



**UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO  
FACULTAD DE  
CIENCIAS**

**PRESENTACIÓN DEL  
MAPEO HOJALDRE**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL  
TÍTULO DE  
LICENCIADO EN  
MATEMÁTICAS

presenta

**Leandro Marthelly Rivera  
Pérez**

director de tesis

Dr. Guillermo Javier Francisco  
Sierra Loera Departamento de  
Matemáticas, Facultad de Ciencias,  
UNAM



Ciudad Universitaria, CD. MX.,  
2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Hoja de datos del jurado

## 1. Datos del alumno.

Rivera  
Pérez  
Leandro Marthelly  
5546541092  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
412051337

## 2. Datos del Asesor.

Dr.  
Sienra  
Loera  
Guillermo Francisco Javier

## 3. Datos del sinodal 1

M. en C.  
Renato  
Lerliche  
Vázquez

## 4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Marco Antonio  
Montes de Oca  
Balderas

## 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
María Isabel  
Puga  
Espinosa

## 6. Datos del sinodal 4 M. en C.

Rodrigo

4

Robles

Montero

6. Datos del trabajo escrito Presentación del mapeo Hojaladre.  
Una extensión de la Herradura de Smale en  $\mathbb{R}^3$ .

74 p

2019

# AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a tantas personas que me apoyaron a lo largo de mi extenso proceso de licenciatura, pero son demasiadas para mencionarlas una por una, así que usaré categorías que reducirá la lista. Comenzando por mi familia, en especial a mi madre y abuelos maternos, por su apoyo desmedido para lograr esta meta. A mis amigos y amigas, los que me acompañaron desde Veracruz y me persuadieron a venir a estudiar a la capital lo que realmente me apasiona, y los más recientes que conocí aquí, gracias a ellos y ellas la continuidad y conclusión de mi carrera fue grato; el apoyo emocional que nos brindan las amistades muchas veces no es tomado en cuenta en la medida justa, siendo que es protagónico en casi cualquier logro. A mis profesores y profesoras que gracias a su labor (en mi opinión la más noble del mundo) pude aprender y conocer el mundo completamente nuevo e infinito que es la matemática pura. Por último a todo el personal de mi amadísima universidad y a los contribuyentes que la mantienen preparando a una juventud que nos mantiene salvos de la eterna caída hacia la corrupción que a toda población acecha.



# INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene como público objetivo a estudiantes que cursen los últimos semestres de la licenciatura en matemáticas, o cualquier persona que esté familiarizada con los conceptos básicos de sistemas dinámicos discretos. Se describirá la construcción de una función definida en una vecindad del cubo unitario en sí misma que nombré Hojaldre, seguido de una exhibición de algunas de sus características. Hojaldre porque fue justamente un bloque de masa imaginaria, para hacer pan de hojaldre, el modelo mental con el cual pude representar de una forma menos abstracta la dinámica observada, se trata de un "amasado"; además me resultó cómico. Es tan gráfico que puede ser explicada en pocas palabras y ser suficiente para imaginarla. Imagínese un cubo de masa por amasar para obtener un pan de hojaldre, la técnica usada es aplastar el cubo en una dirección ( $Z$ ) para después estirar y doblar en las otras dos ( $X$  y  $Y$ ), es decir, como cuando se dobla en cuatro un cobija, sólo que maleable; para que así la masa quepa dentro de un cubo como el inicial al cual se le puede aplicar el mismo procedimiento infinitas veces" (o hasta tener una consistencia agradable). Así construida, esta función presenta propiedades interesantes como caos, la generación de un continuo con cualidades notables y estabilidad estructural.

Esta dinámica podría entenderse como una extensión de la observada en el mapeo Herradura de Smale que se define en una vecindad del cuadrado unitario, o sea, en dimensión dos. Así fue como, siendo fiel al espíritu matemático, me pregunté por lo que pasaría en tres dimensiones. Por ello, antes de pasar directo con la presentación de esta función, mostraré una breve exposición de la función Herradura (para el lector familiarizado con esa función y sus características podría resultar innecesaria esta parte). Pero antes, en la primera parte, unos conceptos y resultados necesarios para una exhibición más completa de las propiedades de la función Hojaldre, este contenido serán nuestras herramientas topológicas para comprender lo más significativo de la dinámica global. Esto incluye lo necesario de teoría de continuos e hiperbolicidad para ver propiedades interesantes del conjunto límite generado (el

conjunto que resulta de intersecar todas las imágenes de las iteraciones de la función) por la función Hojaldre, así como para estudiar su dinámica local.

En la parte 2 se describe cualitativa y analíticamente la función Herradura. Se muestra un análisis básico de su dinámica topológica, así como su dinámica simbólica. Continúa con la exposición del conjunto límite y unas de sus principales propiedades. Y concluye con la muestra de unas de sus propiedades topológicas más interesantes, estabilidad estructural. Es en la última parte en que está el corazón de la tesis, allí se da la descripción cualitativa y analítica de la función Hojaldre. Seguido de básicamente los mismos análisis presentados para la Herradura pero ahora para el Hojaldre, es decir, una descripción básica de su dinámica simbólica asociada, así como propiedades de su dinámica topológica y termina con un breve análisis de su conjunto límite. En esta última subsección se verá lo que me resultó más interesante. Esta dinámica sirve para mostrar una prueba de que el conjunto  $K \times K$  (con  $K$  el continuo de Knaster) se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ . Y al final del trabajo hay un apéndice donde se puede consultar conceptos y resultados previos necesarios para que lo expuesto.

# Índice

<b>1. DINÁMICA TOPOLOGICA</b>	<b>11</b>
1.1. Atractores . . . . .	11
1.1.1. Continuos . . . . .	12
1.1.2. Límites inversos . . . . .	15
1.2. Teoría hiperbólica y puntos homoclinicos . . . . .	18
1.2.1. Variedades Estables e Inestables en Difeomorfismos . . . . .	18
1.2.2. Estabilidad estructural . . . . .	22
<b>2. HERRADURA DE SMALE</b>	<b>25</b>
2.1. Construcción . . . . .	25
2.2. Dinámica simbólica . . . . .	29
2.3. Análisis cualitativo de la Herradura . . . . .	31
2.3.1. Generación de un continuo indescomponible . . . . .	31
2.3.2. Densidad de la variedad inestable de $p$ . . . . .	33
2.3.3. Estabilidad estructural de la Herradura . . . . .	36
<b>3. FUNCIÓN HOJALDRE</b>	<b>39</b>
3.1. Construcción . . . . .	39
3.2. Dinámica simbólica del Hojaldre . . . . .	47
3.3. Análisis cualitativo del Hojaldre . . . . .	49
3.3.1. Generación de otro continuo indescomponible . . . . .	49
3.3.2. Densidad de la variedad inestable de $e_0$ . . . . .	53
3.3.3. Estabilidad estructural del Hojaldre . . . . .	56
<b>4. APÉNDICE A: PRELIMINARES</b>	<b>59</b>
4.1. Hiperbolicidad Lineal . . . . .	60
4.2. Ejemplos introductorios . . . . .	62
4.3. Tópicos de topología dinámica . . . . .	65
<b>Bibliografía</b>	<b>70</b>



# Capítulo 1

## DINÁMICA TOPOLÓGICA

### 1.1. Atractores

En un sistema dinámico interesa conocer los conjuntos invariantes (ver Apéndice A: Tópicos de topología dinámica) minimales. Partiendo del conjunto generado por la intersección de las imágenes del espacio. Así se define el **conjunto límite positivo** de la función  $f$  como sigue.

$$\Lambda^+(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n f^i(X)$$

Está claro que si  $f^n(X) \neq \emptyset$  para todo natural  $n$ , entonces el conjunto límite positivo  $\Lambda^+(f)$  no es vacío. Es invariante pues la imagen de cualquier punto en él está incluida en la intersección con la siguiente iteración. Para ver que es también atractor se define primero la **distancia de un punto a un conjunto**  $Y \subset X$  compacto en un espacio métrico  $X$  como:

$$d(x, Y) := \min\{d(x, y) | y \in Y\}$$

**Lema 1.** *Sea  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  una sucesión anidada de espacios métricos compactos, definiendo  $X := \bigcap_{i=1}^\infty X_i$ , y sea  $U$  un abierto tal que  $X \subset U \subset X_1$ , entonces existe un natural  $N$  tal que  $X_i \subset U$  para toda  $i \geq N$ . Además  $X$  es también un espacio métrico compacto.*

**Proposición .1.** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto y  $f : X \rightarrow X$  continua, entonces  $\Lambda^+(f)$  es un conjunto invariante atractor.*

*Demostración.* Sea  $x \in X$  y  $\epsilon > 0$ , se define al conjunto abierto  $U := \bigcup_{y \in \Lambda^+(f)} B_\epsilon(y)$  que contiene a  $\Lambda^+(f)$ . Por el lema anterior se tiene que existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $i \geq N$  se cumple que  $f^i(X) \subset U$ , es decir

$$d(f^i(x), \Lambda^+(f)) < \epsilon$$

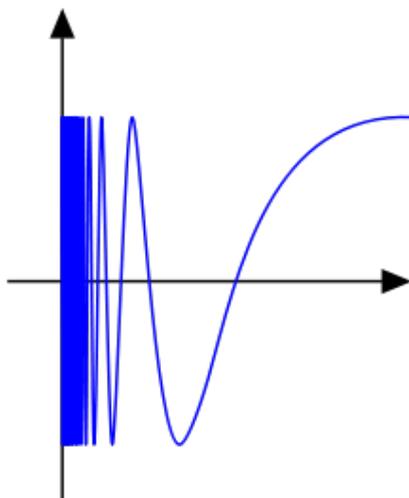


Figura 1.1: Curva Seno del topólogo

Es decir, la distancia de  $f^i(x)$  a  $\Lambda^+(f)$  tiende a cero, lo cual concluye la prueba.  $\square$

### 1.1.1. Continuos

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto y conexo. Y un subcontinuo es un subespacio de un continuo, que también es continuo. Unos ejemplos familiares son:

- i) Cualquier continuo que sea subconjunto de  $\mathbb{R}$  es un intervalo cerrado y acotado. A cualquier espacio homeomorfo a  $[0,1]$  es llamado **arco**.
- ii) La circunferencia  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ .
- iii) El disco  $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- iv) La curva conocida como *el seno del topólogo* subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $St := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \text{sen}(1/x), 0 < x \leq 1\}$  (ver figura 1.1).
- v) El espacio generado por el producto cartesiano de dos continuos, por ejemplo: el **Toro**  $:= \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , o el **Toro sólido**  $:= D^2 \times \mathbb{S}^1$ .
- vi) El **cubo de Hilbert**  $:= \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$  es otro ejemplo de continuo (Ver [8]).

Así como se pueden generar nuevos continuos más grandes, también se pueden obtener nuevos continuos más pequeños con la intersección de continuos como se muestra en el siguiente resultado.

**Proposición .2.** Si  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  es una sucesión anidada de continuos entonces la intersección  $X := \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$  es también un continuo.

*Demostración.* Con el lema 1 sólo basta probar que  $X$  es conexo. Suponiendo que no lo es, entonces hay un par de cerrados  $A, B$  de  $X$  no vacíos que particionan a  $X$ , y como  $A, B \subset X \subset X_i$  para toda  $i$ , y como  $X_i$  es un espacio métrico y por lo tanto normal, existen entornos disjuntos y abiertos  $U, V$  de  $A$  y  $B$  respectivamente. Sea  $W = U \cup V$ , por el lema 1 sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $j \geq N$  se cumple que  $X_j \subset W$ . Por lo tanto, si  $j \geq N$ , entonces

$$X_j = (X_j \cap U) \cup (X_j \cap V)$$

Y dado que  $X \subset X_j$  y  $A \neq \emptyset \neq B$  entonces  $X_j \cap U \neq \emptyset \neq X_j \cap V$ , lo cual implica que  $X_j$  no es conexo, contradiciendo la hipótesis de que es un continuo, con esto se concluye la prueba.  $\square$

Un continuo  $X$  se dice que es **descomponible** si ocurre que  $X$  puede ser escrito como la unión (no necesariamente disjunta) de dos subcontinuos propios, todos los ejemplos de continuos vistos hasta aquí lo son. Un continuo que no es descomponible se dice que es **indescomponible**, la indescomponibilidad es una propiedad topológica, como se ve en el siguiente resultado.

**Proposición .3.** Si  $X$  y  $Y$  son dos continuos homeomorfos y  $X$  es indescomponible, entonces  $Y$  es indescomponible.

*Demostración.* Suponiendo que  $Y$  es descomponible, sean  $Q$  y  $K$  dos subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = Q \cup K$  y sea  $h : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo, entonces, se tiene  $X = h^{-1}(Q) \cup h^{-1}(K)$  es una descomposición de  $X$  en subcontinuos, lo cual contradice la hipótesis.  $\square$

### Continuo de Knaster

Un ejemplo de continuo indescomponible es el continuo de Knaster (también llamado arcoiris de Knaster) que es una curva infinita pero acotada y encajada  $\mathbb{R}^2$  (ver fig.1.2), y tiene una relación con las funciones en las que se centra este trabajo. Una construcción topológica de esta curva parte de un conjunto de Cantor sobre el eje horizontal, cada punto en la mitad izquierda se une con su correspondiente especular de la otra mitad mediante media circunferencia que pasa por arriba. El mismo proceso se aplica en los puntos de la mitad derecha entre sí, estos arcos pasan por debajo, de modo que cada uno de esos puntos sea punto de unión entre dos semicircunferencias de ambas familias. Para los puntos de la mitad derecha se aplica un proceso similar de forma inductiva, a la mitad derecha de estos puntos se le aplica

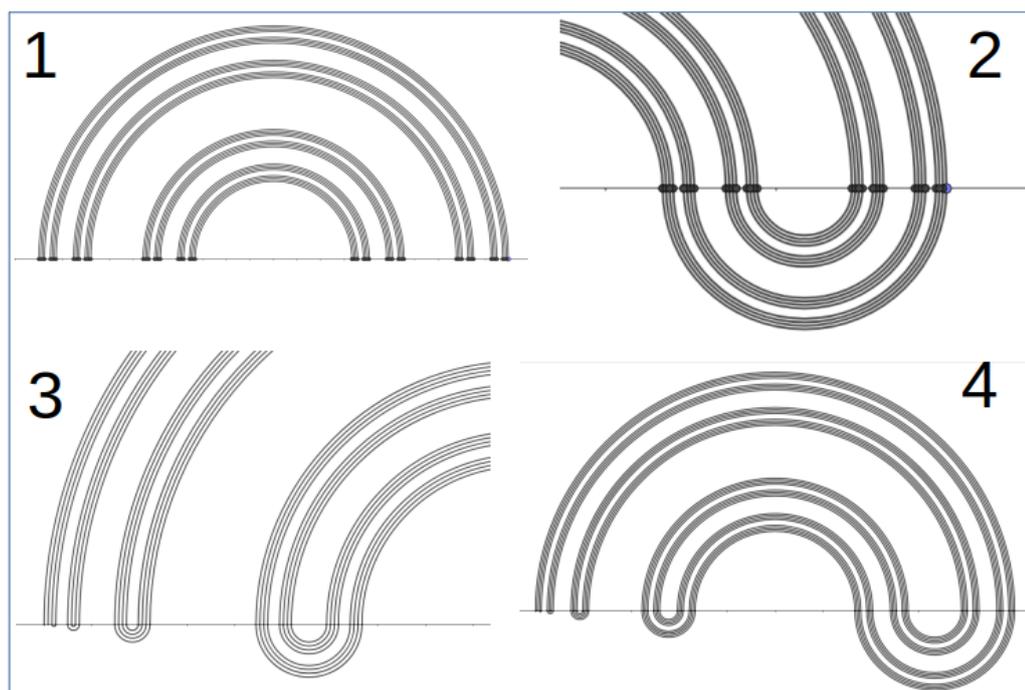


Figura 1.2: Construcción topológica de un continuo de Knaster. En 1 se muestra los arcos que unen por arriba y en simetría especular a los elementos de las mitades laterales de un conjunto de Cantor. En 2, los que hacen lo mismo pero sólo en la mitad derecha y por debajo. En 3 las uniones correspondientes a la mitad izquierda; esto es, en la mitad derecha de esa mitad izquierda se repite el proceso que se aplicó en el cuadro anterior, luego esto repite con la mitad derecha del restante y así recursivamente. Y en 4, el resultado.

lo que a la mitad derecha del conjunto de cantor inicial, los puntos restantes se dividen en dos mitades y se repite recursivamente. (Otra construcción se puede consultar en [5]).

Una forma intuitiva de ver es indescomponible es dividirlo en dos, siempre que la división sea transversal se obtienen una infinidad de componentes conexas. Y si la división se hace de forma tangente sería el caso de separar un arco del resto, pero cada segmento de arco forma parte de los puntos de acumulación del total, por lo que perdería compacidad.

### 1.1.2. Límites inversos

Este es un tema importante en Sistemas Dinámicos, particularmente en el estudio de atractores ya que son una gran herramienta para tener una clara y comprensible idea sobre la estructura de cierto tipo de atractores y la dinámica en algunos atractores en  $\mathbb{R}^n$ . Cuando el límite inverso es un continuo indescomponible, por sus propiedades estos conjuntos resultan sumamente interesantes.

Los *límites inversos* son subconjuntos de espacios producto que se definen a partir de **sucesiones inversas**, que son sucesiones de pares formados por un espacio  $X_i$  y una función continua asociada (llamada función de ligadura) de modo que  $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  y se denota por  $\{X_i, f_i\}$ . Así, el **límite inverso** de una sucesión inversa, denotado por  $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$ , es el subespacio del espacio producto  $\prod_{i=1}^{\infty} X_i := \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in X_i \text{ para toda } i > 0\}$  definido por:

$$X_{\infty} := \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid f_i(x_{i+1}) = x_i \forall i \geq 0\}$$

El siguiente resultado muestra como los límites inversos son también intersecciones numerables anidadas (su prueba se puede consultar en [5]). Con este resultado será más fácil ver la prueba del que le sigue.

**Proposición .4.** *Sea  $\{X_i, f_i\}$  una sucesión inversa, para cada  $n \geq 0$  se define al sublímite inverso:*

$$Q_n(X_i, f_i) := \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid f_i(x_{i+1}) = x_i \forall i \geq 0\}$$

*Entonces se cumplen:*

- i)  $Q_{n+1}(X_i, f_i) \subset Q_n(X_i, f_i)$  para todo  $n \geq 0$
- ii)  $Q_n(X_i, f_i) \cong \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$  para todo  $n \geq 0$
- iii)  $X_{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$ .

**Proposición .5.** *Sea  $X$  un continuo y  $f : X \rightarrow X$  una función continua y sea  $\{X_i, f_i\}$  una sucesión inversa con  $X_i = X$  y  $f_i = f \forall i$ , entonces  $X_{\infty}$  es un continuo.*

*Demostración.* Por el resultado anterior se sabe que

$$X_{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$$

Así que, como  $Q_n(X_i, f_i)$  es homeomorfo a  $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ , que al ser un producto numerable de continuos también es un continuo; por lo que  $X_{\infty}$  resulta ser la intersección anidada de continuos, y por la proposición .2 se concluye que efectivamente  $X_{\infty}$  es un continuo.  $\square$

Este resultado muestra como, a partir de espacios continuos, se pueden generar otros continuos usando límites inversos. La siguiente proposición da condiciones suficientes para que el continuo resultante del límite inverso de continuos sea uno indescomponible. Para esto son necesarias las siguientes definiciones.

Una sucesión inversa  $\{X_i, f_i\}$  de continuos se dice que es una **sucesión inversa indescomponible** si siempre que  $A_{i+1}, B_{i+1}$  sean subcontinuos de  $X_{i+1}$  tales que  $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$ , entonces  $f_i(A_{i+1}) = X_i$  o bien  $f_i(B_{i+1}) = X_i$ .

Todo espacio producto  $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$  tiene asociada una familia de funciones suprayectivas  $\{p_i : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \rightarrow X_i\}$  conocidas como proyecciones y dadas por  $p_i((x_k)_{k=1}^{\infty}) = x_i$ . Si  $X_{\infty} \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$  es un límite inverso, se define la familia de proyecciones sobre dicho subespacio, denotada por  $\pi_i := p_i|_{X_{\infty}}$ . Estas funciones presentan las siguientes propiedades:

**Afirmación .1.** *Si  $\{\pi_i\}$  es la familia de funciones proyección del espacio producto  $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ , y  $\{f_i, X_i\}$  un sistema inverso, entonces se cumplen:*

- i)  $\pi_i = f_i \circ \pi_{i+1}$  y en general, si  $i > j$  entonces  $\pi_j = f_j \circ f_{j+1} \circ \dots \circ f_{i-1} \circ \pi_i$ .
- ii) Si  $f_i$  es suprayectiva para cada  $i \geq 1$ , entonces todas las proyecciones  $\pi_i$  también.
- iii) Una función  $f : X \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} X_i$  es continua si y sólo si  $\pi_i \circ f$  lo es para cada  $i \geq 1$ .

**Proposición .6.** *Sea  $A$  un subconjunto compacto de  $X_{\infty}$ , el límite inverso de  $\{X_i, f_i\}$ , entonces  $\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_i(A)}\}$  es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas y:*

$$A_{\infty} := \lim_{\leftarrow} \{\pi_i(A), f_i|_{\pi_i(A)}\}_{i=1}^{\infty} = \left[ \prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}$$

La prueba de este resultado puede consultarse en [7], con este resultado será más fácil probar el siguiente, la generación de continuos indescomponibles a partir de límites inversos.

**Proposición .7.** Si  $X_\infty$  es el límite inverso de  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  una sucesión inversa indescomponible, entonces  $X_\infty$  es un continuo indescomponible.

*Demostración.* Por la proposición .5 se tiene que  $X_\infty$  es un continuo, por lo que sólo falta ver que es indescomponible. Sean  $A, B$  dos subcontinuos de  $X_\infty$  tales que  $A \cup B = X_\infty$ , por la definición de sucesión inversa indescomponible se tiene que  $f_i$  es suprayectiva y por la afirmación .1 se tiene que la proyección  $\pi_i$  es suprayectiva sobre  $X_i$ , así que

$$\pi_{i+1}(X_\infty) = \pi_{i+1}(A) \cup \pi_{i+1}(B) = X_{i+1}$$

y dada la continuidad de  $\pi_i$  se tiene que  $\pi_{i+1}(A)$  y  $\pi_{i+1}(B)$  son subcontinuos de  $X_{i+1}$  cuya unión es todo  $X_{i+1}$ ; así que por la definición de sucesión inversa indescomponible  $f_i(\pi_i(A)) = X_i$  o bien  $f_i(\pi_i(B)) = X_i$ , por otro lado,  $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$  para cada  $i$ , así que  $\pi_i(A) = X_i$  o bien  $\pi_i(B) = X_i$  para cada  $i$ . Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que  $\pi_i(A) = X_i$  para una infinidad de índices; así para cada  $q \in \mathbb{N}$  existe un  $k > q$  tal que  $\pi_k(A) = X_k$  y dado que, también por la afirmación .1, cada  $\pi_i$  es suprayectiva y

$$\pi_q(A) = f_q \circ f_{q+1} \circ \cdots \circ f_{k-1} \circ \pi_k(A)$$

es decir,  $\pi_q(A) = X_q$  por lo tanto se deduce que  $\pi_i(A) = X_i$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ , por lo que  $X_\infty \subset \prod_{i=1}^\infty \pi_i(A)$ . Al aplicar el resultado anterior, se concluye que  $A = \prod_{i=1}^\infty \pi_i(A) = X_\infty$ .  $\square$

Para finalizar la sección se probará que un límite inverso  $X_\infty$  formado a partir de un homeomorfismo tiene las propiedades topológicas del espacio  $X$ .

**Proposición .8.** Si  $f : X \rightarrow X$  es un homeomorfismo, entonces  $X \cong \{X, f\}$ .

*Demostración.* Se mostrará que la función proyección  $\pi_i$  es un homeomorfismo, ya se tiene que es continua y suprayectiva así que sólo basta ver que es inyectiva. Sean  $x = (x_i)_{i=1}^\infty$  y  $y = (y_i)_{i=1}^\infty$  dos elementos distintos de  $\{X, f\}$ , y  $k$  un natural tal que  $x_k \neq y_k$ ; dada la inyectividad de  $f$  se tiene que, para toda  $n \leq k$

$$\pi_n(x) = f^{k-n}(x_k) \neq f^{k-n}(y_k) = \pi_n(y)$$

de la inyectividad de  $f$  también se tiene que si  $f(x_{k+n}) \neq f(y_{k+n})$ , entonces  $x_{k+n} \neq y_{k+n}$ , es decir,  $\pi_i(x) = x_i \neq y_i = \pi_i(y)$  para toda  $i$ .  $\square$

## 1.2. Teoría hiperbólica y puntos homoclínicos

### 1.2.1. Variedades Estables e Inestables en Difeomorfismos

El concepto de hiperbolicidad en transformaciones lineales sobre  $\mathbb{R}^n$  (Ver Apéndice A: Hiperbolicidad lineal) se extiende a difeomorfismos, pero dado que eso depende de la derivada, esta extensión es sólo local por lo que habrá que buscar hipótesis necesarias para asegurar una equivalencia topológica entre dinámicas locales del difeomorfismo y su derivada. Para ello se definen los siguientes conjuntos a partir de las nociones de  $\alpha$  y  $\omega$ -límite:

$$W_\epsilon^s(p) := \{x \in B_\epsilon(p) \mid \omega(x) = \{p\}\}$$

$$W_\epsilon^u(p) := \{x \in B_\epsilon(p) \mid \alpha(x) = \{p\}\}$$

A estos conjuntos les llamamos **conjunto local estable e inestable de tamaño  $\epsilon$  de  $p$**  respectivamente. Cuando  $p$  es un punto fijo se tiene que ambos conjuntos se intersectan al menos en  $p$ , más aún, cuando  $p$  es un atractor  $W_\epsilon^s(p) = B_\epsilon(p)$  y análogamente, cuando  $p$  es repulsor  $W_\epsilon^u(p) = B_\epsilon(p)$ . Estos conjuntos generalizan localmente a los subespacios estable e inestable,  $E^s$  y  $E^u$ , de las transformaciones lineales (Ver Apéndice A: Hiperbolicidad lineal). Ahora la generalización de puntos fijos hiperbólicos.

Si  $p \in X$  es un punto fijo del difeomorfismo  $f : X \rightarrow X$ , decimos que es hiperbólico si la derivada  $D_p f$  es una transformación lineal hiperbólica. Con esta definición se puede enunciar el teorema de Hartman-Grobman.

**Teorema .1.** (*H-G para tiempo discreto*). *Si el origen es un punto fijo hiperbólico del difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces existen vecindades abiertas del origen,  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  y un homeomorfismo  $H : U \rightarrow V$  tal que  $f \circ H(x) = H(Ax)$  para todo  $x \in U$  donde  $A = D_f(0)$ , es decir,  $h$  es una conjugación topológica entre los sistemas  $(f, U)$  y  $(D_p f, V)$ . Una demostración de este teorema se puede consultar en la fuente [6].*

**Observación .1.** *Si  $p$  es un punto fijo hiperbólico del difeomorfismo  $f$  se cumple que:*

- i) Si todos los módulos de los valores propios de  $D_p f$  son mayores que 1, entonces  $p$  es localmente repulsor de  $f$*
- ii) Si todos los módulos de los valores propios de  $D_p f$  son menores que 1, entonces  $p$  es localmente atractor de  $f$*

iii) Si  $p$  es un punto silla hiperbólico de  $D_p f$  entonces  $f$  es localmente conjugada a una silla hiperbólica en  $p$

Lo cual reduce las posibilidades de conjugación topológica con una transformación lineal sólo a localidades de puntos fijos hiperbólicos a atractores, repulsores y puntos silla, es decir, cuando los módulos de los valores propios de  $D_p f$  son todos mayores (o menores) que 1 o cuando no.

**Corolario .1.1.** Si  $f$ ,  $h$  y  $p$  son como en el teorema anterior, entonces existen  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tales que:

$$i) W_\delta^s(p) = h^{-1}(E^s \cap B_\epsilon(0))$$

$$ii) W_\delta^u(p) = h^{-1}(E^u \cap B_\epsilon(0))$$

con  $E^s$  y  $E^u$  los subespacios estable e inestable de  $D_p f$  respectivamente.

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(0) \subset h(U)$ . Como  $h$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que  $h(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(0)$ . Sea  $x \in W_\delta^s(p)$ , por un lado se tiene que  $x \in B_\delta(p)$  entonces  $h(x) \in B_\epsilon(0)$ ; por otro lado, como  $\omega(x) = \{p\}$  entonces  $(D_p f)^n(h(x)) \rightarrow 0$  por lo que  $h(x) \in E^s$ , es decir,  $x \in h^{-1}(E^s \cap B_\epsilon(0))$ . Ahora, sea  $x \in h^{-1}(E^s \cap B_\epsilon(0))$  entonces  $h^{-1}(x) \in U$  además  $\omega(x) = p$  y por un argumento de continuidad de  $h^{-1}$  también se tiene que  $h^{-1}(x) \in B_\delta(p)$  por lo tanto  $x \in W_\delta^s(p)$ . Esto prueba el primer inciso, el segundo es completamente análogo.  $\square$

Este resultado se puede generalizar a puntos periódicos hiperbólicos dado que son puntos fijos de las iteraciones correspondientes de la función, ya que  $(D_p f)^k = D_p f^k$ . Aquí es bueno notar que  $W_\epsilon^s(p)$  es invariante de  $f$  así como  $W_\epsilon^u(p)$  lo es de  $f^{-1}$  (esto usa el teorema de la función inversa). Con esto en mente se continúa con la definición de las **variedades estable e inestable globales** que servirán para estudiar las dinámicas globales de los sistemas y ya no sólo en vecindades de puntos fijos.

Se dice que dos puntos sean **asintóticos hacia adelante**. Si  $x, y \in X$  tales que  $f^n(x), f^n(y) \in X \forall n \in \mathbb{N}$  y son tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$

Análogamente se dice que dos puntos sean **asintóticos hacia atrás**. Si  $x, y \in X$  tales que  $f^{-n}(x), f^{-n}(y) \in X \forall n \in \mathbb{N}$  y son tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0$$

Sea  $X$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : X \rightarrow X$  un difeomorfismo. Sea  $p \in X$ , podemos distinguir entre el resto de puntos de  $X$  a aquellos cuyo  $\omega$ -límite es justamente  $\omega(p)$  y aquellos que tiene a  $\alpha(p)$  como  $\alpha$ -límite, estos conjuntos contienen los puntos que son asintóticos con  $p$  hacia delante y hacia atrás, respectivamente. El conjunto estable e inestable global de  $p$ , denotados por  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$  respectivamente. Ahora, cuando  $p$  es un punto fijo entonces  $\omega(p) = p$  y lo mismo pasa con  $\alpha(p)$ , por lo que para los puntos fijos las definiciones quedarían así

$$\begin{aligned} W^s(p) &:= \{x \in X \mid \omega(x) = \{p\}\} \\ W^u(p) &:= \{x \in X \mid \alpha(x) = \{p\}\} \end{aligned}$$

Es claro que si  $x \in X$  es tal que  $f^n(x) \rightarrow p$  entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) \in W_\epsilon^s(p)$ , por lo que las definiciones anteriores son equivalentes a:

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\epsilon^s(p)) \\ W^u(p) &= \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\epsilon^u(p)) \end{aligned}$$

El teorema de Hartman-Grobman tiene también implicaciones sobre las variedades estable e inestable globales, una de ellas es el teorema de las variedades estables, la prueba de este teorema se omite ya que no es tan relevante en este trabajo.

**Teorema .2.** *Si  $f : X \rightarrow X$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$  y  $p \in X$  un punto fijo hiperbólico con  $E^s \oplus E^u$  su descomposición en subespacios estable e inestable de  $D_p f$ . Entonces  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$  son subvariedades de clase  $C^r$  inmersas y tangente en  $p$  a  $E^s$  y  $E^u$  respectivamente.*

Ahora un resultado que exhibe una de las propiedades de  $W^u(p)$  que lo hacen relevante en la teoría, lo mismo vale para  $W^s(p)$ . Partiendo de un par de difeomorfismos clase  $C^r$ ,  $f : A \rightarrow A$  y  $g : B \rightarrow B$  biyectivos y continuos tales que sean conjugadas topológicas por  $h : A \rightarrow B$ , entonces se cumple la siguiente proposición.

**Proposición .9.** *Sea  $b \in B$  un punto fijo bajo  $g$  y  $W^u(b) \subset B$  la variedad inestable de  $g$  en  $b$ . Entonces  $W^u(b)$  es densa en  $B$  si y sólo si  $W^u(h^{-1}(b))$  es densa en  $A$ .*

*Demostración.* Sea  $V \subset A$  un abierto, por la continuidad de  $h$  se tiene que  $h(V) \subset B$  es también abierto y partiendo de que  $W^u(b)$  es un conjunto denso

en  $B$  se tiene que  $h(V) \cap W^u(b) \neq \emptyset$ , es decir,  $\exists y \in h(V) \cap W^u(b)$ . Basta probar que  $x := h^{-1}(y) \in V \cap W^u(h^{-1}(b))$  para concluir la densidad de  $W^u(h^{-1}(b))$ .

Es claro que  $x \in V$ , para ver que  $x \in W^u(h^{-1}(b))$  habrá que verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(h^{-1}(b))) = 0$$

Por la conjugación  $h$  se tiene que

$$f^{-n}(h^{-1}(y)) = h^{-1}(g^{-n}(y))$$

Por lo que

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(h^{-1}(b))) = d(h^{-1}(g^{-n}(y)), h^{-1}(g^{-n}(b)))$$

Y como se tiene que  $y \in W^u(b)$ , entonces  $d(g^{-n}(y), g^{-n}(b)) \rightarrow 0$ , y por la continuidad de  $h^{-1}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(h^{-1}(b))) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(h^{-1}(g^{-n}(y)), h^{-1}(g^{-n}(b))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(g^{-n}(y), g^{-n}(b)) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba.  $\square$

Según Poincaré en el modelo dinámico de los tres cuerpos existen puntos fijos cuyas variedades estables e inestables se cortan, estos puntos de intersección son los puntos homoclinicos cuya definición formal es, si  $f : X \rightarrow X$  es un difeomorfismo y  $p$  un punto fijo (periódico) hiperbólico, un punto  $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$  diferente de  $p$  se llama punto **homoclinico**. Se dice además que es transversal si la intersección  $W^s(p) \cap W^u(p)$  es transversal en  $x$ , es decir, las variedades estable e inestable tienen dimensiones complementarias y  $E^s(p) \oplus E^u(p) = T_p(X)$ , donde  $T_p(X)$  es el espacio tangente a  $X$  en  $p$ . La órbita de un punto homoclinico (transversal) es llamada órbita homoclinica (transversal). Cualquiera de estas órbitas tiende hacia el punto de equilibrio cuando el tiempo avanza y cuando retrocede, y las órbitas próximas a un punto homoclinico tienen un comportamiento muy complicado, pues vuelven a cortarse una y otra vez.

Asi como los puntos homoclinicos son conceptos en la conducta local de sistemas dinámicos, se tiene también otro concepto que resulta clave en la descripción de la dinámica global. Si  $f : X \rightarrow X$  es un difeomorfismo, un conjunto compacto e invariante  $\Lambda \subset X$  se dice que es **hiperbólico** si para cada  $x \in \Lambda$  existen subespacios  $E_x^s \subset T_x X$  y  $E_x^u \subset T_x X$  tales que se cumple:

- i)  $T_x X = E_x^s \oplus E_x^u$ .
- ii)  $D_x f(E_x^s) = E^s(f(x))$  y  $D_x f(E_x^u) = E^u(f(x))$
- iii) Existen constantes  $C > 0$  y  $0 < \lambda < 1$  tales que

$$\begin{aligned} \|D_x f^n(v)\| &\leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E_x^s \text{ y } n \geq 0 \\ \|D_x f^{-n}(v)\| &\leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E_x^u \text{ y } n \geq 0 \end{aligned}$$

A partir de esta definición se dan las que siguen, estas serán utilizadas en la siguiente subsección para ver un teorema de estabilidad de los sistemas. Si  $f : X \rightarrow X$  es un difeomorfismo, decimos que satisface el **Axioma A** si el conjunto de puntos no-errantes  $\Omega(f)$  es un conjunto hiperbólico y además  $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$ . Un difeomorfismo que satisface el Axioma A se dice que cumple la **condición de transversalidad** si para cualesquiera  $x, y \in \Omega(f)$  se tiene que  $W^s(x)$  y  $W^u(y)$  se intersectan transversalmente o su intersección es vacía.

### 1.2.2. Estabilidad estructural

En la teoría de sistemas dinámicos, un sistema es topológicamente estructuralmente estable si las propiedades topológicas del sistema dinámico permanecen iguales después de una perturbación pequeña de la transformación que define la dinámica, es decir, el comportamiento cualitativo de las trayectorias no es afectado por perturbaciones pequeñas del mapeo a iterar; por ejemplo, los puntos fijos, órbitas periódicas e hiperbolicidad. Ahora se definirá una distancia en el conjunto de funciones acotadas de  $X$  en sí mismo que induce la topología con la que se trabajará para estudiar las perturbaciones del sistema. Sean dos funciones  $f, g \in C^0(X)$ , la distancia  $C^0$  entre ellas, denotada por  $d_0(f, g)$  está dada por:

$$d_0(f, g) := \text{Sup}_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

En general, la distancia  $C^r$  denotada por  $d_r(f, g)$ , está dada por:

$$d_r(f, g) := \text{Sup}_{x \in X} (|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|)$$

Una función  $f \in Dif(X)$  se dice que es  $C^r$  **estructuralmente estable** en  $X$  si existe un abierto  $U$  de  $Dif(X)$  con la topología inducida por la métrica  $C^r$ , que contiene a  $f$  y es tal que, cualquier otro difeomorfismo  $g$  en  $U$  es topológicamente conjugado a  $f$ .

Un fenómeno conocido que sirve para introducir este tema es la duplicación de periodo en la función  $L(x) = 4x(1-x)$ , cuando se cambia el 4 por un parámetro  $\mu \geq 1$ , denotando por  $L_\mu$ . Cuando  $\mu = 1$  se tiene un sólo punto fijo, el 0, al incrementar  $\mu$  hasta 3, surge un nuevo punto fijo y el anterior se vuelve repulsor, además surge un punto de periodo 2. Al incrementar  $\mu$  hasta que en cierto valor  $\lambda_\infty < 4$  se tienen puntos de todos los periodos de la forma  $2^n$ , y sabemos que en  $\mu = 4$   $f_\mu$  presenta caos y tiene puntos de todos los periodos. En este proceso el sistema pasó por una cadena de pequeñas perturbaciones, se prueba que esta familia de funciones es  $C^2$ -estructuralmente estable cuando  $\mu$  se encuentra en ciertos intervalos, en particular  $(2 + \sqrt[3]{5}, \infty)$ .

En general no es sencillo saber si un sistema dinámico tiene la propiedad de estabilidad estructural, pero se tiene el siguiente teorema (obra de Stephen Smale, su prueba se puede consultar en [2]). Este resultado sirve como un criterio para determinar si un difeomorfismo es  $C^r$  estructuralmente estable.

**Teorema .3.** *Si  $f$  es un difeomorfismo  $C^1$  satisface el Axioma A y la condición de transversalidad si y sólo si es  $C^1$ -estructuralmente estable*



## Capítulo 2

# HERRADURA DE SMALE

Ahora se mostrará la construcción topológica de un difeomorfismo en el plano real, seguida de un breve análisis de propiedades cualitativas de su dinámica introducida por Stephen Smale en 1967 [9]. Éste ejemplo servirá de punto de partida para asimilar más fácilmente el mapeo que motiva este trabajo, pues es básicamente una forma de extenderlo topológica a una dimensión extra.

### 2.1. Construcción

El mapeo Herradura es un difeomorfismo  $H$  de  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo, de modo que, existe un disco  $D$  que contiene un cerrado  $M$  que contiene a su vez al cuadrado unitario  $R := I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ . Fuera de  $D$  el mapeo es igual a la identidad y dentro es tal que imagen de  $M$  bajo  $H$  es un cerrado con forma de herradura contenida en  $M$  de modo que interseca a  $R$  en dos componentes conexas. Además, existen dos vecindades  $A$  y  $B$  a la izquierda y derecha de  $R$ , respectivamente, tales que  $H$  restringida a  $A$  es una contracción, mientras que en  $B$  es una contracción seguida de una traslación y una rotación, de modo que  $H(B) \subset A$ . Definiendo así a  $M$  como la unión de  $A$ ,  $R$  y  $B$  como se muestra en la figura 2.1. En  $D \setminus M$ ,  $H$  se extiende con un difeomorfismo, por ejemplo una homotopía entre las curvas frontera de  $H(M)$  y  $D$ .

Como  $H^2(B) \subset H(A) \subset A$ , el teorema del punto fijo para contracciones (ver final del Apéndice A) asegura un punto fijo  $a \in A$  y es el  $\omega$ -límite de todo punto en  $A$ , y por lo tanto también lo es de todo punto en  $B$ . La dinámica en  $D \setminus M$  no se estudia en este trabajo pero queda definida por una extensión diferenciable. La dinámica en  $R$  es lo interesante y por simplicidad se estudia el caso de un mapeo Herradura que es afín en la preimagen de  $R$ , definiendo

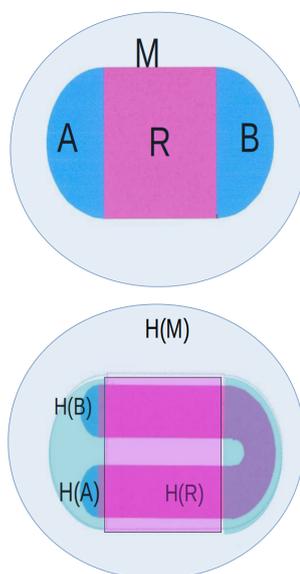


Figura 2.1: Imagen de las regiones  $R$  y  $M \setminus R$

los siguientes cerrados:

$$\begin{aligned}
 J_0 &:= [c, d] \times I \\
 J_1 &:= [a, b] \times I \\
 L_0 &:= I \times [a', b'] \\
 L_1 &:= I \times [c', d']
 \end{aligned}$$

tales que, como se muestra en la fig. 2.2, la aplicación cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 H(R) \cap R &= H(J_0) \cup H(J_1) \\
 H(J_0) &= L_0 \\
 H(J_1) &= L_1
 \end{aligned}$$

En la región  $R \setminus (J_0 \cup J_1)$  la función no es afín, pero da igual tener una definición analítica ya que su imagen es un subconjunto de  $A \cup B$ , por lo que sus imágenes bajo las iteraciones de  $H$  tienen como límite al punto fijo  $a$ . En  $J_0 \cup J_1$ ,  $H$  está definida por:

$$\begin{aligned}
 H|_{J_0}(x, y) &:= (\mu x - \gamma, y/\mu + \gamma) \\
 H|_{J_1}(x, y) &:= (1 - (\mu x - \gamma), 1 - (y/\mu + \gamma))
 \end{aligned}$$

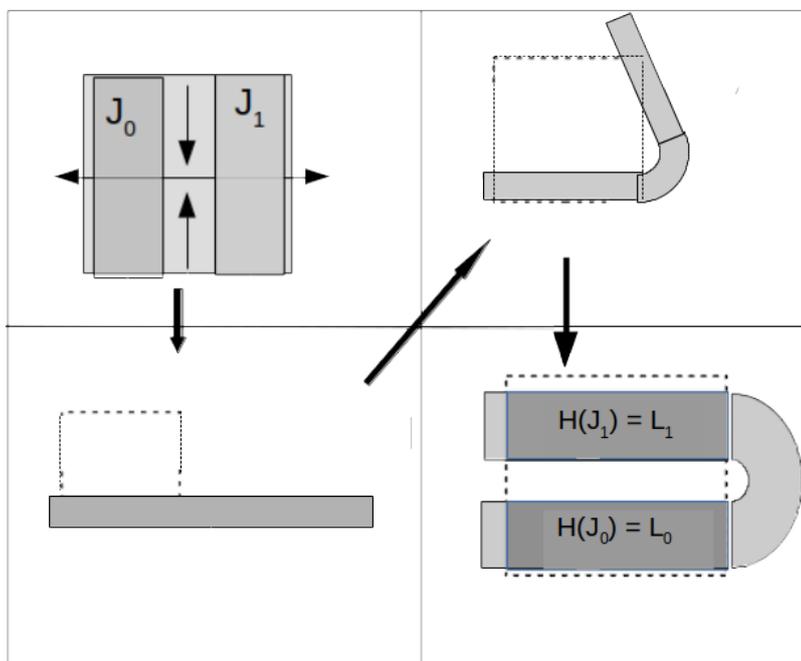


Figura 2.2: Evolución del mapeo de  $R$  bajo  $H$ .

Con  $\mu > 2$  y  $\gamma := \frac{1/2 - 1/\mu}{2}$ . Se observa que los segmentos de rectas verticales que están en  $J_0 \cup J_1$  son transformados a segmentos también verticales pero de longitud  $1/\mu$ , de modo que los costados de  $J_0$  se transforman en los costados de  $L_0$ . Por otro lado, los segmentos horizontales dentro de  $J_0$  y  $J_1$ , de longitud  $1/\mu$ , van a dar a segmentos horizontales de longitud 1, de modo que los costados horizontales de  $J_0$  se transforman en los de  $L_0$ .

Aplicando el teorema del punto fijo a la función correspondiente a la componente vertical de  $H$ , sobre el eje  $Y$ , se tiene que hay un segmento de recta horizontal en  $J_0$  que está contenida en su imagen, y por lo tanto, se trata de una expansión por lo que hay un  $y_{J_0}$  en ese segmento que es punto fijo. De la misma manera se prueba que hay una recta vertical, también en  $J_0$ , que contiene a su imagen, es una contracción, por lo que hay un  $x_{J_0}$  fijo bajo la componente horizontal de  $H$ . Estas rectas se intersecan en un punto  $p := (y_{j_0}, x_{j_0}) \in J_0 \cap L_0$ , y dada la invarianza de las rectas que lo definen, es un punto fijo. Lo mismo pasa con  $J_1$  por lo que hay otro punto  $q \in J_1 \cap L_1$  que también es fijo. A diferencia de  $a \in A$  estos no son atractores, sino puntos silla hiperbólicos.

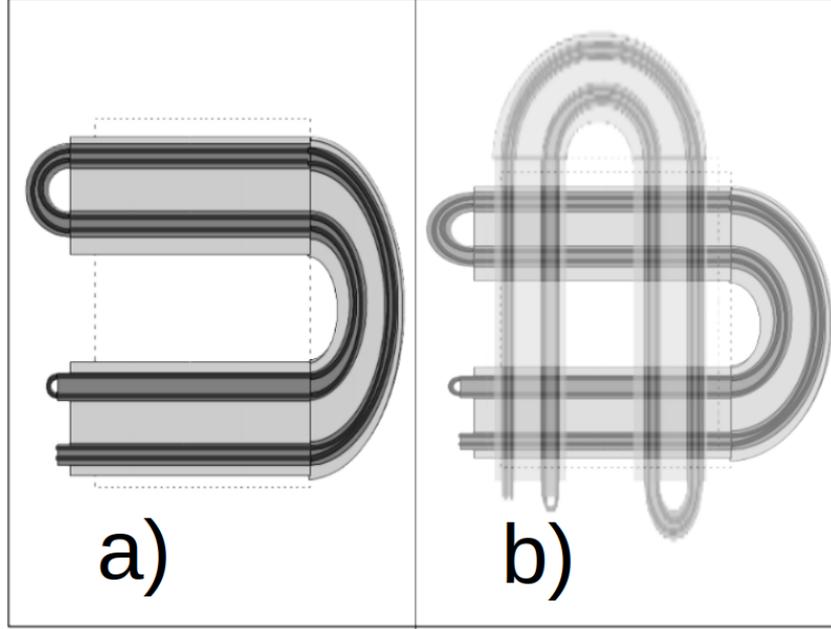


Figura 2.3: (a) Imagen de las tres primeras iteraciones de  $H$  y (b) su intersección con las tres primeras de  $H^{-1}$

Esto pasa en la primera aplicación de  $H$ , con  $H^2$  pasa que las franjas  $L_0$  y  $L_1$  van a dar a 4 franjas horizontales de ancho  $1/\mu^2$  así que en general se tiene que  $\cap_{i=0}^n H^i(R)$  serán  $2^n$  franjas horizontales de ancho  $(1/\mu)^n$ . Y en cada intersección  $H^n(J_i) \cap J_i$  con  $i \in \{0, 1\}$  y  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  pasa lo mismo que en  $n = 1$  que hay un par de segmentos transversales  $H^n$ -invariantes lo que asegura  $2^n$  puntos cuyo periodo es dividido por  $n$ . Es decir, se tienen puntos de periodo arbitrariamente grande.

La función inversa  $H^{-1}$  es aquella que cumple que  $H^{-1}(H(R)) = R$ , es decir, es aquella que transforma una región con forma de herradura a una cuadrada. No es difícil ver que  $H^{-1}(R)$  tiene como imagen a otra herradura pero rotada (ver figura 2.3). Así que, análogamente, se tiene un punto fijo atractor  $b \in D \setminus R$ , también  $\cap_{i=-n}^0 H^i(R)$  serán  $2^n$  franjas verticales del mismo ancho  $(1/\mu)^n$ , y  $\cap_{i=-n}^n H^i(I^2)$  serán  $4^n$  cuadrados de lado  $(1/\mu)^n$ . Llevando esto al límite se obtiene la información de las imágenes del resto de  $M$  bajo todas las iteraciones de  $H$ .

El conjunto  $\Lambda^+(H) = \cap_{i \geq 0} H^i(M)$  es un conjunto invariante, y por .1 un invariante atractor, y se prueba [1] que es homeomorfo a un *Arcoiris*

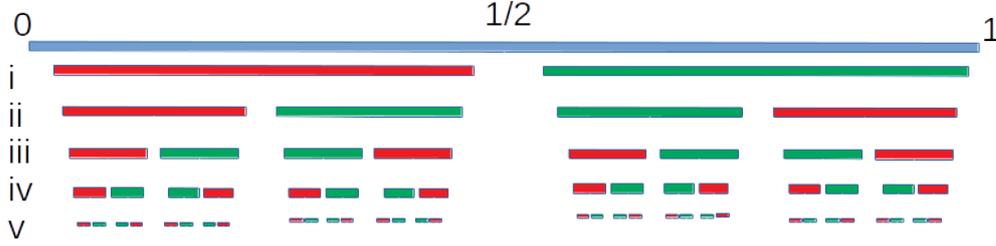


Figura 2.4: De arriba a abajo, los subintervalos de  $I$  que bajo  $H_1^k$  (la función componente de  $H$  correspondiente al subespacio  $X$ ) van a dar a  $J_0$ , de rojo, y  $J_1$  de verde, con  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

*de Knaster.* Lo mismo ocurre con  $\Lambda^-(M) = \bigcap_{i \leq 0} H^i(M)$  sólo que este es transversal a  $\Lambda^+(H)$ . Más aún,  $\Lambda^+(H) \cap R$  es topológicamente equivalente al conjunto  $I \times C$  (con  $C$  el conjunto de Cantor), por lo que la intersección  $\Lambda = \Lambda^+(H) \cap \Lambda^-(H)$  resulta ser homeomorfa a  $C \times C$ , un conjunto absolutamente invariante de la función Herradura (ver figura 9). Es claro que todos los puntos fuera de  $\Lambda$  en alguna iteración positiva de  $H$  terminan en la región  $A$ , mientras que algo análogo ocurre con las iteraciones negativas.

## 2.2. Dinámica simbólica

A continuación se muestra que las funciones *Corrimiento* (o *Shift*, ver Apéndice A) y Herradura son funciones topológicamente conjugadas.

**Proposición .10.** *La restricción de la función Herradura a su conjunto límite global  $H|_{\Lambda(H)}$  es conjugada topológica de la función Corrimiento en todo  $\Sigma_2$ .*

*Demostración.* Para ver este, bastará probar que la función  $\phi : \Lambda(H) \rightarrow \Sigma_2$  definida por:

$$\phi(x) := a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$\text{con } a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } H^i(x) \in J_0 \text{ y } i \geq 0 \\ 0 & \text{si } H^i(x) \in L_0 \text{ y } i \geq 0 \\ 1 & \text{si } H^i(x) \in J_1 \text{ y } i < 0 \\ 1 & \text{si } H^i(x) \in L_1 \text{ y } i < 0 \end{cases}$$

es un homeomorfismo tal que  $H = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$ .

Para la biyección se prueba que  $\phi$  es inyectiva y suprayectiva. Sean  $x$  y  $y$  dos puntos distintos de  $\Lambda(H)$ , se tiene que tanto  $H^i(x)$  como  $H^i(y)$  están en  $\Lambda(H)$  para todo entero  $i$ . Si  $i \leq 0$  se tiene que  $H^i(x)$  está en  $L_0$  o en  $L_1$ , y

para  $i \geq 0$ , en  $J_0$  o  $J_1$ ; lo mismo pasa con  $H^i(y)$ . Suponiendo que  $\phi(x) = \phi(y)$ , es decir, para toda  $i \geq 0$  la  $i$ -ésima aplicación de  $H$  sobre  $x$  resulta estar en la misma región  $J_i$  que la correspondiente  $i$ -ésima aplicación de  $H$  sobre  $y$ . Como  $H$  es expansiva horizontalmente con un factor  $\mu$  y cada región  $L_i$  tiene una anchura de 1, se tiene que para que  $H^i(x)$  y  $H^i(y)$  estén en la misma  $L_{XXXXX}$  es necesario que las coordenadas horizontales de  $x$  y  $y$  a lo más  $1/\mu^i$ . Lo análogo ocurre para  $i \leq 0$  y las regiones  $J_0$  y  $J_1$ , es decir, para que  $H^i(x)$  y  $H^i(y)$  estén en la misma  $J_{XXXXX}$  es necesario que las coordenadas verticales de  $x$  y  $y$  disten menos de  $1/\mu^{-i}$ . Por lo que la suposición implicaría que las coordenadas verticales y horizontales de  $x$  y  $y$  distan menos de  $1/\mu^{|i|}$  para toda  $i \in \mathbb{Z}$ , es decir,  $x = y$  lo cual contradice una hipótesis, por lo tanto,  $\phi(x) \neq \phi(y)$ , lo cual prueba la inyectividad.

Para probar la suprayectividad, sea  $a = a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, a_2, \dots) \in \Sigma_2$ , definiendo para  $i \geq 0$  a la preimagen de  $L_{a_i}$  bajo  $H^i$  como  $J^i$ . Por la continuidad de  $H$ ,  $J^i$  es un compacto para toda  $i \geq 0$ , por lo tanto la sucesión  $\{\mathring{\cap}_{i=0}^k J^i\}_{k=0}^\infty$  es una sucesión de cerrados anidados, y por lo tanto con la propiedad de la intersección finita; así que como  $M$  es compacto, la intersección  $\mathring{\cap}_{i=0}^\infty J^i$  es no vacía. Lo análogo ocurre para  $i \leq 0$  y las regiones  $L_i$ , asegurando que  $\mathring{\cap}_{i=-k}^0 L^i$  (definiendo a  $L^i$  de manera análoga a  $J^i$ ) no es vacío, por último, dado que estas familias de cerrados son transversales una con la otra, se tiene que existe un punto  $x$  de  $\Lambda(H)$  tal que está en  $\mathring{\cap}_{i=1}^\infty L_{a_{-i}}^{-i} \cap \mathring{\cap}_{i=1}^\infty J_{a_i}^i$ , es decir, existe  $x \in \Lambda(H)$  tal que  $\phi(x) = a$ , lo cual prueba la suprayectividad.

Ahora para ver la igualdad, sea  $x \in \Lambda(H) \implies x \in \Lambda^+(H) \cap \Lambda^{-1}(H) \implies \exists a \in \Sigma_2$  tal que  $\phi^{-1}(a) = x$  y si  $y = H(x) \implies y \in \Lambda^+(H) \cap \Lambda^{-1}(H) \implies \exists a' \in \Sigma_2$  tal que  $\phi^{-1}(a') = y$  así, si  $a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, a_2, \dots) \implies \sigma(a) = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, \bullet a_1, a_2, \dots)$  por otra parte,  $a' = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, \bullet a_1, a_2, \dots) = \sigma(a)$  por lo que

$$H(x) = y = \phi^{-1}(a') = \phi^{-1}(\sigma(a)) = (\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi)(x).$$

Para la continuidad de  $\phi$ . Sea  $\varepsilon > 0 \implies \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{|i| > N} 2^{-|i|} < \varepsilon$  así, para que  $x, y \in \Lambda(H)$  tengan, bajo  $\phi$ , evaluaciones  $\varepsilon$ -cercanas, es suficiente que  $H^k(x)$  y  $H^k(y)$  estén en la misma componente  $J_0$  o  $J_1 \forall k > N$  y también en la misma componente  $L_0$  o  $L_1 \forall k < -N$  y como  $H$  aleja a dos puntos a una razón máxima  $\mu$ , si  $\|x - y\| < \mu^{-N-1} \implies \|H^k(x) - H^k(y)\| < \mu^{-1} \implies H^k(x)$  y  $H^k(y)$  estén en la misma componente  $J_0$  o  $J_1$  y también en la misma componente  $L_0$  o  $L_1 \forall |k| < N$  ya que las intersecciones de  $J_0$  y  $J_1$  con  $L_0$  y  $L_1$  son cuadrados de lado  $1/\mu$ .  $\square$

De esta conjugación y por las propiedades de  $(\sigma, \Sigma_2)$  (expuestas en el apéndice A, subsección "Función corrimiento") se implica la existencia de

órbitas densas en  $\Lambda(H)$ , por lo tanto que  $H_{\Lambda(H)}$  presenta transitividad topológica; además sus puntos periódicos son densos en  $\Lambda(H)$ , así que por .27 se concluye que  $H$  es caótica.

## 2.3. Análisis cualitativo de la Herradura

En esta sección se verán las principales características topológicas de este sistema dinámico. La primera es que el conjunto límite positivo  $\Lambda^+(H)$  es un continuo indescomponible. Luego la densidad de la variedad inestable del punto fijo  $p$ ,  $W^u(p)$  en  $\Lambda^+(f)$  y finalizando con la estabilidad estructural de la Herradura.

### 2.3.1. Generación de un continuo indescomponible

Por la proposición .2 se tiene que  $\Lambda^+(H)$  es un continuo ya que  $M$  lo es y  $H : M \rightarrow M$  es continua. Para ver que es indescomponible se usará la proposición .3, es decir, se definirá otro sistema dinámico  $(I, t)$  y una función  $\zeta$  tales que el diagrama 2.1 conmuta, seguido de la prueba de que su conjunto atractor  $\Lambda^+(t)$  es continuo indescomponible.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{H} & M \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \zeta \\ I & \xrightarrow{t} & I \end{array} \quad (2.1)$$

**Afirmación .2.** *Un par de funciones buscadas  $\zeta : M \rightarrow I$  y  $t : I \rightarrow I$  están dadas por:*

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in A \\ x & \text{si } (x, y) \in R \\ 1 & \text{si } (x, y) \in B \end{cases} \quad (2.2)$$

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \gamma \\ \mu x - \mu\gamma & \text{si } \gamma \leq x \leq 1/\mu + \gamma \\ 1 & \text{si } 1/\mu + \gamma \leq x \leq 1 - (1/\mu + \gamma) \\ 1 - \mu x + \mu\gamma & \text{si } 1 - (1/\mu + \gamma) \leq x \\ 0 & \text{si } x \geq 1 - \gamma \end{cases}$$

Se muestra la gráfica de la función  $t$  en la figura 2.5. A continuación se muestra como las evaluaciones  $\zeta \circ H$  y  $t \circ \zeta$  son iguales en cada uno de los casos:

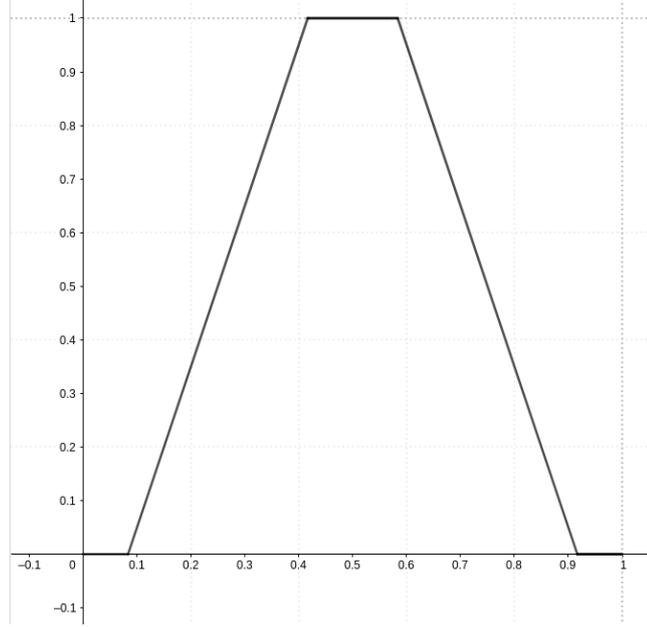


Figura 2.5: La gráfica de la función  $t$ .

*Caso 1*  $[x < \gamma]$  Entonces  $\zeta \circ H(x, y) = \zeta(x^*, y^*)$  con  $(x^*, y^*) \in A$  por lo que  $\zeta(x^*, y^*) = 0$ . Por otro lado  $t \circ \zeta(x, y) = t(0) = 0$ .

*Caso 2*  $[x > 1 - \gamma]$  Entonces  $\zeta \circ H(x, y) = \zeta(x^*, y^*)$  con  $(x^*, y^*) \in A$  por lo que  $\zeta(x^*, y^*) = 0$ . Por otro lado  $t \circ \zeta(x, y) = t(1) = 0$ .

*Caso 3*  $[(x, y) \in J_0]$  Entonces  $\zeta \circ H(x, y) = \zeta(\mu x, y/\mu) = \mu x$ . Por otro lado  $t \circ \zeta(x, y) = t(x) = \mu x$  pues como  $(x, y) \in J_0$  entonces  $x \leq 1/\mu$ .

*Caso 4*  $[(x, y) \in J_1]$  Entonces  $\zeta \circ H(x, y) = \zeta(1 - \mu x, 1 - y/\mu) = 1 - \mu x$ . Por otro lado  $t \circ \zeta(x, y) = t(x) = 1 - \mu x$  pues como  $(x, y) \in J_1$  entonces  $x \geq 1 - 1/\mu$ .

*Caso 5*  $[1/\mu + \gamma < x < 1 - (1/\mu + \gamma)]$  Entonces  $\zeta \circ H(x, y) = \zeta(x^*, y^*)$  con  $(x^*, y^*) = H(x, y) \in B$  por lo que  $\zeta(x^*, y^*) = 1$ . Por otro lado  $t \circ \zeta(x, y) = t(x) = 1$ .

Ahora, como  $\zeta(\Lambda^+(H)) = I$ , pues  $\Lambda^+(H) \supset \Lambda^+(H) \cap R \cong I \times C$ , se concluye que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^+(H) & \xrightarrow{H} & \Lambda^+(H) \\
 \zeta \downarrow & & \downarrow \zeta \\
 I & \xrightarrow{t} & I
 \end{array} \tag{2.3}$$

Este resultado se usa para probar que la función  $t$  tiene como límite inverso un continuo indescomponible. Para esto se define la sucesión inversa  $\{X_i, f_i\}$  con  $X_i = I$  y  $f_i = t$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .

**Proposición .11.** *El límite inverso  $(I, t) := \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$  es un continuo indescomponible.*

*Demostración.* Por la proposición .7 bastará probar que  $\{X_i, f_i\}$  es una sucesión inversa indescomponible. Sean  $A := [a, b]$  y  $B := [c, d]$  dos subcontinuos de  $I$ , sólo pueden ser unipuntuales o intervalos cerrados, y si además se cumple que  $I = A \cup B$  entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $0 \in A$  y  $1 \in B$ , es decir  $A = [0, b]$  y  $B = [c, 1]$  con  $b \geq c$ . Por otro lado, se tiene que existe  $r \in I$  tal que  $t([0, r]) = I$ , así si  $r \in A$  entonces  $t(B) = I$  y si  $r \in A \setminus B$  entonces  $t(A) = I$ . Esto prueba que  $\{I, t\}$  es una sucesión inversa indescomponible, por lo que efectivamente  $(I, t)$  es un continuo indescomponible.  $\square$

De la función  $\zeta$  se puede obtener una función  $\zeta^* : \{\Lambda^+(H), H\} \rightarrow \{I, t\}$  definida por:

$$\zeta^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) := (\zeta(x_1), \zeta(x_2), \zeta(x_3), \dots)$$

La cual, se prueba que es un homeomorfismo (ver [7]). Y con esto, sólo basta aplicar .7 y .8 en  $\zeta^*$  para concluir que  $\Lambda^+(H)$  es un continuo indescomponible.

### 2.3.2. Densidad de la variedad inestable de $p$

$H$  tiene un punto fijo  $p \in J_0$  que es una silla hiperbólica, en esta sección se mostrará que su variedad inestable  $W^u(p)$  es densa en  $\Lambda^+(H)$ . De manera similar a como se muestra la indescomponibilidad del continuo  $\Lambda^+(H)$ . Para ello se definen las funciones  $H^* : (\Lambda^+(H), H) \rightarrow (\Lambda^+(H), H)$  y  $t^* : (I, t) \rightarrow (I, t)$ , análogas a como se define  $\zeta^*$ , es decir:

$$\begin{aligned} H^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) &:= (H(x_1), H(x_2), H(x_3), \dots) \\ t^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) &:= (t(x_1), t(x_2), t(x_3), \dots) \end{aligned}$$

**Proposición .12.** *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda^+(H), H) & \xrightarrow{H^*} & (\Lambda^+(H), H) \\ \zeta^* \downarrow & & \downarrow \zeta^* \\ (I, t) & \xrightarrow{t^*} & (I, t) \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in (\Lambda^+(H), H)$  entonces

$$\begin{aligned}\zeta^* \circ H^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= \zeta^*((H(x_1), H(x_2), H(x_3), \dots)) \\ &= (\zeta(H(x_1)), \zeta(H(x_2)), \zeta(H(x_3)), \dots)\end{aligned}$$

que por la conmutatividad del diagrama 2.2, esto último es igual a

$$\begin{aligned}(t(\zeta(x_1)), t(\zeta(x_2)), t(\zeta(x_3)), \dots) &= t^*(\zeta(x_1), \zeta(x_2), \zeta(x_3), \dots) \\ &= t^* \circ \zeta^*((x_1, x_2, x_3, \dots))\end{aligned}$$

□

Por otro lado se tiene que las proyecciones  $\pi_i : (\Lambda^+(H), H) \rightarrow \Lambda^+(H)$  son homeomorfismos tales que  $\pi_i \circ H^* = H \circ \pi_i$ , por lo que el diagrama anterior se puede extender a:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^+(H) & \xrightarrow{H} & \Lambda^+(H) \\ \pi_i^{-1} \downarrow & & \downarrow \pi_i^{-1} \\ (\Lambda^+(H), H) & \xrightarrow{H^*} & (\Lambda^+(H), H) \\ \zeta^* \downarrow & & \downarrow \zeta^* \\ (I, t) & \xrightarrow{t^*} & (I, t) \end{array} \quad (2.4)$$

Con la conmutatividad de este diagrama, la continuidad de las biyecciones  $\zeta^*$  y  $\pi_i$ , y la proposición .9 se llega a que, para probar la densidad de  $W^u(p)$  en  $\Lambda^+(H)$  basta probar la densidad de  $W^u(\zeta^*(\pi_1^{-1}(p)))$  en  $(I, t)$ . Lo cual se hará mostrando la densidad de un subconjunto de  $W^u(\zeta^*(\pi_1^{-1}(p)))$  en  $(I, t)$ . Para mayor comodidad se define  $b := \zeta^*(\pi_1^{-1}(p))$ , nótese que  $b = (b_1, b_2, b_3, \dots)$  y necesariamente  $b_1 = b_i \forall i \in \mathbb{N}$  pues  $b \in I$  es un punto fijo de  $t$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $D_1 := (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset (\gamma, 1/\mu + \gamma)$ , como  $t$  es expansiva en  $D_1$  se tiene que existe  $D_2 \subset D_1$  tal que  $t(D_2) = D_1$ . Este paso se puede extender indefinidamente generando una sucesión de intervalos abiertos anidados  $(\gamma, 1/\mu + \gamma) \supset D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \dots$  y como  $t|_{D_i}$  es un homeomorfismo para toda  $i \in \mathbb{N}$  se puede construir la sucesión inversa  $\{D_i, t|_{D_{i+1}}\}$ . Cuyo límite inverso  $D_\infty \subset (I, t)$ , por .8, es homeomorfo a  $D_1$ .

**Proposición .13.**

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (t^*)^n(D_\infty) \subset W^u(b)$$

*Demostración.* Para probar esto será necesario antes ver como es  $(t^*)^{-1}$  y la distancia en un límite inverso  $(X_i, f_i)$ . Si  $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in (I, t)$ , entonces, por como se definió  $t^*$  se tiene que  $t^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) = ((t(x_1), t(x_2), t(x_3), \dots)) = (t(x_1), x_1, x_2, \dots)$ ; por lo tanto, la función inversa  $(t^*)^{-1}$  está dada por:

$$(t^*)^{-1}((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

es decir,  $(t^*)^{-1}$  es la función corrimiento unilateral en sobre  $(I, t)$ . Y la distancia entre dos elementos en  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in (X_i, f_i)$  se define como:

$$d^*(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

Notando que como  $D_1 \subset (\gamma, 1/\mu + \gamma)$  donde  $t$  es expansiva en un factor de  $\mu$  se tiene que  $|x - b| = \mu|t^{-1}(x) - b|$  por lo que  $d^*((t^*)^{-1}(x), b) = (d^*(x, b))/\mu$ . Por otro lado, si  $x \in D_i$  entonces  $(t^*)^{-1}(x) \in D_{i+1}$  y como  $D_i \supset D_{i+n}$  para todo natural  $n$  entonces

$$d^*((t^*)^{-n}(x), b) = (1/\mu)^n(d^*(x, b))$$

Por lo tanto, si  $x \in D_\infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} d^*((t^*)^{-n}(x), b) = 0$ , por lo que  $x \in W^u(b)$ , es decir  $D_\infty \subset W^u(b)$ . Es claro que  $t^*(D_\infty) \subset W^u(b)$  por lo que en general para toda  $n$  se cumple  $(t^*)^n(D_\infty) \subset W^u(b)$ , y por esto se tiene que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (t^*)^n(D_\infty) \subset W^u(d)$$

□

Así sólo basta ver que esta unión infinita es densa en  $(I, t)$ , para concluir que  $W^u(p)$  es densa en  $\Lambda^+(H)$ . Para esto será conveniente ver primero el siguiente lema.

**Lema 2.** *Para toda  $M \in \mathbb{N}$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\pi_M((t^*)^N(D_\infty)) = I$$

*Demostración.* Primero se da la definición del **diámetro** de un subconjunto  $A$  de un espacio métrico, es el supremo de las distancias entre sus puntos y se denota por  $\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$  donde  $d(x, y)$  es la distancia entre los puntos del espacio. Ahora, es claro que como  $t(D_{i+1}) = D_i$  entonces

$$t^*(D_\infty) = (t(D_1), t(D_2), t(D_3), \dots)$$

y en general, para toda  $n \in \mathbb{N}$

$$(t^*)^n(D_\infty) = (t^n(D_1), t^n(D_2), t^n(D_3), \dots)$$

Así, si  $M \in \mathbb{N}$  entonces  $\pi_M(t^*(D_\infty)) = \pi_M((t(D_1), t(D_2), t(D_3), \dots)) = t(D_M)$ . Por otro lado, como  $t(D_{i+1}) = D_i$  entonces el diámetro  $\text{diam}(t(D_{i+1}))$  es igual al de  $D_i$  y por como se definió  $t$  en  $(\gamma, 1/\mu + \gamma) \supset D_1$  se tiene que el de  $t(D_M)$  es igual al de  $D_1$  por un factor de  $(1/\mu)^{M-1}$ , y para toda  $i \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\text{diam}(t^N(D_i)) = (\mu)^N \text{diam}(D_i)$ . Con lo que se llega a que el diámetro de  $t^N(D_M)$  es  $(\mu)^{N-1} \frac{1}{\mu^{M-1}}$  veces el de  $D_1$ . Por lo tanto, basta con escoger un natural  $N \geq M - \left(\frac{\ln|\text{diam}(D_1)|}{\ln\mu}\right)$  para asegurar que  $\text{diam}(t^N(D_M)) \geq 1$   $\square$

De hecho, es evidente que para toda  $n \geq N$  pasa que  $\pi_M((t^*)^n(D_\infty)) = I$ . Con esto será más inmediato ver la siguiente proposición.

**Proposición .14.**  $\cup_{n=0}^\infty (t^*)^n(D_\infty)$  es denso en  $(I, t)$

*Demostración.* Sea  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in (I, t)$  y  $\varepsilon > 0$ , se verá que existe un  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \cup_{n=0}^\infty (t^*)^n(D_\infty)$  tal que  $d^*(y, x) < \varepsilon$ . Sea  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{i=M+1}^\infty \frac{1}{2^i} < \varepsilon$ , y por la conducta expansiva de  $t$  se sabe que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $t^N(D_M) = I$  por lo que existe  $y \in (t^*)^N(D_\infty)$  tal que  $y_M = x_M$  y como ambos están en  $(I, t)$  se cumple

$$y_{M-i} = t^i(y_M) = t^i(x_M) = x_{M-i}$$

para toda  $i < M$  en particular para  $i = M - 1$  por lo que  $y_1 = x_1$  por lo tanto

$$d^*(y, x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{|y_i - x_i|}{2^i} = \sum_{i=M+1}^\infty \frac{|y_i - x_i|}{2^i} \leq \sum_{i=M+1}^\infty \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

lo cual concluye la prueba.  $\square$

Con esto se ha probado que  $\cup_{n=0}^\infty (t^*)^n(D_\infty) \subset W^u(d)$  es denso en  $(I, t)$  y por la proposición .9 y el diagrama 5 se concluye lo que se quería probar:  $W^u(p)$  es densa en  $\Lambda^+(H)$ .

### 2.3.3. Estabilidad estructural de la Herradura

Ahora se verá otra propiedad topológica interesante de la dinámica de  $H$ , su estabilidad estructural. Para esto será necesario ver cuál es exactamente  $\Omega(H)$  para ver que efectivamente cumpla las condiciones de transversalidad y de ser Axioma A, para así sólo aplicar el teorema .3.

**Afirmación .3.**  $\Omega(H)$  es un conjunto hiperbólico.

Del hecho de que  $\Omega(H) \subset M$  es un subconjunto cerrado de un compacto se sigue que es también compacto. Ya se vio que es invariante, por lo que bastará probar las propiedades i), ii) y iii) de la definición de conjunto hiperbólico (ver subsección 1.2.1). Para esto bastará ver que  $\Omega(H) \subset J_0 \cup J_1 \cup \{a\}$  pues es claro que en  $J_0 \cup J_1 \cup \{a\}$  todos los puntos cumplen las tres propiedades simultáneamente. Si  $x \in M \setminus (J_0 \cup J_1 \cup \{a\})$  entonces tiene como límite al punto  $a \in A$ , es decir, su órbita nunca vuelve a pasar cerca de  $x$  por lo que no puede ser un punto no-errante

De esto último se observa que de hecho,  $\Omega(H) \subset \bigcap_{i \leq 0} H^i(J_0 \cup J_1 \cup \{a\})$  y considerando la función inversa  $H^{-1}$  también se tiene que  $\Omega(H) \subset \bigcap_{i \geq 0} H^i(J_0 \cup J_1 \cup \{a\})$  es decir  $\Omega(H) \subset \Lambda(H) \cup \{a\}$ .

**Proposición .15.**  $\overline{Per(H)} = \Omega(H)$

*Demostración.* Ya se sabía por .10,  $\overline{Per(H)} = \Lambda(H)$ , por lo que basta mostrar la igualdad con  $\Omega(H)$ .

Sea  $x \in \Lambda(H)$ , si es un punto periódico entonces es directo que  $x \in \Omega(H)$ ; sea entonces  $x$  un punto no es periódico y  $U \subset \mathbb{R}^2$  una vecindad abierta de  $x$ ; suponiendo que  $x \notin \Omega(H)$ , es decir, para toda  $y \in U$  y todo entero  $k$ , se cumple que  $H^k(y) \notin U$   $x \neq H^n(x)$ . De la conjugación topológica entre  $H|_{\Lambda(H)}$  con la función Shift se tiene que existe un elemento  $z \in \Lambda(H)$  tal que su órbita es densa en  $\Lambda(H)$ , es decir existe un entero  $k$  tal que  $H^k(z) \in U$ , y como la órbita de  $z$  es igual a la de  $H^k(z)$ , existe otro entero  $m$  tal que  $H^{k+m} \in V$  para cualquier  $V \subset U$ , lo cual contradice la suposición de que  $x$  no fuera elemento de  $\Omega(H)$ .

La otra contención  $\Omega(H) \subset \Lambda(H)$  es evidente al recordar que es un conjunto invariante y  $\Lambda(H)$  es el más grande por contención.  $\square$

Estos dos últimos resultados prueban que, en efecto, la función  $H$  es Axioma A. Así sólo falta ver que también cumple con la condición de transversalidad para poder concluir que es estructuralmente estable. Es importante observar que con esta propiedad se puede asegurar que el resto de las propiedades topológicas vistas también las poseen otras funciones que sean  $C^r$  cercanas a  $H$  como se definió, por lo que pequeñas variaciones a esta definición resultan ser básicamente la misma dinámica, como por ejemplo para ciertas funciones en la familia del mapeo de Hénon (ver [3]).

**Proposición .16.**  $H$  satisface la condición de transversalidad.

*Demostración.* Sean  $x, y \in \Omega(H)$ , como  $\Omega(H) = \Lambda(H) = \Lambda^+(H) \cap \Lambda^-(H)$  por lo tanto  $x \in \Lambda^+(H) \simeq I \times C$  por lo tanto si  $\varepsilon < \gamma/2$  (que es la mitad de

la distancia mínima entre  $\Omega(H)$  y el complemento de  $R$  se tiene que  $W_\varepsilon^u(x)$  es un segmento de recta horizontal, por lo que  $W^u(x)$  es homeomorfo a un arcoiris de Knaster horizontal, que interseca a  $R$  en infinitas líneas horizontales. Análogamente  $y \in \Lambda^-(H) \simeq C \times I$  por lo tanto si  $\varepsilon < \gamma/2$  (que es la mitad de la distancia mínima entre  $\Omega(H)$  y el complemento de  $R$ ) se tiene que  $W_\varepsilon^s(y)$  es un segmento de recta vertical, por lo que  $W^s(y)$  es homeomorfo a un arcoiris de Knaster vertical, que interseca a  $R$  en infinitas líneas verticales. De esto se concluye que  $W^u(x)$  y  $W^s(y)$  se intersecan transversalmente, lo que concluye la prueba.  $\square$

## Capítulo 3

# FUNCIÓN HOJALDRE

La función Hojaldre, denotada por  $\Xi$ , surge como una idea para extender la Herradura de Smale a  $\mathbb{R}^3$  de modo que sea un mapeo estructuralmente topológicamente estable. Partiendo de la deformación herradura como la expansión en un subespacio  $V_1$  del 2-cubo  $I^2 = V_1 \oplus V_2$  a la vez que se contrae el subespacio complementario  $V_2$ , seguido de un doblamiento. Así, pensando en esa idea, escogemos el subespacio  $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$  para encoger mientras que los subespacios complementarios  $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}$  y  $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$  para estirar y doblar en cada uno. Al doblar dos veces, se hace de modo que el objeto resultante sea transversal al cubo original en 4 componentes conexas y dividiéndolo en 9 regiones, como en la figura 3.1. De modo que una vecindad del cubo  $I^3$  contenga a su imagen, como pasa con la región  $M$  bajo  $H$ .

En el límite de la intersección de las imágenes de las iteraciones de  $\Xi$  se obtiene el conjunto  $\Lambda^+(\Xi)$  al que llamo un *volován matemático*. Un volován es una bocadillo típico de las calles de Veracruz (figura 3.2), la ciudad en que crecí; el cual es esencialmente un pan de hojaldre cuadrado y relleno.

### 3.1. Construcción

Se expone la construcción topológica usando la del mapeo Herradura usando la construcción del mapeo Herradura. Esto se determina una región  $E$ , homeomorfa a la bola cerrada unitaria, tal que contiene un entorno cerrado  $N$  (análogo a  $M$  en el caso de  $H$ ) del cubo unitario  $I^3$  tal que contiene a su imagen. La definición formal de esta función  $\Xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  está dada por:

$$\Xi(x, y, z) := H_y \circ H_x$$

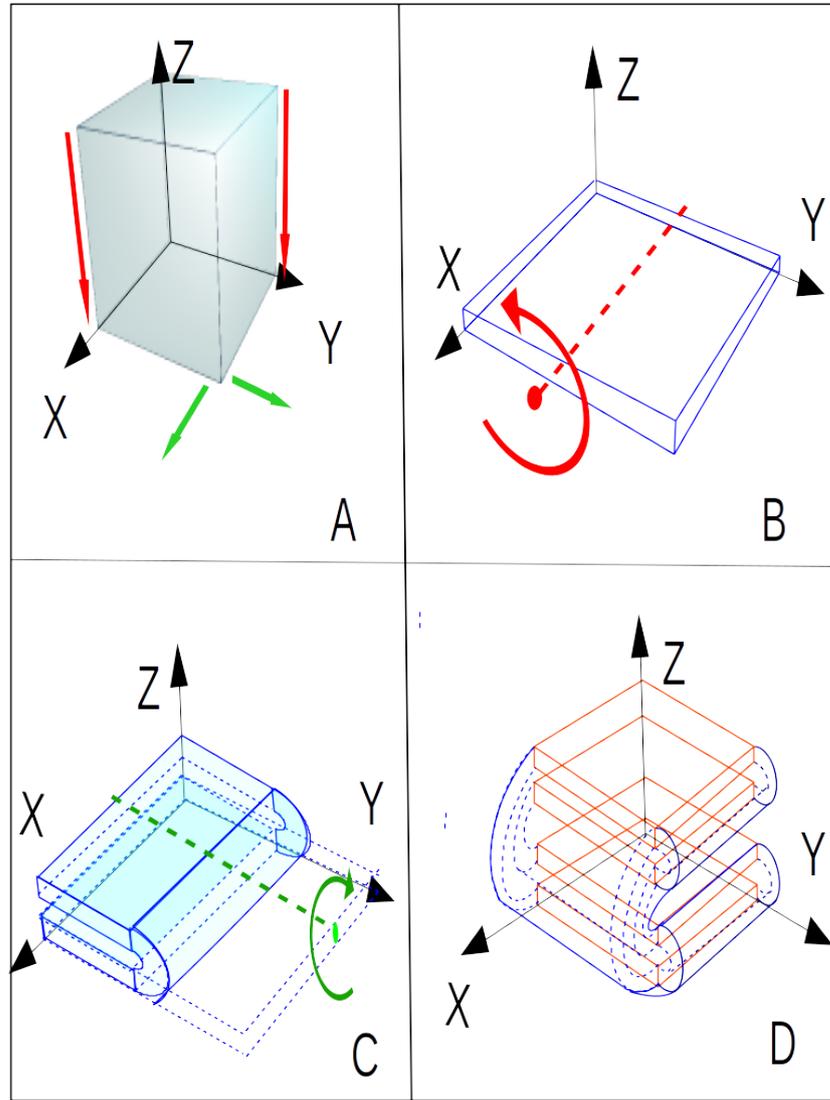


Figura 3.1: Deformación del Hojaladre: En A las expansiones en los ejes X, Y y la contracción en el Z. En B el doblamiento en Y. En C, el de X. Y en D se diferencian las regiones de  $\Xi(I^3)$  que intersecan a  $I^3$  y la que no.



Figura 3.2: Un volován veracruzano. Este no es muy fiel a la analogía pues este es un fragmento cortado de la superficie total, por lo que tiene muchos bordes.

Con  $H_x$  y  $H_y$  extensiones de la función Herradura a  $\mathbb{R}^3$  definidas como sigue:

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &:= (x, \pi_x \circ H(y, z), \pi_y \circ H(y, z)) \\ H_y(x, y, z) &:= (\pi_x \circ H(x, z), y, \pi_y \circ H(x, z)) \end{aligned}$$

Con  $\pi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección en la primer coordenada, es decir  $\pi_x(x, y) := x$  y  $\pi_y$  en la segunda. Así definida es inmediato ver que  $\Xi(I^3)$  intersecta al cubo  $I^3$  en cuatro regiones. En el resto de  $N$  que bajo  $\Xi$  no intersecta a  $I^3$ , a diferencia de  $M \setminus R$  con el mapeo Herradura, no es una simple contracción con un punto fijo atractor, sino que tiene como conjunto límite algo más complicado parecido a un continuo de Knaster, pero esto no se expone en este trabajo. Tampoco se estudia la dinámica del resto  $E \setminus N$  pues es muy similar a la de  $D \setminus R$  en el caso de la Herradura. En la figura 3.3 se muestra a grandes rasgos la evaluación de cada una de estas regiones.

Igualmente por simplicidad se trabaja solo con la definición analítica correspondiente a cuatro regiones conexas en las que la función es conjugada topológica a una transformación afín. Es decir, sólo se definirá analíticamente en  $\Xi^{-1}(\Xi(I^3) \cap I^3)$  y en el resto no pues es innecesario. Así como con la

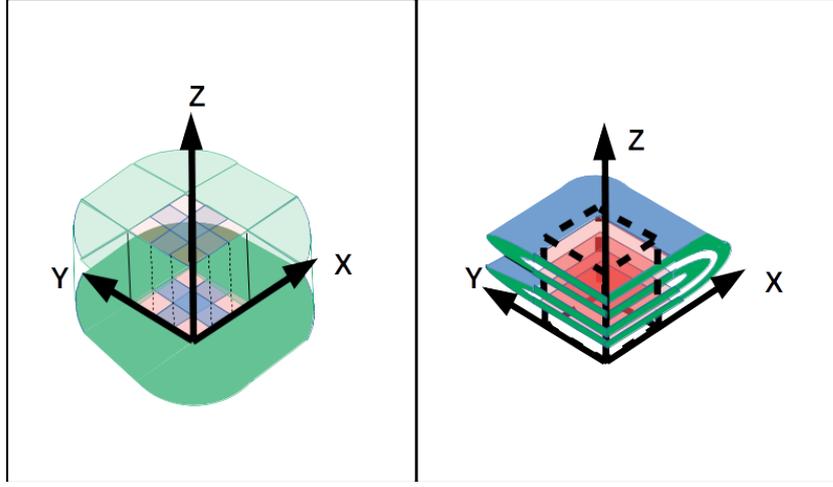


Figura 3.3: La región  $E$  dividida en tres regiones por colores. De verde la evaluación de  $E \setminus I^3$ . De azul la de  $\Xi^{-1}(E \setminus I^3) \cap I^3$ , es decir, la región dentro del cubo cuya imagen no está en el cubo. Y de rojo la que están en el cubo y su imagen bajo  $\Xi$  se quedan en el cubo. El volumen coloreado en la imagen de la derecha es el correspondiente al cerrado  $N$ .

función Herradura sólo las regiones  $J_0$  y  $J_1$  tienen evaluaciones en  $I^2$ , con la función Hojaldre sólo unas regiones  $E_0, E_1, E_2$  y  $E_3 \subset I^3$  tienen imagen en  $I^3$ . En éstas cuatro regiones es donde  $H_1$  y  $H_2$  por como se definieron resultan afines y corresponden justamente con  $[(J_0 \cup J_1) \times I] \cap [I \times (J_0 \cup J_1)]$ , esto es, cuatro prismas de base cuadrada de lado  $1/\mu$  y altura 1.

$$\begin{aligned}
 E_0 &:= [\gamma, \gamma + 1/\mu]^2 \times I \\
 E_1 &:= [\gamma, \gamma + 1/\mu] \times [1 - (\gamma + 1/\mu), 1 - \gamma] \times I \\
 E_3 &:= [1 - (\gamma + 1/\mu), 1 - \gamma] \times [\gamma, \gamma + 1/\mu] \times I \\
 E_2 &:= [1 - (\gamma + 1/\mu), 1 - \gamma]^2 \times I
 \end{aligned}$$

Para mayor comodidad se define el conjunto  $\Lambda_1 := \cup_{0 \leq i \leq 4} E_i$ . Dado como se definió  $\Xi = H_y \circ H_x$ , se tiene que en cada región la función resultaría ser como sigue:

$$\begin{aligned}
\Xi|_{E_0}(x, y, z) &= H_y(H_x(x, y, z)) = H_y(x, \mu y - \gamma, z/\mu + \gamma) \\
&= (\mu x - \gamma, \mu y - \gamma, z/\mu^2 + \gamma/\mu + \gamma) \\
\Xi|_{E_1}(x, y, z) &= H_y(H_x(x, y, z)) = H_y(x, 1 - (\mu y - \gamma), 1 - (z/\mu + \gamma)) \\
&= (\mu x - \gamma, \mu y - \gamma, (1 - \gamma)/\mu - z/\mu^2 + \gamma) \\
\Xi|_{E_3}(x, y, z) &= H_y(H_x(x, y, z)) = H_y(x, \mu y - \gamma, z/\mu + \gamma) \\
&= (1 - (\mu x - \gamma), 1 - (\mu y - \gamma), 1 - (z/\mu^2 + \gamma/\mu - \gamma)) \\
\Xi|_{E_2}(x, y, z) &= H_y(H_x(x, y, z)) = H_y(x, 1 - (\mu y - \gamma), 1 - (z/\mu + \gamma)) \\
&= (1 - (\mu x - \gamma), 1 - (\mu y - \gamma), 1 - \mu + z/\mu^2 + \gamma/\mu + \gamma)
\end{aligned}$$

Imaginar y comprender la dinámica a partir de esta definición puede resultar una tarea enfadosa, por eso hice otra que tal vez sea menos incómoda. Consta de la composición de tres funciones, dos de ellas surgen de una ya conocida, la función  $t$  definida en el capítulo anterior. El primer paso de esta construcción es la aplicación de la función  $\Delta : \Lambda_1 \rightarrow I^3$  definida por:

$$\Delta(x, y, z) = \begin{cases} (x, y, z/\mu^2 + \gamma/\mu + \gamma) & \text{si } (x, y, z) \in E_0 \\ (x, y, (1 - \gamma)/\mu - z/\mu^2 + \gamma) & \text{si } (x, y, z) \in E_1 \\ (x, y, 1 - (z/\mu^2 + \gamma/\mu - \gamma)) & \text{si } (x, y, z) \in E_3 \\ (x, y, 1 - \mu + z/\mu^2 + \gamma/\mu + \gamma) & \text{si } (x, y, z) \in E_2 \end{cases}$$

Esta función "aplasta" verticalmente cada región a un factor de  $\mu^2$  y la traslada a la altura a la que quedaría al final de aplicar  $\Xi$ , también hace una inversión del sentido de la coordenada vertical en las regiones  $E_3$  y  $E_1$ . De modo que sólo resta hacer las expansiones y traslados correspondientes en las direcciones complementarias, y es justamente lo que hacen las funciones  $T_x$  y  $T_y$ , que se construyen a partir de la función  $t : I \rightarrow I$  como sigue:

$$\begin{aligned}
T_y(x, y, z) &:= (x, t(y), z) \\
T_x(x, y, z) &:= (t(x), y, z)
\end{aligned}$$

Estas funciones aplican expansiones y traslaciones en las coordenadas  $x$  y  $y$  a la vez que aplica inversiones de los sentidos de dichas coordenadas, en  $E_1$  invierte el sentido de  $y$ , en  $E_3$  el de  $x$  y en  $E_2$  ambas, mientras que en  $E_0$  ninguna. De modo que al aplicar la composición de las tres sobre  $\Lambda_1$  resulte equivalente a haber aplicado  $\Xi$  (el proceso se ilustra en la imagen 3.4). Así, la definición analítica de  $\Xi$  restringida a  $\Lambda_1$  sería:

$$\Xi|_{\Lambda_1}(x, y, z) = (T_x \circ T_y \circ \Delta)(x, y, z)$$

Que puede simplificarse, definiendo  $T : I^3 \rightarrow I^3$  como  $T(x, y, z) := (t(x), t(y), z)$ , entonces

$$\Xi|_{\Lambda_1}(x, y, z) = (T \circ \Delta)(x, y, z)$$

Encontré más cómoda esta definición ya que muestra por separado las dinámicas en cada subespacio estables e inestables locales y esto facilitará comprender su dinámica simbólica. Para esto, antes se verá un breve análisis geométrico, hay que observar que se satisface la descripción vaga que se dió al inicio del capítulo, ya que efectivamente  $\Xi(E)$  interseca transversalmente a  $I^3$  en cuatro componentes conexas:

$$\begin{aligned} \Lambda_{-1} &:= \Xi(\Lambda_1) \\ &= \Xi(E_0) \cup \Xi(E_1) \cup \Xi(E_3) \cup \Xi(E_2) \\ &= I^2 \times \left[ \frac{\gamma}{\mu}(1 + \mu), \frac{\gamma}{\mu}(1 + \mu) + 1/\mu^2 \right] \cup I^2 \times \left[ \frac{1 - \gamma}{\mu} - 1/\mu^2 + \gamma, \frac{1 - \gamma}{\mu} + \gamma \right] \\ &\quad \cup I^2 \times [1 - 1/\mu^2 - \gamma/\mu + \gamma, 1 - \gamma/\mu + \gamma] \\ &\quad \cup I^2 \times [1 - \mu + \gamma(1 + 1/\mu), 1 - \mu + \gamma(1 + 1/\mu) + 1/\mu^2] \end{aligned}$$

que son cuatro prismas de base  $I^2$  y altura  $1/\mu^2$ , como rebanadas gruesas paralelas al plano XY y que separan a  $I^3$  en nueve regiones. De las cuales distinguimos las imágenes de las regiones  $E_i$  con  $0 \leq i \leq 3$ .

$$\begin{aligned} O_0 &:= \Xi(E_0) \\ O_1 &:= \Xi(E_1) \\ O_2 &:= \Xi(E_2) \\ O_3 &:= \Xi(E_3) \end{aligned}$$

Para visualizar la conducta asintótica del sistema se verá lo que ocurre con los subconjuntos fronterizos. Comenzando con las caras verticales de las regiones que componen a  $\Lambda_1$ , al aplicar  $\Delta$  se contraen verticalmente, de modo que con  $T$  terminan sobre las caras verticales de  $I^3$ , de hecho pasan a ser las caras verticales de las componentes de  $\Lambda_{-1}$ . Mientras que las caras horizontales de las componentes de  $\Lambda_1$  van a las respectivas caras horizontales de las componentes de  $\Lambda_{-1}$ . De esto se ve que cualquier sección transversal a cualquier componente de  $\Lambda_1$  va a dar a una sección transversal a todo  $I^3$  pero con un grosor reducido a un factor de  $1/\mu^2$ . Así mismo se ve que, cualquier sección que atraviesa longitudinalmente a cualquier componente de  $\Lambda_1$  va a dar a una sección de anchura  $\mu^2$  veces más grande pero su altura reducida de 1 a  $1/\mu^2$ .

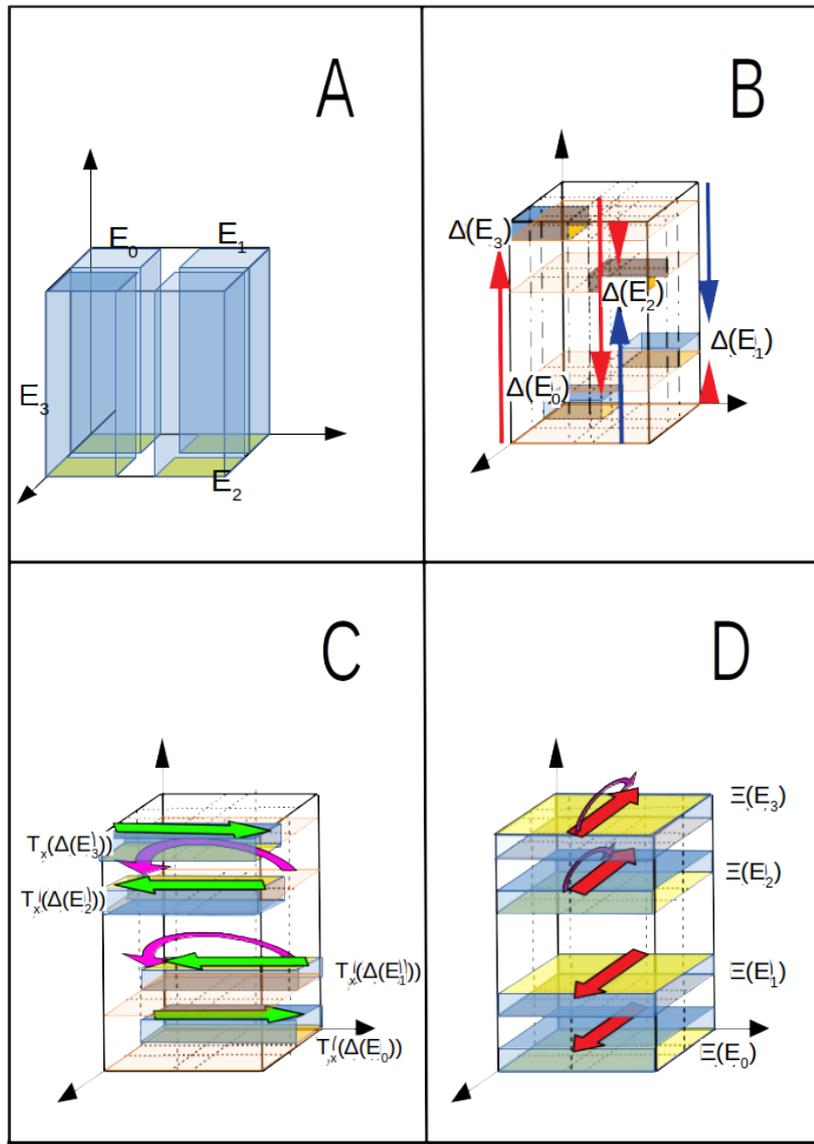


Figura 3.4: Evolución del mapeo de  $I^3$  bajo  $\Xi$  en tres pasos. En A se muestra de color azul las regiones  $E_i$  con su base de amarillo. En B sus imágenes bajo  $\Delta$ . En C, las imágenes de la composición de las funciones  $T_x \circ \Delta$ , las flechas verdes representan la expansión mientras que las magenta las inversiones en dos ejes. Y en D se incluye la evaluación de  $T_y$ , con flechas rojas representando la expansión y negras la inversión, terminando así con la aplicación de  $\Xi$  sobre  $\Lambda_1$ .

Ahora se mostrarán sus puntos fijos en  $I^3$ , en el resto de  $E$  también hay puntos fijos, pero por ahora no se estudiará esa región. En cada componente de  $\Lambda_1$  la aplicación de  $\Xi$  sobre el subespacio  $x = y = 0$  es equivalente a la proyección de la aplicación de  $\Delta$  que es una contracción del intervalo, por lo que la restricción de la proyección de  $\Delta$  a cada componente tiene un punto fijo en cada una bajo  $\Delta$ ,  $z_J \in I$ ,  $J \in \{E_i\}$  y  $0 \leq i \leq 3$ , es decir, cada componente  $E_i$  tiene una rebanada horizontal que queda fija con la aplicación de  $\Delta$ . Mientras que con la aplicación de  $T$  pasa algo similar,  $T$  es una expansión en los subespacios horizontales de cada componente, por lo que existe una pareja  $(x_J, y_J) \in \pi_z(J)$  con  $J = E_i$  con  $0 \leq i \leq 3$  tal que  $(x_J, y_J, z)$  es un punto fijo de  $T$  para todo  $z \in I$ . Con lo que se concluye que en cada componente  $J$  de  $\Lambda_1$  hay un segmento de recta vertical que queda fijo bajo  $T$ , estos segmentos intersectan a las rebanadas fijas con lo que se tienen cuatro puntos fijos en  $(x_J, y_J, z_J) \in I^3$  bajo  $\Xi$ .

No se describe analíticamente el mapeo inverso para no saturar de ecuaciones. A grandes rasgos la deformación inversa  $\Xi^{-1}$  se describe como una contracción en dos de los tres subespacios junto con una extensión en el otro, transformando al cubo unitario en un prisma de  $\mu^2$  veces el alto del cubo y con base de área  $1/\mu$  veces la del cubo; esto seguido de un par de doblamientos del prisma, formando primero una herradura y luego doblando los extremos de esta herradura hacia el frente hasta dejarlos paralelos con el resto. En la figura 3.5 se ilustra el proceso inverso del ilustrado en la figura 3.1 en tres pasos.

$\Lambda_1$  interseca a  $\Lambda_{-1}$  exactamente en 16 componentes conexas que son prismas con bases cuadradas de lado  $1/\mu$  y altura  $1/\mu^2$ . Esto es con la primera aplicación de  $\Xi$  (o  $\Xi^{-1}$ ). Así, con la segunda se observa que  $\Xi^2(I^3) \cap I^3 \subset \Xi(I^3) \cap I^3$ , por lo que se tienen imágenes anidadas. Al igual que  $H^{-1}$ ,  $\Xi^{-1}$  tiene la propiedad de imágenes anidadas por un argumento idéntico al caso de  $\Xi$ . En general se tiene que para todo entero  $k$ , el conjunto  $\Lambda_k := \Xi^{-k}(\Xi^k(I^3) \cap I^3)$  consiste de  $4^{|k|}$  componentes conexas, si  $k < 0$  son prismas de base  $I^2$  y altura  $1/\mu^{2k}$ , y si  $k > 0$  son prismas de altura 1 y base  $1/\mu^{2k}$ , así que en el límite se forma un conjunto homeomorfo a  $C^2 \times I$ . El conjunto límite negativo  $\Lambda^-(\Xi)$  es algo parecido al arcoiris de Knaster pero en  $R^3$ , no se estudia este objeto en este trabajo. Por otro lado, el conjunto  $\Lambda^+(\Xi)$  sí se estudiará más adelante, pero lo que interesa por ahora es su intersección con el  $I^3$ . No es difícil ver que se trata de un producto cartesiano entre  $I^2$  y  $C$ , donde  $C$  denota al conjunto de Cantor. Al tomar la intersección entre  $\Lambda^+(\Xi)$  y  $\Lambda^-(\Xi)$  tenemos un conjunto absolutamente invariante de  $I^3$  bajo  $\Xi$ , su conjunto límite  $\Lambda(\Xi)$ , que se trata de un Cantor al cubo. A continuación se explicará un mapeo de  $\Sigma_4$  en sí mismo, el cual resulta ser conjugado topológico a la función  $\Xi|_{\Lambda(\Xi)}$ .

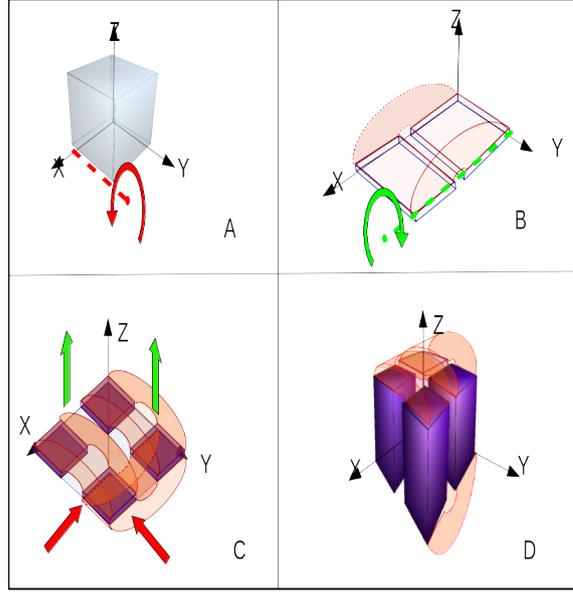


Figura 3.5: Proceso inverso del mapeo Hojaldre: De A a B el doblamiento en X en sentido contrario. De B a C, doblamiento en Y; y de C a D expansión en Z y contracción en X y Y. En D se diferencian las regiones de  $\Xi(I^3)$  que intersecan a  $I^3$  y la que no.

## 3.2. Dinámica simbólica del Hojaldre

Ésta vez la dinámica será en  $\Sigma_4$  y no en  $\Sigma_2$  puesto que las regiones de  $E$  que bajo  $\Xi$  interseca a  $I^3$ ,  $\Lambda_1$ , están en 4 componentes conexas; y lo mismo para  $\Xi^{-1}(E)$ . Así como con la Herradura, su codificación hacia adelante dependía únicamente de la coordenada  $x$ , en el Hojaldre, depende únicamente de las coordenadas  $x$  y  $y$ , pues son las correspondientes al subespacio inestable. En la figura 3.6 se muestra la gráfica análoga a la figura 2.4 correspondiente a la Herradura.

La codificación hacia atrás del Hojaldre depende únicamente de la coordenada  $z$  por lo que su gráfica es unidimensional, similar a la gráfica de la imagen 10 pero con cuatro colores, pues  $\Lambda_{-1}$  interseca a  $I^3$  en cuatro componentes. El endomorfismo en  $\Sigma_4$  conjugado topológico a  $\Xi$  en su conjunto límite  $\Lambda(\Xi)$  es también la función corrimiento  $\sigma$  si la función  $\xi : \Sigma_4 \rightarrow \Lambda(\Xi)$  que satisface que  $\xi \circ \Xi = \xi \circ \sigma$  se define de forma análoga, es decir, como sigue:

$$\xi : \Lambda(\Xi) \ni x \mapsto \xi(x) \in \Sigma_4$$

$$\xi(x) = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, a_2, \dots)$$

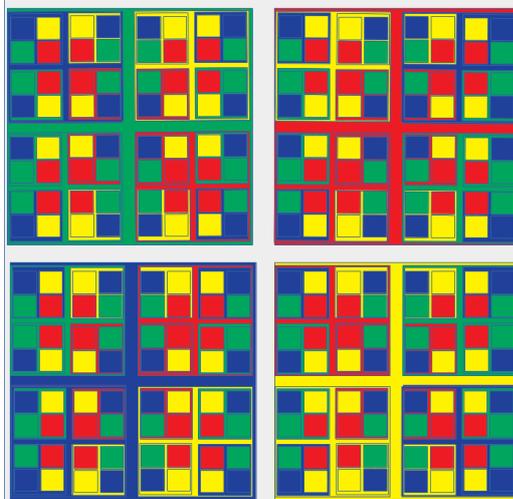


Figura 3.6: El cuadrado unitario dividido en cuatro colores. Azul corresponde a la proyección de la región  $E_0$ , verde a  $E_1$ , rojo  $E_2$  y amarillo  $E_3$ . Los cuadrados con un factor  $1/\mu$  más pequeño corresponden a las imágenes anidadas, formando así un conjunto de Cantor en el límite.

Con  $a_i$  dado por:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \Xi^i(x) \in E_0 \\ 1 & \text{si } \Xi^i(x) \in E_1 \\ 2 & \text{si } \Xi^i(x) \in E_2 \\ 3 & \text{si } \Xi^i(x) \in E_3 \end{cases} \quad \forall i \geq 0$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \Xi^i(x) \in O_0 \\ 1 & \text{si } \Xi^i(x) \in O_1 \\ 2 & \text{si } \Xi^i(x) \in O_2 \\ 3 & \text{si } \Xi^i(x) \in O_3 \end{cases} \quad \forall i < 0$$

Así definida  $\xi$  es inmediato ver que en efecto  $(\xi \circ \Xi)(x) = (\xi \circ \sigma)(x)$  para todo  $x \in \Lambda(\Xi)$ . La prueba de la continuidad es completamente similar al caso de la Herradura. Se concluye que la función Hojaldre restringida a  $\Lambda(\Xi)$  es también conjugada topológica a la función corrimiento y por lo tanto también tiene la propiedad de ser caótica, tener órbitas densas y asintóticamente periódicas. En la siguiente parte se expondrá un análisis cualitativo del sistema Hojaldre.

### 3.3. Análisis cualitativo del Hojaldre

En esta sección se demostrarán las mismas propiedades que se mostraron de la función Herradura en el capítulo anterior. Esto es, que la función Hojaldre genera también un continuo indescomponible, que la variedad inestable de uno de sus puntos fijos es densa en este continuo y la estabilidad estructural del sistema Hojaldre. Las pruebas son esencialmente analogías directas y naturales por lo que serán más cortas e intuitivas.

#### 3.3.1. Generación de otro continuo indescomponible

De forma totalmente análoga a como se mostró con el sistema Herradura, con el sistema Hojaldre se mostrará que su conjunto límite  $\Lambda^+(\Xi)$  es un continuo indescomponible. Por la proposición II.10, como también se cumplen las condiciones:  $E$  es un continuo y  $\Xi$  es continua, entonces  $\Lambda^+(\Xi)$  es un continuo. Para ver que es indescomponible se usará la misma estrategia, es decir la proposición II.11. Se define el sistema  $(I^2, T')$ , con  $T'$  la proyección sobre el plano  $\langle X, Y \rangle$  de  $T$ , la función con la que se definió  $\Xi|_{\Lambda_1}$ , es decir,  $T' : I^2 \rightarrow I^2$ , con  $T'(x, y) := (t(x), t(y))$ . Ahora se probará que el límite inverso de la sucesión inversa  $\{X_i, f_i\}$  con  $X_i = I^2$  y  $f_i = T'$ , es un continuo indescomponible.

**Proposición .17.** *El límite inverso  $(I^2, T') := \lim_{\leftarrow} \{I^2, T'\}$  es un continuo indescomponible.*

*Demostración.* Por la proposición II.15 bastará probar que  $\{I^2, T'\}$  es una sucesión inversa indescomponible. Sean  $A := [a, b] \times [a', b']$  y  $B := [c, d] \times [c', d']$  dos subcontinuos de  $I^2$ , por lo que sólo pueden ser unipuntuales, segmentos de recta o rectángulos cerrados, y si además se cumple que  $I^2 = A \cup B$  entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $\{0\} \times I \subset A$  y  $\{1\} \times I \subset B$ , es decir  $A = [0, 1] \times [0, b']$  y  $B = [0, 1] \times [c', 1]$ . Por otro lado, se tiene que existe  $(r, s) \in I^2$  tal que  $T'([0, r] \times [0, s]) = I$ , así si  $(r, s) \in A$  entonces  $T'(B) = I^2$  y si  $(r, s) \in A \setminus B$ , entonces  $T'(A) = I^2$ . Esto prueba que  $\{I^2, T'\}$  es una sucesión inversa indescomponible, por lo que efectivamente  $(I^2, T')$  es un continuo indescomponible.  $\square$

Con esto, para aplicar la proposición II.11 solo basta exhibir una función,  $\rho : N \rightarrow I^2$  continua, tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^+(\Xi) & \xrightarrow{\Xi} & \Lambda^+(\Xi) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ I^2 & \xrightarrow{T'} & I^2 \end{array} \quad (3.1)$$

La función  $\rho$  se construye siguiendo la analogía con la función Herradura, es decir, contrayendo  $I^3$  al plano  $z = 0$  dejando fijas las coordenadas  $(x, y)$  y contrayendo el resto de  $N$  a la frontera de  $I^2$ , esto es:

$$\rho(x, y, z) := \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in I^2 \\ (x, 1) & \text{si } y > 1 \\ (x, 0) & \text{si } y < 0 \\ (1, y) & \text{si } x > 1 \\ (0, y) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Afirmación .4.** *Así definida  $\rho$  el diagrama 3 conmuta.*

*Para ver esto se verifica que las evaluaciones  $\rho \circ \Xi$  y  $T' \circ \rho$  sean iguales en cada uno de los casos*

*Caso 1  $[x < \gamma]$  Entonces  $\rho \circ \Xi(x, y, z) = \rho(x^*, y^*, z^*)$  con  $x^* < 0$  por lo que  $\rho(x^*, y^*, z^*) = (0, y^*)$ . Por otro lado  $T' \circ \rho(x, y, z) = T'(0, y) = (0, y^*)$ .*

*Caso 2  $[y < \gamma]$  Entonces  $\rho \circ \Xi(x, y, z) = \rho(x^*, y^*, z^*)$  con  $y^* < 0$  por lo que  $\rho(x^*, y^*, z^*) = (x^*, 0)$ . Por otro lado  $T' \circ \rho(x, y, z) = T'(x, 0) = (x^*, 0)$ .*

*Caso 3  $[x > 1 - \gamma]$  Entonces  $\rho \circ \Xi(x, y, z) = \rho(x^*, y^*, z^*)$  con  $x^* > 1$  por lo que  $\rho(x^*, y^*, z^*) = (1, y^*)$ . Por otro lado  $T' \circ \rho(x, y, z) = T'(1, y) = (1, y^*)$ .*

*Caso 4  $[y > 1 - \gamma]$  Entonces  $\rho \circ \Xi(x, y, z) = \rho(x^*, y^*, z^*)$  con  $y^* > 1$  por lo que  $\rho(x^*, y^*, z^*) = (x^*, 1)$ . Por otro lado  $T' \circ \rho(x, y, z) = T'(x, 1) = (x^*, 1)$ .*

*Caso 5  $[1/\mu + \gamma < x < 1 - (1/\mu + \gamma)]$  Entonces  $\rho \circ \Xi(x, y, z) = \rho(x^*, y^*, z^*)$  con  $x^* > 1$  por lo que  $\rho(x^*, y^*, z^*) = (1, y^*)$ . Por otro lado  $T' \circ \rho(x, y, z) = T'(x, y) = (1, y^*)$ .*

*Caso 6 Así como los casos 2, 3 y 4 fueron análogos al 1, el caso 6, cuando  $1/\mu + \gamma < y < 1 - (1/\mu + \gamma)$  es análogo al anterior.*

*Caso 7  $[(x, y, z) \in E_0]$  Entonces  $\rho \circ \Xi(x, y, z) = \rho(\mu x - \gamma, y/\mu - \gamma, \Delta(z)) = (\mu x - \gamma, y/\mu - \gamma)$ . Por otro lado  $T' \circ \rho(x, y, z) = T'(x, y) = (\mu x - \gamma, y/\mu - \gamma)$ . Los caso 8, 9 y 10, al igual que con el caso 6, cuando  $(x, y, z) \in E_i$  con  $i > 0$  son completamente análogos al 7.*

Para concluir que efectivamente el diagrama conmuta basta con ver que como  $\rho(\Lambda^+(\Xi)) = I$ , pues  $\Lambda^+(\Xi) \supset \Lambda^+(\Xi) \cap I^3 \cong I^2 \times C$ . Con la conmutatividad del diagrama 3 sólo falta exhibir un homeomorfismo  $\rho^* : \Lambda^+(\Xi) \rightarrow (I^2, T')$  que como con la Herradura se define de la siguiente manera:

$$\rho^*(x_1, x_2, x_3, \dots) := (\rho(x_1), \rho(x_2), \rho(x_3), \dots)$$

**Proposición .18.**  $\rho^*$  es un homeomorfismo

*Demostración.* Primero se mostrará su continuidad y luego su biyectividad. Dado  $k \in \mathbb{N}$  se define  $\varphi_k$  la  $k$ -ésima proyección de  $\prod_{i=1}^{\infty} \Lambda^+(\Xi)$  en  $\Lambda^+(\Xi)$  como  $\varphi_k(x_1, x_2, x_3, \dots) := x_k$  es decir  $\varphi_k = \pi_k|_{\Lambda^+(\Xi)}$ . Por II.6.iii se tiene que la función  $\rho^*$  es continua si y sólo si cada  $\pi_k \circ \rho^*$  lo es para toda  $k$ . Sea  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \Lambda^+(\Xi)$  entonces

$$(\pi_k \circ \rho^*)(x) = \pi_k(\rho(x_1), \rho(x_2), \rho(x_3), \dots) = \rho(x_k) = \rho \circ \varphi_k(x)$$

y como  $\rho$  y  $\varphi_k$  son funciones continuas entonces  $\pi_k \circ \rho^*$  lo es también. Ahora se verá la biyectividad. Para esto se mostrará primero que para todo  $y \in (I^2, T')$  hay un  $x \in (\Lambda^+(\Xi), \Xi)$  tal que es preimagen de  $y$ , esto es la suprayectividad, y luego se verá que dicha  $x$  es única, es decir, la inyectividad. Sea  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in (I^2, T')$ , hay dos casos.

**Caso 1:**  $y = ((0, 0), (0, 0), (0, 0), \dots)$ ; se vio que en  $N \setminus I^3$  hay un punto fijo  $\tilde{n} = (x^{\tilde{n}}, y^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}}) \in L$  por lo que  $\Xi(\tilde{n}) = \tilde{n}$ , claramente  $\tilde{n} \in \Lambda^+(\Xi)$  así que  $\tilde{n}^* := (\tilde{n}, \tilde{n}, \tilde{n}, \dots) \in (\Lambda^+(\Xi), \Xi)$  además, como  $x^{\tilde{n}} < 0$  y  $y^{\tilde{n}} < 0$  entonces  $\rho^*(\tilde{n}^*) = ((0, 0), (0, 0), (0, 0), \dots)$ . Ahora supongamos que  $z = (z_1, z_2, z_3, \dots) \in (\Lambda^+(\Xi), \Xi)$  es tal que  $\rho^*(z) = ((0, 0), (0, 0), (0, 0), \dots)$  entonces necesariamente para toda  $k$ , se tiene que  $z_k$  pertenece  $N \setminus I^3$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  entonces para cualquier  $m > 0$  se cumple

$$\|z_n - \tilde{n}\| = \|\Xi^m(z_{n+m} - \Xi^m(\tilde{n}))\| \leq C^m \|z_n - \tilde{n}\| \leq C^m$$

Donde  $0 < C < 1$  pues  $\Xi$  es una contracción en  $N \setminus I^3$  y la última desigualdad es por que la distancia máxima entre dos puntos de  $N \setminus I^3$  es 1, pero aún cuando no fuese así, si fuera  $p > 1$  (necesariamente  $p < \infty$  pues  $N$  es compacto) entonces solo habría que escoger  $m$  suficientemente grande. De esta desigualdad se concluye que  $z_k = \tilde{n}$  para toda  $k$ , es decir  $z = \tilde{n}^*$  lo cual muestra la unicidad.

**Caso 2:**  $y \neq ((0, 0), (0, 0), (0, 0), \dots)$ ; entonces existe  $r \geq 0$  tal que  $y_r \neq (0, 0)$ , de esto se sigue que  $y_n \in A := [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  para toda  $n \geq r + 1$ . La imagen inversa de  $y_n$  bajo  $\rho$  es un segmento de recta vertical contenido en  $(A \times I) \subset N$ . Sea  $n \geq r + 1$  fijo, sea  $k \geq 0$  y  $S_{n+k}$  el segmento de recta  $\rho^{-1}(y_{n+k})$ ; si  $x \in (\Lambda^+(\Xi), \Xi)$  es tal que  $\rho^*(x) = y$  entonces la  $n + k$ -ésima coordenada de  $x$  debe de estar en  $S_{n+k}$ . Ahora, como  $T'^k \circ \rho = \rho \circ \Xi^k$  entonces  $\Xi^k(\rho^{-1}(y_{n+k})) \subset \rho^{-1}(y_k)$ , de esto se sigue que la  $n$ -ésima coordenada de  $x$  debe de estar no solo en  $S_n$  sino en  $\Xi^k(S_{n+k})$ . Por otro lado, como la tercera componente de  $\Xi$ , es una contracción se tiene la siguiente sucesión de segmentos de rectas anidados:

$$S_n \supset \Xi(S_{n+1}) \supset \Xi^2(S_{n+2}) \supset \dots \supset \Xi^k(S_{n+k}) \supset \dots$$

Y como la longitud de los segmentos tiende a cero la intersección de todos es un punto

$$\{x_n\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Xi^k(S_{n+k})$$

Con esto se define  $x := (x_1, x_2, x_3, \dots)$  de la siguiente manera: si  $n \geq r + 1$  entonces  $x_n$  se define con la intersección anterior, si  $n < r + 1$  entonces se define por  $x_n := \Xi^{r+1-n}(x_{r+1})$ . Así definido se asegura que  $x$  sea un elemento de  $(\Lambda^+(\Xi), \Xi)$ , pues si  $n \geq r + 1$  entonces

$$\begin{aligned} \Xi(x_{n+1}) &= \Xi\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \Xi^k(S_{n+1+k})\right) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \Xi^k \circ \Xi(\rho^{-1}(y_{n+1+k})) \\ &\subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \Xi^k(\rho^{-1}(y_{n+k})) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Xi^k(S_{n+k}) \\ &= x_n \end{aligned}$$

Esto prueba la unicidad de la imagen de  $x$  y con esto se concluye la prueba.  $\square$

**Afirmación .5.** *La prueba para la función  $\zeta^*$  que se definió en el capítulo anterior es esencialmente la misma, de hecho esta se basó en la dada en [7].*

Con esto ya es inmediato ver que efectivamente  $\Lambda^+(\Xi)$  es un continuo indescomponible. Pues por .8  $\Lambda^+(\Xi) \cong (\Lambda^+(\Xi), \Xi)$  y por la proposición anterior  $(\Lambda^+(\Xi), \Xi) \cong (I^2, T')$  que es un continuo indescomponible como se mostró en IV.1. Y con la aplicación de II.11 a estos dos homeomorfismos se concluye que  $\Lambda^+(\Xi)$  es un continuo indescomponible.

Para concluir el análisis de este continuo se mostrará que es homeomorfo a  $K \times K$  con  $K$  el continuo de Knaster, es decir, el generado por la función Herradura. Para esto se definirá primero la función **producto de dos funciones**:

Definimos para  $f : X \rightarrow X$  y  $g : X \rightarrow X$ , el producto  $f \times g : X \times X \rightarrow X \times X$  como  $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ . Con esta definición son inmediatas el siguiente par de observaciones.

(a)  $\lim_{\leftarrow} (f \times g) = \{((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots) : f \times g(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n)\}$ , con la topología inducida por su contención en el producto  $\Pi_0^\infty(X \times X)$ .

(b)  $\lim_{\leftarrow} (f) \times \lim_{\leftarrow} (g) = \{(x_0, x_1, \dots) \times (y_0, y_1, \dots)\}$  tal que  $f(x_{n+1}) = x_n$  y  $g(y_{n+1}) = y_n$ , con la topología inducida por  $\Pi_0^\infty X \times \Pi_0^\infty X$ .

**Lema 3.**  $\lim_{\leftarrow}(f \times g)$  es homeomorfo a  $\lim_{\leftarrow}(f) \times \lim_{\leftarrow}(f)$

*Demostración.* Definamos  $\varphi : \lim_{\leftarrow}(f \times g) \rightarrow \lim_{\leftarrow}(f) \times \lim_{\leftarrow}(f)$ , como

$\varphi((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots) = (x_0, x_1, \dots) \times (y_0, y_1, \dots)$ . Esta función satisface:

1. Es biyectiva pues claramente tiene inverso  $\varphi^{-1}((x_0, x_1, \dots) \times (y_0, y_1, \dots)) = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots)$ .

2. Es bicontinua pues la topología heredada de los productos en (a) y (b) son iguales.  $\square$

La función que actúa en  $I^2$  es  $T' = t \times t$ . Entonces  $\lim_{\leftarrow}(T \times T) = K \times K$ , por lo que el atractor de la función Hojaldre es  $K \times K \subset \mathbb{R}^3$ . Un ejemplo muy simple pero parecido, pasa con el círculo  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , cuando se toma el producto que es el toro:  $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$  pero también hay un encaje a  $\mathbb{R}^3$ , lo análogo ocurre con  $K \times K$ .

### 3.3.2. Densidad de la variedad inestable de $e_0$

Al igual que con la Herradura, se mostrará la densidad de la variedad inestable del punto fijo hiperbólico de  $E_0$ , denotado por  $e_0 := (x_{E_0}, y_{E_0}, z_{E_0})$ , en el continuo  $\Lambda^+(\Xi)$ , es decir  $\overline{W^u(e_0)} = \Lambda^+(\Xi)$ . Se hará de forma completamente análoga a como se hizo con la Herradura. Comenzando con la definición de las funciones  $\Xi^* : (\Lambda^+(\Xi), \Xi) \rightarrow (\Lambda^+(\Xi), \Xi)$  y  $T'^* : (I^2, T') \rightarrow (I^2, T')$  como:

$$\begin{aligned}\Xi^*(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (\Xi(x_1), \Xi(x_2), \Xi(x_3), \dots) \\ T'^*(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (T'(x_1), T'(x_2), T'(x_3), \dots)\end{aligned}$$

Así definidas se cumple que  $\rho^*$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}(\Lambda^+(\Xi), \Xi) & \xrightarrow{\Xi^*} & (\Lambda^+(\Xi), \Xi) \\ \rho^* \downarrow & & \downarrow \rho^* \\ (I^2, T') & \xrightarrow{T'^*} & (I^2, T')\end{array} \quad (3.2)$$

**Afirmación .6.** *El diagrama 4 conmuta.*

Si  $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in (\Lambda^+(\Xi), \Xi)$  entonces

$$\begin{aligned}\rho^* \circ \Xi^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= \rho^*((\Xi(x_1), \Xi(x_2), H(x_3), \dots)) \\ &= (\rho(\Xi(x_1)), \rho(\Xi(x_2)), \rho(\Xi(x_3)), \dots)\end{aligned}$$

que por la conmutatividad del diagrama (3), esto último es igual a

$$\begin{aligned} (T'(\rho(x_1)), T'(\rho(x_2)), T'(\rho(x_3)), \dots) &= T'^*(\rho(x_1), \rho(x_2), \rho(x_3), \dots)) \\ &= T'^* \circ \rho^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que las proyecciones  $\pi_i : (\Lambda^+(\Xi), \Xi) \rightarrow \Lambda^+(\Xi)$  son homeomorfismos tales que  $\pi_i \circ \Xi^* = \Xi \circ \pi_i$ , por lo que el diagrama anterior se puede extender a:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^+(\Xi) & \xrightarrow{\Xi} & \Lambda^+(\Xi) & (3.3) \\ \pi_i^{-1} \downarrow & & \downarrow \pi_i^{-1} & \\ (\Lambda^+(\Xi), \Xi) & \xrightarrow{\Xi^*} & (\Lambda^+(\Xi), \Xi) & \\ \rho^* \downarrow & & \downarrow \rho^* & \\ (I^2, T') & \xrightarrow{T'^*} & (I^2, T') & \end{array}$$

Con la conmutatividad de este diagrama, la continuidad de las funciones  $\rho^*$  y  $\pi_i$ , y la proposición II.17 se llega a que, para probar la densidad de  $W^u(e_0)$  en  $\Lambda^+(\Xi)$  basta probar la densidad de  $W^u(\rho^*(\pi_1^{-1}(e_0)))$  en  $(I^2, T')$ . Lo cual también se hará mostrando la densidad de un subconjunto de  $W^u(\rho^*(\pi_1^{-1}(e_0)))$  en  $(I^2, T')$ . Para mayor comodidad se define  $d := \rho^*(\pi_1^{-1}(e_0))$ , nótese que  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots)$  y necesariamente  $d_1 = d_i \forall i \in \mathbb{N}$  pues  $d \in I^2$  es un punto fijo de  $T'$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_1 := (d - \varepsilon, d + \varepsilon)^2 \subset (\gamma, 1/\mu + \gamma)^2$ , como  $T'$  es expansiva en  $B_1$  se tiene que existe  $B_2 \subset B_1$  tal que  $T'(B_2) = B_1$ . Este paso se puede extender indefinidamente generando una sucesión de abiertos anidados  $(\gamma, 1/\mu + \gamma)^2 \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$  y como  $T'|_{B_i}$  es un homeomorfismo para toda  $i \in \mathbb{N}$  se puede construir la sucesión inversa  $\{B_i, T'|_{B_{i+1}}\}$ . Cuyo límite inverso  $B_\infty \subset (I^2, T')$ , por II.16, es homeomorfo a  $B_1$ .

**Proposición .19.**

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (T'^*)^n(B_\infty) \subset W^u(d)$$

*Demostración.* Para probar esto será necesario antes ver como es  $(T'^*)^{-1}$ . Si  $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in (I^2, T')$ , entonces, por como se definió  $T'^*$  se tiene que  $T'^*((x_1, x_2, x_3, \dots)) = ((T'(x_1), T'(x_2), T'(x_3), \dots)) = (T'(x_1), x_1, x_2, \dots)$ ; por lo tanto, la función inversa  $(T'^*)^{-1}$  está dada por:

$$(T'^*)^{-1}((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

es decir,  $(T'^*)^{-1}$  también resulta ser la función corrimiento unilateral pero sobre  $(I^2, T')$ . Notando que como  $B_1 \subset (\gamma, 1/\mu + \gamma)^2$  donde  $T'$  es expansiva

en un factor de  $\mu$  en cada dimensión, por lo tanto se tiene que  $|x - d| = \sqrt{2\mu}|T'^{-1}(x) - d|$  por lo que  $d^*((T'^*)^{-1}(x), d) = \frac{d^*(x, d)}{\sqrt{2\mu}}$ . Por otro lado, si  $x \in B_i$ , entonces  $(T'^*)^{-1}(x) \in B_{i+1}$  y como  $B_i \supset B_{i+n} \forall n \in \mathbb{N}$  entonces

$$d^*((T'^*)^{-n}(x), d) = (1/\sqrt{2\mu})^n d^*(x, d)$$

Por lo tanto, si  $x \in B_\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} d^*((T'^*)^{-n}(x), d) = 0$ , por lo que  $x \in W^u(d)$ , es decir  $B_\infty \subset W^u(d)$ . Es claro que  $T'^*(B_\infty) \subset W^u(d)$  por lo que en general  $\forall n \in \mathbb{N} (T'^*)^n(B_\infty) \subset W^u(d)$ , y por esto se tiene que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (T'^*)^n(B_\infty) \subset W^u(d)$$

□

Así sólo basta ver que esta unión infinita es densa en  $(I^2, T')$ , para concluir que  $W^u(e_0)$  es densa en  $\Lambda^+(\Xi)$ . Para esto será conveniente ver primero el siguiente lema.

**Lema 4.** *Para toda  $M \in \mathbb{N}$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\pi_M((T'^*)^N(B_\infty)) = I^2$$

*Demostración.* Primero, es claro que como  $T'(B_{i+1}) = B_i$  entonces

$$T'^*(B_\infty) = (T'(B_1), T'(B_2), T'(B_3), \dots)$$

y en general, para toda  $n \in \mathbb{N}$

$$(T'^*)^n(B_\infty) = (T'^n(B_1), T'^n(B_2), T'^n(B_3), \dots)$$

Así, si  $M \in \mathbb{N}$  entonces  $\pi_M(T'^*(B_\infty)) = \pi_M((T'(B_1), T'(B_2), T'(B_3), \dots)) = T'(B_M)$ . Por otro lado, como  $T'(B_{i+1}) = B_i$  entonces  $|T'(B_{i+1})| = |B_i|$  y por como se definió  $T'$  en  $(\gamma, 1/\mu + \gamma)^2 \supset B_1$  se tiene que  $|T'(B_M)| = (1/\mu^2)^{M-1}|B_1|$ , y también  $\forall i \in \mathbb{N} |T'^N(B_i)| = (\mu^2)^N |B_i|$ . Con lo que se llega a que

$$|T'^N(B_M)| = (\mu^2)^{N-1} \left( \frac{1}{\mu^{2(M-1)}} |B_1| \right)$$

Por lo tanto, basta con escoger un natural  $N \geq M - \left( \frac{\ln|B_1|}{\ln\mu^2} \right)$  para asegurar que  $|T'^N(B_M)| \geq 1$  □

De hecho, es evidente que para toda  $n \geq N$  pasa que  $\pi_M((T'^*)^n(B_\infty)) = I^2$ . Con esto será más inmediato ver la siguiente proposición.

**Proposición .20.**  $\cup_{n=0}^{\infty}(T'^*)^n(B_{\infty})$  es denso en  $(I^2, T')$

*Demostración.* Sea  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in (I^2, T')$  y  $\varepsilon > 0$ , se verá que existe un  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \cup_{n=0}^{\infty}(T'^*)^n(B_{\infty})$  tal que  $d^*(y, x) < \varepsilon$ . Sea  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$  por el lema 3 se sabe que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T'^N(B_M) = I^2$  por lo que existe  $y \in (T'^*)^N(B_{\infty})$  tal que  $y_M = x_M$  y como ambos están en  $(I^2, T')$  se cumple

$$y_{M-i} = T'^i(y_M) = T'^i(x_M) = x_{M-i}$$

para toda  $i < M$  en particular para  $i = M - 1$  por lo que  $y_1 = x_1$  por lo tanto

$$d^*(y, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y_i - x_i|}{2^i} = \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{|y_i - x_i|}{2^i} \leq \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

lo cual concluye la prueba □

Con esto se ha probado que  $\cup_{n=0}^{\infty}(T'^*)^n(B_{\infty}) \subset W^u(e_0)$  es denso en  $(I^2, T')$  y por la proposición II.18 y el diagrama 5 se concluye lo que se quería probar:  $W^u(e_0)$  es densa en  $\Lambda^+(\Xi)$ .

### 3.3.3. Estabilidad estructural del Hojaldre

También de forma completamente análoga a como se probó con la Herradura, para el caso del Hojaldre es necesario ver cuál es exactamente  $\Omega(\Xi)$  para ver que efectivamente cumpla las condiciones de transversalidad y de ser Axioma A, para así sólo aplicar el teorema II.4.

**Afirmación .7.**  $\Omega(\Xi)$  es un conjunto hiperbólico.

*Del hecho de que  $\Omega(\Xi) \subset E$  es un subconjunto cerrado de un compacto se sigue que es también compacto. Ya se vio que es invariante, por lo que bastará probar las propiedades i), ii) y iii) de la definición de conjunto hiperbólico. Se tiene que  $\Omega(\Xi) \subset \cup_{i=1}^4 E_i \cup \{\tilde{n}\}$  pues es claro que en esta unión todos los puntos cumplen las tres propiedades simultáneamente. Así que toda  $x$  en  $E \setminus (\cup_{i=1}^4 E_i \cup \{\tilde{n}\})$  con  $\tilde{n}$  el punto fijo en  $N \setminus I^3$ , entonces, a cada iteración de  $\Xi$  todos los puntos se aproximan asintóticamente a la unión de los planos paralelos a los planos  $x = 0$  y  $y = 0$  que pasan por el punto  $\tilde{n} \in N \setminus I^3$ , es decir, para cualquier  $\delta > 0$  existe un natural  $N$  tal que para toda  $n > N$  se cumple  $\Xi^n(x) \notin B_{\delta}(x)$ , es decir, a partir de alguna iteración su órbita nunca vuelve a estar en la vecindad de  $x$  por lo que es un punto errante*

De esto último se observa que de hecho,  $\Omega(\Xi) \subset \cap_{i \leq 0} \Xi^i(\cup_{i=1}^4 E_i \cup \{\tilde{n}\})$  y considerando la función inversa  $\Xi^{-1}$  también se tiene que

$$\Omega(\Xi) \subset \bigcap_{i \geq 0} \Xi^{-i} (\bigcup_{i=1}^4 E_i \cup \{\tilde{n}\})$$

es decir  $\Omega(\Xi) \subset \Lambda(\Xi)$ .

**Proposición .21.**  $\overline{Per(\Xi)} = \Omega(\Xi)$

*Demostración.* Se tiene que si  $x \in \Lambda(\Xi)$  entonces  $x$  es límite de alguna órbita hacia adelante o hacia atrás por lo que  $x \in \{\alpha(y), \omega(y)\}$  para alguna  $y \in E$ , es decir,  $x \in L(\Xi)$  y como  $L(\Xi) \subset \Omega(\Xi)$  se tiene que

$$L(\Xi) \subset \Omega(\Xi) \subset \Lambda(\Xi) \subset L(\Xi)$$

es decir, ambos conjuntos coinciden. Y como por la conjugación de  $\Xi|_{\Lambda(\Xi)} : \Lambda(\Xi) \rightarrow \Lambda(\Xi)$  con la función corrimiento  $\sigma : \Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4$  se tiene que  $\overline{Per(\Xi)} = \Lambda(\Xi)$  entonces  $\overline{Per(\Xi)} = \Omega(\Xi)$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

Estos dos últimos resultados prueban que, en efecto, la función  $\Xi$  es Axioma A. Así sólo falta ver que también cumple con la condición de transversalidad para poder concluir que es estructuralmente estable, se puede demostrar la siguiente.

**Proposición .22.**  $\Xi$  *satisface la condición de transversalidad. Idea de la demostración:* Sean  $x, y \in \Omega(\Xi)$ , como  $\Omega(\Xi) = \Lambda(\Xi) = \Lambda^+(\Xi) \cap \Lambda^-(\Xi)$  por lo tanto  $x \in \Lambda^+(\Xi) \simeq I^2 \times C$  por lo que si  $\varepsilon < \gamma/2$  (que es la mitad de la distancia mínima entre  $\Omega(\Xi)$  y el complemento de  $I^3$ ) se tiene que  $W_\varepsilon^u(x)$  es una sección de plano horizontal, que al extenderlo a  $W^u(x)$  se tienen infinitos secciones de plano horizontales conectados en el continuo que llamo "volován matemático", y este continuo interseca a  $I^3$  sólo en las secciones de plano horizontales. Análogamente  $y \in \Lambda^-(\Xi) \simeq C^2 \times I$  por lo tanto si  $\varepsilon < \gamma/2$  (que es la mitad de la distancia mínima entre  $\Omega(\Xi)$  y el complemento de  $I^3$ ) se tiene que  $W_\varepsilon^s(y)$  es un segmento de recta vertical, por lo que  $W^s(y)$  es homeomorfo a un continuo de Knaster vertical, que interseca a  $I^3$  en infinitas líneas verticales. De esto se concluye que  $W^u(x)$  y  $W^s(y)$  se intersecan transversalmente, lo que concluiría la prueba.



# Capítulo 4

## APÉNDICE A: PRELIMINARES

Un sistema dinámico discreto consta de un par: un conjunto  $X$  y una función  $f : X \rightarrow X$ . Y estudia lo que ocurre con las iteraciones  $f^n$  de la función, con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $f^0 := Id_X$ , la identidad en  $X$ ; o bien,  $n \in \mathbb{Z}$  si  $f$  es invertible. Si la función es invertible se genera una acción de grupos topológicos mediante  $f$ :

$$A : \mathbb{Z} \times X \ni (m, x) \mapsto f^m(x)$$

Así  $\mathbb{Z}$  (o  $\mathbb{N}$ ) representa el tiempo,  $X$  el objeto en cambio y  $f$  el cambio. Siguiendo con la analogía, el futuro, pasado y cada historia completa de cada punto de  $X$  serían equivalentes a los conjuntos semi órbita positiva, negativa y global (o simplemente *la órbita*) definidos para cada  $x$  en  $X$ , respectivamente como sigue en el mismo orden.

$$O_f^+(x) = \{y \in X | \exists m \in \mathbb{N} | f^m(x) = y\}$$

$$O_f^-(x) = \{y \in X | \exists m \in \mathbb{N} | f^{-m}(x) = y\}$$

$$O_f(x) = \{y \in X | \exists m \in \mathbb{Z} | f^m(x) = y\}$$

Un punto  $x_0 \in X$  se llama **punto fijo** bajo  $f$  si  $f(x_0) = x_0$ , inmediatamente se observa que si  $x_0$  es un punto fijo, entonces  $O_f(x_0) = \{x_0\}$ .

**Proposición .23.** *Sea  $A$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $f : A \rightarrow A$  continua. Si un subintervalo cerrado  $[a, b] \subset A$  es tal que:*

- i)  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .*

ii)  $[a, b] \subset f([a, b])$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .

*Demostración.* (i)  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces  $a \leq f(a)$  y  $f(b) \leq b$ .

Definamos una función auxiliar  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $h(x) = f(x) - x$ . Aplicando a  $h$  el teorema del valor intermedio, como en los extremos del intervalo  $h$  toma un valor negativo o nulo y el otro positivo o nulo, se concluye que existe un valor  $c \in [a, b]$  tal que  $h(c) = 0$ , lo cual implicaría  $f(c) = c$ , es decir,  $c \in [a, b]$  es un punto fijo.

(ii) Si  $[a, b] \subset f([a, b])$  entonces debe haber un par de elementos  $\alpha$  y  $\beta \in [a, b]$  tales que  $f(\alpha) = a$  y  $f(\beta) = b$ . De esto se observa que  $f(\alpha) \leq \alpha$  y  $\beta \leq f(\beta)$ . Usando de nuevo la misma función  $h$  y se llega a la conclusión correspondiente:  $\exists c \in [\alpha, \beta]$  tal que  $h(c) = 0$ , entonces  $f(c) = c$ , es decir,  $c$  es un punto fijo en  $[a, b]$ .  $\square$

Se dice que  $x_0 \in X$  es un **punto periódico** del sistema  $f : X \rightarrow X$ , si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x_0) = x_0$ , el conjunto de todos los puntos periódicos bajo  $f$  es denotado por  $Per(f)$ . Así, si  $x_0 \in Per(f)$  entonces se tiene que la órbita de  $x_0$  es finita y periódica. Si  $x_0 \in Per(f)$ , se dice que  $x_0$  tiene periodo  $k$ , si  $k$  es el mínimo natural tal que  $f^k(x_0) = x_0$ . Es inmediato ver que la órbita de  $x_0$  tiene exactamente  $k$  elementos y son justamente  $O_f(x_0) = \{f^j(x_0) | 0 \leq j < k\}$ .

## 4.1. Hiperbolicidad Lineal

Los contenidos de esta sección fueron consultados en la fuente [4]. Para funciones en un espacio topológico un punto fijo  $x_0$  es **atractor** (o estable) si existe una vecindad abierta  $U \subset X$ , tal que, para toda  $y \in U$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x_0$ . Análogamente, un punto  $x \in X$  **repulsor** (o inestable) si para toda vecindad abierta  $U \subset X$  y para toda  $y \in U \setminus \{x\}$  existe un natural  $n$ , tal que  $f^n(y) \notin U$ . Es inmediato ver que si  $f$  es biyectiva entonces  $x$  es un punto fijo atractor de  $f$ , si y sólo si  $x$  es un punto fijo repulsor de  $f^{-1}$ . Y el resto de puntos fijos son llamados **indiferentes**.

**Proposición .24.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  con  $a \in \mathbb{R}$  como punto fijo. Entonces se cumple que:*

1. Si  $|f'(a)| < 1$  entonces  $a$  es un punto fijo atractor.
2. Si  $|f'(a)| > 1$  entonces  $a$  es un punto fijo repulsor.

*Demostración.* Sea  $f$  como en la hipótesis, suponiendo que  $|f'(a)| < 1$ , dada la continuidad de  $f'$  se tiene que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f'(y)| < 1 \forall y \in A := (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Tomando cualquier  $y \in A$ , bastará con probar que la sucesión

dada por su órbita tiene a  $a$  como límite. Así si  $y_1 = f(y)$  su distancia al punto fijo  $a$ ,  $|y_1 - a| = |f(y) - f(a)|$  y aplicando el Teorema del Valor Medio se llega a que existe un  $z$  entre  $y$  y  $a$  tal que  $|f(y) - f(a)| = |f'(z)||y - a|$  y como  $z$  está entre  $y$  y  $a$  está también en  $A$  por lo que  $m := |f'(z)| < 1$ . por lo tanto, la sucesión  $\{|y_n - a|\}$  está dada por la sucesión  $\{m^n|y - a|\}$ , es decir, converge a cero, lo cual prueba la primera parte.

Para la segunda parte, el caso  $|f'(a)| > 1$ , la prueba es completamente análoga, en este caso  $m > 1$  por lo que  $m^n$  diverge.  $\square$

Sea  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}$  un punto fijo de  $f : M \rightarrow M$ , se dice que es **hiperbólico** si  $|f'(x_0)| \neq 1$ , y si la igualdad se dá, entonces lo llamaremos indiferente. La definición se extiende a puntos periódicos. Si  $x_0$  es un punto periódico de periodo  $k > 1$ , entonces es un punto fijo de  $f^k$ , así, si  $|f^k(x_0)| \neq 1$  entonces se dice que  $x_0$  es un punto periódico hiperbólico. Una transformación lineal invertible  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una **transformación hiperbólica** si todos sus valores propios tienen módulo diferente de 1.

**Proposición .25.** *Si  $w$  es un vector propio de  $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ , entonces la recta  $l_w := \{\alpha w : \alpha \in \mathbb{R}\}$  es invariante bajo  $A$ .*

*Demostración.* Sea  $w$  un vector propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda \neq 0$  entonces para cualquier  $v \in l_w$  se tiene que  $A(v) = A(\alpha w) = \alpha A(w) = \alpha \lambda w \in l_w$   $\square$

**Observación .2.** *Si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineal e hiperbólica, entonces existen subespacios  $E^s, E^u \subset \mathbb{R}^n$  (llamados subespacio estable e inestable respectivamente) tales que:*

$$i) \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$$

ii)  $E^s$  y  $E^u$  son invariantes bajo  $A$ .

iii) Existen  $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$  tales que:

$$\begin{aligned} \|A^n v\| &\leq \lambda_s^n \|v\| \quad \forall v \in E^s \text{ y } \forall n \geq 0 \\ \|A^{-n} v\| &\leq \lambda_u^n \|v\| \quad \forall v \in E^u \text{ y } \forall n \leq 0 \end{aligned}$$

iv) Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  se definen  $E_x^s := x + E^s$  y  $E_x^u := x + E^u$ . Y si  $y \in E_x^s$ , entonces  $\|A^n y - A^n x\| \leq \lambda_s^n \|y - x\| \quad \forall y \in E^s \text{ y } \forall n \geq 0$  y análogamente para  $n \leq 0$  en  $E_x^u$ .

Un caso más general es cuando el valor absoluto de los valores propios de una transformación lineal hiperbólica no son todos mayores o menores que uno, entonces se dice que el origen es un punto **silla hiperbólica**. Estos casos

en  $\mathbb{R}^2$ , todos los puntos que no estén en los subespacios estable e inestable presentarán una órbita contenida en la gráfica de una hipérbola asintótica a dichos subespacios.

## 4.2. Ejemplos introductorios

### Función tienda

En esta sección se verán las definiciones y algunos resultados sencillos que se mencionan en la tesis. Este contenido fue consultado de la fuente [2].

Se define a la función tienda  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por la siguiente regla de correspondencia por partes:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

Trivialmente se tiene que  $T$  es una función continua en todo  $\mathbb{R}$  y es casi igual de inmediato notar que:

- Si  $x \notin [0, 1]$  entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} T^n(x) = -\infty$
- Si  $x \in [0, 1]$  entonces  $T(x) \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}$

Por esto lo interesante es la restricción  $T|_{[0,1]}$ . Por como se define  $T$  la proposición .23 asegura que hay al menos un punto fijo en  $[0, 1/2]$  y otro en  $[1/2, 1]$ , esos puntos fijos son únicamente el 0 y el  $2/3$ . Y por el corolario .24 se tiene que ambos puntos fijos son repulsores.

Esta función tiene al menos un punto de periodo 3, como se puede ver en la imagen 4.1, con esto y el teorema de Sharkovskii [10] se infiere que la función tienda tiene puntos de todos los periodos. Más aún, dados dos naturales  $k$  y  $n$  con  $k < 2^n$ , se cumple que  $T^n([k/2^n, (k+1)/2^n]) = I = [0, 1]$ , por lo que de la proposición .23 se concluye que existen  $2^n$  puntos fijos bajo  $T^n$ , y de esto que sus periodos bajo  $T$  son todos divisores de  $n$ .

### Función logística

Definida por  $L(x) = 4x(1 - x)$ , es muy similar a la función tienda, pues los puntos que están fuera de  $I$  tienen órbita divergente mientras que en  $I$  sus órbitas permanecen en  $I$ . Además como  $L([0, 1/2]) = I = L([1/2, 1])$ , entonces también tiene un punto fijo en cada mitad (el 0 y el  $3/4$ ) e igualmente

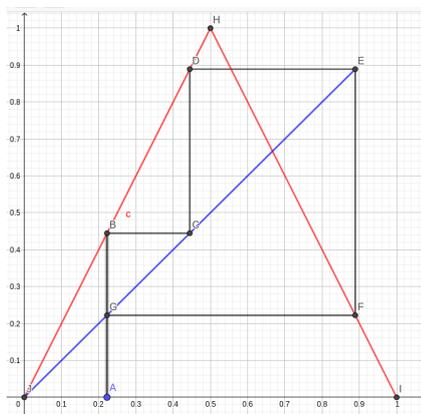


Figura 4.1: Gráfica de  $T$  en  $[0,1]$  con la órbita del punto  $A = 2/9$

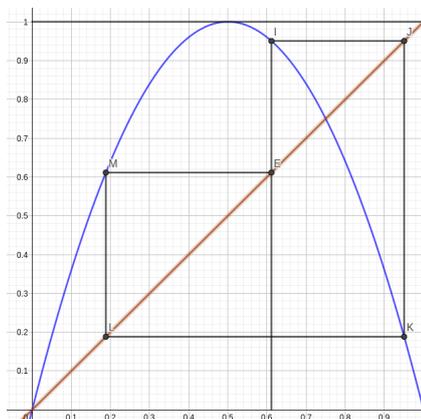


Figura 4.2: Gráfica de  $L$  en  $[0,1]$  con la órbita del punto  $E = 0.61$

son repulsores. De lo mismo sigue un análisis idéntico al del párrafo anterior pero con los mismos resultados para  $L$  (ver imagen 4.2). Pero para ésta función hallar los puntos de periodo  $n > 1$  ya no es un cálculo trivial como con  $T$ .

## Función Corrimiento

El espacio de sucesiones bilaterales de 2 símbolos se define como  $\Sigma_2 = \{(\dots, a_{-2}, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \{0, 1\}\}$ , donde  $\bullet$  indica la entrada correspondiente al cero, con la topología definida por la siguiente métrica:

Para todo par de puntos  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  en  $\Sigma_2$  la distancia entre  $x$  y

y está dada por:

$$d(x, y) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}$$

En  $\Sigma_2$  dos puntos pueden distar a lo más 3, y son los casos en que todos sus entradas son distintas. De esto se sigue la compacidad de  $\Sigma_2$ . Mas aún, es homeomorfo al espacio de Cantor  $C$  (ver [10]).

La función **Corrimiento** o **Shift**  $\sigma(a) : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  se define entrada a entrada por:

$$\sigma(a)_n = a_{n+1} \\ \text{así } \sigma(a) = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, \bullet a_1, a_2, \dots)$$

**Afirmación .8.**  $\sigma$  es un homeomorfismo.

Para ver ésto habrá que notar que en efecto  $\sigma$  es una biyección, puesto que la función  $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  dada por  $\psi(a)_n = a_{n-1}$  así

$$\psi(a) = (\dots, a_{-2}, \bullet a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

evidentemente es su función inversa (por lo que mejor la denotaremos por  $\sigma^{-1}$ ). Además su continuidad se sigue de que  $d(x, y) \leq 1/2^n \Leftrightarrow x_i = y_i \forall |i| \leq n + 1$ . Pues para que  $d(\sigma(x), \sigma(y)) < \epsilon$  basta con que  $x_i = y_i \forall |i| \leq n + 2$  para alguna  $n$  tal que  $1/2^n < \epsilon$ , es decir,  $\sigma(B(x, 1/2^{n+2})) \subset B(\sigma(x), \epsilon)$ . Análogamente se ve la continuidad de  $\sigma^{-1}$ .  $\sigma^+$  por otro lado no es una biyección ya que dos sucesiones que difieren sólo en la primera entrada,  $\sigma^+$  les asignaría la misma sucesión, pero sí es continua y la prueba es análoga.

**Observación .3.**

1.  $\sigma$  tiene 2 únicos puntos fijos  $s_0 = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  con  $a_i = 0$  para toda  $i$ , y  $s_1 = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  con  $a_i = 1$  para toda  $i$ .
2.  $\sigma$  tiene  $N^k$  puntos periódicos de periodos a lo menos  $d$ , con  $d$  divisor de  $k$ , en  $\Sigma_N$  que es el espacio de sucesiones bilaterales de  $N$  símbolos definido, análogamente a  $\Sigma_2$ , como  $\Sigma_N = \{(\dots, a_{-2}, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \{0, 1, \dots, N-1, N\}\}$ , donde  $\bullet$  indica la entrada correspondiente al cero, con la topología definida por la métrica análoga a la de  $\Sigma_2$ . Para ver esto basta tomar

$$a = (\dots, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \bullet a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \dots)$$

barriendo todas las permutaciones posibles de  $\{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$  tomando  $a_i \in \{0, 1\}$  con repeticiones; es así como hay  $2^k$  elementos de  $\Sigma_2$  distintos con ésta forma y es inmediato notar que cada  $a \in \Sigma_2$  de esa naturaleza es un punto fijo de  $\sigma^k$ , por lo que el periodo de  $a$  debe dividir a  $k$ .

3. De hecho también se prueba que  $\overline{\text{Per}(\sigma)} = \Sigma_2$ , pues para cada  $a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, \dots)$  y  $\varepsilon > 0$ , escogiendo un natural  $n$  tal que

$$\sum_{|i|>n} \frac{1}{2^{|i|}} < \varepsilon$$

Entonces el punto  $a_\varepsilon = (\dots, a_{-n}, a_{-(n-1)}, \dots, a_{-1}, \bullet a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$  es un punto periódico que dista menos que  $\varepsilon$  de  $a$ .

### 4.3. Tópicos de topología dinámica

- Un conjunto **perfecto** es un subconjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación (es decir, el conjunto carece de puntos aislados).

- Un subconjunto de un espacio topológico es **conexo** si no puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos. Si un conjunto no es conexo, se dice que es **disconexo**.

- Una cubierta abierta de un conjunto  $C$  es una familia de conjuntos abiertos  $\{C_i\}_{i \in I}$  tales que  $C \subset \bigcup_{i \in I} C_i$ .

- Un subconjunto es **compacto** si, para cualquier cubierta abierta de  $C$  existe una subcubierta finita del mismo.

- Un conjunto  $A \subset X$  es **denso** en el espacio topológico  $(X, \tau)$  si  $\forall V \in \tau$  tal que  $A \cap V = \emptyset$ , entonces  $V = \emptyset$ . Ahora un par de ejemplos ilustrativos de este concepto.

- Dada una familia de espacios topológicos  $\{X_i, \tau_i\}$ , se define la **topología producto** sobre el producto cartesiano  $\prod X_i$ , como aquella generada por la subbase formada por los conjuntos de la forma  $p_i^{-1}(U_i)$  donde cada  $U_i \in \tau_i$  y  $p_j : \prod X_i \rightarrow X_j$  es la función proyección sobre el espacio factor correspondiente.

- Para cada  $x \in X$  se define su  **$\omega$ -límite**, como

$$\omega(x) := \{y \in X \mid y \text{ es punto de acumulación de } O_f^+(x)\}$$

- Para los casos en que  $f$  sea biyectiva se define también al conjunto  **$\alpha$ -límite**, como

$$\alpha(x) := \{y \in X \mid y \text{ es punto de acumulación de } O_f^-(x)\}$$

Se sigue inmediatamente de la definición que si  $q \in O_f(p)$ , entonces  $\omega(q) = \omega(p)$  y  $\alpha(q) = \alpha(p)$ . Además, si  $p$  es periódico entonces  $\omega(p) = \alpha(p) = O_f(p)$ .

- El **conjunto límite de un punto**  $x \in X$  bajo  $f$ , se define como  $L(x) := \alpha(x) \cup \omega(x)$ .

- Los puntos **no-errantes** son aquellos que cumplen que para cada vecindad abierta  $U$ , existe un natural  $n$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Es un conjunto cerrado en  $X$  y es denotado por  $\Omega(f)$ . Claramente los puntos fijos y periódicos son puntos no errantes, así también para cada  $x \in X$ ,  $\omega(x) \cup \alpha(x) \subset \Omega(f)$ .

- Sea  $\Lambda \subset X$ , si se cumple que  $f(\Lambda) \subset \Lambda$  entonces es un **subconjunto invariante** de  $f$ . En estos conjuntos, se puede restringir el estudio de la dinámica; por ejemplo, en órbitas periódicas  $f|_\Lambda$  actúa como una permutación. También los conjuntos  $\omega$ -límite son subconjuntos invariantes. Más aún:

**Proposición .26.** *Si  $f : X \rightarrow X$  una función continua, entonces  $\Omega(f)$  es invariante.*

*Demostración.* Sea  $x \in \Omega(f)$ ,  $\Omega(f) = \{y \in X \mid \text{para toda } U \subset X \text{ vecindad abierta de } y, \text{ existe un entero } k \text{ tal que } f^k(U) \cap U \neq \emptyset\}$ . Sea  $V \subset X$  una vecindad abierta de  $f(x)$ , por la continuidad de  $f$  se tiene que existe  $U \subset X$  vecindad abierta de  $x$  tal que  $f(U) \subset V$  entonces se tiene que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$  por lo tanto

$$\begin{aligned} \emptyset \neq f(f^k(U) \cap U) &\subset f^{k+1}(U) \cap f(U) \\ &= f^k(f(U)) \cap f(U) \subset f^k(V) \cap V \end{aligned}$$

por lo tanto  $f^k(V) \cap V \neq \emptyset$ , es decir  $f(x) \in \Omega(f)$  lo que concluye la prueba.  $\square$

- Un conjunto invariante  $\Lambda \subseteq X$  es un **atractor** si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $\Lambda \subset U$  de manera que para todo punto  $p \in U$ ,  $\omega(p) = \Lambda$ ; es decir, todos los puntos en dicha vecindad de  $\Lambda$  son atraídos hacia a  $\Lambda$ . Cuando  $\Lambda$  consta únicamente de un punto se trata de la generalización de la definición de punto fijo atractor. Cuando  $\Lambda$  consta de un número finito de puntos, entonces se trata de una unión de órbitas de puntos periódicos atractores.

• Se definen las **contracciones** como transformaciones continuas  $f : X \rightarrow X$ , con  $X$  un espacio métrico completo, tales que existe una constante  $0 \leq s < 1$  (llamada factor de contracción de  $f$ ) que cumple que  $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$  para todo par  $x, y \in X$ .

**Teorema .4. (Teorema del punto fijo para contracciones)** Sea  $f : X \rightarrow X$  una contracción en  $X$  un espacio métrico completo, entonces  $f$  posee exactamente un único punto fijo  $x_0 \in X$ , más aún, para toda  $x \in X$  la sucesión  $\{f^n(x) | n \geq 0\}$  converge a  $x_0$ .

*Demostración.* Para esto se usará un sencillo resultado previo:

**Lema** Sea  $0 \leq s < 1$  la constante de contracción de  $f$ . Para toda pareja de puntos  $x, y \in X$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq s^n d(x, y)$$

La prueba es sencilla por lo que se omite. Con este lema ahora es evidente que para toda  $x \in X$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq s^n d(x, f(x))$$

Con este último resultado y la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} d(f^n(x), x) &\leq \sum_{i=1}^n d(f^i(x), f^{i-1}(x)) \\ &\leq d(f(x), x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} s^i = d(f(x), x) \frac{1 - s^n}{1 - s} \\ &\leq d(f(x), x) \frac{1}{1 - s} \end{aligned}$$

Con esto se probará que la sucesión  $\{f^n(x) | n \geq 0\}$  es de Cauchy. Sean  $m < n < n_0 \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &= d(f^m(f^{n-m}(x)), f^m(x)) \\ &\leq s^m (d(f^{n-m}(x), x)) \\ &\leq s^m \frac{1}{1 - s} d(x, f(x)) < s^{n_0} \frac{1}{1 - s} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

Esto prueba que la sucesión es de Cauchy y como el espacio es completo, contiene al límite de la sucesión, llamémosle  $x_0$ , por lo que al aplicarle  $f$

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right)$$

Y por la continuidad de  $f$  se tiene que

$$\begin{aligned} f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

□

Al aplicar este resultado a las funciones inversas de funciones biyectivas se tiene que también vale para expansiones. Ejemplos sencillos de esto son cualquier transformación lineal hiperbólica  $A$ , que restringida a sus subespacios  $E^s$  o  $E^u$  son contracciones y expansiones respectivamente.

La predicción analítica de órbitas puede resultar prácticamente imposible, como el caso de los llamados "sistemas caóticos". El caos es, a grandes rasgos, la complejidad de la supuesta causalidad en la relación entre fenómenos. En la teoría de sistemas dinámicos se habla de comportamiento caótico para referirse a un comportamiento determinista aperiódico muy sensible a las condiciones iniciales. Existen más de una definición formal de caos; aquí trabajaremos con la propuesta por el matemático Robert L. Devaney, ya que resulta adecuado para nuestro propósito. Esta definición consta de dos definiciones previas:

- Sea  $X$  un espacio métrico, se dice que un mapeo  $f : X \rightarrow X$  es **topológicamente transitivo** si para cualquier par de abiertos no vacíos  $U, V \subset X$ , existe  $k$  natural tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

- **Sensibilidad a las condiciones iniciales.** Una función la presenta cuando existe  $\delta > 0$  tal que, para toda  $x \in X$  y toda vecindad  $U$  de  $x$ , existe una  $y \in U$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que,  $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ .

- Sea  $X$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  continua. Se dice que  $f$  es **caótica** en  $X$  si:

*i)*  $f$  es sensible a las condiciones iniciales

*ii)*  $f$  es topológicamente transitiva.

*iii)* Sus puntos periódicos son densos en  $X$ .

**Proposición .27.** *En los casos en que el espacio  $X$  es infinito, la lista de propiedades se reduce a dos, pues la sensibilidad a condiciones iniciales resulta implicada de las otras dos propiedades; este es un resultado que puede consultarse en [11].*

• Sean  $N$  y  $M$  dos espacios topológicos. Se dice que  $f : M \rightarrow M$  es **topológicamente conjugada** a  $g : N \rightarrow N$  si existe un homeomorfismo  $h : M \rightarrow N$  tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$

La conjugación topológica establece una relación de equivalencia entre dinámicas. Así también se observa que se cumple que si  $f : M \rightarrow M$  y  $g : N \rightarrow N$  son dos sistemas conjugados por  $h$ , entonces

- $h \circ f^k = g^k \circ h \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $h(O_f^+(x)) = O_g^+(h(x))$  y  $h(O_f^-(x)) = O_g^-(h(x))$
- $h(\omega(x)) = \omega(h(x))$  y  $h(\alpha(x)) = \alpha(h(x))$

De esto se sigue que si el sistema dinámico  $(f, A)$  es conjugado topológico de  $(g, B)$  y los puntos periódicos del primero son densos en  $A$ , entonces  $\overline{Per(g)} = B$ , es decir, ocurre lo mismo en el otro. Además, es fácil ver que si  $L$  y  $S$  son hiperbólicas lineales y sus subespacios estable e inestable tienen respectivamente la misma dimensión, entonces también son conjugadas topológicas.

**Proposición .28.** *Sea la transformación  $f : A \rightarrow A$  topológicamente conjugada a la transformación  $g : B \rightarrow B$ , ambas funciones continuas en los espacios métricos  $A$  y  $B$  respectivamente, entonces se cumplen las siguientes implicaciones:*

- i) *Si  $f$  es transitiva en  $A$ , entonces  $g$  es transitiva en  $B$ .*
- ii) *Si el conjunto de puntos periódicos de  $f$ ,  $Per(f) \subset A$  es denso en  $A$ , entonces el conjunto de puntos periódicos de  $g$ ,  $Q \subset B$  lo es en  $B$ .*

*Demostración.* (i) Sean  $U$  y  $V$  dos subconjuntos abiertos en  $B$  y supongamos que  $g$  es conjugada de  $f$  mediante  $h : A \rightarrow B$ . Entonces  $h^{-1}(U)$  y  $h^{-1}(V)$  son dos subconjuntos abiertos en  $A$ . Dado que  $f$  es transitiva, existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Y dado que  $f^k \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^k$ , entonces  $h^{-1}(g^k(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$ , que es lo mismo que  $h^{-1}(g^k(U) \cap V) \neq \emptyset$ , entonces  $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$ . Es decir,  $g$  es transitiva.

(ii) Sea  $U$  cualquier conjunto abierto no vacío de  $B$ . Entonces,  $h^{-1}(U)$  es un subconjunto abierto de  $A$  y por la densidad de los puntos periódicos debe contener un punto  $x_0 \in A$   $k$ -periódico para algún  $k$ , es decir,  $x_0 = f^k(x_0)$ .

De ahí se sigue que  $h(x_0) = h(f^k(x_0)) = g^k(h(x_0))$  por tanto  $h(x_0)$  es un punto  $k$ -periódico de  $g$ . Además,  $h(x_0) \in h(h^{-1}(U)) = U$  por consiguiente, el conjunto  $Per(g)$  es denso en  $B$ .  $\square$

# Bibliografía

- [1] Barge, M. (1986). Horseshoe maps and inverse limits. *Pacific journal of mathematics*, 121(1):29–39.
- [2] Brin, M. and Stuck, G. (2002). *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press.
- [3] Devaney, R. and Nitecki, Z. (1979). Shift automorphisms in the hénon mapping. *Communications in Mathematical Physics*, 67(2):137–146.
- [4] Katok, A. and Hasselblatt, B. (1995). *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge university press.
- [5] Kuratowski, K. (1968). Topology, vol. 2 academic press and pwn. *New York, London and Warszawa*.
- [6] Lajoie, G. (2006). The hartman-grobman theorem and the equivalence of linear systems. *CiteSeerX (18 April 2006)*.
- [7] Magaña, R. M. V. (2011). Aspectos dinámicos y topológicos de la herradura de smale. *Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático*, 28(1):1.
- [8] Nadler, S. (1992). *Continuum theory: an introduction*. CRC Press.
- [9] Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817.
- [10] Straffin, P. D. (1978). Periodic points of continuous functions. *Mathematics Magazine*, 51(2):99–105.
- [11] Willard, S. (2004). *General topology*. Courier Corporation.