



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

HOMOGENEIZACIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS PERIÓDICOS
TERMO-MAGNETO-ELECTRO-ELÁSTICOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
LIC. ROGELIO OSCAR CABALLERO PÉREZ

DR. JULIÁN BRAVO CASTILLERO
(INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS, UNAM)

DR. FEDERICO SABINA CISCAR
(INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS, UNAM)

DR. RICARDO MANSILLA CORONA
(CENTRO DE INVESTIGACIONES INTERDISCIPLINARIAS EN CIENCIAS Y
HUMANIDADES, UNAM)

CIUDAD DE MÉXICO, 21 DE JUNIO DE 2021.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Acrónimos y símbolos

| | |
|-----------|---|
| MC | Material Compuesto |
| MEF | Método de Elemento Finito |
| MHA | Método de Homogeneización Asintótica |
| HHE | Hipótesis de Homogeneidad Equivalente |
| TMEE | Termo-Magneto-Electro-Elastico |
| TRF, MTRF | Transformada Rápida de Fourier, Método de la... |
| CFP | Condición de Frontera Periódica |
| MI, MD | Miembro izquierdo, miembro derecho |
| HR | Homogeneización Recursiva |

| | |
|---|--|
| \mathbf{A}^t | Matriz o vector \mathbf{A} transpuesto |
| (\mathbf{a}, \mathbf{b}) | Producto escalar usual de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} de \mathbb{R}^n |
| $f_{,i}$ | Derivada de f respecto a x_i |
| f^ε | Propiedad f a deformación constante |
| f^σ | Propiedad f a tensión constante |
| c_{ijkl} | Rigidez elástica |
| e_{lij} | Módulo piezoeléctrico a deformación constante |
| d_{lij} | Módulo piezoeléctrico a tensión constante |
| q_{lij} | Módulo piezomagnético a deformación constante |
| $\kappa_{ij}^\varepsilon, \kappa_{ij}^\sigma$ | Permitividad dieléctrica |
| μ_{ij} | Permeabilidad magnética a deformación constante |
| α_{ij} | Módulo magnetoeléctrico a deformación constante |
| λ_{ij} | Módulo termoelástico |
| ξ_{ij} | Expansión térmica |
| $p_i^\varepsilon, p_i^\sigma$ | Módulos piroeléctricos |
| m_i | Módulos piromagnéticos a deformación constante |
| η_{ij} | Conductividad térmica |
| $\beta^\varepsilon, \beta^\sigma$ | Capacidad calorífica a volumen constante dividida por $T_0 = 300K$ |
| $\Re(z), \Im(z)$ | Partes real e imaginaria de z |
| $H^1(\Omega)$ | Espacio de Sobolev sobre el conjunto Ω |
| $H_{\#}^1(\Omega)$ | Espacio de Sobolev con condición de frontera periódica |
| $\bar{\Pi}$ | Clausura del conjunto Π |
| $\partial\Pi$ | Frontera del conjunto Π |

Glosario

Efecto Piezoeléctrico: Inducción de polarización eléctrica en un material causada por la aplicación de una tensión mecánica. El efecto piezoeléctrico inverso consiste en la deformación de un material causada por la aplicación de un campo eléctrico.

Efecto Piezomagnético: Inducción de magnetización en un material causada por la aplicación de una tensión mecánica. El efecto piezomagnético inverso consiste en la deformación de un material causada por la aplicación de un campo magnético.

Efecto Magnetoeléctrico: Inducción de polarización eléctrica en un material causada por la aplicación de un campo magnético. El efecto magnetoeléctrico inverso consiste en la inducción de magnetización causada por la aplicación de un campo eléctrico.

Efecto Piroeléctrico: Inducción de polarización eléctrica en un material causada por la aplicación de calor. El efecto inverso consiste en la generación de calor debida a la aplicación de un campo eléctrico.

Efecto Piromagnético: Inducción de magnetización en un material causada por la aplicación de calor. El efecto inverso consiste en la generación de calor debida a la aplicación de un campo magnético.

Fracción Volumétrica: Razón entre el volumen de una componente del material compuesto y el volumen total del material.

Resumen

Esta tesis trata acerca de la aplicación del Método de Homogeneización Asintótica al cálculo de las propiedades efectivas Termo-Magneto-Electro-Elasticas de materiales compuestos periódicos. Específicamente, abordamos dos diferentes tipos de condiciones de frontera sobre las interfaces del material compuesto: la de contacto imperfecto tipo resorte y la condición de frontera libre, la cual sirve para modelar materiales porosos (que pueden ser considerados compuestos cerámica-aire). En el Capítulo 2 se presentan las generalidades del Método de Homogeneización Asintótica. Se plantean los problemas de frontera globales con múltiples campos Termo-Magneto-Electro-Elasticos y coeficientes que son funciones rápidamente oscilantes de la posición. Se introducen en estos problemas los desarrollos asintóticos de las soluciones en potencias de un parámetro pequeño que caracteriza la periodicidad del material compuesto. Los problemas en dos escalas derivados de cada potencia del desarrollo tienen soluciones periódicas garantizadas por los teoremas que se demuestran en el Apéndice B. En el Capítulo 3 se ponen en práctica las generalidades del Método en el caso particular de un material laminado con contacto imperfecto. Se calculan analíticamente los coeficientes efectivos como funciones de las fracciones volumétricas de las componentes, sus propiedades y los parámetros de imperfección. Los coeficientes efectivos obtenidos cumplen cadenas de igualdades tipo relaciones exactas. Se analizan los casos límite en que el contacto imperfecto aproxima al perfecto o a la desunión entre las fases. Las condiciones de frontera libre se abordan en el Capítulo 4, donde se modelan las propiedades efectivas de una matriz porosa con perforaciones cilíndricas uniaxiales. Se demuestra que los coeficientes efectivos de este modelo cumplen relaciones exactas, lo cual disminuye considerablemente el número de problemas locales que son resueltos por un método de variable compleja para calcular todas las propiedades efectivas termo-piezoeléctricas. Estos resultados analíticos son comparados con la aplicación directa del Método de Elemento Finito a los problemas locales, mostrando una excelente coincidencia. Las figuras de mérito para recolección de energía de este material poroso son calculadas a partir de los coeficientes efectivos y comparadas con mediciones experimentales recientes. En el Capítulo 5 se propone un modelo alternativo para el cálculo de las figuras de mérito basado en la aplicación recursiva de las fórmulas analíticas del Capítulo 3.

Abstract

The present thesis regards the application of the Asymptotic Homogenization Method to the calculation of the Thermo-Magneto-Electro-Elastic effective properties of periodic composite materials. Specifically, we address two different types of boundary conditions on the interfaces of the composite: the spring-type imperfect contact condition and the free boundary condition, which models porous materials that may be considered as air-ceramic composites. In Chapter 2 we present the general theory of the Asymptotic Homogenization Method. We write the multi-fields, global boundary problems with coefficients that are rapidly-oscillating functions of the position. We introduce in these problems asymptotic expansions of the solutions in powers of a small parameter that characterizes the periodicity of the composite. The two-scales problems obtained from each power of the expansion have their periodic solutions guaranteed by the theorems that were proven in Appendix B. In Chapter 3, we put in practice the theory of the previous chapter in the particular case of a laminate composite with imperfect contact between components. We calculate analytically the effective coefficients as functions of the volume fractions of the components, their properties and the imperfection parameters. The effective coefficients satisfy chains of equalities, like exact relations. We analyze the limit cases in which the imperfect contact approximates the perfect one and the debonding between phases. The free boundary conditions are addressed in Chapter 4, where we model the effective properties of a porous matrix with uniaxial cylindrical perforations. We prove that the effective coefficients of this model satisfy some exact relations, something that considerably diminishes the number of local problems that are solved via a complex variable method in order to obtain a set of thermo-piezoelectric properties. These analytical results are compared with those obtained through the direct application of the Finite Element Method to the local problems, showing excellent concordance. The energy harvesting figures of merit of this porous material are calculated from the effective coefficients and compared to recent experimental measurements. In Chapter 5 it is proposed an alternative method for calculating the figures of merit that is based on recursively applying the analytical formulae obtained in Chapter 3.

Lista de publicaciones

Los resultados de esta tesis han sido publicados en los siguientes artículos arbitrados por pares:

J. C. López-Realpozo, R. O. Caballero-Pérez, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, H. Camacho-Montes, Y. Espinosa-Almeyda, F. J. Sabina, and C.-V. P. Analysis of mechanical and electrical imperfect contacts in piezoelectric composites. *Mechanics Research Communications*, 93:96–102, 2018.

R. O. Caballero-Pérez, J. Bravo-Castillero, L. D. Pérez-Fernández, R. Rodríguez-Ramos, and F. J. Sabina. Homogenization of thermo-magneto-electro-elastic multilaminated composites with imperfect contact. *Mechanics Research Communications*, 97:16–21, 2019.

R. O. Caballero-Pérez, J. Bravo-Castillero, L. D. Pérez-Fernández, R. Rodríguez-Ramos, and F. J. Sabina. Computation of effective thermo-piezoelectric properties of porous ceramics via asymptotic homogenization and finite element methods for energy-harvesting applications. *Archive of Applied Mechanics*, 90:1415–1429, 2020.

R. O. Caballero-Pérez, J. Bravo-Castillero, and L. D. Pérez-Fernández. A simple scheme for calculating the energy harvesting figures of merit of porous ceramics. *Energy Harvesting and Systems*, 7(1):25–32, 2020.

*A mis padres.
A Mima y a la memoria de Rogelio, Oscar y Elena.*

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mis padres por su amor y el sustento; a mi abuela Mima y a mis difuntos abuelos Rogelio, Oscar y Elena. Agradezco a mis queridos tíos Dunia y Carlos. A mis entrañables compañeros de viaje, mis hermanos y mis primos, por su cariño y apoyo.

Agradezco a mi tutor, el Doctor Julián Bravo Castellero, por sus matemáticas, su sabiduría y, principalmente, por su gran amistad. Le agradezco también por sus continuas y muchas veces inesperadas lecciones de vida.

Agradezco a los miembros de mi comité tutorial, Doctores Ricardo Mansilla y Federico Sabina, por su paciencia y sugerencias. A los Doctores Reinaldo Rodríguez, Raúl Guinovart y Alejandro Mesejo, por sus enseñanzas y su apoyo. Al Dr. Leslie Pérez por su interés en la calidad y rigor de nuestros artículos y, sobre todo, por su amistad. Al Dr. Luis Fernando López por sus valiosas observaciones. A los sinodales por su preciado tiempo y sus recomendaciones.

A la gran nación de México por su hospitalidad y por las valiosísimas lecciones de vida. A todas las personas con las que me he tropezado durante este magnífico viaje.

Este trabajo de tesis ha sido posible gracias al financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y del proyecto PAPIIT IA100919 "Homogeneización y cálculo de propiedades efectivas de materiales compuestos". Agradezco por su apoyo y paciencia al personal del posgrado en Matemáticas de la U.N.A.M. (Dra. Silvia Ruiz, María Inés León, Lucy Herrera y Tere Martínez).

A todos, muchas gracias.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 10 |
| 1.1. Materiales compuestos | 10 |
| 1.2. Métodos de homogeneización | 13 |
| 1.2.1. Originalidad | 16 |
| 1.3. Objetivos | 18 |
| 2. Método de Homogeneización Asintótica | 20 |
| 2.1. Hipótesis | 20 |
| 2.2. Ecuaciones de la teoría lineal de los medios TMEE | 22 |
| 2.3. Condiciones de frontera | 24 |
| 2.4. Desarrollo asintótico | 26 |
| 2.4.1. Términos no perturbados. | 29 |
| 2.4.2. Correctores de primer orden y problemas locales | 32 |
| 2.4.3. Correctores de segundo orden y ecuación homogeneizada | 34 |
| 2.5. Construcción de solución para medio poroso | 36 |
| 3. Medios laminados con contacto imperfecto | 37 |
| 3.1. Solución analítica | 37 |
| 3.1.1. Material poroso | 39 |
| 3.1.2. Simetría transversal isótropa | 40 |
| 3.1.3. Polarización en serie | 41 |
| 3.1.4. Polarización en paralelo | 43 |
| 3.1.5. Material compuesto bifásico | 44 |
| 3.2. Cadenas de relaciones | 45 |
| 3.3. Resultados numéricos | 48 |
| 3.3.1. Propiedades producto | 51 |
| 4. Medios porosos termo-piezoeléctricos | 61 |
| 4.1. Figuras de Mérito | 61 |
| 4.2. FEM e implementación computacional | 63 |
| 4.2.1. Formulación débil | 67 |
| 4.2.2. Geometría de la celda | 70 |
| 4.3. Problemas unificados y relaciones exactas | 72 |
| 4.4. Resultados analíticos | 77 |
| 4.4.1. Problemas planos | 77 |
| 4.4.2. Problema antiplano | 84 |
| 4.5. Resultados numéricos | 86 |

| | |
|---|------------|
| 5. Homogeneización recursiva | 96 |
| 5.1. Modelo | 96 |
| 5.2. Recursión | 97 |
| 5.2.1. Primer paso | 97 |
| 5.2.2. Segundo paso | 98 |
| 5.3. MEF en serie | 100 |
| 5.4. Resultados numéricos | 102 |
| | |
| 6. Conclusiones | 107 |
| 6.1. Contacto imperfecto | 107 |
| 6.2. Cerámica porosa termo-piezoeléctrica | 108 |
| 6.3. Perspectivas | 110 |
| | |
| A. Simetría. Notaciones de Voigt y de Hill | 112 |
| | |
| B. Teoremas de Existencia y Unicidad | 115 |
| | |
| C. Adimensionalización del problema local L_2^q | 120 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Materiales compuestos

Los *materiales compuestos* (MCs) son aquellos que consisten en volúmenes alternados de otros materiales homogéneos, llamados *componentes*, *constituyentes* o *fases*. Las dimensiones lineales de cada fase son mucho menores que las dimensiones lineales del MC y mucho mayores que las dimensiones de las moléculas que forman cada componente. Esta distinción es importante para diferenciar a lo que en esta tesis llamamos material compuesto de un “compuesto químico”. En general, los MCs no son formados por la reacción química de sus fases, sino que estas alternan en una escala superior a la molecular.

Los MCs pueden exhibir propiedades diferentes de las propiedades de cada fase. Un ejemplo de esto es el caso del *adobe*. Este material ha sido utilizado durante miles de años para fabricar ladrillos de construcción en lugares tan disímiles como el antiguo Egipto y el norte de México. El adobe se forma al mezclar barro con hierbas secas y depositarlo en moldes. Después de ser endurecidos al sol, los ladrillos exhiben gran resistencia a la ruptura. Esto se debe a que las fibras de las hierbas refuerzan al barro seco, que normalmente es quebradizo y frágil, lo cual lo hace inepto para soportar las grandes cargas de construcciones y edificios.

Como ejemplo de un MC no artificial consideremos la madera, que está compuesta por fibras de celulosa aglutinadas por lignina. El hueso también es un material compuesto, formado por una proteína blanda llamada colágeno e hidroxiapatita, un mineral quebradizo. A pesar de las propiedades no ideales de cada material por separado, el hueso tiene una resistencia similar a la del acero mientras su peso es varias veces menor.

Estos ejemplos evidencian que la mezcla conveniente de dos materiales puede dar lugar a un MC con propiedades muy diferentes a las de cada componente. Para distinguir a las propiedades de cada componente de las propiedades globales del MC, llamaremos a estas últimas *efectivas*. De esta manera, podemos decir que el adobe posee una mayor dureza efectiva que el lodo y que las hierbas, tomados por separado.

A diferencia del adobe, en el que las fibras están dispuestas de manera aleatoria en la matriz de barro, los MCs que estudiaremos en esta tesis son *periódicos*. Esto quiere decir que los volúmenes de las fases se alternan de manera periódica en el material. La Figura 1.1 muestra algunos ejemplos de materiales compuestos periódicos. El panel 1.1a de la Figura 1.1 muestra un material compuesto *laminado* en el que

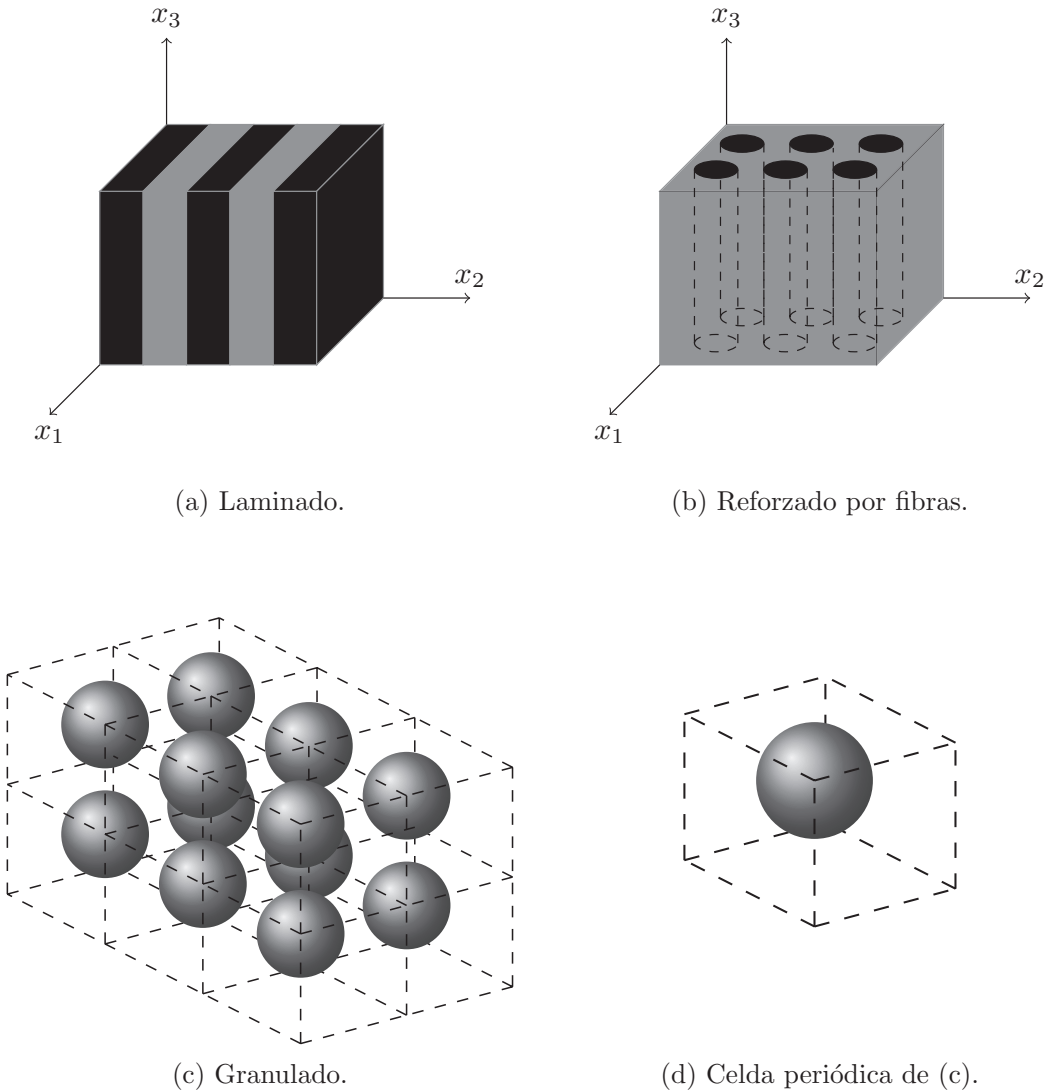


Figura 1.1: Tipos de materiales compuestos (a)-(c) y una posible elección de la celda periódica del compuesto granulado (c).

láminas de una fase y de la otra alternan en la dirección del eje coordenado x_2 . En 1.1b una de las fases llamada *matriz* o *medio aglutinante* (en gris) rellena los espacios vacíos en un arreglo periódico de fibras unidireccionales a lo largo del eje x_3 , constituidas por la otra fase. En el caso de 1.1c la matriz tiene inclusiones esféricas de la otra fase del material.

Al elemento recurrente más pequeño que se repite para dar lugar a todo el material le llamaremos *celda periódica*. En el caso del material compuesto granulado del panel 1.1c podemos elegir la celda periódica como la que hemos ilustrado en 1.1d. Obsérvese que esta elección de la celda periódica no es única. Cuando una matriz constituida por una de las fases, aglutina al otro material, decimos que las partículas de este último son “inclusiones”. Por ejemplo, en la Figura 1.1b las inclusiones son las fibras y en 1.1c las inclusiones son los granos esféricos.

Los MCs formados por dos fases (bifásicos) pueden ser clasificados por su “conec-

tividad” con dos números enteros. De esta manera decimos que un material laminado tiene conectividad 2-2 siendo que cada fase está conectada bidimensionalmente. Por ejemplo, el material reforzado por fibras tiene conectividad 3-1, donde el 3 indica que la matriz está conectada en 3 dimensiones y el 1, que las fibras están conectadas en 1 dimensión. Esta clasificación será utilizada a lo largo de esta tesis. Para más ejemplos de conectividad en un MC véase [1].

En la actualidad, las propiedades de interés de los MCs van más allá de la dureza o resistencia, siendo también deseables la rigidez elástica, la permitividad dieléctrica, la permeabilidad magnética, la conductividad térmica y aquellas propiedades llamadas *acopladas*, como la piezoelectricidad, el piezomagnetismo y la termoelasticidad. Estas últimas tienen en común que permiten la conversión de un tipo de energía (elástica, térmica) en otro (electromagnética) que puede ser almacenado o procesado por tecnología digital. Es por eso que la existencia de estas propiedades en los MCs abre un sinnúmero de posibilidades de aplicación de los materiales compuestos a la industria. Por ejemplo, se han utilizado compuestos laminados piezoeléctricos para generar corriente eléctrica a partir de los movimientos naturales del caminar humano, con aplicaciones a la regeneración de tejido óseo, como se reporta en [2].

Existen otras propiedades acopladas como la magnetoelectricidad, la piroelectricidad y el piromagnetismo que es posible encontrarlas en un material compuesto sin que alguna de sus componentes las posean [1, 3]. Por ejemplo, propiedades magnetoelectricas no nulas pueden aparecer en un compuesto bifásico con una constituyente piezoeléctrica y una piezomagnética. Esto se puede explicar intuitivamente considerando que la aplicación de un campo eléctrico sobre el compuesto causa una tensión mecánica en el material piezoeléctrico. A su vez, esta tensión mecánica, se “transmite” al material piezomagnético que reacciona magnetizándose. En suma, el efecto neto del campo eléctrico original es un campo magnético y por tanto, podemos decir que el MC posee una propiedad magnetoelectrica efectiva.

Cuando una propiedad aparece de manera efectiva en un compuesto cuyas constituyentes no la poseen por separado, le llamamos *propiedad producto*. Los mecanismos de aparición de las propiedades producto pueden ser explicados intuitivamente por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \text{Efecto magnetoelectrico} &= \underbrace{\frac{\text{Magnético}}{\text{Mecánico}}}_{\text{piezomagnético}} \times \underbrace{\frac{\text{Mecánico}}{\text{Eléctrico}}}_{\text{piezoeléctrico}} \\
 \text{Efecto piroelectrico} &= \underbrace{\frac{\text{Térmico}}{\text{Mecánico}}}_{\text{termoelástico}} \times \underbrace{\frac{\text{Mecánico}}{\text{Eléctrico}}}_{\text{piezoeléctrico}} \\
 \text{Efecto piromagnético} &= \underbrace{\frac{\text{Térmico}}{\text{Mecánico}}}_{\text{termoelástico}} \times \underbrace{\frac{\text{Mecánico}}{\text{Magnético}}}_{\text{piezomagnético}}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

en las cuales podemos ver la interacción de los efectos acoplados, con las propiedades mecánicas como mediadoras. Estas expresiones fueron tomadas del trabajo de Hadjiloizi et al. [4].

El efecto magnetoelectrico es muy débil cuando se encuentra en materiales no compuestos u ocurre a temperaturas demasiado bajas como para ser de alguna utilidad práctica [3]. En cambio, las propiedades magnetoelectricas se pueden potenciar en los MCs eligiendo adecuadamente las proporciones de los constituyentes y los

métodos de construcción. Experimentalmente, se han medido incrementos sustanciales en MCs respecto a sus componentes tomadas por separado [5, 6]. Esta ventaja puede ser aprovechada para detección de corrientes y campos magnéticos, lo cual encuentra aplicaciones tan diversas como imágenes médicas y frenos ABS.

El efecto piroeléctrico es otra propiedad producto que se puede potenciar en MCs [1]. Su principal utilidad radica en el hecho de que se permite transformar energía térmica en una señal eléctrica. Esto permite procesar radiación infrarroja como señales digitales para la aplicaciones como detección de intrusos y exploración extraterrestre [7].

En esta tesis proponemos una manera unificada de estudiar todas las propiedades acopladas TMEE. Esto se puede lograr utilizando relaciones constitutivas adecuadas en los problemas de frontera de la Física Matemática cuyas soluciones son los campos de deformación elástica, los potenciales electromagnéticos y la distribución de temperaturas. Las propiedades TMEE son codificadas en coeficientes rápidamente oscilantes de los campos que intervienen en las relaciones constitutivas. Esta oscilación rápida de los coeficientes como funciones de las variables espaciales es la manera de describir la heterogeneidad en lenguaje matemático. En la próxima sección discutiremos los métodos que se han utilizado históricamente para tratar problemas de la Física Matemática con coeficientes rápidamente oscilantes.

1.2. Métodos de homogeneización

Uno de los problemas más importantes del estudio teórico de los MCs es el hecho de que existen muchos parámetros de diseño: las conectividades, las fracciones volumétricas de las fases, las propiedades físicas de estas, entre otros [8]. Idealmente, las propiedades efectivas se pueden ajustar moviendo estos parámetros, pero esto requeriría la construcción de muchos prototipos de MCs hasta dar con los valores deseados. Para la disminución de estos costos de diseño, es importante el estudio de modelos matemáticos que predigan las propiedades efectivas en términos de los parámetros.

Si intentáramos resolver numéricamente por “fuerza bruta” los problemas de frontera que describen a los MCs, por ejemplo, aplicando el Método de Elemento Finito (MEF) a todo el volumen del material, nos encontraríamos con la dificultad de que las mallas deben ser mucho más finas que las dimensiones de las heterogeneidades de manera que al menos varios nodos quepan dentro de cada una de estas. Esto aumentaría considerablemente el costo computacional (en tiempo y memoria) para resolver los problemas matemáticos asociados. Por esta razón, otros métodos son necesarios para el estudio y estimación de las propiedades efectivas.

Los *métodos de homogeneización* son utilizados comúnmente para el cálculo de las propiedades efectivas de los MCs, periódicos o no. En pocas palabras, el resultado de *homogeneizar* un material compuesto es “sustituirlo” por un material homogéneo tal que sus propiedades y los campos asociados (tensiones mecánicas, desplazamiento eléctrico) aproximan las propiedades y campos del material compuesto original. La suposición de que tal material homogéneo existe es la llamada *Hipótesis de Homogeneidad Equivalente* (HHE), que discutiremos más ampliamente en la Sección 2.1. A continuación haremos un bosquejo de la historia de los diferentes métodos de homogeneización.

Los métodos de homogeneización comenzaron a utilizarse en el siglo XIX en

trabajos relacionados con el cálculo de propiedades ópticas efectivas de un medio heterogéneo con inclusiones esféricas, que representaban moléculas. Las soluciones encontradas eran simples y reproducían el comportamiento observado experimentalmente en el caso cuasi-estático. Una revisión de estos primeros trabajos puede ser encontrada en [9]. Estas técnicas fueron llevadas posteriormente al estudio de propiedades elásticas en sólidos en el trabajo de Hill [10] y comenzaron a llamárseles *métodos auto-consistentes*.

Según [11], los métodos auto-consistentes se pueden subdividir en dos tipos: los de *medio efectivo* y los de *campo efectivo*. Los primeros están basados en la hipótesis que supone que cada inclusión está sometida a fuerzas (campos de deformación, campos eléctricos) iguales a las fuerzas externas que actúan sobre el material heterogéneo. Además, la inclusión está rodeada por un medio homogéneo infinito cuyas propiedades son las efectivas que se desean calcular. El segundo grupo de métodos autonconsistentes está basado en la hipótesis del campo efectivo. Esta supone que cada inclusión está sometida a fuerzas y campos que son la superposición de las fuerzas y campos externos con las fuerzas y campos ejercidos sobre ella por el resto de las inclusiones.

En 1928, Voigt propuso una estimación para los módulos elásticos efectivos basándose en la suposición de que la deformación es constante en todo el compuesto [12]. Esta estimación consiste simplemente en el promedio aritmético de las propiedades de cada fase ponderadas por sus fracciones volumétricas. Por su parte, Reuss propuso otra estimación bajo el supuesto de que la tensión es constante, con la cual se obtiene que las propiedades efectivas son la media armónica de las propiedades de las fases, igualmente ponderadas por sus fracciones volumétricas. En [12], Hill explica utilizando *métodos variacionales* el hecho de que las estimaciones de Voigt y Reuss son, en realidad, las cotas superior e inferior de las propiedades elásticas efectivas reales. Esto abrió el camino para que los métodos variacionales se utilizaran en la estimación de las propiedades efectivas y la estimación de cotas más finas. Por ejemplo, trabajos seminales en esta dirección fueron el de Hashin y Shtrikman [13], quienes estimaron las cotas de la energía de deformación para un arreglo de esferas aglutinado por otro material; y el de Paul [14], quien estimó otras cotas, no tan estrechas como las de Hashin, para una geometría arbitraria de las inclusiones.

El método de homogeneización numérica al que en esta tesis nos referiremos como *Método de la Transformada Rápida de Fourier* (MTRF) fue propuesto originalmente por Moulinec y Suquet en [15]. Este se basa en introducir un material homogéneo de referencia en las ecuaciones, lo cual hace que la heterogeneidad del material original aparezca como un campo de polarización elástica no uniforme. Luego, utilizando el operador de Green de este problema, se obtienen ecuaciones integrales del tipo Lippmann-Schwinger cuya solución, es decir, el campo de deformaciones, puede ser obtenida por iteración de punto fijo [16]. El “atajo” que propone MTRF se basa en el hecho de que la convolución del operador de Green con la polarización se reduce al producto de sus imágenes en el espacio de Fourier. Explotando el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier [17] se puede ir rápidamente de un espacio a otro por cada iteración necesaria, realizando el producto en el espacio de Fourier, hasta que converja la solución de las ecuaciones de Lippman-Schwinger. Luego, los coeficientes efectivos se pueden hallar como los cocientes de las tensiones y las deformaciones para diferentes casos de carga.

La gran ventaja del MTRF es que es aplicable a cualquier distribución arbitraria de las heterogeneidades, periódica o no periódica. En contraste, si quisiéramos utilizar el MEF, tendríamos que adaptar las mallas a la geometría específica de las heterogeneidades del compuesto, lo cual puede ser un proceso muy tedioso con resultados inciertos. En cambio, el algoritmo de la TRF se aplica sobre una pixelización (voxelización) de la celda periódica bidimensional (tridimensional) que no depende de su estructura interna particular.

El método en su forma original descrita en [15] sirve solamente para calcular propiedades elásticas y tiene dificultades para converger cuando el *contraste*, es decir, la diferencia entre las propiedades de las componentes, es muy grande. Esto último representa una limitación para el tratamiento por MTRF de materiales porosos. Sin embargo, existen variantes de este método que tienen en cuenta varios campos acoplados [18] y la posibilidad de que haya contrastes muy elevados [19].

Como apuntamos al principio de esta sección, la dificultad principal al resolver los problemas de la Física Matemática en regiones que representan los MCs radica en que los coeficientes que describen sus propiedades físicas oscilan rápidamente. Otra forma de sortear este obstáculo es el llamado *Método de Homogeneización Asintótica* (MHA) que fue inspirado por el método de escalas múltiples [20] y el de Bogoliubov, Krylov y Mitropolski [21] para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen movimientos oscilatorios no lineales.

El MHA consiste en introducir desarrollos asintóticos de las soluciones en potencias de un parámetro pequeño ϵ relacionado con el período. El término correspondiente a la potencia ϵ^0 es el llamado término no perturbado del desarrollo y el resto de ellos, son llamados correctores. Todos ellos son funciones que dependen de dos escalas, llamadas global (o lenta) y local (o rápida).

El propósito de introducir tal desarrollo asintótico es que en el límite cuando el parámetro pequeño va a cero, obtengamos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes constantes cuya solución aproxima la del sistema original con coeficientes rápidamente oscilantes (véase el capítulo introductorio §2 de [22]). Este sistema de ecuaciones será llamado *homogeneizado* y sus coeficientes son los efectivos. Estos dependen de las soluciones de los *problemas locales* que, a su vez, están relacionadas con los términos perturbados del desarrollo asintótico.

A diferencia de otros métodos de homogeneización mencionados aquí, el MHA no presupone la existencia del medio efectivo sino que la prueba. Es más, el MHA provee un algoritmo para calcular los coeficientes efectivos y los correctores de la solución aproximada. Algunas referencias relevantes sobre el MHA son los libros de Bakhvalov y Panasenko [22], el de Sánchez-Palencia [23], el de Bensoussan et al [24] y el de Oleinik et al. [25].

El MHA se ha utilizado exitosamente para calcular las propiedades efectivas de muchos compuestos periódicos de diferentes geometrías y conectividades. En el caso de materiales laminados, los problemas locales se reducen a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y es posible calcular los coeficientes efectivos analíticamente. Esto se hizo en [26] para hallar los coeficientes efectivos piezoeléctricos de materiales compuestos por fases transversalmente isótropas con aplicaciones al diseño de hidrófonos.

Cuando el compuesto es reforzado por fibras de sección transversal circular se han utilizado métodos de variable compleja para solucionar analíticamente los problemas locales bidimensionales, como se puede apreciar en [27, 28] para el cálculo de las

propiedades elásticas efectivas de un compuesto de fases isotropas. Este método analítico de variable compleja fue extendido en [29-32] a materiales transversalmente isotropos con propiedades piezoeléctricas.

Los resultados del MHA se han comparado exitosamente con otros de los métodos aquí mencionados. En [33, 34] se comparó con el MTRF para compuestos bifásicos laminados y reforzados por fibras. En [35] se calcularon las propiedades efectivas de un medio piezoeléctrico granulado, por un método auto-consistente, las cuales mostraron una gran concordancia con aquellas calculadas vía MHA.

A pesar de que en la sección 1.1 limitamos nuestra definición de materiales compuestos a la escala mesoscópica, el MHA ha sido utilizado para calcular propiedades efectivas de compuestos reforzados por fibras con paredes de nanotubos de carbono [36]. Incluso, se ha aplicado al cálculo de propiedades efectivas de los propios nanotubos, reemplazando las complejas interacciones interatómicas por modelos mecánicos de resortes [37]. También se pueden calcular a través del MHA las propiedades efectivas de medios no periódicos, por ejemplo, del medio atmosférico para el estudio de los efectos de contaminantes [38]. Como última aplicación del MHA, nos referimos a su uso en modelos de conectividades más complejas que las aquí descritas, en los cuales es necesario aplicar el proceso de homogeneización recursivamente en varias escalas o niveles microestructurales, hasta hallar las propiedades efectivas globales (véase [24]). Algunos trabajos en los que se aplicó este procedimiento a modelos a escalas múltiples son los de Galka et al. [39], para el cálculo de las propiedades elásticas de huesos y [40], acerca de la conductividad efectiva de nanofluidos.

1.2.1. Originalidad

La primera parte de esta tesis, hasta el Capítulo 3, está dedicada al estudio del tipo de contacto entre las fases que, además de las fracciones volumétricas de estas, es un factor que influye en el comportamiento efectivo de un MC. Físicamente, existen varios mecanismos mediante los cuales se modifica el comportamiento de las superficies de contacto, por ejemplo: delaminación, decohesión y reacción química. En el último caso, se puede producir una tercera fase (mesofase o *buffer*) muy fina entre las originales que componían al material, con propiedades diferentes de estas. De este último ejemplo podemos intuir la influencia del contacto sobre el comportamiento efectivo del compuesto.

Desde el punto de vista matemático, llamaremos a todos esos casos *contacto imperfecto* para distinguirlo del *perfecto*, en el que todos los campos que intervienen en los problemas de frontera son continuos a través de las superficies de las fases. En esta tesis nos ocuparemos del contacto imperfecto, ya que es una condición más realista, más general y que ha recibido menor atención en la literatura científica.

La discontinuidad de los campos de deformación se puede modelar de muchas maneras diferentes. En esta tesis la modelaremos con un tipo de contacto imperfecto llamado “resorte” en el que la diferencia (contraste) de las deformaciones es proporcional a la tensión en la frontera de separación de las fases. El término “resorte” proviene de que esa condición de frontera recuerda la ley empírica de la fuerza elástica de un resorte $F = -k\Delta x$, donde k es la constante elástica y Δx , la diferencia de elongaciones del resorte. En [41], Hashin demostró que tal constante está asociada a las propiedades elásticas de la mesofase situada entre las regiones ocupadas por las otras fases.

El contacto imperfecto no solamente se puede presentar como una discontinuidad de los campos de deformación elástica, sino de la temperatura y de los potenciales electromagnéticos. Así como se ha estudiado la influencia del contacto imperfecto en las propiedades efectivas elásticas [41, 42], se ha estudiado en las térmicas [43, 44] y eléctricas [45]. En el caso de [45], los autores apuntan que una discontinuidad por debilitamiento del contacto mecánico entre fases piezoeléctricas debe conducir a una discontinuidad del potencial eléctrico por acumulación de cargas en la interfaz. De aquí la importancia de estudiar simultáneamente el contacto imperfecto en todas las propiedades TMEE de un MC, que es lo que hemos hecho en esta tesis, específicamente en el capítulo 3.

Para sustentar teóricamente nuestros cálculos, hemos demostrado en el Apéndice B una condición necesaria y suficiente de la existencia de soluciones generalizadas para una clase de problemas que aparecen durante el proceso de construcción de una solución asintótica formal del problema de frontera con coeficientes rápidamente oscilantes. Hemos probado este resultado cuando existe contacto imperfecto tipo resorte entre las fases, lo cual, hasta donde sabemos no se ha reportado en la literatura en la que sólo aparece un resultado análogo para el caso de contacto perfecto que tampoco toma en cuenta múltiples campos TMEE (ver suplemento de [22]).

La segunda parte de esta tesis está dedicada a estudiar las propiedades termo-piezoeléctricas de un material cerámico poroso. Este se puede considerar un MC cuyas fases son la cerámica y el aire. Como veremos en el Capítulo 4, del planteamiento de los problemas locales con propiedades TMEE se puede deducir el de las propiedades termo-piezoeléctricas fácilmente, ya que estas son un caso particular de aquellas.

Estos trabajos fueron inspirados por los resultados experimentales de Zhang et al. [46], quienes encontraron un aumento considerable de las figuras de mérito piezoeléctricas y piroeléctricas para recolección de energía con el aumento de la porosidad en cerámicas ferroeléctricas sintetizadas por *freeze-casting*. Este proceso da lugar a láminas de cerámica paralelas unidas por pequeños puentes de cerámica. Para ajustar sus mediciones experimentales, los autores utilizaron modelos fenomenológicos que dependen de parámetros que carecen de una interpretación física clara. Nosotros nos propusimos utilizar modelos que parten de la teoría lineal de la termo-piezoelectricidad para reproducir el fenómeno observado por los autores de [46]. Esto podría contribuir a aclarar el mecanismo físico de recolección de energía en este tipo de materiales, además de aportar fórmulas para la predicción de las propiedades efectivas y figuras de méritos relevantes para esta aplicación.

Para ello aproximamos la estructura de láminas unidas por puentes por una matriz cerámica con poros cilíndricos unidireccionales de sección transversal arbitraria (conectividad 3-1). Las propiedades efectivas de un compuesto con tal conectividad satisfacen relaciones exactas similares a las propuestas por Benveniste por separado para propiedades piroeléctricas [47] y para propiedades magnetoeléctricas [48]. En esta tesis deducimos relaciones exactas para todas las propiedades TMEE. Esto posibilita el cálculo de las propiedades efectivas resolviendo un número pequeño de problemas locales elásticos: dos problemas planos y un problema antiplano. Para el caso particular de los problemas planos y poros con sección transversal circular, aplicamos métodos de variable compleja y potenciales de Kolosov-Muskhelishvili (véase [49]) para solucionar los problemas locales. Aplicamos las ideas de Pobedrya [27] desarrolladas para materiales isótropos a la cerámica piezoeléctrica con simetría

transversalmente isótropa. Nuestros desarrollos también se diferencian de los de Pobedrya en que no precisamos definir los potenciales de Kolosov-Muskhelishvili dentro del círculo y por tanto, utilizamos condiciones de frontera libre. Estos desarrollos conducen a un sistema de infinitas ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes indeterminados de los potenciales. Para cada orden de truncamiento del sistema es posible encontrar fórmulas analíticas para las soluciones de los problemas locales y por tanto, para los coeficientes efectivos.

Estos resultados analíticos fueron comparados con el Método de Elemento Finito (MEF) aplicado a la resolución directa de los problemas locales. Esto contrasta con la resolución por MEF de los llamados *modelos de celda unitaria* que se han estudiado ampliamente en la literatura [50-52]. En estos trabajos se aplican cargas electromecánicas (fuerzas externas, campos eléctricos) a un elemento de volumen representativo, que no necesariamente coincide con la celda periódica, sino que puede contener cierto número de ellas. Estas cargas deben ser impuestas por quien está realizando los cálculos mientras que en la aplicación de esta tesis, las “cargas” están introducidas de manera natural en la inhomogeneidad de los problemas locales y de las condiciones de contacto imperfecto.

Por último, en el Capítulo 5 se discutirá un modelo de la cerámica porosa, en el que se aplican recursivamente las fórmulas analíticas de laminados determinadas en el Capítulo 3 con el fin de calcular las figuras de mérito de recolección de energía. Este procedimiento, que llamaremos Homogeneización Recursiva (HR), se ha utilizado en [53] para calcular las propiedades elásticas efectivas de materiales reforzados con fibras recubiertas y en [54], para calcular las propiedades piezoeléctricas de un material con fibras de sección transversal rectangular. El objetivo de la HR es evitar el uso de métodos numéricos como el MEF que requieren la construcción de mallas y solución de sistemas de ecuaciones lineales muy grandes como un paso intermedio antes de calcular las propiedades efectivas. En cambio, la HR busca tomar ventaja de fórmulas analíticas conocidas y de fácil implementación para calcular los coeficientes efectivos directamente. Hasta donde sabemos, la HR no se ha utilizado en aplicaciones de recolección de energía y en medios porosos con la geometría presentada en el Capítulo 5. Por tanto, se brinda un esquema simple de interés en el diseño de sistemas de recolección de energía [55].

1.3. Objetivos

En esta sección enumeraremos a grandes rasgos los objetivos de esta tesis. El principio de cada capítulo y las secciones correspondientes contienen un desglose más detallado de dichos objetivos.

Describiremos el proceso de construcción de una solución asintótica formal al problema de frontera con coeficientes rápidamente oscilantes de las propiedades TMEE de MCs con contacto imperfecto entre sus fases, y de materiales porosos. Enunciamos y demostramos teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de los problemas locales que aparecen durante el proceso de construcción de la solución. Deducimos los problemas locales, las ecuaciones homogeneizadas y los coeficientes efectivos. Todo esto aparece recogido en el Capítulo 2 y en el Apéndice B.

Obtendremos fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos de un MC laminado (conectividad 2-2) con contacto imperfecto entre las fases. Deduciremos cadenas de relaciones que cumplen los coeficientes efectivos y demostraremos su utilidad

calculando los coeficientes efectivos longitudinales de un material piezoeléctrico con simetría transversal isótropa. Para ilustrar la utilidad de las fórmulas de los coeficientes efectivos utilizaremos el ejemplo de un laminado bifásico piezoeléctrico-piezomagnético. Veremos la influencia de los diferentes parámetros de imperfección en las propiedades producto. Todo esto está recogido en el Capítulo 3.

Enunciaremos las formas variacionales de los problemas de frontera en materiales porosos con conectividad 3-1 y condiciones de frontera libre sobre la superficie del poro. Calcularemos por el MEF los coeficientes efectivos termo-piezoeléctricos para diferentes formas de la sección transversal del poro. Para calcularlos analíticamente deduciremos los problemas unificados plano y antiplano y las relaciones exactas que vinculan todas las propiedades TMEE. En el caso del problema plano, lo escribiremos en términos de los potenciales de Kolosov-Muskhelishvili y propondremos desarrollos para estos en términos de funciones especiales y sus derivadas. Obtendremos un sistema de ecuaciones lineales infinito que, al truncarlo, da fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos de materiales porosos. Compararemos los resultados analíticos con los resultados por MEF y las mediciones experimentales de Zhang et al. [46].

En el Capítulo 5, explicaremos la geometría del modelo recursivo y haremos un desglose de las fórmulas analíticas utilizadas en cada paso de la HR. Con los coeficientes efectivos finales calcularemos las figuras de mérito para recolección de energía y las compararemos con el MEF.

Capítulo 2

Método de Homogeneización Asintótica

En este capítulo trataremos aspectos generales de homogeneización y en particular del Método de Homogeneización Asintótica, que serán utilizados en una u otra forma en todos los capítulos de esta tesis. En la sección 2.1, plantearemos dos hipótesis relacionadas con el MHA: la del medio continuo y la de homogeneidad equivalente. Luego, en la sección 2.2, sobre la base de la hipótesis del medio continuo discutiremos las ecuaciones que gobiernan los campos relevantes para las propiedades termo-magneto-electro-elásticas, las relaciones constitutivas que estos satisfacen y el acoplamiento entre efectos de distinta naturaleza. En la sección 2.3, se plantean las condiciones de frontera libre y de contacto imperfecto. Por último, en la sección 2.4, construiremos soluciones a los problemas planteados a través de un desarrollo asintótico que lleva a la separación de escalas en el problema original, del cual se derivan un problema global homogeneizado y varios problemas locales. Los coeficientes del problema global homogeneizado son los llamados coeficientes efectivos y son calculados a través de las soluciones de los problemas locales.

2.1. Hipótesis

A la izquierda en la Figura 2.1 se muestra un corte transversal de un material reforzado por fibras. Las diferentes componentes (matriz y fibras) se distinguen por diferentes tonos de gris. A la unidad mínima que repite su estructura en los materiales compuestos periódicos le llamaremos *celda periódica* (derecha en la Figura 2.1) y en términos de ella podemos definir el parámetro pequeño ϵ como sigue:

$$\epsilon = \frac{\text{volumen de la celda periódica}}{\text{volumen del material}}. \quad (2.1)$$

La celda periódica estará representada matemáticamente por el conjunto Y , el cual consideraremos que tiene volumen unitario:

$$\int_Y dy_1 dy_2 dy_3 = 1. \quad (2.2)$$

Denotaremos la frontera de Y como Γ_1 . Esto significa que el análisis de una función ϵY -periódica en el volumen del material puede reducirse al análisis en Y con *condiciones de frontera periódicas* (CFP) sobre Γ_1 . También serán de interés en esta

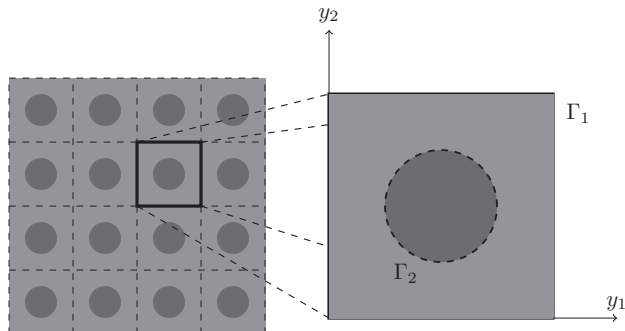


Figura 2.1: Porción representativa de la sección transversal de un material reforzado por fibras (izquierda) y la celda periódica (derecha)

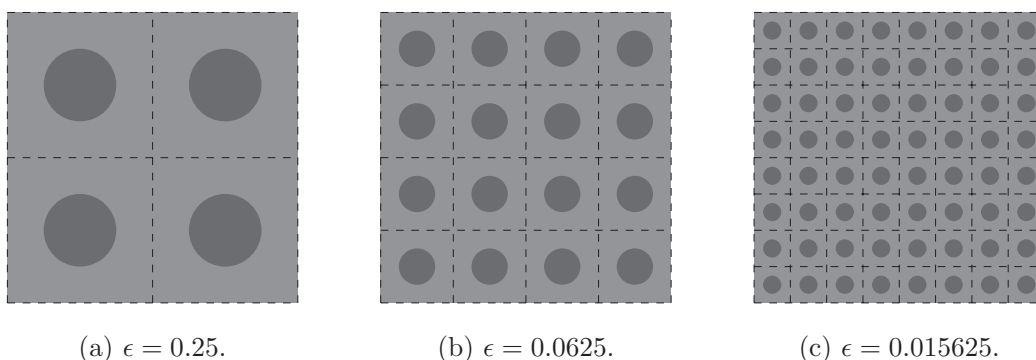


Figura 2.2: El número de períodos por unidad de volumen va a infinito mientras $\epsilon \rightarrow 0$.

tesis las fronteras entre las fases del compuesto. En la Figura 2.1 se representa esta frontera por la superficie cilíndrica Γ_2 , aunque los análisis que se mostrarán aquí son válidos para cualquier número de superficies frontera y cualquier número de fases.

El parámetro pequeño ϵ es universal, por lo que puede ser utilizado para caracterizar cualquier material compuesto periódico y no solamente aquellos reforzados por fibras. Además, obsérvese que cuando se toma el límite $\epsilon \rightarrow 0$, el volumen del material contiene un número infinitamente grande de celdas periódicas (véase Figura 2.2).

La Hipótesis de Homogeneidad Equivalente [56, 57] postula que, a escala macroscópica, el material compuesto es mecánicamente (o físicamente) equivalente a uno homogéneo. Las propiedades físicas del material equivalente son también llamadas *propiedades efectivas* del material heterogéneo y son cuantificadas por los *coeficientes o módulos efectivos*. Estas son funciones de las propiedades físicas de las fases, de las fracciones volumétricas de estas, de la conectividad y de la forma geométrica de las superficies de contacto.

Como anotamos en la Sección 1.2, la HHE no funciona como presuposición del MHA, sino que la existencia del material homogéneo equivalente es una consecuencia de la construcción de las soluciones que veremos en las siguientes secciones de este capítulo. Hemos incluido en esta sección la HHE solamente porque ilustra el objetivo final de los desarrollos matemáticos que veremos a continuación y del proceso de homogeneización en general.

La hipótesis del medio continuo también es relevante para todos los desarrollos posteriores. Esta postula que el medio es continuo a lo largo del espacio que ocupa. Las discontinuidades asociadas a su estructura atómico-molecular son ignoradas y, por tanto, las propiedades físicas de cualquiera de las fases son funciones continuas en todo el espacio ocupado por ella. A diferencia de la HHE, la hipótesis del medio continuo sí es una presuposición de los desarrollos que veremos a continuación.

2.2. Ecuaciones de la teoría lineal de los medios TMEE

Matemáticamente, modelaremos el volumen del material compuesto con un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con una frontera suave. Las propiedades TMEE de un medio continuo están descritas por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) en Ω compuesto por la ecuación del medio continuo [58], las leyes de Maxwell en ausencia de cargas eléctricas y corrientes eléctricas libres [59], y la ecuación de conducción de calor [60]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}), \\ D_{i,i}(\mathbf{x}) = 0, \\ B_{i,i}(\mathbf{x}) = 0, \\ (\eta_{ij}(\mathbf{x}) \vartheta_{,j}(\mathbf{x}))_{,i} = 0, \end{cases} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \setminus \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}, \quad (2.3)$$

donde $\Gamma_2^{(k)}$ denota la superficie de separación entre componentes en la k -ésima celda periódica, $f_{,i}$ denota la derivada parcial de la función f respecto a la variable x_i y se ha utilizado la convención de suma de Einstein. F_i representa la i -ésima componente de una fuerza por unidad de volumen; σ_{ij} , las componentes del tensor de tensiones; D_i y B_i son las componentes de los campos de desplazamiento eléctrico y de inducción magnética; η_{ij} , las componentes del tensor de conductividad y ϑ , la temperatura. La variable \mathbf{x} será llamada de aquí en adelante variable *global* o variable *lenta* y será omitida en algunas de las expresiones matemáticas siguientes por brevedad. A lo largo de la tesis también se observará que los símbolos de las magnitudes vectoriales y matriciales se representen en negritas.

Aparentemente, las ecuaciones (2.3) describen por separado los efectos elásticos, eléctricos, magnéticos y térmicos, pero estos se encuentran acoplados por las siguientes relaciones constitutivas [61]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + e_{mij}(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) + q_{nij}(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) - \lambda_{ij}(\mathbf{x}) \vartheta(\mathbf{x}), \\ D_i(\mathbf{x}) = e_{ikl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \kappa_{im}^\varepsilon(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) - \alpha_{in}(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) + p_i^\varepsilon(\mathbf{x}) \vartheta(\mathbf{x}), \\ B_i(\mathbf{x}) = q_{ikl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \alpha_{im}(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) - \mu_{in}(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) + m_i(\mathbf{x}) \vartheta(\mathbf{x}), \\ s(\mathbf{x}) = \lambda_{kl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - p_m^\varepsilon(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) - m_n(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) + \beta^\varepsilon(\mathbf{x}) \vartheta(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $s(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$, $\varepsilon_{kl}(\mathbf{x})$ denotan la entropía, los potenciales eléctrico y magnético y las componentes del campo de deformaciones elásticas, respectivamente. Una lista exhaustiva de los coeficientes que caracterizan las propiedades físicas de los materiales se puede encontrar en los Acrónimos y Símbolos que se encuentran al principio de la tesis. El superíndice ε en κ_{ij}^ε y p_i^ε indica que estas propiedades son

a deformación ε constante, lo cual tomará importancia posteriormente. Estos coeficientes son funciones rápidamente oscilantes de la variable \mathbf{x} debido a la periodicidad del compuesto. Por ejemplo:

$$c_{ijkl}(\mathbf{x}) = c_{ijkl}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad (2.5)$$

y otro tanto ocurre para todos los demás coeficientes. La dependencia con \mathbf{x} se debe a que al pasar de un punto a otro de Ω , podemos pasar de una fase a otra y observar propiedades físicas diferentes. Por esta razón, también nos referiremos a estos coeficientes como *funciones materiales*.

Los tensores que describen las propiedades físicas cumplen las propiedades de simetría usuales:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}, & e_{ijk} &= e_{ikj}, \\ q_{ijk} &= q_{ikj}, & \kappa_{ij}^\varepsilon &= \kappa_{ji}^\varepsilon, & \mu_{ij} &= \mu_{ji}, \\ \alpha_{ij} &= \alpha_{ji}, & \lambda_{ij} &= \lambda_{ji}, & \eta_{ij} &= \eta_{ji}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Estas propiedades de simetría posibilitan el tratamiento analítico, particularmente, en el caso de los compuestos laminados. Los materiales a los que aplicaremos los métodos matemáticos de esta tesis, pertenecen a la clase cristalina hexagonal (6mm). Esto trae consigo más propiedades de simetría y notaciones especiales que aligeran el tratamiento analítico de estos problemas (véase el Apéndice A).

Adicionalmente, estas funciones materiales cumplen propiedades de elipticidad. Existe una constante $\varkappa > 0$ tal que para toda $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple que:

$$\begin{aligned} c_{ijkl}a_{ij}a_{kl} &\geq \varkappa a_{ij}a_{ij}, & \lambda_{ij}b_ib_j &\geq \varkappa b_ib_i, \\ \eta_{ij}b_ib_j &\geq \varkappa b_ib_i, \\ (\mathbf{E}_{ij}(x)\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_i) &\geq \varkappa (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i), \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde:

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} \kappa_{ij}^\varepsilon & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ij} & \mu_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

a_{jl} son las componentes de cualquier matriz simétrica 3×3 , b_i son las componentes de cualquier vector de \mathbb{R}^3 y $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Obsérvese que la última propiedad implica la elipticidad de las permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética. Si suponemos que $\mathbf{X}_i = (x_i^1, x_i^2)^t$, podemos escribir esa propiedad por componentes:

$$\kappa_{ij}^\varepsilon x_j^1 x_i^1 + 2\alpha_{ij} x_j^1 x_i^2 + \mu_{ij} x_j^2 x_i^2 \geq \varkappa (x_i^1 x_i^1 + x_j^2 x_j^2). \quad (2.9)$$

Si tomamos $\mathbf{X}_i = (x_i^1, 0)^t$ ó $\mathbf{X}_i = (0, x_i^2)^t$ en la expresión anterior, obtenemos condiciones de elipticidad para la permitividad y la permeabilidad:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij}^\varepsilon x_j^1 x_i^1 &\geq \varkappa x_i^1 x_i^1, \\ \mu_{ij} x_j^2 x_i^2 &\geq \varkappa x_j^2 x_j^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como veremos más adelante, estas propiedades contribuyen a la existencia y unicidad de las soluciones que serán construidas.

2.3. Condiciones de frontera

Puesto que queremos introducir las relaciones constitutivas (2.4) en las ecuaciones (2.3), debemos despejar la temperatura ϑ :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \bar{c}_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + \bar{e}_{mij}(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) + \bar{q}_{nij}(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) - \bar{\lambda}_{ij}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}), \\ D_i(\mathbf{x}) = \bar{e}_{ikl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \bar{\kappa}_{im}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) - \bar{\alpha}_{in}(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) + \bar{p}_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}), \\ B_i(\mathbf{x}) = \bar{q}_{ikl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \bar{\alpha}_{im}(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) - \bar{\mu}_{in}(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) + \bar{m}_i(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}), \\ \vartheta(\mathbf{x}) = -\bar{\lambda}_{kl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + \bar{p}_m^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \varphi_{,m}(\mathbf{x}) + \bar{m}_n(\mathbf{x}) \psi_{,n}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.11)$$

donde:

$$\begin{cases} \bar{c}_{ijkl} = c_{ijkl} + \beta^{-1} \lambda_{ij} \lambda_{kl}, \\ \bar{e}_{mij} = e_{mij} - \beta^{-1} p_m^{\varepsilon} \lambda_{ij}, \\ \bar{q}_{nij} = q_{nij} - \beta^{-1} m_n \lambda_{ij}, \\ \bar{\lambda}_{ij} = \beta^{-1} \lambda_{ij}, \\ \bar{\kappa}_{im}^{\varepsilon} = \kappa_{im}^{\varepsilon} - \beta^{-1} p_i^{\varepsilon} p_m^{\varepsilon}, \\ \bar{\mu}_{in} = \mu_{in} - \beta^{-1} m_i m_n, \\ \bar{\alpha}_{in} = \alpha_{in} - \beta^{-1} p_i^{\varepsilon} m_n, \\ \bar{p}_m = \beta^{-1} p_m^{\varepsilon}, \\ \bar{m}_i = \beta^{-1} m_i. \end{cases} \quad (2.12)$$

Para facilitar el tratamiento de tantas propiedades físicas de distinta naturaleza se introducirá la siguiente notación matricial:

$$\mathbf{A}_{jl} = \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{lij} & q_{lij} \\ e_{jkl} & -\kappa_{jl} & -\alpha_{jl} \\ q_{jkl} & -\alpha_{jl} & -\mu_{jl} \end{pmatrix}_{i,k=1,2,3}, \quad \mathbf{T}_j = \begin{pmatrix} -\lambda_{ij} \\ p_j \\ m_j \end{pmatrix}_{i=1,2,3}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_k \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_{k=1,2,3}, \quad (2.13)$$

donde u_k , $k = 1, 2, 3$ son las componentes del campo de desplazamiento. Igualmente podemos expresar (2.12) en forma matricial:

$$\bar{\mathbf{A}}_{jl} = \mathbf{A}_{jl} + \beta^{-1} \mathbf{T}_j (\mathbf{T}_l)^t, \quad \bar{\mathbf{T}}_j = (\beta)^{-1} \mathbf{T}_j, \quad \bar{\beta} = (\beta)^{-1}. \quad (2.14)$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones (2.3), se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{F}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) = 0, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}, \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{F} = (F_i, 0, 0)_{i=1,2,3}^t$. En realidad, esta fuerza por unidad de volumen no cumple ningún papel en el MHA, sino que se utiliza como inhomogeneidad en las ecuaciones para que su solución no sea idénticamente nula. Otra manera de indicar esto es con condiciones no homogéneas en la frontera exterior, lo cual tampoco juega un papel en el MHA.

Sin embargo, las condiciones de frontera en las superficies “interiores” del material compuesto, las superficies de separación entre fases, sí juegan un papel importante en las propiedades efectivas del material. Nosotros supondremos que se cumplen las siguientes relaciones de continuidad en las superficies entre fases:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) n_j \right] = 0, \\ \left[\left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) n_i \right] = 0, \end{array} \right. \quad \mathbf{x} \in \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}, \quad (2.16)$$

donde $[[\cdot]]$ denota la diferencia entre los valores límite de la función (\cdot) a ambos lados de la superficie de separación de las fases. Estas condiciones, en las componentes elásticas, modelan el equilibrio local de las tensiones en las superficies entre componentes; en la componente eléctrica, la inexistencia de cargas libres en dichas superficies y en la componente magnética, la ausencia de corrientes superficiales.

Añadidas a estas condiciones de equilibrio, se suelen estudiar las condiciones de continuidad del campo de desplazamientos elásticos, los potenciales electromagnéticos y la temperatura:

$$\left\{ \begin{array}{l} [[\mathbf{U}(\mathbf{x})]] = 0, \\ [[\vartheta(\mathbf{x})]] = 0, \end{array} \right. \quad \mathbf{x} \in \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}. \quad (2.17)$$

Estas son llamadas *condiciones de contacto perfecto*. En contraste a esta situación ideal, existen las llamadas *condiciones de contacto imperfecto*, una de las cuales se estudiará aquí:

$$\left(\bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) n_j = \epsilon^{-1} \mathbf{K} [[\mathbf{U}]], \quad \mathbf{x} \in \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}, \quad (2.18)$$

donde la matriz \mathbf{K} tiene por componentes los llamados *parámetros de imperfección*. Para ilustrar con más claridad, supondremos en esta tesis que la matriz es diagonal, que existen tres parámetros de imperfección elásticos $K_i, i = 1, 2, 3$, un parámetro de imperfección eléctrica E y uno de imperfección magnética M :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

En este punto, es importante definir un convenio de signos entre el contraste y el vector normal que aparece en la expresión (2.18). Si:

$$[[\mathbf{U}]] = \mathbf{U}^{II} - \mathbf{U}^I, \quad (2.20)$$

entonces el vector normal de componentes n_j “apunta” a la región II y “parte” de la región I . Mantendremos este convenio de signos en todo el desarrollo de esta tesis.

La condición de contacto imperfecto (2.18) es de un tipo específico llamado “resorte”. Este nombre alude a que la condición plantea, grosso modo, la proporcionalidad entre la tensión (MI) y la elongación $[[\mathbf{U}]]$ (MD), como en la ley de Hooke, siendo $\epsilon^{-1} \mathbf{K}$ la constante de proporcionalidad.

Suponemos que la constante de proporcionalidad es de orden $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ porque (2.18) también modela una fase muy fina que actúa como *buffer* entre las fases originales. Las propiedades físicas de esta fase *buffer* están relacionadas a los parámetros de imperfección de la matriz \mathbf{K} (ver, por ejemplo, [62]). El orden $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ refleja el hecho de que el espesor de esta fase va a cero mientras $\epsilon \rightarrow 0$. Esta condición puede modelar un amplio rango de situaciones desde el desacoplamiento total de las fases (parámetros de imperfección muy bajos¹) hasta el contacto perfecto entre ellas (parámetros de imperfección muy altos). En esta tesis se supondrá que la temperatura ϑ exhibe contacto perfecto.

En esta tesis también son relevantes las condiciones que modelan estructuras perforadas o porosas. Se puede considerar que dichas estructuras son también compuestos en las que una de las fases es aire o vacío. Puede considerarse que esta fase tiene propiedades físicas iguales a cero². Esto implica que las condiciones (2.16) se reducen a las siguientes *condiciones de frontera libre*³:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) n_j = 0, \\ \left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) n_i = 0, \end{array} \right. \quad \mathbf{x} \in \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}. \quad (2.21)$$

2.4. Desarrollo asintótico

Resumamos el problema de frontera de contacto imperfecto de las expresiones (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{F}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) = 0, \\ \left[\left(\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) n_j \right] = 0, \\ \left[\left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) n_i \right] = 0, \\ \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) n_j = \epsilon^{-1} \mathbf{K} \llbracket \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rrbracket, \\ \llbracket \vartheta(\mathbf{x}) \rrbracket = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \Omega \setminus \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}, \\ \mathbf{x} \in \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}, \end{array} \quad (2.22)$$

¹En comparación con los órdenes de magnitud de las propiedades físicas de las fases.

²O muy pequeñas en comparación con las propiedades físicas de las fases, como es el caso de la permitividad dieléctrica.

³Esta condición también es conocida como *de aislamiento* o *de Neumann*.

y el de frontera libre (expresiones (2.15) y (2.21)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{F}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) = 0, \\ \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) n_j = 0, \\ \left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) n_i = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \Omega \setminus \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}, \\ \\ \\ \mathbf{x} \in \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)}. \end{array} \quad (2.23)$$

Ambos representan familias de problemas de frontera dependientes del parámetro pequeño ϵ . Nos proponemos construir soluciones para ellos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}) &= \mathbf{U}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon \mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 \mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \\ s(\mathbf{x}) &= s^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon s^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 s^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = \epsilon^{-1} \mathbf{x}$ es la llamada *variable rápida o local*, en la cual, las funciones $\mathbf{U}^{(i)}$ y $\vartheta^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ son Y periódicas (véase Figura 2.1). Tomando prestados nombres de la teoría de perturbaciones de la Física, llamaremos *no perturbados* a los términos $\mathbf{U}^{(0)}$ y $s^{(0)}$. Las funciones $\mathbf{U}^{(i)}$ y $s^{(i)}$ con $i > 0$ serán llamadas *correctores de i -ésimo orden*. Bajo esta hipótesis de separación de escalas en el desarrollo asintótico debemos sustituir la derivada parcial respecto a x_i por el siguiente operador:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i}. \quad (2.25)$$

Por la ϵ -periodicidad de las matrices $\bar{\mathbf{A}}_{jl}$, de los vectores $\bar{\mathbf{T}}_j$ y de los escalares η_{ij} , todas estas magnitudes serán consideradas de ahora en adelante como funciones de la variable rápida \mathbf{y} solamente.

Nuestro objetivo es introducir los desarrollos asintóticos (2.24) y el operador de derivada (2.25) en las ecuaciones y condiciones de frontera. Esto conduce a que debemos imponer condiciones en los términos no perturbados $\mathbf{U}^{(0)}$ y $\vartheta^{(0)}$ y en los correctores $\mathbf{U}^{(i)}$, $i = 1, 2$ y $\vartheta^{(i)}$, $i = 1, 2$ para construir las soluciones asintóticas.

Insertemos el “operador” de derivada (2.25) y los desarrollos asintóticos en las ecuaciones y agrupemos por potencias de ϵ . Definamos los operadores:

$$L_{\alpha\beta}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\bar{\mathbf{A}}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \beta_l}(\cdot) \right], \quad L_\alpha(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [\bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{y})(\cdot)], \quad (2.26)$$

donde $\alpha = x, y$ y $\beta = x, y$. Ahora consideremos las expansiones hasta la potencia ϵ^2 . Los términos que multiplican a cada potencia de ϵ al introducir los desarrollos asintóticos y los operadores en la primera ecuación del problema de frontera son:

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2} : & \quad L_{yy}(\mathbf{U}^{(0)}), \\ \epsilon^{-1} : & \quad L_{xy}(\mathbf{U}^{(0)}) + L_{yx}(\mathbf{U}^{(0)}) + L_{yy}(\mathbf{U}^{(1)}) + L_y(s^{(0)}), \\ \epsilon^0 : & \quad L_{xx}(\mathbf{U}^{(0)}) + L_{xy}(\mathbf{U}^{(1)}) + L_{yx}(\mathbf{U}^{(1)}) + L_{yy}(\mathbf{U}^{(2)}) + L_x(s^{(0)}) + L_y(s^{(1)}) - \mathbf{F}, \\ \epsilon^1 : & \quad L_{xx}(\mathbf{U}^{(1)}) + L_{xy}(\mathbf{U}^{(2)}) + L_{yx}(\mathbf{U}^{(2)}) + L_x(s^{(1)}) + L_y(s^{(2)}), \\ \epsilon^2 : & \quad L_{xx}(\mathbf{U}^{(2)}) + L_x(s^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Puesto que nos interesa el comportamiento límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, los coeficientes de las potencias ϵ^1 y ϵ^2 no aportan ninguna información importante a la construcción de la solución. Sin embargo, las otras potencias de ϵ sí imponen restricciones sobre las funciones $\mathbf{U}^{(i)}$ y $s^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$, puesto que las potencias ϵ^0 , ϵ^{-1} y ϵ^{-2} no van a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por tanto, impondremos que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} L_{yy}(\mathbf{U}^{(0)}) &= 0, \\ L_{xy}(\mathbf{U}^{(0)}) + L_{yx}(\mathbf{U}^{(0)}) + L_{yy}(\mathbf{U}^{(1)}) + L_y(s^{(0)}) &= 0, \\ L_{xx}(\mathbf{U}^{(0)}) + L_{xy}(\mathbf{U}^{(1)}) + L_{yx}(\mathbf{U}^{(1)}) + L_{yy}(\mathbf{U}^{(2)}) + L_x(s^{(0)}) + L_y(s^{(1)}) &= \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Adicionalmente, introduciremos los desarrollos asintóticos en la segunda ecuación del problema de frontera:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\bar{\mathbf{T}}_l(\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) \right) \right) = 0, \quad (2.29)$$

pero para abreviar la notación, definiremos el siguiente operador:

$$J_{\alpha\beta}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\eta_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \beta_j}(\cdot) \right], \quad (2.30)$$

donde α y β pueden ser las variables x o y . De manera que obtenemos las siguientes condiciones para cada potencia no evanescente de ϵ :

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2} : J_{yy} \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\beta} s^{(0)} \right) + (J_{yx} + J_{xy}) \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial y_l} \right) &= 0, \\ \epsilon^{-1} : J_{xx} \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial y_l} \right) + J_{yy} \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial y_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial x_l} + \bar{\beta} s^{(1)} \right) \\ + (J_{yx} + J_{xy}) \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\beta} s^{(0)} \right) &= 0, \\ \epsilon^0 : J_{xx} \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\beta} s^{(0)} \right) + J_{yy} \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(3)}}{\partial y_l} + \bar{\beta} s^{(2)} \right), \\ + (J_{yx} + J_{xy}) \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial y_l} + \bar{\beta} s^{(1)} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde hemos tomado en cuenta un término adicional de la expansión en series de \mathbf{U} , el término $\epsilon^3 \mathbf{U}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Si introducimos los desarrollos asintóticos en las condiciones de continuidad de flujo (2.22)₃ y separamos por potencias de ϵ tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1} : \left[\bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial y_l} n_j \right] &= 0, \\ \epsilon^0 : \left[\left(\bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\mathbf{T}}_j s^{(0)} \right) n_j \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Similarmente, al introducir los desarrollos asintóticos (2.24) en la condición de contacto imperfecto (2.22)₅, separamos por potencias no evanescentes de ϵ y obtenemos

las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1} : \bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial y_l} n_j &= \mathbf{K}[\mathbf{U}^{(0)}], \\ \epsilon^0 : \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_i} + \bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\mathbf{T}}_j s^{(0)} \right) n_j &= \mathbf{K}[\mathbf{U}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sobre la base de estas condiciones, a continuación examinaremos la existencia y unicidad de los correctores utilizando el Teorema 1 del Apéndice B. Además, veremos algunos aspectos sobre la construcción de las soluciones que son enteramente independientes de la geometría del compuesto.

2.4.1. Términos no perturbados.

En esta subsección y en las siguientes, por brevedad omitiremos la dependencia con las variables \mathbf{x} e \mathbf{y} de todas las funciones. Recordemos que las funciones materiales \mathbf{A}_{jl} , \mathbf{T}_j y η_{ij} solo dependen de \mathbf{y} por ser Y -periódicas. Los términos de las expansiones asintóticas dependen de ambas variables \mathbf{x} e \mathbf{y} , aunque veremos que esto no es estrictamente cierto en el caso de los términos no perturbados.

De acuerdo con las expresiones (2.28)₁ y (2.33)₁, el término no perturbado debe ser construido de manera que satisfaga:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial y_j} &= 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \left(\Omega \setminus \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)} \right) \times (Y \setminus \Gamma_2), \\ \bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial y_l} n_j &= \mathbf{K}[\mathbf{U}^{(0)}], \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \left(\bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)} \right) \times \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La existencia y unicidad de $\mathbf{U}^{(0)}$ no está garantizada por el teorema del apéndice B por no ser \mathbf{K} definida positiva y porque $\bar{\mathbf{A}}_{jl}$ no satisface la condición de elipticidad. Un paso en esa dirección sería multiplicar por -1 a las dos últimas ecuaciones del sistema y las dos últimas expresiones de la condición de contacto imperfecto de (2.34). Esto produce el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \bar{\mathbf{B}}_{jl} \frac{\partial}{\partial y_l} (\mathbf{U}^{(0)}) &= 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \left(\Omega \setminus \bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)} \right) \times (Y \setminus \Gamma_2), \\ \bar{\mathbf{B}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial y_l} n_j &= \mathbf{K}^*[\mathbf{U}^{(0)}], \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \left(\bigcup_k \epsilon \Gamma_2^{(k)} \right) \times \Gamma_2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{B}}_{jl} = \begin{pmatrix} \bar{c}_{ijkl} & \bar{e}_{lij} & \bar{q}_{lij} \\ -\bar{e}_{lij} & \bar{k}_{jil} & \bar{\alpha}_{jil} \\ -\bar{q}_{lij} & \bar{\alpha}_{jil} & \bar{\mu}_{jil} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^* = \begin{pmatrix} K_i & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Los sistemas (2.34) y (2.35) son equivalentes, pero el (2.35) tiene la ventaja de tener una matriz de contacto imperfecto definida positiva. Para asegurar las hipótesis del teorema del apéndice B debemos demostrar que la matriz $\bar{\mathbf{B}}_{jl}$ es elíptica. Para esto

exigiremos una condición adicional sobre las funciones materiales que veremos más adelante. Por ahora:

$$\begin{aligned}
 \left(\bar{\mathbf{B}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_l}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_j} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} & \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \bar{e}_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + \bar{q}_{lij} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \\ -\bar{e}_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \bar{\kappa}_{jl} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + \bar{\alpha}_{jl} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \\ -\bar{q}_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \bar{\alpha}_{jl} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + \bar{\mu}_{jl} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \end{pmatrix} \\
 &= \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} & \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{jl} & \alpha_{jl} \\ \alpha_{jl} & \mu_{jl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \end{pmatrix} \\
 &\quad - \beta^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} & \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j p_l & p_j m_l \\ m_j p_l & m_j m_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Introduzcamos la notación:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_j = \begin{pmatrix} p_j \\ m_j \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Y tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \left(\bar{\mathbf{B}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_l}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_j} \right) &= \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial y_j} \mathbf{E}_{jl} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_l} - \beta^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial y_j} \boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_l^t \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_l} \\
 &= \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial y_j} \mathbf{E}_{jl} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_l} - \beta^{-1} \left| \boldsymbol{\rho}_j^t \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right|^2.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la expresión anterior tenemos que:

$$\left(\bar{\mathbf{B}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_l}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_j} \right) \geq \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial y_j} \mathbf{E}_{jl} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_l} - \beta^{-1} \sum_j |\boldsymbol{\rho}_j^t|^2 \sum_j \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right|^2. \tag{2.40}$$

En este momento introduciremos la *condición de Ignaczak* que garantiza la elipticidad de la matriz $\bar{\mathbf{B}}_{jl}$:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \leq \beta \Lambda_{\min}, \tag{2.41}$$

donde Λ_{\min} es el valor propio mínimo de la matriz \mathbf{E} , 6×6 compuesta por los bloques \mathbf{E}_{jl} . La condición (2.41) es una adaptación al caso TMEE de la condición planteada

en [63] para propiedades termo-piezoeléctricas. Si la introducimos en (2.40):

$$\begin{aligned}
 \left(\bar{\mathbf{B}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_l}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_j} \right) &\geq \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial y_j} \mathbf{E}_{jl} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_l} - \Lambda_{\min} \sum_j \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right|^2 \\
 &\geq (c_{ijkl} + \beta^{-1} \lambda_{ij} \lambda_{kl}) \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial y_j} \mathbf{E}_{jl} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_l} - \Lambda_{\min} \sum_j \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right|^2 \\
 &\geq c_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial y_j} \mathbf{E}_{jl} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_l} - \Lambda_{\min} \sum_j \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right|^2 \\
 &\geq \varkappa \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}, \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right) + \varkappa \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right) - \Lambda_{\min} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right) \\
 &= \varkappa \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}, \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right) + (\varkappa - \Lambda_{\min}) \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right) \\
 &\geq (\varkappa - \Lambda_{\min}) \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}, \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right) + (\varkappa - \Lambda_{\min}) \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right) \\
 &= \varkappa_1 \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}, \frac{\partial u_k}{\partial y_l} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_j} \right) \right) \\
 &= \varkappa_1 \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_j} \right),
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde hemos supuesto que $\varkappa_1 = \varkappa - \Lambda_{\min} > 0$. Esto completa la demostración de que $\bar{\mathbf{B}}_{jl}$ es elíptica, se satisfacen las hipótesis del teorema del Apéndice B y, por tanto, el problema (2.35) tiene solución única $\mathbf{U}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, excepto por una función aditiva $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ que solo depende de la variable global \mathbf{x} :

$$\mathbf{U}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{2.43}$$

donde $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la solución única de promedio nulo respecto a \mathbf{y} . Sin embargo, el hecho de que esta sea única contradice que $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dependa de \mathbf{x} como parámetro. Por tanto, necesariamente, $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. A partir de aquí escribiremos simplemente: $\mathbf{U}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{U}^{(0)}(\mathbf{x})$.

Teniendo en cuenta este resultado la ecuación (2.31)₁ se transforma en la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \vartheta_h^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \tag{2.44}$$

donde:

$$\vartheta_h^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\beta} s^{(0)}. \tag{2.45}$$

Por la simetría del tensor de conductividad térmica, esta ecuación satisface las hipótesis del teorema del suplemento de [22] (también enunciado en el Apéndice B) y por tanto, $\vartheta_h^{(0)}$ solo depende de la variable \mathbf{x} .

En resumen, las condiciones impuestas sobre el corrector $\mathbf{U}^{(0)}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 1 del Apéndice B luego de manipulaciones algebraicas y de imponer la condición de Ignaczak. Como consecuencia de la aplicación de dicho teorema tenemos que $\mathbf{U}^{(0)}$ solo depende de la variable global \mathbf{x} . Similarmente, por el teorema del suplemento de [22] podemos afirmar la existencia de la solución periódica $\vartheta_h^{(0)}$ y como consecuencia de este, esta función solo depende de la variable global \mathbf{x} .

2.4.2. Correctores de primer orden y problemas locales

Dado que $\mathbf{U}^{(0)}$ no depende de \mathbf{y} , el sistema de ecuaciones (2.28)₂ se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\mathbf{T}}_j s^{(0)} \right) = 0, \quad (2.46)$$

y la condición (2.33)₂ se convierte en:

$$\left(\bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \bar{\mathbf{T}}_j s^{(0)} \right) n_j = \mathbf{K}[\mathbf{U}^{(1)}]. \quad (2.47)$$

Además, podemos deshacernos de las barras ($\bar{\cdot}$) si insertamos (2.45) en la ecuación y la condición anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \mathbf{T}_j \vartheta_h^{(0)} \right) &= 0, \\ \left(\mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial y_l} + \mathbf{T}_j \vartheta_h^{(0)} \right) n_j &= \mathbf{K}[\mathbf{U}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Se puede demostrar que la matriz que resulta al cambiar el signo de las dos últimas filas de \mathbf{A}_{jl} es elíptica y no necesita ninguna suposición adicional como la condición de Ignaczak (2.41). Entonces, se satisfacen las hipótesis del teorema del Apéndice B y tenemos que existe una solución $\mathbf{U}^{(1)}$. La forma de esta función será supuesta de la siguiente manera (hipótesis de trabajo) para aplicar el método de separación de variables:

$$\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{N}_l(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y}) \vartheta_h^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (2.49)$$

donde $\mathbf{N}_l(\mathbf{y})$ y $\mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y})$ son funciones Y -periódicas que toman valores en las matrices reales 5×5 y los vectores de 5 componentes, respectivamente. Estas funciones serán llamadas *funciones locales* por ser solamente dependientes de la variable local o rápida. Si las escribimos por componentes y omitimos las dependencias con \mathbf{y} :

$$\mathbf{N}_l = \begin{pmatrix} w_1^{l1} & w_1^{l2} & w_1^{l3} & g_1^l & h_1^l \\ w_2^{l1} & w_2^{l2} & w_2^{l3} & g_2^l & h_2^l \\ w_3^{l1} & w_3^{l2} & w_3^{l3} & g_3^l & h_3^l \\ \zeta^{l1} & \zeta^{l2} & \zeta^{l3} & \pi^l & \xi^l \\ \phi^{l1} & \phi^{l2} & \phi^{l3} & \chi^l & \gamma^l \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}^\vartheta = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

Ahora insertemos la hipótesis de trabajo (2.49) en la ecuación (2.48)₁:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) \vartheta_h^{(0)} = 0, \quad (2.51)$$

de donde podemos deducir los siguientes sistemas de ecuaciones que deben ser satisfechos por las funciones $\mathbf{N}_l(\mathbf{y})$ y $\mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Adicionalmente, al introducir la hipótesis de trabajo (2.49) en la condición de continuidad del flujo (2.32)₂, podemos deducir condiciones similares para las funciones $\mathbf{N}_l(\mathbf{y})$ y $\mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \left[\left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) n_j \right] &= 0, \\ \left[\left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) n_j \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Igualmente, si introducimos la hipótesis de trabajo en la condición de contacto imperfecto (2.33)₂:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) n_j &= \mathbf{K}[\mathbf{N}_l], \\ \left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) n_j &= \mathbf{K}[\mathbf{N}^\vartheta]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

De aquí que podamos plantear los siguientes problemas de frontera para las funciones $\mathbf{N}_l(\mathbf{y})$ y $\mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y})$: Hallar las soluciones Y -periódicas de promedio nulo $\mathbf{N}_l(\mathbf{y})$ y $\mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y})$ que satisfacen:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) = 0, & \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \left[\left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) n_j \right] = 0, & \mathbf{y} \in \Gamma_2, \\ \left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) n_j = \mathbf{K}[\mathbf{N}_l], & \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) = 0, & \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \left[\left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) n_j \right] = 0, & \mathbf{y} \in \Gamma_2, \\ \left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) n_j = \mathbf{K}[\mathbf{N}^\vartheta], & \end{cases} \quad (2.56)$$

Estos son los llamados *problemas locales* y jugarán un papel muy importante en lo que resta del desarrollo de esta tesis. Obsérvese que se ha especificado que las funciones $\mathbf{N}_l(\mathbf{y})$ y $\mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y})$ tengan promedio nulo. Esto es consecuencia de que el teorema del Apéndice B exige que $\langle \mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = 0$.

Ahora examinemos la ecuación (2.31)₂. Si tenemos en cuenta que tanto $\mathbf{U}^{(0)}$ como $\vartheta_h^{(0)}$ no dependen de \mathbf{y} , la ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial y_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial x_l} + \bar{\beta}_s^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \eta_{ij} \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.57)$$

Si definimos:

$$\vartheta_h^{(1)} = \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial y_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial x_l} + \bar{\beta}_s^{(1)}, \quad (2.58)$$

obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \eta_{ij} \frac{\partial \vartheta_h^{(1)}}{\partial y_j} = - \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial y_i} \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_j}, \quad (2.59)$$

que satisface las hipótesis del teorema del suplemento de [22] y por tanto, existe una solución de promedio nulo que construiremos con la siguiente hipótesis de trabajo para separar variables:

$$\vartheta_h^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_l(\mathbf{y}) \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_l}(\mathbf{x}). \quad (2.60)$$

De aquí que $M_l(\mathbf{y})$ sea la solución Y -periódica de promedio nulo del problema local:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_{ik}(\mathbf{y}) \frac{\partial M_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) + \eta_{ij}(\mathbf{y}) \right) = 0, & \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \left[\left(\eta_{ik}(\mathbf{y}) \frac{\partial M_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) + \eta_{ij}(\mathbf{y}) \right) n_i \right] = 0, & \mathbf{y} \in \Gamma_2. \\ \llbracket M_j \rrbracket = 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

En resumen, las condiciones impuestas sobre los correctores de primer orden $\mathbf{U}^{(1)}$ y $\vartheta^{(1)}$ satisfacen respectivamente las hipótesis del Teorema 1 del Apéndice B y las hipótesis del teorema del suplemento de [22]. A diferencia del caso de $\mathbf{U}^{(0)}$ y $\vartheta^{(0)}$, estas condiciones son inhomogéneas, lo cual tiene por consecuencia que $\mathbf{U}^{(1)}$ y $\vartheta^{(1)}$ dependan de ambas variables \mathbf{x} e \mathbf{y} . Esto último es considerado en las hipótesis de trabajo (2.49) y (2.60), que expresan la dependencia de \mathbf{y} a través de las funciones \mathbf{N}_l , \mathbf{N}^ϑ y M_l . Estas son las soluciones Y -periódicas de promedio nulo de los problemas locales respectivos (2.55), (2.56) y (2.61), que reflejan en la celda periódica las condiciones impuestas sobre $\mathbf{U}^{(1)}$ y $s^{(1)}$.

2.4.3. Correctores de segundo orden y ecuación homogeneizada

Si introducimos ahora las definiciones de $s^{(0)}$ y $s^{(1)}$, (2.45) y (2.58), en el sistema de ecuaciones (2.28)₃ y tenemos en cuenta las hipótesis (2.49) y (2.60), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\mathbf{A}_{jl} \frac{\partial}{\partial y_l} (\mathbf{U}^{(2)}) \right] + \left[\mathbf{A}_{mk} + \mathbf{A}_{ml} \frac{\partial \mathbf{N}_k}{\partial y_l} + \frac{\partial}{\partial y_j} (\mathbf{A}_{jm} \mathbf{N}_k) \right] \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_m \partial x_k} \\ & + \left[\mathbf{T}_k + \mathbf{A}_{kl} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_l} + \frac{\partial}{\partial y_j} (\mathbf{T}_j M_k) + \frac{\partial}{\partial y_j} (\mathbf{A}_{jk} \mathbf{N}^\vartheta) \right] \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_k} = \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Para poder afirmar que este sistema tiene solución $\mathbf{U}^{(2)}$, Y -periódica respecto a \mathbf{y} , por el Teorema 1 del Apéndice B, es suficiente imponer que que:

$$\left\langle \mathbf{A}_{mk} + \mathbf{A}_{ml} \frac{\partial \mathbf{N}_k}{\partial y_l} \right\rangle \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_m \partial x_k} + \left\langle \mathbf{T}_k + \mathbf{A}_{kl} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_l} \right\rangle \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_k} = \langle \mathbf{F} \rangle, \quad (2.63)$$

donde hemos tenido en cuenta que:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} (\mathbf{A}_{jm} \mathbf{N}_k) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} (\mathbf{T}_j M_k + \mathbf{A}_{jk} \mathbf{N}^\vartheta) \right\rangle = 0, \quad (2.64)$$

porque el promedio de la divergencia de una función periódica es nulo. Si ahora definimos:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}}_{jl} &= \left\langle \mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right\rangle, \\ \widehat{\mathbf{T}}_j &= \left\langle \mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right\rangle,\end{aligned}\quad (2.65)$$

y cambiamos los índices en (2.63) tenemos que:

$$\widehat{\mathbf{A}}_{jl} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_l} + \widehat{\mathbf{T}}_j \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_j} = \langle \mathbf{F} \rangle. \quad (2.66)$$

El sistema de ecuaciones (2.66) es llamado *sistema homogeneizado* y los tensores (2.65) tienen por componentes los llamados *coeficientes efectivos*. Obsérvese que el sistema de ecuaciones homogeneizado tiene la forma que tendría el sistema (2.22)₁ si las funciones materiales rápidamente oscilantes $\mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y})$ y $\mathbf{T}_j(\mathbf{y})$ fueran constantes. Más aún, a pesar de que las fórmulas (2.65) son matriciales, se pueden acceder a coeficientes efectivos de propiedades físicas individuales a través de sus componentes:

$$\widehat{\mathbf{A}}_{jl} = \begin{pmatrix} \widehat{c}_{ijkl} & \widehat{e}_{lij} & \widehat{q}_{lij} \\ \widehat{e}_{jkl} & -\widehat{\kappa}_{jl} & -\widehat{\alpha}_{jl} \\ \widehat{q}_{jkl} & -\widehat{\alpha}_{jl} & -\widehat{\mu}_{jl} \end{pmatrix}_{i,k=1,2,3}, \quad \widehat{\mathbf{T}}_j = \begin{pmatrix} -\widehat{\lambda}_{ij} \\ \widehat{p}_j \\ \widehat{m}_j \end{pmatrix}_{i=1,2,3}. \quad (2.67)$$

Ahora examinemos la ecuación (2.31)₃, teniendo en cuenta las definiciones de $s^{(0)}$ y $s^{(1)}$, (2.45) y (2.58):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\eta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \vartheta_h^{(2)} \right] = -\frac{\partial}{\partial x_i} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \vartheta_h^{(0)} - \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \vartheta_h^{(1)}, \quad (2.68)$$

donde:

$$\vartheta_h^{(2)} = \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial x_l} + \bar{\mathbf{T}}_l^t \frac{\partial \mathbf{U}^{(3)}}{\partial y_l} + \bar{\beta} s^{(2)}. \quad (2.69)$$

Si introducimos ahora la hipótesis (2.60) en (2.68):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\eta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \vartheta_h^{(2)} \right] = - \left[\eta_{ij} + \eta_{ik} \frac{\partial M_j}{\partial y_k} + \frac{\partial}{\partial y_k} (\eta_{kj} M_i) \right] \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (2.70)$$

que tiene solución si y solo si:

$$\widehat{\eta}_{ij} \frac{\partial \vartheta_h^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (2.71)$$

donde:

$$\widehat{\eta}_{ij} = \left\langle \eta_{ij} + \eta_{ik} \frac{\partial M_j}{\partial y_k} \right\rangle. \quad (2.72)$$

La ecuación sin homogeneizar (2.22)₂ se reduciría a la ecuación homogeneizada (2.71) si sustituyéramos la conductividad térmica rápidamente oscilante $\eta_{ij}(\mathbf{y})$ por la conductividad térmica efectiva $\widehat{\eta}_{ij}$ que no depende de \mathbf{y} .

Hemos obtenido fórmulas matriciales para casi todos los coeficientes efectivos TMEE excepto para $\widehat{\beta}$. Si sustituimos la hipótesis (2.49) en la expresión para $s^{(0)}$ que se obtiene de despejar en (2.45) y promediamos en ambos miembros:

$$\langle s^{(0)} \rangle = \left\langle \beta - \mathbf{T}_l^t \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_l} \right\rangle \vartheta_h^{(0)} - \left\langle \mathbf{T}_k^t + \mathbf{T}_l^t \frac{\partial \mathbf{N}_k}{\partial y_l} \right\rangle \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial x_k}, \quad (2.73)$$

de donde:

$$\widehat{\beta} = \left\langle \beta - \mathbf{T}_l^t \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_l} \right\rangle. \quad (2.74)$$

En resumen, las condiciones impuestas sobre los correctores $\mathbf{U}^{(2)}$ y $s^{(2)}$ tienen solución garantizada por el Teorema 1 del Apéndice B si y solo si $\mathbf{U}^{(0)}$ y $\vartheta^{(0)}$ satisfacen los sistemas de ecuaciones homogeneizados (2.66) y (2.71). Los coeficientes de estos sistemas son llamados efectivos y son funciones de las propiedades materiales de las componentes y de las funciones locales $\mathbf{N}_k(\mathbf{y})$, $\mathbf{N}^\vartheta(\mathbf{y})$ y $M_l(\mathbf{y})$ según las expresiones (2.65), (2.72) y (2.72).

2.5. Construcción de solución para medio poroso

En la sección anterior ejemplificamos el proceso de construcción de la solución asintótica para el caso de un medio con contacto imperfecto entre sus componentes. Para el caso de un medio poroso en el que se cumplen condiciones de frontera libre (2.21) es posible seguir un procedimiento totalmente análogo al anterior. Describiremos los resultados de este en esta sección.

En virtud del Teorema 2 del Apéndice B, las funciones $\mathbf{U}^{(0)}$ y $\vartheta^{(0)}$ dependen exclusivamente de la variable global \mathbf{x} y además, impondremos que satisfagan las ecuaciones homogeneizadas (2.66) y (2.71), pero definidas en $\Omega \setminus \bigcup_i \epsilon \Pi_i$. Los coeficientes efectivos se calculan por las fórmulas matriciales (2.65) y (2.72), en las que la integración se realiza en $Y \setminus \Pi$. Los problemas locales tienen la siguientes formas como consecuencia de las condiciones de frontera libre:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) = 0, & \mathbf{y} \in Y \setminus \Pi, \\ \left(\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k} \right) n_j = 0, & \mathbf{y} \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.75)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) = 0, & \mathbf{y} \in Y \setminus \Pi, \\ \left(\mathbf{T}_j + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}^\vartheta}{\partial y_k} \right) n_j = 0, & \mathbf{y} \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.76)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\eta_{ik}(\mathbf{y}) \frac{\partial M_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) + \eta_{ij}(\mathbf{y}) \right) = 0, & \mathbf{y} \in Y \setminus \Pi, \\ \left(\eta_{ik}(\mathbf{y}) \frac{\partial M_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) + \eta_{ij}(\mathbf{y}) \right) n_i = 0, & \mathbf{y} \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.77)$$

La existencia y unicidad de sus soluciones está garantizada por el Teorema 2 del Apéndice B.

Capítulo 3

Medios laminados con contacto imperfecto

En este capítulo trataremos las propiedades efectivas TMEE de compuestos laminados también llamados de conectividad 2-2 (véase [1]). En la sección 3.1 veremos que para esta geometría podemos encontrar expresiones analíticas de los coeficientes efectivos TMEE a partir de los problemas locales (2.55), (2.56) y (2.61). Las expresiones analíticas son obtenidas en forma matricial, pero en la subsección 3.1.2 obtendremos fórmulas para coeficientes efectivos específicos cuando las fases involucradas son transversalmente isotropas. Estas fórmulas funcionan en el caso de que haya cualquier número finito de discontinuidades en la celda periódica. En la sección 3.2, veremos cómo obtener cadenas de relaciones a partir de las expresiones analíticas de los coeficientes efectivos. Por último, en la sección 3.3, introduciremos un ejemplo numérico de un laminado bifásico de $BaTiO_3$ (piezoeléctrico) y $CoFe_2O_4$ (piezomagnético). Mostraremos gráficas de los coeficientes efectivos como funciones de la fracción volumétrica, discutiremos la influencia de los parámetros de imperfección en el comportamiento de los coeficientes efectivos y observaremos la aparición de las llamadas propiedades producto. Los artículos [64] y [65] están relacionados con el contenido de este capítulo.

3.1. Solución analítica

En el caso de un medio laminado, la celda periódica Y se puede considerar como el intervalo $[0, 1)$ y la periodicidad del medio se extiende solamente en el eje a lo largo del cual está dicho intervalo. Si por convenio, ese eje es el m -ésimo, entonces el problema local (2.55) en derivadas parciales se reduce al problema de frontera en derivadas ordinarias de encontrar \mathbf{N}_l , 1-periódica o de período 1, y de promedio nulo, tal que:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_m} \left(\mathbf{A}_{mm}(y_m) \frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}(y_m) + \mathbf{A}_{ml}(y_m) \right) = 0, & y_m \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \mathbf{A}_{mm}(y_m) \frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}(y_m) + \mathbf{A}_{ml}(y_m) = \mathbf{K}[\mathbf{N}_l], & y_m \in \Gamma_2, \\ \left[\left[\mathbf{A}_{mm}(y_m) \frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}(y_m) + \mathbf{A}_{ml}(y_m) \right] \right] = 0, & y_m \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

El índice m representa simplemente la dirección de periodicidad y por tanto, no hay suma por él. En general, Γ_2 es el conjunto de todos los puntos donde las superficies de contacto imperfecto intersectan al eje y_m en la celda Y . Tomando $\Gamma_2 = \{\theta_1, \dots, \theta_r\}$, la condición de contacto imperfecto queda de la siguiente manera para cada $p = 1, \dots, r$:

$$\mathbf{A}_{mm}(\theta_p) \frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}(\theta_p) + \mathbf{A}_{ml}(\theta_p) = \mathbf{K}_p (\mathbf{N}_l(\theta_p^+) - \mathbf{N}_l(\theta_p^-)), \quad (3.2)$$

donde \mathbf{K}_p es la matriz 5×5 que representa el salto o la imperfección en el punto θ_p y:

$$\mathbf{N}_l(\theta_p^\pm) = \lim_{y_m \rightarrow \theta_p^\pm} \mathbf{N}_l(y_m). \quad (3.3)$$

De la ecuación del problema (3.1) obtenemos:

$$\mathbf{A}_{mm}(y_m) \frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}(y_m) + \mathbf{A}_{ml}(y_m) = \mathbf{C}_{ml}, \quad (3.4)$$

donde \mathbf{C}_{ml} es una matriz constante que no depende de y_m . Si despejamos $\frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}$ de esta expresión, obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m} = \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{C}_{ml} - \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml}, \quad (3.5)$$

donde el exponente -1 representa la matriz inversa. Además debemos observar que \mathbf{A}_{mm} es invertible por la definición positiva de los tensores de las propiedades materiales. Si calculamos el promedio de $\frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}$ en $Y = [0, 1)$:

$$\int_0^1 \frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m} dy_m = \mathbf{N}_l(1) - \sum_{p=1}^r (\mathbf{N}_l(\theta_p^+) - \mathbf{N}_l(\theta_p^-)) - \mathbf{N}_l(0). \quad (3.6)$$

De acuerdo con la periodicidad de \mathbf{N}_l , obtenemos que $\mathbf{N}_l(1) - \mathbf{N}_l(0) = 0$. Entonces, de (3.6) y promediando (3.5) obtenemos:

$$- \sum_{p=1}^r \langle \mathbf{N}_l(y_m) \rangle \Big|_{y_m=\theta_p} = \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle \mathbf{C}_{ml} - \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml} \rangle. \quad (3.7)$$

Si en (3.7) introducimos la condición de contacto imperfecto de (3.1), obtenemos:

$$- \sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \left(\mathbf{A}_{ml}(\theta_p) + \mathbf{A}_{mm}(\theta_p) \frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m}(\theta_p) \right) = \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle \mathbf{C}_{ml} - \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml} \rangle. \quad (3.8)$$

Teniendo en cuenta (3.4) en la expresión anterior:

$$- \left(\sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \right) \mathbf{C}_{ml} = \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle \mathbf{C}_{ml} - \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml} \rangle. \quad (3.9)$$

Despejamos \mathbf{C}_{ml} y obtenemos:

$$\mathbf{C}_{ml} = \left(\langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle + \sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml} \rangle. \quad (3.10)$$

De modo que si introducimos la expresión anterior en (3.5) obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{N}_l}{dy_m} = \mathbf{A}_{mm}^{-1} \left(\langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle + \sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml} \rangle - \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml}. \quad (3.11)$$

Sustituyendo esta última expresión de la derivada en (2.65)₁ obtenemos una expresión analítica para los coeficientes efectivos en forma matricial:

$$\widehat{\mathbf{A}}_{jl} = \langle \mathbf{A}_{jl} \rangle + \langle \mathbf{A}_{jm} \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle + \sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml} \rangle - \langle \mathbf{A}_{jm} \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml} \rangle. \quad (3.12)$$

Se pueden seguir procedimientos similares para los problemas (2.56) y (2.61). Al sustituir las expresiones de las derivadas de las funciones locales \mathbf{N}^θ y M_l respectivamente en (2.65)₂ y en (2.72) se obtienen expresiones analíticas de todos los coeficientes TMEE en forma matricial:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}}_j &= \langle \mathbf{T}_j \rangle + \langle \mathbf{A}_{jm} \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle + \sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{T}_m \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{A}_{jm} \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{T}_m \rangle, \\ \widehat{\beta}^\varepsilon &= \langle \beta^\varepsilon \rangle + \langle \mathbf{T}_m^t \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle + \sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{T}_m \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{T}_m^t \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{T}_m \rangle, \\ \widehat{\eta}_{jl} &= \langle \eta_{jl} \rangle + \left\langle \frac{\eta_{jm}}{\eta_{mm}} \right\rangle \left\langle \frac{\eta_{ml}}{\eta_{mm}} \right\rangle \frac{1}{\langle \eta_{mm}^{-1} \rangle} - \left\langle \frac{\eta_{jm} \eta_{ml}}{\eta_{mm}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Obsérvese, en primer lugar, que para obtener estos coeficientes efectivos no fue necesario obtener las soluciones \mathbf{N}_l , sino que solamente se integró una vez en la ecuación del problema local. Este procedimiento es diferente al utilizado en el artículo [64] para encontrar los coeficientes efectivos de un material piezoeléctrico en series. Entraremos en detalles acerca del procedimiento utilizado en la sección 3.2. En segundo lugar, obsérvese que las fórmulas son válidas para cualquier número finito de láminas de diferentes fases. Por último, nótese que en las expresiones (3.12) y (3.13) aparecen siempre términos que dependen de la media armónica de propiedades a lo largo de la dirección de periodicidad m :

$$\left(\langle \mathbf{A}_{mm}^{-1} \rangle + \sum_{p=1}^r \mathbf{K}_p^{-1} \right)^{-1}, \quad \frac{1}{\langle \eta_{mm}^{-1} \rangle}. \quad (3.14)$$

Además, si suponemos que el material es homogéneo, en las expresiones (3.12) y (3.13) desaparecen todos los promedios y se recuperan trivialmente los resultados $\widehat{\mathbf{A}}_{jl} = \mathbf{A}_{jl}$, $\widehat{\mathbf{T}}_j = \mathbf{T}_j$ y $\widehat{\beta} = \beta$.

3.1.1. Material poroso

Se puede hacer un desarrollo similar al que hicimos arriba para el caso de contacto imperfecto en el caso de un material 2-2 poroso, compuesto de capas de aire

intercaladas con capas de otro material (una cerámica piezoeléctrica, por ejemplo). Si en vez de utilizar la condición de contacto imperfecto en (3.1), utilizamos la condición de frontera libre y seguimos un procedimiento similar, los coeficientes efectivos serían iguales a:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{A}}_{jl} &= (\mathbf{A}_{jl} - \mathbf{A}_{jm} \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{A}_{ml}) (1 - \theta), \\
 \widehat{\mathbf{T}}_j &= (\mathbf{T}_j - \mathbf{A}_{jm} \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{T}_m) (1 - \theta), \\
 \widehat{\eta}_{jl} &= \left(\eta_{jl} - \frac{\eta_{jm} \eta_{ml}}{\eta_{mm}} \right) (1 - \theta), \\
 \widehat{\beta}^\varepsilon &= (\beta^\varepsilon - \mathbf{T}_m^t \mathbf{A}_{mm}^{-1} \mathbf{T}_m) (1 - \theta),
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde θ es la fracción volumétrica de aire. Obsérvese que estas fórmulas contemplan el caso límite en que el material no posee integridad estructural en la dirección de periodicidad. Esto se puede apreciar haciendo, por ejemplo, $m = j = l = 3$, de lo cual obtenemos que $\widehat{\mathbf{A}}_{33} = 0$ y por tanto $\widehat{c}_{3333} = 0$.

Es importante destacar que las fórmulas (3.15) podrían ser obtenidas directamente de las (3.12) y (3.13) si no tomamos en cuenta los términos que dependen de la media armónica y si tomamos las propiedades físicas de una de las fases iguales a cero. Esta conexión entre las fórmulas (3.12) y (3.13) y las (3.15) será explicada con un ejemplo numérico en la sección 3.3. Las fórmulas (3.15) también serán utilizadas en el Capítulo 5 para calcular las propiedades efectivas en uno de los pasos de la recursión.

3.1.2. Simetría transversal isótropa

Las fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos deducidas anteriormente son válidas para materiales compuestos con conectividad 2-2 con cualquier número finito de láminas y cualquiera sea la simetría cristalina de cada fase. Sin embargo, con vistas a analizar ejemplos de materiales específicos, en esta sección deduciremos expresiones para las componentes de las matrices $\widehat{\mathbf{A}}_{jl}$ y de los vectores $\widehat{\mathbf{T}}_j$, partiendo del supuesto de que ambas fases exhiben simetría transversal isótropa (véase Apéndice A).

Si suponemos que el eje de simetría de las fases coincide siempre con el eje y_3 , podemos definir dos posibles *polarizaciones*: en serie y en paralelo (Figura 3.1). En el caso serie, la dirección de polarización de ambas fases coincide con el eje de periodicidad del compuesto ($m = 3$ en (3.12) y (3.13)). En el caso paralelo, los ejes de polarización de ambos materiales son colineales y perpendiculares al eje de periodicidad del compuesto ($m = 2$).

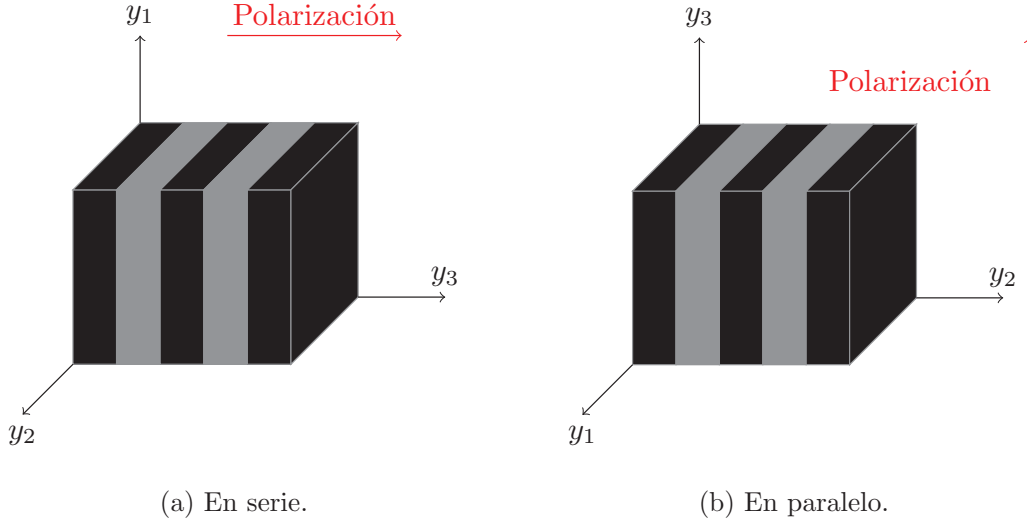


Figura 3.1: Tipos de polarización.

3.1.3. Polarización en serie

Utilizando las relaciones de simetría del Apéndice A podemos obtener las siguientes fórmulas para los coeficientes elásticos efectivos en el caso serie:

$$\begin{aligned}
 \widehat{c}_{1111} &= \widehat{c}_{2222} = \langle c_{1111} \rangle - \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{13} \rangle + \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{13} \rangle, \\
 \widehat{c}_{1122} &= \langle c_{1122} \rangle - \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{32} \rangle + \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{32} \rangle, \\
 \widehat{c}_{1133} &= \widehat{c}_{2233} = \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_1, \\
 \widehat{c}_{3333} &= \mathbf{e}_1 \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_1, \\
 \widehat{c}_{1313} &= \left(\langle c_{1313}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1} \right)^{-1}, \\
 \widehat{c}_{2323} &= \left(\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde $(\cdot)^{-1}$ indica recíproco o inverso dependiendo de si (\cdot) es escalar o matriz, los vectores columna \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ conforman la base canónica de \mathbb{R}^3 y:

$$\mathbf{M}_{33} = \begin{pmatrix} c_{3333} & e_{333} & q_{333} \\ e_{333} & -\kappa_{33}^e & -\alpha_{33} \\ q_{333} & -\alpha_{33} & -\mu_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} c_{1133} \\ e_{311} \\ q_{311} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} K_3 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -M \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Las fórmulas de los coeficientes piezoeléctricos son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{e}_{113} &= \langle e_{113} c_{1313}^{-1} \rangle \left(\langle c_{1313}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1} \right)^{-1}, \\
 \widehat{e}_{223} &= \langle e_{223} c_{2323}^{-1} \rangle \left(\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1}, \\
 \widehat{e}_{311} &= \widehat{e}_{322} = \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_2, \\
 \widehat{e}_{333} &= \mathbf{e}_1^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_2.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Las fórmulas de las permitividades dieléctricas efectivas son:

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}_{11}^{\varepsilon} &= \langle \kappa_{11}^{\varepsilon} \rangle + \langle e_{113}^2 c_{1313}^{-1} \rangle - \langle e_{113} c_{1313}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{1313}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\kappa}_{22}^{\varepsilon} &= \langle \kappa_{22}^{\varepsilon} \rangle + \langle e_{223}^2 c_{2323}^{-1} \rangle - \langle e_{223} c_{2323}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\kappa}_{33}^{\varepsilon} &= -\mathbf{e}_2^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_2.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Las fórmulas de los coeficientes piezomagnéticos efectivos son:

$$\begin{aligned}\widehat{q}_{113} &= \langle q_{113} c_{1313}^{-1} \rangle (\langle c_{1313}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1})^{-1}, \\ \widehat{q}_{223} &= \langle q_{223} c_{2323}^{-1} \rangle (\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\ \widehat{q}_{311} &= \widehat{q}_{322} = \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_3, \\ \widehat{q}_{333} &= \mathbf{e}_1^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Las fórmulas de las permeabilidades magnéticas efectivas son:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{11} &= \langle \mu_{11} \rangle + \langle q_{113}^2 c_{1313}^{-1} \rangle - \langle q_{113} c_{1313}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{1313}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\mu}_{22} &= \langle \mu_{22} \rangle + \langle q_{223}^2 c_{2323}^{-1} \rangle - \langle q_{223} c_{2323}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\mu}_{33} &= -\mathbf{e}_3^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Las fórmulas de los coeficientes magnetoeléctricos efectivos son:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{11} &= \langle \alpha_{11} \rangle + \langle e_{113} q_{113} c_{1313}^{-1} \rangle - \langle e_{113} c_{1313}^{-1} \rangle \langle q_{113} c_{1313}^{-1} \rangle (\langle c_{1313}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_{22} &= \langle \alpha_{22} \rangle + \langle e_{223} q_{223} c_{2323}^{-1} \rangle - \langle q_{223} c_{2323}^{-1} \rangle \langle e_{223} c_{2323}^{-1} \rangle (\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_{33} &= -\mathbf{e}_2^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Los coeficientes termoelásticos efectivos son:

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{11} &= \widehat{\lambda}_{22} = \langle \lambda_{11} \rangle - \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_3 \rangle + \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_3 \rangle, \\ \widehat{\lambda}_{33} &= -\mathbf{e}_1^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_3 \rangle,\end{aligned}\quad (3.23)$$

donde:

$$\widetilde{\mathbf{T}}_3 = \begin{pmatrix} -\lambda_{33} \\ p_3^{\varepsilon} \\ m_3 \end{pmatrix}.\quad (3.24)$$

Los coeficientes efectivos piroeléctricos, piromagnéticos y el coeficiente efectivo $\widehat{\beta}^{\varepsilon}$ son:

$$\begin{aligned}\widehat{p}_3^{\varepsilon} &= \mathbf{e}_2^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_3 \rangle, \\ \widehat{m}_3 &= \mathbf{e}_3^t \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_3 \rangle, \\ \widehat{\beta}^{\varepsilon} &= \langle \beta^{\varepsilon} \rangle + \langle \widetilde{\mathbf{T}}_3^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_3 \rangle - \langle \widetilde{\mathbf{T}}_3^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \widetilde{\mathbf{T}}_3 \rangle.\end{aligned}\quad (3.25)$$

3.1.4. Polarización en paralelo

Las fórmulas de los coeficientes efectivos de rigidez en el caso paralelo son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{c}_{1111} &= \langle c_{1111} \rangle - \langle c_{1122}^2 c_{2222}^{-1} \rangle + \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{c}_{2222} &= (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{c}_{3333} &= \langle c_{3333} \rangle - \langle c_{2233}^2 c_{2222}^{-1} \rangle + \langle c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{c}_{1122} &= \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{c}_{1133} &= \langle c_{1133} \rangle - \langle c_{1122} c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{c}_{2233} &= \langle c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{c}_{1313} &= \langle c_{1313} \rangle, \\
 \widehat{c}_{2323} &= \mathbf{e}_1^t \left(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_1.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Los coeficientes efectivos piezoeléctricos en paralelo son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{e}_{113} &= \langle e_{113} \rangle, \\
 \widehat{e}_{223} &= \mathbf{e}_1^t \left(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_2, \\
 \widehat{e}_{311} &= \langle e_{311} \rangle - \langle e_{311} c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{e}_{322} &= \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{e}_{333} &= \langle e_{333} \rangle + \langle c_{3322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1} - \langle c_{3322} e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Las componentes de la permitividad dieléctrica efectiva son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\kappa}_{11}^\varepsilon &= \langle \kappa_{11}^\varepsilon \rangle, \\
 \widehat{\kappa}_{22}^\varepsilon &= -\mathbf{e}_2^t \left(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_2, \\
 \widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon &= \langle \kappa_{33}^\varepsilon \rangle + \langle e_{322}^2 c_{2222}^{-1} \rangle - \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Los coeficientes piezomagnéticos efectivos son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{q}_{113} &= \langle q_{113} \rangle, \\
 \widehat{q}_{223} &= \mathbf{e}_1^t \left(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_3, \\
 \widehat{q}_{311} &= \langle q_{311} \rangle - \langle q_{311} c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle q_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{q}_{322} &= \langle q_{322} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}, \\
 \widehat{q}_{333} &= \langle q_{333} \rangle + \langle c_{3322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle q_{322} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1} - \langle c_{3322} e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Las componentes de la permeabilidad magnética efectiva son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mu}_{11} &= \langle \mu_{11} \rangle, \\
 \widehat{\mu}_{22} &= -\mathbf{e}_3^t \left(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_3, \\
 \widehat{\mu}_{33} &= \langle \mu_{33} \rangle + \langle q_{322}^2 c_{2222}^{-1} \rangle - \langle q_{322} c_{2222}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Los coeficientes magnetoeléctricos efectivos son:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{11} &= \langle \alpha_{11} \rangle, \\ \widehat{\alpha}_{22} &= -\mathbf{e}_2^t \left(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{e}_3, \\ \widehat{\alpha}_{33} &= \langle \alpha_{33} \rangle + \langle q_{322} e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle - \left\langle \frac{q_{322}}{c_{2222}} \right\rangle \left\langle \frac{e_{322}}{c_{2222}} \right\rangle \left(\left\langle \frac{1}{c_{2222}} \right\rangle + \frac{2}{K_2} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Los coeficientes termoelásticos efectivos son:

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{11} &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle \left(\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1} \langle c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle - \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle, \\ \widehat{\lambda}_{22} &= \left(\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1} \langle c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle, \\ \widehat{\lambda}_{33} &= \langle \lambda_{33} \rangle + \langle c_{3322} c_{2222}^{-1} \rangle \left(\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right) \langle c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle - \langle c_{3322} c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Los coeficientes piroeléctrico y piromagnético y el coeficiente efectivo $\widehat{\beta}^\varepsilon$ son:

$$\begin{aligned}\widehat{p}_3^\varepsilon &= \langle p_3^\varepsilon \rangle - \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \left(\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1} \langle \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle e_{322} \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle, \\ \widehat{m}_3 &= \langle m_3 \rangle - \langle q_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \left(\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1} \langle \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle q_{322} \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle, \\ \widehat{\beta}^\varepsilon &= \langle \beta^\varepsilon \rangle + \langle \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle^2 \left(\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1} + \langle \lambda_{22}^2 c_{2222}^{-1} \rangle,\end{aligned}\quad (3.33)$$

donde:

$$\mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} c_{2323} & e_{232} & q_{232} \\ e_{232} & -\kappa_{22}^\varepsilon & -\alpha_{22} \\ q_{232} & -\alpha_{22} & -\mu_{22} \end{pmatrix}.\quad (3.34)$$

3.1.5. Material compuesto bifásico

En particular, en este capítulo utilizaremos materiales compuestos por dos fases. Veremos a continuación qué forma adoptan, en este caso, las fórmulas (3.16)-(3.33). Como vimos en el capítulo anterior, podemos considerar las propiedades físicas como funciones Y -periódicas de la variable y . Además, supondremos que dentro del espacio ocupado por cada fase no hay variación de ninguna de las propiedades. Esto puede modelarse matemáticamente haciendo que las funciones sean constantes a trozos. Por ejemplo, el coeficiente $c_{ijkl}(y)$:

$$c_{ijkl}(y) = \begin{cases} c_{ijkl}^{(1)}, & y \in \Pi, \\ c_{ijkl}^{(2)}, & y \in Y \setminus \Pi, \end{cases}\quad (3.35)$$

donde Π es la región de la celda periódica ocupada por el material con componente $c_{ijkl}^{(1)}$ de la rigidez y la región $Y \setminus \Pi$ está ocupada por el material con rigidez $c_{ijkl}^{(2)}$. En el caso de un material laminado compuesto por dos fases:

$$c_{ijkl}(y_m) = \begin{cases} c_{ijkl}^{(1)}, & 0 \leq y_m < \theta, \\ c_{ijkl}^{(2)}, & \theta \leq y_m < 1. \end{cases}\quad (3.36)$$

El punto θ que sirve de frontera entre las fases es también llamado la *fracción volumétrica* del material 1. En este caso, el promedio en la celda de una propiedad física $f(y)$ cualquiera que toma los valores $f^{(1)}$ y $f^{(2)}$, toma la siguiente forma:

$$\langle f(y) \rangle = f^{(1)}\theta + f^{(2)}(1 - \theta).\quad (3.37)$$

Teniendo en cuenta esto, es posible calcular los coeficientes efectivos a través de las fórmulas (3.16)-(3.33). Por ejemplo, el coeficiente \widehat{c}_{1111} de las fórmulas (3.26):

$$\begin{aligned}\widehat{c}_{1111} &= \langle c_{1111} \rangle - \langle c_{1122}^2 c_{2222}^{-1} \rangle + \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle^2 (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1} \\ &= c_{1111}^{(1)} \theta + c_{1111}^{(2)} (1 - \theta) - \frac{\left(c_{1122}^{(1)} \right)^2}{c_{2222}^{(1)}} \theta - \frac{\left(c_{1122}^{(2)} \right)^2}{c_{2222}^{(2)}} (1 - \theta) \\ &\quad + \frac{\left(\frac{c_{1122}^{(1)}}{c_{2222}^{(1)}} \theta + \frac{c_{1122}^{(2)}}{c_{2222}^{(2)}} (1 - \theta) \right)^2}{\frac{\theta}{c_{2222}^{(1)}} + \frac{1 - \theta}{c_{2222}^{(2)}} + \frac{2}{K_2}}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

3.2. Cadenas de relaciones

De las expresiones para \widehat{c}_{3333} , \widehat{e}_{333} , \widehat{q}_{333} , $\widehat{\kappa}_{33}$, $\widehat{\mu}_{33}$ y $\widehat{\alpha}_{33}$ que podemos encontrar en (3.16)-(3.25) y utilizando álgebra lineal básica, podemos obtener la siguiente cadena de relaciones para el caso serie:

$$\frac{1}{\Delta^s} = \frac{\widehat{c}_{3333}}{\Delta_{11}^s} = -\frac{\widehat{e}_{333}}{\Delta_{12}^s} = \frac{\widehat{q}_{333}}{\Delta_{13}^s} = -\frac{\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon}{\Delta_{22}^s} = -\frac{\widehat{\mu}_{33}}{\Delta_{33}^s} = \frac{\widehat{\alpha}_{33}}{\Delta_{23}^s},\tag{3.39}$$

donde $\Delta^s = \det \left(\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \right)$ y Δ_{ij}^s son los menores de $\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}$.

Estas relaciones exactas son análogas a las (6.10) de [33], solamente que aquí incluyen la información de la imperfección en los menores Δ_{ij}^s . Esto último se puede apreciar mejor en el ejemplo concreto de un material piezoeléctrico sin tener en cuenta las propiedades magnéticas ($q_{333}(y_m) = 0$, $\alpha_{33}(y_m) = 0$ y $\mu_{33}(y_m) = 0$). Si definimos la siguiente función de las propiedades físicas de los materiales:

$$\tau^{(i)} = c_{3333}^{(i)} (\kappa_{33}^\varepsilon)^{(i)} + \left(e_{333}^{(i)} \right)^2, \quad i = 1, 2,\tag{3.40}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}-\Delta^s &= \left(\left\langle \frac{c_{3333}}{\tau} \right\rangle + \frac{2}{E} \right) \left(\left\langle \frac{\kappa_{33}^\varepsilon}{\tau} \right\rangle + \frac{2}{K_3} \right) + \left\langle \frac{e_{333}}{\tau} \right\rangle^2, \\ -\Delta_{11}^s &= \left\langle \frac{c_{3333}}{\tau} \right\rangle + \frac{2}{E}, \\ -\Delta_{12}^s &= \left\langle \frac{e_{333}}{\tau} \right\rangle, \\ \Delta_{22}^s &= \left\langle \frac{\kappa_{33}^\varepsilon}{\tau} \right\rangle + \frac{2}{K_3}.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Y obtenemos la siguiente cadena de relaciones:

$$-\frac{1}{\Delta^s} = \frac{\widehat{c}_{3333}}{\langle c_{3333} \tau^{-1} \rangle + 2E^{-1}} = \frac{\widehat{e}_{333}}{\langle e_{333} \tau^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon}{\langle \kappa_{33}^\varepsilon \tau^{-1} \rangle + 2K_3^{-1}},\tag{3.42}$$

De aquí podemos obtener las siguientes fórmulas para los coeficientes efectivos longitudinales de un material piezoeléctrico:

$$\begin{aligned}\widehat{c}_{3333} &= \frac{\langle c_{3333}\tau^{-1} \rangle + 2E^{-1}}{(\langle c_{3333}\tau^{-1} \rangle + 2E^{-1}) (\langle \kappa_{33}^{\varepsilon}\tau^{-1} \rangle + 2K_3^{-1}) + \langle e_{333}\tau^{-1} \rangle^2}, \\ \widehat{e}_{333} &= \frac{\langle e_{333}\tau^{-1} \rangle}{(\langle c_{3333}\tau^{-1} \rangle + 2E^{-1}) (\langle \kappa_{33}^{\varepsilon}\tau^{-1} \rangle + 2K_3^{-1}) + \langle e_{333}\tau^{-1} \rangle^2}, \\ \widehat{\kappa}_{33}^{\varepsilon} &= \frac{\langle \kappa_{33}^{\varepsilon}\tau^{-1} \rangle + 2K_3^{-1}}{(\langle c_{3333}\tau^{-1} \rangle + 2E^{-1}) (\langle \kappa_{33}^{\varepsilon}\tau^{-1} \rangle + 2K_3^{-1}) + \langle e_{333}\tau^{-1} \rangle^2},\end{aligned}\quad (3.43)$$

que son las fórmulas obtenidas en los resultados del artículo [64] por un método diferente al utilizado aquí. En dicho trabajo se solucionó un problema local reducido para obtener solamente los coeficientes efectivos \widehat{c}_{3333} , \widehat{e}_{333} y $\widehat{\kappa}_{33}^{\varepsilon}$ en el caso serie. El procedimiento descrito en la Sección 3.1 consiste en integrar una sola vez el sistema de ecuaciones ordinarias para obtener los coeficientes efectivos sin determinar las funciones locales. En cambio, en el trabajo [64] se propuso que la matriz local $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_3$ fuese 2×2 y fuera una función afín de y_3 en la celda periódica:

$$\mathbf{N}_3(y_3) = \begin{pmatrix} w_3^{33}(y_3) & g_3^3(y_3) \\ \zeta^{33}(y_3) & \pi^3(y_3) \end{pmatrix} = y_3 \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Los coeficientes indeterminados k_{ij} y p_{ij} se calcularon de las CFP, de la condición de promedio nulo de $\mathbf{N}_3(y_3)$ y de la condición de contacto imperfecto. Este método es diferente al utilizado en esta tesis para encontrar los coeficientes efectivos.

En el caso paralelo se cumple la siguiente cadena de relaciones:

$$\frac{1}{\Delta^p} = \frac{\widehat{c}_{3232}}{\Delta_{11}^p} = -\frac{\widehat{e}_{232}}{\Delta_{12}^p} = \frac{\widehat{q}_{232}}{\Delta_{13}^p} = -\frac{\widehat{\kappa}_{22}^{\varepsilon}}{\Delta_{22}^p} = -\frac{\widehat{\mu}_{22}}{\Delta_{33}^p} = \frac{\widehat{\alpha}_{22}}{\Delta_{23}^p}, \quad (3.45)$$

donde $\Delta^p = \det(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1})$ y Δ_{ij}^p es el menor ij de la matriz $(\langle \mathbf{M}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1})$.

Si en vez de considerar a los bloques \mathbf{M}_{ii} , $i = 2, 3$ que son de 3×3 consideramos las matrices completas de 5×5 podemos añadir más coeficientes a las cadenas. Para el caso de polarización en serie:

$$\begin{aligned}(\langle c_{1313}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1})^{-1} &= \widehat{c}_{1313} = \frac{\widehat{e}_{113}}{\langle e_{113}c_{1313}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{q}_{113}}{\langle q_{113}c_{1313}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{\kappa}_{11}^{\varepsilon} - \langle \kappa_{11}^{\varepsilon} \rangle + \langle e_{113}^2 c_{1313}^{-1} \rangle}{\langle e_{113}c_{1313} \rangle^2} \\ &= \frac{\widehat{\mu}_{11} - \langle \mu_{11} \rangle - \langle q_{113}^2 c_{1313}^{-1} \rangle}{\langle q_{113}c_{1313}^{-1} \rangle^2} = \frac{\widehat{\alpha}_{11} - \langle \alpha_{11} \rangle - \langle e_{113}q_{113}c_{1313}^{-1} \rangle}{\langle e_{113}c_{1313}^{-1} \rangle \langle q_{113}c_{1313}^{-1} \rangle}, \\ (\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1} &= \widehat{c}_{2323} = \frac{\widehat{e}_{223}}{\langle e_{223}c_{2323}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{q}_{223}}{\langle q_{223}c_{2323}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{\kappa}_{22}^{\varepsilon} - \langle \kappa_{22}^{\varepsilon} \rangle + \langle e_{223}^2 c_{2323}^{-1} \rangle}{\langle e_{223}c_{2323}^{-1} \rangle^2} \\ &= \frac{\widehat{\mu}_{22} - \langle \mu_{22} \rangle - \langle q_{223}^2 c_{2323}^{-1} \rangle}{\langle q_{223}c_{2323}^{-1} \rangle^2} = \frac{\widehat{\alpha}_{22} - \langle \alpha_{22} \rangle - \langle e_{223}q_{223}c_{2323}^{-1} \rangle}{\langle e_{223}c_{2323}^{-1} \rangle \langle q_{223}c_{2323}^{-1} \rangle}.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Para el caso paralelo:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1}} &= \widehat{c}_{2222} = \frac{\widehat{c}_{1122}}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{c}_{2233}}{\langle c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{e}_{322}}{\langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{q}_{322}}{\langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{c}_{1111} - \langle c_{1111} \rangle + \langle c_{1122}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle^2} = \frac{\widehat{c}_{1133} - \langle c_{1133} \rangle + \langle c_{1122}c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{c}_{3333} - \langle c_{3333} \rangle + \langle c_{2233}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle^2} = \frac{\widehat{e}_{311} - \langle e_{311} \rangle + \langle c_{1122}e_{311}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle \langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{e}_{333} - \langle e_{333} \rangle + \langle c_{3322}e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{3322}c_{2222}^{-1} \rangle \langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{q}_{311} - \langle q_{311} \rangle + \langle c_{1122}q_{311}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle \langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{q}_{333} - \langle q_{333} \rangle + \langle c_{3322}q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{3322}c_{2222}^{-1} \rangle \langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{-\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon + \langle \kappa_{33}^\varepsilon \rangle - \langle e_{322}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle^2} \\
 &= \frac{-\widehat{\mu}_{33} + \langle \mu_{33} \rangle - \langle q_{322}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle^2} = \frac{-\widehat{\alpha}_{33} + \langle \alpha_{33} \rangle - \langle e_{322}q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle \langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\Delta_{22}^p (\langle \mathbf{A}_{22}^{-1} \rangle + 2\mathbf{K}^{-1})}{\det (\langle \mathbf{A}_{22}^{-1} \rangle + 2\mathbf{K}^{-1})}. \tag{3.47}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que:

$$\det (\langle \mathbf{A}_{22}^{-1} \rangle + 2\mathbf{K}^{-1}) = (\langle c_{1212}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1}) (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1}) \Delta^p. \tag{3.48}$$

También:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1}} &= \frac{D_{22}^p}{\Delta^p} = \frac{D_{22}^p \widehat{c}_{3232}}{\Delta_{11}^p} = -\frac{D_{22}^p \widehat{e}_{232}}{\Delta_{12}^p} = \frac{D_{22}^p \widehat{q}_{232}}{\Delta_{13}^p} = -\frac{D_{22}^p \widehat{\kappa}_{22}^\varepsilon}{\Delta_{22}^p} \\
 &= -\frac{D_{22}^p \widehat{\mu}_{22}}{\Delta_{33}^p} = \frac{D_{22}^p \widehat{\alpha}_{22}}{\Delta_{23}^p} = \widehat{c}_{2222} = \frac{\widehat{c}_{1122}}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{c}_{2233}}{\langle c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{e}_{322}}{\langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{q}_{322}}{\langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{c}_{1111} - \langle c_{1111} \rangle + \langle c_{1122}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle^2} = \frac{\widehat{c}_{1133} - \langle c_{1133} \rangle + \langle c_{1122}c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{c}_{3333} - \langle c_{3333} \rangle + \langle c_{2233}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{2233}c_{2222}^{-1} \rangle^2} = \frac{\widehat{e}_{311} - \langle e_{311} \rangle + \langle c_{1122}e_{311}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle \langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{e}_{333} - \langle e_{333} \rangle + \langle c_{3322}e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{3322}c_{2222}^{-1} \rangle \langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{\widehat{q}_{311} - \langle q_{311} \rangle + \langle c_{1122}q_{311}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{1122}c_{2222}^{-1} \rangle \langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} \\
 &= \frac{\widehat{q}_{333} - \langle q_{333} \rangle + \langle c_{3322}q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle c_{3322}c_{2222}^{-1} \rangle \langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle} = \frac{-\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon + \langle \kappa_{33}^\varepsilon \rangle - \langle e_{322}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle^2} \\
 &= \frac{-\widehat{\mu}_{33} + \langle \mu_{33} \rangle - \langle q_{322}^2 c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle^2} = \frac{-\widehat{\alpha}_{33} + \langle \alpha_{33} \rangle - \langle e_{322}q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle}{\langle e_{322}c_{2222}^{-1} \rangle \langle q_{322}c_{2222}^{-1} \rangle}, \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

donde:

$$D_{22}^p = \frac{\Delta_{22}^p (\langle \mathbf{A}_{22}^{-1} \rangle + 2\widetilde{\mathbf{K}}^{-1})}{(\langle c_{1212}^{-1} \rangle + 2K_1^{-1}) (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})}. \tag{3.50}$$

| Módulos | $BaTiO_3$ | $CoFe_2O_4$ |
|--|-----------|-------------|
| c_{1111} (GPa) | 166 | 286 |
| c_{1122} (GPa) | 77 | 173 |
| c_{1133} (GPa) | 78 | 170.5 |
| c_{3333} (GPa) | 162 | 269.5 |
| c_{1313} (GPa) | 43 | 45.3 |
| e_{113} (C/m ²) | 11.6 | 0 |
| e_{311} (C/m ²) | -4.4 | 0 |
| e_{333} (C/m ²) | 18.6 | 0 |
| κ_{11}^ε ($10^{-10}C^2/Nm^2$) | 112 | 0.8 |
| κ_{33}^ε ($10^{-10}C^2/Nm^2$) | 126 | 0.93 |
| q_{113} (N/Am) | 0 | 550 |
| q_{311} (N/Am) | 0 | 580.3 |
| q_{333} (N/Am) | 0 | 699.7 |
| μ_{11} ($10^{-6}Ns^2/C^2$) | 5 | 590 |
| μ_{33} ($10^{-6}Ns^2/C^2$) | 10 | 157 |
| λ_{11} (MPaK ⁻¹) | 4.3 | 6.3 |
| λ_{33} (MPaK ⁻¹) | 3.5 | 6.1 |

Cuadro 3.1: Propiedades materiales del $BaTiO_3$ y del $CoFe_2O_4$. Los coeficientes piroeléctrico y piromagnético se consideran iguales a cero. Las propiedades magneto-electro-elásticas se han tomado de [66] mientras que las propiedades termoelásticas λ_{ij} se han tomado de [67].

3.3. Resultados numéricos

En esta tesis utilizaremos como ejemplo numérico a un medio laminado compuesto por dos fases, una piezoeléctrica y una piezomagnética. La fase piezoeléctrica está constituida por *titanato de bario* ($BaTiO_3$) y la fase piezomagnética, por la *ferrita de cobalto* ($CoFe_2O_4$). Ambos materiales exhiben simetría transversal isótropa y sus propiedades físicas aparecen en el Cuadro 3.1.

Estos materiales particulares fueron seleccionados para ilustrar cómo emergen en un compuesto las propiedades producto (ver Sección 1.1), como los efectos magnetoeléctricos, piroeléctrico y piromagnético. El $BaTiO_3$ es piezoeléctrico mientras que el $CoFe_2O_4$ es piezomagnético, pero ninguno de los dos posee propiedades magnetoeléctricas α_{ij} en estado puro. Sin embargo, en la subsección 3.3.1 veremos que en el compuesto $BaTiO_3/CoFe_2O_4$ aparece esta propiedad como resultado de la composición de ambos materiales.

En la Figura 3.2 podemos ver algunos coeficientes de rigidez efectivos como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ para diferentes valores de las constantes de imperfección elásticas K_2 y K_3 . A medida que las constantes de imperfección se hacen muy grandes en comparación con los órdenes de magnitud de las propiedades físicas ($\approx 10^2$ GPa), obtenemos coeficientes efectivos que se aproximan asintóticamente al caso de contacto perfecto (línea gruesa continua). Analíticamente, esto se puede comprobar notando que las fórmulas de los coeficientes efectivos (3.16)-(3.25) y (3.26)-(3.33) se reducen, respectivamente, a las fórmulas (5.15)-(5.20) y (5.7)-(5.12) de [68], obtenidas en el caso de contacto perfecto. Por otra parte, si las constantes

de imperfección son pequeñas en comparación con las propiedades físicas obtenemos un fenómeno conocido como *decohesión*. Este nombre proviene del hecho de que las constantes de imperfección elásticas muy bajas modelan una capa superficial extremadamente flexible, lo cual implica que las tensiones no se transmiten de una fase a otra y el material compuesto se comporta como si las fases estuvieran aisladas entre sí. Para valores de las constantes de imperfección eléctricas y magnéticas muy bajos en comparación con las propiedades físicas respectivas se cumple algo similar. A través de estos dos casos extremos, parámetros de imperfección muy bajos y muy altos, podemos ver que la condición de contacto imperfecto es más general que la condición de contacto perfecto.

De las fórmulas de los coeficientes efectivos en serie (3.16)-(3.25) podemos observar que la simetría transversal isótropa de las fases es “heredada” por el compuesto. Esto es evidente del hecho de que, por ejemplo, $\hat{c}_{1111} = \hat{c}_{2222}$, $\hat{c}_{1133} = \hat{c}_{2233}$, $\hat{e}_{311} = \hat{e}_{322}$. Sin embargo, si los coeficientes K_1 y K_2 son diferentes, tendríamos que $\hat{e}_{131} \neq \hat{e}_{232}$ y $\hat{\kappa}_{11} \neq \hat{\kappa}_{22}$, lo cual hace que el compuesto no sea transversalmente isótropo. Esto es consecuencia de la interpretación de la condición de contacto imperfecto como una lámina muy fina de material entre las dos superficies. Si $K_1 \neq K_2$, dicho material no sería transversalmente isótropo y por tanto el compuesto del que él es parte, no puede heredar esa simetría. Las propiedades magnéticas y térmicas exhiben un comportamiento similar.

Cuando las constantes de imperfección son muy grandes y $\theta = 0$ o $\theta = 1$ tenemos un material compuesto por una sola fase, $CoFe_2O_4$ o $BaTiO_3$, respectivamente. Es por esa razón que en los extremos del intervalo obtenemos valores de las propiedades físicas que aparecen en el Cuadro 3.1. Por ejemplo, de los paneles superiores de la Figura 3.2 podemos ver que $\hat{c}_{2222}(0) \approx 285GPa$ y $\hat{c}_{2222}(1) \approx 166GPa$ que son los valores respectivos de c_{2222} para $CoFe_2O_4$ y $BaTiO_3$ según el Cuadro 3.1. Este comportamiento es independiente de la polarización en serie o en paralelo. Si las constantes de imperfección no son grandes en comparación con las propiedades físicas los valores en los extremos no son iguales a los de una u otra fase. Esto se debe a que existe decohesión entre celdas consecutivas, incluso si estas están compuestas por una sola fase.

Los coeficientes efectivos de propiedades no-acopladas, como es el caso de los coeficientes elásticos, dependen débilmente de los parámetros de imperfección relativos a esas propiedades. En el caso de los coeficientes elásticos no hay dependencia de E o M , solo de las propiedades K_1 , K_2 y K_3 . Esto es evidente en algunas fórmulas analíticas, pero no lo es en otras que involucran medias armónicas de matrices. Tal es el caso de \hat{c}_{3333} en serie de la expresión (3.16). Este coeficiente sólo depende del parámetro K_3 , a pesar de que su fórmula analítica podría sugerir dependencia de E o M .

En los paneles del centro de la Figura 3.2 podemos ver la gran diferencia que existe entre los coeficientes \hat{c}_{2323} para los dos tipos de polarización. En el caso serie, \hat{c}_{2323} , también llamado *módulo de cizalladura*, disminuye monótonamente de un extremo a otro del intervalo. Sin embargo, en el caso paralelo, podemos ver una ganancia de esta propiedad con un pico antes de tomar el valor correspondiente al extremo $\theta = 1$.

La Figura 3.3 muestra algunos coeficientes piezoeléctricos efectivos como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ para diferentes valores de los parámetros de imperfección y diferentes polarizaciones. Las gráficas de \hat{e}_{311} y \hat{e}_{333} en serie se

han representado en escala logarítmica por causa de que la fase piezoeléctrica tiene estas propiedades iguales a cero.

La gráfica de \widehat{e}_{113} es simplemente la media aritmética de la propiedad correspondiente en la celda periódica, es por eso que no se muestra dependencia con ningún parámetro de imperfección. No existe diferencia entre los coeficientes \widehat{e}_{311} y \widehat{e}_{322} en la polarización series debido a que la simetría transversal isotrópica de las fases es heredada por el material compuesto.

A diferencia de los coeficientes de rigidez efectivos, los coeficientes piezoeléctricos efectivos representan un efecto acoplado, y, por tanto, no solo dependen de los parámetros de imperfección elásticos, sino que también del parámetro eléctrico E . Esto se muestra en el gráfico de \widehat{e}_{333} en series (panel inferior izquierdo).

Las propiedades efectivas piezomagnéticas (Figura 3.4) exhiben un comportamiento similar a las piezoeléctricas. De manera similar a las propiedades piezoeléctricas, no solo dependen de los parámetros de imperfección elásticos, sino que también del parámetro magnético M .

En la Figura 3.5 podemos observar el comportamiento de la permitividad dieléctrica efectiva $\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon$ y de la permitividad magnética efectiva $\widehat{\mu}_{33}$ para distintos valores de las constantes de imperfección E y M . En la polarización paralelo, estos coeficientes se han graficado sólo para el caso de contacto perfecto porque dependen muy débilmente de la constante de imperfección K_2 . Esto último se debe a que el $BaTiO_3$ ($CoFe_2O_4$) tiene todas las propiedades piezomagnéticas (piezoeléctricas) iguales a cero. Si escribimos para estos materiales, la fórmula de $\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon$ que aparece en la expresión (3.28) y la fórmula de $\widehat{\mu}_{33}$ que aparece en la expresión (3.30), teniendo en cuenta la forma (3.37) que adquiere el promedio en la celda en conectividad 2-2, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon &= \left((\kappa_{33}^\varepsilon)^{(1)} + \frac{(e_{322}^{(1)})^2}{c_{2222}^{(1)}} \right) \theta + \frac{\left(\frac{e_{322}^{(1)}}{c_{2222}^{(1)}} \right)^2 \theta^2}{\frac{\theta}{c_{2222}^{(1)}} + \frac{1-\theta}{c_{2222}^{(2)}} + \frac{2}{K_2}}, \\ \widehat{\mu}_{33} &= \left((\mu_{33}^\varepsilon)^{(2)} + \frac{(q_{322}^{(2)})^2}{c_{2222}^{(2)}} \right) (1-\theta) + \frac{\left(\frac{q_{322}^{(2)}}{c_{2222}^{(2)}} \right)^2 (1-\theta)^2}{\frac{\theta}{c_{2222}^{(1)}} + \frac{1-\theta}{c_{2222}^{(2)}} + \frac{2}{K_2}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Podemos apreciar que el numerador del término que contiene a K_2 depende cuadráticamente de θ (respectivamente, $1-\theta$) que es un número entre 0 y 1. Esto hace que este término sea despreciable respecto al término lineal en θ (respectivamente, $1-\theta$).

En la Figura 3.6 podemos ver a los coeficientes termoelásticos efectivos $\widehat{\lambda}_{33}$ como funciones de la fracción volumétrica. La disminución de la rigidez efectiva causada por la disminución de los parámetros de imperfección elásticos provoca una baja respuesta al aumento de la temperatura de las tensiones en el material.

Por último, discutiremos la relación que existe entre las fórmulas (3.16)-(3.33) y las fórmulas (3.15). Para ello es importante destacar que los coeficientes efectivos no solamente exhiben comportamiento asintótico cuando las constantes de imperfección van a infinito sino cuando se hacen muy pequeñas (decohesión). Habíamos hecho

notar esto anteriormente pero en la Figura 3.7 lo mostramos más claramente. En el panel superior derecho, podemos ver a \widehat{c}_{1111} como función de la constante de imperfección K_3 cuando la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ es igual a cero y la polarización es serie. Cuando K_3 se hace mucho mayor que los órdenes de magnitud típicos de la rigidez, $\widehat{c}_{1111} \rightarrow 286GPa$, que es el valor de c_{1111} para el $CoFe_2O_4$. Por otro lado, para valores pequeños de K_3 , obtenemos la constante efectiva \widehat{c}_{1111} de un compuesto formado por celdas decohesionadas de $CoFe_2O_4$. Esto es equivalente a que entre celdas consecutivas haya una lámina muy fina de vacío, lo cual se puede comprobar porque el límite de \widehat{c}_{1111} cuando la constante de imperfección va a cero es la siguiente fórmula que se obtendría de (3.15):

$$\lim_{K_3 \rightarrow 0} \widehat{c}_{1111}(0) = c_{1111}^{(1)} - \left(\mathbf{C}_{13}^{(1)} \right)^t \left(\mathbf{M}_{33}^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{C}_{13}^{(1)}. \quad (3.52)$$

En el caso particular de \widehat{c}_{1111} este valor límite de decohesión es 178.3GPa. Este mismo comportamiento se puede apreciar para otros coeficientes cuyas fórmulas contienen más términos que solamente el de la media armónica. En los paneles inferiores de la Figura 3.7 también representamos este mismo comportamiento límite de celdas decohesionadas constituidas por $BaTiO_3$ ($\theta = 1$) en serie y en paralelo.

3.3.1. Propiedades producto

Al escribir las fórmulas de los coeficientes efectivos por componentes (3.16)-(3.33), se hace más evidente la aparición de propiedades producto. Además podemos identificar qué propiedades específicas están involucradas en el mecanismo como el de la expresión (1.1) para dar lugar a la propiedad producto. Esto implica que el uso de las fórmulas analíticas por componentes podría aplicarse para amplificar propiedades producto mediante el ajuste fino de propiedades mediadoras.

Analicemos el ejemplo específico de las propiedades magnetoeléctricas. De (3.22) tenemos la expresión para un coeficiente magnetoeléctrico en serie:

$$\widehat{\alpha}_{22} = \langle \alpha_{22} \rangle + \langle e_{223} q_{223} c_{2323}^{-1} \rangle - \langle e_{223} c_{2323}^{-1} \rangle \langle q_{223} c_{2323}^{-1} \rangle \left(\langle c_{2323}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.53)$$

En el caso del compuesto $BaTiO_3/CoFe_2O_4$ cuyas fases tienen propiedades magnetoeléctricas iguales a cero, obtendríamos de la expresión anterior:

$$\langle \alpha_{22} \rangle = \alpha_{22}^{(1)} \theta + \alpha_{22}^{(2)} (1 - \theta) = 0, \quad (3.54)$$

y si el compuesto está formado por una fase piezoeléctrica y una fase piezomagnética:

$$\langle e_{223} q_{223} c_{2323}^{-1} \rangle = \frac{e_{223}^{(1)} q_{223}^{(1)}}{c_{2323}^{(1)}} \theta + \frac{e_{223}^{(2)} q_{223}^{(2)}}{c_{2323}^{(2)}} (1 - \theta) = 0. \quad (3.55)$$

Esto nos deja únicamente con el último término del MD de (3.53) que involucra la media armónica. Por tanto, tenemos un efecto magnetoeléctrico no nulo que es el producto de la interacción de la propiedad piezoeléctrica e_{223} con la piezomagnética q_{223} a través de la propiedad elástica c_{2323} . Un comportamiento similar lo podemos apreciar en los demás coeficientes magnetoeléctricos efectivos de la Figura 3.8. También obsérvese que estos coeficientes son dependientes de los tres tipos de parámetros de imperfección: elásticos, eléctricos y magnéticos.

También el coeficiente piroeléctrico efectivo $\widehat{p}_3^\varepsilon$ en paralelo es una propiedad producto:

$$\widehat{p}_3^\varepsilon = \langle p_3^\varepsilon \rangle - \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle (\langle c_{2222}^{-1} \rangle + 2K_2^{-1})^{-1} \langle \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle e_{322} \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle. \quad (3.56)$$

Incluso si ninguna de las fases manifiesta propiedades piroeléctricas por separado ($\langle p_3^\varepsilon \rangle = 0$) tenemos una propiedad piroeléctrica efectiva no nula gracias a la interacción entre una propiedad termoelástica (λ_{22}) y una propiedad piezoeléctrica (e_{322}) a través de una propiedad elástica (c_{2222}). Estas fórmulas analíticas ejemplifican muy bien el efecto producto.

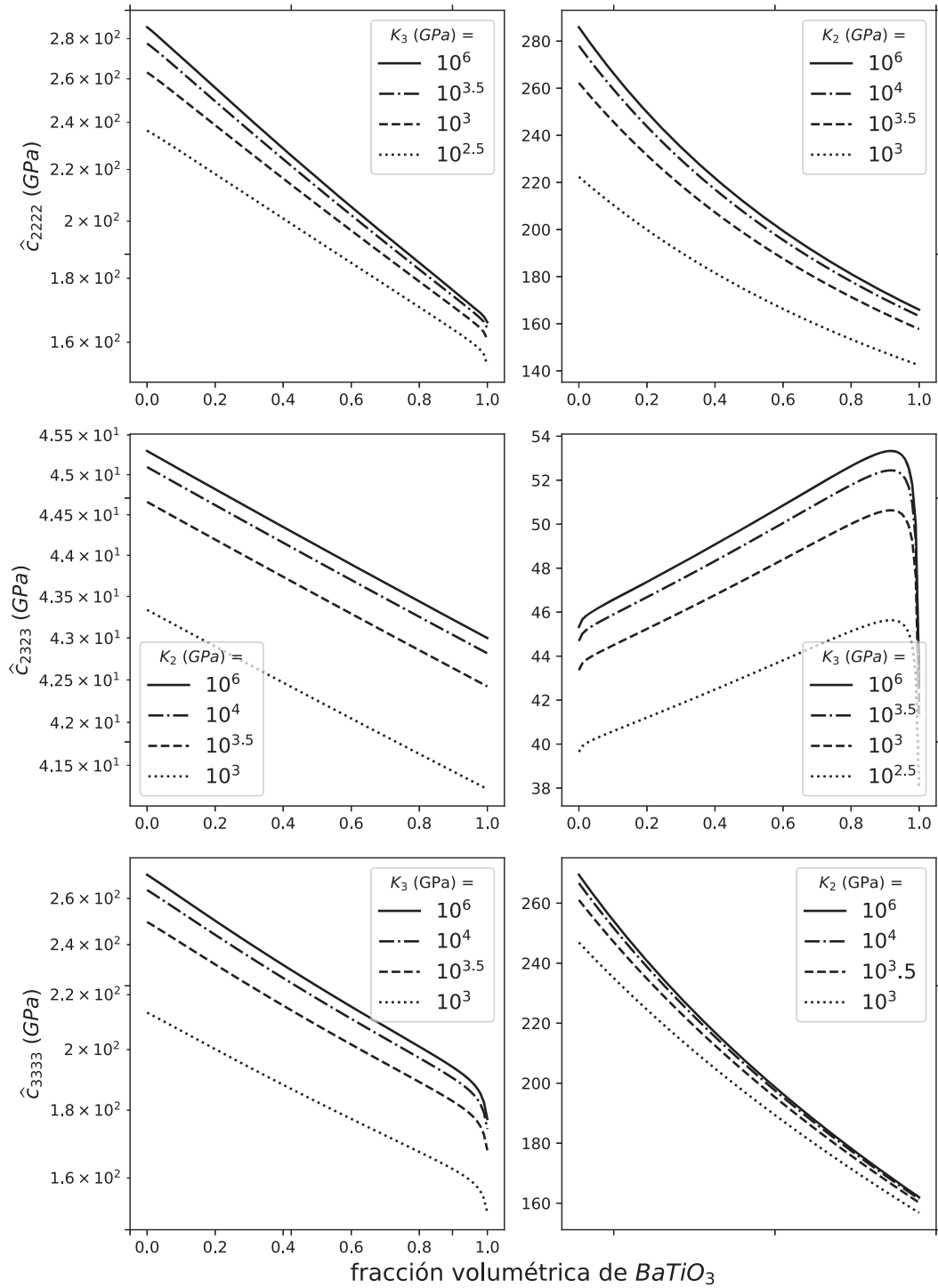


Figura 3.2: Coeficientes de rigidez efectivos como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ en las polarizaciones en serie (paneles de la izquierda) y en paralelo (derecha) y para diferentes valores de las constantes de imperfección K_3 (serie) y K_2 (paralelo).

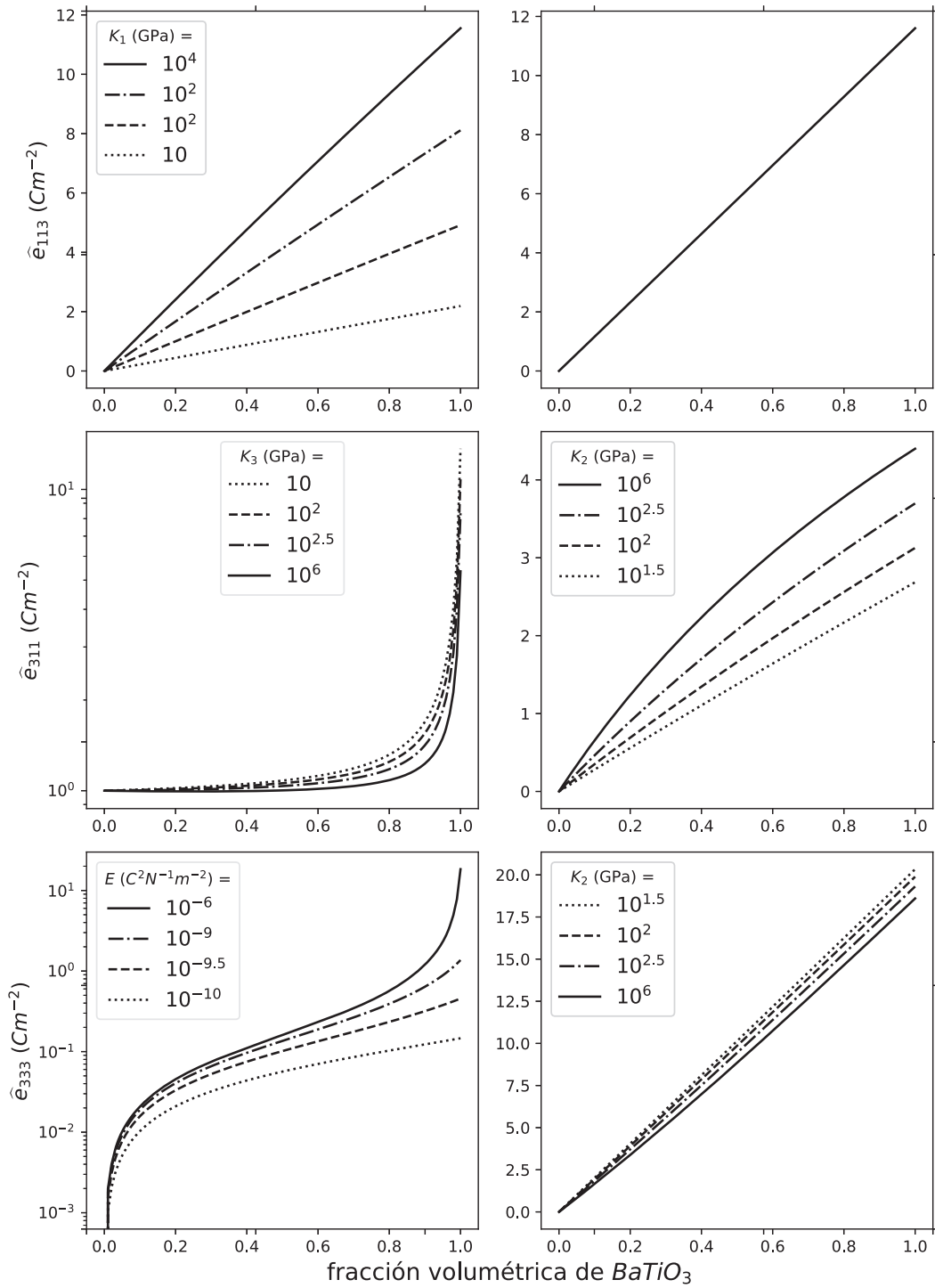


Figura 3.3: Coeficientes piezoeléctricos efectivos como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ en las polarizaciones en serie (paneles de la izquierda) y en paralelo (derecha) y para diferentes valores de las constantes de imperfección.

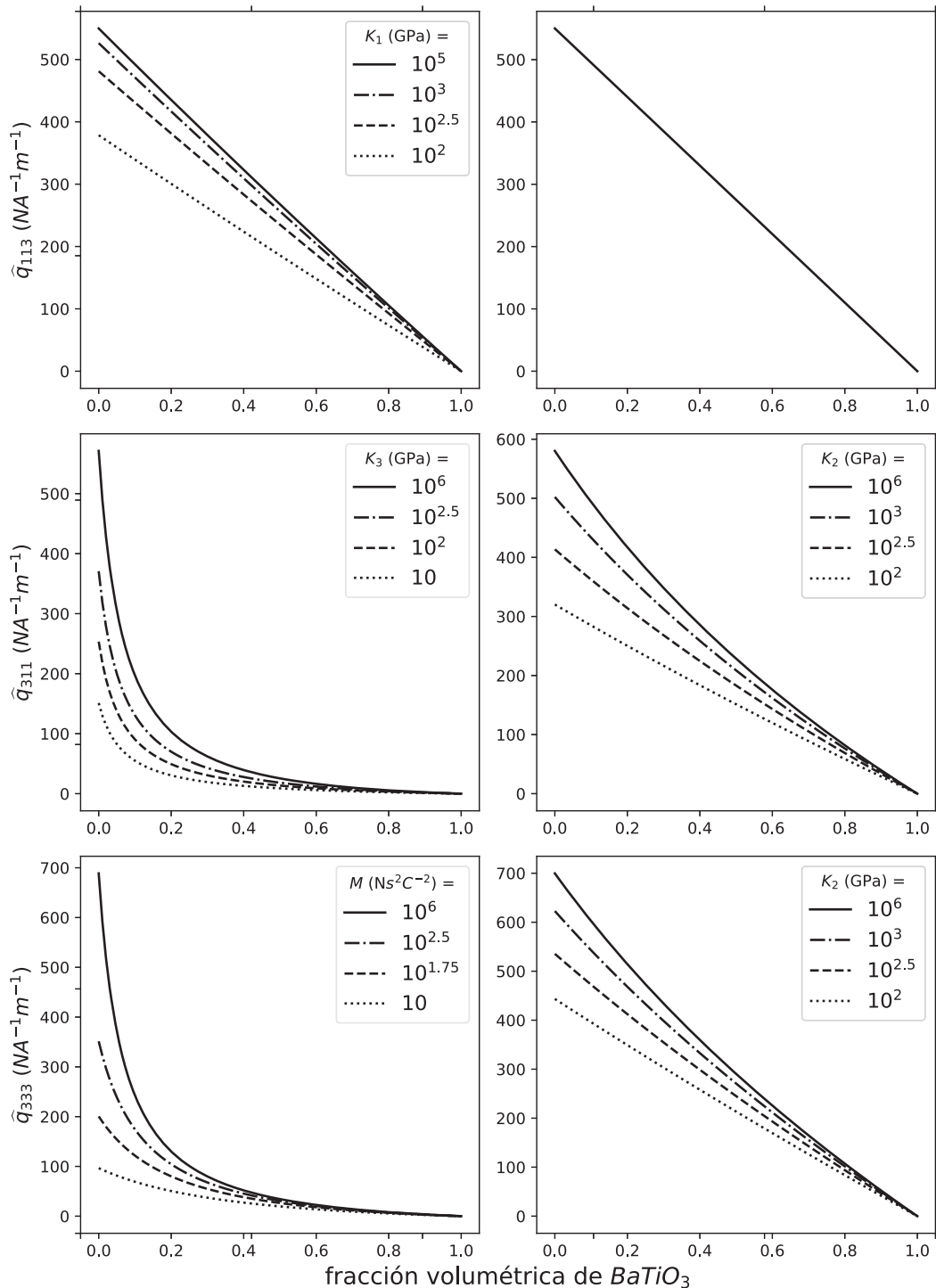


Figura 3.4: Coeficientes piezomagnéticos efectivos como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ en las polarizaciones en serie (paneles de la izquierda) y en paralelo (derecha) y para diferentes valores de las constantes de imperfección.

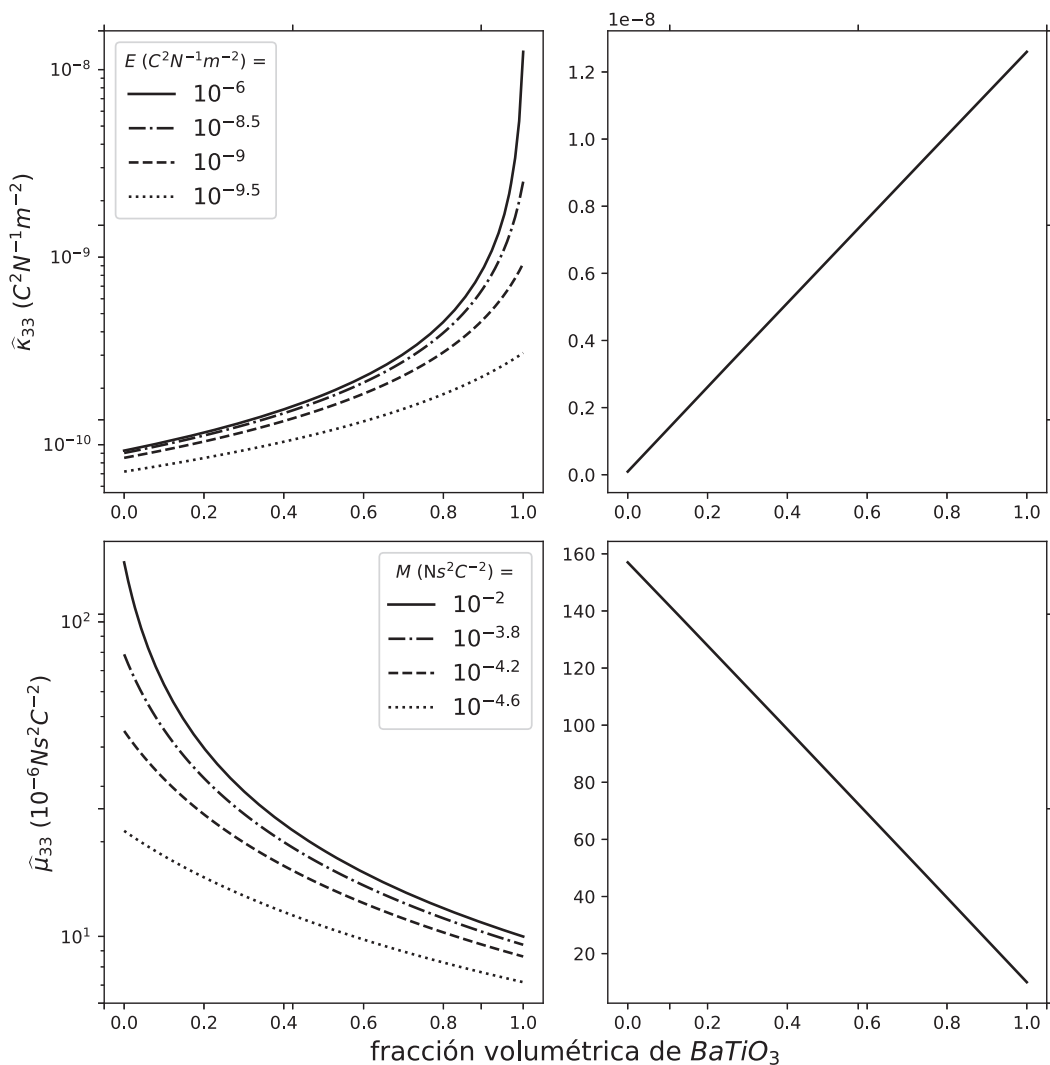


Figura 3.5: Permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética efectivas como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ en polarización en serie (paneles de la izquierda) y en paralelo (derecha) y para diferentes valores de las constantes de imperfección.

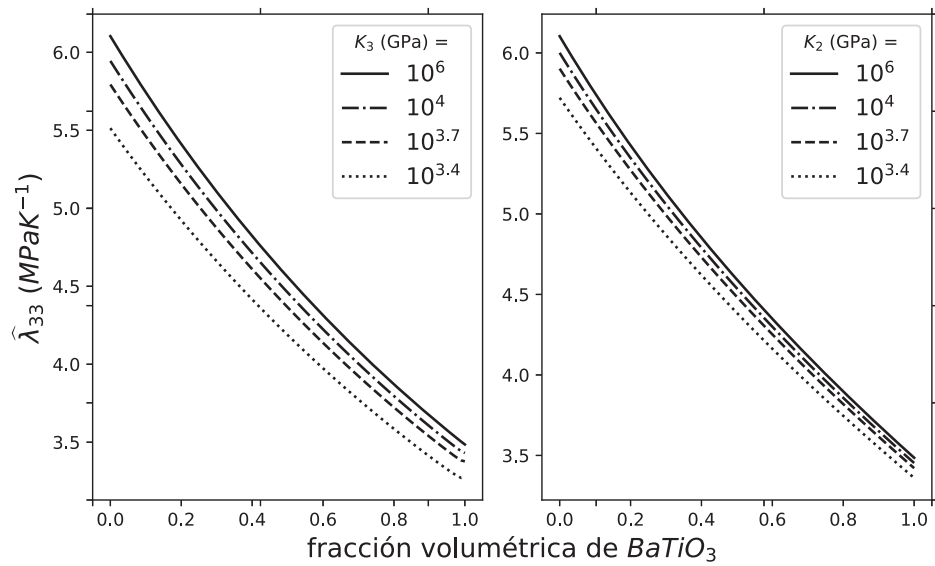


Figura 3.6: Coeficientes termoelásticos efectivos $\hat{\lambda}_{33}$ como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ en polarización en serie (izquierda) y en paralelo (derecha) y para diferentes valores de las constantes de imperfección.

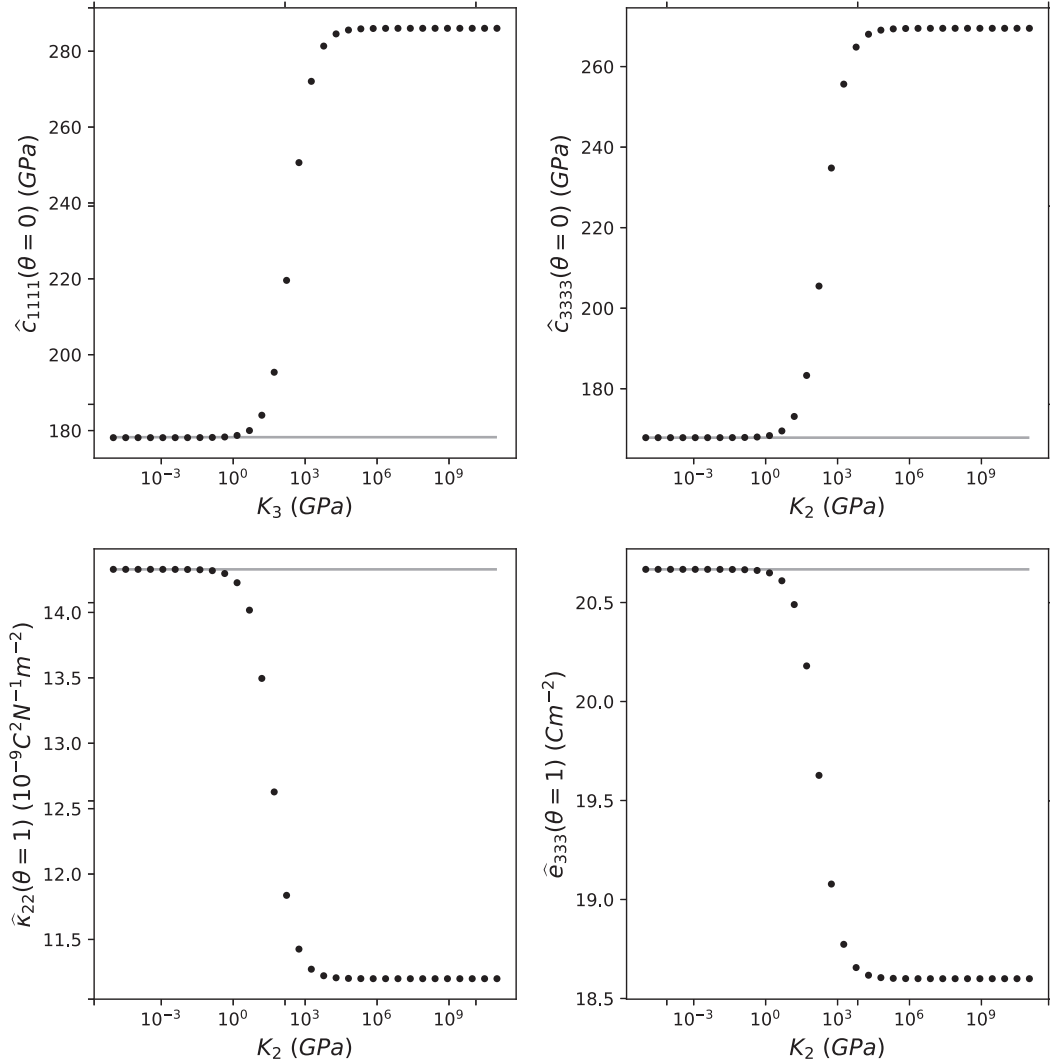


Figura 3.7: Algunos coeficientes efectivos cuando $\theta = 0, 1$ como funciones de los parámetros de imperfección (puntos). También se muestran en línea continua gris los valores a los que tienden los coeficientes efectivos cuando hay decohesión entre celdas consecutivas calculados según las fórmulas (3.15). Los paneles de la izquierda son para polarización en serie y los de la derecha, polarización en paralelo.

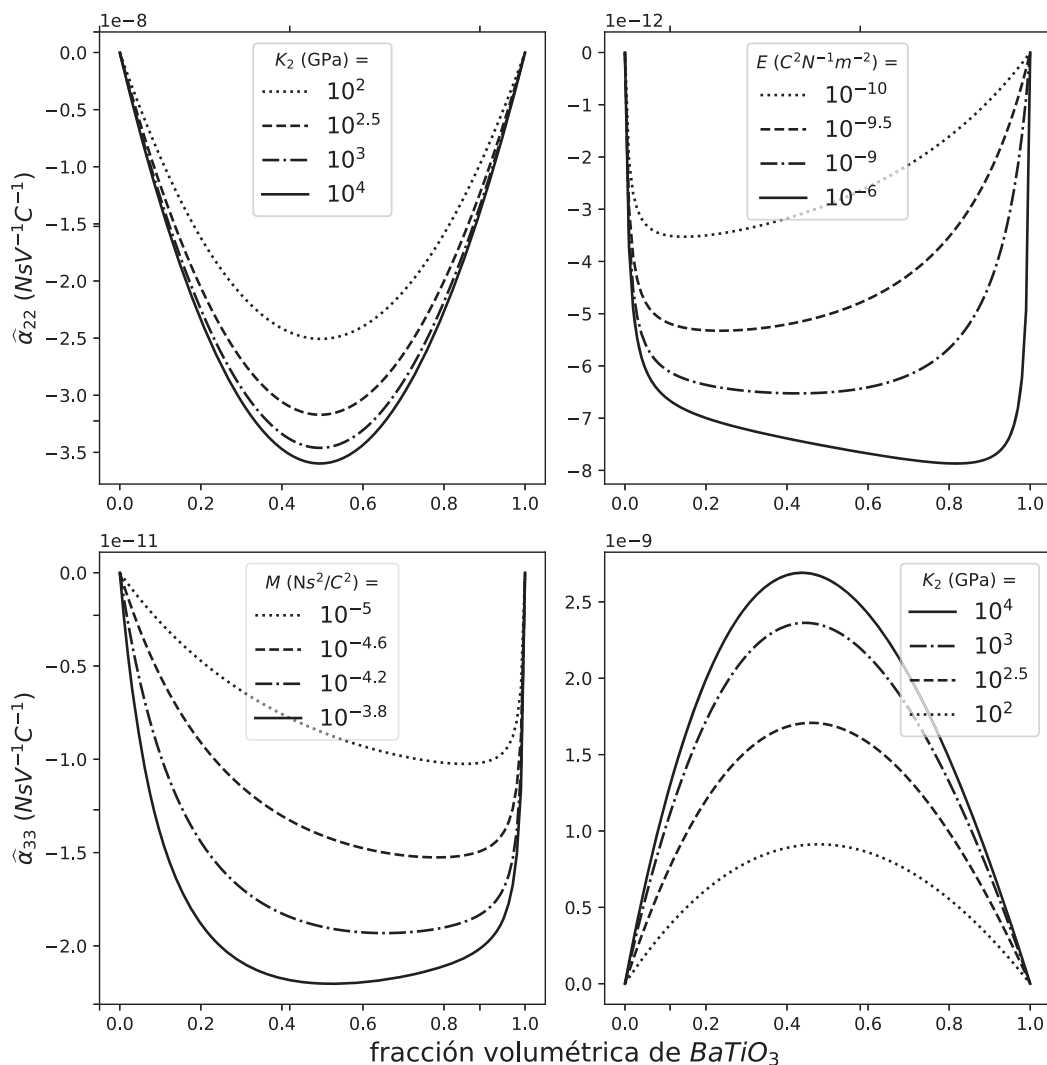


Figura 3.8: Coeficientes efectivos magnetoeléctricos como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ en polarización en serie (izquierda) y en paralelo (derecha) y para diferentes valores de las constantes de imperfección.

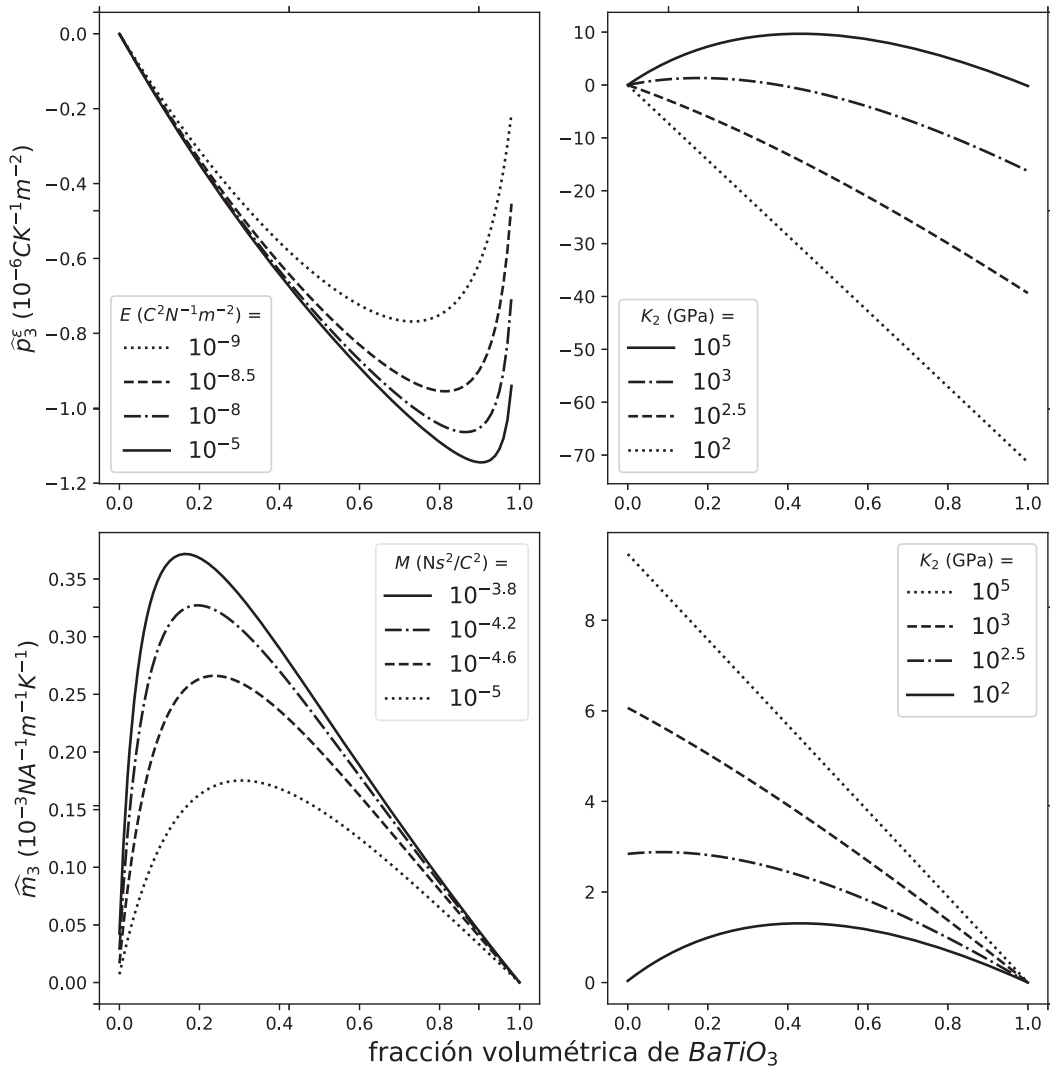


Figura 3.9: Coeficientes piroeléctrico $\tilde{p}_3^{\tilde{e}}$ y piromagnético \tilde{m}_3 efectivos como funciones de la fracción volumétrica de $BaTiO_3$ en polarización en serie (izquierda) y en paralelo (derecha) y para diferentes valores de las constantes de imperfección.

Capítulo 4

Medios porosos termo-piezoeléctricos

En este capítulo trataremos una aplicación del MHA a la caracterización de materiales porosos piezoeléctricos y piroeléctricos para la recolección de energía. En la sección 4.1, introduciremos figuras de mérito que cuantifican la capacidad de un material para la recolección de energía. Estas figuras de mérito involucran propiedades físicas que aparecen en relaciones constitutivas diferentes a las de (2.4) y en la sección 4.1 discutimos cómo obtener las propiedades efectivas relevantes de las que obtenemos a través de las fórmulas (2.65). En la sección 4.2 describiremos el modelo de elemento finito y la implementación computacional de los problemas locales en el software libre FreeFem++. En la sección 4.3, veremos que los problemas locales planos y antiplanos se pueden escribir de manera unificada, lo cual lleva a relaciones exactas que satisfacen los coeficientes efectivos. Esto será aprovechado en la sección 4.4, donde calcularemos fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos planos y antiplanos basadas en métodos de variable compleja. Por último, en la sección 4.5 veremos gráficas de los coeficientes efectivos y las figuras de mérito en ambas formulaciones como funciones de la fracción volumétrica del poro. Estos resultados son comparados con resultados analíticos anteriores y mediciones experimentales. La publicación [69] recoge los aspectos principales de este capítulo.

4.1. Figuras de Mérito

La manera más natural de cuantificar la aptitud de un material piezoeléctrico para aplicaciones de recolección de energía es a través del coeficiente de acoplamiento electromecánico k , que es la razón entre la energía electro-mecánica mutua U_{mutua} y la media geométrica de las energías mecánica U_m y eléctrica U_e :

$$k = \frac{U_{mutua}}{\sqrt{U_m U_e}}. \quad (4.1)$$

Alternativamente, el factor de acoplamiento es la razón entre la energía mecánica (eléctrica) almacenada en el dispositivo y la energía eléctrica (mecánica) que es suministrada al dispositivo. Esta última definición implica que materiales con k más altos tienen una mayor capacidad de transformación de una forma de energía de entrada a otra forma que es almacenada. Esto aclara la utilidad de k como parámetro para cuantificar la aptitud de un material para la recolección de energía.

En el caso particular de un material transversalmente isótropo con cargas en la dirección transversal ($j = 1$) y la dirección longitudinal ($j = 3$), el factor de acoplamiento tiene la siguiente forma:

$$k_{3jj}^2 = \frac{d_{3jj}^2}{\kappa_{33}^\sigma s_{jjjj}}, \quad (4.2)$$

donde d_{3jj} , $j = 1, 2, 3$ es el coeficiente piezoeléctrico y κ_{33}^σ , la permitividad dieléctrica, ambos a tensión constante, lo cual se denota por el superíndice σ . Las componentes d_{3jj} y κ_{33}^σ de los tensores aparecen en las fórmulas porque la dirección de polarización de las cerámicas es x_3 por convenio. Las s_{ijkl} son las componentes del tensor de flexibilidad. Sin embargo, se ha determinado experimentalmente en [70] que el uso de k_{3jj}^2 no es ideal como índice de mérito porque descalifica a algunos materiales cuya aptitud es conocida. Por ejemplo, las cerámicas porosas caen en esa categoría por su relativamente alta flexibilidad, y, por tanto, bajo k_{3jj}^2 , como podemos ver en la fórmula (4.2).

Para remediar esta dificultad, se han definido varias figuras de mérito (FoMs) piezoeléctricas y piroeléctricas [71, 72]. Estas FoMs caracterizan bien a los materiales cuando son excitados a frecuencias relativamente bajas ($\ll 100kHz$), lejos de los picos de resonancia. En particular, los autores de [46] midieron las siguientes FoMs piezoeléctricas:

$$FoM_{3jj} = \frac{d_{3jj}^2}{\kappa_{33}^\sigma}, \quad (4.3)$$

en las que se suprime la componente de la flexibilidad s_{jjjj} que hacía que el acoplamiento electromecánico fuese bajo para cerámicas porosas. Adicionalmente, los autores de [46] midieron la figura de mérito piroeléctrica:

$$F'_E = \frac{(p_3^\sigma)^2}{\kappa_{33}^\sigma C_E^2}, \quad (4.4)$$

donde p_3^σ es el coeficiente piroeléctrico a tensión constante y C_E representa la capacidad calorífica a volumen constante. Esta figura de mérito es la razón entre la energía eléctrica almacenada en un dispositivo y la densidad de potencia suministrada por la fuente de calor (véase [72]).

En [46] se observó experimentalmente que tanto FoM_{3jj} como F'_E crecen con el aumento de la porosidad del material. Esto se debe a que las propiedades físicas que aparecen en los numeradores de (4.3) y (4.4) experimentan un decrecimiento menor a mayor porosidad respecto al decrecimiento de las propiedades que aparecen en los denominadores, la permitividad κ_{33}^σ y la capacidad calorífica al cuadrado.

Las fórmulas de los factores de acoplamiento en el caso de simetría transversal isotrópica adquieren la forma particular (4.2) en términos de las propiedades físicas en una formulación diferente de las relaciones constitutivas a la que utilizamos en el MHA, expresión (2.4). Estas relaciones constitutivas son las siguientes:

$$\begin{cases} \varepsilon_{kl} = s_{klij}\sigma_{ij} + d_{mkl}E_m - \zeta_{kl}\vartheta, \\ D_i = d_{ijk}\sigma_{jk} - \kappa_{im}^\sigma E_m + p_i^\sigma\vartheta, \\ s = \zeta_{kl}\sigma_{kl} - p_m^\sigma E_m + \beta^\sigma\vartheta, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde s_{klij} son las componentes del tensor de flexibilidad; d_{ijk} , las componentes del tensor piezoeléctrico a tensión constante; ζ_{kl} , las componentes de la expansión

térmica; κ_{im}^σ , las componentes de la permitividad dieléctrica a tensión constante; p_i^σ , el coeficiente piroeléctrico a tensión constante. El coeficiente β^σ es la capacidad calorífica a volumen constante, al igual que en la otra formulación. El supraíndice σ en algunos de los coeficientes sirve para distinguirlos de sus contrapartes a deformación constante ε de las relaciones constitutivas (2.4). Estas relaciones constitutivas están escritas solamente para incluir propiedades termo-piezoeléctricas. La formulación con todas las propiedades TMEE puede encontrarse, por ejemplo, en [61].

Las propiedades físicas de las relaciones constitutivas (4.5) y (2.4) están relacionadas por fórmulas que se pueden deducir al sustituir unas relaciones constitutivas en las otras. Por ejemplo, los tensores de rigidez y flexibilidad están relacionados por la fórmula:

$$c_{ijkl} s_{klmn} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \quad (4.6)$$

o, alternativamente, en notación de Voigt (Apéndice A):

$$c_{ij}^* s_{jk}^* = \delta_{ik}. \quad (4.7)$$

A partir de esto podemos obtener fórmulas para los otros coeficientes:

$$\begin{cases} d_{ijk} = e_{ilm} s_{lmjk}, \\ \zeta_{ij} = s_{ijkl} \lambda_{kl}, \\ \kappa_{ij}^\sigma = \kappa_{ij}^\varepsilon + d_{ikl} e_{jkl}, \\ p_i^\sigma = p_i^\varepsilon + e_{ikl} \zeta_{kl}, \\ \beta^\sigma = \beta^\varepsilon + \lambda_{kl} \zeta_{kl}. \end{cases} \quad (4.8)$$

4.2. FEM e implementación computacional

En [46], fue utilizado un método experimental llamado *freeze casting* para sintetizar las muestras. Este método da lugar a láminas paralelas de cerámica piezoeléctrica intercaladas con vacíos, igualmente de forma lamelar. Esta estructura sería del tipo 2-2 de no ser por pequeños “puentes” de cerámica entre láminas consecutivas que le aportan integridad estructural a la muestra.

La manera natural de modelar los coeficientes efectivos de estas estructuras sería a través de las fórmulas (3.15). Sin embargo, es fácil comprobar que estas fórmulas arrojan muchos coeficientes nulos (sustitúyase $j = l = 2$, por ejemplo). Esto se debe a que el material no tiene continuidad ni integridad estructural en la dirección de periodicidad (véase Figura 4.1a). Esto significa que un modelo con conectividad 2-2 es insuficiente para describir el comportamiento de las figuras de mérito reportado en [46]. Los puentes de cerámica entre láminas consecutivas deben ser capturados de alguna manera por el modelo matemático.

Para conseguir esto, en esta tesis se proponen dos modelos: el primero será discutido en el presente capítulo y el segundo será discutido en el siguiente. En este capítulo las estructuras 2-2 con puentes se aproximan por estructuras 3-1 perforadas, es decir, las fibras ha sido reemplazadas por vacío (véase Figura 4.1b). Este modelo está motivado por el hecho de que en el caso de estructuras 3-1 con forma circular de la sección transversal del poro, existen soluciones analíticas para los problemas locales. Como veremos en la próxima sección, las fórmulas analíticas aproximadas

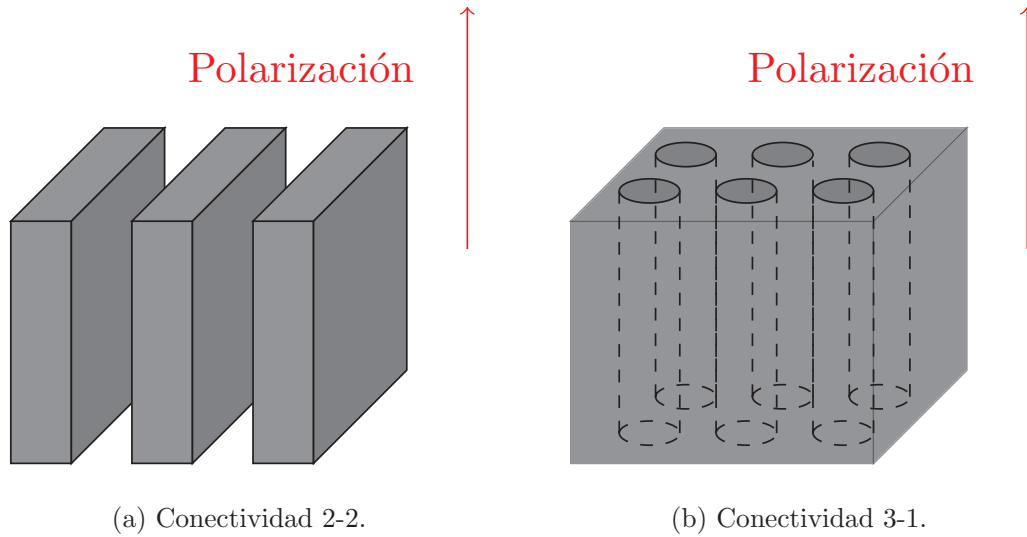


Figura 4.1: Modelos de diferentes conectividades. Las flechas indican el eje de polarización.

para los coeficientes efectivos son relativamente simples y podrían ser de gran utilidad para aplicaciones ingenieriles en las que sea necesario estimar las figuras de mérito.

Adicionalmente, la polarización en la misma dirección del eje de las perforaciones cilíndricas reduce los problemas locales a dos dimensiones, las del plano perpendicular al eje de polarización. Esto es así porque todas las derivadas respecto a y_3 se anulan en los problemas locales (2.75) y (2.76). En la figura 4.2 podemos ver un corte transversal de un material perforado con conectividad 3-1. En este caso la sección transversal de los poros cilíndricos es rectangular. Esta forma geométrica particular ilustra lo adecuado de este modelo para imitar la estructura de los materiales experimentales. Las láminas paralelas se extienden paralelas al eje x_2 y son unidas por los puentes de cerámica paralelos a la dirección de x_1 . Sin embargo, esta forma rectangular es sólo para propósitos de ilustración, puesto que, como veremos más adelante, las figuras de mérito no dependen de la forma de la sección transversal.

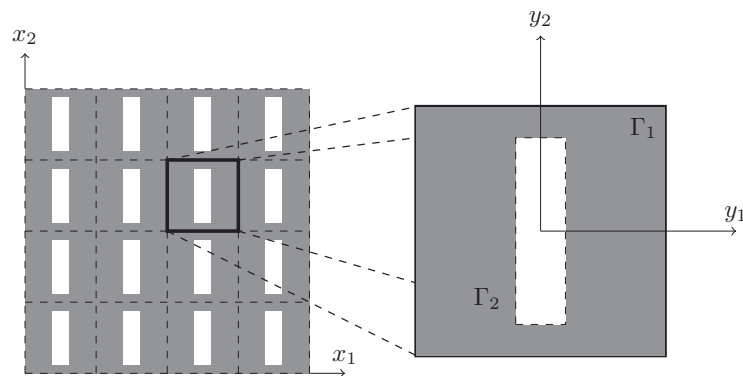


Figura 4.2: Sección transversal de un material perforado con conectividad 3-1. Γ_1 indica la frontera de la celda periódica y Γ_2 la frontera del poro.

Consideremos los problemas locales (2.76) y (2.75). Ellos están formulados para

incluir todas las propiedades TMEE, pero en este capítulo solo estamos interesados en las propiedades termo-piezoeléctricas. Para hacer esto, el único cambio que debemos hacer es eliminar las propiedades piezo-magnéticas, magneto-eléctricas y de permeabilidad magnética de las matrices $\mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y})$ (quinta fila y quinta columna) y eliminar las funciones locales que aparecen en la quinta fila y la quinta columna de las matrices $\mathbf{N}_l(\mathbf{y})$ y la quinta componente de $\mathbf{N}^\theta(\mathbf{y})$ de las expresiones (2.50). Desde el punto de vista de la notación matricial, no hay diferencia en los problemas locales (2.76) y (2.75). Para facilitar el tratamiento, separaremos los problemas locales en tres familias paramétricas: L , L_2^q y L_1^m , que, a excepción de L , dependen de los parámetros $q = 1, 2, 3$ y $n = 1, 2, 3$.

Para darle un tratamiento uniforme a los problemas locales llamaremos al problema (2.76), en este capítulo *problema L*. Teniendo en cuenta la simetría transversal isotrópica de la cerámica y el hecho de que todas las derivadas respecto a y_3 se anulan, podemos llegar a la siguiente formulación de dicho problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} k(\Gamma_{1,11} + \Gamma_{2,21}) + m\nabla^2\Gamma_1 = 0, \\ k(\Gamma_{2,22} + \Gamma_{1,12}) + m\nabla^2\Gamma_2 = 0, \\ \nabla^2\Gamma_3 = 0, \\ \nabla^2Q = 0, \\ ((k-m)\Gamma_{2,2} + (k+m)\Gamma_{1,1})n_1 + m(\Gamma_{1,2} + \Gamma_{2,1})n_2 = \lambda n_1, \\ ((k-m)\Gamma_{1,1} + (k+m)\Gamma_{2,2})n_2 + m(\Gamma_{2,1} + \Gamma_{1,2})n_1 = \lambda n_2, \\ (p\Gamma_{3,l} + eQ_{,l})n_l = 0, \end{array} \right. \quad \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \quad \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2. \quad (4.9)$$

donde hemos utilizado la notación de Hill del Apéndice A. Por la unicidad de la solución de (4.9) (Teorema 2 del Apéndice B) podemos ver que $\Gamma_3 = Q = 0$ y el problema local L nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} k(\Gamma_{1,11} + \Gamma_{2,21}) + m\nabla^2\Gamma_1 = 0, \\ k(\Gamma_{2,22} + \Gamma_{1,12}) + m\nabla^2\Gamma_2 = 0, \\ ((k-m)\Gamma_{2,2} + (k+m)\Gamma_{1,1})n_1 + m(\Gamma_{1,2} + \Gamma_{2,1})n_2 = \lambda n_1, \\ ((k-m)\Gamma_{1,1} + (k+m)\Gamma_{2,2})n_2 + m(\Gamma_{2,1} + \Gamma_{1,2})n_1 = \lambda n_2, \end{array} \right. \quad \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \quad \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2. \quad (4.10)$$

Para obtener el problema L_2^q , $q = 1, 2, 3$ de (2.75) obsérvese que:

$$\mathbf{A}_{jl} + \mathbf{A}_{jk} \frac{\partial \mathbf{N}_l}{\partial y_k}, \quad (4.11)$$

es una matriz de 4×4 . Las cuatro ecuaciones del sistema correspondiente al problema L_2^q se obtienen de las cuatro filas de la ecuación matricial de (2.75) y la última columna de la expresión (4.11). Las condiciones de frontera libre del problema local L_2^q se obtienen de las mismas filas y la cuarta columna de la condición de frontera libre matricial de (2.55).

$$\begin{cases}
 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(e_{qij} + c_{ijkl} \frac{\partial g_k^q}{\partial y_l} + e_{lij} \frac{\partial \pi^q}{\partial y_l} \right) = 0, & i = 1, 2, 3, \\
 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\kappa_{jq} - e_{jkl} \frac{\partial g_k^q}{\partial y_l} + \kappa_{jl} \frac{\partial \pi^q}{\partial y_l} \right) = 0, \\
 \left(e_{qij} + c_{ijkl} \frac{\partial g_k^q}{\partial y_l} + e_{lij} \frac{\partial \pi^q}{\partial y_l} \right) n_j = 0, & i = 1, 2, 3. \\
 \left(\kappa_{jq} - e_{jkl} \frac{\partial g_k^q}{\partial y_l} + \kappa_{jl} \frac{\partial \pi^q}{\partial y_l} \right) n_j = 0,
 \end{cases} \quad (4.12)$$

Teniendo en cuenta la simetría transversal isotrópica de la cerámica y el hecho de que todas las derivadas respecto a y_3 se anulan, podemos llegar a la siguiente forma del problema L_2^q :

$$\begin{cases}
 (e_{q11} + (k+m)g_{1,1}^q + (k-m)g_{2,2}^q)_{,1} + (e_{q12} + mg_{2,1}^q + mg_{1,2}^q)_{,2} = 0, \\
 (e_{q21} + mg_{2,1}^q + mg_{1,2}^q)_{,1} + (e_{q22} + (k-m)g_{1,1}^q + (k+m)g_{2,2}^q)_{,2} = 0, \\
 (e_{q31} + pg_{3,1}^q + e\pi_{,1}^q)_{,1} + (e_{q32} + pg_{3,2}^q + e\pi_{,2}^q)_{,2} = 0, \\
 (\kappa_{1q} - eg_{3,1}^q + t\pi_{,1}^q)_{,1} + (\kappa_{2q} - eg_{3,2}^q + t\pi_{,2}^q)_{,2} = 0, \\
 (e_{q11} + (k+m)g_{1,1}^q + (k-m)g_{2,2}^q) n_1 + (e_{q12} + mg_{2,1}^q + mg_{1,2}^q) n_2 = 0, \\
 (e_{q21} + mg_{2,1}^q + mg_{1,2}^q) n_1 + (e_{q22} + (k-m)g_{1,1}^q + (k+m)g_{2,2}^q) n_2 = 0, \\
 (e_{q31} + pg_{3,1}^q + e\pi_{,1}^q) n_1 + (e_{q32} + pg_{3,2}^q + e\pi_{,2}^q) n_2 = 0, \\
 (\kappa_{1q} - eg_{3,1}^q + t\pi_{,1}^q) n_1 + (\kappa_{2q} - eg_{3,2}^q + t\pi_{,2}^q) n_2 = 0,
 \end{cases} \quad (4.13)$$

donde el dominio de validez de las ecuaciones es $Y \setminus \Gamma_2$ y el de las condiciones de frontera libre es Γ_2 . El problema L_1^{qn} , $q, n = 1, 2, 3$ proviene de las tres primeras columnas de las expresiones matriciales (2.75). Teniendo en cuenta la simetría transversal isotrópica de la cerámica y el hecho de que todas las derivadas respecto a y_3 se anulan, podemos llegar al siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (c_{11nq} + (k+m)w_{1,1}^{qn} + (k-m)w_{2,2}^{qn})_{,1} + (c_{12nq} + mw_{2,1}^{qn} + mw_{1,2}^{qn})_{,2} = 0, \\
 (c_{21nq} + mw_{2,1}^{qn} + mw_{1,2}^{qn})_{,1} + (c_{22nq} + (k-m)w_{1,1}^{qn} + (k+m)w_{2,2}^{qn})_{,2} = 0, \\
 (c_{31nq} + pw_{3,1}^{qn} + e\zeta_{,1}^{qn})_{,1} + (c_{32nq} + pw_{3,2}^{qn} + e\zeta_{,2}^{qn})_{,2} = 0, \\
 (e_{1nq} + ew_{3,1}^{qn} - t\zeta_{,1}^{qn})_{,1} + (e_{2nq} + ew_{3,2}^{qn} - t\zeta_{,2}^{qn})_{,2} = 0, \\
 (c_{11nq} + (k+m)w_{1,1}^{qn} + (k-m)w_{2,2}^{qn})n_1 + (c_{12nq} + mw_{2,1}^{qn} + mw_{1,2}^{qn})n_2 = 0, \\
 (c_{21nq} + mw_{2,1}^{qn} + mw_{1,2}^{qn})n_1 + (c_{22nq} + (k-m)w_{1,1}^{qn} + (k+m)w_{2,2}^{qn})n_2 = 0, \\
 (c_{31nq} + pw_{3,1}^{qn} + e\zeta_{,1}^{qn})n_1 + (c_{32nq} + pw_{3,2}^{qn} + e\zeta_{,2}^{qn})n_2 = 0, \\
 (e_{1nq} + ew_{3,1}^{qn} - t\zeta_{,1}^{qn})n_1 + (e_{2nq} + ew_{3,2}^{qn} - t\zeta_{,2}^{qn})n_2 = 0,
 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

que tiene los mismos dominios de validez que el problema anterior.

Las inhomogeneidades de estos problemas locales son un resultado natural del MHA. Como destacamos en 1.2.1, esta es una de las diferencias principales con los modelos de celda unitaria [50-52] en los que la inhomogeneidad debe ser definida ad hoc por quien hace los cálculos.

4.2.1. Formulación débil

Para aplicar el Método de Elemento Finito a estos problemas de frontera necesitamos expresarlos en su forma débil. Para ello considérese el siguiente espacio de funciones de prueba:

$$H_{\#}(Y) = \left\{ v \in H^1(Y) : v|_{\Gamma_2} = 0, v \text{ tiene CFP en } \Gamma_1 \right\}. \quad (4.15)$$

Sigamos el procedimiento para determinar la formulación débil del problema L_2^q , sabiendo que para encontrar la formulación débil de los otros problemas se sigue un procedimiento similar. Primeramente, introduciremos una notación para las siguientes funciones de y :

$$\begin{aligned}
 A_{qij} &= e_{qij} + c_{ijkl} \frac{\partial g_k^q}{\partial y_l} + e_{lij} \frac{\partial \pi^q}{\partial y_l}, \\
 B_{qj} &= \kappa_{jq}^\varepsilon - e_{jkl} \frac{\partial g_k^q}{\partial y_l} + \kappa_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \pi^q}{\partial y_l}.
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ahora multiplicaremos cada una de las tres primeras ecuaciones de (4.12) por u_i y la última ecuación por v . Si sumamos los resultados y promediamos en la celda periódica, obtenemos:

$$\int dy \left(u_i \frac{\partial A_{qij}}{\partial y_j} + v \frac{\partial B_{qj}}{\partial y_j} \right) = 0. \quad (4.17)$$

Apliquemos integración por partes al MI de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \int_Y dy \left(u_i \frac{\partial A_{qij}}{\partial y_j} + v \frac{\partial B_{qj}}{\partial y_j} \right) &= \oint_{\Gamma_1} (u_i A_{qij} + v B_{qj}) n_j dS + \oint_{\Gamma_2} (u_i A_{qij} + v B_{qj}) n_j dS \\ &\quad - \int_Y dy \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} A_{qij} + \frac{\partial v}{\partial y_j} B_{qj} \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde ∂Y es la frontera de la celda periódica, Γ_2 es la frontera del poro, dS es el elemento de superficie con vector normal exterior de componentes n_j y Y es la región de la celda periódica que está ocupada por el material y no por vacío. Ahora obsérvese que, por las condiciones de frontera libre:

$$\oint_{\Gamma_2} (u_i A_{qij} + v B_{qj}) n_j dS = 0. \quad (4.19)$$

Las funciones A_{qij} , B_{qj} , u_i y v son todas Y -periódicas y por tanto, toman los mismos valores en caras correspondientes de Y . Sin embargo, el vector normal en cada cara es antiparalelo a la cara correspondiente, esto implica que:

$$\oint_{\Gamma_1} (u_i A_{qij} + v B_{qj}) n_j dS = 0. \quad (4.20)$$

Lo cual nos deja con la siguiente formulación débil de L_2^q :

$$\int_Y dy \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} A_{qij} + \frac{\partial v}{\partial y_j} B_{qj} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Podemos escribir (4.21) en términos de la notación de Hill y teniendo en cuenta que las derivadas respecto a y_3 se anulan:

$$\begin{aligned} &\int_Y u_{i,j} (e_{qij} + c_{ijkl} g_{k,l}^q + e_{lij} \pi_{,l}^q) + \int_Y v_{,j} (\kappa_{jq} - e_{jkl} g_{k,l}^q + \kappa_{jl} \pi_{,l}^q) \\ &= \int_Y u_{1,1} (e_{q11} + (k+m) g_{1,1}^q + (k-m) g_{2,2}^q) \\ &\quad + \int_Y u_{1,2} (e_{q12} + m g_{2,1}^q + m g_{1,2}^q) + \int_Y u_{2,1} (e_{q21} + m g_{2,1}^q + m g_{1,2}^q) \\ &\quad + \int_Y u_{2,2} (e_{q22} + (k-m) g_{1,1}^q + (k+m) g_{2,2}^q) \\ &\quad + \int_Y u_{3,1} (e_{q31} + p g_{3,1}^q + e \pi_{,1}^q) + \int_Y u_{3,2} (e_{q32} + p g_{3,2}^q + e \pi_{,2}^q) \\ &\quad + \int_Y v_{,1} (\kappa_{1q} - e g_{3,1}^q + t \pi_{,1}^q) + \int_Y v_{,2} (\kappa_{2q} - e g_{3,2}^q + t \pi_{,2}^q) = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Un procedimiento similar al descrito anteriormente se puede seguir para los otros problemas de frontera. El problema L_1^{qn} , ya con la notación de Hill incorporada,

queda:

$$\begin{aligned}
 & \int_Y u_{i,j} (c_{ijnq} + c_{ijkl} w_{k,l}^{qn} + e_{lij} \zeta_{,l}^{qn}) + \int_Y v_{,j} (e_{jnq} + e_{jkl} w_{k,l}^{qn} - \kappa_{jl} \zeta_{,l}^{qn}) \\
 &= \int_Y u_{1,1} (c_{11nq} + (k+m) w_{1,1}^{qn} + (k-m) w_{2,2}^{qn}) \\
 &+ \int_Y u_{1,2} (c_{12nq} + m w_{2,1}^{qn} + m w_{1,2}^{qn}) + \int_Y u_{2,1} (c_{21nq} + m w_{2,1}^{qn} + m w_{1,2}^{qn}) \\
 &+ \int_Y u_{2,2} (c_{22nq} + (k-m) w_{1,1}^{qn} + (k+m) w_{2,2}^{qn}) \\
 &+ \int_Y u_{3,1} (c_{31nq} + p w_{3,1}^{qn} + e \zeta_{,1}^{qn}) + \int_Y u_{3,2} (c_{32nq} + p w_{3,2}^{qn} + e \zeta_{,2}^{qn}) \\
 &+ \int_Y v_{,1} (e_{1nq} + e w_{3,1}^{qn} - t \zeta_{,1}^{qn}) + \int_Y v_{,2} (e_{2nq} + e w_{3,2}^{qn} - t \zeta_{,2}^{qn}) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

El problema de frontera L , en términos de la notación de Hill tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_Y u_{i,j} (\lambda_{ij} - c_{ijml} \Gamma_{m,l} - e_{lij} Q_{,l}) + \int_Y v_{,j} (p_j + e_{jml} \Gamma_{m,l} - \kappa_{jl} Q_{,l}) \\
 &= \int_Y u_{1,1} (-\lambda + (k+m) \Gamma_{1,1} + (k-m) \Gamma_{2,2}) \\
 &+ \int_Y m u_{1,2} (\Gamma_{1,2} + \Gamma_{2,1}) + \int_Y m u_{2,1} (\Gamma_{2,1} + \Gamma_{1,2}) \\
 &+ \int_Y u_{2,2} (-\lambda + (k+m) \Gamma_{2,2} + (k-m) \Gamma_{1,1}) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Los coeficientes elásticos efectivos se pueden determinar del problema L_1^{qn} y toman las siguientes formas en términos de la notación de Hill:

$$\begin{aligned}
 \widehat{c}_{11nq} &= \langle c_{11nq} + (k+m) w_{1,1}^{qn} + (k-m) w_{2,2}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{12nq} &= \langle c_{12nq} + m w_{2,1}^{qn} + m w_{1,2}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{22nq} &= \langle c_{22nq} + (k-m) w_{1,1}^{qn} + (k+m) w_{2,2}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{31nq} &= \langle c_{31nq} + p w_{3,1}^{qn} + e \zeta_{,1}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{32nq} &= \langle c_{32nq} + p w_{3,2}^{qn} + e \zeta_{,2}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{33nq} &= \langle c_{33nq} + l w_{1,1}^{qn} + l w_{2,2}^{qn} \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Los coeficientes piezoeléctricos efectivos se pueden calcular tanto del problema L_2^q como en el problema L_1^{qn} . En términos de las funciones locales del problema L_1^{qn} tenemos:

$$\begin{aligned}
 \widehat{e}_{1nq} &= \langle e_{1nq} + e w_{3,1}^{qn} - t \zeta_{,1}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{e}_{2nq} &= \langle e_{2nq} + e w_{3,2}^{qn} - t \zeta_{,2}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{e}_{3nq} &= \langle e_{3nq} + q w_{1,1}^{qn} + q w_{2,2}^{qn} \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

En términos de las soluciones del problema L_2^q tenemos:

$$\begin{aligned}
 \widehat{e}_{q11} &= \langle e_{q11} + (k + m) g_{1,1}^q + (k - m) g_{2,2}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q12} &= \langle e_{q12} + m g_{2,1}^q + m g_{1,2}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q22} &= \langle e_{q22} + (k - m) g_{1,1}^q + (k + m) g_{2,2}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q31} &= \langle e_{q31} + p g_{3,1}^q + e \pi_{,1}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q32} &= \langle e_{q32} + p g_{3,2}^q + e \pi_{,2}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q33} &= \langle e_{q33} + l g_{1,1}^q + l g_{2,2}^q \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Las componentes de la permitividad dieléctrica efectiva se calculan a partir del problema L_2^q :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\kappa}_{1q}^\varepsilon &= \langle \kappa_{1q} - e g_{3,1}^q + t \pi_{,1}^q \rangle, \\
 \widehat{\kappa}_{2q}^\varepsilon &= \langle \kappa_{2q} - e g_{3,2}^q + t \pi_{,2}^q \rangle, \\
 \widehat{\kappa}_{3q}^\varepsilon &= \langle \kappa_{3q}^\varepsilon - q g_{1,1}^q - q g_{2,2}^q \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Los coeficientes termoelásticos efectivos, el coeficiente piroeléctrico efectivo $\widehat{p}_3^\varepsilon$ y el coeficiente $\widehat{\beta}^\varepsilon$ se pueden calcular del problema local L :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\lambda}_{11} &= \langle \lambda - (k - m) \Gamma_{2,2} - (k + m) \Gamma_{1,1} \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{22} &= \langle \lambda - (k - m) \Gamma_{1,1} - (k + m) \Gamma_{2,2} \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{33} &= \langle \gamma - l (\Gamma_{1,1} + l \Gamma_{2,2}) \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{12} &= \langle -m (\Gamma_{1,2} + \Gamma_{2,1}) \rangle, \\
 \widehat{p}_3^\varepsilon &= \langle \rho + q (\Gamma_{1,1} + \Gamma_{2,2}) \rangle, \\
 \widehat{\beta}^\varepsilon &= \langle \beta^\varepsilon + \lambda (\Gamma_{1,1} + \Gamma_{2,2}) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.2.2. Geometría de la celda

La celda local es un cuadrado de lado igual a 1 centrado en el origen de coordenadas del plano $y_1 y_2$. En principio, los coeficientes efectivos pueden ser calculados utilizando las formulaciones débiles para gran variedad de formas de la sección transversal del poro. Sin embargo, para demostrar el presente método, fueron calculados para las siguientes formas:

1. circular, centrada en el origen,
2. rectangular, con la longitud de uno de los lados fijada a 0.9
3. elíptica, con el semieje mayor fijado a 0.4,
4. “diamante”, con la frontera delimitada por la curva $|y_1| + |y_2| = R$, $0 \leq R \leq 0.5$

La periodicidad de las soluciones implica que estas deben tomar iguales valores en cualesquiera dos puntos de la frontera de la celda que tengan iguales valores de una de las coordenadas y_1 o y_2 , véase Figura 4.3. Por ejemplo, para el problema L , las siguientes condiciones son impuestas en las Γ_m para $m = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\Gamma_m(y_1, -0.5) &= \Gamma_m(y_1, 0.5), \\ \Gamma_m(-0.5, y_2) &= \Gamma_m(0.5, y_2),\end{aligned}\tag{4.30}$$

donde $-0.5 \leq y_1, y_2 \leq 0.5$.

Todos los cálculos y construcción de mallas fueron hechos con FreeFem++, un software libre para MEF basado en el lenguaje de programación C++. Entre las ventajas de este software se encuentra que puede construir una discretización y el sistema correspondiente de ecuaciones directamente a partir de las parametrizaciones de las fronteras de la celda y de la sección transversal. Por ejemplo, los cuatro lados de la frontera exterior de la celda pueden ser parametrizados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}A &: \{x = t - 0.5, y = -0.5, t \in [0, 1]\}, \\ B &: \{x = 0.5, y = t - 0.5, t \in [0, 1]\}, \\ C &: \{x = 0.5 - t, y = 0.5, t \in [0, 1]\}, \\ D &: \{x = -0.5, y = 0.5 - t, t \in [0, 1]\},\end{aligned}\tag{4.31}$$

donde nos hemos referido a los ejes coordenados como x y y , en vez de y_1 y y_2 para que haya concordancia con la notación de FreeFem++. La parametrización de la elipse puede tomarse como:

$$E : \{x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi]\},\tag{4.32}$$

donde a y b son los semiejes correspondientes a los ejes x y y , respectivamente.

En el siguiente fragmento de código, ilustramos cómo FreeFem++ construye una malla a partir de las parametrizaciones de las curvas frontera para el caso de un poro elíptico. Las parametrizaciones `border A`, `border B`, ..., `border E` escritas en el lenguaje de FreeFem++ son muy similares a las expresiones en lenguaje matemático formal (4.31) y (4.32). El número de nodos en cada lado de la celda cuadrada es especificado por la variable `nl`. Esta información es suficiente para que FreeFem++ construya la malla `mesh ThM`:

```
int nl = 50;
real deltaH = 1.0/nl;
int nc = ceil(sqrt(2)*pi*sqrt(semiaxisa^2 + semiaxisb^2)/deltaH);

border A(t = 0,1){x = t - 0.5; y = -0.5;}
border B(t = 0,1){x = 0.5; y = t - 0.5;}
border C(t = 0,1){x = 0.5 - t; y = 0.5;}
border D(t = 0,1){x = -0.5; y = 0.5 - t;}

border E(t = 0,2*pi){x = a*cos(t); y = b*sin(t);}

mesh ThM = buildmesh(A(nl) + B(nl) + C(nl) + D(nl) + E(-nc));
```

La Figura 4.3 muestra el resultado del proceso de construcción de una malla para una fracción volumétrica específica. Para generar las gráficas de los coeficientes efectivos como funciones de la fracción volumétrica del poro, el proceso de construcción de la malla detallado arriba se repite para cada una de las fracciones volumétricas en el intervalo de 0 a $\theta_{max} \leq 1$, donde θ_{max} es el área máxima dentro de la celda que puede ocupar el poro de cierta forma geométrica sin que sus fronteras se crucen con las del cuadrado unitario. Por ejemplo, en el caso de un poro circular tenemos que $\theta_{max} = 0.25 \times \pi \approx 0.785$. Las mallas para otras formas del poro se muestran en la Figura 4.4

Hemos impuesto que en cada frontera haya aproximadamente el mismo número de nodos por unidad de longitud. Para hacer esto, hemos definido la variable `deltaH`, que es la distancia media entre dos nodos consecutivos de uno de los lados del cuadrado. La fórmula:

$$2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad (4.33)$$

aproxima el perímetro de una elipse de semiejes a y b . La variable `nc` es el número de nodos sobre la elipse tal que existe entre ellos la misma distancia `nc`, en promedio.

Después de que las mallas son generadas, los sistemas de ecuaciones lineales que se derivan de las formulaciones débiles (4.24) y (4.22) son resueltos por el Método No-Simétrico Multifrontal, que es el algoritmo por defecto de FreeFem++. En el caso del problema L_1^{qn} tuvo que ser utilizado el Método del Residuo Mínimo Generalizado (GMRES por sus siglas en inglés), que, en contraste con el método directo utilizado para la solución de los otros problemas, es un algoritmo iterativo para sistemas dispersos (véase [73]). El elemento finito es el $\mathbb{P}1$, que es continuo y lineal a trozos.

FreeFem++ utiliza el algoritmo de triangulación de Delaunay-Voronoi que garantiza que la densidad de puntos en el interior del dominio sea proporcional a la densidad en la frontera [74]. Para los cálculos de esta tesis, el número de puntos en cada lado de la frontera fue fijado a 50. Para cada fracción volumétrica del poro, la solución de cada problema y el cálculo de los coeficientes efectivos asociados tomó menos de 10 segundos en un procesador Intel® Core™ i5-3317U CPU @ 1.70GHz×4. Para más información acerca del elemento finito y los algoritmos disponibles en FreeFem++, véase [75].

Existen grandes diferencias entre los órdenes de magnitud de los coeficientes de estos problemas cuando son expresados en unidades SI sin prefijos. Considérese, por ejemplo, que hay 20 órdenes de magnitud entre las componentes del tensor de permitividad dieléctrica y las componentes de la rigidez elástica. Los errores de redondeo ocasionados por estas grandes diferencias, en el caso del problema L_2^q , dieron lugar a comportamientos absurdos de las permitividades efectivas como funciones de la fracción volumétrica del poro. Esta dificultad fue resuelta al adimensionalizar o reescalar los problemas locales de manera que la diferencia de órdenes de magnitud entre coeficientes fuera menor. Los detalles del proceso de adimensionalización o reescalamiento están expuestos en el Apéndice C.

4.3. Problemas unificados y relaciones exactas

La propuesta de la sección anterior es resolver los problemas locales L , L_2^q y L_1^{qn} por “fuerza bruta”, es decir, iterando por cada valor de q y n y resolviendo via MEF

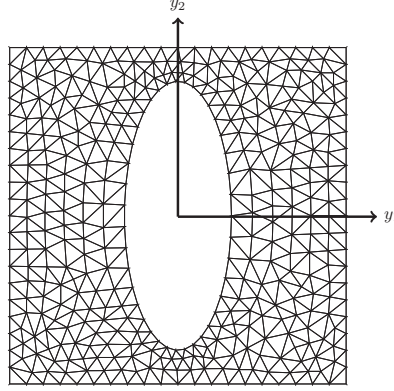


Figura 4.3: Malla de la celda periódica con un poro de sección transversal de forma elíptica. Se muestra la orientación de los ejes y_1 y y_2 perpendiculares al eje del poro.

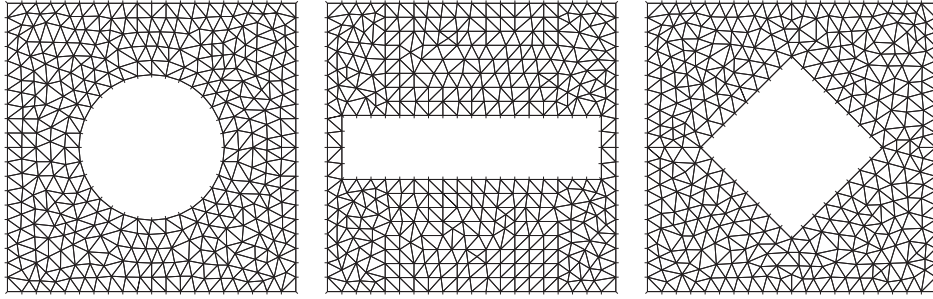


Figura 4.4: Mallas circular, rectangular y con forma de diamante (izquierda a derecha).

el problema local correspondiente. Sin embargo, existen regularidades entre los problemas (4.10), (4.13) y (4.14) que permiten calcular los coeficientes efectivos de una manera más eficiente. En esta sección extenderemos la metodología utilizada en [29, 30, 34] para obtener las fórmulas analíticas de las propiedades termo-piezoeléctricas.

Tomemos por ejemplo en (4.14), $qn = 11$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (c_{1111} + (k + m) w_{1,1}^{11} + (k - m) w_{2,2}^{11})_{,1} + (m w_{2,1}^{11} + m w_{1,2}^{11})_{,2} = 0, \\ (m w_{2,1}^{11} + m w_{1,2}^{11})_{,1} + (c_{2211} + (k - m) w_{1,1}^{11} + (k + m) w_{2,2}^{11})_{,2} = 0, \\ (p w_{3,1}^{11} + e \zeta_{,1}^{11})_{,1} + (p w_{3,2}^{11} + e \zeta_{,2}^{11})_{,2} = 0, \\ (e w_{3,1}^{11} - t \zeta_{,1}^{11})_{,1} + (e w_{3,2}^{11} - t \zeta_{,2}^{11})_{,2} = 0, \\ (c_{1111} + (k + m) w_{1,1}^{11} + (k - m) w_{2,2}^{11}) n_1 + (m w_{2,1}^{11} + m w_{1,2}^{11}) n_2 = 0, \\ (m w_{2,1}^{11} + m w_{1,2}^{11}) n_1 + (c_{2211} + (k - m) w_{1,1}^{11} + (k + m) w_{2,2}^{11}) n_2 = 0, \\ (p w_{3,1}^{11} + e \zeta_{,1}^{11}) n_1 + (p w_{3,2}^{11} + e \zeta_{,2}^{11}) n_2 = 0, \\ (e w_{3,1}^{11} - t \zeta_{,1}^{11}) n_1 + (e w_{3,2}^{11} - t \zeta_{,2}^{11}) n_2 = 0, \end{array} \right. \quad (4.34)$$

y $qn = 22$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (c_{1122} + (k+m)w_{1,1}^{22} + (k-m)w_{2,2}^{22})_{,1} + (mw_{2,1}^{22} + mw_{1,2}^{22})_{,2} = 0, \\ (mw_{2,1}^{22} + mw_{1,2}^{22})_{,1} + (c_{2222} + (k-m)w_{1,1}^{22} + (k+m)w_{2,2}^{22})_{,2} = 0, \\ (pw_{3,1}^{22} + e\zeta_{,1}^{22})_{,1} + (pw_{3,2}^{22} + e\zeta_{,2}^{22})_{,2} = 0, \\ (ew_{3,1}^{22} - t\zeta_{,1}^{22})_{,1} + (ew_{3,2}^{22} - t\zeta_{,2}^{22})_{,2} = 0, \\ (c_{1122} + (k+m)w_{1,1}^{22} + (k-m)w_{2,2}^{22})n_1 + (mw_{2,1}^{22} + mw_{1,2}^{22})n_2 = 0, \\ (mw_{2,1}^{22} + mw_{1,2}^{22})n_1 + (c_{2222} + (k-m)w_{1,1}^{22} + (k+m)w_{2,2}^{22})n_2 = 0, \\ (pw_{3,1}^{22} + e\zeta_{,1}^{22})n_1 + (pw_{3,2}^{22} + e\zeta_{,2}^{22})n_2 = 0, \\ (ew_{3,1}^{22} - t\zeta_{,1}^{22})n_1 + (ew_{3,2}^{22} - t\zeta_{,2}^{22})n_2 = 0. \end{array} \right. \quad (4.35)$$

En ambos problemas las ecuaciones son válidas para las $\mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2$ y las condiciones de contorno son válidas en $\mathbf{y} \in \Gamma_2$. Si adicionamos ambos problemas locales ecuación por ecuación y condición por condición, y definimos las funciones incógnitas:

$$U_\alpha = \frac{w_\alpha^{11} + w_\alpha^{22}}{2k}, \quad \Phi = \frac{\zeta^{11} + \zeta^{22}}{2k}, \quad (4.36)$$

el problema $L_1^{11} + L_1^{22}$ nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) + m \nabla^2 U_1 = 0, \\ k \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_2 \partial y_1} \right) + m \nabla^2 U_2 = 0, \\ p \nabla^2 U_3 + e \nabla^2 \Phi = 0, \\ e \nabla^2 U_3 - t \nabla^2 \Phi = 0, \\ \left((k+m) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + (k-m) \frac{\partial U_2}{\partial y_2} \right) n_1 + \left(m \frac{\partial U_2}{\partial y_1} + m \frac{\partial U_1}{\partial y_2} \right) n_2 = -n_1, \\ \left((k+m) \frac{\partial U_2}{\partial y_2} + (k-m) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} \right) n_2 + \left(m \frac{\partial U_2}{\partial y_1} + m \frac{\partial U_1}{\partial y_2} \right) n_1 = -n_2, \\ \left(p \frac{\partial U_3}{\partial y_1} + e \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) n_1 + \left(p \frac{\partial U_3}{\partial y_2} + e \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right) n_2 = 0, \\ \left(e \frac{\partial U_3}{\partial y_1} - t \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) n_1 + \left(e \frac{\partial U_3}{\partial y_2} - t \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right) n_2 = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \mathbf{y} \in \Gamma_2, \end{array} \quad (4.37)$$

donde el operador ∇^2 es el laplaciano bidimensional en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}. \quad (4.38)$$

El sistema que involucra a U_3 y a Φ se ha desacoplado de manera natural del resto de las ecuaciones y condiciones de frontera. Como su determinante es distinto de cero, es posible desacoplarlo todavía más en dos sistemas idénticos como el siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_3 &= 0, \\ \frac{\partial U_3}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial U_3}{\partial y_2} n_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

El otro sistema se obtiene simplemente al sustituir U_3 por Φ con los mismos coeficientes. Por causa de la unicidad de la solución del problema (4.37) (Teorema 2, Apéndice B) tenemos que $U_3 = 0$ y $\Phi = 0$ en cada uno de los problemas anteriores. Por tanto, obtenemos el siguiente problema:

$$\begin{cases} k \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) + m \nabla^2 U_1 = 0, \\ k \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_2 \partial y_1} \right) + m \nabla^2 U_2 = 0, \\ \left((k+m) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + (k-m) \frac{\partial U_2}{\partial y_2} \right) n_1 + \left(m \frac{\partial U_2}{\partial y_1} + m \frac{\partial U_1}{\partial y_2} \right) n_2 = -n_1, \\ \left((k+m) \frac{\partial U_2}{\partial y_2} + (k-m) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} \right) n_2 + \left(m \frac{\partial U_2}{\partial y_1} + m \frac{\partial U_1}{\partial y_2} \right) n_1 = -n_2, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \mathbf{y} \in \Gamma_2. \end{array} \quad (4.40)$$

Obsérvese que si redefinimos en el problema L (4.10) las funciones incógnitas como:

$$U_\alpha = -\frac{\Gamma_\alpha}{\lambda}, \quad (4.41)$$

adquiere la forma del problema (4.40). Esto sugiere que a (4.40) llamemos *problema unificado plano*. En general, con los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned} U_\alpha &= -\frac{\Gamma_\alpha}{\lambda} = \frac{w_\alpha^{11} + w_\alpha^{22}}{2k} = \frac{w_\alpha^{33}}{l} = \frac{g_\alpha^3}{q} \\ \Phi &= -\frac{Q}{\lambda} = \frac{\zeta^{11} + \zeta^{22}}{2k} = \frac{\zeta^{33}}{l} = \frac{\pi^3}{q} \end{aligned} \quad (4.42)$$

los problemas L , $L_1^{11} + L_1^{22}$, L_1^{33} y L_2^3 se reducen, respectivamente a (4.37). Luego, teniendo en cuenta que por la unicidad de la solución $U_3 = 0$ y $\Phi = 0$, los problemas se reducen al unificado (4.40).

El hecho de que las soluciones a estos problemas sean proporcionales según (4.42) implica que se pueden hacer manipulaciones algebraicas en las expresiones de los coeficientes efectivos (4.25)-(4.29) y, por tanto, que existan las siguientes relaciones exactas entre los coeficientes efectivos:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2k} &= \frac{\widehat{\lambda}_{11} - \langle \lambda \rangle}{\widehat{c}_{1111} + \widehat{c}_{1122} - 2 \langle k \rangle} = \frac{\widehat{\lambda}_{22} - \langle \lambda \rangle}{\widehat{c}_{2211} + \widehat{c}_{2222} - 2 \langle k \rangle} = \frac{\widehat{\lambda}_{33} - \langle \gamma \rangle}{\widehat{c}_{3311} + \widehat{c}_{3322} - 2 \langle l \rangle} \\ &= \frac{\widehat{\lambda}_{12}}{\widehat{c}_{1211} + \widehat{c}_{1222}} = -\frac{\widehat{p}_3 - \langle \rho \rangle}{\widehat{e}_{311} + \widehat{e}_{322} - 2 \langle q \rangle}, \\ \frac{\lambda}{l} &= \frac{\widehat{\lambda}_{11} - \langle \lambda \rangle}{\widehat{c}_{1133} - \langle l \rangle} = \frac{\widehat{\lambda}_{22} - \langle \lambda \rangle}{\widehat{c}_{1133} - \langle l \rangle} = \frac{\widehat{\lambda}_{33} - \langle \gamma \rangle}{\widehat{c}_{3333} - \langle n \rangle} = -\frac{\widehat{p}_3 - \langle \rho \rangle}{\widehat{e}_{333} - \langle r \rangle}, \\ \frac{\lambda}{q} &= \frac{\widehat{\lambda}_{11} - \langle \lambda \rangle}{\widehat{e}_{311} - \langle q \rangle} = \frac{\widehat{\lambda}_{22} - \langle \lambda \rangle}{\widehat{e}_{322} - \langle q \rangle} = \frac{\widehat{\lambda}_{33} - \langle \gamma \rangle}{\widehat{e}_{333} - \langle r \rangle} = -\frac{\widehat{p}_3 - \langle \rho \rangle}{\langle u \rangle - \widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Estas relaciones exactas son de gran importancia porque vinculan propiedades de diferente naturaleza. Por ejemplo, si conocemos $\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon$ de antemano podemos calcular $\widehat{p}_3^\varepsilon$ a través de (4.43)₃. Además, obsérvese que relaciones exactas diferentes comparten coeficientes efectivos, lo cual implica que se pueden formar más igualdades entre estos. De esta manera, las relaciones exactas reducen el número de problemas locales

que deben ser resueltos para poder calcular todas las propiedades efectivas. En pos de este objetivo, en la siguiente sección calcularemos de manera analítica el coeficiente $\widehat{k} = (\widehat{c}_{1111} + \widehat{c}_{1122})/2$.

Hemos obtenido aquí estas relaciones exactas para materiales transversalmente isótropos con conectividad 3-1, como consecuencia de las fórmulas de los coeficientes efectivos derivadas del MHA. Sin embargo, pueden ser obtenidas a través de un argumento de campos constantes, como puede verse en el trabajo clásico de Dvorak [76] y el libro de Milton [77]. En 1964, Hill demostró que en un compuesto fibroso de dos componentes transversalmente isótropas, el número de coeficientes elásticos efectivos independientes es 3^1 [78]. Las propiedades piezoeléctricas efectivas fueron incorporadas a las relaciones exactas por Schulgasser [79] y las termoelásticas por Levin [80]. Obsérvese que el enfoque unificado de las propiedades TMEE en combinación con el MHA puede arrojar las relaciones exactas 4.43 simultáneamente.

Existen propiedades efectivas, llamadas *antiplanas*, que no se pueden calcular a través de estas relaciones exactas (p. ej.: \widehat{c}_{1313} , \widehat{e}_{113} y $\widehat{\kappa}_{11}$). Sin embargo, existe un problema antiplano unificado del cual se pueden derivar relaciones exactas para estos coeficientes.

Tomemos el problema L_1^{13} y tengamos en cuenta que las funciones w_1^{13} y w_2^{13} se anulan por unicidad de la solución:

$$\begin{cases} (pw_{3,1}^{13} + e\zeta_{,1}^{13})_{,1} + (pw_{3,2}^{13} + e\zeta_{,2}^{13})_{,2} = 0, \\ (ew_{3,1}^{13} - t\zeta_{,1}^{13})_{,1} + (ew_{3,2}^{13} - t\zeta_{,2}^{13})_{,2} = 0, \\ (pw_{3,1}^{13} + e\zeta_{,1}^{13})n_1 + (pw_{3,2}^{13} + e\zeta_{,2}^{13})n_2 = -pn_1, \\ (ew_{3,1}^{13} - t\zeta_{,1}^{13})n_1 + (ew_{3,2}^{13} - t\zeta_{,2}^{13})n_2 = -en_1, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \mathbf{y} \in \Gamma_2. \end{array} \quad (4.44)$$

Podemos reescribir este problema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \nabla^2 w_3^{13} = 0, \\ \nabla^2 \zeta^{13} = 0, \\ \frac{\partial w_3^{13}}{\partial \mathbf{n}} = -n_1, \\ \frac{\partial \zeta^{13}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \in Y \setminus \Gamma_2, \\ \mathbf{y} \in \Gamma_2, \end{array} \quad (4.45)$$

de donde $\zeta^{13} = 0$ por unicidad de la solución. De manera similar el problema L_2^1 puede ser reducido a:

$$\begin{cases} \nabla^2 \pi^1 = 0, \\ \frac{\partial \pi^1}{\partial \mathbf{n}} = -n_1, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \in Y \setminus \Pi, \\ \mathbf{y} \in \Gamma_2, \end{array} \quad (4.46)$$

donde podemos ver que ambos problemas pueden ser representados de manera unificada. Si recordamos de las expresiones (4.25), (4.27) y (4.28) que:

$$\begin{aligned} \widehat{p} &= \langle p \rangle + p \langle w_{3,1}^{13} \rangle, \\ \widehat{e} &= \langle e \rangle + e \langle \pi_{,1}^1 \rangle, \\ \widehat{t} &= \langle t \rangle + e \langle \pi_{,1}^1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.47)$$

¹Recuérdese que en un material transversalmente isótropo, el número de componentes independientes del tensor de rigidez es 5.

podemos establecer una relación exacta entre los coeficientes $\widehat{p} = \widehat{c}_{1313} = \widehat{c}_{2323}$, $\widehat{e} = \widehat{e}_{131} = \widehat{e}_{232}$ y $\widehat{t} = \widehat{\kappa}_{11} = \widehat{\kappa}_{22}$:

$$\frac{\widehat{p}}{p} = \frac{\widehat{e}}{e} = \frac{\widehat{t}}{t} = \langle 1 - \theta + w_{3,1}^{13} \rangle = \langle 1 - \theta + \pi_{,1}^1 \rangle. \quad (4.48)$$

Esta relación exacta también será utilizada para calcular analíticamente los coeficientes efectivos en la siguiente sección.

4.4. Resultados analíticos

4.4.1. Problemas planos

De los coeficientes efectivos elásticos (4.25) podemos observar que para calcular \widehat{k} sólo debemos resolver el problema L_1^{11} , el cual representaremos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} = 0, \\ \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = -c_{1111}n_1, \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = -c_{2211}n_2, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \in Y \setminus \Pi, \\ \mathbf{y} \in \Gamma_2, \end{array} \quad (4.49)$$

donde:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (k + m) \frac{\partial w_1^{11}}{\partial y_1} + (k - m) \frac{\partial w_2^{11}}{\partial y_2}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= m \frac{\partial w_2^{11}}{\partial y_1} + m \frac{\partial w_1^{11}}{\partial y_2}, \\ \sigma_{22} &= (k + m) \frac{\partial w_2^{11}}{\partial y_2} + (k - m) \frac{\partial w_1^{11}}{\partial y_1}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Hemos utilizado la analogía que existe entre los problemas locales y los problemas globales, según la cual, llamaremos *pseudo-tensiones* a las σ_{ij} y *pseudo-desplazamientos* a los w_i^{11} . El problema (4.49) se identifica con el *problema de deformación plana* L_1^{11} de un medio elástico, isótropo y poroso si hacemos la siguiente correspondencia entre coeficientes:

$$k + m = \lambda + 2\mu, \quad (4.51)$$

$$m = \mu, \quad (4.52)$$

donde λ y μ son los parámetros de Lamé. Existe una manera de calcular analíticamente los coeficientes efectivos de este último problema basada en potenciales complejos de Kolosov-Muskhelishvili [27, 49]. Sin embargo, dada la equivalencia que existe entre este problema y el problema L_1^{11} de un medio transversalmente isótropo, podemos modificar el método para el presente caso.

Utilizaremos la variable compleja $z = y_1 + iy_2$ para especificar la posición en la celda local, entendiéndose que se puede hacer una prolongación periódica a otras celdas. Parametrizaremos el contorno circular del poro con la variable $t = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ (véase Figura 4.5). Es conveniente entonces, expresar los coeficientes efectivos por integrales de línea en este contorno. Para hacer esto hacemos uso del teorema de

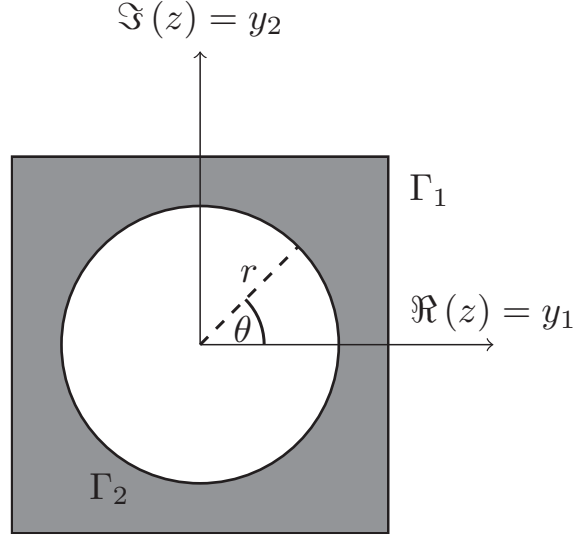


Figura 4.5: Representación de la celda local en el plano complejo.

Green, teniendo en cuenta que la integral de línea en el contorno exterior se anula por ser las funciones U_1 y U_2 periódicas y por ser antiparalelos los vectores unitarios tangentes a caras opuestas del cuadrado. Obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \widehat{k} &= \langle k \rangle - k \oint_{\Gamma_2} w_1^{11} dy_2 - w_2^{11} dy_1, \\
 \widehat{l} &= \langle l \rangle - l \oint_{\Gamma_2} w_1^{11} dy_2 - w_2^{11} dy_1, \\
 \widehat{n} &= \langle n \rangle - \frac{l^2}{k} \oint_{\Gamma_2} w_1^{11} dy_2 - w_2^{11} dy_1, \\
 \widehat{m}' &= \frac{1}{2} (\widehat{c}_{1111} - \widehat{c}_{1122}) = \langle m \rangle - m \oint_{\Gamma_2} w_1^{11} dy_2 + w_2^{11} dy_1.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Para solucionar el problema (4.49) se puede hacer uso de dos potenciales complejos de Kolosov-Muskhelishvili $\varphi(z)$ y $\psi(z)$. Estos están ligados a las pseudo-tensiones σ_{ij} y a los pseudo-desplazamientos w_i^{11} por las siguientes relaciones, también llamadas de Kolosov-Muskhelishvili (véase [49]):

$$\begin{aligned}
 2m (w_1^{11} + iw_2^{11}) &= \kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \\
 \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right], \\
 \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2 \left[\overline{z} \varphi''(z) + \psi'(z) \right],
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

donde $\kappa = 1 + 2m/k$ y $\overline{(\cdot)}$ indica el complejo conjugado de (\cdot) . Además, las condiciones de frontera libre (4.49)₃ y (4.49)₄ se pueden escribir en términos de los potenciales complejos de la siguiente manera:

$$-kt + m\bar{t} = \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}. \tag{4.55}$$

El procedimiento seguido en [27, 29] precisa definir los potenciales dentro del círculo de radio r puesto que describe un material reforzado por fibras no huecas.

Aquí no es necesario definir los potenciales en esa región, lo cual abrevia significativamente la cantidad de derivaciones matemáticas que se deben hacer. La forma de los potenciales definidos en la parte de la celda ocupada por la cerámica propuesta en [27] es:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= a_0 z + a_1 \zeta(z) + \sum_{k=3}^{+\infty} a_k \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (z - \beta_{mn})^{-k}, \\ \psi(z) &= b_0 z + b_1 \zeta(z) + a_1 Q(z) + \sum_{k=3}^{+\infty} \left[b_k \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (z - \beta_{mn})^{-k} \right. \\ &\quad \left. + k a_k \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \bar{\beta}_{mn} (z - \beta_{mn})^{-k-1} \right],\end{aligned}\quad (4.56)$$

donde $\beta_{mn} = m + in$. El superíndice o en la Σ indica que sólo se cuentan los términos de índice de sumatoria impar. La Σ' indica que la suma doble incluye a todos los pares de números enteros m y n , excepto el par $m = n = 0$. Las funciones $\zeta(z)$ y $Q(z)$ son llamadas de Weierstrass y Natanzon, respectivamente, y tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - \beta_{mn}} + \frac{z}{\beta_{mn}^2} + \frac{1}{\beta_{mn}} \right), \\ Q(z) &= \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\bar{\beta}_{mn}}{(z - \beta_{mn})^2} - 2z \frac{\bar{\beta}_{mn}}{\beta_{mn}^3} - \frac{\bar{\beta}_{mn}}{\beta_{mn}^2} \right).\end{aligned}\quad (4.57)$$

En la página 201 de [27] se puede encontrar un resumen de las propiedades de estas funciones. En particular, estamos interesados en aquellas de semiperiodicidad, que resumimos a continuación:

$$\begin{aligned}\zeta(z+1) - \zeta(z) &= \pi, \\ \zeta(z+i) - \zeta(z) &= -i\pi, \\ Q(z+1) - Q(z) &= -\zeta'(z) - \frac{5S_4}{\pi}, \\ Q(z+i) - Q(z) &= i\zeta'(z) - i\frac{5S_4}{\pi}, \\ f_k(z+1) - f_k(z) &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - \beta_{mn})^{k+1}}, \\ f_k(z+i) - f_k(z) &= -i \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - \beta_{mn})^{k+1}},\end{aligned}\quad (4.58)$$

donde $f_k(z) = \sum'_{m,n} \bar{\beta}_{mn} (z - \beta_{mn})^{-k-1}$ y S_4 es una de las llamadas *sumas de la red* S_{k+p} y T_{k+p} que jugarán un papel importante en la presente sección:

$$S_{k+p} = \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_{mn}^{k+p}}, \quad T_{k+p} = \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\beta}_{mn}}{\beta_{mn}^{k+p+1}}.\quad (4.59)$$

Teniendo en cuenta estas propiedades y las de doble periodicidad de las w_i^{11} en la fórmula (4.54) podemos llegar a las siguientes expresiones para los coeficientes a_0 y

b_0 :

$$a_0 = \frac{b_1 \pi}{\kappa - 1}, \quad b_0 = \pi \left(\kappa_1 + \frac{5S_4}{\pi^2} \right) a_1. \quad (4.60)$$

Desarrollemos los potenciales en series de Laurent alrededor de $z = 0$, teniendo en cuenta que $S_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= a_0 z + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_k \eta_{kp} z^p, \\ \psi(z) &= b_0 z + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} b_k \eta_{kp} z^p + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} k a_k \eta'_{kp} z^p, \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde:

$$\eta_{kp} = - \binom{k+p-1}{p} S_{k+p}, \quad \eta'_{kp} = \binom{k+p}{p} T_{k+p}. \quad (4.62)$$

En este punto podemos calcular las integrales de línea que están involucradas en los coeficientes efectivos (4.53). Dadas las siguientes relaciones de ortogonalidad de las funciones seno y coseno:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \begin{cases} \pi, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m = 0, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \sin(m\theta) d\theta &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta &= \begin{cases} \pi, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.63)$$

y de que $t = r \cos \theta + ir \sin \theta$, en la fórmula (4.54)₁ podemos calcular las integrales:

$$\begin{aligned} \oint U_1 dy_2 - U_2 dy_1 &= -\frac{\pi r^2}{2m\alpha_0} \left((\kappa + 1) \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \eta_{k1} + k(1 - \pi r^2) \right), \\ \oint U_1 dy_2 + U_2 dy_1 &= \frac{\pi}{m} [(\kappa + 1) a_1 - r^2 m], \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde:

$$\alpha_0 = - \left(\frac{\pi r^2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.65)$$

Ahora calculemos los a_p para sustituirlos en (4.64).

Si sustituimos los desarrollos de Laurent (4.61) en la condición de contorno (4.55) y tenemos en cuenta la independencia lineal de las potencias de $e^{i\theta}$ obtenemos lo

siguiente:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= r^2 \left(-2a_0 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \eta_{k1} - k \right), \\
 \sum_{k=1}^{+\infty} (p+2) a_k r^{p+2} \eta_{k,p+2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k r^p \eta_{kp} + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k r^p \eta'_{kp} + \frac{a_p}{r^p} + \delta_{1p} (r b_0 - r m) &= 0, \\
 \sum_{k=1}^{+\infty} (p+2) a_k r^{p+2} \eta_{k,p+2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k r^p \eta_{kp} + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k r^p \eta'_{kp} + \frac{a_p}{r^p} + \delta_{1p} (r b_0 - r m) &= 0, \\
 b_{p+2} &= p r^2 a_p - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \eta_{k,p+2}.
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Nos interesa eliminar las b_p porque solo las a_p aparecen representadas en las integrales (4.64) de las cuales dependen los coeficientes efectivos. Si eliminamos las b_p de (4.66) obtenemos el siguiente sistema de infinitas ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 a_p + \pi \left(\kappa + \frac{5S_4}{\pi^2} \right) r^2 \delta_{1p} a_1 + r^{2p} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-r_{kp} + g_{kp} + \frac{1}{\alpha_0} r^2 \eta_{k1} \eta_{1p} \right) a_k \\
 = -\frac{1}{2\alpha_0} k r^{2p+2} \eta_{1p} + m r^{p+1} \delta_{1p},
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

donde:

$$r_{kp} = \sum_{i \geq 3} r^{2i} \eta_{ki} \eta_{ip}, \quad g_{kp} = k \left(\frac{k+p+2}{p+1} r^2 \eta_{k+2,p} + \eta'_{kp} \right). \tag{4.68}$$

Estos coeficientes r_{kp} y g_{kp} son nulos para ciertos valores de k y p (ver, por ejemplo, [29]). Resumimos en los Cuadros 4.1 y 4.2, los valores nulos y no nulos de r_{kp} y g_{kp} :

| $k \backslash p$ | 1 | $4s-1$ | $4s+1$ |
|------------------|----------|----------|----------|
| 1 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |
| $4t-1$ | 0 | $\neq 0$ | 0 |
| $4t+1$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |

Cuadro 4.1: Componentes de r_{kp} nulas y no nulas.

| $k \backslash p$ | 1 | $4s-1$ | $4s+1$ |
|------------------|----------|----------|----------|
| 1 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |
| $4t-1$ | 0 | $\neq 0$ | 0 |
| $4t+1$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |

Cuadro 4.2: Componentes de g_{kp} nulas y no nulas.

Esto motiva a que separemos el sistema de ecuaciones (4.67) en tres sistemas:

$$\begin{aligned}
 (1 + r^2 H^+) a_1 + r^2 \sum_{t=1}^{+\infty} (-r_{4t+1,1} + g_{4t+1,1}) a_{4t+1} &= mr^2, \\
 \sum_{t=1}^{+\infty} \left[\delta_{4t-1,4s-1} + r^{8s-2} \left(-r_{4t-1,4s-1} + g_{4t-1,4s-1} + \frac{1}{\alpha_0} r^2 \eta_{4t-1,1} \eta_{1,4s-1} \right) \right] a_{4t-1} \\
 &= -\frac{1}{2\alpha_0} kr^{8s} \eta_{1,4s-1}, \\
 \sum_{t=1}^{+\infty} \left[\delta_{4t+1,4s+1} + r^{8s+2} (-r_{4t+1,4s+1} + g_{4t+1,4s+1}) \right] a_{4t+1} \\
 + r^{8s+2} (-r_{1,4s+1} + g_{1,4s+1}) a_1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

donde:

$$H^\pm = \pi \left(\kappa \pm \frac{5S_4}{\pi^2} \right) - r_{11} \pm g_{11}. \tag{4.70}$$

De (4.69)₁ y (4.69)₃ podemos calcular el coeficiente a_1 que está involucrado en la integral (4.64)₂:

$$a_1 = \frac{mr^2}{1 + r^2 H^+ - \tilde{\mathcal{V}}_+ \mathcal{M}_+^{-1} \mathcal{V}_+}, \tag{4.71}$$

donde el vector \mathcal{V}_+ , la matriz \mathcal{M}_\pm y el vector $\tilde{\mathcal{V}}_+$ tienen las siguientes componentes, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 v_s^\pm &= r^{8s+4} (\mp r_{1,4s+1} + g_{1,4s+1}), \\
 m_{ts}^\pm &= \delta_{4t+1,4s+1} + r^{8s+2} (-r_{4t+1,4s+1} \pm g_{4t+1,4s+1}), \\
 \tilde{v}_t^\pm &= \mp r_{4t+1,1} + g_{4t+1,1}.
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Evidentemente, estos vectores tienen longitudes infinitas y la matriz \mathcal{M}_\pm es de dimensiones infinitas. Por tanto, la matriz inversa que aparece en (4.71) es un abuso de notación. Debe entenderse siempre que estos vectores y matrices están truncados hasta un cierto orden que satisfaga nuestras necesidades de precisión. Veamos, por ejemplo, la forma de la matriz \mathcal{M}_\pm en el segundo orden de truncamiento:

$$\mathcal{M}_\pm^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 + r^{10} (-r_{55} \pm g_{55}) & r^{10} (-r_{95} \pm g_{95}) \\ r^{18} (-r_{59} \pm g_{59}) & 1 + r^{18} (-r_{99} \pm g_{99}) \end{pmatrix}. \tag{4.73}$$

De (4.69)₂ podemos calcular los coeficientes involucrados en (4.64)₁ y tenemos que:

$$\oint w_1^{11} dy_2 - w_2^{11} dy_1 = -\frac{k\pi r^2}{2m\alpha_0} \left(1 - \pi r^2 - (\kappa + 1) \frac{1}{2\alpha_0} \mathcal{W}^T \mathcal{M}^{-1} \tilde{\mathcal{W}} \right), \tag{4.74}$$

donde los vectores \mathcal{W} y $\tilde{\mathcal{W}}$ y la matriz \mathcal{M} tienen las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}
 w_s &= r^{8s} \eta_{1,4s-1}, \\
 \tilde{w}_t &= \eta_{4t-1,1}, \\
 m_{ts} &= \delta_{4t-1,4s-1} + r^{8s-2} \left(-r_{4t-1,4s-1} + g_{4t-1,4s-1} + \frac{1}{\alpha_0} r^2 \eta_{4t-1,1} \eta_{1,4s-1} \right).
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

De modo que tenemos las siguientes fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos:

$$\begin{aligned}\widehat{k} &= k(1 - \theta) - \frac{k^2 K}{m}\theta, \\ \widehat{l} &= l(1 - \theta) - \frac{klK}{m}\theta, \\ \widehat{n} &= \langle n \rangle - \frac{l^2 K}{m}\theta, \\ \widehat{m}' &= \langle m \rangle - mM'\theta,\end{aligned}\tag{4.76}$$

donde θ es la fracción volumétrica del poro y:

$$\begin{aligned}K &= -\frac{1}{2\alpha_0} \left(1 - \pi r^2 - (\kappa + 1) \frac{1}{2\alpha_0} \mathcal{W}^T \mathcal{M}^{-1} \widetilde{\mathcal{W}} \right), \\ M' &= \frac{\kappa + 1}{1 + r^2 H^+ - \widetilde{\mathcal{V}}_+ \mathcal{M}_+^{-1} \mathcal{V}_+}.\end{aligned}\tag{4.77}$$

La disposición de las fibras en un arreglo cuadrado hace que el compuesto no herede la simetría transversal isotrópica de las componentes. Esto implica que, en general:

$$\widehat{m} = \widehat{c}_{1212} \neq \widehat{m}' = \frac{1}{2}(\widehat{c}_{1111} - \widehat{c}_{1122}).\tag{4.78}$$

Es por esa razón que debemos solucionar el problema plano L_1^{12} para obtener el coeficiente efectivo $\widehat{m} = \widehat{c}_{1212}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} = 0, \\ \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = -mn_2, \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = -mn_1, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \in Y \setminus \Pi, \\ \\ \\ \mathbf{y} \in \Gamma_2, \end{array}\tag{4.79}$$

donde:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (k + m) \frac{\partial w_1^{12}}{\partial y_1} + (k - m) \frac{\partial w_2^{12}}{\partial y_2}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= m \frac{\partial w_2^{12}}{\partial y_1} + m \frac{\partial w_1^{12}}{\partial y_2}, \\ \sigma_{22} &= (k - m) \frac{\partial w_1^{12}}{\partial y_1} + (k + m) \frac{\partial w_2^{12}}{\partial y_2}.\end{aligned}\tag{4.80}$$

Comparando las expresiones (4.49)₃ y (4.79)₃ y las expresiones (4.49)₄ y (4.79)₄, podemos llegar a la conclusión de que w_1^{11} y w_2^{12} son funciones pares del ángulo polar θ mientras que las funciones w_2^{11} y w_1^{12} son impares de la misma variable. Esto motiva que la forma de los potenciales de Kolosov-Muskhelishvili para este problema sea $\varphi^{12} = i\varphi$ e $\psi^{12} = i\psi$ donde φ y ψ son los potenciales (4.56) del problema L_1^{11} . Esto se puede comprender intuitivamente por el hecho de que multiplicar por la unidad imaginaria i es equivalente a una rotación de $\pi/2$ en el plano complejo. El resto de las operaciones para calcular los coeficientes de los desarrollos son muy similares a las del problema L_1^{11} , así que nos limitaremos a escribir la expresión analítica del coeficiente efectivo:

$$\widehat{m} = m - \pi r^2 m M,\tag{4.81}$$

donde:

$$M = \frac{1 + \kappa}{1 + r^2 H^- - \mathcal{V}_-^T \mathcal{M}_-^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_-}. \quad (4.82)$$

y H^- viene dado por (4.70) y las componentes de los vectores \mathcal{V}_- y $\tilde{\mathcal{V}}_-$ y de la matriz \mathcal{M}_- vienen dadas por (4.72). Se puede comprobar que en el caso en que $r \rightarrow 0$ se cumple que $\hat{m} = \hat{m}'$.

4.4.2. Problema antiplano

Para completar el conjunto de propiedades efectivas que se pueden calcular a través de las relaciones exactas (4.48) debemos resolver el problema antiplano L_1^{13}

$$\begin{cases} \nabla^2 w_3^{13} = 0, \\ \left(p + p \frac{\partial w_3^{13}}{\partial y_1} \right) n_1 + p \frac{\partial w_3^{13}}{\partial y_2} n_2 = 0, \end{cases} \quad (4.83)$$

y calcularemos los coeficientes efectivos \hat{e} y \hat{t} a través de la relación exacta (4.48). El coeficiente efectivo asociado al problema anterior es:

$$\hat{p} = \langle p \rangle + \left\langle p \frac{\partial w_3^{13}}{\partial y_1} \right\rangle = \langle p \rangle - \oint_{\Gamma_2} p w_3^{13} dy_2. \quad (4.84)$$

Ahora pondremos la siguiente forma para la función w_3^{13} :

$$w_3^{13}(z) = \Re \left[a_1 (\zeta(z) - \pi z) + \sum_{k=3}^{+\infty} a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!} \right]. \quad (4.85)$$

Su desarrollo de Laurent en torno al origen es:

$$w_3^{13}(z) = \Re \left(-a_1 \pi z + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{p=1}^{+\infty} \eta_{kp} z^p \right). \quad (4.86)$$

Procediendo de manera similar a como hicimos en el caso plano, podemos calcular la integral que aparece en (4.84) sustituyendo $z = t = r e^{i\theta}$ en el desarrollo anterior y teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad (4.63). Esto nos lleva a:

$$\oint_{\Gamma_2} w_3^{13} dy_2 = a_1 \pi (1 - \pi r^2) + \pi r^2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \eta_{k1}. \quad (4.87)$$

Si sustituimos el desarrollo (4.86) en la condición de frontera libre (4.83)₂ podemos encontrar el siguiente sistema de ecuaciones para los coeficientes del desarrollo:

$$a_k = r^{2k} \left(\delta_{1k} (1 - a_1 \pi) + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \eta_{pk} \right). \quad (4.88)$$

Tomando $k = 1$ en la expresión anterior y sustituyendo en (4.84) podemos escribir el coeficiente efectivo \hat{p} sólo en términos de a_1 :

$$\hat{p} = p (1 - 2\pi a_1). \quad (4.89)$$

| $k \backslash p$ | 1 | $4s - 1$ | $4s + 1$ |
|------------------|----------|----------|----------|
| 1 | 0 | $\neq 0$ | 0 |
| $4t - 1$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |
| $4t + 1$ | 0 | $\neq 0$ | 0 |

 Cuadro 4.3: Componentes de η_{kp} nulas y no nulas.

Para calcular a_1 debemos tener en cuenta que η_{pk} se anula siempre que $p + k$ sea múltiplo de 4, véase Cuadro 4.3. Separemos el sistema de ecuaciones (4.88) en tres casos, $k = 1, 4s - 1, 4s + 1$:

$$\begin{aligned}
 (1 + \pi r^2)a_1 &= r^2 \left(1 + \sum_{t=1}^{+\infty} a_{4t-1} \eta_{4t-1,1} \right), \\
 a_{4s-1} &= r^{8s-2} \left(a_1 \eta_{1,4s-1} + \sum_{t=1}^{+\infty} a_{4t+1} \eta_{4t+1,4s-1} \right), \\
 a_{4s+1} &= r^{8s+2} \left(\sum_{t=1}^{+\infty} a_{4t-1} \eta_{4t-1,4s+1} \right),
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

de aquí podemos llegar a que:

$$a_1 = \frac{r^2}{1 + \pi r^2 - \mathcal{W}^T \mathcal{M}_p^{-1} \widetilde{\mathcal{W}}} \tag{4.91}$$

donde \mathcal{W} y $\widetilde{\mathcal{W}}$ son los mismos que en (4.74) y la matriz \mathcal{M}_p tiene los siguientes componentes:

$$m_{ts}^{(p)} = \delta_{4t-1,4s-1} - r^{8s} \sum_{i=1}^{+\infty} \eta_{4t-1,4i+1} \eta_{4i+1,4s-1}. \tag{4.92}$$

Insertando (4.91) en (4.89), llegamos a la siguiente expresión para el coeficiente efectivo:

$$\widehat{p} = p (1 - 2\pi r^2 P), \tag{4.93}$$

donde:

$$P = \frac{1}{1 + \pi r^2 - \mathcal{W}^T \mathcal{M}_p^{-1} \widetilde{\mathcal{W}}}. \tag{4.94}$$

Al igual que en el caso del problema plano, los vectores y la matriz deben tomarse hasta un orden de truncamiento que dé la precisión requerida. Y a través de la relación exacta (4.48) podemos calcular el resto de los coeficientes antiplanos:

$$\frac{\widehat{p}}{p} = \frac{\widehat{e}}{e} = \frac{\widehat{t}}{t} = 1 - 2\pi r^2 P, \tag{4.95}$$

y así tenemos un conjunto completo de fórmulas analíticas de los coeficientes efectivos termo-piezoeléctricos de una cerámica porosa con conectividad 3-1 y poros de sección transversal circular.

| Formulación ϵDs | | Formulación σDs | |
|---|--------|---|--------|
| s_{1111} ($10^{-12}\text{m}^2\text{N}^{-1}$) | 17.2 | c_{1111} (GPa) | 124.4 |
| s_{1122} ($10^{-12}\text{m}^2\text{N}^{-1}$) | -7.2 | c_{1122} (GPa) | 83.4 |
| s_{1133} ($10^{-12}\text{m}^2\text{N}^{-1}$) | -6.7 | c_{1133} (GPa) | 80.5 |
| s_{3333} ($10^{-12}\text{m}^2\text{N}^{-1}$) | 17.3 | c_{3333} (GPa) | 120.2 |
| s_{1313} ($10^{-12}\text{m}^2\text{N}^{-1}$) | 42.4 | c_{1313} (GPa) | 23.6 |
| d_{113} (10^{-12}CN^{-1}) | 760 | e_{113} (Cm^{-2}) | 17.9 |
| d_{311} (10^{-12}CN^{-1}) | -186 | e_{311} (Cm^{-2}) | 5.6 |
| d_{333} (10^{-12}CN^{-1}) | 550 | e_{333} (Cm^{-2}) | 36.1 |
| κ_{11}^σ ($10^{-10}\text{C}^2\text{Nm}^{-2}$) | 262.8 | κ_{11}^ϵ ($10^{-10}\text{C}^2\text{Nm}^{-2}$) | 126.6 |
| κ_{33}^σ ($10^{-10}\text{C}^2\text{Nm}^{-2}$) | 194.7 | κ_{33}^ϵ ($10^{-10}\text{C}^2\text{Nm}^{-2}$) | 16.8 |
| ζ_{11} (10^{-6}K^{-1}) | 15.7 | λ_{11} (MPaK^{-1}) | 4.3 |
| ζ_{33} (10^{-6}K^{-1}) | 6.4 | λ_{33} (MPaK^{-1}) | 3.5 |
| p_3^σ ($10^{-4}\text{CK}^{-1}\text{m}^{-2}$) | 3.9 | p_3^ϵ ($10^{-5}\text{CK}^{-1}\text{m}^{-2}$) | -1.7 |
| β^σ (PaK^{-2}) | 5071.2 | β^ϵ (PaK^{-2}) | 4936.6 |

Cuadro 4.4: Propiedades materiales del PZT-51 en las dos diferentes formulaciones de las relaciones constitutivas utilizadas en esta tesis.

4.5. Resultados numéricos

En [46] se estudiaron las figuras de mérito de la cerámica piezoeléctrica PZT-51. Hasta donde sabemos, todas las propiedades físicas (elásticas, dieléctricas, piezoeléctricas y térmicas) del PZT-51 que son necesarias para alimentar las fórmulas analíticas y los modelos de Elemento Finito, no aparecen reportadas en la literatura de manera unificada. Algunas de estas propiedades nos fueron provistas por comunicación privada por la Dra. Yan Zhang, autora de [46], quien a su vez las obtuvo directamente del fabricante. Otras propiedades, como las componentes de la flexibilidad, son las de otra cerámica piezoeléctrica, la PCR-7, que exhibe un comportamiento similar al del PZT-51, según la Dra. Zhang. Estas últimas propiedades aparecen recogidas en la tabla 1.5 del libro [81]. Algunas otras propiedades, tales como los coeficientes termoelásticos y las componentes del tensor de expansión térmica son las del $BaTiO_3$ por no haber encontrado ningún valor reportado en la literatura para el PZT-51. Todas las propiedades de dicho material, utilizadas en los cálculos de MEF y de las fórmulas analíticas, aparecen resumidas en el Cuadro 4.4. Por la información disponible en la literatura podemos suponer que esta cerámica exhibe simetría transversalmente isotrópa.

Para calcular las FoMs piezoeléctricas (4.3) como funciones de la fracción volumétrica del poro, debemos primero calcular los coeficientes piezoeléctricos efectivos \widehat{d}_{ijk} a tensión constante de las fórmulas (4.8). En el caso de un material con simetría transversal isotrópica estas fórmulas se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\widehat{d}_{3jj} = \widehat{e}_{31k}\widehat{s}_{1kjj} = \widehat{e}_{311}\widehat{s}_{11jj} + \widehat{e}_{322}\widehat{s}_{22jj} + \widehat{e}_{333}\widehat{s}_{33jj}. \quad (4.96)$$

En la Figura 4.6 podemos observar el comportamiento de algunas componentes de la flexibilidad que están involucradas en la expresión anterior como funciones de la fracción volumétrica del poro. Estas se obtienen de invertir el tensor de rigidez efectivo para cada fracción volumétrica.

Primeramente, podemos observar una coincidencia casi perfecta entre los resultados de MEF para la sección transversal circular y las fórmulas analíticas (línea continua) al segundo orden de truncamiento de las fórmulas (4.76) y (4.81). Recuérdese que el orden de truncamiento viene dado por el tamaño que estamos considerando para las matrices y vectores “infinitos” que intervienen en las expresiones (4.77), (4.82) y (4.94). En particular, el segundo orden de truncamiento está ejemplificado por la matriz (4.73). Además, podemos ver que las componentes diagonales \widehat{s}_{1111} y \widehat{s}_{3333} aumentan con el aumento de la fracción volumétrica del poro. Esto es de esperar puesto que, intuitivamente, un compuesto en el que hay más aire debe ser más flexible. Obsérvese que \widehat{s}_{1111} para la sección transversal rectangular parte de un valor diferente en $\theta = 0$ que para el resto de las formas de la sección transversal. Esto es debido a que la longitud de uno de los lados del rectángulo ha sido fijada y por tanto, las direcciones y_1 y y_2 no son equivalentes, en este caso. Para fracciones volumétricas muy pequeñas, los poros rectangulares con uno de los lados de longitud igual a 0.9 son como ranuras que simulan desunión en la dirección perpendicular al lado de mayor longitud. La relación de los presentes cálculos con la desunión será ahondada más adelante.

Las componentes \widehat{s}_{3311} y \widehat{s}_{3333} se han representado solamente para la forma circular de la sección transversal del poro puesto que no hay diferencias entre el comportamiento para las diferentes formas geométricas. Esto parece ser el caso para los coeficientes asociados a la dirección y_3 .

En la Figura 4.7 se muestran algunas componentes del tensor piezoeléctrico a desplazamiento constante, que están involucradas en el cálculo de \widehat{d}_{3jj} según la fórmula (4.96). Al igual que la flexibilidad, los coeficientes piezoeléctricos exhiben buena coincidencia con las fórmulas analíticas. Similarmente, el coeficiente \widehat{e}_{333} no depende de la forma de la sección transversal del poro. Otra similitud con los coeficientes de flexibilidad es que para las formas elíptica y rectangular, los coeficientes \widehat{e}_{113} y \widehat{e}_{311} no parten de los mismos valores para $\theta = 0$ que para el caso de la forma circular. Esto también se puede explicar por la relativa desunión que existe en la dirección perpendicular al lado mayor del rectángulo o semieje mayor de la elipse. Podemos comprobar que este es el caso porque al rotar 90 grados al rectángulo o a la elipse, los valores de los coeficientes efectivos asociados a las direcciones y_1 y y_2 se intercambian (ver Figura 4.8). En color azul, aparecen los coeficientes efectivos \widehat{e}_{311} y \widehat{e}_{322} cuando el rectángulo está orientado “horizontalmente” (ver Figura 4.4). Podemos ver que el coeficiente \widehat{e}_{311} (\widehat{e}_{322}) coincide con el coeficiente \widehat{e}_{322} (\widehat{e}_{311}) de la otra orientación.

Los coeficientes piezoeléctricos a tensión constante d_{3jj} no dependen ni de la forma de la sección transversal ni de la fracción volumétrica del poro. Para el PZT-51 estos coeficientes toman los valores constantes: $\widehat{d}_{311} = -1.86 \times 10^{-10} \text{CN}^{-1}$ y $\widehat{d}_{333} = 5.50 \times 10^{-10} \text{CN}^{-1}$ que coinciden con los valores del Cuadro 4.4 para el material sin poros.

Las permitividades dieléctricas efectivas como funciones de la fracción volumétrica del poro se muestran en la Figura 4.9. Las componentes 33 no dependen de la forma de la sección transversal del poro. Para $\theta = 0$, $\widehat{\kappa}_{11}^e$ toma diferentes valores dependientes de la forma de la sección transversal. Esto se debe a que a lo largo de la dirección de y_1 hay desunión para la orientación que hemos utilizado aquí de la elipse y del rectángulo.

En la Figura 5.4 podemos ver la excelente coincidencia que existe entre las figuras

de mérito calculadas vía MEF y las calculadas por la vía analítica. Además, existe buena coincidencia con las mediciones experimentales de Zhang et al. [46]. Este ajuste podría ser mejorado con un conjunto más completo de funciones materiales del PZT-51. En cualquier caso, el MHA proporciona una explicación satisfactoria, desde primeros principios, del sorprendente hecho experimental de que las figuras de mérito aumenten con la porosidad. Para otros materiales como el $BaTiO_3$, podemos apreciar que las figuras de mérito calculadas vía MEF y analíticamente también coinciden.

En la Figura 4.11 podemos apreciar el coeficiente piroeléctrico como función de la fracción volumétrica del poro en ambas formulaciones de las relaciones constitutivas. Podemos apreciar que para formas de la sección transversal del poro que no alteran la simetría respecto a las direcciones y_1 y y_2 las curvas de $\widehat{p}_3^\varepsilon$ parten aproximadamente del valor del coeficiente piroeléctrico reportado en el Cuadro 4.4. Además, podemos apreciar una excelente coincidencia entre los cálculos vía MEF y analíticos tanto a ε como a σ constantes. En el caso de σ constante, existe un ajuste casi perfecto con las mediciones experimentales de Zhang et al. Estas coincidencias entre nuestros cálculos y los experimentos se confirman con la figura de mérito piroeléctrica F'_E que se muestra en la Figura 4.12.

La figura de mérito piroeléctrica F'_E es una modificación propuesta en [72] a la original que aparece en el artículo [82] de Sebald et al.:

$$F_E = \frac{(\widehat{p}_3^\varepsilon)^2}{\widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon}. \quad (4.97)$$

Como podemos apreciar, esta figura de mérito involucra coeficientes efectivos en la formulación σDs . Esto hace que F_E exhiba un máximo que refleja el de $\widehat{p}_3^\varepsilon$ (Figura 4.11). Esto indica que existe un valor de la fracción volumétrica del poro que garantiza una recolección óptima de energía eléctrica (térmica) para ser almacenada como energía térmica (eléctrica).

En la Figura 4.13 podemos apreciar una comparación entre los coeficientes efectivos involucrados en la figura de mérito (4.97) calculados por el MEF y calculados a través de las fórmulas analíticas derivadas de los problemas planos para el primer orden de truncamiento. Estas fórmulas son mucho más simples que las del segundo orden de truncamiento y tienen las siguientes formas:

$$\begin{aligned} \widehat{p}_3^\varepsilon &= \rho(1 - \theta) + \frac{\lambda q \theta (1 - \theta)}{m + k\theta}, \\ \widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon &= u(1 - \theta) - \frac{q^2 \theta (1 - \theta)}{m + k\theta}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Existe una buena coincidencia entre ambos métodos mostrados en la Figura 4.13. Esto sugiere que no sea necesario recurrir a métodos computacionales costosos y tardados como MEF sino que podemos utilizar las fórmulas analíticas para el primer orden de truncamiento para predecir el máximo de la figura de mérito F_E . En el caso del PZT-51, mostramos la figura de mérito calculada vía MEF y analítica en la Figura 4.14 y podemos apreciar el máximo en $\theta_{\text{máx}} \approx 0.435$. La facilidad del uso de las fórmulas analíticas en el primer orden de aproximación podría ser aplicable al diseño de dispositivos, ya que de antemano podemos conocer valores de parámetros como la porosidad que garanticen la capacidad óptima del material para la recolección de energía piroeléctrica. Estas fórmulas se diferencian de las

utilizadas por Zhang et al [46] en que han sido obtenidas desde primeros principios de la teoría lineal de la termo-piezoelectricidad y que no descansan sobre modelos fenomenológicos.

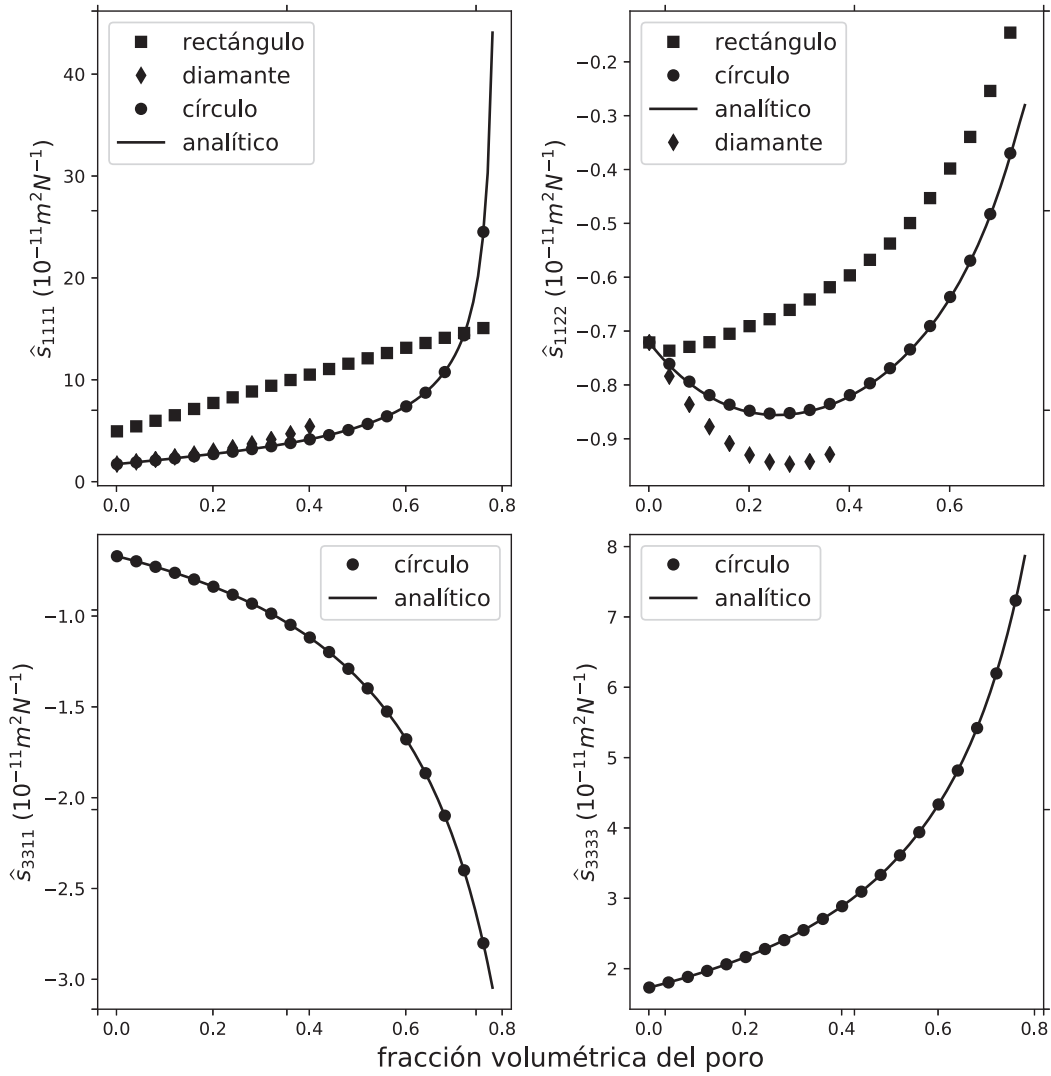


Figura 4.6: Componentes de la flexibilidad efectiva \hat{s}_{ijkl} que están involucrados en el cálculo de \hat{d}_{3jj} , $j = 1, 3$. Los curvas analíticas son para sección rectangular circular del poro.

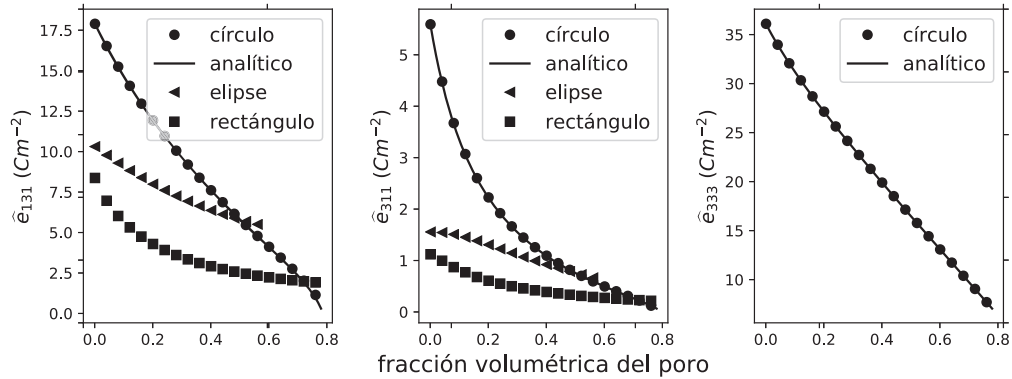


Figura 4.7: Coeficientes piezoelectricos efectivos \hat{e}_{ijk} a desplazamiento constante que están involucrados en el cálculo de \hat{d}_{3jj} , $j = 1, 3$.

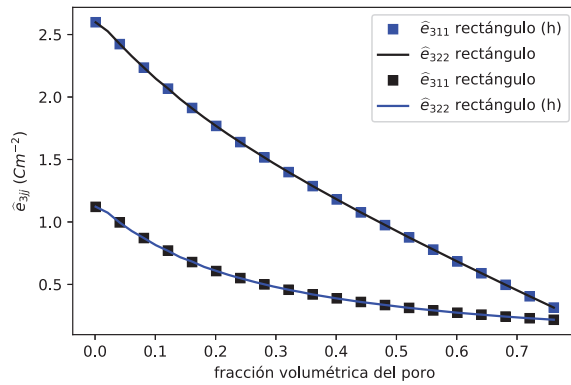


Figura 4.8: Intercambio de coeficientes asociados a las direcciones y_1 y y_2 al rotar 90° la orientación del rectángulo. La letra h designa que el rectángulo se ve de manera horizontal en cada caso.

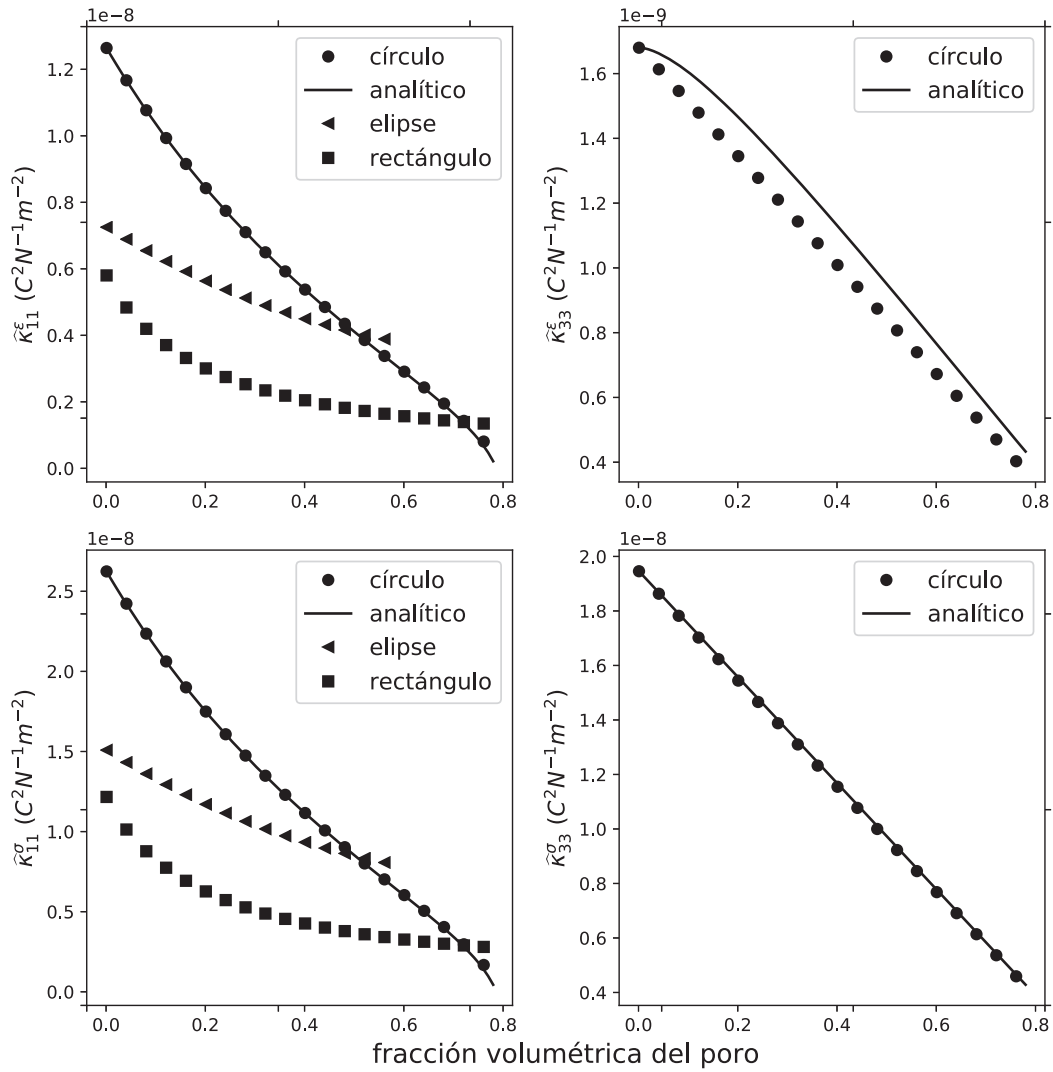


Figura 4.9: Permittividades dieléctricas efectivas a desplazamiento constante (paneles izquierdos) y a tensión constante (paneles derechos). Estas propiedades están involucradas en el cálculo de FoM_{3jj} , $j = 1, 3$.

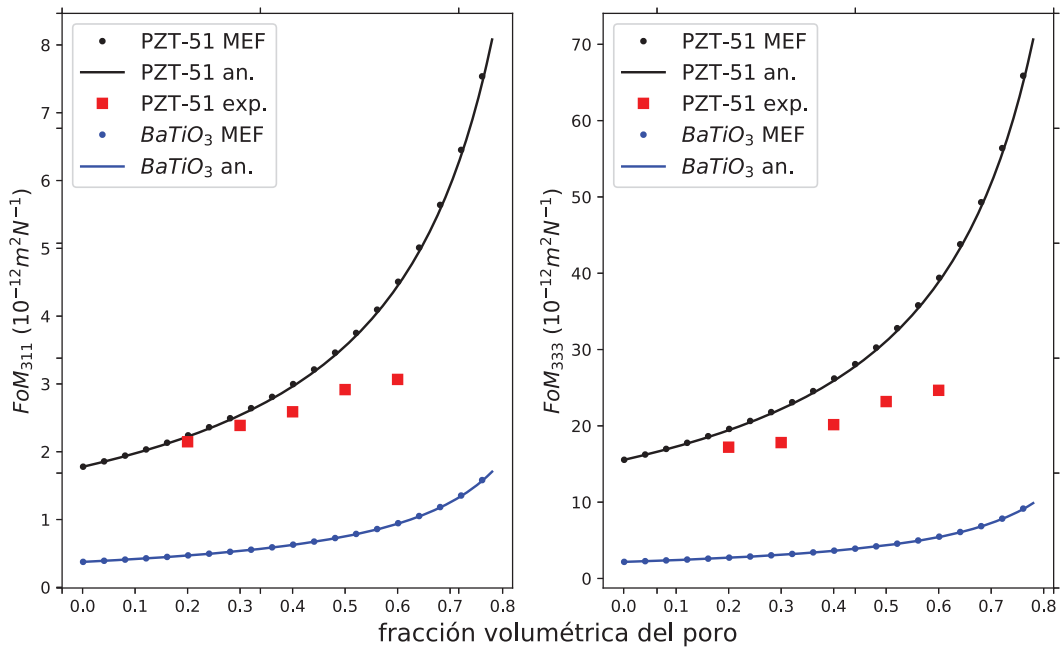


Figura 4.10: Figuras de mérito piezoeléctricas calculadas vía MEF (puntos) y analítica (línea continua), comparadas con las mediciones experimentales de Zhang et al. [46].

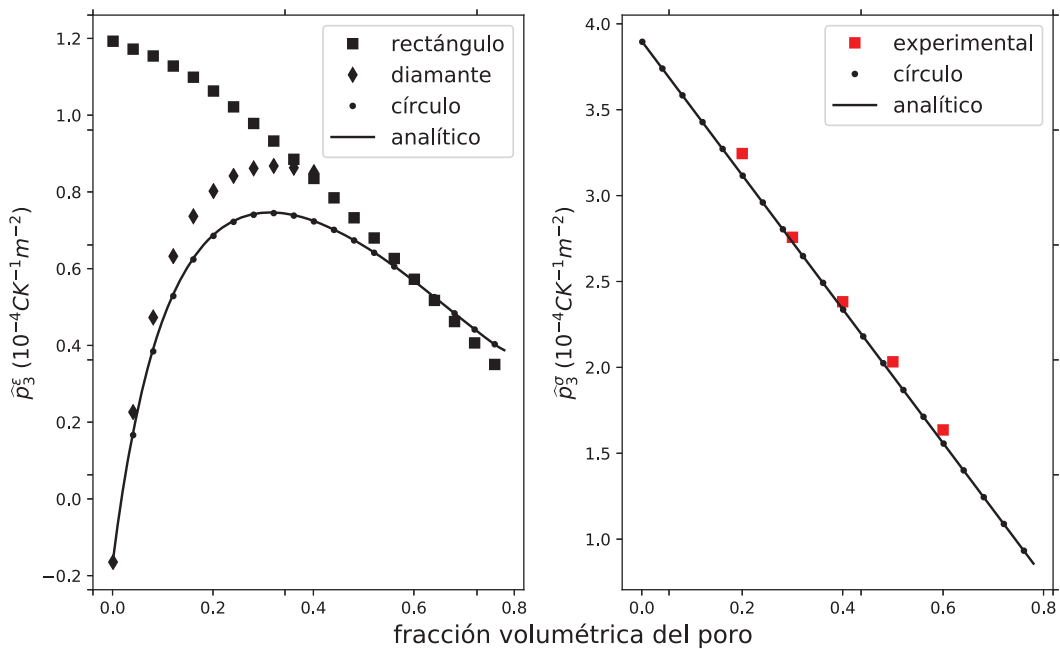


Figura 4.11: Coeficiente piezoeléctrico efectivo a ϵ constante (panel izquierdo) para varias formas de la sección transversal del poro y a σ constante (derecha) comparado con mediciones experimentales (cuadrados rojos).

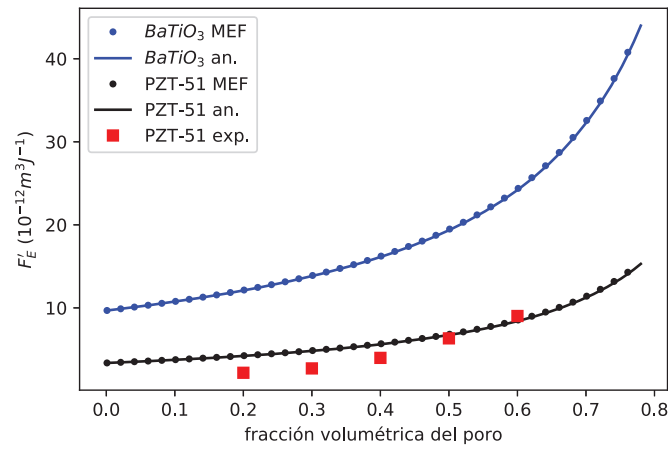


Figura 4.12: Figura de mérito piezoeléctrica modificada definida en el artículo [72] para diferentes materiales y comparada con mediciones experimentales de PZT-51.

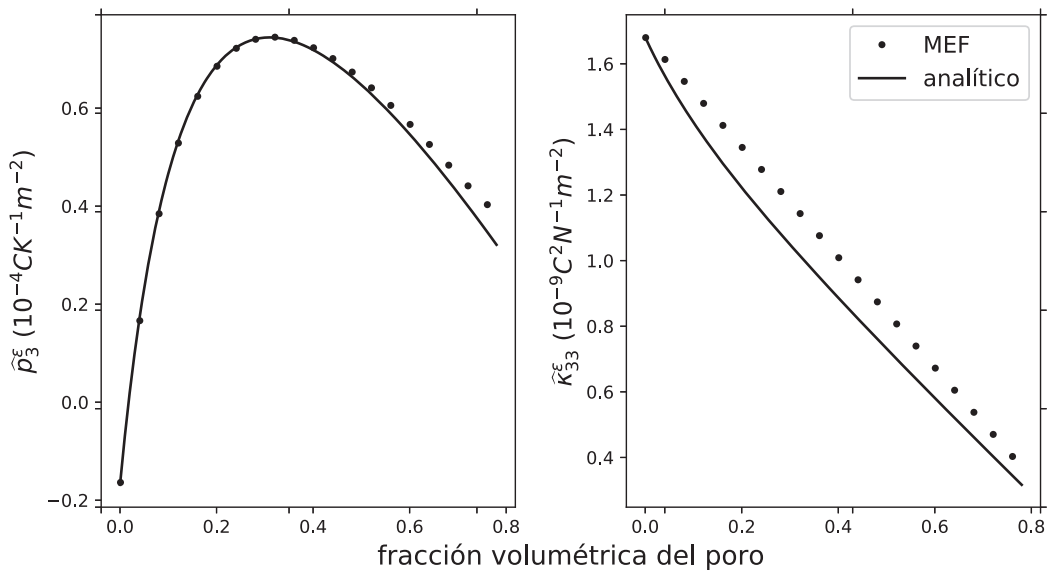


Figura 4.13: Coeficiente piezoeléctrico y permitividad dieléctrica efectivos calculados por el MEF (puntos) y por las fórmulas analíticas derivadas de los problemas planos para el primer orden de truncamiento.

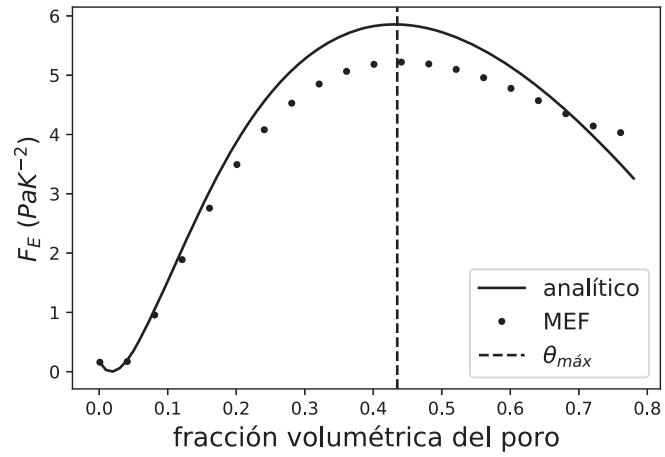


Figura 4.14: Figura de mérito piroeléctrica con los coeficientes en la formulación σDs , como en la expresión (4.97).

Capítulo 5

Homogeneización recursiva

En este capítulo proponemos un esquema basado en la aplicación recursiva de las fórmulas analíticas de los coeficientes efectivos de medios laminados para calcular las Figuras de Mérito de cerámicas porosas. En la Sección 5.1 veremos las características principales del presente modelo que difiere en complejidad de implementación y costo computacional del modelo de conectividad 3-1 del capítulo anterior. La recursión propuesta aquí consiste de dos pasos que son explicados en la Sección 5.2. Los coeficientes efectivos obtenidos en el primer paso son utilizados como propiedades físicas de una de las fases en el segundo paso, el cual provee los coeficientes efectivos finales. Los problemas locales de un modelo 3-1 en serie son enunciados en la Sección 5.3. Los coeficientes efectivos calculados a través de ellos serán utilizados como punto de comparación con HR en la sección 5.4. La publicación [55] recoge los resultados principales de este capítulo.

5.1. Modelo

Como hemos visto en capítulos anteriores, los especímenes experimentales de [46] difieren de la conectividad 2-2 ideal en que láminas consecutivas están unidas por pequeños “puentes” de cerámica tendidos sobre la fase vacía. Para tener en cuenta los puentes, en el capítulo anterior se propuso un modelo de conectividad 3-1. Una de las limitaciones de aquel modelo consiste en que las dimensiones de las estructuras que fungen como puentes son del mismo orden de magnitud que las dimensiones de las láminas. Esto motiva a proponer un modelo que incorpore la idea de que los puentes de cerámica solamente representan defectos de la estructura, que es principalmente lamelar.

En la Figura 5.1 se muestra un modelo alternativo al del capítulo anterior que captura los puentes pero sin asignarles el peso que tienen en el modelo 3-1. La idea es sustituir aquellos por pequeñas láminas distribuidas periódicamente, situadas perpendicularmente respecto a las láminas más gruesas. En la parte izquierda superior de la figura se muestra una sección transversal de la cerámica con los puentes representados por pequeñas franjas horizontales, en contraste con las láminas más gruesas, representadas verticalmente.

Los puentes se modelan como láminas para tomar ventaja de que existen fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos de laminados aire-cerámica. Estas fórmulas fueron obtenidas en el Capítulo 3 y están escritas en forma matricial en (3.15). El primer paso del modelo recursivo consiste en aplicar dichas fórmulas para homoge-

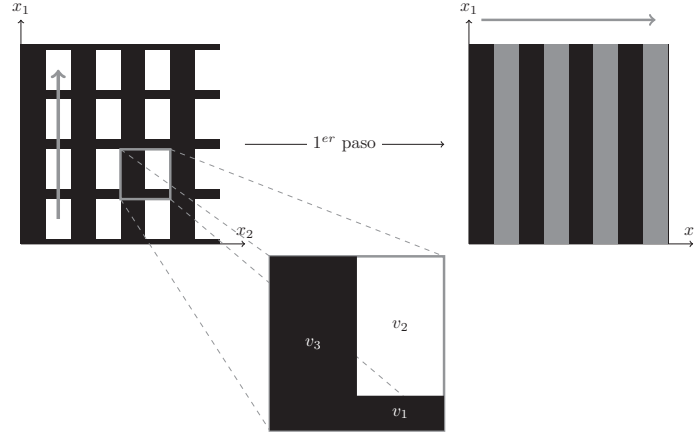


Figura 5.1: Corte transversal representativo del modelo recursivo y celda periódica. La flecha gris (arriba a la izquierda) representa la dirección de homogeneización del primer paso; la flecha gris de la derecha, la del segundo paso.

neizar los puentes más el vacío a lo largo de la dirección de x_1 en la Figura 5.1. De esta manera se obtienen coeficientes efectivos “parciales” de una fase (mostrada en gris en la Figura 5.1) que junto con las láminas principales es homogeneizada a lo largo de la dirección de x_3 (en serie) o de x_2 (en paralelo) en el segundo paso¹. Los coeficientes efectivos finales son también el resultado de fórmulas analíticas para laminados y son utilizados para calcular las Figuras de Mérito para recolección de energía.

5.2. Recursión

En esta sección desglosaremos por pasos las fórmulas de los coeficientes efectivos utilizadas en cada paso de la recursión. Solo escribiremos aquí aquellas que están involucradas en el cálculo de las FoMs piezoeléctricas (4.3) y piroeléctrica (4.4).

5.2.1. Primer paso

La celda periódica de este modelo aparece representada en la parte inferior de la Figura 5.1 con las fracciones volumétricas del puente, v_1 ; del poro, v_2 , y de la lámina principal, v_3 . Debemos calcular las fracciones volumétricas relativas al laminado que estamos homogeneizando en el primer paso. La fracción volumétrica del poro en este caso es:

$$\theta = \frac{v_2}{v_2 + v_1} \quad (5.1)$$

Las fórmulas para los coeficientes efectivos parciales se obtienen al sustituir el valor $m = 1$ en (3.15) ya que la periodicidad de este laminado es a lo largo de la

¹Del uso de las propiedades efectivas del primer paso para hallar las del segundo, viene el calificativo de “recursivo”.

dirección de x_1 . De esta manera obtenemos los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{2222} &= c_{2222} (1 - \theta), & \tilde{c}_{3333} &= c_{3333} (1 - \theta), & \tilde{c}_{2233} &= c_{2233} (1 - \theta), \\
 \tilde{e}_{322} &= e_{322} (1 - \theta), & \tilde{e}_{333} &= e_{333} (1 - \theta), & \tilde{\kappa}_{33}^\varepsilon &= \kappa_{33}^\varepsilon (1 - \theta), \\
 \tilde{\lambda}_{22} &= \lambda_{22} (1 - \theta), & \tilde{\lambda}_{33} &= \lambda_{33} (1 - \theta), & \tilde{p}_3^\varepsilon &= p_3^\varepsilon (1 - \theta), \\
 \tilde{\beta}^\varepsilon &= (\beta^\varepsilon - \lambda_{11}^2 c_{1111}^2) (1 - \theta).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Hemos utilizado la tilde $\tilde{\cdot}$ para distinguirlos de los coeficientes finales, que según el convenio de esta tesis, están representados por techos $\hat{\cdot}$. Todas las demás propiedades efectivas son iguales a cero no solo por la simetría cristalina sino porque el compuesto no posee integridad estructural a lo largo de la dirección de y_1 . Obsérvese también que, excepto $\tilde{\beta}^\varepsilon$, todas siguen la regla de las mezclas en la que una de las componentes (el vacío) tiene propiedades físicas iguales a cero.

5.2.2. Segundo paso

Los coeficientes efectivos en serie:

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{iii} &= \langle c_{iii} \rangle - \langle \mathbf{C}_{i3}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{i3} \rangle + \langle \mathbf{C}_{i3}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle (\langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle)^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{i3} \rangle, \\
 \hat{c}_{3333} &= \mathbf{e}_1^t \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{e}_1, \\
 \hat{c}_{1122} &= \langle c_{1122} \rangle + \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{32} \rangle - \langle \mathbf{C}_{13}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{32} \rangle, \\
 \hat{c}_{i33} &= \langle \mathbf{C}_{i3}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{e}_1, \\
 \hat{c}_{i3i3} &= \langle c_{i3i3}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \hat{e}_{3ii} &= \langle \mathbf{C}_{i3}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{e}_2, \\
 \hat{e}_{333} &= \mathbf{e}_1^t \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{e}_2, \\
 \hat{\kappa}_{33}^\varepsilon &= -\mathbf{e}_2^t \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{e}_2, \\
 \hat{\lambda}_{ii} &= \langle \lambda_{ii} \rangle - \langle \mathbf{C}_{i3}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{T}_3 \rangle + \langle \mathbf{C}_{i3}^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{T}_3 \rangle, \\
 \hat{\lambda}_{33} &= -\mathbf{e}_1^t \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{T}_3 \rangle, \\
 \hat{p}_3^\varepsilon &= \mathbf{e}_2^t \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{T}_3 \rangle, \\
 \hat{\beta}^\varepsilon &= \langle \beta^\varepsilon \rangle + \langle \mathbf{T}_3^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{T}_3 \rangle - \langle \mathbf{T}_3^t \mathbf{M}_{33}^{-1} \mathbf{T}_3 \rangle,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $i = 1, 2$ y:

$$\mathbf{M}_{33} = \begin{pmatrix} c_{3333} & e_{333} \\ e_{333} & -\kappa_{33}^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{i3} = \begin{pmatrix} c_{ii33} \\ e_{3ii} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} -\lambda_{33} \\ p_3^\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Obsérvese que en este modelo el compuesto final con polarización en serie no posee la simetría transversal isótropa de la cerámica sin poros. Esto se refleja en que existen más coeficientes independientes, por ejemplo, $\hat{c}_{1133} \neq \hat{c}_{2233}$.

Los coeficientes efectivos en paralelo son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{c}_{1111} &= \langle c_{1111} \rangle - \langle c_{1122}^2 c_{2222}^{-1} \rangle + \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle^2 \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{c}_{2222} &= \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{c}_{3333} &= \langle c_{3333} \rangle - \langle c_{2233}^2 c_{2222}^{-1} \rangle + \langle c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle^2 \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{c}_{1122} &= \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{c}_{1133} &= \langle c_{1133} \rangle - \langle c_{1122} c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{c}_{2233} &= \langle c_{2233} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{e}_{311} &= \langle e_{311} \rangle - \langle e_{311} c_{112} c_{22}^{-1} \rangle + \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{e}_{322} &= \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{e}_{333} &= \langle e_{333} \rangle + \langle c_{3322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1} - \langle c_{3322} e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle, \\
 \widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon &= \langle \kappa_{33}^\varepsilon \rangle + \langle e_{322}^2 c_{2222}^{-1} \rangle - \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle^2 \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1}, \\
 \widehat{\lambda}_{11} &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle - \langle c_{1122} c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{22} &= \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{33} &= \langle \lambda_{33} \rangle + \langle c_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle - \langle c_{322} c_{2222}^{-1} \lambda_{22} \rangle, \\
 \widehat{p}_3^\varepsilon &= \langle p_3^\varepsilon \rangle - \langle e_{322} c_{2222}^{-1} \rangle \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle + \langle e_{322} \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle, \\
 \widehat{\beta}^\varepsilon &= \langle \beta^\varepsilon \rangle + \langle \lambda_{22} c_{2222}^{-1} \rangle^2 \langle c_{2222}^{-1} \rangle^{-1} + \langle \lambda_{22}^2 c_{2222}^{-1} \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Como es usual, los techos $\widehat{\cdot}$ representan los coeficientes efectivos finales y las tildes, los parciales. En este paso, las dos fases involucradas son la propia cerámica y la que resulta de homogeneizar en el primer paso. Por ejemplo, las fórmulas extendidas \widehat{c}_{2222} and \widehat{e}_{322} quedarían:

$$\widehat{c}_{2222} = \frac{1}{\frac{v_3}{c_{2222}} + \frac{1-v_3}{\widetilde{c}_{2222}}}, \quad \widehat{e}_{322} = \frac{\frac{e_{322}}{c_{2222}} v_3 + \frac{\widetilde{e}_{322}}{\widetilde{c}_{2222}} (1-v_3)}{\frac{v_3}{c_{2222}} + \frac{1-v_3}{\widetilde{c}_{2222}}} \tag{5.6}$$

Una vez que se han calculado los coeficientes efectivos finales a ε constante, se deben obtener los de la formulación a σ constante, según las fórmulas:

$$\begin{aligned}
 \widehat{d}_{3jj} &= \widehat{e}_{3u} \widehat{s}_{ujj} \\
 \widehat{\kappa}_{33}^\sigma &= \widehat{\kappa}_{33}^\varepsilon + \widehat{d}_{3u} \widehat{e}_{3u} \\
 \widehat{p}_3^\sigma &= \widehat{p}_3^\varepsilon + \widehat{e}_{3u} \widehat{s}_{ujj} \widehat{\lambda}_{jj} \\
 \widehat{\beta}^\sigma &= \widehat{\beta}^\varepsilon + \widehat{\lambda}_u \widehat{s}_{ujj} \widehat{\lambda}_{jj}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde \widehat{s}_{ujj} son las componentes del tensor de flexibilidad. Obsérvese que para obtener las propiedades pertinentes a esta aplicación son solamente necesarias las componentes de la rigidez y de la flexibilidad que se sitúan en el bloque diagonal superior de 3×3 en su representación matricial de la notación de Voigt (Apéndice A):

$$\begin{pmatrix} \widehat{s}_{1111} & \widehat{s}_{1122} & \widehat{s}_{1133} \\ \widehat{s}_{2211} & \widehat{s}_{2222} & \widehat{s}_{2233} \\ \widehat{s}_{3311} & \widehat{s}_{3322} & \widehat{s}_{3333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{c}_{1111} & \widehat{c}_{1122} & \widehat{c}_{1133} \\ \widehat{c}_{2211} & \widehat{c}_{2222} & \widehat{c}_{2233} \\ \widehat{c}_{3311} & \widehat{c}_{3322} & \widehat{c}_{3333} \end{pmatrix}^{-1} \tag{5.8}$$

La inversión de estas matrices de 3×3 es lo que concentra la mayor parte del costo computacional de este método. Esta es una diferencia fundamental de la HR con el MEF en el que se deben realizar manipulaciones en matrices de tamaños mucho mayores, proporcionales al tamaño de las mallas. De aquí podemos apreciar, la eficiencia superior de HR sobre otros métodos numéricos.

5.3. MEF en serie

Como vimos en la sección anterior, este esquema recursivo permite el tratamiento de la polarización en serie. El modelo de conectividad 3-1 del capítulo anterior, contempla solamente el caso en que la polarización está en la misma dirección de los ejes de las fibras. Esta orientación asemeja la polarización en paralelo de los laminados, como se puede apreciar en la Figura 4.1. Siguiendo esta misma correspondencia, podríamos calibrar el caso serie de HR con un modelo de conectividad 3-1 en que los ejes de las fibras y el de polarización son perpendiculares. A esto nos referimos como “MEF en serie”.

Al igual que en el caso paralelo, estos problemas locales se obtienen de los problemas generales (2.75) y (2.76) que son independientes de la conectividad, de la simetría y de la geometría del poro. En este caso, las variables de las que dependerán las funciones serán y_1 y y_3 , por la invarianza de la geometría a lo largo de la dirección de y_2 . De (2.75) se derivan los problemas L_1^{qn} y L_2^q :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} u_{i,j} (c_{ijnq} + c_{ijkl}w_{k,l}^{qn} + e_{lij}\zeta_{,l}^{qn}) + \int_{\Omega} v_{,j} (e_{jnq} + e_{jkl}w_{k,l}^{qn} - \kappa_{jl}\zeta_{,l}^{qn}) \\
 &= \int_{\Omega} u_{1,1} (c_{11nq} + (k+m)w_{1,1}^{qn} + lw_{3,3}^{qn} + q\zeta_{,3}^{qn}) \\
 &+ \int_{\Omega} u_{1,3} (c_{13nq} + pw_{3,1}^{qn} + pw_{1,3}^{qn} + e\zeta_{,1}^{qn}) \\
 &+ \int_{\Omega} u_{2,1} (c_{21nq} + mw_{2,1}^{qn}) + \int_{\Omega} u_{2,3} (c_{23nq} + pw_{2,3}^{qn}) \\
 &+ \int_{\Omega} u_{3,1} (c_{31nq} + pw_{3,1}^{qn} + pw_{1,3}^{qn} + e\zeta_{,1}^{qn}) \\
 &+ \int_{\Omega} u_{3,3} (c_{33nq} + lw_{1,1}^{qn} + nw_{3,3}^{qn} + r\zeta_{,3}^{qn}) \\
 &+ \int_{\Omega} v_{,1} (e_{1nq} + ew_{1,3}^{qn} + ew_{3,1}^{qn} - t\zeta_{,1}^{qn}) \\
 &+ \int_{\Omega} v_{,3} (e_{3nq} + qw_{1,1}^{qn} + rw_{3,3}^{qn} - u\zeta_{,3}^{qn}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_{i,j} (e_{qij} + c_{ijkl}g_{k,l}^q + e_{lij}\pi_{,l}^q) + \int_{\Omega} v_{,j} (\kappa_{jq} - e_{jkl}g_{k,l}^q + \kappa_{jl}\pi_{,l}^q) \\
&= \int_{\Omega} u_{1,1} (e_{q11} + (k+m)g_{1,1}^q + lg_{3,3}^q + q\pi_{,3}^q) \\
&+ \int_{\Omega} u_{1,3} (e_{q13} + pg_{1,3}^q + pg_{3,1}^q + e\pi_{,1}^q) \\
&+ \int_{\Omega} u_{2,1} (e_{q21} + mg_{2,1}^q) + \int_{\Omega} u_{2,3} (e_{q23} + pg_{2,3}^q) \\
&+ \int_{\Omega} u_{3,1} (e_{q31} + pg_{3,1}^q + pg_{1,3}^q + e\pi_{,1}^q) \\
&+ \int_{\Omega} u_{3,3} (e_{q33} + ng_{3,3}^q + lg_{1,1}^q + r\pi_{,3}^q) \\
&+ \int_{\Omega} v_{,1} (\kappa_{1q} - eg_{1,3}^q - eg_{3,1}^q + t\pi_{,1}^q) \\
&+ \int_{\Omega} v_{,3} (\kappa_{3q} - qg_{1,1}^q - rg_{3,3}^q + u\pi_{,3}^q) = 0.
\end{aligned}$$

El problema L se deriva del general (2.76) y tiene la siguiente forma variacional:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_{i,j} (\lambda_{ij} - c_{ijml}\Gamma_{m,l} - e_{lij}Q_{,l}) + \int_{\Omega} v_{,j} (p_j + e_{jml}\Gamma_{m,l} - \kappa_{jl}Q_{,l}) \\
&= \int_{\Omega} u_{1,1} (\lambda - (k+m)\Gamma_{1,1} - l\Gamma_{3,3} - qQ_{,3}) \\
&+ \int_{\Omega} u_{1,3} (-p\Gamma_{1,3} - p\Gamma_{3,1} - eQ_{,1}) \\
&+ \int_{\Omega} u_{3,1} (-p\Gamma_{3,1} - p\Gamma_{1,3} - eQ_{,1}) \\
&+ \int_{\Omega} u_{3,3} (\gamma - l\Gamma_{1,1} - n\Gamma_{3,3} - rQ_{,3}) \\
&+ \int_{\Omega} v_{,1} (e\Gamma_{1,3} + e\Gamma_{3,1} - tQ_{,1}) \\
&+ \int_{\Omega} v_{,3} (\rho + q\Gamma_{1,1} + r\Gamma_{3,3} - uQ_{,3}) = 0.
\end{aligned}$$

Hasta donde sabemos, no es posible desacoplar estos problemas en otros que involucren menos funciones incógnitas como se hizo en el capítulo anterior al deducir los problemas unificados. Es por esa razón que en esta tesis serán resueltos por el MEF. Los coeficientes efectivos se pueden calcular de la siguiente manera en términos

de las funciones locales:

$$\begin{aligned}
 \widehat{c}_{11nq} &= \langle c_{11nq} + (k+m)w_{1,1}^{qn} + lw_{3,3}^{qn} + q\zeta_{3,3}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{13nq} &= \langle c_{13nq} + pw_{3,1}^{qn} + pw_{1,3}^{qn} + e\zeta_{3,1}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{21nq} &= \langle c_{21nq} + mw_{2,1}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{22nq} &= \langle c_{22nq} + (k-m)w_{1,1}^{qn} + lw_{3,3}^{qn} + q\zeta_{3,3}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{23nq} &= \langle c_{23nq} + pw_{2,3}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{31nq} &= \langle c_{31nq} + pw_{3,1}^{qn} + pw_{1,3}^{qn} + e\zeta_{3,1}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{c}_{33nq} &= \langle c_{33nq} + lw_{1,1}^{qn} + nw_{3,3}^{qn} + r\zeta_{3,3}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{e}_{1nq} &= \langle e_{1nq} + ew_{1,3}^{qn} + ew_{3,1}^{qn} - t\zeta_{3,1}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{e}_{2nq} &= \langle e_{2nq} + ew_{2,3}^{qn} \rangle, \\
 \widehat{e}_{3nq} &= \langle e_{3nq} + qw_{1,1}^{qn} + rw_{3,3}^{qn} - u\zeta_{3,3}^{qn} \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{e}_{q11} &= \langle e_{q11} + (k+m)g_{1,1}^q + lg_{3,3}^q + q\pi_{3,3}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q13} &= \langle e_{q13} + pg_{1,3}^q + pg_{3,1}^q + e\pi_{3,1}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q21} &= \langle e_{q21} + mg_{2,1}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q22} &= \langle e_{q22} + (k-m)g_{1,1}^q + lg_{3,3}^q + q\pi_{3,3}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q23} &= \langle e_{q23} + pg_{2,3}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q31} &= \langle e_{q31} + pg_{3,1}^q + pg_{1,3}^q + e\pi_{3,1}^q \rangle, \\
 \widehat{e}_{q33} &= \langle e_{q33} + ng_{3,3}^q + lg_{1,1}^q + r\pi_{3,3}^q \rangle, \\
 \widehat{\kappa}_{1q} &= \langle \kappa_{1q} - eg_{1,3}^q - eg_{3,1}^q + t\pi_{3,1}^q \rangle, \\
 \widehat{\kappa}_{2q} &= \langle \kappa_{2q} - eg_{2,3}^q \rangle, \\
 \widehat{\kappa}_{3q} &= \langle \kappa_{3q} - qg_{1,1}^q - rg_{3,3}^q + u\pi_{3,3}^q \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\lambda}_{11} &= \langle \lambda - (k+m)\Gamma_{1,1} - l\Gamma_{3,3} - qQ_{3,3} \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{22} &= \langle \lambda - (k-m)\Gamma_{1,1} - l\Gamma_{3,3} - qQ_{3,3} \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{33} &= \langle \gamma - l\Gamma_{1,1} - n\Gamma_{3,3} - rQ_{3,3} \rangle, \\
 \widehat{\lambda}_{31} &= \langle -p\Gamma_{3,1} - p\Gamma_{1,3} - eQ_{3,1} \rangle, \\
 \widehat{p}_1^\varepsilon &= \langle e\Gamma_{1,3} + e\Gamma_{3,1} - tQ_{3,1} \rangle, \\
 \widehat{p}_3^\varepsilon &= \langle \rho + q\Gamma_{1,1} + r\Gamma_{3,3} - uQ_{3,3} \rangle, \\
 \widehat{\beta}^\varepsilon &= \langle \beta^\varepsilon + \lambda\Gamma_{1,1} + \gamma\Gamma_{3,3} - \rho Q_{3,3} \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.4. Resultados numéricos

Para ilustrar el uso del esquema vamos a utilizar las propiedades físicas de los materiales $BaTiO_3$ (Cuadro 3.1) y PZT-51 (Cuadro 4.4). En la Figura 5.2 se muestra una comparación entre los coeficientes efectivos piezoeléctricos finales del $BaTiO_3$ poroso calculados via HR y MEF. Los paneles de la izquierda muestran la polarización en serie y los de la izquierda, la polarización en paralelo. Se puede observar una buena concordancia entre ambos métodos. Las mayores diferencias se aprecian en la polarización en serie. Esto se debe a que el volumen v_1 de los puentes es un parámetro libre que necesita ser determinado mediante mediciones o el ajuste del

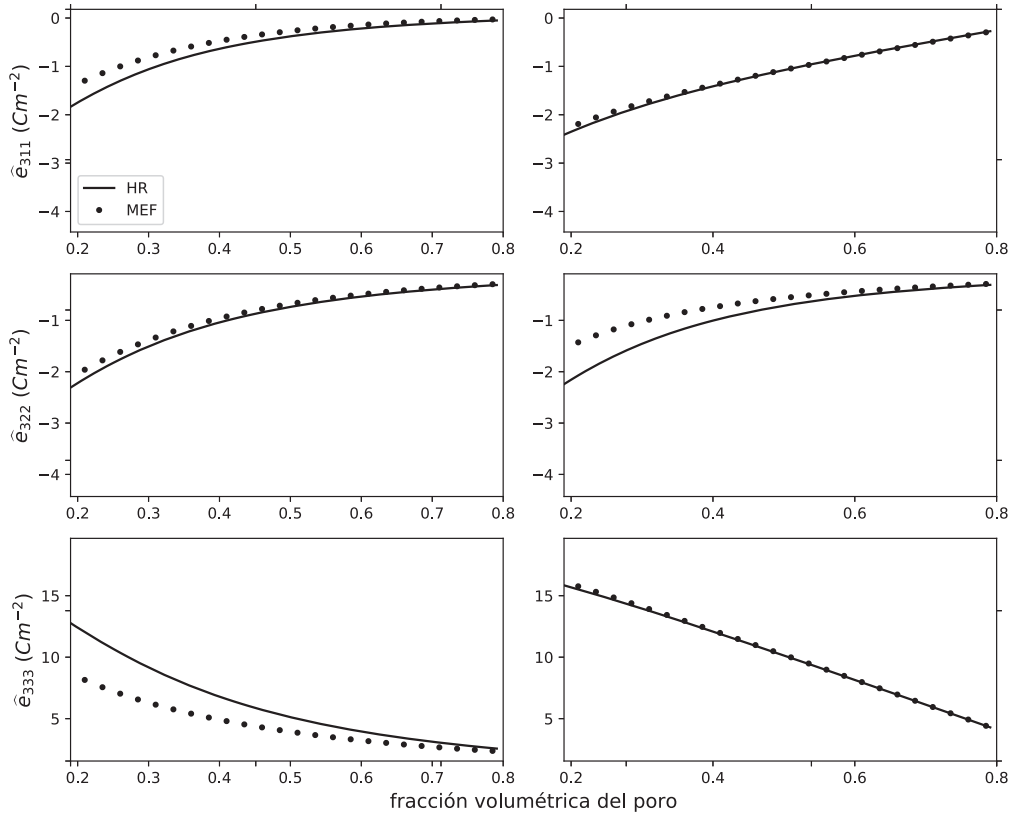


Figura 5.2: Componentes efectivas del tensor piezoeléctrico del $BaTiO_3$ poroso calculadas via HR y via MEF. La fracción volumétrica del puente se ha fijado en $v_1 = 0.1$.

modelo con datos experimentales. La influencia de este parámetro es mayor en el caso serie puesto que cuando $v_1 \rightarrow 0$, el compuesto no tiene integridad a lo largo de x_3 . Esto causa comportamiento singular en algunos términos de las fórmulas que contienen medias armónicas. Las fórmulas para la polarización en paralelo funcionan bien para cualquier volumen del puente.

En la Figura 5.3 se muestran algunas componentes efectivas del tensor de flexibilidad que están involucradas en el cálculo de \hat{d}_{3jj} . La columna izquierda muestra los coeficientes en serie y la derecha, en paralelo. Podemos ver que existe una buena concordancia entre ambos métodos. El resultado de multiplicar estas flexibilidades no constantes de la Figura 5.3 con los coeficientes piezoeléctricos no constantes de la Figura 5.2 son los coeficientes constantes $\hat{d}_{311} = -0.05\text{nC/N}$ and $\hat{d}_{333} = 0.14\text{nC/N}$ en paralelo.

Las figuras de mérito piezoeléctricas FoM_{3jj} se muestran en la Figura 5.4. Existe buena concordancia entre ambos métodos matemáticos. La concordancia con los experimentos no es ideal, pero podría mejorarse teniendo en cuenta la disminución en la polarización debida a los defectos que se describe en [46]. Este modelo recursivo no tiene en cuenta esta disminución porque no se han reportado en la literatura mediciones del efecto. En su lugar, se ha supuesto que los coeficientes piezoeléctricos e_{3jj} tienen el mismo valor en todas las regiones ocupadas por la cerámica y que este es igual al de la cerámica sin poros. Este mismo problema se aprecia en las propiedades

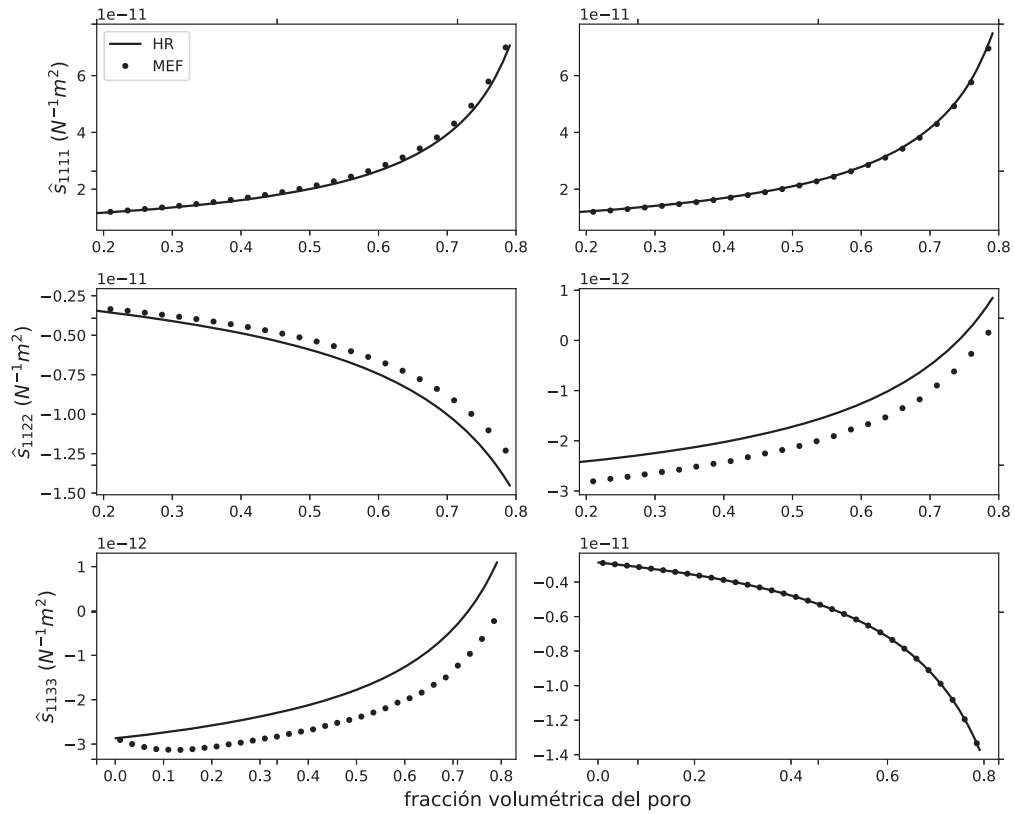


Figura 5.3: Componentes efectivas del tensor de flexibilidad del $BaTiO_3$ poroso calculadas via HR y via MEF. La fracción volumétrica del puente se ha fijado en $v_1 = 0.1$.

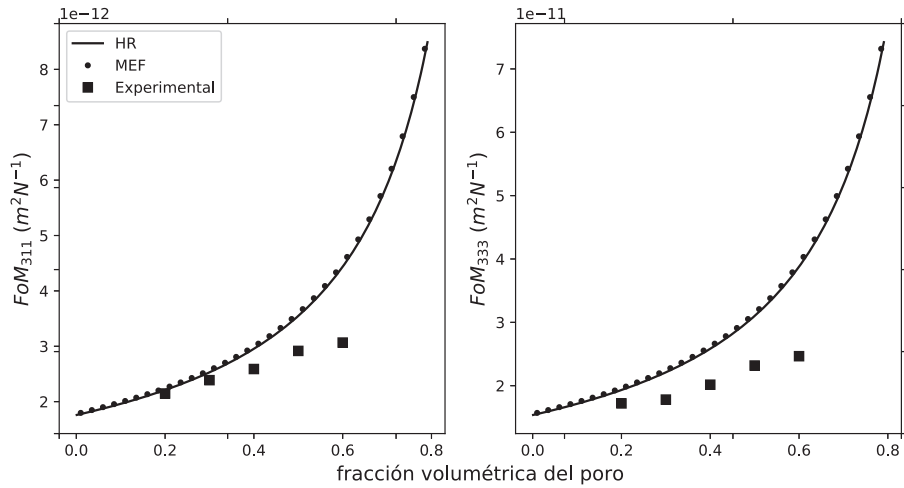


Figura 5.4: Figuras de Mérito piezoeléctricas del PZT-51 poroso calculadas via HR y via MEF, comparadas con mediciones experimentales de [46]. La polarización es en paralelo y la fracción volumétrica del puente se ha fijado en $v_1 = 0.1$.

piroeléctricas (Figura 5.5), lo cual es de esperar dada la relación que existe entre la piezoelectricidad y piroelectricidad de un material. Si alimentáramos el esquema recursivo y MEF con los módulos piezoeléctricos y piroeléctricos reales (que tienen en cuenta las regiones no polarizadas), obtendríamos una mejor concordancia con los experimentos.

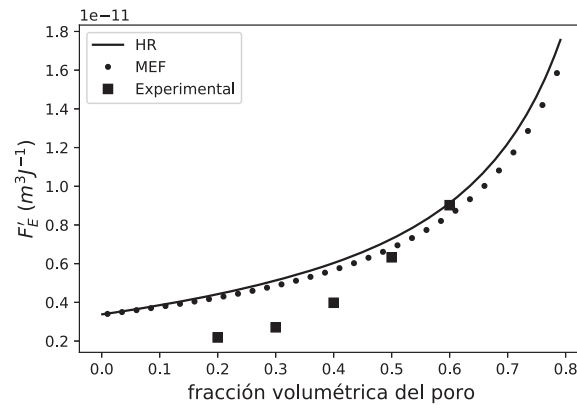


Figura 5.5: Figura de Mérito piroeléctrica del PZT-51 poroso calculada via HR y via MEF, comparada con mediciones experimentales de [46]. La polarización es en paralelo y la fracción volumétrica del puente se ha fijado en $v_1 = 0.1$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este capítulo resumiremos los resultados principales de esta tesis y discutiremos algunas preguntas abiertas que podrían dar lugar a líneas de investigación futura para el autor o para algún lector que esté interesado.

6.1. Contacto imperfecto

En el Capítulo 2 de esta tesis presentamos la construcción de una solución asintótica para el problema de frontera TMEE con contacto imperfecto en las superficies limítrofes de los materiales. No es posible probar la existencia de esta solución asintótica con el resultado conocido del suplemento de [22] puesto que las matrices \mathbf{A}_{jl} definidas en la expresión (2.13) no cumplen la relación de simetría $\mathbf{A}_{jl} = \mathbf{A}_{lj}^t$. Para superar esta dificultad, en el Apéndice B enunciamos y demostramos el Teorema 1 de existencia y unicidad de las soluciones que no depende de la simetría de las \mathbf{A}_{jl} . No solo en ese sentido dicho Teorema 1 generaliza el resultado de [22] sino que también admite que haya contacto imperfecto entre las fases del material. El Teorema 1 junto con la condición de Ignaczak (2.41) son utilizados exitosamente para probar la existencia y unicidad de las soluciones de los términos no perturbados y de los correctores de la serie asintótica de $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ (2.24).

Los problemas locales (2.55), (2.56) y (2.61) derivados de la construcción del Capítulo 2 son integrados en el Capítulo 3 para el caso de un material laminado con contacto imperfecto. Obtenemos expresiones analíticas para todas las propiedades efectivas TMEE de un material con simetría transversal isótropa cuando la periodicidad de las láminas se encuentra orientada en la misma dirección de la polarización (en serie) o en la dirección perpendicular a la polarización (en paralelo).

Para ejemplificar numéricamente el uso de las fórmulas analíticas de los coeficientes efectivos utilizamos dos fases, una piezoeléctrica y una piezomagnética. Esto permitió observar la emergencia de propiedades producto como la magnetoelectricidad y la piroelectricidad en compuestos cuyas fases por sí solas no exhiben ninguna de estas propiedades. El hecho de que tengamos fórmulas analíticas para los coeficientes efectivos permite ver cuál propiedad elástica es “mediadora” en la interacción de efectos que da lugar a la propiedad producto (c_{1313} en serie y c_{2222} en paralelo). Además, las fórmulas analíticas también nos permiten apreciar cómo los parámetros de imperfección afectan a las propiedades efectivas. Cuando dichos parámetros tienen valores muy altos, el compuesto se comporta como si hubiese contacto perfecto. Cuando los parámetros son muy bajos, el compuesto se comporta como si las fases

estuviesen desunidas. Este último hecho fue posible confirmarlo comparando con las fórmulas analíticas de las propiedades efectivas de un laminado con capas “vacías”, que también son posibles de derivar siguiendo una metodología similar a la utilizada para el contacto imperfecto.

En la sección 3.2, pudimos ver cómo las fórmulas analíticas dan lugar también a nuevas cadenas de relaciones entre coeficientes efectivos. Como un ejemplo de uso de estas relaciones, ilustramos cómo derivar a través de ellas las fórmulas de los coeficientes efectivos piezoeléctricos del artículo [64]. En dicho trabajo, los coeficientes efectivos fueron derivados por una vía más larga, resolviendo los problemas locales.

6.2. Cerámica porosa termo-piezoeléctrica

En el Capítulo 4 nos propusimos calcular las propiedades termo-piezoeléctricas efectivas de una cerámica porosa con el fin de comparar nuestros resultados con los de Zhang et al [46]. Esta investigación experimental determinó que las figuras de mérito piezoeléctricas y piroeléctrica de una cerámica mejoran con la introducción de porosidad. Adicionalmente, dichos resultados pueden ser descritos con un modelo fenomenológico con ciertos parámetros que deben ser ajustados a priori con los datos experimentales. Nuestro objetivo fue determinar si la mejoría de las figuras de mérito es reproducible a través de primeros principios, es decir, modelándola a través de la teoría lineal de la termo-piezolectricidad y el Método de Homogeneización Asintótica. Nuestras herramientas podrían ser útiles para predecir porosidades óptimas para el diseño de materiales para recolección de energía.

Para el cálculo de las propiedades efectivas termo-piezoeléctricas, fue necesario adaptar los problemas locales TMEE (2.55) y (2.56) a que solo incluyeran las propiedades mecánicas, eléctricas y térmicas. Aquí, el hecho de utilizar la notación matricial juega un papel importante, ya que los problemas locales escritos en dicha notación no cambian, sino que involucran matrices de menor tamaño, dejando fuera filas y columnas asociadas a propiedades magnéticas.

El MEF fue utilizado para solucionar los problemas locales en la celda periódica. Esto contrasta con los modelos de celda unitaria (o de Elemento de Volumen Representativo) en que las inhomogeneidades de los problemas salen de forma natural en las derivaciones del MHA, mientras que en los modelos de celda unitaria, las inhomogeneidades (llamadas “cargas”) deben ser impuestas por quien hace los cálculos.

Resolviendo los problemas locales derivados del MHA, los coeficientes efectivos pueden ser calculados por simple integración de las expresiones (4.25)-(4.29) en la celda local. Esta es otra ventaja sobre los modelos de celda unitaria: que no es necesario resolver el problema varias veces para diferentes casos especiales de carga.

Adicionalmente, demostramos que los problemas locales pueden ser reducidos mediante cambios de variable a los llamados problemas unificados plano y antiplano¹. Esto implica que existen relaciones exactas entre los coeficientes efectivos de estos problemas, lo cual redujo el número de ellos que deben ser resueltos para obtener todos los coeficientes efectivos.

¹Entiéndase que los problemas resueltos aquí (4.40) y (4.83) para materiales transversalmente isótropos son equivalentes a los que suelen llamarse en la literatura problemas plano y antiplano, que son para materiales isótropos.

En el caso de los problemas “planos”, hicimos uso de las relaciones de Kolosov-Muskhelishvili para escribir las ecuaciones y condiciones de frontera libre de un problema local con poro de sección transversal circular, en términos de potenciales complejos. Estos están dados en forma de series de funciones especiales con coeficientes indeterminados. Las propiedades efectivas mecánicas se pueden calcular truncando el sistema de ecuaciones infinito que satisfacen estos coeficientes indeterminados hasta un cierto orden. El resto de las propiedades planas (piezoeléctricas, piroeléctricas, termo-elásticas y dieléctricas) se pueden calcular a través de las relaciones exactas mencionadas anteriormente. El problema “antiplano” también fue resuelto por un método de variable compleja del cual se obtiene un sistema de infinitas ecuaciones lineales. El resto de las propiedades antiplanas también pueden obtenerse mediante la relación exacta que ellas satisfacen.

Los coeficientes efectivos calculados por los métodos de variable compleja coinciden con los calculados por MEF. La diferencia entre ambos métodos es que MEF permite el cálculo de los coeficientes efectivos para diferentes formas de la sección transversal del poro, mientras que el método de variable compleja, sólo es válido para la forma circular del poro. Sin embargo, al transformar los coeficientes efectivos a la formulación de las relaciones constitutivas (4.5), muchos de ellos se vuelven independientes de la forma de la sección transversal del poro y sólo dependen de la fracción volumétrica. Esto refuerza la utilidad de las fórmulas analíticas, ya que pueden ser eficientes al hallar los coeficientes efectivos de la formulación (4.5), independientemente de la forma de la sección transversal de los poros.

Los resultados experimentales de Zhang et al. [46] son en gran medida reproducibles a través de nuestro modelo. El incremento de las figuras de mérito piezoeléctricas y piroeléctricas con la porosidad es correctamente capturado por nuestras suposiciones, a pesar de la geometría de láminas unidas por puentes de [46] es aproximada por un modelo de conectividad 3-1.

La figura de mérito piroeléctrica (4.4) proviene de una modificación a la figura de mérito obtenida por Sebald et al. [82, 83] para factorizar en ella la temperatura de la fuente. En las mediciones experimentales de [46] los coeficientes efectivos que intervienen en la fórmula de la figura de mérito son los de las relaciones constitutivas (4.5). Sin embargo, ella fue deducida originalmente en los trabajos de Sebald a partir de la formulación original de las relaciones constitutivas (2.4). En esta el comportamiento del coeficiente piroeléctrico como función de la fracción volumétrica no es monótono, sino que tiene un máximo local. Este hecho nos motiva a pensar que exista una fracción volumétrica que optimice a esta figura de mérito piezoeléctrica. Al momento de escribir esta tesis no conocemos de que se haya reportado en la literatura acerca de esta fracción volumétrica óptima que maximiza la figura de mérito piroeléctrica.

En el Capítulo 5 utilizamos un método de HR para homogeneizar un modelo que tiene en cuenta los puentes de cerámica sin asignarles el mismo peso que se les otorga en el modelo 3-1. Este modelo es de implementación simple pues sólo requiere la aplicación de fórmulas analíticas para laminados en dos pasos de la recursión. Además, es de muy bajo costo computacional puesto que no requiere del uso de la creación de mallas ni de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tamaños muy grandes. Los coeficientes efectivos y figuras de mérito para recolección de energía obtenidas por HR coinciden muy bien con aquellos obtenidos por MEF. Esto abre la puerta a que este esquema recursivo pueda ser empleado por ingenieros

para la predicción de las propiedades de cerámicas porosas.

6.3. Perspectivas

En esta tesis hemos utilizado la condición de contacto imperfecto (2.18) por la ventaja de que puede modelar de manera simple, la no-continuidad de varios campos y potenciales. Sin embargo, la expresión (2.18) constituye una postulación ad hoc para modelar lo que ocurre en realidad. En [41], Hashin dedujo una condición de contacto imperfecto elástico más “realista” basándose en un problema de tres materiales (dos fases y una mesofase muy fina entre ellas). Nuestra condición (2.18) captura grosso modo la esencia del contacto imperfecto deducida exactamente por Hashin: que los parámetros de imperfección son proporcionales a los módulos elásticos de la mesofase e inversamente proporcionales a su espesor. Sin embargo, una de las áreas a las que se podría extender el presente trabajo podría ser la deducción de fórmulas más realistas para los coeficientes efectivos TMEE basadas en lo que hizo Hashin para el caso elástico.

También es de interés la modelación del contacto imperfecto a través del Método de la Transformada Rápida de Fourier (MTRF), que aparece brevemente descrito en la sección 1.2. Nosotros hemos tomado algunos pasos de avance en esta dirección, calculando la rigidez elástica efectiva \hat{c}_{3333} de un laminado bifásico con polarización en serie (ver Figura 6.1), introduciendo la superficie de imperfección como una región de un pixel de espesor. Como podemos ver, existe una buena coincidencia entre los resultados del Método de Homogeneización Asintótica y el MTRF.

Estos cálculos fueron hechos con el algoritmo original para MTRF propuesto en [15], el cual tiene dos principales limitaciones. En primer lugar, no funciona para el caso en que hay contrastes muy altos entre las propiedades de las fases. Esto lo hace inútil para el estudio de propiedades de materiales porosos o materiales con superficies de imperfección con parámetros relativamente altos. En segundo lugar, la introducción de más propiedades (eléctricas, magnéticas y térmicas) en este esquema requiere el uso de operadores de Green asociados a cada uno de los tensores involucrados, incluso los de las propiedades acopladas (piezoeléctricas, piezomagnéticas, magnetoeléctricas, etcétera). Esto aumenta la complejidad de la implementación computacional del problema.

La solución a estas dificultades podría ser la utilización del *Algoritmo de la Lagrangiana Aumentada* [18, 19] mediante el cual no solamente se pueden tratar los contrastes altos sino que sólo requiere de los tensores de los efectos no acoplados (elástico, dieléctrico y de permeabilidad magnética). Hasta donde sabemos, en la literatura no se ha demostrado cómo calcular los coeficientes efectivos de un compuesto con contacto imperfecto vía MTRF.

En última instancia, deseamos comparar los resultados teóricos de MHA con resultados experimentales. Sin embargo, existe una dificultad derivada de un efecto que se menciona el artículo de Zhang et al. [46]. Después de formar la estructura laminar de la muestra por el método del *freeze-casting* la polarización se establece aplicándole a aquella un campo eléctrico intenso. Si el campo se aplica en la dirección paralela a las láminas, la cerámica queda polarizada en paralelo y si se aplica en la dirección perpendicular a las láminas, la polarización es en serie. Los autores observaron que en el caso paralelo los coeficientes piezoeléctricos muestran mayores valores que en el caso serie. Ellos suponen que esto se deba a que en la dirección

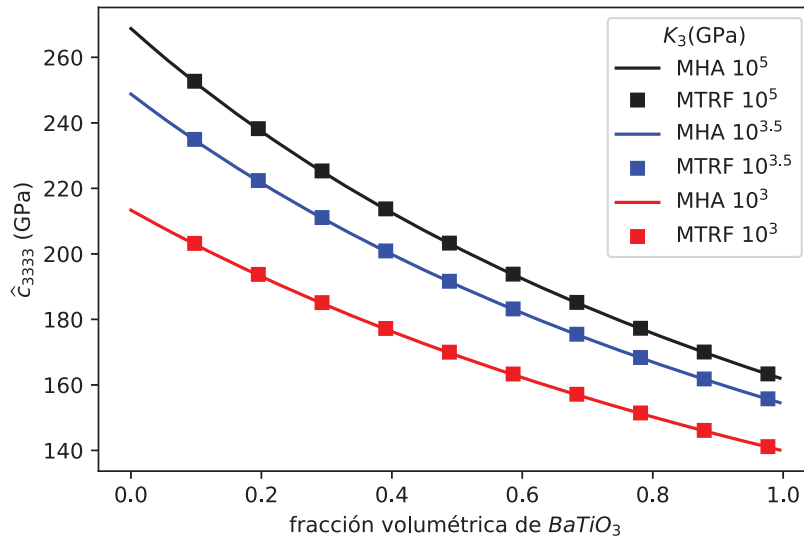


Figura 6.1: Coeficiente efectivo de rigidez elástica con polarización en serie calculado vía MHA y MTRF para varios valores de la constante de imperfección K_3 .

paralela a las láminas existe mejor interconectividad y por tanto, el proceso de polarización de los dominios es más “efectivo” al aplicar un campo eléctrico en esa dirección. Nuestro modelo, al asumir que toda la región ocupada por la cerámica está igualmente polarizada, podría servir como punto de partida para cuantificar el efecto descrito arriba. O, alternativamente, si queremos describir mejor los resultados de Zhang et al. debemos tener en cuenta en nuestro modelo esta disminución de la polarización en serie.

Una línea de trabajo futura podría ser idear un modelo que aproxime mejor la conectividad de las muestras de Zhang et al. [46] que la conectividad 3-1 y el modelo de HR utilizados en esta tesis. Una posibilidad es combinar un laminado con otro tipo de conectividad, por ejemplo, fibras, que jueguen el papel de los puentes de cerámica entre láminas consecutivas. Los problemas locales tridimensionales de este modelo podrían ser resueltos aplicando MEF y los resultados se compararían con HR con fórmulas adecuadas para las fibras. Otra posibilidad es adicionar nuevos pasos a la recursión, en los que se homogeneizan defectos de la estructura lamelar aún más finos que los puentes.

Apéndice A

Simetría. Notaciones de Voigt y de Hill

Además de las propiedades de simetría asociadas al carácter tensorial, también existen otras propiedades de simetría asociadas a la clase cristalina a la que pertenecen los materiales que utilizaremos para ejemplificar nuestros métodos. Esta clase es llamada hexagonal, más específicamente la 6mm, y los materiales que pertenecen a ella exhiben comportamiento piezoeléctrico debido a la ruptura de la isotropía cristalina en una dirección (eje x_3 por convenio). Estas propiedades de simetría se pueden encontrar, por ejemplo, en [84], pero a continuación se resumirán (las componentes no enlistadas son iguales a cero):

$$\begin{aligned}
 c_{1111} &= c_{2222}, & c_{1122}, & & c_{1133} &= c_{2233}, & c_{3333}, & & c_{1313} &= c_{2323}, \\
 c_{1212} &= \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}), \\
 e_{113} &= e_{223}, & e_{311} &= e_{322}, & e_{333}, & \kappa_{11}^{\varepsilon} &= \kappa_{22}^{\varepsilon}, & \kappa_{33}^{\varepsilon}, \\
 q_{113} &= q_{223}, & q_{311} &= q_{322}, & q_{333}, & \mu_{11} &= \mu_{22}, & \mu_{33}, \\
 \lambda_{11} &= \lambda_{22}, & \lambda_{33}, & p_3^{\varepsilon}, & m_3^{\varepsilon}. & & & & &
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

La notación de Hill permite expresar a un tensor transversalmente isótropo de cuarto orden en términos de una base, llamada base de Hill. Para una explicación más detallada de esta base, véase el Apéndice C de [85]. Aquí nos limitaremos simplemente a mostrar los coeficientes en dicha base del tensor de rigidez de un material con simetría hexagonal:

$$2k = c_{1111} + c_{1122}, \quad 2m = 2c_{1212} = c_{1111} - c_{1122}, \quad n = c_{3333}, \tag{A.2}$$

$$l = c_{1133} = c_{2233}, \quad p = c_{1313} = c_{2323}, \tag{A.3}$$

$$q = e_{311} = e_{322}, \quad r = e_{333}, \quad e = e_{113} = e_{223}, \tag{A.4}$$

$$t = \kappa_{11}^{\varepsilon} = \kappa_{22}^{\varepsilon}, \quad u = \kappa_{33}^{\varepsilon}, \tag{A.5}$$

$$q' = q_{311} = q_{322}, \quad r' = q_{333}, \quad e' = q_{113} = q_{223}, \tag{A.6}$$

$$v = \mu_{11} = \mu_{22}, \quad w = \mu_{33}, \tag{A.7}$$

$$\alpha' = \alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha = \alpha_{33}, \tag{A.8}$$

$$\lambda = \lambda_{11} = \lambda_{22}, \quad \gamma = \lambda_{33}, \tag{A.9}$$

$$\rho = p_3^{\varepsilon}, \quad \mu = m_3^{\varepsilon}. \tag{A.10}$$

Inicialmente, el propio Hill planteó la notación para propiedades elásticas solamente [78]. Posteriormente, aquella se extendió a propiedades piezoeléctricas [30, 32] y a

propiedades magnéticas [86]. La única diferencia de la notación presentada en esta tesis con la de los artículos anteriores es que hemos llamado $e = e_{113} = e_{223}$ mientras que se le suele llamar s para no romper el orden alfabético. Esto se hizo así porque la letra s está reservada para denotar entropía en las relaciones constitutivas (2.4).

En esta tesis también utilizaremos la notación de Voigt para reducir el orden de tensores simétricos. En general, si ij son un par de índices por los cuales un tensor es simétrico, la notación de Voigt propone reducirlos a un único índice por las reglas:

$$\begin{aligned} 11 &\mapsto 1, & 23 &\mapsto 4, \\ 22 &\mapsto 2, & 13 &\mapsto 5, \\ 33 &\mapsto 3, & 12 &\mapsto 6. \end{aligned} \tag{A.11}$$

En este punto debemos hacer una distinción entre tensores *cinéticos* y tensores *cinemáticos*, puesto que la notación de Voigt aplica de manera diferente para los dos tipos (véase apéndice 1 de [87]). Por ejemplo, el tensor de tensiones es *cinético* y sus componentes σ_{ij} se pueden codificar en un vector de componentes σ_i^* según la regla:

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \sigma_{11}, \\ \sigma_2^* &= \sigma_{22}, \\ \sigma_3^* &= \sigma_{33}, \\ \sigma_4^* &= \sigma_{23} = \sigma_{32}, \\ \sigma_5^* &= \sigma_{13} = \sigma_{31}, \\ \sigma_6^* &= \sigma_{12} = \sigma_{21}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Similarmente, aplicando la regla a cada par de índices ij y kl en c_{ijkl} , podemos codificar este tensor en una matriz simétrica 6×6 :

$$\begin{pmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* & c_{14}^* & c_{15}^* & c_{16}^* \\ & c_{22}^* & c_{23}^* & c_{24}^* & c_{25}^* & c_{26}^* \\ & & c_{33}^* & c_{34}^* & c_{35}^* & c_{36}^* \\ & & & c_{44}^* & c_{45}^* & c_{46}^* \\ \text{Sim.} & & & & c_{55}^* & c_{56}^* \\ & & & & & c_{66}^* \end{pmatrix}. \tag{A.13}$$

El tensor de deformación de componentes ε_{ij} es *cinemático* y se codifica bajo Voigt en el siguiente vector:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3^* \\ \varepsilon_4^* \\ \varepsilon_5^* \\ \varepsilon_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{A.14}$$

De esta manera, podemos escribir la ley de Hooke en términos de matrices y vectores:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^* \\ \sigma_2^* \\ \sigma_3^* \\ \sigma_4^* \\ \sigma_5^* \\ \sigma_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* & c_{14}^* & c_{15}^* & c_{16}^* \\ & c_{22}^* & c_{23}^* & c_{24}^* & c_{25}^* & c_{26}^* \\ & & c_{33}^* & c_{34}^* & c_{35}^* & c_{36}^* \\ & & & c_{44}^* & c_{45}^* & c_{46}^* \\ \text{Sim.} & & & & c_{55}^* & c_{56}^* \\ & & & & & c_{66}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3^* \\ \varepsilon_4^* \\ \varepsilon_5^* \\ \varepsilon_6^* \end{pmatrix}. \tag{A.15}$$

Los factores de 2 en las componentes no diagonales del tensor cinemático (A.14) se utilizan para que los valores de la energía potencial mecánica U_m sean los mismos, esté expresada en la notación Voigt o no:

$$U_m = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}c_{ij}^*\varepsilon_i^*\varepsilon_j^*. \quad (\text{A.16})$$

Como ejemplo final, consideremos el caso de un material con simetría transversal isótropa. Los tensores de rigidez y piezoelectrico tomarían las siguientes formas al combinar las notaciones de Hill y de Voigt:

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+m & k-m & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & k+m & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{223} & 0 & 0 \\ e_{311} & e_{311} & e_{333} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ q & q & r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Estas notaciones no solamente hacen más compactos los símbolos al prescindir de los índices sino que también facilitan los cálculos numéricos del producto e inversión de tensores que aparecen en la aplicación de métodos auto-consistentes [11, 88].

Apéndice B

Teoremas de Existencia y Unicidad

Consideremos el sistema de s ecuaciones en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que contiene exactamente una vez a la celda periódica Y :

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{f}_j(\mathbf{y}) + \mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l}(\mathbf{y}) \right) = \mathbf{f}_0(\mathbf{y}), \quad (\text{B.1})$$

donde las $\mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y})$, $j, l = 1, \dots, n$ son funciones que toman valores en las matrices reales $s \times s$. Las $\mathbf{f}_k(\mathbf{y})$, $k = 0, \dots, n$ son funciones vectoriales de n componentes reales. Tanto las componentes de las \mathbf{A}_{jl} como las componentes de las \mathbf{f}_k son funciones acotadas, medibles y Y -periódicas en \mathbf{y} .

En el suplemento de [22] se demuestra un teorema que justifica la existencia y unicidad de las soluciones generalizadas de (B.1), suponiendo que las matrices \mathbf{A}_{jl} satisfacen $\mathbf{A}_{jl} = \mathbf{A}_{lj}^t$ y la siguiente desigualdad:

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) \right\rangle \geq \varkappa \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \right) \right\rangle, \quad (\text{B.2})$$

para toda función vectorial $\mathbf{u} \in H_{\#}^1(\Omega)$ de n componentes y algún $\varkappa > 0$ real.

Algunos sistemas que aparecen en esta tesis como (2.35) y (2.48) satisfacen las hipótesis de este teorema y por tanto, la existencia y unicidad de sus soluciones está garantizada. Sin embargo, en este apéndice demostraremos un resultado similar relajando la hipótesis de simetría $\mathbf{A}_{jl} = \mathbf{A}_{lj}^t$ y suponiendo condiciones de contacto imperfecto para justificar la existencia y unicidad de otros problemas de interés para esta tesis.

Sea la superficie $\Gamma \subset Y$ de medida nula que define dos regiones abiertas y disjuntas Ω_I y Ω_{II} . La condición de contacto imperfecto en Γ es:

$$\left(\mathbf{f}_j(\mathbf{y}) + \mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l}(\mathbf{y}) \right) n_j = \mathbf{K}[\mathbf{u}], \quad (\text{B.3})$$

donde \mathbf{K} es una matriz de contacto imperfecto, semidefinida positiva y las n_j ($j = 1, \dots, n$) son las componentes del vector normal exterior a la superficie Γ . Para encontrar la formulación débil del problema con ecuación (B.1) y condición de contacto (B.3) utilizaremos funciones de prueba $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ donde:

$$H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma) = H_{\#}^1(\Omega_I) \cap H_{\#}^1(\Omega_{II}). \quad (\text{B.4})$$

Este espacio donde buscaremos las soluciones no se ha definido como un espacio de Sobolev directamente sobre Ω porque la derivada en el sentido débil de φ no existe en todo Ω por causa de los saltos finitos en Γ (véase el Capítulo 5 de [89]). En este caso el contraste debe entenderse en términos de los operadores traza T_I y T_{II} en los espacios $H_{\#}^1(\Omega_I)$ y $H_{\#}^1(\Omega_{II})$:

$$\llbracket \varphi \rrbracket|_{y \in \Gamma} = (T_{II}\varphi)|_{y \in \Gamma} - (T_I\varphi)|_{y \in \Gamma}. \quad (\text{B.5})$$

Teniendo en cuenta esto, multiplicamos (B.1) por la función de prueba $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$, integramos en las regiones definidas por Γ y aplicamos integración por partes:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\varphi, \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) \right) \\ &= \int_I \left(\varphi, \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) \right) + \int_{II} \left(\varphi, \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) \right) \\ &= \oint_{\Gamma} \left(\varphi^I, \left(\mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl}^I \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) n_j^I \right) - \int_I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) \\ &+ \oint_{\partial Y} \left(\varphi, \left(\mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) n_j \right) + \oint_{\Gamma} \left(\varphi^{II}, \left(\mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl}^{II} \frac{\partial \mathbf{u}^{II}}{\partial y_l} \right) n_j^{II} \right) \\ &- \int_{II} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde $\varphi^i = T_i\varphi$, $i = I, II$ y $\mathbf{u}^i = T_i\mathbf{u}$, $i = I, II$. Aquí tengamos en cuenta que:

$$\mathbf{f}_j + \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \quad (\text{B.7})$$

es una función Y -periódica, pero que el vector normal toma valores opuestos en signo en caras opuestas de Y . Por tanto, la integral de superficie en la frontera ∂Y de Y se anula. Si tenemos en cuenta el convenio de signos definido en (2.20) que relaciona el contraste con el vector normal, podemos llegar a la siguiente forma variacional de la ecuación (B.1) con contacto imperfecto:

$$- \oint_{\Gamma} (\llbracket \varphi \rrbracket, \mathbf{K} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) = \int_{\Omega} (\varphi, \mathbf{f}_0) + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \mathbf{f}_j \right). \quad (\text{B.8})$$

Llamaremos *solución generalizada* Y -periódica del sistema (B.1) bajo la condición de contacto imperfecto (B.3) a la función vectorial $\mathbf{u} \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ que satisface la ecuación (B.8) para cualquier $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$. El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la solución de (B.8):

Teorema 1 Sean las $\mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y})$, $j, l = 1, \dots, n$, funciones que toman valores en las matrices reales $s \times s$. Las $\mathbf{f}_k(\mathbf{y})$, $k = 0, \dots, n$ son funciones vectoriales de s componentes reales. Tanto las componentes de las \mathbf{A}_{jl} como las componentes de las \mathbf{f}_k son funciones acotadas, medibles y Y -periódicas en \mathbf{y} . Si se satisface la desigualdad:

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) \right\rangle \geq \varkappa \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \right) \right\rangle, \quad (\text{B.9})$$

para cierto $\varkappa > 0$ y cualquier $\mathbf{u} \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$, entonces existe \mathbf{u} que satisface (B.8) para cualquier $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ si y sólo si:

$$\langle \mathbf{f}_0 \rangle = 0. \quad (\text{B.10})$$

Esta solución es única hasta un vector constante arbitrario \mathbf{c} de s componentes. Es decir:

$$u(\mathbf{y}) = \mathbf{c} + \mathbf{u}_0(\mathbf{y}), \quad (\text{B.11})$$

donde $\mathbf{u}_0 \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ es la solución única de (B.8) que satisface $\langle \mathbf{u}_0(\mathbf{y}) \rangle = 0$.

Demostración: Para demostrar la necesidad, considérense las funciones constantes:

$$\varphi_r(\mathbf{y}) = (\delta_{1r}, \dots, \delta_{sr}), \quad r = 1, \dots, s. \quad (\text{B.12})$$

Si \mathbf{u} es una solución, al verificar la igualdad (B.8) para $\varphi = \varphi_r$, obtenemos que la r -ésima componente de $\langle \mathbf{f}_0 \rangle$ es necesariamente igual a cero. Esto demuestra la necesidad de la condición.

Ahora demostremos suficiencia. Primero, dejaremos a un lado la hipótesis de que $\langle \mathbf{f}_0 \rangle = 0$ y demostraremos que existe $\mathbf{u} \in H(\Omega) \cap H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ donde:

$$H(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) \mid \langle \mathbf{u} \rangle = 0\}, \quad (\text{B.13})$$

tal que se satisface la igualdad (B.8) para toda $\varphi \in H(\Omega) \cap H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$. Si $\mathbf{u} \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$, la desigualdad de Poincaré se cumple para cada componente de \mathbf{u} :

$$\langle u_i^2 \rangle \leq \langle u_i \rangle^2 + \frac{s}{2} \sum_k \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_k} \right)^2 \right\rangle, \quad i = 1, \dots, s. \quad (\text{B.14})$$

Sumando desde $i = 1, \dots, s$, en cada miembro de las desigualdades de arriba:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle \leq \|\langle \mathbf{u} \rangle\|^2 + \frac{n}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_k}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_k} \right) \right\rangle. \quad (\text{B.15})$$

Y si tenemos en cuenta que $\mathbf{u} \in H(\Omega)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle \leq \frac{n}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_k}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_k} \right) \right\rangle. \quad (\text{B.16})$$

De la desigualdad anterior y de la desigualdad (B.9) tenemos que:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{n}{2\kappa} \left\langle \left(\mathbf{A}_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \right) \right\rangle. \quad (\text{B.17})$$

Sea la norma en el espacio $H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_k \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_k} \right\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2, \quad (\text{B.18})$$

de las desigualdades (B.9) y (B.17), tenemos que:

$$\frac{2\kappa}{2+n} \|\mathbf{u}\|_{H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)}^2 \leq \left\langle \left(\mathbf{A}_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \right) \right\rangle, \quad (\text{B.19})$$

y, por ser \mathbf{K} semidefinida positiva:

$$\frac{2\kappa}{2+n} \|\mathbf{u}\|_{H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)}^2 \leq \left\langle \left(\mathbf{A}_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \right) \right\rangle + \oint_{\Gamma} ([\mathbf{u}], \mathbf{K}[\mathbf{u}]). \quad (\text{B.20})$$

Esto prueba que la forma bilineal:

$$B(\mathbf{u}, \varphi) = \left\langle \left(A_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) \right\rangle + \oint_{\Gamma} ([\varphi], \mathbf{K}[\mathbf{u}]), \quad (\text{B.21})$$

es coerciva. Además, por ser las funciones $\mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y})$ acotadas, $B(\mathbf{u}, \varphi)$ también lo es. El operador lineal:

$$L(\varphi) = - \int_{\Omega} (\varphi, \mathbf{f}_0) - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \mathbf{f}_j \right), \quad (\text{B.22})$$

es continuo y por el Teorema de Babuška-Lax-Milgram (ver [90]), existe $\mathbf{u} \in H(\Omega) \cap H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ tal que para toda $\varphi \in H(\Omega) \cap H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ se cumple la igualdad (B.8).

Ahora supongamos que $\langle \mathbf{f}_0 \rangle = 0$. Sea $\varphi = \Phi + \langle \varphi \rangle$, tenemos que:

$$\begin{aligned} - \langle (\mathbf{f}_0, \varphi) \rangle + \left\langle \left(\mathbf{f}_k, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \right) \right\rangle &= - \langle (\mathbf{f}_0, \langle \varphi \rangle) \rangle - \langle (\mathbf{f}_0, \Phi) \rangle + \left\langle \left(\mathbf{f}_k, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \right) \right\rangle \\ &= - \langle (\mathbf{f}_0, \langle \varphi \rangle) \rangle - \langle (\mathbf{f}_0, \Phi) \rangle + \left\langle \left(\mathbf{f}_k, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \right) \right\rangle \quad (\text{B.23}) \\ &= - \langle (\mathbf{f}_0, \Phi) \rangle + \left\langle \left(\mathbf{f}_k, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

y puesto que $\langle \Phi \rangle = 0$, existe \mathbf{u} que satisface (B.8) para toda $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$.

Ahora demostremos que la solución es única hasta un vector constante aditivo. Supongamos que existen dos soluciones \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 . Sea $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \rangle \in H(\Omega) \cap H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)$, que, según la suposición, no es la función nula, satisface (B.8) para $\mathbf{f}_k = 0$, $k = 0, \dots, n$. Luego:

$$0 = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C \|\mathbf{v}\|_{H_{\#}^1(\Omega \setminus \Gamma)}^2, \quad (\text{B.24})$$

de donde obtenemos que $\mathbf{v} = 0$. □

De manera totalmente análoga, se puede demostrar la existencia y unicidad de soluciones generalizadas del problema de frontera de un medio poroso. En este caso el sistema de ecuaciones (B.1) está definido en un abierto Ω que contiene exactamente una vez a la celda local. A su vez, esta contiene a un número finito de dominios cuya unión denotaremos por Π y tal que $\bar{\Pi} \subset Y$. Por una solución Y -periódica generalizada del sistema (B.1) con la condición de frontera libre en $\partial\Pi$:

$$\left(\mathbf{f}_j(\mathbf{y}) + \mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l}(\mathbf{y}) \right) n_j = 0, \quad (\text{B.25})$$

designaremos a la función vectorial $\mathbf{u} \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Pi)$ que satisface la siguiente identidad integral para cualquier $\varphi \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Pi)$:

$$- \int_{\Omega \setminus \Pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) = \int_{\Omega \setminus \Pi} (\varphi, \mathbf{f}_0) + \int_{\Omega \setminus \Pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}, \mathbf{f}_j \right). \quad (\text{B.26})$$

El siguiente teorema garantiza la existencia de tal solución generalizada:

Teorema 2 Sean las $\mathbf{A}_{jl}(\mathbf{y})$, $j, l = 1, \dots, n$, funciones definidas en $\Omega \setminus \Pi$, que toman valores en las matrices reales $s \times s$. Las $\mathbf{f}_k(\mathbf{y})$, $k = 0, \dots, n$ son funciones vectoriales de s componentes reales, definidas en $\Omega \setminus \Pi$. Tanto las componentes de las \mathbf{A}_{jl} como las componentes de las \mathbf{f}_k son funciones acotadas, medibles y Y -periódicas en \mathbf{y} . Si se satisface la desigualdad:

$$\int_{\Omega \setminus \Pi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \mathbf{A}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_l} \right) \geq \varkappa \int_{\Omega \setminus \Pi} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \right), \quad (\text{B.27})$$

para cierto $\varkappa > 0$ y cualquier $\mathbf{u} \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Pi)$, entonces existe \mathbf{u} que satisface (B.8) para cualquier $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:

$$\langle \mathbf{f}_0 \rangle = 0. \quad (\text{B.28})$$

Esta solución es única hasta un vector constante arbitrario \mathbf{c} de s componentes. Es decir:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{c} + \mathbf{u}_0(\mathbf{y}), \quad (\text{B.29})$$

donde $\mathbf{u}_0 \in H_{\#}^1(\Omega \setminus \Pi)$ es la solución única de (B.8) que satisface $\langle \mathbf{u}_0(\mathbf{y}) \rangle = 0$.

La demostración de este teorema es totalmente análoga a la del teorema anterior y por esa razón no se reproducirá aquí.

Apéndice C

Adimensionalización del problema local L_2^q

Las componentes de la permitividad dieléctrica efectiva como funciones de la fracción volumétrica del poro calculadas por MEF en el problema L_2^q mostraban un comportamiento absurdo. Este error se debe a la gran diferencia en órdenes de magnitud que existe entre los parámetros del problema escritos en unidades del SI sin prefijos: $10^{-8}\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$, para la permitividad dieléctrica; 10^{11}Pa , para la rigidez y 10^1Cm^{-2} , para los coeficientes piezoeléctricos. Para reducir estas grandes diferencias entre órdenes de magnitud, propusimos una adimensionalización (o reescalamiento) de los problemas, que se describirá a continuación para el caso particular del problema L_2^q .

La tilde $\tilde{\cdot}$ denota una propiedad física adimensionalizada. El subíndice 0 denota las constantes de adimensionalización. Sean los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{ijk} &= \frac{e_{ijk}}{e_0}, & \tilde{\kappa}_{ij}^\varepsilon &= \frac{\kappa_{ij}^\varepsilon}{\kappa_0}, & \tilde{c}_{ijkl} &= \frac{c_{ijkl}}{c_0}, \\ \tilde{g}_k^q &= \frac{g_k^q}{g_0}, & \tilde{y}_j &= \frac{y_j}{L_0}, & \tilde{\pi}^q &= \frac{\pi^q}{L_0}.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Si sustituimos estas definiciones en (4.12)₁ y dividimos por e_0 , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} \left(\tilde{e}_{qij} + \frac{c_0 g_0}{L_0 e_0} \tilde{c}_{ijkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{e}_{lij} \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right) = 0.\tag{C.2}$$

Sustituyendo (C.1) en (4.12)₂ y dividimos por κ_0 :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} \left(\tilde{\kappa}_{jq}^\varepsilon - \frac{e_0 g_0}{\kappa_0 L_0} \tilde{e}_{jkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{\kappa}_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right) = 0.\tag{C.3}$$

Nuestro objetivo es expresar las ecuaciones anteriores solo en términos de los coeficientes adimensionalizados, por eso tomaremos:

$$\frac{c_0 g_0}{L_0 e_0} = 1, \quad \frac{e_0 g_0}{\kappa_0 L_0} = 1,\tag{C.4}$$

con lo cual ambas ecuaciones quedan solamente en términos de las constantes con tildes. Despejando g_0 de la primera ecuación e introduciéndolo en la segunda obtenemos la siguiente relación entre las constantes c_0 , e_0 y κ_0 :

$$c_0 = \frac{e_0^2}{\kappa_0}.\tag{C.5}$$

El problema local adimensionalizado es simbólicamente igual a la formulación original:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} \left(\tilde{e}_{qij} + \tilde{c}_{ijkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{e}_{lij} \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} \left(\tilde{\kappa}_{jq}^\varepsilon - \tilde{e}_{jkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{\kappa}_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right) = 0, \\ \left(\tilde{e}_{qij} + \tilde{c}_{ijkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{e}_{lij} \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right) n_j = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \left(\tilde{\kappa}_{jq}^\varepsilon - \tilde{e}_{jkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{\kappa}_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right) n_j = 0, \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

con la única diferencia de que las constantes de adimensionalización están ligadas por la expresión (C.5), determinando cualquiera de ellas en términos de las otras dos. Los coeficientes efectivos se pueden calcular por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{qij} &= e_0 \left\langle \tilde{e}_{qij} + \tilde{c}_{ijkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{e}_{lij} \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right\rangle, \quad i = 1, 2, 3, \\ \hat{\kappa}_{jq} &= \kappa_0 \left\langle \tilde{\kappa}_{jq}^\varepsilon - \tilde{e}_{jkl} \frac{\partial \tilde{g}_k^q}{\partial \tilde{y}_l} + \tilde{\kappa}_{jl}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\pi}^q}{\partial \tilde{y}_l} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

La ligadura (C.5) hace que sea posible ajustar los órdenes de magnitud de las constantes involucradas en (C.6) de manera tal que haya menores diferencias entre ellos y por tanto, menos errores de punto flotante en los programas.

Bibliografía

- [1] R. E. Newnham, D. P. Skinner y L. E. Cross. “Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites”. En: *Materials Research Bulletin* 13 (5 1978), págs. 525-536. DOI: [https://doi.org/10.1016/0025-5408\(78\)90161-7](https://doi.org/10.1016/0025-5408(78)90161-7).
- [2] E. D. Krech, E. S. Cadel, R. M. Barret y E. A. Friis. “Effect of compliant layers within piezoelectric composites on power generation providing electrical stimulation in low frequency applications.” En: *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 88 (2018), págs. 340-345. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.08.027>.
- [3] C. W. Nan, M. I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland y G. Srinivasan. “Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions”. En: *Journal of Applied Physics* 103 (2008), pág. 031101. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2836410>.
- [4] D. A. Hadjiloizi, A. L. Kalamkarov, Ch. Metti y A. V. Georgiades. “Analysis of Smart Piezo-Magneto-Thermo-Elastic Composite and Reinforced Plates: Part II - Applications”. En: *Curved and Layered Structures* 1 (2014), págs. 32-58. DOI: <https://doi.org/10.2478/cls-2014-0003>.
- [5] D. Bhadra, Md. G. Masud, S. K. De y B. K. Chaudhuri. “Large magneto-electric effect and low-loss high relative permittivity in 0-3 CuO/PVDF composite films exhibiting unusual ferromagnetism at room temperature”. En: *Journal of Physics D: Applied Physics* 45 (2012), pág. 485002. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/48/485002>.
- [6] R. C. Kambale, D. Y. Jeong y J. Ryu. “Current Status of Magnetoelectric Composite Thin/Thick Films”. En: *Advances in Condensed Matter Physics* 2012 (2012), pág. 824643. DOI: <https://doi.org/10.1155/2012/824643>.
- [7] A. K. Batra, M. D. Aggarwal, M. E. Edwards y A. Bhalla. “Composites for Pyroelectric Infrared Detectors”. En: *Ferroelectrics* 366 (1 2010), págs. 84-121. DOI: <https://doi.org/10.1080/00150190802363207>.
- [8] E.K. Akdogan, M. Allahverdi y A. Safari. “Piezoelectric composites for sensor and actuator applications”. En: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 52 (5 2005), págs. 746-775. DOI: <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2005.1503962>.
- [9] R.. Landauer. “Electrical conductivity in inhomogeneous media”. En: *Proc Conf on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media (ETOPIM 1) 2 (AIP Conf Proc)*. 1978, págs. 2-46. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.31150>.

- [10] R. Hill. “Self-consistent mechanics of composite materials”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965), págs. 213 -222. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4).
- [11] S. K. Kanaun y V. Levin. *Self-Consistent Methods for Composites*. Solid Mechanics and its Applications. Springer, Dordrecht, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6664-1>.
- [12] R. Hill. “The elastic behaviour of a crystalline aggregate”. En: *Proceedings of the Physical Society. Section A* 51 (1952), págs. 349 -354. DOI: <https://doi.org/10.1088/0370-1298/65/5/307>.
- [13] Z. Hashin y S. Shtrikman. “A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1935), págs. 127-140. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
- [14] B. Paul. “Prediction of elastic constants of multiphase materials”. En: *Transactions of the Metallurgical Society of AIME* 218 (1960), págs. 36 -41. URL: <https://www.osti.gov/biblio/4273941>.
- [15] H. Moulinec y P. Suquet. “A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157 (1998), págs. 69-94. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00218-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00218-1).
- [16] E. Kröner. *Statistical Continuum Mechanics*. Springer, 1974.
- [17] C. Sidney-Burrus, M. Frigo, S. G. Johnson, M. Pueschel e I. Selesnick. *Fast Fourier Transforms*. Samurai Media Limited, 2018.
- [18] R. Brenner. “Computational approach for composite materials with coupled constitutive laws”. En: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 61 (5 oct. de 2010). DOI: [10.1007/s00033-009-0045-8](https://doi.org/10.1007/s00033-009-0045-8).
- [19] J. C. Michel, H. Moulinec y P. Suquet. “A Computational Method Based on Augmented Lagrangians and Fast Fourier Transforms for Composites with High Contrast”. En: *Computer Modeling in Engineering & Sciences* 1 (2 2000), págs. 79 -88.
- [20] A. H. Nayfeh. *Problems in Perturbation*. John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- [21] N. M. Krylov y N. N. Bogoliubov. *Introduction to Nonlinear Mechanics*. The Ukrainian SSR Academy of Sciences, 1937.
- [22] N.S. Bakhvalov y G. Panasenko. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*. London: Kluwer Academic, 1989.
- [23] E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1980. DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8>.
- [24] A. Bensoussan, J. L. Lions y G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978.
- [25] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev y G. A. Yosifian. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization, Volume 26*. North Holland, 1992.

- [26] J. B. Castillero, J. A. Otero, R. Ramos y A. Bourgeat. “Asymptotic homogenization of laminated piezocomposite materials”. En: *International Journal of Solids and Structures* 35 (56 1998), págs. 527-541. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00028-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00028-0).
- [27] B. E. Pobedrya. *Mecánica de Materiales Compuestos*. en ruso. Universidad Estatal de Moscú, 1984.
- [28] S. A. Meguid y A. L. Kalamkarov. “Asymptotic Homogenization of Elastic Composite Materials with a Regular Structure”. En: *International Journal of Solids and Structures* 31 (3 1994), págs. 303 -316. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)90108-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)90108-2).
- [29] R. Rodríguez-Ramos, F. J. Sabina, R. Guinovart-Díaz y J. Bravo-Castillero. “Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents-I. Elastic and square symmetry”. En: *Mechanics of Materials* 33 (2001), págs. 223-235. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(00\)00059-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(00)00059-4).
- [30] J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, F. J. Sabina y R. Rodríguez-Ramos. “Closed- form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with trans- versely isotropic constituents-II. Piezoelectric and square symmetry”. En: *Mechanics of Materials* 33 (2001), págs. 237-248. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(00\)00060-0](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(00)00060-0).
- [31] R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos y F. J. Sabina. “Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (7 2001), págs. 1445 -1462. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00005-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00005-9).
- [32] F. J. Sabina, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero y R. Guinovart-Díaz. “Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. II: Piezoelectric and hexagonal symmetry”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (7 2001), págs. 1463 -1479. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00006-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00006-0).
- [33] L. M. Sixto-Camacho, J. Bravo-Castillero, R. Brenner, R. Guinovart-Díaz, H. Mechkour, R. Rodríguez-Ramos y F. J. Sabina. “Asymptotic homogenization of periodic thermo-magneto-electro-elastic heterogeneous media”. En: *Computers and Mathematics with Applications* 66 (2013), págs. 2056-2074. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.08.027>.
- [34] J. Bravo-Castillero, L. M. Sixto-Camacho, R. Brenner, R. Guinovart-Díaz, L. D. Pérez-Fernández, R. Rodríguez-Ramos y F. J. Sabina. “Temperature-related effective properties and exact relations for thermo-magneto-electro-elastic fibrous composites”. En: *Computers and Mathematics with Applications* 69 (2015), págs. 980-996. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.03.005>.
- [35] C. A. Gandarilla-Pérez, R. Rodríguez-Ramos, I. Sevostianov, F. J. Sabina, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz y L. Lau-Alfonso. “Extension of Maxwell homogenization scheme for piezoelectriccomposites containing spheroidal inhomogeneities”. En: *International Journal of Solids and Structures* 135 (2018), págs. 125 -136. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.11.015>.

- [36] A. Kalamkarov. “Asymptotic homogenization method and micromechanical models for composite materials and thin-walled composite structures”. En: *Mathematical Methods and Models in Composites*. Ed. por V. Mantič. World Scientific, 2013. Cap. 1, págs. 1-60.
- [37] A. L. A.L.Kalamkarov, A. V. Georgiades, S. K. Rokkam, V. P. Veedu y M. N. Ghasemi-Nejhad. “Analytical and numerical techniques to predict carbon nanotubes properties”. En: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), págs. 6832-6854. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.009>.
- [38] C.P. da Costa, L.D. Pérez-Fernández y J. Bravo-Castillero. “Pollutant Dispersion Modeling via Mathematical Homogenization and Integral Transform-Based Multilayer Methods”. En: *Towards Mathematics, Computers and Environment: A Disasters Perspective*. Ed. por L. Bacelar-Lima-Santos, R. Galante-Negri y T. de Carvalho. New York: Springer, Cham, 2019. Cap. 4, págs. 59-82. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21205-6_4.
- [39] A. Galka, J. J. Telega y S. Tokarzewski. “Application of homogenization to evaluation of effective moduli of linear elastic trabecular bone with plate-like structure”. En: *Archives of Mechanics* 51 (1999), págs. 335 -355. URL: <https://am.ippt.pan.pl/am/article/viewFile/v51p335/653>.
- [40] E. Iglesias-Rodríguez, J. Bravo-Castillero, M. E. C. Cruz, L. D. Pérez-Fernández y F. J. Sabina. “Reiterated homogenization applied to nanofluids with an interfacial thermal resistance”. En: *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 18 (2020), págs. 361 -384. DOI: <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2020031351>.
- [41] Z. Hashin. “The interphase/imperfect interphase in elasticity with application to coated fiber composites”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002), págs. 2509-2537. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00050-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00050-9).
- [42] R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. C. López-Realpozo, J. Bravo-Castillero, J. A. Otero, F. J. Sabina, H. Berger, M. Würkner y U. Gabbert. “Micromechanical analysis of fibrous piezoelectric composites with imperfectly bonded adherence”. En: *Archive of Applied Mathematics* 84 (2014), págs. 1565-1582. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0856-8>.
- [43] I. V. Andrianov, V. I. Bolshakov, V. V. Danishevskyy y D. Weichert. “Extension of Maxwell homogenization scheme for piezoelectric composites containing spheroidal inhomogeneities”. En: *Proceedings of the Royal Society A* 466 (2010), págs. 2707 -2725. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0052>.
- [44] T. Miloh e Y. Benveniste. “On the Effective Conductivity of Composites with Ellipsoidal Inhomogeneities and Highly Conducting Interfaces”. En: *Proceedings of the Royal Society A* 455 (1999), págs. 2687 -2706. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0422>.
- [45] H. M. Shodja, S. M. Tabatabaei y M. T. Kamali. “A piezoelectric medium containing a cylindrical inhomogeneity: Role of electric capacitors and mechanical imperfections”. En: *International Journal of Solids and Structures* 44 (20 2007), págs. 6361 -6381. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.02.029>.

- [46] Y. Zhang, M. Xie, J. Roscow, Y. Bao, K. Zhou, D. Zhang y C. R. Bowen. “Enhanced pyroelectric and piezoelectric properties of PZT with aligned porosity for energy harvesting applications”. En: *Journal of Materials Chemistry A* 5 (2017), págs. 6569-6580. DOI: <https://doi.org/10.1039/c7ta00967d>.
- [47] Y. Benveniste. “Exact results in the micromechanics of fibrous piezoelectric composites exhibiting pyroelectricity”. En: *Proceeding of the Royal Society A* 441 (1911 1993), págs. 59 -81. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0048>.
- [48] Y. Benveniste. “Magnetolectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases”. En: *Physical Review B* 51 (1995), págs. 16424 -16427. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.16424>.
- [49] I. S. Sokolnikoff. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1956.
- [50] H. Berger, S. Kari, U. Gabbert, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart, J. A. Otero y J. Bravo-Castillero. “An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites”. En: *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), 5692–5714. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.03.016>.
- [51] H. Berger, S. Kari, U. Gabbert, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, F. J. Sabina y G. A. Maugin. “Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties”. En: *Smart Materials and Structures* 15 (2006), págs. 451-458. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/15/2/026>.
- [52] R. de Medeiros, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, J. A. Otero y V. Tita. “Numerical and analytical analyses for active fiber composite piezoelectric composite materials”. En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 26 (1 2014), págs. 101-118. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X14521881>.
- [53] R. Guinovart-Díaz, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, F. J. Sabina, J. A. Otero-Hernández y G. A. Maugin. “A recursive asymptotic homogenization scheme for multi-phase fibrous elastic composites”. En: *Mechanics of Materials* 37 (2005), págs. 1119 -1131. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.02.003>.
- [54] J. A. Otero, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, R. Rodríguez-Ramos y G. A. Maugin. “Analytical expressions of effective constants for a piezoelectric composite reinforced with square cross-section fibers”. En: *Archives of Mechanics* 55 (2003), págs. 357 -371. URL: <https://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v55p357>.
- [55] R. O. Caballero-Pérez, J. Bravo-Castillero y L. D. Pérez-Fernández. “A simple scheme for calculating the energy harvesting figures of merit of porous ceramics”. En: *Energy Harvesting and Systems* 7 (1 2020), págs. 25-32. DOI: <https://doi.org/10.1515/ehs-2021-0001>.
- [56] G. P. Panasenko. “Homogenization for Periodic Media: from Microscale to Macroscale”. En: *Physics of Atomic Nuclei* 71 (4 2008), págs. 681-694. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106377880804008X>.

- [57] R. M. Christensen. *Mechanics of Composite Materials*. Dover Publications, 2005.
- [58] Morton E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Ed. por R. Bellman. Vol. 158. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, 1981.
- [59] X. Wang. “Derivation of the Maxwell’s Equations Based on a Continuum Mechanical Model of Vacuum and a Singularity Model of Electric Charges”. En: *arXiv e-prints*, physics/0609027 (2006), physics/0609027. arXiv: physics/0609027 [physics.gen-ph].
- [60] J. H. Lienhard IV y J. H. Lienhard V. *A Heat Transfer Textbook*. J. H. Lienhard V, Cambridge, Massachussets, 2001.
- [61] L. D. Pérez-Fernández, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos y F. J. Sabina. “On the constitutive relations and energy potentials of linear thermo-magneto-electro-elasticity”. En: *Mechanics Research Communications* 36 (2009), págs. 343-350. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.10.003>.
- [62] Z. Hashin. “Composite Materials with Interphase: Thermoelastic and Inelastic Effects”. En: *Inelastic Deformation of Composite Materials*. Ed. por G. J. Dvorak. New York: Springer, 1991. Cap. 1, págs. 3-34.
- [63] A. Galka, J. J. Telega y R. Wojnar. “Homogenization and thermopiezoelectricity”. En: *Mechanics Research Communications* 19 (4 1992), págs. 315-324. DOI: [https://doi.org/10.1016/0093-6413\(92\)90050-K](https://doi.org/10.1016/0093-6413(92)90050-K).
- [64] J. C. López-Realpozo, R. O. Caballero-Pérez, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, H. Camacho-Montes, Y. Espinosa-Almeyda, F. J. Sabina y Chi-Vinh P. “Analysis of mechanical and electrical imperfect contacts in piezoelectric composites”. En: *Mechanics Research Communications* 93 (2018), págs. 96-102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2017.11.001>.
- [65] R. O. Caballero-Pérez, J. Bravo-Castillero, L. D. Pérez-Fernández, R. Rodríguez-Ramos y F. J. Sabina. “Homogenization of thermo-magneto-electro-elastic multilaminated composites with imperfect contact”. En: *Mechanics Research Communications* 97 (2019), págs. 16-21. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2019.04.005>.
- [66] J. Lee, J. G. Boyd y D. C. Lagoudas. “Effective properties of three-phase electro-magneto-elastic composites”. En: *International Journal of Engineering Science* 43 (10 2005), págs. 790 -825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2005.01.004>.
- [67] Y. Ootao e Y. Tanigawa. “Transient analysis of multilayered magneto-electro-thermoelastic strip due to nonuniform heat supply”. En: *Composite structures* 68 (4 2005), págs. 471 -480. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.04.013>.
- [68] J. Bravo-Castillero, R. Rodriguez-Ramos, H. Mechkour, J.A. Otero y F. J. Sabina. “Homogenization of magneto-electro-elastic multilaminated materials”. En: *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 61 (2008), págs. 311-332. DOI: <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbn010>.

- [69] R. O. Caballero-Pérez, J. Bravo-Castillero, L. D. Pérez-Fernández, R. Rodríguez-Ramos y F. J. Sabina. “Computation of effective thermo-piezoelectric properties of porous ceramics via asymptotic homogenization and finite element methods for energy-harvesting applications”. En: *Archive of Applied Mechanics* 90 (2020), págs. 1415-1429. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01675-6>.
- [70] D. B. Deutz, J. A. Pascoe, B. Schelen, S. van der Zwaag, D. M. de Leeuwa y P. Groen. “Analysis and experimental validation of the figure of merit for piezoelectric energy harvesters”. En: *Materials Horizons* 5 (3 2018), págs. 444-453. DOI: <https://doi.org/10.1039/C8MH00097B>.
- [71] R. Xu y S.G. Kim. “Figures of merits of piezoelectric materials in energy harvesters”. En: *Proceedings of PowerMEMS 2012*. Dic. de 2012, págs. 464-467.
- [72] C. R. Bowen, J. Taylor, E. Le Boulbar, D. Zabeka y V. Yu. Topolov. “A modified figure of merit for pyroelectric energy harvesting”. En: *Materials Letters* 138 (2015), págs. 243-246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2014.10.004>.
- [73] Y. Saad y M. H. Schultz. “GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems”. En: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 7 (1986), págs. 856-869. DOI: <https://doi.org/10.1137/0907058>.
- [74] F. Hecht. “New development in freefem++”. En: *Journal of Numerical Mathematics* 20 (2012), págs. 251-265. DOI: <https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013>.
- [75] F. Boyer y S. Martin. “Introduction to the finite element method”. En: *Ciencias Matemáticas* 30 (1 2016), págs. 1-84.
- [76] G. J. Dvorak. “On uniform fields in heterogeneous media”. En: *Proceedings of the Royal Society A* 431 (1881 1990), págs. 89-110. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1990.0120>.
- [77] Graeme W. Milton. *The Theory of Composites*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2002. DOI: [10.1017/CB09780511613357](https://doi.org/10.1017/CB09780511613357).
- [78] R. Hill. “Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behaviour”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 12 (4 1964), págs. 199-212. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(64\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(64)90019-5).
- [79] K. Schulgasser. “Relationships between the effective properties of transversely isotropic piezoelectric composites”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40 (2 1992), págs. 473-479. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(05\)80022-5](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(05)80022-5).
- [80] V. M. Levin. “On the Coefficients of Thermal Expansion of Heterogeneous Materials”. En: *Mecánica de Sólidos* 2 (1967). en ruso, págs. 58-61.

- [81] V. Y. Topolov, C. R. Bowen y P. Bisegna. *Piezo-Active Composites. Microgeometry-Sensitivity Relations*. Ed. por R. Hull, C. Jagadish, Y. Kawazoe, R. M. Osgood, J. Parisi, U. W. Pohl, T. Seong, S. Uchida y Z. M. Wang. Vol. 271. Springer Series in Materials Science. Springer International Publishing, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-93928-5>.
- [82] G. Sebald, L. Seveyrat, D. Guyomar, L. Lebrun, B. Guiffard y S. Pruvost. “Electrocaloric and pyroelectric properties of $0.75\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3 - 0.25\text{PbTiO}_3$ single crystals”. En: *Journal of Applied Physics* 100 (2006), pág. 124112. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2407271>.
- [83] G. Sebald, E. Lefeuvre y D. Guyomar. “Pyroelectric Energy Conversion: Optimization Principles”. En: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 55 (2008), págs. 538-551. DOI: <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2008.680>.
- [84] D. A. Berlincourt, D. R. Curran y H. Jaffe. “Piezoelectric and Piezomagnetical Materials and Their Function in Transducers”. En: *Physical Acoustics*. Ed. por W. P. Mason. New York: Academic Press, 1964, págs. 169-270.
- [85] W. Parnell. “The Eshelby, Hill, Moment and Concentration Tensors for Ellipsoidal Inhomogeneities in the Newtonian Potential Problem and Linear Elastostatics”. En: *Journal of Elasticity* 125 (2016), págs. 231-294.
- [86] H. Camacho-Montes, R. Rodríguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz y F. J. Sabina. “Analytical formulas for complex permittivity of periodic composites. Estimation of gain and loss enhancement in active and passive composites”. En: *Integrated Ferroelectrics* 83 (2006), págs. 49-65. DOI: <https://doi.org/10.1080/10584580600949071>.
- [87] T. Belytschko, W. K. Liu y B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley y Sons, 2000.
- [88] V. M. Levin, F. J. Sabina, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, R. Rodríguez-Ramos y O. C. Valdiviezo-Mijangos. “Analysis of effective properties of electroelastic composites using the self-consistent and asymptotic homogenization methods”. En: *International Journal of Engineering Science* 46 (2008), págs. 818-834. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.01.017>.
- [89] L. C. Evans. *Partial Differential Equations: Second Edition*. Graduate Series in Mathematics. American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3.
- [90] I. Babuška. “Error-Bounds for Finite Element Method”. En: *Numerische Mathematik* 16 (4 1971), págs. 322-333. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf02165003>.