UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRÍA PARA PROFESORES DE BACHILLERATO (geometría euclidiana y trigonometría)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

OLLINTZIN QUEIROS ROMERO

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Ciudad Universitaria, CDMX **2020**

Agradecimientos

Mi eterno agradecimiento a mi asesor de tesis, M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez, que con su gran apoyo, paciencia y dedicación logré terminar mi tesis.

Gracias a todos lo que han estado, de una forma u otra, apoyándome a concluirla. Les debo mucho.

En especial a Nayeli Camacho, que nunca me dejó flaquear, siempre estuvo conmigo en las buenas y en las malas. Fuiste un Pilar para mí.

GRACIAS

Resumen

La presente tesis es el resultado del proyecto de crear una Maestría en Línea para profesores de matemáticas de Bachillerato, la cual se impartiría en todos los estados de la República Mexicana, a excepción de la Ciudad de México. Dicho proyecto fue dirigido por mi tutor M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez, y junto con algunos compañeros nos reunimos a trabajar y a enfocarnos en el área de geometría para la maestría. En mi caso, trabajé con geometría euclidiana y trigonometría.

La tesis está encaminada en la elaboración de guiones para la creación de cápsulas de video, de un tiempo aproximado de 5 a 7 minutos, con contenido geométrico. También se generó un contenido de tareas, cuyo propósito es fortalecer lo que se aborda en las cápsulas. En algunas de estas tareas se incluyeron "Contenidos de apoyo" para que los profesores se auxilien para resolver los ejercicios. Después de cada tarea viene el solucionario.

La tesis está organizada de la siguiente forma:

- Módulo 1: Lógica
  Se da una explicación del contenido que se aborda en este módulo, para que de esta forma se tenga una mejor comprensión del por qué se trabajó con una secuencia didáctica en el módulo 2.

- Módulo 2: Geometría Euclidiana (1 de 2)
  Se trabaja con cuatro cápsulas para video y tres tareas. En esta parte se trabaja con los criterios de congruencia y de semejanza, junto con algunos problemas topográficos, para incentivar el uso de estos criterios en situaciones que pueden ocurrir.

- Módulo 2: Geometría Euclidiana (2 de 2)
  Se da una explicación breve del contenido elaborado del teorema de Pitágoras.

- Módulo 3: Trigonometría
  Se trabaja con seis cápsulas y tres tareas. Se explica qué son las razones trigonométricas y cómo estas se extienden a grados mayores a 90°. Posteriormente se demuestran varias identidades trigonométricas y se finaliza demostrando las leyes de senos y cosenos.

Es necesario mencionar que, tanto el módulo 1 de lógica y el módulo 2 (parte 2) de geometría euclidiana, son parte del trabajo complementario del contenido geométrico de la maestría y que en esta tesis no se trabajó, por lo que sólo daré una explicación breve de lo que trata cada uno.

Índice

Agradecimientos....3
Resumen....4
Introducción....7
Módulo 1. Lógica....10
Módulo 2. Geometría euclidiana (criterios de congruencia y semejanza)....11

Guion de la cápsula 1 (Problemas geométricos)....11

Tarea 1....17

Solucionario....22

Guion de la cápsula 2 (Congruencia)....26

Tarea 2....37

Solucionario....44

Guion de la cápsula 3 (Propiedades para la semejanza de triángulos)....48

Guion de la cápsula 4 (Semejanza)....55

Tarea 3....61

Solucionario....65

Explicación general de las cápsulas relacionadas con el teorema de Pitágoras....68
Módulo 3. Trigonometría....69

Guion de la cápsula 1 (Razones trigonométricas)....70

Guion de la cápsula 2 (Generalización de las razones trigonométricas)....76

Tarea 1....84

Solucionario....87

Guion de la cápsula 3 (Identidades trigonométricas; el seno y el coseno de la suma de dos ángulos)....90

Guion de la cápsula 4 (Identidades trigonométricas; el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos)....98

Guion de la cápsula 5 (Más identidades trigonométricas)....106

Guion de la cápsula 6 (Última identidad trigonométrica) ... 113

Tarea 2 ... 118

Solucionario ... 121

Guion de la cápsula 7 (Ley de senos y cosenos) ... 123

Tarea 3 ... 130

Solucionario ... 135

Conclusión ... 137

Bibliografía ... 138

Introducción

La mayoría de los profesores que dan clases de matemáticas, en bachillerato, son personas que tienen una carrera afín a las matemáticas, como ingenieros, economistas, etcétera. Esto trae consigo un problema en la enseñanza de esta materia, que es la forma en cómo se abordan los contenidos, esta puede ser desde muy rigurosa hasta nada didáctica, ocasionando que los alumnos no puedan asimilar los temas que ven, generando un descontento o desánimo de aprender esta materia. También ocurre que, en algunos casos, en las carreras de los profesores no se estudian todos los temas que se enseñan en bachillerato, como los criterios de congruencia y semejanza, haciendo que en su clase, se les complique expresarse de forma clara. Por la necesidad de que los profesores tengan un mejor manejo de los contenidos matemáticos que imparten, se decidió crear una maestría en línea para ayudarlos, y enseñarles un enfoque teórico del aprendizaje en las Matemáticas. La finalidad de lo anterior es que los profesores, al dar sus clases, tengan una mejor comprensión de los temas y puedan desarrollar una estrategia didáctica, para que sus alumnos asimilen mejor los contenidos que están viendo y no sólo aprendan una fórmula, sin saber de dónde viene.

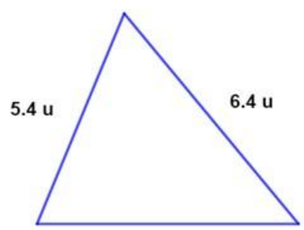
Hay que señalar que la maestría en línea, está conformada por dos partes; los contenidos digitales que son los que se abordan en la tesis y el contenido dado por cada asesor de la maestría en las respectivas universidades donde se imparta.

Es importante indicar que se dio una propuesta didáctica, de cómo y en qué momentos abordar los contenidos geométricos, y que la maestría no se hizo con la finalidad de crear matemáticos, sino de enriquecer el contenido matemático de los profesores de bachillerato para que tengan un acercamiento heurístico con la geometría. Para mi tesis y con el apoyo de mi tutor M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez, me enfoqué en criterios de semejanza y congruencia y razones e identidades trigonométricas. El contenido que generé se clasifica en:

- **Guiones para cápsulas:** puesto que la maestría será en línea, se requiere generar contenidos visuales, para que los profesores se apoyen de ellos y así puedan resolver las actividades que se dan en cada módulo. Los guiones para cápsulas están diseñados para que las personas que van a desarrollar los videos tengan la información que se abordará en cada cápsula. En estos guiones también aparecen sugerencias para la adaptación del guion a video, como se muestra a continuación:

Sugerencias técnicas de adaptación a video

Título de la cápsula

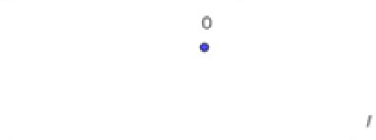
	Congruencia
<En pantalla, entra persona y lee lo que aparece en los dos primeros párrafos.>	En la cápsula anterior se trabajó con problemas topográficos en donde no se podía conocer, en primera instancia, la distancia entre los dos puntos dados, y por ello se trazó un triángulo, con otro punto que se escogió, y se le aplicó un teorema, o una ley o una regla que permitiera conocer la medida buscada. Dado que la resolución de los problemas se basó en la construcción de un triángulo, sería conveniente saber cuáles son la mínima cantidad de datos, que se deben conocer del triángulo, para poder construirlo y que a su vez garantice que, si se construye otro triángulo con las mismas mínimas medidas, ambos serán congruentes.
<Al momento en que la persona dice "la siguiente condición", en pantalla y en la parte superior, debe aparecer todo el enunciando, "bastará con saber las medidas de dos de los lados de un triángulo para garantizar que al construir otro triángulo, ambos sean congruentes". Finalmente, debe aparecer en pantalla el triángulo azul con todos sus datos.>	Por ejemplo, analicemos la siguiente condición; ¿bastará con saber las medidas de dos de los lados de un triángulo para garantizar que al construir otro triángulo, ambos sean congruentes? Tomemos el siguiente triángulo: 

Contenido a trabajar durante la cápsula

Está escrito para que una persona o una voz vaya leyendo la información, mientras en pantalla van apareciendo las imágenes.

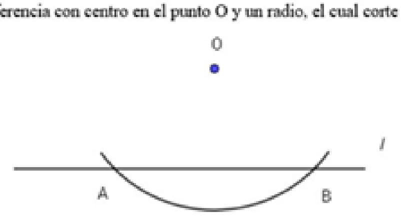
- **Tareas:** es un compendio de actividades que se dan al final de ciertas cápsulas. Algunas de ellas empiezan con un "Contenido de apoyo" para que los profesores se auxilien y resuelvan los ejercicios que vienen en este apartado. Cabe señalar que este compendio de ejercicios sólo es un pequeño aporte en las actividades que debe realizar el profesor, ya que su asesor dará las tareas que sean necesarias durante cada una de las cápsulas.

¿ Cómo se puede trazar la perpendicular a una recta *l* desde un punto O fuera de ella ?



Construcción:

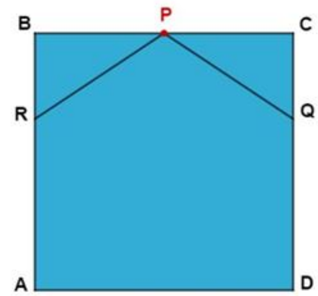
1. Trazamos la circunferencia con centro en el punto O y un radio, el cual corte a la línea *l* en dos puntos.



Contenido de apoyo

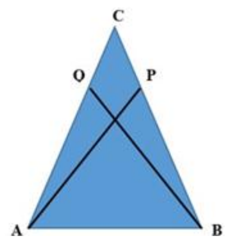
Ejercicios de la tarea

Ejercicio: En el cuadrado $ABCD$, el punto P es el punto medio de BC,



PQ y PR se han trazado de modo que $\measuredangle QPC = 30°$, $\measuredangle RPQ = 120°$. Demuestre que $PQ = PR$

Ejercicio: En el triángulo ABC, $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA$ y $\measuredangle BAP = \measuredangle ABQ$. Demuestre que $AP = BQ$



Vale mencionar que mi tesis, comprende una parte de los módulos de geometría que se darán durante la maestría, por ello es necesario explicar, de forma general, el material que hizo mi compañera Nayeli Camacho Olvera, ya que su material y el que aparece en mi tesis, están articulados. De esta manera se tendrá una mejor comprensión del por qué se trabajó bajo esta propuesta didáctica. Insisto, sólo daré una explicación de lo que hizo mi compañera. Su trabajo está organizado de la siguiente forma:

- Módulo 1: Lógica
- Módulo 2: Geometría euclidiana (Teorema de Pitágoras)

Módulo 1. Lógica

Se da un resumen ya que en su totalidad está desarrollado en la tesis de Nayeli Camacho Olvera

- **Guion de la cápsula 1**: se centra en que los profesores reconozcan la importancia de la demostración matemática. Para ello se enfoca en lo que significa "saber" en la ciencia y cómo la construcción del conocimiento, en las ciencias, no se hace de la misma forma. Otro objetivo de la cápsula es presentar la importancia de la intuición, la imaginación y la observación en la construcción de conocimiento en las matemáticas.

- **Guion de la cápsula 2**: se da una introducción a los conceptos básicos del lenguaje de la lógica matemática, así como una definición de la lógica como disciplina. Posteriormente se da un criterio para identificar las proposiciones matemáticas. Se prosigue con la definición de conectores lógicos y cómo se pueden formar proposiciones utilizándolos. En esta cápsula se revisan los conectores lógicos "y", "o" y "no es cierto que".

- **Guion de la cápsula 3**: se trabaja con los conectores lógicos "si …, entonces" y "si y sólo sí". Se propone al profesor que piense en la proposición compuesta de tipo condicional como una *promesa*, para después analizar los cuatro casos posibles de la tabla de verdad. Se prosigue con la definición del bicondicional definiendo el recíproco del condicional. Se cierra indicando que, en la práctica matemática, si un bicondicional es verdadero, esto se puede interpretar como que las proposiciones que lo conforman son equivalentes.

- **Tarea 1**: se da un recordatorio de la definición de proposición. Posteriormente se dan ejercicios de identificación de proposiciones, si son verdaderas o falsas y generación de proposiciones equivalentes, con la negación en los conectores lógicos.

- **Guion de la cápsula 4**: se abordan los cuantificadores "para todo ∀" y "existe ∃". Se hace un paréntesis para que los profesores diferencien las letras proposicionales de los cuantificadores. Se dan dos ejemplos concretos de proposiciones de la geometría que utilizan cuantificadores. Posteriormente se analiza cómo opera la negación en los cuantificadores y se da un esquema para simplificar esta relación de la negación con los cuantificadores.

- **Tarea 2**: se da un recordatorio de los cuantificadores, "para todo" y "existe" y un ejercicio para determinar si las proposiciones, con cuantificadores, son verdaderas o no, sobre un conjunto de números. Posteriormente aparecen ejercicios en la identificación de proposiciones equivalentes, con cuantificadores. En otro ejercicio se pide proponer una situación en donde se realizan ciertos esquemas que cumplan una relación entre los valores de verdad, de proposiciones con cuantificadores. Finalmente se pide reescribir proposiciones usando los cuantificadores.

- **Guion de la cápsula 5**: tiene dos objetivos, el principal es que el alumno reconozca el razonamiento deductivo a través de ejemplos y el segundo es presentar al alumno el doble carácter de la práctica matemática: el intuitivo y el formal. La cápsula lleva a los profesores a una reflexión de la importancia del dominio de las herramientas que proporciona la lógica. Finalmente se aclara que el método axiomático es solo una cara de la práctica matemática y se le presenta como organizador o como sistematización lógica y conceptual de la teoría.

Módulo 2. Geometría euclidiana (criterios de congruencia y semejanza)

Este módulo tiene el propósito de enriquecer el conocimiento geométrico de los profesores de bachillerato y ver los temas no desde la forma tradicional de trabajar el contenido, sino más bien trabajarlo desde la necesidad de resolver situaciones topográficas. Con esto se apoya el por qué son útiles y necesarios los criterios de congruencia y de semejanza.

Si el profesor lo ve pertinente, puede trabajar el contenido de este módulo con sus estudiantes y con ello adentrarlos más a la forma en que se trabaja en las matemáticas, que es con base en demostraciones.

En este módulo se trabajará con los temas de congruencia y semejanza de triángulos junto con el Teorema de Pitágoras.

En primera instancia, se abordará la necesidad de usar los criterios de congruencia y de semejanza en problemas topográficos, como es medir la distancia entre dos puntos, si en medio de ellos hay un obstáculo para medir. Y después se analizarán cada uno de dichos criterios. En segunda instancia, se abordará el Teorema de Pitágoras dando varias demostraciones, que han sido famosas a lo largo de la historia.

Guion de la cápsula 1 (Problemas geométricos)

Descripción

En está cápsula, se aborda la geometría como una necesidad para poder resolver problemas topográficos. Para ello, se hizo una recreación de una práctica docente, donde el profesor de matemáticas pide a sus alumnos resolver problemas topográficos con el conocimiento que cada uno tiene, y con las herramientas que pide el problema que son: cuerdas, estacas, clavos, teodolito[1], etc.

Posteriormente uno de los alumnos le dice al profesor que usando el Teorema de Pitágoras se puede obtener la distancia entre los dos puntos. A continuación el profesor da otro problema topográfico, en el cual no se puede usar dicho teorema.

Se tomó esa decisión para poder restringir al profesor a que no pueda usar los teoremas o leyes, que por su formación, más ligada a la ingeniería, usaría para resolver el problema. Esto con el fin de que use los criterios de congruencia o de semejanza para encontrar la solución.

La cápsula termina sin resolver el último problema, para que el público trate de buscar una forma de resolverlo. Esta postura es debido a que, los temas de congruencia y semejanza no se abordan en otras carreras fuera de la de matemáticas, como ingeniería, pues se puede recurrir a la trigonometría o al teorema de Pitágoras, por lo que el objetivo de la cápsula es orillar, a través de restricciones en los problemas en utilizar la congruencia y la semejanza, y así rescatar su importancia.

[1] Instrumento que se compone de un círculo horizontal y un semicírculo vertical, ambos graduados y provistos de anteojos, para medir ángulos en sus planos respectivos.

Guion de la cápsula 1

Sugerencias técnicas de adaptación a video.

Problemas geométricos

<En pantalla, debe aparecer un escenario de un salón de clases. El profesor estará a espaldas al pizarrón, y leerá los primeros siete párrafos.>

<Mientras el profesor habla, en pantalla habrá animaciones de las cosas que va mencionando.>

En el principio de las civilizaciones antiguas, la geometría era una serie de conocimientos prácticos, los cuales se usaban para medir, construir edificios y canales, distribución del terreno, además de la contabilidad, el cálculo de impuesto, el reparto de herencias, etc.

Por ejemplo, para los Babilonios era importante construir canales y saberlos mantener, ya que los usaban tanto en el riego como en el transporte de mercancías y ejércitos.

En cambio para los Egipcios era de suma importancia tener métodos para saber medir terrenos, ya que (según los historiadores griegos[2]) cada año el río Nilo se desbordaba y los agricultores asentados en la cercanía del río perdían sus tierras y cuando el río regresaba a su cauce normal, ya no había forma de distinguir los terrenos de cada agricultor.

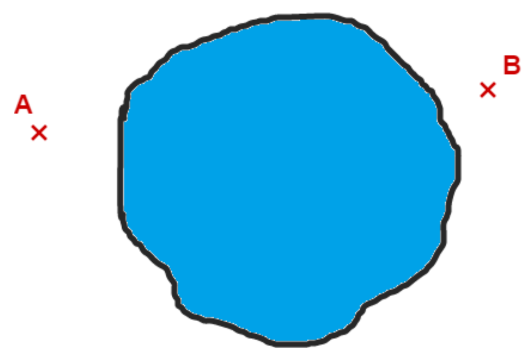
Fue hasta el siglo V y en la cultura Griega en que las matemáticas, en particular la geometría se formalizan a partir de ciertos enunciados base (axiomas) y por medio de demostraciones.

Tomando la forma en que se fue desarrollando las matemáticas, pensemos entonces a la geometría no desde la enseñanza tradicional, sino desde la aplicación en situaciones en que las personas pueden encontrarse.

Tomemos como ejemplo el siguiente problema:

<Cuando el profesor vaya leyendo el enunciado, en el pizarrón aparecerá la construcción. >

Imaginemos que están en un terreno donde hay un lago y dos árboles A y B situados cerca de la orilla.



¿Cómo encontrarían la distancia entre los árboles sin tener que entrar al lago?

<Al terminar de leer la pregunta, el profesor dará una pausa, y prosigue con su lectura.>

<En pantalla aparecerán ilustraciones de las herramientas enlistadas.>

Cuentan con las siguientes herramientas:

- Cuerdas de cualquier tamaño
- Cinta métrica
- Estacas
- Teodolito
- Martillo

<Cuando el profesor termine de enlistar las herramientas, dará una pausa, y en pantalla saldrán a escena los alumnos. Después de la pausa, uno de ellos entabla la plática con el maestro.>

También pueden usar elementos que se encuentran en el entorno, como piedras, ramas, etc., así como un equipo de tres personas como apoyo.

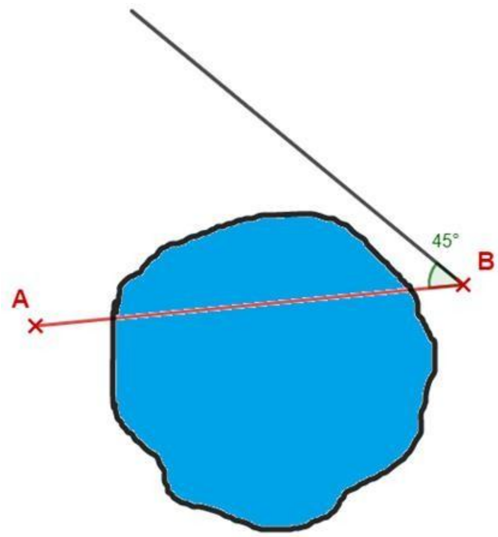
[2] Schrader, C. (1992). Heródoto HISTORIA Libro II euterpe. Madrid: Gredos.

Un alumno propone. — Yo utilizaría el teorema de Pitágoras.

El profesor responde. — ¿Cómo lo harías?

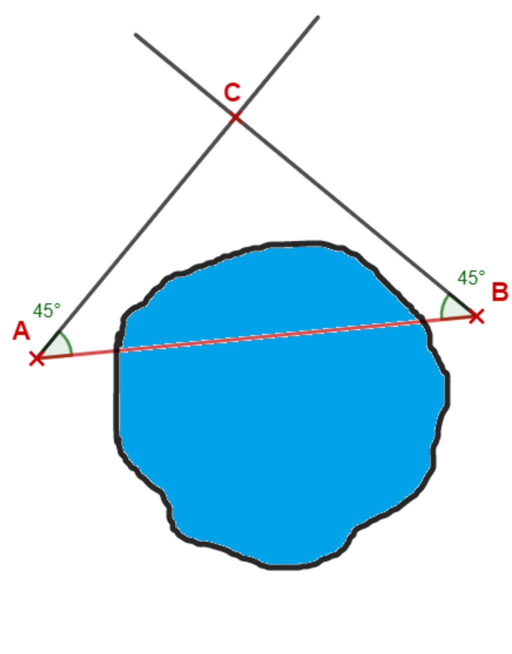
<Mientras el alumno describe su respuesta, en pantalla, se enfoca la imagen del problema y se genera una animación, en relación a lo que va diciendo el alumno, hasta llegar a la imagen que aparece después de este párrafo.>

El alumno responde. — Desde el árbol B, uso el teodolito tomando el árbol A como punto de referencia, para medir un ángulo de 45° que abra hacia el norte. Amarro una cuerda al árbol B, la oriento al ángulo que medí y la extiendo en esa dirección y la fijo con una estaca a una distancia cualquiera.

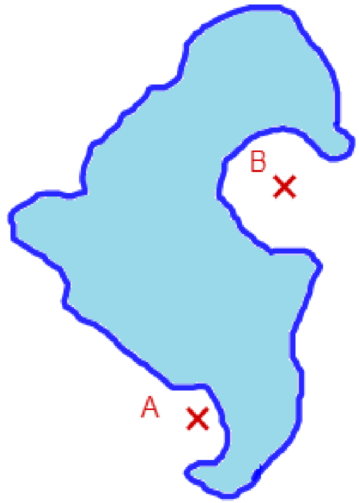


<Mientras el alumno sigue describiendo su procedimiento, en pantalla, se enfoca la imagen del problema y se genera una animación, en relación a lo que va explicando, hasta concluir con la imagen que aparece después de este párrafo.>

— Ahora desde el árbol A, uso el teodolito tomando el árbol B como punto de referencia, para medir un ángulo de 45° que abra hacia el norte. Amarro una cuerda al árbol A, la oriento al ángulo que medí y la extiendo en esa dirección. Al mismo tiempo a la cuerda amarrada al árbol B, la extiendo en la dirección previamente fijada, hasta que se cruce con la cuerda amarrada al árbol A. En el punto de cruce fijo ambas cuerdas con una estaca. Ese punto lo llamo C.

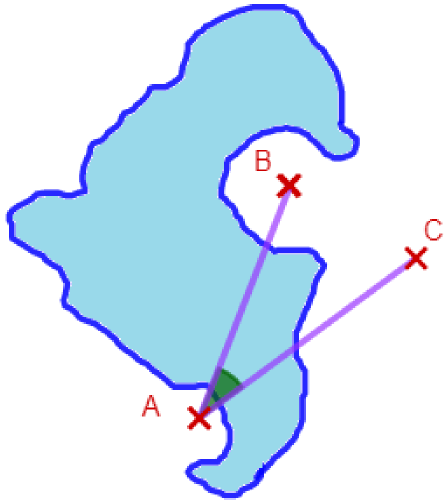


<table>
<tr>
<td><Mientras el alumno describe su respuesta, en pantalla, se deja la construcción anterior a este párrafo.></td>
<td>— El triángulo formado por los puntos ABC es rectángulo por construcción, puesto que los ángulos en los vértices A y B miden 45°, entonces el ángulo en C es de 90°. Ahora se observa que la hipotenusa del triángulo es justamente la distancia entre los árboles, por lo que midiendo las cuerdas que extendimos, las cuales son los catetos del triángulo, y aplicando el teorema de Pitágoras, encontraremos la distancia entre los árboles.</td>
</tr>
<tr>
<td><Al terminar de decir la pregunta, se enfoca el pizarrón y en él se sitúa la imagen que sigue después de este párrafo.></td>
<td>El profesor contesta. — Excelente procedimiento… para este caso. ¿Y qué pasaría si el terreno tuviera un lago de la siguiente forma?

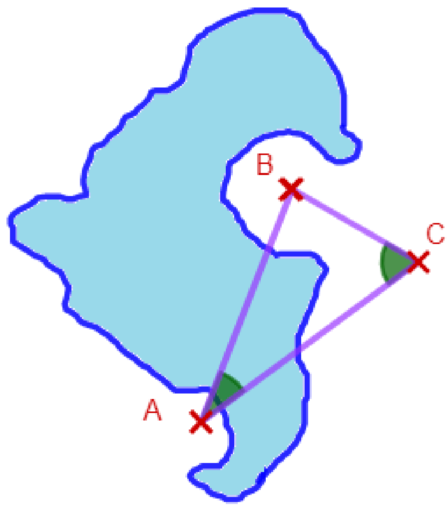

</td>
</tr>
<tr>
<td><Al terminar de explicar, se enfoca a los alumnos. Ellos deben aparentar que están pensando en cómo resolver el problema. ></td>
<td>El profesor indica. — Ya no se puede usar el teorema de Pitágoras, ya que al generar triángulos rectángulos con vértices A y B, dos de los lados del triángulo no se podrán medir, porque pasan a través del lago.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Otro alumno contesta. — Podemos resolverlo por ley de senos.</td>
</tr>
<tr>
<td><Después de una pausa, se enfoca al alumno que entablará la plática con el maestro.></td>
<td>El profesor responde. — ¿Y cómo lo harías?</td>
</tr>
<tr>
<td><Mientras va describiendo su respuesta, en pantalla, se enfoca la imagen del problema y se genera una animación en relación a lo que va explicando. Esto se aplica en los siguientes párrafos donde se sigue describiendo la respuesta ></td>
<td>El alumno contesta. — Tomemos un punto C como de referencia, desde el cual podamos medir con nuestra cinta métrica la distancia de B a C.


</td>
</tr>
</table>

— Desde el punto A y usando el teodolito, medimos el ángulo *CAB*:



— Después, desde el punto C medimos con el teodolito el ángulo *BCA*.

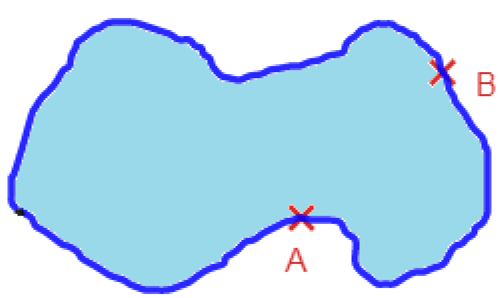


<Mientras el alumno describe su respuesta, en pantalla, se deja la construcción anterior a este párrafo.>

— Por lo anterior, sabemos la distancia del punto B a C y el ángulo opuesto a él, que es *BAC*, además conocemos el ángulo *BCA*, por lo que podemos saber cuánto mide el lado opuesto que es de A a B aplicando la ley de senos.

<Cuando el profesor termine de decir la pregunta, se enfoca el pizarrón y en el aparecerá la imagen que está después de este párrafo.>

El profesor responde. — Muy bien hecho. ¿Y qué pasaría si los puntos están sobre el contorno del lago? No podríamos medir ángulos en dichos puntos, por ejemplo:



<Termina cápsula enfocando a los alumnos, con expresiones pensativas de cómo resolver el problema.>

Tarea 1

Descripción

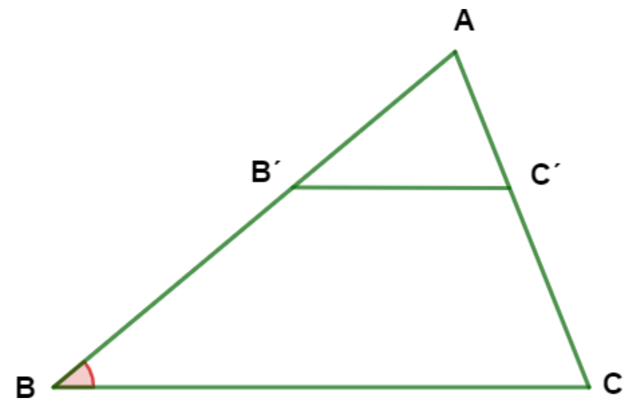
La tarea 1 tiene como objetivo que los profesores trabajé con diferentes ejercicios geométricos, primero con construcciones básicas, en donde pueden ayudarse del contenido de apoyo, después realizarán sus primeras demostraciones, esto se puede hacer ya que tuvieron un acercamiento a las demostraciones en el módulo 1. Finalmente resolverán problemas topográficos, parecidos a los que vienen en la cápsula, que si bien tanto el teorema de Pitágoras como la ley de cosenos se analizarán dentro de varias cápsulas, se pide a los profesores que los usen para que se sientan cómodos a la hora de resolver los problemas. En las siguientes cápsulas, se les pedirá que resuelvan problemas topográficos con los criterios de congruencia o de semejanza.

Tarea 1

Contenido de Apoyo

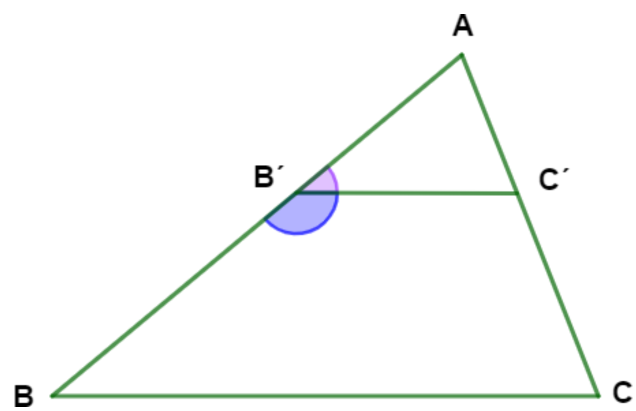
- Lee la siguiente información, posteriormente resuelve los ejercicios.

Para simbolizar un ángulo en una figura se tomarán tres vértices como referencia, y el sentido en que se miden los ángulos, en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj. Por ejemplo, en la siguiente figura se quiere simbolizar el ángulo de color naranja:



Los tres vértices que se tomarán como referencia con A, B y C, y por la forma en que se mide los ángulos se parte desde el vértice C, hasta llegar al vértice B, donde se genera la abertura del ángulo de color naranja y finalmente se llega al vértice A que es donde termina la abertura del ángulo. Con lo anterior se simboliza el ángulo de color naranja como $\measuredangle CBA$.

En la misma figura el ángulo de color morado se simboliza como $\measuredangle C´B´A$, se parte del vértice $C´$, en $B´$ se genera la abertura del ángulo y se llega al vértice A.



El $\measuredangle BB´C´$ es el de color azul.

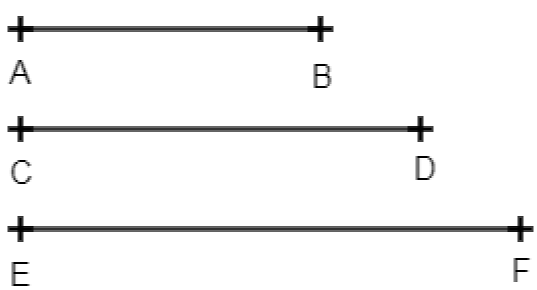
- Resuelve los siguientes problemas usando solamente compás y regla.

1. En el punto dado en el segmento de recta, levanta un segmento de recta perpendicular a ella.

2. Construir un triángulo cuyos lados sean todos iguales al segmento de recta dado.

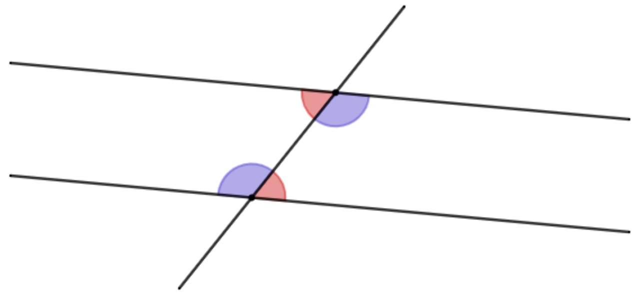
3. Dividir un segmento de recta dado en dos partes iguales.

4. Construir un triángulo cuyos lados sean iguales respectivamente a tres rectas dadas.

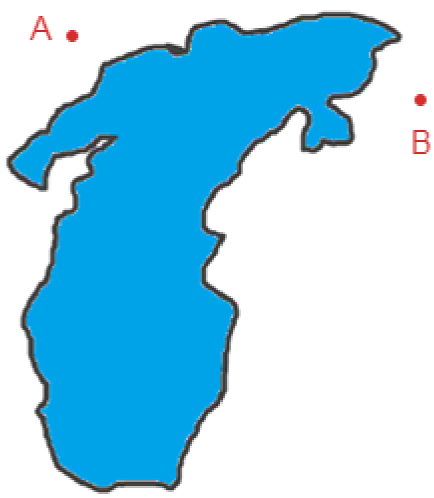


- Demuestra que ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo.

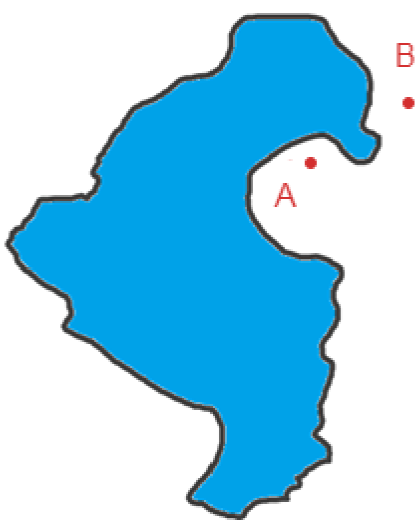
- Demuestra que en todo triángulo, la suma de sus ángulos internos es igual a 180°
  Sugerencia: Puedes usar el hecho de que dadas dos paralelas cortadas por una secante, los ángulos alternos internos tienen la misma medida. Se representa en la siguiente imagen.



- Dar el procedimiento para encontrar la distancia entre los puntos A y B usando el teorema de Pitágoras y las herramientas que se usaron en la cápsula 1.

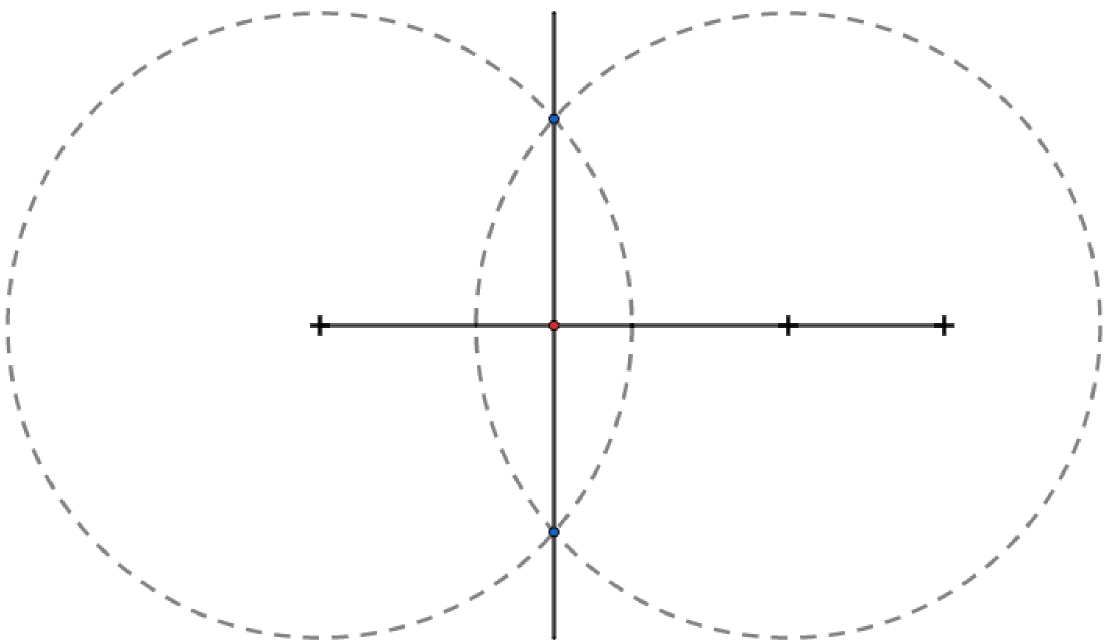


- Dar un procedimiento para encontrar la distancia entre los puntos A y B usando la ley de cosenos y las herramientas que se usaron en la cápsula 1.



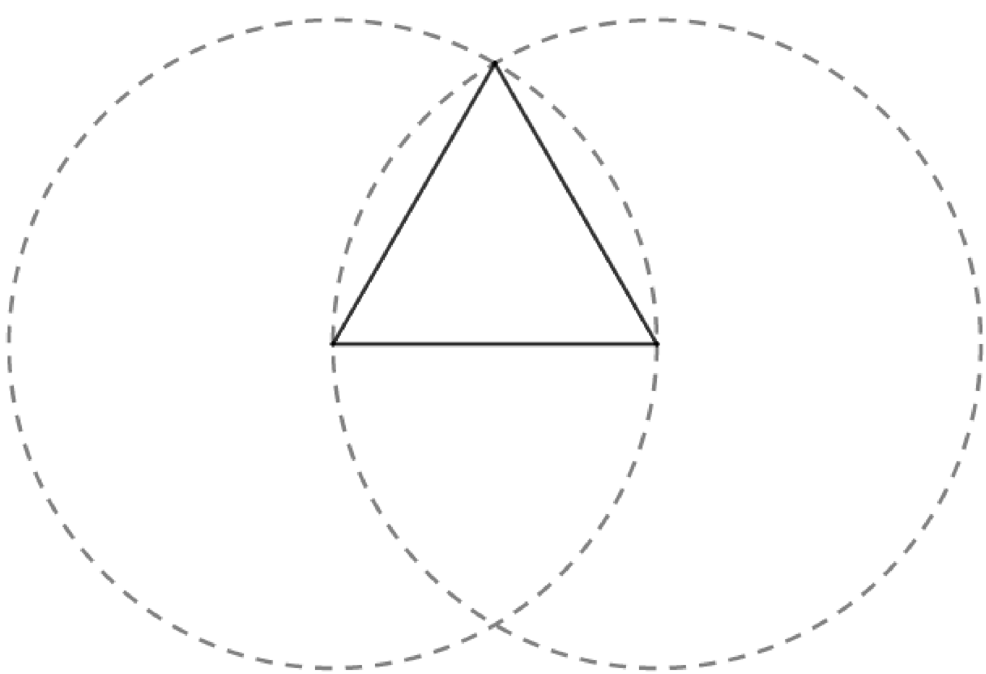
Solucionario

1. En el punto dado en el segmento de recta, levanta un segmento de recta perpendicular a ella.

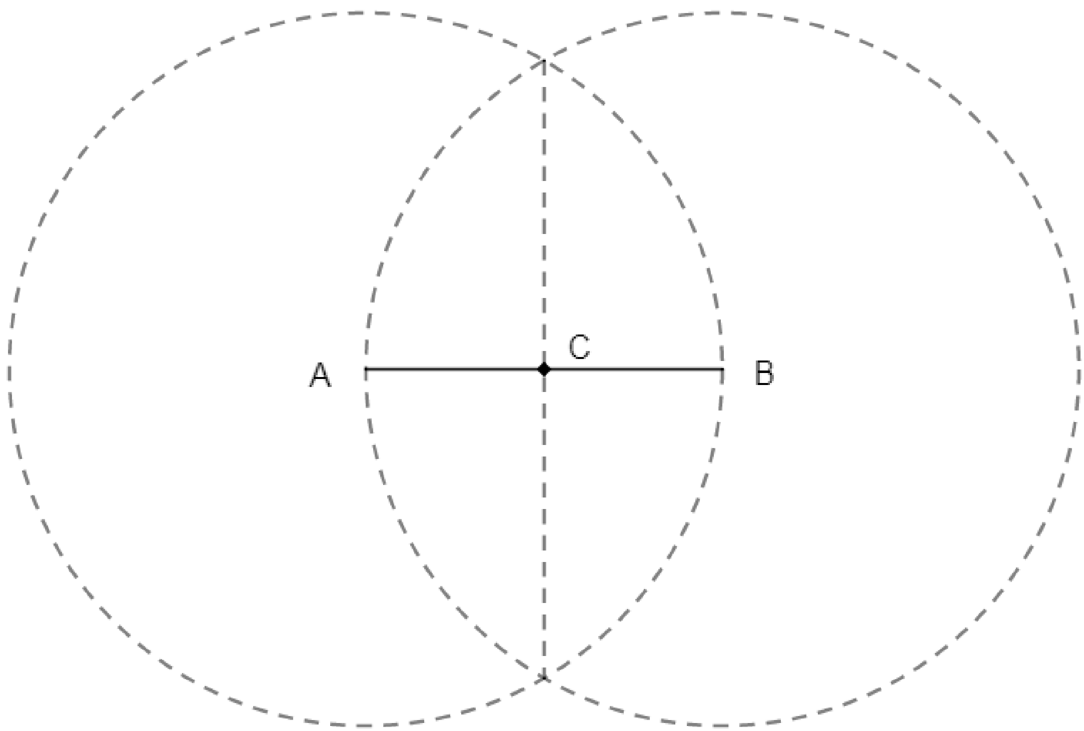


Las dos circunferencias tienen el mismo radio.

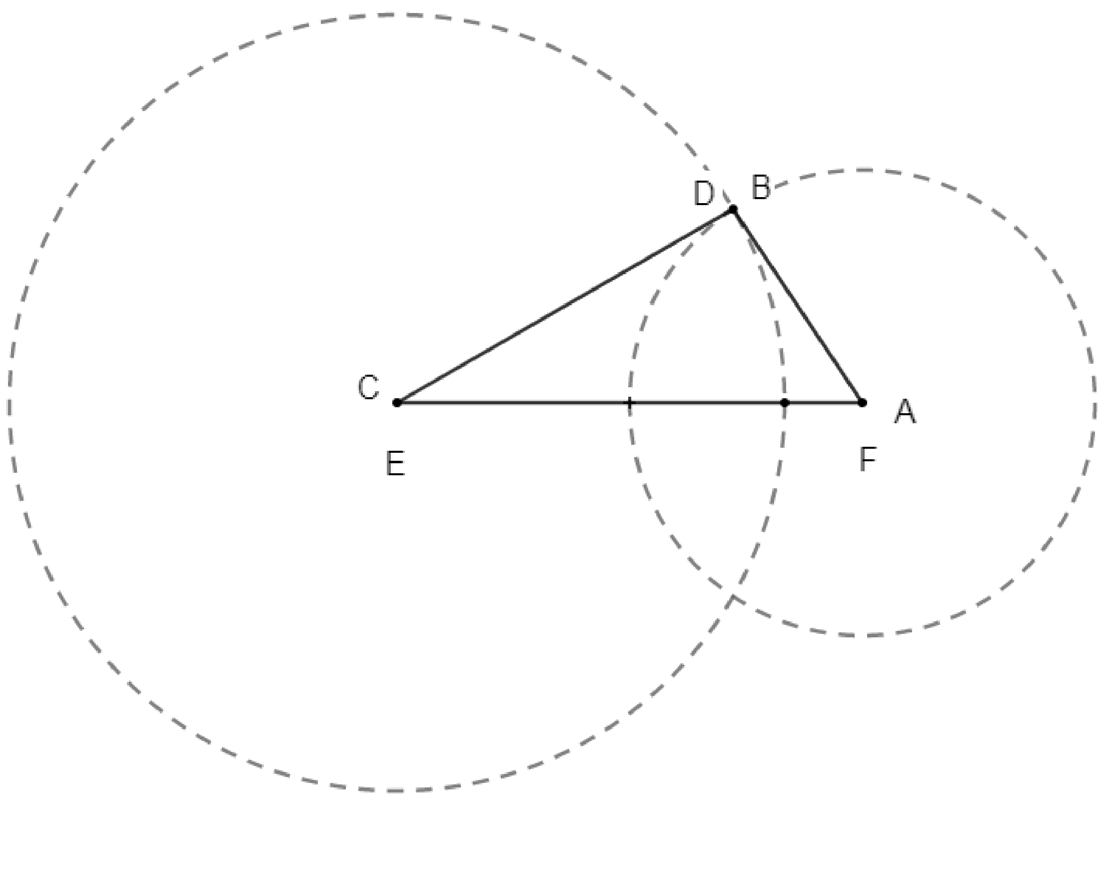
2. Construir un triángulo cuyos lados sean todos iguales al segmento de recta dado.



3. Dividir un segmento de recta dado en dos partes iguales.

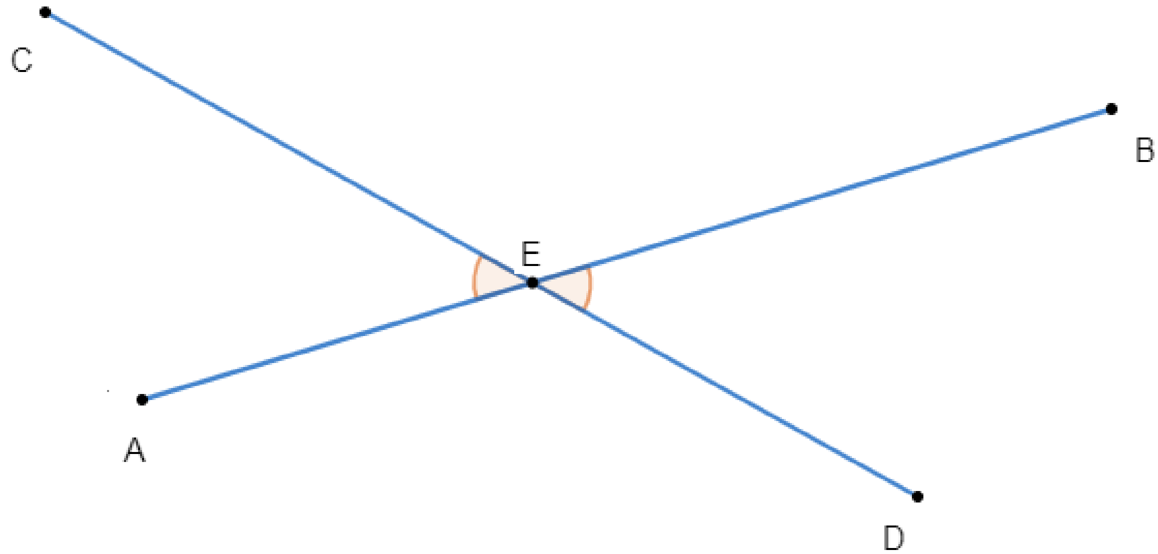


4. Construir un triángulo cuyos lados sean iguales respectivamente a tres rectas dadas.



- Demuestra que ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo.

Tracemos dos segmentos de recta:



Por demostrar que el $\measuredangle CEA = \measuredangle DEB$
Notamos que: $\measuredangle CEA + \measuredangle BEC = 180°$ y $\measuredangle DEB + \measuredangle BEC = 180°$
Igualemos ambas ecuaciones y desarrollemos: $\measuredangle CEA + \measuredangle BEC = \measuredangle DEB + \measuredangle BEC$

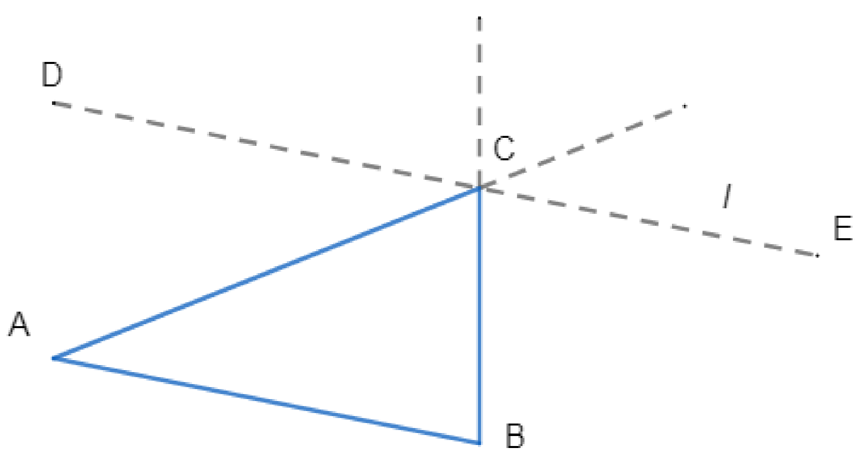
$$\measuredangle CEA + \measuredangle BEC - \measuredangle BEC = \measuredangle DEB + \measuredangle BEC - \measuredangle BEC$$

$$\measuredangle CEA = \measuredangle DEB$$

Que es lo que queremos demostrar.

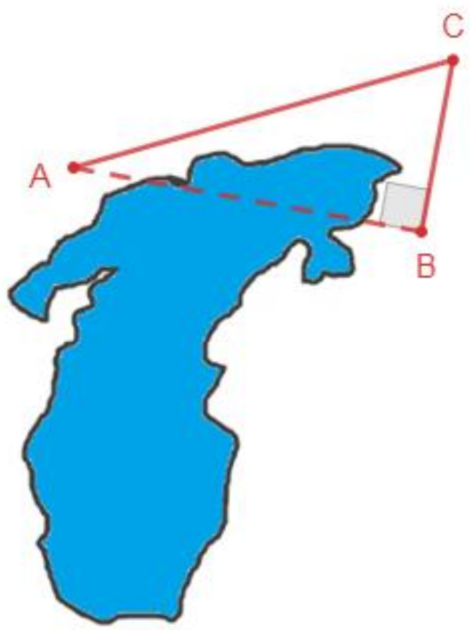
- Demuestra que en todo triángulo, la suma de sus ángulos internos es igual a 180°
  Sugerencia: Puedes usar el hecho de que dadas dos paralelas cortadas por una secante, los ángulos alternos internos tienen la misma medida.

Tracemos un triángulo con vértices ABC y la paralela l al segmento AB. Tomemos dos puntos en la paralela l



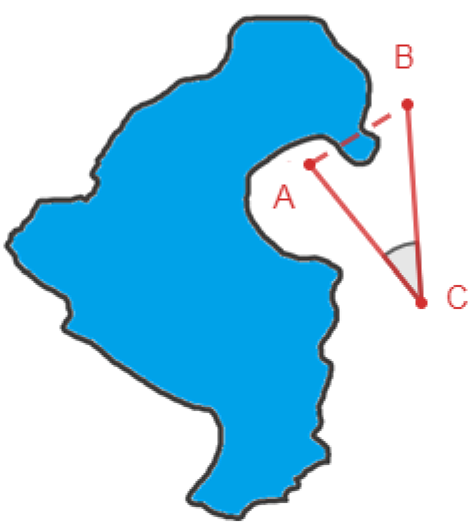
Por demostrar que $\measuredangle BAC + \measuredangle CBA + \measuredangle ACB = 180°$
Como sabemos que dadas dos paralelas cortadas por una secante, los ángulos alternos internos miden lo mismo, entonces el ángulo $\measuredangle BAC$ mide lo mismo al ángulo $\measuredangle DCA$ y el ángulo $\measuredangle CBA$ mide lo mismo al ángulo $\measuredangle BCE$.
Por otra parte por construcción: $\measuredangle DCA + \measuredangle ACB + \measuredangle BCE = 180°$
Sustituimos $\measuredangle DCA$ por $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle BCE$ por $\measuredangle ACB$ obtenemos: $\measuredangle BAC + \measuredangle CBA + \measuredangle ACB = 180°$
Que es lo que queremos demostrar.

- Dar el procedimiento para encontrar la distancia entre los puntos A y B usando el teorema de Pitágoras y las herramientas que se usaron en la cápsula 1.



Se coloca una estaca en B y se amarra una cuerda, con el teodolito se mide un ángulo de 90° y se extiende la cuerda para formar una línea. Sobre la línea se toma un punto C que permita ver el punto A y que no se atraviese el lago. Al unir los tres puntos se forma una triángulo rectángulo Se obtiene el valor del lado AB aplicando el teorema de Pitágoras, ya que se conoce un cateto BC y su hipotenusa CA.

- Dar el procedimiento para encontrar la distancia entre los puntos A y B usando la ley de cosenos y las herramientas que se usaron en la cápsula 1.



Se busca un punto fuera del lago de modo que se pueda observar los dos puntos y que no se atraviese el lago, se clava un estaca en ese punto. Por la forma en que se construyó el triángulo, se conoce la medida del lado AC y BC, además con el teodlito se obtiene el valor del ángulo $\measuredangle BCA$. Con estos ya se puede aplicar la ley de senos para obtener la medida del lado AB.

Guion de la cápsula 2 (Congruencia)

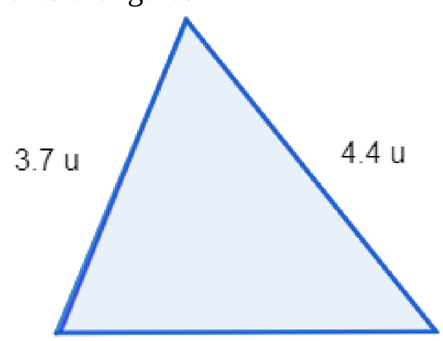
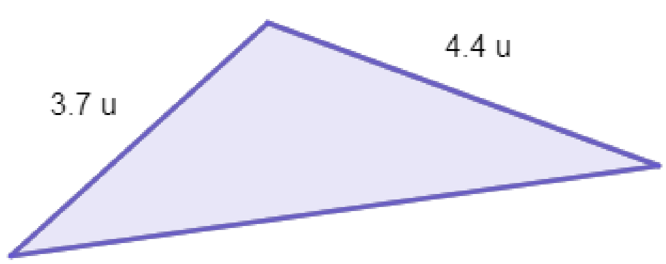
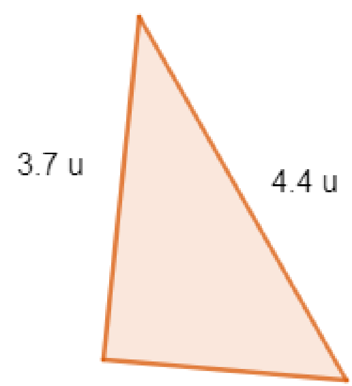
Descripción

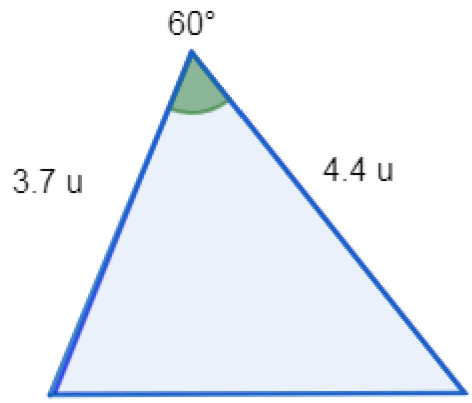
El objetivo de la cápsula es generar en los profesores la necesidad de usar los criterios de congruencia, para llegar a esto se parte de identificar las mínimas condiciones necesarias para formar un único triángulo, para así garantizar que cualquier otro triángulo que comparte dichas características serán iguales.

Se empieza dando la medida de dos lados de un triángulo y los profesores notarán que es necesario conocer otro dato del triángulo para construir triángulos iguales. Con esto se darán las diferentes mínimas condiciones y se indicará que cada una de ellas lleva el nombre de criterios de congruencia.

Finalmente trabajará con un problema topográfico en el que se aplicará uno de los criterios de congruencia para saber cuál es la distancia que hay de una lancha hasta una bandera que está en la playa.

Guion de la cápsula 2

Sugerencias técnicas de adaptación a video.	**Congruencia**
<En pantalla, se verá una persona y leerá los dos primeros párrafos.>	En la cápsula anterior se trabajó con problemas topográficos en donde no se podía conocer, en primera instancia, la distancia entre los dos puntos dados. Y por ello se trazó un triángulo, con otro punto que se escogió ya sea para aplicar un teorema, o una ley o una regla que permitiera conocer la medida buscada. Dado que la resolución de los problemas se basó en la construcción de un triángulo, sería conveniente saber cuál es la mínima cantidad de ángulos y lados que se deben conocer del triángulo, para poder construirlo y que a su vez garantice que, si se construye otro triángulo con las mismas mínimas medidas, ambos serán iguales.
<Al momento en que la persona diga “la siguiente condición”, en pantalla y en la parte superior, deberá aparecer todo el enunciando, “¿bastará con saber las medidas de dos de los lados de un triángulo para garantizar que al construir otro triángulo, ambos serán iguales?”. Finalmente, se muestra en pantalla el triángulo azul con todos sus datos.>	Por ejemplo, analicemos el siguiente triángulo:  ¿Bastará con saber las medidas de dos de los lados de un triángulo para garantizar que al construir otro triángulo, con tales medidas, ambos serán iguales?
<En el momento en que se, termine de leer el párrafo de la derecha, se mostrarán en pantalla los otros dos triángulos. Los lados con medidas, deben verse de la misma longitud.>	Con sólo conocer las medidas de dos de sus tres lados, podemos generar una gran cantidad de triángulos que cumplan que dos de sus lados midan lo mismo que el triángulo anterior, pero que a su vez no sean iguales.  
<Al terminar de leer los dos siguientes párrafos, en pantalla aparecerá el triángulo con todo y sus datos. Este triángulo debe verse con las mismas longitudes que tienen los triángulo anteriores.>	Esto pasa debido a que falta conocer al menos otra medida del triángulo, para así fijar los lados y poder construir un único triángulo. ¿Será suficiente conocer un ángulo? ¿Cuál de los tres? Para fijar la posición de los lados conocidos, bastaría con conocer la medida del ángulo que se forma con estos dos lados.



De esta forma, se fija la abertura entre los lados conocidos y con ello la medida del tercer lado.

<En el momento en que la persona termina de leer “abreviado sería”, en pantalla debe aparecer “*LAL*”.>

Por lo anterior, es necesario conocer tres datos, como mínimo, para construir un único triángulo. Esta condición la podemos indicar como Lado, Ángulo, Lado, abreviado sería LAL

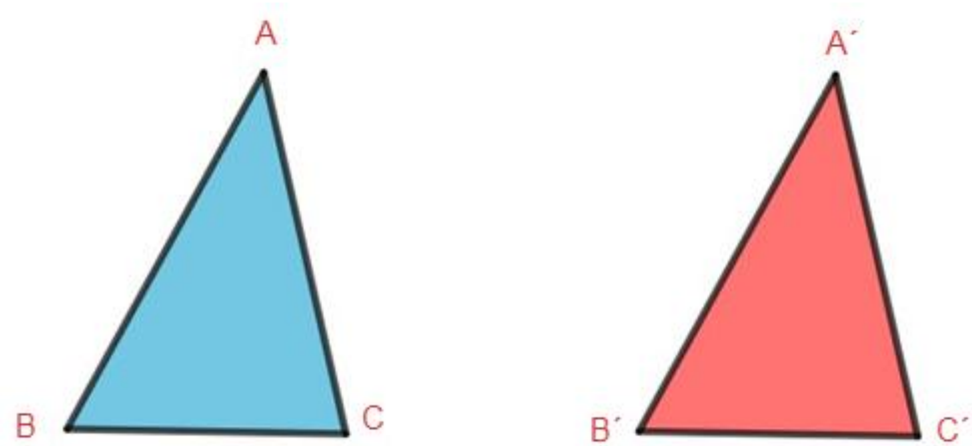
¿Habrá otras condiciones para construir un único triángulo?

Si en el caso anterior, en lugar de fijar el ángulo entre los lados conocidos, se fijara la medida del tercer lado, ¿se tendrían las condiciones para construir triángulos iguales o congruentes?

Diremos que dos o más triángulos son **congruentes**, si sus ángulos y sus lados correspondientes miden lo mismo. La notación que se usa para indicar la congruencia es ≅.

<Al momento de que la persona lea “el siguiente enunciado”, en pantalla y en la parte superior, se mostrará toda la frase, “si dos triángulos tienen dos lados con las mismas medidas en sus lados correspondientes, entonces son congruentes”. Finalmente, deberán salir en pantalla los dos triángulos con sus respectivos datos.>

Analicemos el siguiente enunciado: si dos triángulos tienen dos lados con las mismas medidas en sus lados correspondientes, entonces los triángulos son congruentes.



Veamos si los triángulos son congruentes, observemos que los lados correspondientes de los dos triángulos tienen la misma medida.

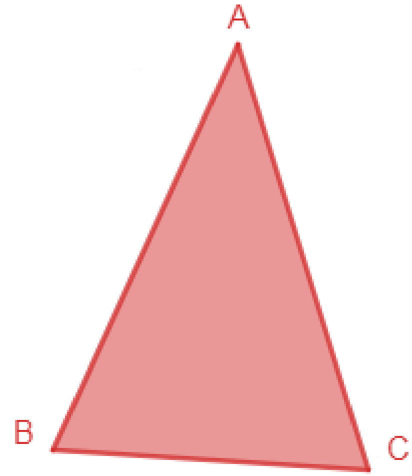
<En el momento en que se lea cada una de las tres igualdades, en pantalla se irán resaltando, los lados que se indican.>

$$AB = A'B'$$
$$BC = B'C'$$
$$CA = C'A'$$

<Cuando se termine de leer el enunciado, en pantalla, y en la parte superior, se mostrará el enunciado "En todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales". Posteriormente saldrá en pantalla el triángulo.>

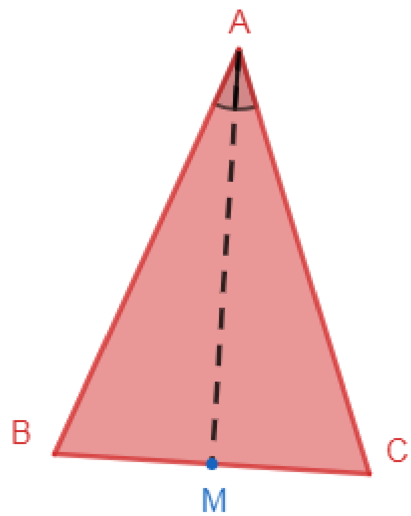
Para poder demostrar que ambos triángulos son congruentes, necesitamos demostrar la siguiente propiedad: en todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a lados iguales, son iguales.

$Demostración$: Sea ABC un triángulo isósceles tal que $AB = AC$



<En el momento en que se lea "Tracemos la bisectriz", en pantalla habrá una animación del triángulo anterior hasta llegar al triángulo después de este enunciado.>

Tracemos la bisectriz del $\measuredangle BAC$. Sea M el punto donde ésta corta al lado BC.



Consideremos los triángulos ABM y ACM.

Sabemos:

<En el momento en el que se leen cada una de las tres igualdades, en pantalla se irán resaltando, los lados y ángulos que se van indicando en cada oración.>

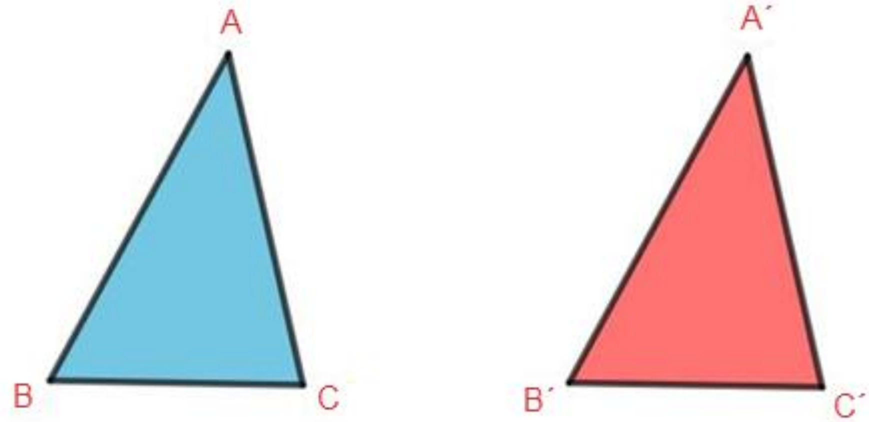
Por hipótesis: $AB = AC$
Como AM es bisectriz: $\measuredangle BAM = \measuredangle MAC$
Por ser lado en común: $AM = AM$

Por lo tanto los triángulos ABM y ACM son congruentes por la condición LAL, dada al inicio de esta cápsula. Y en consecuencia $\measuredangle CBA = \measuredangle ACB$, que es lo que queríamos demostrar.

Ahora sí, retomemos nuestro problema que sería demostrar que si dos triángulos tienen dos lados con las mismas medidas en sus lados correspondientes, entonces los triángulos son congruentes.

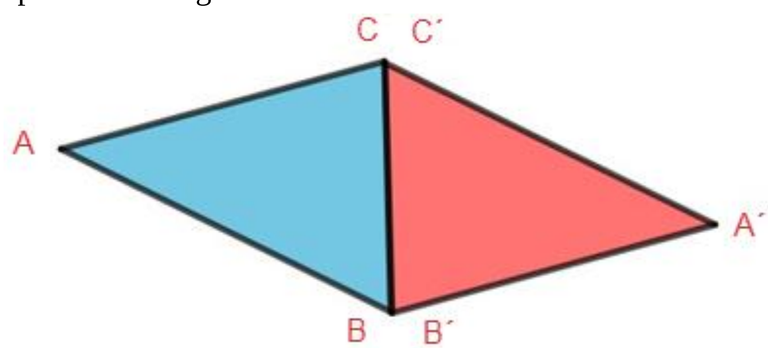
<table>
<tr>
<td><Cuando se termine de leer el primer párrafo de la demostración saldrán en pantalla los siguientes dos triángulos.></td>
<td>

Demostración: Tomemos los triángulos ABC y $A'B'C'$ los cuales cumplen que lados correspondientes miden lo mismo.



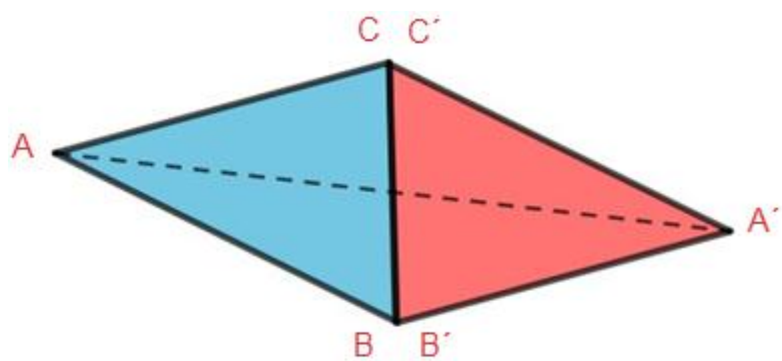
</td>
</tr>
<tr>
<td><En el momento en que se termine de leer el enunciado, en pantalla habrá una animación de los dos triángulos anteriores hasta llegar a los dos triángulos, después de este enunciado.></td>
<td>

Coloquemos el triángulo $A'B'C'$ de tal manera que el lado $B'C'$ coincida con BC, pero A y A' queden en lados opuestos del segmento de recta BC.



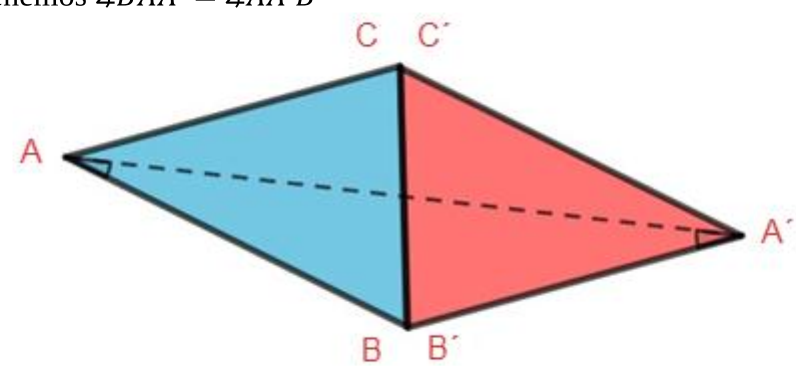
</td>
</tr>
<tr>
<td><Cuando se termine de leer la frase, en pantalla habrá una animación de los dos triángulos anteriores hasta llegar a los dos triángulos, después de este enunciado.></td>
<td>

Tracemos la recta AA'.



</td>
</tr>
<tr>
<td><En el momento en que se lea la igualdad $AB = A'B'$, se resaltarán esos lados en los triángulos. Posteriormente, cuando se lea "el triángulo ABA', se debe resaltar. Finalmente, cuando se lea la otra igualdad de ángulos, en pantalla habrá una animación de los dos triángulos anteriores hasta llegar a los otros dos triángulos, después de este enunciado.></td>
<td>

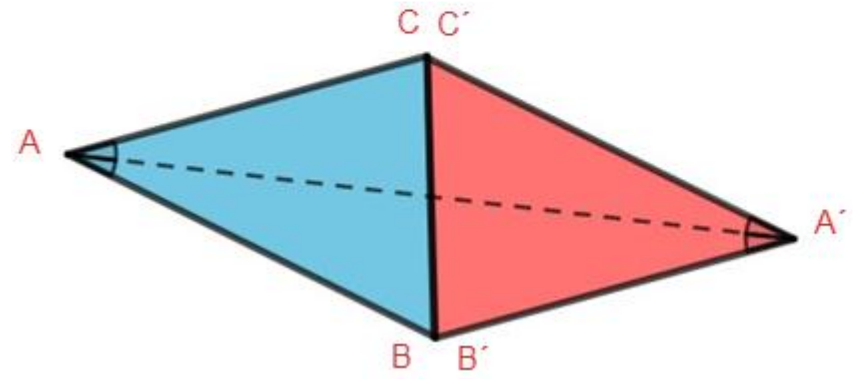
Como $AB = A'B'$, el triángulo ABA' es isósceles y por la propiedad que demostramos tenemos $\measuredangle BAA' = \measuredangle AA'B'$



</td>
</tr>
</table>

<Cuando se lea la igualdad $AC = A´C´$, se resaltarán esos lados en los triángulos. Posteriormente, cuando se lea "el triángulo $ACA´$, se resaltará el triángulo. Finalmente, cuando se lea la otra igualdad de los ángulos, en pantalla se hará una animación de los dos triángulos anteriores hasta llegar a los otros dos triángulos después de este enunciado.>

Como $AC = A´C´$, el triángulo $ACA´$ es isósceles y por la propiedad demostrada tenemos $\measuredangle A´AC = \measuredangle C´A´A$



De este modo los triángulos ABC y $A´B´C´$ son congruentes por la condición LAL, ya que

<En el momento en que se van leyendo cada una de las tres igualdades, en pantalla se irán resaltando, los lados y los ángulos que se van indicando en cada igualdad.>

$AC = A´C´$ Por hipótesis
$\measuredangle CAB = \measuredangle C´A´B´$ debido a que $\measuredangle BAA´ + \measuredangle A´AC = \measuredangle AA´B´ + \measuredangle C´A´A$
$AB = A´B´$ Por hipótesis

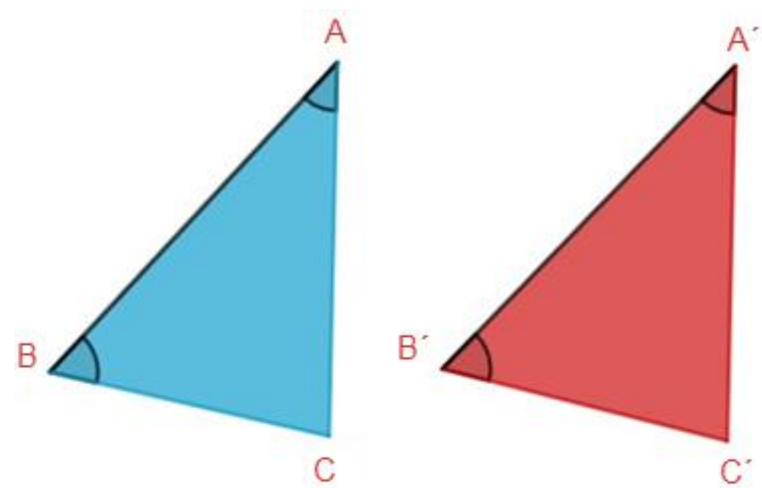
Por lo anterior, es suficiente conocer, como mínimo, la medida de los tres lados de un triángulo para así construir un único triángulo. Esta condición la podemos indicar como Lado, Lado, Lado, abreviado sería LLL

<En el momento en que se lee "abreviado sería", en pantalla debe aparecer "LLL".>

¿Habrá otro conjunto de condiciones para determinar un único triángulo?

Veamos el siguiente caso: si dos triángulos tienen un lado con la misma medida y los dos ángulos adyacentes a este lado respectivamente tienen la misma medida, entonces los triángulos son congruentes.

<En pantalla, y en la parte superior, debe aparecer el enunciado completo a trabajar. Posteriormente se mostrarán, en la misma pantalla los dos triángulos.>



Analicemos las hipótesis que tenemos:

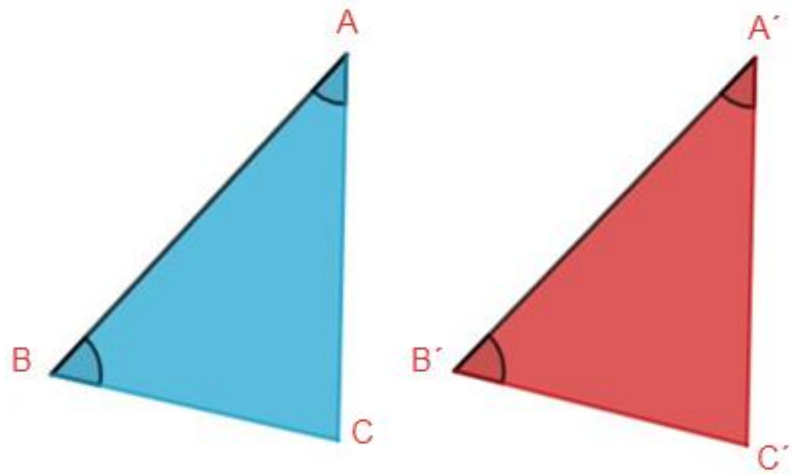
<En el momento en que se termine de decir la frase "Tenemos que", en pantalla se mostrarán las tres igualdades.>

$$AB = A´B´$$
$$\measuredangle CBA = \measuredangle C´B´A´$$
$$\measuredangle BAC = \measuredangle B´A´C´$$

Dicha condición la podemos demostrar a partir de la condición LAL. Veamos cómo.

En el momento en que se termine de leer el enunciado, en pantalla aparecerán los dos triángulos. Se seguirá con la lectura del otro enunciado.>

$Demostración$: Tomemos dos triángulos ABC y $A´B´C´$ los cuales cumplan que un lado de cada triángulo tienen la misma medida y los dos ángulos adyacentes a este lado respectivamente también tienen la misma medida.



Es decir:

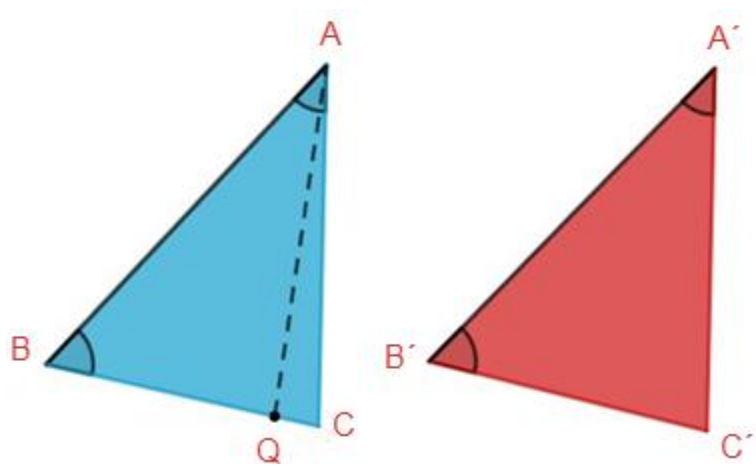
<Cuando se lean cada una de las igualdades, en pantalla se irán resaltando, los lados y los ángulos, que se van indicando en cada oración.>

$$AB = A´B´$$
$$\measuredangle CBA = \measuredangle C´B´A´$$
$$\measuredangle BAC = \measuredangle B´A´C´$$

Supongamos que los triángulos no son congruentes, esto implica que, por lo menos uno de los lados de los triángulos no son iguales entre sí, o bien, un ángulo en ambos triángulos no mide lo mismo. Como ya mostraste que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es de 180°, se descarta el caso donde un ángulo tiene misma media, por lo que al menos uno de los lados de los triángulos no son iguales entre sí.

<Cuando se lea “digamos Q”, enpantalla habrá una animación de los dos triángulos anteriores hasta llegar los dos triángulos después de este párrafo.>

Supongamos que los lados BC y $B´C´$ tienen medidas distintas, por lo que uno de los dos lados mide más que el otro, supongamos que $BC > B´C´$, entonces existe un punto sobre el segmento BC, digamos Q el cual cumple que $BQ = B´C´$.



Esto implica que los triángulos ABQ y $A'B'C'$ son congruentes por la LAL, ya que:

Por hipótesis $AB = A'B'$
Por construcción $BQ = B'C'$
Por hipótesis $\measuredangle CBA = \measuredangle C'B'A'$

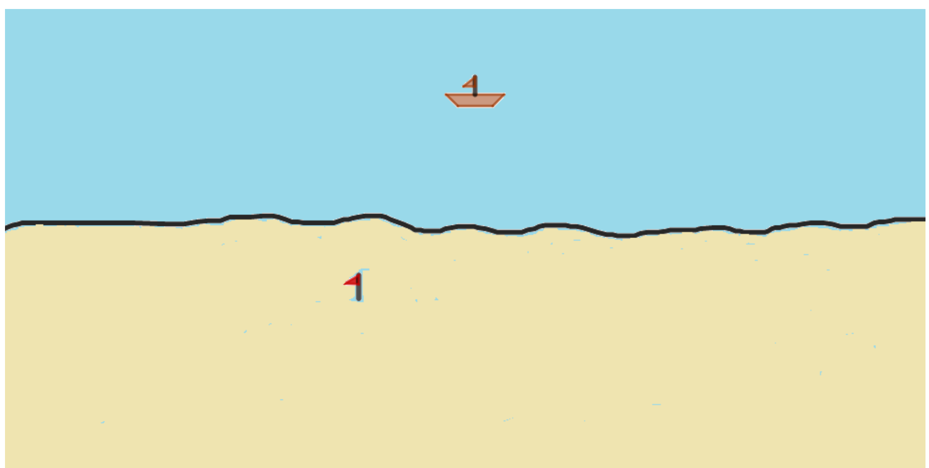
Que los triángulos ABQ y $A'B'C'$ sean congruentes implica que los ángulos $\measuredangle BAQ\ y\ \measuredangle B'A'C'$ miden lo mismo. Esto contradice que el ángulo $\measuredangle BAC$ mida lo mismo al ángulo $\measuredangle B'A'C'$.
Por lo que nuestra suposición de que los triángulos ABC y $A'B'C'$ no son congruentes es falsa. Con esto podemos afirmar que los triángulos si son congruentes.

<En el momento en que se termina de leer "abreviado sería", en pantalla se mostrará "*ALA*".>

De esta manera, tenemos una tercera condición para triángulos congruentes, que es; basta con conocer la medida de un lado y los dos ángulos adyacentes a él, para así construir triángulos congruentes. Esta condición la podemos indicar como Ángulo, Lado, Ángulo, abreviado sería ALA

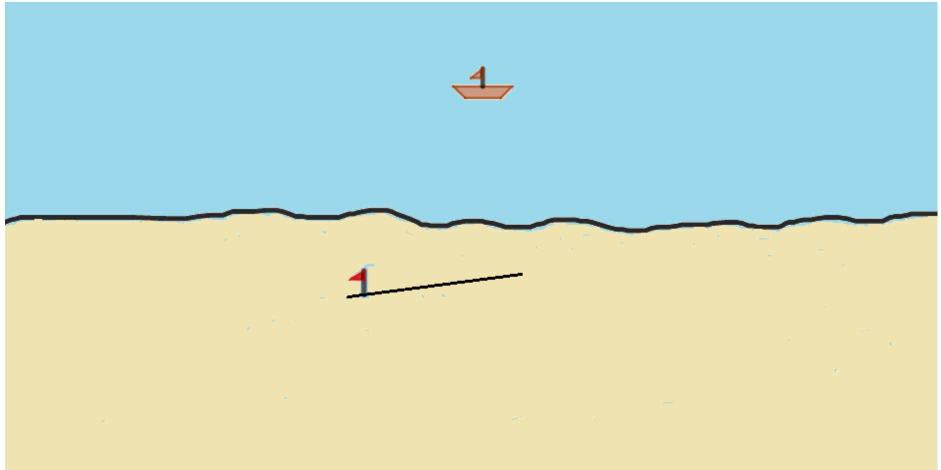
<Cuando se empiece a leer el ejemplo, este enunciado estará en la parte superior de la pantalla. Posteriormente de aparecer en la misma pantalla la imagen.>

A las condiciones que hemos visto en esta cápsula se les conoce como criterios de congruencia. Estos criterios son útiles a la hora de trabajar con problemas topográficos, como los que hemos visto, por ejemplo: encontrar la distancia que hay de la lancha a la bandera roja que está en la playa.



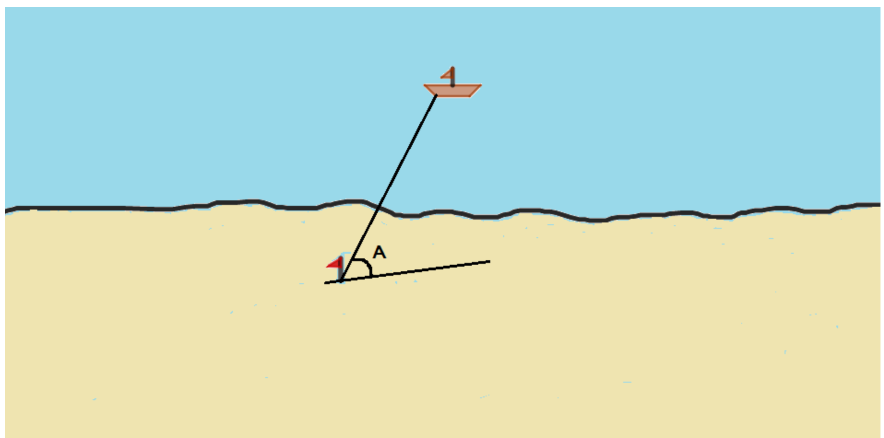
<En el momento en que se termina de leer el enunciado, habrá una animación de la imagen anterior a este enunciado, hasta llegar a la imagen, después de este enunciado.>

Para saber cuánto mide dicha distancia hagamos la siguiente construcción: Tracemos una línea, sobre la playa y que pase por la bandera roja:



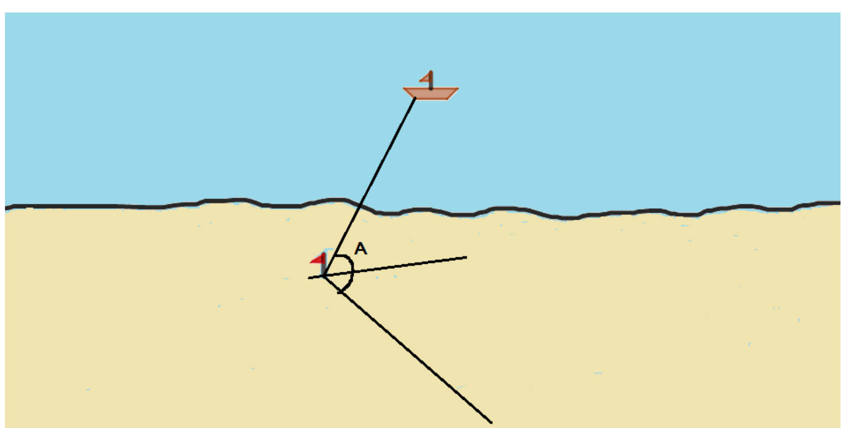
<En el momento en que se termina de leer el enunciado, habrá una animación de la imagen anterior a este enunciado, hasta llegar a la imagen, después de este enunciado.>

Con un teodolito medimos el ángulo. Parados donde está la bandera roja y tomando como referencia la línea y la lancha, tracemos el ángulo visual desde la bandera a la lancha.



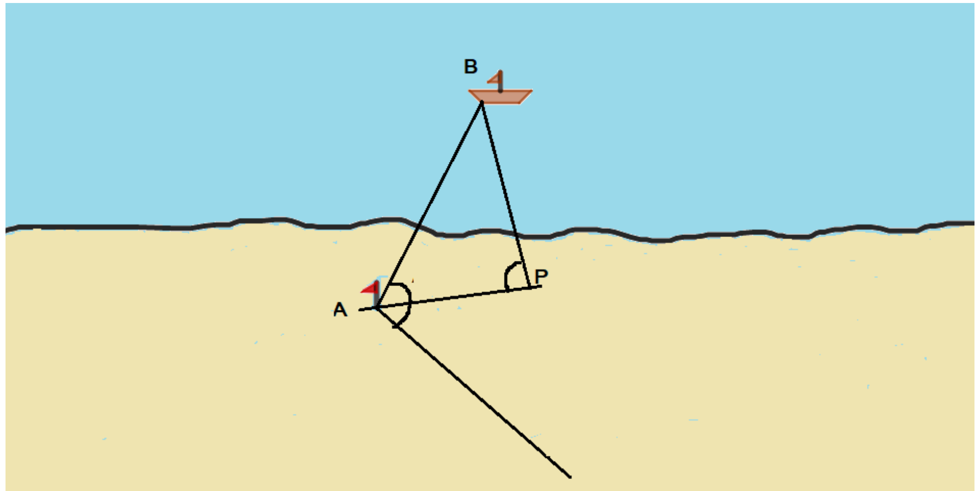
<En el momento en que se termina de leer el enunciado, habrá una animación de la imagen anterior a este enunciado, hasta llegar a la imagen, después de este enunciado.>

Con el teodolito copiamos dicho ángulo, desde la línea de referencia hacia la playa y tracemos una línea.



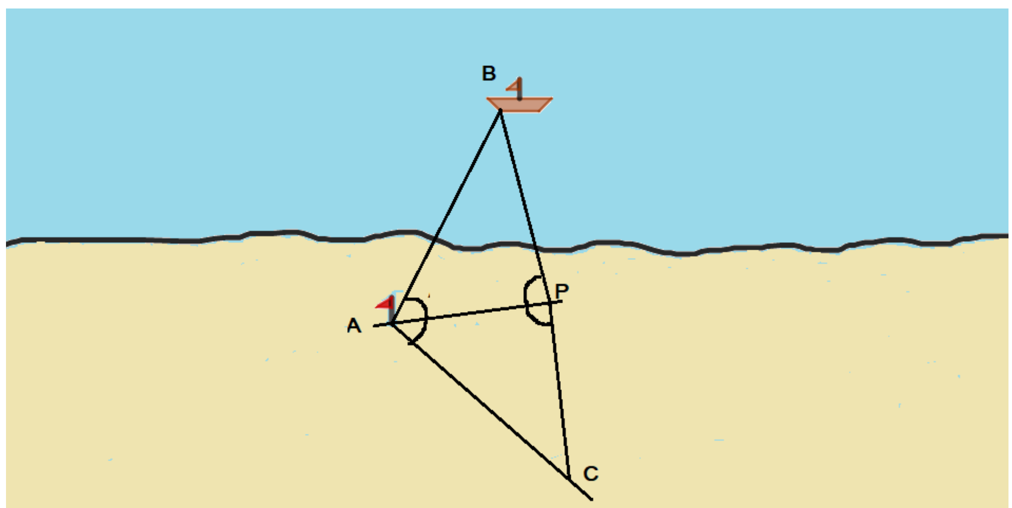
<En el momento en que se termina de leer el enunciado, habrá una animación de la imagen anterior a este enunciado, hasta llegar a la imagen, después de este enunciado.>

Tomamos un punto P, el que sea, sobre nuestra línea de referencia y desde ese punto medimos el ángulo visual que hay desde la lancha hasta la bandera roja.



<En el momento en que se termina de leer el enunciado, habrá una animación de la imagen anterior a este enunciado, hasta llegar a la imagen, después de este enunciado.>

Posteriormente, con el teodolito copiamos el ángulo en P, desde la línea de referencia, y en P, hacia el lado de la playa. Con el ángulo replicado se traza una recta desde P hacia la playa hasta que se intersecte con la recta que se formó desde la bandera roja. El punto de intersección de las dos rectas lo llamamos C.



Por el criterio ALA, los dos triángulos que formamos, APC y APB son congruentes, ya que:

El $\measuredangle PAC = \measuredangle PAB$
Los triángulos comparten el lado AP
El $\measuredangle BPA = \measuredangle APC$

<Termina cápsula.>

Por lo que la distancia de la bandera roja a la lancha es la misma distancia de la bandera roja al punto C.

Tarea 2

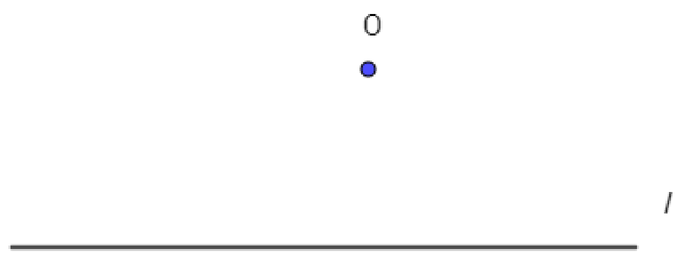
Descripción

El objetivo es que los profesores aprendan la importancia de las demostraciones en las matemáticas, además de que aprendan a demostrar afirmaciones sencillas. Al inicio de la tarea, aparece el "Contenido de apoyo", en donde se indica, y se demuestra, la forma en que se puede trazar una perpendicular desde un punto fuera de una recta. Posteriormente se dan dos construcciones geométricas, en dónde los profesores deberán demostrar. Finalmente y siguiendo con la idea de la cápsula 1, se pide que resuelvan el problema, que quedó sin resolverse, de la cápsula 1, usando los criterios de congruencia. Los otros tres problemas se tomaron del libro *Un poco de geometría* de Guadalupe Lucio, Rodolfo San Agustín y Nieves Martínez de la Escalera.

Tarea 2

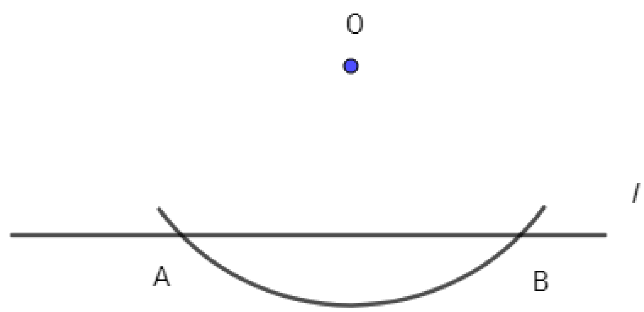
Contenido de Apoyo

- ¿Cómo se puede trazar la perpendicular a una recta *l* desde un punto O fuera de ella?

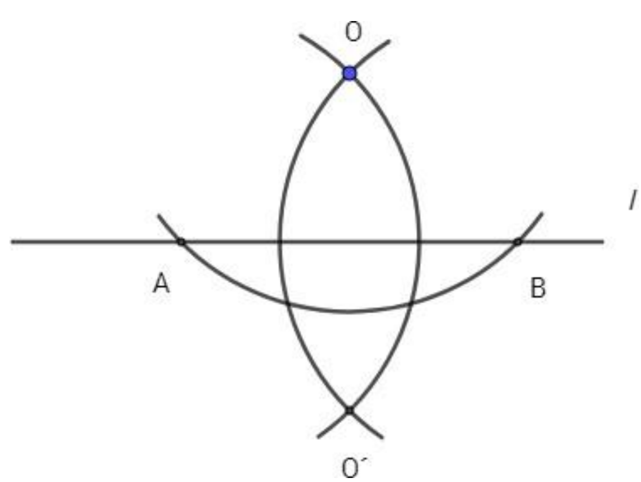


Construcción:

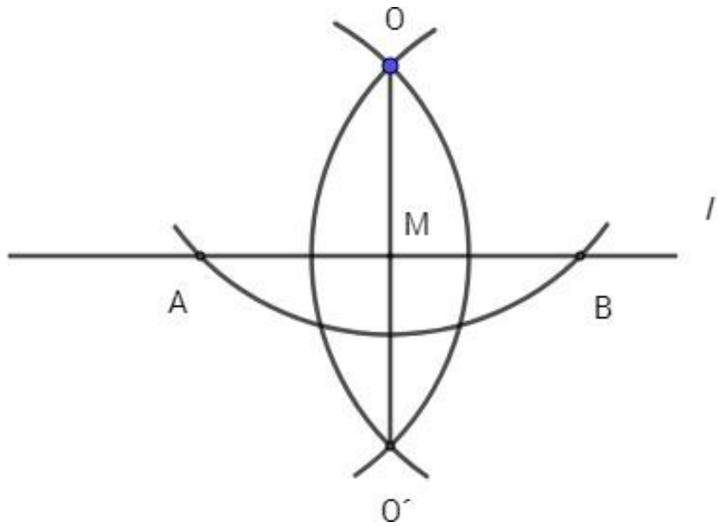
1. Tracemos la circunferencia con centro en el punto O y un radio, el cual corte a la línea l en dos puntos A y B.



2. Tracemos dos circunferencias, una con centro en A y radio igual al segmento $\overline{OA}$ y la otra con centro en B y radio $\overline{OB}$. Estas circunferencias se intersectan en O y en otro punto O'.



3. Tracemos la recta OO' que intersecta a l en el punto M. Se afirma que OO' es perpendicular a l y pasa por O.



Por demostrar que la recta OO' es perpendicular a l.

$Demostración$: Por construcción los triángulos AOB y $AO'B$ son isósceles y son congruentes por el criterio LLL, por lo que $\measuredangle BAO = \measuredangle O'AB$.

También por construcción los triángulos OAO' y OBO' son isósceles y son congruentes por el criterio LLL, por lo que $\measuredangle AOO' = \measuredangle O'OB$.

Consideremos los triángulos OAM y $O'AM$:

$$\measuredangle MAO = \measuredangle O'AM$$
$$OA = O'A$$
$$AM = AM$$

Entonces por el criterio LAL, los triángulos OAM y $O'AM$ son congruentes. Así

$$\measuredangle OMA = \measuredangle AMO'$$

Como los puntos O, M y O´ están alineados:

$$\measuredangle OMO' = 2\,rectos = \measuredangle OMA + \measuredangle AMO'$$

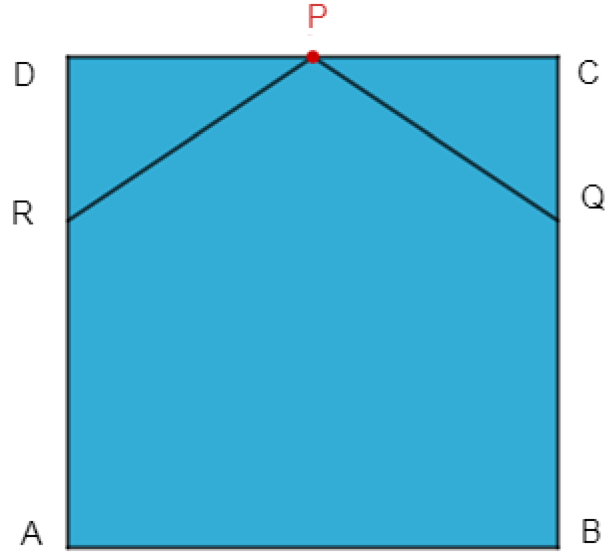
Por lo tanto:

$$\measuredangle OMA = \measuredangle AMO' = 1\,recto$$

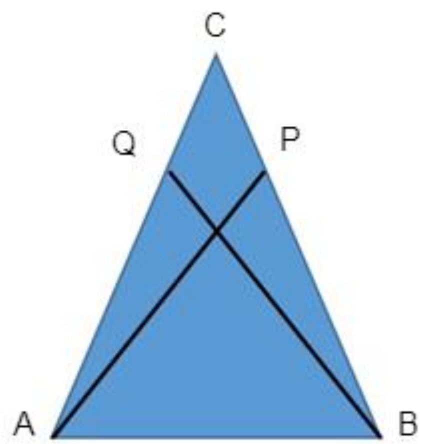
Con lo cual queda demostrado que la recta OO' es perpendicular a l.

- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

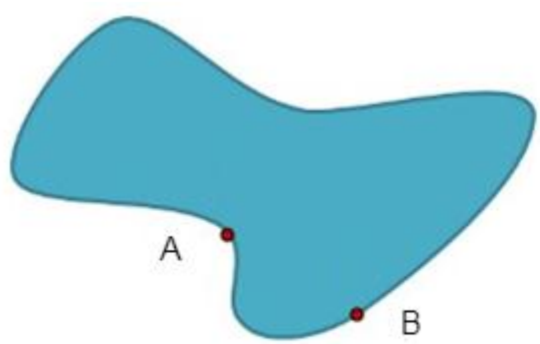
1) En el cuadrado $ABCD$, el punto P es el punto medio de DC, PQ y PR se han trazado de modo que $\measuredangle QPC = 30°, \measuredangle RPQ = 120°$. Demuestre que $PQ = PR$.



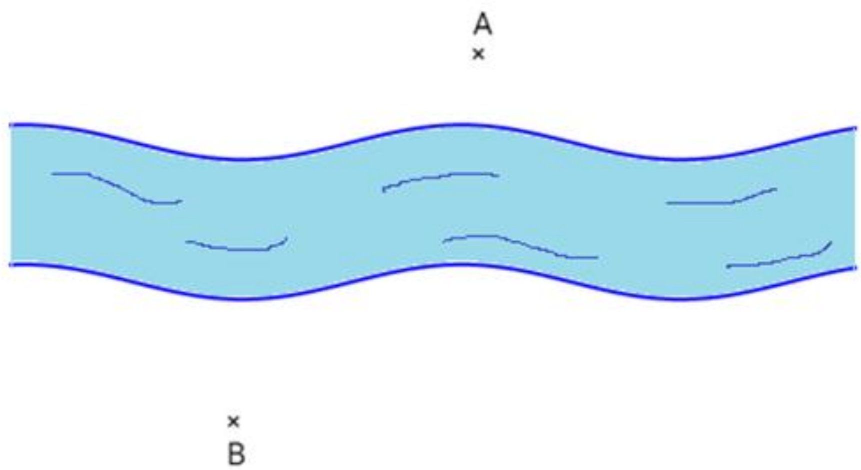
2) En el triángulo ABC se cumple que $\measuredangle BAC = \measuredangle CBA$ y $\measuredangle BAP = \measuredangle QBA$. Demuestre que $AP = BQ$.



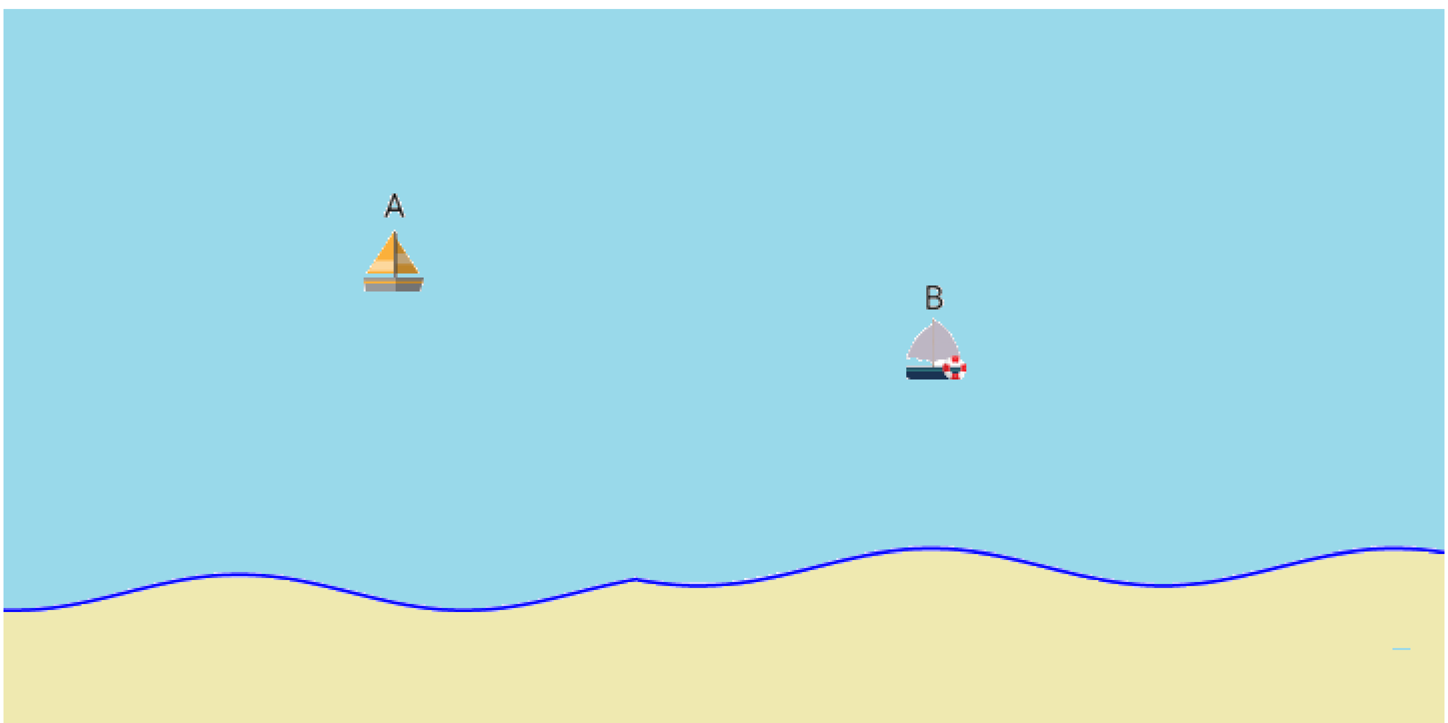
3) Encontrar la distancia entre los puntos A y B usando los criterios de congruencia.



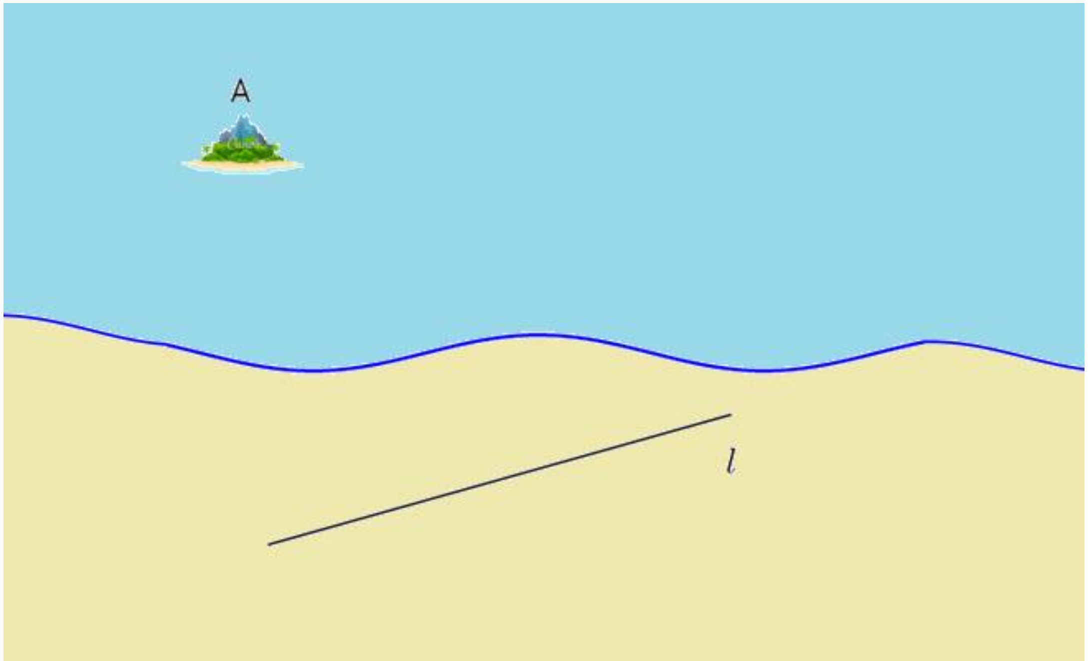
4) Encuentra la distancia AB entre dos puntos A y B que están separados por un obstáculo no acotado (un río) que impide la medición directa.



5) Encuentra la distancia entre dos puntos visibles pero inaccesibles (dos barcos en una costa).



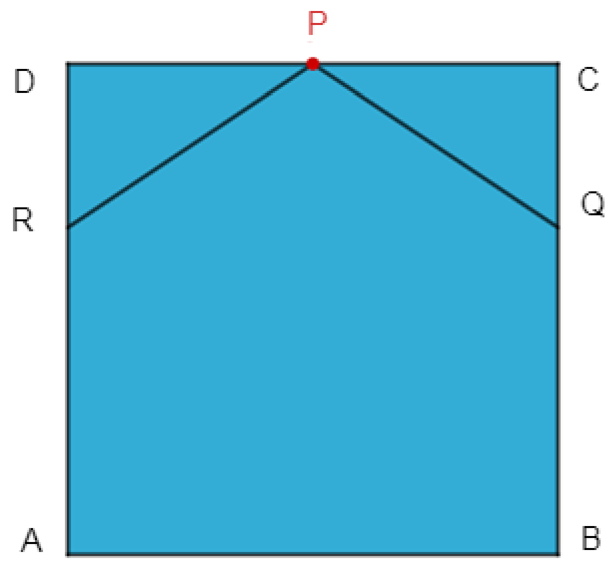
6) Calcula la distancia mínima de un punto A inaccesible pero visible a una recta l accesible.



Solucionario

- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

1) En el cuadrado $ABCD$, el punto P es el punto medio de DC, PQ y PR se han trazado de modo que $\measuredangle QPC = 30°$, $\measuredangle RPQ = 120°$. Demuestre que $PQ = PR$.



Se demostrará que los triángulos PDR y PCQ son congruentes para demostrar que $PQ = PR$.
Por construcción:

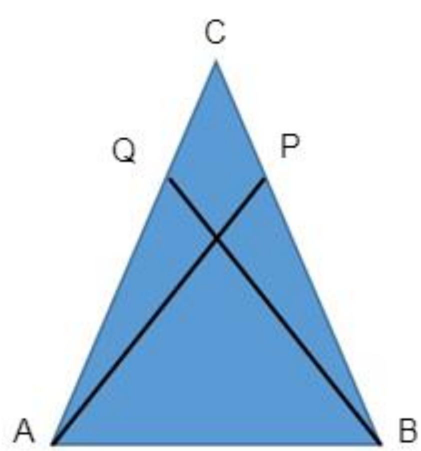
$$DP = CP$$
$$\measuredangle RDP = 90° = \measuredangle QCP$$

Y se infiere que:

$$\measuredangle DPR = 30° = \measuredangle QPC$$

Por el criterio ALA los triángulos PDR y PCQ son congruentes, por lo que $PQ = PR$

2) En el triángulo ABC se cumple que $\measuredangle BAC = \measuredangle CBA$ y $\measuredangle BAP = \measuredangle QBA$. Demuestre que $AP = BQ$.

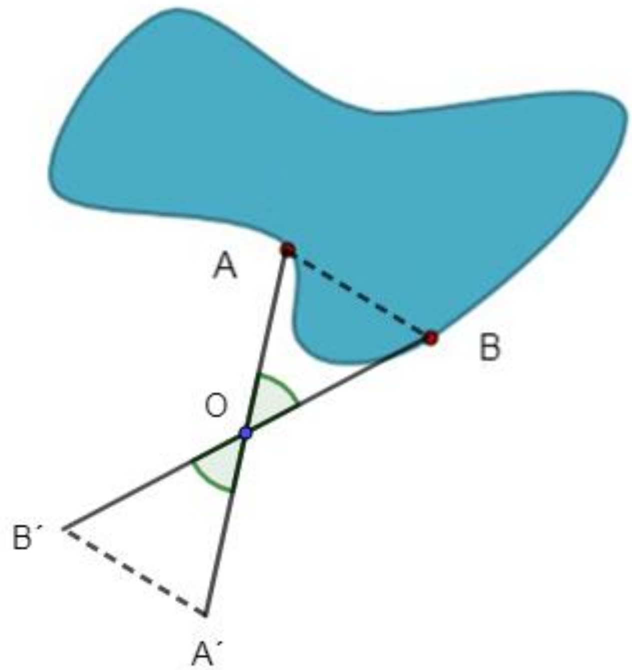


Demostrar que los triángulos BQA y APB son congruentes para demostrar que $AP = BQ$.
Por construcción:

$$\measuredangle BAP = \measuredangle QBA$$
$$BA = AB$$
$$\measuredangle CBA = \measuredangle BAC$$

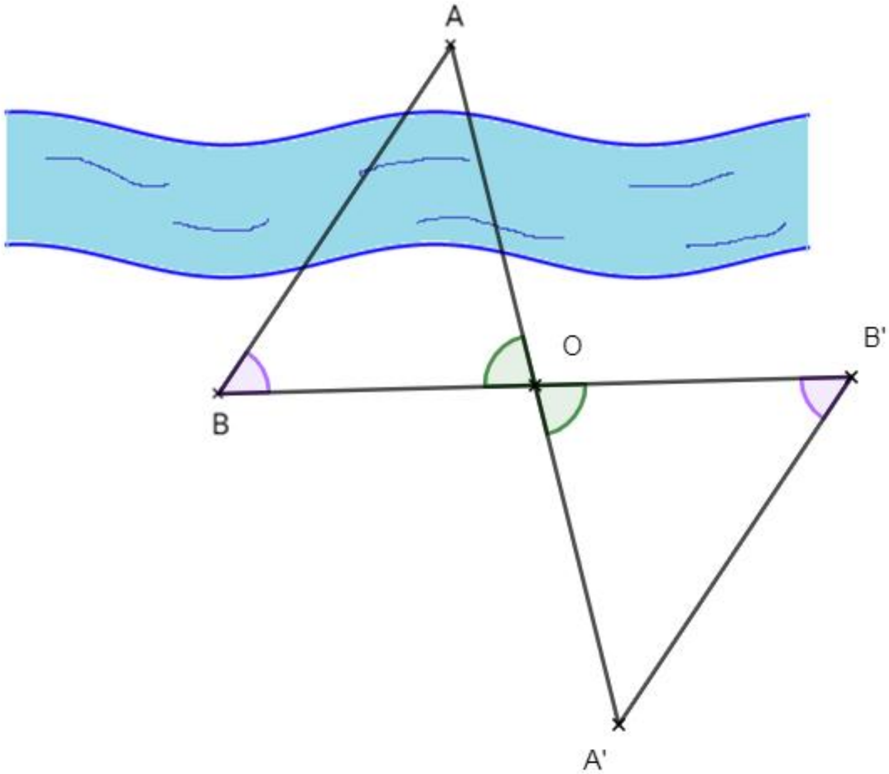
Por lo tanto los triángulos BQA y APB son congruentes, esto implica que $AP = BQ$.

3) Encontrar la distancia entre los puntos A y B usando los criterios de congruencia.



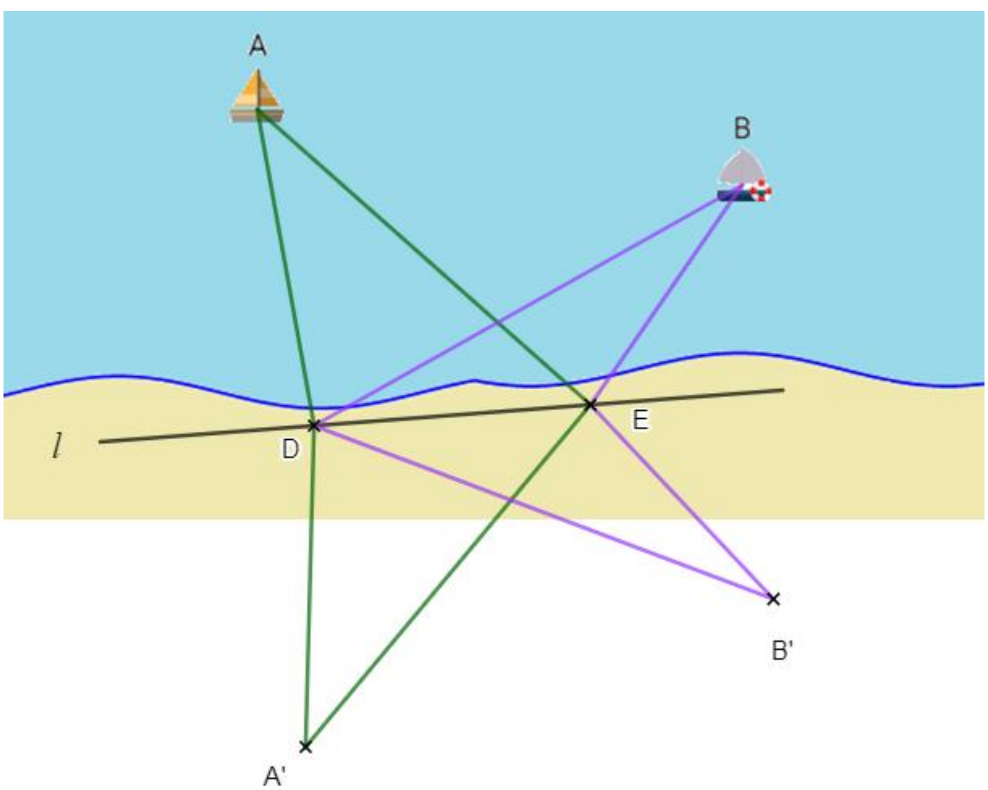
Se busca un punto fuera del lago de modo que se pueda observar los dos puntos y que no se atraviese el lago, se clava un estaca en ese punto O. Se prolonga el segmento BO hasta otro punto $B´$ de forma que $BO = B´O$. De la misma forma se prolonga el segmento AO hasta el punto $A´$de forma que $AO = A´O$.
Por construcción los triángulos AOB y $A´OB´$ son congruentes, por lo que la distancia de los puntos A y B Es la misma distancia de los puntos $A´$ y $B´$.

4) Encuentra la distancia AB entre dos puntos A y B que están separados por un obstáculo no acotado (un río) que impide la medición directa.



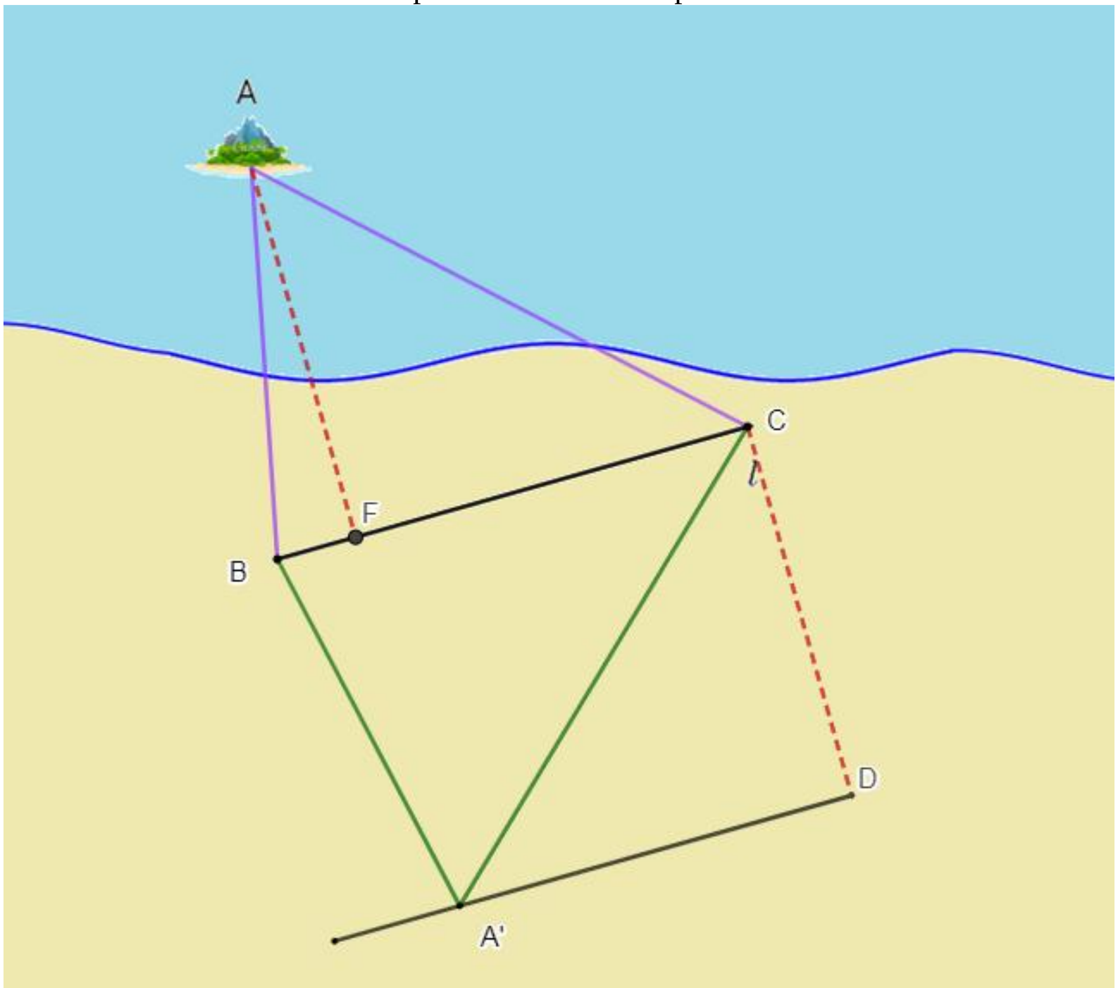
Por el criterio ALA los triángulos ABO y $A'B'O$ son congruentes. Por lo que $BA = B'A'$

5) Encuentra la distancia entre los puntos visibles pero inaccesibles (dos barcos en una costa)



Por el criterio ALA los triángulos BDE y $B'DE$ son congruentes, al igual los triángulos AED y $A'DE$ son congruentes, por lo que la distancia de A a B es la misma que la distancia de A´ a B´.

6) Calcula la distancia mínima de un punto A inaccesible pero visible a una recta l accesible.



Se toman dos puntos sobre la recta l, el triángulo ABC es congruente con el triángulo $A'BC$ por el criterio ALA. Desde el punto C se traza una perpendicular a la recta l. Sobre el punto A' se traza una paralela a la recta l. La intersección de ambas rectas la llamamos D. La distancia de la recta al punto A es la misma que la distancia del punto C al punto D.

Guion de la cápsula 3 (Propiedades para la semejanza de triángulos)

Descripción

Para trabajar con los criterios de semejanza, se decidió empezar en demostrar una propiedad y su recíproco, para así aplicarla y poder analizar de una manera más rápida, los criterios de semejanza.

La propiedad es: si una recta paralela, a uno de los lados de un triángulo, corta a los otros dos, entonces divide estos lados proporcionalmente. Para demostrarlo se trabajará con las áreas de diferentes triángulos, y con ello, se analizarán las proporciones de dichas áreas para así poder demostrar la propiedad. Finalmente se demuestra el recíproco de la propiedad.

Cabe indicar que la decisión de sólo trabajar con la demostración de la propiedad y su recíproco, es debido a que las cápsulas tienen una duración entre 5 y 7 minutos. De esta manera no se excederá el tiempo de la siguiente.

.

Guion de la cápsula 3

Sugerencias técnicas de adaptación a video.

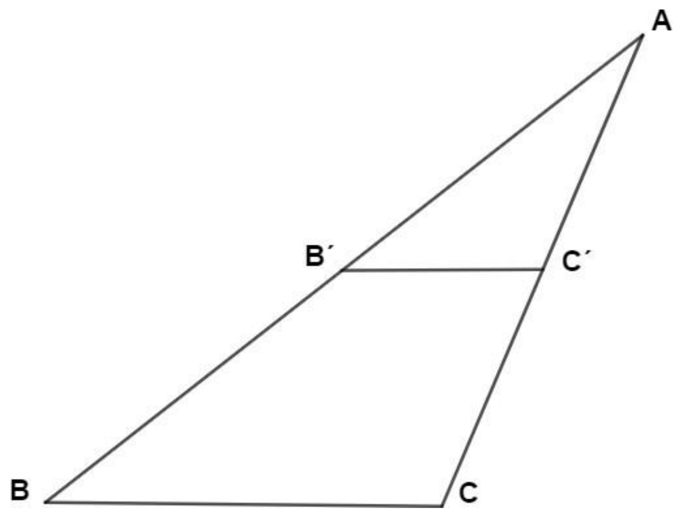
Propiedad para la semejanza de triángulos

<En pantalla, entra persona y lee el primer párrafo.>

Antes de seguir resolviendo problemas topográficos, es necesario demostrar una propiedad para demostrar los criterios de semejanza y así tener un mayor contenido matemático para aplicarlo en ese tipo de problemas.

<En pantalla, y en la parte superior, se escribirá el enunciado completo de la propiedad 1. Al terminar de leerlo en pantalla aparecerá la construcción geométrica. Finalmente, y en la parte inferior de la construcción geométrica, debe mostrarse el cociente de los lados >

Propiedad 1: si una recta paralela, a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos, entonces divide estos lados proporcionalmente. Esto es, si tenemos una figura como la siguiente:

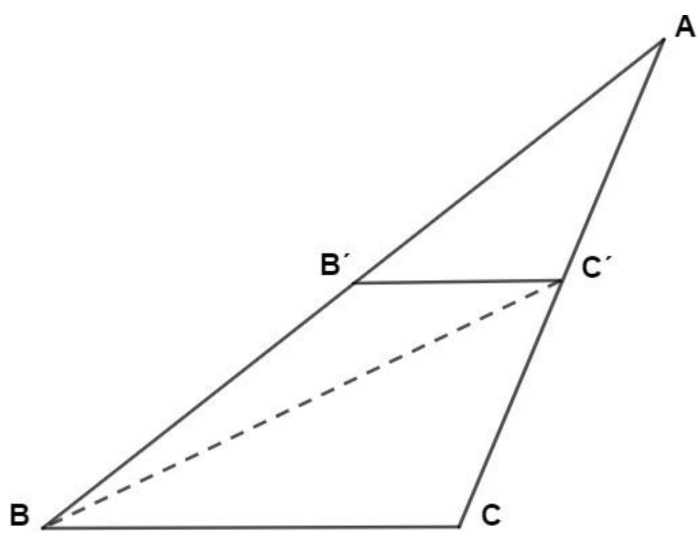


donde $B'C'$ es paralela a BC , entonces:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

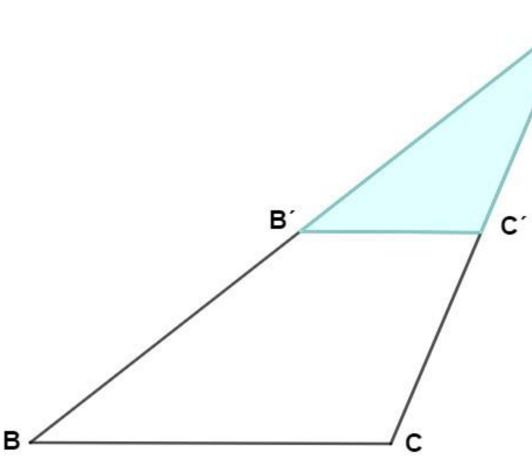
Demostración:
Tracemos el segmento BC'

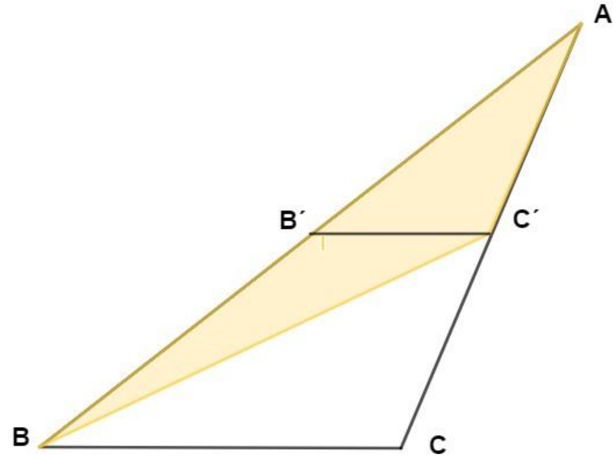
<En el momento en que se lea “el segmento BC”, en pantalla habrá una animación de la construcción geométrica anterior hasta llegar a la siguiente construcción.>



<En el momento en que se lee “los triángulos $AB´C´$ y $ABC´$”, en pantalla, deben aparecer los siguientes dos triángulos y cuidar que los lados de los triángulos, tengan las mismas dimensiones.>

Consideremos entonces los triángulos $AB´C´$ y $ABC´$





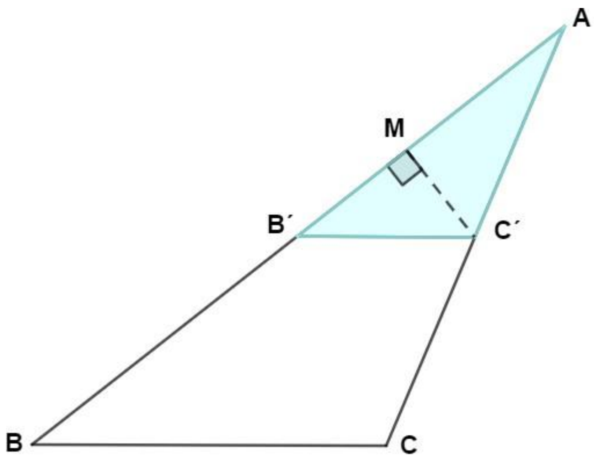
Demostremos primero que los lados de estos triángulos guardan una proporción.

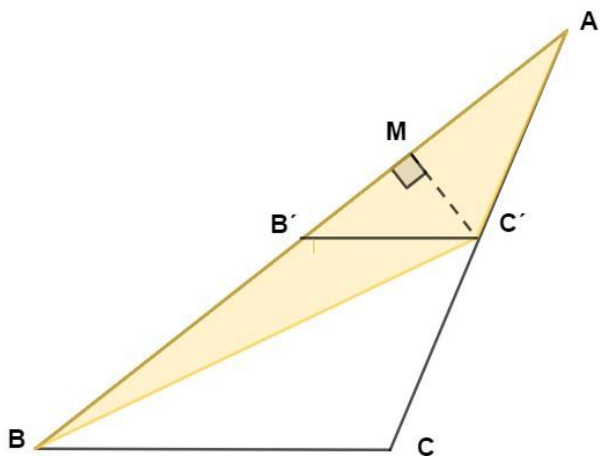
Sabemos que el área de un triángulo se obtiene como:

$$a(\Delta) = \frac{base \cdot altura}{2}$$

<En el momento en que se lea “tracemos una perpendicular”, en pantalla habrá una animación de la construcción geométrica anterior, hasta llegar a la siguiente construcción.>

Tracemos una perpendicular a AB que pase por el punto $C´$ y que corte a AB en el punto M. Notemos que el segmento $C´M$ es la altura del triángulo $AB´C´$, pero también lo es del triángulo $ABC´$.

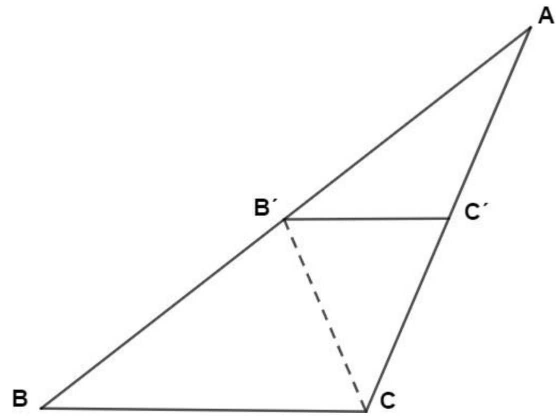
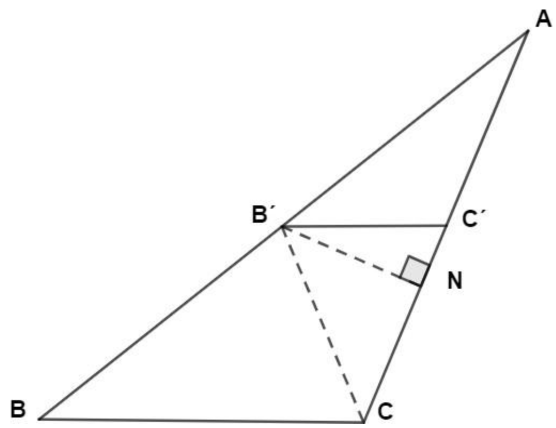
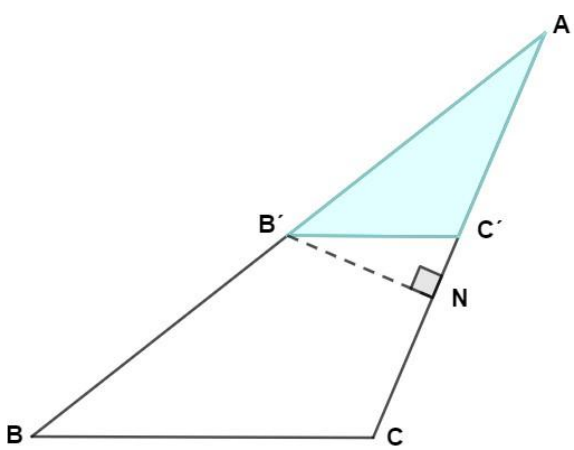
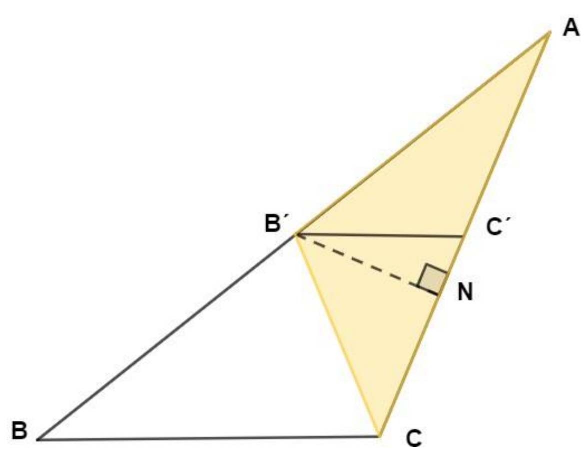




<A un lado de la construcción geométrica, debe estar el cociente.
Mientras se va leyendo el cociente, irá resaltando las partes se que indican en la construcción geométrica.>

Consideremos las razones de las áreas de los triángulos $ABC´$ y $AB´C´$:

$$\frac{a(\Delta ABC´)}{a(\Delta AB´C} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot C´M}{\frac{1}{2}AB´ \cdot C´M} = \frac{AB}{AB´}$$

<En el momento en que se lea “el segmento $B´C$”, en pantalla debe estar el primer triángulo de esta cápsula y desde ese triángulo se hará una animación del trazo del segmento $B´C$, hasta llegar a la siguiente construcción.>	Ahora tracemos el segmento $B´C$, para generar el triángulo $\Delta AB´C$ 
<En el momento en que lee “tracemos una perpendicular”, en pantalla habrá una animación de la construcción geométrica anterior, hasta llegar a la siguiente construcción.>	Tracemos también una perpendicular al segmento AC que pase por el punto $B´$ y obtenemos el segmento $B´N$, con N en el lado AC. 
<Al terminar de leer el párrafo aparecerán en pantalla los siguientes dos triángulos con sus respectivos datos.>	El segmento $B´N$ es la altura del triángulo $AB´C$ pero también lo es del triángulo $AB´C´$, pues es un segmento perpendicular a su base que pasa por el vértice opuesto.  

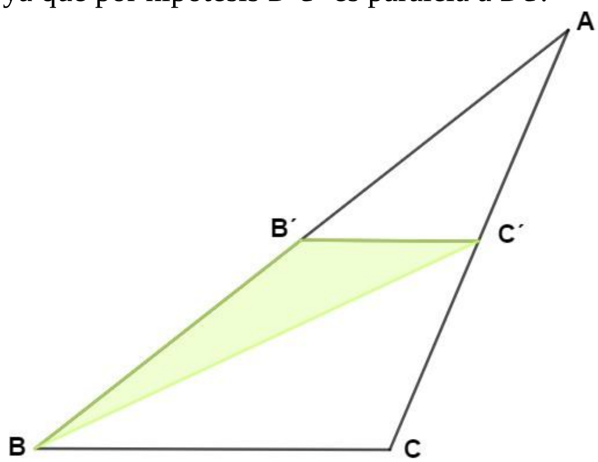
<En un lado de la construcción geométrica estará escrito el cociente. Mientras se va leyendo el cociente, se irá resaltando las partes que se indican.>

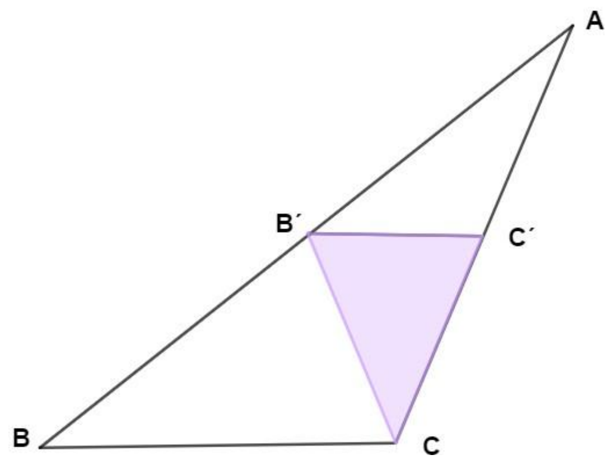
Obtengamos las razones de las áreas de los dos triángulos:

$$\frac{\alpha(\Delta AB'C)}{\alpha(\Delta AB'C')} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot B'N}{\frac{1}{2}AC' \cdot B'N} = \frac{AC}{AC'}$$

<Al momento de leer la información del párrafo, en pantalla se mostrarán los siguientes dos triángulos con sus respectivos datos.>

Notemos que $\alpha(\Delta B'BC') = \alpha(\Delta C'B'C)$ ya que tienen la misma base $B'C'$ y la misma altura, ya que por hipótesis $B'C'$ es paralela a BC.





Por lo tanto, las áreas de los triángulos ABC' y $AB'C$ son la misma. Entonces los cocientes:

<A un lado de la construcción geométrica estarán los dos cocientes. Posteriormente al leer el siguiente renglón en pantalla aparecerá el cociente que está igualado a uno.>

$$\frac{\alpha(\Delta ABC')}{\alpha(\Delta AB'C')} \qquad\qquad \frac{\alpha(\Delta AB'C)}{\alpha(\Delta AB'C')}$$

arrojan el mismo valor, por lo que al dividirlos entre ellos dará uno

$$\frac{\frac{\alpha(\Delta ABC')}{\alpha(\Delta AB'C')}}{\frac{\alpha(\Delta AB'C)}{\alpha(\Delta AB'C')}} = 1$$

Al simplificar el cociente usando los valores que encontramos queda:

$$\frac{\frac{AB}{AB'}}{\frac{AC}{AC'}} = 1$$

y entonces

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}.$$

Con esto se demuestra que si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos, entonces divide a estos lados proporcionalmente. Ahora demostremos el recíproco de la propiedad, es decir:

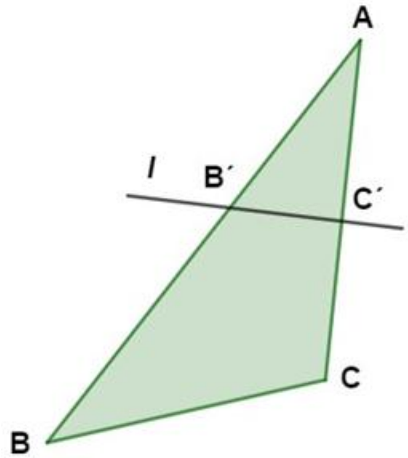
<En pantalla, y en la parte superior estará escrito el enunciado “Si una recta divide dos lados de un triángulo proporcionalmente, entonces es paralela al tercer lado” >

Si una recta divide dos lados de un triángulo proporcionalmente, entonces es paralela al tercer lado.

<Mientras se va leyendo el enunciado de la demostración, se irá generando la construcción geométrica. En la misma pantalla estará la igualdad de los cocientes.>

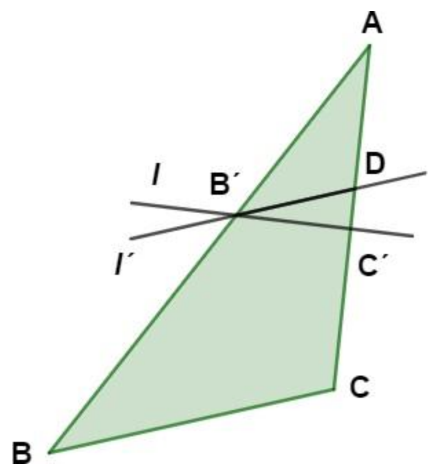
Demostración: Sea ABC un triángulo y una recta l tal que corta a los lados AB y AC en los puntos $B´$ y $C´$ respectivamente en la misma proporción:

$$\frac{AB}{AB´} = \frac{AC}{AC´}$$



<En el momento de leer “la recta l´”, en pantalla habrá una animación de la construcción geométrica anterior, hasta llegar a la siguiente construcción.>

Consideremos la recta $l´$ paralela a BC que pasa por $B´$ y supongamos que intersecta a AC en el punto D



Como $l´$ es paralela a BC, se cumple la propiedad 1 (demostrada anteriormente)

<Conforme se va leyendo la información, en pantalla aparecerán las igualdades.>

$$\frac{AB}{AB´} = \frac{AC}{AD} \quad ,$$

pero por hipótesis se tiene:

$$\frac{AB}{AB´} = \frac{AC}{AC´}$$

Entonces $AC´ = AD$ y por lo tanto $C´ = D$.

Así las rectas $l´$ y l tienen dos puntos en común y en consecuencia las rectas coinciden. Ya que $l´$ por construcción es paralela a BC, entonces $B´C´$ es paralela a BC.

<Termina cápsula.>

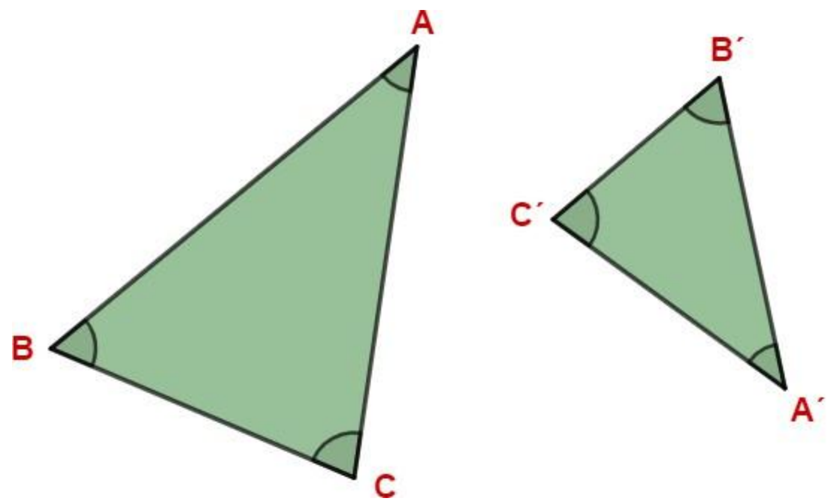
Con esto se demuestra el regreso de la propiedad. A partir de ella se obtendrán en la siguiente cápsula los criterios de semejanza.

Guion de la cápsula 4 (Semejanza)

Descripción
Para resolver problemas topográficos por medio de criterios de congruencia de triángulos, es necesario tener el espacio suficiente para hacer las construcciones. En la práctica algunas veces no es viable ya que por las limitaciones del terreno no alcanza el espacio para la construcción de triángulos congruentes. Por esto se requiere otra forma de poder resolver estos problemas, la semejanza de triángulos.

En esta cápsula se define la semejanza de triángulos y se demuestran los criterios de semejanza, a excepción de uno, el criterio LLL (Lado, Lado, Lado) ya que este se deja de tarea para que los profesores sigan desarrollando su pensamiento lógico.

Guion de la cápsula 4

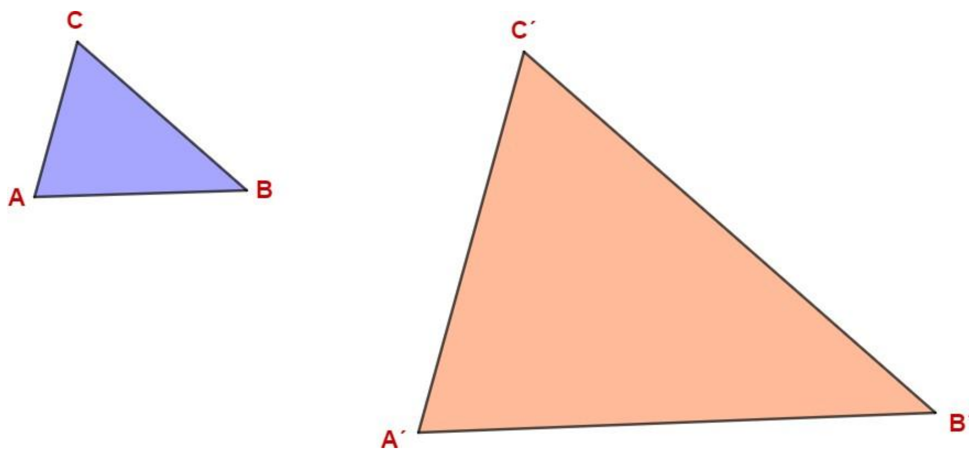
Sugerencias técnicas de adaptación a video.	**Semejanza**
<En pantalla, entra persona y lee lo que aparece en los dos primeros párrafos.>	Ya vimos que los criterios de congruencia nos permitieron resolver problemas topográficos. Sin embargo, en todos los casos es necesario generar un triángulo con las mismas magnitudes que el original del cual buscamos información. Esto puede traer complicaciones debido a que, en términos prácticos, no podemos garantizar la construcción de la copia del triángulo original y medirla, ya sea por la limitación de nuestras herramientas o por las características del entorno. De hecho, en general, cuando se trabaja en un problema de topografía o de diseño (una casa, una carretera, mapas, puentes, etc.) en lugar de trabajar con las medidas reales involucradas en el problema, se hacen dibujos a escala y el diseño hecho a escala nos permite conocer las medidas reales que tendrá el objeto diseñado. Tomando esta idea, podemos encontrar soluciones más prácticas.
<Al momento en que la persona dice “ejemplo”, en pantalla, saldrán los dos triángulos con sus respectivos datos.>	Diremos que dos o más triángulos son **semejantes** entre sí, si sus ángulos correspondientes miden lo mismo y sus lados homólogos son proporcionales. Ejemplo: 
<Mientras aparecen en pantalla las igualdades, se irán leyendo.>	$\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A'$ $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$
<En el momento en que se lee “usaremos para semejanza es”, debe aparecer el símbolo en pantalla. Al terminar se mostrará en pantalla la semejanza que aparece después del párrafo.>	Así como establecimos criterios para determinar cuándo dos triángulos son congruentes, vamos a establecer criterios para determinar cuándo dos triángulos son semejantes. La notación que usaremos para semejanza es $\sim$, por lo que la frase “el triángulo ABC es semejante con el triángulo $A'B'C'$ ” se indicará de la siguiente forma: $ABC \sim A'B'C'$

<En pantalla, y en la parte superior, estará escrito el enunciado completo.
AL terminar de leer el enunciado saldrán en la misma pantalla los siguientes dos triángulos.>

Analicemos el siguiente enunciado “Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, también tienen sus lados proporcionales”. Demostremos que es verdadero el enunciado.

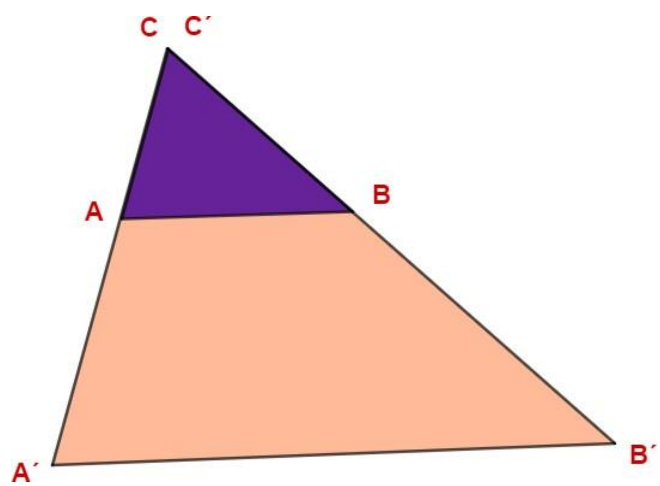
Demostración.

Sean $ABC\ y\ A'B'C'$ dos triángulos que tienen sus ángulos correspondientes iguales.



<Mientras se va leyendo el enunciado, habrá una animación de los dos triángulos anteriores, hasta llegar a los dos siguientes triángulos.>

Coloquemos el triángulo $A'B'C'$ debajo del triángulo ABC de tal manera que C' coincida con C, la recta $A'C'$ coincida con la recta AC y la recta $C'B'$ con la recta CB. Esto se puede hacer ya que $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$ por hipótesis.



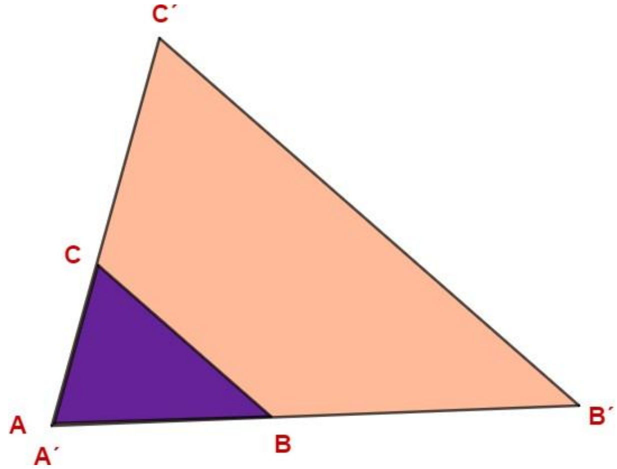
<Al terminar de leer la oración saldrá en pantalla la igualdad de las dos razones.>

Además como $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ y $\measuredangle CBA = \measuredangle C'B'A'$, la recta $A'B'$ es paralela a AB y por la propiedad 1 de la cápsula anterior tenemos también que:

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$$

<Mientras se lee el enunciado habrá una animación de los dos triángulos anteriores, hasta llegar a los dos siguientes triángulos.>

Análogamente coloquemos el triángulo $A'B'C'$ sobre el triángulo ABC de manera que el $\measuredangle B'A'C'$ coincida con $\measuredangle BAC$.



Entonces $C'B'$ es paralela a CB y por la propiedad 1 de la cápsula anterior:

<En el momento en que se van leyendo cada una de las igualdades, en pantalla se irán resaltando los lados que se indican en la oración.>

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$$

Por lo tanto

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B'}{CB} \quad .$$

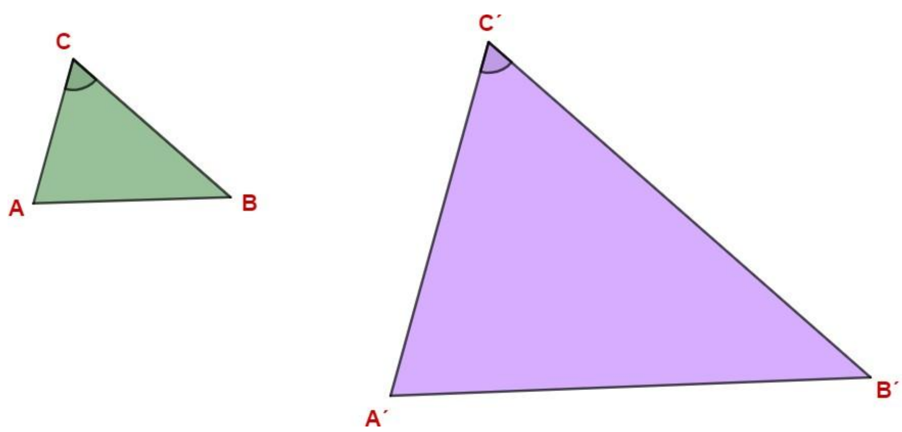
En consecuencia, como los lados están en proporción, los triángulos son semejantes. El enunciado que acabamos de demostrar nos da el primer criterio se semejanza, el criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo que se abrevia como AAA.

<En pantalla, y en la parte superior, estará escrito el enunciado completo a demostrar. Después de leerlo, aparecerán en la misma pantalla los dos triángulos y las dos igualdades.>

Analicemos el siguiente enunciado “Dos triángulos que tienen un ángulo igual y los dos lados adyacentes a éste proporcionales son semejantes” es decir, tienen los otros dos ángulos respectivamente iguales y el otro lado está en la misma proporción. Demostremos que es verdadero el enunciado.

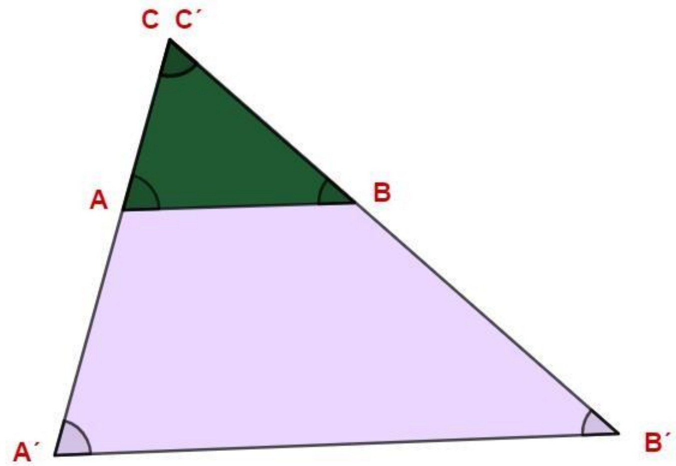
Sean dos triángulo, ABC y $A'B'C'$ tales que:

$$\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B' \qquad y \qquad \frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'} \quad .$$



<Mientras se va leyendo el enunciado, habrá una animación de los dos triángulos anteriores, hasta llegar a los dos siguientes triángulos.>

Como $\measuredangle ACB = \measuredangle A´C´B´$ podemos colocar el triángulo $A´B´C´$ debajo el triángulo ABC de tal manera que $C´A´$ coincida con CA y $C´B´$ con CB.



Como

$$\frac{CA}{C´A´} = \frac{CB}{C´B´}$$

<En el momento en que se va diciendo cada una de las igualdades, en pantalla irán apareciendo.>

Y son lados proporcionales, entonces por la propiedad 2 de la cápsula anterior, $A´B´$ es paralela a AB, y por tanto $\measuredangle BAC = \measuredangle B´A´C´$ y $\measuredangle CBA = \measuredangle C´B´A´$.

Esto indica que los triángulos $A´B´C'$ y ABC tienen sus ángulos iguales y por el criterio de semejanza AAA sucede que:

$$\frac{CA}{C´A´} = \frac{CB}{C´B´} = \frac{AB}{A´B´} \quad .$$

Por lo anterior podemos decir que son semejantes los triángulos ABC y $A´B´C´$. El enunciado que acabamos de demostrar nos da el segundo criterio de semejanza, el criterio Lado, Ángulo, Lado que se abrevia como LAL.

<En pantalla, entra la persona y lee lo que aparece en el párrafo de la derecha.>

Existe un criterio más de semejanza, el criterio Lado, Lado, Lado que se abrevia como LLL, *y* que indica que si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, son semejantes; es decir, tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

<Termina cápsula.>

¡Intenta demostrarlo! Puedes usar todo lo que ya ha sido demostrado hasta ahora.

Tarea 3

Descripción

Como se desea que los profesores noten la importancia de usar los criterios de congruencia y semejanza se sigue dejando de tarea ejercicios topográficos.

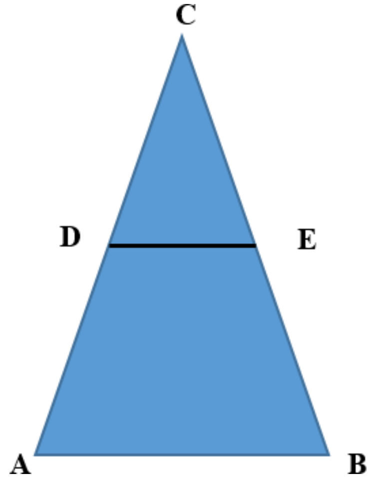
También se deja de tarea la demostración del criterio de semejanza LLL (Lado, Lado, Lado), esto con el fin de que sigan practicando la demostración matemática.

Tarea 3

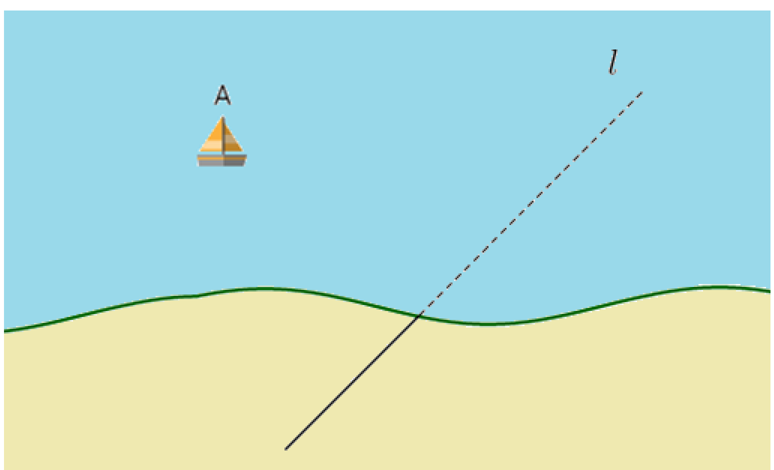
- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

1) Demuestra que si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales son semejantes; es decir, tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

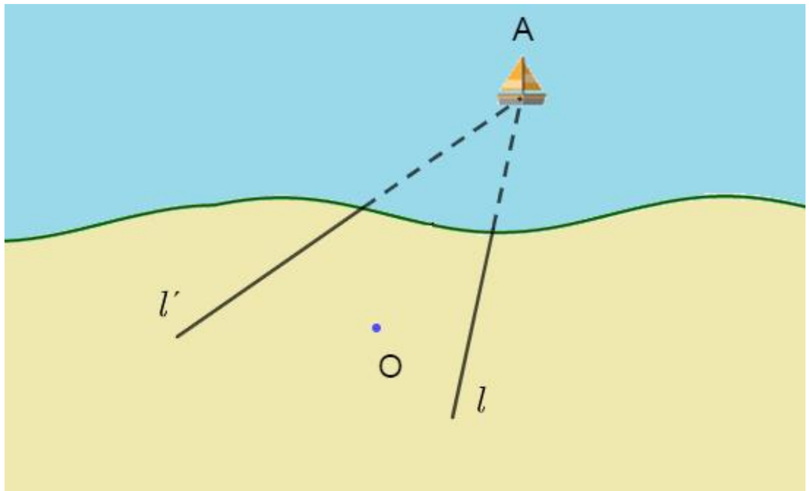
2) En un triángulo ABC, $CA = CB$ y DE es paralela a AB. Demuestra que $CD = CE$.



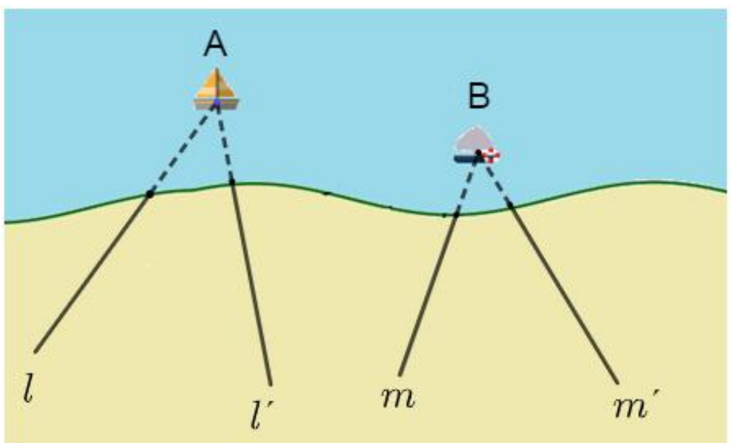
3) Traza una paralela a una recta accesible l, que pase por un punto inaccesible A.



4) Dos rectas l y l' accesibles se intersectan en un punto invisible e inaccesible A. Encuentra la distancia entre A y un punto accesible O.



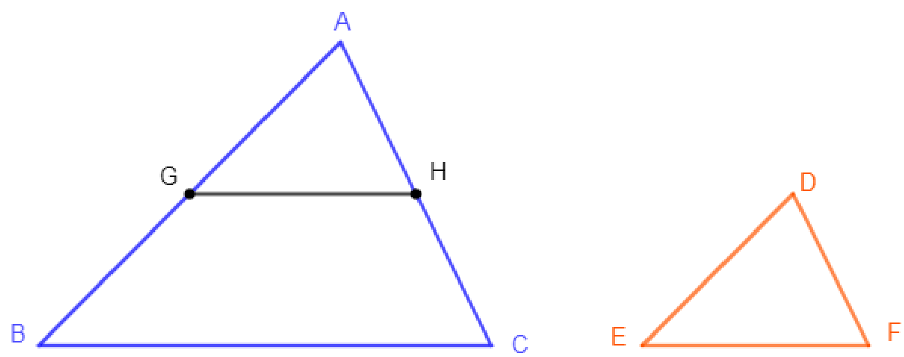
5) Encuentra la distancia entre dos puntos invisibles e inaccesibles A y B, cada uno de los cuales está dado por la intersección de dos rectas accesibles, l con l' y m con m' respectivamente.



Solucionario

- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

1) Demuestra que si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales son semejantes; es decir, tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.



Como los triángulos ABC y DEF sus lados son proporcionales se tiene que:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$$

Se toman dos puntos G y H en cada uno de los lados AB y AC de modo que $DE = AG$ y $DF = AH$. Sustituyendo en la igualdad de los lados correspondientes queda:

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}$$

Como los triángulos ABC y AGH comparten el mismo ángulo $\measuredangle BAC$, son semejantes por el criterio ALA. Esto implica que:

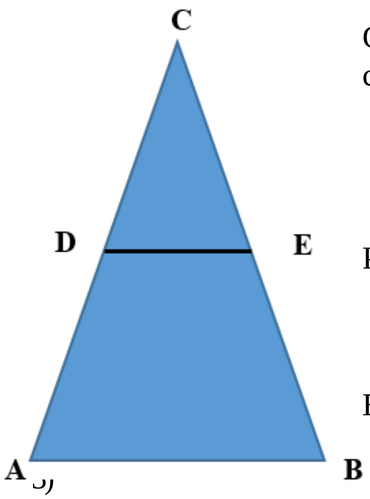
$$\frac{BC}{GH}=\frac{AB}{AG} \quad \dots (1)$$

Por hipótesis

$$\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{AB}{AG} \quad \dots (2)$$

Igualando y despejando las igualdades 1 y 2 se obtiene $GH = EF$. Por lo que los triángulos AGH y DEF son congruentes. Por todo lo anterior los triángulos ABC y DEF son semejantes.

2) En un triángulo ABC, $CA = CB$ y DE es paralela a AB. Demuestra que $CD = CE$.



Como DE es paralela a AB, $\measuredangle BAC = \measuredangle EDC$ y $\measuredangle CBA = \measuredangle CED$, y como comparten el $\measuredangle ACB$, los triángulos CAB y CDE son semejantes, por lo que:

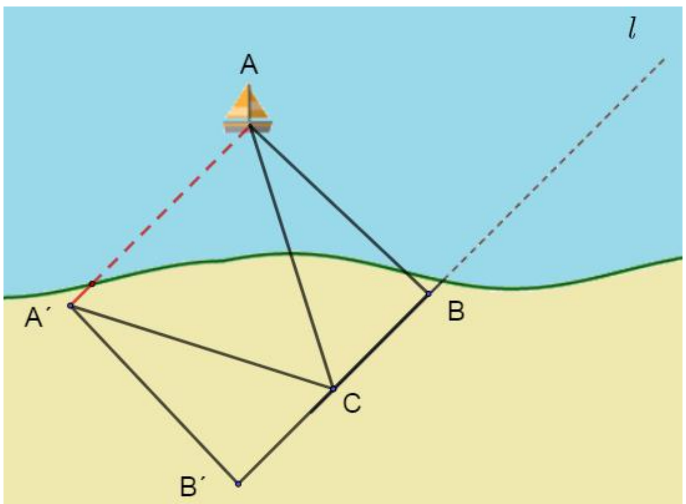
$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$$

Por hipótesis $CA = CB$, entonces la igualdad anterior queda:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CA}$$

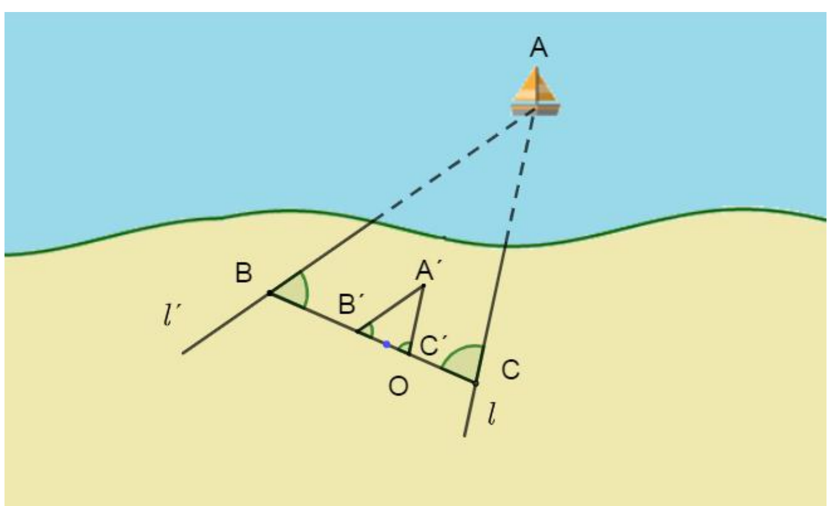
Esto implica que $CD = CE$.

3) Traza una paralela a una recta accesible l, que pase por un punto inaccesible A.



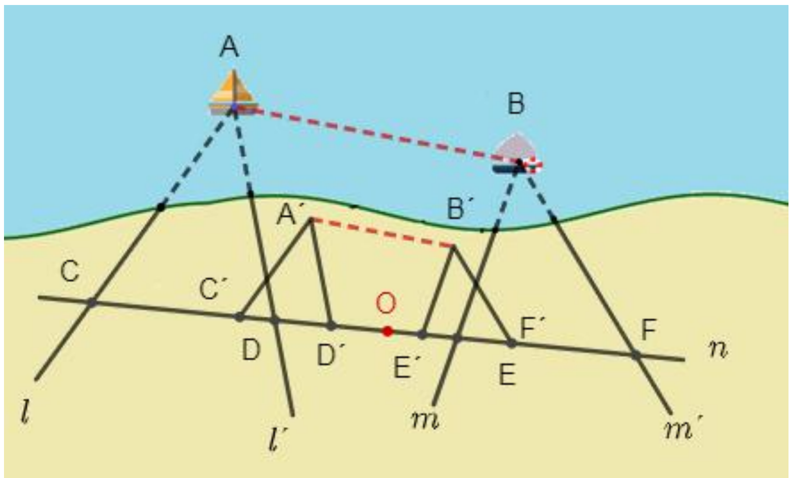
Sobre la línea l, se buscan dos puntos, con ellos se forma el triángulo ABC. Se genera otro triángulo $A´B´C´$ que sea congruente a él y que el punto $A´$ aparezca en el lado de la playa. Finalmente se unen los puntos $AA´$ y por construcción el segmento $A´A$ es paralelo a la recta l.

4) Dos rectas l y $l´$ accesibles se intersectan en un punto invisible e inaccesible A. Encuentra la distancia entre A y un punto accesible O.



Se toma un punto B en la línea $l´$ y se unen los puntos B y O con un segmento de línea que intersecta a la recta l. El punto de intersección lo llamaremos C. Se debe construir un triángulo $A´B´C´$ que sea semejante al triángulo ABC y que el triángulo $A´B´C´$ esté dibujado sobre la playa. Como los triángulos son semejantes se tiene que medir la distancia de O a $A´$ y multiplicar esa cantidad por la razón en la que están los lados de los triángulos semejantes.

5) Encuentra la distancia entre dos puntos invisibles e inaccesibles A y B, cada uno de los cuales está dado por la intersección de dos rectas accesibles, l con $l´$ y m con $m´$ respectivamente.



Se traza una línea n que corte a las cuatro rectas. Se obtiene el punto medio O del segmento CF. Se obtienen lo puntos $C´, D´, E´$ y $F´$ que son los puntos medios de los segmentos CO, DO, EO y FO respectivamente. Se trazan los triángulos $A´C´D´$ y $B´E´F´$ de modo que:

$$\measuredangle DCA = \measuredangle D´C´A´ \qquad \measuredangle FEB = F´E´B´$$
$$\measuredangle ADC = A´D´C´ \qquad \measuredangle BFE = \measuredangle B´F´E´$$

Los puntos $A´$ y $B´$ se obtienen a partir de los ángulos ya medidos y prolongando los lados que conforman a cada ángulo hasta que se intersecten.

Por construcción los triángulos ACD y $A´C´D´$ son semejantes por el criterio AAA. Por el mismo criterio los triángulos BEF y $B´E´F´$ son semejantes.

Además por construcción los triángulos $A´C´D´$ y $B´E´F´$ están en proporción dos a uno con la construcción original, es por ello que la distancia de A a B es la misma distancia de $A´$ a B' multiplicada por dos.

Explicación general de las cápsulas relacionadas con el teorema de Pitágoras

- **Guion de la cápsula 5**: Se empieza con una demostración del teorema de Pitágoras usando la semejanza de triángulos. Posteriormente se da otra demostración del teorema usando las relaciones entre áreas. Finalmente se pide a los profesores que den una demostración al teorema diferente a las que vienen en la cápsula.

- **Tarea 4**: Consta de dos ejercicios, en el primero, se pide que ejecuten una prueba al teorema de Pitágoras. Y en el segundo se da una construcción con la cual deben demostrar el teorema de Pitágoras.

- **Guion de la cápsula 6**: Se parte de una exploración histórica del teorema de Pitágoras. Posteriormente se trabaja con las demostraciones del teorema que propusieron Pappus de Alejandría, James A. Garfield y Leonardo da Vinci.

- **Guion de la cápsula 7**: Se empieza con la demostración del recíproco del teorema de Pitágoras. Finalmente se revisa la generalización del teorema.

- **Tarea 5**: Se compone de tres ejercicios que se deben de resolver con la generalización del teorema de Pitágoras. Uno de ellos es el de las lúnulas de Hipócrates.

Cada una de las cápsulas y tareas del teorema de Pitágoras están contenidas en el material que generó en su tesis mi compañera Nayeli Camacho Olvera.

A continuación se sigue desarrollando los contenidos del módulo 3 trigonometría.

Módulo 3. Trigonometría

La necesidad de resolver problemas topográficos, como los que se analizaron en el módulo anterior, da como resultado el uso de la trigonometría. Por ejemplo, en el GPS, se usa la triangulación para determinar distancias[3].

Por la importancia que tiene la trigonometría, es preciso que los profesores fortalezcan su conocimiento y desarrollen un camino más dinámico en la enseñanza de esta rama matemática, para que lo puedan aplicar en sus clases, y así alentar a sus alumnos a estudiar y comprender los temas. Se busca no generar un ambiente en donde los alumnos sólo vean a la trigonometría llena de fórmulas, sin saber para qué se usan o su importancia.

A partir de los temas vistos en el módulo 2, se trabajará con las razones trigonométricas, con las identidades y con las leyes de senos y cosenos.

De la misma forma que los demás módulos, uno de los propósitos de éste, es acercar a los profesores a la formalidad de los temas vistos en trigonometría y a partir de ello promover en los alumnos empatía con estos temas y que no sólo se aprendan la fórmula.

[3] Castro J., Sepúlveda S., Guevara D. & López O.. (2019, Junio 1). *Sistema de geolocalización de vehículos a través de la red GSM/GPRS y tecnología Arduino*. EIA, 16, pp. 1-13.

Guion de la cápsula 1 (Razones trigonométricas)

Descripción

En esta cápsula se indica que los problemas topográficos, que se trabajaron en el módulo anterior, también se pueden resolver con ayuda de la trigonometría. Para ello se empieza definiendo la razón trigonométrica $seno$ a partir de un triángulo rectángulo. Posteriormente se demostrará, con semejanza de triángulos y con el teorema de Pitágoras, que la razón tiene una relación biunívoca entre un ángulo agudo del triángulo y el cociente de los lados que definen al $seno$. Finalmente se definen las razones trigonométricas $coseno$ y $tangente$. Y sus inversos multiplicativos $cotangente$, $secante$ y $cosecante$.

Esto se hizo con el fin de que los docentes puedan identificar esta relación entre el ángulo y la razón de los lados del triángulo, para así poder generalizar, en las siguientes cápsulas, razones trigonométricas para cualquier ángulo.

Guion dela cápsula 1

Sugerencias técnicas de adaptación a video.

Razones trigonométricas

<En pantalla entra persona y leerá los tres primeros párrafos.>

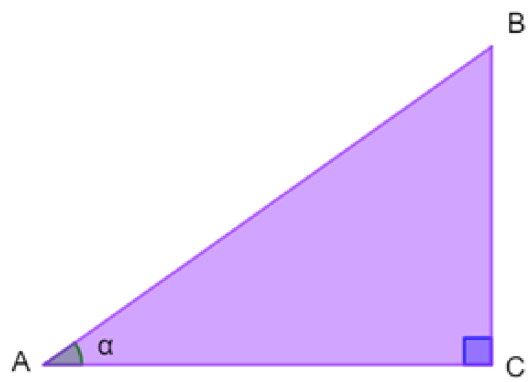
En los problemas topográficos, como los que se trabajaron en el módulo anterior, se puede usar las razones trigonométricas, o las leyes de senos y cosenos, o alguna identidad trigonométrica, para resolver dichos problemas. Este camino puede ser más práctico que usar sólo congruencia y semejanza de triángulos.

Recordemos que la trigonometría estudia las relaciones numéricas que existen entre los lados y los ángulos del triángulo. El estudio de estas relaciones puede ser abordado desde las herramientas con las que ya contamos: semejanza y el teorema de Pitágoras, de hecho para algunos autores, “La trigonometría existe porque existe el teorema de Pitágoras”[1].

Observemos que todo triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos trazando una altura, por tanto, el análisis de las relaciones que existen entre medidas de ángulos y lados de cualquier triángulo, lo haremos estudiando estas relaciones en triángulos rectángulos.

<Al leer “figura α es el ∡*CAB*”, en pantalla aparecerá el triángulo rectángulo junto con los datos que aparecen en él.>

Por ejemplo, en la siguiente figura α es el $\measuredangle CAB$.



Definimos la razón trigonométrica $seno$ del ángulo α como:

<En pantalla y debajo del triángulo, se escribirá la igualdad del seno de alfa.>

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{BC}{AB}$$

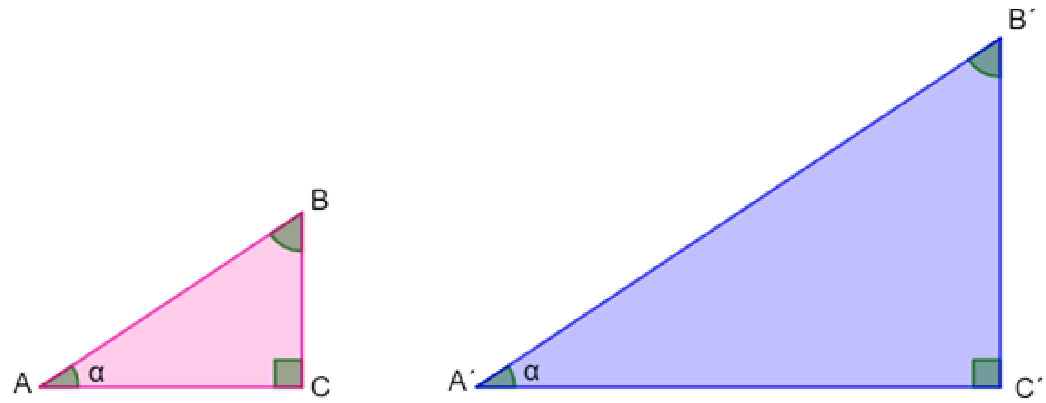
Esto es, a cada ángulo α, entre $0°\ y\ 90°$ le asociamos un número que se obtiene de dividir el *cateto opuesto entre hipotenusa.*

Es necesario saber si esta relación entre los catetos y el ángulo α es constante, es decir que si otro triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos igual al ángulo α, el sen α es el mismo número.

<Al leer “tenemos dos triángulos rectángulos”, en pantalla aparecerán los dos triángulos siguientes a este párrafo, junto con sus respectivos datos.>

Supongamos por ejemplo que tenemos dos triángulos rectángulos, ABC y $A'B'C'$ tales que $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B' = \alpha$ y que las longitudes de sus lados respectivos sean diferentes.

[1] González Urbaneja, Pedro, *Pitágoras. El filósofo del número,* Nivola, p. 154



Los triángulos $ABC \; y \; A´B´C´$ cumplen que:

<Mientras se sigue con la lectura, en pantalla, y junto los dos triángulos, estarán las tres igualdades.>

$$\measuredangle CAB = \measuredangle C´A´B´ = \alpha$$

$$\measuredangle BCA = \measuredangle B´C´A´ = 90°$$

$$\text{Por lo tanto } \measuredangle ABC \; = \measuredangle A´B´C´$$

Por el criterio AAA los dos triángulos son semejantes y por ello se cumple:

$$\frac{BC}{B´C´} = \frac{AB}{A´B´} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{B´C´}{A´B´}$$

<En pantalla y juntos con los dos triángulos aparecerán las siguientes dos igualdades.>

Por lo tanto el $sen \; \alpha$, arroja el mismo valor en ambos triángulos.

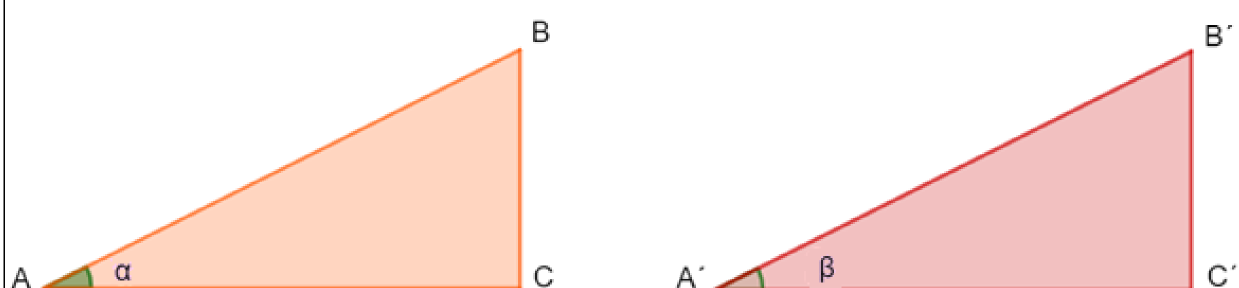
$$sen \; \alpha = \frac{BC}{B´C´} = \frac{B´C´}{A´B´}$$

Con esto queda demostrado que a cada ángulo α se le asocia un único número, $sen \; \alpha$. Ahora veremos que a cada número $sen \; \alpha$ le asociamos un único ángulo α entre 0° y 90°.

Supongamos que existen dos ángulos $0 < \alpha < 90°$ y $0 < \beta < 90°$, los cuales cumplen $sen \; \alpha = sen \; \beta$. Demostremos que $\alpha = \beta$.

<Mientras se va leyendo el enunciado saldrán en pantalla los dos triángulos.>

Construyamos los triángulos rectángulos ABC y $A´B´C´$ que tengan a los ángulos $\alpha = \measuredangle BAC$ y $\beta = \measuredangle B´A´C´$ respectivamente como uno de sus ángulos no rectos y que cumplen $sen \; \alpha = sen \; \beta$.



<Mientras se va leyendo, en pantalla se escribirán cada una de las cuatro igualdades.>	Tenemos que en el triángulo ABC $$sen\ \alpha = \frac{BC}{AB}$$ Y en el triángulo $A'B'C'$ $$sen\ \beta = \frac{B'C'}{A'B'}$$ Por hipótesis sabemos que $sen\ \alpha = sen\ \beta$, esto implica que $$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$ Por lo que al agrupar lados correspondientes queda; para un valor de k: $$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$ Como los triángulos ABC y $A'B'C'$ son rectángulos, se aplicará el teorema de Pitágoras a ambos triángulos.
<Mientras se va leyendo, en pantalla se escribirán cada una de las igualdades.>	En el triángulo ABC — En el triángulo $A'B'C'$ Se tiene $AB^2 = AC^2 + BC^2$ — $A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2$ Al despejar AC^2 y $A'C'^2$ queda $AC^2 = AB^2 - BC^2$ — $A'C'^2 = A'B'^2 - B'C'^2$ Sabemos que $\frac{BC}{B'C'} = k$ — $\frac{AB}{A'B'} = k$ Por lo que: $BC = k(B'C')$ — $AB = k(A'B')$ Sustituyendo en AB y BC en $$AC^2 = AB^2 - BC^2$$ Da $$AC^2 = k^2(A'B')^2 - k^2(B'C')^2$$

<Cada una de las igualdades irán apareciendo conforme se leen.>

Factorizando:

$$AC^2 = k^2[(A'B')^2 - (B'C')^2]$$

Dividiendo a cada lado de la igualdad con

$$A'C'^2 = A'B'^2 - B'C'^2$$

da

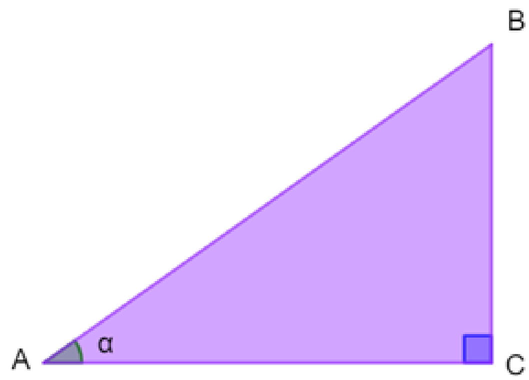
$$\frac{AC^2}{A'C'^2} = \frac{k^2[(A'B')^2 - (B'C')^2]}{A'B'^2 - B'C'^2} = k^2 \Rightarrow \frac{AC^2}{A'C'^2} = k^2 \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = k$$

Entonces los tres lados de los dos triángulos son proporcionales y por el criterio LLL son semejantes. Con ello se demuestra que $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, es decir $\alpha = \beta$.

Con todo lo anterior, observemos que el valor de la razón *cateto opuesto sobre hipotenusa* en un triángulo rectángulo depende sólo de los ángulos y para cada ángulo diferente, entre 0° y 90° este valor es diferente.

<Después de leer “otras razones trigonométricas”, saldrá en pantalla tanto el triángulo como las razones trigonométricas coseno y tangente.>

Podemos definir otras razones trigonométricas para el ángulo α como:



$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{CA}{AB}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{BC}{CA}$$

Además de sus inversos multiplicativos:

<En pantalla se escribirán las razones trigonométricas cotangente, secante y cosecante, en el momento en que se van leyendo.>

$$\cot\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{CA}{BC}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{AB}{CA}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{AB}{BC}$$

<Termina cápsula.>

La demostración para el coseno y la tangente de un ángulo entre 0° y 90° es análoga a la que dimos para el seno.

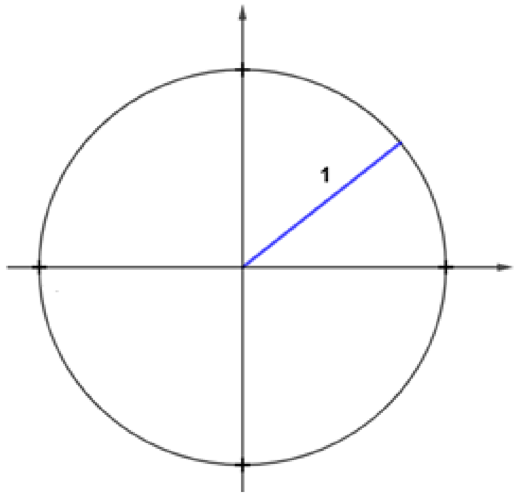
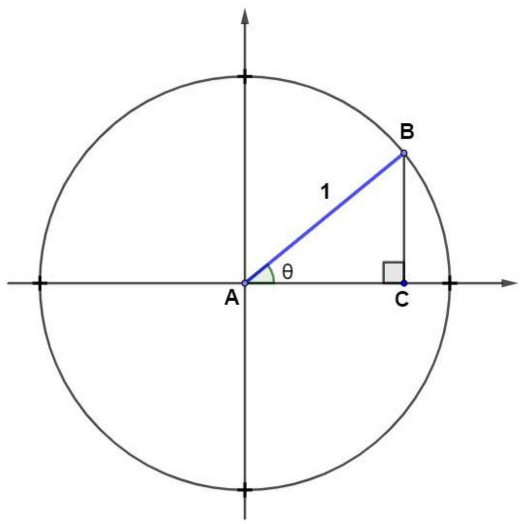
Guion de la cápsula 2 (Generalización de las razones trigonométricas)

Descripción

La cápsula está dedicada a demostrar las propiedades que se usarán durante las demás cápsulas del módulo 3. Primero se representan las razones trigonométricas en el círculo unitario, para después preguntarse, ¿qué pasa si el ángulo está entre $90°$ y $180°$? Con la ayuda del círculo trigonométrico, se llega a la conclusión de que $sen\,(180° - \theta) = sen\,\theta$. Se sigue analizando lo que ocurre en el tercer y cuarto cuadrante, para así poder concluir la generalización de la razón trigonométrica para cualquier ángulo.

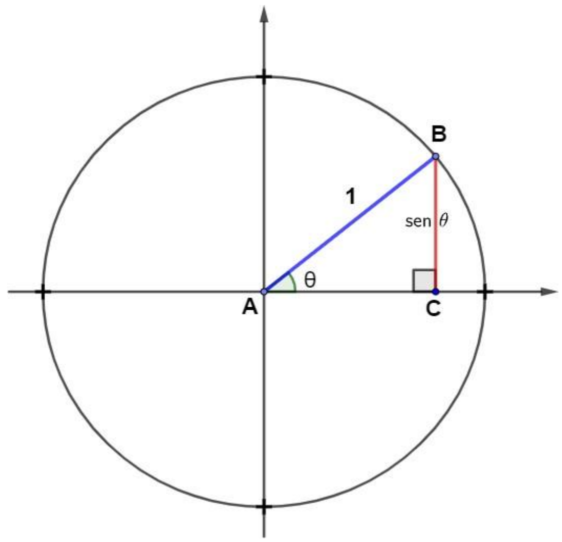
Finalmente se revisa la identidad pitagórica $sen\,^2\theta + cos^2\theta = 1.$ Para ello se trabaja en el círculo unitario, y en él se representarán las razones trigonométricas, seno y coseno y usando el teorema de Pitágoras se demuestra la identidad. Esta cápsula puede ayudar a los profesores para dar la clase de trigonometría de una forma más didáctica.

Guion de la cápsula 2

Sugerencias técnicas de adaptación a video.	Generalización de las razones trigonométricas
<En pantalla entra persona y lee los dos primeros párrafos.>	En la cápsula anterior se trabajó con la razón trigonométrica $seno$ y cómo esta razón está relacionada biunívocamente con un ángulo entre 0° y 90°. Pero, ¿qué pasa si tenemos ángulos mayores a 90°? ¿Se puede definir el $seno$ de ese ángulo?
<Al terminar de leer los dos párrafos en pantalla se mostrará la circunferencia unitaria, tal cual como se muestra.>	Para ello veamos cómo las razones trigonométricas se representan en un círculo unitario, (con radio igual a uno). Tracemos un círculo con radio uno y con centro en el origen en un plano cartesiano. 
<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla debe aparecer la circunferencia unitaria, con toda la información que aparece en ella.>	Tomemos como referencia el ángulo que se forma con el radio del círculo anterior y el eje horizontal. Llamémosle θ y tracemos un segmento de línea que una al punto del radio que toca a la circunferencia con el eje horizontal. Dicho segmento de línea es perpendicular al eje horizontal. 
<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla, y debajo de la circunferencia unitaria estarán las igualdades.>	Con los trazos anteriores, generamos un triángulo rectángulo ABC, donde A es el centro de la circunferencia, B y C son los extremos del segmento de línea perpendicular al eje horizontal. Por lo que: $$sen\ \theta = \frac{BC}{AB}$$ Como $AB = 1$, se obtiene que $sen\ \theta\ = BC$

<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla debe exhibirse la circunferencia unitaria, con toda la información que aparece en ella.>

En otras palabras, en un círculo unitario, el seno representa la altura del triángulo rectángulo que se genera con el ángulo θ y con base en el eje horizontal.



Ahora veamos cómo se representa el coseno en el círculo unitario:

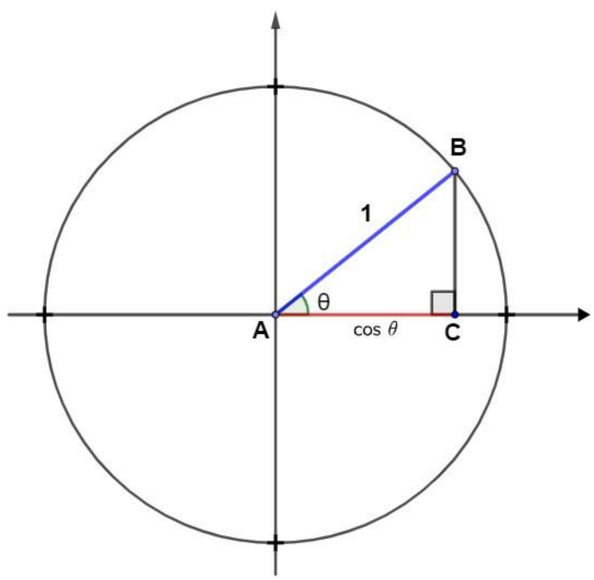
<Debajo de la circunferencia unitaria, se mostrarán las igualdades.>

$$\cos\theta = \frac{CA}{AB}$$

Como $AB = 1$, se obtiene que $cos\ \theta\ = CA$

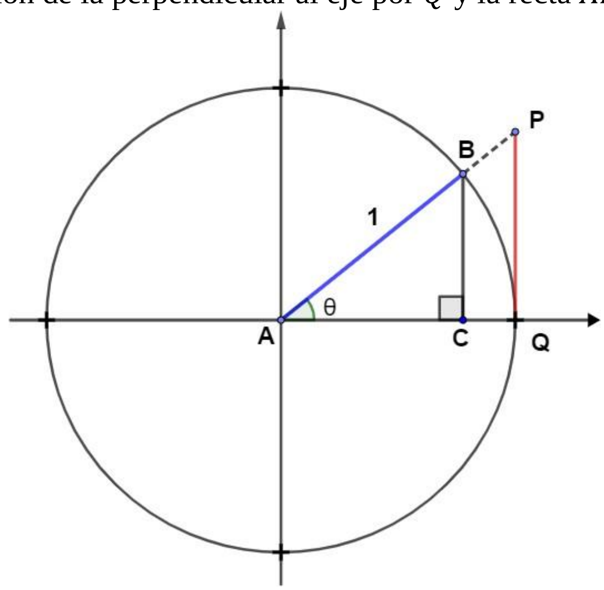
<Al término de leer el párrafo, en pantalla se muestra la circunferencia unitaria, con toda la información que aparece en ella.>

En otras palabras, en un círculo unitario, el coseno representa la base del triángulo rectángulo que se genera con el ángulo θ y con base en el eje horizontal.



<AL terminar de leer la oración, en pantalla se debe mostrar la circunferencia unitaria, con toda la información que aparece en ella.>

También representemos a la tangente. Para ello tracemos el segmento de línea PQ, donde el punto Q que es la intersección de la circunferencia unitaria con la parte positiva del eje x y el punto P es la intersección de la perpendicular al eje por Q y la recta AB.



Podemos observar que los triángulos ABC y APQ son semejantes y son triángulos rectángulos, por lo que la tangente en cada triángulo mide lo mismo:

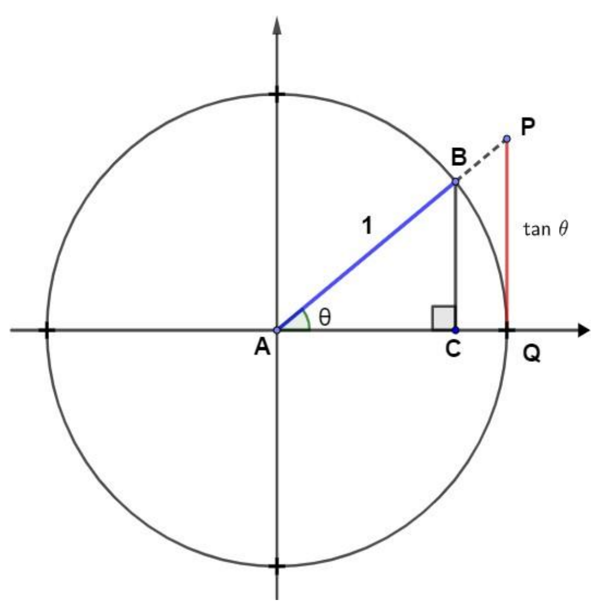
<Debajo de la circunferencia unitaria, en pantalla se mostrarán las igualdades.>

$$\tan\theta = \frac{BC}{CA} = \frac{PQ}{AQ}$$

Como $AQ = 1$, por ser un radio, se obtiene que $tan\,\theta\ = PQ$.

<Al terminar de leer la oración, en pantalla se muestra la circunferencia unitaria, con toda la información que aparece en ella.>

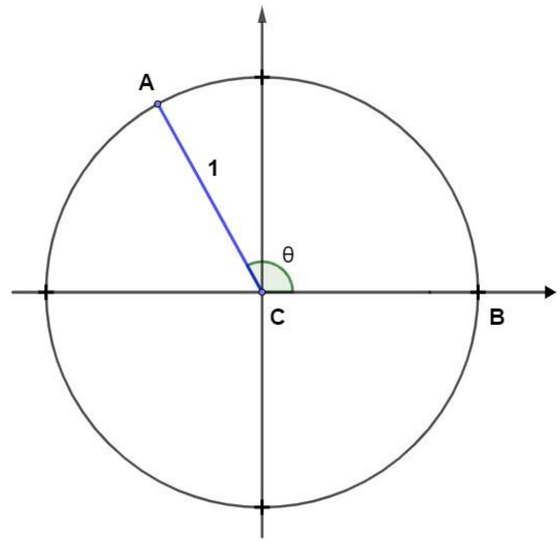
En otras palabras, en un círculo unitario, la tangente representa la altura del triángulo rectángulo APQ que se genera con el ángulo θ y con base un radio en el eje horizontal.



<En pantalla sólo estará la pregunta, mientras se lee.>

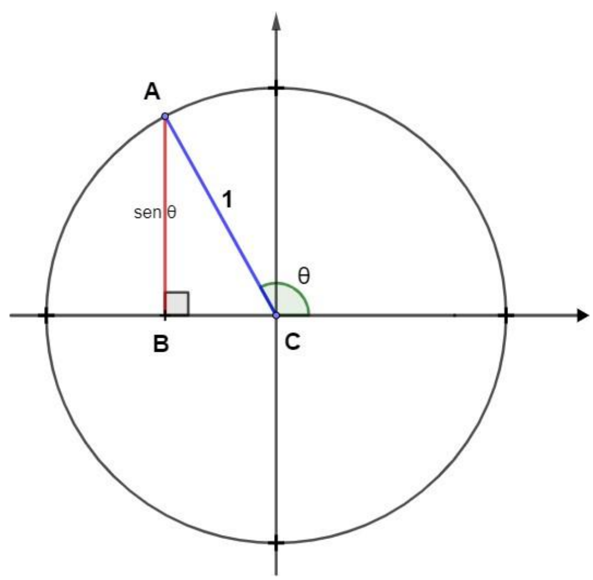
¿Qué pasa si el ángulo está entre 90° y 180°?

<Al terminar de leer la pregunta, en pantalla aparecerá el círculo unitario con todo y los datos.>



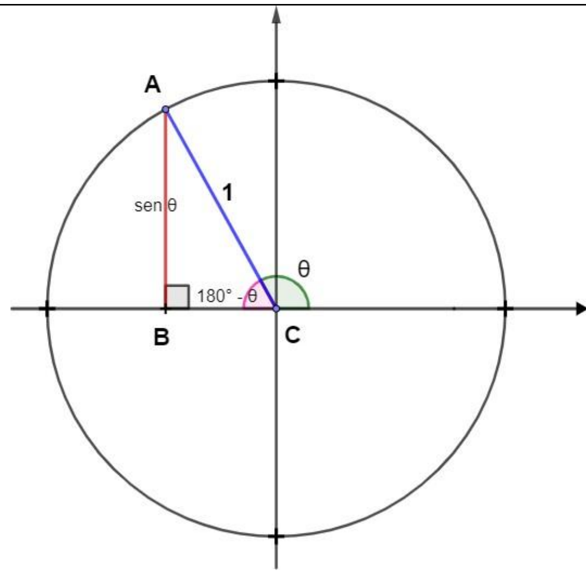
<Al terminar de leer el párrafo habrá una transición del círculo unitario, anterior al siguiente círculo unitario. Se debe respetar todos los datos como los colores.>

Analicemos el caso para el $sen\,\theta$. Recordemos que el seno, en un círculo trigonométrico se representa como la altura del triángulo rectángulo que se genera con el radio y con base en el eje horizontal.



Por otra parte, $\measuredangle ACB = 180° - \theta$, y como el triángulo ACB es rectángulo, obtenemos que:

<Al terminar de leer el párrafo anterior, en pantalla debe aparecer el círculo unitario y debajo de él estará la igualdad.>

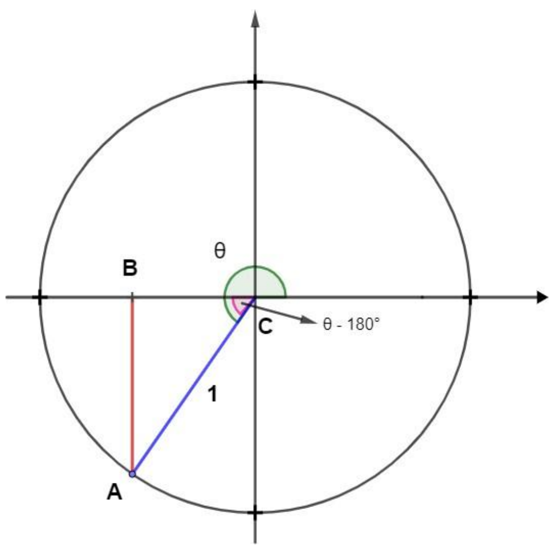


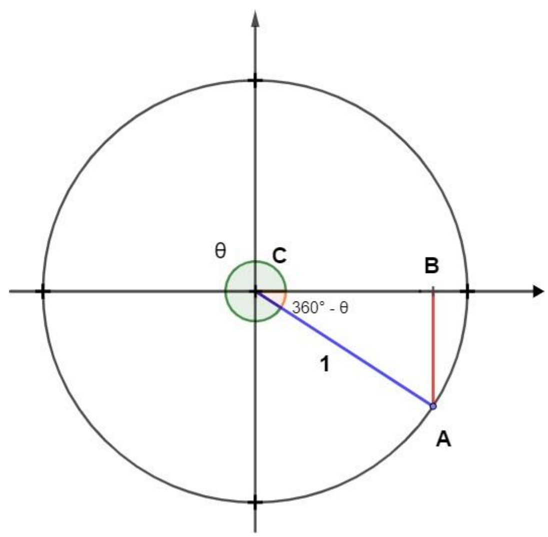
$$sen\ (180° - \theta) = \frac{sen\ \theta}{1} = sen\ \theta$$

Por lo que se tiene la identidad: $sen\ (180° - \theta) = sen\ \theta$

<En pantalla sólo debe aparecer la pregunta, mientras se lee. Después en pantalla saldrán los círculos unitarios con todo y sus datos.>.>

¿Qué pasa si el ángulo está entre $180°$ y $270°$, o bien, entre $270°$ y $360°$?





<Cuando la voz termine de decir “siguientes identidades”, en pantalla y debajo de cada círculo unitario, estarán las igualdades correspondientes.>

Se obtienen las siguientes identidades:

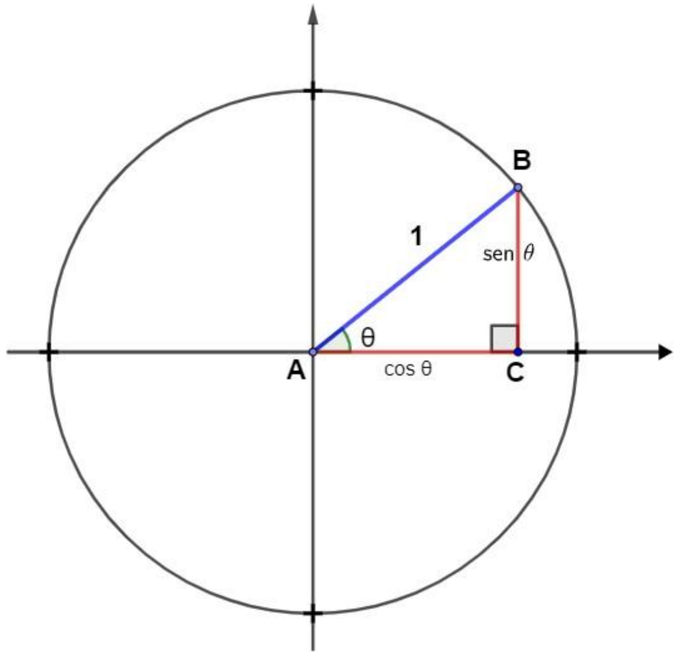
$$sen\ \theta\ = -sen(\theta - 180°) \qquad sen\ \theta = -sen(360° - \theta)$$

Como en ambos casos, se está trabajando con triángulos que están en el tercer y cuarto cuadrante, la altura es negativa.

Por lo tanto, la razón $seno$ se puede generalizar para cualquier ángulo. De la misma manera se pueden generalizar las demás razones.

<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla, se mostrará el círculo trigonométrico con toda y la información que aparece en él.>

Por último relacionemos el teorema de Pitágoras, con lo que sabemos ahora de las razones trigonométricas seno y coseno.



Al aplicarse el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC se tiene que:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

<Después de leer la oración, en pantalla, y debajo de la circunferencia unitaria, deben estar las igualdades.>

Sabemos que $BC = \text{sen}\ \theta$, $AC = cos\ \theta, y\ AB = 1$

Entonces la igualdad queda como:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

A dicha igualdad se le conoce como la identidad pitagórica.

<Termina la cápsula.>

En las siguientes cápsulas, analizaremos y demostraremos varias identidades trigonométricas.

Tarea 1

Descripción

El fin de esta tarea es seguir ayudando a los profesores a construir un enfoque teórico del aprendizaje en las matemáticas y que sigan fortaleciendo el análisis geométrico, para que les sea más fácil de entender cómo se demuestra a partir de la construcción geométrica.

Para reforzar lo que se vio en la cápsula, se pide obtener el valor de cada una de las razones trigonométricas para los ángulos de $30°$, $45°$ y $60°$ a partir de dos triángulos. Posteriormente se pide que, con la ayuda del círculo unitario, obtengan los valores de las razones trigonométricas para el ángulo de $90°$. Finalmente se pide que demuestren algunas identidades trigonométricas.

Tarea 1

- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

1) Obtén el valor de todas las razones trigonométricas para el ángulo de 45° a partir de un triángulo rectángulo.

2) Obtén el valor de todas las razones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60° a partir de un triángulo equilátero.

3) Obtén el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 90°. Sugerencia: Apóyate del círculo unitario.

4) Demostrar cada una de las siguientes identidades:

$i.\ sen\,\theta = \cos(90° - \theta)$

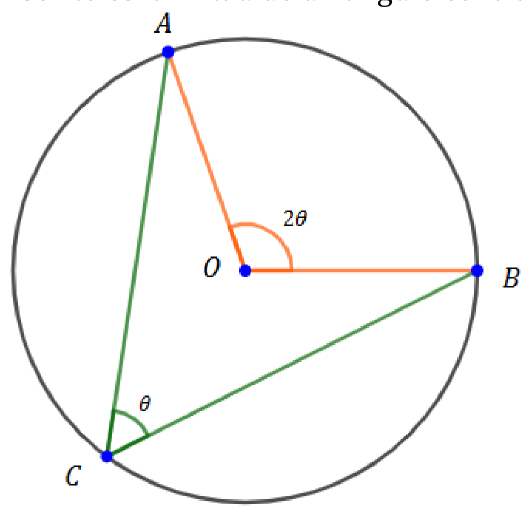
$ii.\ \tan\theta = \dfrac{sen\,\theta}{\cos\theta}$

$iii.\ \cot\theta = \dfrac{cos\,\theta}{\text{sen}\,\theta}$

$iv.\ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$vi.\ \csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$

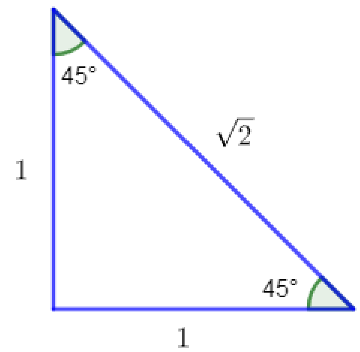
5) Demostrar que un ángulo inscrito es la mitad de un ángulo central que subtiende el mismo arco.



Solucionario

- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

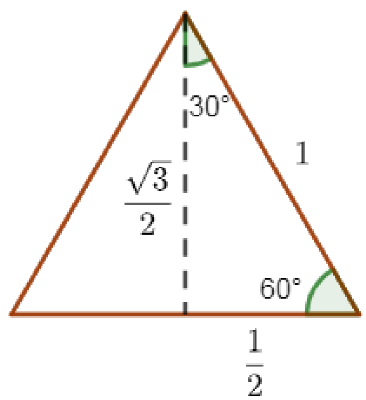
1) Obtén el valor de todas las razones trigonométricas para el ángulo de 45° a partir de un triángulo rectángulo.



$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45° = 1$$

$$\cot 45° = 1, \qquad \sec 45° = \sqrt{2}, \qquad \csc 45° = \sqrt{2}$$

2) Obtén el valor de todas las razones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60° a partir de un triángulo equilátero.



$$sen\ 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30° = \sqrt{3}, \quad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \csc 30° = 2$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \tan 60° = \sqrt{3}, \quad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sec 60° = 2, \quad \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

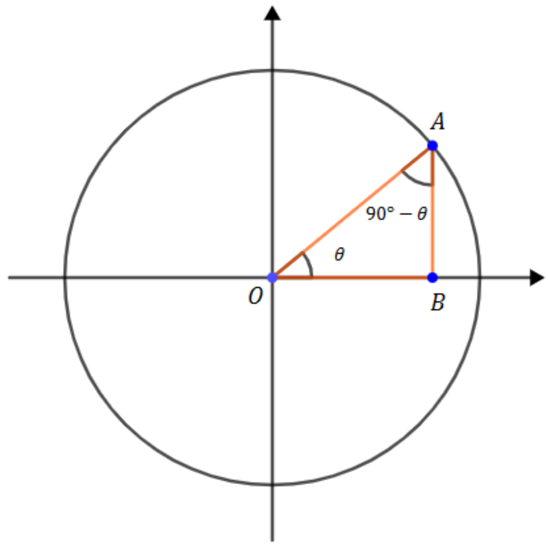
3) Obtén el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 90°. Sugerencia: Apóyate del círculo unitario.

$$\operatorname{sen} 90° = 1, \qquad \cos 90° = 0, \qquad \tan 90° = no\ tiene\ valor.$$

$$\cot 90° = 0, \qquad \sec 90° = no\ tiene\ valor, \qquad \csc 90° = 1$$

4) Demostrar cada una de las siguientes identidades:

$i.\ sen\,\theta = \cos(90° - \theta)$



Se construye un ángulo θ en un círculo unitario y con él se genera el triángulo AOB. Por construcción el $\measuredangle OAB = 90° - \theta$, por lo que $sen\,\theta = AB = \cos(90° - \theta)$.

$$ii.\ \tan\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{sen\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}} = \frac{(cateto\ opuesto)hipotenusa}{(cateto\ adyacente)hipotenusa} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \tan\theta$$

$$iii.\ \cot\theta = \frac{cos\ \theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{sen\,\theta} = \frac{\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}} = \frac{(cateto\ adyacente)hipotenusa}{(cateto\ opuesto)hipotenusa} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \cot\theta$$

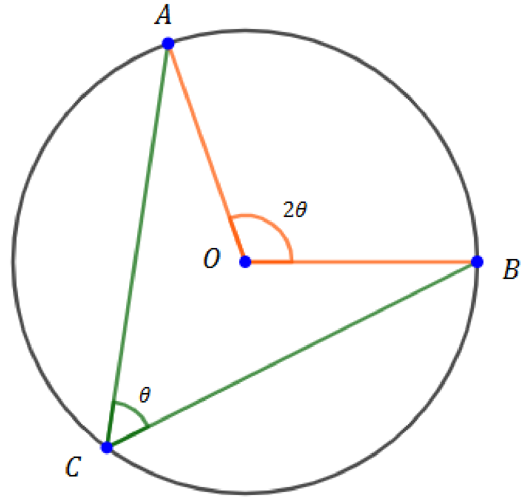
$$iv.\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

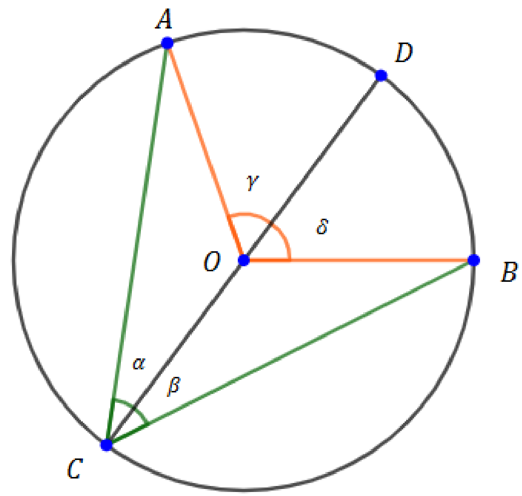
$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \sec\theta$$

$$vi.\ \csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \csc\theta$$

5) Demostrar que un ángulo inscrito es la mitad de un ángulo central que subtiende el mismo arco.





Se traza el diámetro que pase por C y por el centro de la circunferencia. Esta línea corta al $\measuredangle BCA$ en α y β y el $\measuredangle BOA$ en γ y δ. Por construcción se genera el triángulo ACO que es isósceles por tener dos radios como lados. Por ello el $\measuredangle CAO = \measuredangle OCA = \alpha$. Por consiguiente $\measuredangle AOC = 180° - 2\alpha$ y como es suplementario a γ, entonces $\gamma = 2\alpha$.

Por construcción se genera el triángulo BCO que es isósceles por tener dos radios como lados. Por ello el $\measuredangle OBC = \measuredangle BCO = \beta$. Por consiguiente $\measuredangle COB = 180° - 2\beta$ y como es suplementario a δ, entonces $\delta = 2\beta$.

Entonces: $\measuredangle BCA = \alpha + \beta$ y $\measuredangle BOA = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$.
Por lo que el $\measuredangle BOA$ mide el doble del $\measuredangle BCA$.

Guion de la cápsula 3 (Identidades trigonométricas; el seno y el coseno de la suma de dos ángulos)

Descripción

La cápsula 3 tiene como propósito demostrar diversas identidades trigonométricas, en particular se determinará el seno y el coseno de la suma de dos ángulos a partir de ciertas construcciones geométricas.

En este punto es necesario comentar que los profesores ya conocen estas identidades trigonométricas y que la importancia de esta cápsula es seguir fomentando el análisis teórico del aprendizaje en las matemáticas.

Por otro lado, se dejaron en el guión del video los pasos para las construcciones geométricas en las que se apoyarán las demostraciones. Aunque parezca que es mucha información para los profesores, en realidad no encontramos que este sea un problema pues pueden reproducir el video más de una vez para entender mejor la forma en la que se generan las construcciones.

Guion de la cápsula 3

Sugerencias técnicas de adaptación a video.

Identidades trigonométricas
El seno y el coseno de la suma de dos ángulos

<Entra una persona y lee los dos primeros párrafos.>

En las cápsulas anteriores se definieron las razones trigonométricas y se demostraron algunas identidades. Ahora estudiaremos el seno y el coseno de la suma de dos ángulos.

En la actualidad, se puede obtener, por ejemplo el $sen\ 22°$ de manera rápida, ya que solo basta usar una calculadora científica física o digital pero ¿cómo se pudo obtener dicho valor en la época en que no había calculadoras? Previamente a la existencia de las calculadoras se usaban tablas de las razones trigonométricas y dichas tablas se obtuvieron usando sólo identidades trigonométricas. En la práctica, es muy enriquecedor demostrar estas identidades trigonométricas que se usaron para generar las tablas.

<En el momento en que se diga “el seno de la suma de dos ángulos”, debe aparecer en pantalla la identidad trigonométrica.>

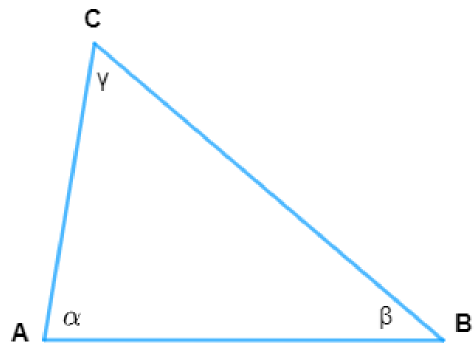
Demostremos la validez de la fórmula para **el seno de la suma de dos ángulos**:

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\beta + \cos\ \alpha\ sen\ \beta$$

Para ello se trabajará con la siguiente construcción:

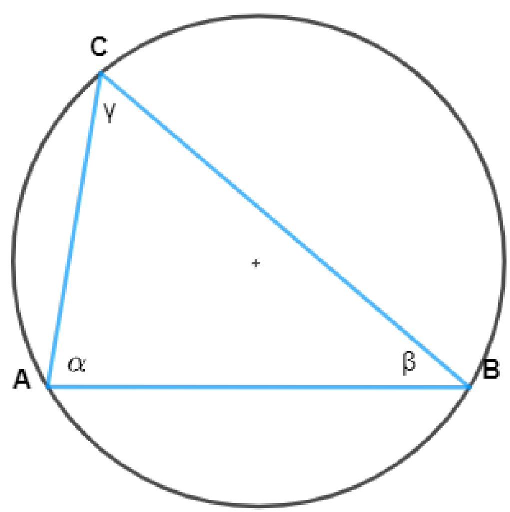
<En el momento en que la se diga “Sea *ABC* un triángulo”, en pantalla y debajo de la identidad, debe mostrarse el triángulo con todo y sus datos.>

Sea ABC un triángulo con ángulos α, β y γ respectivamente



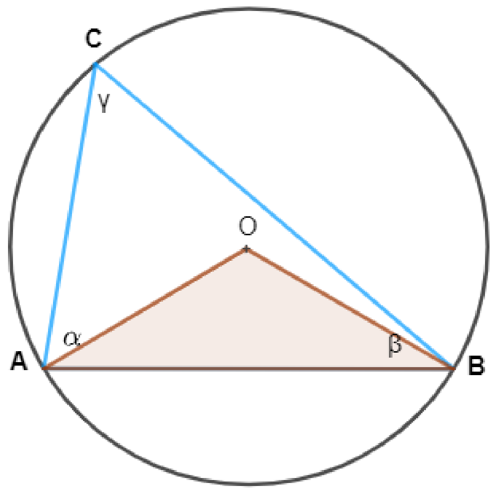
<Mientras se va leyendo el enunciado, se debe generar una animación del triángulo anterior al siguiente triángulo inscrito en una circunferencia.>

Y tracemos la circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo



<Se debe generar una animación de la circunferencia anterior a esta circunferencia.>

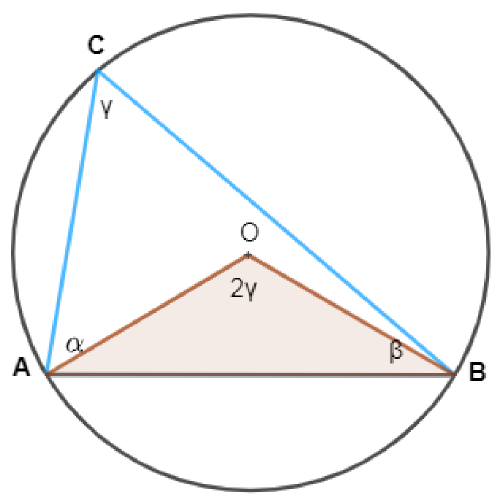
Y tracemos el triángulo AOB



<Se debe generar una animación de la circunferencia anterior a esta circunferencia.>

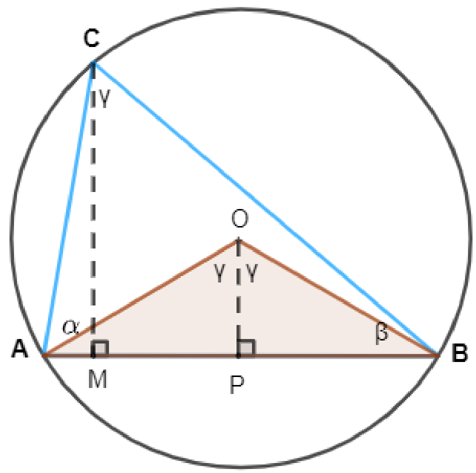
Notemos que, por construcción:

$$\measuredangle AOB = 2\gamma$$



<Mientras se lee el párrafo, se generará una animación de la circunferencia anterior a la siguiente circunferencia.>

El triángulo AOB es isósceles puesto que sus lados OA y OB son radios de la circunferencia. Por tanto, al bisectar el ángulo 2γ, cortará en el punto medio al segmento AB, formando a su vez un ángulo recto con la base del triángulo. Para finalizar, tracemos la altura del triángulo ABC. Llamemos M al pie de la altura.



<En el momento en que se diga "donde *MB*", se debe resaltar en el triángulo *BMC*. Posteriormente cuando se diga "y *AM*", se debe resaltar el triángulo *AMC*. Finalmente, en pantalla deben aparecer las igualdades.>

De la construcción notamos que el segmento $AB = AM + MB$. Donde MB es base del triángulo rectángulo BMC y AM es la base del triángulo rectángulo AMC. De tal modo que:

$$MB = BC \cos\beta$$
$$AM = AC \cos\alpha$$

Por lo que la igualdad $AB = AM + MB$ se puede ver como:

$$AB = BC \cos\beta + AC \cos\alpha$$

<En el momento en que se van leyendo las igualdades, debe ir apareciendo en pantalla..>

Por otro lado, y tomando como referencia al triángulo rectángulo AOB tenemos que:

$$sen\,\gamma = \frac{PB}{OB}$$

Recordamos que el segmento OP corta en el punto medio al segmento AB, por lo tanto

$$PB = \frac{AB}{2}$$

entonces

$$sen\,\gamma = \frac{\frac{AB}{2}}{OB} = \frac{AB}{2OB}$$

De manera análoga y trabajando con el triángulo COB se obtiene:

$$sen\,\alpha = \frac{\frac{BC}{2}}{OB} = \frac{BC}{2OB} \Rightarrow BC = 2OB\ sen\,\alpha$$

Con el triángulo COA se obtiene:

$$sen\,\beta = \frac{\frac{AC}{2}}{OA} = \frac{AC}{2OA} \Rightarrow AC = 2OA\ sen\,\beta$$

Para finalizar recordemos de la cápsula anterior que el $sen\ \alpha = sen\ (180° - \alpha)$, por lo que:

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ (180° - (\alpha + \beta)) = sen\ \gamma$$

<En pantalla deben aparecer las tres igualdades al momento en que se van leyendo.>

Por las igualdades que se obtuvieron anteriormente, se tiene:

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \gamma = \frac{AB}{2OB} = \frac{BC \cos\beta + AC \cos\alpha}{2OB} = \frac{2OB\ sen\ \alpha \cos\beta + 2OA\ sen\ \beta \cos\alpha}{2OB}$$

$$= sen\ \alpha \cos\beta + sen\ \beta \cos\alpha.$$

Por lo que queda demostrada la identidad

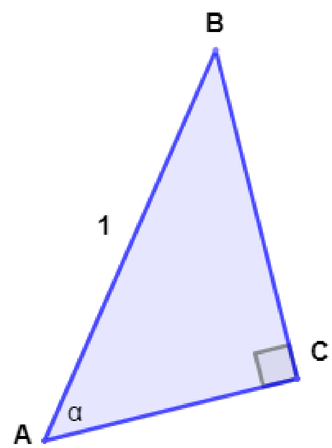
$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha \cos\beta + sen\ \beta \cos\alpha$$

Ahora demostremos la validez de la fórmula para **el coseno de la suma de dos ángulos**.

$$cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ \ cos\ \beta - sen\ \beta\ \ sen\ \alpha$$

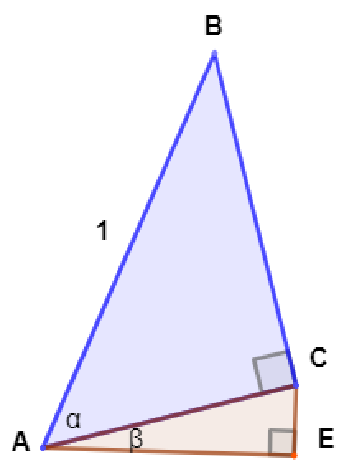
<En el momento en que se diga “tracemos un triángulo rectángulo”, en pantalla debe aparecer el triángulo *ABC*.>

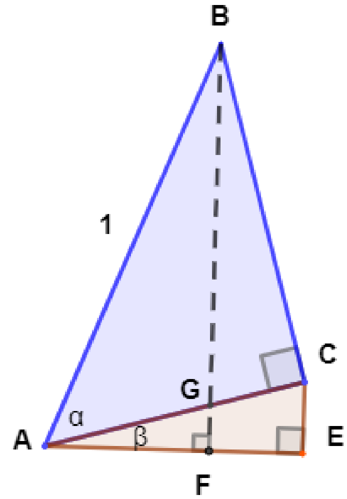
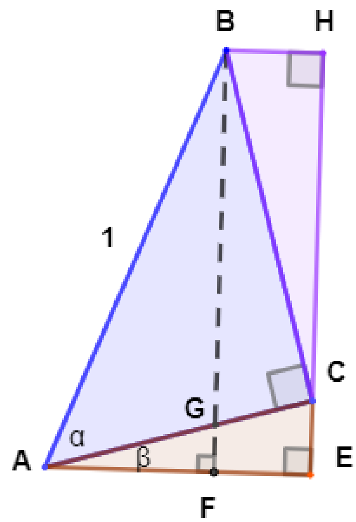
Para ello, hagamos la siguiente construcción geométrica. Tracemos un triángulo rectángulo con hipotenusa igual a uno y $\alpha = \measuredangle CAB$.

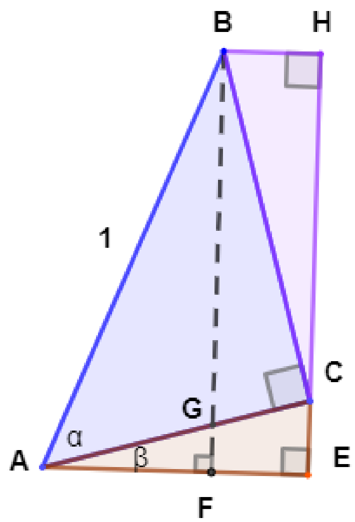


<En el momento en que se diga “tracemos otro triángulo rectángulo”, en pantalla también aparecerá el triángulo *ACE*.>

Tracemos otro triángulo rectángulo con hipotenusa AC, vértice E y $\beta = \measuredangle EAC$.



<En el momento en que se lee "tracemos una perpendicular desde B", en pantalla, se mostrará la altura en la construcción anterior, de tal modo que quede como aparece a la derecha de este texto.>	Tracemos una perpendicular desde B con base AE. Llamemos F y G a los puntos de intersección de la perpendicular con AE y AC respectivamente. 
<Mientras se lee el párrafo de la derecha, en pantalla habrá una animación que pase de la construcción anterior a la siguiente construcción.>	Tracemos una perpendicular con base FB y que pase por B y prolongamos el segmento EC. Tomamos el punto H de intersección de dichas rectas.  Con base en la construcción, y usando el ΔABC y el ángulo α, se obtiene: $$sen\, \alpha = BC$$ $$\cos\alpha = AC$$

	De la misma manera con el triángulo ACE y el ángulo β se obtiene:
<En pantalla y a un lado de la construcción, deben aparecer las dos igualdades.>	$$\cos\beta = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AE = AC\cos\beta$$
<En pantalla se deben resaltar los triángulos *ACE* y *CGB*, así como aparece en la construcción del lado derecho. También se deben resaltar los triángulos *BCH* y *CGB*.>	Notemos que los triángulos ACE y CGB son semejantes por el criterio AAA. A su vez, los triángulos CGB y BCH también son semejantes por el criterio AAA. En consecuencia el $\measuredangle EAC = \measuredangle HCB$. 
	Entonces
<Conforme se lee cada una de las igualdades, en pantalla irán saliendo.>	$$sen\,\beta = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = BCsen\,\beta$$
	Trabajando con el triángulo ABF y el ángulo $\alpha+\beta$, se tiene que:
	$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AF}{1} = AE - EF = AE - BH$$
	Sustituyendo AE y BH queda:
	$$\cos(\alpha+\beta) = AC\cos\beta - BC\,sen\,\beta$$
	Sustituyendo AC y BC da:
	$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta$$
<Termina la cápsula.>	Con lo cual se valida la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos.

Guion de la cápsula 4 (Identidades trigonométricas; el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos)

Descripción

Esta cápsula se centra en la demostración de las identidades trigonométricas; el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos. Estas demostraciones tienen la particularidad de que se trabaja con suma y resta de áreas para poder llegar a las equivalencias

$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha cos\,\beta - cos\,\alpha\, sen\,\beta$ y $cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + sen\,\alpha\, sen\,\beta$

Cabe señalar que estas demostraciones es importante que los docentes las conozcan y de ser posible las puedan transmitir a sus alumnos, para así enriquecer la manera en que enseñan en sus clases, puesto que algunas veces, en la práctica, sólo se dan las identidades trigonométricas sin ninguna justificación, haciendo que el alumno pierda el deseo de aprender y se llegue simplemente a la memorización de fórmulas.

Guion de la cápsula 4

Sugerencias técnicas de adaptación a video.

Identidades trigonométricas
El seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos

<Entra persona y lee el primer párrafo. En el momento en que diga “diferencia de dos ángulos”, en pantalla debe aparecer la igualdad.>

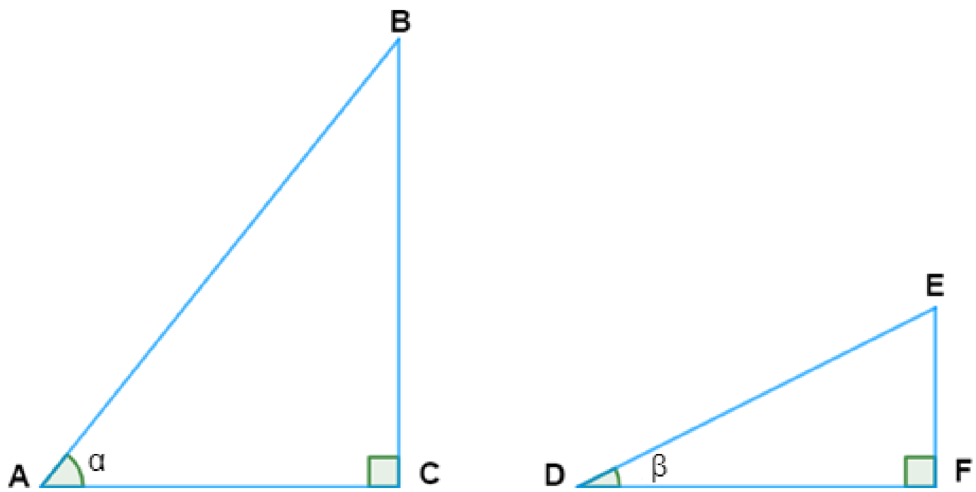
En esta cápsula seguiremos demostrando las fórmulas de las identidades trigonométricas con el apoyo de algunas construcciones para fomentar el razonamiento espacial.
Empecemos con **el seno de la diferencia de dos ángulos**:

$$sen\,(\alpha\ -\beta)\ =\ sen\,\alpha\,cos\,\beta\ -\ cos\,\alpha\,sen\,\beta$$

Para demostrar la fórmula, nos apoyaremos de la siguiente construcción:

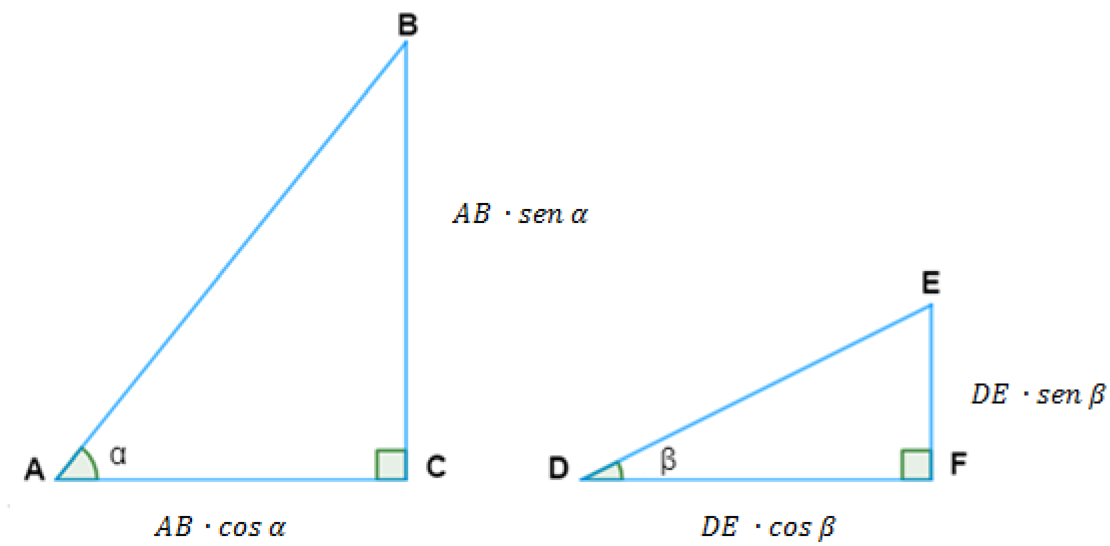
<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla deben aparecer los dos triángulos.>

Tracemos dos triángulos rectángulos que tengan mismas bases pero diferentes alturas que determinen a los ángulos α y β.



<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla y en cada uno de los triángulos, debe estar las expresiones tal cual como aparecen en los triángulos.>

Expresemos a los catetos de los dos triángulos en función de las razones trigonométricas.



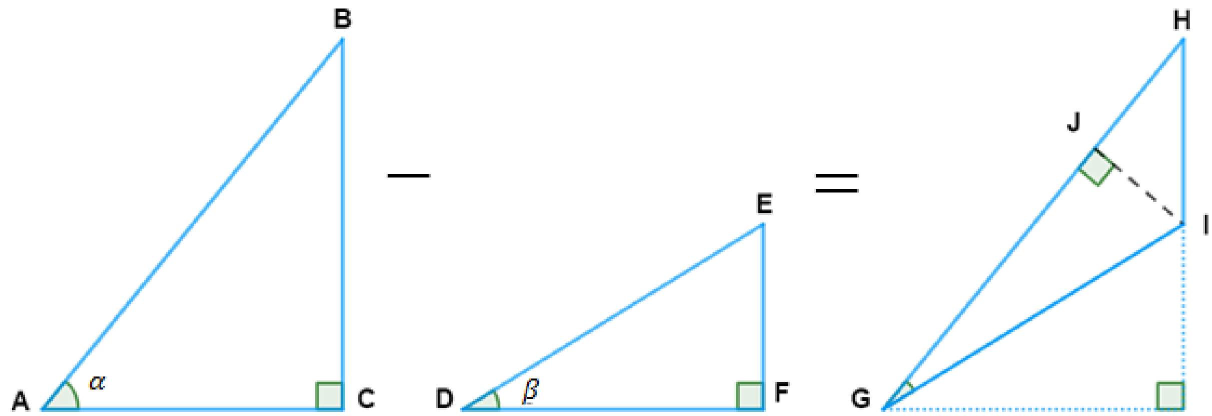
<En pantalla y debajo de los dos triángulos se mostrará la igualdad.>

Como las bases de los triángulos miden lo mismo, esto implica que

$$AB\ \cdot\ cos\,\alpha\ \ =\ DE\ \cdot\ cos\,\beta.$$

<Al terminar de decir “el área del triángulo *GHI*, en pantalla solo se mostrarán los triángulos con sus respectivos datos.>

Por otro lado al restar las áreas de los triángulos obtenemos el área del triángulo GHI.



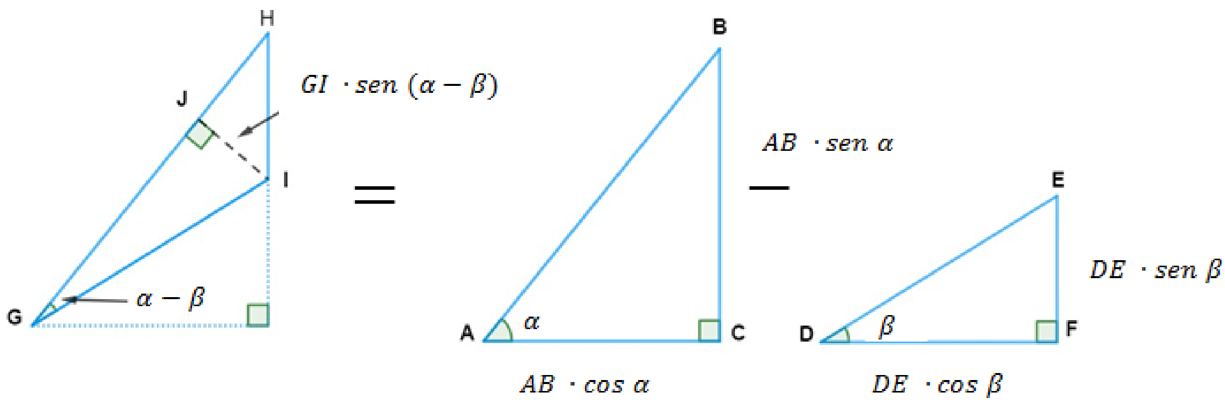
Donde J es el punto de intersección del lado HG y la altura JI.
Notemos que:

<Mientras se lee cada una de las igualdades, estas deben salir en pantalla.>

$$GH = AB$$
$$GI = DE$$
$$\measuredangle IGH = \alpha - \beta$$

<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla solo se mostrarán los triángulos junto con sus datos.>

De la misma manera, podemos expresar la altura JI en función de las razones trigonométricas.



Para poder demostrar la identidad trabajemos con la igualdad de las áreas de los triángulos

<En pantalla y debajo de los triángulos, debe estar la igualdad de las áreas de los triángulos.>

$$Área(\Delta GHI) = Área(\Delta ABC) - Área(\Delta DEF)$$

Aplicando la fórmula del área de un triángulo obtenemos

<En pantalla y debajo de la igualdad anterior, debe aparecer la igualdad.>

$$\frac{GH\big(GI \cdot sen(\alpha - \beta)\big)}{2} = \frac{(AB \cdot \cos\alpha)\,(AB \cdot sen\,\alpha)}{2} - \frac{(DE \cdot \cos\beta)(DE \cdot sen\,\beta)}{2}$$

<Conforme se va leyendo cada igualdad, en pantalla, se irán resaltando uno los lados, de los triángulos que se indican en las igualdades.>

Como

$$AB \cdot \cos\alpha = DE \cdot \cos\beta$$
$$GH = AB$$
$$GI = DE$$

<En pantalla y debajo de la última igualdad, debe estar la igualdad que aparece a la derecha de este comentario.>

La igualdad de las áreas de los triángulos queda:

$$\frac{ABDE \cdot sen\,(\alpha - \beta)}{2} = \frac{(DE \cdot \cos\beta)(AB \cdot sen\,\alpha)}{2} - \frac{(AB \cdot \cos\alpha)(DE \cdot sen\,\beta)}{2}$$

<En pantalla y debajo de la anterior igualdad, debe aparecer la igualdad que aparece a la derecha de este comentario.>

Simplificando la igualdad se obtiene:

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta$$

Con lo cual queda demostrada la identidad.

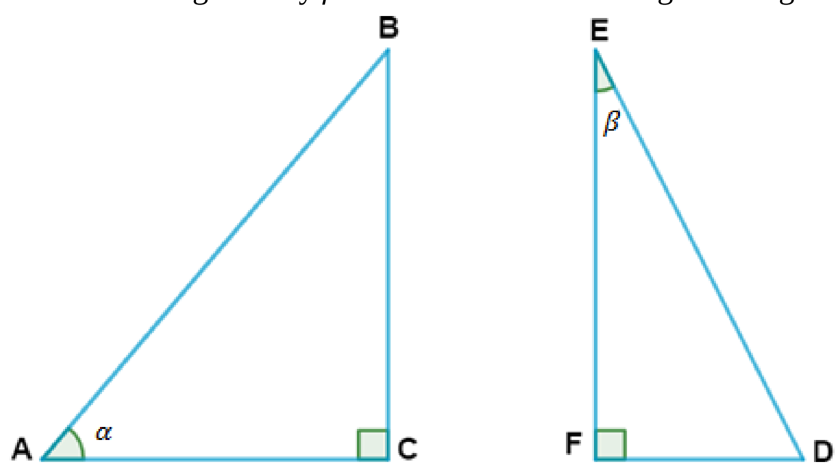
<Mientras se lee el párrafo, toda la información en pantalla se elimina, hasta que no quede nada.>

Ahora demostremos la identidad que nos permite calcular **el coseno de la diferencia de dos ángulos**.

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

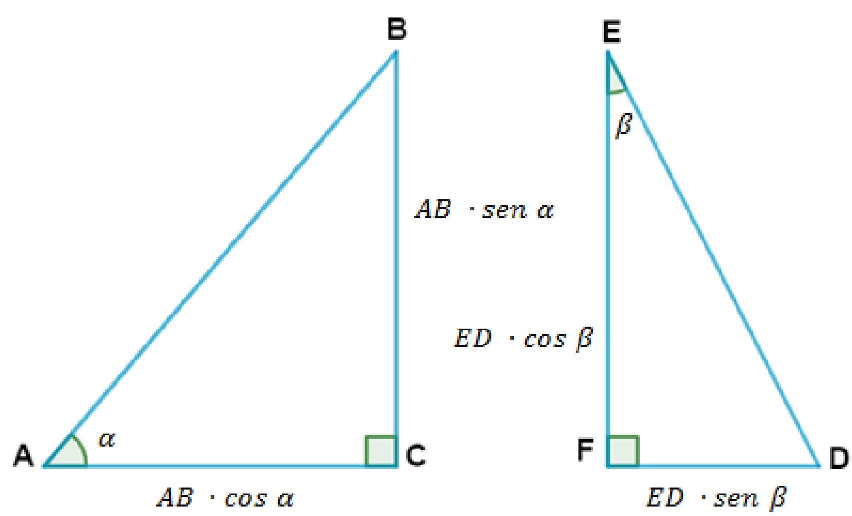
<En el momento en que se diga "tracemos dos triángulos", en pantalla deben saldrán los dos triángulos.>

Para ello usaremos la siguiente construcción. Tracemos dos triángulos rectángulos, los cuales tengan mismas alturas con ángulos α y β como se indican en la siguiente figura.



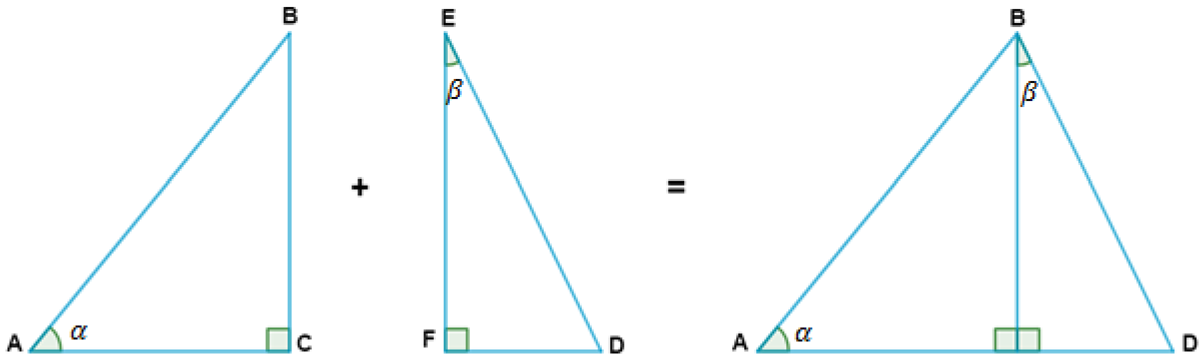
<En pantalla y en cada uno de los triángulos, deberán estar las expresiones tal cual como aparecen en los triángulos.>

Expresemos a los catetos de los triángulos en función de las razones trigonométricas.



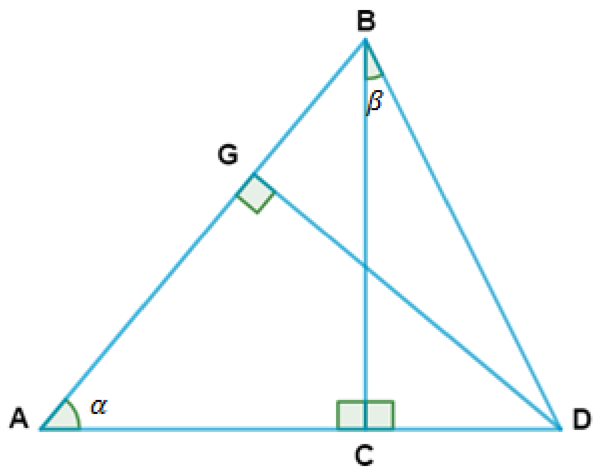
<Cuando se termine de decir "el área del triángulo *ABD*, en pantalla solo deben aparecer los triángulos con sus respectivos datos.>

Por otro lado, al sumar las áreas de los triángulos obtenemos el área del triángulo ABD



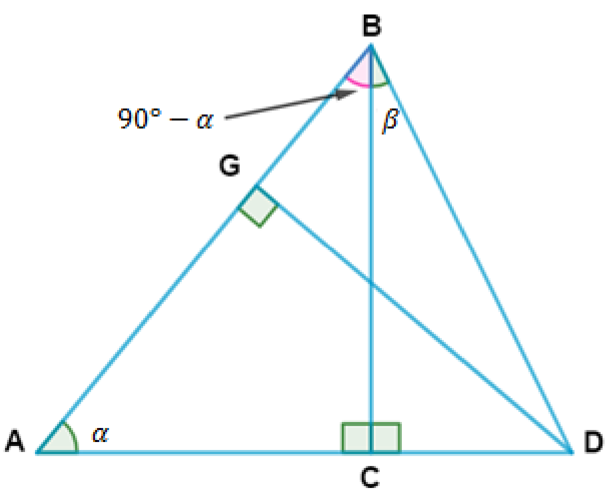
<Cuando se termine de decir "con base AB", sobre el triángulo aparecerá dicha altura, tal cual como se muestra en el lado derecho de este comentario.>

Tracemos la altura del triángulo ABD con base AB, donde G es el punto de la intersección de la base AB con la altura

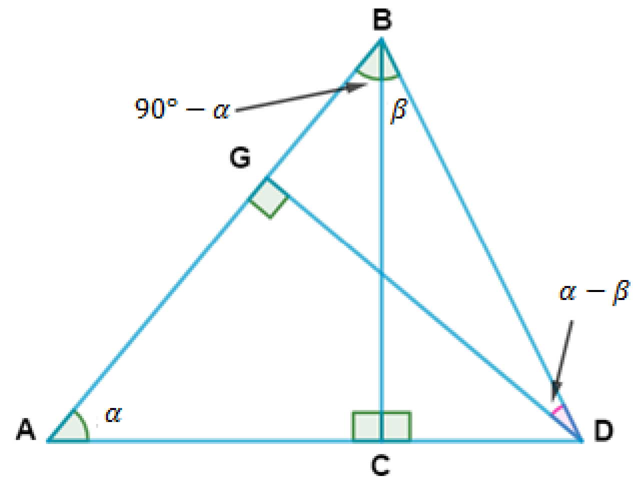


<Cuando se termine de decir "90° - α", sobre el triángulo se mostrará dicha altura.>

A partir del triángulo ABC, el $\measuredangle ABC$ se puede expresar como $90° - \alpha$

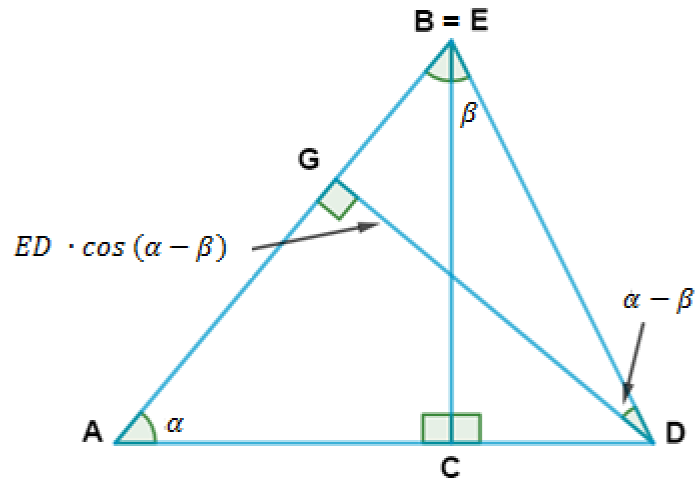


Por ello en el triángulo BGD, el $\measuredangle BDG$ se puede expresar como $\alpha - \beta$



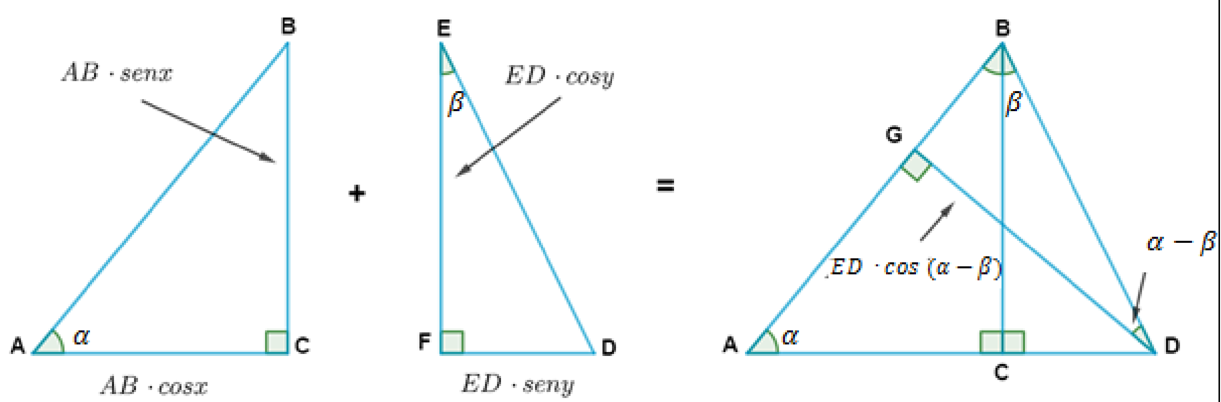
<Al ir leyendo el párrafo en pantalla y sobre el triángulo debe salir la altura, tal cual como aparece en el lado derecho de este comentario.>

Como el triángulo BGD es rectángulo, el lado GD se puede expresar como $EDcos\ (\alpha\ -\ \beta)$. Recordemos que Bes igual que el punto E.



<Al terminar de decir "el triángulo *ABD*", en pantalla deben aparecer los triángulos con sus respectivos datos.>

Regresando a la suma de las áreas de los triángulos y agregando los datos del triángulos ABD queda:



Para la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos, trabajemos con la igualdad de las áreas de los triángulos

<En pantalla y debajo de los triángulos, se debe mostrar la igualdad de las áreas de los triángulos.>

$$Área(\Delta ABC) + Área(\Delta FED) = Área(\Delta ABD)$$

<En pantalla y debajo de la igualdad anterior debe estar la siguiente igualdad.>	Aplicando la fórmula del área del triángulo obtenemos $\frac{(AB \cdot \cos\alpha)(AB \cdot sen\,\alpha)}{2} + \frac{(ED \cdot \cos\beta)(ED \cdot sen\,\beta)}{2} = \frac{(AB)(ED \cdot \cos(\alpha - \beta))}{2}$ Como $AB \cdot sen\,\alpha = ED \cdot cos\,\beta$
<En pantalla y debajo de la última igualdad, debe aparecer la siguiente igualdad.>	La igualdad de las áreas queda como: $\frac{(AB \cdot \cos\alpha)(ED \cdot cos\,\beta)}{2} + \frac{(AB \cdot \mathrm{sen}\,\alpha)(ED \cdot sen\,\beta)}{2} = \frac{(AB)(ED \cdot \cos(\alpha - \beta))}{2}$
<En pantalla y debajo de la anterior igualdad, debe aparecer la identidad.>	Simplificando la igualdad queda: $cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta = cos\,(\alpha - \beta)$
<Termina cápsula.>	Con lo cual queda demostrada la identidad.

Guion de la cápsula 5 (Más identidades trigonométricas)

Descripción

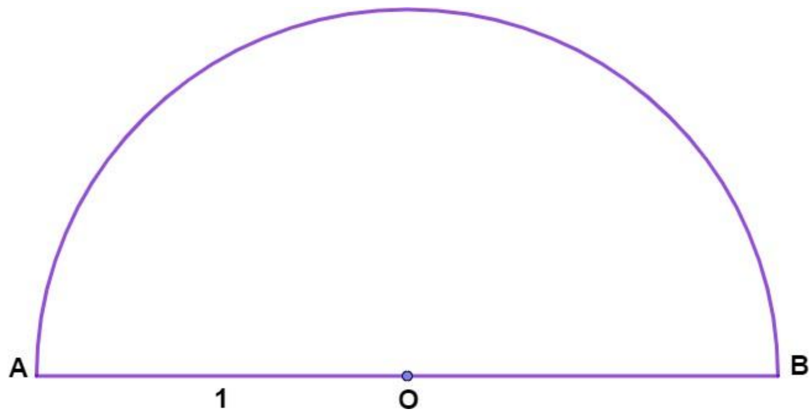
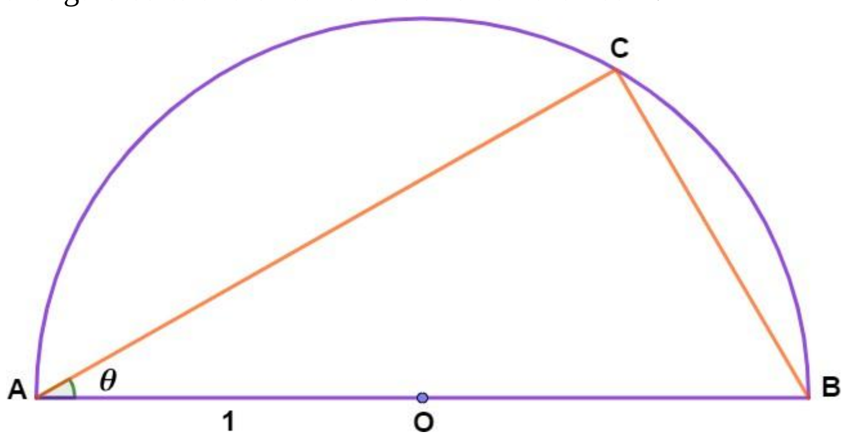
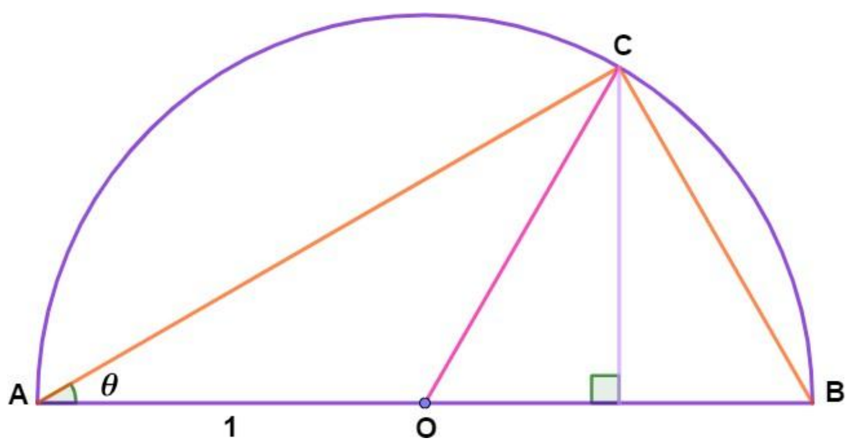
En esta cápsula se puede notar que ya se maneja todo lo que se ha visto en las cápsulas y módulos pasados, con lo cual se continúa fortaleciendo todo el contenido geométrico trabajado. Esto puede ocasionar una complicación en la comprensión de las demostraciones. Pero con los conocimientos que tienen los profesores, con las cápsulas anteriores que pueden seguir viendo, y con la ayuda de su tutor, podrán comprender las demostraciones.

Esta cápsula es la última en la que se demuestran las fórmulas de las identidades trigonométricas, estas son el seno y coseno del ángulo doble, la tangente de la mitad de un ángulo y
$(\cot\theta + 1)^2 + (\tan\theta + 1)^2 = (\sec\theta + \csc\theta)^2$

Se siguen privilegiando las construcciones geométricas para que los profesores continúen fortaleciendo su análisis geométrico.

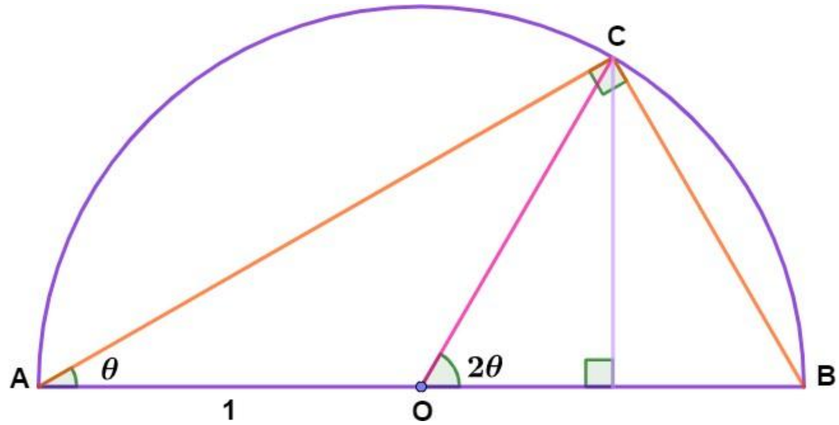
Guion de la cápsula 5

<table>
<tr><td>Sugerencias técnicas de adaptación a video.</td><td>Más identidades trigonométricas</td></tr>
<tr><td><Entra persona y lee el primer enunciado, posteriormente, y en pantalla aparecerán las dos igualdades.></td><td>Sigamos analizando más identidades trigonométricas. Demostremos que:

$sen\ 2\theta\ = 2\ sen\ \theta \cos\theta$ y $\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$</td></tr>
<tr><td><Cuando se diga “tracemos una semicircunferencia” en pantalla solo mostrará la semicircunferencia.></td><td>Para ello, nos apoyaremos de la siguiente construcción: tracemos una semicircunferencia de radio 1.
</td></tr>
<tr><td><Al terminar de leer el párrafo, en pantalla habrá una animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.></td><td>Usando el diámetro AB, tomamos como punto de apoyo al punto A para trazar el ángulo θ. El punto donde el ángulo corta a la circunferencia lo llamaremos C.
</td></tr>
<tr><td><Al terminar de leer el párrafo se sigue con la animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.></td><td>Desde el punto C tracemos un segmento de recta hacia el centro de la circunferencia, y después tracemos una perpendicular al diámetro AB que pase por el punto C
</td></tr>
</table>

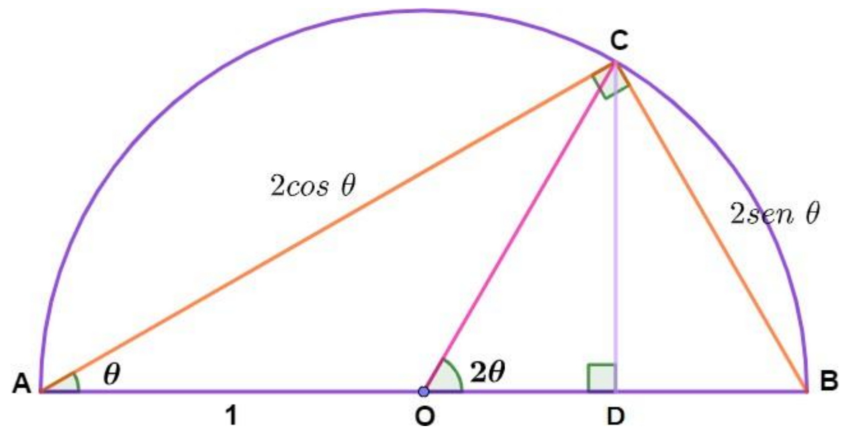
<Al terminar de leer el párrafo, en pantalla y debajo de la construcción, se debe mostrar la igualdad del ángulo *BOC*, posteriormente se realiza una animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.>

Notemos que el ángulo $\measuredangle ACB$ es recto porque subtiende un diámetro, y los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle BOC$ subtienden el mismo arco, por lo que $\measuredangle BOC = 2\theta$



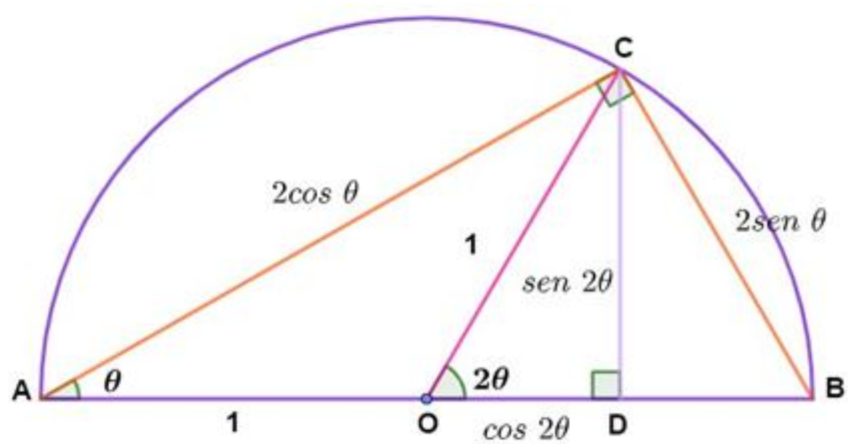
<Al terminar de leer el párrafo se sigue con la animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.>

Como el triángulo ABC es rectángulo, su hipotenusa es el diámetro de la circunferencia, por lo que $AB = 2$. Representemos sus lados en función de las razones trigonométricas.



<Al terminar de leer el párrafo se sigue con la animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.>

Analicemos el triángulo ODC, donde D es el punto de la altura que intersecta al lado OB. Este triángulo es rectángulo por construcción. Su hipotenusa es el segmento OC, el cual al ser radio de la circunferencia mide 1. Los catetos del triángulo se pueden representar en función de las razones trigonométricas.



<En pantalla solo se debe mostrar la construcción y la igualdad del seno del doble de un ángulo.>	A partir de la construcción anterior, demostremos la identidad **del seno del ángulo doble** $sen\ 2\theta\ = 2sen\ \theta\cos\theta$
<Cuando se lea “semejanza se obtiene”, en pantalla se mostrará la igualdad.>	Por el criterio de semejanza AAA, los triángulos $ACD\ y\ ABC$ son semejantes. De esta relación de semejanza se obtiene: $\frac{CD}{AC}=\frac{BC}{AB}$
<Al terminar de leer la oración, en pantalla y debajo de igualdad anterior, se debe colocar la nueva igualdad que aparece después de la oración leída.>	Sustituyendo los valores de los segmentos anteriores: $\frac{sen\ 2\theta}{2\cos\theta}=\frac{2sen\ \theta}{2}$
<En pantalla y debajo de igualdad anterior, se debe colocar la nueva igualdad.>	Despejando $sen\ 2\theta\ = 2sen\ \theta\cos\theta$ con lo que queda demostrada la primera identidad **del seno del ángulo doble**.
<En pantalla solo debe quedar la construcción geométrica y la igualdad del coseno del doble del ángulo.>	Ahora demostremos la identidad **del coseno del doble del ángulo** $\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$ La demostración también se apoya en la relación de semejanza de los triángulos $ACD\ y\ ABC$
<Al leer “tenemos que”, en pantalla se presentará la igualdad.>	De aquí tenemos que: $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$ Como $AD =\ AO\ +\ OD$, la igualdad anterior queda:
<En pantalla y debajo de igualdad anterior, se debe colocar la nueva igualdad.>	$\frac{AO+OD}{AC}=\frac{AC}{AB}$ Sustituyendo las expresiones que representan a cada segmento de la igualdad, queda
<En pantalla y debajo de igualdad anterior, se debe colocar la nueva igualdad.>	$\frac{1+\cos 2\theta}{2\cos\theta}=\frac{2\cos\theta}{2}$ Despejando y simplificando
<En pantalla y debajo de igualdad anterior, se deben colocar las nuevas igualdades.>	$2\ (1+\cos 2\theta) = 4\ cos^2\theta \quad \rightarrow \quad \cos 2\theta = 2\ cos^2\theta - 1$ Con lo que queda demostrada la identidad **del coseno del doble del ángulo**.

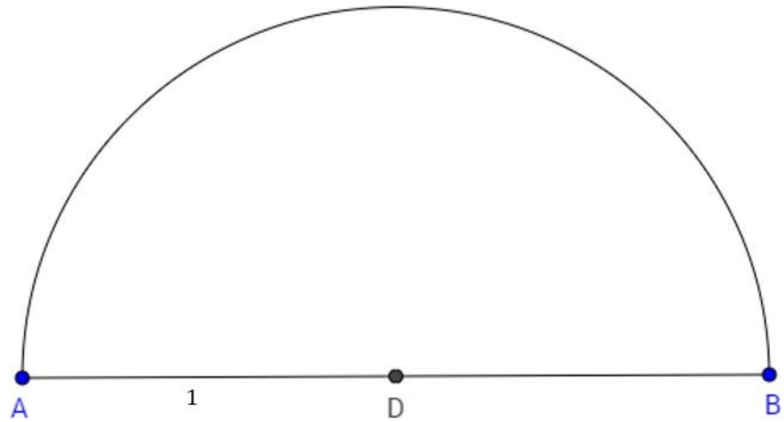
<En pantalla solo debe quedar, en la parte superior, la identidad de la tangente de la mitad de un ángulo.>

Ahora demostremos otra identidad que es la de **la tangente de la mitad de un ángulo**

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{sen\ \theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{sen\ \theta}$$

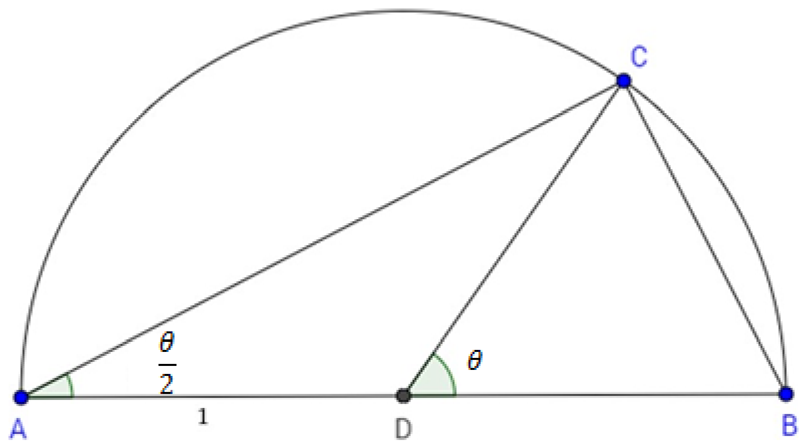
<Al leer "tracemos un semicírculo" en pantalla se mostrará la semicircunferencia.>

Para ello, necesitaremos de la siguiente construcción. Tracemos un semicírculo de radio 1



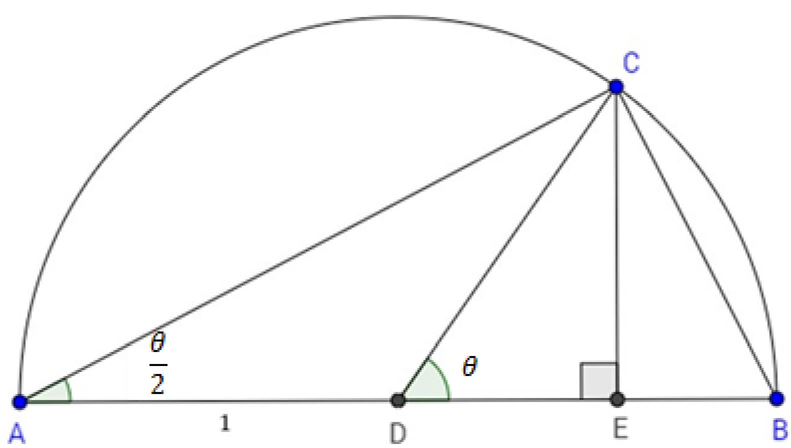
<Cuando se termine de leer la oración, en pantalla habrá una animación de la construcción anterior hasta la siguiente construcción.>

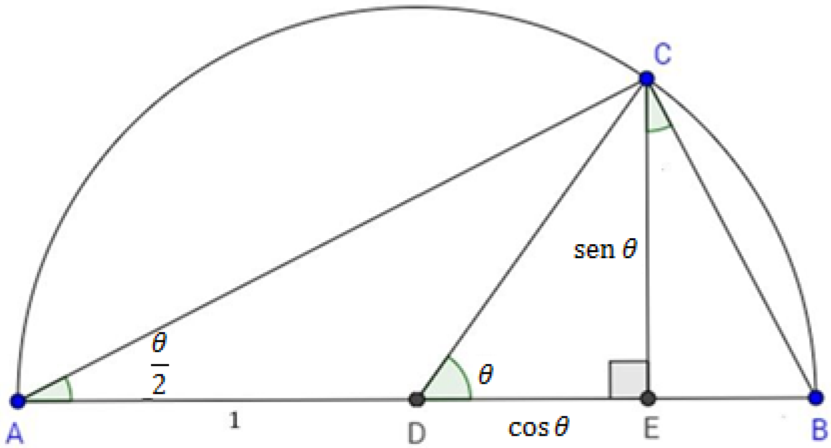
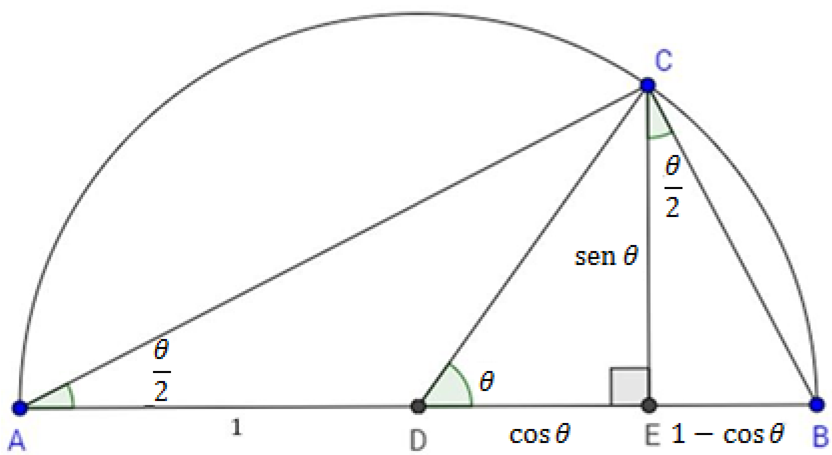
Tracemos un triángulo rectángulo con hipotenusa AB y un punto C en la semicircunferencia, donde C genere el $\measuredangle BAC = \frac{\theta}{2}$. Tracemos el segmento CD. Por construcción el $\measuredangle BAC$ mide la mitad del ángulo $\measuredangle BDC$.



<Al terminar de leer el párrafo se sigue con la animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.>

Tracemos la altura del triángulo ABC con base AB. Llamemos E al pie de la altura.



<Al terminar de leer el párrafo se sigue con la animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.>	Expresamos a los catetos del triángulo rectángulo DCE en función de las razones trigonométricas. 
<Al momento en que se leen las igualdades, estas saldrán en pantalla.>	Como el triángulo ACB es rectángulo el $\measuredangle CBA = 90° - \frac{\theta}{2}$ y como el triángulo BEC también es rectángulo el $\measuredangle ECB = 90° - \left(90° - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}.$
<Al terminar de leer el párrafo se sigue con la animación de la construcción anterior hasta llegar a la siguiente construcción.>	Por otro lado, el segmento DB es un radio del semicírculo, por lo que el segmento $EB = 1 - cos\ \theta$ 
<En pantalla deben aparecer las dos igualdades de la tangente de la mitad de un ángulo.>	Ahora demostremos la identidad de la tangente de la mitad de un ángulo. Trabajando con el triángulo ACE tenemos: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{sen\ \theta}{1 + \cos\theta}$ Trabajando con el ΔBCE tenemos: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{sen\ \theta}$
<Termina cápsula.>	Con lo cual queda demostrado lo que buscábamos.

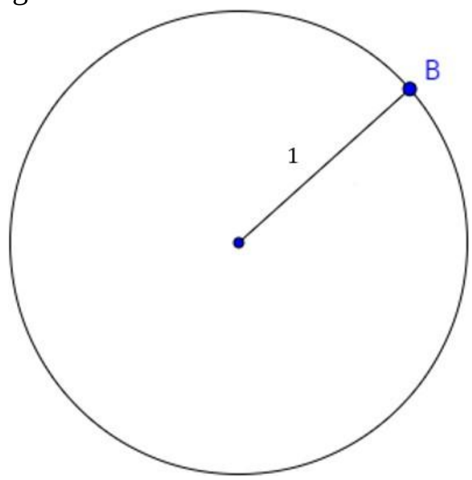
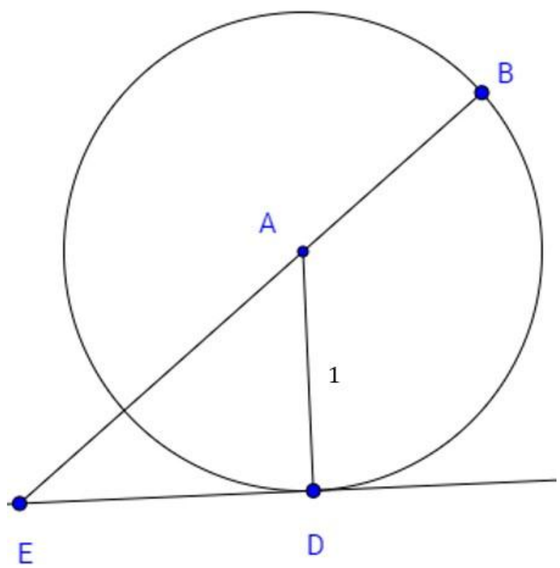
Guion de la cápsula 6 (Última identidad trigonométrica)

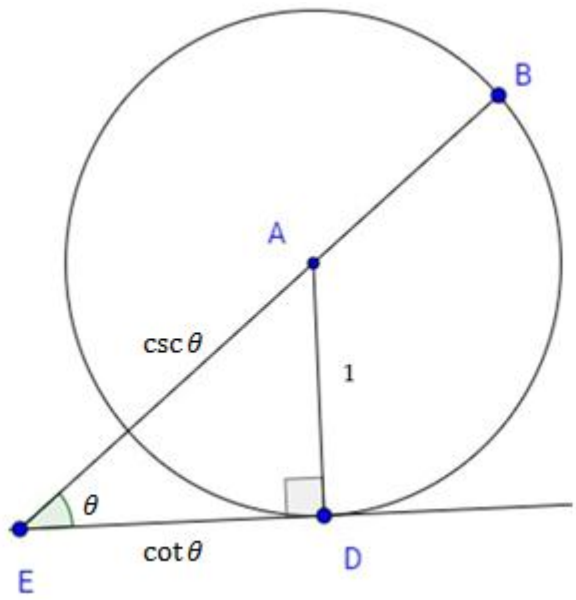
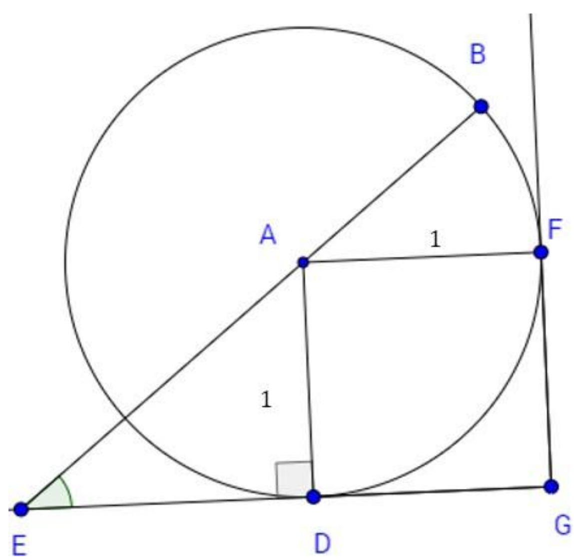
Descripción

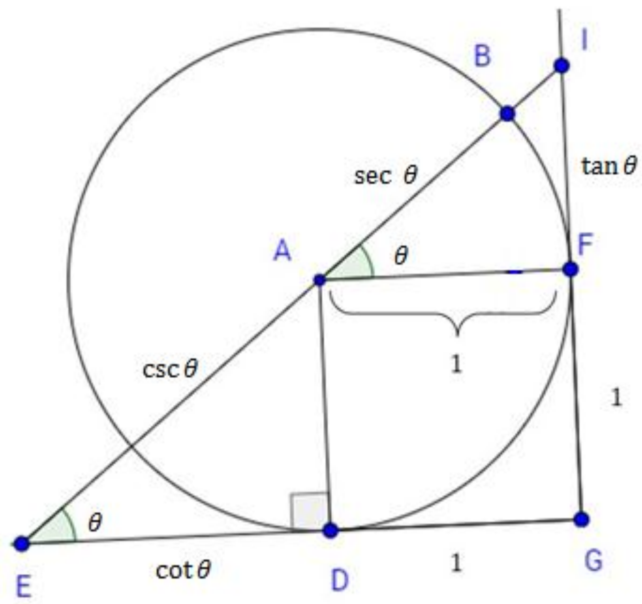
En esta cápsula se trabajará con otra identidad trigonométrica la cual ya no pudo aparecer en la cápsula anterior debido al tiempo máximo que se tiene por cápsula.

La fórmula que se demostrará es $(\cot\theta + 1)^2 + (\tan\theta + 1)^2 = (\sec\theta + \csc\theta)^2$.

Guion de la cápsula 6

Sugerencias técnicas de adaptación a video.	**Última identidad trigonométrica**
<Al leer la identidad en pantalla se mostrará.>	Por último, demostremos la fórmula de la identidad trigonométrica $$(\cot\theta+1)^2+(\tan\theta+1)^2=(\sec\theta+\csc\theta)^2$$
<Cuando se diga “tracemos una circunferencia” en pantalla solo debe aparecer dicha circunferencia.>	Para ello, necesitamos de la siguiente construcción. Tracemos una circunferencia de radio 1 
<Cuando se termine de leer la oración, en pantalla se generará una animación que empieza con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de este párrafo.>	Tomamos un punto D sobre la circunferencia y desde ese punto tracemos la recta tangente a la circunferencia. Prolongamos nuestro radio inicial hasta que intersecte a la tangente en un punto E. 

<Cuando se termine de leer la oración, en pantalla se generará una animación que empieza con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de este párrafo.>	Por construcción, el triángulo EAD es rectángulo, entonces podemos ver a sus lados en función de las razones trigonométricas donde $\theta = \measuredangle DEA$. 
<Cuando se termine de leer la oración, en pantalla se generará una animación que empieza con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de este párrafo.>	Tracemos un cuadrado $AFGD$ con lados que miden 1 y que los segmentos AD y AF sean dos de sus lados. 
<Cuando se termine de leer la oración, en pantalla se generará una animación que empieza con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de este párrafo.>	Si prolongamos el radio AB hasta que se intersecte con la recta GF en el punto I, generamos otro triángulo que es rectángulo por construcción y que a su vez es semejante con el triángulo EDA por el criterio AAA, ya que los lados AF y ED son paralelos por construcción. Por lo que podemos ver a sus catetos en función de las razones trigonométricas.

<En pantalla solo debe quedar la construcción geométrica. Posteriormente debajo de la construcción, debe aparecer la igualdad que está a la derecha de este comentario.> <Termina cápsula.>	 Ahora, podemos demostrar la identidad. Para ello, nos fijamos que el triángulo EIG es rectángulo y conocemos sus lados por lo que aplicando el teorema de Pitágoras se tiene: $(\cot\theta+1)^2+(\tan\theta+1)^2=(\sec\theta+\csc\theta)^2$ Con lo cual queda demostrado lo que queríamos.

Tarea 2

Descripción

Para seguir reforzando todo lo visto, se propone que los profesores demuestren las identidades trigonométricas:

$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$ y $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$

Posteriormente se pide que demuestren la ecuación de Mollweide. Esta construcción se obtuvo del libro *Proofs without words. Exercises in visual thinking*, de Nelsen, Roger B. Se tomó la decisión de colocar esta ecuación, para que los profesores sigan reforzando su análisis geométrico. Se espera que con todo lo que ya han trabajo puedan demostrarlo. Con esto se cierra, en el módulo 3, todo lo referente a las identidades trigonométricas.

Tarea 2

- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

1) Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

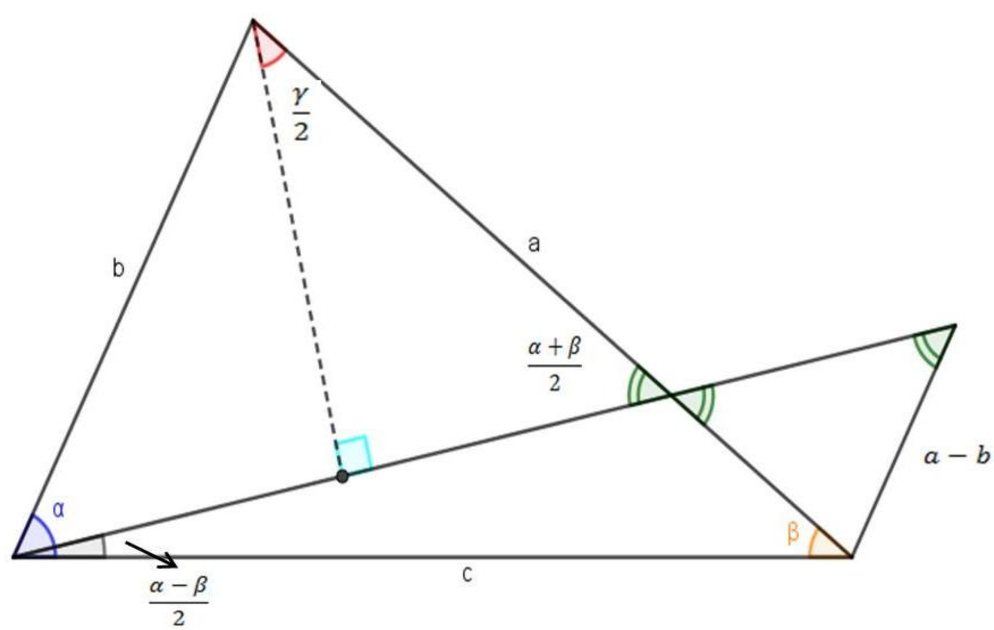
$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$$
y
$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

Sugerencia: puedes apoyarte en la circunferencia unitaria.

2) Sean a, b, c las longitudes de un triángulo y α, β y γ la medida de los ángulos opuestos a estos lados respectivamente. Muestra la ecuación de Mollweide

$$(a-b)cos\frac{\gamma}{2} = csen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

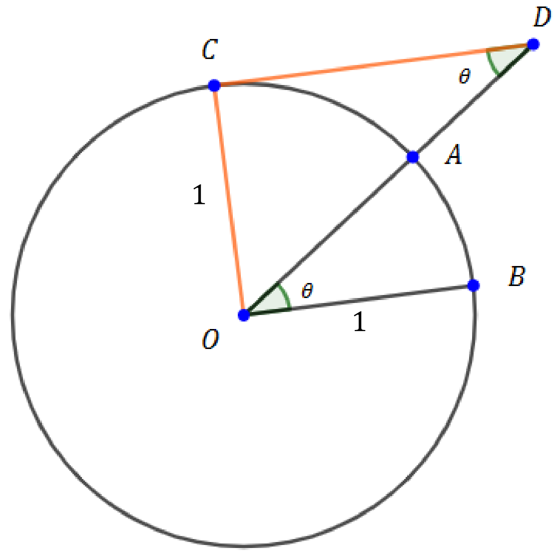
Apóyate de la siguiente construcción:



Solucionario

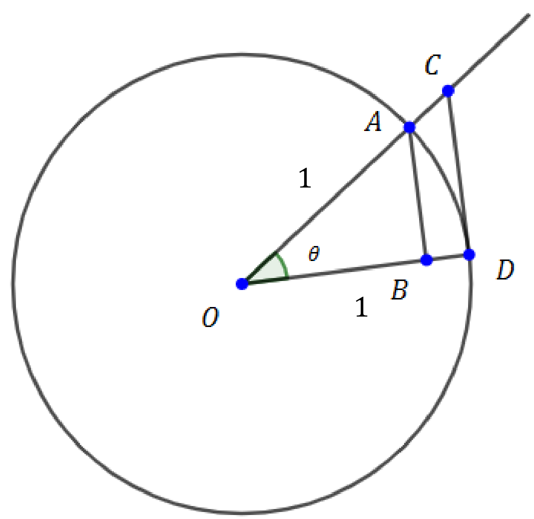
- Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

1) Demuestra las siguientes identidades trigonométricas: $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$



En una circunferencia unitaria se traza el ángulo θ. Se traza el radio que es perpendicular a OB y el punto C es donde el radio toca a la circunferencia. A partir del punto C se traza la tangente y se prolonga el lado OA hasta que intersecte a la tangente en el punto D. Por construcción $\measuredangle BOA = \measuredangle CDO$. Utilizando el triángulo CDO se obtiene que: $\cot\theta = CD$ y $\csc\theta = OD$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo COD da $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$.

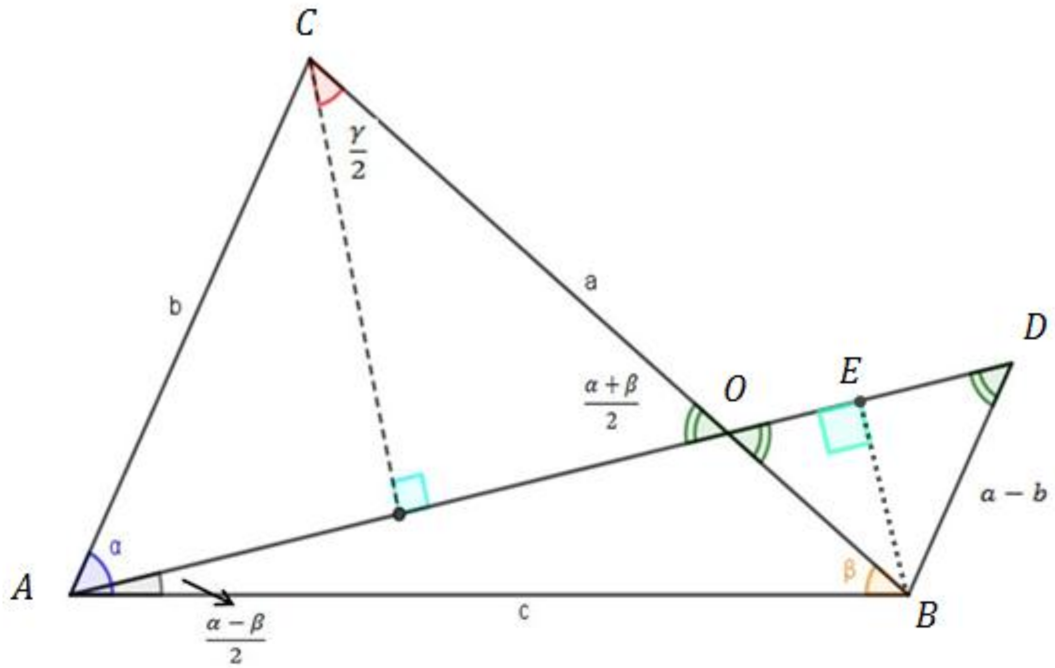
Demuestra las siguientes identidades trigonométricas: $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$



En una circunferencia unitaria se traza el ángulo θ. Se construye el triángulo AOB de tal modo que el lado AB es perpendicular a OB. Se traza la tangente de la circunferencia en el punto D y se prolonga el lado OA hasta que intersecte a la tangente en el punto C. Utilizando el triángulo CDO se obtiene que: $\tan\theta = CD$ y $\sec\theta = OC$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo COD da $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$.

3) Sean a, b, c las longitudes de un triángulo y α, β y γ la medida de los ángulos opuestos a estos lados respectivamente. Muestra la ecuación de Mollweide

$$(a-b)cos\frac{\gamma}{2} = csen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$



Por construcción los triángulos ACO y DBO son semejantes, por lo que

$$\measuredangle DBE = \frac{\gamma}{2}$$

además el triángulo DBE es rectángulo, entonces

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{EB}{a-b} \Rightarrow (a-b)cos\frac{\gamma}{2} = EB.$$

Por otro lado el triángulo AEB es rectángulo, entonces

$$sen\ \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{EB}{c} \Rightarrow csen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = EB$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene la ecuación de Mollweide

$$(a-b)cos\frac{\gamma}{2} = csen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

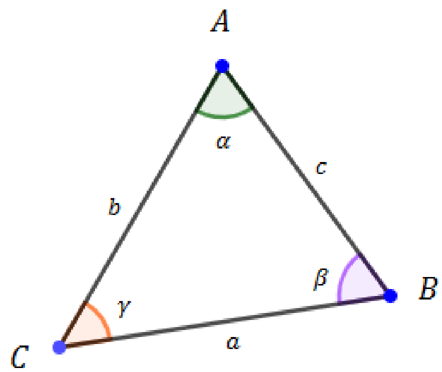
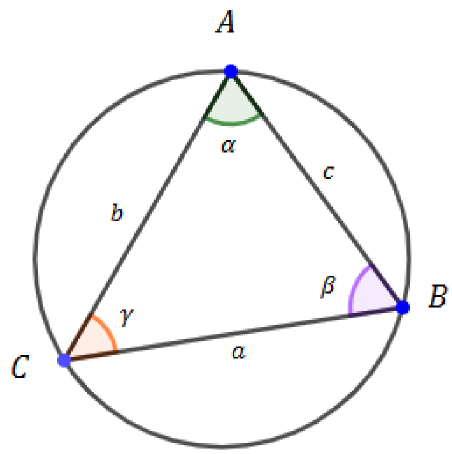
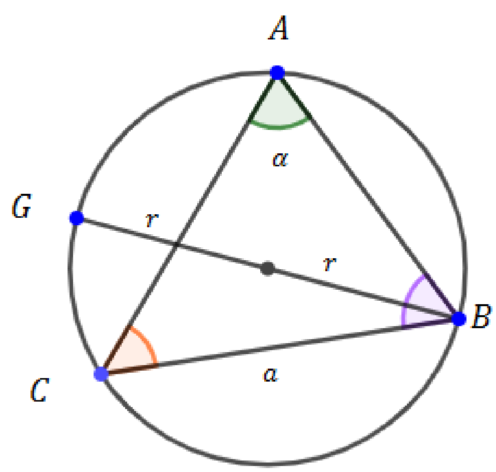
Guion de la cápsula 7 (Ley de senos y cosenos)

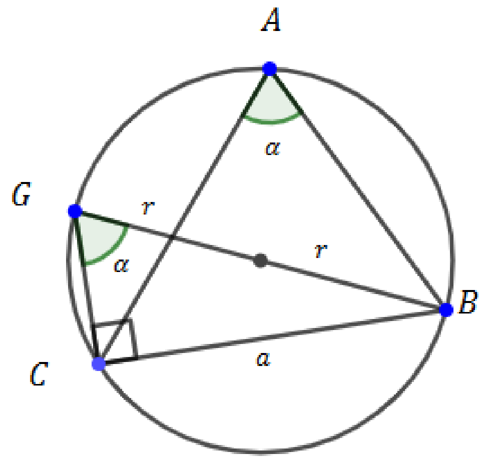
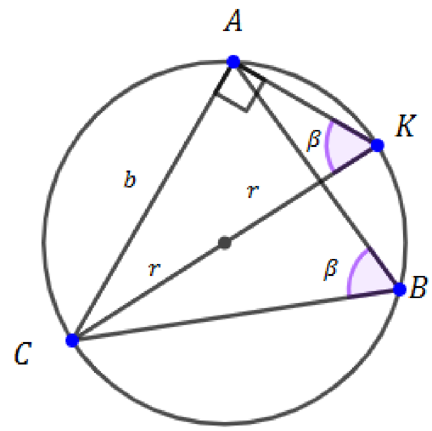
Descripción

Esta cápsula se centra en la demostración de la ley de senos y de cosenos. En general los profesores tienen bien identificadas las dos leyes y cuándo se deben de aplicar, no obstante, un gran porcentaje de ellos no saben la justificación que hay detrás de ellas y eso hace que al exponerlas a sus alumnos no se pueda transmitir un aprendizaje significativo y se vuelva meramente un tema de memorización. Por lo anterior se tomó la decisión de trabajar en una cápsula las dos leyes y para cada una de ellas dar una demostración.

Con esta cápsula se concluyen todos los temas a trabajar con el módulo de trigonometría. Hay que recordar que la maestría no se hizo con la finalidad de crear matemáticos, sino de enriquecer el contenido matemático de los profesores de bachillerato y que tengan un acercamiento heurístico con la geometría.

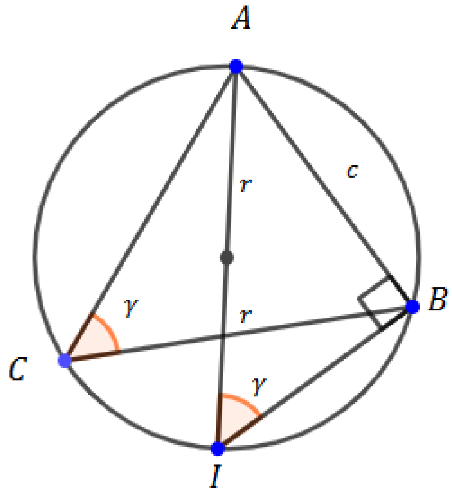
Guion de la cápsula 7

Sugerencias técnicas de adaptación a video.	**Ley de senos y cosenos**
	Para cerrar con los temas de trigonometría revisaremos dos construcciones que nos permitan demostrar la ley de senos y cosenos. Empecemos con la ley de senos.
<Cuando se termine de leer el párrafo en pantalla aparecerá el triángulo ABC.>	Sea ABC un triángulo oblicuángulo donde α es opuesto a a, β es opuesto a b y γ es opuesto a c. 
	Entonces se cumple que: $$\frac{a}{sen\ \alpha}=\frac{b}{sen\ \beta}=\frac{c}{sen\ \gamma}$$
<En pantalla debe mostrarse la igualdad.>	
<Cuando se termine de leer la oración, se generará una animación que empiece con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de la oración.>	Para demostrar la ley tracemos la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. 
<Cuando se termine de leer la oración, se generará una animación que empiece con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de la oración.>	Tracemos un diámetro que pase por B. Llamemos G a su segundo extremo. 

<Cuando se termine de leer la oración, se generará una animación que empiece con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de la oración.>	Por construcción el triángulo CGB es rectángulo, además $\measuredangle CGB = \measuredangle CAB$ por subtender el mismo arco.  Por lo que usando el triángulo CGB, $$sen\ \alpha = \frac{a}{2r}$$
<En pantalla y debajo de la construcción, deben estar las dos igualdades.>	Esto implica que $$2r = \frac{a}{sen\ \alpha}$$
<En el momento en que se lee el párrafo, en pantalla se debe colocar tanto la construcción geométrica que ya estaba junto con las dos igualdades, y en el centro de la pantalla, debe aparecer la nueva construcción que está después de este párrafo.>	Análogamente trabajando con el mismo triángulo y circunferencia, tracemos un diámetro que pase por C y llamemos K a su segundo extremo. Por construcción el triángulo ACK es rectángulo además $\measuredangle AKC = \measuredangle ABC$ por subtender el mismo arco.  Por lo que usando el triángulo ACK, $$sen\ \beta = \frac{b}{2r}$$
<En pantalla y debajo de la construcción, deben estar las dos igualdades.>	Esto implica que $$2r = \frac{b}{sen\ \beta}$$

<En el momento en que se lee el párrafo, en pantalla se debe colocar tanto la construcción geométrica que ya estaba junto con las dos igualdades, y en el centro de la pantalla, debe aparecer la nueva construcción que está después de este párrafo.>

Análogamente trabajando con el mismo triángulo y circunferencia, tracemos un diámetro que pase por A y llamemos I a su segundo extremo. Por construcción el triángulo BIA es rectángulo además $\measuredangle BIA = \measuredangle BCA$ por subtender el mismo arco.



Por lo que usando el triángulo BIA,

$$sen\,\gamma = \frac{c}{2r}$$

<En pantalla y debajo de la construcción, deben estar las dos igualdades.>

Esto implica que

$$2r = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

<Cuando se termine de leer la oración, en pantalla debe aparecer la igualdad.>

Como las tres expresiones obtenidas están igualadas a $2r$, entonces las podemos igualar entre ellas obteniendo.

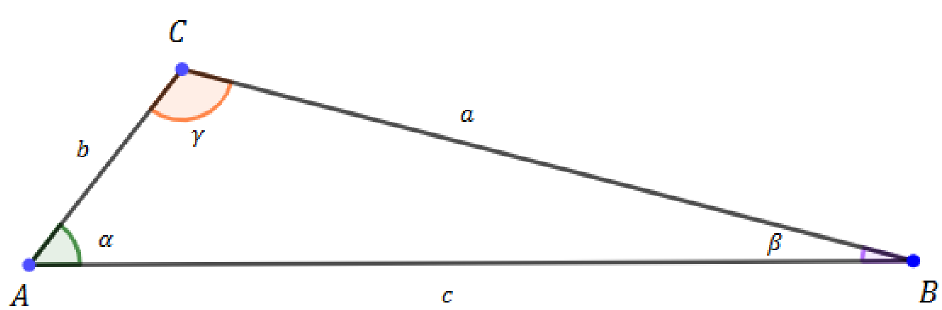
$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

Con lo cual queda demostrada la ley de senos.

Ahora demostremos la ley de cosenos.

<Cuando termine se termine de leer en pantalla solo aparecerá el triángulo.>

Sea ABC un triángulo oblicuángulo donde α es opuesto a a, β es opuesto a b y γ es opuesto a c.

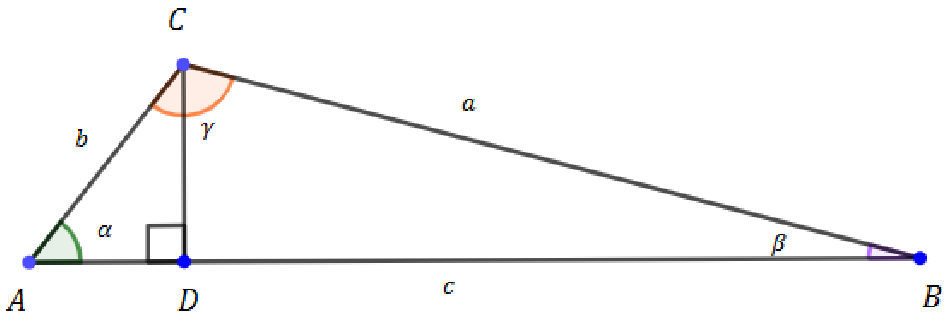


Entonces se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

<Cuando se termine de leer la oración, se generará una animación que empiece con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de la oración.>

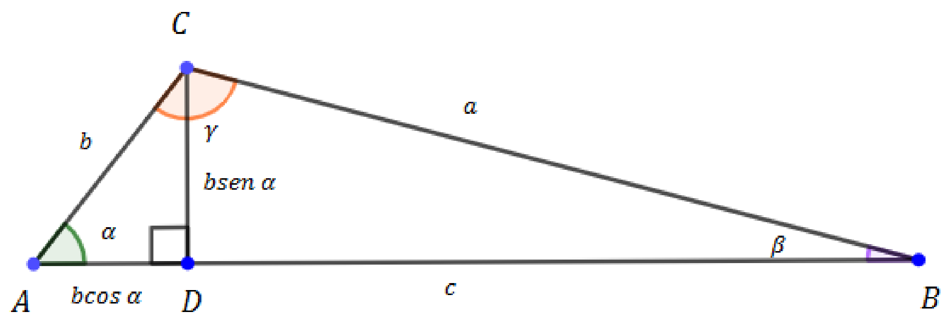
Tracemos la altura de triángulo ABC que pasa por el vértice C, y que intersecta a la base en el punto D. Por construcción el nuevo triángulo ADC es rectángulo.



<Cuando se termine de leer la oración, se generará una animación que empiece con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de la oración.>

Por tanto sus catetos se pueden representar de la siguiente forma

$$AD = b\cos\alpha \qquad \text{y} \qquad CD = b\,\mathrm{sen}\,\alpha$$



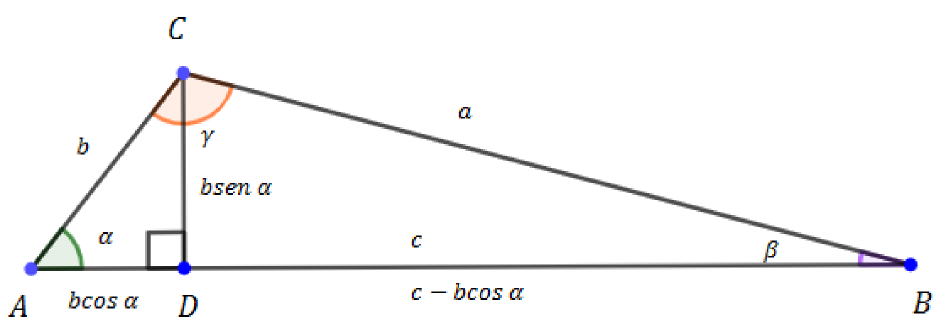
<Cuando se termine de leer la oración, se generará una animación que empiece con la construcción anterior hasta llegar a la construcción que sigue de la oración.>

Por otro lado, por construcción el triángulo CDB es rectángulo por lo que sus catetos se pueden representar de la siguiente forma

$$CD = b\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

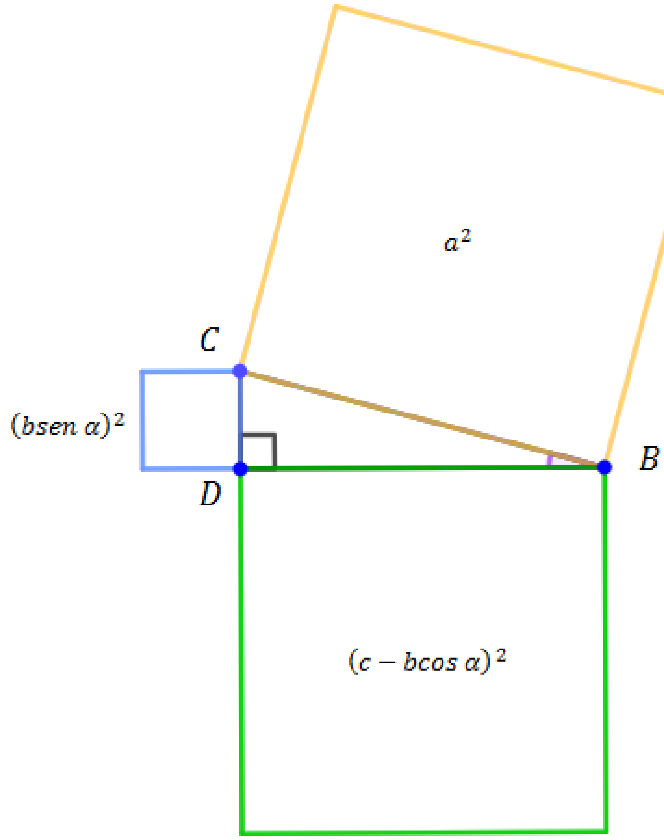
y

$$DB = AB - AD = c - b\cos\alpha$$



<En el momento en que se lea la oración, en pantalla se debe colocar la construcción geométrica anterior a la izquierda y en el centro de la pantalla, se mostrará la nueva construcción que aparece después de la oración leída.>

Trabajando con el triángulo *CDB*, podemos aplicar el teorema de Pitágoras, con lo cual queda.



$$a^2 = (bsen\ \alpha)^2 + (c - bcos\ \alpha)^2$$

<En pantalla deben aparecer las igualdades, en el momento en que se van leyendo.>

Desarrollando

$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 - 2bccos\ \alpha + b^2 cos^2\alpha$$

Factorizando

$$a^2 = c^2 + b^2(sen^2\alpha + cos^2\alpha) - 2bccos\ \alpha$$

Simplificando queda como

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\ \alpha$$

Con lo que queda demostrada la ley de cosenos.

De manera análoga podemos demostrarla para los lados *b y c* del triángulo.

<En pantalla deben aparecer las dos igualdades, en el momento en que se van leyendo. Y con ello se termina la cápsula.>

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\ \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\ \gamma$$

Tarea 3

Descripción

Se les pide a los profesores que demuestren la ley de cosenos a partir del concepto de potencia, que si bien, no viene en los guiones de las cápsulas, aparece al inicio de la tarea en el "Contenido de Apoyo".

Con esto se concluye todo el módulo de trigonometría y se cierra todo el contenido trabajado, desde el módulo 1, hasta el módulo 3.

Tarea 3

Contenido de Apoyo

- Lee el siguiente teorema junto con su demostración, posteriormente resuelve los ejercicios.

Teorema

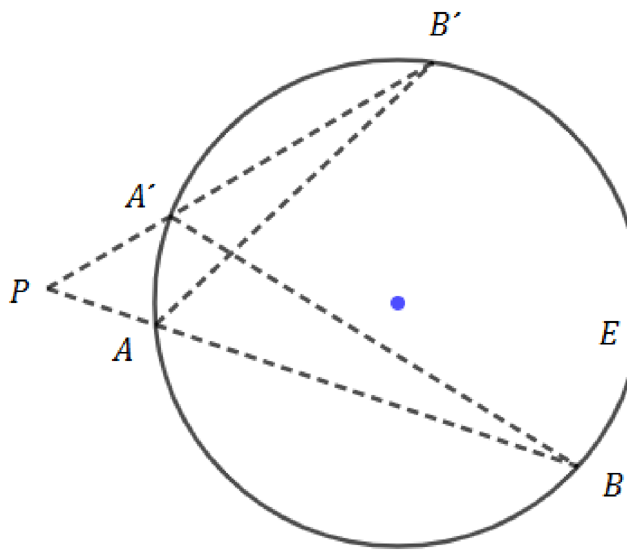
El producto de los segmentos determinados por una secante a una circunferencia fija C trazada desde un punto cualquiera del plano P es constante. Dicha constante se llama *potencia del punto P respecto a la circunferencia C*.

Demostración:

Sea P un punto cualquiera en el plano.

Tracemos una secante a la circunferencia C desde P. Los puntos de corte los nombramos A y B.

Tracemos una segunda secante a la circunferencia C desde P. Los puntos de corte los nombramos A' y B'.



Mostremos que los triángulos PAB' y $PA'B$ son semejantes:

Observamos los ángulos $\measuredangle A'B'A$ y $\measuredangle A'BA$, los dos son ángulos inscritos en la circunferencia que subtienden la misma cuerda AA', por tanto $\measuredangle A'B'A = \measuredangle A'BA$.

Por otro lado, notamos que los ángulos $\measuredangle BPA'$ y $\measuredangle B'PA$ son el mismo

Entonces por el criterio de semejanza AAA los triángulos PAB' y $PA'B$ son semejantes.

De tal manera que:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$$

Despejando, tenemos

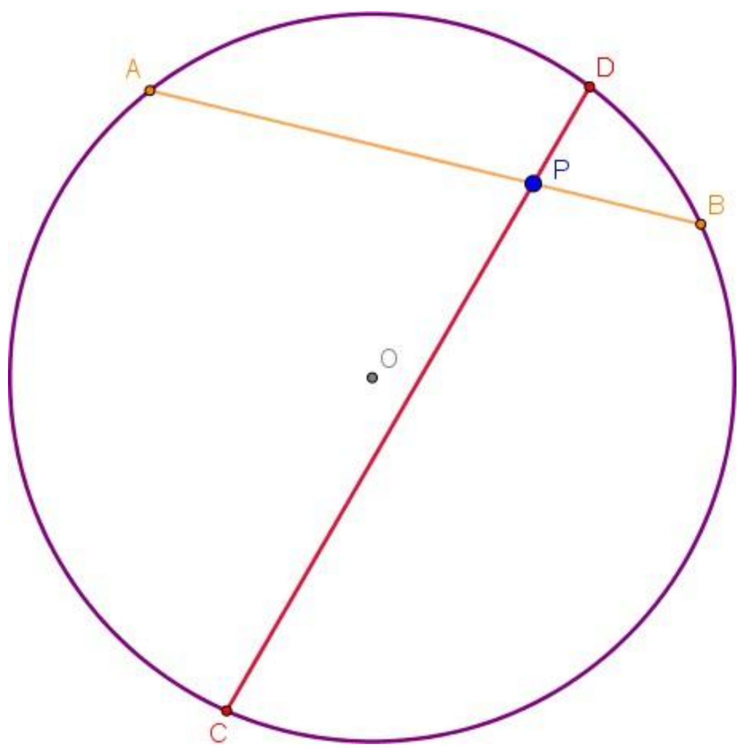
$$PA * PB = PA' * PB'$$

Como se cumple para cualquier otra secante que pase por P (distinta de AB), entonces $PA * PB$ es constante.

A continuación se ilustra un caso particular del teorema que puede ser utilizado como sugerencia para resolver el segundo problema de la tarea:

Observa que P es cualquier punto en el plano, entonces por el teorema anterior

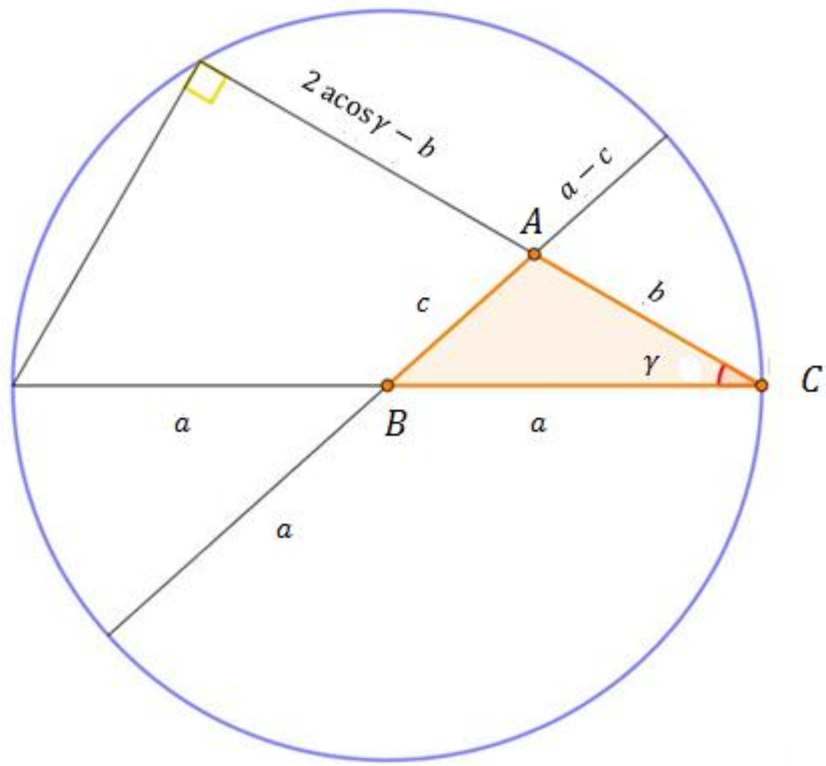
$$PA*PB=PC*PD$$



- Resuelve los siguientes ejercicios con la ayuda de tu tutor.

1) La ley de cosenos puede ser demostrada utilizando el concepto de potencia de un punto P respecto a una circunferencia dada C. Apoyándote de la siguiente figura, demuestra la ley de cosenos para el triángulo ABC.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\,\gamma$$



Sugerencia: Muestra que $(2\,a\cos\gamma - b)(b) = (a-c)(a+c)$

2) Demuestra la otra igualdad de la ley de cosenos para el mismo triángulo ABC de la construcción anterior.

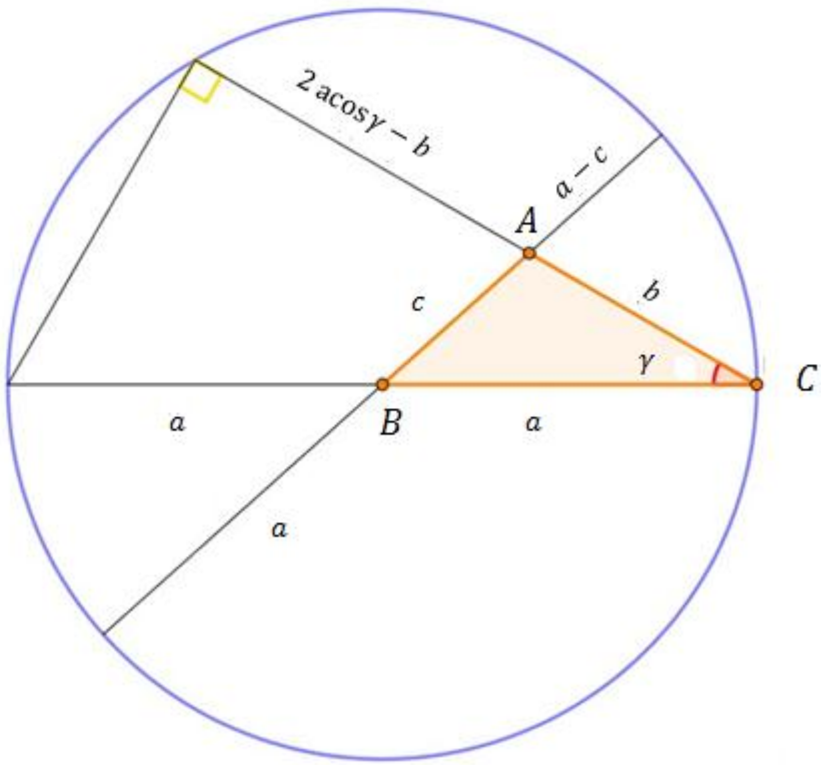
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\,\beta$$

Solucionario

- Resuelve los siguientes ejercicios con la ayuda de tu tutor.

1) La ley de cosenos puede ser demostrada utilizando el concepto de potencia de un punto P respecto a una circunferencia dada C. Apoyándote de la siguiente figura, demuestra la ley de cosenos para el triángulo ABC.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\,\gamma$$



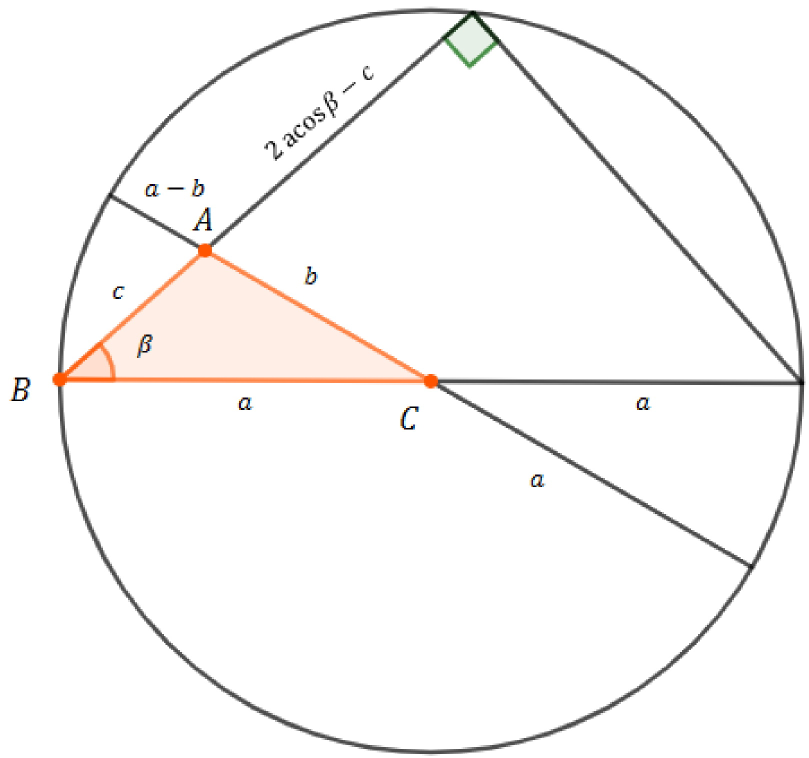
Sugerencia: Muestra que $(2\,\text{a}\cos\gamma - b)(b) = (a-c)(a+c)$

Por el teorema que viene en el contenido de apoyo se tiene que $(2\,\text{a}\cos\gamma - b)(b) = (a-c)(a+c)$. Desarrollando queda $2abcos\,\gamma - \ b^2 = a^2 - c^2$, despejando a c^2 obtenemos lo que buscamos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\,\gamma$$

2) Demuestra la otra igualdad de la ley de cosenos para el mismo triángulo ABC de la construcción anterior.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\,\beta$$



Por el teorema que viene en el contenido de apoyo se tiene que $(2\,a\cos\beta - c)(c) = (a-b)(a+b)$. Desarrollando queda $2accos\,\beta - c^2 = a^2 - b^2$, despejando a b^2 obtenemos lo que buscamos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\,\beta$$

Conclusión

Durante la elaboración de este material me di cuenta de lo minucioso que uno debe ser para cumplir con los objetivos planteados y que si bien mi propuesta se culminó eso no quiere decir que ya no se deba ajustar.

En el 2020 noté la gran importancia que tiene este tipo de materiales ya que por la pandemia de COVID-19 el estudio de forma presencial fue imposible. Gracias a las herramientas digitales se pudo sobrellevar el aprendizaje aunque sí hubo un rezago educativo ya que no todos los grados escolares se adaptaron a las herramientas ya generadas. Es por ello que se necesita fomentar este tipo de materiales ya que no sabemos si en poco tiempo tengamos que volver a regresar a un estudio virtual.

Un punto a cuidar para la implementación de este material es que no se quiere formar a los profesores como matemáticos, sino más bien que se apoderen de los vínculos deductivos que permiten hacer demostraciones.

Además se pretende que los profesores apliquen en sus clases lo visto en los guiones para que sus alumnos sigan fortaleciendo su intuición, su observación y su imaginación, logrando un aprendizaje significativo. Finalmente todo el material: guiones y tareas están diseñadas de modo que se trata de evaluar lo mínimo para que el tutor con sus observaciones pueda justificar si los profesores alcanzaron los objetivos que él designó.

Bibliografía

[1] Cárdenas Rubio, Silvestre, *Dos o tres trazos*, México, Facultad de Ciencias-UNAM, 115 pp.

[2] Fetisov, A. I., *La demostración en geometría*, México, Limusa-Willey, 1973, 72 pp.

[3] González Urbaneja, Pedro, *Pitágoras: el filósofo del número*, Madrid, Nivola, 2009

[4] Lucio, Guadalupe, Rodolfo San Agustín y Nieves Martínez de la Escalera, *Un poco de geometría. Vínculos Matemáticos no. 61*, México, Coordinación de Servicios Editoriales-Facultad de Ciencias, UNAM, 2007, 108 pp.

[5] Nelsen, Roger B., *Proofs without words. Exercises in visual thinking,* The mathematical association of America, 1993, 423 pp.

[6] Ivorra Castillo, Carlos, *Geometría*, Primera edición, 513 pp.

[7] Anónimo, *Curso de nivelación, apunte teórico - práctico, modulo 5 trigoometría*, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de la Plata, 60 pp.