



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

# El Teorema de Chern–Gauß–Bonnet

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

IVÁN ALEJANDRO GÓMEZ MARMOLEJO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. GREGOR WEINGART

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

25 DE MAYO DE 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al Dr. Gregor Weingart quien además de ser mi director de tesis y tutor de maestría, es una de las personas que más han influido en mi formación académica a través de los conocimientos transmitidos y apoyos otorgados a lo largo de toda la maestría. En lo que respecta a este trabajo, agradezco infinitamente su disponibilidad, entusiasmo y paciencia.

Agradezco también a la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM por brindarme los recursos y herramientas necesarias para la realización de esta tesis. A todos los académicos de esta institución que de alguna u otra manera impregnaron sus conocimientos en mi persona para poder concluir con esta etapa educativa.

A los doctores Dr. José Luis Cisneros Molina, Dr. Elmar Wagner, Dr. Noé Barcenás Torres y Dr. Juan Manuel Burgos quienes además del Dr. Gregor Weingart fungieron como jurado calificador de este documento, muchas gracias por todos sus comentarios y sugerencias, sin ellas seguramente este trabajo no tendría la validez que tiene ahora.

Por último quiero agradecer a todos mis compañeros, amigos y a mi familia, por apoyarme en los momentos más difíciles de este camino. En especial, quiero agradecer a mis padres de quien siempre encontré el apoyo necesario para salir adelante de cualquier obstáculo presentado.

Muchas gracias a todos.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Conceptos básicos de Geometría Diferencial</b>	<b>9</b>
<b>3. Integral de Berezin y la Pfaffiana</b>	<b>15</b>
3.1. Densidades y orientaciones en espacios vectoriales . . . . .	15
3.2. Integral de Berezin en variedades y la Pfaffiana . . . . .	19
<b>4. Índice de campos vectoriales</b>	<b>25</b>
<b>5. Cálculo diferencial extendido</b>	<b>31</b>
5.1. Formas diferenciales con valores en haces vectoriales . . . . .	31
5.2. Idea de Flanders . . . . .	38
5.3. Relación con el índice de Poincaré–Hopf . . . . .	44
<b>6. Teorema de Chern–Gauß–Bonnet</b>	<b>49</b>
6.1. Forma de transgresión . . . . .	49
6.2. Demostración del Teorema de Chern–Gauß–Bonnet . . . . .	53
<b>7. Relación con el núcleo de calor</b>	<b>55</b>
7.1. Operador de Laplace estándar . . . . .	55
7.2. El núcleo de calor y su relación con Gauß–Bonnet . . . . .	64



# Capítulo 1

## Introducción

El presente trabajo se centrará en dar una prueba del Teorema de Chern–Gauß–Bonnet para variedades cerradas siguiendo lo antes hecho por S. S. Chern [C] y el cálculo diferencial extendido introducido por H. Flanders [F].

Para saber un poco más de este teorema y poner más en contexto el objetivo del trabajo, presentamos algunos hechos históricos de este resultado.

Fue en el año de 1827 cuando apareció la primer versión de este teorema la cual se debe a Gauß, éste afirmaba que para cualquier triángulo geodésico  $T$  contenido en una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , la integral de su curvatura de Gauß era igual a la diferencia entre la suma de sus ángulos interiores y  $\pi$ . En 1848, O. Bonnet publicó una versión más general la cual extendía la antes dada por Gauß a dominios simplemente conexos cuya frontera estuviera formada por un número finito de curvas suaves.

El enunciado más conocido para superficies compactas, orientables y sin frontera se debe a Walter von Dick el cual nos dice que si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie cerrada y orientable se cumple que:

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \kappa dA \quad (1.1)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura de Gauß y  $\chi(\Sigma)$  es la característica de Euler de la superficie, viéndose aquí la fuerte conexión entre las características geométricas y topológicas de la superficie  $\Sigma$ .

Los primeros intentos de extender el teorema a dimensiones mayores vinieron por parte de H. Hopf quien logró demostrar el resultado para hipersuperficies  $M$  cerradas y orientables en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  basándose en la prueba para superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Sea

$$G : M \longrightarrow S^{2n}$$

la aplicación de Gauß a la esfera unitaria  $S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ . Si  $\text{vol} \in \Gamma(\Lambda^{2n}T^*S^{2n})$  es la forma de volumen de  $S^{2n}$  entonces  $G^*\text{vol}$  es una  $2n$ -forma en  $M$ . Es bien sabido que para el caso en que  $n = 1$ :

$$G^*\text{vol} = \kappa dA$$

así, el lado izquierdo de (1.1) se convierte en

$$\frac{1}{2\pi} \int_M \kappa dA = \frac{1}{2\pi} \int_M G^* \text{vol} = \frac{\deg G}{2\pi} \int_{S^2} \text{vol} = 2 \deg G$$

donde  $\deg G$  es el grado topológico de la aplicación de Gauß. En 1926 el mismo Hopf demostró que si  $M$  es una hipersuperficie compacta, orientable de dimensión par contenida en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  entonces el grado de la aplicación de Gauß se relacionaba con su característica de Euler mediante:

$$\deg G = \frac{1}{2} \chi(M)$$

obteniéndose así la conclusión del teorema de Gauß–Bonnet para superficies.

Mediante un argumento similar y algunas consideraciones topológicas, Hopf demostró el teorema para hipersuperficies compactas orientables del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , sin embargo su prueba se veía fuertemente necesitada de la existencia de la aplicación de Gauß.

Alrededor de 1940, Allendoerfer y Frenkel demostraron de forma independiente el teorema para variedades encajadas en espacios Euclidianos de codimensión mayor que 1, utilizando el trabajo de Weyl sobre vecindades tubulares y la curvatura de Lipschitz–Killing. Sin embargo el teorema de encaje de Nash aún no estaba disponible en ese tiempo por lo que el teorema de Gauß–Bonnet para variedades Riemannianas generales aún quedaba abierto.

En 1943, S. S. Chern arrió al *Institute for Advanced Studies* en Princeton y sabiendo de este problema trabajó en ello para en 1944 publicar la primer prueba intrínseca del teorema de Gauß–Bonnet para variedades Riemannianas abstractas, es por ello que en su honor el resultado generalizado lleva el nombre de Teorema de Chern–Gauß–Bonnet.

El desarrollo de la tesis comenzará con un breve repaso de los conceptos básicos de la geometría diferencial moderna, en particular conceptos como haces vectoriales, el operador derivada exterior, variedades Riemannianas, conexiones en haces vectoriales y el tensor de curvatura aparecerán durante todo nuestro trabajo.

El Capítulo 3 introduce conceptos claves como lo son las densidades y las orientaciones en espacios vectoriales para posteriormente generalizar estos conceptos a haces vectoriales. Se introducirá el muy importante término de la integral de Berezin, el cual será una de nuestras principales herramientas. Por último daremos el concepto de la Pfaffiana del tensor de curvatura la cual será una  $m$ -forma en nuestra variedad  $M$  construida a partir de la curvatura y de la integral de Berezin.

La intención del Capítulo 4 es presentar el Teorema de Poincaré–Hopf ya que este importante resultado nos permitirá concluir la prueba del resultado que nos concierne, trabajaremos en la teoría del índice de campos vectoriales y presentaremos dos definiciones aparentemente distintas de éste, para luego demostrar su equivalencia.

El Capítulo 5 es el corazón de este trabajo, ya que en él se encuentran los principales conceptos y resultados que nos conducirán a la demostración del teorema de Chern–Gauß–Bonnet. Comenzaremos introduciendo un cálculo diferencial extendido. Presentaremos ciertas ideas y resultados debidos a H. Flanders [F] que nos permitirán dar una demostración más simplificada y comprensible del teorema, que la original dada por S. S. Chern en [C].

Veremos que de hecho la Pfaffiana es una forma diferenciable exacta en la variedad a menos un conjunto discreto de puntos. Por último presentaremos los cálculos explícitos en un tipo de coordenadas especiales inducidas por la aplicación exponencial.

La demostración del Teorema de Chern–Gauß–Bonnet es presentada en el Capítulo 6, en el que se hará uso de los resultados dados en los capítulos anteriores por lo que en sí es la conjunción de todas las ideas presentadas hasta este punto. Además se presentará la idea de transgresión la cual avalará la prueba dada del Teorema de Chern–Gauß–Bonnet.

Finalmente en el último capítulo 7, presentaremos de manera un tanto informal una relación entre nuestro teorema y el núcleo de calor de un operador integral particular. Estas ideas y resultados son el inicio de los temas que se pretenden estudiar en un futuro doctorado por esto de una vez se advierte de afirmaciones y resultados sin demostraciones.



# Capítulo 2

## Conceptos básicos de Geometría Diferencial

En este capítulo se presentarán los conceptos y resultados básicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo para poder llegar a nuestro objetivo. Aunque no se diga explícitamente, pensaremos a  $M$  como una variedad suave de dimensión  $m$ . En principio, presentamos el concepto general de un haz fibrado sobre una variedad.

### Definición 2.1 (Haces Fibrados)

Sea  $\mathcal{F}$  una variedad suave. Un haz fibrado sobre una variedad  $M$  con fibra modelo  $\mathcal{F}$  es una variedad  $\mathcal{F}M$  junto con una aplicación suave  $\pi : \mathcal{F}M \rightarrow M$ , que es localmente equivalente a la proyección  $\text{pr}_M : M \times \mathcal{F} \rightarrow M$  al primer factor en el producto Cartesiano  $M \times \mathcal{F}$  en el siguiente sentido: Para todo punto  $p \in M$  existe una vecindad abierta  $U \subset M$  de  $p$  y un difeomorfismo  $\Phi : U \times \mathcal{F} \rightarrow \pi^{-1}(U)$ , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : U \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\cong} & \pi^{-1}(U) \\ \text{pr}_U \searrow & \circlearrowright & \nearrow \pi \\ & U & \end{array} .$$

### Definición 2.2 (Conceptos Matemáticos en Relación a Haces Fibrados)

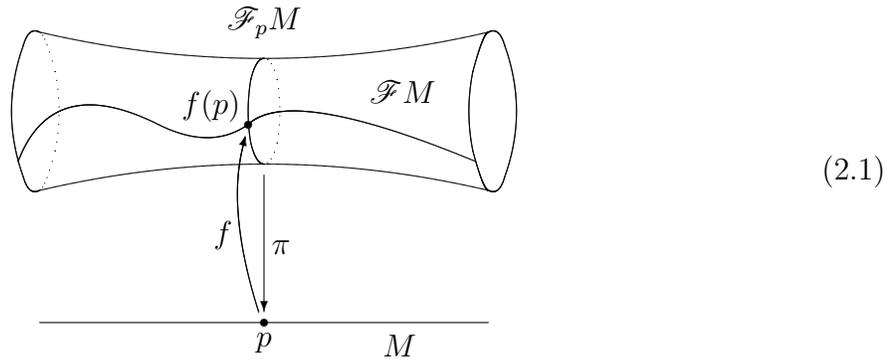
Sea  $\mathcal{F}M$  un haz fibrado sobre una variedad suave  $M$  con proyección  $\pi : \mathcal{F}M \rightarrow M$ . En este contexto se denomina la variedad  $M$  como la variedad base del haz fibrado  $\mathcal{F}M$ , mientras el término espacio total se refiere a la variedad  $\mathcal{F}M$ , en particular para subrayar sus propiedades sólo como una variedad sin tomar la proyección  $\pi$  en cuenta. La fibra del haz fibrado  $\mathcal{F}M$  sobre un punto  $p \in M$  es la preimagen de  $p$  bajo la proyección  $\pi$ :

$$\mathcal{F}_p M := \pi^{-1}(p) = \{ f \in \mathcal{F}M \mid \pi(f) = p \} .$$

Una sección de un haz fibrado es una aplicación suave  $f : M \rightarrow \mathcal{F}M$  con la propiedad  $\pi \circ f = \text{id}_M$ , es decir su valor en cada punto  $p \in M$  es un elemento  $f(p) \in \mathcal{F}_p M$  de la fibra de  $\mathcal{F}M$  sobre el punto  $p$ . El conjunto de todas las secciones de  $\mathcal{F}M$  se denota por:

$$\Gamma(\mathcal{F}M) = \Gamma(M, \mathcal{F}M) := \{ f : M \rightarrow \mathcal{F}M \mid f \text{ suave y } \pi \circ f = \text{id}_M \} .$$

Un resumen de estos conceptos matemáticos importantes se vea en la siguiente ilustración:



(2.1)

**Ejemplo 2.3 (Fibración trivial)**

Sean  $M$  y  $\mathcal{F}$  variedades suaves, sea  $\mathcal{F}M = M \times \mathcal{F}$  y  $\pi = \text{pr}_M$  entonces para cada  $p \in M$  y cada vecindad abierta  $U_p$  de  $p$  se tiene que  $\pi^{-1}(U_p) = U_p \times \mathcal{F}$  y así consideramos  $\Phi = \text{id}|_{U_p \times \mathcal{F}}$ , luego  $\Phi(U_p \times \mathcal{F}) = U_p \times \mathcal{F}$  y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}|_{U_p \times \mathcal{F}} : U_p \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\cong} & U_p \times \mathcal{F} \\
 \text{pr}_{U_p} \searrow & \circlearrowleft & \text{pr}_M|_{U_p} \swarrow \\
 & U_p &
 \end{array}$$

En conclusión, para todas variedades suaves  $M$  y  $\mathcal{F}$  siempre existe un haz fibrado  $\mathcal{F}M$  con fibra modelo  $\mathcal{F}$ .

En particular en este trabajo estaremos interesados en haces fibrados cuyas fibras sean espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.4 (Haz Vectorial)**

Un haz vectorial es una 4-tupla  $(VM, \pi, \{+_p\}_{p \in M}, \{\cdot_p\}_{p \in M})$  tal que  $(VM, \pi)$  es un haz fibrado sobre  $M$  con fibra modelo  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , tal que  $(V_pM, +_p, \cdot_p)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  para todo punto  $p \in M$  y se pueden elegir las trivializaciones locales de manera lineal. Esto es, para cada  $p \in M$  existe una vecindad  $U_p \subset M$  de  $p$  y una trivialización

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi : U_p \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\cong} & \pi^{-1}(U_p) \\
 \text{pr}_{U_p} \searrow & \circlearrowleft & \pi \swarrow \\
 & U_p &
 \end{array}$$

tal que para cada  $q \in U_p$  se tiene que  $\Phi_q : \{q\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow V_qM$  es un isomorfismo lineal.

El ejemplo más importante de un haz vectorial es el haz tangente

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

en cuyo caso, para cada  $p \in M$  se tiene que  $\pi^{-1}(p) = T_p M \cong \mathbb{R}^m$ . De manera similar, se define el haz cotangente sobre la variedad  $M$  como:

$$T^*M := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p^*M.$$

**Definición 2.5 (Campos Vectoriales y 1-formas)**

Decimos que  $X$  es un campo vectorial en  $M$  si  $X \in \Gamma(TM)$  y que  $\alpha$  es una 1-forma si  $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ .

Consideremos la categoría  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\times}$  cuyos objetos son espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  y sus morfismos son isomorfismos lineales.

**Definición 2.6 (Funtor Suave)**

Un funtor suave es un endofuntor  $\mathbb{S} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\times} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\times}$ , tal que para todo objeto  $V$  la siguiente aplicación inducida por el funtor  $\mathbb{S}$  en morfismos es suave:

$$\mathbb{S} : \mathbf{GL}V \rightarrow \mathbf{GL}\mathbb{S}(V), \quad F \mapsto \mathbb{S}_{\text{Mor}}(F).$$

Así como el haz cotangente se puede obtener directamente del haz tangente, podemos construir haces vectoriales a partir de un haz vectorial dado.

**Proposición 2.7** Sea  $\mathbb{S}$  un funtor suave y  $VM$  haz vectorial sobre  $M$ , entonces

$$\mathbb{S}(VM) := \dot{\bigcup}_{p \in M} \mathbb{S}(V_p M)$$

es un haz vectorial.

Ver por ejemplo [S].

Con este resultado a la mano, se sigue que  $\text{Sym}^{\bullet}TM$ ,  $\Lambda^{\bullet}TM$ ,  $\text{Sym}^{\bullet}T^*M$ ,  $\Lambda^{\bullet}T^*M, \dots$  son haces vectoriales sobre la variedad  $M$ . Así, diremos que  $\eta$  es una  $k$ -forma diferencial si  $\eta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ .

Presentamos ahora el muy importante concepto del operador derivada exterior.

**Definición 2.8 (Derivada Exterior para formas homogéneas)**

Para  $\eta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$  con  $0 \leq k \leq m$  y  $X_1, X_2, \dots, X_{k+1} \in \Gamma(TM)$ , se define la derivada exterior de  $\eta$  por:

$$\begin{aligned} (d\eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) := & + \sum_{[\sigma] \in S_{k+1}/S_1 \times S_k} (\text{sgn } \sigma) X_{\sigma(1)} \eta \left( X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)} \right) \\ & - \sum_{[\sigma] \in S_{k+1}/S_2 \times S_{k-1}} (\text{sgn } \sigma) \eta \left( [X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}], X_{\sigma(3)}, \dots, X_{\sigma(k+1)} \right) \end{aligned}$$

en donde la sumas corren sobre un sistema de representantes del cociente entre el grupo  $S_{k+1}$  y los subgrupos estándares  $S_1 \times S_k$  y  $S_2 \times S_{k-1}$  respectivamente.

El siguiente resultado enlista algunas de las propiedades más importante de la derivada exterior de formas diferenciales.

**Proposición 2.9 (Propiedades de la Derivada Exterior)**

La derivada exterior es la única aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal y homogénea de grado  $+1$

$$d: \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{\bullet+1} T^*M), \quad \eta \longmapsto d\eta,$$

de las formas diferenciales en si, que satisface las siguientes propiedades características:

- Para una función  $f \in C^\infty(M)$  considerado como una 0-forma es verdad que:

$$df = \text{diferencial total de } f.$$

- La derivada exterior es un operador de cofrontera, es decir que su cuadrado se anula:

$$d^2 = 0.$$

- La derivada exterior es una superderivación que satisface una regla de Leibniz torcida:

$$d(\eta \wedge \psi) = (d\eta) \wedge \psi + (-1)^{|\eta|} \eta \wedge (d\psi).$$

Ver por ejemplo [KN].

La segunda propiedad de ésta proposición nos dice exactamente que la aplicación  $d$  genera un complejo de cadenas en  $\Lambda^\bullet T^*M$ .

**Definición 2.10 (Cohomología de De Rham)**

La cohomología de De Rham de una variedad suave  $M$  de dimensión  $m \in \mathbb{N}$  es la cohomología de su complejo de De Rham, en que identificamos  $\Gamma(\Lambda^0 T^*M)$  con el álgebra  $C^\infty(M)$ :

$$0 \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1 T^*M) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^2 T^*M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^m T^*M) \longrightarrow 0.$$

En otras palabras la cohomología de De Rham es el espacio vectorial  $\mathbb{Z}$ -graduado

$$H_{\text{DR}}^\bullet(M, \mathbb{R}) := \bigoplus_{k=0}^m H_{\text{DR}}^k(M, \mathbb{R})$$

formado por los subespacios homogéneos de grado  $k \in \mathbb{N}_0$

$$H_{\text{DR}}^k(M, \mathbb{R}) := \frac{\ker [d: \Gamma(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{k+1} T^*M)]}{\text{im} [d: \Gamma(\Lambda^{k-1} T^*M) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^k T^*M)]},$$

que miden la falla del complejo de ser exacta en el espacio  $\Gamma(\Lambda^k T^*M)$  de  $k$ -formas.

Por definición, una forma diferencial general  $\eta = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_{m-1} + \eta_m + 0 + \dots$  se llama:

$$\eta \text{ cerrada} \iff d\eta = 0$$

$$\eta \text{ exacta} \iff \eta = d\psi \text{ para alguna forma } \psi \in \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M).$$

La formulación del enunciado del teorema de Chern–Gauß–Bonnet involucra variedades diferenciables con una estructura adicional.

### Definición 2.11 (Variedad Riemanniana)

Una variedad Riemanniana es una pareja  $(M, g)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g \in \Gamma(\text{Sym}^2 T^*M)$  tal que para cada  $p \in M$  se tiene que  $g_p : T_p^*M \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}$  es definida positiva.

Si solamente pedimos que  $g_p$  sea no degenerada para cada  $p \in M$ , entonces la signatura de  $g_p$  es el par  $(m^+, m^-) \in \mathbb{N}_0^2$  con  $m^+ + m^- = \dim M$ , donde  $m^\pm$  son las dimensiones de subespacios maximales  $U^\pm \subset T_p^*M$  tal que  $\pm g|_{U^\pm \times U^\pm} > 0$  es definida positiva. La signatura no cambia en el componente conexo de  $M$  que contiene  $p$ .

### Definición 2.12 (Variedad pseudo–Riemanniana)

Una variedad diferenciable junto con una 2–forma simétrica no degenerada es llamada variedad pseudo–Riemanniana de signatura  $(m^+, m^-)$ .

Ahora presentamos el muy importante concepto de conexiones de Koszul o también llamadas conexiones lineales en haces vectoriales, las cuales frecuentemente se conocen como derivadas covariantes.

### Definición 2.13 (Conexión lineal)

Sea  $VM$  un haz vectorial sobre una variedad  $M$ . Una conexión lineal en  $VM$  es una aplicación

$$\nabla^{VM} : \underbrace{\Gamma(TM)}_{\text{dirección}} \times \underbrace{\Gamma(TM)}_{\text{argumento}} \longrightarrow \underbrace{\Gamma(TM)}_{\text{derivada direccional}}$$

que es  $\mathbb{R}$ –bilineal y cumple lo siguiente para todo campo vectorial  $X \in \Gamma(TM)$ , toda sección  $v \in \Gamma(TM)$  de  $VM$  y toda función suave  $f \in C^\infty(M)$ :

1.  $\nabla^{VM}$  es  $C^\infty(M)$ –lineal en el campo vectorial:

$$\nabla_{f \cdot X}^{VM} v = f \cdot \nabla_X^{VM} v.$$

2.  $\nabla^{VM}$  satisface la regla de Leibniz en la sección:

$$\nabla_X^{VM}(f \cdot v) = (Xf) \cdot v + f \cdot (\nabla_X^{VM} v).$$

**Ejemplo 2.14 (Conexión trivial)**

Para cualquier haz trivial  $\mathcal{F}M = M \times \mathcal{F}$  se tiene que  $\Gamma(\mathcal{F}M) \cong C^\infty(M, \mathcal{F})$ . Si  $\mathcal{F} = V$  es un espacio vectorial, entonces podemos definir la aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$\nabla^{\text{triv}} : \Gamma(TM) \times C^\infty(M, V) \longrightarrow C^\infty(M, V), \quad (X, f) \longmapsto \nabla_X^{\text{triv}} f$$

eligiendo una curva que representa el valor del campo vectorial  $X \in \Gamma(TM)$  en el punto  $p$ :

$$X_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_t \quad \Longrightarrow \quad (\nabla_X^{\text{triv}} f)(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma_t) - f(p)}{t}.$$

**Definición 2.15 (Variedad afín)**

Una conexión afín en una variedad  $M$  es una conexión en su haz tangente. Una variedad afín es una pareja  $(M, \nabla)$  donde  $\nabla$  es una conexión afín.

No es muy difícil probar que para todo haz vectorial  $VM$  sobre  $M$  existe por lo menos una conexión en  $VM$  (ver por ejemplo [KN]), de hecho el conjunto de conexiones en  $VM$  forman un espacio afín modelado por el espacio vectorial  $\Gamma(T^*M \otimes \text{End } VM)$ .

**Definición 2.16 (Torsión)**

La torsión de una conexión afín  $\nabla$  es la aplicación  $C^\infty(M)$ -bilineal

$$T^\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM), \quad (X, Y) \longmapsto T^\nabla(X, Y)$$

definida por  $T^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ .

Diremos que una conexión afín  $\nabla$  es *libre de torsión* si  $T^\nabla = 0$ . El siguiente teorema nos da una conexión afín muy particular para toda variedad seudo-Riemanniana, la cual utilizaremos a lo largo de todas nuestras construcciones.

**Teorema 2.17 (Fundamental de la Geometría seudo-Riemanniana)**

Sea  $(M, g)$  una variedad seudo-Riemanniana arbitraria, entonces existe exactamente una conexión afín llamada la conexión de Levi-Civita  $\nabla^{\text{LC}}$  tal que para todo  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ :

$$\text{Libre de torsión:} \quad \nabla_X^{\text{LC}} Y - \nabla_Y^{\text{LC}} X - [X, Y] = 0$$

$$\text{Conexión métrica:} \quad g(\nabla_X^{\text{LC}} Y, Z) + g(Y, \nabla_X^{\text{LC}} Z) = X g(Y, Z).$$

Ver por ejemplo [D].

Por último definimos uno de los conceptos de mayor importancia en la Geometría Diferencial el cual es la base de nuestros cálculos.

**Definición 2.18 (Tensor de Curvatura)**

El tensor de curvatura de una conexión  $\nabla^{VM}$  en un haz vectorial  $VM$  sobre una variedad  $M$  es la aplicación  $C^\infty(M)$ -trilineal

$$R^{\nabla^{VM}} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(VM) \longrightarrow \Gamma(VM), \quad (X, Y, v) \longmapsto R_{X,Y}^{\nabla^{VM}} v$$

definida por:

$$R_{X,Y}^{\nabla^{VM}} v := \nabla_X^{VM}(\nabla_Y^{VM} v) - \nabla_Y^{VM}(\nabla_X^{VM} v) - \nabla_{[X,Y]}^{VM} v.$$

# Capítulo 3

## Integral de Berezin y la Pfaffiana

El objetivo de esta sección es presentar las herramientas con las que trabajaremos en este trabajo, por lo que principalmente se presentarán las definiciones de los conceptos claves y algunos resultados referentes a estos. Comenzaremos nuestro estudio de estos conceptos sobre espacios vectoriales de dimensión finita para después extender las ideas a haces vectoriales sobre variedades suaves.

### 3.1. Densidades y orientaciones en espacios vectoriales

Consideremos para un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita  $m \in \mathbb{N}_0$  sobre  $\mathbb{R}$  el siguiente subconjunto de  $V^m = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{m \text{ veces}}$

$\text{Bases}(V) := \{(v_1, \dots, v_m) \in V^m \mid v_1, \dots, v_m \in V \text{ son linealmente independientes}\}.$

Notemos que  $\text{Bases}(V)$  es una variedad suave de dimensión  $m^2$ . La aplicación

$$V^m \longrightarrow \Lambda^m V; \quad (v_1, \dots, v_m) \longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$$

es polinomial de grado  $m$  y por la continuidad de esta,  $\text{Bases}(V) \subset V^m$  es un conjunto abierto y tiene dos componentes conexas.

Sea  $\mathbf{GL}(V)$  el grupo de automorfismos de  $V$ , notemos que  $\mathbf{GL}(V)$  actúa sobre el conjunto  $\text{Bases}(V)$  de manera natural

$$* : \mathbf{GL}(V) \times \text{Bases}(V) \longrightarrow \text{Bases}(V);$$

$$(A, (v_1, \dots, v_m)) \longmapsto A * (v_1, \dots, v_m) := (Av_1, \dots, Av_m)$$

además esta acción es simplemente transitiva pues los endomorfismos de  $V$  que mandan bases en bases de  $V$  son elementos de  $\mathbf{GL}(V)$  y si  $A * (v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_m)$  para algún  $(v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases}(V)$  es claro que  $A = \text{id}_V$ .

Presentamos en este momento a las densidades en un espacio vectorial.

**Definición 3.1** (*s*-densidad)

Una densidad de peso  $s \in \mathbb{R}$  es una función suave  $\varrho \in C^\infty(\text{Bases } V)$  tal que para cada  $A \in \mathbf{GL}(V)$ :

$$\varrho(Av_1, \dots, Av_m) = |\det A|^{\frac{s}{m}} \varrho(v_1, \dots, v_m).$$

Como notación

$$\vartheta^s V := \{ \varrho \in C^\infty(\text{Bases } V) \mid \varrho \text{ es } s\text{-densidad} \}$$

La suma y el producto por escalares usuales de funciones dan a  $\vartheta^s V$  la estructura de un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{R}$ .

**Lema 3.2** Para todo elemento  $\beta = (v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases } V$  la evaluación

$$\text{ev}_\beta : \vartheta^s V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varrho \longmapsto \varrho(v_1, \dots, v_m)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ahora introduciremos el concepto de orientaciones en un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita.

**Definición 3.3** (Línea de Orientaciones de  $V$ )

El conjunto de todas las funciones  $f : \text{Bases } V \longrightarrow \mathbb{R}$  continuas tales que:

$$f(Av_1, \dots, Av_m) = (\text{sgn det } A) f(v_1, \dots, v_m)$$

para todo  $A \in \mathbf{GL}(V)$  se llama la Línea de Orientaciones de  $V$  y se denota por  $\text{Or } V$ .

Notemos que si  $f \in \text{Or } V$  es tal que  $f(v_1, \dots, v_m) = a \in \mathbb{R}$  para alguna base  $(v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases } V$  entonces

$$f(w_1, \dots, w_m) = \pm a$$

para toda base  $(w_1, \dots, w_m) \in \text{Bases } V$ , es decir, los elementos de  $\text{Or } V$  son localmente constantes.

**Nota 3.4** Para cada  $a \in \mathbb{R}$  existe  $f \in \text{Or } V$  el cual cumple que  $f(v_1, \dots, v_m) = \pm a$  para toda base  $(v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases } V$ . Si  $\omega \in \Lambda^m V^*$  con  $\omega \neq 0$  entonces definimos:

$$f := a \frac{\omega}{|\omega|} \in \text{Or } V$$

en donde  $|\omega|(v_1, \dots, v_m) := |\omega(v_1, \dots, v_m)|$ .

Además  $\text{Or } V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con la suma y producto escalar usuales en el conjunto de funciones con valores en  $\mathbb{R}$ .

**Lema 3.5** Para todo elemento  $\beta = (v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases } V$  la evaluación

$$\text{ev}_\beta : \text{Or } V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(v_1, \dots, v_m)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

**Demostración:** La sobreyectividad se sigue de la observación anterior. Para la inyectividad notemos que si  $f \in \text{Or } V$  es tal que  $f(v_1, \dots, v_m) = 0$ , entonces  $f(w_1, \dots, w_m) = 0$  para cualquier base  $(w_1, \dots, w_m) \in \text{Bases } V$  por lo que  $f \equiv 0$ , así  $\ker \text{ev} = 0$ .  $\square$

La prueba del lema 3.2 es muy similar a la anterior. Se sigue que  $\text{Or } V \cong \mathbb{R}$  y por tanto tiene sentido llamar a  $\text{Or } V$  la Línea de Orientaciones de  $V$ .

### Definición 3.6 (Orientación de un Espacio Vectorial)

Decimos que  $o \in \text{Or } V$  es una orientación de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita si

$$o(v_1, \dots, v_m) = \pm 1$$

para toda base  $(v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases } V$ . La base  $(v_1, \dots, v_m)$  es positivamente o negativamente orientada con respecto a la orientación  $o$ , si  $o(v_1, \dots, v_m)$  es igual a  $+1$  o  $-1$  respectivamente.

Notemos que  $o^{-1}(\{+1\})$  y  $o^{-1}(\{-1\})$  son las dos componentes conexas de  $\text{Bases } V$ . Si consideramos al subgrupo  $\mathbf{GL}^+(V) \subset \mathbf{GL}(V)$ , entonces  $\mathbf{GL}^+(V)$  también actúa sobre  $\text{Bases } V$  pero en este caso el espacio de órbitas coincide con estas componentes conexas.

### Ejemplo 3.7

En  $\mathbb{R}^m$  el determinante de matrices cuadradas es una aplicación  $m$ -lineal alternante, es decir,  $\det \in \Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*$  y es tal que para cualquier  $A \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^m)$  se tiene que  $\det(A) \neq 0$ . Sea  $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m) \in \text{Bases } \mathbb{R}^m$  fija.

- ) Si

$$\hat{o}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m) := \frac{\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)}{|\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)|} = \text{sgn}(\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)) = 1$$

entonces los elementos  $(v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases}(\mathbb{R}^m)$  tales que el automorfismo  $A \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^m)$  definido por  $A(\vec{w}_\mu) := v_\mu$  con  $\det(A) > 0$ , están en la misma clase de equivalencia que  $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)$  y se dice que son bases orientadas positivas mientras que la otra clase son las bases orientadas negativas con respecto a la orientación  $o$ . Ésta es la orientación usual en  $\mathbb{R}^m$ .

- ) Por otro lado, si tenemos que

$$\hat{o}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m) := -\frac{\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)}{|\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)|} = -\text{sgn}(\det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)) = -1$$

entonces los elementos  $(v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases}(\mathbb{R}^m)$  tales que el automorfismo  $A \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^m)$  definido por  $A(\vec{w}_\mu) := v_\mu$  con  $\det(A) > 0$ , están en la misma clase de equivalencia que  $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)$  y se dice que son bases orientadas negativas mientras que la otra clase son las bases orientadas positivas con respecto a la orientación  $\hat{o}$ .

**Nota 3.8**

Sea

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow V \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de espacios vectoriales de dimensión finita, se sigue de esta sucesión que

$$\text{Or } V \cong \text{Or } A \otimes \text{Or } B$$

de tal manera que  $\circ_A \otimes \circ_B \mapsto \circ_V$  es una orientación de  $V$  para orientaciones  $\circ_A$  de  $A$  y  $\circ_B$  de  $B$ . Este isomorfismo es canónico solamente si  $a := \dim_{\mathbb{R}} A$  ó  $b := \dim_{\mathbb{R}} B$  es par. Si  $a$  y  $b$  son ambos impares, entonces hay dos diferentes isomorfismos debido a  $\circ_V := \circ_A \cdot \circ_B = (-1)^{ab} \circ_B \cdot \circ_A$ .

**Lema 3.9** Para cualquier espacio vectorial  $V$  de dimensión finita  $m = \dim_{\mathbb{R}} V$  se tienen los siguientes isomorfismos:

$$\Lambda^m V^* \otimes \text{Or } V \cong \vartheta^m V \qquad \vartheta^m V \otimes \text{Or } V \cong \Lambda^m V^* .$$

**Demostración:** Sean  $\omega \in \Gamma(\Lambda^m V^*)$  y  $f \in \text{Or } V$ , pongamos  $\omega \otimes f \mapsto \varrho := f \cdot \omega$  veamos que  $\varrho$  es una  $m$ -densidad. Si  $(v_1, \dots, v_m) \in \text{Bases}(V)$  y  $A \in \mathbf{GL}(V)$  entonces:

$$\begin{aligned} \varrho(Av_1, \dots, Av_m) &= f(Av_1, \dots, Av_m) \cdot \omega(Av_1, \dots, Av_m) \\ &= \text{sgn}(\det(A)) \cdot \det(A) \cdot f(v_1, \dots, v_m) \cdot \omega(v_1, \dots, v_m) \\ &= |\det(A)| \varrho(v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

por lo tanto  $\varrho \in \vartheta^m V$ . La prueba del otro isomorfismo es análoga.  $\square$

**Corolario 3.10** Una orientación  $\circ$  en un espacio vectorial  $V$  de dimensión positiva  $m$ , es una aplicación lineal

$$\circ : \Lambda^m V^* \longrightarrow \vartheta^m V$$

tal que  $\circ(\omega) = \pm |\omega|$  para todo  $\omega \in \Lambda^m V^*$ .

La siguiente definición nos da una herramienta para medir el volumen de un subconjunto de  $V$  dotado con un producto interior  $g$ .

**Definición 3.11 (Densidad de Volumen)**

Sea  $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  producto interior en  $V$ , la  $m$ -densidad  $|\text{vol}_g| \in \vartheta^m V$  con la propiedad que

$$|\text{vol}_g|(e_1, \dots, e_m) = +1$$

para toda base ortonormal  $(e_1, \dots, e_m) \in \text{Bases } V$  es llamada la Densidad de Volumen.

Para calcular el valor de la densidad  $|\text{vol}_g| \in \vartheta^m V$  en cualquier base  $(v^1, \dots, v^m) \in \text{Bases } V$  se usa la fórmula

$$|\text{vol}_g|(v_1, \dots, v_m) = \sqrt{|\det G|}$$

donde  $G$  es la matriz de Gram de la base  $(v_1, \dots, v_m)$  con respecto a  $g$ , esto es,  $G$  es la matriz cuyas entradas son de la forma  $G_{\mu\nu} = g(v_\mu, v_\nu)$  para  $\mu, \nu = 1, \dots, m$ .

El lema anterior nos da una manera directa de definir una forma de volumen.

**Definición 3.12 (Forma de Volumen)**

La  $m$ -forma

$$\text{vol}_g^{\circ} := |\text{vol}_g| \otimes \circ$$

es llamada forma de volumen de  $V$  respecto al producto interior  $g$  y la orientación  $\circ \in \text{Or } V$ .

**Nota 3.13**

La forma de volumen  $\text{vol}_g^{\circ}$  depende de la orientación  $\circ$ . Para toda base ortonormal  $(e_1, \dots, e_m)$ :

$$\begin{aligned} \text{vol}_g^{\circ}(e_1, \dots, e_m) &= (|\text{vol}_g| \otimes \circ)(e_1, \dots, e_m) \\ &= |\text{vol}_g|(e_1, \dots, e_m) \circ(e_1, \dots, e_m) = \circ(e_1, \dots, e_m). \end{aligned}$$

La siguiente definición será fundamental en nuestro trabajo. El nombre se debe al matemático ruso Felix Berezin, el cual introdujo este concepto en el área de la física. Nosotros utilizaremos una versión modificada de ella.

**Definición 3.14 (Integral de Berezin)**

Para  $(V, g)$  espacio Euclidiano de dimensión finita  $m$ , consideremos la forma de volumen  $\text{vol}_g^{\circ}$  respecto a la orientación  $\circ \in \text{Or } V$ . Se define la integral de Berezin como la aplicación lineal:

$$[\cdot] : \Lambda^{\bullet} V \longrightarrow \text{Or } V, \quad \mathfrak{X} \longmapsto [\mathfrak{X}] := \langle \text{vol}_g^{\circ}, \mathfrak{X} \rangle \circ,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^{\bullet} V^* \times \Lambda^{\bullet} V \longrightarrow \mathbb{R}$  es el emparejamiento perfecto.

Nótese que la definición es independiente de la orientación  $\circ$ . Si  $\mathfrak{X} \in \Lambda^k V$  y  $k < m$  entonces  $[\mathfrak{X}] = 0 \in \text{Or } V$ , además para  $k = m$  tenemos en la integral de Berezin un isomorfismo de espacios vectoriales.

## 3.2. Integral de Berezin en variedades y la Pfaffiana

En esta sección introduciremos el concepto de variedad orientable, el cual hablando concretamente nos dice que una variedad es orientable si es posible orientar el espacio tangente de cada punto de  $M$  de tal manera que esta no dependa del punto. También se introducirán por primera vez formas con valores en el haz de orientaciones y definiremos la Pfaffiana que será una  $m$ -forma con valores en el haz antes mencionado.

Sea  $M$  una variedad suave de dimensión  $m$ , puesto que  $\vartheta^s$  y  $\text{Or}$  son funtores suaves de la categoría de espacios vectoriales en sí misma, se tiene que  $\vartheta^s TM$  y  $\text{Or } TM$  son haces vectoriales sobre la variedad  $M$  tales que:

$$\vartheta_p^s TM = \vartheta^s(T_p M) \qquad \text{Or}_p TM = \text{Or}(T_p M)$$

son las respectivas fibras para  $p \in M$  y  $\mathbb{R}$  es la fibra modelo de ambos haces vectoriales.

A partir del haz de orientaciones  $\text{Or } TM$  extendemos la integral de Berezin fibra a fibra a lo largo de toda la variedad

$$[\cdot] : \Gamma(\Lambda^{\bullet} TM) \longrightarrow \Gamma(\text{Or } TM).$$

**Definición 3.15 (Orientación de Variedades)**

Una orientación de una variedad  $M$  es una sección global  $o \in \Gamma(\text{Or } TM)$  tal que  $o_p$  es una orientación del espacio tangente  $T_p M$  para todo punto  $p \in M$ . Se dice que una variedad es orientable si existen tales secciones. Más aún, la elección de una orientación en  $M$  la convierte en una variedad orientada  $(M, o)$ .

Consideremos una carta coordenada  $(x, U)$  de  $M$ , entonces

$$\varrho|_U = f(x^1, \dots, x^m) |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m|^{\frac{s}{m}} \in \Gamma_{\text{loc}}(\vartheta^s TM)$$

con una función coeficiente  $f \in C^\infty(x(U))$  y

$$o|_U = \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m} \otimes |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m| \in \Gamma_{\text{loc}}(\text{Or } TM)$$

son las descripciones en estas coordenadas de secciones locales de los haces  $\vartheta^s TM$  y  $\text{Or } TM$  respectivamente, pues para cada  $p \in M$ :

$$\Lambda^m T_p M \otimes \vartheta^m T_p M \cong \text{Hom}(\Lambda^m T_p^* M, \vartheta^m T_p M) = \text{Or } T_p M.$$

Supongamos que  $\varrho \in \Gamma_{\text{loc}}(\vartheta^m TM)$  es una densidad de peso  $m$  con soporte compacto y sin pérdida de generalidad asumamos que  $\text{sop}(\varrho) \subset U$ . Se define la integral de  $\varrho$  a lo largo de  $M$  como:

$$\int_M \varrho := \int_{x(U)} f(x^1, \dots, x^m) \underbrace{dx^1 \dots dx^m}_{\text{medida de Lebesgue}}$$

Aquí  $\varrho|_U = f(x^1, \dots, x^m) |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m|$  para la carta coordenada  $(x, U)$ . Se prueba que de hecho esta definición es independiente de la elección de las coordenadas locales, además dado que  $f \in C^\infty(x(U))$  la integral anterior coincide con la integral de Riemann.

$$\int_M : \Gamma_{\text{cpt}}(\vartheta^m TM) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varrho \longmapsto \int_M \varrho.$$

Dada una orientación  $o \in \Gamma(\text{Or } TM)$  de  $M$  se define la integración orientada de  $m$ -formas con soporte compacto de tal manera que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \int_{(M, o)} : \Gamma_{\text{cpt}}(\Lambda^m T^* M) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ & \searrow \circlearrowleft & \uparrow \int_M \\ & \Gamma_{\text{cpt}}(\vartheta^m TM) & \end{array}$$

así pues, si  $\eta \in \Gamma_{\text{cpt}}(\Lambda^m T^* M)$  es una  $m$ -forma con soporte compacto:

$$\int_{(M, o)} \eta := \int_M \eta \otimes o.$$

Sea  $g \in \Gamma(\text{Sym}^2 T^*M)$  métrica Riemanniana sobre  $M$  y sea  $\nabla = \nabla^{\text{LC}}$  su respectiva conexión de Levi-Civita, tomemos un campo vectorial  $X \in \Gamma_{\text{loc}}(TM)$  para a partir de él definir la  $(m-1)$ -forma con valores en el haz de orientaciones:

$$[X \wedge \underbrace{\nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X}_{m-1 \text{ veces}}] \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^{m-1} T^*M \otimes \text{Or } TM) \quad (3.1)$$

donde los corchetes denotan la integral de Berezin.

Notemos que para  $p \in M$  y  $Y_2, \dots, Y_m \in T_p M$  se tiene que

$$\left( \frac{1}{(m-1)!} [X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X] \right)_p (Y_2, \dots, Y_m) = \underbrace{[X_p \wedge (\nabla X)_p(Y_2) \wedge \cdots \wedge (\nabla X)_p(Y_m)]}_{\in \text{Or } T_p M}$$

Esta  $(m-1)$ -forma jugará un papel crucial en nuestra demostración del teorema de Chern–Gauß–Bonnet.

Sea  $R = R^\nabla$  el tensor de curvatura para la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , recordemos que  $R$  es la aplicación  $C^\infty(M)$ -trilineal definida para campos vectoriales  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  por:

$$R_{X,Y}Z := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

En particular  $R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \text{End } TM)$  y así, para cada  $p \in M$  y para cada par  $X, Y \in T_p M$  tenemos un endomorfismo de  $T_p M$ :

$$(R_p)_{X,Y} : T_p M \longrightarrow T_p M, \quad Z \longmapsto (R_{X,Y}Z)_p.$$

**Lema 3.16 (Antisimetría del tensor de curvatura)**

Para cualesquiera  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$  se satisface la siguiente igualdad:

$$g(R_{X,Y}Z, W) + g(R_{X,Y}W, Z) = 0$$

**Demostración:** Sean  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$  campos vectoriales. Utilizando la metricidad de la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  tenemos que

$$\begin{aligned} X(Y g(Z, W)) &= X g(\nabla_Y Z, W) + X g(Z, \nabla_Y W) \\ &= + g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) \\ &\quad + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(Z, \nabla_X \nabla_Y W), \end{aligned}$$

por lo que la definición  $[X, Y] := XY - YX$  del corchete de Lie asegura que se anula:

$$\begin{aligned} 0 &= (XY - YX - [X, Y]) g(Z, W) \\ &= + g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(Z, \nabla_X \nabla_Y W) \\ &\quad - g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) - g(Z, \nabla_Y \nabla_X W) \\ &\quad - g(\nabla_{[X,Y]}Z, W) \qquad \qquad \qquad - g(Z, \nabla_{[X,Y]}W) \\ &= + g(R_{X,Y}Z, W) + g(Z, R_{X,Y}W). \quad \square \end{aligned}$$

De aquí concluimos que para cada  $p \in M$  y  $X, Y, Z, W \in T_pM$ :

$$g_p((R_p)_{X,Y}Z, W) = -g_p((R_p)_{X,Y}W, Z),$$

es decir que  $(R_p)_{X,Y}$  es una aplicación antisimétrica del espacio tangente  $T_pM$  con respecto a  $g_p \in \text{Sym}^2 T_p^*M$  y por ende  $(R_p)_{X,Y} \in \mathfrak{so}(T_pM)$ .

Notemos que el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(T_pM)$  de endomorfismos antisimétricos de  $T_pM$  con respecto a la métrica  $g_p$  se identifica con los bivectores  $\Lambda^2 T_pM$  mediante el isomorfismo

$$\Lambda^2 T_pM \xrightarrow{\cong} \mathfrak{so}(T_pM), \quad A \wedge B \mapsto g_p(A, \cdot)B - g_p(B, \cdot)A$$

y su isomorfismo inverso, que se puede escribir como una suma

$$\mathfrak{so}(T_pM) \xrightarrow{\cong} \Lambda^2 T_pM, \quad F \mapsto \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m E_\mu \wedge F(E_\mu)$$

sobre una base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_m\}$  de  $T_pM$ . Pasando de un punto  $p \in M$  a haces vectoriales tenemos un isomorfismo de haces vectoriales  $\Lambda^2 TM \cong \mathfrak{so}(TM)$ .

**Nota 3.17** *La definición anterior es independiente de la base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_m\}$  de  $T_pM$ .*

Por lo anterior, el tensor de curvatura  $R$  induce para cada  $p \in M$  la aplicación bilineal

$$R_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \Lambda^2 T_pM, \quad (X, Y) \mapsto (R_p)_{X,Y}$$

con ello podemos concluir que  $R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \Lambda^2 TM)$  es una 2-forma alternante con valores en los bivectores  $\Lambda^2 TM$ .

### Definición 3.18 (Pfaffiana de $R$ )

Definimos la Pfaffiana del tensor de curvatura  $R$  de una variedad Riemanniana  $M$  de dimensión  $m = 2n$  como la  $m$ -forma con valores en el haz de orientaciones:

$$\text{Pf}(R) := \left[ \frac{1}{n!} \underbrace{R \wedge R \wedge \dots \wedge R}_{n \text{ veces}} \right] \in \Gamma(\Lambda^m T^*M \otimes \text{Or} TM).$$

**Nota 3.19** *La integral de Berezin anterior tiene sentido para cualquier conexión afín métrica  $\nabla$ , esto es, si  $R^\nabla$  es su tensor de curvatura:*

$$\left[ \underbrace{R^\nabla \wedge R^\nabla \wedge \dots \wedge R^\nabla}_{n \text{ veces}} \right] \in \Gamma(\Lambda^m T^*M \otimes \text{Or} TM).$$

Observemos que el producto  $\underbrace{R \wedge R \wedge \dots \wedge R}_{n \text{ veces}}$  es una  $2n$ -forma que toma el valor

$$\left( \frac{1}{n!} \underbrace{R \wedge R \wedge \dots \wedge R}_{n \text{ veces}} \right)_{X_1, \dots, X_{2n}} := \sum_{\tau \in \text{Inv}_n} (-1)^{\text{cross } \tau} \prod_{\substack{\mu=1, \dots, 2n \\ \mu < \tau(\mu)}} R_{X_\mu, X_{\tau(\mu)}}$$

para  $2n$  campos vectoriales argumentos  $X_1, \dots, X_{2n} \in \Gamma(TM)$ , donde  $\text{Inv}_n \subset S_{2n}$  es el subconjunto de involuciones sin puntos fijos en el grupo simétrico  $S_{2n}$  de permutaciones y  $\text{cross } \tau$  es el número de cruces que se presentan en la involución  $\tau$ .

**Ejemplo 3.20** Para  $n = 2$  obtenemos:

$$\left( \frac{1}{2!} R \wedge R \right)_{X, Y, Z, W} = + R_{X, Y} \wedge R_{Z, W} - R_{X, Z} \wedge R_{Y, W} + R_{X, W} \wedge R_{Y, Z}$$

que corresponden a las tres involuciones  $(2, 1, 4, 3)$ ,  $(3, 4, 1, 2)$  y  $(4, 3, 2, 1)$  en  $S_4$

**Ejemplo 3.21** Para  $n = 3$  obtenemos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{3!} R \wedge R \wedge R \right)_{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6} \\ &= + R_{X_1, X_2} \wedge R_{X_3, X_4} \wedge R_{X_5, X_6} - R_{X_1, X_2} \wedge R_{X_3, X_5} \wedge R_{X_4, X_6} + R_{X_1, X_2} \wedge R_{X_3, X_6} \wedge R_{X_4, X_5} \\ & \quad - R_{X_1, X_3} \wedge R_{X_2, X_4} \wedge R_{X_5, X_6} + R_{X_1, X_3} \wedge R_{X_2, X_5} \wedge R_{X_4, X_6} - R_{X_1, X_3} \wedge R_{X_2, X_6} \wedge R_{X_4, X_5} \\ & \quad + R_{X_1, X_4} \wedge R_{X_2, X_3} \wedge R_{X_5, X_6} - R_{X_1, X_4} \wedge R_{X_2, X_5} \wedge R_{X_3, X_6} + R_{X_1, X_4} \wedge R_{X_2, X_6} \wedge R_{X_3, X_5} \\ & \quad - R_{X_1, X_5} \wedge R_{X_2, X_3} \wedge R_{X_4, X_6} + R_{X_1, X_5} \wedge R_{X_2, X_4} \wedge R_{X_3, X_6} - R_{X_1, X_5} \wedge R_{X_2, X_6} \wedge R_{X_3, X_4} \\ & \quad + R_{X_1, X_6} \wedge R_{X_2, X_3} \wedge R_{X_4, X_5} - R_{X_1, X_6} \wedge R_{X_2, X_4} \wedge R_{X_3, X_5} + R_{X_1, X_6} \wedge R_{X_2, X_5} \wedge R_{X_3, X_4} \end{aligned}$$

que corresponden a las involuciones:

$$\begin{array}{lll} (2, 1, 4, 3, 6, 5) & (2, 1, 5, 6, 3, 4) & (2, 1, 6, 5, 4, 3) \\ (3, 4, 1, 2, 6, 5) & (3, 5, 1, 6, 2, 4) & (3, 6, 1, 5, 4, 2) \\ (4, 3, 2, 1, 6, 5) & (4, 5, 6, 1, 2, 3) & (4, 6, 5, 1, 3, 2) \\ (5, 3, 2, 6, 1, 4) & (5, 4, 6, 2, 1, 3) & (5, 6, 4, 3, 1, 2) \\ (6, 3, 2, 5, 4, 1) & (6, 4, 5, 2, 3, 1) & (6, 5, 4, 3, 2, 1) \end{array}$$

Formalizando el ejemplo anterior, notemos que cada una de las involuciones puede ser expresada como el producto de transposiciones disjuntas, por ejemplo:

$$\tau := (4, 5, 6, 1, 2, 3) = (14)(25)(36).$$

Es decir, que la involución  $\tau$  tiene la misma estructura de ciclo que  $\tau_0 := (12)(34)(56)$ , así pues  $\tau$  es un elemento de la órbita que contiene a  $\tau_0$  con respecto a la acción por conjugación en el grupo simétrico  $S_6$ .

Además dado que las involuciones consideradas no dejan puntos fijos, cada uno de los elementos de esta clase de conjugación es una de las involuciones que nos interesan. Así, nuestro cálculo para saber cuántas involuciones hay que no dejan puntos fijos en  $S_6$  se traduce a encontrar la cardinalidad de la clase de conjugación  $\text{Inv}_6 = [\tau_0]$ .

El número de transposiciones en  $S_6$  es  $\frac{1}{2}(6 \times 5)$ , de forma similar el número de transposiciones en  $S_4$  es  $\frac{1}{2}(4 \times 3)$  y el número de transposiciones en  $S_2$  es  $\frac{1}{2}(2 \times 1)$ , así pues, el número de elementos de la clase de conjugación de  $\tau_0 := (12)(34)(56)$  es igual a:

$$\# \text{Inv}_6 = \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{2}(6 \times 5) \times \frac{1}{2}(4 \times 3) \times \frac{1}{2}(2 \times 1) \right) = \frac{6!}{2^3 3!} = 15.$$

El factor  $\frac{1}{3!}$  viene de que elementos como

$$(12)(34)(56) \quad (12)(56)(34)$$

son iguales, ya que ciclos disjuntos conmutan. En general, el número de elementos en la clase  $\text{Inv}_n = [\tau_0]$  de conjugación del elemento  $\tau_0 := (12)(34) \cdots ((2n-1)2n)$  en el grupo simétrico  $S_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ésta dado por:

$$\# \text{Inv}_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{\prod_{\mu=1}^n (2\mu - 1) \prod_{\mu=1}^n (2\mu)}{\prod_{\mu=1}^n (2\mu)} = \prod_{\mu=1}^n (2\mu - 1).$$

# Capítulo 4

## Índice de campos vectoriales

En la presente sección presentaremos dos definiciones equivalentes de lo que es el índice de un campo vectorial en un cero de éste. Enunciaremos el sorprendente teorema de Poincaré–Hopf en el cual nos apoyaremos para demostrar el teorema principal de este trabajo, además haremos especial énfasis en la caracterización del grado topológico de una aplicación suave como un cociente de integrales de formas diferenciales. Se supondrán algunos conceptos y resultados de la teoría general de homología.

En lo que sigue supondremos que  $M$  es una variedad compacta, sin frontera, conexa y orientable de dimensión  $m$ , con ello tendremos que  $H_m(M, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}, +)$ . Además supondremos que todo campo vectorial con el que trabajemos tendrá solo ceros aislados, es decir, si  $X \in \Gamma(TM)$  y  $X_p = 0$  entonces existe una vecindad  $V \subset M$  de  $p$  tal que  $X_q \neq 0$  para cualquier punto  $q \in V$  distinto de  $p$ . Denotaremos por  $\Sigma$  al conjunto de ceros del campo vectorial.

Como consecuencia del teorema de coeficientes universales (ver por ejemplo [H]), tenemos los isomorfismos

$$H^m(M, \mathbb{Z}) \cong H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{libre}} \oplus H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{torsión}} \cong \mathbb{Z} \oplus H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{torsión}}$$

Enunciaremos enseguida el famoso teorema de De Rham.

### Teorema 4.1 (De Rham)

Si  $M$  es una variedad suave orientada y cerrada de dimensión  $m$ , entonces para cualquier entero  $0 \leq k \leq m$ :

1.

$$\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{DR}}^k(M, \mathbb{R}) \leq +\infty$$

2.  $H_{\text{DR}}^k(M, \mathbb{R})$  es canónicamente isomorfo a  $H^k(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

En particular, si  $k = m$  tenemos:

$$H_{\text{DR}}^m(M, \mathbb{R}) \cong H^m(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{libre}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

De hecho el siguiente resultado nos ayuda a encontrar un tal isomorfismo explícitamente:

**Lema 4.2** Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana cerrada, conexa y orientada, con  $f \in C^\infty(M)$  tal que

$$\int_{(M, o)} f \operatorname{vol}_g^o = 0$$

entonces existe un campo vectorial  $X \in \Gamma(TM)$  el cual cumple que:

$$f \operatorname{vol}_g^o = \mathfrak{L}ic_X \operatorname{vol}_g^o \stackrel{\text{CHF}}{=} d(X \lrcorner \operatorname{vol}_g^o)$$

la segunda igualdad es consecuencia de la Fórmula de Homotopía de Cartan (CHF) para la derivada de Lée de formas diferenciales.

De este lema se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 4.3** Si  $(M, g)$  es como en el lema 4.2 entonces el  $m$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham es isomorfo a  $\mathbb{R}$  y tenemos la aplicación explícita:

$$H_{DR}^m(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad [f \operatorname{vol}_g^o] \longmapsto \int_{(M, o)} f \operatorname{vol}_g^o$$

Vamos ahora en dirección de definir el grado topológico de una aplicación continua de una variedad en sí misma.

**Nota 4.4 (Grupos)**

Si  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  es un endomorfismo del grupo abeliano  $(\mathbb{Z}, +)$  entonces existe un único  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $f(a) = k a$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$ .

Si  $\varphi : M \longrightarrow M$  es una aplicación continua entonces la funtorialidad de la homología singular da lugar a un endomorfismo de grupos:

$$H_m(\varphi) : H_m(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(M, \mathbb{Z}).$$

**Definición 4.5 (Grado topológico)**

Se define el grado topológico de la aplicación  $\varphi$  como el único entero  $k \in \mathbb{Z}$  tal que la nota 4.4 se cumple para el homomorfismo  $H_m(\varphi)$ , escribiremos  $\deg \varphi := k$ .

Supondremos que  $\varphi$  es una aplicación suave. Dado que  $H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{libre}} \cong \mathbb{Z}$  entonces  $\deg \varphi$  también induce un endomorfismo en  $H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{libre}}$ , de esto y de la naturalidad del isomorfismo de De Rham tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{DR}^m(M) & \xrightarrow{\cong} & H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{libre}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \\ \varphi^* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \deg \varphi \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id} \\ H_{DR}^m(M) & \xrightarrow{\cong} & H^m(M, \mathbb{Z})_{\text{libre}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \end{array}$$

Más explícitamente de acuerdo al Corolario 4.3 tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [\omega] & \xrightarrow{\varphi^*} & [\varphi^* \omega] \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \int_{(M, \circ)} \omega & \xrightarrow{\deg(\varphi)} & \int_{(M, \circ)} \varphi^* \omega \end{array}$$

**Corolario 4.6** Para cualquier  $\omega \in \Gamma(\Lambda^m T^*M)$  se tiene la siguiente identidad:

$$\int_{(M, \circ)} \varphi^* \omega = (\deg \varphi) \int_{(M, \circ)} \omega .$$

De aquí que si  $\omega$  es una  $m$ -forma cuya integral es distinta de cero obtenemos una expresión útil para el grado topológico de  $\varphi$  (que no depende de  $\omega$ ):

$$\deg \varphi = \frac{\int_{(M, \circ)} \varphi^* \omega}{\int_{(M, \circ)} \omega} . \quad (4.1)$$

Recordemos que si  $X \in \Gamma(TM)$  y  $(x, U)$  es una carta coordenada de  $M$ , entonces su expresión en coordenadas locales es

$$\hat{X}(x^1(p), \dots, x^m(p)) = \sum_{\mu=1}^m \zeta^\mu(x^1(p), \dots, x^m(p)) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p$$

para todo  $p \in U$  con  $m$  funciones suaves  $\zeta^\mu : \mathbb{R}^m \supset x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , que dependen de la carta  $(x, U)$ . De esto y por la identificación  $T_p M \cong \mathbb{R}^m$  para todo  $p \in M$  (recordemos que hemos supuesto que  $M$  es conexa) podemos pensar a  $\hat{X}$  como la aplicación suave:

$$\hat{X} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (\zeta^1(x_1, \dots, x_m), \dots, \zeta^m(x_1, \dots, x_m)) .$$

Sean  $X \in \Gamma(TM)$  y  $p \in \Sigma$ , tomemos  $(x, U)$  carta coordenada centrada  $p$  de tal manera que  $U$  no contenga más ceros de  $X$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset x(U)$  y si  $\hat{X}(\vec{v}) = 0$  con  $\vec{v} \in \overline{B_\varepsilon(0)}$  entonces  $\vec{v} = \vec{0}$ , es decir, el único cero de  $\hat{X}$  en  $\overline{B_\varepsilon(0)}$  es  $\vec{0}$ . Consideremos la aplicación:

$$\varphi_\varepsilon : S_\varepsilon^{m-1} \rightarrow S_\varepsilon^{m-1}, \quad \vec{v} \mapsto \varepsilon \cdot \frac{\hat{X}_{\vec{v}}}{|\hat{X}_{\vec{v}}|} . \quad (4.2)$$

Así definida,  $\varphi_\varepsilon$  es continua pues  $S_\varepsilon^{m-1}$  no tiene ceros de  $\hat{X}$  y por lo tanto se tiene un homomorfismo de grupos inducido:

$$H_{m-1}(\varphi_\varepsilon) : H_{m-1}(S_\varepsilon^{m-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{m-1}(S_\varepsilon^{m-1}, \mathbb{Z})$$

**Definición 4.7 (Índice de un campo vectorial en un cero I)**

Sea  $X \in \Gamma(TM)$  y  $p \in M$  un cero de  $X$ , definimos el índice de  $X$  en  $p$  como:

$$\text{index}_p X := \deg \varphi_\varepsilon$$

**Nota 4.8** Notemos que para cualquier  $\tilde{\varepsilon} > 0$  para el cual el único cero de  $\hat{X}$  en  $\overline{B_{\tilde{\varepsilon}}}(0)$  es 0 podemos identificar  $S_\varepsilon^{m-1}$  y  $S_{\tilde{\varepsilon}}^{m-1}$  por lo que  $\varphi_\varepsilon$  y  $\varphi_{\tilde{\varepsilon}}$  son homotópicamente equivalentes, de aquí que  $H_{m-1}(\varphi_\varepsilon) = H_{m-1}(\varphi_{\tilde{\varepsilon}})$ . Por lo tanto, la definición anterior no depende de la elección de  $\varepsilon$ , siempre que se cumpla la observación anterior y  $\overline{B_\varepsilon}(0) \subset x(U)$ .

Dado que  $M$  es variedad compacta y el conjunto  $\Sigma$  de ceros es discreto, se sigue que  $\Sigma$  es de hecho un conjunto finito lo cual hace sentido a la siguiente definición.

**Definición 4.9 (Índice de un campo vectorial)**

Si  $M$  es una variedad compacta y  $X \in \Gamma(TM)$  es un campo vectorial con conjunto de ceros aislados  $\Sigma$  se define el índice de  $X$  como:

$$\text{index } X := \sum_{p \in \Sigma} \text{index}_p X$$

Daremos enseguida otra definición más geométrica de lo que es el índice de un campo vectorial en un cero de éste y probaremos que de hecho ambas definiciones son equivalentes.

**Definición 4.10 (Valor regular)**

Sean  $\varphi : M \rightarrow N$  aplicación suave entre variedades y  $p \in M$ , decimos que  $p$  es un punto regular de  $M$  respecto a la aplicación  $\varphi$  si la diferencial de  $\varphi$  en el punto  $p$ ,  $\varphi_{*,p}$ , es sobreyectiva. Si  $q \in N$  y todo punto en  $\varphi^{-1}(\{q\}) \subset M$  es un punto regular entonces  $q$  es llamado valor regular de  $\varphi$ . En caso contrario,  $q$  será llamado valor crítico.

Definiremos ahora lo que es conocido como el grado de Brower para una aplicación suave entre variedades. Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves orientadas y sin frontera con  $\dim M = \dim N$ , supongamos además que  $M$  es compacta y que  $N$  es conexa, consideremos  $\varphi : M \rightarrow N$  aplicación suave, si  $p \in M$  es un punto regular para  $\varphi$  entonces  $\varphi_{*,p}$  es un isomorfismo de espacios vectoriales orientados.

**Definición 4.11 (Grado de Brower)**

Para  $q \in N$  valor regular de  $\varphi$ , definimos el grado de Brower de  $\varphi$  como:

$$\deg_B(\varphi) = \deg_B(\varphi, q) := \sum_{p \in \varphi^{-1}(q)} \text{sgn}(\det \varphi_{*,p})$$

Utilizando el teorema de la función inversa en cada una de las preimágenes de  $q$  y el que  $M$  es de Hausdorff podemos considerar vecindades abiertas disjuntas en cada uno de estos puntos que son difeomorfas a vecindades abiertas de  $q$ . Puesto que  $M$  es una variedad compacta se sigue que el conjunto  $\varphi^{-1}(q)$  es finito por lo que la definición anterior no tiene

problemas de convergencia. De hecho se prueba que  $\# \varphi^{-1}(\cdot)$  es una función localmente constante en el conjunto de valores regulares de  $\varphi$  en  $N$ , debido a la conexidad de  $N$  y a que  $\deg_{\mathbb{B}}(\varphi, q) \in \mathbb{Z}$  esto implica que  $\deg_{\mathbb{B}}(\varphi, \cdot)$  también es una función localmente constante.

El siguiente lema avala la definición anterior, la prueba puede encontrarse en [M].

**Lema 4.12** *El entero  $\deg_{\mathbb{B}}(\varphi, q)$  no depende del valor regular  $q \in N$ .*

A partir del grado de Brower definiremos de otra forma el índice de un campo vectorial en un cero de éste.

Sea  $X \in \Gamma(TM)$  y  $p \in \Sigma$ , consideremos de nueva cuenta la aplicación  $\varphi_\varepsilon$  construida en (4.2), es claro que esta aplicación de  $S_\varepsilon^{m-1}$  en sí es suave por definición, supongamos que  $S_\varepsilon^{m-1}$  está dotada con la orientación  $o \in \text{Or } T S_\varepsilon^{m-1}$ .

**Definición 4.13 (Índice de un campo vectorial en un cero II)**

*Para cualquier valor regular  $q \in S_\varepsilon^{m-1}$  definimos el índice de  $X$  en  $p$  como:*

$$\text{index}_p X := \deg_{\mathbb{B}} \varphi_\varepsilon = \sum_{x \in \varphi^{-1}(q)} \text{sgn}(\det(\varphi_\varepsilon)_{*,x})$$

La siguiente proposición establece la equivalencia entre las dos definiciones del índice en ceros de un campo vectorial antes dadas.

**Proposición 4.14** *Las dos definiciones para el índice de un campo vectorial en un cero de éste son equivalentes.*

**Demostración:** Sean  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $p \in \Sigma$  y  $\varphi_\varepsilon : S_\varepsilon^{m-1} \rightarrow S_\varepsilon^{m-1}$  como antes, consideremos  $q \in S_\varepsilon^{m-1}$  valor regular de  $\varphi_\varepsilon$  y supongamos que  $\{x_1, \dots, x_r\}$  es el conjunto de preimágenes de  $q$ .

Como ya hemos mencionado, el teorema de la función inversa y el hecho que  $S_\varepsilon^{m-1}$  sea Hausdorff nos provee de vecindades abiertas disjuntas  $U_1, \dots, U_r$  de  $x_1, \dots, x_r$  respectivamente y vecindades de  $q$ ,  $V_1, \dots, V_r$  con la propiedad que la aplicación  $\varphi_\varepsilon|_{U_\mu} : U_\mu \rightarrow V_\mu$  es un difeomorfismo para todo  $1 \leq \mu \leq r$ . Además, puesto que  $\# \varphi_\varepsilon^{-1}(\cdot)$  es una aplicación localmente constante en el conjunto de valores regulares, existe  $W$  vecindad abierta de  $q$  en donde  $\# \varphi_\varepsilon^{-1}(y) = \# \varphi_\varepsilon^{-1}(q)$  para todo  $y \in W$ .

Tomemos una  $(m-1)$ -forma  $\omega \in \Gamma(\Lambda^{m-1} T^* S_\varepsilon^{m-1})$  con las siguientes propiedades:

- $\text{sop}(\omega) \subset V_1 \cap \dots \cap V_r \cap W$ .

- $\int_{(S_\varepsilon^{m-1}, o)} \omega \neq 0$ .

Por construcción  $\text{sop}(\varphi_\varepsilon^* \omega) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$  por lo que:

$$\int_{(S_\varepsilon^{m-1}, \circ)} \varphi_\varepsilon^* \omega = \sum_{\mu=1}^r \int_{(U_\mu, \circ)} \varphi_\varepsilon^* \omega$$

Ya que cada  $U_\mu$  es difeomorfo a  $V_\mu = \varphi_\varepsilon(U_\mu)$  entonces de la invarianza de la integral bajo difeomorfismos

$$\int_{(U_\mu, \circ)} \varphi_\varepsilon^* \omega = \int_{(V_\mu, (\varphi_\varepsilon)_* \circ)} \omega = \int_{(S_\varepsilon^{m-1}, (\varphi_\varepsilon)_* \circ)} \omega = \pm_\mu \int_{(S_\varepsilon^{m-1}, \circ)} \omega$$

en donde el signo  $\pm_\mu$  depende de si  $(\varphi_\varepsilon)_*, x_\mu$  preserva orientaciones o las invierte. De esto último y del corolario 4.6 concluimos que

$$\text{deg}(\varphi_\varepsilon) = \sum_{\mu=1}^r \pm_\mu 1 = \sum_{\mu=1}^r \text{sgn}(\det(\varphi_\varepsilon)_*, x_\mu) = \text{index}_p X$$

□

Presentamos ahora el teorema de Poincaré–Hopf. No daremos su demostración pero se cita en donde podría encontrarse.

**Teorema 4.15 (Poincaré–Hopf)**

Sea  $M$  variedad suave, compacta, orientable y sin frontera, sea  $X \in \Gamma(TM)$  campo vectorial sobre  $M$  con conjunto de ceros aislados  $\Sigma$ . Entonces su característica de Euler se puede calcular como la suma de los índices del campo  $X$  en  $\Sigma$ , esto es:

$$\chi(M) = \sum_{p \in \Sigma} \text{index}_p X$$

La prueba del teorema de Poincaré–Hopf puede seguirse en [M]. Para terminar con la sección debilitemos un poco las hipótesis en el teorema anterior.

Sea  $M$  es una variedad compacta y sin frontera la cual es no orientable, el haz de orientaciones induce un cubriente de grado 2 (doble cubriente) conexo y orientado  $M'$ , además es bien sabido que la relación entre las características de Euler de  $M$  y de su cubriente  $M'$  es dada por:

$$\chi(M) = \frac{\chi(M')}{2}.$$

Utilizando este hecho se prueba el siguiente teorema:

**Teorema 4.16 (Poincaré–Hopf para variedades no orientables)**

Sea  $M$  variedad suave, compacta y sin frontera, sea  $X \in \Gamma(TM)$  campo vectorial sobre  $M$  con conjunto de ceros aislados  $\Sigma$ . Entonces su característica de Euler se puede calcular como la suma de los índices del campo  $X$  en  $\Sigma$ , esto es:

$$\chi(M) = \sum_{p \in \Sigma} \text{index}_p X.$$

# Capítulo 5

## Cálculo diferencial extendido

Las principales herramientas y resultados claves para la demostración del teorema se presentan en esta sección, trabajaremos con formas diferenciales sobre la variedad  $M$  con valores en haces vectoriales generales, se dará una definición de cómo extender el concepto de la derivada exterior a estas formas diferenciales y presentaremos el teorema de Stokes en una versión particular.

Además desarrollaremos la idea de H. Flanders [F] para simplificar los cálculos hechos por S. S. Chern en su prueba [C] del teorema de Gauß–Bonnet.

Al final de la sección utilizaremos la aplicación exponencial para trabajar con un tipo de coordenadas que hacen más sencillas las cuentas necesarias.

### 5.1. Formas diferenciales con valores en haces vectoriales

El operador derivada exterior  $d : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{\bullet+1} T^*M)$  puede extenderse para formas diferenciales con valores en haces vectoriales generales.

#### Definición 5.1 (Derivada exterior torcida)

Sea  $VM$  un haz vectorial sobre  $M$  con una conexión  $\nabla^{VM}$ , sea  $\eta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM)$  una  $k$ -forma con valores en  $VM$ , definimos la derivada exterior torcida de  $\eta$  por:

$$\begin{aligned} (d^{\nabla^{VM}} \eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) &:= + \sum_{[\sigma] \in S_{k+1}/S_1 \times S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \nabla_{X_{\sigma(1)}}^{VM} \left( \eta(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}) \right) \\ &\quad - \sum_{[\sigma] \in S_{k+1}/S_2 \times S_{k-1}} (\operatorname{sgn} \sigma) \eta([X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}], X_{\sigma(3)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}) \end{aligned}$$

en donde la sumas corren sobre un sistema de representantes del cociente entre el grupo  $S_{k+1}$  y los subgrupos estándares  $S_1 \times S_k$  y  $S_2 \times S_{k-1}$  respectivamente.

Así,  $d^{\nabla^{VM}}$  es un operador diferencial de orden 1

$$d^{\nabla^{VM}} : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M \otimes VM) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{\bullet+1} T^*M \otimes VM)$$

que cumple propiedades análogas al operador derivada exterior  $d$  conocido.

**Ejemplo 5.2 (Derivada exterior)**

Si  $VM = M \times \mathbb{R}$  y  $\nabla^{VM} = \nabla^{\text{triv}}$ , esto es  $\nabla_X^{\text{triv}} f := Xf$ , entonces  $d^{\nabla^{VM}} = d$  es la derivada exterior en  $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ .

**Ejemplo 5.3 (Conexión en el haz de orientaciones)**

El haz de orientaciones  $\text{Or } TM$  tiene dos secciones locales distinguidos alrededor de cada punto. En particular, podemos dotar  $\text{Or } TM$  con una conexión  $\nabla^{\text{Or } TM}$ , tal que para toda orientación local  $o \in \Gamma_{\text{loc}}(\text{Or } TM)$ , para todo  $X \in \Gamma(TM)$  y  $f \in C^\infty(M)$  se tiene:

$$\nabla_X^{\text{Or } TM} (f \cdot o) := (Xf) \cdot o.$$

La siguiente definición puede utilizarse para construir conexiones lineales en haces vectoriales sobre la variedad  $M$  si se tiene una aplicación  $C^\infty(M)$ -bilineal y conexiones en los haces vectoriales factores.

**Definición 5.4 (Aplicación paralela y Regla de Leibniz)**

Sean  $VM$ ,  $WM$  y  $ZM$  haces vectoriales sobre  $M$  con conexiones  $\nabla^{VM}$ ,  $\nabla^{WM}$  y  $\nabla^{ZM}$  respectivamente. Una aplicación  $C^\infty(M)$ -bilineal

$$* : \Gamma(VM) \times \Gamma(WM) \longrightarrow \Gamma(ZM), \quad (v, w) \longmapsto v * w$$

se dice paralela con respecto a las conexiones, siempre que cumple la regla de Leibniz

$$\nabla_X^{ZM} (v * w) = (\nabla_X^{VM} v) * w + v * (\nabla_X^{WM} w)$$

para todo  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $v \in \Gamma(VM)$  y  $w \in \Gamma(WM)$ .

**Nota 5.5**

La definición de una aplicación paralela puede generalizarse para un número arbitrario  $k \geq 1$  de haces vectoriales, es decir  $F : \Gamma(V_1M) \times \cdots \times \Gamma(V_kM) \longrightarrow \Gamma(ZM)$  es paralela si  $F$  es una aplicación  $C^\infty(M)$ -multilineal y cumple la regla de Leibniz:

$$\nabla_X^{ZM} F(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\alpha=1}^k F(v_1, \dots, \nabla_X^{V_\alpha M} v_\alpha, \dots, v_k)$$

**Ejemplo 5.6** Sea  $VM$  haz vectorial sobre  $M$  con conexión  $\nabla^{VM}$ , consideremos el haz de álgebras  $\text{End } VM$  y la aplicación

$$* : \Gamma(\text{End } VM) \times \Gamma(VM) \longrightarrow \Gamma(VM); \quad (A, v) \longmapsto A * v := Av$$

esto es, para cada  $p \in M$  tenemos  $(A * v)_p = A_p(v_p)$ , entonces existe una única conexión  $\nabla^{\text{End } VM}$  de  $\text{End } VM$  tal que la aplicación  $*$  es  $C^\infty(M)$ -bilineal y paralela con respecto a estas conexiones. De hecho

$$(\nabla_X^{\text{End } VM} A) v := \nabla_X^{VM} A(v) - A(\nabla_X^{VM} v)$$

es tal conexión. Que la aplicación  $*$  sea  $C^\infty(M)$ -bilineal es claro, para ver que  $\nabla^{\text{End } VM}$  es una conexión en  $\text{End } VM$  notemos que tanto  $\nabla^{VM}$  como  $A$  son  $\mathbb{R}$ -lineales, además si  $f \in C^\infty(M)$ :

$$\begin{aligned}
1) \quad (\nabla_{f \cdot X}^{\text{End } VM} A) v &= \nabla_{f \cdot X}^{VM} A(v) - A(\nabla_{f \cdot X}^{VM} v) \\
&= f \cdot \nabla_X^{VM} A(v) - A(f \cdot \nabla_X^{VM} v) \\
&= f \cdot \nabla_X^{VM} A(v) - f \cdot A(\nabla_X^{VM} v) \\
&= (f \cdot \nabla_X^{\text{End } VM} A) v \\
2) \quad (\nabla_X^{\text{End } VM} f \cdot A) v &= \nabla_X^{VM} f \cdot A(v) - f \cdot A(\nabla_X^{VM} v) \\
&= Xf \cdot A(v) + f \cdot \nabla_X^{VM} A(v) - f \cdot A(\nabla_X^{VM} v) \\
&= Xf \cdot A(v) + (f \cdot \nabla_X^{\text{End } VM} A) v
\end{aligned}$$

por lo que en efecto, es una conexión en  $\text{End } VM$ .

Con una tal aplicación  $*$  podemos definir un producto de formas diferenciales

$$\wedge_* : \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM) \times \Gamma(\Lambda^r T^*M \otimes WM) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{k+r} T^*M \otimes ZM)$$

con valores en  $VM$  y  $WM$  de manera que este producto tenga sentido y sea una forma diferencial con valores en  $ZM$  como sigue:

$$\begin{aligned}
&(\eta \wedge_* \omega)(X_1, \dots, X_{k+r}) \\
&:= \sum_{[\sigma] \in S_{k+r}/(S_k \times S_r)} (\text{sgn } \sigma) \eta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) * \omega(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+r)}) \\
&= \sum_{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq k+r} (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_k - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \eta(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) * \omega(X_1, \dots, \widehat{X_{\sigma_\mu}}, \dots, X_{k+r}).
\end{aligned}$$

### Lema 5.7 (Regla de Leibniz)

Sea  $*$  :  $\Gamma(VM) \times \Gamma(WM) \longrightarrow \Gamma(ZM)$  una aplicación  $C^\infty(M)$ -bilineal y paralela con respecto a las conexiones  $\nabla^{VM}$ ,  $\nabla^{WM}$  y  $\nabla^{ZM}$  de los haces vectoriales involucrados. Si  $\eta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM)$  es una  $k$ -forma y  $\omega \in \Gamma(\Lambda^r T^*M \otimes WM)$  se tiene que:

$$d^{\nabla^{ZM}}(\eta \wedge_* \omega) = (d^{\nabla^{VM}} \eta) \wedge_* \omega + (-1)^k \eta \wedge_* (d^{\nabla^{WM}} \omega)$$

Antes de demostrar el lema se dará un argumento particular. Consideremos el haz trivial  $\mathbb{R}M = M \times \mathbb{R}$  sobre  $M$  y dotémoslo con la conexión trivial  $\nabla^{\text{triv}}$ , sea  $VM$  un haz vectorial sobre  $M$  con una conexión cualquiera  $\nabla^{VM}$ . La aplicación

$$* : \Gamma(\mathbb{R}M) \times \Gamma(VM) \longrightarrow \Gamma(VM); \quad (f, v) \longmapsto f * v := f \cdot v$$

es  $C^\infty(M)$ -bilineal y además

$$\nabla_X^{VM} f * v = \nabla_X^{VM} f \cdot v = Xf \cdot v + f \cdot \nabla_X^{VM} v = \nabla_X^{\text{triv}} f * v + f * \nabla_X^{VM} v$$

es decir, es una aplicación paralela con respecto a las conexiones  $\nabla^{\text{triv}}$  y  $\nabla^{VM}$ .

Así pues, la aplicación inducida  $\wedge_* =: \otimes$  en  $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \times \Gamma(VM)$  es de la siguiente forma:

$$\otimes : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \times \Gamma(VM) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M \otimes VM), \quad (\eta, v) \longmapsto \eta \otimes v,$$

en donde

$$(\eta \otimes v)(X_1, \dots, X_k) := \eta(X_1, \dots, X_k)v.$$

Notemos entonces que:

$$\begin{aligned} & d^{\nabla^{VM}}(\eta \otimes v)(X_1, \dots, X_{k+1}) \\ &= \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu-1} \nabla_{X_\mu}^{VM} \eta(X_1, \dots, \hat{X}_\mu, \dots, X_{k+1})v \\ &\quad - \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq k+1} (-1)^{\mu+\nu-1} \eta([X_\mu, X_\nu], X_1, \dots, \hat{X}_{\mu/\nu}, \dots, X_{k+1})v \\ &= \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu-1} X_\mu \eta(X_1, \dots, \hat{X}_\mu, \dots, X_{k+1})v \\ &\quad - \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq k+1} (-1)^{\mu+\nu-1} \eta([X_\mu, X_\nu], X_1, \dots, \hat{X}_{\mu/\nu}, \dots, X_{k+1})v \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu-1} \eta(X_1, \dots, \hat{X}_\mu, \dots, X_{k+1}) \nabla_{X_\mu}^{VM} v \\ &= \left( d^{\nabla^{\text{triv}}} \eta \otimes v \right) (X_1, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu-1} \eta(X_1, \dots, \hat{X}_\mu, \dots, X_{k+1}) \nabla_{X_\mu}^{VM} v \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} & (\eta \wedge_* \nabla^{VM} v)(X_1, \dots, X_{k+1}) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq k+1 \\ \nu \neq \mu_1, \dots, \mu_k}} (-1)^{\mu_1 + \dots + \mu_k - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \eta(X_{\mu_1}, \dots, X_{\mu_k}) \nabla_{X_\nu}^{VM} v \\ &= (-1)^k \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu-1} \eta(X_1, \dots, \hat{X}_\mu, \dots, X_{k+1}) \nabla_{X_\mu}^{VM} v \end{aligned}$$

las sumas en las igualdades son las mismas y el factor  $(-1)^k$  viene de pasar el índice de sumación a través de la  $k$ -forma  $\eta$ . Por lo tanto

$$(-1)^k (\eta \wedge_* \nabla^{VM} v)(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu-1} \eta(X_1, \dots, \hat{X}_\mu, \dots, X_{k+1}) \nabla_{X_\mu}^{VM} v$$

Juntando los dos últimos arreglos de expresiones obtenemos:

$$d^{\nabla^{VM}}(\eta \otimes v)(X_1, \dots, X_{k+1}) = \left( d^{\nabla^{\text{triv}}} \eta \otimes v \right)(X_1, \dots, X_{k+1}) \\ + (-1)^k (\eta \wedge_* \nabla^{VM} v)(X_1, \dots, X_{k+1})$$

O simplemente

$$d^{\nabla^{VM}}(\eta \otimes v) = d\eta \otimes v + (-1)^k (\eta \wedge_* \nabla^{VM} v)$$

**Demostración:** (Del Lema 5.7) Supongamos cierto el isomorfismo

$$\Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM) \cong \Gamma(\Lambda^k T^*M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(TM)$$

así pues, tomaremos  $\eta \otimes v \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM)$  y  $\omega \otimes w \in \Gamma(\Lambda^r T^*M \otimes WM)$ . Afirmamos que  $(\eta \otimes v) \wedge_* (\omega \otimes w) = \eta \wedge \omega \otimes v * w$ , de hecho:

$$\begin{aligned} & (\eta \otimes v) \wedge_* (\omega \otimes w)(X_1, \dots, X_{k+r}) \\ &= \sum_{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq k+r} (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_k - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \eta(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) v * \omega(X_1, \dots, \hat{X}_{\sigma'_s} \dots, X_{k+r}) w \\ &= \sum_{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_r \leq k+r} (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \eta(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) \omega(X_1, \dots, \hat{X}_{\sigma'_s} \dots, X_{k+r}) v * w \\ &= (\eta \wedge \omega \otimes v * w)(X_1, \dots, X_{k+r}) \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X_1, \dots, X_{k+r} \in \Gamma(TM)$ , en la segunda igualdad se utilizó la  $C^\infty(M)$ -bilinealidad de  $*$ . Vayamos pues a la demostración del lema.

$$\begin{aligned} d^{\nabla^{ZM}}((\eta \otimes v) \wedge_* (\omega \otimes w)) &= d^{\nabla^{ZM}}(\eta \wedge \omega \otimes v * w) \\ &= d(\eta \wedge \omega) \otimes v * w + (-1)^{k+r} (\eta \wedge \omega) \wedge_* \nabla^{ZM}(v * w) \\ &= d\eta \otimes v \wedge_* (\omega \otimes w) + (-1)^k (\eta \wedge_* \nabla^{VM} v) \wedge_* (\omega \otimes w) \\ &\quad + (-1)^k (\eta \otimes v) \wedge_* (d\omega \otimes w) \\ &\quad + (-1)^{r+k} (\eta \otimes v) \wedge_* (\omega \wedge_* \nabla^{WM} w) \\ &= d^{\nabla^{VM}}(\eta \otimes v) \wedge_* (\omega \otimes w) + (-1)^k (\eta \otimes v) \wedge_* d^{\nabla^{WM}}(\omega \otimes w) \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado en repetidas ocasiones el párrafo anterior, la definición de  $\otimes$ , el que  $*$  es paralela y la súper derivación de  $d$ .  $\square$

Notemos ahora lo siguiente, sea  $VM$  un haz vectorial sobre una variedad  $M$  suave con conexión lineal  $\nabla^{VM}$ , sea  $v \in \Gamma(TM) \cong \Gamma(\Lambda^0 T^*M \otimes VM)$  entonces  $d^{\nabla^{VM}} v \in \Gamma(\Lambda^1 T^*M \otimes VM)$  y si  $X \in \Gamma(TM)$ :

$$(d^{\nabla^{VM}} v)(X) = \nabla_X v.$$

De forma similar, si  $\eta \in \Gamma(\Lambda^1 T^*M \otimes VM)$  entonces  $d^{\nabla^{VM}} \eta \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes VM)$  y si  $X, Y \in \Gamma(TM)$ :

$$(d^{\nabla^{VM}} \eta)(X, Y) = \nabla_X^{\nabla^{VM}} \eta(Y) - \nabla_Y^{\nabla^{VM}} \eta(X) - \eta([X, Y]),$$

por lo que, para  $v \in \Gamma(\Lambda^0 T^*M \otimes VM)$  y  $X, Y \in \Gamma(TM)$ :

$$\begin{aligned}
& \left( d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} v) \right) (X, Y) \\
&= \nabla_X^{VM} (d^{\nabla^{VM}} v)(Y) - \nabla_Y^{VM} (d^{\nabla^{VM}} v)(X) - (d^{\nabla^{VM}} v)([X, Y]) \\
&= \nabla_X^{VM} (\nabla_Y^{VM} v) - \nabla_Y^{VM} (\nabla_X^{VM} v) - \nabla_{[X, Y]}^{VM} v \\
&= R_{X, Y}^{\nabla^{VM}} v
\end{aligned} \tag{5.1}$$

En general se tiene el siguiente resultado:

**Lema 5.8**

Sea  $\omega \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM)$ , para cualesquiera  $X_0, \dots, X_{k+1} \in \Gamma(TM)$  es verdad que:

$$\begin{aligned}
& \left( d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} \omega) \right) (X_0, \dots, X_{k+1}) \\
&= \sum_{0 \leq \mu < \nu \leq k+1} (-1)^{\mu+\nu-1} R_{X_\mu, X_\nu}^{\nabla^{VM}} \omega(X_0, \dots, \widehat{X_{\mu/\nu}}, \dots, X_{k+1}) = (R^{\nabla^{VM}} \wedge_* \omega)(X_0, \dots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

**Demostración:** Puesto que toda forma  $\omega \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM)$  es una suma finita de formas del tipo  $\eta \otimes v$  con  $\eta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$  y  $v \in \Gamma(VM)$ , entonces será suficiente con probar el resultado en estas formas.

Sea pues  $\omega = \eta \otimes v$ , aplicando el lema 5.7 tenemos

$$\begin{aligned}
& \left( d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} \omega) \right) \\
&= \left( d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} \eta \otimes v) \right) = d^{\nabla^{VM}} \left( d\eta \otimes v + (-1)^k \eta \wedge_* d^{\nabla^{VM}} v \right) \\
&= \underbrace{d^2 \eta}_{=0} \otimes v + (-1)^{k+1} d\eta \wedge_* d^{\nabla^{VM}} v + (-1)^k d\eta \wedge_* d^{\nabla^{VM}} v + (-1)^{2k} \eta \wedge_* d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} v) \\
&= \eta \wedge_* d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} v) = \eta \wedge_* R^{\nabla^{VM}} v = R^{\nabla^{VM}} v \wedge_* \eta
\end{aligned}$$

□

**Corolario 5.9**

La derivada exterior torcida es un operador de cofrontera, si y sólo si la conexión es plana:

$$d^{\nabla^{VM}} \circ d^{\nabla^{VM}} = 0 \iff R^{\nabla^{VM}} \equiv 0.$$

Este corolario motiva la siguiente definición.

**Definición 5.10 (Cohomología de De Rham torcida)**

Sean  $M$  una variedad suave y  $VM$  un haz vectorial sobre  $M$  con una conexión  $\nabla^{VM}$  plana en el sentido  $R^{\nabla^{VM}} = 0$ . La cohomología de De Rham torcida con coeficientes en el haz vectorial  $VM$  es la cohomología generada por el siguiente complejo:

$$0 \longrightarrow C^\infty(M, VM) \xrightarrow{d^{\nabla^{VM}}} \Gamma(\Lambda^1 T^*M \otimes VM) \xrightarrow{d^{\nabla^{VM}}} \dots \xrightarrow{d^{\nabla^{VM}}} \Gamma(\Lambda^m T^*M \otimes VM) \longrightarrow 0.$$

esto es,

$$H_{\text{DR}}^k(M; VM) := \frac{\ker [d^{\nabla^{VM}} : \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{k+1} T^*M \otimes VM)]}{\text{im} [d^{\nabla^{VM}} : \Gamma(\Lambda^{k-1} T^*M \otimes VM) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes VM)]},$$

en donde por definición  $\Gamma(\Lambda^{-1} T^*M \otimes VM) = \{0\} = \Gamma(\Lambda^{m+1} T^*M \otimes VM)$ .

Hacemos notar que el complejo de De Rham torcido y por ende su cohomología tendrán sentido sólo si  $\nabla^{VM}$  es una conexión plana.

**Corolario 5.11 (Segunda Identidad de Bianchi)**

$$d^{\nabla^{\text{End } VM}} R^{\nabla^{VM}} = 0.$$

**Demostración:** Para todo  $\omega \in \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M \otimes VM)$ :

$$\begin{aligned} R^{\nabla^{VM}} \wedge_* d^{\nabla^{VM}} \omega &= d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} (d^{\nabla^{VM}} \omega)) = d^{\nabla^{VM}} (R^{\nabla^{VM}} \wedge_* \omega) \\ &= (d^{\nabla^{\text{End } VM}} R^{\nabla^{VM}}) \wedge_* \omega + R^{\nabla^{VM}} \wedge_* (d^{\nabla^{VM}} \omega). \end{aligned}$$

Entonces  $(d^{\nabla^{\text{End } VM}} R^{\nabla^{VM}}) \wedge_* \omega = 0$  se anula para toda  $\omega$ , de aquí  $d^{\nabla^{\text{End } VM}} R^{\nabla^{VM}} = 0$ .  $\square$

Ahora enunciaremos una versión del Teorema de Stokes la cual se acoplará a nuestros objetivos, discutiremos brevemente como interpretar en este caso el teorema.

**Teorema 5.12 (Stokes)**

Sea  $N \subset M$  una subvariedad compacta con frontera de codimensión 0 y consideremos una  $(m-1)$ -forma con valores en el haz de orientaciones  $\omega \in \Gamma(\Lambda^{m-1} T^*M \otimes \text{Or } TM)$ . Entonces  $d^{\nabla^{\text{Or } TM}} \omega \in \Gamma(\Lambda^m T^*M \otimes \text{Or } TM)$  y

$$\int_N d^{\nabla^{\text{Or } TM}} \omega = \int_{\partial N} \omega|_{\partial N}.$$

Necesitamos decir que significa la expresión  $\omega|_{\partial N}$  para este tipo de formas diferenciales. Consideramos  $p \in \partial N$ , tenemos que  $T_p \partial N \subseteq T_p M$  es un subespacio vectorial de codimensión 1, definimos el espacio normal a  $\partial N$  en el punto  $p$ , denotado por  $\text{Norm}_p \partial N$ , como

$$\text{Norm}_p \partial N = T_p M / T_p \partial N \cong \mathbb{R}.$$

Sea  $A \in \text{Norm}_p \partial N$  no cero, decimos que  $A$  apunta hacia afuera si para alguna curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  que representa a  $A$  se tiene que  $\gamma_t \in \dot{N}$  para todo  $t \in (-\varepsilon, 0)$  y  $\gamma_t \in M \setminus N$  para todo  $t \in (0, \varepsilon)$ . Consideramos la sucesión exacta corta de espacios vectoriales

$$0 \rightarrow T_p \partial N \rightarrow T_p M \rightarrow \text{Norm}_p \partial N \rightarrow 0.$$

La observación 3.8 aplicada a la sucesión anterior nos dice que

$$\text{Or } T_p M \cong \text{Or } T_p \partial N \otimes \text{Or } \text{Norm}_p \partial N.$$

Definimos entonces  $\text{o}_{\text{out}} \in \text{Or } \text{Norm}_p \partial N$  como sigue: si  $A \in \text{Norm}_p \partial N$  es no cero  $A \neq 0$  y apunta hacia afuera entonces  $\text{o}_{\text{out}}(A) = +1$ .

Si  $\text{o} \in \text{Or } T_p M$ , el par  $(\text{o}, \text{o}_{\text{out}})$  y el isomorfismo anterior inducen una orientación  $\text{o}_{\text{ind}}$  para el espacio  $T_p \partial N$  la cual cumple que una base  $\mathcal{B} := \{B_2, \dots, B_m\}$  para  $T_p \partial N$  está orientada positivamente con respecto a  $\text{o}_{\text{ind}}$  si y sólo si  $\mathcal{B}^{\text{ext}} := \{A, B_2, \dots, B_m\}$  es una base orientada positiva en  $T_p M$  con respecto a la orientación  $\text{o}$  en donde  $A \in \text{Norm}_p \partial N$  apunta hacia afuera. Definimos la aplicación lineal

$$\text{ext} : \text{Or } T_p \partial N \rightarrow \text{Or } T_p M, \quad \hat{\text{o}} \mapsto \text{o} := \text{o}_{\text{out}} \otimes \hat{\text{o}}$$

nótese que  $\text{ext}$  es un isomorfismo de espacios vectoriales. Extendiendo esta aplicación a los haces tangentes respectivos tenemos el isomorfismo de haces vectoriales:

$$\text{ext} : \text{Or } T \partial N \rightarrow \text{Or } TM, \quad \hat{\text{o}} \mapsto \text{o} := \text{o}_{\text{out}} \otimes \hat{\text{o}}.$$

Con lo anterior, estamos en condiciones dar el significado de  $\omega|_{\partial N}$  pues en estos términos tenemos que

$$\omega|_{\partial N} := (\iota^* \otimes \text{ext}^{-1})(\omega).$$

en donde  $\iota : \partial N \rightarrow M$  es la inclusión de  $\partial N$  en  $M$ , en general  $\iota^* \otimes \text{ext}^{-1}$  define una aplicación de haces vectoriales:

$$\iota^* \otimes \text{ext}^{-1} : \Gamma(\Lambda^\bullet T^* M \otimes \text{Or } TM) \rightarrow \Gamma(\Lambda^\bullet T^* \partial N \otimes \text{Or } T \partial N)$$

## 5.2. Idea de Flanders

Analicemos ahora parte de las ideas que H. Flanders publicó en su artículo [F]. Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión par  $m = 2n$ , si  $\nabla$  es una conexión afín esta induce una conexión  $\nabla^{\Lambda^k TM}$  en el haz de los  $k$ -vectores  $\Lambda^k TM$  como sigue, para cualesquiera  $X, X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ :

$$\nabla_X^{\Lambda^k TM} (X_1 \wedge \dots \wedge X_k) := \sum_{\mu=1}^k X_1 \wedge \dots \wedge \nabla_X X_\mu \wedge \dots \wedge X_k$$

**Lema 5.13** Si  $E_1, E_2, \dots, E_m \in \Gamma_{\text{loc}}(TM)$  es una base local ortonormal y  $\nabla$  es una conexión métrica respecto a una métrica Riemanniana  $g$ , entonces para todo  $X \in \Gamma(TM)$ :

$$\nabla_X^{\Lambda^m TM}(E_1 \wedge \dots \wedge E_m) = 0.$$

**Demstración:** Sea  $U \subset M$  el subconjunto abierto en donde  $E_1, E_2, \dots, E_m$  es base local ortonormal, si  $X \in \Gamma(TM)$  entonces  $\nabla_X E_\mu \in \Gamma_{\text{loc}}(TM)$  y por lo tanto existen  $f_{\mu\nu} \in C^\infty(U)$  tales que:

$$\nabla_X E_\mu = \sum_{\nu=1}^m f_{\mu\nu} E_\nu = \sum_{\nu=1}^m g(\nabla_X E_\mu, E_\nu) E_\nu.$$

De la metricidad de la conexión  $\nabla$  se sigue

$$g(\nabla_X E_\mu, E_\nu) + g(E_\mu, \nabla_X E_\nu) = X g(E_\mu, E_\nu) = X \delta_{\mu=\nu} = 0.$$

Así pues  $f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu} = 0$  y de aquí  $f_{\mu\mu} = 0$  para todo  $\mu = 1, \dots, m$ . Esto nos lleva a concluir que  $\nabla_X E_\mu \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{E_1, \dots, E_{\mu-1}, E_{\mu+1}, \dots, E_m\}$  en todo  $U$  y por lo tanto

$$E_1 \wedge \dots \wedge E_{\mu-1} \wedge \nabla_X E_\mu \wedge E_{\mu+1} \wedge \dots \wedge E_m = 0.$$

Por último tenemos que:

$$\nabla_X^{\Lambda^m TM}(E_1 \wedge \dots \wedge E_m) = \sum_{\mu=1}^m E_1 \wedge \dots \wedge E_{\mu-1} \wedge \nabla_X E_\mu \wedge E_{\mu+1} \wedge \dots \wedge E_m = 0$$

□

**Corolario 5.14** La integral de Berezin  $[\cdot] : \Gamma(\Lambda^m TM) \longrightarrow \Gamma(\text{Or } TM)$  es una aplicación paralela.

Consideremos ahora  $X \in \Gamma_{\text{loc}}(TM)$  con  $\Sigma = \emptyset$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $g(X, X) = 1$ , sea  $\nabla$  como en el lema anterior.

**Lema 5.15** Suponiendo las anteriores consideraciones la siguiente identidad es cierta:

$$0 \equiv \underbrace{\nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X}_{m \text{ veces}}$$

**Demstración:** La metricidad de la conexión  $\nabla$  implica que para cada  $Y \in \Gamma(TM)$ :

$$Y g(X, X) = g(\nabla_Y X, X) + g(X, \nabla_Y X) = 2g(\nabla_Y X, X)$$

Puesto que  $g(X, X) \in C^\infty(M)$  es constante tenemos  $Y g(X, X) = 0$  y por lo tanto  $g(\nabla_Y X, X) = 0$ . De aquí que para cada  $p \in M$  en el dominio de  $X$ , la imagen del endomorfismo  $(\nabla X)_p \in \text{End } T_p M$  vive en el espacio ortogonal a  $X_p \neq 0$  por lo que el rango de  $(\nabla X)_p$  es necesariamente menor que  $m$ , se sigue que si  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \in T_p M$

entonces que el conjunto  $\{(\nabla_{Y_1} X)_p, \dots, (\nabla_{Y_m} X)_p\}$  es linealmente dependiente para cada  $p \in M$ .

En términos de campos vectoriales,  $\{\nabla_{Y_1} X, \dots, \nabla_{Y_m} X\}$  es un conjunto de campos vectoriales linealmente dependiente y por lo tanto la  $m$ -forma  $\nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X$  con valores en los  $m$ -multivectores es idénticamente igual a cero. Esto es:

$$0 \equiv \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X \in \Gamma(\Lambda^m T^* M \otimes \Lambda^m TM)$$

□

Ahora, dado que la integración de Berezin es una aplicación  $C^\infty(M)$ -lineal y paralela

$$[\cdot] : \Gamma(\Lambda^m TM) \longrightarrow \Gamma(\text{Or } TM),$$

entonces aplicando el lema 5.7 a la forma (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} d^{\nabla^{\text{Or } TM}} [X \wedge \underbrace{\nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X}_{(m-1) \text{ veces}}] &= [d^{\nabla^{\Lambda^m TM}} (X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X)] \\ &= [d^\nabla X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X] \\ &\quad + \sum_{\mu=2}^m (-1)^\mu [X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge d^\nabla \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X] \\ &= [\nabla X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X] \\ &\quad + \sum_{\mu=2}^m (-1)^\mu [X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge R^\nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X] \\ &= [\nabla X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X] \\ &\quad + (m-1) [X \wedge R^\nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X] \end{aligned}$$

Del lema anterior y dado que  $m$  es par se sigue que:

$$d^{\nabla^{\text{Or } TM}} [X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X] = (m-1) [X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge R^\nabla X]$$

Enseguida generalizaremos los cálculos anteriores a un conjunto de formas diferenciales claves para la prueba del teorema de Chern–Gauß–Bonnet, las cuales están en analogía con las definidas por S. S. Chern en [C].

Antes de continuar veamos que el isomorfismo

$$\Psi : \Lambda^2 TM \longrightarrow \mathfrak{so}(TM), \quad A \wedge B \longmapsto g(A, \cdot) - g(B, \cdot) A$$

entre  $\Lambda^2 TM$  y  $\mathfrak{so}(TM)$  es paralelo, de hecho para  $A \wedge B \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$  calculamos:

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\nabla_X^{\Lambda^2 TM}(A \wedge B)\right) Z &= \Psi\left((\nabla_X A) \wedge B + A \wedge (\nabla_X B)\right) Z \\
&= +g(\nabla_X A, Z)B - g(B, Z)\nabla_X A \\
&\quad +g(A, Z)\nabla_X B - g(\nabla_X B, Z)A \\
&= +Xg(A, Z)B + g(A, Z)\nabla_X B - g(A, \nabla_X Z)B \\
&\quad - Xg(B, Z)A - g(B, Z)\nabla_X A + g(B, \nabla_X Z)A \\
&= \nabla_X(\Psi(A \wedge B)Z) - \Psi(A \wedge B)(\nabla_X Z) \\
&= \left(\nabla_X^{\text{End } TM}\Psi(A \wedge B)\right) Z.
\end{aligned}$$

De esto y de la  $C^\infty(M)$ -linealidad de  $\Psi$  concluimos que es paralela con respecto a las conexiones  $\nabla^{\Lambda^2 TM}$  y  $\nabla^{\text{End } TM}$ . Este isomorfismo nos será útil en particular para calcular la derivada de  $R^\nabla$ .

Hasta el momento hemos trabajado con un campo vectorial particular, sea ahora  $X \in \Gamma(TM)$  campo vectorial globalmente definido en  $M$  con conjunto de ceros aislados, es decir que todo punto en el conjunto  $\Sigma = \{p \in M \mid X_p = 0\} \subset M$  tiene una vecindad que no contiene a ningún otro punto en  $\Sigma$ . Definamos entonces el campo vectorial  $\hat{X} \in \Gamma_{\text{loc}}(TM)$  definido en  $M \setminus \Sigma$  como:

$$\hat{X} := \frac{X}{|X|_g}$$

nótese que  $\hat{X}$  es un campo vectorial sin ceros y  $|\hat{X}_p|_{g_p} = 1$  para todo punto  $p \in M \setminus \Sigma$ , abusando de la notación denotaremos a este último campo vectorial simplemente como  $X$ .

Definimos para  $r = 0, 1, \dots, n-1 = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  las  $(m-1)$ -formas diferenciales con valores en el haz  $\text{Or } TM$ :

$$\Omega_r := \left[ X \wedge \underbrace{\nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X}_{(m-2r-1) \text{ veces}} \wedge \underbrace{R^\nabla \wedge \dots \wedge R^\nabla}_r \right] \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^{m-1} T^* M \otimes \text{Or } TM).$$

Obsérvese que ya hemos calculado la derivada exterior torcida para  $\Omega_0$ . En general, la derivada exterior de la forma  $\Omega_r$  está dada por:

$$\begin{aligned}
d^{\nabla^{\text{Or } TM}} \Omega_r &= \left[ d^{\nabla^{\Lambda^2 TM}} (X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X \wedge R^\nabla \wedge \dots \wedge R^\nabla) \right] \\
&= \left[ d^\nabla X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X \wedge R^\nabla \wedge \dots \wedge R^\nabla \right] \\
&\quad + (m-2r-1) \left[ X \wedge R^\nabla X \wedge \underbrace{\nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X}_{(m-2(r+1)) \text{ veces}} \wedge R^\nabla \wedge \dots \wedge R^\nabla \right] \\
&\quad + (-1)^{m-1} r \left[ X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X \wedge d^{\nabla^{\Lambda^2 TM}} R^\nabla \wedge \underbrace{R^\nabla \wedge \dots \wedge R^\nabla}_{(r-1) \text{ veces}} \right]
\end{aligned}$$

Puesto que  $R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \Lambda^2 TM)$  se tiene que  $d^{\nabla \Lambda^2 TM} R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^3 T^*M \otimes \Lambda^2 TM)$  y aplicando la Segunda Identidad de Bianchi (SBI) obtenemos:

$$(\text{id}_{\Lambda^3 T^*M} \otimes \Psi) \left( d^{\nabla \Lambda^2 TM} R^\nabla \right) = d^{\nabla \text{End } TM} (R^\nabla) \stackrel{\text{SBI}}{=} 0$$

En consecuencia  $d^{\nabla \Lambda^2 TM} R^\nabla = 0$  y la derivada exterior torcida de  $\Omega_r$  es entonces:

$$\begin{aligned} d^{\nabla \text{Or } TM} \Omega_r &= \left[ \underbrace{\nabla X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X}_{(m-2r) \text{ veces}} \wedge R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla \right] \\ &+ (m-2r-1) \left[ X \wedge R^\nabla X \wedge \underbrace{\nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X}_{(m-2(r+1)) \text{ veces}} \wedge R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Notemos que en el lado derecho de esta igualdad, el segundo término contiene un factor  $R^\nabla X$  el cual en principio parece problemático. En lo que sigue trabajaremos para llegar a uno de los principales resultados de [F], en el cual se obtiene una expresión equivalente de (5.2) en la que no aparece este término.

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$  y supongamos que  $V_1$  y  $V_2$  son subespacios de  $V$  tales que  $V = V_1 \oplus V_2$  entonces la segunda potencia exterior de  $V$  cumple el isomorfismo

$$\Lambda^2 V \cong \Lambda^2 V_1 \oplus V_1 \otimes V_2 \oplus \Lambda^2 V_2$$

Ahora, el espacio tangente de  $M$  en  $p$  se descompone en la forma  $T_p M = \mathbb{R}X_p \oplus \{X_p\}^\perp$  en donde  $X$  es nuestro campo vectorial y  $\{X_p\}^\perp := \{Y \in T_p M \mid g_p(X_p, Y) = 0\}$  es el complemento ortogonal de su valor  $X_p \in T_p M$  in  $p$ , para la segunda potencia exterior de  $T_p M$  tenemos entonces:

$$\Lambda^2 T_p M \cong \Lambda^2 \mathbb{R}X_p \oplus \mathbb{R}X_p \otimes \{X_p\}^\perp \oplus \Lambda^2 \{X_p\}^\perp.$$

Puesto que  $\dim \mathbb{R}X_p = 1$  se sigue que  $\Lambda^2 \mathbb{R}X_p = \{0\}$  y por lo tanto el isomorfismo anterior queda como:

$$\Lambda^2 T_p M \cong \mathbb{R}X_p \otimes \{X_p\}^\perp \oplus \Lambda^2 \{X_p\}^\perp.$$

Haciendo esto para todo  $p \in M$  podemos descomponer al haz vectorial  $\Lambda^2 TM$  en la forma:

$$\Lambda^2 TM \cong \mathbb{R}X \otimes \{X\}^\perp \oplus \Lambda^2 \{X\}^\perp$$

### Corolario 5.16

Sea  $\mathfrak{Y} \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ , existen únicos  $Y \in \Gamma(\{X\}^\perp)$  y  $\mathfrak{Y}^\perp \in \Gamma(\Lambda^2 \{X\}^\perp)$  tales que:

$$\mathfrak{Y} = X \wedge Y + \mathfrak{Y}^\perp.$$

De hecho  $Y$  y  $\mathfrak{Y}^\perp$  están dados por  $Y := \mathfrak{Y}X := X \lrcorner \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y}^\perp = \mathfrak{Y} - X \wedge Y$ , aquí estamos tratando a  $\mathfrak{Y}$  como endomorfismo antisimétrico de  $TM$ .

**Corolario 5.17**

$$R^\nabla \equiv X \wedge R^\nabla X \quad \text{mod } \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^2 T^* M \otimes \Lambda^2 \{X\}^\perp)$$

De esta congruencia se sigue que  $R^\nabla - X \wedge R^\nabla X \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^2 T^* M \otimes \Lambda^2 \{X\}^\perp)$ , además puesto que las 2-formas conmutan la expansión binomial de Newton implica la igualdad:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(R^\nabla - X \wedge R^\nabla X) \wedge \cdots \wedge (R^\nabla - X \wedge R^\nabla X)}_{(r+1) \text{ veces}} \\ &= \sum_{\mu=0}^{r+1} (-1)^\mu \binom{r+1}{\mu} (R^\nabla)^{\wedge(r+1)-\mu} (X \wedge R^\nabla X)^{\wedge \mu} \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^{2r+2} T^* M \otimes \Lambda^{2r+2} \{X\}^\perp) \end{aligned}$$

Ya que  $(X \wedge R^\nabla X) \wedge (X \wedge R^\nabla X) = X \wedge X \wedge R^\nabla X \wedge R^\nabla X = 0$  entonces los últimos  $r$  sumandos de la suma anterior son 0 y por lo tanto

$$\begin{aligned} (R^\nabla - X \wedge R^\nabla X) \wedge \cdots \wedge (R^\nabla - X \wedge R^\nabla X) &= \underbrace{R^\nabla \wedge R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla}_{(r+1) \text{ veces}} \\ &\quad - (r+1) \left( X \wedge R^\nabla X \wedge \underbrace{R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla}_{r \text{ veces}} \right) \end{aligned}$$

de esto se sigue que

$$\underbrace{R^\nabla \wedge R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla}_{(r+1) \text{ veces}} \equiv (r+1) \left( X \wedge R^\nabla X \wedge \underbrace{R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla}_{r \text{ veces}} \right)$$

módulo  $\Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^{2r+2} T^* M \otimes \Lambda^{2r+2} \{X\}^\perp)$ .

Recordemos que  $\nabla X \in \Gamma_{\text{loc}}(T^* M \otimes \{X\}^\perp)$  así pues, la congruencia anterior se extiende a la congruencia

$$\underbrace{\nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X}_{(m-2(r+1)) \text{ veces}} \wedge \underbrace{R^\nabla \wedge R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla}_{(r+1) \text{ veces}} \equiv (r+1) \underbrace{X \wedge R^\nabla X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X}_{(m-2(r+1)) \text{ veces}} \wedge \underbrace{R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla}_{r \text{ veces}}$$

módulo  $\Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^m T^* M \otimes \Lambda^m \{X\}^\perp)$ , puesto que  $\Lambda^m \{X\}^\perp = 0$  esta congruencia es de hecho una igualdad. Con esto, la expresión (5.2) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} d^{\nabla \text{Or } TM} \Omega_r &= \underbrace{[\nabla X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X]_{(m-2r) \text{ veces}}}_{(m-2r) \text{ veces}} \wedge \underbrace{[R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla]_{r \text{ veces}}}_{r \text{ veces}} \\ &\quad + \frac{(m-2r-1)}{r+1} \underbrace{[\nabla X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X]_{(m-2(r+1)) \text{ veces}}}_{(m-2(r+1)) \text{ veces}} \wedge \underbrace{[R^\nabla \wedge \cdots \wedge R^\nabla]_{(r+1) \text{ veces}}}_{(r+1) \text{ veces}} \end{aligned} \tag{5.3}$$

**Corolario 5.18** *La Pfaffiana del tensor de curvatura  $R$  es una forma exacta en  $M \setminus \Sigma$ , es decir, existe  $\Omega \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^{m-1} T^* M \otimes \text{Or} TM)$  tal que  $d^{\nabla^{\text{Or} TM}} \Omega = C \cdot \text{Pf}(R)$  con  $C \in \mathbb{Z}$ .*

**Demostración:** Sea  $\nabla = \nabla^{\text{LC}}$  la conexión de Levi-Civita, definamos la  $(m-1)$ -forma con valores en el haz de orientaciones

$$\Omega := \Omega_0 - \frac{(m-1)}{1} \Omega_1 + \frac{(m-1)(m-3)}{1 \cdot 2} \Omega_2 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\prod_{\mu=1}^n (2\mu-1)}{(n-1)!} \Omega_{n-1}$$

De la linealidad de la derivada exterior torcida y por (5.3) se sigue que:

$$\begin{aligned} & d^{\nabla^{\text{Or} TM}} \left( \Omega_0 - \frac{(m-1)}{1} \Omega_1 + \frac{(m-1)(m-3)}{1 \cdot 2} \Omega_2 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\prod_{\mu=1}^n (2\mu-1)}{(n-1)!} \Omega_{n-1} \right) \\ &= \underbrace{[\nabla X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X]}_{=0} + C \left[ \frac{1}{n!} R \wedge R \wedge \cdots \wedge R \right] \\ &= C \left[ \frac{1}{n!} R \wedge R \wedge \cdots \wedge R \right] = C \text{Pf}(R) \end{aligned}$$

donde  $C := (-1)^{n-1} \prod_{\mu=1}^n (2\mu-1)$ . □

### 5.3. Relación con el índice de Poincaré–Hopf

En este apartado presentaremos los cálculos que relacionan la teoría de índice de Poincaré–Hopf con la integración de la forma diferencial (3.1). Dichos cálculos se realizarán en un sistema coordinado muy particular dado por la aplicación exponencial.

#### Definición 5.19 (Métrica plana)

Una métrica Riemanniana  $g$  en  $M$  se dice plana si el tensor de curvatura de la conexión  $\nabla$  de Levi–Civita es idénticamente cero, es decir, para todos  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  se tiene que  $R_{X,Y}^\nabla Z = 0$ .

**Lema 5.20** *Sea  $\Sigma \subset M$  subconjunto discreto de  $M$ , entonces existe un abierto  $U \subset M$  con  $\Sigma \subset U$  y una métrica Riemanniana  $\hat{g}$  tales que  $\hat{g}|_U$  es una métrica plana.*

**Demostración:** Puesto que  $\Sigma$  es un subconjunto discreto de  $M$ , para cada  $p \in \Sigma$  existe  $U_p$  vecindad de  $p$  para la cual  $U_p \cap \Sigma = \{p\}$ . Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $U_p \cap U_q = \emptyset$  siempre que  $p \neq q \in \Sigma$  y que  $U_p$  es difeomorfo a una bola abierta centrada en cero con respecto a una carta coordinada centrada en  $p$ . Definamos  $g^p$  métrica Riemanniana sobre  $U_p$  como:

$$g^p := dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + \cdots + dx^m \otimes dx^m$$

esto es,  $g^p = x^* g_{\text{est}}$  (métrica jalada) donde  $g_{\text{est}}$  es la métrica estándar de  $\mathbb{R}^m$ . Como  $g_{\text{est}}$  es plana y  $x : (U_p, g^p) \longrightarrow (\dot{B}_\varepsilon(\vec{0}), g_{\text{est}})$  es una isometría entonces  $g^p$  es plana en  $U_p$ .

Consideremos una métrica Riemanniana  $g$  sobre  $M$ . Ya que  $\{\{U_p \mid p \in \Sigma\} \cup M \setminus \Sigma\}$  es una cubierta abierta de  $M$ , entonces existe una partición de la unidad  $\{\{\chi_p \mid p \in \Sigma\} \cup \chi^\infty\}$  subordinada a la cubierta. Definamos entonces:

$$\hat{g} := \sum_{p \in \Sigma} \chi_p g^p + \chi^\infty g$$

Así,  $\hat{g}$  es una métrica Riemanniana sobre  $M$  y para cada  $p \in \Sigma$  existe  $V_p \subset U_p$  vecindad abierta de  $p$  en donde  $\hat{g}|_{V_p} = g^p$  y entonces basta con poner  $U = \cup_{p \in \Sigma} V_p$ .  $\square$

Supongamos que  $g$  es una métrica Riemanniana la cual es plana en una vecindad  $U_p$  de un punto  $p \in M$ , así tenemos que la aplicación exponencial

$$\exp_p : T_p M \longrightarrow M$$

es una isometría en una vecindad  $\tilde{U} \subset T_p M$  de  $\vec{0} \in T_p M$ , donde  $T_p M$  está dotado con la siguiente métrica. Para cada  $A \in T_p M$ , consideremos el isomorfismo de espacios vectoriales  $T_A(T_p M) \cong T_p M$ :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_t \xrightarrow{\Phi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_t - \gamma_0}{t}, \quad B \xrightarrow{\Phi^{-1}} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 A + tB$$

donde  $\gamma(0) = A$ . Con ello, definimos la aplicación bilineal simétrica en  $T_A(T_p M)$ :

$$g_A^\top : T_A(T_p M) \times T_A(T_p M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g_A^\top \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_t, \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \alpha_t \right) := g_p \left( \Phi \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_t \right), \Phi \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \alpha_t \right) \right)$$

Así pues,  $g^\top \in \Gamma(\text{Sym}^2 T^*(T_p M))$  es una métrica Riemanniana sobre  $T_p M$ . La identificación anterior implica el isomorfismo de módulos

$$\Gamma(T(T_p M)) \stackrel{\hat{\Phi}}{\cong} C^\infty(T_p M, T_p M)$$

por lo que la conexión trivial  $\nabla^{\text{triv}}$  en  $T(T_p M)$  se corresponde bajo esta identificación con la conexión de Levi–Civita en  $T_p M$  respecto a la métrica  $g^\top$ , es decir, para  $X, Y \in \Gamma(T(T_p M))$

$$\hat{\Phi}(\nabla_Y^{\text{triv}} X) = Y(\hat{\Phi}(X)) \in C^\infty(T_p M, T_p M)$$

Sigamos con nuestro campo vectorial  $X \in \Gamma(TM)$  con conjunto de ceros  $\Sigma$  discreto con la propiedad que  $\|\hat{X}\|_g = 1$  en  $M \setminus \Sigma$ , para  $p \in \Sigma$  consideremos el campo vectorial en  $\tilde{U}$  jalado por la aplicación exponencial  $X^* := \exp_p^*(X)$  (en realidad  $X = \hat{X}$ ) el cual cumple

que  $\|X^*\|_{g_T} = 1$  en  $\tilde{U} \setminus \{\vec{0}\}$  ya que  $\exp_p$  es una isometría en este abierto, tomemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B_\varepsilon(\vec{0})} \subset \tilde{U} \subset T_p M$  y definamos entonces la aplicación:

$$\varphi_\varepsilon : S_\varepsilon(T_p M) \longrightarrow S_\varepsilon(T_p M); \quad A \longmapsto \varepsilon \hat{\Phi}(X^*)(A) \hat{=} \varepsilon X(A)$$

La diferencial en un punto  $A \in S_\varepsilon(T_p M)$  de la aplicación  $\varphi_\varepsilon$  está dada por:

$$(\varphi_\varepsilon)_{*,A} : T_A S_\varepsilon(T_p M) \longrightarrow T_{\varphi_\varepsilon(A)} S_\varepsilon(T_p M); \quad Y \longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varepsilon \hat{\Phi}(X^*)(\gamma_t)$$

donde  $\gamma_t$  es una curva en  $S_\varepsilon(T_p M)$  que pasa por  $A$  y cuyo vector tangente en  $A$  es igual a  $Y$ . Se sigue entonces bajo la identificación anterior que

$$\begin{aligned} (\varphi_\varepsilon)_{*,A}(Y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varepsilon \hat{\Phi}(X^*)(\gamma_t) = \varepsilon \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_t \right) (\hat{\Phi}(X^*)) \\ &= \varepsilon \hat{\Phi}(\nabla^{\text{triv}} X^*)_A(Y) \hat{=} \varepsilon (\nabla X)_A(Y) \end{aligned}$$

Así pues, la aplicación  $(\varphi_\varepsilon)_{*,A}$  toma la forma  $(\varphi_\varepsilon)_{*,A} = \varepsilon \hat{\Phi}(\nabla^{\text{triv}} X^*)_A \hat{=} \varepsilon (\nabla X)_A$  y sin mencionar explícitamente esta identificación tenemos simplemente que  $(\varphi_\varepsilon)_{*,A} = \varepsilon (\nabla X)_A$ .

Sea  $N := S_\varepsilon(T_p M)$  y  $\omega$  la forma diferencial definida como:

$$\omega := \frac{1}{(m-1)!} [X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X] \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^{m-1} T^* M \otimes \text{Or } TM).$$

Dada una orientación  $o$  de  $T_A(T_p M) \cong T_p M$ , consideremos su forma de volumen  $\text{vol}_{g_p}^o \in \Lambda^m T_p^* M$  asociada al producto interior  $g_p$ . Si  $A \in N \subset T_p M$  entonces la aplicación ext definida en la subsección anterior nos da una única orientación  $\hat{o} \in \text{Or } T_A N$  que cumple  $o = o_{\text{out}} \otimes \hat{o}$ , así pues, definimos la forma de volumen en  $T_A N \cong \{A\}^\perp$  con respecto a esta orientación como sigue, si  $Y_2, \dots, Y_m \in \{A\}^\perp$ :

$$\left( \text{vol}_{g_p}^{-\hat{o}} \right) (Y_2, \dots, Y_m) := \frac{1}{\varepsilon} \text{vol}_{g_p}^o (A, Y_2, \dots, Y_m).$$

Ahora, si  $o \in \Gamma_{\text{loc}}(\text{Or } TM)$  definida en  $\tilde{U} \subset T_p M$  entonces por el argumento antes dado obtenemos una orientación  $\hat{o} \in \Gamma_{\text{loc}}(\text{Or } TN)$  y formas de volumen:

$$\text{vol}_g^o \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^m T^* M), \quad \text{vol}_g^{-\hat{o}} \in \Gamma_{\text{loc}}(\Lambda^{m-1} T^* N)$$

Jalando ésta última forma de volumen con la aplicación suave  $\varphi_\varepsilon$  obtenemos para  $A \in N$ :

$$\begin{aligned} \left( \varphi_\varepsilon^* \text{vol}_g^{-\hat{o}} \right)_A (Y_2, \dots, Y_m) &= \left( \text{vol}_g^{-\hat{o}} \right)_{\varepsilon X_A} ((\varphi_\varepsilon)_{*,A} Y_2, \dots, (\varphi_\varepsilon)_{*,A} Y_m) \\ &= \left( \text{vol}_g^{-\hat{o}} \right)_{\varepsilon X_A} (\varepsilon (\nabla X)_A(Y_2), \dots, \varepsilon (\nabla X)_A(Y_m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon} \text{vol}_g^0(\varepsilon X_A, \varepsilon (\nabla X)_A(Y_2), \dots, \varepsilon (\nabla X)_A(Y_m)) \\
&= \varepsilon^{m-1} \text{vol}_g^0(X_A, (\nabla X)_A(Y_2), \dots, (\nabla X)_A(Y_m))
\end{aligned}$$

Recordando la definición de la integral de Berezin 3.14 tenemos que si  $A \in T_p M$  e  $Y_2, \dots, Y_m \in \{A\}^\perp$ :

$$\begin{aligned}
\omega_A(Y_2, \dots, Y_m) &= \frac{1}{(m-1)!} ([X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X]_A)(Y_2, \dots, Y_m) \\
&= [X_A \wedge (\nabla X)_A(Y_2) \wedge \dots \wedge (\nabla X)_A(Y_m)] \\
&= \text{vol}_g^0(X_A, (\nabla X)_A(Y_2), \dots, (\nabla X)_A(Y_m)) \cdot \circ
\end{aligned}$$

Restringiendo la forma  $\omega$  a  $N$  tenemos:

$$\begin{aligned}
&(\omega|_N)_A(Y_2, \dots, Y_m) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} ([X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X]|_N)_A(Y_2, \dots, Y_m) \\
&= (\iota^* \otimes \text{ext}^{-1})(\text{vol}_g^0(X_A, (\nabla X)_A(Y_2), \dots, (\nabla X)_A(Y_m)) \cdot \circ) \\
&= \text{vol}_g^0(X_A, (\nabla X)_A(Y_2), \dots, (\nabla X)_A(Y_m)) \cdot \hat{\circ} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} (\varphi_\varepsilon^* \text{vol}_g^{-\hat{\circ}})_A(Y_2, \dots, Y_m) \cdot \hat{\circ} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} (\varphi_\varepsilon^* \text{vol}_g^{\hat{\circ}})_A(Y_2, \dots, Y_m) \cdot \hat{\circ}
\end{aligned}$$

En conclusión, si restringimos la forma  $\omega$  al conjunto  $N$  tenemos la igualdad:

$$\frac{1}{(m-1)!} [X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X]|_N = -\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \varphi_\varepsilon^* \text{vol}_g^{\hat{\circ}} \otimes \hat{\circ}$$

Integrando sobre  $N$  obtenemos:

$$\frac{1}{(m-1)!} \int_N [X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X]|_N = -\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \int_{(N, \hat{\circ})} \varphi_\varepsilon^* \text{vol}_g^{\hat{\circ}} \quad (5.4)$$

**Nota 5.21** *El volumen de la esfera  $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$  puede ser calculado con la identidad:*

$$\left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^m = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-(x_1^2 + \dots + x_m^2)} dx_1 \dots dx_m = \frac{1}{2} \text{Vol}(S^{m-1}) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$$

De acuerdo con la integral de Gauß  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  por lo que:

$$\text{Vol}(S^{m-1}) = \frac{2(\pi)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \quad (5.5)$$

**Corolario 5.22**

$$\frac{1}{(m-1)!} \int_N [X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X]_N = -\frac{2\pi^n}{(n-1)!} \text{index}_p X$$

**Demostración:** Recordemos que la dimensión de  $M$  es  $m = 2n$ . El volumen de la esfera  $S_\varepsilon(T_p M) = N$  puede calcularse como:

$$\int_{(N, \hat{o})} \text{vol}_g^{\hat{o}} = \text{Vol}(S_\varepsilon, g) = \varepsilon^{m-1} \text{Vol}(S_1^{m-1}) = \varepsilon^{m-1} \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$$

se tiene entonces

$$\begin{aligned} \text{deg}(\varphi_\varepsilon) &= \frac{\int_{(N, \hat{o})} \varphi^* \text{vol}_g^{\hat{o}}}{\int_{(N, \hat{o})} \text{vol}_g^{\hat{o}}} = \frac{(n-1)!}{2\varepsilon^{m-1}\pi^n} \int_{(N, \hat{o})} \varphi^* \text{vol}_g^{\hat{o}} \\ &= -\frac{(n-1)!}{2(m-1)!\pi^n} \int_N [X \wedge \nabla X \wedge \cdots \wedge \nabla X]_N \end{aligned}$$

de esto y de que  $\text{deg}(\varphi_\varepsilon) = \text{index}_p X$  el corolario queda demostrado.  $\square$

# Capítulo 6

## Teorema de Chern–Gauß–Bonnet

El objetivo de esta sección es presentar y demostrar el resultado del cual se desprende el nombre de este trabajo, en realidad la mayor parte del argumento ya ha sido tratado en las secciones anteriores y aquí acomodaremos todas estas ideas para concluir con la demostración.

El punto crítico de la demostración se centra en probar que los cálculos hechos hasta el momento son independientes de la métrica que tiene nuestra variedad. En particular, mostraremos que la integral de la Pfaffiana definida en 3.18 es independiente de la métrica.

### 6.1. Forma de transgresión

En esta sección demostraremos que de hecho la integral de  $\text{Pf}(R)$  no depende de la métrica  $g$  sobre la variedad  $M$ . Para ello, encontraremos una  $(m-1)$ -forma  $\omega \in \Gamma(\Lambda^{m-1}T^*M \otimes \text{Or } TM)$  la cual es llamada *forma de transgresión*. La idea de introducir una forma de transgresión es debida a S. S. Chern y apareció por primera ocasión en [C].

**Lema 6.1** *Para  $g$  y  $\hat{g}$  métricas Riemannianas sobre  $M$ , existe una única  $\Phi \in \Gamma(\text{End } TM)$  tal que, para todo  $X, Y \in \Gamma(TM)$ :*

$$1) \quad g(\Phi X, \Phi Y) = \hat{g}(X, Y).$$

2)  $\Phi$  es un endomorfismo simétrico definido positivo con respecto a  $g$  y a  $\hat{g}$ .

**Demostración:** Definamos para cada  $p \in M$  el endomorfismo  $\Psi_p$  de  $T_pM$  a partir de los isomorfismos musicales:  $\Psi_p := \sharp_{g_p} \circ \flat_{\hat{g}_p}$  en donde

$$\flat_{\hat{g}_p} : T_pM \longrightarrow T_p^*M, \quad X \longmapsto \hat{g}_p(X, \cdot), \quad \sharp_{g_p} := \flat_{g_p}^{-1}$$

Se ve que  $\Psi_p$  es un isomorfismo simétrico con respecto a  $g_p$  ya que para  $X, Y \in T_pM$ :

$$\begin{aligned} g_p(\Psi_p X, Y) &= \langle \flat_{g_p}(\Psi_p X), Y \rangle \\ &= \langle \flat_{g_p} \circ \sharp_{g_p} \circ \flat_{\hat{g}_p}(X), Y \rangle = \langle \flat_{\hat{g}_p}(X), Y \rangle = \hat{g}_p(X, Y) \end{aligned}$$

utilizando la simetría de  $\hat{g}_p$  se tiene que  $g_p(\Psi_p X, Y) = g_p(X, \Psi_p Y)$  es decir que  $\Psi_p$  es simétrica con respecto de  $g_p$ . Análogamente se prueba que  $\Psi_p$  es simétrico con respecto a  $\hat{g}_p$ . El teorema de Inercia de Sylvester implica que  $\Psi_p$  es diagonalizable, además si  $X \neq 0$  es un vector propio con  $\lambda \in \mathbb{R}$  su valor propio correspondiente entonces:

$$\hat{g}_p(X, X) = g_p(\Psi_p X, X) = \lambda g_p(X, X)$$

se sigue entonces que  $\lambda > 0$ . Así pues,  $\Psi_p$  es definida positiva y tiene únicamente valores propios positivos, por lo que podemos definir  $\Phi_p := \sqrt{\Psi_p}$  como la raíz cuadrada definida positiva de  $\Psi_p$ . Con esto último hemos construido para cada  $p \in M$  un isomorfismo  $\Phi_p$  tal que  $g_p(\Phi_p X, \Phi_p Y) = \hat{g}_p(X, Y)$  (isometría) y simétrico respecto a  $g_p$  y a  $\hat{g}_p$  de aquí la unicidad de  $\Phi_p$ . Levantamos esta construcción para obtener una sección suave  $\Phi \in \Gamma(\text{End } TM)$  cuyo valor en  $p \in M$  es precisamente el  $\Phi_p$  construido antes.  $\square$

En relación al lema anterior, sea  $\nabla$  una conexión afín métrica respecto a la métrica Riemanniana  $g$ . Definimos la conexión  $\hat{\nabla}$  en el haz tangente como sigue:

$$\hat{\nabla}_X Y := \Phi^{-1} \nabla_X(\Phi Y) \stackrel{!}{=} \nabla_X Y + \Phi^{-1}(\nabla_X^{\text{End } TM} \Phi) Y. \quad (6.1)$$

Notemos que  $\hat{\nabla}$  es una conexión métrica con respecto a  $\hat{g}$ , dado que cumple que:

$$\begin{aligned} X \hat{g}(Y, Z) &= X g(\Phi Y, \Phi Z) = g(\nabla_X(\Phi Y), \Phi Z) + g(\Phi Y, \nabla_X(\Phi Z)) \\ &= \hat{g}(\Phi^{-1} \nabla_X(\Phi Y), Z) + \hat{g}(Y, \Phi^{-1} \nabla_X(\Phi Z)) \\ &= \hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, Z) + \hat{g}(Y, \hat{\nabla}_X Z). \end{aligned}$$

Tomemos una base local ortonormal  $\{E_1, \dots, E_m\}$  de  $TM$  para la métrica  $g$ , es fácil ver que la base local  $\{\Phi^{-1}E_1, \dots, \Phi^{-1}E_m\}$  de  $TM$  es de hecho ortonormal para la métrica  $\hat{g}$ . Por construcción todos los valores propios de  $\Phi^{-1}$  son positivos, por lo que:

$$\text{vol}_{\hat{g}}^o(\Phi^{-1}E_1, \dots, \Phi^{-1}E_m) = \text{vol}_g^o(E_1, \dots, E_m).$$

De esta identidad sigue la igualdad en las integrales de Berezin:

$$[\Phi^{-1}E_1 \wedge \dots \wedge \Phi^{-1}E_m]_{\hat{g}} = [E_1 \wedge \dots \wedge E_m]_g \quad (6.2)$$

Por la definición (6.1) de la conexión  $\hat{\nabla}$ , el tensor de curvatura de ésta es de la forma

$$R_{X,Y}^{\hat{\nabla}} Z = \Phi^{-1} R_{X,Y}^{\nabla}(\Phi Z),$$

por lo que mediante la identificación  $\Lambda^2 TM \cong \mathfrak{so}(TM)$  podemos expresar a  $R_{X,Y}^{\hat{\nabla}}$  como:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}^{\hat{\nabla}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m \Phi^{-1} E_\mu \wedge R_{X,Y}^{\hat{\nabla}} \Phi^{-1} E_\mu \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m \Phi^{-1} E_\mu \wedge \Phi^{-1} R_{X,Y}^{\nabla} E_\mu = (\Lambda^2 \Phi^{-1})(R_{X,Y}^{\nabla}) \end{aligned}$$

en donde  $\Lambda^2 \Phi^{-1} \in \text{End } \Lambda^2 TM$ , de esto y de (6.2) se sigue la siguiente igualdad de  $m$ -formas con valores en el haz de orientaciones:

$$[R^{\tilde{\nabla}} \wedge \cdots \wedge R^{\tilde{\nabla}}]_{\hat{g}} = [R^{\nabla} \wedge \cdots \wedge R^{\nabla}]_g \quad (6.3)$$

La prueba que presentaremos en la siguiente sección del teorema de Chern–Gauß–Bonnet, muestra que la única propiedad realmente importante que utilizamos de la conexión de Levi–Civita es su metricidad, veamos entonces que de hecho el teorema se puede enunciar para cualquier otra conexión afín métrica con respecto a la misma métrica Riemanniana.

**Teorema 6.2 (Forma de transgresión)**

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana. Dadas dos conexiones afines métricas  $\nabla$  y  $\tilde{\nabla}$  con respecto a  $g$  existe una  $(m-1)$ -forma  $\omega \in \Gamma(\Lambda^{m-1} T^*M \otimes \text{Or } TM)$ , tal que:

$$[R^{\tilde{\nabla}} \wedge \cdots \wedge R^{\tilde{\nabla}}]_g - [R^{\nabla} \wedge \cdots \wedge R^{\nabla}]_g = d^{\nabla^{\text{Or } TM}} \omega .$$

**Demostración:** Consideremos la 1-forma con valores en los bivectores

$$A := \tilde{\nabla} - \nabla \in \Gamma(T^*M \otimes \mathfrak{so}(TM)) \cong \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^2 TM)$$

notemos que si  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  son campos vectoriales se tiene:

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) \\ &= X g(Y, Z) - g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) - X g(Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= -g(Y, \tilde{\nabla}_X Z - \nabla_X Z) \end{aligned}$$

es decir  $A_X = (\tilde{\nabla}_X - \nabla_X) \in \Gamma(\mathfrak{so}(TM))$ . Puesto que el conjunto de conexiones en  $TM$  es un espacio afín modelado por el espacio vectorial  $\Gamma(T^*M \otimes \text{End } TM)$ , definamos una familia suave de conexiones, para  $t \in [0, 1]$ :

$$\nabla^t := \nabla + tA$$

observemos que si  $t = 0$  entonces  $\nabla^0 = \nabla$  y si  $t = 1$ ,  $\nabla^1 = \tilde{\nabla}$ .

El tensor de curvatura  $R^{\nabla^t}$  para la conexión  $\nabla^t$  esta dado por:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}^{\nabla^t} Z &= \nabla_X^t \nabla_Y^t Z - \nabla_Y^t \nabla_X^t Z - \nabla_{[X,Y]}^t Z \\ &= R_{X,Y}^{\nabla} Z + t \left( \nabla_X(A_Y Z) - A_Y(\nabla_X Z) - \nabla_Y(A_X Z) + A_X(\nabla_Y Z) - A_{[X,Y]} Z \right) \\ &\quad + t^2 [A_X, A_Y] Z \\ &= R_{X,Y}^{\nabla} Z + t \left( \nabla_X^{\text{End } TM}(A_Y) - \nabla_Y^{\text{End } TM}(A_X) - A_{[X,Y]} \right) Z + t^2 [A_X, A_Y] Z . \end{aligned}$$

Usando que el isomorfismo entre  $\Lambda^2 TM$  y  $\mathfrak{so}(TM)$  es paralelo obtenemos entonces

$$R^{\nabla^t} = R^{\nabla} + t d^{\nabla^{\text{End } TM}} A + \frac{t^2}{2} [A \wedge A] = R^{\nabla} + t d^{\nabla^{\Lambda^2 TM}} A + \frac{t^2}{2} [A \wedge A]$$

y de aquí concluimos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \underbrace{R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t}}_{n \text{ veces}} \right] &= \left[ \frac{d}{dt} (R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t}) \right] \\
&= n \left[ \frac{d}{dt} R^{\nabla^t} \wedge R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t} \right] \\
&= n \left[ d^{\nabla^{\Lambda^2 TM}} A \wedge R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t} \right] \\
&= \left[ d^{\nabla^{\Lambda^m TM}} (A \wedge R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t}) \right] \\
&= d^{\nabla^{\text{Or} TM}} \left[ A \wedge R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t} \right].
\end{aligned}$$

Ahora por el teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned}
\left[ R^{\hat{\nabla}} \wedge \dots \wedge R^{\hat{\nabla}} \right]_g - \left[ R^{\nabla} \wedge \dots \wedge R^{\nabla} \right]_g &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[ R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t} \right] dt \\
&= d^{\nabla^{\text{Or} TM}} \int_0^1 \left[ A \wedge R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t} \right] dt.
\end{aligned}$$

Definimos entonces:

$$\omega = \int_0^1 \left[ A \wedge R^{\nabla^t} \wedge \dots \wedge R^{\nabla^t} \right] dt.$$

□

### Definición 6.3 (Forma de transgresión)

La  $(m-1)$ -forma  $\omega \in \Gamma(\Lambda^{m-1} T^*M \otimes \text{Or} TM)$  en el teorema anterior es llamada forma de transgresión.

En particular, si  $g$  y  $\hat{g}$  son métricas Riemannianas en  $M$  y  $\nabla, \hat{\nabla}$  sus respectivas conexiones de Levi–Civita entonces existe  $\omega \in \Gamma(\Lambda^{m-1} T^*M \otimes \text{Or} TM)$  con

$$\text{Pf}(R_g) - \text{Pf}(R_{\hat{g}}) = d^{\nabla^{\text{Or} TM}} \omega. \quad (6.4)$$

**Corolario 6.4** La clase de cohomología de la Pfaffiana es independiente de la métrica Riemanniana  $g$  sobre la variedad  $M$ .

Integrando (6.4) sobre toda la variedad  $M$  y aplicando el teorema de Stokes 5.12 obtenemos:

$$\int_M (\text{Pf}(R_g) - \text{Pf}(R_{\hat{g}})) = \int_M d^{\nabla^{\text{Or} TM}} \omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M} = 0.$$

En este momento me gustaría hacer un resumen de lo que se ha hecho en esta sección. En primera instancia hemos visto que para cualesquiera dos métricas  $g$  y  $\hat{g}$ , dada una conexión

afín  $\nabla$  métrica con respecto de  $g$  podemos construir una conexión afín  $\hat{\nabla}$  métrica respecto a  $\hat{g}$  con la propiedad que:

$$[R^{\hat{\nabla}} \wedge \dots \wedge R^{\hat{\nabla}}]_{\hat{g}} = [R^{\nabla} \wedge \dots \wedge R^{\nabla}]_g.$$

Después de esto probamos que dadas dos conexiones métricas con respecto a la misma métrica  $g$  existía una forma diferencial con valores en el haz de orientaciones tal que

$$[R^{\hat{\nabla}} \wedge \dots \wedge R^{\hat{\nabla}}]_g - [R^{\nabla} \wedge \dots \wedge R^{\nabla}]_g = d^{\nabla \text{Or } TM} \omega.$$

Finalmente tomamos la conexión de Levi–Civita para ambas métricas y llegamos a la igualdad:

$$\int_M \text{Pf}(R_g) = \int_M \text{Pf}(R_{\hat{g}}).$$

## 6.2. Demostración del Teorema de Chern–Gauß–Bonnet

### Teorema 6.5 (De Chern–Gauß–Bonnet)

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta y sin frontera de dimensión par  $m = 2n$ , sea  $R$  el tensor de curvatura de su conexión  $\nabla$  de Levi–Civita. Entonces la característica de Euler de la variedad  $M$  puede calcularse mediante la integral de la Pfaffiana de  $R$  sobre  $M$ , esto es:

$$\chi(M) = \int_M \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right)$$

**Demostración:** Sea  $X \in \Gamma(TM)$  un campo vectorial sobre  $M$  con conjunto de ceros  $\Sigma$  discreto. Como antes, remplazamos este campo vectorial por su normalización en  $M \setminus \Sigma$  sin cambiar la notación obteniendo así un campo vectorial  $X$  de norma 1 en  $M \setminus \Sigma$ , es decir, que  $|X_p|_{g_p} = 1$  para todo  $p \in M \setminus \Sigma$ .

De acuerdo al lema 5.20, existe un abierto  $U \subset M$  con  $\Sigma \subset U$  y  $\hat{g}$  métrica Riemanniana tales que  $\hat{g}|_U$  es plana y coincide con  $g$  fuera de  $U$ . Abusando de la notación, seguiremos denotando como  $g$  a esta métrica dada por el lema.

Para cada  $p \in \Sigma$ , sea  $W_p \subset T_p M$  vecindad abierta de  $\vec{0}$  en donde la aplicación  $\exp_p$  es una isometría y es tal que  $V_p := \exp(W_p) \subset U$ , nótese que podemos suponer que  $V_p \cap V_q = \emptyset$  si  $p \neq q \in \Sigma$ . Elijamos  $\varepsilon_p > 0$  para el cual  $\overline{B_{\varepsilon_p}(\vec{0})} \subset W_p$ , puesto que  $\Sigma$  es un conjunto discreto y  $M$  es compacta, el conjunto  $\Sigma$  es de hecho un conjunto finito, así podemos tomar  $\varepsilon := \min \{ \varepsilon_p \mid p \in \Sigma \}$  y definir  $B_\varepsilon(p) := \exp(B_\varepsilon(\vec{0})) \subset V_p$ . Pongamos

$$B_\varepsilon(\Sigma) := \bigcup_{p \in \Sigma} B_\varepsilon(p) \subset U.$$

Definimos la variedad con frontera  $M_\varepsilon := M \setminus B_\varepsilon(\Sigma)$ . Ya que

$$\int_M \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{M_\varepsilon} \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right)$$

necesitamos saber el valor de la integral a la derecha de la igualdad.

De acuerdo con el corolario 5.18

$$\begin{aligned} & d^{\nabla^{\text{Or } TM}} \left( \underbrace{\Omega_0 - \frac{m-1}{1}\Omega_1 + \frac{(m-1)(m-3)}{1 \cdot 2}\Omega_2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\prod_{\mu=1}^n (2\mu-1)}{(n-1)!}\Omega_{n-1}}_{=\Omega} \right) \\ &= C \cdot \text{Pf}(R) = D \cdot \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

con  $D := -(2\pi)^n \prod_{\mu=1}^n (2\mu-1)$ , por lo que aplicando el teorema de Stokes 5.12 obtenemos:

$$\begin{aligned} D \cdot \int_{M_\varepsilon} \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) &= \int_{M_\varepsilon} d^{\nabla^{\text{Or}(TM)}} (\Omega) = \int_{S_\varepsilon(\Sigma)} \Omega|_{S_\varepsilon(\Sigma)} \\ &= \int_{S_\varepsilon(\Sigma)} \Omega_0|_{S_\varepsilon(\Sigma)} = \sum_{p \in \Sigma} \left( \int_{S_\varepsilon(p)} \Omega_0|_{S_\varepsilon(p)} \right) \\ &= \sum_{p \in \Sigma} \left( \int_{S_\varepsilon(p)} [X \wedge \nabla X \wedge \dots \wedge \nabla X]|_{S_\varepsilon(p)} \right) \end{aligned}$$

nótese la importancia de la condición que la métrica  $g$  es plana en  $S_\varepsilon(p) \subset U$  para pasar del primer al segundo renglón de igualdades. Se sigue del corolario 5.22 la identidad

$$D \cdot \int_{M_\varepsilon} \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) = -\frac{2(m-1)!\pi^n}{(n-1)!} \sum_{p \in \Sigma} \text{index}_p X,$$

pero

$$D = -(2\pi)^n \prod_{\mu=1}^n (2\mu-1) = -\frac{2(m-1)!\pi^n}{(n-1)!},$$

de esto y de acuerdo al teorema de Poincaré–Hopf 4.16 hemos llegado a que:

$$\int_{M_\varepsilon} \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) = \sum_{p \in \Sigma} \text{index}_p X = \chi(M)$$

Finalmente como

$$\int_M \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{M_\varepsilon} \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) = \chi(M)$$

el teorema está demostrado.  $\square$

# Capítulo 7

## Relación con el núcleo de calor

Para finalizar con este trabajo de tesis nos proponemos presentar una relación entre el teorema de Chern–Gauß–Bonnet y la teoría de operadores diferenciales, en particular se verá la relación que hay entre la Pfaffiana y la integral de la supertraza de ciertos endomorfismos llamados coeficientes de calor los cuales aparecen en la expansión asintótica del núcleo de calor para el operador integral  $e^{-t\Delta}$ , en donde  $\Delta = \Delta_{\text{Hodge}}$  es el operador de Hodge–Laplace.

En general, los resultados presentados en este capítulo se pretenden estudiar en un futuro posgrado, por lo que se advierte que varios de ellos se enunciarán sin dar su demostración, de manera muy particular el teorema de Minakshisundaram–Pleijel y el teorema local del índice.

### 7.1. Operador de Laplace estándar

Como veremos, el operador de Hodge–Laplace  $\Delta_{\text{Hodge}}$  es una realización de un operador diferencial definido en haces vectoriales los cuales presentan una estructura adicional.

#### Definición 7.1 (Haz vectorial geométrico)

Un haz vectorial geométrico sobre una variedad Riemanniana  $(M, g)$  es una terna de la forma  $(VM, \nabla^{VM}, \star)$ , en donde  $VM$  es un haz vectorial sobre  $M$  junto con una conexión  $\nabla^{VM}$  y una representación de  $\mathfrak{so}(TM)$

$$\star : \mathfrak{so}(TM) \times_M VM \longrightarrow VM$$

tales que:

- 1)  $\star$  satisface la Regla de Leibniz; para todo  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $A \in \mathfrak{so}(TM)$  y  $v \in \Gamma(VM)$ :

$$\nabla_X^{VM}(A \star v) = \nabla_X^{\text{End } TM} A \star v + A \star \nabla_X^{VM} v$$

- 2) El tensor de curvatura  $R$  de la conexión de Levi–Civita sobre  $M$  contiene toda la información acerca del tensor de curvatura  $R^{\nabla^{VM}}$  de la conexión  $\nabla^{VM}$ , esto es, para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y \in \Gamma(TM)$  se cumple:  $R_{X,Y}^{\nabla^{VM}} = R_{X,Y} \star$ .

La propiedad que realmente caracteriza los haces vectoriales geométricos es precisamente la relación entre la curvatura de su conexión y la curvatura de su conexión de Levi–Civita. Para mayor profundidad en el concepto ver [SW].

**Definición 7.2 (Homomorfismo de haces geométricos)**

Un homomorfismo de haces vectoriales geométricos sobre la variedad  $M$  es un morfismo de haces vectoriales  $\Phi : VM \longrightarrow WM$  el cual es paralelo y equivariante, esto es:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : VM & \xrightarrow{\quad} & WM \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & & M \end{array} \quad .$$

- $\nabla_X^{WM} (\Phi v) = \Phi (\nabla_X^{VM} v) \quad \forall X \in \Gamma(TM), \forall v \in \Gamma(VM).$
- $\Phi(A \star v) = A \star \Phi v \quad \forall v \in \Gamma(VM), \forall A \in \mathfrak{so}(TM).$

La siguiente definición presenta al llamado operador de Laplace estándar.

**Definición 7.3 (Operador de Laplace estándar)**

Para  $(VM, \nabla^{VM}, \star)$  haz vectorial geométrico definimos el operador de Laplace estándar como el operador diferencial  $\Delta : \Gamma(VM) \longrightarrow \Gamma(VM)$  dado por:

$$\Delta v := \nabla^{VM\star} \nabla^{VM} v + 2q(R)v$$

en donde

$$\nabla^{VM\star} \nabla^{VM} v := - \sum_{\mu=1}^m \left( \nabla_{E_\mu}^{VM} \nabla_{E_\mu}^{VM} v - \nabla_{\nabla_{E_\mu} E_\mu}^{VM} v \right)$$

es es Laplaciano de Beltrami para  $VM$  y

$$q(R)v := \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu) \star R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{VM}} v = \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu) \star R_{E_\mu, E_\nu} \star v$$

es el término de curvatura estándar para una base local ortonormal  $\{E_1, \dots, E_m\}$  de  $\Gamma(TM)$ , la segunda igualdad es debida a la definición 7.1 (2).

Si  $\Phi : VM \longrightarrow WM$  es un homomorfismo de haces vectoriales geométricos entonces

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi v) &= \nabla^{WM\star} \nabla^{WM} \Phi v + 2q(R^{\nabla^{WM}}) \Phi v \\ &= - \sum_{\mu=1}^m \left( \nabla_{E_\mu}^{WM} \nabla_{E_\mu}^{WM} \Phi v - \nabla_{\nabla_{E_\mu} E_\mu}^{WM} \Phi v \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu) \star R_{E_\mu, E_\nu} \star \Phi v \\ &= - \sum_{\mu=1}^m \left( \Phi \left( \nabla_{E_\mu}^{VM} \nabla_{E_\mu}^{VM} v - \nabla_{\nabla_{E_\mu} E_\mu}^{VM} v \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m \Phi \left( (E_\mu \wedge E_\nu) \star R_{E_\mu, E_\nu} \star v \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi \left( - \sum_{\mu=1}^m \left( \nabla_{E_\mu}^{VM} \nabla_{E_\mu}^{VM} v - \nabla_{\nabla_{E_\mu}^{VM} E_\mu}^{VM} v \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu) \star R_{E_\mu, E_\nu} \star v \right) \\
&= \Phi(\Delta v)
\end{aligned}$$

por lo que  $\Delta$  conmuta con todo homomorfismo de haces geométricos.

Antes de presentar al operador de Hodge–Laplace presentaremos dos tipos de operadores diferenciales, a saber los operadores de tipo Laplace y los operadores de tipo Dirac, nótese que el operador de Laplace estándar es de hecho un operador de tipo Laplace.

**Definición 7.4 (Operador tipo Laplace)**

Un operador tipo Laplace en un haz vectorial  $VM$  es un operador diferencial de orden 2

$$\Delta : \Gamma(VM) \longrightarrow \Gamma(VM), \quad v \longmapsto \Delta v$$

tal que su símbolo principal es la multiplicación con la norma de un covector, esto es, para  $p \in M$ , y  $\xi = d_p f \in T_p^* M$  :

$$(\sigma_\Delta[\xi])_p v_p = \frac{1}{2} [[\Delta; f], f] v_p = -g_p^{-1}(\xi, \xi) v_p.$$

Una vez definidos los operadores de tipo Laplace, se definen los operadores de tipo Dirac.

**Definición 7.5 (Operador tipo Dirac)**

Un operador tipo Dirac es un operador diferencial  $D$  de orden 1 tal que  $D^2$  es un operador de tipo Laplace.

En lo que sigue  $\{E_1, \dots, E_m\}$  será una base local ortonormal de  $\Gamma(TM)$ . Para cada operador  $\Delta$  de tipo Laplace en  $VM$  existe una única conexión  $\nabla^{VM}$  y un único  $\mathbb{F} \in \Gamma(\text{End } VM)$  llamado el potencial de  $\Delta$ , tales que:

$$\Delta = \nabla^{VM*} \nabla^{VM} + \mathbb{F}$$

De manera similar, si  $D$  es un operador de tipo Dirac existe una única *multiplicación de Clifford*

$$\bullet : \Gamma(TM) \times \Gamma(VM) \longrightarrow \Gamma(VM), \quad (X, v) \longmapsto X \bullet v,$$

la cual es  $C^\infty(M)$ –bilineal y es tal que  $X \bullet (X \bullet v) = -g(X, X) v$  para todo  $X \in \Gamma(TM)$  y  $v \in \Gamma(VM)$ . Se sabe que existe una conexión  $\nabla^{\text{Cl}}$  en  $VM$  (no única) llamada *conexión de Clifford* que hace de  $\bullet$  una aplicación paralela, es decir:

$$\nabla_X^{\text{Cl}}(Y \bullet v) = (\nabla_X Y) \bullet v + Y \bullet (\nabla_X^{\text{Cl}} v),$$

Además existe un potencial  $\mathbb{F} \in \Gamma(\text{End } VM)$  tal que

$$Dv = \sum_{\mu=1}^m E_\mu \bullet \nabla_{E_\mu}^{\text{Cl}} v + \mathbb{F} v.$$

Un operador de Dirac torcido es un operador de tipo Dirac en el que  $\mathbb{F} = 0$  para alguna conexión de Clifford  $\nabla^{\text{Cl}}$  en  $VM$ . Como una posible referencia véase [BGV].

Ahora presentaremos al operador diferencial  $d^*$  el cual está definido en el espacio de secciones  $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$  y tiene propiedades similares al operador derivada exterior. Además se prueba que  $d^*$  es el operador formalmente adjunto a  $d$  en  $L^2(M, g)$ .

**Definición 7.6 (Codiferencial)**

El operador diferencial  $d^* : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$  el cual para cada  $\eta \in \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$  está dado por:

$$d^*\eta := -\sum_{\mu=0}^m dE_\mu^\sharp \lrcorner \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \eta$$

es llamado codiferencial

Calculemos los símbolos principales de los operadores diferenciales de orden 1  $d$  y  $d^*$ . Sean  $\omega \in \Gamma(\Lambda^{k-1} T^*M)$ ,  $\eta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$  y  $f \in C^\infty(M)$ :

$$\begin{aligned} [d; f]\omega &= d(f\omega) - f(d\omega) = df \wedge \omega \\ [d^*; f]\eta &= d^*(f\eta) - f(d^*\eta) = -\sum_{\mu=0}^m dE_\mu^\sharp \lrcorner \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} (f\eta) + f \sum_{\mu=0}^m dE_\mu^\sharp \lrcorner \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \eta \\ &= -\sum_{\mu=1}^m (E_\mu f) dE_\mu^\sharp \lrcorner \eta = -df^\sharp \lrcorner \eta \end{aligned}$$

de aquí que

$$\sigma_d(\xi) = \xi \wedge \quad \sigma_{d^*}(\xi) = -\xi^\sharp \lrcorner \quad (7.1)$$

Definamos  $D := d + d^*$ , veremos que  $D$  es un operador de Dirac torcido. Primero notemos que  $D^2$  es un operador de tipo Laplace

$$\begin{aligned} \sigma_{D^2}(\xi) &= \sigma_D(\xi) \cdot \sigma_D(\xi) = (\xi \wedge -\xi^\sharp \lrcorner)(\xi \wedge -\xi^\sharp \lrcorner) \\ &= -\xi \wedge \xi^\sharp \lrcorner - \xi^\sharp \lrcorner \xi \wedge \\ &\stackrel{\text{CAR}}{=} -g^{-1}(\xi, \xi) \text{id}_{\Lambda^k T^*M} \end{aligned}$$

aquí la última igualdad es consecuencia de las reglas canónicas de anticonmutación (CAR), así  $D$  es un operador tipo Dirac. Si  $\eta \in \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$  definimos la multiplicación de Clifford como:

$$X \bullet \eta := \sigma_D(X^\flat) \eta = X^\flat \wedge \eta - X \lrcorner \eta$$

Puesto que

$$D\eta = (d + d^*)\eta = \sum_{\mu=1}^m \left( dE_\mu \wedge \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \eta - dE_\mu^\sharp \lrcorner \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \eta \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^m dE_{\mu}^{\sharp} \bullet \nabla_{E_{\mu}}^{\Lambda^{\bullet} T^* M} \eta = \sum_{\mu=1}^m E_{\mu} \bullet \nabla_{E_{\mu}}^{\Lambda^{\bullet} T^* M} \eta \\
&= \sum_{\mu=1}^m (E_{\mu}^{\flat} \wedge -E_{\mu}^{\lrcorner}) \nabla_{E_{\mu}}^{\Lambda^{\bullet} T^* M} \eta
\end{aligned} \tag{7.2}$$

se sigue que el potencial  $\mathbb{F} = 0$ .

Para concluir, notemos que  $\nabla^{\Lambda^{\bullet} T^* M}$  satisface la regla de Leibniz con respecto a los operadores  $\wedge$  y  $\lrcorner$  por lo que  $\nabla^{\Lambda^{\bullet} T^* M}$  es una conexión de Clifford.

El operador de Dirac torcido  $D = d + d^*$  da lugar al operador de Hodge–Laplace.

### Definición 7.7 (Operador de Hodge–Laplace)

El operador  $\Delta_{\text{Hodge}} := D^2 = dd^* + d^*d$  es llamado el operador de Hodge–Laplace.

Cierta acción de  $\mathfrak{so}(TM)$  sobre el haz vectorial  $\Lambda^{\bullet} T^* M$  le da a éste la estructura de haz vectorial geométrico, además el operador de Hodge–Laplace es una realización del operador de Laplace estándar.

Consideremos la conexión  $\nabla^{\Lambda^{\bullet} T^* M}$  inducida por la conexión de Levi–Civita  $\nabla$  y la aplicación  $\star : \mathfrak{so}(TM) \times \Lambda^{\bullet} T^* M \rightarrow \Lambda^{\bullet} T^* M$  definida por:

$$(\mathfrak{X} \star \omega)(Z_1, \dots, Z_k) := - \sum_{\mu=1}^k \omega(Z_1, \dots, \mathfrak{X} Z_{\mu}, \dots, Z_k)$$

La terna  $(\Lambda^{\bullet} T^* M, \nabla^{\Lambda^{\bullet} T^* M}, \star)$  es de hecho un haz vectorial geométrico. Más aún, se prueba que  $\mathfrak{X}$  es una derivación sobre el haz vectorial  $\Lambda^{\bullet} T^* M$ .

### Teorema 7.8 (Fórmula de Weitzenböck)

El operador de Laplace estándar para el haz vectorial geométrico  $(\Lambda^{\bullet} T^* M, \nabla^{\Lambda^{\bullet} T^* M}, \star)$  coincide con el operador de Hodge–Laplace

$$\Delta = \Delta_{\text{Hodge}} .$$

El siguiente lema será de gran ayuda en la demostración de la fórmula de Weitzenböck.

**Lema 7.9** Si  $\Phi$  es una aplicación  $C^{\infty}(M)$ –bilineal en  $\Gamma(TM)$  entonces

$$\sum_{\mu=1}^m \Phi(\nabla_X E_{\mu}, E_{\mu}) = - \sum_{\mu=1}^m \Phi(E_{\mu}, \nabla_X E_{\mu})$$

para  $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  base local ortonormal de  $\Gamma(TM)$  y cualquier conexión métrica  $\nabla$  en  $TM$ .

**Demostración:** Sea  $X \in \Gamma(TM)$ , notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^m \Phi(\nabla_X E_\mu, E_\mu) &= \sum_{\mu=1}^m \Phi\left(\sum_{\nu=1}^m g(\nabla_X E_\mu, E_\nu) E_\nu, E_\mu\right) \\
&= \sum_{\mu, \nu=1}^m (Xg(E_\mu, E_\nu) - g(E_\mu, \nabla_X E_\nu)) \Phi(E_\nu, E_\mu) \\
&= -\sum_{\nu=1}^m \Phi\left(E_\nu, \sum_{\mu=1}^m g(E_\mu, \nabla_X E_\nu) E_\mu\right) \\
&= -\sum_{\nu=1}^m \Phi(E_\nu, \nabla_X E_\nu)
\end{aligned}$$

□

**Demostración:** (Del Teorema 7.8) Mediante la técnica de polarización tenemos que la multiplicación de Clifford  $\bullet$  en  $\Lambda^\bullet T^*M$  satisface la siguiente relación (llamada relación de Clifford):

Para  $X, Y \in \Gamma(TM)$  campos vectoriales se cumple lo siguiente:

$$X \bullet Y \bullet + Y \bullet X \bullet = -2g(X, Y) \text{id}_{\Lambda^\bullet T^*M}$$

Utilizando el lema anterior y esta última relación podemos calcular

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{Hodge}} &= (d + d^*)^2 \\
&= \sum_{\mu, \nu=1}^m \left( (E_\mu^\flat \wedge -E_{\mu\lrcorner}) \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right) \left( (E_\nu^\flat \wedge -E_{\nu\lrcorner}) \nabla_{E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right) \\
&= \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu^\flat \wedge -E_{\mu\lrcorner}) (E_\nu^\flat \wedge -E_{\nu\lrcorner}) \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \nabla_{E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \\
&\quad + \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu^\flat \wedge -E_{\mu\lrcorner}) ((\nabla_{E_\mu} E_\nu)^\flat \wedge -(\nabla_{E_\mu} E_\nu)_{\lrcorner}) \nabla_{E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \\
&= \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu^\flat \wedge -E_{\mu\lrcorner}) (E_\nu^\flat \wedge -E_{\nu\lrcorner}) \left( \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \nabla_{E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} - \nabla_{\nabla_{E_\mu} E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right) \\
&= \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu^\flat \wedge -E_{\mu\lrcorner}) (E_\nu^\flat \wedge -E_{\nu\lrcorner}) \left( \nabla_{E_\mu, E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right)^2 \\
&= \sum_{\mu, \nu=1}^m E_\mu \bullet E_\nu \bullet \left( \nabla_{E_\mu, E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right)^2 \\
&= -\sum_{\mu=1}^m \left( \nabla_{E_\mu, E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m E_\mu \bullet E_\nu \bullet \left( \left( \nabla_{E_\mu, E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right)^2 - \left( \nabla_{E_\nu, E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el lema para la aplicación  $\Phi(X, Y) = (X^\flat \wedge -X_{\lrcorner}) \nabla_Y^{\Lambda^\bullet T^*M}$  y la definición

$$\left( \nabla_{E_\mu, E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \right)^2 := \nabla_{E_\mu}^{\Lambda^\bullet T^*M} \nabla_{E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M} - \nabla_{\nabla_{E_\mu} E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X,Y}^{\Lambda^\bullet T^*M})^2 - (\nabla_{Y,X}^{\Lambda^\bullet T^*M})^2 &= \nabla_X^{\Lambda^\bullet T^*M} \nabla_Y^{\Lambda^\bullet T^*M} - \nabla_{\nabla_X Y}^{\Lambda^\bullet T^*M} - \nabla_Y^{\Lambda^\bullet T^*M} \nabla_X^{\Lambda^\bullet T^*M} + \nabla_{\nabla_Y X}^{\Lambda^\bullet T^*M} \\
&= \nabla_X^{\Lambda^\bullet T^*M} \nabla_Y^{\Lambda^\bullet T^*M} - \nabla_Y^{\Lambda^\bullet T^*M} \nabla_X^{\Lambda^\bullet T^*M} - \nabla_{[X,Y]}^{\Lambda^\bullet T^*M} \\
&= R_{X,Y}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}}
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
D^2 &= (d + d^*)^2 = -\sum_{\mu=1}^m (\nabla_{E_\mu, E_\nu}^{\Lambda^\bullet T^*M})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m E_\mu \bullet E_\nu \bullet R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} \\
&= \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m E_\mu \bullet E_\nu \bullet R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}}.
\end{aligned}$$

Puesto que por definición,  $X \bullet := X^\flat \wedge -X \lrcorner$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{Hodge}} &= \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m E_\mu \bullet E_\nu \bullet R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} \\
&= \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu^\flat \wedge E_\nu^\flat \wedge -E_{\mu \lrcorner} E_\nu^\flat \wedge -E_\mu^\flat \wedge E_{\nu \lrcorner} + E_{\mu \lrcorner} E_{\nu \lrcorner}) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} \\
&= \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (-E_{\mu \lrcorner} E_\nu^\flat \wedge -E_\mu^\flat \wedge E_{\nu \lrcorner}) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu^\flat \wedge E_\nu^\flat \wedge) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_{\mu \lrcorner} E_{\nu \lrcorner}) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}}
\end{aligned}$$

nótese que los últimos dos términos son homogéneos de grado  $+2$  y  $-2$  respectivamente, ya que términos homogéneos no-ceros de distintos grados son linealmente independientes se sigue que

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu^\flat \wedge E_\nu^\flat \wedge) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} = 0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_{\mu \lrcorner} E_{\nu \lrcorner}) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}}$$

de esto,

$$\Delta_{\text{Hodge}} = \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (-E_{\mu \lrcorner} E_\nu^\flat \wedge -E_\mu^\flat \wedge E_{\nu \lrcorner}) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}}$$

Las reglas canónicas de anticonmutación (CAR) implican

$$-E_{\mu \lrcorner} E_\nu^\flat \wedge \stackrel{\text{CAR}}{=} E_\nu^\flat \wedge E_{\mu \lrcorner} - g(E_\mu, E_\nu) \text{id}_{\Lambda^\bullet T^*M}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Hodge}} &= \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\nu^\flat \wedge E_{\mu \lrcorner} - E_\mu^\flat \wedge E_{\nu \lrcorner}) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m g(E_\mu, E_\nu) R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}}}_{=0} \end{aligned}$$

utilizando en el último término que  $g$  es simétrico y  $R^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}}$  antisimétrico.

Finalmente, como  $(E_\mu \wedge E_\nu) \star = (E_\nu^\flat \wedge E_{\mu \lrcorner} - E_\mu^\flat \wedge E_{\nu \lrcorner}) \text{id}_{\Lambda^\bullet T^*M}$  concluimos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Hodge}} &= \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu) \star R_{E_\mu, E_\nu}^{\nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}} \\ &= \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} * \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M} + 2q(R) \end{aligned}$$

lo cual muestra que  $D^2 = \Delta_{\text{Hodge}}$  es el operador de Laplace estándar para el haz geométrico  $(\Lambda^\bullet T^*M, \nabla^{\Lambda^\bullet T^*M}, \star)$ .  $\square$

Más aún los operadores tipo Dirac torcidos más interesantes son aquellos que presentan una estructura adicional, a saber, una  $\mathbb{Z}_2$  graduación.

### Definición 7.10 (Operador de Dirac torcido $\mathbb{Z}_2$ -graduado)

Un operador de Dirac torcido  $\mathbb{Z}_2$ -graduado es una pareja  $(D, A)$  en donde  $D$  es un operador de Dirac torcido y  $A \in \Gamma(\text{End } VM)$  es una involución paralela con respecto a la conexión de Clifford distinguida en  $VM$ , esto es,  $A^2 = \text{id}_{VM}$ ,  $\nabla_X^{\text{Cl}}(Av) = A(\nabla_X^{\text{Cl}}v)$  y además se cumple la condición:

$$A(X \bullet v) = -X \bullet Av.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} A(Dv) &= A\left(\sum_{\mu=1}^m E_\mu \bullet \nabla_{E_\mu}^{\text{Cl}} v\right) = \sum_{\mu=1}^m A\left(E_\mu \bullet \nabla_{E_\mu}^{\text{Cl}} v\right) \\ &= -\sum_{\mu=1}^m E_\mu \bullet A\left(\nabla_{E_\mu}^{\text{Cl}} v\right) = -\sum_{\mu=1}^m E_\mu \bullet \nabla_{E_\mu}^{\text{Cl}}(Av) \\ &= -D(Av) \end{aligned}$$

es decir que  $D$  anticonmuta con  $A$ .

Ya hemos visto que  $D = d + d^*$  es un operador de tipo Dirac torcido, si  $M$  es una variedad suave la cual es tal que su dimensión es múltiplo de 4 hay dos involuciones paralelas que hacen un operador de Dirac  $\mathbb{Z}_2$ -graduado

$$(D, A^s) \neq (D, A^*)$$

en donde:

$A^s \omega := (-1)^N \omega$  con  $\omega \in \Gamma(\Lambda^N T^*M)$ , es decir  $A^s$  refleja la paridad del grado de la forma  $\omega$ .

$A^* \omega := * \omega$  es el operador de Hodge asociado a una orientación.

De hecho la pareja  $(D, A^s)$  es un operador de Dirac torcido  $\mathbb{Z}_2$ -graduado para cualquier variedad suave  $M$ .

En el caso en que  $M$  es compacta, se define el índice de este tipo de operadores como

$$\text{index}(D, A) = \dim(\ker^+ D) - \dim(\ker^- D),$$

De acuerdo con la teoría de Hodge

$$\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) = \underbrace{\text{im } d \oplus \ker \Delta_{\text{Hodge}}}_{\ker d} \oplus \text{im } d^*$$

es la suma directa  $L^2(M)$ -ortogonal.

**Lema 7.11**

$$\ker \Delta_{\text{Hodge}} = \ker d \cap \ker d^*$$

**Demostración:** Que  $\ker d \cap \ker d^* \subset \ker \Delta_{\text{Hodge}}$  es evidente, probemos pues la contención opuesta. Sea  $\omega \in \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \cap \ker \Delta_{\text{Hodge}}$  se tiene entonces que  $\Delta_{\text{Hodge}} \omega = 0$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Delta_{\text{Hodge}} \omega, \omega \rangle_{L^2(M)} = \langle dd^* \omega + d^* d \omega, \omega \rangle_{L^2(M)} \\ &= \langle dd^* \omega, \omega \rangle_{L^2(M)} + \langle d^* d \omega, \omega \rangle_{L^2(M)} \\ &= \langle d^* \omega, d^* \omega \rangle_{L^2(M)} + \langle d \omega, d \omega \rangle_{L^2(M)} \end{aligned}$$

de aquí que  $d \omega = 0$  y  $d^* \omega = 0$ , se sigue entonces  $\omega \in \ker d \cap \ker d^*$  y por ende  $\ker \Delta_{\text{Hodge}} \subset \ker d \cap \ker d^*$ .  $\square$

Por consecuencia, la teoría de Hodge implica la igualdad

$$H_{\text{DR}}(M, \mathbb{R}) = \ker d / \text{im } d = \ker \Delta_{\text{Hodge}}$$

Dado que  $\ker \Delta_{\text{Hodge}} = \ker d \cap \ker d^*$  entonces  $\ker D = \ker \Delta_{\text{Hodge}} = H_{\text{DR}}(M, \mathbb{R})$ , además puesto que  $A^s$  anticonmuta con  $D$  podemos descomponer a  $\ker D$  como:

$$\ker D = \ker D \cap \{A^s = +\text{id}_{\Lambda^\bullet T^*M}\} \oplus \ker D \cap \{A^s = -\text{id}_{\Lambda^\bullet T^*M}\}$$

**Corolario 7.12** Para  $M$  variedad diferenciable compacta se cumple que:

$$\text{index}(D, A^s) = \chi(M)$$

## 7.2. El núcleo de calor y su relación con Gauß–Bonnet

En este último apartado de la tesis mostraremos la relación prometida al inicio de este capítulo entre el teorema de Chern–Gauß–Bonnet y el índice de un operador de Dirac torcido  $\mathbb{Z}_2$ –graduado particular. Introduciremos primero a los operadores integrales y diremos qué es lo que entendemos por su supertraza.

### Definición 7.13 (Operador Integral)

Sea  $VM$  un haz vectorial sobre  $M$ . Una aplicación  $\mathbb{R}$ –lineal  $K : \Gamma(VM) \rightarrow \Gamma(VM)$  es llamado operador integral si existe una sección continua  $k \in \Gamma_{C^0(M)}(V^*M \boxtimes VM)$  llamado núcleo tal que para todo  $v \in \Gamma(VM)$  y  $p \in M$ :

$$(Kv)(p) = \int_M k(q, p) v(q) |\text{vol}_g(q)|$$

**Nota 7.14** Para ser un poco más explícitos:

$$V_p M \ni (Kv)(p) = \int_M \underbrace{k(q, p)}_{\in \text{Hom}(V_q M, V_p M)} v(q) |\text{vol}_g(q)|$$

### Definición 7.15 (Operador de Gauß–Bonnet)

El operador de Dirac torcido  $\mathbb{Z}_2$ –graduado  $(D, A^s) = (d + d^*, A^s)$  es llamado el operador de Gauß–Bonnet.

Para cada  $t > 0$ , consideremos el operador integral:

$$e^{-t\Delta_{\text{Hodge}}} : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \rightarrow \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$$

### Teorema 7.16 (Minakshisundaram–Pleijel)

Sea  $\Delta$  un operador de tipo Laplace en una variedad compacta  $M$ , entonces existe un núcleo integral para  $e^{-t\Delta}$  llamado el núcleo de calor

$$\begin{aligned} k^\Delta : \mathbb{R}^+ \times M \times M &\rightarrow \text{HOM}(VM, VM) \\ (t, p, q) &\mapsto k_t^\Delta(p, q) \end{aligned}$$

en donde  $\text{HOM}(VM, VM)$  es el haz vectorial sobre  $M \times M$  cuya fibra en un punto  $(p, q) \in M \times M$  es el espacio vectorial  $\text{HOM}_{(p,q)}(VM, VM) := \text{Hom}(V_p M, V_q M)$ ,  $k^\Delta$  cumple las siguientes propiedades:

- 1)  $k_t^\Delta \in \Gamma(\text{HOM}(VM, VM))$ .
- 2) Para toda sección  $v \in \Gamma(VM)$  se tiene que:

$$(K_t^\Delta v)(p) = \int_M k_t^\Delta(q, p) v(q) |\text{vol}_g(q)|$$

es solución de la ecuación de calor  $\frac{d}{dt}(K_t^\Delta v) = -\Delta(K_t^\Delta v)$ .

3)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} K_t^\Delta v = v$  en el sentido  $L^2$ .

Para simplificar la notación sustituiremos  $\Delta_{\text{Hodge}}$  por  $\Delta$ , así por el teorema anterior el operador integral  $e^{-t\Delta}$  tiene un núcleo de calor, además el operador  $e^{-t\Delta}$  es un operador de clase traza:

$$\text{Tr}(e^{-t\Delta}) = \int_M \text{tr}(k_t^\Delta(p, p)) |\text{vol}_g(p)|$$

### Definición 7.17 (Supertraza)

Sea  $K$  un operador integral, se define la supertraza de  $K$  por:

$$\begin{aligned} \text{Str}_{\Lambda T^*M}(K) &:= \text{Tr}(A^s \circ K) \\ &= \int_M \text{tr}(A_p^s \circ k(p, p)) |\text{vol}_g(p)| =: \int_M \text{str}_{\Lambda T^*M}(k(p, p)) |\text{vol}_g(p)| \end{aligned}$$

Como consecuencia del trabajo sobre los valores propios del Laplaciano en variedades Riemannianas por parte de los matemáticos Subbaramiah Minakshisundaram y Ake Pleijel se tiene una expansión asintótica para el núcleo de calor dada por:

$$k_t^\Delta(p, q) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^m} e^{-\frac{d(p,q)^2}{4t}} \sum_{r \geq 0} t^r a_r(p, q)$$

en donde  $d(p, q)^2$  es el cuadrado de la distancia geodésica entre los puntos  $p$  y  $q$  en la variedad  $M$ . Con tal expansión asintótica obtenemos una aproximación de la supertraza de  $k_t^\Delta(p, p)$ :

$$\text{str}_{\Lambda T^*M}(k_t^\Delta(p, p)) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^m} \sum_{r \geq 0} t^r \text{str}_{\Lambda T^*M}(a_r(p, p))$$

El siguiente lema, frecuentemente conocido como el Teorema Local del Índice relaciona los conceptos de este capítulo con el Teorema de Chern–Gauß–Bonnet, asumamos pues que  $\dim M = m$  es par.

### Teorema 7.18 ( Local del Índice )

Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión par  $m = 2n$  y sea  $(D, A)$  un operador de Dirac torcido  $\mathbb{Z}_2$ -graduado y formalmente autoadjunto, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\text{str}_{\Lambda T^*M}(a_r(p, p)) = 0$  para toda  $r < n$ .
- $\text{index}(D, A) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi})^m} \int_M \text{str}_{\Lambda T^*M}(a_n(p, p)) |\text{vol}_g(p)|$

- $\text{str}_{\Lambda T^*M}(a_n(p, p))$  está dada por:

$$\text{str}_{\Lambda T^*M}(a_n(p, p)) = \left[ \hat{A}(M) \wedge \text{ch}(VM : \$M) \right]_{\text{máx}}.$$

donde  $\hat{A}(M)$  es el género  $A$ -gorro de  $M$  y  $VM : \$M$  es un haz vectorial localmente definido el cual queda fuera los objetivos de este trabajo.

La prueba de este Teorema no se presentará en este trabajo, pues además de su complejidad este resultado es parte de una serie de objetivos que el autor pretende cumplir en un futuro posgrado.

De acuerdo a la definición del operador de Laplace estándar,  $\Delta = \nabla^{VM^*} \nabla^{VM} + 2q(R)$ , salvo para los espacios simétricos los términos  $\nabla^{VM^*} \nabla^{VM}$  y  $2q(R)$  no conmutan, sin embargo si asumimos que estos términos si conmutan tenemos una expresión para el operador  $e^{-t\Delta}$  como:

$$e^{-t\Delta} \approx e^{-t\nabla^{VM^*} \nabla^{VM}} e^{-2tq(R)}$$

Lo cual motiva el siguiente resultado:

### Teorema 7.19

$$\text{str}_{\Lambda T^*M} a_r(p, p) = \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{(-2q(R))^r}{r!} \right)_p \quad r = 1, \dots, n.$$

La demostración de este teorema se postergará para presentarse en una manera más general. De este resultado se sigue:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \text{index}(D, A^s) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi})^m} \int \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \left( \frac{(-2q(R))^n}{n!} \right) \right)_p |\text{vol}_g(p)| \\ &= \int_M \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right)_p |\text{vol}_g(p)| \end{aligned}$$

**Corolario 7.20** Para  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta y sin frontera de dimensión par  $m = 2n$ , la Pfaffiana de  $R$  puede calcularse puntualmente como:

$$\text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right)_p = \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right)_p |\text{vol}_g(p)| \quad \forall p \in M.$$

Veamos un ejemplo concreto en donde el corolario anterior se presenta explícitamente.

**Ejemplo 7.21** Consideremos la  $m$ -esfera de radio  $r$ ,  $S_r^m$ , con  $m = 2n$  y  $g$  la métrica en  $S_r^m$  heredada de  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Como consecuencia del Teorema Egregium de Gauß, el tensor de curvatura de la conexión de Levi-Civita en  $S_r^m$  está dada por:

$$R_{X,Y}Z = \frac{1}{r^2} (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \hat{=} -\frac{1}{r^2} (X \wedge Y)(Z)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} q(R) &= -\frac{1}{4r^2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu) \star (E_\mu \wedge E_\nu) \star \\ &= -\frac{1}{4r^2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\nu^\flat \wedge E_\mu \lrcorner - E_\mu^\flat \wedge E_\nu \lrcorner) (E_\nu^\flat \wedge E_\mu \lrcorner - E_\mu^\flat \wedge E_\nu \lrcorner) \\ &= -\frac{1}{2r^2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (\delta_{\mu=\nu} E_\nu^\flat \wedge E_\mu \lrcorner - E_\nu^\flat \wedge E_\nu \lrcorner + E_\nu^\flat \wedge E_\mu^\flat \wedge E_\mu \lrcorner E_\nu \lrcorner) \end{aligned}$$

como  $N = \sum_{\mu=1}^m E_\mu^\flat \wedge E_\mu \lrcorner$  (operador de números) tiene valor propio  $k$  en  $\Gamma(\Lambda^k T^*S_r^m)$ , se sigue entonces que  $q(R)$  actúa en  $\eta \in \Gamma(\Lambda^k T^*S_r^m)$  como:

$$q(R)\eta = -\frac{1}{2r^2} (N - mN + N(N-1))\eta = \frac{1}{2r^2} k(m-k)\eta$$

de aquí que

$$\text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{(-2q(R))^n}{n!} \right) = \frac{(-1)^n}{r^m n!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} k^n (m-k)^n$$

Notemos en particular que esta última expresión es independiente de  $p \in M$ .

Así, la integral  $\int_{S_r^m} \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right) |\text{vol}_g(p)|$  puede ser calculada utilizando (5.5) para el volumen de la esfera  $S_r^m$  como:

$$\begin{aligned} &\int_{S_r^m} \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right) |\text{vol}_g(p)| \\ &= \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right) \int_{S_r^m} |\text{vol}_g(p)| = \text{str}_{\Lambda T^*M} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right) \text{Vol}(S_r^m) \\ &= \left( \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n r^m n!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} k^n (m-k)^n \right) \left( \frac{2^{m+1} \pi^n n!}{m!} r^m \right) = 2 = \chi(S_r^m). \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la identidad  $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} k^n (m-k)^n = (-1)^n m!$ . □

Como último resultado de este trabajo hacemos notar que de hecho el corolario 7.20 es un enunciado puntual para todo tensor algebraico de curvatura  $R$ .

**Definición 7.22 (Tensor algebraico de curvatura)**

Sea  $(V, g)$  un espacio Euclidiano de dimensión par  $m = 2n$ . Un tensor algebraico de curvatura  $R$  en  $(V, g)$  es una aplicación trilineal  $R : V \times V \times V \rightarrow V$  la cual satisface las siguientes propiedades, para cualesquiera  $X, Y, Z \in V$ :

- 1)  $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$  (alternante en los primeros dos factores).
- 2) El endomorfismo  $Z \mapsto R_{X,Y}Z$  es antisimétrico con respecto a  $g$ .
- 3)  $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$  (Primera Identidad de Bianchi).

**Teorema 7.23** Consideremos  $(V, g, R)$  donde  $(V, g)$  es un espacio Euclidiano de dimensión par y  $R$  un tensor algebraico de curvatura en  $(V, g)$ , entonces es cierto que

$$\text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) = \text{str}_{\Lambda V^*} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right) |\text{vol}_g|$$

donde  $|\text{vol}_g| \in \Lambda^m V^* \otimes \text{Or } V$  es la densidad de volumen en  $V$ .

Para presentar la demostración de este teorema anterior nos apoyaremos en los siguientes 2 lemas. En lo que sigue  $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(V)$ .

**Lema 7.24** Para cualesquiera  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_r \in \mathfrak{g}$  con  $r < m$  se cumple que:

$$\text{str}_{\Lambda V^*}(\mathfrak{X}_1 \star \dots \star \mathfrak{X}_r) = 0.$$

**Demostración:** En efecto, puesto que  $\text{Sym}^{< m} \mathfrak{g} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathfrak{X}^r \mid 0 \leq r < m, \mathfrak{X} \in \mathfrak{g}\}$  el Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt implica que  $\mathcal{U}^{< m} \mathfrak{g} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathfrak{X}^r \mid 0 \leq r < m, \mathfrak{X} \in \mathfrak{g}\}$ , en donde  $\mathcal{U}^\bullet \mathfrak{g}$  es el álgebra envolvente universal de  $\mathfrak{g}$ , por lo que es suficiente verificar que para cualquier  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$  y todo  $0 \leq r < m$ :

$$\text{str}_{\Lambda V^*}((\mathfrak{X}^\star)^r) = 0.$$

Sea pues  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$ , como  $\mathfrak{X}^2 \in \text{End } V$  es un endomorfismo simétrico semidefinido negativo con respecto a  $g$ , existen vectores  $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n \in V$  tales que el conjunto  $\beta_n = \{p_1, q_1, \dots, p_n, q_n\}$  es una base ortonormal de  $V$  tal que

$$\mathfrak{X} = \alpha_1(p_1 \wedge q_1) + \dots + \alpha_n(p_n \wedge q_n) \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Analicemos en principio lo que pasa cuando  $n = 1$ , en este caso sea  $\beta_1 = \{p, q\}$  base ortonormal de  $V$  tal que  $\mathfrak{X} = \alpha(p \wedge q)$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ , así el conjunto  $\beta_1 = \{1, dp, dq, dp \wedge dq\}$  es base de  $\Lambda^\bullet V^*$  y  $\mathfrak{X}^\star$  actúa en esta base como sigue:

$$\blacksquare \mathfrak{X}^\star 1 = 0$$

- $\mathfrak{X} \star dp = \alpha dq$
- $\mathfrak{X} \star dq = -\alpha dp$
- $\mathfrak{X} \star dp \wedge dq = \alpha dq \wedge dq - \alpha dp \wedge dp = 0$ .

Notemos que en el último cálculo utilizamos el hecho de que  $\mathfrak{X} \star$  es una derivación, por lo tanto la matriz asociada al endomorfismo  $\mathfrak{X} \star$  de  $\Lambda^\bullet V^*$  en la base  $\tilde{\beta}_1$  es de la forma:

$$\mathfrak{X} \star = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \exp(t\mathfrak{X} \star) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t\alpha) & -\sin(t\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(t\alpha) & \cos(t\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Similarmente para el endomorfismo  $A^s = (-1)^N$  tenemos que su matriz asociada con respecto a la base  $\tilde{\beta}_1$  es de la forma:

$$A^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esto podemos calcular  $\text{str}_{\Lambda V^*}(\exp(t\mathfrak{X} \star))$  como:

$$\text{str}_{\Lambda V^*}(\exp(t\mathfrak{X} \star)) = \text{tr} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t\alpha) & -\sin(t\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(t\alpha) & \cos(t\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2 - 2 \cos(t\alpha).$$

En general para  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\beta_n$  base de  $V$  como antes y  $\beta_n^* = \{dp_1, dq_1, \dots, dp_n, dq_n\}$  su base dual, expresemos  $V^*$  de la siguiente manera:

$$V^* = \underbrace{\text{Span}_{\mathbb{R}}\{dp_1, dq_1\}}_{=: V_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{\text{Span}_{\mathbb{R}}\{dp_n, dq_n\}}_{=: V_n}$$

así, para cada  $1 \leq k \leq n$  se tiene que el subespacio  $\Lambda^k V^*$  de  $\Lambda^\bullet V^*$  se descompone como:

$$\Lambda^k V^* = \bigoplus_{\substack{0 \leq d_1, \dots, d_n \\ d_1 + \dots + d_n = k}} \Lambda^{d_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{d_n} V_n.$$

Recordemos nuevamente que  $\mathfrak{X} \star$  es una derivación del álgebra  $\Lambda^\bullet V^*$  por lo que si  $\eta_s \in \Lambda^\bullet V_s$  con  $s = 1, \dots, n$  se tiene que

$$\mathfrak{X} \star (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n) = \sum_{s=1}^n \eta_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{X} \star \eta_s \wedge \dots \wedge \eta_n$$

por lo que  $\mathfrak{X}^\star$  actúa en un producto de esta forma como:

$$\mathfrak{X}^\star = \sum_{s=1}^n \text{id}_{\Lambda^\bullet V_1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathfrak{X}^\star}_{s\text{-ésimo lugar}} \otimes \cdots \otimes \text{id}_{\Lambda^\bullet V_n}$$

puesto que los  $n$  sumandos de la suma anterior conmutan se sigue que

$$\begin{aligned} \exp(t\mathfrak{X}^\star) &= \prod_{s=1}^n \exp(\text{id}_{\Lambda^\bullet V_1} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^\star \otimes \cdots \otimes \text{id}_{\Lambda^\bullet V_n}) \\ &= \exp(t\mathfrak{X}^\star)_1 \otimes \exp(t\mathfrak{X}^\star)_2 \otimes \cdots \otimes \exp(t\mathfrak{X}^\star)_n \end{aligned}$$

en donde  $\exp(t\mathfrak{X}^\star)_s$  es la acción de  $\exp(t\mathfrak{X}^\star)$  en el  $s$ -ésimo factor.

Calculemos ahora la supertraza del endomorfismo  $\exp(t\mathfrak{X}^\star)$ :

$$\begin{aligned} \text{str}_{\Lambda V^\star}(\exp(t\mathfrak{X}^\star)) &= \text{tr}(A^s \circ (\exp(t\mathfrak{X}^\star)_1 \otimes \exp(t\mathfrak{X}^\star)_2 \otimes \cdots \otimes \exp(t\mathfrak{X}^\star)_n)) \\ &= \text{tr}(A^s \circ \exp(t\mathfrak{X}^\star)_1 \otimes A^s \circ \exp(t\mathfrak{X}^\star)_2 \otimes \cdots \otimes A^s \circ \exp(t\mathfrak{X}^\star)_n) \\ &= \prod_{s=1}^n \text{tr}(A^s \circ \exp(t\mathfrak{X}^\star)_s) = \prod_{s=1}^n (2 - 2 \cos(t\alpha_s)) \end{aligned}$$

de acuerdo con la expansión en series de potencias del coseno se sigue que

$$2 - 2 \cos(t\alpha_s) = t^2 \alpha_s^2 + O(t^4)$$

por lo que

$$\sum_{r \geq 0} \frac{t^r}{r!} \text{str}_{\Lambda V^\star}(\underbrace{\mathfrak{X}^\star \cdots \mathfrak{X}^\star}_{r\text{-veces}}) = \text{str}_{\Lambda V^\star}(\exp(t\mathfrak{X}^\star)) = t^m \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 + O(t^{m+2}) \quad (7.3)$$

comparando los coeficientes de las potencias de  $t$  podemos concluir que para  $r < m$ ,  $\text{str}_{\Lambda V^\star}(\underbrace{\mathfrak{X}^\star \cdots \mathfrak{X}^\star}_{r\text{-veces}}) = 0$ .  $\square$

**Lema 7.25** Para  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_m \in \mathfrak{g}$ , la siguiente identidad es cierta:

$$\begin{aligned} &\text{str}_{\Lambda V^\star}(\mathfrak{X}_1 \star \cdots \star \mathfrak{X}_m) \\ &= \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} [\mathfrak{X}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\sigma(n)}] \otimes [\mathfrak{X}_{\sigma(n+1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\sigma(m)}] \end{aligned} \quad (7.4)$$

**Demostración:** Para este propósito consideremos ambos lados de la igualdad como aplicaciones  $m$ -lineales en  $\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}$  y veamos que estas son aplicaciones simétricas.

Sean  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_m \in \mathfrak{g}$  y  $\tau \in S_m$ , puesto que  $\mathfrak{X}_1 \star \cdots \star \mathfrak{X}_m \stackrel{!}{=} (\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_m)^\star$  con  $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_m \in \mathcal{U}^{\leq m} \mathfrak{g}$  basta verificar la igualdad

$$\text{str}_{\Lambda V^\star}((\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_m)^\star) = \text{str}_{\Lambda V^\star}((\mathfrak{X}_{\tau(1)} \cdots \mathfrak{X}_{\tau(m)})^\star). \quad (7.5)$$

Afirmamos que  $\mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_m \equiv \mathfrak{X}_{\tau(1)} \cdots \mathfrak{X}_{\tau(m)} \pmod{\mathcal{U}^{\leq m} \mathfrak{g}}$ , en efecto, ya que toda permutación  $\tau \in S_m$  es el producto de adyacencias (transposiciones del tipo  $(\mu \mu + 1)$ ,  $\mu = 1, \dots, m - 1$ ) es suficiente verificar la afirmación para este tipo de permutaciones, supongamos entonces que  $\tau = (\mu \mu + 1)$  para algún  $1 \leq \mu < m$ . Consideremos la diferencia

$$\begin{aligned} & \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{\mu-1} \cdot \mathfrak{X}_\mu \cdot \mathfrak{X}_{\mu+1} \cdot \mathfrak{X}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{X}_m - \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{\mu+1} \cdot \mathfrak{X}_\mu \cdots \mathfrak{X}_m \\ &= \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{\mu-1} \cdot (\mathfrak{X}_\mu \cdot \mathfrak{X}_{\mu+1} - \mathfrak{X}_{\mu+1} \cdot \mathfrak{X}_\mu) \cdot \mathfrak{X}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{X}_m \\ &= \mathfrak{X}_1 \cdots \mathfrak{X}_{\mu-1} \cdot [\mathfrak{X}_\mu, \mathfrak{X}_{\mu+1}] \cdot \mathfrak{X}_{\mu+2} \cdots \mathfrak{X}_m \in \mathcal{U}^{\leq m-1} \mathfrak{g} \end{aligned}$$

lo que prueba la congruencia anterior. La igualdad (7.5) se sigue del Lema 7.24, por lo tanto  $\text{str}_{\Lambda V^*}$  es una aplicación  $m$ -lineal y simétrica en  $\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}$ .

Por otro lado, si  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_m \in \mathfrak{g}$  y  $\tau \in S_m$  pongamos  $\mathfrak{Y}_1 := \mathfrak{X}_{\tau(1)}, \dots, \mathfrak{Y}_m := \mathfrak{X}_{\tau(m)}$ , notemos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} [\mathfrak{Y}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{Y}_{\sigma(n)}] \otimes [\mathfrak{Y}_{\sigma(n+1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{Y}_{\sigma(m)}] \\ &= \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} [\mathfrak{X}_{\tau(\sigma(1))} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\tau(\sigma(n))}] \otimes [\mathfrak{X}_{\tau(\sigma(n+1))} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\tau(\sigma(m))}] \\ & \stackrel{\tilde{\sigma} := \tau \circ \sigma}{=} \sum_{[\tilde{\sigma}] \in S_m/S_n \times S_n} [\mathfrak{X}_{\tilde{\sigma}(1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\tilde{\sigma}(n)}] \otimes [\mathfrak{X}_{\tilde{\sigma}(n+1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\tilde{\sigma}(m)}] \end{aligned}$$

siguiéndose de esto la simetría de la aplicación  $\sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} [\cdot] \otimes [\cdot]$ .

Hemos visto que ambos lados de la igualdad (7.4) definen aplicaciones multilineales y simétricas, luego por la propiedad universal de  $\text{Sym}^m \mathfrak{g}$  ambas aplicaciones factorizan sobre la multiplicación simétrica, puesto que  $\text{Sym}^m \mathfrak{g} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathfrak{X}^m \mid \mathfrak{X} \in \mathfrak{g}\}$  basta con verificar la igualdad para  $\mathfrak{X}_1 = \cdots = \mathfrak{X}_m = \mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$ .

Sea  $\mathfrak{X} = \alpha_1(p_1 \wedge q_1) + \cdots + \alpha_n(p_n \wedge q_n)$ , calculemos primero  $\underbrace{[\mathfrak{X} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}]}_{n\text{-veces}}$ :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{X} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}] &= n! \cdot [\alpha_1 \cdots \alpha_n (p_1 \wedge q_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q_n)] \\ &= n! \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n [p_1 \wedge q_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q_n] \\ &= n! \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot \circ \end{aligned}$$

en donde  $\circ \in \text{Or } V$  es la orientación en  $V$  tal que para la base  $\beta_n = \{p_1, q_1, \dots, p_n, q_n\}$  cumple que  $\circ(\beta_n) = +1$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} [\mathfrak{X} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}] \otimes [\mathfrak{X} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}] \\ &= \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} n! \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot \circ \otimes n! \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot \circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} n!^2 \cdot \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 \cdot \circ \otimes \circ \\
&= \frac{m!}{n!^2} \cdot n!^2 \cdot \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 = m! \cdot \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Por otro lado, de acuerdo con (7.3) tenemos que

$$\text{str}_{\Lambda V^*}(\underbrace{\mathfrak{X} \star \cdots \star \mathfrak{X}}_{m\text{-veces}}) = m! \cdot \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 \tag{7.7}$$

comparando las expresiones (7.6) y (7.7) se sigue que la igualdad (7.4) es cierta.  $\square$

Vayamos ahora a la demostración del teorema 7.23.

**Demostración:** (Teorema 7.23) Dado que  $R$  es un tensor algebraico de curvatura se tiene que  $R \in \Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{so}(V)$ , así para  $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  base ortonormal de  $V$  podemos expresar  $R$  en la forma:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m dE_\mu \wedge dE_\nu \otimes R_{E_\mu, E_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu)^\flat \otimes R_{E_\mu, E_\nu} .$$

Recordemos que  $q(R)$  se presenta en la definición 7.3 como:

$$q(R) := \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_\mu \wedge E_\nu) \star R_{E_\mu, E_\nu} \star = \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu=1}^m (dE_\mu \wedge dE_\nu)^\sharp \star R_{E_\mu, E_\nu} \star .$$

Afirmamos que existe  $r \in \mathbb{N}$  y  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_r \in \mathfrak{so}(V) = \mathfrak{g}$  tales que  $R = \sum_{\rho=1}^r \pm_\rho \mathfrak{X}_\rho^\flat \otimes \mathfrak{X}_\rho$ .

En efecto, consideremos a  $R$  como un endomorfismo de  $\Lambda^2 V \cong \mathfrak{so}(V)$ , es decir, sea  $\mathcal{K}_R : \Lambda^2 V \rightarrow \Lambda^2 V$  dado por  $\mathcal{K}_R(X \wedge Y) := R_{X, Y}$  este endomorfismo es simétrico respecto al producto interior  $g_{\Lambda^2 V}$  en  $\Lambda^2 V$  inducido por  $g$ , puesto que los endomorfismos simétricos son diagonalizables existe una base propia ortonormal para  $\mathfrak{g}$ , digamos  $\{\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_{\binom{m}{2}}\} \subset \mathfrak{g}$  con valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\binom{m}{2}} \in \mathbb{R}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_r \neq 0$  para cierto  $1 \leq r \leq \binom{m}{2}$ , luego pongamos  $\mathfrak{X}_\rho := \sqrt{|\lambda_\rho|} \mathfrak{Y}_\rho$  para expresar  $R$  en su expansión estándar como endomorfismo simétrico en su base ortonormal de vectores propios

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{\rho=1}^r \lambda_\rho \mathfrak{Y}_\rho^\flat \otimes \mathfrak{Y}_\rho = \sum_{\rho=1}^r \text{sgn}(\lambda_\rho) \sqrt{|\lambda_\rho|} \mathfrak{Y}_\rho^\flat \otimes \sqrt{|\lambda_\rho|} \mathfrak{Y}_\rho \\
&= \sum_{\rho=1}^r \pm_\rho \mathfrak{X}_\rho^\flat \otimes \mathfrak{X}_\rho
\end{aligned}$$

de la relación entre  $R$  y  $q(R)$  se tiene que

$$q(R) = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^r \pm_{\rho} \mathfrak{X}_{\rho} \star \mathfrak{X}_{\rho}^{\star}$$

y en consecuencia resulta el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} & \text{str}_{\Lambda V^*} (q(R)^n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^r \pm_{\rho_1} \cdots \pm_{\rho_n} \text{str}_{\Lambda V^*} (\mathfrak{X}_{\rho_1} \star \mathfrak{X}_{\rho_1}^{\star} \star \cdots \star \mathfrak{X}_{\rho_n} \star \mathfrak{X}_{\rho_n}^{\star}) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^r \pm_{\rho_1} \cdots \pm_{\rho_n} \text{str}_{\Lambda V^*} (\mathfrak{Z}_1 \star \mathfrak{Z}_2 \star \cdots \star \mathfrak{Z}_{m-1} \star \mathfrak{Z}_m^{\star}) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^r \pm_{\rho_1} \cdots \pm_{\rho_n} [\mathfrak{Z}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{Z}_{\sigma(n)}] \otimes [\mathfrak{Z}_{\sigma(n+1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{Z}_{\sigma(m)}]. \end{aligned}$$

Veamos que la Primera Identidad de Bianchi nos asegura que  $\sum_{\rho=1}^r \pm_{\rho} \mathfrak{X}_{\rho} \wedge \mathfrak{X}_{\rho} = 0$ , de hecho puesto que

$$R = \sum_{\rho=1}^r \pm_{\rho} \mathfrak{X}_{\rho}^{\flat} \otimes \mathfrak{X}_{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m (E_{\mu} \wedge E_{\nu})^{\flat} \otimes R_{E_{\mu}, E_{\nu}}$$

es la expansión usual del tensor  $R$  en la base ortonormal  $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  y  $R_{E_{\mu}, E_{\nu}} \in \mathfrak{g}$  puede expresarse con respecto a esta base en la forma

$$R_{E_{\mu}, E_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^m E_{\lambda} \wedge R_{E_{\mu}, E_{\nu}} E_{\lambda}$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho=1}^r \pm_{\rho} \mathfrak{X}_{\rho} \wedge \mathfrak{X}_{\rho} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu, \lambda=1}^m (E_{\mu} \wedge E_{\nu}) \wedge (E_{\lambda} \wedge R_{E_{\mu}, E_{\nu}} E_{\lambda}) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{\mu, \nu, \lambda=1}^m (E_{\mu} \wedge E_{\nu} \wedge E_{\lambda}) \wedge (R_{E_{\mu}, E_{\nu}} E_{\lambda} + R_{E_{\nu}, E_{\lambda}} E_{\mu} + R_{E_{\lambda}, E_{\mu}} E_{\nu}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En donde hemos utilizado la Primera Identidad de Bianchi en la última igualdad. Además como los bivectores conmutan se sigue que las únicas permutaciones  $\sigma$  que contribuyen a la suma son aquellas que mandan 1 y 2 a diferentes lados del producto tensorial, 3 y 4

a diferentes lados del producto tensorial, ... ,  $m - 1$  y  $m$  a diferentes lados del producto tensorial, por lo tanto solo  $2^n$  permutaciones contribuyen en la suma anterior, además como  $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{X}_{\rho_1} = \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{X}_{\rho_2} = \mathfrak{Z}_4, \dots, \mathfrak{Z}_{m-1} = \mathfrak{X}_{\rho_n} = \mathfrak{Z}_m$  todas las componentes de la suma son iguales por lo que

$$\begin{aligned} & \text{str}_{\Lambda V^*} (q(R)^n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{[\sigma] \in S_m/S_n \times S_n} \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^r \pm_{\rho_1} \cdots \pm_{\rho_n} [\mathfrak{Z}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{Z}_{\sigma(n)}] \otimes [\mathfrak{Z}_{\sigma(n+1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{Z}_{\sigma(m)}] \\ &= \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^r \pm_{\rho_1} \cdots \pm_{\rho_n} [\mathfrak{X}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}] \otimes [\mathfrak{X}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Por otro lado

$$\underbrace{R \wedge \cdots \wedge R}_{n\text{-veces}} = \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^r \pm_{\rho_1} \cdots \pm_{\rho_n} \mathfrak{X}_{\rho_1}^b \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}^b \otimes \mathfrak{X}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}$$

aplicando la integral de Berezin a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\underbrace{[R \wedge \cdots \wedge R]}_{n\text{-veces}} = \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^r \pm_{\rho_1} \cdots \pm_{\rho_n} \mathfrak{X}_{\rho_1}^b \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}^b \otimes [\mathfrak{X}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}] \quad (7.9)$$

pero  $\mathfrak{X}_{\rho_1}^b \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}^b = \langle \text{vol}_g^o, \mathfrak{X}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n} \rangle \text{vol}_g^o = [\mathfrak{X}_{\rho_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{X}_{\rho_n}] \otimes |\text{vol}_g|$ , por lo que comparando (7.8) con (7.9) se tiene que:

$$\underbrace{[R \wedge \cdots \wedge R]}_{n\text{-veces}} = \text{str}_{\Lambda V^*} (q(R)^n) |\text{vol}_g|.$$

Finalmente, si multiplicamos ambos lados de la igualdad por  $\frac{(-2)^n}{n! \sqrt{4\pi}^m}$  llegamos a lo que queríamos probar, esto es:

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left( -\frac{R}{2\pi} \right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}^m} \text{str}_{\Lambda V^*} \left( \frac{(-2q(R))^n}{n!} \right) |\text{vol}_g| \\ &= \text{str}_{\Lambda V^*} \left( \frac{1}{n!} q \left( -\frac{R}{2\pi} \right)^n \right) |\text{vol}_g|. \end{aligned}$$

□

# Bibliografía

- [BGV] BERLINE, N. GETZLER, E. & VERGNE, M. : *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer-Verlag (2004).
- [C] CHERN, S. S. : *A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, *Ann of Math* 45, 747–752 (1978) .
- [D] DO CARMO, M. : *Riemannian Geometry: Theory & Applications*, Birkhäuser Basel (1992) .
- [F] FLANDERS, H. : *Development of an Extended Exterior Differential Calculus*, *Transactions of the American Mathematical Society* 75, 311–326 (1953).
- [FH] FULTON, W. & HARRIS, J. : *Representation Theory: A First Course*, Springer–Verlag (1991).
- [H] HATCHER, A. : *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)
- [KN] KOBAYASHI, S. & NOMIZU, K. : *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1*, John Wiley & Sons (1996).
- [M] MILNOR, J. : *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia (1965)
- [S] SPIVAK M. : *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*, Publish or Perish; Edición 3rd (1999).
- [SW] SEMMELMANN U. & WEINGART, G. : *The standard Laplace operator*, *Manuscripta math.* 158, 273–293 (2019).
- [WA] WALTER, R. : *Differentialgeometrie*, B·I·Wissenschaftsverlag (1978).
- [WE] WEINGART, G. : *A Characterization of the Heat Kernel Coefficients*, arXiv pre-publicación math.DG/0105144 (2001).