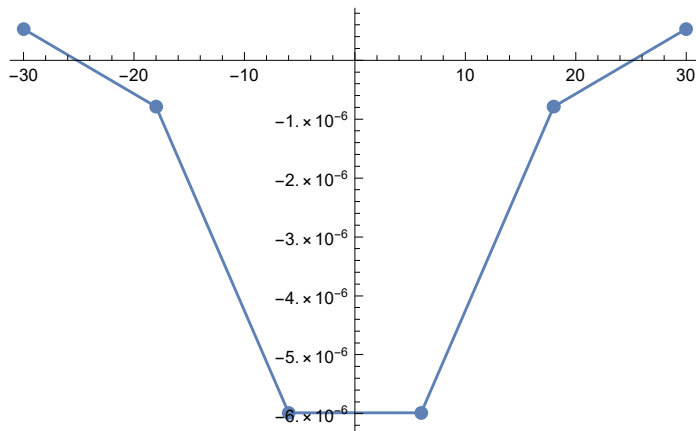
Show[

muestra

g1,

g2]

Out[]:=



(*VIGA CON 7 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[]:=

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6} \right) \right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx \right], R2]$$

$$Out[]:= 2 \left(-\frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - R4)}{12 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - R4)}{1296 EI} + \frac{L^3 (-18 P + 24 R2 + 18 (2 R3 + R4))}{5184 EI} + \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + R4)^2 + 3 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + R4) \right)^2}{648 EI (-P + R4)} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
& \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) \right)^2 dx + \right. \right. \\
& \quad \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \\
& \quad \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\
& \quad \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{6} \right) \right)^2 dx + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx \right], R3] \\
\text{Out[*]} = & 2 \left(- \frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - R4) \right)}{6 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - R4)}{12 A G} - \right. \\
& \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - R4)}{1296 \text{EI}} + \frac{L^3 (-28 P + 36 R2 + 28 (2 R3 + R4))}{5184 \text{EI}} + \\
& \left. \frac{-6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + R4)^2 + 6 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + R4) \right)^2}{648 \text{EI} (-P + R4)} \right)
\end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

In[]:=

$$\begin{aligned}
& \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4}}{2}\right) * x\right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4}}{2}\right)\right)^2 dx + \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{6}\right)\right)^2 dx + \right. \\
& \left. \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{2L}{6}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4}}{2}\right) + \text{R2}\right)^2 dx + \right. \\
& \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4}}{2}\right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{6}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{6}\right)\right)^2 dx + \right. \\
& \left. \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{2L}{6}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4}}{2}\right) + \text{R2} + \text{R3}\right)^2 dx\right], \text{R4}] \\
\text{Out[]} = & 2 \left(-\frac{\text{L} (\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4})}{24 \text{A G}} - \frac{\text{L}^3 (\text{P} - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - \text{R4})}{2592 \text{EI}} + \frac{\text{L}^3 (-14 \text{P} + 18 \text{R2} + 14 (2 \text{R3} + \text{R4}))}{5184 \text{EI}} + \right. \\
& \frac{\text{L} (-\text{R2} + \frac{1}{2} (-\text{P} + 2 \text{R2} + 2 \text{R3} + \text{R4}))}{12 \text{A G}} + \frac{\text{L} (-\text{R2} - \text{R3} + \frac{1}{2} (-\text{P} + 2 \text{R2} + 2 \text{R3} + \text{R4}))}{12 \text{A G}} + \\
& \frac{-3 \text{L}^3 (-\text{P} + \text{R2} + 2 \text{R3} + \text{R4})^2 + \frac{9}{2} \text{L} (\text{L} (\text{R2} + 2 \text{R3}) + \frac{3}{2} \text{L} (-\text{P} + \text{R4}))^2}{648 \text{EI} (-\text{P} + \text{R4})} - \\
& \left. \frac{-\text{L}^3 (-\text{P} + \text{R2} + 2 \text{R3} + \text{R4})^3 + (\text{L} (\text{R2} + 2 \text{R3}) + \frac{3}{2} \text{L} (-\text{P} + \text{R4}))^3}{648 \text{EI} (-\text{P} + \text{R4})^2} \right)
\end{aligned}$$

(*SE ENCUENTRA R2, R3 y R4*)

In[*]:=

$$\text{Solve}\left[\left\{2\left(-\frac{L(P-2R2-2R3-R4)}{12AG}-\frac{L^3(P-2R2-2R3-R4)}{1296EI}+\frac{L^3(-18P+24R2+18(2R3+R4))}{5184EI}+\frac{-3L^3(-P+R2+2R3+R4)^2+3L\left(L(R2+2R3)+\frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^2}{648EI(-P+R4)}\right)\right\}=-\frac{R2}{k},\right.$$

$$2\left(-\frac{L\left(R2+\frac{1}{2}(P-2R2-2R3-R4)\right)}{6AG}-\frac{L(P-2R2-2R3-R4)}{12AG}-\frac{L^3(P-2R2-2R3-R4)}{1296EI}+\frac{L^3(-28P+36R2+28(2R3+R4))}{5184EI}+\frac{-6L^3(-P+R2+2R3+R4)^2+6L\left(L(R2+2R3)+\frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^2}{648EI(-P+R4)}\right)\right\}=-\frac{R3}{k},\right.$$

$$2\left(-\frac{L(P-2R2-2R3-R4)}{24AG}-\frac{L^3(P-2R2-2R3-R4)}{2592EI}+\frac{L^3(-14P+18R2+14(2R3+R4))}{5184EI}+\frac{L(-R2+\frac{1}{2}(-P+2R2+2R3+R4))}{12AG}+\frac{L(-R2-R3+\frac{1}{2}(-P+2R2+2R3+R4))}{12AG}+\frac{-3L^3(-P+R2+2R3+R4)^2+\frac{9}{2}L\left(L(R2+2R3)+\frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^2}{648EI(-P+R4)}-\frac{-L^3(-P+R2+2R3+R4)^3+\left(L(R2+2R3)+\frac{3}{2}L(-P+R4)\right)^3}{648EI(-P+R4)^2}\right)\right\}=-\frac{R4}{k},\{R2,R3,R4\}]$$

$$\text{Out[*]}=\left\{\left\{R2\rightarrow-\left(\frac{(11664kL(-7776A^2EI^3G^2P-936A^3EI^2G^3L^2P+A^3EI^3kL^5P))}{(544195584A^3EI^3G^3+680244480A^2EI^3G^2kL+120932352A^2EI^3G^2k^2L^2+56687040A^3EI^2G^3kL^3+5038848EI^3k^3L^3+12317184A^2EI^2G^2k^2L^4+559872AEI^2Gk^3L^5+80352A^3EI^3k^2L^6+6156A^2EI^2G^2k^3L^7+13A^3G^3k^3L^9)}\right),R3\rightarrow\right.$$

$$\left.\frac{(1296A^2EI^2GkL(139968A^2EI^2G+23328EI^2kL+14904A^2EI^2G^2L^2+2700A^2EI^2GkL^3+23A^2G^2kL^5)+P)}{(544195584A^3EI^3G^3+680244480A^2EI^3G^2kL+120932352A^2EI^3G^2k^2L^2+56687040A^3EI^2G^3kL^3+5038848EI^3k^3L^3+12317184A^2EI^2G^2k^2L^4+559872AEI^2Gk^3L^5+80352A^3EI^3k^2L^6+6156A^2EI^2G^2k^3L^7+13A^3G^3k^3L^9)}\right),R4\rightarrow-\left(\frac{(-136048896A^2EI^3G^2kLP-60466176A^2EI^3G^2k^2L^2P-11337408A^3EI^2G^3kL^3P-5038848EI^3k^3L^3P-6158592A^2EI^2G^2k^2L^4P-559872AEI^2Gk^3L^5P-40176A^3EI^3k^2L^6P-6156A^2EI^2G^2k^3L^7P-13A^3G^3k^3L^9P)}{(544195584A^3EI^3G^3+680244480A^2EI^3G^2kL+120932352A^2EI^3G^2k^2L^2+56687040A^3EI^2G^3kL^3+5038848EI^3k^3L^3+12317184A^2EI^2G^2k^2L^4+559872AEI^2Gk^3L^5+80352A^3EI^3k^2L^6+6156A^2EI^2G^2k^3L^7+13A^3G^3k^3L^9)}\right)\right\}$$

(*POR SIMETRÍA R6=R2 Y R5=R3 *)

$$\begin{aligned} \text{In[*]}:= \mathbf{R2} &= - \left((11\,664\,k\,L (-7776\,A^2\,EI^3\,G^2\,P - 936\,A^3\,EI^2\,G^3\,L^2\,P + A^3\,EI\,G^3\,k\,L^5\,P)) / \right. \\ &\quad (544\,195\,584\,A^3\,EI^3\,G^3 + 680\,244\,480\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L + 120\,932\,352\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2 + \\ &\quad 56\,687\,040\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3 + 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3 + 12\,317\,184\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4 + \\ &\quad \left. 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5 + 80\,352\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6 + 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7 + 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9) \right) \\ \mathbf{R3} &= (1296\,A\,EI\,G\,k\,L (139\,968\,A\,EI^2\,G + 23\,328\,EI^2\,k\,L + 14\,904\,A^2\,EI\,G^2\,L^2 + 2700\,A\,EI\,G\,k\,L^3 + 23\,A^2\,G^2\,k\,L^5) \\ &\quad P) / (544\,195\,584\,A^3\,EI^3\,G^3 + 680\,244\,480\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L + 120\,932\,352\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2 + \\ &\quad 56\,687\,040\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3 + 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3 + 12\,317\,184\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4 + \\ &\quad \left. 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5 + 80\,352\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6 + 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7 + 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9) \right) \\ \mathbf{R4} &= - \left((-136\,048\,896\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L\,P - 60\,466\,176\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2\,P - 11\,337\,408\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3\,P - \right. \\ &\quad 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3\,P - 6\,158\,592\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4\,P - 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5\,P - \\ &\quad 40\,176\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6\,P - 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7\,P - 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9\,P) / \\ &\quad (544\,195\,584\,A^3\,EI^3\,G^3 + 680\,244\,480\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L + 120\,932\,352\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2 + \\ &\quad 56\,687\,040\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3 + 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3 + 12\,317\,184\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4 + \\ &\quad \left. 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5 + 80\,352\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6 + 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7 + 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9) \right) \\ \mathbf{R6} &= \mathbf{R2} \\ \mathbf{R5} &= \mathbf{R3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out[*]}:= &- \left((11\,664\,k\,L (-7776\,A^2\,EI^3\,G^2\,P - 936\,A^3\,EI^2\,G^3\,L^2\,P + A^3\,EI\,G^3\,k\,L^5\,P)) / \right. \\ &\quad (544\,195\,584\,A^3\,EI^3\,G^3 + 680\,244\,480\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L + 120\,932\,352\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2 + \\ &\quad 56\,687\,040\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3 + 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3 + 12\,317\,184\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4 + \\ &\quad \left. 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5 + 80\,352\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6 + 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7 + 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9) \right) \\ \text{Out[*]}:= &(1296\,A\,EI\,G\,k\,L (139\,968\,A\,EI^2\,G + 23\,328\,EI^2\,k\,L + 14\,904\,A^2\,EI\,G^2\,L^2 + 2700\,A\,EI\,G\,k\,L^3 + 23\,A^2\,G^2\,k\,L^5) \\ &\quad P) / (544\,195\,584\,A^3\,EI^3\,G^3 + 680\,244\,480\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L + 120\,932\,352\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2 + \\ &\quad 56\,687\,040\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3 + 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3 + 12\,317\,184\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4 + \\ &\quad \left. 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5 + 80\,352\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6 + 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7 + 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9) \right) \\ \text{Out[*]}:= &- \left((-136\,048\,896\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L\,P - 60\,466\,176\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2\,P - \right. \\ &\quad 11\,337\,408\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3\,P - 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3\,P - 6\,158\,592\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4\,P - \\ &\quad 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5\,P - 40\,176\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6\,P - 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7\,P - 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9\,P) / \\ &\quad (544\,195\,584\,A^3\,EI^3\,G^3 + 680\,244\,480\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L + 120\,932\,352\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2 + \\ &\quad 56\,687\,040\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3 + 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3 + 12\,317\,184\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4 + \\ &\quad \left. 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5 + 80\,352\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6 + 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7 + 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9) \right) \\ \text{Out[*]}:= &- \left((11\,664\,k\,L (-7776\,A^2\,EI^3\,G^2\,P - 936\,A^3\,EI^2\,G^3\,L^2\,P + A^3\,EI\,G^3\,k\,L^5\,P)) / \right. \\ &\quad (544\,195\,584\,A^3\,EI^3\,G^3 + 680\,244\,480\,A^2\,EI^3\,G^2\,k\,L + 120\,932\,352\,A\,EI^3\,G\,k^2\,L^2 + \\ &\quad 56\,687\,040\,A^3\,EI^2\,G^3\,k\,L^3 + 5\,038\,848\,EI^3\,k^3\,L^3 + 12\,317\,184\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^2\,L^4 + \\ &\quad \left. 559\,872\,A\,EI^2\,G\,k^3\,L^5 + 80\,352\,A^3\,EI\,G^3\,k^2\,L^6 + 6156\,A^2\,EI\,G^2\,k^3\,L^7 + 13\,A^3\,G^3\,k^3\,L^9) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Out}[*]= \left(1296 A E I G k L \left(139 968 A E I^2 G + 23 328 E I^2 k L + 14 904 A^2 E I G^2 L^2 + 2700 A E I G k L^3 + 23 A^2 G^2 k L^5 \right) P \right) /$$

$$\left(544 195 584 A^3 E I^3 G^3 + 680 244 480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120 932 352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right.$$

$$56 687 040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5 038 848 E I^3 k^3 L^3 + 12 317 184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 +$$

$$559 872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80 352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \left. \right)$$

In[*]:=

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)
 (*POR SIMETRÍA R7=R1*)

Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -P + R4 == 0}, {R1}]

|resuelve

$$\text{Out}[*]= \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \right. \right.$$

$$\frac{1}{2} \left(P - \left(2592 A E I G k L \left(139 968 A E I^2 G + 23 328 E I^2 k L + 14 904 A^2 E I G^2 L^2 + 2700 A E I G k L^3 + 23 A^2 G^2 \right. \right. \right.$$

$$k L^5 \left. \right) P \right) / \left(544 195 584 A^3 E I^3 G^3 + 680 244 480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120 932 352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right.$$

$$56 687 040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5 038 848 E I^3 k^3 L^3 + 12 317 184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 +$$

$$559 872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80 352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \left. \right) +$$

$$\left(23 328 k L \left(-7776 A^2 E I^3 G^2 P - 936 A^3 E I^2 G^3 L^2 P + A^3 E I G^3 k L^5 P \right) \right) /$$

$$\left(544 195 584 A^3 E I^3 G^3 + 680 244 480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120 932 352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right.$$

$$56 687 040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5 038 848 E I^3 k^3 L^3 + 12 317 184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 +$$

$$559 872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80 352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \left. \right) +$$

$$\left(-136 048 896 A^2 E I^3 G^2 k L P - 60 466 176 A E I^3 G k^2 L^2 P - 11 337 408 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P - \right.$$

$$5 038 848 E I^3 k^3 L^3 P - 6 158 592 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P - 559 872 A E I^2 G k^3 L^5 P -$$

$$40 176 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 13 A^3 G^3 k^3 L^9 P \left. \right) /$$

$$\left(544 195 584 A^3 E I^3 G^3 + 680 244 480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120 932 352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right.$$

$$56 687 040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5 038 848 E I^3 k^3 L^3 + 12 317 184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 +$$

$$559 872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80 352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \left. \right) \left. \right\} \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]}:= \mathbf{R1} = & \frac{1}{2} \left(P - \right. \\
 & (2592 A E I G k L (139968 A E I^2 G + 23328 E I^2 k L + 14904 A^2 E I G^2 L^2 + 2700 A E I G k L^3 + 23 A^2 G^2 k L^5) \\
 & P) / (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
 & 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9) + \\
 & (23328 k L (-7776 A^2 E I^3 G^2 P - 936 A^3 E I^2 G^3 L^2 P + A^3 E I G^3 k L^5 P)) / \\
 & (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
 & 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9) + \\
 & (-136048896 A^2 E I^3 G^2 k L P - 60466176 A E I^3 G k^2 L^2 P - 11337408 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P - \\
 & 5038848 E I^3 k^3 L^3 P - 6158592 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P - 559872 A E I^2 G k^3 L^5 P - \\
 & 40176 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 13 A^3 G^3 k^3 L^9 P) / \\
 & (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
 & 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9))
 \end{aligned}$$

R7 =

R1

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]}:= & \frac{1}{2} \left(P - \right. \\
 & (2592 A E I G k L (139968 A E I^2 G + 23328 E I^2 k L + 14904 A^2 E I G^2 L^2 + 2700 A E I G k L^3 + 23 A^2 G^2 k L^5) \\
 & P) / (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
 & 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9) + \\
 & (23328 k L (-7776 A^2 E I^3 G^2 P - 936 A^3 E I^2 G^3 L^2 P + A^3 E I G^3 k L^5 P)) / \\
 & (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
 & 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9) + \\
 & (-136048896 A^2 E I^3 G^2 k L P - 60466176 A E I^3 G k^2 L^2 P - 11337408 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P - \\
 & 5038848 E I^3 k^3 L^3 P - 6158592 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P - 559872 A E I^2 G k^3 L^5 P - \\
 & 40176 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 13 A^3 G^3 k^3 L^9 P) / \\
 & (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
 & 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[] = & \frac{1}{2} \left(P - \right. \\
& (2592 A E I G k L (139968 A E I^2 G + 23328 E I^2 k L + 14904 A^2 E I G^2 L^2 + 2700 A E I G k L^3 + 23 A^2 G^2 k L^5) \\
& P) / (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
& 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9) + \\
& (23328 k L (-7776 A^2 E I^3 G^2 P - 936 A^3 E I^2 G^3 L^2 P + A^3 E I G^3 k L^5 P)) / \\
& (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
& 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9) + \\
& (-136048896 A^2 E I^3 G^2 k L P - 60466176 A E I^3 G k^2 L^2 P - 11337408 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P - \\
& 5038848 E I^3 k^3 L^3 P - 6158592 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P - 559872 A E I^2 G k^3 L^5 P - \\
& 40176 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 13 A^3 G^3 k^3 L^9 P) / \\
& (544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \\
& 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9))
\end{aligned}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.80 (*m*)
H = 1.20 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 60 (*m*)
P = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
v = 0.35
G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
A = B * H

```

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10 000 000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 60

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

In[]:= (*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

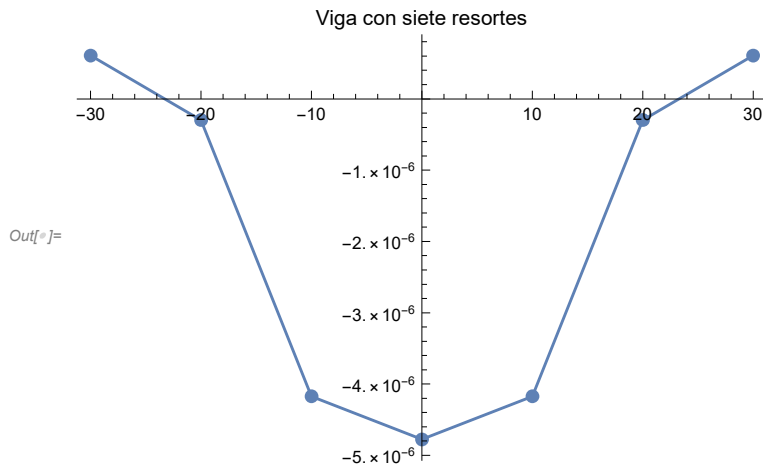
```

g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/3, -R2/k}, {-L/6, -R3/k}, {0, -R4/k},
  gráfico de línea de una lista
  {L/6, -R5/k}, {L/3, -R6/k}, {L/2, -R7/k}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  origen de ejes rango de rep... [todo]

g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-L/3, -R2/k}, {-L/6, -R3/k},
  representación de lista
  {0, -R4/k}, {L/6, -R5/k}, {L/3, -R6/k}, {L/2, -R7/k}},
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... tamaño de punto origen de ejes rango de rep... [todo]

Show[g1, g2, PlotRange -> All, PlotLabel -> "Viga con siete resortes"]
  muestra rango de rep... [todo] etiqueta de representación

```



In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

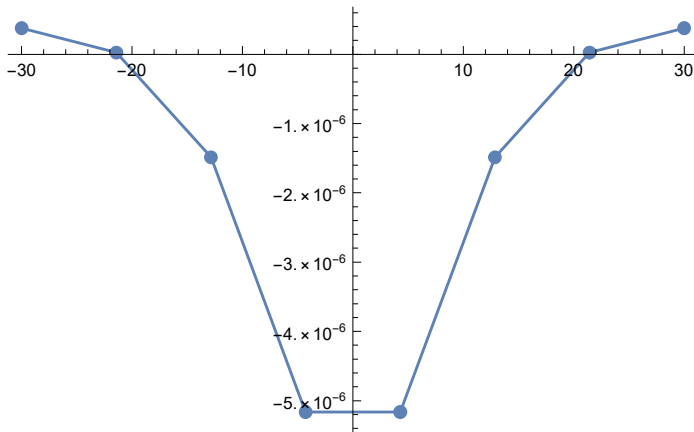
g1 = ListLinePlot[
  gráfico de línea de una lista
  {
    {-L/2, -R1/k}, {-5L/14, -R2/k}, {-3L/14, -R3/k}, {-L/14, -R4/k}, {L/14, -R5/k},
    {3L/14, -R6/k}, {5L/14, -R7/k}, {L/2, -R8/k}
  }, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

g2 = ListPlot[
  representación de lista
  {
    {-L/2, -R1/k}, {-5L/14, -R2/k}, {-3L/14, -R3/k}, {-L/14, -R4/k},
    {L/14, -R5/k}, {3L/14, -R6/k}, {5L/14, -R7/k}, {L/2, -R8/k}
  },
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```

Out[]:=



(*VIGA CON 9 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[]:=

D[2 *
|deriva

$$\left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) ^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) ^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 ^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2 L}{8} \right) ^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 ^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2 L}{8} \right) + R4 \left(x - \frac{3 L}{8} \right) ^2 dx +$$

$$\frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 ^2 dx \Big), R2]$$

$$Out[]:= 2 \left(- \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{16 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \right.$$

$$\frac{L^3 (-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} +$$

$$\frac{3 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{3}{4} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} +$$

$$\left. \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 3 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right)^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[*]:= D[2*
|dériva

$$\left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) \right)^2 dx + \right. \\ \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) \right)^2 dx + \\ \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\ \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) \right)^2 dx + \\ \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx + \\ \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8} \right) \right)^2 dx + \\ \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx \right), R3]$$

$$\text{Out[*]}= 2 \left(- \frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5) \right)}{8 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{16 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \frac{L^3 \left(-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5) ^2 + 48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5) ^2 \right)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \frac{L^3 \left((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5) ^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5) ^3 \right)}{6144 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5) ^2} + \frac{6 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5) ^2 - \frac{3}{2} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5) ^2}{1536 EI (-P + R5)} + \frac{-6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5) ^2 + 6 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right) ^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

In[]:=

D[2 *
|dériva

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) \right)^2 dx + \right. \\
& \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
& \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx \right), R4]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[]} = & 2 \left(- \frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5) \right)}{8 A G} - \frac{L \left(R2 + R3 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5) \right)}{8 A G} - \right. \\
& \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{16 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 EI} + \\
& \frac{L^3 \left(-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^2 + 48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^2 \right)}{12288 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5)^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5)^3 \right)}{6144 EI (-P + 2 (R3 + R4) + R5)^2} + \\
& \frac{9 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5)^2 - \frac{9}{4} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5)^2}{1536 EI (-P + R5)} + \\
& - \frac{6 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^2 + 9 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right)^2}{1536 EI (-P + 2 R4 + R5)} - \\
& \left. \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5)^3 + \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right)^3}{768 EI (-P + 2 R4 + R5)^2} \right)
\end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R5*)

In[]:=

D[2 *
Lderiva

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx \right), R5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[] = & 2 \left(-\frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{32 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{6144 E I} + \right. \\
& \frac{L \left(-R2 + \frac{1}{2} (-P + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5) \right)}{16 A G} + \frac{L \left(-R2 - R3 + \frac{1}{2} (-P + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5) \right)}{16 A G} + \\
& \frac{L \left(-R2 - R3 - R4 + \frac{1}{2} (-P + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5) \right)}{16 A G} + \\
& \frac{L^3 \left(-3 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5) ^2 + 24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5) ^2 \right)}{12288 E I (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left((P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5) ^3 + 8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5) ^3 \right)}{12288 E I (-P + 2 (R3 + R4) + R5) ^2} + \\
& \frac{6 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5) ^2 - \frac{9}{8} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5) ^2}{1536 E I (-P + R5)} - \\
& \frac{L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5) ^3 - \frac{1}{8} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5) ^3}{1536 E I (-P + R5) ^2} + \\
& \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5) ^2 + \frac{9}{2} L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right) ^2}{1536 E I (-P + 2 R4 + R5)} - \\
& \left. \frac{-L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5) ^3 + \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right) ^3}{1536 E I (-P + 2 R4 + R5) ^2} \right)
\end{aligned}$$

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\begin{aligned}
In[] := & \text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(-\frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{16 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{3072 E I} + \right. \right. \right. \\
& \frac{L^3 \left(-6 (P - 2 (R2 + R3 + R4) - R5) ^2 + 24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4) + R5) ^2 \right)}{12288 E I (-P + 2 (R3 + R4) + R5)} + \\
& \frac{3 L^3 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 2 R5) ^2 - \frac{3}{4} L^3 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 3 R5) ^2}{1536 E I (-P + R5)} + \\
& \left. \left. \frac{-3 L^3 (-P + R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5) ^2 + 3 L \left(L (R2 + 2 R3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R4 + R5) \right) ^2}{1536 E I (-P + 2 R4 + R5)} \right) \right] = -\frac{R2}{k}, \\
& 2 \left(-\frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5) \right)}{8 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5)}{16 A G} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - R_5)}{3072 EI} + \\
& \frac{L^3 (-6 (P - 2 (R_2 + R_3 + R_4) - R_5)^2 + 48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4) + R_5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R_3 + R_4) + R_5)} - \\
& \frac{L^3 ((P - 2 (R_2 + R_3 + R_4) - R_5)^3 + 8 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4) + R_5)^3)}{6144 EI (-P + 2 (R_3 + R_4) + R_5)^2} + \\
& \frac{6 L^3 (-2 P + R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 2 R_5)^2 - \frac{3}{2} L^3 (-3 P + 2 R_2 + 4 R_3 + 6 R_4 + 3 R_5)^2}{1536 EI (-P + R_5)} + \\
& \left. \frac{-6 L^3 (-P + R_2 + 2 R_3 + 2 R_4 + R_5)^2 + 6 L (L (R_2 + 2 R_3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R_4 + R_5))^2}{1536 EI (-P + 2 R_4 + R_5)} \right) = -\frac{R_3}{k}, \\
2 \left(-\frac{L (R_2 + \frac{1}{2} (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - R_5))}{8 A G} - \frac{L (R_2 + R_3 + \frac{1}{2} (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - R_5))}{8 A G} - \right. \\
& \frac{L (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - R_5)}{16 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - R_5)}{3072 EI} + \\
& \frac{L^3 (-6 (P - 2 (R_2 + R_3 + R_4) - R_5)^2 + 48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4) + R_5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R_3 + R_4) + R_5)} - \\
& \frac{L^3 ((P - 2 (R_2 + R_3 + R_4) - R_5)^3 + 8 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4) + R_5)^3)}{6144 EI (-P + 2 (R_3 + R_4) + R_5)^2} + \\
& \frac{9 L^3 (-2 P + R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 2 R_5)^2 - \frac{9}{4} L^3 (-3 P + 2 R_2 + 4 R_3 + 6 R_4 + 3 R_5)^2}{1536 EI (-P + R_5)} + \\
& \left. \frac{-6 L^3 (-P + R_2 + 2 R_3 + 2 R_4 + R_5)^2 + 9 L (L (R_2 + 2 R_3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R_4 + R_5))^2}{1536 EI (-P + 2 R_4 + R_5)} - \right. \\
& \left. \frac{-L^3 (-P + R_2 + 2 R_3 + 2 R_4 + R_5)^3 + (L (R_2 + 2 R_3) + \frac{3}{2} L (-P + 2 R_4 + R_5))^3}{768 EI (-P + 2 R_4 + R_5)^2} \right) = -\frac{R_4}{k}, \\
2 \left(-\frac{L (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - R_5)}{32 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - R_5)}{6144 EI} + \right. \\
& \frac{L (-R_2 + \frac{1}{2} (-P + 2 R_2 + 2 R_3 + 2 R_4 + R_5))}{16 A G} + \frac{L (-R_2 - R_3 + \frac{1}{2} (-P + 2 R_2 + 2 R_3 + 2 R_4 + R_5))}{16 A G} + \\
& \frac{L (-R_2 - R_3 - R_4 + \frac{1}{2} (-P + 2 R_2 + 2 R_3 + 2 R_4 + R_5))}{16 A G} + \\
& \left. \frac{L^3 (-3 (P - 2 (R_2 + R_3 + R_4) - R_5)^2 + 24 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4) + R_5)^2)}{12288 EI (-P + 2 (R_3 + R_4) + R_5)} - \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left((P - 2(R_2 + R_3 + R_4) - R_5)^3 + 8(-P + R_2 + 2(R_3 + R_4) + R_5)^3 \right)}{12288 EI (-P + 2(R_3 + R_4) + R_5)^2} + \\
& \frac{6L^3 (-2P + R_2 + 2R_3 + 3R_4 + 2R_5)^2 - \frac{9}{8}L^3 (-3P + 2R_2 + 4R_3 + 6R_4 + 3R_5)^2}{1536 EI (-P + R_5)} - \\
& \frac{L^3 (-2P + R_2 + 2R_3 + 3R_4 + 2R_5)^3 - \frac{1}{8}L^3 (-3P + 2R_2 + 4R_3 + 6R_4 + 3R_5)^3}{1536 EI (-P + R_5)^2} + \\
& \frac{-3L^3 (-P + R_2 + 2R_3 + 2R_4 + R_5)^2 + \frac{9}{2}L \left(L(R_2 + 2R_3) + \frac{3}{2}L(-P + 2R_4 + R_5) \right)^2}{1536 EI (-P + 2R_4 + R_5)} - \\
& \left. \frac{-L^3 (-P + R_2 + 2R_3 + 2R_4 + R_5)^3 + \left(L(R_2 + 2R_3) + \frac{3}{2}L(-P + 2R_4 + R_5) \right)^3}{1536 EI (-P + 2R_4 + R_5)^2} \right) = \\
& -\frac{R_5}{k}, \{R_2, R_3, R_4, R_5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[n]= & \left\{ \left\{ \text{R2} \rightarrow \left(55\,296\,A^3\,G^3\,k\,L \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(50\,331\,648\,EI^4\,P + 6\,160\,384\,A\,EI^3\,G\,L^2\,P - 12\,288\,A\,EI^2\,G\,k\,L^5\,P - 384\,EI^2\,k^2\,L^6\,P + A\,EI\,G\,k^2\,L^8\,P \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \right. \right. \\
& \left. \left. 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \right. \right. \\
& \left. \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right) \right. \left. \right\} , \\
& \left\{ \text{R3} \rightarrow \left(73\,728\,A^2\,G^2\,k \left(75\,497\,472\,A\,EI^4\,G\,L\,P + 9\,437\,184\,EI^4\,k\,L^2\,P + 8\,650\,752\,A^2\,EI^3\,G^2\,L^3\,P + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. 1\,130\,496\,A\,EI^3\,G\,k\,L^4\,P + 1600\,A^2\,EI^2\,G^2\,k\,L^6\,P - 576\,A\,EI^2\,G\,k^2\,L^7\,P - 3\,A^2\,EI\,G^2\,k^2\,L^9\,P \right) \right. \left. \right. \\
& \left. \left. \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \right. \right. \\
& \left. \left. 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \right. \right. \\
& \left. \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right) \right. \left. \right\} , \\
& \left\{ \text{R4} \rightarrow \left(3072 \left(2\,717\,908\,992\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L\,P + 905\,969\,664\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2\,P + 276\,037\,632\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3\,P + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. 56\,623\,104\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3\,P + 101\,449\,728\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4\,P + 6\,635\,520\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5\,P + \right. \right. \\
& \left. \left. 835\,584\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6\,P + 81\,792\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7\,P + 173\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9\,P \right) \right. \left. \right. \\
& \left. \left. \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \right. \right. \\
& \left. \left. 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \right. \right. \\
& \left. \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right) \right. \left. \right\} , \\
& \left\{ \text{R5} \rightarrow - \left(\left(-5\,566\,277\,615\,616\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L\,P - 3\,478\,923\,509\,760\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2\,P - 463\,856\,467\,968 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3\,P - 521\,838\,526\,464\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3\,P - 351\,516\,229\,632\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4\,P - \right. \right. \\
& \left. \left. 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4\,P - 57\,076\,088\,832\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5\,P - 2\,203\,582\,464\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6\,P - \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6\,P - 583\,925\,760\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7\,P - 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8\,P - \right. \right. \\
& \left. \left. 1\,069\,056\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9\,P - 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10}\,P - 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12}\,P \right) \right. \left. \right. \\
& \left. \left. \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \right. \right. \\
& \left. \left. 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \right. \right. \\
& \left. \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right) \right. \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

In[]:=

$$\begin{aligned}
R2 = & \left(55\,296\,A^3\,G^3\,k\,L \right. \\
& \left. \left(50\,331\,648\,EI^4\,P + 6\,160\,384\,A\,EI^3\,G\,L^2\,P - 12\,288\,A\,EI^2\,G\,k\,L^5\,P - 384\,EI^2\,k^2\,L^6\,P + A\,EI\,G\,k^2\,L^8\,P \right) \right) / \\
& \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\
& 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \\
& 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \\
& 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \\
& \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right) \\
R3 = & \left(73\,728\,A^2\,G^2\,k \left(75\,497\,472\,A\,EI^4\,G\,L\,P + 9\,437\,184\,EI^4\,k\,L^2\,P + 8\,650\,752\,A^2\,EI^3\,G^2\,L^3\,P + \right. \right. \\
& \left. \left. 1\,130\,496\,A\,EI^3\,G\,k\,L^4\,P + 1600\,A^2\,EI^2\,G^2\,k\,L^6\,P - 576\,A\,EI^2\,G\,k^2\,L^7\,P - 3\,A^2\,EI\,G^2\,k^2\,L^9\,P \right) \right) / \\
& \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\
& 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \\
& 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \\
& 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \\
& \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right) \\
R4 = & \left(3072 \left(2\,717\,908\,992\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L\,P + 905\,969\,664\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2\,P + 276\,037\,632\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3\,P + \right. \right. \\
& 56\,623\,104\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3\,P + 101\,449\,728\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4\,P + 6\,635\,520\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5\,P + \\
& \left. 835\,584\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6\,P + 81\,792\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7\,P + 173\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9\,P \right) \right) / \\
& \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\
& 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \\
& 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \\
& 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \\
& \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right) \\
R5 = & - \left(\left(-5\,566\,277\,615\,616\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L\,P - 3\,478\,923\,509\,760\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2\,P - \right. \right. \\
& 463\,856\,467\,968\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3\,P - 521\,838\,526\,464\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3\,P - 351\,516\,229\,632\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4\,P - \\
& 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4\,P - 57\,076\,088\,832\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5\,P - 2\,203\,582\,464\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6\,P - \\
& 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6\,P - 583\,925\,760\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7\,P - 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8\,P - \\
& \left. 1\,069\,056\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9\,P - 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10}\,P - 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12}\,P \right) \right) / \\
& \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\
& 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \\
& 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \\
& 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \\
& \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[]:= & \left(55\,296\,A^3\,G^3\,k\,L \right. \\
& \left. \left(50\,331\,648\,EI^4\,P + 6\,160\,384\,A\,EI^3\,G\,L^2\,P - 12\,288\,A\,EI^2\,G\,k\,L^5\,P - 384\,EI^2\,k^2\,L^6\,P + A\,EI\,G\,k^2\,L^8\,P \right) \right) / \\
& \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\
& 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + \\
& 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + \\
& 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + \\
& \left. 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Out[*]} = \left(73\,728\,A^2\,G^2\,k \left(75\,497\,472\,A\,EI^4\,G\,L\,P + 9\,437\,184\,EI^4\,k\,L^2\,P + 8\,650\,752\,A^2\,EI^3\,G^2\,L^3\,P + \right. \right. \\ \left. \left. 1\,130\,496\,A\,EI^3\,G\,k\,L^4\,P + 1600\,A^2\,EI^2\,G^2\,k\,L^6\,P - 576\,A\,EI^2\,G\,k^2\,L^7\,P - 3\,A^2\,EI\,G^2\,k^2\,L^9\,P \right) \right) / \\ \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\ \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + \right. \\ \left. 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + \right. \\ \left. 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + \right. \\ \left. 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(3072 \left(2\,717\,908\,992\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L\,P + 905\,969\,664\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2\,P + 276\,037\,632\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3\,P + \right. \right. \\ \left. \left. 56\,623\,104\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3\,P + 101\,449\,728\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4\,P + 6\,635\,520\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5\,P + \right. \right. \\ \left. \left. 835\,584\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6\,P + 81\,792\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7\,P + 173\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9\,P \right) \right) / \\ \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\ \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + \right. \\ \left. 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + \right. \\ \left. 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + \right. \\ \left. 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)$$

$$\text{Out[*]} = - \left(\left(-5\,566\,277\,615\,616\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L\,P - 3\,478\,923\,509\,760\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2\,P - \right. \right. \\ \left. \left. 463\,856\,467\,968\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3\,P - 521\,838\,526\,464\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3\,P - 351\,516\,229\,632\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4\,P - \right. \right. \\ \left. \left. 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4\,P - 57\,076\,088\,832\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5\,P - 2\,203\,582\,464\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6\,P - \right. \right. \\ \left. \left. 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6\,P - 583\,925\,760\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7\,P - 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8\,P - \right. \right. \\ \left. \left. 1\,069\,056\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9\,P - 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10}\,P - 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12}\,P \right) \right) / \\ \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\ \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + \right. \\ \left. 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + \right. \\ \left. 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + \right. \\ \left. 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)$$

(*POR SIMETRÍA R9=R1, R8=R2, R7=R3 Y R6=R4 *)

In[*]:=

R8 = R2**R7 = R3****R6 = R4**

$$\text{Out[*]} = \left(55\,296\,A^3\,G^3\,k\,L \right. \\ \left. \left(50\,331\,648\,EI^4\,P + 6\,160\,384\,A\,EI^3\,G\,L^2\,P - 12\,288\,A\,EI^2\,G\,k\,L^5\,P - 384\,EI^2\,k^2\,L^6\,P + A\,EI\,G\,k^2\,L^8\,P \right) \right) / \\ \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\ \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + \right. \\ \left. 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + \right. \\ \left. 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + \right. \\ \left. 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(73\,728\,A^2\,G^2\,k \left(75\,497\,472\,A\,EI^4\,G\,L\,P + 9\,437\,184\,EI^4\,k\,L^2\,P + 8\,650\,752\,A^2\,EI^3\,G^2\,L^3\,P + \right. \right. \\ \left. \left. 1\,130\,496\,A\,EI^3\,G\,k\,L^4\,P + 1600\,A^2\,EI^2\,G^2\,k\,L^6\,P - 576\,A\,EI^2\,G\,k^2\,L^7\,P - 3\,A^2\,EI\,G^2\,k^2\,L^9\,P \right) \right) / \\ \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\ \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + \right. \\ \left. 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + \right. \\ \left. 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + \right. \\ \left. 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(3072 \left(2\,717\,908\,992\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L\,P + 905\,969\,664\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2\,P + 276\,037\,632\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3\,P + \right. \right. \\ \left. \left. 56\,623\,104\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3\,P + 101\,449\,728\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4\,P + 6\,635\,520\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5\,P + \right. \right. \\ \left. \left. 835\,584\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6\,P + 81\,792\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7\,P + 173\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9\,P \right) \right) / \\ \left(22\,265\,110\,462\,464\,A^4\,EI^4\,G^4 + 38\,963\,943\,309\,312\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L + 10\,436\,770\,529\,280\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^2 + \right. \\ \left. 3\,246\,995\,275\,776\,A^4\,EI^3\,G^4\,k\,L^3 + 869\,730\,877\,440\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^3 + \right. \\ \left. 1\,054\,548\,688\,896\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^4 + 21\,743\,271\,936\,EI^4\,k^4\,L^4 + 95\,126\,814\,720\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 + \right. \\ \left. 6\,610\,747\,392\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^2\,L^6 + 2\,491\,416\,576\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^6 + 973\,209\,600\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 + \right. \\ \left. 32\,735\,232\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^8 + 1\,781\,760\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 + 109\,056\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{10} + 97\,A^4\,G^4\,k^4\,L^{12} \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

In[]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 + R5 - P == 0}, {R1}]

|resuelve

Out[]:= { {R1 →

$$\frac{1}{2} \left(P - (110592 A^3 G^3 k L (50331648 EI^4 P + 6160384 A EI^3 G L^2 P - 12288 A EI^2 G k L^5 P - 384 EI^2 k^2 L^6 P + A EI G k^2 L^8 P)) \right) / \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \left(147456 A^2 G^2 k (75497472 A EI^4 G L P + 9437184 EI^4 k L^2 P + 8650752 A^2 EI^3 G^2 L^3 P + 1130496 A EI^3 G k L^4 P + 1600 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 576 A EI^2 G k^2 L^7 P - 3 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P) \right) / \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \left(6144 (2717908992 A^3 EI^4 G^3 k L P + 905969664 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P + 276037632 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P + 56623104 A EI^4 G k^3 L^3 P + 101449728 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P + 6635520 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P + 835584 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P + 81792 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P + 173 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P) \right) / \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) + \left(-5566277615616 A^3 EI^4 G^3 k L P - 3478923509760 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - 463856467968 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 521838526464 A EI^4 G k^3 L^3 P - 351516229632 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - 21743271936 EI^4 k^4 L^4 P - 57076088832 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 2203582464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 P - 583925760 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - 1069056 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) / \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \}}}$$

In[]:= R1 =

$$\frac{1}{2} \left(P - \left(110592 A^3 G^3 k L \left(50331648 EI^4 P + 6160384 A EI^3 G L^2 P - 12288 A EI^2 G k L^5 P - 384 EI^2 k^2 L^6 P + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. A EI G k^2 L^8 P \right) \right) / \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + \right. \\ \left. 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + \right. \\ \left. 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \right. \\ \left. 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \right. \\ \left. 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \\ \left(147456 A^2 G^2 k \left(75497472 A EI^4 G L P + 9437184 EI^4 k L^2 P + 8650752 A^2 EI^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 1130496 A EI^3 G k L^4 P + 1600 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 576 A EI^2 G k^2 L^7 P - 3 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P \right) \right) / \\ \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \\ \left. 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \\ \left(6144 \left(2717908992 A^3 EI^4 G^3 k L P + 905969664 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P + 276037632 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 56623104 A EI^4 G k^3 L^3 P + 101449728 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P + 6635520 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P + \right. \right. \\ \left. \left. 835584 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P + 81792 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P + 173 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P \right) \right) / \\ \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \\ \left. 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) + \\ \left(-5566277615616 A^3 EI^4 G^3 k L P - 3478923509760 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - 463856467968 \right. \\ \left. A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 521838526464 A EI^4 G k^3 L^3 P - 351516229632 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - \right. \\ \left. 21743271936 EI^4 k^4 L^4 P - 57076088832 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 2203582464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - \right. \\ \left. 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 P - 583925760 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - \right. \\ \left. 1069056 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) / \\ \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \\ \left. 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
Out[] = & \frac{1}{2} \left(P - \left(110592 A^3 G^3 k L \right. \right. \\
& \left. \left(50331648 EI^4 P + 6160384 AEI^3 G L^2 P - 12288 AEI^2 G k L^5 P - 384 EI^2 k^2 L^6 P + AEI G k^2 L^8 P \right) \right) / \\
& \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 AEI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 AEI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \\
& \left(147456 A^2 G^2 k \left(75497472 AEI^4 G L P + 9437184 EI^4 k L^2 P + 8650752 A^2 EI^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\
& \left. \left. 1130496 AEI^3 G k L^4 P + 1600 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 576 AEI^2 G k^2 L^7 P - 3 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P \right) \right) / \\
& \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 AEI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 AEI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \\
& \left(6144 \left(2717908992 A^3 EI^4 G^3 k L P + 905969664 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P + 276037632 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P + \right. \right. \\
& \left. \left. 56623104 AEI^4 G k^3 L^3 P + 101449728 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P + 6635520 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P + \right. \right. \\
& \left. \left. 835584 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P + 81792 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P + 173 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P \right) \right) / \\
& \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 AEI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 AEI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) + \\
& \left(-5566277615616 A^3 EI^4 G^3 k L P - 3478923509760 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \\
& 463856467968 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 521838526464 AEI^4 G k^3 L^3 P - 351516229632 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - \\
& 21743271936 EI^4 k^4 L^4 P - 57076088832 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 2203582464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - \\
& 2491416576 AEI^3 G k^4 L^6 P - 583925760 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - \\
& \left. 1069056 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) / \\
& \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 AEI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 AEI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right))
\end{aligned}$$

$Inf[] := R9 = R1$

$$\begin{aligned}
 Out[] := & \frac{1}{2} \left(P - \left(110592 A^3 G^3 k L \right. \right. \\
 & \left. \left(50331648 EI^4 P + 6160384 A EI^3 G L^2 P - 12288 A EI^2 G k L^5 P - 384 EI^2 k^2 L^6 P + A EI G k^2 L^8 P \right) \right) / \\
 & \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 & 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \\
 & \left(147456 A^2 G^2 k \left(75497472 A EI^4 G L P + 9437184 EI^4 k L^2 P + 8650752 A^2 EI^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\
 & \left. 1130496 A EI^3 G k L^4 P + 1600 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 576 A EI^2 G k^2 L^7 P - 3 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P \right) \right) / \\
 & \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 & 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) - \\
 & \left(6144 \left(2717908992 A^3 EI^4 G^3 k L P + 905969664 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P + 276037632 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P + \right. \right. \\
 & 56623104 A EI^4 G k^3 L^3 P + 101449728 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P + 6635520 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P + \\
 & \left. 835584 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P + 81792 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P + 173 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P \right) \right) / \\
 & \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 & 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) + \\
 & \left(-5566277615616 A^3 EI^4 G^3 k L P - 3478923509760 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \\
 & 463856467968 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 521838526464 A EI^4 G k^3 L^3 P - 351516229632 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - \\
 & 21743271936 EI^4 k^4 L^4 P - 57076088832 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 2203582464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - \\
 & 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 P - 583925760 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - \\
 & \left. 1069056 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) / \\
 & \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 & 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \left. \right)
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.80 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.20 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 10\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

|valor numérico

$$E_c = 21\,707\,945\,522.8 \text{ (*N/m^2*)}$$

|valor numérico

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

|valor numérico

$$L = 60 \text{ (*m*)}$$

$$P = 100 \text{ (*N*)}$$

|valor numérico

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

|valor numérico

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10 000 000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 60

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

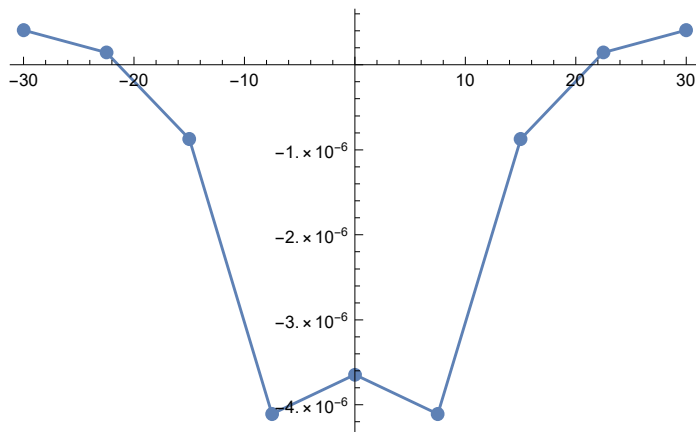
g1 = ListLinePlot[
  gráfico de línea de una lista
  {
    {-L/2, -R1/k}, {-3L/8, -R2/k}, {-2L/8, -R3/k}, {-L/8, -R4/k}, {0, -R5/k}, {L/8, -R6/k},
    {2L/8, -R7/k}, {3L/8, -R8/k}, {L/2, -R9/k}
  }, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

g2 = ListPlot[
  representación de lista
  {
    {-L/2, -R1/k}, {-3L/8, -R2/k}, {-2L/8, -R3/k}, {-L/8, -R4/k},
    {0, -R5/k}, {L/8, -R6/k}, {2L/8, -R7/k}, {3L/8, -R8/k}, {L/2, -R9/k}
  },
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]

Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```

Out[*]=



In[*]:= (*VIGA CON 10 RESORTES*)
 (*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & D\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx + \frac{1}{2 EI} \\
 & \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9} \right) \right)^2 \\
 & dx + \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2 dx \right], R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[*] = & 2 \left(- \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{18 A G} - \right. \\
 & \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-204 P + 96 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-24 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^2 + 6 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2)}{17496 EI (P - 2 R5)} + \\
 & \frac{L^3 (-24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2)}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
 & \left. \frac{L^3 (24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 6 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2)}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{Inf}^* := & \text{D} \left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9} \right) \right)^2 \\
 & dx + \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2 dx \right], R3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}^* := & 2 \left(- \frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5) \right)}{9 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{18 A G} - \right. \\
 & \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 \text{EI}} + \frac{L^3 (-408 P + 192 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 \text{EI}} + \\
 & \left(L^3 (-48 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^2 + 12 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2) \right) / \\
 & \left(17496 \text{EI} (P - 2 R5) \right) + \left(L^3 (-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2) \right) / \\
 & \left(17496 \text{EI} (P - 2 (R3 + R4 + R5)) \right) + \\
 & \left(L^3 (-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3) \right) / \\
 & \left(8748 \text{EI} (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2 \right) + \\
 & \left. \left(L^3 (48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 12 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2) \right) / \right. \\
 & \left. \left(17496 \text{EI} (P - 2 (R4 + R5)) \right) \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[2 * \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx + \frac{1}{2 EI} \\
 & \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) * x + R2 \left(x - \frac{L}{9} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{9} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{9} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{9} \right) \right)^2 \\
 & dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5}{2} \right) + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2 dx \left. \right], R4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]= 2 & \left(- \frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5) \right)}{9 A G} - \right. \\
& \frac{L \left(R2 + R3 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5) \right)}{9 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{18 A G} - \\
& \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-612 P + 288 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 EI} + \\
& \frac{L^3 \left(-72 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^2 + 18 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2 \right)}{17496 EI (P - 2 R5)} + \\
& \frac{L^3 \left(-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2 \right)}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
& \frac{L^3 \left(-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3 \right)}{8748 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2} + \\
& \frac{L^3 \left(48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 18 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2 \right)}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} + \\
& \left. \frac{L^3 \left(8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^3 \right)}{8748 EI (P - 2 (R4 + R5))^2} \right)
\end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{Inf} := & \text{D} \left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) * x \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) + \text{R2} \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) + \text{R2} + \text{R3} \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9} \right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4} \right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) * x + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9} \right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9} \right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9} \right) \right)^2 \\
 & dx + \left. \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{P - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2} \right) + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5} \right)^2 dx \right], \text{R5}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[] = & 2 \left(- \frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5) \right)}{9 A G} - \frac{L \left(R2 + R3 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5) \right)}{9 A G} - \right. \\
& \frac{L \left(R2 + R3 + R4 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5) \right)}{9 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{18 A G} - \\
& \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-816 P + 384 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 EI} + \\
& \frac{L^3 (-96 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^2 + 18 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2)}{17496 EI (P - 2 R5)} + \\
& \frac{L^3 (-8 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^3 + (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^3)}{8748 EI (P - 2 R5)^2} + \\
& \frac{L^3 (-48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2)}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
& \frac{L^3 (-8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^3)}{8748 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))^2} + \\
& \frac{L^3 (48 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 18 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2)}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} + \\
& \left. \frac{L^3 (8 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^3 + (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^3)}{8748 EI (P - 2 (R4 + R5))^2} \right)
\end{aligned}$$

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\begin{aligned}
In[] := & \text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(- \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{18 A G} - \right. \right. \right. \\
& \frac{L^3 (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-204 P + 96 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{139968 EI} + \\
& \frac{L^3 (-24 (-2 P + R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5)^2 + 6 (-3 P + 2 R2 + 4 R3 + 6 R4 + 6 R5)^2)}{17496 EI (P - 2 R5)} + \\
& \frac{L^3 (-24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2)}{17496 EI (P - 2 (R3 + R4 + R5))} + \\
& \left. \left. \left. \frac{L^3 (24 (-P + R2 + 2 (R3 + R4 + R5))^2 - 6 (3 P - 2 (R2 + 2 R3 + 3 (R4 + R5)))^2)}{17496 EI (P - 2 (R4 + R5))} \right) \right) = - \frac{R2}{k}, \right. \\
& \left. 2 \left(- \frac{L \left(R2 + \frac{1}{2} (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5) \right)}{9 A G} - \frac{L (P - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - 2 R5)}{18 A G} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-408 P + 192 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5))}{139968 EI} + \\
& \frac{L^3 (-48 (-2 P + R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5)^2 + 12 (-3 P + 2 R_2 + 4 R_3 + 6 R_4 + 6 R_5)^2)}{17496 EI (P - 2 R_5)} + \\
& \frac{L^3 (-48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4 + R_5))^2 + 6 (-P + 2 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5))^2)}{17496 EI (P - 2 (R_3 + R_4 + R_5))} + \\
& \frac{L^3 (-8 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4 + R_5))^3 + (-P + 2 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5))^3)}{8748 EI (P - 2 (R_3 + R_4 + R_5))^2} + \\
& \left. \frac{L^3 (48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4 + R_5))^2 - 12 (3 P - 2 (R_2 + 2 R_3 + 3 (R_4 + R_5)))^2)}{17496 EI (P - 2 (R_4 + R_5))} \right) = -\frac{R_3}{k}, \\
2 \left(-\frac{L (R_2 + \frac{1}{2} (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5))}{9 A G} - \frac{L (R_2 + R_3 + \frac{1}{2} (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5))}{9 A G} \right) - \\
& \frac{L (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5)}{18 A G} - \frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5)}{4374 EI} + \\
& \frac{L^3 (-612 P + 288 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5))}{139968 EI} + \\
& \frac{L^3 (-72 (-2 P + R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5)^2 + 18 (-3 P + 2 R_2 + 4 R_3 + 6 R_4 + 6 R_5)^2)}{17496 EI (P - 2 R_5)} + \\
& \frac{L^3 (-48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4 + R_5))^2 + 6 (-P + 2 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5))^2)}{17496 EI (P - 2 (R_3 + R_4 + R_5))} + \\
& \frac{L^3 (-8 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4 + R_5))^3 + (-P + 2 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5))^3)}{8748 EI (P - 2 (R_3 + R_4 + R_5))^2} + \\
& \frac{L^3 (48 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4 + R_5))^2 - 18 (3 P - 2 (R_2 + 2 R_3 + 3 (R_4 + R_5)))^2)}{17496 EI (P - 2 (R_4 + R_5))} + \\
& \left. \frac{L^3 (8 (-P + R_2 + 2 (R_3 + R_4 + R_5))^3 + (3 P - 2 (R_2 + 2 R_3 + 3 (R_4 + R_5)))^3)}{8748 EI (P - 2 (R_4 + R_5))^2} \right) = -\frac{R_4}{k}, \\
2 \left(-\frac{L (R_2 + \frac{1}{2} (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5))}{9 A G} - \frac{L (R_2 + R_3 + \frac{1}{2} (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5))}{9 A G} \right) - \\
& \frac{L (R_2 + R_3 + R_4 + \frac{1}{2} (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5))}{9 A G} - \frac{L (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5)}{18 A G} - \\
& \frac{L^3 (P - 2 R_2 - 2 R_3 - 2 R_4 - 2 R_5)}{4374 EI} + \frac{L^3 (-816 P + 384 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5))}{139968 EI} + \\
& \frac{L^3 (-96 (-2 P + R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5)^2 + 18 (-3 P + 2 R_2 + 4 R_3 + 6 R_4 + 6 R_5)^2)}{17496 EI (P - 2 R_5)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left(-8 (-2P + R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5)^3 + (-3P + 2R2 + 4R3 + 6R4 + 6R5)^3 \right)}{8748 EI (P - 2R5)^2} + \\
& \frac{L^3 \left(-48 (-P + R2 + 2(R3 + R4 + R5))^2 + 6 (-P + 2(R2 + R3 + R4 + R5))^2 \right)}{17496 EI (P - 2(R3 + R4 + R5))} + \\
& \frac{L^3 \left(-8 (-P + R2 + 2(R3 + R4 + R5))^3 + (-P + 2(R2 + R3 + R4 + R5))^3 \right)}{8748 EI (P - 2(R3 + R4 + R5))^2} + \\
& \frac{L^3 \left(48 (-P + R2 + 2(R3 + R4 + R5))^2 - 18 (3P - 2(R2 + 2R3 + 3(R4 + R5)))^2 \right)}{17496 EI (P - 2(R4 + R5))} + \\
& \left. \frac{L^3 \left(8 (-P + R2 + 2(R3 + R4 + R5))^3 + (3P - 2(R2 + 2R3 + 3(R4 + R5)))^3 \right)}{8748 EI (P - 2(R4 + R5))^2} \right) = \\
& - \frac{R5}{k} \}, \{R2, R3, R4, R5\}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[n]= & \left\{ \left\{ \text{R2} \rightarrow \right. \right. \\
& \left(9 A^2 G^2 k L \left(2 259 436 291 848 A E I^4 G P + 277 780 490 613 A^2 E I^3 G^2 L^2 P - 679 181 598 A^2 E I^2 G^2 k L^5 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 31 886 460 A E I^2 G k^2 L^6 P - 472 392 E I^2 k^3 L^7 P + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 91 854 A^2 E I G^2 k^2 L^8 P + 1944 A E I G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\
& \left(8 \left(22 876 792 454 961 A^4 E I^4 G^4 + 50 837 316 566 580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16 945 772 188 860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 288 744 813 230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1 757 339 338 104 A E I^4 G k^3 L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1 729 445 062 896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55 788 550 416 E I^4 k^4 L^4 + 193 710 244 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11 349 985 437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6 428 310 336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2 050 299 378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 86 447 736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3 921 291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295 488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right), \\
\text{R3} \rightarrow & \left(9 A^2 G^2 k \left(4 518 872 583 696 A E I^4 G L P + 502 096 953 744 E I^4 k L^2 P + 527 666 706 018 A^2 E I^3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. G^2 L^3 P + 60 695 876 610 A E I^3 G k L^4 P - 241 805 655 A^2 E I^2 G^2 k L^6 P - 63 772 920 A E I^2 G k^2 L^7 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 944 784 E I^2 k^3 L^8 P - 209 952 A^2 E I G^2 k^2 L^9 P - 1944 A E I G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P \right) \right) / \\
& \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right), \\
\text{R4} \rightarrow & \left(27 \left(1 033 121 304 A^2 E I^3 G^2 k L P + 76 527 504 A E I^3 G k^2 L^2 P + 110 008 287 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 8 306 226 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P \right) \right) / \\
& \left(8 \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right), \\
\text{R5} \rightarrow & - \left(\left(- 81 339 706 506 528 A^3 E I^4 G^3 k L P - 45 188 725 836 960 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 7 489 612 893 348 A^4 E I^3 G^4 k L^3 P - 6 025 163 444 928 A E I^4 G k^3 L^3 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 793 166 289 908 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 P - 223 154 201 664 E I^4 k^4 L^4 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 678 760 696 728 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 P - 36 264 470 958 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 P - 26 057 615 112 A E I^3 G k^4 L^6 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 7 805 805 408 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 P - 369 174 348 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 P - 16 441 866 A^4 E I G^4 k^3 L^9 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1 343 790 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) \right) / \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In[*]} := & \text{R2} = \left(9 A^2 G^2 k L \left(2 259 436 291 848 A E I^4 G P + \right. \right. \\
& 277 780 490 613 A^2 E I^3 G^2 L^2 P - 679 181 598 A^2 E I^2 G^2 k L^5 P - 31 886 460 A E I^2 G k^2 L^6 P - \\
& \left. \left. 472 392 E I^2 k^3 L^7 P + 91 854 A^2 E I G^2 k^2 L^8 P + 1944 A E I G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\
& \left(8 \left(22 876 792 454 961 A^4 E I^4 G^4 + 50 837 316 566 580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16 945 772 188 860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 4 288 744 813 230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1 757 339 338 104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1 729 445 062 896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 55 788 550 416 E I^4 k^4 L^4 + 193 710 244 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11 349 985 437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 6 428 310 336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2 050 299 378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86 447 736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. 3 921 291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295 488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
\text{R3} = & \left(9 A^2 G^2 k \left(4 518 872 583 696 A E I^4 G L P + 502 096 953 744 E I^4 k L^2 P + 527 666 706 018 A^2 E I^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\
& 60 695 876 610 A E I^3 G k L^4 P - 241 805 655 A^2 E I^2 G^2 k L^6 P - 63 772 920 A E I^2 G k^2 L^7 P - \\
& \left. \left. 944 784 E I^2 k^3 L^8 P - 209 952 A^2 E I G^2 k^2 L^9 P - 1944 A E I G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P \right) \right) / \\
& \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + \right. \right. \\
& 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 \\
& \left. \left. G^2 k^2 L^4 + 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \\
\text{R4} = & \left(27 \left(1 033 121 304 A^2 E I^3 G^2 k L P + 76 527 504 A E I^3 G k^2 L^2 P + 110 008 287 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P + \right. \right. \\
& 8 306 226 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P \left. \right) \right) / \\
& \left(8 \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \\
\text{R5} = & - \left(\left(-81 339 706 506 528 A^3 E I^4 G^3 k L P - 45 188 725 836 960 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \right. \\
& 7 489 612 893 348 A^4 E I^3 G^4 k L^3 P - 6 025 163 444 928 A E I^4 G k^3 L^3 P - \\
& 4 793 166 289 908 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 P - 223 154 201 664 E I^4 k^4 L^4 P - \\
& 678 760 696 728 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 P - 36 264 470 958 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 P - 26 057 615 112 A E I^3 G k^4 L^6 P - \\
& 7 805 805 408 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 P - 369 174 348 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 P - 16 441 866 A^4 E I G^4 k^3 L^9 P - \\
& \left. \left. 1 343 790 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) \right) / \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \right. \\
& \left. \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & \left(9 A^2 G^2 k L \right. \\
& \left. \left(2 259 436 291 848 A E I^4 G P + 277 780 490 613 A^2 E I^3 G^2 L^2 P - 679 181 598 A^2 E I^2 G^2 k L^5 P - 31 886 460 A \right. \right. \\
& \left. \left. E I^2 G k^2 L^6 P - 472 392 E I^2 k^3 L^7 P + 91 854 A^2 E I G^2 k^2 L^8 P + 1944 A E I G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\
& \left(8 \left(22 876 792 454 961 A^4 E I^4 G^4 + 50 837 316 566 580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16 945 772 188 860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 4 288 744 813 230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1 757 339 338 104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1 729 445 062 896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 55 788 550 416 E I^4 k^4 L^4 + 193 710 244 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11 349 985 437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 6 428 310 336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2 050 299 378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86 447 736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. 3 921 291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295 488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Out[*]} = \left(9 A^2 G^2 k \left(4 518 872 583 696 A E I^4 G L P + 502 096 953 744 E I^4 k L^2 P + 527 666 706 018 A^2 E I^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 60 695 876 610 A E I^3 G k L^4 P - 241 805 655 A^2 E I^2 G^2 k L^6 P - 63 772 920 A E I^2 G k^2 L^7 P - \right. \right. \\ \left. \left. 944 784 E I^2 k^3 L^8 P - 209 952 A^2 E I G^2 k^2 L^9 P - 1944 A E I G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P \right) \right) / \\ \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + \right. \right. \\ \left. \left. 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 \right. \right. \\ \left. \left. G^2 k^2 L^4 + 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(27 \left(1 033 121 304 A^2 E I^3 G^2 k L P + 76 527 504 A E I^3 G k^2 L^2 P + 110 008 287 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 8 306 226 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P \right) \right) / \\ \left(8 \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = - \left(\left(-81 339 706 506 528 A^3 E I^4 G^3 k L P - 45 188 725 836 960 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \right. \\ \left. \left. 7 489 612 893 348 A^4 E I^3 G^4 k L^3 P - 6 025 163 444 928 A E I^4 G k^3 L^3 P - \right. \right. \\ \left. \left. 4 793 166 289 908 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 P - 223 154 201 664 E I^4 k^4 L^4 P - \right. \right. \\ \left. \left. 678 760 696 728 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 P - 36 264 470 958 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 P - 26 057 615 112 A E I^3 G k^4 L^6 P - \right. \right. \\ \left. \left. 7 805 805 408 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 P - 369 174 348 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 P - 16 441 866 A^4 E I G^4 k^3 L^9 P - \right. \right. \\ \left. \left. 1 343 790 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) \right) / \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \right. \\ \left. \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

(*POR SIMETRÍA R10=R1, R9=R2, R8=R3, R7=R4 Y R5=R6 *)

In[*]:=

R9 = R2

R8 = R3

R7 = R4

R6 = R5

$$\text{Out[*]} = \left(9 A^2 G^2 k L \right. \\ \left. \left(2 259 436 291 848 A E I^4 G P + 277 780 490 613 A^2 E I^3 G^2 L^2 P - 679 181 598 A^2 E I^2 G^2 k L^5 P - 31 886 460 A \right. \right. \\ \left. \left. E I^2 G k^2 L^6 P - 472 392 E I^2 k^3 L^7 P + 91 854 A^2 E I G^2 k^2 L^8 P + 1944 A E I G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\ \left(8 \left(22 876 792 454 961 A^4 E I^4 G^4 + 50 837 316 566 580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16 945 772 188 860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 4 288 744 813 230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1 757 339 338 104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1 729 445 062 896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 55 788 550 416 E I^4 k^4 L^4 + 193 710 244 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11 349 985 437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 6 428 310 336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2 050 299 378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86 447 736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 3 921 291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295 488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(9 A^2 G^2 k \left(4 518 872 583 696 A E I^4 G L P + 502 096 953 744 E I^4 k L^2 P + 527 666 706 018 A^2 E I^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 60 695 876 610 A E I^3 G k L^4 P - 241 805 655 A^2 E I^2 G^2 k L^6 P - 63 772 920 A E I^2 G k^2 L^7 P - \right. \right. \\ \left. \left. 944 784 E I^2 k^3 L^8 P - 209 952 A^2 E I G^2 k^2 L^9 P - 1944 A E I G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P \right) \right) / \\ \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + \right. \right. \\ \left. \left. 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 \right. \right. \\ \left. \left. G^2 k^2 L^4 + 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(27 \left(1 033 121 304 A^2 E I^3 G^2 k L P + 76 527 504 A E I^3 G k^2 L^2 P + 110 008 287 A^3 E I^2 G^3 k L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 8 306 226 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 E I G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 E I G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P \right) \right) / \\ \left(8 \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = - \left(\left(-81 339 706 506 528 A^3 E I^4 G^3 k L P - 45 188 725 836 960 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \right. \\ \left. \left. 7 489 612 893 348 A^4 E I^3 G^4 k L^3 P - 6 025 163 444 928 A E I^4 G k^3 L^3 P - \right. \right. \\ \left. \left. 4 793 166 289 908 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 P - 223 154 201 664 E I^4 k^4 L^4 P - \right. \right. \\ \left. \left. 678 760 696 728 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 P - 36 264 470 958 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 P - 26 057 615 112 A E I^3 G k^4 L^6 P - \right. \right. \\ \left. \left. 7 805 805 408 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 P - 369 174 348 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 P - 16 441 866 A^4 E I G^4 k^3 L^9 P - \right. \right. \\ \left. \left. 1 343 790 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) \right) / \left(8 \left(2187 A E I G + 486 E I k L + 5 A G k L^3 \right) \right. \\ \left. \left(10 460 353 203 A^3 E I^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1 937 102 445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 E I^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 12 045 996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

In[*]:= Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + 2 R4 + 2 R5 - P == 0}, {R1}]
 |resuelve

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(P - \left(27 \left(1033121304 A^2 EI^3 G^2 k L P + 76527504 A EI^3 G k^2 L^2 P + 110008287 A^3 EI^2 G^3 k L^3 P + \right. \right. \right. \right. \\
 & 8306226 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 EI G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 EI G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P \left. \left. \left. \right) \right) \right) / \right. \\
 & \left(4 \left(10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \left. \left. \right) \right) - \\
 & \left(9 A^2 G^2 k L \left(2259436291848 A EI^4 G P + 277780490613 A^2 EI^3 G^2 L^2 P - \right. \right. \\
 & 679181598 A^2 EI^2 G^2 k L^5 P - 31886460 A EI^2 G k^2 L^6 P - 472392 EI^2 k^3 L^7 P + \\
 & 91854 A^2 EI G^2 k^2 L^8 P + 1944 A EI G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P \left. \right) \left. \right) / \\
 & \left(4 \left(22876792454961 A^4 EI^4 G^4 + 50837316566580 A^3 EI^4 G^3 k L + \right. \right. \\
 & 16945772188860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + \\
 & 1757339338104 A EI^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 55788550416 EI^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 6428310336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & 3921291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \left. \right) \left. \right) - \\
 & \left(9 A^2 G^2 k \left(4518872583696 A EI^4 G L P + 502096953744 EI^4 k L^2 P + 527666706018 A^2 EI^3 G^2 \right. \right. \\
 & L^3 P + 60695876610 A EI^3 G k L^4 P - 241805655 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 63772920 A EI^2 G k^2 L^7 P - \\
 & 944784 EI^2 k^3 L^8 P - 209952 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P - 1944 A EI G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P \left. \right) \left. \right) / \\
 & \left(4 \left(2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10460353203 A^3 EI^3 G^3 + \right. \right. \\
 & 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + \\
 & 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + \\
 & 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \left. \right) \left. \right) + \\
 & \left(-81339706506528 A^3 EI^4 G^3 k L P - 45188725836960 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \\
 & 7489612893348 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 6025163444928 A EI^4 G k^3 L^3 P - \\
 & 4793166289908 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - 223154201664 EI^4 k^4 L^4 P - \\
 & 678760696728 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 36264470958 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - \\
 & 26057615112 A EI^3 G k^4 L^6 P - 7805805408 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 369174348 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - \\
 & 16441866 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - 1343790 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \left. \right) \left. \right) / \\
 & \left(4 \left(2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10460353203 A^3 EI^3 G^3 + \right. \right. \\
 & 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + \\
 & 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + \\
 & 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \left. \right) \left. \right) \left. \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln[\cdot] := R1 = & \frac{1}{2} \left(P - \left(27 \left(1033 121 304 A^2 EI^3 G^2 k L P + 76 527 504 A EI^3 G k^2 L^2 P + 110 008 287 A^3 EI^2 G^3 k L^3 P + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. 8 306 226 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 EI G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 EI G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P \right) \right) / \\
 & \left(4 \left(10 460 353 203 A^3 EI^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 1 937 102 445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 EI^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 12 045 996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\
 & \left(9 A^2 G^2 k L \left(2 259 436 291 848 A EI^4 G P + 277 780 490 613 A^2 EI^3 G^2 L^2 P - \right. \right. \\
 & \left. \left. 679 181 598 A^2 EI^2 G^2 k L^5 P - 31 886 460 A EI^2 G k^2 L^6 P - 472 392 EI^2 k^3 L^7 P + \right. \right. \\
 & \left. \left. 91 854 A^2 EI G^2 k^2 L^8 P + 1944 A EI G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\
 & \left(4 \left(22 876 792 454 961 A^4 EI^4 G^4 + 50 837 316 566 580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16 945 772 188 860 \right. \right. \\
 & \left. \left. A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 4 288 744 813 230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1 757 339 338 104 A EI^4 G k^3 L^3 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 1 729 445 062 896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55 788 550 416 EI^4 k^4 L^4 + 193 710 244 500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 11 349 985 437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6 428 310 336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2 050 299 378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 86 447 736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3 921 291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295 488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
 & \left(9 A^2 G^2 k \left(4 518 872 583 696 A EI^4 G L P + 502 096 953 744 EI^4 k L^2 P + 527 666 706 018 A^2 EI^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\
 & \left. \left. 60 695 876 610 A EI^3 G k L^4 P - 241 805 655 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 63 772 920 A EI^2 G k^2 L^7 P - \right. \right. \\
 & \left. \left. 944 784 EI^2 k^3 L^8 P - 209 952 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P - 1944 A EI G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P \right) \right) / \\
 & \left(4 \left(2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10 460 353 203 A^3 EI^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 EI^3 G^2 k L + \right. \right. \\
 & \left. \left. 3 099 363 912 A EI^3 G k^2 L^2 + 1 937 102 445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 114 791 256 EI^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 12 045 996 A EI^2 G k^3 L^5 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 761 076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) + \\
 & \left(- 81 339 706 506 528 A^3 EI^4 G^3 k L P - 45 188 725 836 960 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \\
 & \left. 7 489 612 893 348 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 6 025 163 444 928 A EI^4 G k^3 L^3 P - \right. \\
 & \left. 4 793 166 289 908 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - 223 154 201 664 EI^4 k^4 L^4 P - \right. \\
 & \left. 678 760 696 728 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 36 264 470 958 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - 26 057 615 112 A EI^3 G k^4 L^6 P - \right. \\
 & \left. 7 805 805 408 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 369 174 348 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - 16 441 866 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - \right. \\
 & \left. 1 343 790 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) / \left(4 \left(2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3 \right) \right. \\
 & \left. \left(10 460 353 203 A^3 EI^3 G^3 + 20 920 706 406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3 099 363 912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 1 937 102 445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114 791 256 EI^3 k^3 L^3 + 312 487 308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 12 045 996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761 076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53 946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right))
 \end{aligned}$$

R10 =

R1

$$\text{Out[=]} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
& \left(P - \left(27 \left(1033121304 A^2 EI^3 G^2 k L P + 76527504 A EI^3 G k^2 L^2 P + 110008287 A^3 EI^2 G^3 k L^3 P + 8306226 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 EI G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 EI G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P \right) \right) \right) / \\
& \left(4 \left(10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\
& \left(9 A^2 G^2 k L \left(2259436291848 A EI^4 G P + 277780490613 A^2 EI^3 G^2 L^2 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 679181598 A^2 EI^2 G^2 k L^5 P - 31886460 A EI^2 G k^2 L^6 P - 472392 EI^2 k^3 L^7 P + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 91854 A^2 EI G^2 k^2 L^8 P + 1944 A EI G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\
& \left(4 \left(22876792454961 A^4 EI^4 G^4 + 50837316566580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4288744813230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A EI^4 G k^3 L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1729445062896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 EI^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 11349985437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 86447736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(9 A^2 G^2 k \left(4518872583696 A EI^4 G L P + 502096953744 EI^4 k L^2 P + 527666706018 A^2 EI^3 G^2 L^3 P + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 60695876610 A EI^3 G k L^4 P - 241805655 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 63772920 A EI^2 G k^2 L^7 P - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 944784 EI^2 k^3 L^8 P - 209952 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P - 1944 A EI G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P \right) \right) / \\
& \left(4 \left(2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3 \right) \left(10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) + \\
& \left(-81339706506528 A^3 EI^4 G^3 k L P - 4518872583696 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - \right. \\
& \quad \left. 7489612893348 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 6025163444928 A EI^4 G k^3 L^3 P - \right. \\
& \quad \left. 4793166289908 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - 223154201664 EI^4 k^4 L^4 P - \right. \\
& \quad \left. 678760696728 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 36264470958 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - 26057615112 A EI^3 G k^4 L^6 P - \right. \\
& \quad \left. 7805805408 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 369174348 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - 16441866 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - \right. \\
& \quad \left. 1343790 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P \right) / \left(4 \left(2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3 \right) \right) \\
& \left(10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \\
& \quad \left. 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \\
& \quad \left. 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \left. \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Out[=]} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & (P - (27 (1033121304 A^2 EI^3 G^2 k L P + 76527504 A EI^3 G k^2 L^2 P + 110008287 A^3 EI^2 G^3 k L^3 P + 8306226 \\ & \quad A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 P + 4455 A^3 EI G^3 k^2 L^6 P - 972 A^2 EI G^2 k^3 L^7 P - 2 A^3 G^3 k^3 L^9 P)) / \\ & (4 (10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + \\ & \quad 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\ & \quad 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9)) - \\ & (9 A^2 G^2 k L (2259436291848 A EI^4 G P + 277780490613 A^2 EI^3 G^2 L^2 P - \\ & \quad 679181598 A^2 EI^2 G^2 k L^5 P - 31886460 A EI^2 G k^2 L^6 P - 472392 EI^2 k^3 L^7 P + \\ & \quad 91854 A^2 EI G^2 k^2 L^8 P + 1944 A EI G k^3 L^9 P - 2 A^2 G^2 k^3 L^{11} P)) / \\ & (4 (22876792454961 A^4 EI^4 G^4 + 50837316566580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \\ & \quad 4288744813230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A EI^4 G k^3 L^3 + \\ & \quad 1729445062896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 EI^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\ & \quad 11349985437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\ & \quad 86447736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12})) - \\ & (9 A^2 G^2 k (4518872583696 A EI^4 G L P + 502096953744 EI^4 k L^2 P + 527666706018 A^2 EI^3 G^2 L^3 P + \\ & \quad 60695876610 A EI^3 G k L^4 P - 241805655 A^2 EI^2 G^2 k L^6 P - 63772920 A EI^2 G k^2 L^7 P - \\ & \quad 944784 EI^2 k^3 L^8 P - 209952 A^2 EI G^2 k^2 L^9 P - 1944 A EI G k^3 L^{10} P + 8 A^2 G^2 k^3 L^{12} P)) / \\ & (4 (2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3) (10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + \\ & \quad 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + \\ & \quad 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + \\ & \quad 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9)) + \\ & (-81339706506528 A^3 EI^4 G^3 k L P - 4518872583696 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 P - \\ & \quad 7489612893348 A^4 EI^3 G^4 k L^3 P - 6025163444928 A EI^4 G k^3 L^3 P - \\ & \quad 4793166289908 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 P - 223154201664 EI^4 k^4 L^4 P - \\ & \quad 678760696728 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 P - 36264470958 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 P - 26057615112 A EI^3 G k^4 L^6 P - \\ & \quad 7805805408 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 P - 369174348 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 P - 16441866 A^4 EI G^4 k^3 L^9 P - \\ & \quad 1343790 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} P - 1273 A^4 G^4 k^4 L^{12} P) / (4 (2187 A EI G + 486 EI k L + 5 A G k L^3) \\ & (10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + \\ & \quad 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\ & \quad 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9))) \end{aligned}$$


```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.80 (*m*)
  H = 1.20 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 60 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  v = 0.35
  G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
  A = B * H

Out[ ]:= 0.8
Out[ ]:= 1.2
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:=  $2.17079 \times 10^{10}$ 
Out[ ]:= 0.1152
Out[ ]:=  $8. \times 10^6$ 
Out[ ]:= 60
Out[ ]:= 100
Out[ ]:=  $2.50076 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.35
Out[ ]:=  $8.03998 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.96

```

In[]:= (*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

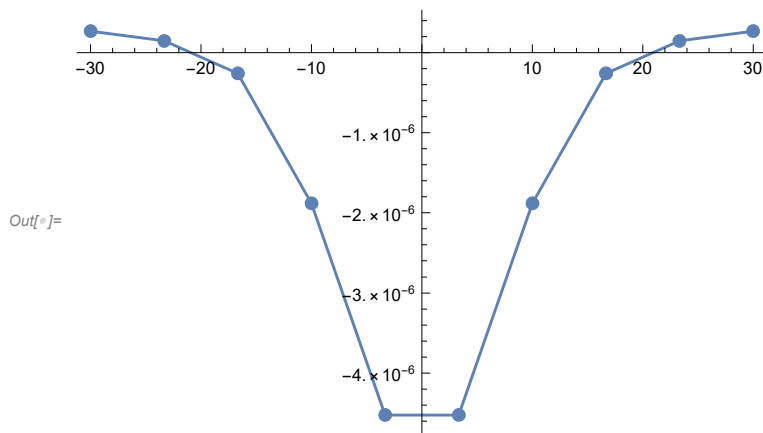
```

g1 = ListLinePlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-7L/18, -R2/k}, {-5L/18, -R3/k},
  gráfico de línea de una lista
  {-L/6, -R4/k}, {-L/18, -R5/k}, {L/18, -R6/k}, {L/6, -R7/k}, {5L/18, -R8/k},
  {-L/18, -R5/k}, {L/18, -R6/k}, {L/6, -R7/k}, {5L/18, -R8/k}, {7L/18, -R9/k}, {L/2, -R10/k}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  origen de ejes rango de rep... [todo]

g2 = ListPlot[{{{-L/2, -R1/k}, {-7L/18, -R2/k}, {-5L/18, -R3/k}, {-L/6, -R4/k},
  representación de lista
  {-L/18, -R5/k}, {L/18, -R6/k}, {L/6, -R7/k}, {5L/18, -R8/k}, {7L/18, -R9/k}, {L/2, -R10/k}},
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... tamaño de punto origen de ejes rango de rep... [todo]

Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```



A.1.6. Ejemplo 6: Viga sobre apoyos elásticos con carga repartida, aplicando la teoría de Timoshenko

(*VIGA CON TRES RESORTES*)

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - R2}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - R2}{2} \right) - q * x \right)^2 dx \right), R2\right]$$

$$Out[]:= 2 \left(\frac{-\frac{L^2 q}{8} + \frac{L R2}{4}}{2 A G} + \frac{-\frac{5 L^4 q}{384} + \frac{L^3 R2}{48}}{2 EI} \right)$$

(*SE OBTIENE R2*)

$$In[]:= \text{Solve}\left[\left\{2 \left(\frac{-\frac{L^2 q}{8} + \frac{L R2}{4}}{2 A G} + \frac{-\frac{5 L^4 q}{384} + \frac{L^3 R2}{48}}{2 EI} \right) == -\frac{R2}{k} \right\}, \{R2\}\right]$$

$$Out[]:= \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \frac{k (48 EI L^2 + 5 A G L^4) q}{8 (48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3)} \right\} \right\}$$

In[]:=

$$R2 = \frac{k (48 EI L^2 + 5 A G L^4) q}{8 (48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3)}$$

$$Out[]:= \frac{k (48 EI L^2 + 5 A G L^4) q}{8 (48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3)}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R3=R1*)

(*R1+R2-P+R1=0*)

$$\text{Solve}\left[\{2 * R1 + R2 - q * L == 0\}, \{R1\}\right]$$

[resuelve

$$Out[]:= \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{3 (128 A EI G L q + 16 EI k L^2 q + A G k L^4 q)}{16 (48 A EI G + 12 EI k L + A G k L^3)} \right\} \right\}$$

In[^e]:=

$$\mathbf{R1} = \frac{3 \left(128 A E I G L q + 16 E I k L^2 q + A G k L^4 q \right)}{16 \left(48 A E I G + 12 E I k L + A G k L^3 \right)}$$

$$\text{Out[^e]]=} \frac{3 \left(128 A E I G L q + 16 E I k L^2 q + A G k L^4 q \right)}{16 \left(48 A E I G + 12 E I k L + A G k L^3 \right)}$$

In[^e]:= **R3 = R1**

$$\text{Out[^e]]=} \frac{3 \left(128 A E I G L q + 16 E I k L^2 q + A G k L^4 q \right)}{16 \left(48 A E I G + 12 E I k L + A G k L^3 \right)}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 12 000 000 000

Out[]:= 19 928 032 768

Out[]:= 0.1152

Out[]:= 9.6×10^9

Out[]:= 10

Out[]:= 250

Out[]:= 2.29571×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 7.38075×10^9

Out[]:= 0.96

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

```

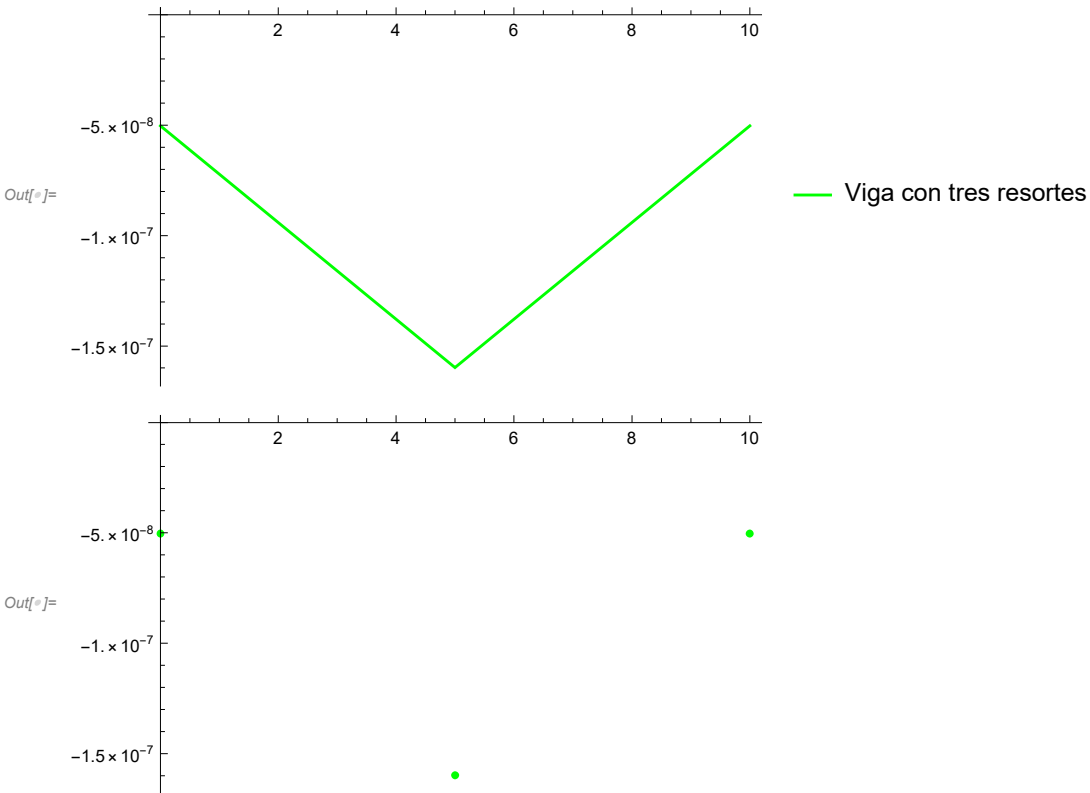
In[ ]:= g1 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, -R3 / k}}, AxesOrigin -> {0, 0},
    [gráfico de línea de una lista] [origen de ejes]

    PlotRange -> All, PlotStyle -> Green, PlotLegends -> {"Viga con tres resortes"}]
    [rango de rep... [todo [estilo de repr... [verde [leyendas de representación]

g2 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, -R3 / k}},
    [representación de lista]

    PlotStyle -> Green, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
    [estilo de repr... [verde [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

Show[g1, g2]
[muestra]
    
```



(*VIGA CON CUATRO RESORTES*)

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right)\right)^2 dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx\right], R2]$$

$$Out[]:= 2 \left(\frac{-\frac{2 L^2 q}{9} + \frac{2 L R2}{3}}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{108} + \frac{2 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{-\frac{13 L^4 q}{972} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI} \right)$$

(*SE OBTIENE R2*)

$$In[]:= \text{Solve}\left[\left\{2 \left(\frac{-\frac{2 L^2 q}{9} + \frac{2 L R2}{3}}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{108} + \frac{2 L^3 R2}{81}}{2 EI} + \frac{-\frac{13 L^4 q}{972} + \frac{L^3 R2}{27}}{2 EI}\right) == -\frac{R2}{k}\right\}, \{R2\}\right]$$

$$Out[]:= \left\{\left\{R2 \rightarrow \frac{k (108 EI L^2 + 11 A G L^4) q}{6 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)}\right\}\right\}$$

In[]:=

$$R2 = \frac{k (108 EI L^2 + 11 A G L^4) q}{6 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)}$$

$$Out[]:= \frac{k (108 EI L^2 + 11 A G L^4) q}{6 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)}$$

(*POR SIMETRÍA LAS REACCIONES SON R1=R4 Y R2=R3 *)

In[]:= R3 = R2

$$Out[]:= \frac{k (108 EI L^2 + 11 A G L^4) q}{6 (81 A EI G + 54 EI k L + 5 A G k L^3)}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)
 (*POR SIMETRÍA R1=R4 Y R2=R3*)
 (*2R1+2R2-P=0*)

In[]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + -q * L == 0}, {R1}]

[resuelve

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{243 A E I G L q + 54 E I k L^2 q + 4 A G k L^4 q}{6 (81 A E I G + 54 E I k L + 5 A G k L^3)} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } R1 = \frac{243 A E I G L q + 54 E I k L^2 q + 4 A G k L^4 q}{6 (81 A E I G + 54 E I k L + 5 A G k L^3)}$$

$$R4 = R1$$

$$\text{Out[]:= } \frac{243 A E I G L q + 54 E I k L^2 q + 4 A G k L^4 q}{6 (81 A E I G + 54 E I k L + 5 A G k L^3)}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{243 A E I G L q + 54 E I k L^2 q + 4 A G k L^4 q}{6 (81 A E I G + 54 E I k L + 5 A G k L^3)}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 12 000 000 000

Out[]:= 19 928 032 768

Out[]:= 0.1152

Out[]:= 9.6×10^9

Out[]:= 10

Out[]:= 250

Out[]:= 2.29571×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 7.38075×10^9

Out[]:= 0.96

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
In[ ]:= g3 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, -R4 / k}},
  |gráfico de línea de una lista
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red,
  |origen de ejes |rango de rep... |todo |estilo de repr... |rojo
```

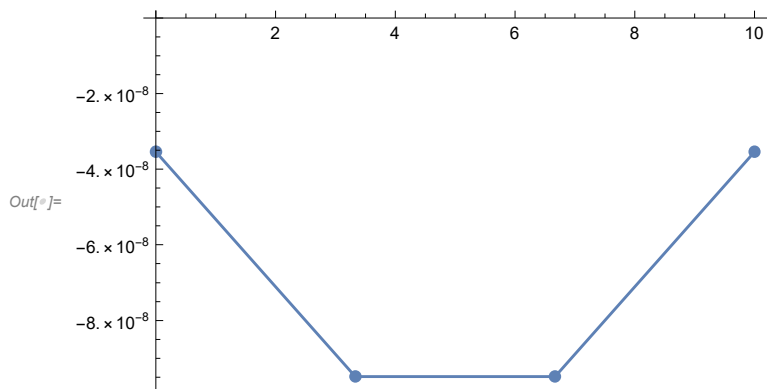
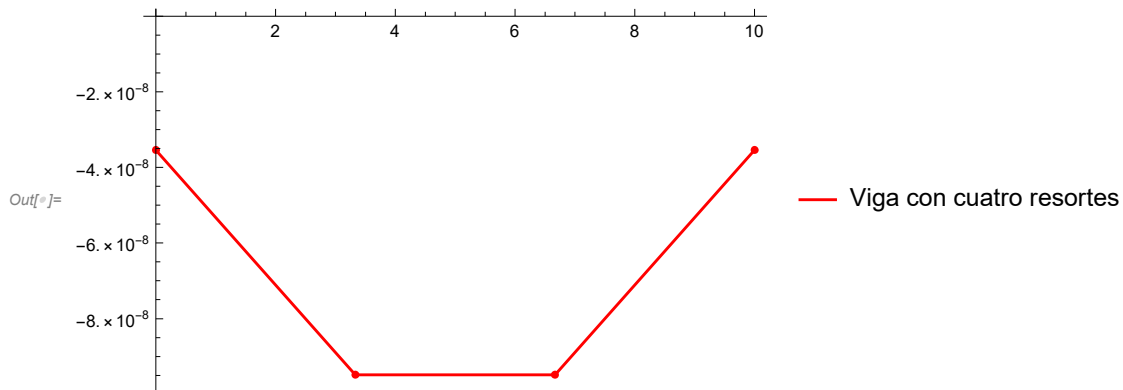
```
  PlotLegends -> {"Viga con cuatro resortes"}]
  |leyendas de representación
```

```
g4 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, -R4 / k}},
  |representación de lista
```

```
  PlotStyle -> Red, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  |estilo de repr... |rojo |origen de ejes |rango de rep... |todo
```

```
Show[
  |muestra
```

```
  g3,
  g4]
```



(*VIGA CON 5 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[]:=

D[2*
[deriva

$$\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) - q * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) - q * x + R2 \right)^2 dx \right), R2]$$

$$Out[]:= 2 \left(\frac{-\frac{11 L^4 q}{768} + \frac{L^3 R2}{32} + \frac{3 L^3 R3}{128}}{2 EI} + \frac{L (-36 L q + 48 (2 R2 + R3))}{384 A G} + \frac{L^3 (-260 L q + 320 (2 R2 + R3))}{122 880 EI} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

In[]:=

D[2*
[deriva

$$\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) - q * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - R3}{2} \right) - q * x + R2 \right)^2 dx \right), R3]$$

$$Out[]:= 2 \left(\frac{-\frac{L^2 q}{32} + \frac{L R3}{8}}{2 A G} + \frac{-\frac{67 L^4 q}{6144} + \frac{3 L^3 R2}{128} + \frac{7 L^3 R3}{384}}{2 EI} + \frac{L (-18 L q + 24 (2 R2 + R3))}{384 A G} + \frac{L^3 (-130 L q + 160 (2 R2 + R3))}{122 880 EI} \right)$$

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

In[*]:= Solve[
|resuelve

$$\left\{ 2 \left(\frac{-\frac{11 L^4 q}{768} + \frac{L^3 R2}{32} + \frac{3 L^3 R3}{128}}{2 EI} + \frac{L (-36 L q + 48 (2 R2 + R3))}{384 A G} + \frac{L^3 (-260 L q + 320 (2 R2 + R3))}{122 880 EI} \right) = -\frac{R2}{k}, \right.$$

$$\left. 2 \left(\frac{-\frac{L^2 q}{32} + \frac{L R3}{8}}{2 A G} + \frac{-\frac{67 L^4 q}{6144} + \frac{3 L^3 R2}{128} + \frac{7 L^3 R3}{384}}{2 EI} + \frac{L (-18 L q + 24 (2 R2 + R3))}{384 A G} + \frac{L^3 (-130 L q + 160 (2 R2 + R3))}{122 880 EI} \right) = -\frac{R3}{k}, \{R2, R3\} \right]$$

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \left(2 k \left(13 824 A EI^2 G L^2 + 1152 EI^2 k L^3 + 1368 A^2 EI G^2 L^4 + 126 A EI G k L^5 + A^2 G^2 k L^7 \right) q \right) / \right. \right.$$

$$\left(147 456 A^2 EI^2 G^2 + 110 592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + \right.$$

$$\left. 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6 \right), R3 \rightarrow$$

$$\left(L^2 \left(147 456 A EI^2 G k + 18 432 EI^2 k^2 L + 15 360 A^2 EI G^2 k L^2 + 2016 A EI G k^2 L^3 + 13 A^2 G^2 k^2 L^5 \right) q \right) /$$

$$\left(8 \left(147 456 A^2 EI^2 G^2 + 110 592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right) \left. \right\}$$

In[*]:= R2 =

$$\frac{2 k \left(13 824 A EI^2 G L^2 + 1152 EI^2 k L^3 + 1368 A^2 EI G^2 L^4 + 126 A EI G k L^5 + A^2 G^2 k L^7 \right) q}{147 456 A^2 EI^2 G^2 + 110 592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

$$R3 = \frac{\left(L^2 \left(147 456 A EI^2 G k + 18 432 EI^2 k^2 L + 15 360 A^2 EI G^2 k L^2 + 2016 A EI G k^2 L^3 + 13 A^2 G^2 k^2 L^5 \right) q \right)}{\left(8 \left(147 456 A^2 EI^2 G^2 + 110 592 A EI^2 G k L + \right. \right.$$

$$\left. \left. 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)}$$

$$\text{Out[*]} = \frac{2 k \left(13 824 A EI^2 G L^2 + 1152 EI^2 k L^3 + 1368 A^2 EI G^2 L^4 + 126 A EI G k L^5 + A^2 G^2 k L^7 \right) q}{147 456 A^2 EI^2 G^2 + 110 592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[*]} = \frac{\left(L^2 \left(147 456 A EI^2 G k + 18 432 EI^2 k^2 L + 15 360 A^2 EI G^2 k L^2 + 2016 A EI G k^2 L^3 + 13 A^2 G^2 k^2 L^5 \right) q \right)}{\left(8 \left(147 456 A^2 EI^2 G^2 + 110 592 A EI^2 G k L + \right. \right.$$

$$\left. \left. 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)}$$

(*POR SIMETRÍA R5=R1 Y R4=R2*)

In[*]:= R4 = R2

$$\text{Out[*]} = \frac{2 k \left(13 824 A EI^2 G L^2 + 1152 EI^2 k L^3 + 1368 A^2 EI G^2 L^4 + 126 A EI G k L^5 + A^2 G^2 k L^7 \right) q}{147 456 A^2 EI^2 G^2 + 110 592 A EI^2 G k L + 9216 EI^2 k^2 L^2 + 9216 A^2 EI G^2 k L^3 + 960 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

In[]:= Solve[{2 R1 + 2 R2 + -q * L + R3 == 0}, {R1}]
|resuelve

Out[]:= { {R1 → (1 179 648 A² EI² G² L q + 294 912 A EI² G k L² q + 18 432 EI² k² L³ q + 14 592 A² EI G² k L⁴ q + 1632 A EI G k² L⁵ q + 11 A² G² k² L⁷ q) / (16 (147 456 A² EI² G² + 110 592 A EI² G k L + 9216 EI² k² L² + 9216 A² EI G² k L³ + 960 A EI G k² L⁴ + 7 A² G² k² L⁶)) } } }

In[]:= R1 = (1 179 648 A² EI² G² L q + 294 912 A EI² G k L² q + 18 432 EI² k² L³ q + 14 592 A² EI G² k L⁴ q + 1632 A EI G k² L⁵ q + 11 A² G² k² L⁷ q) / (16 (147 456 A² EI² G² + 110 592 A EI² G k L + 9216 EI² k² L² + 9216 A² EI G² k L³ + 960 A EI G k² L⁴ + 7 A² G² k² L⁶))

R5 =
R1

Out[]:= (1 179 648 A² EI² G² L q + 294 912 A EI² G k L² q + 18 432 EI² k² L³ q + 14 592 A² EI G² k L⁴ q + 1632 A EI G k² L⁵ q + 11 A² G² k² L⁷ q) / (16 (147 456 A² EI² G² + 110 592 A EI² G k L + 9216 EI² k² L² + 9216 A² EI G² k L³ + 960 A EI G k² L⁴ + 7 A² G² k² L⁶))

Out[]:= (1 179 648 A² EI² G² L q + 294 912 A EI² G k L² q + 18 432 EI² k² L³ q + 14 592 A² EI G² k L⁴ q + 1632 A EI G k² L⁵ q + 11 A² G² k² L⁷ q) / (16 (147 456 A² EI² G² + 110 592 A EI² G k L + 9216 EI² k² L² + 9216 A² EI G² k L³ + 960 A EI G k² L⁴ + 7 A² G² k² L⁶))

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[*]= 0.8

Out[*]= 1.2

Out[*]= 12 000 000 000

Out[*]= 19 928 032 768

Out[*]= 0.1152

Out[*]= 9.6×10^9

Out[*]= 10

Out[*]= 250

Out[*]= 2.29571×10^9

Out[*]= 0.35

Out[*]= 7.38075×10^9

Out[*]= 0.96

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
In[ ]:= g5 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, -R5 / k}},
  gráfico de línea de una lista
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, PlotRange -> All,
```

```
  origen de ejes rango de rep... [todo] rango de rep... [todo]
```

```
  PlotStyle -> Blue, PlotLegends -> {"Viga con cinco resortes"}]
```

```
  estilo de repr... [azul] leyendas de representación
```

```
g6 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, -R5 / k}},
  representación de lista
```

```
  PlotStyle -> Blue, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

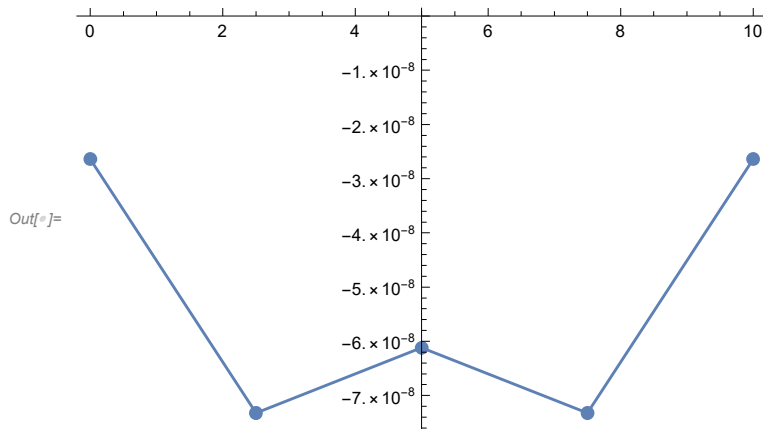
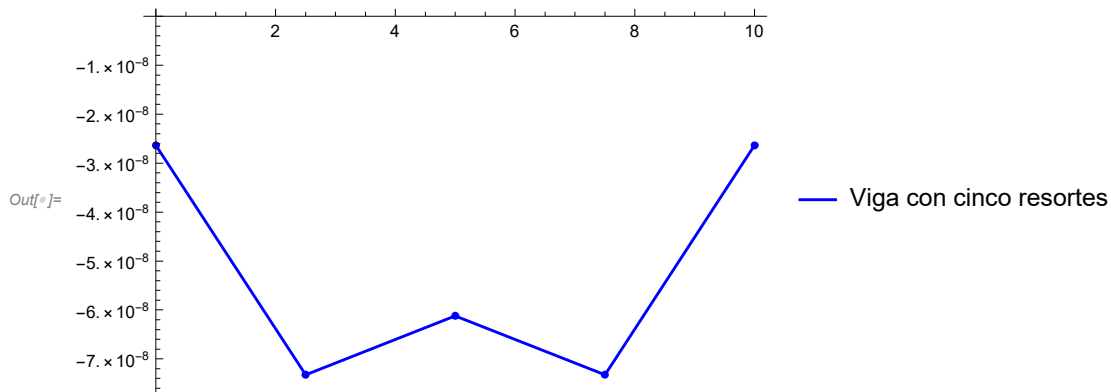
```
  estilo de repr... [azul] origen de ejes rango de rep... [todo]
```

```
Show[
```

```
  muestra
```

```
  g5,
```

```
  g6]
```



In[*]:= (*VIGA CON SEIS RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$D\left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right.\right.$$

$$\left.\frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5}\right)\right)^2 dx + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5}\right)\right)^2 dx + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) - q * x + R2 + R3\right)^2 dx \right], R2]$$

$$Out[*]= 2 \left(\frac{-\frac{31 L^4 q}{3750} + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125}}{2 EI} + \frac{L (-240 L q + 600 (R2 + R3))}{3000 A G} + \frac{L^3 (-850 L q + 2000 (R2 + R3))}{750000 EI} + \frac{L^3 (-3700 L q + 6000 (R2 + 2 R3))}{1500000 EI} \right)$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3}{2}\right) - q * x + R2 + R3\right)^2 dx, R3\right] \\
 \text{Out[]:= } & 2 \left(\frac{-\frac{2 L^2 q}{25} + \frac{2 L R3}{5}}{2 A G} + \frac{-\frac{19 L^4 q}{1500} + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375}}{2 \text{EI}} + \frac{L (-240 L q + 600 (R2 + R3))}{3000 A G} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-850 L q + 2000 (R2 + R3))}{750000 \text{EI}} + \frac{L^3 (-7400 L q + 12000 (R2 + 2 R3))}{1500000 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\text{Solve}\left[\left\{2\left(-\frac{31 L^4 q}{3750} + \frac{2 L^3 R2}{125} + \frac{3 L^3 R3}{125} + \frac{L(-240 L q + 600(R2 + R3))}{3000 A G}\right) + \frac{L^3(-850 L q + 2000(R2 + R3))}{750000 EI} + \frac{L^3(-3700 L q + 6000(R2 + 2 R3))}{1500000 EI}\right\} = -\frac{R2}{k}, \right.$$

$$2\left(-\frac{2 L^2 q}{25} + \frac{2 L R3}{5} + \frac{-19 L^4 q}{1500} + \frac{3 L^3 R2}{125} + \frac{14 L^3 R3}{375} + \frac{L(-240 L q + 600(R2 + R3))}{3000 A G}\right) + \frac{L^3(-850 L q + 2000(R2 + R3))}{750000 EI} + \frac{L^3(-7400 L q + 12000(R2 + 2 R3))}{1500000 EI}\left. = -\frac{R3}{k}\right\}, \{R2, R3\}]$$

$$\text{Out[]}:= \left\{ \left\{ R2 \rightarrow \left(k \left(225000 A EI^2 G L^2 + 45000 EI^2 k L^3 + 21750 A^2 EI G^2 L^4 + 4950 A EI G k L^5 + 43 A^2 G^2 k L^7 \right) q \right) / \left(10 \left(140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right) \right\}, R3 \rightarrow \left(L^2 \left(337500 A EI^2 G k + 45000 EI^2 k^2 L + 34875 A^2 EI G^2 k L^2 + 4950 A EI G k^2 L^3 + 37 A^2 G^2 k^2 L^5 \right) q \right) / \left(10 \left(140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right) \right\} \right\}$$

$$\text{In[]}:= R2 = \left(k \left(225000 A EI^2 G L^2 + 45000 EI^2 k L^3 + 21750 A^2 EI G^2 L^4 + 4950 A EI G k L^5 + 43 A^2 G^2 k L^7 \right) q \right) / \left(10 \left(140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

$$R3 = \left(L^2 \left(337500 A EI^2 G k + 45000 EI^2 k^2 L + 34875 A^2 EI G^2 k L^2 + 4950 A EI G k^2 L^3 + 37 A^2 G^2 k^2 L^5 \right) q \right) / \left(10 \left(140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

$$\text{Out[]}:= \left(k \left(225000 A EI^2 G L^2 + 45000 EI^2 k L^3 + 21750 A^2 EI G^2 L^4 + 4950 A EI G k L^5 + 43 A^2 G^2 k L^7 \right) q \right) / \left(10 \left(140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

$$\text{Out[]}:= \left(L^2 \left(337500 A EI^2 G k + 45000 EI^2 k^2 L + 34875 A^2 EI G^2 k L^2 + 4950 A EI G k^2 L^3 + 37 A^2 G^2 k^2 L^5 \right) q \right) / \left(10 \left(140625 A^2 EI^2 G^2 + 168750 A EI^2 G k L + 22500 EI^2 k^2 L^2 + 14625 A^2 EI G^2 k L^3 + 2400 A EI G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

(* AL SER SIMETRICA, LAS REACCIONES SON R1=R6, R2=R5 Y R3=R4*)

In[]:= **R5 = R2**

R4 = R3

$$\text{Out[]} = \left(k \left(225\,000 A E I^2 G L^2 + 45\,000 E I^2 k L^3 + 21\,750 A^2 E I G^2 L^4 + 4950 A E I G k L^5 + 43 A^2 G^2 k L^7 \right) q \right) / \left(10 \left(140\,625 A^2 E I^2 G^2 + 168\,750 A E I^2 G k L + 22\,500 E I^2 k^2 L^2 + 14\,625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

$$\text{Out[]} = \left(L^2 \left(337\,500 A E I^2 G k + 45\,000 E I^2 k^2 L + 34\,875 A^2 E I G^2 k L^2 + 4950 A E I G k^2 L^3 + 37 A^2 G^2 k^2 L^5 \right) q \right) / \left(10 \left(140\,625 A^2 E I^2 G^2 + 168\,750 A E I^2 G k L + 22\,500 E I^2 k^2 L^2 + 14\,625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R2 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

Solve[{ 2 R1 + 2 R2 + 2 R3 - q * L == 0 }, { R1 }]

[\[resuelve\]](#)

$$\text{Out[]} = \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \left(3 \left(46\,875 A^2 E I^2 G^2 L q + 18\,750 A E I^2 G k L^2 q + 1500 E I^2 k^2 L^3 q + 1100 A^2 E I G^2 k L^4 q + 140 A E I G k^2 L^5 q + A^2 G^2 k^2 L^7 q \right) \right) / \left(2 \left(140\,625 A^2 E I^2 G^2 + 168\,750 A E I^2 G k L + 22\,500 E I^2 k^2 L^2 + 14\,625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right) \right\} \right\}$$

In[]:= **R1 =**

$$\left(3 \left(46\,875 A^2 E I^2 G^2 L q + 18\,750 A E I^2 G k L^2 q + 1500 E I^2 k^2 L^3 q + 1100 A^2 E I G^2 k L^4 q + 140 A E I G k^2 L^5 q + A^2 G^2 k^2 L^7 q \right) \right) / \left(2 \left(140\,625 A^2 E I^2 G^2 + 168\,750 A E I^2 G k L + 22\,500 E I^2 k^2 L^2 + 14\,625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

R6 =

R1

$$\text{Out[]} = \left(3 \left(46\,875 A^2 E I^2 G^2 L q + 18\,750 A E I^2 G k L^2 q + 1500 E I^2 k^2 L^3 q + 1100 A^2 E I G^2 k L^4 q + 140 A E I G k^2 L^5 q + A^2 G^2 k^2 L^7 q \right) \right) / \left(2 \left(140\,625 A^2 E I^2 G^2 + 168\,750 A E I^2 G k L + 22\,500 E I^2 k^2 L^2 + 14\,625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

$$\text{Out[]} = \left(3 \left(46\,875 A^2 E I^2 G^2 L q + 18\,750 A E I^2 G k L^2 q + 1500 E I^2 k^2 L^3 q + 1100 A^2 E I G^2 k L^4 q + 140 A E I G k^2 L^5 q + A^2 G^2 k^2 L^7 q \right) \right) / \left(2 \left(140\,625 A^2 E I^2 G^2 + 168\,750 A E I^2 G k L + 22\,500 E I^2 k^2 L^2 + 14\,625 A^2 E I G^2 k L^3 + 2400 A E I G k^2 L^4 + 19 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \right)$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 12 000 000 000

Out[]:= 19 928 032 768

Out[]:= 0.1152

Out[]:= 9.6×10^9

Out[]:= 10

Out[]:= 250

Out[]:= 2.29571×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 7.38075×10^9

Out[]:= 0.96

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

g7 = ListLinePlot [$\left\{ \left\{ \{0, -R1 / k\}, \left\{ \frac{L}{5}, -R2 / k\right\}, \left\{ \frac{2L}{5}, -R3 / k\right\},$
[gráfico de línea de una lista]

$\left\{ \frac{3L}{5}, -R4 / k\right\}, \left\{ \frac{4L}{5}, -R5 / k\right\}, \{L, -R6 / k\}\right\}$, **AxesOrigin** $\rightarrow \{0, 0\}$,
[origen de ejes]

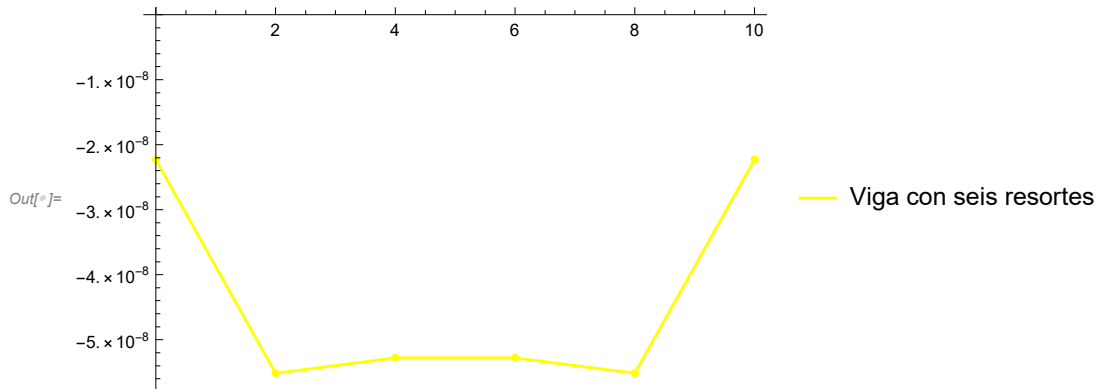
PlotRange \rightarrow **All**, **PlotStyle** \rightarrow **Yellow**, **PlotLegends** \rightarrow {"Viga con seis resortes"}]
[rango de rep... [todo [estilo de repr... [amarillo [leyendas de representación]

g8 = ListPlot [$\left\{ \left\{ \{0, -R1 / k\}, \left\{ \frac{L}{5}, -R2 / k\right\}, \left\{ \frac{2L}{5}, -R3 / k\right\}, \left\{ \frac{3L}{5}, -R4 / k\right\}, \left\{ \frac{4L}{5}, -R5 / k\right\},$
[representación de lista]

$\{L, -R6 / k\}\right\}$, **PlotStyle** \rightarrow **Yellow**, **AxesOrigin** $\rightarrow \{0, 0\}$, **PlotRange** \rightarrow **All**]
[estilo de repr... [amarillo [origen de ejes [rango de rep... [todo]

Show [
[muestra]

g7,
g8]



(*VIGA CON 7 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & D_{\text{deriva}} \left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) - q * x \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) - q * x + R2 \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2 L}{6} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) - q * x + R2 + R3 \right)^2 dx \right), R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[*]= & 2 \left(\frac{L (-90 L q + 108 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{1296 A G} + \frac{L^3 (-210 L q + 240 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-1040 L q + 60 (24 (R2 + 2 R3) + 30 R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-800 L q + 60 (24 R2 + 18 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
\text{In[]:= } & \text{D}\left[2 * \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) - q * x \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) - q * x + R2 \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6} \right) + R3 \left(x - \frac{2 L}{6} \right) \right)^2 dx + \\
& \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2} \right) - q * x + R2 + R3 \right)^2 dx \right], R3] \\
\text{Out[]:= } & 2 \left(\frac{L (-54 L q + 108 (2 R3 + R4))}{1296 A G} + \right. \\
& \frac{L (-90 L q + 108 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{1296 A G} + \frac{L^3 (-210 L q + 240 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311 040 EI} + \\
& \left. \frac{L^3 (-2080 L q + 60 (48 (R2 + 2 R3) + 60 R4))}{311 040 EI} + \frac{L^3 (-1230 L q + 60 (36 R2 + 28 (2 R3 + R4)))}{311 040 EI} \right)
\end{aligned}$$

In[*]:= (*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \quad \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{6}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \quad \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6}\right)\right)^2 dx + \\
 & \quad \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{6}}^{\frac{L}{3}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx + \\
 & \quad \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{6}\right) + R3 \left(x - \frac{2 L}{6}\right)\right)^2 dx + \\
 & \quad \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - R4}{2}\right) - q * x + R2 + R3\right)^2 dx, R4\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{L^2 q}{72} + \frac{L R4}{12} + \frac{L (-27 L q + 54 (2 R3 + R4))}{1296 A G} + \right. \\
 & \frac{L (-45 L q + 54 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{1296 A G} + \frac{L^3 (-105 L q + 120 (2 R2 + 2 R3 + R4))}{311040 EI} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-1305 L q + 60 (30 (R2 + 2 R3) + 38 R4))}{311040 EI} + \frac{L^3 (-615 L q + 60 (18 R2 + 14 (2 R3 + R4)))}{311040 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE ENCUENTRAN R2, R3 y R4*)

In[*]:=

$$\text{Solve}\left[\left\{2\left(\frac{L(-90Lq+108(2R2+2R3+R4))}{1296AG}+\frac{L^3(-210Lq+240(2R2+2R3+R4))}{311040EI}+\frac{L^3(-1040Lq+60(24(R2+2R3)+30R4))}{311040EI}+\frac{L^3(-800Lq+60(24R2+18(2R3+R4)))}{311040EI}\right)-\frac{R2}{k},2\left(\frac{L(-54Lq+108(2R3+R4))}{1296AG}+\frac{L(-90Lq+108(2R2+2R3+R4))}{1296AG}+\frac{L^3(-210Lq+240(2R2+2R3+R4))}{311040EI}+\frac{L^3(-2080Lq+60(48(R2+2R3)+60R4))}{311040EI}+\frac{L^3(-1230Lq+60(36R2+28(2R3+R4)))}{311040EI}\right)\right\}==-\frac{R3}{k},2\left(-\frac{L^2q}{72}+\frac{LR4}{12}+\frac{L(-27Lq+54(2R3+R4))}{1296AG}+\frac{L(-45Lq+54(2R2+2R3+R4))}{1296AG}+\frac{L^3(-105Lq+120(2R2+2R3+R4))}{311040EI}+\frac{L^3(-1305Lq+60(30(R2+2R3)+38R4))}{311040EI}+\frac{L^3(-615Lq+60(18R2+14(2R3+R4)))}{311040EI}\right)\right\}==-\frac{R4}{k},\{R2,R3,R4\}$$

Out[*]= { {R2 →

$$\left(k L^2 \left(1813985280 A^2 E I^3 G^2 + 423263232 A E I^3 G k L + 172160640 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 20155392 E I^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 2286144 A E I^2 G k^2 L^4 + 309744 A^3 E I G^3 k L^5 + 26784 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right), R3 \rightarrow \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 E I^3 G^2 + 272097792 A E I^3 G k L + 147806208 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 10077696 E I^3 k^2 L^2 + 29603232 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 1143072 A E I^2 G k^2 L^4 + 199260 A^3 E I G^3 k L^5 + 12420 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \left(12 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right), R4 \rightarrow \left(\left(1632586752 A^2 E I^3 G^2 k L^2 + 362797056 A E I^3 G k^2 L^3 + 170061120 A^3 E I^2 G^3 k L^4 + 20155392 E I^3 k^3 L^4 + 39470976 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 + 2286144 A E I^2 G k^3 L^6 + 225504 A^3 E I G^3 k^2 L^7 + 24192 A^2 E I G^2 k^3 L^8 + 53 A^3 G^3 k^3 L^{10} \right) q \right) / \left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right\}$$

In[*]:= R2 =

$$\left(k L^2 \left(1813985280 A^2 E I^3 G^2 + 423263232 A E I^3 G k L + 172160640 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 20155392 E I^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 2286144 A E I^2 G k^2 L^4 + 309744 A^3 E I G^3 k L^5 + 26784 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) /$$

$$\left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$R3 = \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 E I^3 G^2 + 272097792 A E I^3 G k L + 147806208 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 10077696 E I^3 k^2 L^2 + 29603232 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 1143072 A E I^2 G k^2 L^4 + 199260 A^3 E I G^3 k L^5 + 12420 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) /$$

$$\left(12 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$R4 = \left(\left(1632586752 A^2 E I^3 G^2 k L^2 + 362797056 A E I^3 G k^2 L^3 + 170061120 A^3 E I^2 G^3 k L^4 + 20155392 E I^3 k^3 L^4 + 39470976 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 + 2286144 A E I^2 G k^3 L^6 + 225504 A^3 E I G^3 k^2 L^7 + 24192 A^2 E I G^2 k^3 L^8 + 53 A^3 G^3 k^3 L^{10} \right) q \right) /$$

$$\left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$Out[*]:= \left(k L^2 \left(1813985280 A^2 E I^3 G^2 + 423263232 A E I^3 G k L + 172160640 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 20155392 E I^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 2286144 A E I^2 G k^2 L^4 + 309744 A^3 E I G^3 k L^5 + 26784 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) /$$

$$\left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$Out[*]:= \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 E I^3 G^2 + 272097792 A E I^3 G k L + 147806208 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 10077696 E I^3 k^2 L^2 + 29603232 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 1143072 A E I^2 G k^2 L^4 + 199260 A^3 E I G^3 k L^5 + 12420 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) /$$

$$\left(12 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$Out[*]:= \left(\left(1632586752 A^2 E I^3 G^2 k L^2 + 362797056 A E I^3 G k^2 L^3 + 170061120 A^3 E I^2 G^3 k L^4 + 20155392 E I^3 k^3 L^4 + 39470976 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 + 2286144 A E I^2 G k^3 L^6 + 225504 A^3 E I G^3 k^2 L^7 + 24192 A^2 E I G^2 k^3 L^8 + 53 A^3 G^3 k^3 L^{10} \right) q \right) /$$

$$\left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

(*POR SIMETRÍA R6=R2 Y R5=R3 *)

In[*]:= **R6 = R2**

R5 = R3

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(1813985280 A^2 EI^3 G^2 + 423263232 A EI^3 G k L + 172160640 A^3 EI^2 G^3 L^2 + 20155392 EI^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 EI^2 G^2 k L^3 + 2286144 A EI^2 G k^2 L^4 + 309744 A^3 EI G^3 k L^5 + 26784 A^2 EI G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) /$$

$$\left(24 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 EI^3 G^2 + 272097792 A EI^3 G k L + 147806208 A^3 EI^2 G^3 L^2 + 10077696 EI^3 k^2 L^2 + 29603232 A^2 EI^2 G^2 k L^3 + 1143072 A EI^2 G k^2 L^4 + 199260 A^3 EI G^3 k L^5 + 12420 A^2 EI G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) /$$

$$\left(12 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R7=R1*)

In[*]:= **Solve** [{ 2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + R4 == 0 }, { R1 }]

[|resuelve](#)

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 EI^3 G^2 + 272097792 A EI^3 G k L + 147806208 A^3 EI^2 G^3 L^2 + 10077696 EI^3 k^2 L^2 + 29603232 A^2 EI^2 G^2 k L^3 + 1143072 A EI^2 G k^2 L^4 + 199260 A^3 EI G^3 k L^5 + 12420 A^2 EI G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \right. \right.$$

$$\left. \left(6 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \right.$$

$$\left. \left(k L^2 \left(1813985280 A^2 EI^3 G^2 + 423263232 A EI^3 G k L + 172160640 A^3 EI^2 G^3 L^2 + 20155392 EI^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 EI^2 G^2 k L^3 + 2286144 A EI^2 G k^2 L^4 + 309744 A^3 EI G^3 k L^5 + 26784 A^2 EI G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \right.$$

$$\left. \left(12 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \right.$$

$$\left. \left(\left(1632586752 A^2 EI^3 G^2 k L^2 + 362797056 A EI^3 G k^2 L^3 + 170061120 A^3 EI^2 G^3 k L^4 + 20155392 EI^3 k^3 L^4 + 39470976 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 + 2286144 A EI^2 G k^3 L^6 + 225504 A^3 EI G^3 k^2 L^7 + 24192 A^2 EI G^2 k^3 L^8 + 53 A^3 G^3 k^3 L^{10} \right) q \right) / \right.$$

$$\left. \left(24 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right\}$$

In[]:= R1 =

$$\frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 EI^3 G^2 + 272097792 A EI^3 G k L + 147806208 A^3 EI^2 G^3 L^2 + 10077696 EI^3 k^2 L^2 + 29603232 A^2 EI^2 G^2 k L^3 + 1143072 A EI^2 G k^2 L^4 + 199260 A^3 EI G^3 k L^5 + 12420 A^2 EI G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \left(6 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \left(k L^2 \left(1813985280 A^2 EI^3 G^2 + 423263232 A EI^3 G k L + 172160640 A^3 EI^2 G^3 L^2 + 20155392 EI^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 EI^2 G^2 k L^3 + 2286144 A EI^2 G k^2 L^4 + 309744 A^3 EI G^3 k L^5 + 26784 A^2 EI G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \left(12 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \left(\left(1632586752 A^2 EI^3 G^2 k L^2 + 362797056 A EI^3 G k^2 L^3 + 170061120 A^3 EI^2 G^3 k L^4 + 20155392 EI^3 k^3 L^4 + 39470976 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 + 2286144 A EI^2 G k^3 L^6 + 225504 A^3 EI G^3 k^2 L^7 + 24192 A^2 EI G^2 k^3 L^8 + 53 A^3 G^3 k^3 L^{10} \right) q \right) / \left(24 \left(544195584 A^3 EI^3 G^3 + 680244480 A^2 EI^3 G^2 k L + 120932352 A EI^3 G k^2 L^2 + 56687040 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 5038848 EI^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 559872 A EI^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right)$$

R7 =

R1

$$\text{Out}[n]= \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \left(L q - \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 E I^3 G^2 + 272097792 A E I^3 G k L + 147806208 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 10077696 E I^3 k^2 \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. L^2 + 29603232 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 1143072 A E I^2 G k^2 L^4 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. 199260 A^3 E I G^3 k L^5 + 12420 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \right. \\ & \left(6 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\ & \left(k L^2 \left(1813985280 A^2 E I^3 G^2 + 423263232 A E I^3 G k L + 172160640 A^3 E I^2 G^3 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 20155392 E I^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 2286144 A E I^2 G k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 309744 A^3 E I G^3 k L^5 + 26784 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \\ & \left(12 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\ & \left(\left(1632586752 A^2 E I^3 G^2 k L^2 + 362797056 A E I^3 G k^2 L^3 + 170061120 A^3 E I^2 G^3 k L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 20155392 E I^3 k^3 L^4 + 39470976 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 + 2286144 A E I^2 G k^3 L^6 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 225504 A^3 E I G^3 k^2 L^7 + 24192 A^2 E I G^2 k^3 L^8 + 53 A^3 G^3 k^3 L^{10} \right) q \right) / \\ & \left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Out}[n]= \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \left(L q - \left(k L^2 \left(1451188224 A^2 E I^3 G^2 + 272097792 A E I^3 G k L + 147806208 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 10077696 E I^3 k^2 \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. L^2 + 29603232 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 1143072 A E I^2 G k^2 L^4 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. 199260 A^3 E I G^3 k L^5 + 12420 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 25 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \right. \\ & \left(6 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\ & \left(k L^2 \left(1813985280 A^2 E I^3 G^2 + 423263232 A E I^3 G k L + 172160640 A^3 E I^2 G^3 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 20155392 E I^3 k^2 L^2 + 44929728 A^2 E I^2 G^2 k L^3 + 2286144 A E I^2 G k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 309744 A^3 E I G^3 k L^5 + 26784 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) q \right) / \\ & \left(12 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\ & \left(\left(1632586752 A^2 E I^3 G^2 k L^2 + 362797056 A E I^3 G k^2 L^3 + 170061120 A^3 E I^2 G^3 k L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 20155392 E I^3 k^3 L^4 + 39470976 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 + 2286144 A E I^2 G k^3 L^6 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 225504 A^3 E I G^3 k^2 L^7 + 24192 A^2 E I G^2 k^3 L^8 + 53 A^3 G^3 k^3 L^{10} \right) q \right) / \\ & \left(24 \left(544195584 A^3 E I^3 G^3 + 680244480 A^2 E I^3 G^2 k L + 120932352 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 56687040 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 5038848 E I^3 k^3 L^3 + 12317184 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 559872 A E I^2 G k^3 L^5 + 80352 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 6156 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \end{aligned}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 12 000 000 000

Out[]:= 19 928 032 768

Out[]:= 0.1152

Out[]:= 9.6×10^9

Out[]:= 10

Out[]:= 250

Out[]:= 2.29571×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 7.38075×10^9

Out[]:= 0.96

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

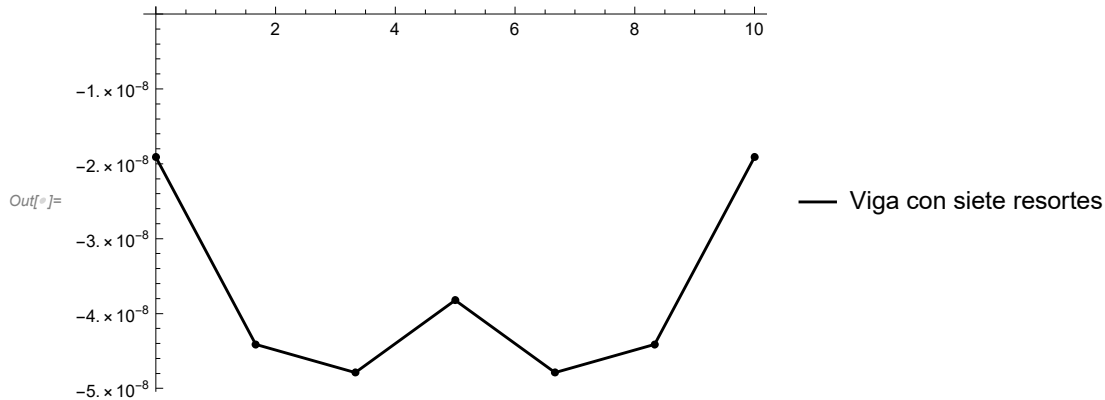
```

In[ ]:= g9 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/6, -R2 / k}, {2L/6, -R3 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {3L/6, -R4 / k}, {4L/6, -R5 / k}, {5L/6, -R6 / k}, {L, -R7 / k}}, AxesOrigin -> {0, 0},
  origen de ejes
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Black, PlotLegends -> {"Viga con siete resortes"}]
  rango de rep... [todo [estilo de repr... [negro [leyendas de representación

g10 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/6, -R2 / k}, {2L/6, -R3 / k}, {3L/6, -R4 / k}, {4L/6, -R5 / k},
  representación de lista
  {5L/6, -R6 / k}, {L, -R7 / k}}, PlotStyle -> Black, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... [negro [origen de ejes [rango de rep... [todo

Show[
  muestra
  g9,
  g10]

```



(*VIGA CON OCHO RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

In[]:=

$$\begin{aligned}
 & D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * E I} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * E I} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * E I} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x + R2 + R3\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * E I} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x + R2 + R3 + R4\right)^2 dx\right), R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]} = & 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10220 L q + 11760 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-9380 L q + 1960 (6 (R2 + 2 R3) + 15 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-6860 L q + 1960 (6 R2 + 9 (R3 + R4)))}{4033680 EI} + \\
 & \left. \frac{6 \left(\frac{5Lq}{7} - 2 (R2 + R3 + R4)\right)^2 - 6 (Lq - 2 (R2 + R3 + R4))^2}{48 A G q} \right)
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
& D \left[2 * \left(\frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) - q * x \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) - q * x + R2 \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) - q * x + R2 + R3 \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7} \right) \right)^2 dx + \\
& \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2} \right) - q * x + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx \right], R3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]= & 2 \left(\frac{L (-48 L q + 168 (R3 + R4))}{1176 A G} + \right. \\
& \frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-20440 L q + 23520 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \\
& \frac{L^3 (-18760 L q + 1960 (12 (R2 + 2 R3) + 30 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4033680 EI} + \\
& \left. \frac{6 \left(\frac{5 L q}{7} - 2 (R2 + R3 + R4) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4))^2}{48 A G q} \right)
\end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
 & D\left[2 * \left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{7}}^{\frac{2L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{7}}^{\frac{3L}{7}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x + R2 + R3\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{7}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{7}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{7}\right)\right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{7}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4}{2}\right) - q * x + R2 + R3 + R4\right)^2 dx \right], R4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{2 L^2 q}{49} + \frac{2 L R4}{7} + \frac{L (-48 L q + 168 (R3 + R4))}{1176 A G} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4 033 680 EI} + \frac{L^3 (-30 660 L q + 35 280 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8 067 360 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-23 590 L q + 1960 (15 (R2 + 2 R3) + 38 R4))}{4 033 680 EI} + \frac{L^3 (-10 570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4 033 680 EI} + \\
 & \left. \frac{6 \left(\frac{5 L q}{7} - 2 (R2 + R3 + R4)\right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4))^2}{48 A G q} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE CALCULAN LAS REACCIONES*)

In[]:=

$$\begin{aligned}
 & \text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(\frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-10220 L q + 11760 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{L^3 (-9380 L q + 1960 (6 (R2 + 2 R3) + 15 R4))}{4033680 EI} + \frac{L^3 (-6860 L q + 1960 (6 R2 + 9 (R3 + R4)))}{4033680 EI} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{6 \left(\frac{5 L q}{7} - 2 (R2 + R3 + R4) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4))^2}{48 A G q} \right) \right] == -\frac{R2}{k}, \\
 & 2 \left(\frac{L (-48 L q + 168 (R3 + R4))}{1176 A G} + \frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-20440 L q + 23520 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \frac{L^3 (-18760 L q + 1960 (12 (R2 + 2 R3) + 30 R4))}{4033680 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-10570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4033680 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{6 \left(\frac{5 L q}{7} - 2 (R2 + R3 + R4) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4))^2}{48 A G q} \right) == -\frac{R3}{k}, \\
 & 2 \left(-\frac{2 L^2 q}{49} + \frac{2 L R4}{7} + \frac{L (-48 L q + 168 (R3 + R4))}{1176 A G} + \frac{L^3 (-1750 L q + 3920 (R2 + R3 + R4))}{4033680 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-30660 L q + 35280 (R2 + 2 R3 + 3 R4))}{8067360 EI} + \frac{L^3 (-23590 L q + 1960 (15 (R2 + 2 R3) + 38 R4))}{4033680 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{L^3 (-10570 L q + 1960 (9 R2 + 14 (R3 + R4)))}{4033680 EI} + \right. \\
 & \left. \frac{6 \left(\frac{5 L q}{7} - 2 (R2 + R3 + R4) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4))^2}{48 A G q} \right) == -\frac{R4}{k}, \{R2, R3, R4\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[4]= } & \left\{ \left\{ \text{R2} \rightarrow \left(k L^2 \left(266\,827\,932 A^2 EI^3 G^2 q + 101\,648\,736 A EI^3 G k L q + \right. \right. \right. \\
& 24\,958\,395 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 7\,260\,624 EI^3 k^2 L^2 q + 10\,890\,936 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \\
& \left. \left. \left. 827\,316 A EI^2 G k^2 L^4 q + 85\,260 A^3 EI G^3 k L^5 q + 9996 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \right. \\
& \left(2 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right), \\
& \text{R3} \rightarrow \left(k L^2 \left(3\,112\,992\,540 A^2 EI^3 G^2 q + 889\,426\,440 A EI^3 G k L q + 312\,358\,095 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + \right. \right. \\
& 50\,824\,368 EI^3 k^2 L^2 q + 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + 5\,791\,212 A EI^2 G k^2 L^4 q + \\
& \left. \left. \left. 721\,329 A^3 EI G^3 k L^5 q + 66\,444 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \right. \\
& \left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right), \\
& \text{R4} \rightarrow - \left(\left(-3\,735\,591\,048 A^2 EI^3 G^2 k L^2 q - 889\,426\,440 A EI^3 G k^2 L^3 q - 387\,535\,806 A^3 EI^2 G^3 k L^4 q - \right. \right. \\
& 50\,824\,368 EI^3 k^3 L^4 q - 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 q - 5\,791\,212 A EI^2 G k^3 L^6 q - \\
& \left. \left. \left. 616\,371 A^3 EI G^3 k^2 L^7 q - 64\,680 A^2 EI G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) \right) / \right. \\
& \left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right) \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

(* AL SER SIMETRICA, LAS REACCIONES SON R1=R8, R2=R7, R3=R6 Y R4=R5*)

In[*]:= R2 =

$$\begin{aligned} & \left(k L^2 \left(266\,827\,932 A^2 EI^3 G^2 q + 101\,648\,736 A EI^3 G k L q + 24\,958\,395 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 7\,260\,624 EI^3 k^2 L^2 q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 10\,890\,936 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + 827\,316 A EI^2 G k^2 L^4 q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 85\,260 A^3 EI G^3 k L^5 q + 9996 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\ & \left(2 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \\ R3 = & \left(k L^2 \left(3\,112\,992\,540 A^2 EI^3 G^2 q + 889\,426\,440 A EI^3 G k L q + 312\,358\,095 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 50\,824\,368 EI^3 k^2 L^2 q + 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + 5\,791\,212 A EI^2 G k^2 L^4 q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 721\,329 A^3 EI G^3 k L^5 q + 66\,444 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\ & \left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \\ R4 = & - \left(\left(-3\,735\,591\,048 A^2 EI^3 G^2 k L^2 q - 889\,426\,440 A EI^3 G k^2 L^3 q - 387\,535\,806 A^3 EI^2 G^3 k L^4 q - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 50\,824\,368 EI^3 k^3 L^4 q - 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 q - 5\,791\,212 A EI^2 G k^3 L^6 q - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 616\,371 A^3 EI G^3 k^2 L^7 q - 64\,680 A^2 EI G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) \right) / \\ & \left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Out[*]:= & \left(k L^2 \left(266\,827\,932 A^2 EI^3 G^2 q + 101\,648\,736 A EI^3 G k L q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 24\,958\,395 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 7\,260\,624 EI^3 k^2 L^2 q + 10\,890\,936 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 827\,316 A EI^2 G k^2 L^4 q + 85\,260 A^3 EI G^3 k L^5 q + 9996 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\ & \left(2 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Out[*]:= & \left(k L^2 \left(3\,112\,992\,540 A^2 EI^3 G^2 q + 889\,426\,440 A EI^3 G k L q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 312\,358\,095 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 50\,824\,368 EI^3 k^2 L^2 q + 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 5\,791\,212 A EI^2 G k^2 L^4 q + 721\,329 A^3 EI G^3 k L^5 q + 66\,444 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\ & \left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Out[*]:= & - \left(\left(-3\,735\,591\,048 A^2 EI^3 G^2 k L^2 q - 889\,426\,440 A EI^3 G k^2 L^3 q - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 387\,535\,806 A^3 EI^2 G^3 k L^4 q - 50\,824\,368 EI^3 k^3 L^4 q - 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 q - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 5\,791\,212 A EI^2 G k^3 L^6 q - 616\,371 A^3 EI G^3 k^2 L^7 q - 64\,680 A^2 EI G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) \right) / \\ & \left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \end{aligned}$$

In[]:= **R7 = R2**
R6 = R3
R5 = R4

$$\text{Out[]:= } \left(k L^2 \left(266\,827\,932 A^2 EI^3 G^2 q + 101\,648\,736 A EI^3 G k L q + \right. \right. \\
\left. \left. 24\,958\,395 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 7\,260\,624 EI^3 k^2 L^2 q + 10\,890\,936 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \right. \right. \\
\left. \left. 827\,316 A EI^2 G k^2 L^4 q + 85\,260 A^3 EI G^3 k L^5 q + 9996 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\
\left(2 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
\left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
\left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[]:= } \left(k L^2 \left(3\,112\,992\,540 A^2 EI^3 G^2 q + 889\,426\,440 A EI^3 G k L q + \right. \right. \\
\left. \left. 312\,358\,095 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 50\,824\,368 EI^3 k^2 L^2 q + 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \right. \right. \\
\left. \left. 5\,791\,212 A EI^2 G k^2 L^4 q + 721\,329 A^3 EI G^3 k L^5 q + 66\,444 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\
\left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
\left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
\left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[]:= } - \left(\left(-3\,735\,591\,048 A^2 EI^3 G^2 k L^2 q - 889\,426\,440 A EI^3 G k^2 L^3 q - \right. \right. \\
\left. \left. 387\,535\,806 A^3 EI^2 G^3 k L^4 q - 50\,824\,368 EI^3 k^3 L^4 q - 97\,110\,846 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 q - \right. \right. \\
\left. \left. 5\,791\,212 A EI^2 G k^3 L^6 q - 616\,371 A^3 EI G^3 k^2 L^7 q - 64\,680 A^2 EI G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) \right) / \\
\left(14 \left(1\,089\,547\,389 A^3 EI^3 G^3 + 1\,867\,795\,524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444\,713\,220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
\left. \left. 158\,826\,150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25\,412\,184 EI^3 k^3 L^3 + 45\,983\,952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\
\left. \left. 2\,852\,388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320\,019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32\,634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R8=R1*)

In[]:= **Solve** [{ 2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + 2 R4 == 0 }, { R1 }]
|resuelve

Out[]:= { { R1 →

$$\frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(266 827 932 A^2 E I^3 G^2 q + 101 648 736 A E I^3 G k L q + 24 958 395 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 7 260 624 E I^3 k^2 L^2 q + 10 890 936 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 827 316 A E I^2 G k^2 L^4 q + 85 260 A^3 E I G^3 k L^5 q + 9996 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) /$$

$$\left(1 089 547 389 A^3 E I^3 G^3 + 1 867 795 524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444 713 220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158 826 150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25 412 184 E I^3 k^3 L^3 + 45 983 952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2 852 388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320 019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32 634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) -$$

$$\left(k L^2 \left(3 112 992 540 A^2 E I^3 G^2 q + 889 426 440 A E I^3 G k L q + 312 358 095 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 50 824 368 E I^3 k^2 L^2 q + 97 110 846 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 5 791 212 A E I^2 G k^2 L^4 q + 721 329 A^3 E I G^3 k L^5 q + 66 444 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) /$$

$$\left(7 \left(1 089 547 389 A^3 E I^3 G^3 + 1 867 795 524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444 713 220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158 826 150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25 412 184 E I^3 k^3 L^3 + 45 983 952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2 852 388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320 019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32 634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) +$$

$$\left(-3 735 591 048 A^2 E I^3 G^2 k L^2 q - 889 426 440 A E I^3 G k^2 L^3 q - 387 535 806 A^3 E I^2 G^3 k L^4 q - 50 824 368 E I^3 k^3 L^4 q - 97 110 846 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 q - 5 791 212 A E I^2 G k^3 L^6 q - 616 371 A^3 E I G^3 k^2 L^7 q - 64 680 A^2 E I G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) /$$

$$\left(7 \left(1 089 547 389 A^3 E I^3 G^3 + 1 867 795 524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444 713 220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158 826 150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25 412 184 E I^3 k^3 L^3 + 45 983 952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2 852 388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320 019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32 634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right) \right) \right\}$$

In[]:= R1 =

$$\frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(266827932 A^2 E I^3 G^2 q + 101648736 A E I^3 G k L q + 24958395 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 7260624 E I^3 k^2 L^2 q + 10890936 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 827316 A E I^2 G k^2 L^4 q + 85260 A^3 E I G^3 k L^5 q + 9996 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \left(1089547389 A^3 E I^3 G^3 + 1867795524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444713220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158826150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25412184 E I^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2852388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) - \left(k L^2 \left(3112992540 A^2 E I^3 G^2 q + 889426440 A E I^3 G k L q + 312358095 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 50824368 E I^3 k^2 L^2 q + 97110846 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 5791212 A E I^2 G k^2 L^4 q + 721329 A^3 E I G^3 k L^5 q + 66444 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \left(7 \left(1089547389 A^3 E I^3 G^3 + 1867795524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444713220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158826150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25412184 E I^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2852388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) + \left(-3735591048 A^2 E I^3 G^2 k L^2 q - 889426440 A E I^3 G k^2 L^3 q - 387535806 A^3 E I^2 G^3 k L^4 q - 50824368 E I^3 k^3 L^4 q - 97110846 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 q - 5791212 A E I^2 G k^3 L^6 q - 616371 A^3 E I G^3 k^2 L^7 q - 64680 A^2 E I G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) / \left(7 \left(1089547389 A^3 E I^3 G^3 + 1867795524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444713220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158826150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25412184 E I^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2852388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right)$$

$$\text{Out[]} = \frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(266827932 A^2 E I^3 G^2 q + 101648736 A E I^3 G k L q + 24958395 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 7260624 E I^3 k^2 L^2 q + 10890936 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 827316 A E I^2 G k^2 L^4 q + 85260 A^3 E I G^3 k L^5 q + 9996 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \left(1089547389 A^3 E I^3 G^3 + 1867795524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444713220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158826150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25412184 E I^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2852388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) - \left(k L^2 \left(3112992540 A^2 E I^3 G^2 q + 889426440 A E I^3 G k L q + 312358095 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 50824368 E I^3 k^2 L^2 q + 97110846 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 5791212 A E I^2 G k^2 L^4 q + 721329 A^3 E I G^3 k L^5 q + 66444 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \left(7 \left(1089547389 A^3 E I^3 G^3 + 1867795524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444713220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158826150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25412184 E I^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2852388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) + \left(-3735591048 A^2 E I^3 G^2 k L^2 q - 889426440 A E I^3 G k^2 L^3 q - 387535806 A^3 E I^2 G^3 k L^4 q - 50824368 E I^3 k^3 L^4 q - 97110846 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 q - 5791212 A E I^2 G k^3 L^6 q - 616371 A^3 E I G^3 k^2 L^7 q - 64680 A^2 E I G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) / \left(7 \left(1089547389 A^3 E I^3 G^3 + 1867795524 A^2 E I^3 G^2 k L + 444713220 A E I^3 G k^2 L^2 + 158826150 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 25412184 E I^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 2852388 A E I^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \right)$$

In[]:=

R8 = R1

$$\begin{aligned}
\text{Out[]} = & \frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(266827932 A^2 EI^3 G^2 q + 101648736 A EI^3 G k L q + \right. \right. \right. \\
& 24958395 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 7260624 EI^3 k^2 L^2 q + 10890936 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \\
& \left. \left. \left. 827316 A EI^2 G k^2 L^4 q + 85260 A^3 EI G^3 k L^5 q + 9996 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 23 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \right. \\
& \left(1089547389 A^3 EI^3 G^3 + 1867795524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444713220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \\
& 158826150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25412184 EI^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. 2852388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) - \\
& \left(k L^2 \left(3112992540 A^2 EI^3 G^2 q + 889426440 A EI^3 G k L q + 312358095 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + \right. \right. \\
& 50824368 EI^3 k^2 L^2 q + 97110846 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + 5791212 A EI^2 G k^2 L^4 q + \\
& \left. \left. 721329 A^3 EI G^3 k L^5 q + 66444 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 137 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\
& \left(7 \left(1089547389 A^3 EI^3 G^3 + 1867795524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444713220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 158826150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25412184 EI^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 2852388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) + \\
& \left(-3735591048 A^2 EI^3 G^2 k L^2 q - 889426440 A EI^3 G k^2 L^3 q - 387535806 A^3 EI^2 G^3 k L^4 q - \right. \\
& 50824368 EI^3 k^3 L^4 q - 97110846 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 q - 5791212 A EI^2 G k^3 L^6 q - \\
& \left. \left. 616371 A^3 EI G^3 k^2 L^7 q - 64680 A^2 EI G^2 k^3 L^8 q - 143 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) \right) / \\
& \left(7 \left(1089547389 A^3 EI^3 G^3 + 1867795524 A^2 EI^3 G^2 k L + 444713220 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 158826150 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 25412184 EI^3 k^3 L^3 + 45983952 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 2852388 A EI^2 G k^3 L^5 + 320019 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 32634 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 71 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m}^3\text{*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m}^2\text{*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m}^4\text{*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m}^2\text{*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m}^2\text{*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 12 000 000 000

Out[]:= 19 928 032 768

Out[]:= 0.1152

Out[]:= 9.6×10^9

Out[]:= 10

Out[]:= 250

Out[]:= 2.29571×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 7.38075×10^9

Out[]:= 0.96

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

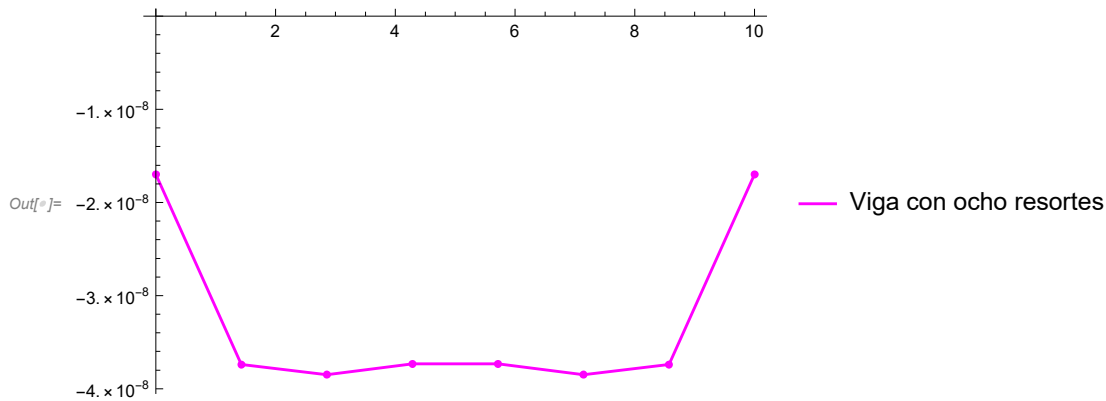
```

In[ ]:= g11 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/7, -R2 / k}, {2L/7, -R3 / k}, {3L/7, -R4 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {4L/7, -R5 / k}, {5L/7, -R6 / k}, {6L/7, -R7 / k}, {L, -R8 / k}}, AxesOrigin -> {0, 0},
  origen de ejes
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Magenta, PlotLegends -> {"Viga con ocho resortes"}]
  rango de rep... [todo] estilo de repr... [magenta] [leyendas de representación]

g12 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/7, -R2 / k}, {2L/7, -R3 / k}, {3L/7, -R4 / k},
  representación de lista
  {4L/7, -R5 / k}, {5L/7, -R6 / k}, {6L/7, -R7 / k}, {L, -R8 / k}},
  PlotStyle -> Magenta, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... [magenta] [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

Show[
  muestra
  g11,
  g12]

```



(*VIGA CON NUEVE RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECO DE R2*)

ln[]:=

$$\begin{aligned}
 & D \left[2 * \left(\frac{1}{2 EI} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) - q * x \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) - q * x + R2 \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 EI} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) - q * x + R2 + R3 \right)^2 dx + \frac{1}{2 EI} \\
 & \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2} \right) - q * x + R2 + R3 + R4 \right)^2 dx \right), R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]} = & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5) \right)}{122880 EI} + \right. \\
 & \frac{-6 (-L q + 2 (R2 + R3 + R4) + R5)^2 + 6 \left(-\frac{3L q}{4} + 2 (R2 + R3 + R4) + R5 \right)^2}{48 A G q} + \\
 & \frac{L^3 (-7520 L q + 320 (24 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 42 R5))}{3932160 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-4640 L q + 320 (24 R2 + 18 (2 (R3 + R4) + R5)))}{3932160 EI} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-6560 L q + 320 (24 R2 + 6 (8 R3 + 5 (2 R4 + R5))))}{3932160 EI} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \mathbf{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x + R2 + R3\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x + R2 + R3 + R4\right)^2 dx, R3\right] \\
 \text{Out[]:= } & 2 \left(\frac{L (-120 L q + 192 (2 R3 + 2 R4 + R5))}{3072 A G} + \frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5)\right)}{122880 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{-6 (-L q + 2 (R2 + R3 + R4) + R5)^2 + 6 \left(-\frac{3 L q}{4} + 2 (R2 + R3 + R4) + R5\right)^2}{48 A G q} + \\
 & \frac{L^3 (-15040 L q + 320 (48 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 84 R5))}{3932160 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-13120 L q + 320 (48 R2 + 96 R3 + 60 (2 R4 + R5)))}{3932160 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 R2 + 28 (2 (R3 + R4) + R5)))}{3932160 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \mathbf{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x + R2\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x + R2 + R3\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{8}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{8}\right) + R4 \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 R2 - 2 R3 - 2 R4 - R5}{2}\right) - q * x + R2 + R3 + R4\right)^2 dx, R4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]:= } & 2 \left(\frac{L (-72 L q + 192 (2 R4 + R5))}{3072 A G} + \right. \\
 & \frac{L (-120 L q + 192 (2 R3 + 2 R4 + R5))}{3072 A G} + \frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5)\right)}{122880 \text{EI}} + \\
 & \frac{-6 (-L q + 2 (R2 + R3 + R4) + R5)^2 + 6 \left(-\frac{3 L q}{4} + 2 (R2 + R3 + R4) + R5\right)^2}{48 A G q} + \\
 & \frac{L^3 (-22560 L q + 320 (72 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 126 R5))}{3932160 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-16520 L q + 320 (60 R2 + 120 R3 + 76 (2 R4 + R5)))}{3932160 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 R2 + 28 (2 (R3 + R4) + R5)))}{3932160 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{2L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2}\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{8}}^{\frac{3L}{8}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3}\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{8}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{8}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{8}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{8}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4}\right)^2 dx, \text{R5}\right] \\
 \text{Out[]:= } & 2 \left(\frac{-\frac{L^2 q}{128} + \frac{L \text{R5}}{16}}{2 \text{AG}} + \frac{L (-36 L q + 96 (2 \text{R4} + \text{R5}))}{3072 \text{AG}} + \right. \\
 & \frac{L (-60 L q + 96 (2 \text{R3} + 2 \text{R4} + \text{R5}))}{3072 \text{AG}} + \frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{8} + 20 (2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4}) + \text{R5})\right)}{122880 \text{EI}} + \\
 & \frac{-3 (-L q + 2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4}) + \text{R5})^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + 2 (\text{R2} + \text{R3} + \text{R4}) + \text{R5}\right)^2}{48 \text{AG} q} + \\
 & \frac{L^3 (-13180 L q + 320 (42 (\text{R2} + 2 \text{R3} + 3 \text{R4}) + 74 \text{R5}))}{3932160 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-8260 L q + 320 (30 \text{R2} + 60 \text{R3} + 38 (2 \text{R4} + \text{R5})))}{3932160 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-3580 L q + 320 (18 \text{R2} + 14 (2 (\text{R3} + \text{R4}) + \text{R5})))}{3932160 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

(*SE CALCULAN LAS REACCIONES*)

$$\begin{aligned}
& \text{In[]:= Solve} \left[\left\{ 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5) \right)}{122 880 EI} + \right. \right. \right. \\
& \quad \frac{-6 (-L q + 2 (R2 + R3 + R4) + R5)^2 + 6 \left(-\frac{3 L q}{4} + 2 (R2 + R3 + R4) + R5 \right)^2}{48 A G q} + \\
& \quad \frac{L^3 (-7520 L q + 320 (24 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 42 R5))}{3 932 160 EI} + \\
& \quad \frac{L^3 (-4640 L q + 320 (24 R2 + 18 (2 (R3 + R4) + R5))}{3 932 160 EI} + \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{L^3 (-6560 L q + 320 (24 R2 + 6 (8 R3 + 5 (2 R4 + R5)))}{3 932 160 EI} \right) \right) \right) = -\frac{R2}{k}, \\
& 2 \left(\frac{L (-120 L q + 192 (2 R3 + 2 R4 + R5))}{3072 A G} + \frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5) \right)}{122 880 EI} + \right. \\
& \quad \frac{-6 (-L q + 2 (R2 + R3 + R4) + R5)^2 + 6 \left(-\frac{3 L q}{4} + 2 (R2 + R3 + R4) + R5 \right)^2}{48 A G q} + \\
& \quad \frac{L^3 (-15040 L q + 320 (48 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 84 R5))}{3 932 160 EI} + \\
& \quad \frac{L^3 (-13120 L q + 320 (48 R2 + 96 R3 + 60 (2 R4 + R5))}{3 932 160 EI} + \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 R2 + 28 (2 (R3 + R4) + R5))}{3 932 160 EI} \right) \right) \right) = -\frac{R3}{k}, \\
& 2 \left(\frac{L (-72 L q + 192 (2 R4 + R5))}{3072 A G} + \frac{L (-120 L q + 192 (2 R3 + 2 R4 + R5))}{3072 A G} + \right. \\
& \quad \frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{4} + 40 (2 (R2 + R3 + R4) + R5) \right)}{122 880 EI} + \\
& \quad \frac{-6 (-L q + 2 (R2 + R3 + R4) + R5)^2 + 6 \left(-\frac{3 L q}{4} + 2 (R2 + R3 + R4) + R5 \right)^2}{48 A G q} + \\
& \quad \frac{L^3 (-22560 L q + 320 (72 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 126 R5))}{3 932 160 EI} + \\
& \quad \left. \frac{L^3 (-16520 L q + 320 (60 R2 + 120 R3 + 76 (2 R4 + R5))}{3 932 160 EI} \right)
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{L^3 (-7160 L q + 320 (36 R_2 + 28 (2 (R_3 + R_4) + R_5)))}{3932160 EI} \right) = -\frac{R_4}{k},$$

$$2 \left(\frac{-\frac{L^2 q}{128} + \frac{L R_5}{16}}{2 A G} + \frac{L (-36 L q + 96 (2 R_4 + R_5))}{3072 A G} + \frac{L (-60 L q + 96 (2 R_3 + 2 R_4 + R_5))}{3072 A G} + \right.$$

$$\frac{L^3 \left(-\frac{145 L q}{8} + 20 (2 (R_2 + R_3 + R_4) + R_5) \right)}{122880 EI} +$$

$$\frac{-3 (-L q + 2 (R_2 + R_3 + R_4) + R_5)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + 2 (R_2 + R_3 + R_4) + R_5 \right)^2}{48 A G q} +$$

$$\frac{L^3 (-13180 L q + 320 (42 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4) + 74 R_5))}{3932160 EI} +$$

$$\frac{L^3 (-8260 L q + 320 (30 R_2 + 60 R_3 + 38 (2 R_4 + R_5)))}{3932160 EI} +$$

$$\left. \frac{L^3 (-3580 L q + 320 (18 R_2 + 14 (2 (R_3 + R_4) + R_5)))}{3932160 EI} \right) = -\frac{R_5}{k}, \{R_2, R_3, R_4, R_5\}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Out}[n]= \left\{ \left\{ \text{R2} \rightarrow \right. \right. \\
& \quad \left(k L^2 \left(9740985827328 A^3 E I^4 G^3 q + 3826815860736 A^2 E I^4 G^2 k L q + 900533846016 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + \right. \right. \\
& \quad \quad 391378894848 A E I^4 G k^2 L^2 q + 400891576320 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \\
& \quad \quad 10871635968 E I^4 k^3 L^3 q + 43656413184 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 2699034624 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \\
& \quad \quad 1259864064 A E I^3 G k^3 L^5 q + 474218496 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 17252352 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \quad \quad \left. \left. 957312 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 60000 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \quad \left(4 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad \quad 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad \quad 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad \quad 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \quad \left. \left. 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right), \\
& \text{R3} \rightarrow \left(k L^2 \left(66795331387392 A^3 E I^4 G^3 q + 20873541058560 A^2 E I^4 G^2 k L q + 6609954668544 \right. \right. \\
& \quad \quad A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 1739461754880 A E I^4 G k^2 L^2 q + 2244992827392 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \\
& \quad \quad 43486543872 E I^4 k^3 L^3 q + 195236462592 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 15075901440 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \\
& \quad \quad 5039456256 A E I^3 G k^3 L^5 q + 2023096320 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 66797568 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \quad \quad \left. \left. 3440640 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 216960 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \quad \left(16 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 \right. \right. \\
& \quad \quad A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + \\
& \quad \quad 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& \quad \quad 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \quad \quad \left. \left. 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right), \\
& \text{R4} \rightarrow \left(L^2 \left(20873541058560 A^3 E I^4 G^3 k q + 5914169966592 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + 2147148103680 \right. \right. \\
& \quad \quad A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 478351982592 A E I^4 G k^3 L^2 q + 642785476608 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& \quad \quad 10871635968 E I^4 k^4 L^3 q + 53961818112 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 3973054464 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& \quad \quad 1259864064 A E I^3 G k^4 L^5 q + 549715968 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 16367616 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \quad \quad \left. \left. 1007232 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \quad \left(4 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad \quad 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad \quad 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad \quad 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \quad \left. \left. 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right), \\
& \text{R5} \rightarrow \left(L^2 \left(44530220924928 A^3 E I^4 G^3 k q + 13915694039040 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + 4638564679680 \right. \right. \\
& \quad \quad A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 13915694039040 A E I^4 G k^3 L^2 q + 1511157399552 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& \quad \quad 43486543872 E I^4 k^4 L^3 q + 156732751872 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 8257536000 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& \quad \quad 5039456256 A E I^3 G k^4 L^5 q + 1526464512 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 65028096 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \quad \quad \left. \left. 2899968 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 219264 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 193 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \quad \left(16 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 \right. \right. \\
& \quad \quad A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + \\
& \quad \quad 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& \quad \quad 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \quad \quad \left. \left. 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \left. \right\} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In[]:= R2} &= \left(k L^2 \left(9740985827328 A^3 EI^4 G^3 q + 3826815860736 A^2 EI^4 G^2 k L q + \right. \right. \\
&\quad 900533846016 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 391378894848 A EI^4 G k^2 L^2 q + 400891576320 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
&\quad 10871635968 EI^4 k^3 L^3 q + 43656413184 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 2699034624 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
&\quad 1259864064 A EI^3 G k^3 L^5 q + 474218496 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 17252352 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
&\quad \left. \left. 957312 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 60000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
&\quad \left(4 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
&\quad 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
&\quad 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
&\quad 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
&\quad \left. \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
\text{R3} &= \left(k L^2 \left(66795331387392 A^3 EI^4 G^3 q + 20873541058560 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6609954668544 \right. \right. \\
&\quad A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1739461754880 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2244992827392 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
&\quad 43486543872 EI^4 k^3 L^3 q + 195236462592 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 15075901440 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
&\quad 5039456256 A EI^3 G k^3 L^5 q + 2023096320 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 66797568 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
&\quad \left. \left. 3440640 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 216960 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
&\quad \left(16 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
&\quad 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
&\quad 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
&\quad 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
&\quad \left. \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
\text{R4} &= \left(L^2 \left(20873541058560 A^3 EI^4 G^3 k q + 5914169966592 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + \right. \right. \\
&\quad 2147148103680 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 478351982592 A EI^4 G k^3 L^2 q + \\
&\quad 642785476608 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + 10871635968 EI^4 k^4 L^3 q + 53961818112 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + \\
&\quad 3973054464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + 1259864064 A EI^3 G k^4 L^5 q + 549715968 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + \\
&\quad \left. \left. 16367616 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + 1007232 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
&\quad \left(4 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
&\quad 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
&\quad 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
&\quad 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
&\quad \left. \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
\text{R5} &= \left(L^2 \left(44530220924928 A^3 EI^4 G^3 k q + 13915694039040 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 4638564679680 \right. \right. \\
&\quad A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 13915694039040 A EI^4 G k^3 L^2 q + 1511157399552 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
&\quad 43486543872 EI^4 k^4 L^3 q + 156732751872 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 8257536000 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
&\quad 5039456256 A EI^3 G k^4 L^5 q + 1526464512 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 65028096 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
&\quad \left. \left. 2899968 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 219264 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 193 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
&\quad \left(16 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
&\quad 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
&\quad 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
&\quad 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
&\quad \left. \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & \left(k L^2 \left(9740985827328 A^3 E I^4 G^3 q + 3826815860736 A^2 E I^4 G^2 k L q + \right. \right. \\
& 900533846016 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 391378894848 A E I^4 G k^2 L^2 q + 400891576320 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \\
& 10871635968 E I^4 k^3 L^3 q + 43656413184 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 2699034624 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \\
& 1259864064 A E I^3 G k^3 L^5 q + 474218496 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 17252352 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. 957312 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 60000 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(4 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
\text{Out[*]} = & \left(k L^2 \left(66795331387392 A^3 E I^4 G^3 q + 20873541058560 A^2 E I^4 G^2 k L q + \right. \right. \\
& 6609954668544 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 1739461754880 A E I^4 G k^2 L^2 q + 2244992827392 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \\
& 43486543872 E I^4 k^3 L^3 q + 195236462592 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 15075901440 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \\
& 5039456256 A E I^3 G k^3 L^5 q + 2023096320 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 66797568 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. 3440640 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 216960 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(16 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
\text{Out[*]} = & \left(L^2 \left(20873541058560 A^3 E I^4 G^3 k q + 5914169966592 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + \right. \right. \\
& 2147148103680 A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 478351982592 A E I^4 G k^3 L^2 q + 642785476608 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& 10871635968 E I^4 k^4 L^3 q + 53961818112 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 3973054464 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& 1259864064 A E I^3 G k^4 L^5 q + 549715968 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 16367616 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \left. \left. 1007232 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(4 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
\text{Out[*]} = & \left(L^2 \left(44530220924928 A^3 E I^4 G^3 k q + 13915694039040 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + 4638564679680 A^4 \right. \right. \\
& E I^3 G^4 k L^2 q + 13915694039040 A E I^4 G k^3 L^2 q + 1511157399552 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& 43486543872 E I^4 k^4 L^3 q + 156732751872 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 8257536000 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& 5039456256 A E I^3 G k^4 L^5 q + 1526464512 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 65028096 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \left. \left. 2899968 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 219264 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 193 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(16 \left(22265110462464 A^4 E I^4 G^4 + 38963943309312 A^3 E I^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 3246995275776 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A E I^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 E I^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 A E I^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. 1781760 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)
\end{aligned}$$

(*POR SIMETRÍA R2=R8, R3=R7 Y R4=R6*)

In[*]= R8 = R2

R7 = R3

R6 = R4

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(9740985827328 A^3 EI^4 G^3 q + 3826815860736 A^2 EI^4 G^2 k L q + 900533846016 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 391378894848 A EI^4 G k^2 L^2 q + 400891576320 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 10871635968 EI^4 k^3 L^3 q + 43656413184 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 2699034624 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 1259864064 A EI^3 G k^3 L^5 q + 474218496 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 17252352 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 957312 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 60000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(4 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(66795331387392 A^3 EI^4 G^3 q + 20873541058560 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6609954668544 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1739461754880 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2244992827392 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 43486543872 EI^4 k^3 L^3 q + 195236462592 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 15075901440 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 5039456256 A EI^3 G k^3 L^5 q + 2023096320 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 66797568 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 3440640 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 216960 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(16 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(L^2 \left(20873541058560 A^3 EI^4 G^3 k q + 5914169966592 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 2147148103680 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 478351982592 A EI^4 G k^3 L^2 q + 642785476608 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + 10871635968 EI^4 k^4 L^3 q + 53961818112 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 3973054464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + 1259864064 A EI^3 G k^4 L^5 q + 549715968 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 16367616 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + 1007232 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(4 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)

(*POR SIMETRÍA R9=R1*)

In[]:=

Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + 2 R4 + R5 == 0}, {R1}]

|resuelve

Out[]:= {R1 →

$$\frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(9740985827328 A^3 EI^4 G^3 q + 3826815860736 A^2 EI^4 G^2 k L q + 900533846016 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 391378894848 A EI^4 G k^2 L^2 q + 400891576320 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 10871635968 EI^4 k^3 L^3 q + 43656413184 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 2699034624 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 1259864064 A EI^3 G k^3 L^5 q + 474218496 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 17252352 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 957312 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 60000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$(2 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) -$$

$$(k L^2 \left(66795331387392 A^3 EI^4 G^3 q + 20873541058560 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6609954668544 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1739461754880 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2244992827392 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 43486543872 EI^4 k^3 L^3 q + 195236462592 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 15075901440 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 5039456256 A EI^3 G k^3 L^5 q + 2023096320 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 66797568 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 3440640 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 216960 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right)) /$$

$$(8 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right)) -$$

$$(L^2 \left(20873541058560 A^3 EI^4 G^3 k q + 5914169966592 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 2147148103680 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 478351982592 A EI^4 G k^3 L^2 q + 642785476608 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + 10871635968 EI^4 k^4 L^3 q + 53961818112 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 3973054464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + 1259864064 A EI^3 G k^4 L^5 q + 549715968 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 16367616 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + 1007232 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right)) /$$

$$(2 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right)) -$$

$$(L^2 \left(44530220924928 A^3 EI^4 G^3 k q + 1391569403904 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 4638564679680 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 1391569403904 A EI^4 G k^3 L^2 q + 1511157399552 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + 43486543872 EI^4 k^4 L^3 q + 156732751872 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 8257536000 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + 5039456256 A EI^3 G k^4 L^5 q + 1526464512 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 65028096 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q +$$

$$\begin{aligned}
& 2899968 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 219264 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 193 A^4 G^4 k^4 L^{11} q)) / \\
(16 (& 22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + \\
& 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + \\
& 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12}))) \} \}
\end{aligned}$$

$Inf[] := R1 =$

$$\frac{1}{2} \left(L q - \left(k L^2 \left(9740985827328 A^3 EI^4 G^3 q + 3826815860736 A^2 EI^4 G^2 k L q + 900533846016 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 391378894848 A EI^4 G k^2 L^2 q + 400891576320 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 10871635968 EI^4 k^3 L^3 q + 43656413184 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 2699034624 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 1259864064 A EI^3 G k^3 L^5 q + 474218496 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 17252352 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 957312 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 60000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$(2 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) -$$

$$(k L^2 \left(66795331387392 A^3 EI^4 G^3 q + 20873541058560 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6609954668544 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1739461754880 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2244992827392 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 43486543872 EI^4 k^3 L^3 q + 195236462592 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 15075901440 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 5039456256 A EI^3 G k^3 L^5 q + 2023096320 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 66797568 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 3440640 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 216960 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right)) /$$

$$(8 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) -$$

$$(L^2 \left(20873541058560 A^3 EI^4 G^3 k q + 5914169966592 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 2147148103680 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 478351982592 A EI^4 G k^3 L^2 q + 642785476608 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + 10871635968 EI^4 k^4 L^3 q + 53961818112 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 3973054464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + 1259864064 A EI^3 G k^4 L^5 q + 549715968 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 16367616 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + 1007232 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right)) /$$

$$(2 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) -$$

$$(L^2 \left(44530220924928 A^3 EI^4 G^3 k q + 13915694039040 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 4638564679680 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 13915694039040 A EI^4 G k^3 L^2 q + 1511157399552 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + 43486543872 EI^4 k^4 L^3 q + 156732751872 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 8257536000 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + 5039456256 A EI^3 G k^4 L^5 q + 1526464512 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 65028096 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + 2899968 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 219264 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 193 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right)) /$$

$$(16 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right))$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[=]} = & \frac{1}{2} \left(L q - \right. \\
& \left(k L^2 \left(9\,740\,985\,827\,328 A^3 EI^4 G^3 q + 3\,826\,815\,860\,736 A^2 EI^4 G^2 k L q + 900\,533\,846\,016 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + \right. \right. \\
& \quad 391\,378\,894\,848 A EI^4 G k^2 L^2 q + 400\,891\,576\,320 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& \quad 10\,871\,635\,968 EI^4 k^3 L^3 q + 43\,656\,413\,184 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 2\,699\,034\,624 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& \quad 1\,259\,864\,064 A EI^3 G k^3 L^5 q + 474\,218\,496 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 17\,252\,352 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 957\,312 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 60\,000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 A^4 EI^4 G^4 + 38\,963\,943\,309\,312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10\,436\,770\,529\,280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad 3\,246\,995\,275\,776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869\,730\,877\,440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1\,054\,548\,688\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad 21\,743\,271\,936 EI^4 k^4 L^4 + 95\,126\,814\,720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6\,610\,747\,392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad 2\,491\,416\,576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973\,209\,600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32\,735\,232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \left. \left. 1\,781\,760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109\,056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k L^2 \left(66\,795\,331\,387\,392 A^3 EI^4 G^3 q + 20\,873\,541\,058\,560 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6\,609\,954\,668\,544 \right. \right. \\
& \quad A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1\,739\,461\,754\,880 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2\,244\,992\,827\,392 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& \quad 43\,486\,543\,872 EI^4 k^3 L^3 q + 195\,236\,462\,592 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 15\,075\,901\,440 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& \quad 5\,039\,456\,256 A EI^3 G k^3 L^5 q + 2\,023\,096\,320 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 66\,797\,568 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 3\,440\,640 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 216\,960 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(8 \left(22\,265\,110\,462\,464 A^4 EI^4 G^4 + 38\,963\,943\,309\,312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10\,436\,770\,529\,280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad 3\,246\,995\,275\,776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869\,730\,877\,440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1\,054\,548\,688\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad 21\,743\,271\,936 EI^4 k^4 L^4 + 95\,126\,814\,720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6\,610\,747\,392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad 2\,491\,416\,576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973\,209\,600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32\,735\,232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \left. \left. 1\,781\,760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109\,056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(L^2 \left(20\,873\,541\,058\,560 A^3 EI^4 G^3 k q + 5\,914\,169\,966\,592 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 2\,147\,148\,103\,680 \right. \right. \\
& \quad A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 478\,351\,982\,592 A EI^4 G k^3 L^2 q + 642\,785\,476\,608 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& \quad 10\,871\,635\,968 EI^4 k^4 L^3 q + 53\,961\,818\,112 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 3\,973\,054\,464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& \quad 1\,259\,864\,064 A EI^3 G k^4 L^5 q + 549\,715\,968 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 16\,367\,616 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 1\,007\,232 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54\,240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(2 \left(22\,265\,110\,462\,464 A^4 EI^4 G^4 + 38\,963\,943\,309\,312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10\,436\,770\,529\,280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad 3\,246\,995\,275\,776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869\,730\,877\,440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1\,054\,548\,688\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad 21\,743\,271\,936 EI^4 k^4 L^4 + 95\,126\,814\,720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6\,610\,747\,392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad 2\,491\,416\,576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973\,209\,600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32\,735\,232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \left. \left. 1\,781\,760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109\,056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(L^2 \left(44\,530\,220\,924\,928 A^3 EI^4 G^3 k q + 13\,915\,694\,039\,040 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 4\,638\,564\,679\,680 \right. \right. \\
& \quad A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 1\,391\,569\,403\,904 A EI^4 G k^3 L^2 q + 1\,511\,157\,399\,552 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& \quad 43\,486\,543\,872 EI^4 k^4 L^3 q + 156\,732\,751\,872 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 8\,257\,536\,000 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& \quad 5\,039\,456\,256 A EI^3 G k^4 L^5 q + 1\,526\,464\,512 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 65\,028\,096 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 2\,899\,968 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 219\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 193 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(16 \left(22\,265\,110\,462\,464 A^4 EI^4 G^4 + 38\,963\,943\,309\,312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10\,436\,770\,529\,280 \right. \right. \\
& \quad A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3\,246\,995\,275\,776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869\,730\,877\,440 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& \quad 1\,054\,548\,688\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21\,743\,271\,936 EI^4 k^4 L^4 + 95\,126\,814\,720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& \quad 6\,610\,747\,392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2\,491\,416\,576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973\,209\,600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \quad \left. \left. 32\,735\,232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1\,781\,760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109\,056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[=]} = & \frac{1}{2} \left(L q - \right. \\
& \left(k L^2 \left(9740985827328 A^3 EI^4 G^3 q + 3826815860736 A^2 EI^4 G^2 k L q + 900533846016 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + \right. \right. \\
& \quad 391378894848 A EI^4 G k^2 L^2 q + 400891576320 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& \quad 10871635968 EI^4 k^3 L^3 q + 43656413184 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 2699034624 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& \quad 1259864064 A EI^3 G k^3 L^5 q + 474218496 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 17252352 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 957312 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 60000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(2 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \left. \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k L^2 \left(66795331387392 A^3 EI^4 G^3 q + 20873541058560 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6609954668544 \right. \right. \\
& \quad A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1739461754880 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2244992827392 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& \quad 43486543872 EI^4 k^3 L^3 q + 195236462592 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 15075901440 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& \quad 5039456256 A EI^3 G k^3 L^5 q + 2023096320 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 66797568 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 3440640 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 216960 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(8 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \left. \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(L^2 \left(20873541058560 A^3 EI^4 G^3 k q + 5914169966592 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 2147148103680 \right. \right. \\
& \quad A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 478351982592 A EI^4 G k^3 L^2 q + 642785476608 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& \quad 10871635968 EI^4 k^4 L^3 q + 53961818112 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 3973054464 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& \quad 1259864064 A EI^3 G k^4 L^5 q + 549715968 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 16367616 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 1007232 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(2 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& \quad 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& \quad 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& \quad 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \quad \left. \left. 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(L^2 \left(44530220924928 A^3 EI^4 G^3 k q + 13915694039040 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 4638564679680 \right. \right. \\
& \quad A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 13915694039040 A EI^4 G k^3 L^2 q + 1511157399552 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& \quad 43486543872 EI^4 k^4 L^3 q + 156732751872 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 8257536000 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& \quad 5039456256 A EI^3 G k^4 L^5 q + 1526464512 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 65028096 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \quad \left. \left. 2899968 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 219264 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 193 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(16 \left(22265110462464 A^4 EI^4 G^4 + 38963943309312 A^3 EI^4 G^3 k L + 10436770529280 \right. \right. \\
& \quad A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 3246995275776 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 869730877440 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& \quad 1054548688896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 21743271936 EI^4 k^4 L^4 + 95126814720 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& \quad 6610747392 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 2491416576 A EI^3 G k^4 L^6 + 973209600 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \quad \left. \left. 32735232 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 1781760 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 109056 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right))
\end{aligned}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 12 000 000 000

Out[]:= 19 928 032 768

Out[]:= 0.1152

Out[]:= 9.6×10^9

Out[]:= 10

Out[]:= 250

Out[]:= 2.29571×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 7.38075×10^9

Out[]:= 0.96

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

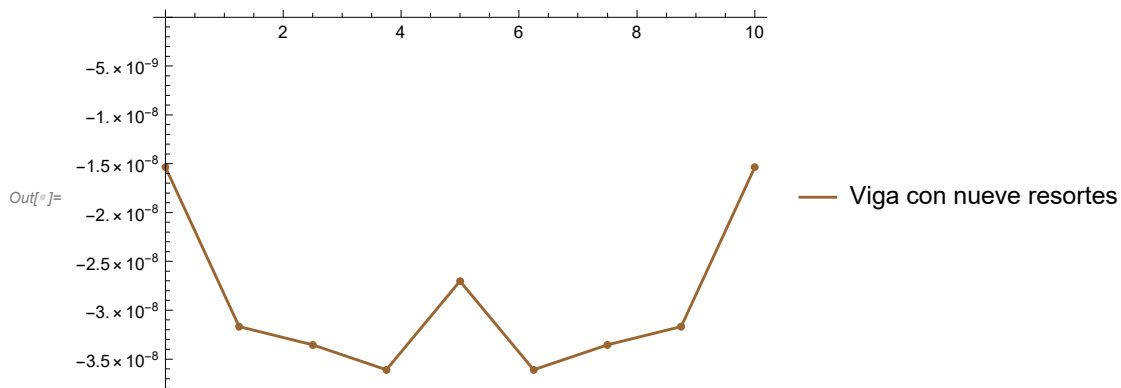
In[]:=

```
g13 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/8, -R2 / k}, {2L/8, -R3 / k}, {3L/8, -R4 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {4L/8, -R5 / k}, {5L/8, -R6 / k}, {6L/8, -R7 / k}, {7L/8, -R8 / k}, {L, -R9 / k}},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, PlotRange -> All, PlotStyle -> Brown,
  origen de ejes rango de rep... [todo rango de rep... [todo estilo de repr... [marrón
  PlotLegends -> {"Viga con nueve resortes"}]
  leyendas de representación
```

```
g14 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/8, -R2 / k}, {2L/8, -R3 / k}, {3L/8, -R4 / k},
  representación de lista
  {4L/8, -R5 / k}, {5L/8, -R6 / k}, {6L/8, -R7 / k}, {7L/8, -R8 / k}, {L, -R9 / k}},
  PlotStyle -> Brown, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... [marrón origen de ejes rango de rep... [todo
```

```
Show[
  muestra
```

```
g13,
g14]
```



$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= } & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2}\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3}\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 \\
 & dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4}\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \right. \\
 & \left. \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}\right)^2 dx\right], \text{R2}] \\
 \text{Out[*]:= } & 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-7260 L q + 6480 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 \text{EI}} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-6900 L q + 1080 (6 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 21 R5))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-4020 L q + 1080 (6 R2 + 9 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} + \\
 & \left. \frac{L^3 (-5820 L q + 1080 (6 R2 + 3 (4 R3 + 5 (R4 + R5))))}{4723920 \text{EI}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= } & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2}\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3}\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
 & \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 \\
 & dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4}\right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \right. \\
 & \left. \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}\right)^2 dx\right], \text{R3}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]:= } & 2 \left(\frac{L (-648 L q + 1944 (R3 + R4 + R5))}{17496 A G} + \right. \\
 & \frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-14520 L q + 12960 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-13800 L q + 1080 (12 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 42 R5))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-11640 L q + 1080 (12 R2 + 24 R3 + 30 (R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
 & \left. \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In[*]} := & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2}\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3}\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
& \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 \\
& dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4}\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \right. \\
& \left. \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
& \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}\right)^2 dx\right], \text{R4}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} := & 2 \left(\frac{L (-432 L q + 1944 (R4 + R5))}{17496 A G} + \frac{L (-648 L q + 1944 (R3 + R4 + R5))}{17496 A G} + \right. \\
& \frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-21780 L q + 19440 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 \text{EI}} + \\
& \frac{L^3 (-20700 L q + 1080 (18 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 63 R5))}{4723920 \text{EI}} + \\
& \frac{L^3 (-14670 L q + 1080 (15 R2 + 30 R3 + 38 (R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
& \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
& \left. \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
In[*]:= & \text{D}\left[2 * \left(\frac{1}{2 \text{EI}} \int_0^L \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \right. \right. \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{9}}^{\frac{2L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2}\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{9}}^{\frac{3L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3}\right)^2 dx + \frac{1}{2 \text{EI}} \\
& \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right)\right)^2 \\
& dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{9}}^{\frac{4L}{9}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4}\right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2 \text{EI}} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{9}\right) + \right. \\
& \left. \text{R3} \left(x - \frac{2L}{9}\right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{9}\right) + \text{R5} \left(x - \frac{4L}{9}\right)\right)^2 dx + \\
& \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{9}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(\frac{q * L - 2 \text{R2} - 2 \text{R3} - 2 \text{R4} - 2 \text{R5}}{2}\right) - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4} + \text{R5}\right)^2 dx\right], \text{R5}] \\
Out[*]:= & 2 \left(\frac{-\frac{2 L^2 q}{81} + \frac{2 L R5}{9}}{2 A G} + \frac{L (-432 L q + 1944 (R4 + R5))}{17496 A G} + \frac{L (-648 L q + 1944 (R3 + R4 + R5))}{17496 A G} + \right. \\
& \frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)}{174960 \text{EI}} + \frac{L^3 (-29040 L q + 25920 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 \text{EI}} + \\
& \frac{L^3 (-24210 L q + 1080 (21 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 74 R5))}{4723920 \text{EI}} + \\
& \frac{L^3 (-14670 L q + 1080 (15 R2 + 30 R3 + 38 (R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
& \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 \text{EI}} + \\
& \left. \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5)\right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} \right)
\end{aligned}$$

(*SE OBTIENEN LAS REACCIONES*)

In[]:=

$$\begin{aligned}
 & \text{Solve} \left[\left\{ 2 \left(\frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)}{174960 EI} + \frac{L^3 (-7260 L q + 6480 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 EI} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{L^3 (-6900 L q + 1080 (6 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 21 R5))}{4723920 EI} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{L^3 (-4020 L q + 1080 (6 R2 + 9 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 EI} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{L^3 (-5820 L q + 1080 (6 R2 + 3 (4 R3 + 5 (R4 + R5))))}{4723920 EI} \right) \right] = -\frac{R2}{k}, \\
 & 2 \left(\frac{L (-648 L q + 1944 (R3 + R4 + R5))}{17496 A G} + \frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)}{174960 EI} + \right. \\
 & \frac{L^3 (-14520 L q + 12960 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-13800 L q + 1080 (12 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 42 R5))}{4723920 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-11640 L q + 1080 (12 R2 + 24 R3 + 30 (R4 + R5)))}{4723920 EI} + \\
 & \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 EI} + \\
 & \left. \left. \left. \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} \right) \right] = -\frac{R3}{k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\frac{L (-432 L q + 1944 (R4 + R5))}{17496 A G} + \frac{L (-648 L q + 1944 (R3 + R4 + R5))}{17496 A G} + \right. \\
& \frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)}{174960 EI} + \frac{L^3 (-21780 L q + 19440 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 EI} + \\
& \frac{L^3 (-20700 L q + 1080 (18 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 63 R5))}{4723920 EI} + \\
& \frac{L^3 (-14670 L q + 1080 (15 R2 + 30 R3 + 38 (R4 + R5)))}{4723920 EI} + \\
& \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 EI} + \\
& \left. \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} \right) = -\frac{R4}{k}, \\
& 2 \left(-\frac{2 L^2 q}{81} + \frac{2 L R5}{9} + \frac{L (-432 L q + 1944 (R4 + R5))}{17496 A G} + \frac{L (-648 L q + 1944 (R3 + R4 + R5))}{17496 A G} + \right. \\
& \frac{L^3 \left(-\frac{110 L q}{3} + 80 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)}{174960 EI} + \frac{L^3 (-29040 L q + 25920 (R2 + 2 R3 + 3 R4 + 4 R5))}{9447840 EI} + \\
& \frac{L^3 (-24210 L q + 1080 (21 (R2 + 2 R3 + 3 R4) + 74 R5))}{4723920 EI} + \\
& \frac{L^3 (-14670 L q + 1080 (15 R2 + 30 R3 + 38 (R4 + R5)))}{4723920 EI} + \\
& \frac{L^3 (-6210 L q + 1080 (9 R2 + 14 (R3 + R4 + R5)))}{4723920 EI} + \\
& \left. \frac{6 \left(\frac{7 L q}{9} - 2 (R2 + R3 + R4 + R5) \right)^2 - 6 (L q - 2 (R2 + R3 + R4 + R5))^2}{48 A G q} \right) = -\frac{R5}{k} \}, \{R2, R3, R4, R5\}]
\end{aligned}$$

Out[*n*]= { {R2 →

$$\left(k L^2 \left(40669853253264 A^3 E I^4 G^3 q + 22594362918480 A^2 E I^4 G^2 k L q + 3723885740268 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3012581722464 A E I^4 G k^2 L^2 q + 2384960530284 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + 111577100832 E I^4 k^3 L^3 q + 337830666408 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 17668287486 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + 12971411928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 3813620616 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 180689940 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + 7860078 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 644922 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right),$$

$$R3 \rightarrow \left(k L^2 \left(71172243193212 A^3 E I^4 G^3 q + 31632108085872 A^2 E I^4 G^2 k L q + 6956134879995 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3514678676208 A E I^4 G k^2 L^2 q + 3417048712980 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + 111577100832 E I^4 k^3 L^3 q + 397235141388 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 25321037886 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + 12971411928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 4410960300 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 176438412 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + 8422137 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 592434 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right),$$

$$R4 \rightarrow \left(L^2 \left(41841412812 A^2 E I^3 G^2 k q + 6198727824 A E I^3 G k^2 L q + 4261625379 A^3 E I^2 G^3 k L^2 q + 229582512 E I^3 k^3 L^2 q + 644106492 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^3 q + 24328188 A E I^2 G k^3 L^4 q + 1469664 A^3 E I G^3 k^2 L^5 q + 106920 A^2 E I G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(10460353203 A^3 E I^3 G^3 + 20920706406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3099363912 A E I^3 G k^2 L^2 + 1937102445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114791256 E I^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 12045996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right),$$

$$R5 \rightarrow \left(L^2 \left(101674633133160 A^3 E I^4 G^3 k q + 33891544377720 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + 10564956735030 A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 3514678676208 A E I^4 G k^3 L^2 q + 3689017896258 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + 111577100832 E I^4 k^4 L^3 q + 397235141388 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 21681198477 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + 12971411928 A E I^3 G k^4 L^5 q + 4047454656 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 172186884 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + 7910379 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 592434 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \} \}$$

In[]:= R2 =

$$\left(k L^2 \left(40669853253264 A^3 E I^4 G^3 q + 22594362918480 A^2 E I^4 G^2 k L q + 3723885740268 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3012581722464 A E I^4 G k^2 L^2 q + 2384960530284 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + 111577100832 E I^4 k^3 L^3 q + 337830666408 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 17668287486 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + 12971411928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 3813620616 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 180689940 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + 7860078 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 644922 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$R3 = \left(k L^2 \left(71172243193212 A^3 E I^4 G^3 q + 31632108085872 A^2 E I^4 G^2 k L q + 6956134879995 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3514678676208 A E I^4 G k^2 L^2 q + 3417048712980 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + 111577100832 E I^4 k^3 L^3 q + 397235141388 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 25321037886 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + 12971411928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 4410960300 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 176438412 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + 8422137 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 592434 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$R4 = \left(L^2 \left(41841412812 A^2 E I^3 G^2 k q + 6198727824 A E I^3 G k^2 L q + 4261625379 A^3 E I^2 G^3 k L^2 q + 229582512 E I^3 k^3 L^2 q + 644106492 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^3 q + 24328188 A E I^2 G k^3 L^4 q + 1469664 A^3 E I G^3 k^2 L^5 q + 106920 A^2 E I G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(10460353203 A^3 E I^3 G^3 + 20920706406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3099363912 A E I^3 G k^2 L^2 + 1937102445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114791256 E I^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 12045996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$R5 = \left(L^2 \left(101674633133160 A^3 E I^4 G^3 k q + 33891544377720 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + 10564956735030 A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 3514678676208 A E I^4 G k^3 L^2 q + 3689017896258 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + 111577100832 E I^4 k^4 L^3 q + 397235141388 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 21681198477 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + 12971411928 A E I^3 G k^4 L^5 q + 4047454656 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 172186884 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + 7910379 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 592434 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) /$$

$$\left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(40\,669\,853\,253\,264 A^3 EI^4 G^3 q + 22\,594\,362\,918\,480 A^2 EI^4 G^2 k L q + \right. \right. \\ \left. \left. 3\,723\,885\,740\,268 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3\,012\,581\,722\,464 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2\,384\,960\,530\,284 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 111\,577\,100\,832 EI^4 k^3 L^3 q + 337\,830\,666\,408 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 17\,668\,287\,486 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 3\,813\,620\,616 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 180\,689\,940 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 7\,860\,078 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 644\,922 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(71\,172\,243\,193\,212 A^3 EI^4 G^3 q + 31\,632\,108\,085\,872 A^2 EI^4 G^2 k L q + \right. \right. \\ \left. \left. 6\,956\,134\,879\,995 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A EI^4 G k^2 L^2 q + 3\,417\,048\,712\,980 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 111\,577\,100\,832 EI^4 k^3 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 25\,321\,037\,886 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 4\,410\,960\,300 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 176\,438\,412 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 8\,422\,137 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 592\,434 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(L^2 \left(41\,841\,412\,812 A^2 EI^3 G^2 k q + 6\,198\,727\,824 A EI^3 G k^2 L q + 4\,261\,625\,379 A^3 EI^2 G^3 k L^2 q + \right. \right. \\ \left. \left. 229\,582\,512 EI^3 k^3 L^2 q + 644\,106\,492 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^3 q + 24\,328\,188 A EI^2 G k^3 L^4 q + \right. \right. \\ \left. \left. 1\,469\,664 A^3 EI G^3 k^2 L^5 q + 106\,920 A^2 EI G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) / \\ \left(18 \left(10\,460\,353\,203 A^3 EI^3 G^3 + 20\,920\,706\,406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3\,099\,363\,912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1\,937\,102\,445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114\,791\,256 EI^3 k^3 L^3 + 312\,487\,308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 12\,045\,996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761\,076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53\,946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(L^2 \left(101\,674\,633\,133\,160 A^3 EI^4 G^3 k q + 33\,891\,544\,377\,720 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 10\,564\,956\,735\,030 A^4 \right. \right. \\ \left. \left. EI^3 G^4 k L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A EI^4 G k^3 L^2 q + 3\,689\,017\,896\,258 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 111\,577\,100\,832 EI^4 k^4 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 21\,681\,198\,477 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^4 L^5 q + 4\,047\,454\,656 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 172\,186\,884 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 7\,910\,379 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 592\,434 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(18 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

(*POR SIMETRÍA R9=R2 R8=R3 R7=R4 R6=R5*)

In[*]:= **R9 = R2**

R8 = R3

R7 = R4

R6 = R5

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(40669853253264 A^3 E I^4 G^3 q + 22594362918480 A^2 E I^4 G^2 k L q + \right. \right. \\ \left. \left. 3723885740268 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3012581722464 A E I^4 G k^2 L^2 q + 2384960530284 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 111577100832 E I^4 k^3 L^3 q + 337830666408 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 17668287486 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 12971411928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 3813620616 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 180689940 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 7860078 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 644922 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(71172243193212 A^3 E I^4 G^3 q + 31632108085872 A^2 E I^4 G^2 k L q + \right. \right. \\ \left. \left. 6956134879995 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3514678676208 A E I^4 G k^2 L^2 q + 3417048712980 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 111577100832 E I^4 k^3 L^3 q + 397235141388 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 25321037886 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 12971411928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 4410960300 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 176438412 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 8422137 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 592434 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(L^2 \left(41841412812 A^2 E I^3 G^2 k q + 6198727824 A E I^3 G k^2 L q + 4261625379 A^3 E I^2 G^3 k L^2 q + \right. \right. \\ \left. \left. 229582512 E I^3 k^3 L^2 q + 644106492 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^3 q + 24328188 A E I^2 G k^3 L^4 q + \right. \right. \\ \left. \left. 1469664 A^3 E I G^3 k^2 L^5 q + 106920 A^2 E I G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) / \\ \left(18 \left(10460353203 A^3 E I^3 G^3 + 20920706406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3099363912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1937102445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114791256 E I^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 12045996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(L^2 \left(101674633133160 A^3 E I^4 G^3 k q + 33891544377720 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + 10564956735030 A^4 \right. \right. \\ \left. \left. E I^3 G^4 k L^2 q + 3514678676208 A E I^4 G k^3 L^2 q + 3689017896258 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 111577100832 E I^4 k^4 L^3 q + 397235141388 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 21681198477 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 12971411928 A E I^3 G k^4 L^5 q + 4047454656 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 172186884 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 7910379 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 592434 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(18 \left(22876792454961 A^4 E I^4 G^4 + 50837316566580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 4288744813230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 55788550416 E I^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 6428310336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 3921291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

(*SE ENCUENTRA R1 MEDIANTE SUMATORIA DE FUERZAS EN Y*)
 (*POR SIMETRÍA R10=R1*)

In[]:= Solve[{2 R1 + 2 R2 + 2 R3 + -q * L + 2 R4 + 2 R5 == 0}, {R1}]
 |resuelve

$$\text{Out[]} = \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(L q - \left(L^2 \left(41841412812 A^2 EI^3 G^2 k q + 6198727824 A EI^3 G k^2 L q + 4261625379 A^3 EI^2 G^3 k L^2 q + 229582512 EI^3 k^3 L^2 q + 644106492 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^3 q + 24328188 A EI^2 G k^3 L^4 q + 1469664 A^3 EI G^3 k^2 L^5 q + 106920 A^2 EI G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) / \right. \right.$$

$$\left. \left(9 \left(10460353203 A^3 EI^3 G^3 + 20920706406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3099363912 A EI^3 G k^2 L^2 + 1937102445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114791256 EI^3 k^3 L^3 + 312487308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + 12045996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \left(k L^2 \left(71172243193212 A^3 EI^4 G^3 q + 31632108085872 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6956134879995 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3514678676208 A EI^4 G k^2 L^2 q + 3417048712980 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 111577100832 EI^4 k^3 L^3 q + 397235141388 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 25321037886 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 12971411928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 4410960300 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 176438412 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 8422137 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 592434 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \left(9 \left(22876792454961 A^4 EI^4 G^4 + 50837316566580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A EI^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 EI^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \left(k L^2 \left(40669853253264 A^3 EI^4 G^3 q + 22594362918480 A^2 EI^4 G^2 k L q + 3723885740268 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3012581722464 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2384960530284 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + 111577100832 EI^4 k^3 L^3 q + 337830666408 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 17668287486 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + 12971411928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 3813620616 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 180689940 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + 7860078 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 644922 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \left(9 \left(22876792454961 A^4 EI^4 G^4 + 50837316566580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16945772188860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 4288744813230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1757339338104 A EI^4 G k^3 L^3 + 1729445062896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55788550416 EI^4 k^4 L^4 + 193710244500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 11349985437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6428310336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2050299378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 86447736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3921291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \left(L^2 \left(101674633133160 A^3 EI^4 G^3 k q + 33891544377720 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 10564956735030 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 3514678676208 A EI^4 G k^3 L^2 q + 3689017896258 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + 111577100832 EI^4 k^4 L^3 q + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& 397\,235\,141\,388 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 21\,681\,198\,477 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^4 L^5 q + 4\,047\,454\,656 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 172\,186\,884 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& 7\,910\,379 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 592\,434 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q)) / \\
(9 & (22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + \\
& 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + \\
& 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12}))) }
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In[6] := } R1 = & \frac{1}{2} \left(L q - \left(L^2 \left(41\,841\,412\,812 A^2 E I^3 G^2 k q + 6\,198\,727\,824 A E I^3 G k^2 L q + 4\,261\,625\,379 A^3 E I^2 G^3 k L^2 q + \right. \right. \right. \\
 & 229\,582\,512 E I^3 k^3 L^2 q + 644\,106\,492 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^3 q + 24\,328\,188 A E I^2 G k^3 L^4 q + \\
 & \left. \left. \left. 1\,469\,664 A^3 E I G^3 k^2 L^5 q + 106\,920 A^2 E I G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) / \right. \\
 & \left(9 \left(10\,460\,353\,203 A^3 E I^3 G^3 + 20\,920\,706\,406 A^2 E I^3 G^2 k L + 3\,099\,363\,912 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & 1\,937\,102\,445 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 114\,791\,256 E I^3 k^3 L^3 + 312\,487\,308 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \\
 & \left. \left. \left. 12\,045\,996 A E I^2 G k^3 L^5 + 761\,076 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 53\,946 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\
 & \left(k L^2 \left(71\,172\,243\,193\,212 A^3 E I^4 G^3 q + 31\,632\,108\,085\,872 A^2 E I^4 G^2 k L q + 6\,956\,134\,879\,995 \right. \right. \\
 & A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A E I^4 G k^2 L^2 q + 3\,417\,048\,712\,980 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \\
 & 111\,577\,100\,832 E I^4 k^3 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 25\,321\,037\,886 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \\
 & 12\,971\,411\,928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 4\,410\,960\,300 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 176\,438\,412 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
 & \left. \left. \left. 8\,422\,137 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 592\,434 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \right. \\
 & \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 E I^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 \right. \right. \\
 & A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4\,288\,744\,813\,230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A E I^4 G k^3 L^3 + \\
 & 1\,729\,445\,062\,896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 E I^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + \\
 & 11\,349\,985\,437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + \\
 & \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
 & \left(k L^2 \left(40\,669\,853\,253\,264 A^3 E I^4 G^3 q + 22\,594\,362\,918\,480 A^2 E I^4 G^2 k L q + 3\,723\,885\,740\,268 \right. \right. \\
 & A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 3\,012\,581\,722\,464 A E I^4 G k^2 L^2 q + 2\,384\,960\,530\,284 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \\
 & 111\,577\,100\,832 E I^4 k^3 L^3 q + 337\,830\,666\,408 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 17\,668\,287\,486 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \\
 & 12\,971\,411\,928 A E I^3 G k^3 L^5 q + 3\,813\,620\,616 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 180\,689\,940 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
 & \left. \left. \left. 7\,860\,078 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 644\,922 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \right. \\
 & \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 E I^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 E I^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 \right. \right. \\
 & A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4\,288\,744\,813\,230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A E I^4 G k^3 L^3 + \\
 & 1\,729\,445\,062\,896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 E I^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + \\
 & 11\,349\,985\,437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + \\
 & \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
 & \left(L^2 \left(101\,674\,633\,133\,160 A^3 E I^4 G^3 k q + 33\,891\,544\,377\,720 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + 10\,564\,956\,735\,030 \right. \right. \\
 & A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A E I^4 G k^3 L^2 q + 3\,689\,017\,896\,258 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
 & 111\,577\,100\,832 E I^4 k^4 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 21\,681\,198\,477 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
 & 12\,971\,411\,928 A E I^3 G k^4 L^5 q + 4\,047\,454\,656 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 172\,186\,884 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
 & \left. \left. \left. 7\,910\,379 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 592\,434 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \right. \\
 & \left. \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 E I^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 E I^4 G^3 k L + \right. \right. \right. \\
 & 16\,945\,772\,188\,860 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + 4\,288\,744\,813\,230 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + \\
 & 1\,757\,339\,338\,104 A E I^4 G k^3 L^3 + 1\,729\,445\,062\,896 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 55\,788\,550\,416 E I^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 11\,349\,985\,437 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 6\,428\,310\,336 A E I^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 86\,447\,736 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. \left. \left. 3\,921\,291 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

R10 =

R1

$$\begin{aligned}
\text{Out[7]=} & \frac{1}{2} \left(L q - \left(L^2 \left(41\,841\,412\,812 A^2 EI^3 G^2 k q + 6\,198\,727\,824 A EI^3 G k^2 L q + 4\,261\,625\,379 A^3 EI^2 G^3 k L^2 q + \right. \right. \right. \\
& 229\,582\,512 EI^3 k^3 L^2 q + 644\,106\,492 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^3 q + 24\,328\,188 A EI^2 G k^3 L^4 q + \\
& \left. \left. \left. 1\,469\,664 A^3 EI G^3 k^2 L^5 q + 106\,920 A^2 EI G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) / \right. \\
& \left(9 \left(10\,460\,353\,203 A^3 EI^3 G^3 + 20\,920\,706\,406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3\,099\,363\,912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 1\,937\,102\,445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114\,791\,256 EI^3 k^3 L^3 + 312\,487\,308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. \left. 12\,045\,996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761\,076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53\,946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\
& \left(k L^2 \left(71\,172\,243\,193\,212 A^3 EI^4 G^3 q + 31\,632\,108\,085\,872 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6\,956\,134\,879\,995 \right. \right. \\
& A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A EI^4 G k^2 L^2 q + 3\,417\,048\,712\,980 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& 111\,577\,100\,832 EI^4 k^3 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 25\,321\,037\,886 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 4\,410\,960\,300 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 176\,438\,412 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 8\,422\,137 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 592\,434 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \right. \\
& \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k L^2 \left(40\,669\,853\,253\,264 A^3 EI^4 G^3 q + 22\,594\,362\,918\,480 A^2 EI^4 G^2 k L q + 3\,723\,885\,740\,268 \right. \right. \\
& A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3\,012\,581\,722\,464 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2\,384\,960\,530\,284 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& 111\,577\,100\,832 EI^4 k^3 L^3 q + 337\,830\,666\,408 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 17\,668\,287\,486 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 3\,813\,620\,616 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 180\,689\,940 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 7\,860\,078 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 644\,922 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \right. \\
& \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(L^2 \left(101\,674\,633\,133\,160 A^3 EI^4 G^3 k q + 33\,891\,544\,377\,720 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 10\,564\,956\,735\,030 \right. \right. \\
& A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A EI^4 G k^3 L^2 q + 3\,689\,017\,896\,258 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& 111\,577\,100\,832 EI^4 k^4 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 21\,681\,198\,477 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^4 L^5 q + 4\,047\,454\,656 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 172\,186\,884 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 7\,910\,379 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 592\,434 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \right. \\
& \left. \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \right. \\
& 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[n]= & \frac{1}{2} \left(L q - \left(L^2 \left(41\,841\,412\,812 A^2 EI^3 G^2 k q + 6\,198\,727\,824 A EI^3 G k^2 L q + 4\,261\,625\,379 A^3 EI^2 G^3 k L^2 q + \right. \right. \right. \\
& 229\,582\,512 EI^3 k^3 L^2 q + 644\,106\,492 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^3 q + 24\,328\,188 A EI^2 G k^3 L^4 q + \\
& \left. \left. \left. 1\,469\,664 A^3 EI G^3 k^2 L^5 q + 106\,920 A^2 EI G^2 k^3 L^6 q + 107 A^3 G^3 k^3 L^8 q \right) \right) / \\
& \left(9 \left(10\,460\,353\,203 A^3 EI^3 G^3 + 20\,920\,706\,406 A^2 EI^3 G^2 k L + 3\,099\,363\,912 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 1\,937\,102\,445 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 114\,791\,256 EI^3 k^3 L^3 + 312\,487\,308 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. \left. 12\,045\,996 A EI^2 G k^3 L^5 + 761\,076 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 53\,946 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 53 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) - \\
& \left(k L^2 \left(71\,172\,243\,193\,212 A^3 EI^4 G^3 q + 31\,632\,108\,085\,872 A^2 EI^4 G^2 k L q + 6\,956\,134\,879\,995 \right. \right. \\
& A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A EI^4 G k^2 L^2 q + 3\,417\,048\,712\,980 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& 111\,577\,100\,832 EI^4 k^3 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 25\,321\,037\,886 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 4\,410\,960\,300 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 176\,438\,412 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 8\,422\,137 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 592\,434 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 511 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(k L^2 \left(40\,669\,853\,253\,264 A^3 EI^4 G^3 q + 22\,594\,362\,918\,480 A^2 EI^4 G^2 k L q + 3\,723\,885\,740\,268 \right. \right. \\
& A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 3\,012\,581\,722\,464 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2\,384\,960\,530\,284 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& 111\,577\,100\,832 EI^4 k^3 L^3 q + 337\,830\,666\,408 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 17\,668\,287\,486 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^3 L^5 q + 3\,813\,620\,616 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 180\,689\,940 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 7\,860\,078 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 644\,922 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 601 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) - \\
& \left(L^2 \left(101\,674\,633\,133\,160 A^3 EI^4 G^3 k q + 33\,891\,544\,377\,720 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 10\,564\,956\,735\,030 \right. \right. \\
& A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + 3\,514\,678\,676\,208 A EI^4 G k^3 L^2 q + 3\,689\,017\,896\,258 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& 111\,577\,100\,832 EI^4 k^4 L^3 q + 397\,235\,141\,388 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 21\,681\,198\,477 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& 12\,971\,411\,928 A EI^3 G k^4 L^5 q + 4\,047\,454\,656 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 172\,186\,884 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 7\,910\,379 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 592\,434 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 529 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
& \left(9 \left(22\,876\,792\,454\,961 A^4 EI^4 G^4 + 50\,837\,316\,566\,580 A^3 EI^4 G^3 k L + 16\,945\,772\,188\,860 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 4\,288\,744\,813\,230 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 1\,757\,339\,338\,104 A EI^4 G k^3 L^3 + \\
& 1\,729\,445\,062\,896 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + 55\,788\,550\,416 EI^4 k^4 L^4 + 193\,710\,244\,500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + \\
& 11\,349\,985\,437 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + 6\,428\,310\,336 A EI^3 G k^4 L^6 + 2\,050\,299\,378 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + \\
& \left. \left. \left. 86\,447\,736 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + 3\,921\,291 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 295\,488 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 265 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

In[]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.8 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.2 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 12\,000\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

[valor numérico]

$$E_c = 19\,928\,032\,768 \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

[valor numérico]

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 250 \text{ (*N*)}$$

[valor numérico]

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

[valor numérico]

$$v = 0.35$$

$$G = E_c / (2 (1 + v))$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 12 000 000 000

Out[]:= 19 928 032 768

Out[]:= 0.1152

Out[]:= 9.6×10^9

Out[]:= 10

Out[]:= 250

Out[]:= 2.29571×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 7.38075×10^9

Out[]:= 0.96

(*FINALMENTE SE OBTIENE LA GRÁFICA*)

In[]:=

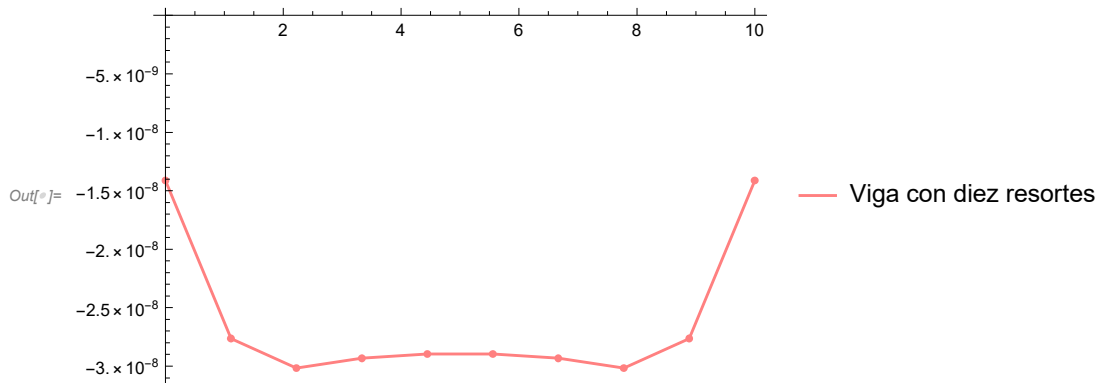
```

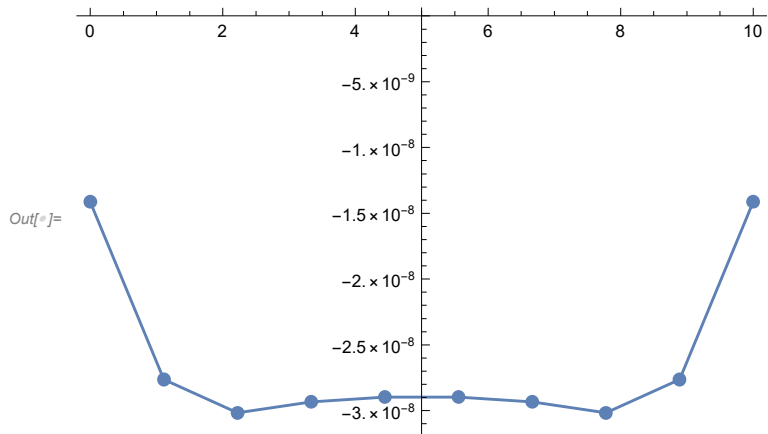
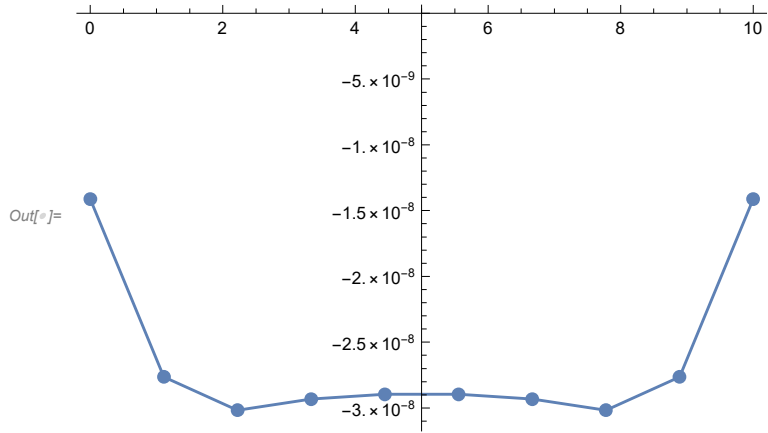
g15 = ListLinePlot [
  gráfico de línea de una lista
  { {0, -R1 / k}, {L/9, -R2 / k}, {2L/9, -R3 / k}, {3L/9, -R4 / k}, {4L/9, -R5 / k}, {5L/9, -R6 / k},
    {6L/9, -R7 / k}, {7L/9, -R8 / k}, {8L/9, -R9 / k}, {L, -R10 / k} }, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Pink, PlotLegends -> {"Viga con diez resortes"} ]
  rango de rep... [todo [estilo de repr... [rosa [leyendas de representación

g16 = ListPlot [ { {0, -R1 / k}, {L/9, -R2 / k}, {2L/9, -R3 / k}, {3L/9, -R4 / k}, {4L/9, -R5 / k},
  representación de lista
  {5L/9, -R6 / k}, {6L/9, -R7 / k}, {7L/9, -R8 / k}, {8L/9, -R9 / k}, {L, -R10 / k} },
  PlotStyle -> Pink, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All ]
  estilo de repr... [rosa [origen de ejes [rango de rep... [todo

Show [
  muestra
  g15,
  g16 ]

```





```
In[ ]:= Clear[g15, g16, k, L, q, EI, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R9, R10, G, A, B, H, ks, Ec, Iz, v]
borra
```

A.1.7. Ejemplo 7: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga repartida, aplicando la teoría de Timoshenko

(*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*PRIMER VIGA CON UN RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

In[]:=

$$D\left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^L (R1 - q * x)^2 dx\right], R1\right]$$

$$Out[]:= \frac{-L^2 q + 2 L R1}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{4} + \frac{2 L^3 R1}{3}}{2 EI}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve}\left[\left\{\frac{-L^2 q + 2 L R1}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{4} + \frac{2 L^3 R1}{3}}{2 EI} == -\frac{R1}{k}\right\}, \{R1\}\right]$$

$$Out[]:= \left\{\left\{R1 \rightarrow \frac{3 k (4 EI L^2 + A G L^4) q}{8 (3 A EI G + 3 EI k L + A G k L^3)}\right\}\right\}$$

$$In[]:= R1 = \frac{3 k (4 EI L^2 + A G L^4) q}{8 (3 A EI G + 3 EI k L + A G k L^3)}$$

$$Out[]:= \frac{3 k (4 EI L^2 + A G L^4) q}{8 (3 A EI G + 3 EI k L + A G k L^3)}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.80 (*m*)
  H = 1.20 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 10 (*m*)
  q = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  v = 0.35
  G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
  A = B * H

Out[ ]:= 0.8
Out[ ]:= 1.2
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:=  $2.17079 \times 10^{10}$ 
Out[ ]:= 0.1152
Out[ ]:=  $8. \times 10^6$ 
Out[ ]:= 10
Out[ ]:= 100
Out[ ]:=  $2.50076 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.35
Out[ ]:=  $8.03998 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.96

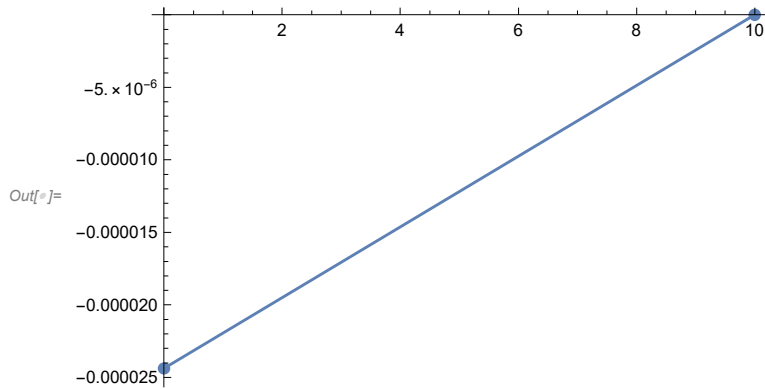
```

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

g1 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      gráfico de línea de una lista      origen de ejes      rango de rep... [todo]
g2 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}},
      representación de lista
      PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      estilo de repre... tamaño de punto      origen de ejes      rango de rep... [todo]
Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```



In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

g1 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0},
      gráfico de línea de una lista      origen de ejes
      PlotRange -> All, PlotStyle -> {Green}, PlotLegends -> {"Solución con un resorte"}]
      rango de rep... [todo] estilo de repre... [verde]      leyendas de representación
g2 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}}, PlotStyle -> {Green},
      representación de lista      estilo de repre... [verde]
      AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      origen de ejes      rango de rep... [todo]
Show[
  muestra
  g1,
  g2]

```

(*VIGA EMPOTRADA CON 2 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
 & D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{2}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^L (R1 - q * x + R2)^2 dx \right], R1] \\
 \text{Out[*]} = & \frac{-\frac{L^2 q}{4} + L R1}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{64} + \frac{L^3 R1}{12}}{2 EI} + \frac{-\frac{15 L^4 q}{64} + \frac{7 L^3 R1}{12} + \frac{5 L^3 R2}{24}}{2 EI} + \frac{L (-18 L q + 24 (R1 + R2))}{48 A G}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[*]:=

$$\begin{aligned}
 & D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{2}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^L (R1 - q * x + R2)^2 dx \right], R2] \\
 \text{Out[*]} = & \frac{-\frac{17 L^4 q}{192} + \frac{5 L^3 R1}{24} + \frac{L^3 R2}{12}}{2 EI} + \frac{L (-18 L q + 24 (R1 + R2))}{48 A G}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve} \left[\left\{ \frac{-\frac{L^2 q}{4} + L R1}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{64} + \frac{L^3 R1}{12}}{2 E I} + \frac{-\frac{15 L^4 q}{64} + \frac{7 L^3 R1}{12} + \frac{5 L^3 R2}{24}}{2 E I} + \frac{L (-18 L q + 24 (R1 + R2))}{48 A G} = -\frac{R1}{k}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{-\frac{17 L^4 q}{192} + \frac{5 L^3 R1}{24} + \frac{L^3 R2}{12}}{2 E I} + \frac{L (-18 L q + 24 (R1 + R2))}{48 A G} = -\frac{R2}{k}, \{R1, R2\} \right] \right]$$

Out[]:=

$$\left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{k (9216 A E I^2 G L^2 + 1152 E I^2 k L^3 + 2304 A^2 E I G^2 L^4 + 408 A E I G k L^5 + 11 A^2 G^2 k L^7) q}{8 (2304 A^2 E I^2 G^2 + 3456 A E I^2 G k L + 576 E I^2 k^2 L^2 + 864 A^2 E I G^2 k L^3 + 240 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6)} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ R2 \rightarrow \frac{2 L^2 (432 A E I^2 G k + 144 E I^2 k^2 L + 51 A^2 E I G^2 k L^2 + 63 A E I G k^2 L^3 + 2 A^2 G^2 k^2 L^5) q}{2304 A^2 E I^2 G^2 + 3456 A E I^2 G k L + 576 E I^2 k^2 L^2 + 864 A^2 E I G^2 k L^3 + 240 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6} \right\} \right\}$$

In[]:=

R1 =

$$\frac{k (9216 A E I^2 G L^2 + 1152 E I^2 k L^3 + 2304 A^2 E I G^2 L^4 + 408 A E I G k L^5 + 11 A^2 G^2 k L^7) q}{8 (2304 A^2 E I^2 G^2 + 3456 A E I^2 G k L + 576 E I^2 k^2 L^2 + 864 A^2 E I G^2 k L^3 + 240 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6)}$$

$$R2 = \frac{2 L^2 (432 A E I^2 G k + 144 E I^2 k^2 L + 51 A^2 E I G^2 k L^2 + 63 A E I G k^2 L^3 + 2 A^2 G^2 k^2 L^5) q}{2304 A^2 E I^2 G^2 + 3456 A E I^2 G k L + 576 E I^2 k^2 L^2 + 864 A^2 E I G^2 k L^3 + 240 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

Out[]:=

$$\frac{k (9216 A E I^2 G L^2 + 1152 E I^2 k L^3 + 2304 A^2 E I G^2 L^4 + 408 A E I G k L^5 + 11 A^2 G^2 k L^7) q}{8 (2304 A^2 E I^2 G^2 + 3456 A E I^2 G k L + 576 E I^2 k^2 L^2 + 864 A^2 E I G^2 k L^3 + 240 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6)}$$

Out[]:=

$$\frac{2 L^2 (432 A E I^2 G k + 144 E I^2 k^2 L + 51 A^2 E I G^2 k L^2 + 63 A E I G k^2 L^3 + 2 A^2 G^2 k^2 L^5) q}{2304 A^2 E I^2 G^2 + 3456 A E I^2 G k L + 576 E I^2 k^2 L^2 + 864 A^2 E I G^2 k L^3 + 240 A E I G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

```

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.80 (*m*)
H = 1.20 (*m*)
ks = 10000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 10 (*m*)
q = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
v = 0.35
G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
A = B * H

```

Out[*]= 0.8

Out[*]= 1.2

Out[*]= 10000000

Out[*]= 2.17079×10^{10}

Out[*]= 0.1152

Out[*]= $8. \times 10^6$

Out[*]= 10

Out[*]= 100

Out[*]= 2.50076×10^9

Out[*]= 0.35

Out[*]= 8.03998×10^9

Out[*]= 0.96

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g3 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      |gráfico de línea de una lista          |origen de ejes          |rango de rep... |todo]
```

```
g4 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, 0}},
      |representación de lista
```

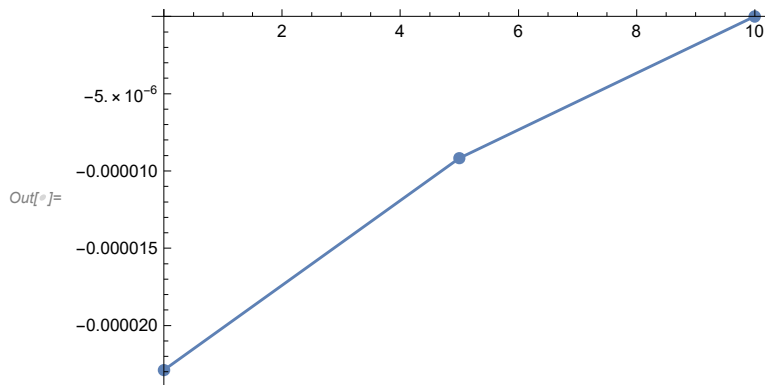
```
PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      |estilo de repr... |tamaño de punto      |origen de ejes      |rango de rep... |todo]
```

Show[

|muestra

g3,

g4]



In[*]:= (*VIGA EMPOTRADA CON 3 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{3}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{3} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{3}}^L (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx \right], R1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & -\frac{L^2 q}{9} + \frac{2 L R1}{3} - \frac{L^4 q}{324} + \frac{2 L^3 R1}{81} - \frac{5 L^4 q}{108} + \frac{14 L^3 R1}{81} + \frac{5 L^3 R2}{81} + \frac{L (-27 L q + 54 (R1 + R2))}{162 A G} + \\
 & -3 (-L q + R1 + R2 + R3)^2 + 3 \left(-\frac{2 L q}{3} + R1 + R2 + R3 \right)^2 + \frac{L^3 (-975 L q + 60 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{9720 EI} \\
 & \frac{6 A G q}{9720 EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D} \left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{3}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{3}} (\text{R1} - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (\text{R1} - q * x + \text{R2})^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{3} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{3} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \left. \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{2L}{3}}^L (\text{R1} - q * x + \text{R2} + \text{R3})^2 dx \right], \text{R2} \right] \\
 \text{Out[*]} := & \frac{-\frac{17 L^4 q}{972} + \frac{5 L^3 \text{R1}}{81} + \frac{2 L^3 \text{R2}}{81}}{2 \text{EI}} + \frac{L (-27 L q + 54 (\text{R1} + \text{R2}))}{162 \text{AG}} + \\
 & \frac{-3 (-L q + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3})^2 + 3 \left(-\frac{2Lq}{3} + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3} \right)^2}{6 \text{AG} q} + \frac{L^3 (-595 L q + 60 (23 \text{R1} + 14 \text{R2} + 5 \text{R3}))}{9720 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D} \left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{3}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{3}} (\text{R1} - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{3} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (\text{R1} - q * x + \text{R2})^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{3} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{3} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \left. \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{2L}{3}}^L (\text{R1} - q * x + \text{R2} + \text{R3})^2 dx \right], \text{R3} \right] \\
 \text{Out[*]} := & \frac{-3 (-L q + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3})^2 + 3 \left(-\frac{2Lq}{3} + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3} \right)^2}{6 \text{AG} q} + \frac{L^3 (-215 L q + 60 (8 \text{R1} + 5 \text{R2} + 2 \text{R3}))}{9720 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

In[*]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve}\left[\left\{\frac{-\frac{L^2 q}{9} + \frac{2 L R_1}{3}}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{324} + \frac{2 L^3 R_1}{81}}{2 E I} + \frac{-\frac{5 L^4 q}{108} + \frac{14 L^3 R_1}{81} + \frac{5 L^3 R_2}{81}}{2 E I} + \frac{L (-27 L q + 54 (R_1 + R_2))}{162 A G} + \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3)^2 + 3 \left(-\frac{2 L q}{3} + R_1 + R_2 + R_3\right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-975 L q + 60 (38 R_1 + 23 R_2 + 8 R_3))}{9720 E I} = -\frac{R_1}{k}, \frac{-\frac{17 L^4 q}{972} + \frac{5 L^3 R_1}{81} + \frac{2 L^3 R_2}{81}}{2 E I} + \frac{L (-27 L q + 54 (R_1 + R_2))}{162 A G} + \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3)^2 + 3 \left(-\frac{2 L q}{3} + R_1 + R_2 + R_3\right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-595 L q + 60 (23 R_1 + 14 R_2 + 5 R_3))}{9720 E I} = -\frac{R_2}{k}, \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3)^2 + 3 \left(-\frac{2 L q}{3} + R_1 + R_2 + R_3\right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-215 L q + 60 (8 R_1 + 5 R_2 + 2 R_3))}{9720 E I} = -\frac{R_3}{k}\right\}, \{R_1, R_2, R_3\}]$$

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ R_1 \rightarrow \left(k L^2 (25 509 168 A^2 E I^3 G^2 q + 5 668 704 A E I^3 G k L q + 6 377 292 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 314 928 E I^3 k^2 L^2 q + 1 837 080 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 125 388 A E I^2 G k^2 L^4 q + 35 964 A^3 E I G^3 k L^5 q + 5076 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 41 A^3 G^3 k^2 L^8 q) \right) / (24 (2 125 764 A^3 E I^3 G^3 + 4 251 528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1 180 980 A E I^3 G k^2 L^2 + 944 784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 78 732 E I^3 k^3 L^3 + 428 652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 34 992 A E I^2 G k^3 L^5 + 10 611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9)) \right\}, \left\{ R_2 \rightarrow \left(k L^2 (11 337 408 A^2 E I^3 G^2 q + 4 251 528 A E I^3 G k L q + 1 784 592 A^3 E I^2 G^3 L^2 q + 314 928 E I^3 k^2 L^2 q + 1 561 518 A^2 E I^2 G^2 k L^3 q + 142 884 A E I^2 G k^2 L^4 q + 48 357 A^3 E I G^3 k L^5 q + 6696 A^2 E I G^2 k^2 L^6 q + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 q) \right) / (12 (2 125 764 A^3 E I^3 G^3 + 4 251 528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1 180 980 A E I^3 G k^2 L^2 + 944 784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 78 732 E I^3 k^3 L^3 + 428 652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 34 992 A E I^2 G k^3 L^5 + 10 611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9)) \right\}, \left\{ R_3 \rightarrow - \left((-3 542 940 A^2 E I^3 G^2 k L^2 q - 1 889 568 A E I^3 G k^2 L^3 q - 282 123 A^3 E I^2 G^3 k L^4 q - 157 464 E I^3 k^3 L^4 q - 682 344 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 q - 71 442 A E I^2 G k^3 L^6 q - 15 633 A^3 E I G^3 k^2 L^7 q - 3105 A^2 E I G^2 k^3 L^8 q - 25 A^3 G^3 k^3 L^{10} q) / (6 (2 125 764 A^3 E I^3 G^3 + 4 251 528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1 180 980 A E I^3 G k^2 L^2 + 944 784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 78 732 E I^3 k^3 L^3 + 428 652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 34 992 A E I^2 G k^3 L^5 + 10 611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9)) \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
In[*]:= R1 = & \left(k L^2 \left(25\,509\,168 A^2 EI^3 G^2 q + 5\,668\,704 A EI^3 G k L q + \right. \right. \\
& 6\,377\,292 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 314\,928 EI^3 k^2 L^2 q + 1\,837\,080 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \\
& \left. \left. 125\,388 A EI^2 G k^2 L^4 q + 35\,964 A^3 EI G^3 k L^5 q + 5076 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 41 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\
& \left(24 \left(2\,125\,764 A^3 EI^3 G^3 + 4\,251\,528 A^2 EI^3 G^2 k L + 1\,180\,980 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 944\,784 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 78\,732 EI^3 k^3 L^3 + 428\,652 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 34\,992 A EI^2 G k^3 L^5 + 10\,611 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \\
R2 = & \left(k L^2 \left(11\,337\,408 A^2 EI^3 G^2 q + 4\,251\,528 A EI^3 G k L q + 1\,784\,592 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + \right. \right. \\
& 314\,928 EI^3 k^2 L^2 q + 1\,561\,518 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + 142\,884 A EI^2 G k^2 L^4 q + \\
& \left. \left. 48\,357 A^3 EI G^3 k L^5 q + 6696 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\
& \left(12 \left(2\,125\,764 A^3 EI^3 G^3 + 4\,251\,528 A^2 EI^3 G^2 k L + 1\,180\,980 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 944\,784 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 78\,732 EI^3 k^3 L^3 + 428\,652 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 34\,992 A EI^2 G k^3 L^5 + 10\,611 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right) \\
R3 = & - \left(\left(-3\,542\,940 A^2 EI^3 G^2 k L^2 q - 1\,889\,568 A EI^3 G k^2 L^3 q - 282\,123 A^3 EI^2 G^3 k L^4 q - \right. \right. \\
& 157\,464 EI^3 k^3 L^4 q - 682\,344 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 q - 71\,442 A EI^2 G k^3 L^6 q - \\
& \left. \left. 15\,633 A^3 EI G^3 k^2 L^7 q - 3105 A^2 EI G^2 k^3 L^8 q - 25 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) \right) / \\
& \left(6 \left(2\,125\,764 A^3 EI^3 G^3 + 4\,251\,528 A^2 EI^3 G^2 k L + 1\,180\,980 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 944\,784 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 78\,732 EI^3 k^3 L^3 + 428\,652 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 34\,992 A EI^2 G k^3 L^5 + 10\,611 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]:= & \left(k L^2 \left(25\,509\,168 A^2 EI^3 G^2 q + 5\,668\,704 A EI^3 G k L q + \right. \right. \\
& 6\,377\,292 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 314\,928 EI^3 k^2 L^2 q + 1\,837\,080 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \\
& \left. \left. 125\,388 A EI^2 G k^2 L^4 q + 35\,964 A^3 EI G^3 k L^5 q + 5076 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 41 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\
& \left(24 \left(2\,125\,764 A^3 EI^3 G^3 + 4\,251\,528 A^2 EI^3 G^2 k L + 1\,180\,980 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 944\,784 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 78\,732 EI^3 k^3 L^3 + 428\,652 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 34\,992 A EI^2 G k^3 L^5 + 10\,611 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]:= & \left(k L^2 \left(11\,337\,408 A^2 EI^3 G^2 q + 4\,251\,528 A EI^3 G k L q + \right. \right. \\
& 1\,784\,592 A^3 EI^2 G^3 L^2 q + 314\,928 EI^3 k^2 L^2 q + 1\,561\,518 A^2 EI^2 G^2 k L^3 q + \\
& \left. \left. 142\,884 A EI^2 G k^2 L^4 q + 48\,357 A^3 EI G^3 k L^5 q + 6696 A^2 EI G^2 k^2 L^6 q + 59 A^3 G^3 k^2 L^8 q \right) \right) / \\
& \left(12 \left(2\,125\,764 A^3 EI^3 G^3 + 4\,251\,528 A^2 EI^3 G^2 k L + 1\,180\,980 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 944\,784 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 78\,732 EI^3 k^3 L^3 + 428\,652 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 34\,992 A EI^2 G k^3 L^5 + 10\,611 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]:= & - \left(\left(-3\,542\,940 A^2 EI^3 G^2 k L^2 q - 1\,889\,568 A EI^3 G k^2 L^3 q - \right. \right. \\
& 282\,123 A^3 EI^2 G^3 k L^4 q - 157\,464 EI^3 k^3 L^4 q - 682\,344 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 q - \\
& \left. \left. 71\,442 A EI^2 G k^3 L^6 q - 15\,633 A^3 EI G^3 k^2 L^7 q - 3105 A^2 EI G^2 k^3 L^8 q - 25 A^3 G^3 k^3 L^{10} q \right) \right) / \\
& \left(6 \left(2\,125\,764 A^3 EI^3 G^3 + 4\,251\,528 A^2 EI^3 G^2 k L + 1\,180\,980 A EI^3 G k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 944\,784 A^3 EI^2 G^3 k L^3 + 78\,732 EI^3 k^3 L^3 + 428\,652 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^4 + \\
& \left. \left. 34\,992 A EI^2 G k^3 L^5 + 10\,611 A^3 EI G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 EI G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \right)
\end{aligned}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.80 (*m*)
H = 1.20 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 10 (*m*)
q = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
v = 0.35
G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
A = B * H

```

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10 000 000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 10

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g5 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, 0}},
  [gráfico de línea de una lista
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [origen de ejes [rango de rep... [todo
```

```
g6 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, 0}},
  [representación de lista
```

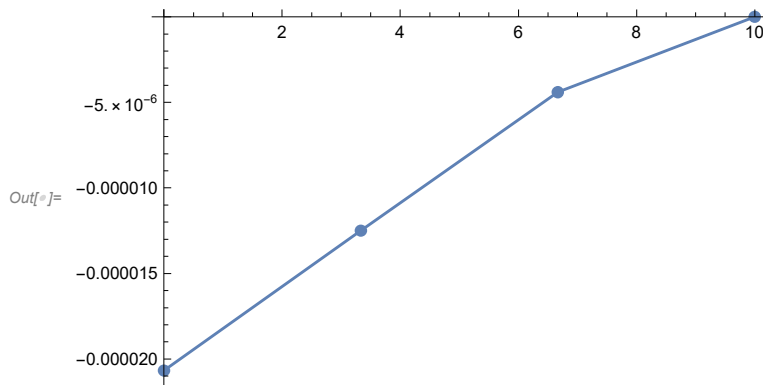
```
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [estilo de repr... [tamaño de punto [origen de ejes [rango de rep... [todo
```

Show[

[muestra

g5,

g6]



(*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*VIGA CON CUATRO RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D} \left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{4}}^L (R1 - q * x + R2 + R3 + R4)^2 dx \right], R1] \\
 \text{Out[*]} := & \frac{-\frac{L^2 q}{16} + \frac{L R1}{2}}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{1024} + \frac{L^3 R1}{96}}{2 \text{EI}} + \frac{-\frac{15 L^4 q}{1024} + \frac{7 L^3 R1}{96} + \frac{5 L^3 R2}{192}}{2 \text{EI}} + \frac{L (-36 L q + 96 (R1 + R2))}{384 A G} + \\
 & \frac{-3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R1 + R2 + R3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{L q}{2} + R1 + R2 + R3 \right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-3900 L q + 320 (38 R1 + 23 R2 + 8 R3))}{122880 \text{EI}} + \\
 & \frac{-3 (-L q + R1 + R2 + R3 + R4)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6 A G q} + \\
 & \frac{L^3 (-10500 L q + 320 (74 R1 + 53 R2 + 32 R3 + 11 R4))}{122880 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:=} & \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{4}} (\text{R1} - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (\text{R1} - q * x + \text{R2})^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{4} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (\text{R1} - q * x + \text{R2} + \text{R3})^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{4} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{4} \right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{3L}{4}}^L (\text{R1} - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4})^2 dx \right], \text{R2}] \\
 \text{Out[*]:=} & -\frac{17 L^4 q}{3072} + \frac{5 L^3 R1}{192} + \frac{L^3 R2}{96} + \frac{L (-36 L q + 96 (R1 + R2))}{384 A G} + \\
 & \frac{-3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R1 + R2 + R3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{L q}{2} + R1 + R2 + R3 \right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-2380 L q + 320 (23 R1 + 14 R2 + 5 R3))}{122880 \text{EI}} + \\
 & \frac{-3 (-L q + R1 + R2 + R3 + R4)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6 A G q} + \\
 & \frac{L^3 (-7540 L q + 320 (53 R1 + 38 R2 + 23 R3 + 8 R4))}{122880 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= } & \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{4}} (\text{R1} - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (\text{R1} - q * x + \text{R2})^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{4} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (\text{R1} - q * x + \text{R2} + \text{R3})^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((\text{R1}) * x - \frac{q * x^2}{2} + \text{R2} \left(x - \frac{L}{4} \right) + \text{R3} \left(x - \frac{2L}{4} \right) + \text{R4} \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{3L}{4}}^L (\text{R1} - q * x + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4})^2 dx \right], \text{R3}] \\
 \text{Out[*]:= } & \frac{-3 \left(-\frac{3Lq}{4} + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3} \right)^2 + 3 \left(-\frac{Lq}{2} + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3} \right)^2}{6 \text{AG} q} + \frac{L^3 (-860 L q + 320 (8 \text{R1} + 5 \text{R2} + 2 \text{R3}))}{122880 \text{EI}} + \\
 & \frac{-3 (-L q + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4})^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{4} + \text{R1} + \text{R2} + \text{R3} + \text{R4} \right)^2}{6 \text{AG} q} + \\
 & \frac{L^3 (-4580 L q + 320 (32 \text{R1} + 23 \text{R2} + 14 \text{R3} + 5 \text{R4}))}{122880 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:= } & \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{4} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{4}}^L (R1 - q * x + R2 + R3 + R4)^2 dx \right], R4] \\
 \text{Out[*]:= } & \frac{-3 (-L q + R1 + R2 + R3 + R4)^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{4} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6 A G q} + \\
 & \frac{L^3 (-1620 L q + 320 (11 R1 + 8 R2 + 5 R3 + 2 R4))}{122880 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\begin{aligned}
 \text{Solve} \left[\left\{ \frac{-\frac{L^2 q}{16} + \frac{L R_1}{2}}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{1024} + \frac{L^3 R_1}{96}}{2 E I} + \frac{-\frac{15 L^4 q}{1024} + \frac{7 L^3 R_1}{96} + \frac{5 L^3 R_2}{192}}{2 E I} + \frac{L (-36 L q + 96 (R_1 + R_2))}{384 A G} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{-3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R_1 + R_2 + R_3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{L q}{2} + R_1 + R_2 + R_3 \right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-3900 L q + 320 (38 R_1 + 23 R_2 + 8 R_3))}{122 880 E I} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \right)^2}{6 A G q} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{L^3 (-10 500 L q + 320 (74 R_1 + 53 R_2 + 32 R_3 + 11 R_4))}{122 880 E I} = -\frac{R_1}{k}, \right. \right. \\
 \left. \left. -\frac{17 L^4 q}{3072} + \frac{5 L^3 R_1}{192} + \frac{L^3 R_2}{96} + \frac{L (-36 L q + 96 (R_1 + R_2))}{384 A G} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{-3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R_1 + R_2 + R_3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{L q}{2} + R_1 + R_2 + R_3 \right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-2380 L q + 320 (23 R_1 + 14 R_2 + 5 R_3))}{122 880 E I} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \right)^2}{6 A G q} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{L^3 (-7540 L q + 320 (53 R_1 + 38 R_2 + 23 R_3 + 8 R_4))}{122 880 E I} = -\frac{R_2}{k}, \right. \right. \\
 \left. \left. -3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R_1 + R_2 + R_3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{L q}{2} + R_1 + R_2 + R_3 \right)^2 + \frac{L^3 (-860 L q + 320 (8 R_1 + 5 R_2 + 2 R_3))}{122 880 E I} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \right)^2}{6 A G q} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{L^3 (-4580 L q + 320 (32 R_1 + 23 R_2 + 14 R_3 + 5 R_4))}{122 880 E I} = -\frac{R_3}{k}, \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{4} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \right)^2}{6 A G q} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{L^3 (-1620 L q + 320 (11 R_1 + 8 R_2 + 5 R_3 + 2 R_4))}{122 880 E I} = -\frac{R_4}{k} \right\}, \{R_1, R_2, R_3, R_3, R_4\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & \left\{ \left\{ \text{R1} \rightarrow \left(3 k L^2 \left(57982058496 A^3 EI^4 G^3 q + 18119393280 A^2 EI^4 G^2 k L q + \right. \right. \right. \\
& 14495514624 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1811939328 A EI^4 G k^2 L^2 q + 5681184768 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& 56623104 EI^4 k^3 L^3 q + 674758656 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 96927744 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& 23887872 A EI^3 G k^3 L^5 q + 23396352 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 1170432 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 160256 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 14816 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 51 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) \right) / \\
& \left(16 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right), \\
\text{R2} \rightarrow & \left(k L^2 \left(20384317440 A^3 EI^4 G^3 q + 8833204224 A^2 EI^4 G^2 k L q + 3630956544 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + \right. \right. \\
& 1104150528 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2947940352 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
& 42467328 EI^4 k^3 L^3 q + 456081408 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 81580032 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
& 19685376 A EI^3 G k^3 L^5 q + 19362816 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 1078272 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 141552 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 15000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) \right) / \\
& \left(2 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right), \\
\text{R3} \rightarrow & \left(L^2 \left(65229815808 A^3 EI^4 G^3 k q + 36691771392 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 7700742144 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + \right. \right. \\
& 4756340736 A EI^4 G k^3 L^2 q + 12450004992 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& 169869312 EI^4 k^4 L^3 q + 1999503360 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 336125952 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& 78741504 A EI^3 G k^4 L^5 q + 84418560 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 4174848 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 633216 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) \right) / \\
& \left(8 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right), \\
\text{R4} \rightarrow & \left(L^2 \left(9512681472 A^3 EI^4 G^3 k q + 6794772480 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 573308928 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + \right. \right. \\
& 1019215872 A EI^4 G k^3 L^2 q + 2187067392 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
& 42467328 EI^4 k^4 L^3 q + 419364864 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 39186432 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
& 19685376 A EI^3 G k^4 L^5 q + 15455232 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 1022976 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
& \left. \left. \left. 101664 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 13560 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) \right) / \\
& \left(2 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
& 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right) \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= } R1 = & \left(3 k L^2 \left(57982058496 A^3 EI^4 G^3 q + 18119393280 A^2 EI^4 G^2 k L q + \right. \right. \\
 & 14495514624 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + 1811939328 A EI^4 G k^2 L^2 q + 5681184768 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
 & 56623104 EI^4 k^3 L^3 q + 674758656 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 96927744 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
 & 23887872 A EI^3 G k^3 L^5 q + 23396352 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 1170432 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
 & \left. \left. 160256 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 14816 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 51 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
 & \left(16 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
 R2 = & \left(k L^2 \left(20384317440 A^3 EI^4 G^3 q + 8833204224 A^2 EI^4 G^2 k L q + 3630956544 A^4 EI^3 G^4 L^2 q + \right. \right. \\
 & 1104150528 A EI^4 G k^2 L^2 q + 2947940352 A^3 EI^3 G^3 k L^3 q + \\
 & 42467328 EI^4 k^3 L^3 q + 456081408 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 q + 81580032 A^4 EI^2 G^4 k L^5 q + \\
 & 19685376 A EI^3 G k^3 L^5 q + 19362816 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 q + 1078272 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 q + \\
 & \left. \left. 141552 A^4 EI G^4 k^2 L^8 q + 15000 A^3 EI G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\
 & \left(2 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
 R3 = & \left(L^2 \left(65229815808 A^3 EI^4 G^3 k q + 36691771392 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 7700742144 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + \right. \right. \\
 & 4756340736 A EI^4 G k^3 L^2 q + 12450004992 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
 & 169869312 EI^4 k^4 L^3 q + 1999503360 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 336125952 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
 & 78741504 A EI^3 G k^4 L^5 q + 84418560 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 4174848 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
 & \left. \left. 633216 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
 & \left(8 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \\
 R4 = & \left(L^2 \left(9512681472 A^3 EI^4 G^3 k q + 6794772480 A^2 EI^4 G^2 k^2 L q + 573308928 A^4 EI^3 G^4 k L^2 q + \right. \right. \\
 & 1019215872 A EI^4 G k^3 L^2 q + 2187067392 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^3 q + \\
 & 42467328 EI^4 k^4 L^3 q + 419364864 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^4 q + 39186432 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^5 q + \\
 & 19685376 A EI^3 G k^4 L^5 q + 15455232 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^6 q + 1022976 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^7 q + \\
 & \left. \left. 101664 A^4 EI G^4 k^3 L^8 q + 13560 A^3 EI G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\
 & \left(2 \left(21743271936 A^4 EI^4 G^4 + 54358179840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\
 & 11324620800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 & 84934656 EI^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 & 38928384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 & \left. \left. 277248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Out[*]} = \left(3 k L^2 \right. \\ \left. \left(57982058496 A^3 E I^4 G^3 q + 18119393280 A^2 E I^4 G^2 k L q + 14495514624 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 1811939328 \right. \right. \\ \left. \left. A E I^4 G k^2 L^2 q + 5681184768 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + 56623104 E I^4 k^3 L^3 q + 674758656 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + \right. \right. \\ \left. \left. 96927744 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + 23887872 A E I^3 G k^3 L^5 q + 23396352 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + \right. \right. \\ \left. \left. 1170432 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + 160256 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 14816 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 51 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(16 \left(21743271936 A^4 E I^4 G^4 + 54358179840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 11324620800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 84934656 E I^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 38928384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 277248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(k L^2 \left(20384317440 A^3 E I^4 G^3 q + 8833204224 A^2 E I^4 G^2 k L q + \right. \right. \\ \left. \left. 3630956544 A^4 E I^3 G^4 L^2 q + 1104150528 A E I^4 G k^2 L^2 q + 2947940352 A^3 E I^3 G^3 k L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 42467328 E I^4 k^3 L^3 q + 456081408 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 q + 81580032 A^4 E I^2 G^4 k L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 19685376 A E I^3 G k^3 L^5 q + 19362816 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 q + 1078272 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 141552 A^4 E I G^4 k^2 L^8 q + 15000 A^3 E I G^3 k^3 L^9 q + 55 A^4 G^4 k^3 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(2 \left(21743271936 A^4 E I^4 G^4 + 54358179840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 11324620800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 84934656 E I^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 38928384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 277248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(L^2 \left(65229815808 A^3 E I^4 G^3 k q + 36691771392 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + \right. \right. \\ \left. \left. 7700742144 A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 4756340736 A E I^4 G k^3 L^2 q + 12450004992 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 169869312 E I^4 k^4 L^3 q + 1999503360 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 336125952 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 78741504 A E I^3 G k^4 L^5 q + 84418560 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 4174848 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 633216 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 54240 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 187 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(8 \left(21743271936 A^4 E I^4 G^4 + 54358179840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 11324620800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 84934656 E I^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 38928384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 277248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(L^2 \left(9512681472 A^3 E I^4 G^3 k q + 6794772480 A^2 E I^4 G^2 k^2 L q + \right. \right. \\ \left. \left. 573308928 A^4 E I^3 G^4 k L^2 q + 1019215872 A E I^4 G k^3 L^2 q + 2187067392 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 42467328 E I^4 k^4 L^3 q + 419364864 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^4 q + 39186432 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 19685376 A E I^3 G k^4 L^5 q + 15455232 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^6 q + 1022976 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 101664 A^4 E I G^4 k^3 L^8 q + 13560 A^3 E I G^3 k^4 L^9 q + 49 A^4 G^4 k^4 L^{11} q \right) \right) / \\ \left(2 \left(21743271936 A^4 E I^4 G^4 + 54358179840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20384317440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 11324620800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2378170368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6879707136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 84934656 E I^4 k^4 L^4 + 976748544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157040640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 38928384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38596608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2045952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 277248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right)$$

In[]:=

(*DATOS DEL PROBLEMA*)

$$B = 0.80 \text{ (*m*)}$$

$$H = 1.20 \text{ (*m*)}$$

$$k_s = 10\,000\,000 \text{ (*N/m^3*)}$$

|valor numérico

$$E_c = 21\,707\,945\,522.8 \text{ (*N/m^2*)}$$

|valor numérico

$$I_z = (B * H^3) / 12 \text{ (*m^4*)}$$

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)

$$k = k_s * B \text{ (*N/m^2*)}$$

|valor numérico

$$L = 10 \text{ (*m*)}$$

$$q = 100 \text{ (*N*)}$$

|valor numérico

$$EI = E_c * I_z \text{ (*N*m^2*)}$$

|valor numérico

$$v = 0.35$$

$$G = \frac{E_c}{2(1+v)}$$

$$A = B * H$$

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10 000 000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 10

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

`g7 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0}},`
[gráfico de línea de una lista]

`AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]`
[origen de ejes] [rango de rep... [todo]

`g8 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0}},`
[representación de lista]

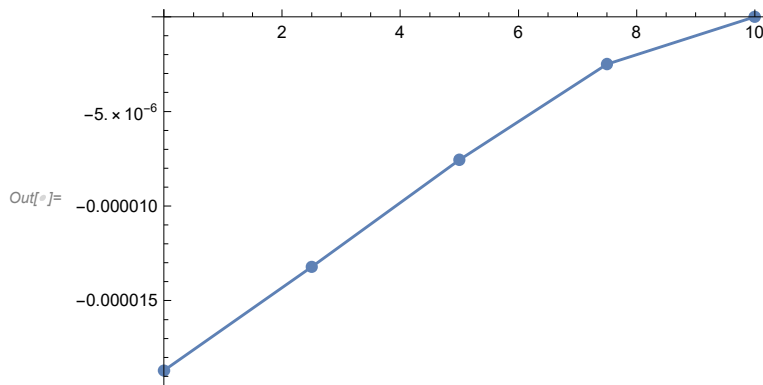
`PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]`
[estilo de repr... [tamaño de punto] [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

Show[

[muestra]

`g7,`

`g8]`



ln[6]:= (*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3 + R4)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - q * x + R2 + R3 + R4 + R5)^2 dx \right], R1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & \frac{-\frac{L^2 q}{25} + \frac{2 L R_1}{5}}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{2500} + \frac{2 L^3 R_1}{375}}{2 E I} + \frac{-\frac{3 L^4 q}{500} + \frac{14 L^3 R_1}{375} + \frac{L^3 R_2}{75}}{2 E I} + \frac{L (-45 L q + 150 (R_1 + R_2))}{750 A G} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{3 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3\right)^2 + 3 \left(-\frac{2 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3\right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-4875 L q + 500 (38 R_1 + 23 R_2 + 8 R_3))}{375 000 E I} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{4 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4\right)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4\right)^2}{6 A G q} + \\
& \frac{L^3 (-13 125 L q + 500 (74 R_1 + 53 R_2 + 32 R_3 + 11 R_4))}{375 000 E I} + \\
& \frac{-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5)^2 + 3 \left(-\frac{4 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5\right)^2}{6 A G q} + \\
& \frac{L^3 (-27 675 L q + 61 000 (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - 13 500 (R_2 + 2 R_3 + 3 R_4 + 4 R_5))}{375 000 E I}
\end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3 + R4)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - q * x + R2 + R3 + R4 + R5)^2 dx \right], R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[=]} = & \frac{-\frac{17 L^4 q}{7500} + \frac{L^3 R_1}{75} + \frac{2 L^3 R_2}{375}}{2 EI} + \frac{L (-45 L q + 150 (R_1 + R_2))}{750 A G} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{3 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3\right)^2 + 3 \left(-\frac{2 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3\right)^2}{6 A G q} + \frac{L^3 (-2975 L q + 500 (23 R_1 + 14 R_2 + 5 R_3))}{375 000 EI} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{4 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4\right)^2 + 3 \left(-\frac{3 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4\right)^2}{6 A G q} + \\
& \frac{L^3 (-9425 L q + 500 (53 R_1 + 38 R_2 + 23 R_3 + 8 R_4))}{375 000 EI} + \frac{1}{6 A G q} \\
& \left(-3 (-L q + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5)^2 + 3 \left(-\frac{4 L q}{5} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5\right)^2 \right) + \\
& \frac{L^3 (-21 575 L q + 500 (95 R_1 + 74 R_2 + 53 R_3 + 32 R_4 + 11 R_5))}{375 000 EI}
\end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 D \left[\right. & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3 + R4)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - q * x + R2 + R3 + R4 + R5)^2 dx \right], R3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[*]= & \frac{-3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{2Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2}{6AGq} + \frac{L^3 (-1075Lq + 500(8R1 + 5R2 + 2R3))}{375000EI} + \\
 & \frac{-3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6AGq} + \\
 & \frac{L^3 (-5725Lq + 500(32R1 + 23R2 + 14R3 + 5R4))}{375000EI} + \\
 & \frac{-3 (-Lq + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6AGq} + \\
 & \frac{L^3 (-15475Lq + 500(68R1 + 53R2 + 38R3 + 23R4 + 8R5))}{375000EI}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3 + R4)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - q * x + R2 + R3 + R4 + R5)^2 dx \right], R4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Out[]:= \frac{-3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6AGq} + \\
 & \frac{L^3 (-2025Lq + 500(11R1 + 8R2 + 5R3 + 2R4))}{375000EI} + \\
 & \frac{-3(-Lq + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6AGq} + \\
 & \frac{L^3 (-9375Lq + 500(41R1 + 32R2 + 23R3 + 14R4 + 5R5))}{375000EI}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:=} & \text{D}\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - q * x)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - q * x + R2)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - q * x + R2 + R3 + R4)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - \frac{q * x^2}{2} + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - q * x + R2 + R3 + R4 + R5)^2 dx \right], R5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]:=} & \frac{-3 (-L q + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6 A G q} + \\
 & \frac{L^3 (-3275 L q + 500 (14 R1 + 11 R2 + 8 R3 + 5 R4 + 2 R5))}{375 000 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

In[*]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\text{Solve}\left[\left\{ \frac{-\frac{L^2 q}{25} + \frac{2 L R1}{5}}{2 A G} + \frac{-\frac{L^4 q}{2500} + \frac{2 L^3 R1}{375}}{2 \text{EI}} + \frac{-\frac{3 L^4 q}{500} + \frac{14 L^3 R1}{375} + \frac{L^3 R2}{75}}{2 \text{EI}} + \frac{L (-45 L q + 150 (R1 + R2))}{750 A G} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{2Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2}{6AGq} + \frac{L^3 (-4875Lq + 500(38R1 + 23R2 + 8R3))}{375000EI} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-13125Lq + 500(74R1 + 53R2 + 32R3 + 11R4))}{375000EI} + \\
& \frac{-3 (-Lq + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-27675Lq + 61000(R1 + R2 + R3 + R4 + R5) - 13500(R2 + 2R3 + 3R4 + 4R5))}{375000EI} = -\frac{R1}{k}, \\
& -\frac{17L^4q}{7500} + \frac{L^3R1}{75} + \frac{2L^3R2}{375} + \frac{L(-45Lq + 150(R1 + R2))}{750AG} + \\
& \frac{2EI}{2EI} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{2Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2}{6AGq} + \frac{L^3 (-2975Lq + 500(23R1 + 14R2 + 5R3))}{375000EI} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-9425Lq + 500(53R1 + 38R2 + 23R3 + 8R4))}{375000EI} + \\
& \frac{-3 (-Lq + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-21575Lq + 500(95R1 + 74R2 + 53R3 + 32R4 + 11R5))}{375000EI} = -\frac{R2}{k}, \\
& \frac{-3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2 + 3 \left(-\frac{2Lq}{5} + R1 + R2 + R3 \right)^2}{6AGq} + \frac{L^3 (-1075Lq + 500(8R1 + 5R2 + 2R3))}{375000EI} + \\
& \frac{-3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-5725Lq + 500(32R1 + 23R2 + 14R3 + 5R4))}{375000EI} + \\
& \frac{-3 (-Lq + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-15475Lq + 500(68R1 + 53R2 + 38R3 + 23R4 + 8R5))}{375000EI} = -\frac{R3}{k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2 + 3 \left(-\frac{3Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-2025Lq + 500(11R1 + 8R2 + 5R3 + 2R4))}{375000EI} + \\
& \frac{-3(-Lq + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-9375Lq + 500(41R1 + 32R2 + 23R3 + 14R4 + 5R5))}{375000EI} = -\frac{R4}{k}, \\
& \frac{-3(-Lq + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2 + 3 \left(-\frac{4Lq}{5} + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \right)^2}{6AGq} + \\
& \frac{L^3 (-3275Lq + 500(14R1 + 11R2 + 8R3 + 5R4 + 2R5))}{375000EI} = -\frac{R5}{k}, \{R1, R2, R3, R4, R5\}
\end{aligned}$$

Out[*]= { {R1 →

$$\begin{aligned}
& - \left(\left(\left(-162000000000A^2EI^3G^2k^3L^5 - 172800000000A^3EI^2G^3k^3L^7 - 201600000A^4EI^4G^4k^3L^9 \right) \right. \right. \\
& \quad \left((-18000AIEIGk^2L^4 - 240A^2G^2k^2L^6) \left((-1500EIkL - 200AGkL^3) (-600EIkL - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 56AGkL^3) - (-2400EIkL - 704AGkL^3) (-750EIkL - 25AGkL^3) \right) - \right. \\
& \quad \left((-3750AIEIG - 3000EIkL - 640AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) - \right. \\
& \quad \quad \left. (-2400EIkL - 704AGkL^3) (-750EIkL - 55AGkL^3) \right) \\
& \quad \left((-3750AIEIG - 1500EIkL - 80AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) - \right. \\
& \quad \quad \left. (-1200EIkL - 208AGkL^3) (-750EIkL - 25AGkL^3) \right) \left. \right) - \\
& \quad \left((-18000AIEIGk^2L^4 - 240A^2G^2k^2L^6) \left((-2400EIkL - 704AGkL^3) (-3000EIkL - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 160AGkL^3) + (-9000EIkL - 1620AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) \right) - \right. \\
& \quad \left((-1200EIkL - 208AGkL^3) (-3000EIkL - 160AGkL^3) + \right. \\
& \quad \quad \left. (-6000EIkL - 560AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) \right) \\
& \quad \left((-3750AIEIG - 3000EIkL - 640AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) - \right. \\
& \quad \quad \left. (-2400EIkL - 704AGkL^3) (-750EIkL - 55AGkL^3) \right) \left. \right) \\
& \quad \left((-18000AIEIGk^2L^4 - 240A^2G^2k^2L^6) \left((-1500EIkL - 140AGkL^3) (-600EIkL - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 56AGkL^3) - (-1800EIkL - 432AGkL^3) (-750EIkL - 25AGkL^3) \right) - \right. \\
& \quad \left((-2250EIkL - 405AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) - \right. \\
& \quad \quad \left. (-1800EIkL - 432AGkL^3) (-750EIkL - 55AGkL^3) \right) \\
& \quad \left((-3750AIEIG - 1500EIkL - 80AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) - \right. \\
& \quad \quad \left. (-1200EIkL - 208AGkL^3) (-750EIkL - 25AGkL^3) \right) \left. \right) \\
& \quad \left(\left(-162000000000A^2EI^3G^2k^3L^5 - 172800000000A^3EI^2G^3k^3L^7 - 201600000A^4EI^4G^4k^3L^9 \right) \right. \\
& \quad \left((-3000EIkL - 100AGkL^3) (-600EIkL - 56AGkL^3) - \right. \\
& \quad \quad \left. (-1200EIkL - 208AGkL^3) (-15000AIEIG - 3000EIkL - 40AGkL^3) \right) \\
& \quad \left((-600EIkL - 56AGkL^3) (1800EIkL^2q + 344AGkL^4q) - \right. \\
& \quad \quad \left. (-750EIkL - 55AGkL^3) (1500EIkL^2q + 375AGkL^4q) \right) + (-18000AIEIGk^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-3000 EI k L - 160 AG k L^3) + (-9000 EI k L - 2160 AG k L^3) (-600 EI k L - \\
& 56 AG k L^3) - (-1200 EI k L - 208 AG k L^3) (-3000 EI k L - 160 AG k L^3) + \\
& (-6000 EI k L - 560 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) \\
& ((-3000 EI k L - 880 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-3000 A EI G - 3000 EI k L - 1000 AG k L^3) (-750 EI k L - 55 AG k L^3)) \\
& ((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-1500 EI k L - 140 AG k L^3) (-600 EI k L - \\
& 56 AG k L^3) - (-1800 EI k L - 432 AG k L^3) (-750 EI k L - 25 AG k L^3)) - \\
& ((-2250 EI k L - 405 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-1800 EI k L - 432 AG k L^3) (-750 EI k L - 55 AG k L^3)) \\
& ((-3750 A EI G - 1500 EI k L - 80 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-1200 EI k L - 208 AG k L^3) (-750 EI k L - 25 AG k L^3))) - \\
& ((-162000000000 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 - 172800000000 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 - 201600000 A^4 EI G^4 k^3 L^9) \\
& ((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-3000 EI k L - 280 AG k L^3) \\
& (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - (-3000 A EI G - 3000 EI k L - 1000 AG k L^3) \\
& (-15000 A EI G - 3000 EI k L - 40 AG k L^3))) - \\
& ((-3000 EI k L - 880 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-3000 A EI G - 3000 EI k L - 1000 AG k L^3) (-750 EI k L - 55 AG k L^3)) \\
& ((-3000 EI k L - 100 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-1200 EI k L - 208 AG k L^3) (-15000 A EI G - 3000 EI k L - 40 AG k L^3))) - \\
& ((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-3000 A EI G - 3000 EI k L - 1000 AG k L^3) \\
& (-3000 EI k L - 160 AG k L^3) + (-9000 EI k L - 2160 AG k L^3) (-600 EI k L - \\
& 56 AG k L^3)) - (-(-1200 EI k L - 208 AG k L^3) (-3000 EI k L - 160 AG k L^3) + \\
& (-6000 EI k L - 560 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3)) \\
& ((-3000 EI k L - 880 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-3000 A EI G - 3000 EI k L - 1000 AG k L^3) (-750 EI k L - 55 AG k L^3))) \\
& ((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-3000 EI k L - 160 AG k L^3) \\
& (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - (-1800 EI k L - 432 AG k L^3) \\
& (-15000 A EI G - 3000 EI k L - 40 AG k L^3)) - ((-2250 EI k L - 405 AG k L^3) \\
& (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - (-1800 EI k L - 432 AG k L^3) (-750 EI k L - \\
& 55 AG k L^3)) ((-3000 EI k L - 100 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-1200 EI k L - 208 AG k L^3) (-15000 A EI G - 3000 EI k L - 40 AG k L^3)))) \\
& ((-162000000000 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 - 172800000000 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 - 201600000 A^4 EI G^4 k^3 L^9) \\
& ((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-1500 EI k L - 200 AG k L^3) (-600 EI k L - \\
& 56 AG k L^3) - (-2400 EI k L - 704 AG k L^3) (-750 EI k L - 25 AG k L^3)) - \\
& ((-3750 A EI G - 3000 EI k L - 640 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-2400 EI k L - 704 AG k L^3) (-750 EI k L - 55 AG k L^3)) \\
& ((-3750 A EI G - 1500 EI k L - 80 AG k L^3) (-600 EI k L - 56 AG k L^3) - \\
& (-1200 EI k L - 208 AG k L^3) (-750 EI k L - 25 AG k L^3))) - \\
& ((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-2400 EI k L - 704 AG k L^3) (-3000 EI k L -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 160 A G k L^3) + (-9000 E I k L - 1620 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3)) - \\
 & (- (-1200 E I k L - 208 A G k L^3) (-3000 E I k L - 160 A G k L^3) + \\
 & (-6000 E I k L - 560 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3)) \\
 & ((-3750 A E I G - 3000 E I k L - 640 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - \\
 & (-2400 E I k L - 704 A G k L^3) (-750 E I k L - 55 A G k L^3))) \\
 & ((-18000 A E I G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-1500 E I k L - 140 A G k L^3) (-600 E I k L - \\
 & 56 A G k L^3) - (-1800 E I k L - 432 A G k L^3) (-750 E I k L - 25 A G k L^3)) - \\
 & ((-2250 E I k L - 405 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - \\
 & (-1800 E I k L - 432 A G k L^3) (-750 E I k L - 55 A G k L^3)) \\
 & ((-3750 A E I G - 1500 E I k L - 80 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - \\
 & (-1200 E I k L - 208 A G k L^3) (-750 E I k L - 25 A G k L^3))))),
 \end{aligned}$$

$$R2 \rightarrow (k L^2 (11390625000000 A^4 E I^5 G^4 q + 5695312500000 A^3 E I^5$$

G^3

k

L

$q + 217687500000000$

A^5

$E I^4$

G^5

L^2

$q + 94921875000000$

A^2

$E I^5$

G^2

k^2

L^2

$q + 180225000000000$

A^4

$E I^4$

G^4

k

L^3

$q + 6454687500000$

A

$E I^5$

G

k^3

L^3

$q + 36918281250000$

A^3

$E I^4$

G^3

k^2

L^4
 $q + 151\,875\,000\,000$
 EI^5
 k^4
 L^4
 $q + 4\,476\,093\,750\,000$
 A^5
 EI^3
 G^5
 k
 L^5
 $q + 2\,821\,078\,125\,000$
 A^2
 EI^4
 G^2
 k^3
 L^5
 $q + 1\,449\,225\,000\,000$
 A^4
 EI^3
 G^4
 k^2
 L^6
 $q + 71\,381\,250\,000$
 A
 EI^4
 G
 k^4
 L^6
 $q + 142\,990\,312\,500$
 A^3
 EI^3
 G^3
 $k^3 L^7$
 $q + 9\,557\,437\,500$
 $A^5 EI^2$
 $G^5 k^2 L^8$
 $q + 4\,266\,000\,000$
 $A^2 EI^3$
 $G^2 k^4 L^8$
 $q + 1\,777\,893\,750$
 $A^4 EI^2$
 $G^4 k^3 L^9$
 $q + 73\,395\,000$
 $A^3 EI^2$

$$\begin{aligned}
& G^3 k^4 L^{10} \\
& q + 5\,729\,625 \\
& A^5 EI G^5 k^3 L^{11} \\
& q + 440\,100 A^4 \\
& EI G^4 k^4 L^{12} \\
& q + 821 A^5 G^5 \\
& k^4 L^{14} q) / \\
(20 (& 118\,652\,343\,750\,000 A^5 EI^5 G^5 + 355\,957\,031\,250\,000 A^4 EI^5 G^4 k L + \\
& 166\,113\,281\,250\,000 \\
& A^3 EI^5 G^3 k^2 \\
& L^2 + 71\,191\,406\,250\,000 \\
& A^5 EI^4 G^5 k \\
& L^3 + 26\,578\,125\,000\,000 \\
& A^2 EI^5 G^2 k^3 \\
& L^3 + 53\,599\,218\,750\,000 \\
& A^4 EI^4 G^4 k^2 \\
& L^4 + 1\,708\,593\,750\,000 \\
& A EI^5 G k^4 \\
& L^4 + 10\,403\,437\,500\,000 \\
& A^3 EI^4 G^3 k^3 \\
& L^5 + 37\,968\,750\,000 EI^5 \\
& k^5 L^5 + 1\,165\,429\,687\,500 \\
& A^5 EI^3 G^5 k^2 \\
& L^6 + 744\,187\,500\,000 \\
& A^2 EI^4 G^2 k^4 \\
& L^6 + 386\,268\,750\,000 \\
& A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + \\
& 17\,718\,750\,000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36\,298\,125\,000 A^3 EI^3 \\
& G^3 k^4 L^8 + 2\,543\,625\,000 \\
& A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435\,375\,000 A^4 EI^2 \\
& G^4 k^4 L^{10} + 17\,100\,000 \\
& A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + \\
& 1\,335\,375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99\,375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + \\
& 181 A^5 G^5 k^5 L^{15})), \\
R3 \rightarrow (& k (498\,339\,843\,750\,000 A^4 EI^5 G^4 L^2 q + 303\,750\,000\,000\,000 A^3 EI^5 G^3 \\
& k L^3 q + 70\,479\,492\,187\,500 \\
& A^5 EI^4 G^5 L^4 q + \\
& 52\,207\,031\,250\,000 A^2 EI^5 G^2 k^2 L^4 q + 98\,085\,937\,500\,000 \\
& A^4 EI^4 G^4 k L^5 q + \\
& 341\,718\,750\,000 A EI^5 G k^3 L^5 q + 20\,797\,382\,812\,500 \\
& A^3 EI^4 G^3 k^2 L^6 q + \\
& 75\,937\,500\,000 EI^5 k^4 L^6 q + 2\,643\,468\,750\,000 \\
& A^5 EI^3 G^5 k L^7 q +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1\,507\,359\,375\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^3\,L^7\,q + 842\,526\,562\,500 \\
& \quad A^4\,EI^3\,G^4\,k^2\,L^8\,q + \\
& 35\,690\,625\,000\,A\,EI^4\,G\,k^4\,L^8\,q + 76\,140\,000\,000 \\
& \quad A^3\,EI^3\,G^3\,k^3\,L^9\,q + \\
& 5\,714\,859\,375\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^2\,L^{10}\,q + 2\,097\,562\,500 \\
& \quad A^2\,EI^3\,G^2\,k^4\,L^{10}\,q + \\
& 912\,093\,750\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^3\,L^{11}\,q + 34\,571\,250\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^4\,L^{12}\,q + \\
& 2\,677\,500\,A^5\,EI\,G^5\,k^3\,L^{13}\,q + \\
& 196\,425\,A^4\,EI\,G^4\,k^4\,L^{14}\,q + \\
& 349\,A^5\,G^5\,k^4\,L^{16}\,q) / \\
(10 & (118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,L + \\
& 166\,113\,281\,250\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L^2 + \\
& 71\,191\,406\,250\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^3 + \\
& 26\,578\,125\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^3 + \\
& 53\,599\,218\,750\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^4 + \\
& 1\,708\,593\,750\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^4 + \\
& 10\,403\,437\,500\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^5 + \\
& 37\,968\,750\,000\,EI^5\,k^5\,L^5 + \\
& 1\,165\,429\,687\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^6 + \\
& 744\,187\,500\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^6 + \\
& 386\,268\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^7 + \\
& 17\,718\,750\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^7 + \\
& 36\,298\,125\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^8 + \\
& 2\,543\,625\,000\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + \\
& 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + \\
& 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + \\
& 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + \\
& 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + \\
& 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15})) , \\
R4 \rightarrow & (L^2 (759\,375\,000\,000\,000\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,q + 560\,039\,062\,500\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L\,q + \\
& 72\,140\,625\,000\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^2\,q + \\
& 102\,515\,625\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^2\,q + \\
& 177\,662\,109\,375\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^3\,q + \\
& 6\,834\,375\,000\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^3\,q + \\
& 40\,740\,468\,750\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^4\,q + \\
& 151\,875\,000\,000\,EI^5\,k^5\,L^4\,q + \\
& 4\,168\,335\,937\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^5\,q + \\
& 3\,014\,718\,750\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^5\,q + \\
& 1\,571\,906\,250\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^6\,q + \\
& 71\,381\,250\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^6\,q + \\
& 149\,090\,625\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^7\,q + \\
& 10\,845\,562\,500\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^8\,q + \\
& 4\,144\,500\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^8\,q +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1\,799\,887\,500\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^9\,q + \\
& 68\,130\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{10}\,q + \\
& 5\,658\,750\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{11}\,q + \\
& 396\,900\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{12}\,q + \\
& 731\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{14}\,q) \Big/ \\
(20 & (118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,L + \\
& 166\,113\,281\,250\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L^2 + \\
& 71\,191\,406\,250\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^3 + \\
& 26\,578\,125\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^3 + \\
& 53\,599\,218\,750\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^4 + \\
& 1\,708\,593\,750\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^4 + \\
& 10\,403\,437\,500\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^5 + \\
& 37\,968\,750\,000\,EI^5\,k^5\,L^5 + \\
& 1\,165\,429\,687\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^6 + \\
& 744\,187\,500\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^6 + \\
& 386\,268\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^7 + \\
& 17\,718\,750\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^7 + \\
& 36\,298\,125\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^8 + \\
& 2\,543\,625\,000\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + \\
& 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + \\
& 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + \\
& 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + \\
& 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + \\
& 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15})) , \\
R5 \rightarrow & (L^2 (213\,574\,218\,750\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,q + 189\,843\,750\,000\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L\,q + \\
& 10\,362\,304\,687\,500\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^2\,q + \\
& 39\,867\,187\,500\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^2\,q + \\
& 56\,573\,437\,500\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^3\,q + \\
& 3\,037\,500\,000\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^3\,q + \\
& 15\,396\,328\,125\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^4\,q + \\
& 75\,937\,500\,000\,EI^5\,k^5\,L^4\,q + \\
& 832\,570\,312\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^5\,q + \\
& 1\,326\,375\,000\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^5\,q + \\
& 507\,768\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^6\,q + \\
& 35\,690\,625\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^6\,q + \\
& 62\,243\,437\,500\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^7\,q + \\
& 2\,889\,843\,750\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^8\,q + \\
& 2\,057\,062\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^8\,q + \\
& 725\,062\,500\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^9\,q + \\
& 34\,166\,250\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{10}\,q + \\
& 2\,206\,875\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{11}\,q + \\
& 199\,125\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{12}\,q + \\
& 361\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{14}\,q) \Big/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (10 (118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,L + \\
& 166\,113\,281\,250\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L^2 + \\
& 71\,191\,406\,250\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^3 + \\
& 26\,578\,125\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^3 + \\
& 53\,599\,218\,750\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^4 + \\
& 1\,708\,593\,750\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^4 + \\
& 10\,403\,437\,500\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^5 + \\
& 37\,968\,750\,000\,EI^5\,k^5\,L^5 + \\
& 1\,165\,429\,687\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^6 + \\
& 744\,187\,500\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^6 + \\
& 386\,268\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^7 + \\
& 17\,718\,750\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^7 + \\
& 36\,298\,125\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^8 + \\
& 2\,543\,625\,000\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + \\
& 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + \\
& 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + \\
& 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + \\
& 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + \\
& 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15}))\}
\end{aligned}$$

In[]:=

$$\begin{aligned}
R1 = - & \left(\left(\left(-162\,000\,000\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 17\,280\,000\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 201\,600\,000\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 \right) \right. \right. \\
& \left(\left(-18\,000\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 240\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6 \right) \left(\left(-1500\,EI\,k\,L - 200\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \left(-2400\,EI\,k\,L - 704\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 25\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) - \right. \\
& \left(\left(-3750\,A\,EI\,G - 3000\,EI\,k\,L - 640\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right. \\
& \left. \left(-2400\,EI\,k\,L - 704\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 55\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \\
& \left(\left(-3750\,A\,EI\,G - 1500\,EI\,k\,L - 80\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right. \\
& \left. \left(-1200\,EI\,k\,L - 208\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 25\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \left. \right) - \\
& \left(\left(-18\,000\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 240\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6 \right) \left(- \left(-2400\,EI\,k\,L - 704\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-3000\,EI\,k\,L - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 160\,A\,G\,k\,L^3 \right) + \left(-9000\,EI\,k\,L - 1620\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) - \right. \\
& \left(- \left(-1200\,EI\,k\,L - 208\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-3000\,EI\,k\,L - 160\,A\,G\,k\,L^3 \right) + \right. \\
& \left. \left(-6000\,EI\,k\,L - 560\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \\
& \left(\left(-3750\,A\,EI\,G - 3000\,EI\,k\,L - 640\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right. \\
& \left. \left(-2400\,EI\,k\,L - 704\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 55\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \left. \right) \\
& \left(\left(-18\,000\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 240\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6 \right) \left(\left(-1500\,EI\,k\,L - 140\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \left(-1800\,EI\,k\,L - 432\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 25\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) - \right. \\
& \left(\left(-2250\,EI\,k\,L - 405\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right. \\
& \left. \left(-1800\,EI\,k\,L - 432\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 55\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \\
& \left(\left(-3750\,A\,EI\,G - 1500\,EI\,k\,L - 80\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right. \\
& \left. \left(-1200\,EI\,k\,L - 208\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 25\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \left. \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((-3750 A E I G - 1500 E I k L - 80 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - \\
& (-1200 E I k L - 208 A G k L^3) (-750 E I k L - 25 A G k L^3)) - \\
& ((-18000 A E I G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-3000 A E I G - 3000 E I k L - 1000 A G k L^3) \\
& (-3000 E I k L - 160 A G k L^3) + (-9000 E I k L - 2160 A G k L^3) \\
& (-600 E I k L - 56 A G k L^3)) - (-(-1200 E I k L - 208 A G k L^3) (-3000 E I k L - \\
& 160 A G k L^3) + (-6000 E I k L - 560 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3)) \\
& ((-3000 E I k L - 880 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-3000 A E I G - \\
& 3000 E I k L - 1000 A G k L^3) (-750 E I k L - 55 A G k L^3)) \\
& ((-18000 A E I G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-1500 E I k L - 140 A G k L^3) (-600 E I k L - \\
& 56 A G k L^3) - (-1800 E I k L - 432 A G k L^3) (-750 E I k L - 25 A G k L^3)) - \\
& ((-2250 E I k L - 405 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-1800 E I k L - 432 A G k L^3) \\
& (-750 E I k L - 55 A G k L^3)) ((-3750 A E I G - 1500 E I k L - 80 A G k L^3) (-600 E I k L - \\
& 56 A G k L^3) - (-1200 E I k L - 208 A G k L^3) (-750 E I k L - 25 A G k L^3))) - \\
& ((-162000000000 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 17280000000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 201600000 A^4 E I G^4 k^3 L^9) \\
& ((-18000 A E I G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) \\
& ((-3000 E I k L - 280 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-3000 A E I G - \\
& 3000 E I k L - 1000 A G k L^3) (-15000 A E I G - 3000 E I k L - 40 A G k L^3)) - \\
& ((-3000 E I k L - 880 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-3000 A E I G - \\
& 3000 E I k L - 1000 A G k L^3) (-750 E I k L - 55 A G k L^3)) \\
& ((-3000 E I k L - 100 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-1200 E I k L - \\
& 208 A G k L^3) (-15000 A E I G - 3000 E I k L - 40 A G k L^3))) - \\
& ((-18000 A E I G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-3000 A E I G - 3000 E I k L - 1000 A G k L^3) \\
& (-3000 E I k L - 160 A G k L^3) + (-9000 E I k L - 2160 A G k L^3) \\
& (-600 E I k L - 56 A G k L^3)) - (-(-1200 E I k L - 208 A G k L^3) (-3000 E I k L - \\
& 160 A G k L^3) + (-6000 E I k L - 560 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3)) \\
& ((-3000 E I k L - 880 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-3000 A E I G - \\
& 3000 E I k L - 1000 A G k L^3) (-750 E I k L - 55 A G k L^3)) \\
& ((-18000 A E I G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-3000 E I k L - 160 A G k L^3) \\
& (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-1800 E I k L - 432 A G k L^3) \\
& (-15000 A E I G - 3000 E I k L - 40 A G k L^3)) - ((-2250 E I k L - 405 A G k L^3) (-600 \\
& E I k L - 56 A G k L^3) - (-1800 E I k L - 432 A G k L^3) (-750 E I k L - 55 A G k L^3)) \\
& ((-3000 E I k L - 100 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - (-1200 E I k L - \\
& 208 A G k L^3) (-15000 A E I G - 3000 E I k L - 40 A G k L^3)))) \\
& ((-162000000000 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 17280000000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 201600000 A^4 E I G^4 k^3 L^9) \\
& ((-18000 A E I G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-1500 E I k L - 200 A G k L^3) (-600 E I k L - \\
& 56 A G k L^3) - (-2400 E I k L - 704 A G k L^3) (-750 E I k L - 25 A G k L^3)) - \\
& ((-3750 A E I G - 3000 E I k L - 640 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) - \\
& (-2400 E I k L - 704 A G k L^3) (-750 E I k L - 55 A G k L^3)) \\
& ((-3750 A E I G - 1500 E I k L - 80 A G k L^3) (-600 E I k L - 56 A G k L^3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((-1200 EI k L - 208 A G k L^3) (-750 EI k L - 25 A G k L^3) \right) - \\
& \left((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) (-2400 EI k L - 704 A G k L^3) (-3000 EI k L - \right. \\
& \quad \left. 160 A G k L^3) + (-9000 EI k L - 1620 A G k L^3) (-600 EI k L - 56 A G k L^3) \right) - \\
& \left((-1200 EI k L - 208 A G k L^3) (-3000 EI k L - 160 A G k L^3) + \right. \\
& \quad \left. (-6000 EI k L - 560 A G k L^3) (-600 EI k L - 56 A G k L^3) \right) \\
& \left((-3750 A EI G - 3000 EI k L - 640 A G k L^3) (-600 EI k L - 56 A G k L^3) - \right. \\
& \quad \left. (-2400 EI k L - 704 A G k L^3) (-750 EI k L - 55 A G k L^3) \right) \\
& \left((-18000 A EI G k^2 L^4 - 240 A^2 G^2 k^2 L^6) \left((-1500 EI k L - 140 A G k L^3) (-600 EI k L - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 56 A G k L^3) - (-1800 EI k L - 432 A G k L^3) (-750 EI k L - 25 A G k L^3) \right) - \right. \\
& \quad \left((-2250 EI k L - 405 A G k L^3) (-600 EI k L - 56 A G k L^3) - (-1800 EI k L - 432 A G k L^3) \right. \\
& \quad \left. (-750 EI k L - 55 A G k L^3) \right) \left((-3750 A EI G - 1500 EI k L - 80 A G k L^3) (-600 EI k L - \right. \\
& \quad \left. 56 A G k L^3) - (-1200 EI k L - 208 A G k L^3) (-750 EI k L - 25 A G k L^3) \right) \left. \right) \\
R_2 = & \left(k L^2 \left(113906250000000 A^4 EI^5 G^4 q + 569531250000000 A^3 EI^5 G^3 k L q + \right. \right. \\
& 217687500000000 A^5 EI^4 G^5 L^2 q + 94921875000000 A^2 EI^5 G^2 k^2 L^2 q + \\
& 180225000000000 A^4 EI^4 G^4 k L^3 q + 645468750000 A EI^5 G k^3 L^3 q + \\
& 36918281250000 A^3 EI^4 G^3 k^2 L^4 q + 151875000000 EI^5 k^4 L^4 q + 447609375000 A^5 EI^3 G^5 k L^5 q + \\
& 2821078125000 A^2 EI^4 G^2 k^3 L^5 q + 144922500000 A^4 EI^3 G^4 k^2 L^6 q + \\
& 71381250000 A EI^4 G k^4 L^6 q + 142990312500 A^3 EI^3 G^3 k^3 L^7 q + 9557437500 A^5 EI^2 G^5 k^2 L^8 q + \\
& 426600000 A^2 EI^3 G^2 k^4 L^8 q + 1777893750 A^4 EI^2 G^4 k^3 L^9 q + 73395000 A^3 EI^2 G^3 k^4 L^{10} q + \\
& \left. \left. 5729625 A^5 EI G^5 k^3 L^{11} q + 440100 A^4 EI G^4 k^4 L^{12} q + 821 A^5 G^5 k^4 L^{14} q \right) \right) / \\
& \left(20 \left(118652343750000 A^5 EI^5 G^5 + 355957031250000 A^4 EI^5 G^4 k L + \right. \right. \\
& 166113281250000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + 71191406250000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + \\
& 26578125000000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + 53599218750000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + \\
& 1708593750000 A EI^5 G k^4 L^4 + 1040343750000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + 37968750000 EI^5 k^5 L^5 + \\
& 1165429687500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + 744187500000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + 386268750000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + \\
& 17718750000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36298125000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + 2543625000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + \\
& 1029375000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435375000 A^4 EI^2 G^4 k^4 L^{10} + 17100000 A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + \\
& \left. \left. 1335375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15} \right) \right) \\
R_3 = & \left(k \left(498339843750000 A^4 EI^5 G^4 L^2 q + 303750000000000 A^3 EI^5 G^3 k L^3 q + \right. \right. \\
& 70479492187500 A^5 EI^4 G^5 L^4 q + 52207031250000 A^2 EI^5 G^2 k^2 L^4 q + \\
& 98085937500000 A^4 EI^4 G^4 k L^5 q + 341718750000 A EI^5 G k^3 L^5 q + \\
& 20797382812500 A^3 EI^4 G^3 k^2 L^6 q + 75937500000 EI^5 k^4 L^6 q + 264346875000 A^5 EI^3 G^5 k L^7 q + \\
& 1507359375000 A^2 EI^4 G^2 k^3 L^7 q + 842526562500 A^4 EI^3 G^4 k^2 L^8 q + \\
& 35690625000 A EI^4 G k^4 L^8 q + 76140000000 A^3 EI^3 G^3 k^3 L^9 q + 5714859375 A^5 EI^2 G^5 k^2 L^{10} q + \\
& 2097562500 A^2 EI^3 G^2 k^4 L^{10} q + 912093750 A^4 EI^2 G^4 k^3 L^{11} q + 34571250 A^3 EI^2 G^3 k^4 L^{12} q + \\
& \left. \left. 2677500 A^5 EI G^5 k^3 L^{13} q + 196425 A^4 EI G^4 k^4 L^{14} q + 349 A^5 G^5 k^4 L^{16} q \right) \right) / \\
& \left(10 \left(118652343750000 A^5 EI^5 G^5 + 355957031250000 A^4 EI^5 G^4 k L + \right. \right. \\
& 166113281250000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + 71191406250000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + \\
& 26578125000000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + 53599218750000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + \\
& 1708593750000 A EI^5 G k^4 L^4 + 1040343750000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + 37968750000 EI^5 k^5 L^5 + \\
& 1165429687500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + 744187500000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + 386268750000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + \\
& \left. \left. 17718750000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36298125000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + 2543625000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + \\
& 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15}) \\
R4 = & \left(L^2 \left(759\,375\,000\,000\,000\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,q + 560\,039\,062\,500\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L\,q + \right. \right. \\
& 72\,140\,625\,000\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^2\,q + 102\,515\,625\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^2\,q + \\
& 177\,662\,109\,375\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^3\,q + 6\,834\,375\,000\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^3\,q + \\
& 40\,740\,468\,750\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^4\,q + 151\,875\,000\,000\,EI^5\,k^5\,L^4\,q + 4\,168\,335\,937\,500\,A^5 \\
& EI^3\,G^5\,k^2\,L^5\,q + 3\,014\,718\,750\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^5\,q + 1\,571\,906\,250\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^6\,q + \\
& 71\,381\,250\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^6\,q + 149\,090\,625\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^7\,q + 10\,845\,562\,500\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^8\,q + \\
& 4\,144\,500\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^8\,q + 1\,799\,887\,500\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^9\,q + 68\,130\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{10}\,q + \\
& \left. \left. 5\,658\,750\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{11}\,q + 396\,900\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{12}\,q + 731\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{14}\,q \right) \right) / \\
(20 & \left(118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,L + \right. \\
& 166\,113\,281\,250\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L^2 + 71\,191\,406\,250\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^3 + \\
& 26\,578\,125\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^3 + 53\,599\,218\,750\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^4 + \\
& 1\,708\,593\,750\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^4 + 10\,403\,437\,500\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^5 + 37\,968\,750\,000\,EI^5\,k^5\,L^5 + \\
& 1\,165\,429\,687\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^6 + 744\,187\,500\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^6 + 386\,268\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^7 + \\
& 17\,718\,750\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^7 + 36\,298\,125\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^8 + 2\,543\,625\,000\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + \\
& \left. \left. 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15} \right) \right) \\
R5 = & \left(L^2 \left(213\,574\,218\,750\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,q + 189\,843\,750\,000\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L\,q + \right. \right. \\
& 10\,362\,304\,687\,500\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^2\,q + 39\,867\,187\,500\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^2\,q + \\
& 56\,573\,437\,500\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^3\,q + 3\,037\,500\,000\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^3\,q + \\
& 15\,396\,328\,125\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^4\,q + 75\,937\,500\,000\,EI^5\,k^5\,L^4\,q + 832\,570\,312\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^5\,q + \\
& 1\,326\,375\,000\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^5\,q + 507\,768\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^6\,q + \\
& 35\,690\,625\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^6\,q + 62\,243\,437\,500\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^7\,q + 2\,889\,843\,750\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^8\,q + \\
& 2\,057\,062\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^8\,q + 725\,062\,500\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^9\,q + 34\,166\,250\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{10}\,q + \\
& \left. \left. 2\,206\,875\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{11}\,q + 199\,125\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{12}\,q + 361\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{14}\,q \right) \right) / \\
(10 & \left(118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,L + \right. \\
& 166\,113\,281\,250\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L^2 + 71\,191\,406\,250\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^3 + \\
& 26\,578\,125\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^3 + 53\,599\,218\,750\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^4 + \\
& 1\,708\,593\,750\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^4 + 10\,403\,437\,500\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^5 + 37\,968\,750\,000\,EI^5\,k^5\,L^5 + \\
& 1\,165\,429\,687\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^6 + 744\,187\,500\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^6 + 386\,268\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^7 + \\
& 17\,718\,750\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^7 + 36\,298\,125\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^8 + 2\,543\,625\,000\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + \\
& \left. \left. 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]= & - \left(\left(- \left(-162\,000\,000\,000\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 17\,280\,000\,000\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 201\,600\,000\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9 \right) \right. \right. \\
& \left(-18\,000\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 240\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6 \right) \left(-1500\,EI\,k\,L - 200\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - \right. \\
& \left. \left. 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \left(-2400\,EI\,k\,L - 704\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-750\,EI\,k\,L - 25\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) - \\
& \left(\left(-3750\,A\,EI\,G - 3000\,EI\,k\,L - 640\,A\,G\,k\,L^3 \right) \left(-600\,EI\,k\,L - 56\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\text{Out}[*]= \left(k L^2 \left(1139062500000000 A^4 EI^5 G^4 q + 569531250000000 A^3 EI^5 G^3 k L q + \right. \right. \\ \left. \left. 217687500000000 A^5 EI^4 G^5 L^2 q + 949218750000000 A^2 EI^5 G^2 k^2 L^2 q + \right. \right. \\ \left. \left. 180225000000000 A^4 EI^4 G^4 k L^3 q + 645468750000000 A EI^5 G k^3 L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 369182812500000 A^3 EI^4 G^3 k^2 L^4 q + 151875000000 EI^5 k^4 L^4 q + 4476093750000 A^5 EI^3 G^5 k L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 2821078125000 A^2 EI^4 G^2 k^3 L^5 q + 1449225000000 A^4 EI^3 G^4 k^2 L^6 q + \right. \right. \\ \left. \left. 71381250000 A EI^4 G k^4 L^6 q + 142990312500 A^3 EI^3 G^3 k^3 L^7 q + 9557437500 A^5 EI^2 G^5 k^2 L^8 q + \right. \right. \\ \left. \left. 4266000000 A^2 EI^3 G^2 k^4 L^8 q + 1777893750 A^4 EI^2 G^4 k^3 L^9 q + 73395000 A^3 EI^2 G^3 k^4 L^{10} q + \right. \right. \\ \left. \left. 5729625 A^5 EI G^5 k^3 L^{11} q + 440100 A^4 EI G^4 k^4 L^{12} q + 821 A^5 G^5 k^4 L^{14} q \right) \right) /$$

$$\left(20 \left(118652343750000 A^5 EI^5 G^5 + 355957031250000 A^4 EI^5 G^4 k L + \right. \right. \\ \left. \left. 166113281250000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + 71191406250000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + \right. \right. \\ \left. \left. 26578125000000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + 53599218750000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 1708593750000 A EI^5 G k^4 L^4 + 1040343750000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + \right. \right. \\ \left. \left. 37968750000 EI^5 k^5 L^5 + 1165429687500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + 744187500000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 386268750000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + 17718750000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36298125000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 2543625000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + 1029375000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435375000 A^4 EI^2 G^4 k^4 L^{10} + \right. \right. \\ \left. \left. 17100000 A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + 1335375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15} \right) \right)$$

$$\text{Out}[*]= \left(k \left(498339843750000 A^4 EI^5 G^4 L^2 q + 303750000000000 A^3 EI^5 G^3 k L^3 q + \right. \right. \\ \left. \left. 70479492187500 A^5 EI^4 G^5 L^4 q + 52207031250000 A^2 EI^5 G^2 k^2 L^4 q + \right. \right. \\ \left. \left. 98085937500000 A^4 EI^4 G^4 k L^5 q + 3417187500000 A EI^5 G k^3 L^5 q + \right. \right. \\ \left. \left. 20797382812500 A^3 EI^4 G^3 k^2 L^6 q + 75937500000 EI^5 k^4 L^6 q + 2643468750000 A^5 EI^3 G^5 k L^7 q + \right. \right. \\ \left. \left. 1507359375000 A^2 EI^4 G^2 k^3 L^7 q + 842526562500 A^4 EI^3 G^4 k^2 L^8 q + \right. \right. \\ \left. \left. 35690625000 A EI^4 G k^4 L^8 q + 76140000000 A^3 EI^3 G^3 k^3 L^9 q + 5714859375 A^5 EI^2 G^5 k^2 L^{10} q + \right. \right. \\ \left. \left. 2097562500 A^2 EI^3 G^2 k^4 L^{10} q + 912093750 A^4 EI^2 G^4 k^3 L^{11} q + 34571250 A^3 EI^2 G^3 k^4 L^{12} q + \right. \right. \\ \left. \left. 2677500 A^5 EI G^5 k^3 L^{13} q + 196425 A^4 EI G^4 k^4 L^{14} q + 349 A^5 G^5 k^4 L^{16} q \right) \right) /$$

$$\left(10 \left(118652343750000 A^5 EI^5 G^5 + 355957031250000 A^4 EI^5 G^4 k L + \right. \right. \\ \left. \left. 166113281250000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + 71191406250000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + \right. \right. \\ \left. \left. 26578125000000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + 53599218750000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + \right. \right. \\ \left. \left. 1708593750000 A EI^5 G k^4 L^4 + 1040343750000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + \right. \right. \\ \left. \left. 37968750000 EI^5 k^5 L^5 + 1165429687500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + 744187500000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 386268750000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + 17718750000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36298125000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 2543625000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + 1029375000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435375000 A^4 EI^2 G^4 k^4 L^{10} + \right. \right. \\ \left. \left. 17100000 A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + 1335375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15} \right) \right)$$


```

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.80 (*m*)
H = 1.20 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 10 (*m*)
q = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
v = 0.35
G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
A = B * H

```

Out[*]= 0.8

Out[*]= 1.2

Out[*]= 10 000 000

Out[*]= 2.17079×10^{10}

Out[*]= 0.1152

Out[*]= $8. \times 10^6$

Out[*]= 10

Out[*]= 100

Out[*]= 2.50076×10^9

Out[*]= 0.35

Out[*]= 8.03998×10^9

Out[*]= 0.96

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

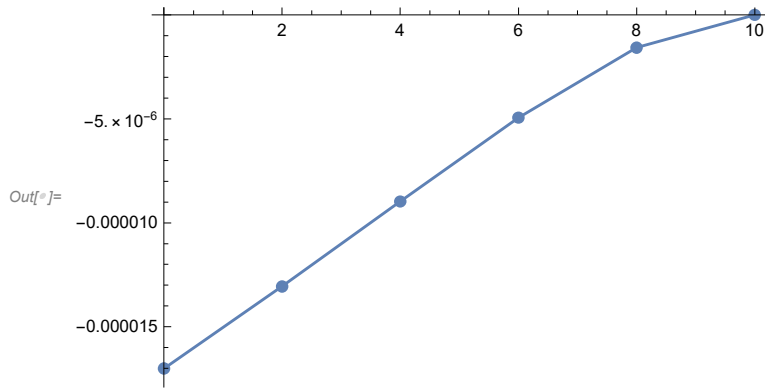
```

g9 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/5, -R2 / k}, {2 L/5, -R3 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {3 L/5, -R4 / k}, {4 L/5, -R5 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [origen de ejes [rango de rep... [todo]

g10 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/5, -R2 / k}, {2 L/5, -R3 / k}, {3 L/5, -R4 / k}, {4 L/5, -R5 / k},
  representación de lista
  {L, 0}}, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [estilo de repr... [tamaño de punto [origen de ejes [rango de rep... [todo]

Show[
  muestra
  g9,
  g10]

```



A.1.8. Ejemplo 8: Viga empotrada sobre apoyos elásticos con carga puntual al final del claro, aplicando la teoría de Timoshenko

(*VIGA EMPOTRADA CON 1 RESORTES Y CARGA PUNTUAL*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\text{In[*]} := \text{D} \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^L (R1 * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^L (R1 - P)^2 dx \right], R1 \right]$$

$$\text{Out[*]} := -\frac{L^3 (P - R1)}{3 EI} + \frac{L (-P + R1)}{AG}$$

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve} \left[\left\{ -\frac{L^3 (P - R1)}{3 EI} + \frac{L (-P + R1)}{AG} == -\frac{R1}{k} \right\}, \{R1\} \right]$$

$$\text{Out[*]} := \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{k (3 EI L + A G L^3) P}{3 A EI G + 3 EI k L + A G k L^3} \right\} \right\}$$

$$\text{In[*]} := R1 = \frac{k (3 EI L + A G L^3) P}{3 A EI G + 3 EI k L + A G k L^3}$$

$$\text{Out[*]} := \frac{k (3 EI L + A G L^3) P}{3 A EI G + 3 EI k L + A G k L^3}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.80 (*m*)
  H = 1.20 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 10 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  v = 0.35
  G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
  A = B * H

Out[ ]:= 0.8
Out[ ]:= 1.2
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:=  $2.17079 \times 10^{10}$ 
Out[ ]:= 0.1152
Out[ ]:=  $8. \times 10^6$ 
Out[ ]:= 10
Out[ ]:= 100
Out[ ]:=  $2.50076 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.35
Out[ ]:=  $8.03998 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.96

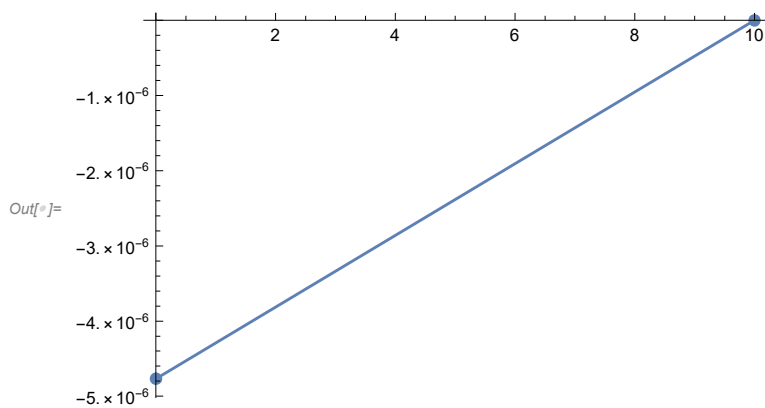
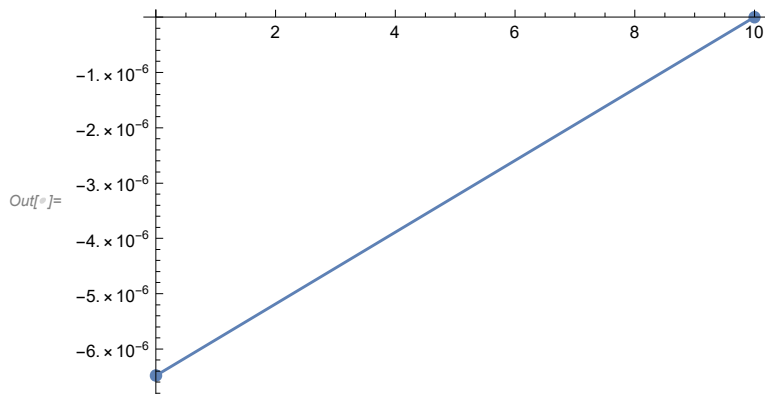
```

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```

g1 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}},
  gráfico de línea de una lista
  PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
  rango de rep... [todo] origen de ejes      rango de rep... [todo]
g2 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L, 0}}, PlotStyle → PointSize[0.02],
  representación de lista      estilo de repr... [tamaño de punto]
  AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
  origen de ejes      rango de rep... [todo]
Show[g1, g2]
muestra

```



(*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*PRIMER VIGA CON DOS RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

In[*]:=

$$D \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} (R1 * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{2}} (R1 - P)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(R1 * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^L (R1 - P + R2)^2 dx \right], R1 \right]$$

$$Out[*]= -\frac{L^3 (P - R1)}{24 EI} + \frac{L (-P + R1)}{2 AG} + \frac{L (-P + R1 + R2)}{2 AG} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{48 EI}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

In[*]:=

$$D \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{2}} (R1 * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{2}} (R1 - P)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(R1 * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^L (R1 - P + R2)^2 dx \right], R2 \right]$$

$$Out[*]= \frac{L (-P + R1 + R2)}{2 AG} + \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{48 EI}$$

In[*]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

$$\text{Solve} \left[\left\{ -\frac{L^3 (P - R1)}{24 EI} + \frac{L (-P + R1)}{2 AG} + \frac{L (-P + R1 + R2)}{2 AG} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{48 EI} == -\frac{R1}{k}, \right. \right.$$

$$\left. \frac{L (-P + R1 + R2)}{2 AG} + \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{48 EI} == -\frac{R2}{k} \right\}, \{R1, R2\}]$$

$$Out[*]= \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \frac{k (2304 A EI^2 G L + 576 EI^2 k L^2 + 768 A^2 EI G^2 L^3 + 240 A EI G k L^4 + 7 A^2 G^2 k L^6) P}{2304 A^2 EI^2 G^2 + 3456 A EI^2 G k L + 576 EI^2 k^2 L^2 + 864 A^2 EI G^2 k L^3 + 240 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}, \right. \right. \\ \left. \left. R2 \rightarrow \frac{48 A EI G k L (24 EI + 5 A G L^2) P}{2304 A^2 EI^2 G^2 + 3456 A EI^2 G k L + 576 EI^2 k^2 L^2 + 864 A^2 EI G^2 k L^3 + 240 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6} \right\} \right\}$$

In[]:=

$$R1 = \left(k \left(2304 A EI^2 G L + 576 EI^2 k L^2 + 768 A^2 EI G^2 L^3 + 240 A EI G k L^4 + 7 A^2 G^2 k L^6 \right) P \right) /$$

$$\left(2304 A^2 EI^2 G^2 + 3456 A EI^2 G k L + 576 EI^2 k^2 L^2 + 864 A^2 EI G^2 k L^3 + 240 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6 \right)$$

$$R2 = \left(48 A EI G k L \left(24 EI + 5 A G L^2 \right) P \right) /$$

$$\left(2304 A^2 EI^2 G^2 + 3456 A EI^2 G k L + 576 EI^2 k^2 L^2 + 864 A^2 EI G^2 k L^3 + 240 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6 \right)$$

$$\text{Out[]} = \frac{k \left(2304 A EI^2 G L + 576 EI^2 k L^2 + 768 A^2 EI G^2 L^3 + 240 A EI G k L^4 + 7 A^2 G^2 k L^6 \right) P}{2304 A^2 EI^2 G^2 + 3456 A EI^2 G k L + 576 EI^2 k^2 L^2 + 864 A^2 EI G^2 k L^3 + 240 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

$$\text{Out[]} = \frac{48 A EI G k L \left(24 EI + 5 A G L^2 \right) P}{2304 A^2 EI^2 G^2 + 3456 A EI^2 G k L + 576 EI^2 k^2 L^2 + 864 A^2 EI G^2 k L^3 + 240 A EI G k^2 L^4 + 7 A^2 G^2 k^2 L^6}$$

```

In[*]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.80 (*m*)
H = 1.20 (*m*)
ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 10 (*m*)
P = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
v = 0.25
G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
A = B * H

```

Out[*]= 0.8

Out[*]= 1.2

Out[*]= 10 000 000

Out[*]= 2.17079×10^{10}

Out[*]= 0.1152

Out[*]= $8. \times 10^6$

Out[*]= 10

Out[*]= 100

Out[*]= 2.50076×10^9

Out[*]= 0.25

Out[*]= 8.68318×10^9

Out[*]= 0.96

In[]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g3 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      |gráfico de línea de una lista      |origen de ejes      |rango de rep... |todo
```

```
g4 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/2, -R2 / k}, {L, 0}},
      |representación de lista
```

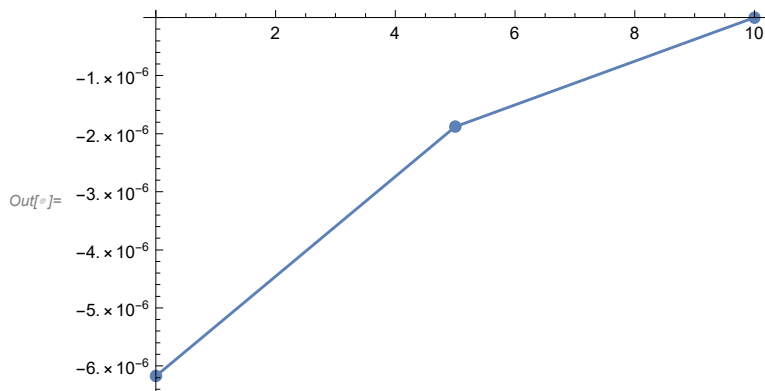
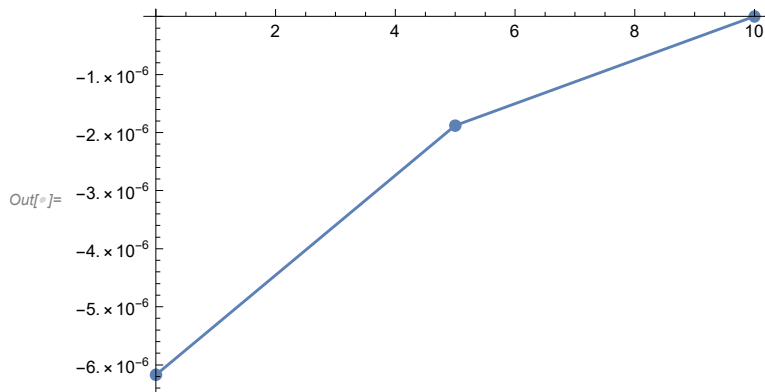
```
PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
      |estilo de repr... |tamaño de punto      |origen de ejes      |rango de rep... |todo
```

Show[

|muestra

g3,

g4]



(*VIGA EMPOTRADA CON 3 RESORTES Y CARGA PUNTUAL*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 \text{In}[*]:= & \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{3}} ((R1) * x - P(x))^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{3}} (R1 - P)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - P(x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (R1 - P + R2)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{EI}} \\
 & \left. \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - P(x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3}\right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{3}}^L (R1 - P + R2 + R3)^2 dx \right], R1] \\
 \text{Out}[*]:= & -\frac{L^3 (P - R1)}{81 \text{EI}} + \frac{L (-P + R1)}{3 \text{AG}} + \frac{L (-P + R1 + R2)}{3 \text{AG}} + \\
 & \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{162 \text{EI}} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{3 \text{AG}} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{162 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 \text{In}[*]:= & \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{3}} ((R1) * x - P(x))^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{3}} (R1 - P)^2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((R1) * x - P(x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (R1 - P + R2)^2 dx + \frac{1}{2 * \text{EI}} \\
 & \left. \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((R1) * x - P(x) + R2 \left(x - \frac{L}{3}\right) + R3 \left(x - \frac{2L}{3}\right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{3}}^L (R1 - P + R2 + R3)^2 dx \right], R2] \\
 \text{Out}[*]:= & \frac{L (-P + R1 + R2)}{3 \text{AG}} + \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{162 \text{EI}} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{3 \text{AG}} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{162 \text{EI}}
 \end{aligned}$$

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]:=} & \text{D}\left[\left[\frac{1}{2 * \text{EI}} \int_0^{\frac{L}{3}} ((\text{R1}) * \text{x} - \text{P}(\text{x}))^2 \text{dx} + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_0^{\frac{L}{3}} (\text{R1} - \text{P})^2 \text{dx} + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * \text{EI}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left((\text{R1}) * \text{x} - \text{P}(\text{x}) + \text{R2} \left(\text{x} - \frac{L}{3} \right) \right)^2 \text{dx} + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (\text{R1} - \text{P} + \text{R2})^2 \text{dx} + \frac{1}{2 * \text{EI}} \\
 & \left. \int_{\frac{2L}{3}}^L \left((\text{R1}) * \text{x} - \text{P}(\text{x}) + \text{R2} \left(\text{x} - \frac{L}{3} \right) + \text{R3} \left(\text{x} - \frac{2L}{3} \right) \right)^2 \text{dx} + \frac{1}{2 * \text{G} * \text{A}} \int_{\frac{2L}{3}}^L (\text{R1} - \text{P} + \text{R2} + \text{R3})^2 \text{dx} \right], \text{R3}]
 \end{aligned}$$

$$\text{Out[*]:=} \frac{L(-P + R1 + R2 + R3)}{3AG} + \frac{L^3(-8P + 8R1 + 5R2 + 2R3)}{162EI}$$

In[*]:=

(*SE ENCUENTRAN LA REACCIÓN*)

Solve[
resuelve

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\frac{L^3(P - R1)}{81EI} + \frac{L(-P + R1)}{3AG} + \frac{L(-P + R1 + R2)}{3AG} + \frac{L^3(-14(P - R1) + 5R2)}{162EI} + \frac{L(-P + R1 + R2 + R3)}{3AG} \right. \\
 & \frac{L^3(-38P + 38R1 + 23R2 + 8R3)}{162EI} = -\frac{R1}{k}, \frac{L(-P + R1 + R2)}{3AG} + \frac{L^3(5(-P + R1) + 2R2)}{162EI} + \\
 & \frac{L(-P + R1 + R2 + R3)}{3AG} + \frac{L^3(-23P + 23R1 + 14R2 + 5R3)}{162EI} = -\frac{R2}{k}, \\
 & \left. \frac{L(-P + R1 + R2 + R3)}{3AG} + \frac{L^3(-8P + 8R1 + 5R2 + 2R3)}{162EI} = -\frac{R3}{k} \right\}, \{R1, R2, R3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]:=} & \left\{ \left\{ R1 \rightarrow \right. \right. \\
 & \left(kL \left(2125764A^2EI^3G^2 + 944784AEI^3GkL + 708588A^3EI^2G^3L^2 + 78732EI^3k^2L^2 + 384912A^2EI^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. G^2kL^3 + 34992AEI^2Gk^2L^4 + 10044A^3EI^3G^3kL^5 + 1539A^2EI^2G^2k^2L^6 + 13A^3G^3k^2L^8 \right) P \right) / \\
 & \left(2125764A^3EI^3G^3 + 4251528A^2EI^3G^2kL + 1180980AEI^3Gk^2L^2 + 944784A^3EI^2G^3kL^3 + \right. \\
 & \left. 78732EI^3k^3L^3 + 428652A^2EI^2G^2k^2L^4 + 34992AEI^2Gk^3L^5 + \right. \\
 & \left. 10611A^3EI^3G^2k^2L^6 + 1539A^2EI^2G^2k^3L^7 + 13A^3G^3k^3L^9 \right), \\
 & R2 \rightarrow \left(162AGkL \left(8748AEI^3G + 1458EI^3kL + 2268A^2EI^2G^2L^2 + 513AEI^2GkL^3 + 8A^2EI^2G^2kL^5 \right) P \right) / \\
 & \left(2125764A^3EI^3G^3 + 4251528A^2EI^3G^2kL + 1180980AEI^3Gk^2L^2 + \right. \\
 & \left. 944784A^3EI^2G^3kL^3 + 78732EI^3k^3L^3 + 428652A^2EI^2G^2k^2L^4 + \right. \\
 & \left. 34992AEI^2Gk^3L^5 + 10611A^3EI^3G^2k^2L^6 + 1539A^2EI^2G^2k^3L^7 + 13A^3G^3k^3L^9 \right), \\
 & R3 \rightarrow \left(972A^2EI^2G^2kL \left(729EI^2 + 108AEIGL^2 - 27EI^2kL^3 - AGkL^5 \right) P \right) / \\
 & \left(2125764A^3EI^3G^3 + 4251528A^2EI^3G^2kL + 1180980AEI^3Gk^2L^2 + \right. \\
 & \left. 944784A^3EI^2G^3kL^3 + 78732EI^3k^3L^3 + 428652A^2EI^2G^2k^2L^4 + \right. \\
 & \left. 34992AEI^2Gk^3L^5 + 10611A^3EI^3G^2k^2L^6 + 1539A^2EI^2G^2k^3L^7 + 13A^3G^3k^3L^9 \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

In[*]:= R1 =

$$\begin{aligned} & \left(k L \left(2125764 A^2 E I^3 G^2 + 944784 A E I^3 G k L + 708588 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 78732 E I^3 k^2 L^2 + 384912 A^2 E I^2 G^2 k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. L^3 + 34992 A E I^2 G k^2 L^4 + 10044 A^3 E I G^3 k L^5 + 1539 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 13 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) P \right) / \\ & \left(2125764 A^3 E I^3 G^3 + 4251528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1180980 A E I^3 G k^2 L^2 + 944784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + \right. \\ & \quad \left. 78732 E I^3 k^3 L^3 + 428652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 34992 A E I^2 G k^3 L^5 + \right. \\ & \quad \left. 10611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R2 = & \left(162 A G k L \left(8748 A E I^3 G + 1458 E I^3 k L + 2268 A^2 E I^2 G^2 L^2 + 513 A E I^2 G k L^3 + 8 A^2 E I G^2 k L^5 \right) P \right) / \\ & \left(2125764 A^3 E I^3 G^3 + 4251528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1180980 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \\ & \quad \left. 944784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 78732 E I^3 k^3 L^3 + 428652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \\ & \quad \left. 34992 A E I^2 G k^3 L^5 + 10611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R3 = & \left(972 A^2 E I G^2 k L \left(729 E I^2 + 108 A E I G L^2 - 27 E I k L^3 - A G k L^5 \right) P \right) / \\ & \left(2125764 A^3 E I^3 G^3 + 4251528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1180980 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \\ & \quad \left. 944784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 78732 E I^3 k^3 L^3 + 428652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \\ & \quad \left. 34992 A E I^2 G k^3 L^5 + 10611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Out[*]:= & \left(k L \left(2125764 A^2 E I^3 G^2 + 944784 A E I^3 G k L + 708588 A^3 E I^2 G^3 L^2 + 78732 E I^3 k^2 L^2 + 384912 A^2 E I^2 G^2 k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. L^3 + 34992 A E I^2 G k^2 L^4 + 10044 A^3 E I G^3 k L^5 + 1539 A^2 E I G^2 k^2 L^6 + 13 A^3 G^3 k^2 L^8 \right) P \right) / \\ & \left(2125764 A^3 E I^3 G^3 + 4251528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1180980 A E I^3 G k^2 L^2 + 944784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + \right. \\ & \quad \left. 78732 E I^3 k^3 L^3 + 428652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + 34992 A E I^2 G k^3 L^5 + \right. \\ & \quad \left. 10611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Out[*]:= & \left(162 A G k L \left(8748 A E I^3 G + 1458 E I^3 k L + 2268 A^2 E I^2 G^2 L^2 + 513 A E I^2 G k L^3 + 8 A^2 E I G^2 k L^5 \right) P \right) / \\ & \left(2125764 A^3 E I^3 G^3 + 4251528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1180980 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \\ & \quad \left. 944784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 78732 E I^3 k^3 L^3 + 428652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \\ & \quad \left. 34992 A E I^2 G k^3 L^5 + 10611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Out[*]:= & \left(972 A^2 E I G^2 k L \left(729 E I^2 + 108 A E I G L^2 - 27 E I k L^3 - A G k L^5 \right) P \right) / \\ & \left(2125764 A^3 E I^3 G^3 + 4251528 A^2 E I^3 G^2 k L + 1180980 A E I^3 G k^2 L^2 + \right. \\ & \quad \left. 944784 A^3 E I^2 G^3 k L^3 + 78732 E I^3 k^3 L^3 + 428652 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^4 + \right. \\ & \quad \left. 34992 A E I^2 G k^3 L^5 + 10611 A^3 E I G^3 k^2 L^6 + 1539 A^2 E I G^2 k^3 L^7 + 13 A^3 G^3 k^3 L^9 \right) \end{aligned}$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.80 (*m*)
  H = 1.20 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 10 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  v = 0.35
  G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
  A = B * H

```

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10 000 000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 10

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

```
g5 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, 0}},
  [gráfico de línea de una lista
```

```
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [origen de ejes [rango de rep... [todo
```

```
g6 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/3, -R2 / k}, {2L/3, -R3 / k}, {L, 0}},
  [representación de lista
```

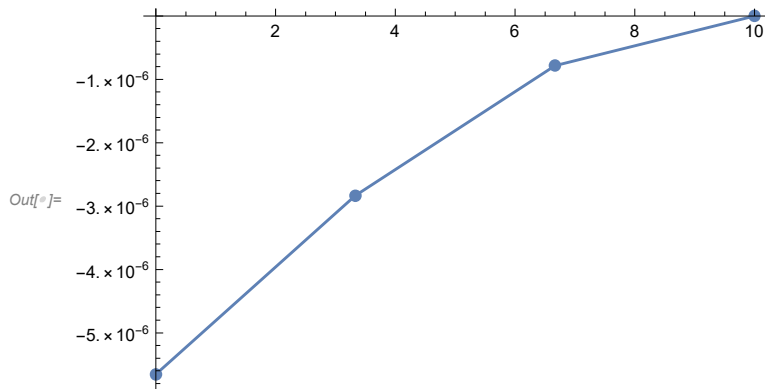
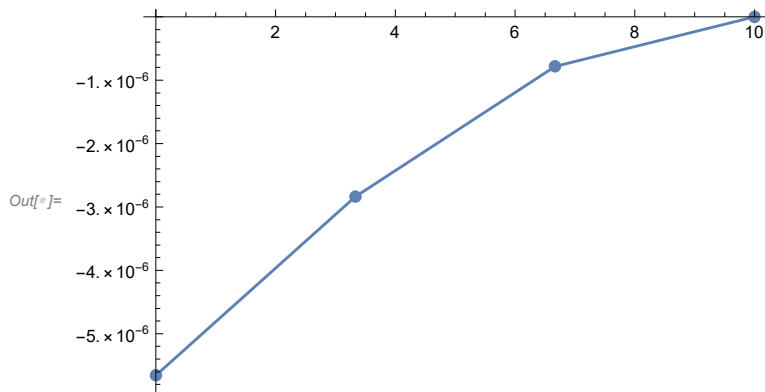
```
  PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  [estilo de repr... [tamaño de punto [origen de ejes [rango de rep... [todo
```

Show[

[muestra

g5,

g6]



(*VIGA EMPOTRADA CON 4 RESORTES Y CARGA PUNTUAL*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 \text{In[*]} := & \text{D} \left[\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{2 * EI} \left((R1) * x - P * x \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} (R1 - P)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (R1 - P + R2)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 & \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (R1 - P + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{4}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4)^2 dx \right], R1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & -\frac{L^3 (P - R1)}{192 EI} + \frac{L (-P + R1)}{4 AG} + \frac{L (-P + R1 + R2)}{4 AG} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{384 EI} + \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{4 AG} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{384 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 AG} + \\
 & \frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}
 \end{aligned}$$

In[*]:= (*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & \text{D} \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} ((R1) * x - P * x) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} (R1 - P) ^ 2 dx + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (R1 - P + R2) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 & \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (R1 - P + R2 + R3) ^ 2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right) ^ 2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{4}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4) ^ 2 dx \right], R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & \frac{L (-P + R1 + R2)}{4 A G} + \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{384 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{4 A G} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{384 EI} + \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 A G} + \frac{L^3 (-6 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}
 \end{aligned}$$

In[*]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} ((R1) * x - P * x) ^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} (R1 - P) ^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right) ^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (R1 - P + R2) ^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 & \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) ^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (R1 - P + R2 + R3) ^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right) ^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{4}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4) ^2 dx \right], R3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[*]= & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{4 A G} + \frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{384 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 A G} + \\
 & \frac{L^3 (-3 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 D \left[\left(\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{4}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{4}} (R1 - P)^2 dx + \right. \right. \\
 \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (R1 - P + R2)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{4}} (R1 - P + R2 + R3)^2 dx + \\
 \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{4}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{4} \right) + R3 \left(x - \frac{L}{2} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{4} \right) \right)^2 dx + \\
 \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{4}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4)^2 dx \right), R4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[] = & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 A G} + \frac{L^3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2}{128 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 \left(-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 \right)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\begin{aligned}
 & \text{Solve} \left[\left\{ -\frac{L^3 (P - R1)}{192 EI} + \frac{L (-P + R1)}{4 AG} + \frac{L (-P + R1 + R2)}{4 AG} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{384 EI} + \right. \right. \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{4 AG} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{384 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 AG} + \\
 & \frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \left. \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} \right\} = -\frac{R1}{k}, \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2)}{4 AG} + \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{384 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{4 AG} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{384 EI} + \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 AG} + \frac{L^3 (-6 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \left. \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} \right\} = -\frac{R2}{k}, \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{4 AG} + \frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{384 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 AG} + \\
 & \frac{L^3 (-3 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \left. \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} \right\} = -\frac{R3}{k}, \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{4 AG} + \frac{L^3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2}{128 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \left. \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{384 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} \right\} = -\frac{R4}{k}, \{R1, R2, R3, R4\}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[n]= & \left\{ \left\{ \text{R1} \rightarrow \left(k L \left(21\,743\,271\,936 A^3 E I^4 G^3 P + 13\,589\,544\,960 A^2 E I^4 G^2 k L P + \right. \right. \right. \\
& 7\,247\,757\,312 A^4 E I^3 G^4 L^2 P + 2\,038\,431\,744 A E I^4 G k^2 L^2 P + 5\,492\,441\,088 A^3 E I^3 G^3 k L^3 P + \\
& 84\,934\,656 E I^4 k^3 L^3 P + 891\,813\,888 A^2 E I^3 G^2 k^2 L^4 P + 137\,723\,904 A^4 E I^2 G^4 k L^5 P + \\
& 38\,928\,384 A E I^3 G k^3 L^5 P + 36\,495\,360 A^3 E I^2 G^3 k^2 L^6 P + 2\,045\,952 A^2 E I^2 G^2 k^3 L^7 P + \\
& \left. \left. \left. 267\,264 A^4 E I G^4 k^2 L^8 P + 27\,264 A^3 E I G^3 k^3 L^9 P + 97 A^4 G^4 k^3 L^{11} P \right) \right) \right) / \\
& \left(21\,743\,271\,936 A^4 E I^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 11\,324\,620\,800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84\,934\,656 E I^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38\,928\,384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277\,248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) , \\
& \text{R2} \rightarrow \left(384 A G k L \left(42\,467\,328 A^2 E I^4 G^2 P + 14\,155\,776 A E I^4 G k L P + 11\,943\,936 A^3 E I^3 G^3 L^2 P + \right. \right. \\
& 884\,736 E I^4 k^2 L^2 P + 5\,234\,688 A^2 E I^3 G^2 k L^3 P + 359\,424 A E I^3 G k^2 L^4 P + \\
& \left. \left. \left. 96\,000 A^3 E I^2 G^3 k L^5 P + 11\,232 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^6 P + 59 A^3 E I G^3 k^2 L^8 P \right) \right) \right) / \\
& \left(21\,743\,271\,936 A^4 E I^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 11\,324\,620\,800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84\,934\,656 E I^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38\,928\,384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277\,248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) , \\
& \text{R3} \rightarrow \left(2304 A^2 E I G^2 k L \left(4\,718\,592 A E I^3 G + 589\,824 E I^3 k L + 983\,040 A^2 E I^2 G^2 L^2 + \right. \right. \\
& 61\,440 A E I^2 G k L^3 - 9216 E I^2 k^2 L^4 - 5312 A^2 E I G^2 k L^5 - 960 A E I G k^2 L^6 - 7 A^2 G^2 k^2 L^8 \left. \right) P \right) / \\
& \left(21\,743\,271\,936 A^4 E I^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 11\,324\,620\,800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84\,934\,656 E I^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38\,928\,384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277\,248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) , \\
& \text{R4} \rightarrow \left(4608 A^2 G^2 L \left(1\,179\,648 A E I^4 G k P + 135\,168 A^2 E I^3 G^2 k L^2 P - 92\,160 A E I^3 G k^2 L^3 P - \right. \right. \\
& 4608 E I^3 k^3 L^4 P - 2496 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^5 P - 48 A E I^2 G k^3 L^6 P + A^2 E I G^2 k^3 L^8 P \left. \right) \right) / \\
& \left(21\,743\,271\,936 A^4 E I^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 E I^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
& 11\,324\,620\,800 A^4 E I^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A E I^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^4 + \\
& 84\,934\,656 E I^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 E I^2 G^4 k^2 L^6 + \\
& 38\,928\,384 A E I^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^8 + \\
& \left. \left. \left. 277\,248 A^4 E I G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 E I G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \right) \right\} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In[]:= R1} &= \left(k L \left(21\,743\,271\,936 A^3 EI^4 G^3 P + 13\,589\,544\,960 A^2 EI^4 G^2 k L P + \right. \right. \\
 &\quad 7\,247\,757\,312 A^4 EI^3 G^4 L^2 P + 2\,038\,431\,744 A EI^4 G k^2 L^2 P + 5\,492\,441\,088 A^3 EI^3 G^3 k L^3 P + \\
 &\quad 84\,934\,656 EI^4 k^3 L^3 P + 891\,813\,888 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 P + 137\,723\,904 A^4 EI^2 G^4 k L^5 P + \\
 &\quad 38\,928\,384 A EI^3 G k^3 L^5 P + 36\,495\,360 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 P + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 P + \\
 &\quad \left. \left. 267\,264 A^4 EI G^4 k^2 L^8 P + 27\,264 A^3 EI G^3 k^3 L^9 P + 97 A^4 G^4 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\
 &\quad \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 &\quad 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 &\quad 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 &\quad 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 &\quad \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \\
 \text{R2} &= \left(384 A G k L \left(42\,467\,328 A^2 EI^4 G^2 P + 14\,155\,776 A EI^4 G k L P + 11\,943\,936 A^3 EI^3 G^3 L^2 P + \right. \right. \\
 &\quad 884\,736 EI^4 k^2 L^2 P + 5\,234\,688 A^2 EI^3 G^2 k L^3 P + 359\,424 A EI^3 G k^2 L^4 P + \\
 &\quad \left. \left. 96\,000 A^3 EI^2 G^3 k L^5 P + 11\,232 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^6 P + 59 A^3 EI G^3 k^2 L^8 P \right) \right) / \\
 &\quad \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 &\quad 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 &\quad 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 &\quad 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 &\quad \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \\
 \text{R3} &= \left(2304 A^2 EI G^2 k L \left(4\,718\,592 A EI^3 G + 589\,824 EI^3 k L + 983\,040 A^2 EI^2 G^2 L^2 + \right. \right. \\
 &\quad 61\,440 A EI^2 G k L^3 - 9216 EI^2 k^2 L^4 - 5312 A^2 EI G^2 k L^5 - 960 A EI G k^2 L^6 - 7 A^2 G^2 k^2 L^8 \left. \right) P \right) / \\
 &\quad \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 &\quad 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 &\quad 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 &\quad 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 &\quad \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right) \\
 \text{R4} &= \left(4608 A^2 G^2 L \left(1\,179\,648 A EI^4 G k P + 135\,168 A^2 EI^3 G^2 k L^2 P - 92\,160 A EI^3 G k^2 L^3 P - \right. \right. \\
 &\quad 4608 EI^3 k^3 L^4 P - 2496 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 P - 48 A EI^2 G k^3 L^6 P + A^2 EI G^2 k^3 L^8 P \left. \right) \right) / \\
 &\quad \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\
 &\quad 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \\
 &\quad 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \\
 &\quad 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \\
 &\quad \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Out[*]} = \left(k L \left(21\,743\,271\,936 A^3 EI^4 G^3 P + 13\,589\,544\,960 A^2 EI^4 G^2 k L P + \right. \right. \\ \left. \left. 7\,247\,757\,312 A^4 EI^3 G^4 L^2 P + 2\,038\,431\,744 A EI^4 G k^2 L^2 P + 5\,492\,441\,088 A^3 EI^3 G^3 k L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 84\,934\,656 EI^4 k^3 L^3 P + 891\,813\,888 A^2 EI^3 G^2 k^2 L^4 P + 137\,723\,904 A^4 EI^2 G^4 k L^5 P + \right. \right. \\ \left. \left. 38\,928\,384 A EI^3 G k^3 L^5 P + 36\,495\,360 A^3 EI^2 G^3 k^2 L^6 P + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^3 L^7 P + \right. \right. \\ \left. \left. 267\,264 A^4 EI G^4 k^2 L^8 P + 27\,264 A^3 EI G^3 k^3 L^9 P + 97 A^4 G^4 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\ \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \\ \left. 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(384 A G k L \left(42\,467\,328 A^2 EI^4 G^2 P + 14\,155\,776 A EI^4 G k L P + 11\,943\,936 A^3 EI^3 G^3 L^2 P + \right. \right. \\ \left. \left. 884\,736 EI^4 k^2 L^2 P + 5\,234\,688 A^2 EI^3 G^2 k L^3 P + 359\,424 A EI^3 G k^2 L^4 P + \right. \right. \\ \left. \left. 96\,000 A^3 EI^2 G^3 k L^5 P + 11\,232 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^6 P + 59 A^3 EI G^3 k^2 L^8 P \right) \right) / \\ \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \\ \left. 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(2304 A^2 EI G^2 k L \left(4\,718\,592 A EI^3 G + 589\,824 EI^3 k L + 983\,040 A^2 EI^2 G^2 L^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 61\,440 A EI^2 G k L^3 - 9216 EI^2 k^2 L^4 - 5312 A^2 EI G^2 k L^5 - 960 A EI G k^2 L^6 - 7 A^2 G^2 k^2 L^8 \right) P \right) / \\ \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \\ \left. 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right)$$

$$\text{Out[*]} = \left(4608 A^2 G^2 L \left(1\,179\,648 A EI^4 G k P + 135\,168 A^2 EI^3 G^2 k L^2 P - 92\,160 A EI^3 G k^2 L^3 P - \right. \right. \\ \left. \left. 4608 EI^3 k^3 L^4 P - 2496 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^5 P - 48 A EI^2 G k^3 L^6 P + A^2 EI G^2 k^3 L^8 P \right) \right) / \\ \left(21\,743\,271\,936 A^4 EI^4 G^4 + 54\,358\,179\,840 A^3 EI^4 G^3 k L + 20\,384\,317\,440 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 11\,324\,620\,800 A^4 EI^3 G^4 k L^3 + 2\,378\,170\,368 A EI^4 G k^3 L^3 + 6\,879\,707\,136 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^4 + \right. \\ \left. 84\,934\,656 EI^4 k^4 L^4 + 976\,748\,544 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 + 157\,040\,640 A^4 EI^2 G^4 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 38\,928\,384 A EI^3 G k^4 L^6 + 38\,596\,608 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 + 2\,045\,952 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 277\,248 A^4 EI G^4 k^3 L^9 + 27\,264 A^3 EI G^3 k^4 L^{10} + 97 A^4 G^4 k^4 L^{12} \right)$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
B = 0.80 (*m*)
H = 1.20 (*m*)
ks = 10000000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
Ec = 21707945522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

(*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
L = 10 (*m*)
P = 100 (*N*)
      |valor numérico
EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
v = 0.35
G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
A = B * H

```

Out[]:= 0.8

Out[]:= 1.2

Out[]:= 10000000

Out[]:= 2.17079×10^{10}

Out[]:= 0.1152

Out[]:= $8. \times 10^6$

Out[]:= 10

Out[]:= 100

Out[]:= 2.50076×10^9

Out[]:= 0.35

Out[]:= 8.03998×10^9

Out[]:= 0.96

In[*]:= (*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

`g7 = ListLinePlot` [`{ {0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0} }`],
[gráfico de línea de una lista]

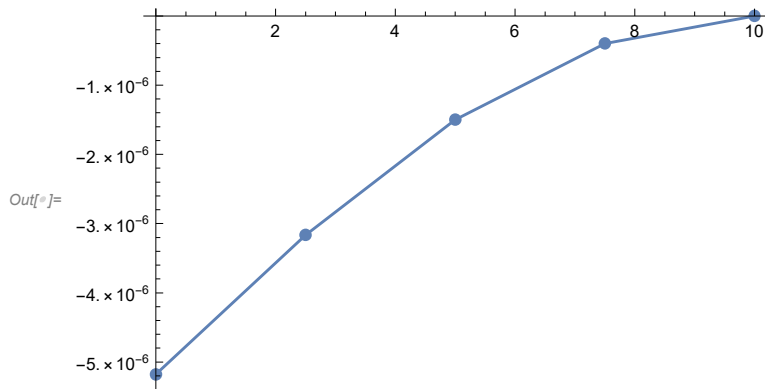
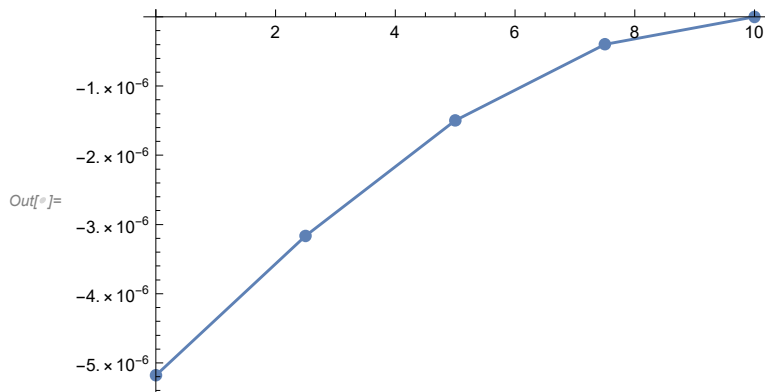
`AxesOrigin` → `{0, 0}`, `PlotRange` → `All`]
[origen de ejes] [rango de rep... [todo]

`g8 = ListPlot` [`{ {0, -R1 / k}, {L/4, -R2 / k}, {L/2, -R3 / k}, {3L/4, -R4 / k}, {L, 0} }`],
[representación de lista]

`PlotStyle` → `PointSize[0.02]`, `AxesOrigin` → `{0, 0}`, `PlotRange` → `All`]
[estilo de repr... [tamaño de punto] [origen de ejes] [rango de rep... [todo]

`Show` [
[muestra]

`g7,`
`g8]`



(*VIGA EMPOTRADA CON 5 RESORTES*)

(*VIGA CON CINCO RESORTE*)

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R1*)

$$\begin{aligned}
 D \left[\right. & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - P) ^ 2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - P + R2) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 & \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - P + R2 + R3) ^ 2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - P + R2 + R3 + R4) ^ 2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4 + R5) ^ 2 dx \right], R1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[*]= & - \frac{L^3 (P - R1)}{375 EI} + \frac{L (-P + R1)}{5 A G} + \frac{L (-P + R1 + R2)}{5 A G} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{750 EI} + \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{5 A G} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{750 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 A G} + \\
 & \frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 A G} + \\
 & \frac{L^3 (-12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 15 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R2*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - P)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - P + R2)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 & \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - P + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - P + R2 + R3 + R4)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4 + R5)^2 dx \right], R2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]} = & \frac{L (-P + R1 + R2)}{5 AG} + \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2 R2)}{750 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{5 AG} + \frac{L^3 (-23 P + 23 R1 + 14 R2 + 5 R3)}{750 EI} + \\
 & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 AG} + \left(L^3 (-6 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2) \right) / \\
 & (750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)) - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 AG} + \\
 & \left(L^3 (-9 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 12 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2) \right) / \\
 & (750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)) - \\
 & \left(L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3) \right) / \\
 & (750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2)
 \end{aligned}$$

In[*]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R3*)

$$\begin{aligned}
 & D \left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - P)^2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - P + R2)^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 & \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right)^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - P + R2 + R3)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right)^2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - P + R2 + R3 + R4)^2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right)^2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4 + R5)^2 dx \right], R3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[*]= & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{5 A G} + \frac{L^3 (-8 P + 8 R1 + 5 R2 + 2 R3)}{750 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 A G} + \\
 & \frac{L^3 (-3 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 A G} + \\
 & \frac{L^3 (-6 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 9 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R4*)

$$\begin{aligned}
 D \left[\left[\frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x) ^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - P) ^2 dx + \right. \right. \\
 \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right) ^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - P + R2) ^2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right) ^2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - P + R2 + R3) ^2 dx + \\
 \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right) ^2 dx + \\
 \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - P + R2 + R3 + R4) ^2 dx + \\
 \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right) ^2 dx + \\
 \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4 + R5) ^2 dx \right], R4]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[]:= & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 A G} + \frac{L^3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2}{250 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^3 + (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 A G} + \\
 & \frac{L^3 (-3 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2 + 6 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
 & \frac{L^3 (-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*DERIVADA CON RESPECTO DE R5*)

$$\begin{aligned}
 D \left[\right. & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_0^{\frac{L}{5}} ((R1) * x - P * x) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_0^{\frac{L}{5}} (R1 - P) ^ 2 dx + \right. \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} \left((R1) * x - P * x + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{L}{5}}^{\frac{2L}{5}} (R1 - P + R2) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * EI} \\
 & \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} (R1 - P + R2 + R3) ^ 2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \\
 & \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{3L}{5}}^{\frac{4L}{5}} (R1 - P + R2 + R3 + R4) ^ 2 dx + \\
 & \left. \frac{1}{2 * EI} \int_{\frac{4L}{5}}^L \left((R1) * x - P * (x) + R2 \left(x - \frac{L}{5} \right) + R3 \left(x - \frac{2L}{5} \right) + R4 \left(x - \frac{3L}{5} \right) + R5 \left(x - \frac{4L}{5} \right) \right) ^ 2 dx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2 * G * A} \int_{\frac{4L}{5}}^L (R1 - P + R2 + R3 + R4 + R5) ^ 2 dx \right], R5]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Out[]:= & \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 A G} + \frac{L^3 (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^2}{250 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
 & \frac{L^3 \left(-(-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^3 + (-5 P + 5 R1 + 4 R2 + 3 R3 + 2 R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2}
 \end{aligned}$$

In[]:=

(*SE ENCUENTRAN LAS REACCIONES*)

$$\begin{aligned}
 Solve \left[\left\{ -\frac{L^3 (P - R1)}{375 EI} + \frac{L (-P + R1)}{5 A G} + \frac{L (-P + R1 + R2)}{5 A G} + \frac{L^3 (-14 (P - R1) + 5 R2)}{750 EI} + \right. \right. \\
 \left. \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{5 A G} + \frac{L^3 (-38 P + 38 R1 + 23 R2 + 8 R3)}{750 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 A G} + \right. \\
 \left. \frac{L^3 (-9 (-3 P + 3 R1 + 2 R2 + R3)^2 + 12 (-4 P + 4 R1 + 3 R2 + 2 R3 + R4)^2)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} \right\} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L^3 \left(-(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^3 + (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 AG} + \\
& \frac{L^3 \left(-12 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 + 15 (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = -\frac{R1}{k}, \\
& \frac{L (-P + R1 + R2)}{5 AG} + \frac{L^3 (5 (-P + R1) + 2R2)}{750 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{5 AG} + \frac{L^3 (-23P + 23R1 + 14R2 + 5R3)}{750 EI} + \\
& \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 AG} + \frac{L^3 \left(-6 (-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^2 + 9 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^3 + (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 AG} + \\
& \frac{L^3 \left(-9 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 + 12 (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = -\frac{R2}{k}, \\
& \frac{L (-P + R1 + R2 + R3)}{5 AG} + \frac{L^3 (-8P + 8R1 + 5R2 + 2R3)}{750 EI} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 AG} + \\
& \frac{L^3 \left(-3 (-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^2 + 6 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^3 + (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 AG} + \\
& \frac{L^3 \left(-6 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 + 9 (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = -\frac{R3}{k}, \\
& \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4)}{5 AG} + \frac{L^3 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2}{250 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-3P + 3R1 + 2R2 + R3)^3 + (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4)^2} + \frac{L (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5 AG} + \\
& \frac{L^3 \left(-3 (-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^2 + 6 (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} - \\
& \frac{L^3 \left(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3 \right)}{750 EI (-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} = -\frac{R4}{k},
\end{aligned}$$

$$\frac{L(-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)}{5AG} + \frac{L^3(-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^2}{250EI(-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)} -$$

$$\frac{L^3(-(-4P + 4R1 + 3R2 + 2R3 + R4)^3 + (-5P + 5R1 + 4R2 + 3R3 + 2R4 + R5)^3)}{750EI(-P + R1 + R2 + R3 + R4 + R5)^2} =$$

$$- \frac{R5}{k} \}, \{R1, R2, R3, R4, R5\}]$$

$$\text{Out[7]= } \left\{ \left\{ R1 \rightarrow - \left(\left(\left(-160180664062500000 A^4 EI^7 G^4 k^5 L^7 - 16018066406250000 A^3 EI^7 G^3 k^6 L^8 - \right. \right. \right. \right.$$

$$5980078125000000 A^5 EI^6 G^5 k^5 L^9 + 1815380859375000 A^4 EI^6 G^4 k^6 L^{10} -$$

$$7346953125000000 A^6 EI^5 G^6 k^5 L^{11} + 102515625000000 A^3 EI^6 G^3 k^7 L^{11} +$$

$$1227339843750000 A^5 EI^5 G^5 k^6 L^{12} + 25628906250000 A^2 EI^6 G^2 k^8 L^{12} -$$

$$32956875000000 A^7 EI^4 G^7 k^5 L^{13} + 268249218750000 A^4 EI^5 G^4 k^7 L^{13} +$$

$$134940937500000 A^6 EI^4 G^6 k^6 L^{14} + 6663515625000 A^3 EI^5 G^3 k^8 L^{14} -$$

$$3224812500000 A^8 EI^3 G^8 k^5 L^{15} + 24273421875000 A^5 EI^4 G^5 k^7 L^{15} +$$

$$5095912500000 A^7 EI^3 G^7 k^6 L^{16} + 591173437500 A^4 EI^4 G^4 k^8 L^{16} +$$

$$856726875000 A^6 EI^3 G^6 k^7 L^{17} + 46801125000 A^8 EI^2 G^8 k^6 L^{18} +$$

$$19462781250 A^5 EI^3 G^5 k^8 L^{18} + 9001125000 A^7 EI^2 G^7 k^7 L^{19} + 129701250 A^6 EI^2 G^6 k^8 L^{20} +$$

$$17199000 A^8 EI G^8 k^7 L^{21} - 992250 A^7 EI G^7 k^8 L^{22} - 6174 A^8 G^8 k^8 L^{24} \right)$$

$$\left(\left(\left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(-300 EI k L - 28 A G k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left(-225 EI k L - 54 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 5 A G k L^3 \right) \right) -$$

$$\left(\left(-225 EI k L - 54 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 11 A G k L^3 \right) + \left(-450 EI k L - 81 A G k L^3 \right) \right.$$

$$\left. \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \left(\left(-750 A EI G - 300 EI k L - 16 A G k L^3 \right) \right.$$

$$\left. \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) - \left(-150 EI k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 5 A G k L^3 \right) \right) \right)$$

$$\left(\left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) \left(450 EI k L P + \right. \right. \right.$$

$$108 A G k L^3 P) - \left(-150 EI k L - 8 A G k L^3 \right) \left(375 EI k L P + 125 A G k L^3 P \right) \right) -$$

$$\left(\left(-150 EI k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 8 A G k L^3 \right) + \left(-300 EI k L - 28 A G k L^3 \right) \right.$$

$$\left. \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \left(\left(-150 EI k L - 11 A G k L^3 \right) \left(375 EI k L P + \right. \right.$$

$$125 A G k L^3 P) + \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) \left(600 EI k L P + 176 A G k L^3 P \right) \right) \right) +$$

$$\left(-25312500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 - 2700000 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 - 31500 A^4 EI G^4 k^3 L^9 \right)$$

$$\left(\left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) \left(300 EI k L P + 52 A G k L^3 P \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left(-150 EI k L - 5 A G k L^3 \right) \left(375 EI k L P + 125 A G k L^3 P \right) \right) -$$

$$\left(\left(-750 A EI G - 300 EI k L - 16 A G k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) - \right.$$

$$\left. \left(-150 EI k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 5 A G k L^3 \right) \right)$$

$$\left(\left(-150 EI k L - 11 A G k L^3 \right) \left(375 EI k L P + 125 A G k L^3 P \right) + \right.$$

$$\left. \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) \left(600 EI k L P + 176 A G k L^3 P \right) \right) \right) -$$

$$\left(\left(-25312500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 - 2700000 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 - 31500 A^4 EI G^4 k^3 L^9 \right)$$

$$\left(\left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-300 EI k L - 40 A G k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left(-300 EI k L - 88 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 5 A G k L^3 \right) \right) -$$

$$\left(\left(-300 EI k L - 88 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 11 A G k L^3 \right) + \left(-750 A EI G - 600 EI k L - \right. \right.$$

$$128 A G k L^3 \left. \right) \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \left(\left(-750 A EI G - 300 EI k L - 16 A G k L^3 \right) \right.$$

$$\left. \left(-75 EI k L - 7 A G k L^3 \right) - \left(-150 EI k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 5 A G k L^3 \right) \right) \right) -$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(- \left(-300 E I k L - 88 A G k L^3 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-150 E I k L - 8 A G k L^3 \right) + \left(-450 E I k L - 81 A G k L^3 \right) \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \right) - \right. \\
& \quad \left(- \left(-300 E I k L - 88 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 11 A G k L^3 \right) + \left(-750 A E I G - 600 E I k L - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 128 A G k L^3 \right) \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \left(- \left(-150 E I k L - 26 A G k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-150 E I k L - 8 A G k L^3 \right) + \left(-300 E I k L - 28 A G k L^3 \right) \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \right) \\
& \left(\left(-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-300 E I k L - 28 A G k L^3 \right) \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-225 E I k L - 54 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 5 A G k L^3 \right) \right) - \right. \\
& \quad \left(- \left(-225 E I k L - 54 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 11 A G k L^3 \right) + \left(-450 E I k L - 81 A G k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \left(\left(-750 A E I G - 300 E I k L - 16 A G k L^3 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) - \left(-150 E I k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 5 A G k L^3 \right) \right) \right) \right) \\
& \left(- \left(\left(-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-150 E I k L - 8 A G k L^3 \right) \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-225 E I k L - 54 A G k L^3 \right) \left(-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3 \right) \right) - \right. \\
& \quad \left. \left(- \left(-225 E I k L - 54 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 11 A G k L^3 \right) + \left(-450 E I k L - 81 A G k L^3 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \left(\left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 5 A G k L^3 \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-150 E I k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3 \right) \right) \right) \right) \\
& \left(\left(-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \left(450 E I k L P + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 108 A G k L^3 P \right) - \left(-150 E I k L - 8 A G k L^3 \right) \left(375 E I k L P + 125 A G k L^3 P \right) \right) - \\
& \quad \left(- \left(-150 E I k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 8 A G k L^3 \right) + \left(-300 E I k L - 28 A G k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \right) \left(- \left(-150 E I k L - 11 A G k L^3 \right) \left(375 E I k L P + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 125 A G k L^3 P \right) + \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \left(600 E I k L P + 176 A G k L^3 P \right) \right) \right) + \\
& \left(-25 312 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 2 700 000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 31 500 A^4 E I G^4 k^3 L^9 \right) \\
& \left(\left(-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \left(150 E I k L P + 14 A G k L^3 P \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3 \right) \left(375 E I k L P + 125 A G k L^3 P \right) \right) - \right. \\
& \quad \left(\left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \left(-150 E I k L - 5 A G k L^3 \right) - \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-150 E I k L - 26 A G k L^3 \right) \left(-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3 \right) \right) \right) \\
& \left(- \left(-150 E I k L - 11 A G k L^3 \right) \left(375 E I k L P + 125 A G k L^3 P \right) + \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-75 E I k L - 7 A G k L^3 \right) \left(600 E I k L P + 176 A G k L^3 P \right) \right) \right) \right) / \\
& \left(\left(-160 180 664 062 500 000 A^4 E I^7 G^4 k^5 L^7 - 16 018 066 406 250 000 A^3 E I^7 G^3 k^6 L^8 - \right. \right. \\
& \quad 59 800 781 250 000 000 A^5 E I^6 G^5 k^5 L^9 + 1 815 380 859 375 000 A^4 E I^6 G^4 k^6 L^{10} - \\
& \quad 7 346 953 125 000 000 A^6 E I^5 G^6 k^5 L^{11} + 1 025 156 250 000 000 A^3 E I^6 G^3 k^7 L^{11} + \\
& \quad 1 227 339 843 750 000 A^5 E I^5 G^5 k^6 L^{12} + 25 628 906 250 000 A^2 E I^6 G^2 k^8 L^{12} - \\
& \quad 329 568 750 000 000 A^7 E I^4 G^7 k^5 L^{13} + 268 249 218 750 000 A^4 E I^5 G^4 k^7 L^{13} + \\
& \quad 134 940 937 500 000 A^6 E I^4 G^6 k^6 L^{14} + 6 663 515 625 000 A^3 E I^5 G^3 k^8 L^{14} - \\
& \quad 3 224 812 500 000 A^8 E I^3 G^8 k^5 L^{15} + 24 273 421 875 000 A^5 E I^4 G^5 k^7 L^{15} + \\
& \quad 5 095 912 500 000 A^7 E I^3 G^7 k^6 L^{16} + 591 173 437 500 A^4 E I^4 G^4 k^8 L^{16} + \\
& \quad 856 726 875 000 A^6 E I^3 G^6 k^7 L^{17} + 46 801 125 000 A^8 E I^2 G^8 k^6 L^{18} + \\
& \quad 19 462 781 250 A^5 E I^3 G^5 k^8 L^{18} + 9 001 125 000 A^7 E I^2 G^7 k^7 L^{19} + \\
& \quad 129 701 250 A^6 E I^2 G^6 k^8 L^{20} + 17 199 000 A^8 E I G^8 k^7 L^{21} - \\
& \quad 992 250 A^7 E I G^7 k^8 L^{22} - 6174 A^8 G^8 k^8 L^{24} \left. \right) \\
& \left(\left(-25 312 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 2 700 000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 31 500 A^4 E I G^4 k^3 L^9 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-300 E I k L - 52 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad (-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3)) - \\
& \quad (-(-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + \\
& \quad \quad (-600 E I k L - 176 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) \\
& \quad ((-750 A E I G - 300 E I k L - 16 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad \quad (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3))) - \\
& ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) \\
& \quad (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + (-450 E I k L - 108 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) - \\
& \quad (-(-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + \\
& \quad \quad (-600 E I k L - 176 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) (-(-150 E I k L - 26 A G k L^3) \\
& \quad \quad (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + (-300 E I k L - 28 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3))) \\
& ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-300 E I k L - 28 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad (-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3)) - \\
& \quad (-(-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-450 E I k L - 81 A G k L^3) \\
& \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) ((-750 A E I G - 300 E I k L - 16 A G k L^3) (-75 E I k L - \\
& \quad \quad 7 A G k L^3) - (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3)))) - \\
& ((-25 312 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 2 700 000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 31 500 A^4 E I G^4 k^3 L^9) \\
& \quad ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-300 E I k L - 40 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad \quad (-300 E I k L - 88 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3)) - \\
& \quad (-(-300 E I k L - 88 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + \\
& \quad \quad (-750 A E I G - 600 E I k L - 128 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) \\
& \quad ((-750 A E I G - 300 E I k L - 16 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad \quad (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3))) - \\
& ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-300 E I k L - 88 A G k L^3) (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + \\
& \quad (-450 E I k L - 81 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) - (-(-300 E I k L - 88 A G k L^3) \\
& \quad \quad (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-750 A E I G - 600 E I k L - 128 A G k L^3) \\
& \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) (-(-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + \\
& \quad \quad (-300 E I k L - 28 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3))) \\
& ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-300 E I k L - 28 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad (-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3)) - \\
& \quad (-(-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-450 E I k L - 81 A G k L^3) \\
& \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) ((-750 A E I G - 300 E I k L - 16 A G k L^3) \\
& \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3)))) \\
& ((-25 312 500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 2 700 000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 31 500 A^4 E I G^4 k^3 L^9) \\
& \quad ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-150 E I k L - 14 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad \quad (-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3)) - \\
& \quad (-(-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + \\
& \quad \quad (-600 E I k L - 176 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) \\
& \quad ((-75 E I k L - 7 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (-150 EI k L - 26 A G k L^3) (-750 A EI G - 150 EI k L - 2 A G k L^3) - \\
 & ((-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-375 A EI G - 375 EI k L - 125 A G k L^3) \\
 & (-150 EI k L - 8 A G k L^3) + (-450 EI k L - 108 A G k L^3) (-75 EI k L - 7 A G k L^3)) - \\
 & (-(-375 A EI G - 375 EI k L - 125 A G k L^3) (-150 EI k L - 11 A G k L^3) + \\
 & (-600 EI k L - 176 A G k L^3) (-75 EI k L - 7 A G k L^3)) (-(-150 EI k L - 26 A G k L^3) \\
 & (-150 EI k L - 8 A G k L^3) + (-300 EI k L - 28 A G k L^3) (-75 EI k L - 7 A G k L^3))) \\
 & ((-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-150 EI k L - 8 A G k L^3) (-75 EI k L - 7 A G k L^3) - \\
 & (-225 EI k L - 54 A G k L^3) (-750 A EI G - 150 EI k L - 2 A G k L^3)) - \\
 & (-(-225 EI k L - 54 A G k L^3) (-150 EI k L - 11 A G k L^3) + (-450 EI k L - 81 A G k L^3) \\
 & (-75 EI k L - 7 A G k L^3)) ((-75 EI k L - 7 A G k L^3) (-150 EI k L - 5 A G k L^3) - \\
 & (-150 EI k L - 26 A G k L^3) (-750 A EI G - 150 EI k L - 2 A G k L^3))))),
 \end{aligned}$$

$$R2 \rightarrow (3750 k L (25 312 500 000 A^4 EI^5 G^4 P + 12 656 250 000 A^3 EI^5 G^3 k$$

L
 P + 7 425 000 000
 A⁵
 EI⁴
 G⁵
 L²
 P + 1 518 750 000
 A²
 EI⁵
 G²
 k²
 L²
 P + 4 792 500 000
 A⁴
 EI⁴
 G⁴
 k
 L³
 P + 50 625 000
 A
 EI⁵
 G
 k³
 L³
 P + 627 750 000
 A³
 EI⁴
 G³
 k²
 L⁴
 P + 95 062 500

$$\begin{aligned}
& A^5 EI^3 \\
& G^5 k L^5 \\
& P + 21937500 \\
& A^2 EI^4 \\
& G^2 k^3 L^5 \\
& P + 20587500 \\
& A^4 EI^3 \\
& G^4 k^2 L^6 \\
& P + 924750 \\
& A^3 EI^3 G^3 k^3 \\
& L^7 P + 109800 \\
& A^5 EI^2 G^5 k^2 \\
& L^8 P + 8985 A^4 \\
& EI^2 G^4 k^3 L^9 \\
& P + 22 A^5 EI \\
& G^5 k^3 L^{11} P)) / \\
& (118652343750000 A^5 EI^5 G^5 + 355957031250000 \\
& A^4 \\
& EI^5 \\
& G^4 \\
& k \\
& L + \\
& 166113281250000 \\
& A^3 \\
& EI^5 \\
& G^3 \\
& k^2 \\
& L^2 + \\
& 71191406250000 \\
& A^5 \\
& EI^4 \\
& G^5 \\
& k \\
& L^3 + \\
& 26578125000000 \\
& A^2 \\
& EI^5 \\
& G^2 \\
& k^3 \\
& L^3 + \\
& 53599218750000 \\
& A^4 \\
& EI^4 \\
& G^4 \\
& k^2
\end{aligned}$$

$L^4 +$
 1 708 593 750 000
 A
 EI^5
 G
 k^4
 $L^4 +$
 10 403 437 500 000
 A^3
 EI^4
 G^3
 k^3
 $L^5 +$
 37 968 750 000
 EI^5
 k^5
 $L^5 +$
 1 165 429 687 500
 A^5
 EI^3
 G^5
 k^2
 $L^6 +$
 744 187 500 000
 A^2
 EI^4
 G^2
 k^4
 $L^6 +$
 386 268 750 000
 A^4
 EI^3
 G^4
 k^3
 $L^7 +$
 17 718 750 000
 A
 EI^4
 G
 k^5
 $L^7 +$
 36 298 125 000
 A^3
 EI^3
 G^3

$$\begin{aligned}
& k^4 \\
& L^8 + \\
& 2\,543\,625\,000 \\
& A^5 \\
& EI^2 \\
& G^5 \\
& k^3 \\
& L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000 \\
& A^2 \\
& EI^3 \\
& G^2 \\
& k^5 \\
& L^9 + 435\,375\,000 \\
& A^4 \\
& EI^2 \\
& G^4 \\
& k^4 \\
& L^{10} + 17\,100\,000 \\
& A^3 \\
& EI^2 \\
& G^3 \\
& k^5 \\
& L^{11} + 1\,335\,375 \\
& A^5 \\
& EI \\
& G^5 \\
& k^4 \\
& L^{12} + 99\,375 \\
& A^4 \\
& EI \\
& G^4 \\
& k^5 \\
& L^{13} + 181 \\
& A^5 \\
& G^5 \\
& k^5 \\
& L^{15} \Big), \\
R3 \rightarrow & (4500 A^2 G^2 (15\,820\,312\,500 A^2 EI^5 G^2 k L P + 4\,218\,750\,000 A EI^5 G k^2 L^2 P + \\
& 3\,796\,875\,000 A^3 EI^4 G^3 k L^3 P + \\
& 210\,937\,500 EI^5 k^3 L^3 P + \\
& 1\,125\,000\,000 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^4 P + \\
& 33\,750\,000 A EI^4 G k^3 L^5 P - \\
& 2\,625\,000 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^6 P -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1\,687\,500\,EI^4\,k^4\,L^6\,P - \\
& 3\,853\,125\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^7\,P - \\
& 270\,000\,A\,EI^3\,G\,k^4\,L^8\,P - \\
& 43\,375\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^9\,P - \\
& 4275\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^{10}\,P - \\
& 13\,A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{12}\,P)) / \\
& (118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000 \\
& A^4 \\
& EI^5 \\
& G^4 \\
& k \\
& L + \\
& 166\,113\,281\,250\,000 \\
& A^3 \\
& EI^5 \\
& G^3 \\
& k^2 \\
& L^2 + \\
& 71\,191\,406\,250\,000 \\
& A^5 \\
& EI^4 \\
& G^5 \\
& k \\
& L^3 + \\
& 26\,578\,125\,000\,000 \\
& A^2 \\
& EI^5 \\
& G^2 \\
& k^3 \\
& L^3 + \\
& 53\,599\,218\,750\,000 \\
& A^4 \\
& EI^4 \\
& G^4 \\
& k^2 \\
& L^4 + 1\,708\,593\,750\,000 \\
& A \\
& EI^5 \\
& G \\
& k^4 \\
& L^4 + 10\,403\,437\,500\,000 \\
& A^3 \\
& EI^4 \\
& G^3 \\
& k^3
\end{aligned}$$

$$L^5 + 37\,968\,750\,000$$

$$EI^5$$

$$k^5$$

$$L^5 + 1\,165\,429\,687\,500$$

$$A^5$$

$$EI^3$$

$$G^5$$

$$k^2$$

$$L^6 + 744\,187\,500\,000$$

$$A^2$$

$$EI^4$$

$$G^2$$

$$k^4$$

$$L^6 + 386\,268\,750\,000$$

$$A^4$$

$$EI^3$$

$$G^4$$

$$k^3$$

$$L^7 + 17\,718\,750\,000$$

$$A$$

$$EI^4$$

$$G$$

$$k^5$$

$$L^7 + 36\,298\,125\,000$$

$$A^3$$

$$EI^3$$

$$G^3$$

$$k^4$$

$$L^8 + 2\,543\,625\,000$$

$$A^5$$

$$EI^2$$

$$G^5$$

$$k^3$$

$$L^9 + 1\,029\,375\,000$$

$$A^2$$

$$EI^3$$

$$G^2$$

$$k^5$$

$$L^9 + 435\,375\,000$$

$$A^4$$

$$EI^2$$

$$G^4$$

$$k^4$$

$$L^{10} + 17\,100\,000$$

$$A^3$$

$$\begin{aligned}
& EI^2 \\
& G^3 \\
& k^5 \\
& L^{11} + 1\,335\,375 \\
& A^5 \\
& EI \\
& G^5 \\
& k^4 \\
& L^{12} + 99\,375 \\
& A^4 \\
& EI \\
& G^4 \\
& k^5 \\
& L^{13} + 181 \\
& A^5 \\
& G^5 \\
& k^5 \\
& L^{15}), \\
R4 \rightarrow & (2250 A^2 EI G^2 k L (21\,093\,750\,000 A^2 EI^4 G^2 + 2\,109\,375\,000 A EI^4 G k L + \\
& 3\,656\,250\,000 A^3 EI^3 G^3 L^2 - \\
& 660\,937\,500 A^2 EI^3 G^2 k L^3 - \\
& 135\,000\,000 A EI^3 G k^2 L^4 - \\
& 53\,062\,500 A^3 EI^2 G^3 k L^5 - \\
& 3\,375\,000 EI^3 k^3 L^5 - \\
& 8\,325\,000 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^6 - \\
& 202\,500 A EI^2 G k^3 L^7 - 19\,500 A^3 EI G^3 k^2 L^8 + \\
& 450 A^2 EI G^2 k^3 L^9 + 7 A^3 G^3 k^3 L^{11}) P) / \\
& (118\,652\,343\,750\,000 A^5 EI^5 G^5 + 355\,957\,031\,250\,000 \\
& A^4 \\
& EI^5 \\
& G^4 \\
& k \\
& L + 166\,113\,281\,250\,000 \\
& A^3 \\
& EI^5 \\
& G^3 \\
& k^2 \\
& L^2 + 71\,191\,406\,250\,000 \\
& A^5 \\
& EI^4 \\
& G^5 \\
& k \\
& L^3 + 26\,578\,125\,000\,000 \\
& A^2
\end{aligned}$$

EI^5
 G^2
 k^3
 $L^3 + 53\,599\,218\,750\,000$
 A^4
 EI^4
 G^4
 k^2
 $L^4 + 1\,708\,593\,750\,000$
 A
 EI^5
 G
 k^4
 $L^4 + 10\,403\,437\,500\,000$
 A^3
 EI^4
 G^3
 k^3
 $L^5 + 37\,968\,750\,000$
 EI^5
 k^5
 $L^5 + 1\,165\,429\,687\,500$
 A^5
 EI^3
 G^5
 k^2
 $L^6 + 744\,187\,500\,000$
 A^2
 EI^4
 G^2
 k^4
 $L^6 + 386\,268\,750\,000$
 A^4
 EI^3
 G^4
 k^3
 $L^7 + 17\,718\,750\,000$
 A
 EI^4
 G
 k^5
 $L^7 + 36\,298\,125\,000$
 A^3
 EI^3
 G^3

$$\begin{aligned}
 & k^4 \\
 & L^8 + 2\,543\,625\,000 \\
 & A^5 \\
 & EI^2 \\
 & G^5 \\
 & k^3 \\
 & L^9 + 1\,029\,375\,000 \\
 & A^2 \\
 & EI^3 \\
 & G^2 \\
 & k^5 \\
 & L^9 + 435\,375\,000 \\
 & A^4 \\
 & EI^2 \\
 & G^4 \\
 & k^4 \\
 & L^{10} + 17\,100\,000 \\
 & A^3 \\
 & EI^2 \\
 & G^3 \\
 & k^5 \\
 & L^{11} + 1\,335\,375 \\
 & A^5 \\
 & EI \\
 & G^5 \\
 & k^4 \\
 & L^{12} + 99\,375 \\
 & A^4 \\
 & EI \\
 & G^4 \\
 & k^5 \\
 & L^{13} + 181 \\
 & A^5 \\
 & G^5 \\
 & k^5 \\
 & L^{15} \Big),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R5 \rightarrow & - \left((4500 A^2 G^2 L (-5\,273\,437\,500 A^2 EI^5 G^2 k P - 492\,187\,500 A^3 EI^4 G^3 k L^2 P + \right. \\
 & \quad 632\,812\,500 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^3 P + 59\,062\,500 A EI^4 G k^3 L^4 P + \\
 & \quad 13\,500\,000 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^5 P + 1\,687\,500 EI^4 k^4 L^5 P + 225\,000 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^6 P - \\
 & \quad \left. 10\,875 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^8 P - 225 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^9 P + A^3 EI G^3 k^4 L^{11} P) \right) / \\
 & (118\,652\,343\,750\,000 A^5 EI^5 G^5 + 355\,957\,031\,250\,000 A^4 EI^5 G^4 k L + \\
 & \quad 166\,113\,281\,250\,000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + \\
 & \quad 71\,191\,406\,250\,000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + \\
 & \quad 26\,578\,125\,000\,000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (P + 125 A G k L^3 P) + (-75 E I k L - 7 A G k L^3) (600 E I k L P + 176 A G k L^3 P) \Big) \Big) - \\
& \Big((-25\,312\,500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 2\,700\,000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 31\,500 A^4 E I G^4 k^3 L^9) \\
& \quad \Big((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) \Big((-300 E I k L - 40 A G k L^3) \\
& \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - (-300 E I k L - 88 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3) \Big) - \\
& \quad \quad \Big((-300 E I k L - 88 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-750 A E I G - 600 E I k L - \\
& \quad \quad \quad 128 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) \Big) \Big((-750 A E I G - 300 E I k L - 16 A G k L^3) \\
& \quad \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3) \Big) \Big) - \\
& \quad \Big((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) \Big((-300 E I k L - 88 A G k L^3) (-150 E I k L - \\
& \quad \quad 8 A G k L^3) + (-450 E I k L - 81 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) \Big) - \\
& \quad \quad \Big((-300 E I k L - 88 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-750 A E I G - \\
& \quad \quad \quad 600 E I k L - 128 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) \Big) \Big((-150 E I k L - 26 A G k L^3) \\
& \quad \quad \quad (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + (-300 E I k L - 28 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) \Big) \Big) \\
& \quad \Big((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) \Big((-300 E I k L - 28 A G k L^3) (-75 E I k L - \\
& \quad \quad 7 A G k L^3) - (-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3) \Big) - \\
& \quad \quad \Big((-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-450 E I k L - 81 A G k L^3) \\
& \quad \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3) \Big) \Big((-750 A E I G - 300 E I k L - 16 A G k L^3) \\
& \quad \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3) \Big) \Big) \\
& \quad \Big((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) \Big((-150 E I k L - 8 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& \quad \quad (-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3) \Big) - \\
& \quad \quad \Big((-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-450 E I k L - 81 A G k L^3) \\
& \quad \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3) \Big) \Big((-75 E I k L - 7 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3) - \\
& \quad \quad \quad (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3) \Big) \Big) \\
& \quad \Big((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) \Big((-75 E I k L - 7 A G k L^3) (450 E I k L P + \\
& \quad \quad 108 A G k L^3 P) - (-150 E I k L - 8 A G k L^3) (375 E I k L P + 125 A G k L^3 P) \Big) - \\
& \quad \quad \Big((-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + (-300 E I k L - 28 A G k L^3) \\
& \quad \quad \quad (-75 E I k L - 7 A G k L^3) \Big) \Big((-150 E I k L - 11 A G k L^3) (375 E I k L P + \\
& \quad \quad \quad 125 A G k L^3 P) + (-75 E I k L - 7 A G k L^3) (600 E I k L P + 176 A G k L^3 P) \Big) \Big) + \\
& \quad \Big((-25\,312\,500 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^5 - 2\,700\,000 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^7 - 31\,500 A^4 E I G^4 k^3 L^9) \\
& \quad \Big((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) \Big((-75 E I k L - 7 A G k L^3) (150 E I k L P + 14 A G k L^3 P) - \\
& \quad \quad (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3) (375 E I k L P + 125 A G k L^3 P) \Big) - \\
& \quad \quad \Big((-75 E I k L - 7 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3) - (-150 E I k L - 26 A G k L^3) \\
& \quad \quad \quad (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3) \Big) \Big((-150 E I k L - 11 A G k L^3) (375 E I k L P + \\
& \quad \quad \quad 125 A G k L^3 P) + (-75 E I k L - 7 A G k L^3) (600 E I k L P + 176 A G k L^3 P) \Big) \Big) \Big) \Big) / \\
& \Big((-160\,180\,664\,062\,500\,000 A^4 E I^7 G^4 k^5 L^7 - 16\,018\,066\,406\,250\,000 A^3 E I^7 G^3 k^6 L^8 - \\
& \quad 59\,800\,781\,250\,000\,000 A^5 E I^6 G^5 k^5 L^9 + 1\,815\,380\,859\,375\,000 A^4 E I^6 G^4 k^6 L^{10} - \\
& \quad 7\,346\,953\,125\,000\,000 A^6 E I^5 G^6 k^5 L^{11} + 1\,025\,156\,250\,000\,000 A^3 E I^6 G^3 k^7 L^{11} + \\
& \quad 1\,227\,339\,843\,750\,000 A^5 E I^5 G^5 k^6 L^{12} + 25\,628\,906\,250\,000 A^2 E I^6 G^2 k^8 L^{12} - \\
& \quad 329\,568\,750\,000\,000 A^7 E I^4 G^7 k^5 L^{13} + 268\,249\,218\,750\,000 A^4 E I^5 G^4 k^7 L^{13} + \\
& \quad 134\,940\,937\,500\,000 A^6 E I^4 G^6 k^6 L^{14} + 6\,663\,515\,625\,000 A^3 E I^5 G^3 k^8 L^{14} - \\
& \quad 3\,224\,812\,500\,000 A^8 E I^3 G^8 k^5 L^{15} + 24\,273\,421\,875\,000 A^5 E I^4 G^5 k^7 L^{15} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5\,095\,912\,500\,000\,A^7\,EI^3\,G^7\,k^6\,L^{16} + 591\,173\,437\,500\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^8\,L^{16} + \\
& 856\,726\,875\,000\,A^6\,EI^3\,G^6\,k^7\,L^{17} + 46\,801\,125\,000\,A^8\,EI^2\,G^8\,k^6\,L^{18} + \\
& 19\,462\,781\,250\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^8\,L^{18} + 9\,001\,125\,000\,A^7\,EI^2\,G^7\,k^7\,L^{19} + \\
& 129\,701\,250\,A^6\,EI^2\,G^6\,k^8\,L^{20} + 17\,199\,000\,A^8\,EI\,G^8\,k^7\,L^{21} - \\
& 992\,250\,A^7\,EI\,G^7\,k^8\,L^{22} - 6174\,A^8\,G^8\,k^8\,L^{24}) \\
& ((-25\,312\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 2\,700\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 31\,500\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9) \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 52\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - \\
& (-375\,A\,EI\,G - 375\,EI\,k\,L - 125\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) - \\
& (-(-375\,A\,EI\,G - 375\,EI\,k\,L - 125\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) + (-600\,EI\,k\,L - \\
& 176\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) (-(-375\,A\,EI\,G - 375\,EI\,k\,L - 125\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-150\,EI\,k\,L - 8\,A\,G\,k\,L^3) + (-450\,EI\,k\,L - 108\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) - \\
& (-(-375\,A\,EI\,G - 375\,EI\,k\,L - 125\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) + \\
& (-600\,EI\,k\,L - 176\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) (-(-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-150\,EI\,k\,L - 8\,A\,G\,k\,L^3) + (-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3))) \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - \\
& 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-225\,EI\,k\,L - 54\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) - \\
& (-(-225\,EI\,k\,L - 54\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) + (-450\,EI\,k\,L - 81\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)))) - \\
& ((-25\,312\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 2\,700\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 31\,500\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9) \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 40\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-300\,EI\,k\,L - 88\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) - \\
& (-(-300\,EI\,k\,L - 88\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) + (-750\,A\,EI\,G - 600\,EI\,k\,L - \\
& 128\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) (-(-300\,EI\,k\,L - 88\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - \\
& 8\,A\,G\,k\,L^3) + (-450\,EI\,k\,L - 81\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) - \\
& (-(-300\,EI\,k\,L - 88\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) + (-750\,A\,EI\,G - \\
& 600\,EI\,k\,L - 128\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) (-(-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-150\,EI\,k\,L - 8\,A\,G\,k\,L^3) + (-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3))) \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - \\
& 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-225\,EI\,k\,L - 54\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) - \\
& (-(-225\,EI\,k\,L - 54\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) + (-450\,EI\,k\,L - 81\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3)) ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)))) - \\
& ((-25\,312\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 2\,700\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 31\,500\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9) \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-150\,EI\,k\,L - 14\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3) - \\
& (-(-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-600 E I k L - \\
& 176 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) ((-75 E I k L - 7 A G k L^3) (-150 E I k L - \\
& 5 A G k L^3) - (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3))) - \\
& ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) (-(-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) \\
& (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + (-450 E I k L - 108 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3))) - \\
& (-(-375 A E I G - 375 E I k L - 125 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + \\
& (-600 E I k L - 176 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) (-(-150 E I k L - 26 A G k L^3) \\
& (-150 E I k L - 8 A G k L^3) + (-300 E I k L - 28 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3))) \\
& ((-450 A E I G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-150 E I k L - 8 A G k L^3) (-75 E I k L - 7 A G k L^3) - \\
& (-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3)) - \\
& (-(-225 E I k L - 54 A G k L^3) (-150 E I k L - 11 A G k L^3) + (-450 E I k L - 81 A G k L^3) \\
& (-75 E I k L - 7 A G k L^3)) ((-75 E I k L - 7 A G k L^3) (-150 E I k L - 5 A G k L^3) - \\
& (-150 E I k L - 26 A G k L^3) (-750 A E I G - 150 E I k L - 2 A G k L^3)))))) \\
R2 = & (3750 k L (25 312 500 000 A^4 E I^5 G^4 P + 12 656 250 000 A^3 E I^5 G^3 k L P + 7 425 000 000 A^5 E I^4 G^5 L^2 P + \\
& 1 518 750 000 A^2 E I^5 G^2 k^2 L^2 P + 4 792 500 000 A^4 E I^4 G^4 k L^3 P + \\
& 50 625 000 A E I^5 G k^3 L^3 P + 627 750 000 A^3 E I^4 G^3 k^2 L^4 P + 95 062 500 A^5 E I^3 G^5 k L^5 P + \\
& 21 937 500 A^2 E I^4 G^2 k^3 L^5 P + 20 587 500 A^4 E I^3 G^4 k^2 L^6 P + 924 750 A^3 E I^3 G^3 k^3 L^7 P + \\
& 109 800 A^5 E I^2 G^5 k^2 L^8 P + 8985 A^4 E I^2 G^4 k^3 L^9 P + 22 A^5 E I G^5 k^3 L^{11} P)) / \\
& (118 652 343 750 000 A^5 E I^5 G^5 + 355 957 031 250 000 A^4 E I^5 G^4 k L + 166 113 281 250 000 A^3 E I^5 G^3 k^2 L^2 + \\
& 71 191 406 250 000 A^5 E I^4 G^5 k L^3 + 26 578 125 000 000 A^2 E I^5 G^2 k^3 L^3 + \\
& 53 599 218 750 000 A^4 E I^4 G^4 k^2 L^4 + 1 708 593 750 000 A E I^5 G k^4 L^4 + 10 403 437 500 000 A^3 E I^4 G^3 k^3 L^5 + \\
& 37 968 750 000 E I^5 k^5 L^5 + 1 165 429 687 500 A^5 E I^3 G^5 k^2 L^6 + 744 187 500 000 A^2 E I^4 G^2 k^4 L^6 + \\
& 386 268 750 000 A^4 E I^3 G^4 k^3 L^7 + 17 718 750 000 A E I^4 G k^5 L^7 + 36 298 125 000 A^3 E I^3 G^3 k^4 L^8 + \\
& 2 543 625 000 A^5 E I^2 G^5 k^3 L^9 + 1 029 375 000 A^2 E I^3 G^2 k^5 L^9 + 435 375 000 A^4 E I^2 G^4 k^4 L^{10} + \\
& 17 100 000 A^3 E I^2 G^3 k^5 L^{11} + 1 335 375 A^5 E I G^5 k^4 L^{12} + 99 375 A^4 E I G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15}) \\
R3 = & (4500 A^2 G^2 (15 820 312 500 A^2 E I^5 G^2 k L P + 4 218 750 000 A E I^5 G k^2 L^2 P + 3 796 875 000 A^3 E I^4 G^3 \\
& k L^3 P + 210 937 500 E I^5 k^3 L^3 P + 1 125 000 000 A^2 E I^4 G^2 k^2 L^4 P + 33 750 000 A E I^4 G k^3 L^5 P - \\
& 2 625 000 A^3 E I^3 G^3 k^2 L^6 P - 1 687 500 E I^4 k^4 L^6 P - 3 853 125 A^2 E I^3 G^2 k^3 L^7 P - \\
& 270 000 A E I^3 G k^4 L^8 P - 43 375 A^3 E I^2 G^3 k^3 L^9 P - 4 275 A^2 E I^2 G^2 k^4 L^{10} P - 13 A^3 E I G^3 k^4 L^{12} P)) / \\
& (118 652 343 750 000 A^5 E I^5 G^5 + 355 957 031 250 000 A^4 E I^5 G^4 k L + 166 113 281 250 000 A^3 E I^5 G^3 k^2 L^2 + \\
& 71 191 406 250 000 A^5 E I^4 G^5 k L^3 + 26 578 125 000 000 A^2 E I^5 G^2 k^3 L^3 + \\
& 53 599 218 750 000 A^4 E I^4 G^4 k^2 L^4 + 1 708 593 750 000 A E I^5 G k^4 L^4 + 10 403 437 500 000 A^3 E I^4 G^3 k^3 L^5 + \\
& 37 968 750 000 E I^5 k^5 L^5 + 1 165 429 687 500 A^5 E I^3 G^5 k^2 L^6 + 744 187 500 000 A^2 E I^4 G^2 k^4 L^6 + \\
& 386 268 750 000 A^4 E I^3 G^4 k^3 L^7 + 17 718 750 000 A E I^4 G k^5 L^7 + 36 298 125 000 A^3 E I^3 G^3 k^4 L^8 + \\
& 2 543 625 000 A^5 E I^2 G^5 k^3 L^9 + 1 029 375 000 A^2 E I^3 G^2 k^5 L^9 + 435 375 000 A^4 E I^2 G^4 k^4 L^{10} + \\
& 17 100 000 A^3 E I^2 G^3 k^5 L^{11} + 1 335 375 A^5 E I G^5 k^4 L^{12} + 99 375 A^4 E I G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15}) \\
R4 = & (2250 A^2 E I G^2 k L (21 093 750 000 A^2 E I^4 G^2 + 2 109 375 000 A E I^4 G k L + \\
& 3 656 250 000 A^3 E I^3 G^3 L^2 - 660 937 500 A^2 E I^3 G^2 k L^3 - 135 000 000 A E I^3 G k^2 L^4 - \\
& 53 062 500 A^3 E I^2 G^3 k L^5 - 3 375 000 E I^3 k^3 L^5 - 8 325 000 A^2 E I^2 G^2 k^2 L^6 - \\
& 202 500 A E I^2 G k^3 L^7 - 19 500 A^3 E I G^3 k^2 L^8 + 450 A^2 E I G^2 k^3 L^9 + 7 A^3 G^3 k^3 L^{11}) P) /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,L + 166\,113\,281\,250\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L^2 + \\
& 71\,191\,406\,250\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^3 + 26\,578\,125\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^3 + \\
& 53\,599\,218\,750\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^4 + 1\,708\,593\,750\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^4 + 10\,403\,437\,500\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^5 + \\
& 37\,968\,750\,000\,EI^5\,k^5\,L^5 + 1\,165\,429\,687\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^6 + 744\,187\,500\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^6 + \\
& 386\,268\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^7 + 17\,718\,750\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^7 + 36\,298\,125\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^8 + \\
& 2\,543\,625\,000\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^9 + 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + \\
& 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15}) \\
R5 = & - \left((4500\,A^2\,G^2\,L (-5\,273\,437\,500\,A^2\,EI^5\,G^2\,k\,P - 492\,187\,500\,A^3\,EI^4\,G^3\,k\,L^2\,P + 632\,812\,500\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^2\,L^3\,P + 59\,062\,500\,A\,EI^4\,G\,k^3\,L^4\,P + 13\,500\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^2\,L^5\,P + 1\,687\,500\,EI^4\,k^4\,L^5\,P + 225\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^6\,P - 10\,875\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^8\,P - 225\,A^2\,EI^2\,G^2\,k^4\,L^9\,P + A^3\,EI\,G^3\,k^4\,L^{11}\,P)) \right) / \\
& (118\,652\,343\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5 + 355\,957\,031\,250\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k\,L + 166\,113\,281\,250\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^2\,L^2 + \\
& 71\,191\,406\,250\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k\,L^3 + 26\,578\,125\,000\,000\,A^2\,EI^5\,G^2\,k^3\,L^3 + \\
& 53\,599\,218\,750\,000\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^2\,L^4 + 1\,708\,593\,750\,000\,A\,EI^5\,G\,k^4\,L^4 + \\
& 10\,403\,437\,500\,000\,A^3\,EI^4\,G^3\,k^3\,L^5 + 37\,968\,750\,000\,EI^5\,k^5\,L^5 + 1\,165\,429\,687\,500\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^2\,L^6 + \\
& 744\,187\,500\,000\,A^2\,EI^4\,G^2\,k^4\,L^6 + 386\,268\,750\,000\,A^4\,EI^3\,G^4\,k^3\,L^7 + \\
& 17\,718\,750\,000\,A\,EI^4\,G\,k^5\,L^7 + 36\,298\,125\,000\,A^3\,EI^3\,G^3\,k^4\,L^8 + 2\,543\,625\,000\,A^5\,EI^2\,G^5\,k^3\,L^9 + \\
& 1\,029\,375\,000\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^5\,L^9 + 435\,375\,000\,A^4\,EI^2\,G^4\,k^4\,L^{10} + 17\,100\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^5\,L^{11} + \\
& 1\,335\,375\,A^5\,EI\,G^5\,k^4\,L^{12} + 99\,375\,A^4\,EI\,G^4\,k^5\,L^{13} + 181\,A^5\,G^5\,k^5\,L^{15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[] = & - \left(\left((-160\,180\,664\,062\,500\,000\,A^4\,EI^7\,G^4\,k^5\,L^7 - 16\,018\,066\,406\,250\,000\,A^3\,EI^7\,G^3\,k^6\,L^8 - \right. \right. \\
& 59\,800\,781\,250\,000\,000\,A^5\,EI^6\,G^5\,k^5\,L^9 + 1\,815\,380\,859\,375\,000\,A^4\,EI^6\,G^4\,k^6\,L^{10} - \\
& 7\,346\,953\,125\,000\,000\,A^6\,EI^5\,G^6\,k^5\,L^{11} + 1\,025\,156\,250\,000\,000\,A^3\,EI^6\,G^3\,k^7\,L^{11} + \\
& 1\,227\,339\,843\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5\,k^6\,L^{12} + 25\,628\,906\,250\,000\,A^2\,EI^6\,G^2\,k^8\,L^{12} - \\
& 329\,568\,750\,000\,000\,A^7\,EI^4\,G^7\,k^5\,L^{13} + 268\,249\,218\,750\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k^7\,L^{13} + \\
& 134\,940\,937\,500\,000\,A^6\,EI^4\,G^6\,k^6\,L^{14} + 6\,663\,515\,625\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^8\,L^{14} - \\
& 3\,224\,812\,500\,000\,A^8\,EI^3\,G^8\,k^5\,L^{15} + 24\,273\,421\,875\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k^7\,L^{15} + \\
& 5\,095\,912\,500\,000\,A^7\,EI^3\,G^7\,k^6\,L^{16} + 591\,173\,437\,500\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^8\,L^{16} + \\
& 856\,726\,875\,000\,A^6\,EI^3\,G^6\,k^7\,L^{17} + 46\,801\,125\,000\,A^8\,EI^2\,G^8\,k^6\,L^{18} + \\
& 19\,462\,781\,250\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^8\,L^{18} + 9\,001\,125\,000\,A^7\,EI^2\,G^7\,k^7\,L^{19} + 129\,701\,250\,A^6\,EI^2\,G^6\,k^8\,L^{20} + \\
& 17\,199\,000\,A^8\,EI\,G^8\,k^7\,L^{21} - 992\,250\,A^7\,EI\,G^7\,k^8\,L^{22} - 6174\,A^8\,G^8\,k^8\,L^{24}) \\
& \left((-25\,312\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 2\,700\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 31\,500\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9) \right. \\
& \left((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) \left((-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) \left(300\,EI\,k\,L\,P + 52\,A\,G\,k\,L^3\,P \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3) \left(375\,EI\,k\,L\,P + 125\,A\,G\,k\,L^3\,P \right) \right) - \right. \\
& \left((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) \left(-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3 \right) - (-150\,EI\,k\,L - \right. \\
& \left. 26\,A\,G\,k\,L^3) \left(-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \left((150\,EI\,k\,L + 11\,A\,G\,k\,L^3) \left(375\,EI\,k\,L\,P + \right. \right. \\
& \left. \left. 125\,A\,G\,k\,L^3\,P \right) + (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) \left(600\,EI\,k\,L\,P + 176\,A\,G\,k\,L^3\,P \right) \right) \left. \right) + \\
& \left((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) \left((-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) \left(-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. (-225\,EI\,k\,L - 54\,A\,G\,k\,L^3) \left(-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) + \right. \\
& \left((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) \left(-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3 \right) - \right. \\
& \left. (-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) \left(-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \left((-450\,EI\,k\,L - 81\,A\,G\,k\,L^3) \right. \\
& \left. (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) + (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) \left(225\,EI\,k\,L + 54\,A\,G\,k\,L^3 \right) \right) \left. \right) \\
& \left((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) \left((-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) \left(450\,EI\,k\,L\,P + 108\,A\,G\,k\,L^3\,P \right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-150 EI k L - 8 AG k L^3) (375 EI k L P + 125 AG k L^3 P) - \\
& ((-300 EI k L - 28 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + (-150 EI k L - 8 AG k L^3) \\
& (150 EI k L + 26 AG k L^3)) ((150 EI k L + 11 AG k L^3) (375 EI k L P + 125 AG k L^3 P) + \\
& (-75 EI k L - 7 AG k L^3) (600 EI k L P + 176 AG k L^3 P))) - \\
& ((-25 312 500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 - 2 700 000 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 - 31 500 A^4 EI G^4 k^3 L^9) \\
& ((-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-300 EI k L - 40 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) - \\
& (-300 EI k L - 88 AG k L^3) (-150 EI k L - 5 AG k L^3)) - \\
& ((-750 A EI G - 300 EI k L - 16 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) - (-150 EI k L - \\
& 26 AG k L^3) (-150 EI k L - 5 AG k L^3)) ((-750 A EI G - 600 EI k L - 128 AG k L^3) \\
& (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + (-150 EI k L - 11 AG k L^3) (300 EI k L + 88 AG k L^3))) - \\
& ((-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-300 EI k L - 28 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) - \\
& (-225 EI k L - 54 AG k L^3) (-150 EI k L - 5 AG k L^3)) - \\
& ((-750 A EI G - 300 EI k L - 16 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) - \\
& (-150 EI k L - 26 AG k L^3) (-150 EI k L - 5 AG k L^3)) ((-450 EI k L - 81 AG k L^3) \\
& (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + (-150 EI k L - 11 AG k L^3) (225 EI k L + 54 AG k L^3))) \\
& (-((-300 EI k L - 28 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + (-150 EI k L - 8 AG k L^3) \\
& (150 EI k L + 26 AG k L^3)) ((-750 A EI G - 600 EI k L - 128 AG k L^3) \\
& (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + (-150 EI k L - 11 AG k L^3) (300 EI k L + 88 AG k L^3)) + \\
& (-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-450 EI k L - 81 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + \\
& (-150 EI k L - 8 AG k L^3) (300 EI k L + 88 AG k L^3)))) \\
& ((-25 312 500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 - 2 700 000 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 - 31 500 A^4 EI G^4 k^3 L^9) \\
& ((-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-75 EI k L - 7 AG k L^3) (150 EI k L P + 14 AG k L^3 P) - \\
& (-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3) (375 EI k L P + 125 AG k L^3 P)) - \\
& ((-75 EI k L - 7 AG k L^3) (-150 EI k L - 5 AG k L^3) - (-150 EI k L - 26 AG k L^3) \\
& (-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3)) ((150 EI k L + 11 AG k L^3) (375 EI k L P + \\
& 125 AG k L^3 P) + (-75 EI k L - 7 AG k L^3) (600 EI k L P + 176 AG k L^3 P))) + \\
& (-(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-150 EI k L - 8 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) - \\
& (-225 EI k L - 54 AG k L^3) (-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3)) + \\
& ((-75 EI k L - 7 AG k L^3) (-150 EI k L - 5 AG k L^3) - (-150 EI k L - 26 AG k L^3) \\
& (-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3)) ((-450 EI k L - 81 AG k L^3) \\
& (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + (-150 EI k L - 11 AG k L^3) (225 EI k L + 54 AG k L^3))) \\
& ((-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6) ((-75 EI k L - 7 AG k L^3) (450 EI k L P + 108 AG k L^3 P) - \\
& (-150 EI k L - 8 AG k L^3) (375 EI k L P + 125 AG k L^3 P)) - \\
& ((-300 EI k L - 28 AG k L^3) (-75 EI k L - 7 AG k L^3) + (-150 EI k L - 8 AG k L^3) \\
& (150 EI k L + 26 AG k L^3)) ((150 EI k L + 11 AG k L^3) (375 EI k L P + 125 AG k L^3 P) + \\
& (-75 EI k L - 7 AG k L^3) (600 EI k L P + 176 AG k L^3 P)))) / \\
& ((-160 180 664 062 500 000 A^4 EI^7 G^4 k^5 L^7 - 16 018 066 406 250 000 A^3 EI^7 G^3 k^6 L^8 - \\
& 59 800 781 250 000 000 A^5 EI^6 G^5 k^5 L^9 + \\
& 1 815 380 859 375 000 A^4 EI^6 G^4 k^6 L^{10} - \\
& 7 346 953 125 000 000 A^6 EI^5 G^6 k^5 L^{11} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1\,025\,156\,250\,000\,000\,A^3\,EI^6\,G^3\,k^7\,L^{11} + \\
& 1\,227\,339\,843\,750\,000\,A^5\,EI^5\,G^5\,k^6\,L^{12} + \\
& 25\,628\,906\,250\,000\,A^2\,EI^6\,G^2\,k^8\,L^{12} - \\
& 329\,568\,750\,000\,000\,A^7\,EI^4\,G^7\,k^5\,L^{13} + \\
& 268\,249\,218\,750\,000\,A^4\,EI^5\,G^4\,k^7\,L^{13} + \\
& 134\,940\,937\,500\,000\,A^6\,EI^4\,G^6\,k^6\,L^{14} + \\
& 6\,663\,515\,625\,000\,A^3\,EI^5\,G^3\,k^8\,L^{14} - \\
& 3\,224\,812\,500\,000\,A^8\,EI^3\,G^8\,k^5\,L^{15} + \\
& 24\,273\,421\,875\,000\,A^5\,EI^4\,G^5\,k^7\,L^{15} + \\
& 5\,095\,912\,500\,000\,A^7\,EI^3\,G^7\,k^6\,L^{16} + 591\,173\,437\,500\,A^4\,EI^4\,G^4\,k^8\,L^{16} + \\
& 856\,726\,875\,000\,A^6\,EI^3\,G^6\,k^7\,L^{17} + 46\,801\,125\,000\,A^8\,EI^2\,G^8\,k^6\,L^{18} + \\
& 19\,462\,781\,250\,A^5\,EI^3\,G^5\,k^8\,L^{18} + 9\,001\,125\,000\,A^7\,EI^2\,G^7\,k^7\,L^{19} + \\
& 129\,701\,250\,A^6\,EI^2\,G^6\,k^8\,L^{20} + 17\,199\,000\,A^8\,EI\,G^8\,k^7\,L^{21} - \\
& 992\,250\,A^7\,EI\,G^7\,k^8\,L^{22} - 6174\,A^8\,G^8\,k^8\,L^{24}) \\
& ((-25\,312\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 2\,700\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 31\,500\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9) \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 52\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - \\
& (-375\,A\,EI\,G - 375\,EI\,k\,L - 125\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-150\,EI\,k\,L - \\
& 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) ((-600\,EI\,k\,L - 176\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - \\
& 7\,A\,G\,k\,L^3) + (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) (375\,A\,EI\,G + 375\,EI\,k\,L + 125\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - \\
& (-225\,EI\,k\,L - 54\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - \\
& (-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) ((-450\,EI\,k\,L - 81\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) + (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) (225\,EI\,k\,L + 54\,A\,G\,k\,L^3))) \\
& (-((-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) + (-150\,EI\,k\,L - 8\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (150\,EI\,k\,L + 26\,A\,G\,k\,L^3)) ((-600\,EI\,k\,L - 176\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) + \\
& (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) (375\,A\,EI\,G + 375\,EI\,k\,L + 125\,A\,G\,k\,L^3))) + \\
& (-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-450\,EI\,k\,L - 108\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) + \\
& (-150\,EI\,k\,L - 8\,A\,G\,k\,L^3) (375\,A\,EI\,G + 375\,EI\,k\,L + 125\,A\,G\,k\,L^3)))) - \\
& ((-25\,312\,500\,A^2\,EI^3\,G^2\,k^3\,L^5 - 2\,700\,000\,A^3\,EI^2\,G^3\,k^3\,L^7 - 31\,500\,A^4\,EI\,G^4\,k^3\,L^9) \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 40\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - \\
& (-300\,EI\,k\,L - 88\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - (-150\,EI\,k\,L - \\
& 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) ((-750\,A\,EI\,G - 600\,EI\,k\,L - 128\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) + (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) (300\,EI\,k\,L + 88\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-450\,A\,EI\,G\,k^2\,L^4 - 6\,A^2\,G^2\,k^2\,L^6) ((-300\,EI\,k\,L - 28\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - \\
& (-225\,EI\,k\,L - 54\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3))) - \\
& ((-750\,A\,EI\,G - 300\,EI\,k\,L - 16\,A\,G\,k\,L^3) (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) - \\
& (-150\,EI\,k\,L - 26\,A\,G\,k\,L^3) (-150\,EI\,k\,L - 5\,A\,G\,k\,L^3)) ((-450\,EI\,k\,L - 81\,A\,G\,k\,L^3) \\
& (-75\,EI\,k\,L - 7\,A\,G\,k\,L^3) + (-150\,EI\,k\,L - 11\,A\,G\,k\,L^3) (225\,EI\,k\,L + 54\,A\,G\,k\,L^3))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(- \left(\left(-300 EI k L - 28 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) + \left(-150 EI k L - 8 AG k L^3 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left(150 EI k L + 26 AG k L^3 \right) \right) \left(\left(-750 A EI G - 600 EI k L - 128 AG k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) + \left(-150 EI k L - 11 AG k L^3 \right) \left(300 EI k L + 88 AG k L^3 \right) \right) + \\
& \quad \left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-450 EI k L - 81 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. \left(-150 EI k L - 8 AG k L^3 \right) \left(300 EI k L + 88 AG k L^3 \right) \right) \left. \right) \\
& \left(\left(-25 312 500 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^5 - 2 700 000 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^7 - 31 500 A^4 EI G^4 k^3 L^9 \right) \right. \\
& \quad \left(\left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-150 EI k L - 14 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left(-375 A EI G - 375 EI k L - 125 AG k L^3 \right) \left(-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3 \right) \right) - \\
& \quad \left(\left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 5 AG k L^3 \right) - \left(-150 EI k L - 26 AG k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left(-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3 \right) \right) \left(\left(-600 EI k L - 176 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 7 AG k L^3 \right) + \left(-150 EI k L - 11 AG k L^3 \right) \left(375 A EI G + 375 EI k L + 125 AG k L^3 \right) \right) \left. \right) - \\
& \quad \left(\left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-150 EI k L - 8 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left(-225 EI k L - 54 AG k L^3 \right) \left(-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3 \right) \right) - \\
& \quad \left(\left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) \left(-150 EI k L - 5 AG k L^3 \right) - \left(-150 EI k L - 26 AG k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left(-750 A EI G - 150 EI k L - 2 AG k L^3 \right) \right) \left(\left(-450 EI k L - 81 AG k L^3 \right) \right. \\
& \quad \left. \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) + \left(-150 EI k L - 11 AG k L^3 \right) \left(225 EI k L + 54 AG k L^3 \right) \right) \left. \right) \\
& \left(- \left(\left(-300 EI k L - 28 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) + \left(-150 EI k L - 8 AG k L^3 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left(150 EI k L + 26 AG k L^3 \right) \right) \left(\left(-600 EI k L - 176 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. \left(-150 EI k L - 11 AG k L^3 \right) \left(375 A EI G + 375 EI k L + 125 AG k L^3 \right) \right) + \\
& \quad \left(-450 A EI G k^2 L^4 - 6 A^2 G^2 k^2 L^6 \right) \left(\left(-450 EI k L - 108 AG k L^3 \right) \left(-75 EI k L - 7 AG k L^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. \left(-150 EI k L - 8 AG k L^3 \right) \left(375 A EI G + 375 EI k L + 125 AG k L^3 \right) \right) \left. \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[*]= & \left(3750 k L \left(25 312 500 000 A^4 EI^5 G^4 P + 12 656 250 000 A^3 EI^5 G^3 k L P + \right. \right. \\
& \quad 7 425 000 000 A^5 EI^4 G^5 L^2 P + 1 518 750 000 A^2 EI^5 G^2 k^2 L^2 P + 4 792 500 000 A^4 EI^4 G^4 k L^3 P + \\
& \quad 50 625 000 A EI^5 G k^3 L^3 P + 627 750 000 A^3 EI^4 G^3 k^2 L^4 P + 95 062 500 A^5 EI^3 G^5 k L^5 P + \\
& \quad 21 937 500 A^2 EI^4 G^2 k^3 L^5 P + 20 587 500 A^4 EI^3 G^4 k^2 L^6 P + 924 750 A^3 EI^3 G^3 k^3 L^7 P + \\
& \quad \left. \left. 109 800 A^5 EI^2 G^5 k^2 L^8 P + 8985 A^4 EI^2 G^4 k^3 L^9 P + 22 A^5 EI G^5 k^3 L^{11} P \right) \right) / \\
& \left(118 652 343 750 000 A^5 EI^5 G^5 + 355 957 031 250 000 A^4 EI^5 G^4 k L + 166 113 281 250 000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + \right. \\
& \quad 71 191 406 250 000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + 26 578 125 000 000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + \\
& \quad 53 599 218 750 000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + 1 708 593 750 000 A EI^5 G k^4 L^4 + \\
& \quad 10 403 437 500 000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + 37 968 750 000 EI^5 k^5 L^5 + 1 165 429 687 500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + \\
& \quad 744 187 500 000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + 386 268 750 000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + \\
& \quad 17 718 750 000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36 298 125 000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + 2 543 625 000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + \\
& \quad 1 029 375 000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435 375 000 A^4 EI^2 G^4 k^4 L^{10} + 17 100 000 A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + \\
& \quad \left. \left. 1 335 375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99 375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Out}[*]= \left(4500 A^2 G^2 \left(15 820 312 500 A^2 EI^5 G^2 k L P + 4 218 750 000 A EI^5 G K^2 L^2 P + 3 796 875 000 A^3 EI^4 G^3 k L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 210 937 500 EI^5 k^3 L^3 P + 1 125 000 000 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^4 P + 33 750 000 A EI^4 G k^3 L^5 P - \right. \right. \\ \left. \left. 2 625 000 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^6 P - 1 687 500 EI^4 k^4 L^6 P - 3 853 125 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^7 P - \right. \right. \\ \left. \left. 270 000 A EI^3 G k^4 L^8 P - 43 375 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^9 P - 4275 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^{10} P - 13 A^3 EI G^3 k^4 L^{12} P \right) \right) / \\ \left(118 652 343 750 000 A^5 EI^5 G^5 + 355 957 031 250 000 A^4 EI^5 G^4 k L + 166 113 281 250 000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 71 191 406 250 000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + 26 578 125 000 000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + \right. \\ \left. 53 599 218 750 000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + 1 708 593 750 000 A EI^5 G k^4 L^4 + 10 403 437 500 000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + \right. \\ \left. 37 968 750 000 EI^5 k^5 L^5 + 1 165 429 687 500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + 744 187 500 000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + \right. \\ \left. 386 268 750 000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + 17 718 750 000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36 298 125 000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 2 543 625 000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + 1 029 375 000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435 375 000 A^4 EI^2 G^4 k^4 L^{10} + \right. \\ \left. 17 100 000 A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + 1 335 375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99 375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15} \right)$$

$$\text{Out}[*]= \left(2250 A^2 EI G^2 k L \left(21 093 750 000 A^2 EI^4 G^2 + 2 109 375 000 A EI^4 G k L + \right. \right. \\ \left. \left. 3 656 250 000 A^3 EI^3 G^3 L^2 - 660 937 500 A^2 EI^3 G^2 k L^3 - 135 000 000 A EI^3 G k^2 L^4 - \right. \right. \\ \left. \left. 53 062 500 A^3 EI^2 G^3 k L^5 - 3 375 000 EI^3 k^3 L^5 - 8 325 000 A^2 EI^2 G^2 k^2 L^6 - \right. \right. \\ \left. \left. 202 500 A EI^2 G k^3 L^7 - 19 500 A^3 EI G^3 k^2 L^8 + 450 A^2 EI G^2 k^3 L^9 + 7 A^3 G^3 k^3 L^{11} \right) P \right) / \\ \left(118 652 343 750 000 A^5 EI^5 G^5 + 355 957 031 250 000 A^4 EI^5 G^4 k L + 166 113 281 250 000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 71 191 406 250 000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + 26 578 125 000 000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + \right. \\ \left. 53 599 218 750 000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + 1 708 593 750 000 A EI^5 G k^4 L^4 + 10 403 437 500 000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + \right. \\ \left. 37 968 750 000 EI^5 k^5 L^5 + 1 165 429 687 500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + 744 187 500 000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + \right. \\ \left. 386 268 750 000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + 17 718 750 000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36 298 125 000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + \right. \\ \left. 2 543 625 000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + 1 029 375 000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435 375 000 A^4 EI^2 G^4 k^4 L^{10} + \right. \\ \left. 17 100 000 A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + 1 335 375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99 375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15} \right)$$

$$\text{Out}[*]= - \left(4500 A^2 G^2 L \left(-5 273 437 500 A^2 EI^5 G^2 k P - 492 187 500 A^3 EI^4 G^3 k L^2 P + 632 812 500 A^2 EI^4 G^2 k^2 L^3 P + \right. \right. \\ \left. \left. 59 062 500 A EI^4 G k^3 L^4 P + 13 500 000 A^3 EI^3 G^3 k^2 L^5 P + 1 687 500 EI^4 k^4 L^5 P + \right. \right. \\ \left. \left. 225 000 A^2 EI^3 G^2 k^3 L^6 P - 10 875 A^3 EI^2 G^3 k^3 L^8 P - 225 A^2 EI^2 G^2 k^4 L^9 P + A^3 EI G^3 k^4 L^{11} P \right) \right) / \\ \left(118 652 343 750 000 A^5 EI^5 G^5 + 355 957 031 250 000 A^4 EI^5 G^4 k L + 166 113 281 250 000 A^3 EI^5 G^3 k^2 L^2 + \right. \\ \left. 71 191 406 250 000 A^5 EI^4 G^5 k L^3 + 26 578 125 000 000 A^2 EI^5 G^2 k^3 L^3 + \right. \\ \left. 53 599 218 750 000 A^4 EI^4 G^4 k^2 L^4 + 1 708 593 750 000 A EI^5 G k^4 L^4 + \right. \\ \left. 10 403 437 500 000 A^3 EI^4 G^3 k^3 L^5 + 37 968 750 000 EI^5 k^5 L^5 + 1 165 429 687 500 A^5 EI^3 G^5 k^2 L^6 + \right. \\ \left. 744 187 500 000 A^2 EI^4 G^2 k^4 L^6 + 386 268 750 000 A^4 EI^3 G^4 k^3 L^7 + \right. \\ \left. 17 718 750 000 A EI^4 G k^5 L^7 + 36 298 125 000 A^3 EI^3 G^3 k^4 L^8 + 2 543 625 000 A^5 EI^2 G^5 k^3 L^9 + \right. \\ \left. 1 029 375 000 A^2 EI^3 G^2 k^5 L^9 + 435 375 000 A^4 EI^2 G^4 k^4 L^{10} + 17 100 000 A^3 EI^2 G^3 k^5 L^{11} + \right. \\ \left. 1 335 375 A^5 EI G^5 k^4 L^{12} + 99 375 A^4 EI G^4 k^5 L^{13} + 181 A^5 G^5 k^5 L^{15} \right)$$

```

In[ ]:= (*DATOS DEL PROBLEMA*)
  B = 0.80 (*m*)
  H = 1.20 (*m*)
  ks = 10 000 000 (*N/m^3*)
      |valor numérico
  Ec = 21 707 945 522.8 (*N/m^2*)
      |valor numérico
  Iz = (B * H^3) / 12 (*m^4*)

  (*SE OTORGAN VALORES A LAS VARIABLES*)
  k = ks * B (*N/m^2*)
      |valor numérico
  L = 10 (*m*)
  P = 100 (*N*)
      |valor numérico
  EI = Ec * Iz (*N*m^2*)
      |valor numérico
  v = 0.35
  G =  $\frac{Ec}{2(1+v)}$ 
  A = B * H

Out[ ]:= 0.8
Out[ ]:= 1.2
Out[ ]:= 10 000 000
Out[ ]:=  $2.17079 \times 10^{10}$ 
Out[ ]:= 0.1152
Out[ ]:=  $8. \times 10^6$ 
Out[ ]:= 10
Out[ ]:= 100
Out[ ]:=  $2.50076 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.35
Out[ ]:=  $8.03998 \times 10^9$ 
Out[ ]:= 0.96

```

In[]:=

(*FINALMENTE SE TIENE LA GRÁFICA*)

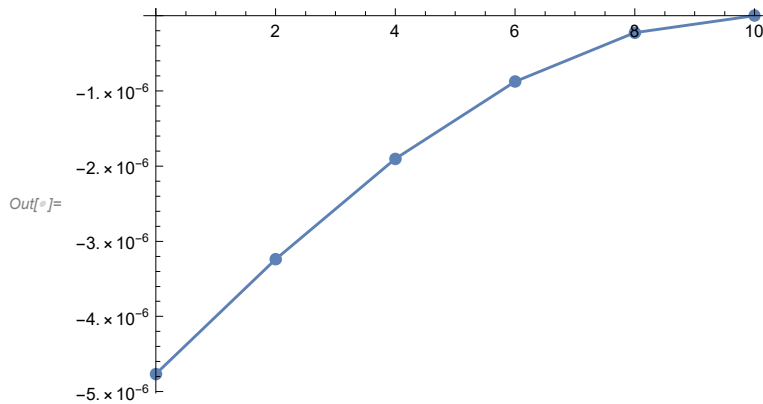
```

g9 = ListLinePlot[{{0, -R1 / k}, {L/5, -R2 / k}, {2L/5, -R3 / k},
  gráfico de línea de una lista
  {3L/5, -R4 / k}, {4L/5, -R5 / k}, {L, 0}}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  origen de ejes rango de rep... [todo]

g10 = ListPlot[{{0, -R1 / k}, {L/5, -R2 / k}, {2L/5, -R3 / k}, {3L/5, -R4 / k}, {4L/5, -R5 / k},
  representación de lista
  {L, 0}}, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
  estilo de repr... tamaño de punto origen de ejes rango de rep... [todo]

Show[
  muestra
  g9,
  g10]

```



Bibliografía

- [1] Adel A. Al-Azzawi. Analysis of timoshenko beam resting on nonlinear compressional and frictional winkler foundation. *ARPJ*, 6:100–113, 2011.
- [2] J. Boussinesq. *Application des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Élastique*. Gauthier-Villars and Imprimeur-Libraire, Paris, France, 1885.
- [3] J.S. Brénousky. Modelling the interaction between structure and soil for shallow foundations. Master's thesis, The University of Auckland, New zealand, 2009.
- [4] A. Caselunghe and J. Eriksson. Structural element approaches for soil-structure interaction. Master's thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2012.
- [5] S. Chandra. *Modelling of soil behaviour*. PhD thesis, indian institute of management kanpur, Kanpur, India, 2014.
- [6] Chandrakant S. Desai. *Elementary Finite Element Method*. Prentice Hall, New Jersey, United States, 1979.
- [7] E. R. Johnston Jr. F. P. Beer and P. J. Cornwell. *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. Mc Graw Hill Educación, CDMX, México, novena edition, 1973.
- [8] J. M. Gere and B. J. Goodno. *Mecánica de materiales*. Cengage Learning, CDMX, México, 2016.
- [9] William Anthony Granville. *Cálculo diferencial e integral*. Limusa, CDMX, México, 2009.
- [10] A. Haque. *Timoshenko Beam theory*. Independently published, USA, 2019.
- [11] M. Hetényi. *Beams on elastic foundation*. The Waverly Press, Michigan, USA, 1946.
- [12] R.C. Hibbeler. *Ingeniería mecánica: Estática*. Pearson Educación México, Estado de México, México, 2010.
- [13] R.C. Hibbeler. *Mecánica de materiales*. Pearson Educación México, Estado de México, México, 2011.

- [14] R.C. Hibbeler. *Análisis estructural*. Pearson Educación México, Estado de México, México, 2012.
- [15] Yuan-Yu Hsieh. *Teoría Elemental de Estructuras*. Prentice-Hall Hispanoamericana, CDMX, México, 1973.
- [16] T. Iancu-Bogdan. *Beams elastic foundation: The simplified continuum aproach*. PhD thesis, Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi”, Iași, Rumanía, 2009.
- [17] S.E. J. E. Bowles, P.E. *Foundation analysis and desing*. McGraw Hill Education, New York, United States, 1997.
- [18] C. M. Wang J.N. Reddy and K. H. Lee. *Shear deformable beams and plates*. Elsevier, Oxford, 2000.
- [19] G. Jones. *Analysis of beams on elastic foundations using finite difference theory*. Thomas Telford Services, Heron Quay, London, 1997.
- [20] K. E. Kurrer. *The History of the Theory of the Structures: Searching for Equilibrium*. Ernst and Sohn, Berlin, Germany, 2018.
- [21] R. Luthe. *Análisis estructural*. Alfaomega, Estado de México, México, 1971.
- [22] Iain A. MacLeod. *Modern structural analysis*. Thomas Telford, USA, 2005.
- [23] A. S. Naranjo. Modelo de winkler para el análisis de la respuesta dinámica de estructuras enterradas. Master’s thesis, Universidad de las Palmas de Gran Canaria, España, 2010.
- [24] S. Parvanova. Lecture notes: Structural analysis two. *Lecture notes: Structural Analysis II*, 195:111–125, 2011.
- [25] E. M. López Salinas. *Análisis de elementos viga-columna en régimen no lineal con deformación cortante*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, España, 2015.
- [26] R. L. Taylor. FEAP: A Finite Element Analysis Program. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley.
- [27] R. L. Taylor. FEAP: A Finite Element Analysis Program, theory manual. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2008.
- [28] S. P. Timoshenko. *Resistencia de Materiales, Primera parte*. Espasa-Calpe, S.A., Madrid, España, 1957.
- [29] S. P. Timoshenko and J. M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications, Inc., New York, United States, second edition, 2009.
- [30] Stephen P. Timoshenko. *History of strength of materials*. Dover Publications, New York, USA, 1983.

- [31] E. Tsudik. *Analysis of structures on elastic Foundations*. J. Ross Publishing, Florida, Miami, 1933.
- [32] A. C. Ugural and S. K. Fenster. *Advance mechanics of materials and applied elasticity*. Pretince Hall, New Jersey, United States, 2012.
- [33] J. F. Vázquez. *Casos especiales en flexión de vigas*. Instituto Politécnico Nacional, CDMX, México, 2015.
- [34] T.M. Wang and L.W. Gagnon. Vibrations of continuous timoshenko beams on winkler-pasternak foundations. *Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak Foundations.*, 590:112–125, 1978.
- [35] L. M. Wotherspoon. *Integrated Modelling Of Structure-Foundation Systems*. PhD thesis, The University of Auckland, Nueva Zelanda, 2009.
- [36] E. Juárez y A. Rico. *Mecánica de suelos, tomo 1*. Limusa, CDMX, México, 2017.
- [37] L. G. Tham Y. H. Wang and Y. K. Cheung. Beams and plates on elastic foundations: a review. *BEF*, 7:174–182, 2005.
- [38] S. P. Timoshenko y J. N. Goodier. *Teoría de la elasticidad*. Urmo , S.A de ediciones, Bilbao, España, 1975.
- [39] J. Retama y R. Heras. Cálculo numérico de la matriz de flexibilidades de vigas de sección variable, con elementos finitos. *Revista Digital de Posgrado, FES Aragón, UNAM*, 1:22–31, 2020.
- [40] C. Magdaleno y R. Rojas. *Diseño de cimentaciones*. Instituto Politécnico Nacional, CDMX, México, 1983.
- [41] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *El método de los elementos finitos*. McGraw Hill, Barcelona, España, 1994.

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mi madre, **Alma Delia Francisco Martínez**, que durante toda la vida me ayudo a seguir mis objetivos sin importar cuales fueran. Al igual quiero agradecer a mi hermano **Luis Gonzalo Sarmiento Francisco**, por su apoyo incondicional en todo momento para seguir adelante siempre.

Igualmente quiero agradecerle al **Dr. Jaime Retama Velasco**, pilar importante y asesor de éste proyecto de tesis, por su invaluable contribución, su paciencia y su tiempo, ya que siempre estuvo en la disposición de apoyar y nunca escatimó en recursos para llevar a cabo este proyecto.

A la *Dirección General de Asuntos del personal Académico* de la **UNAM**, por el apoyo otorgado para el desarrollo de este proyecto de tesis, a través del proyecto de investigación **PAPIIT: Estudio del Agrietamiento Termomecánico de Estructuras Masivas de Concreto**, clave **IN116419**

A la toda la **UNAM**, por siempre otorgar apoyo a estudiantes para seguir con su trayectoria académica y en específico a la **Facultad de Estudios Superiores, Aragón**; a todos los profesores que hacen de ésta Facultad una de las mejores en el gremio, al **Ing. Oniel García Balanzar**, que siempre ha estado al pendiente de los alumnos, necesidades académicas y su apoyo en todo momento, incluso en momentos difíciles de pandemia, al **Ing. Juan Carlos Ortiz León**, jefe de la Carrera de Ingeniería Civil, que siempre apoyado a los estudiantes a seguir adelante, de igual forma quiero agradecer al **M. en I. Mario Sosa Rodríguez** quien ha sido un profesor con quien siempre pude contar y fue asesor del Comité Técnico Estudiantil AMAAC Aragón, cuando forme parte de él.

De todo corazón, gracias por todo.

Sergio Sarmiento Francisco
Ciudad Nezahualcoyotl, Estado de México,
2021